Вища математика

ЗБІРНИК ЗАДАЧ

частина 1

- ЛІНІЙНА І ВЕКТОРНА АЛГЕБРА
- АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
- ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
- ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Вища математика

ЗБІРНИК ЗАДАЧ

частина **1**

У двох частинах

За загальною редакцією доктора технічних наук, професора П. П. Овчинникова

2-ге видання, стереотипне

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих технічних навчальних закладів

- ЛІНІЙНА І ВЕКТОРНА АЛГЕБРА
- АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
- ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
- ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Київ
"Техніка"
2004

ББК 2211.я73
В93
УДК 51(076)

Гриф надано Міністерством освіти і науки України
... листом № 14/18.2–1907 від 21 грудня 2001 р.

Автори: *Х. І. Гаврильченко, С. П. Полушкін, П. С. Кропив'янський, П. П. Овчинников, Г. І. Федорова, Н. Д. Орлова, О. Ф. Бурденко, Т. І. Клімова, Т. І. Єрофєєва, Т. М. Сапронова, Т. М. Івахненко*

Рецензент д-р фіз.-мат. наук, проф. *Г. М. Губреєв*

Вища математика: Зб. задач: У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна
В93 алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення: Навч. посібник для студ. вищ. техн. навч. закл. / Х. І. Гаврильченко, С. П. Полушкін, П. С. Кропив'янський та ін.; За заг. ред. д-ра техн. наук, проф. П. П. Овчинникова. – 2-ге вид., стереотип. – К.: Техніка, 2004. – 279 с.: іл.

ISBN 966-575-112-3 (повне видання)
ISBN 966-575-117-4 (ч. 1)

Вміщено задачі і вправи з вищої математики для самостійної роботи студентів, наведено приклади розв'язання типових задач, а до решти дано відповіді.

У збірнику матеріал подано відповідно до 1-ї частини підручника "Вища математика", виданого у 2003 р. за заг. ред. П. П. Овчинникова. Посилання на це видання надається у квадратних дужках.

ББК 22 11.я73

ISBN 966-575-112-3 (повне видання)
ISBN 966-575-117-4 (ч. 1)

Глава 1
ЛІНІЙНА І ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

§ 1. ЧИСЛА І ПРОСТОРИ*

Приклад. Знайти циліндричні координати точки за її прямокутними координатами: $A(3,\ 4,\ 1)$.

Розв'язання. Застосовуючи формули (1.3) і (1.4) [ч. 1, с. 9], (1.5) [ч. 1, с. 11], одержимо

$$\rho=\sqrt{9+16}\ ,\ \rho=5\ ,\ \varphi=\arccos\frac{3}{5},\ z=1\,.$$

Відповідь: $\rho=5$; $\varphi=\arccos\frac{3}{5}$; $z=1$.

1. Побудувати точки $A(4)$, $B(-2)$, $C\left(\frac{4}{5}\right)$, $D\left(-\frac{3}{4}\right)$.

2. Побудувати точки, координати яких задовольняють рівняння:
1) $|\ x\ |=3$; 2) $|\ x-1\ |=2$; 3) $|\ 2-x\ |=4$.

3. Знайти довжину відрізка AB, заданого точками:
1) $A(2)$ і $B(7)$; 2) $A(-3)$ і $B(-10)$.

4. У косокутній системі координат $x_1Ox_2\left(\varphi=\frac{\pi}{3}\right)$ побудувати точки $P_1(2,\ 3)$, $P_2(-1,\ 4)$, $P_3(0,\ -2)$.

5. Побудувати точки, задані полярними координатами $A\left(3,\ \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(4,\ \frac{5\pi}{6}\right)$.

6. Знайти прямокутні координати точок $A\left(2\sqrt{2},\ \frac{3\pi}{4}\right)$ і $B\left(3,\ \frac{\pi}{6}\right)$, заданих полярними координатами, якщо полюс збігається з початком координат, а полярна вісь напрямлена по осі абсцис.

---
*Див. Овчинников П. П. та ін. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1, гл. 1, підрозд. 1.1–1.9.

7. Знайти циліндричні координати точок за їх прямокутними координатами $A(2,\ -2,\ 5)$, $B(-6,\ 0,\ 8)$.

8. Знайти прямокутні координати точки, яка лежить на кулі радіуса 1, знаючи широту точки $\theta = 45^\circ$ і довготу $\varphi = 330^\circ$.

9. У косокутній системі, кут між осями Ox і Oy якої дорівнює 60°, задана точка $A(4,\ 6)$. Знайти координати цієї точки в прямокутній системі, якщо початок координат і вісь Ox в обох системах збігаються.

§ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА СКІНЧЕННОВИМІРНИХ ПРОСТОРІВ

2.1. Векторна алгебра скінченновимірних просторів*

Приклади. **1.** Дано координати трьох послідовних вершин паралелограма $A(1,\ -2,\ 3)$, $B(3,\ 2,\ 1)$ і $C(6,\ 4,\ 4)$. Знайти координати його четвертої вершини D.

Розв'язання. Координати точки D позначимо $x,\ y,\ z$ і розглянемо вектори $\overrightarrow{AB} = (2,\ 4,\ -2)$ і $\overrightarrow{DC} = (6-x,\ 4-y,\ 4-z)$. Оскільки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, то маємо $6-x=2$, $4-y=4$, $4-z=-2$, звідки знаходимо $x=4$, $y=0$, $z=6$.

Відповідь: $x=4$; $y=0$; $z=6$.

2. Довжина вектора $\vec{a}$ дорівнює 10. Знайти компоненти вектора $\vec{a}$, якщо з віссю Ox він утворює кут $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, з віссю Oy – кут $\beta = \dfrac{\pi}{3}$, а з віссю Oz – тупий кут γ.

Розв'язання. Оскільки

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

то

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cos^2\gamma = 1; \quad \cos^2\gamma = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}; \quad \cos\gamma = \pm\frac{1}{2}.$$

За умовою кут γ тупий, тому $\cos\gamma = -\dfrac{1}{2}$. Компоненти вектора визначаються за формулами

$$a_x = |\vec{a}|\cos\alpha; \quad a_y = |\vec{a}|\cos\beta; \quad a_z = |\vec{a}|\cos\gamma.$$

Тому

$$a_x = 10\frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}; \quad a_y = 10\frac{1}{2} = 5; \quad a_z = 10\left(-\frac{1}{2}\right) = -5.$$

Відповідь: $a_x = 5\sqrt{2}$; $a_y = 5$; $a_z = -5$.

---

*Див. ч. 1, підрозд. 2.1–2.6.

3. Чи може вектор утворювати з координатними осями кути:

1) $\alpha = 150^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 60^\circ$; 2) $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$?

Розв'язання. Перевіримо, чи вірна для цих кутів рівність $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

1) Оскільки

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \cos^2 150^\circ + \cos^2 90^\circ + \cos^2 60^\circ =$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$

то вектор може утворювати вказані кути з координатними осями.

2) У даному випадку

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4} \neq 1,$$

тому вектор не може утворювати вказані кути з координатними осями.

4. Чи є вектор $\vec{d} = (0,\ 7,\ 23)$ лінійною комбінацією векторів $\vec{a} = (5,\ 2,\ 1)$, $\vec{b} = (-1,\ 4,\ 2)$, $\vec{c} = (-1,\ -1,\ 6)$? Знайти коефіцієнти лінійної комбінації.

Розв'язання. Вектор $\vec{d}$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тому що будь-які чотири ненульові вектори в тривимірному просторі лінійно залежні:

$$\vec{d} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c}, \tag{2.1}$$

де λ_1, λ_2, λ_3 – коефіцієнти лінійної комбінації. Знайдемо λ_1, λ_2, λ_3. У координатній формі (2.1) перепишемо так:

$$\begin{cases} 5\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 = 7, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 6\lambda_3 = 23. \end{cases} \tag{2.2}$$

Розв'яжемо (2.2) методом виключення невідомих:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 6\lambda_3 = 23, \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 = 7, \\ 5\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 6\lambda_3 = 23, \\ -13\lambda_3 = -39, \\ -11\lambda_2 - 31\lambda_3 = -115, \end{cases}$$

звідки

$$\lambda_3 = 3,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_1 = 1.$$

Відповідь: $\lambda_3 = 3,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_1 = 1$.

10. Знайти точку B, яка є кінцем вектора $\vec{a}=(3,\ -4,\ 2)$, якщо його початок збігається з точкою $A(2,\ -1,\ 1)$.

11. Знайти початок C вектора $\overline{CD}=(4,\ 6,\ 5)$, якщо $D(-2,\ 0,\ 3)$.

12. Чи може вектор утворювати з координатними осями такі кути:

1) $\alpha=45^\circ$, $\beta=60^\circ$, $\gamma=120^\circ$;

2) $\alpha=45^\circ$, $\beta=135^\circ$, $\gamma=60^\circ$;

3) $\alpha=90^\circ$, $\beta=150^\circ$, $\gamma=60^\circ$?

13. Визначити напрямні косинуси вектора $\vec{a}=(12,\ -15,\ -16)$.

14. Дано проекції сили $\vec{F}$ на координатні осі: $F_x=4$, $F_y=4$, $F_z=-4\sqrt{2}$. Знайти величину значення сили $\vec{F}$ і напрям її дії.

15. Дано точки $A(2,\ 2,\ 0)$ і $B(0,\ -2,\ 5)$. Побудувати вектор $\overline{AB}$ та визначити його довжину і напрям.

16. Радіус-вектор $\overline{OM}=\vec{r}$ утворює з осями координат рівні між собою гострі кути. Знайти ці кути, якщо довжина вектора дорівнює $2\sqrt{3}$.

17. Вектор $\vec{a}$ утворює з осями координат гострі кути $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, причому $\alpha=45^\circ$, $\beta=60^\circ$. Знайти його координати, якщо $|\vec{a}|=6$.

18. У п'ятивимірному просторі дано дві точки: $A(3,\ 0,\ -1,\ 4,\ 2)$ і $B(-1,\ 2,\ 3,\ 8,\ 1)$. Знайти компоненти векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$.

19. Знайти компоненти векторів $4\overline{AB}$ і $-5\overline{AB}$, якщо $A(2,\ -1,\ 3,\ 4)$, $B(-1,\ 0,\ 2,\ 5)$.

20. Дано два вектори: $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$ і $\vec{b}=4\vec{j}-6\vec{k}$. Знайти проекції на координатні осі таких векторів:

1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $-3\vec{a}$; 4) $5\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

21. Знайти компоненти вектора $2\vec{a}-3\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(2,\ 3,\ 2,\ 7,\ 1)$, $\vec{b}=(0,\ -1,\ 4,\ 5,\ 6)$.

22. Чотирикутник $ABCD$ – ромб. Чи рівні між собою вектори $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$, $\overline{BC}$ і $\overline{AD}$, $\overline{CB}$ і $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$?

23. Дано два довільних вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Побудувати кожен із таких векторів:

1) $2\vec{a}$; 2) $-\frac{1}{3}\vec{b}$; 3) $3\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$; 4) $\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$.

24. Визначити довжини сторін трикутника з вершинами $A(1,\ 0,\ -1)$, $B(2,\ 2,\ -3)$, $C(-1,\ 2,\ 0)$.

25. Знайти орти векторів $\vec{a}=(4,\ -4,\ -2)$, $\vec{b}=(-1,\ 2,\ 2)$, $\vec{c}=(3,\ 0,\ -4)$.

26. У трикутнику ABC проведено медіани AD, BE і CF. Знайти суму векторів $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ і $\overline{CF}$. Чи є вектор $\overline{BE}$ лінійною комбінацією векторів $\overline{AD}$ і $\overline{CF}$?

27. У трикутнику ABC проведено медіани AD, BE і CF. Подати вектори $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ і $\overline{CF}$ у вигляді лінійної комбінації векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$.

28. Довести, що чотирикутник з вершинами $A(2,\ 1,\ -4)$, $B(1,\ 3,\ 5)$, $C(7,\ 2,\ 3)$ і $D(8,\ 0,\ -6)$ є паралелограмом.

29. Дано координати вершин трикутника: $A(1,\ 2,\ 3)$, $B(3,\ 2,\ 1)$, $C(1,\ 4,\ 1)$. Показати, що трикутник ABC рівносторонній.

30. У паралелограмі $ABCD$ дано діагоналі $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$. Користуючись цими двома векторами, розкласти всі вектори, які збігаються зі сторонами паралелограма $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$.

31. Дано суміжні вершини $A(1,\ 3,\ -3)$ і $B(2,\ -5,\ 5)$ паралелограма і точку $O(1,\ 1,\ 1)$ перетину його діагоналей. Знайти координати вершин C і D.

32. З'ясувати, чи колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

1) $\vec{a}=(4,\ 5,\ -2)$, $\vec{b}=(4,\ 5,\ 2)$; 2) $\vec{a}=(4,\ 3,\ -2)$, $\vec{b}=(8,\ 6,\ -4)$;

3) $\vec{a}=(-4,\ 2,\ 0)$, $\vec{b}=(2,\ -1,\ 0)$; 4) $\vec{a}=(3,\ 0,\ 2)$, $\vec{b}=(3,\ 2,\ 0)$;

5) $\vec{a}=(2,\ 4,\ 6)$, $\vec{b}=(3,\ 6,\ 9)$.

Якщо так, то чи однаково вони напрямлені? Знайти відношення довжин векторів.

33. Дано вектори:

1) $\vec{a}=(1,\ 3,\ 5)$, $\vec{b}=(0,\ 4,\ 5)$, $\vec{c}=(7,\ -8,\ 4)$, $\vec{d}=(2,\ -1,\ 3)$;

2) $\vec{a}=(1,\ 2,\ 5)$, $\vec{b}=(-1,\ 6,\ 3)$, $\vec{c}=(0,\ 0,\ 2)$, $\vec{d}=(1,\ 0,\ 4)$.

Чи є вектор $\vec{d}$ лінійною комбінацією векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$? Якщо так, знайти коефіцієнти лінійної комбінації.

2.2. Матриці. Дії над матрицями. Ранг матриці. Визначники*

Приклади. **1.** Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Мінор другого порядку

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Усі три мінори третього порядку, які є обвідними для цього мінора, дорівнюють нулеві:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Відповідь: ранг матриці A дорівнює 2.

2. Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -6 & -1 \\ 5 & 12 & -17 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Залишаючи незмінним перший рядок, додамо до другого перший, помножений на -2, а до третього – перший, помножений на -5. Дістанемо матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 2 & 8 & -14 \end{pmatrix}.$$

Тепер до третього рядка додамо другий, помножений на –2. Матриця матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Див. ч. 1, гл. 1, підрозд. 2.7–2.11.

Щоб одержати нулі в першому рядку, додамо перший стовпець, помножений на –2, 5, –3, відповідно до другого, третього і четвертого стовпців:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи другий стовпець, матимемо нулі і в другому рядку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

За означенням ранг матриці A дорівнює найбільшому порядку r відмінного від нуля мінора за умови, що всі мінори більш високого порядку дорівнюють нулеві. Ранг матриці $r = 2$, тому що мінор другого порядку відмінний від нуля, а мінор третього порядку дорівнює нулеві.

Відповідь: $r = 2$.

3. Дано систему векторів

$$\vec{a}_1 = (2,\ 0,\ -2,\ 4),\ \vec{a}_2 = (3,\ 2,\ -4,\ 6),\ \vec{a}_3 = (0,\ -4,\ 2,\ 0).$$

Чи є вона лінійно залежною? Якщо так, то скільки вона містить лінійно незалежних векторів?

Розв'язання. Складемо матрицю з координат даних векторів, розміщуючи їх у рядки:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зведемо матрицю A до еквівалентної їй матриці, виконуючи такі елементарні перетворення:

1) поділивши елементи першого рядка на 2, дістанемо матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

2) залишаючи без зміни перший рядок і додаючи до елементів другого рядка відповідні елементи першого, помноженого на –3, матимемо

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

3) залишаючи перший і другий рядки без зміни і додаючи до елементів третього рядка відповідні елементи другого, помножені на 2, одержимо

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Другий стовпець помножимо на $\frac{1}{2}$, до третього додамо перший стовпець, а потім другий, до четвертого стовпця додамо перший, помножений на –2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

За означенням $r(A) = 2$. Оскільки ранг матриці менший від кількості векторів, то дана система векторів лінійно залежна. Ця система містить два лінійно незалежних вектори, причому лінійно незалежними є перші два вектори.

34. Транспонувати матриці:

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -7 & 6 \\ 3 & 8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

35. Додати матриці

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 8 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 & -5 \\ -8 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

36. Знайти x_1 і x_2 з рівняння

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

37. Обчислити лінійні комбінації матриць:

1) $2A - 3B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$;

2) $A + \frac{1}{3}B$, якщо $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $3A - 4B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 11 & 7 \end{pmatrix}$.

38. Чи є лінійно залежними системи векторів, заданих рядками матриць, якщо:

1) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & 15 \end{pmatrix}$; 2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & -4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$?

39. Знайти добутки AB і BA, якщо

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Чи переставні ці матриці?

40. Знайти добутки AB і BA, якщо

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

41. Обчислити

1) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

42. Написати всі мінори другого порядку матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 4 \\ 8 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

43. Обчислити визначники:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$;

$$4)\begin{vmatrix}1&2&1\\3&-1&3\\2&1&-2\end{vmatrix};\quad 5)\begin{vmatrix}-1&3&2\\2&8&1\\1&1&2\end{vmatrix};\quad 6)\begin{vmatrix}3&4&-5\\8&7&-2\\2&-1&8\end{vmatrix};$$

$$7)\begin{vmatrix}1&-2&1\\3&1&-5\\4&2&5\end{vmatrix};\quad 8)\begin{vmatrix}2&-1&1&0\\0&1&2&-1\\3&-1&2&3\\3&1&6&1\end{vmatrix};\quad 9)\begin{vmatrix}2&3&-3&4\\2&1&-1&2\\6&2&1&0\\2&3&0&-5\end{vmatrix};$$

$$10)\begin{vmatrix}0&3&0\\-1&3&2\\1&-2&4\end{vmatrix};\quad 11)\begin{vmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{vmatrix};\quad 12)\begin{vmatrix}\sin\alpha&\cos\alpha&1\\\sin\beta&\cos\beta&1\\\sin\gamma&\cos\gamma&1\end{vmatrix}.$$

44. Визначити ранг кожної квадратної матриці:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&-3&1\\3&2&-1\end{pmatrix};\ 2)\ A=\begin{pmatrix}2&5&-3\\4&-1&2\\10&14&-7\end{pmatrix};$$

$$3)\ A=\begin{pmatrix}1&3&-4\\2&-1&3\\3&2&-2\end{pmatrix};\ 4)\ A=\begin{pmatrix}-3&1&2\\6&-2&-4\\-12&4&8\end{pmatrix}.$$

45. Визначити ранг кожної прямокутної матриці:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}1&2&-2&3\\3&-1&2&1\\7&0&2&5\end{pmatrix};\quad 2)\ A=\begin{pmatrix}3&1&4\\6&-2&-10\end{pmatrix}.$$

2.3. Лінійно залежні і лінійно незалежні системи векторів. Базис*

Приклади. **1.** Чи лінійно залежні вектори $\vec{a}_1=(-1,\ 0,\ 2,\ 1)$, $\vec{a}_2=(2,\ 2,\ -1,\ 1)$ і $\vec{a}_3=(0,\ 2,\ 3,\ 3)$?

Розв`язання. Складемо і обчислимо визначник Грама

$$\Gamma(\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3)=\begin{vmatrix}\vec{a}_1\cdot\vec{a}_1&\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2&\vec{a}_1\cdot\vec{a}_3\\\vec{a}_2\cdot\vec{a}_1&\vec{a}_2\cdot\vec{a}_2&\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3\\\vec{a}_3\cdot\vec{a}_1&\vec{a}_3\cdot\vec{a}_2&\vec{a}_3\cdot\vec{a}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&-3&9\\-3&10&4\\9&4&22\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-3&0\\17&10&34\\17&4&34\end{vmatrix}=0.$$

*Див. ч. 1, гл. 1, підрозд. 2.12–2.13.

Рівність нулю визначника Грама $\Gamma(\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3)=0$ є необхідною і достатньою умовою лінійної залежності векторів $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3$. Отже, вектори $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3$ лінійно залежні.

Відповідь: лінійно залежні.

2. Показати, що вектори $\vec{a}=(3,\ 4,\ -3)$, $\vec{b}=(-5,\ 5,\ 0)$, $\vec{c}=(2,\ 1,\ -4)$ утворюють базис тривимірного простору. Знайти компоненти вектора $\vec{d}=(8,\ -16,\ 17)$ у цьому базисі.

Розв'язання. За означенням три вектори тривимірного простору утворюють базис, якщо вони лінійно незалежні.

Обчислимо визначник Грама

$$\Gamma(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{a}&\vec{a}\cdot\vec{b}&\vec{a}\cdot\vec{c}\\\vec{b}\cdot\vec{a}&\vec{b}\cdot\vec{b}&\vec{b}\cdot\vec{c}\\\vec{c}\cdot\vec{a}&\vec{c}\cdot\vec{b}&\vec{c}\cdot\vec{c}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}34&5&22\\5&50&-5\\22&-5&21\end{vmatrix}=$$

$$=25\begin{vmatrix}34&1&22\\1&2&-1\\22&-1&21\end{vmatrix}=25\begin{vmatrix}56&45&22\\0&0&-1\\43&41&21\end{vmatrix}=25\begin{vmatrix}56&45\\43&41\end{vmatrix}=9\,025\neq 0.$$

Оскільки $\Gamma(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})\neq 0$, то вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ лінійно незалежні і тому утворюють базис. Будь-який четвертий вектор $\vec{d}$ тривимірного простору є лінійною комбінацією цих векторів:

$$\vec{d}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c},$$

де $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ – координати вектора $\vec{d}$ у базисі $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.

Знайдемо їх. Рівність $\vec{d}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}$ в координатній формі має вигляд

$$\begin{cases}3\lambda_1-5\lambda_2+2\lambda_3=8,\\4\lambda_1+5\lambda_2+\lambda_3=-16,\\-3\lambda_1-4\lambda_3=17.\end{cases}$$

Розв'язок цієї системи $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-3,\ \lambda_3=-5$.

Відповідь: $\lambda_1=1;\ \lambda_2=-3;\ \lambda_3=-5$.

46. Чи є лінійно залежними вектори:

1) $\vec{a}=(2,\ 5)$, $\vec{b}=(6,\ 15)$; 2) $\vec{a}=(-1,\ 3)$, $\vec{b}=(-2,\ -6)$;

3) $\vec{a}=(1,\ -2,\ 3)$, $\vec{b}=(2,\ 3,\ 5)$?

47. Чи є лінійно залежні такі вектори:

1) $\vec a=(1,\ 4,\ 6)$, $\vec b=(1,\ -1,\ 1)$, $\vec c=(1,\ 1,\ 3)$;

2) $\vec a=(2,\ 1,\ 3)$, $\vec b=(-1,\ 3,\ 1)$, $\vec c=(1,\ 1,\ -1)$?

48. При якому значенні α вектори $\vec a_1=(1,\ 2,\ -1)$, $\vec a_2=(2,\ 0,\ 3)$, $\vec a_3=(\alpha,\ 1,\ 2)$ є лінійно незалежними?

49. Використовуючи поняття рангу матриці, дослідити на лінійну залежність такі вектори:

1) $\vec a_1=(2,\ 1,\ 1,\ 0)$, $\vec a_2=(1,\ -1,\ 2,\ -1)$, $\vec a_3=(1,\ 2,\ 1,\ 0)$;

2) $\vec a_1=(1,\ 2,\ -1,\ -2)$, $\vec a_2=(2,\ 3,\ 0,\ -1)$, $\vec a_3=(1,\ 2,\ 1,\ 4)$.

50. На площині дано вектори $\vec a=(2,\ -3)$, $\vec b=(1,\ 2)$, $\vec c=(9,\ 4)$. Показати, що вектори $\vec a$ і $\vec b$ утворюють базис двовимірного простору, знайти компоненти вектора $\vec c$ у цьому базисі.

51. Перевірити, чи утворюють вектори $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ базис тривимірного простору, і знайти компоненти вектора $\vec d$ у цьому базисі, якщо:

1) $\vec a=(2,\ 4,\ -6)$, $\vec b=(1,\ 3,\ 5)$, $\vec c=(0,\ -3,\ 7)$, $\vec d=(3,\ 2,\ 52)$;

2) $\vec a=(-2,\ 1,\ 7)$, $\vec b=(3,\ -3,\ 8)$, $\vec c=(5,\ 4,\ -1)$, $\vec d=(18,\ 25,\ 1)$.

52. Перевірити, чи утворюють вектори $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$, $\vec d$ базис чотиривимірного простору, і знайти координати вектора $\vec x$ у цьому базисі, якщо:

1) $\vec a=(1,\ 2,\ -1,\ 2)$, $\vec b=(2,\ 3,\ 0,\ -1)$, $\vec c=(1,\ 2,\ 1,\ 4)$, $\vec d=(1,\ 3,\ -1,\ 0)$, $\vec x=(7,\ 14,\ -1,\ 2)$;

2) $\vec a=(1,\ 2,\ 1,\ 1)$, $\vec b=(2,\ 3,\ 1,\ 0)$, $\vec c=(3,\ 1,\ 1,\ -2)$, $\vec d=(4,\ 2,\ -1,\ -6)$, $\vec x=(0,\ 0,\ 2,\ 7)$.

2.4. Добуток векторів*

***Приклади.* 1.** Визначити кут φ між векторами $\vec a=(-2,\ 4,\ 2,\ -1)$ і $\vec b=(-5,\ 3,\ 1,\ -1)$.

Розв`язання. Кут φ між векторами визначається за формулою (2.50) [ч. 1, с. 49]. У даному випадку

$$\cos\varphi=\frac{(-2)\cdot(-5)+4\cdot 3+2\cdot 1+(-1)\cdot(-1)}{\sqrt{(-2)^2+4^2+2^2+(-1)^2}\ \sqrt{(-5)^2+3^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{5}{6};\quad \varphi=\arccos\frac{5}{6}.$$

*Див. ч. 1, гл. 1, підрозд. 2.14–2.22.

2. Дано силу $\vec F=(3,\ -2,\ 6)$ і точку її прикладання $A(6,\ 3,\ -2)$. Знайти значення моменту сили $\vec F$ відносно початку координат.

Розв'язання. Момент сили відносно початку координат (полюса) дорівнює векторному добутку радіуса-вектора точки A прикладання сили на силу $\vec F$:

$$\vec m_0(\vec F)=\vec r\times\vec F.$$

Отже,

$$\vec m_0(\vec F)=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 6 & 3 & -2\\ 3 & -2 & 6\end{vmatrix}=14\vec i-42\vec j-21\vec k.$$

Значення моменту сили

$$m=\sqrt{m_x^2+m_y^2+m_z^2}=\sqrt{14^2+(-42)^2+(-21)^2}=49.$$

3. Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec F=(2,\ -3,\ -1)$, коли точка її прикладання переміщається по прямій з положення $M_1(2,\ -5,\ 3)$ в $M_2(5,\ -7,\ 1)$.

Розв'язання. Робота сталої сили на прямолінійному відрізку шляху дорівнює скалярному добутку вектора діючої сили на вектор шляху, тобто $A=\vec F\cdot\vec S$. У даному випадку $\vec S=\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec S=(3,\ -2,\ -2)$. Тому

$$A=2\cdot 3+(-3)\cdot(-2)+(-1)\cdot(-2)=14\ (\text{од. роботи}).$$

4. Чи компланарні вектори $\vec a=(1,\ -2,\ 1)$, $\vec b=(1,\ 2,\ -2)$, $\vec c=(5,\ -2,\ -1)$?

Розв`язання.

$$(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ 5 & -2 & -1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}2 & -2\\ -2 & -1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & -2\\ 5 & -1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & -2\end{vmatrix}=0.$$

Відповідь: так.

5. Відрізок AB поділено точками C і D на три рівні частини. Знаючи координати точок $A(3,\ -2,\ 0)$ і $B(6,\ 4,\ 3)$, знайти координати точок C і D.

Розв`язання. Точка C ділить відрізок AB у відношенні $\lambda=\frac{AC}{CB}=\frac{1}{2}$, а точка D у відношенні $\lambda=\frac{AD}{DB}=\frac{2}{1}$. Вважаючи, що $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ координати точки A, а $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ координати точки B, знаходимо

$$x_C=\frac{3+\frac{1}{2}\cdot 6}{1+\frac{1}{2}}=\frac{6}{\frac{3}{2}}=4,\quad y_C=\frac{-2+\frac{1}{2}\cdot 4}{\frac{3}{2}}=0,\quad z_C=\frac{0+\frac{1}{2}\cdot 3}{\frac{3}{2}}=1;$$

$$x_D=\frac{3+2\cdot 6}{1+2}=5,\quad y_D=\frac{-2+2\cdot 4}{3}=2,\quad z_D=\frac{0+2\cdot 3}{3}=2\,.$$

Відповідь: $C\ (4,\ 0,\ 1)$; $D\ (5,\ 2,\ 2)$.

53. Знайти скалярний добуток векторів:

1) $\vec a\cdot\vec b$, якщо $|\ \vec a\ |=2$, $|\ \vec b\ |=3$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$;

2) $\left(2\vec a+\vec b\right)\cdot\left(\vec a-\vec b\right)$, якщо $|\ \vec a\ |=4$, $|\ \vec b\ |=5$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

54. Знайти скалярний добуток векторів $\vec a=(1,\ 5,\ 1)$ і $\vec b=(1,\ -5,\ 2)$. Визначити, який кут утворюють вектори $\vec a$ і $\vec b$ між собою: гострий, тупий чи прямий.

55. У просторі дано чотирикутник $ABCD$: $\overline{AB}=(1,\ 6,-2)$, $\overline{BC}=(5,\ 3,-1)$, $\overline{CD}=(1,\ -7,\ 1)$. Показати, що його діагоналі взаємно перпендикулярні.

56. При якому значенні m вектори $\vec a=m\vec i+3\vec j+4\vec k$ і $\vec b=4\vec i+m\vec j-7\vec k$ перпендикулярні?

57. Задано вектори $\vec a=\left(\frac{3}{2},\ 1,\ -\frac{5}{2}\right)$, $\vec b=(-3,\ -2,\ 5)$. Чи існує вектор $\vec x$, який задовольняє умову $\vec a\cdot\vec x=2$, $\vec b\cdot\vec x=3$?

58. Дано трикутник ABC: $A(4,\ 0,-2)$, $B(-2,\ -6,\ 4)$, $C(4,\ 3,\ 2)$. Визначити кут між стороною AB і медіаною CD.

59. Визначити скалярний добуток векторів $\vec a=(2,\ 1,\ -1,\ 2)$ і $\vec b=(3,\ -1,\ -2,\ 1)$.

60. Знайти кут між векторами $\vec x$ і $\vec y$, якщо:

1) $\vec x=(2,\ 1,\ 3,\ 2)$, $\vec y=(1,\ 2,\ -2,\ 1)$;

2) $\vec x=(1,\ 2,\ 2,\ 3)$, $\vec y=(3,\ 1,\ 5,\ 1)$.

61. Дано вершини трикутника $A(-1,\ -2,\ 4)$, $B(-4,\ -2,\ 0)$ і $C(3,-2,\ 1)$. Визначити його внутрішній кут φ_1 при вершині A і зовнішній кут φ_2 при вершині B.

62. Дано трикутник ABC: $A(-11,\ 5,\ 8,\ 1,\ 4)$, $B(-1,\ 5,\ -7,\ 1,\ -1)$, $C(9,\ 5,\ -2,\ 1,\ 4)$. Показати, що трикутник ABC – прямокутний.

63. Дано точки $M(-5,\ 7,\ -6)$ і $N(7,\ -9,\ 9)$. Знайти проекцію вектора $\vec a=(1,\ -3,\ 1)$ на вектор $\overline{MN}$.

64. Знайти роботу сили $\vec F$ на переміщенні $\vec S$, якщо $\left|\vec F\right|=10$, $\left|\vec S\right|=2$, а кут $\varphi=\left(\widehat{\vec F,\ \vec S}\right)=\frac{\pi}{6}$.

65. Задано вектори $|\vec a|=2$, $\left|\vec b\right|=4$, $\left(\widehat{\vec a,\vec b}\right)=\frac{\pi}{3}$. Знайти:

1) $\left|\ \vec a\times\vec b\ \right|$;

2) $\left|\left(2\vec a-\vec b\right)\times\left(2\vec a+\vec b\right)\right|$.

66. Задано вектори $\vec a=(-3,\ 1,\ 2)$, $\vec b=(2,\ -1,\ 1)$. Знайти координати векторів $\vec a\times\vec b$, $\left(2\vec a+\vec b\right)\times\left(\vec a-\vec b\right)$.

67. Дано вектори $\vec a=-4\vec i-8\vec j+8\vec k$ і $\vec b=4\vec i+3\vec j+2\vec k$. Знайти їх векторний добуток, синус кута між ними, площу паралелограма, побудованого на цих векторах.

68. Обчислити площу трикутника ABC, якщо:

1) $A(-1,\ 0,\ 2)$, $B(1,\ -2,\ 5)$, $C(3,\ 0,\ -4)$;

2) $A(3,\ 5,\ 4)$, $B(8,\ 7,\ 4)$, $C(5,\ 10,\ 4)$;

3) $A(3,\ 0,\ 3)$, $B(5,\ 2,\ 6)$, $C(1,\ 2,\ 0)$.

69. Сила $\vec F=3\vec i+2\vec j-4\vec k$ прикладена в точці $M(2,\ -1,\ 1)$. Знайти її момент відносно початку координат.

70. Сила $\vec F=(2,\ 2,\ 9)$ прикладена в точці $A(4,\ 2,\ -3)$. Обчислити значення моменту $\vec M$ цієї сили відносно точки $B(2,\ 4,\ 0)$ і його напрямні косинуси.

71. Знайти мішаний добуток векторів $\vec a=2\vec i+3\vec j-4\vec k$, $\vec b=\vec i-2\vec j+\vec k$, $\vec c=4\vec i+2\vec j-3\vec k$.

72. Обчислити об'єм трикутної піраміди з такими вершинами:

1) $A(0,\ 0,\ 1)$, $B(2,\ 3,\ 5)$, [illegible]

2) $A(5,\ 1,\ -4)$, $B(1,\ 2,\ -$[illegible]$)$, $C(3,\ 3,$ [illegible]

73. Чи компланарні вектори:

1) $\vec{a}(1,\ 4,\ 6)$, $\vec{b}(1,\ -1,\ 1)$, $\vec{c}(1,\ 1,\ 3)$;

2) $\vec{a}(1,\ 1,\ 1)$, $\vec{b}(1,\ 1,\ -1)$, $\vec{c}(1,\ -1,\ 1)$?

74. Чи належать точки A, B, C, D одній площині, якщо:

1) $A(5,\ 7,\ -2)$, $B(3,\ 1,\ -1)$, $C(9,\ 4,\ -4)$, $D(1,\ 5,\ 0)$;

2) $A(1,\ 0,\ 7)$, $B(-1,\ -1,\ 2)$, $C(2,\ -2,\ 2)$, $D(0,\ 1,\ 9)$?

75. Дано вершини трикутника $A(3,\ 2,\ 5)$, $B(1,\ -4,\ 3)$, $C(-3,\ 0,\ 1)$. Знайти координати середин його сторін.

76. Дано вершини трикутника $A(2,\ -1,\ 4)$, $B(3,\ 2,\ -6)$, $C(-5,\ 0,\ 2)$. Знайти довжину його медіани, проведеної з вершини A.

77. Знайти координати кінців відрізка AB, який точками $C(2,\ 0,\ 2)$ і $D(5,\ -2,\ 0)$ поділено на три рівні частини.

78. У точках $A(-2,\ 4)$, $B(3,\ -1)$, $C(2,\ 3)$ розміщено матеріальні точки з масами 60, 40 і 100 г. Знайти центр мас цієї системи.

79. Знайти координати центра ваги трикутника: $A(2,\ 3,\ 4)$, $B(3,\ 1,\ 2)$, $C(4,\ -1,\ 3)$.

§ 3. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ*

Приклади. **1.** Розв'язати за правилом Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислюється визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 6 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -2.$$

*Див. ч. 1, гл. 1, підрозд. 3.1–3.6.

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок. Скористаємося формулами Крамера $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}$, $x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta}$:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -16,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 9 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -7 & 9 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -26;$$

$$x_1 = \frac{-6}{-2} = 3, \quad x_2 = \frac{-16}{-2} = 8, \quad x_3 = \frac{-26}{-2} = 13.$$

Відповідь: $x_1 = 3$; $x_2 = 8$; $x_3 = 13$.

2. Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y + z = -2, \\ x - y + 2z = -7, \\ 2x + 3y - z = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Залишивши перше рівняння незмінним, до другого додамо перше, помножене на -1, а до третього – перше, помножене на -2:

$$\begin{cases} x + y + z = -2, \\ -2y + z = -5, \\ y - 3z = 5. \end{cases}$$

Перші два рівняння не змінюємо, а до третього додамо друге, помножене на $\dfrac{1}{2}$:

$$\begin{cases} x + y + z = -2, \\ -2y + z = -5, \\ -2{,}5z = 2{,}5. \end{cases}$$

З третього рівняння знайдемо $z=-1$ і підставимо значення z в друге рівняння, розв'язавши яке відносно y, одержимо $y=2$.

Значення z і y підставимо в перше рівняння і, розв'язавши його відносно x, одержимо $x=-3$.

Відповідь: $x=-3,\ y=2,\ z=-1$.

3. Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь

$$\begin{cases} x-y+3z=1, \\ 2x+3y-z=7, \\ x+9y-11z=11. \end{cases}$$

Розв'язання. Перше рівняння системи залишимо незмінним; до другого додамо перше, помножене на -2, а до третього – перше, помножене на -1:

$$\begin{cases} x-y+3z=1, \\ 5y-7z=5, \\ 10y-14z=10, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x-y+3z=1, \\ 5y-7z=5, \\ 5y-7z=5. \end{cases}$$

Друге і третє рівняння однакові, одне з них можна відкинути:

$$\begin{cases} x-y+3z=1, \\ \quad 5y-7z=5. \end{cases}$$

У цій системі три невідомих, а рівнянь два, тому одне з невідомих є вільним. Вважаючи вільним невідомим z, перепишемо систему так:

$$\begin{cases} x-y=1-3z, \\ \quad 5y=5+7z. \end{cases}$$

З другого рівняння системи визначаємо

$$y=1+\frac{7}{5}z, \quad z\in \mathrm{R}.$$

Підставивши знайдене значення y в перше рівняння, одержимо

$$x=2-\frac{8}{5}z, \quad z\in \mathrm{R}.$$

Відповідь: система має безліч розв'язків. Загальний розв'язок:

$$x=2-\frac{8}{5}z, \quad y=1+\frac{7}{5}z, \quad z\in \mathrm{R}.$$

4. Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь

$$\begin{cases} x+2y+3z=-1, \\ x-3y-2z=3, \\ 2x-y+z=-2. \end{cases}$$

Розв'язання. Додамо до другого рівняння перше, помножене на -1, а до третього – перше, помножене на -2:

$$\begin{cases} x+2y+3z=-1, \\ \quad -5y-5z=4, \\ \quad -5y-5z=0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x+2y+3z=-1, \\ \quad 5y+5z=-4. \\ \quad -5y-5z=0. \end{cases}$$

Додавши до третього рівняння друге, одержимо

$$\begin{cases} x+2y+3z=-1, \\ \quad 5y+5z=-4, \\ \quad 0=-4. \end{cases}$$

Система не має розв'язків, тому що ніякі значення y і z не задовольняють третє рівняння $0\cdot y+0\cdot z=-4$.

Відповідь: система несумісна.

5. Розв'язати за допомогою оберненої матриці систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y+3z=-5, \\ 2x-3y+z=0, \\ 3x+2y-z=5. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо систему в матричній формі: $AX=B$, де

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \ B=\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}; \ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Обчислимо $\det A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 45.$$

Оскільки $\det A \neq 0$, то матриця A – невироджена, тобто має обернену A^{-1}, тому розв'язок системи можна записати так: $X = A^{-1}B$. Обчислимо A^{-1}.

Складемо матрицю $\tilde{A}$, елементами якої є алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 13 \\ 7 & -10 & 1 \\ 10 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Одержану матрицю транспонуємо і позначимо її $\tilde{A}_{\text{T}}$:

$$\tilde{A}_{\text{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 5 & -10 & 5 \\ 13 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Поділивши кожний елемент матриці $\tilde{A}_{\text{T}}$ на визначник матриці A, матимемо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}_{\text{T}} = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 5 & -10 & 5 \\ 13 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$X = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 5 & -10 & 5 \\ 13 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix};\ X = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 45 \\ 0 \\ -90 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x = 1,\ \ y = 0,\ \ z = -2$.

6. Скласти програму розв'язання системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 5x + 0{,}12y + 0{,}09z = 10, \\ 0{,}08x + 4y - 0{,}15z = 20, \\ 0{,}18x - 0{,}06y + 3z = -4{,}5. \end{cases}$$

Розв'язання. Програма мовою БЕЙСИК:

```
10 REM "Розв'язання системи лінійних рівнянь"
20 DIM A(3,3), B(3)
30 DATA 5, 0.12, 0.09
40 DATA 0.08, 4, -0,15
50 DATA 0.18, -0.06, 3
60 DATA 10, 20, -4.5
70 MAT READ A, B
80 MAT C = INV (A)
90 MAT X = C * B
100 PRINT "Значення невідомих"
110 MAT PRINT X
120 STOP
```

Відповідь: $x \approx 1{,}9;\ \ y \approx 4{,}9;\ \ z \approx -1{,}5$.

7. Знайти загальні розв'язки систем лінійних однорідних рівнянь

$$1)\ \begin{cases} x + y - 7z = 0, \\ x - 6y + z = 0, \\ 5x - y - z = 0. \end{cases} \qquad (3.1)$$

Розв'язання. Тут кількість невідомих $n = 3$. Складемо матрицю A системи:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 1 & -6 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо над матрицею A елементарні перетворення:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 1 & -6 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & -6 & 34 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 210 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $r = 3\ (r = n)$, то система лінійних однорідних рівнянь має єдиний нульовий розв'язок.

Відповідь: $(0,\ 0,\ 0)$.

$$2)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases} \qquad (3.2)$$

Розв'язання. Тут кількість невідомих $n = 4$. Складемо матрицю A системи:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 4 & -9 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 4 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -8 & 7 \\ 0 & 7 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Оскільки $r = 2$ $(r < n)$, то система має ненульові розв'язки. Знайдемо їх. Сукупність розв'язків даної системи лінійних рівнянь утворює простір (підпростір) вимірності $n - r = 4 - 2 = 2$.

Вільних невідомих два і базисних невідомих також два. Загальний розв'язок системи (3.2) має вигляд

$$\vec{x} = c_1\vec{y}_1 + c_2\vec{y}_2,$$

де $\vec{y}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\vec{y}_2 = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$ – лінійно незалежні розв'язки цієї системи; $c_1 \in \mathbf{R}$, $c_2 \in \mathbf{R}$.

Знайдемо $\vec{y}_1$ і $\vec{y}_2$. Останній нульовий рядок в перетвореній матриці (3.3) означає, що третє рівняння системи є лінійною комбінацією двох перших і тому його можна не враховувати. Одержимо

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Приймемо в цій системі за вільні невідомі змінні x_3 і x_4, а за базисні невідомі x_1 і x_2. Перепишемо систему так:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3x_3 + 4x_4, \\ 2x_1 + 3x_2 = 2x_3 + x_4. \end{cases}$$

Враховуючи довільність значень x_3 і x_4, приймемо $x_3 = 1$, $x_4 = 0$. Одержимо

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 = 2, \end{cases}$$

звідки $x_1 = -\frac{5}{7}$, $x_2 = \frac{8}{7}$, тобто $\vec{y}_1 = \left(-\frac{5}{7}, \frac{8}{7}, 1, 0\right)$. Поклавши $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, одержимо

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 = 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

Розв'язок цієї системи: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. Тоді $\vec{y}_2 = (2, -1, 0, 1)$.

Покажемо, що вектори $\vec{y}_1$ і $\vec{y}_2$ лінійно незалежні. Розглянемо векторне рівняння

$$c_1\vec{y}_1 + c_2\vec{y}_2 = 0. \quad (3.5)$$

У координатній формі (3.5) перепишеться так:

$$\begin{cases} -\frac{5}{7}c_1 + 2c_2 = 0, \\ \frac{8}{7}c_1 - c_2 = 0, \end{cases}$$

звідки $c_1 = 0$, $c_2 = 0$.

Ця система має єдиний нульовий розв'язок, тобто вектори $\vec{y}_1$, $\vec{y}_2$ лінійно незалежні. Загальний розв'язок системи (3.2) має вигляд:

$$\vec{x} = c_1\vec{y}_1 + c_2\vec{y}_2; \ c_1 \in \mathbf{R}, \ c_2 \in \mathbf{R},$$

або

$$\vec{x} = \left(-\frac{5}{7}c_1 + 2c_2, \ \frac{8}{7}c_1 - c_2, \ c_1, \ c_2\right); \ c_1 \in \mathbf{R}, \ c_2 \in \mathbf{R}.$$

Надаючи c_1, c_2 різних значень, знайдемо всі розв'язки системи (3.2).

Відповідь: $\vec{x} = \left(-\frac{5}{7}c_1 + 2c_2, \ \frac{8}{7}c_1 - c_2, \ c_1, \ c_2\right); \ c_1 \in \mathbf{R}, \ c_2 \in \mathbf{R}.$

8. Знайти базис і вимірність підпростору розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Розв'язання. Матриця

$$A=\begin{pmatrix}3&5&-1&2\\2&4&-1&3\\1&3&-1&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&-1&4\\3&5&-1&2\\2&4&-1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&-1&4\\0&-4&2&-10\\0&-2&1&-5\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&3&-1&4\\0&-4&2&-10\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Звідси $r=2$, причому в системі (3.6) третє рівняння є наслідком двох перших, тому його можна опустити. Систему (3.6) запишемо так:

$$\begin{cases}x_1+3x_2-x_3+4x_4=0,\\2x_1+4x_2-x_3+3x_4=0.\end{cases}\tag{3.7}$$

Сукупність розв'язків системи (3.6) утворює простір (підпростір) вимірності $n-r=4-2=2$.

Вільних невідомих два, базисних невідомих також два. Приймемо в системі (3.7) за вільні змінні x_3 і x_4, одержимо

$$\begin{cases}x_1+3x_2=x_3-4x_4,\\2x_1+4x_2=x_3-3x_4.\end{cases}\tag{3.8}$$

Надаючи вільним змінним x_3 і x_4 по черзі значення 1; 0 і 0; 1, одержуємо

$$\begin{cases}x_1+3x_2=1,\\2x_1+4x_2=1,\end{cases}\quad\text{або}\quad\begin{cases}x_1+3x_2=-4,\\2x_1+4x_2=-3.\end{cases}$$

Розв'язки відповідно першої та другої систем:

$$x_1=-\frac{1}{2},\ \ x_2=\frac{1}{2};\ \ x_1=\frac{7}{2},\ \ x_2=-\frac{5}{2}.$$

Вектори $\vec{y}_1=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 0\right)$ і $\vec{y}_2=\left(\frac{7}{2},\ -\frac{5}{2},\ 0,\ 1\right)$ – лінійно незалежні, тому утворюють базис підпростору розв'язків.

Загальний розв'язок системи (3.6):

$$\vec{x}=c_1\vec{y}_1+c_2\vec{y}_2;\ \ c_1\in\mathbf{R},\ \ c_2\in\mathbf{R},$$

або

$$\vec{x}=\left(-\frac{1}{2}c_1+\frac{7}{2}c_2,\ \ \frac{1}{2}c_1-\frac{5}{2}c_2,\ \ c_1,\ \ c_2\right);\ \ c_1\in\mathbf{R},\ \ c_2\in\mathbf{R}.$$

Відповідь: $y_1=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 0\right)$, $y_2=\left(\frac{7}{2},\ -\frac{5}{2},\ 0,\ 1\right)$ – базис підпростору розв'язків, $n-r=4-2=2$; загальний розв'язок системи

$$\vec{x}=c_1\vec{y}_1+c_2\vec{y}_2;\ \ c_1\in\mathbf{R},\ \ c_2\in\mathbf{R},$$

або

$$\vec{x}=\left(-\frac{1}{2}c_1+\frac{7}{2}c_2,\ \ \frac{1}{2}c_1-\frac{5}{2}c_2,\ \ c_1,\ \ c_2\right);\ \ c_1\in\mathbf{R},\ \ c_2\in\mathbf{R}.$$

Розв'язати системи рівнянь за допомогою формул Крамера.

80. $\begin{cases}3x+2y-z=4,\\x-3y+2z=5,\\2x+y-3z=3.\end{cases}$ **81.** $\begin{cases}3x-y+z=7,\\x+2y+3z=8,\\x+y-2z=-6.\end{cases}$ **82.** $\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3+x_4=4,\\4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6,\\8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12,\\3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6.\end{cases}$

83. $\begin{cases}2x+y=5,\\x+3z=16,\\5y-z=10.\end{cases}$ **84.** $\begin{cases}x+y+3z=-5,\\2x-3y+z=0,\\3x+2y-z=5.\end{cases}$

85. За допомогою складеної програми розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}6{,}05x+0{,}13y+8{,}57z=19{,}6,\\15{,}46x-8y+13{,}94z=23{,}8,\\7{,}18x-12{,}6y+0{,}07z=-0{,}04.\end{cases}$$

Користуючись теоремою Кронекера–Капеллі, визначити сумісність систем лінійних рівнянь.

86. $\begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ x - 3y + 2z = -3, \\ 3x + y = 1. \end{cases}$ **87.** $\begin{cases} 3x - y + 2z = 5, \\ 2x - y - z = 2, \\ 4x - 2y - 2z = -3. \end{cases}$ **88.** $\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$

89. $\begin{cases} x + y - z = 36, \\ x - y + z = 13, \\ x - y - z = -7. \end{cases}$

90. Методом Гаусса знайти розв'язки (якщо вони існують) таких систем лінійних рівнянь:

1) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ x + 3y + 4z = 6, \\ 2x - y - z = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x - y + z = 3, \\ 3x + 2y + 2z = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y - z = -2, \\ 3x - y + 2z = 9, \\ 4x + 4y - 3z = -5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 5, \\ 4x + 3y - 4z = 7, \\ 4x + 8y - 12z = 3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 8x_1 + 2x_2 - x_3 = 21, \\ 2x_1 + 11x_2 - 16x_3 = 21; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 4x + 2y + 3z = -2, \\ 2x + 8y - z = 8, \\ 9x + y + 8z = 0; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + 4y + 6z = 3, \\ 3x + y - z = 1. \end{cases}$

91. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x + 2y - 2z = 0, \\ 3x + 3y - 3z = 0. \end{cases}$$

92. Знайти базис і вимірність підпростору розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 7x + 5y - 3z + t = 0, \\ 3x + 2y - 3z + 2t = 0, \\ x + y + 3z - 3t = 0. \end{cases}$$

93. Дослідити і розв'язати системи лінійних неоднорідних рівнянь:

1) $\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 3x - y + 3z = -7, \\ 2x + y - 2z = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 8x_1 + 2x_2 - x_3 = 21, \\ 2x_1 + 11x_2 - 16x_3 = 21. \end{cases}$

94. Знайти матрицю, обернену до даної:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

95. Матричним методом розв'язати системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x - y + z = 5, \\ 3x + 4y - 2z = -3, \\ x - 3y + z = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y - z = -3, \\ 3x + 4y + z = 1, \\ 5x + y - 3z = -2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y + 3z = -5, \\ 4x + 2y - 3z = 0, \\ 3x - 3y + 5z = -9; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 7x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 17, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$

§ 4. ЛІНІЙНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ*

Приклади. **1.** Дано два лінійних перетворення:

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - x_2 - x_3, \\ x_2' = -x_1 + 4x_2 + 7x_3, \\ x_3' = 8x_1 + x_2 - x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1'' = 9x_1' + 3x_2' + 5x_3', \\ x_2'' = 2x_1' + 3x_3', \\ x_3'' = x_2' - x_1'. \end{cases} \qquad (4.1)$$

Засобами матричного числення визначити перетворення, яке б виражало x_1'', x_2'' x_3'' через x_1, x_2 x_3.

Розв'язання. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ \bar{X}_1 = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}, \ \bar{X}_2 = \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}.$$

*Див. ч. 1, гл. 1, підрозд. 4.1.

Тоді дані лінійні перетворення в матричній формі запишуться так:

$$\vec{X}_1 = A\vec{X}, \quad \vec{X}_2 = B\vec{X}_1 .$$

Перетворення, яке виражає $\vec{X}_2$ через $\vec{X}$: $\vec{X}_2 = BA\vec{X}$. Обчислимо

$$BA = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 8 & 7 \\ 22 & 1 & -5 \\ -9 & 3 & 8 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Шукане перетворення буде таким:

$$x_1'' = 28x_1 + 8x_2 + 7x_3 \,;\; x_2'' = 22x_1 + x_2 + 5x_3 \,;\; x_3'' = -9x_1 + 3x_2 + 8x_3 .$$

2. Знайти власні числа і власні вектори матриці (лінійного перетворення) A, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Щоб визначити власні числа матриці A, складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -7 & 0 \\ -3 & 1-\lambda & 0 \\ 12 & 6 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4.3}$$

Якщо розкриємо визначник за елементами третього стовпця, одержимо рівняння

$$(5-\lambda)(1-\lambda)(-3-\lambda) - 21(-3-\lambda) = 0.$$

Розв'язавши рівняння, знайдемо $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 8$.

Координати власних векторів, які відповідають знайденим власним числам, визначаємо із системи рівнянь

$$\begin{cases} (5-\lambda)x - 7y + 0\cdot z = 0, \\ -3x + (1-\lambda)y + 0\cdot z = 0, \\ 12x + 6y + (-3-\lambda)z = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Підставивши в систему (4.4) $\lambda_1 = -3$, одержимо

$$\begin{cases} 8x_1 - 7y_1 + 0\cdot z_1 = 0, \\ -3x_1 + 4y_1 + 0\cdot z_1 = 0, \\ 12x_1 + 6y_1 + 0\cdot z_1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю однорідну систему, дістанемо $x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ z_1 = t,\ t \in \mathbf{R}$.

Отже, першим власним вектором перетворення (матриці) A є

$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix},\ t \in \mathbf{R},\ t \neq 0.$$

Підставивши в систему (4.4) $\lambda_2 = -2$, запишемо систему для визначення координат другого власного вектора так:

$$\begin{cases} 7x_2 - 7y_2 + 0\cdot z_2 = 0, \\ -3x_2 + 3y_2 + 0\cdot z_2 = 0, \\ 12x_2 + 6y_2 - z_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок системи: $x_2 = t,\ y_2 = t,\ z_2 = 18t,\ t \in \mathbf{R},\ t \neq 0.$

Другий власний вектор

$$\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 18t \end{pmatrix},\ t \in \mathbf{R},\ t \neq 0.$$

При $\lambda_3 = 8$ із (4.4) одержимо систему

$$\begin{cases} -3x_3 - 7y_3 + 0\cdot z_3 = 0, \\ -3x_3 - 7y_3 + 0\cdot z_3 = 0, \\ 12x_3 + 6y_3 - 11z_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи: $x_3 = 7t,\ y_3 = -3t,\ z_3 = 6t,\ t \in \mathbf{R}$.

Третій власний вектор

$$\vec{X}_3 = \begin{pmatrix} 7t \\ -3t \\ 6t \end{pmatrix},\ t \in \mathbf{R},\ t \neq 0.$$

Відповідь: $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 8$;

$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix},\ \vec{X}_2 = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 18t \end{pmatrix},\ \vec{X}_3 = \begin{pmatrix} 7t \\ -3t \\ 6t \end{pmatrix},\ t \in \mathbf{R},\ t \neq 0.$$

3. Знайти власні числа і власні вектори матриці (лінійного перетворення) A, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Для знаходження власних чисел матриці A складемо і розв'яжемо її характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Розв'язки рівняння: $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=-1$. Власні числа кратні. Координати власних векторів, які відповідають знайденим власним числам, знайдемо із системи рівнянь

$$\begin{cases} (2-\lambda)x-y+2z=0, \\ 5x+(-3-\lambda)y+3z=0, \\ -x+(-2-\lambda)z=0. \end{cases}$$

Підставивши в систему $\lambda_1=-1$, матимемо

$$\begin{cases} 3x-y+2z=0, \\ 5x-2y+3z=0, \\ -x-z=0. \end{cases}$$

Розв'язок системи: $x=t,\ \ y=t,\ \ z=-t,\ \ t\in\mathbf{R}$. Власний вектор, який відповідає $\lambda_1=-1$, збігається з вектором

$$\vec{X}_1=\begin{pmatrix} t \\ t \\ -t \end{pmatrix},\ \ t\in\mathbf{R},\ \ t\neq 0.$$

При кратних λ два інших вектори $\vec{X}_2$ і $\vec{X}_3$ можна взяти будь-якими, аби тільки вектори $\vec{X}_1,\ \vec{X}_2,\ \vec{X}_3$ були попарно перпендикулярні.

Враховуючи, що вектор $\vec{X}_2=\begin{pmatrix} 3t \\ -t \\ 2t \end{pmatrix}$ перпендикулярний до вектора $\vec{X}_1$ (це випливає з першого рівняння $3x-y+2z=0$ системи, якщо його ліву частину розглядати як скалярний добуток двох векторів $\vec{X}_1=\begin{pmatrix} t \\ t \\ -t \end{pmatrix}$ і $\vec{X}_2=\begin{pmatrix} 3t \\ -t \\ 2t \end{pmatrix}$), за другий власний вектор можна взяти вектор $\vec{X}_2$. За третій власний вектор $\vec{X}_3$ візьмемо вектор, який дорівнює векторному добутку

$$\vec{X}_1\times\vec{X}_2,\ \vec{X}_3=\begin{pmatrix} t \\ -5t \\ -4t \end{pmatrix},$$

тому що $\vec{X}_3\perp\vec{X}_1$ і $\vec{X}_3\perp\vec{X}_2$. Нормуючи ці вектори, одержимо

$$\vec{i}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \vec{j}_1=\left(\frac{3}{\sqrt{14}},\ -\frac{1}{\sqrt{14}},\ \frac{2}{\sqrt{14}}\right),\ \vec{k}_1=\left(\frac{1}{3\sqrt{14}},\ -\frac{5}{3\sqrt{14}},\ -\frac{4}{3\sqrt{14}}\right).$$

Відповідь: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$, $\vec{i}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{j}_1=\left(\frac{3}{\sqrt{14}},\ -\frac{1}{\sqrt{14}},\ \frac{2}{\sqrt{14}}\right)$, $\vec{k}=\left(\frac{1}{3\sqrt{14}},\ -\frac{5}{3\sqrt{14}},\ -\frac{4}{3\sqrt{14}}\right)$.

4. Визначити вигляд кривої, яка задана рівнянням

$$y=\frac{5x+2}{2x-1}.$$

Розв'язання. Виділимо з дробу $\frac{5x+2}{2x-1}$ цілу частину, поділивши чисельник на знаменник за правилом ділення многочлена на многочлен:

$$\begin{array}{r|l} 5x+2 & 2x-1 \\ \cline{2-2} 5x-\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ \cline{1-1} \frac{9}{2} & \end{array}.$$

Таким чином,

$$y=\frac{5}{2}+\frac{\frac{9}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}, \text{ або } y-\frac{5}{2}=\frac{9}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)}.$$

Позначимо $x_1=x-\frac{1}{2}$, $y_1=y-\frac{5}{2}$ і перепишемо рівняння так:

$$x_1y_1=\frac{9}{4}.$$

Це рівняння рівнобічної гіперболи, віднесеної до асимптот. Гілки кривої розміщені в першій і третій чвертях нової системи координат, одержаної паралельним перенесенням системи координат xOy. Новий початок координат лежить у точці $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Дано два лінійних перетворення. Засобами матричного числення знайти перетворення, яке дає змогу виразити x_1'', x_2'', x_3'' через x_1, x_2, x_3.

96. $\begin{cases} x_1'=x_1-3x_2+3x_3, \\ x_2'=x_1-4x_2+2x_3, \\ x_3'=2x_1-4x_2+2x_3 \end{cases}$ і $\begin{cases} x_1''=3x_1'+2x_2'-2x_3', \\ x_2''=3x_1'+4x_2'-4x_3', \\ x_3''=x_1'+x_2'-2x_3'. \end{cases}$

97. $\begin{cases} x_1'=7x_1-5x_2-x_3, \\ x_2'=3x_1+7x_2+x_3, \\ x_3'=x_1+10x_2+2x_3 \end{cases}$ і $\begin{cases} x_1''=4x_1'-3x_2'-x_3', \\ x_2''=-x_1'+10x_2'+2x_3', \\ x_3''=7x_1'-5x_2'+x_3'. \end{cases}$

98. Знайти гострий кут повороту осей координат, при якому точка $A(2, 4)$ матиме нову абсцису 4. Побудувати обидві системи координат і точку A.

99. Визначити вигляд кривої, заданої рівнянням:

1) $y=\dfrac{2x+5}{2x-6}$; 2) $y=\dfrac{5x-3}{2x-5}$.

100. Знайти власні числа і власні вектори матриці (лінійного перетворення) A, якщо

1) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

101. Знайти власні числа і власні вектори матриці (лінійного перетворення)

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайдені власні вектори нормувати.

§ 5. ЛІНІЙНІ І КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ

Приклади. 1. Звести до канонічного вигляду квадратичну форму

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x})=5x_1^2+8x_1x_2+5x_2^2.$$

Розв'язання. Складемо матрицю квадратичної форми $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Запишемо і розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0;\ (5-\lambda)^2-16=0;\ \lambda^2-10\lambda+9=0;$$

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=9.$$

Позначимо координати вектора $\vec{x}$ у системі власних векторів матриці A через η_1 і η_2. Тепер дана квадратична форма має такий канонічний вигляд:

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x})=\eta_1^2+9\eta_2^2. \tag{5.1}$$

Знайдемо ортонормовані власні вектори. Позначимо координати власних векторів $\vec{b}_1=(l_1, m_1)$, $\vec{b}_2=(l_2, m_2)$. Координати l, m задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} (5-\lambda)l+4m=0, \\ 4l+(5-\lambda)m=0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Якщо $\lambda=\lambda_1=1$, систему (5.2) запишемо так:

$$\begin{cases} 4l_1^*+4m_1^*=0, \\ 4l_1^*+4m_1^*=0, \end{cases} \text{ або } l_1^*+m_1^*=0. \tag{5.3}$$

Розв'язком може бути $l_1^* = 1$, $m_1^* = -1$. Таким чином, $\vec{b}_1^* = (1, -1)$. Поділивши компоненти вектора $\vec{b}_1^*$ на його довжину, дістанемо нормований вектор $\vec{b}_1$. У даному випадку $\left|\vec{b}_1^*\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2}$, $\left|\vec{b}_1^*\right| = \sqrt{2}$, $\vec{b}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Підставивши $\lambda = \lambda_2 = 9$ у систему (5.2), одержимо

$$\begin{cases} -4l_2^* + 4m_2^* = 0, \\ 4l_2^* - 4m_2^* = 0, \end{cases} \text{ або } l_2^* - m_2^* = 0.$$

За розв'язок можна взяти $l_2^* = 1$, $m_2^* = 1$. Тоді $\vec{b}_2^* = (1, 1)$. Нормуючи $\vec{b}_2^*$, одержимо $\vec{b}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Покажемо, що вектори $\vec{b}_1^*$ і $\vec{b}_2^*$ лінійно незалежні. Складемо і обчислимо визначник Грама:

$$\Gamma\left(\vec{b}_1^*, \vec{b}_2^*\right) = \begin{vmatrix} \vec{b}_1^* \cdot \vec{b}_1^* & \vec{b}_1^* \cdot \vec{b}_2^* \\ \vec{b}_2^* \cdot \vec{b}_1^* & \vec{b}_2^* \cdot \vec{b}_2^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Оскільки $\Gamma\left(\vec{b}_1^*, \vec{b}_2^*\right) \neq 0$, то вектори лінійно незалежні.

Відповідь: квадратична форма має канонічний вигляд

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = \eta_1^2 + 9\eta_2^2.$$

Базис, в якому квадратична форма має канонічний вигляд:

$$\vec{b}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \ \vec{b}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

2. Звести до канонічного вигляду квадратичну форму

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 + 7x_2^2 - 8x_2x_3 + x_3^2.$$

Розв'язання. Складемо матрицю квадратичної форми:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння можна записати так:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язки характеристичного рівняння: $\lambda_1 = -9$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 9$.

Позначимо координати вектора $\vec{x}$ в системі власних векторів матриці A через η_1, η_2, η_3.

Тоді задана квадратична форма має канонічний вигляд

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = -9\eta_1^2 + 9\eta_2^2 + 9\eta_3^2.$$

Знайдемо ортонормовані власні вектори. Координати власних векторів позначимо

$$\vec{b}_1 = (l_1, m_1, n_1), \ \vec{b}_2 = (l_2, m_2, n_2), \vec{b}_3 = (l_3, m_3, n_3).$$

Координати l, m, n знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{cases} (1-\lambda)l - 4m - 8n = 0, \\ -4l + (7-\lambda)m - 4n = 0, \\ -8l - 4m + (1-\lambda)n = 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

При $\lambda = \lambda_1 = -9$ система набуває вигляду

$$\begin{cases} 10l_1^* - 4m_1^* - 8n_1^* = 0, \\ -4l_1^* + 16m_1^* - 4n_1^* = 0, \\ -8l_1^* - 4m_1^* + 10n_1^* = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 5l_1^* - 2m_1^* - 4n_1^* = 0, \\ l_1^* - 4m_1^* + n_1^* = 0, \\ 4l_1^* + 2m_1^* - 5n_1^* = 0. \end{cases}$$

Якщо від першого рівняння відняти друге, дістанемо третє рівняння, тобто третє рівняння є лінійною комбінацією двох перших. Третє рівняння можна опустити. Тоді

$$\begin{cases} 5l_1^* - 2m_1^* - 4n_1^* = 0, \\ l_1^* - 4m_1^* + n_1^* = 0. \end{cases}$$

Ця однорідна система двох рівнянь з трьома невідомими має вигляд

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0. \end{cases}$$

Якщо, наприклад, $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то, після переносу членів із z у праву частину і розв'язавши одержану систему відносно x і y за формулами Крамера, одержимо

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z, \quad y = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z, \quad z \in \mathbf{R}.$$

Поклавши $\dfrac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = t,\ t \in \mathbf{R}$, матимемо

$$x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} t,\ y = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} t,\ z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} t,\ t \in \mathbf{R}.$$

Згідно з цими формулами, система

$$\begin{cases} 5l_1^* - 2m_1^* - 4n_1^* = 0, \\ l_1^* - 4m_1^* + n_1^* = 0 \end{cases}$$

має розв'язок

$$l_1^* = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} t = -18t,\ m_1^* = -\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} t = -9t,\ n_1^* = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} t = -18t,\ t \in \mathbf{R}.$$

Взявши $t = -\dfrac{1}{9}$, матимемо $l_1^* = 2,\ m_1^* = 1,\ n_1^* = 2$. Нормуючи $\vec{b}_1^*$, одержимо $\vec{b}_1 = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$. При $\lambda = \lambda_2 = 9$ система (5.4) набуває вигляду

$$\begin{cases} -8l_2^* - 4m_2^* - 8n_2^* = 0, \\ -4l_2^* - 2m_2^* - 4n_2^* = 0, \\ -8l_2^* - 4m_2^* - 8n_2^* = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2l_2^* + m_2^* + 2n_2^* = 0, \\ 2l_2^* + m_2^* + 2n_2^* = 0, \\ 2l_2^* + m_2^* + 2n_2^* = 0, \end{cases}$$

або

$$2l_2^* + m_2^* + 2n_2^* = 0. \tag{5.5}$$

Рівняння (5.5) має безліч розв'язків, тобто власному числу $\lambda = 9$ відповідає безліч неколінеарних власних векторів, перпендикулярних до вектора $\vec{b}_1^* = (2,\ 1,\ 2)$. З цих векторів можна довільно вибрати два ортогональних вектори. Наприклад, за $\vec{b}_2^*$ візьмемо вектор з координатами $l_2^* = -1$, $m_2^* = 0$, $n_2^* = 1$ (вони задовольняють рівняння $2l_2^* + m_2^* + 2n_2^* = 0$). Тоді координати власного вектора $\vec{b}_3^* = (\ l_3^*,\ m_3^*,\ n_3^*)$, ортогонального $\vec{b}_1^*$ і $\vec{b}_2^*$ визначаються із системи рівнянь

$$\begin{cases} 2l_3^* + m_3^* + 2n_3^* = 0, \\ -l_3^* + 0 \cdot m_3^* + n_3^* = 0, \end{cases}$$

звідки

$$l_3^* = 1,\ m_3^* = -4,\ n_3^* = 1.$$

Отже, маємо три взаємно перпендикулярних вектори

$$\vec{b}_1^* = (2,\ 1,\ 2),\ \vec{b}_2^* = (-1,\ 0,\ 1),\ \vec{b}_3^* = (1,\ -4,\ 1).$$

Нормуючи їх, дістанемо

$$\vec{b}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),\ \vec{b}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \vec{b}_3 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}},\ -\frac{4}{3\sqrt{2}},\ \frac{1}{3\sqrt{2}}\right).$$

Відповідь: квадратична форма має канонічний вигляд

$$\Phi(\vec{x},\ \vec{x}) = -9\eta_1^2 + 9\eta_2^2 + 9\eta_3^2.$$

Базис, в якому квадратична форма має канонічний вигляд,

$$\vec{b}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),\ \vec{b}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \vec{b}_3 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}},\ -\frac{4}{3\sqrt{2}},\ \frac{1}{3\sqrt{2}}\right).$$

Звести до канонічного вигляду квадратичні форми.

102. $\Phi(\vec{x},\ \vec{x}) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

103. $\Phi(\vec{x},\ \vec{x}) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$.

104. $\Phi(\vec{x},\ \vec{x}) = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

105. $\Phi(\vec{x},\ \vec{x}) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

106. $\Phi(\vec{x},\ \vec{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

Відповіді

3. 1) $|AB| = 5$; 2) $|AB| = 7$. **6.** $A(-2,\ 2)$; $B\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$. **7.** $A\left(2\sqrt{2}, \dfrac{7\pi}{4},\ 5\right)$; $B(6,\ \pi,\ 8)$. **8.** $M\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}, -\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **9.** $A(7,\ 3\sqrt{3})$. **10.** $B(5, -5, 3)$. **11.** $C(-6, -6, -2)$. **12.** 1) так; 2) ні; 3) так. **13.** $\cos\alpha = \dfrac{12}{25}, \cos\beta = -\dfrac{3}{5}, \cos\gamma = -\dfrac{16}{25}$. **14.** $|\vec{F}| = 8, \alpha = 60^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 135^\circ$. **15.** $|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{5}$, $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3\sqrt{5}}$, $\cos\beta = -\dfrac{4}{3\sqrt{5}}$, $\cos\gamma = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **16.** $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **17.** $\vec{a} = (3\sqrt{2},\ 3,\ 3)$. **18.** $\overrightarrow{AB} = (-4,\ 2,\ 4,\ 4, -1)$, $\overrightarrow{BA} = (4, -2, -4, -4,\ 1)$. **19.** $4\overrightarrow{AB} = (-12,\ 4, -4,\ 4)$, $-5\overrightarrow{AB} = (15, -5,\ 5, -5)$. **20.** 1) $(2,\ 1, -1)$; 2) $(2, -7,\ 11)$; 3) $(-6,\ 9, -15)$; 4) $(10, -17,\ 28)$. **21.** $(-4,\ 9, -8, -1, -16)$. **22.** $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$. **24.** $AB = AC = 3$, $BC = 3\sqrt{2}$. **25.** $\vec{a}^\circ = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$, $\vec{b}^\circ = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$, $\vec{c}^\circ = \left(\dfrac{3}{5}, 0, -\dfrac{4}{5}\right)$. **26.** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$. Так,

$\overrightarrow{BE}=(-1)\overrightarrow{AD}+(-1)\overrightarrow{CF}$. **27.** $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CF}=-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. **28.** Вказівка. Достатньо виявити, що вектори, які збігаються з протилежними сторонами чотирикутника, рівні. **30.** $\overrightarrow{AB}=\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{BC}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{CD}=\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$, $\overrightarrow{DA}=-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$. **31.** $C(1,-1,5)$, $D(0,7,-3)$. **32.** 1) неколінеарні; 2) однаково напрямлені, $|\vec{a}|:|\vec{b}|=1:2$; 3) протилежно напрямлені, $|\vec{a}|:|\vec{b}|=2:1$; 4) неколінеарні; 5) однаково напрямлені, $|\vec{a}|:|\vec{b}|=2:3$. **33.** 1) $\vec{d}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$; 2) $\vec{d}=-\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$. **34.** 1) $A_T=\begin{pmatrix}5&3\\0&8\\-7&2\\6&-1\end{pmatrix}$; 2) $B_T=\begin{pmatrix}-1&2&3\\2&0&4\\3&4&-6\end{pmatrix}$. **35.** $A+B=\begin{pmatrix}2&4&2&-1\\0&2&2&-1\end{pmatrix}$.

36. $x_1=-2, x_2=7$. **37.** 1) $\begin{pmatrix}15&-8&10\\6&20&-11\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}-1&0\\1&5\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}31&17&59&-1\\12&5&5&-12\\-14&-8&-32&-37\end{pmatrix}$. **38.** 1) система лінійно незалежна; 2) система лінійно залежна. **39.** 1) $AB=\begin{pmatrix}6&3\\3&-2\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\-1&4&12\\2&2&1\end{pmatrix}$. Матриці не переставні, тому що $AB\neq BA$; 2) $AB=\begin{pmatrix}10&14\\7&10\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}10&14\\7&10\end{pmatrix}$. Матриці переставні. **40.** 1) $AB=E$, $BA=E$; 2) $AB=\begin{pmatrix}15&-6&9\\20&-8&12\\10&-4&6\end{pmatrix}$, $BA=(13)$. **41.** 1) $\begin{pmatrix}31\\12\\9\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}-1&1\\0&9\\7&50\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}4&5&5&0\\2&6&6&0\end{pmatrix}$.

43. 1) 1; 2) 6; 3) 60; 4) 28; 5) –36; 6) 0; 7) 87; 8) 0; 9) 48; 10) 18; 11) 1; 12) $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)$. **44.** 1) $r(A)=3$; 2) $r(A)=2$; 3) $r(A)=3$; 4) $r(A)=1$. **45.** 1) $r(A)=2$; 2) $r(A)=2$. **46.** Так, $\vec{b}=3\vec{a}$; 2) ні; 3) ні. **47.** 1) лінійно залежні, $2\vec{a}+3\vec{b}-5\vec{c}=0$; 2) лінійно незалежні. **48.** $\alpha=\frac{13}{6}$. **49.** 1) лінійно незалежні; 2) лінійно незалежні. **50.** $\vec{c}=2\vec{a}+5\vec{b}$. **51.** 1) $\vec{d}=(-1,5,3)$; 2) $\vec{d}=(2,-1,5)$. **52.** 1) $\vec{x}=(0,2,1,2)$; 2) $\vec{x}=(67,-51,-3,11)$. **53.** 1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$; 2) $7-10\sqrt{3}$. **54.** $\vec{a}\cdot\vec{b}=-22$, тупий. **56.** $m=4$. **57.** Ні. **58.** $\cos\varphi=\frac{4\sqrt{138}}{69}$. **59.** $\vec{a}\cdot\vec{b}=9$. **60.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{4}$. **61.** $\varphi_1=90^\circ, \varphi_2=135^\circ$. **63.** 3. **64.** $10\sqrt{3}$. **65.** 1) $4\sqrt{3}$; 2) $12\sqrt{3}$. **66.** 1) $(3,7,1)$; 2) $(-9,-21,3)$. **67.** $\vec{a}\times\vec{b}=-40\vec{i}+40\vec{j}+20\vec{k}, \sin\varphi=\frac{5}{\sqrt{29}}, S=60$ кв. од. **68.** 1) 14 кв. од.; 2) 10,5 кв. од.; 3) 28 кв. од. **69.** $2\vec{i}+11\vec{j}+7\vec{k}$. **70.** $|\vec{M}|=28; \cos\alpha=\frac{3}{7}, \cos\beta=\frac{6}{7}, \cos\gamma=-\frac{2}{7}$. **71.** –11. **72.** 1) 20 куб. од.; 2) 4 куб. од. **73.** 1) так; 2) ні. **74.** 1) так; 2) так. **75.** $(2,-1,-1), (-1,-2,2), (0,1,-2)$. **76.** 7. **77.** $A(-1,2,4), B(8,-4,2)$. **78.** $(1,2,5)$. **79.** $(3,1,3)$. **80.** $x=2, y=-1, z=0$. **81.** $x=1, y=-1, z=3$. **82.** $x_1=1, x_2=1, x_3=-1, x_4=-1$. **83.** $x=1, y=3, z=5$. **84.** $x=1, y=0, z=-2$.

85. $x\approx-8{,}2$, $y\approx-4{,}6$, $z\approx8{,}1$. **86.** Несумісна. **87.** Несумісна. **88.** Сумісна. **89.** Сумісна. **90.** 1) $x=1, y=-1, z=2$; 2) $x=0, y=-1, z=2$; 3) $x=1, y=0, z=3$; 4) система несумісна; 5) $\begin{cases}x_1=-17x_3+29x_4+5,\\x_2=10x_3-17x_4-2, x_3\in\mathbf{R}, x_4\in\mathbf{R};\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x_1=\frac{9-x_3}{4},\\x_2=\frac{3x_3+3}{2}, x_3\in\mathbf{R};\end{cases}$ 7) система несумісна; 8) система несумісна. **91.** $\vec{x}=(-c_1+c_2, c_1, c_2)$, $c_1\in\mathbf{R}$, $c_2\in\mathbf{R}$. **92.** $\vec{v}_1=(9,-12,1,0), \vec{y}_2=(-8,11,0,1)$ – базис простору розв'язків, розмірність підпростору розв'язків $n-r=4-2=2$. Загальний розв'язок системи: $\vec{x}=c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2$, $c_1\in\mathbf{R}, c_2\in\mathbf{R}$, або $\vec{x}=(9c_1-8c_2, -12c_1+11c_2, c_1, c_2)$; $c_1\in\mathbf{R}, c_2\in\mathbf{R}$. **93.** 1) $x=1, y=1, z=-3$; 2) загальний розв'язок у координатній формі: $x_1=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}x_3$, $x_2=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}x_3$, $x_3\in\mathbf{R}$. Загальний розв'язок відповідної однорідної системи: $\vec{y}=\lambda\vec{u}$, де $\vec{u}=\left(-\frac{1}{4},\frac{9}{2},1\right)$. Загальний розв'язок неоднорідної системи у векторній формі: $\vec{z}=\vec{x}+\lambda\vec{u}$, де $\vec{x}=\left(\frac{9}{4},\frac{3}{2},0\right)$.

94. 1) $A^{-1}=\frac{1}{45}\begin{pmatrix}1&7&10\\5&-10&5\\13&1&-5\end{pmatrix}$; 2) $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4&6&-1\\-1&-1&1\\7&-8&3\end{pmatrix}$. **95.** 1) $x=1, y=0, z=3$; 2) $x=1, y=-1, z=2$; 3) $x=-1, y=2, z=0$; 4) $x_1=1, x_2=0, x_3=-1, x_4=2$. **96.** $\begin{cases}x_1''=x_1-9x_2+9x_3,\\x_2''=-x_1-9x_2+9x_3,\\x_3''=-2x_1+x_2+x_3.\end{cases}$

97. $\begin{cases}x_1''=8x_1-51x_2-9x_3,\\x_2''=25x_1+95x_2+15x_3,\\x_3''=35x_1-60x_2-10x_3.\end{cases}$ **98.** $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. **99.** 1) Вказівка. Переписати функцію так: $\frac{2x+5}{2x-6}=\frac{2x-6+11}{2x-6}=1+\frac{11}{2(x-3)}$, тоді $y=1+\frac{11}{2(x-3)}$, $y-1=\frac{11}{2(x-3)}$, або $(x-3)(y-1)=\frac{11}{2}$. Це рівняння рівнобічної гіперболи $x_1y_1=\frac{11}{2}, O_1(3,1)$; 2) гіпербола $x_1y_1=\frac{19}{4}, O_1(2,5; 2,5)$. **100.** 1) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$, $\vec{X}_1=(1,1,-1)t$, $\vec{X}_2=(3,-1,2)t$, $\vec{X}_3=(1,-5,-4)t$, $t\in\mathbf{R}$, $t\neq0$; 2) $\lambda_1=\lambda_2=9$, $\lambda_3=-9$, $\vec{X}_1=(-1,0,1)t$, $\vec{X}_2=(2,1,2)t$, $\vec{X}_3=(-1,4,-1)t$, $t\in\mathbf{R}_1$, $t\neq0$. **101.** $\lambda_1=6, \lambda_2=3, \lambda_3=9$. Власні вектори: $\vec{X}_1=(2,1,-2)t$, $\vec{X}_2=(1,2,2)t$, $\vec{X}_3=(2,-2,1)t$, $t\in\mathbf{R}$, $t\neq0$. Нормовані власні вектори: $\vec{i}_1=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right), \vec{j}_1=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right), \vec{k}_1=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$. **102.** $4\eta_1^2+4\eta_2^2-2\eta_3^2$. **103.** $9\eta_1^2+6\eta_2^2+3\eta_3^2$. **104.** $3\eta_1^2+6\eta_2^2+9\eta_3^2$. **105.** $6\eta_1^2+6\eta_2^2+9\eta_3^2$. **106.** $\eta_1^2+\sqrt{3}\eta_2^2-\sqrt{3}\eta_3^2$.

Глава 2
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

§ 1. РІВНЯННЯ ПОВЕРХОНЬ І ЛІНІЙ У ПРОСТОРІ*

***Приклади.* 1.** Скласти рівняння лінії, кожна точка якої знаходиться на однаковій відстані від точок $A(4,\ 3)$, $B(6,\ 5)$.

Розв'язання. Нехай точка $M(x,\ y)$ лежить на шуканій лінії. За умовою задачі $\left|\overline{AM}\right|=\left|\overline{BM}\right|$. Підставивши в цю рівність координати точок $A,\ B,\ M$ і використавши формулу для обчислення довжини вектора, одержимо

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-6)^2+(y-5)^2}.$$

Піднесемо обидві частини рівності до квадрата, зведемо подібні, скоротимо на загальний множник і одержимо рівняння лінії $x+y-9=0$.

Відповідь: рівняння лінії $x+y-9=0$.

2. Написати рівняння кривої, сума квадратів відстаней від кожної точки якої до точок $A(2,\ 3)$ та $B(4,\ 5)$ дорівнює 54.

Розв'язання. Нехай точка $M(x,\ y)$ лежить на шуканій кривій. Із умови задачі $\left|\overline{AM}\right|^2+\left|\overline{BM}\right|^2=54$. Якщо підставимо в цю рівність координати точок $A,\ B,\ M$ і використаємо формулу для обчислення довжини вектора, одержимо

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(x-4)^2+(y-5)^2=54.$$

Розкривши дужки, після зведення подібних запишемо

$$2x^2+2y^2-12x-16y=0.$$

Виділивши повні квадрати, знайдемо

$$(x-3)^2+(y-4)^2=25.$$

Це рівняння кола радіуса 5 з центром $C(3,\ 4)$.

Відповідь: $(x-3)^2+(y-4)^2=25$.

*Див. ч. 1, гл. 2, підрозд. 1.2–1.5.

1. Написати рівняння лінії, кожна точка якої лежить на однаковій відстані від точок $A(3,\ 2)$ та $B(2,\ 3)$.

2. Написати рівняння кривої, сума квадратів відстаней від кожної точки якої до точок $A(-3,\ 0)$ та $B(3,\ 0)$ дорівнює 50.

3. Написати рівняння кривої, сума відстаней від кожної точки якої до точок $A(-2,\ 0)$ та $B(2,\ 0)$ дорівнює 25.

4. Написати рівняння кривої, кожна точка якої лежить на однаковій відстані від точки $A(2,\ 2)$ і осі Ox.

5. Скласти рівняння лінії, відстань від кожної точки якої до точки $A(-4,\ 0)$ утричі більша, ніж до початку координат.

6. Скласти рівняння лінії, відстань від кожної точки якої до точки $A(4,\ 0)$ удвічі більша, ніж до точки $B(1,\ 0)$.

7. Скласти рівняння лінії, відстань кожної точки якої до початку координат та до точки $A(5,\ 0)$ відносяться як $2:1$.

8. Вивести рівняння поверхні, різниця квадратів відстаней від кожної точки якої до точок $A(2,\ 3,\ -5)$ та $B(2,\ -7,\ -5)$ дорівнює 13.

9. Вивести рівняння поверхні, сума відстаней від кожної точки якої до точок $A(0,\ 0,\ -4)$ та $B(0,\ 0,\ 4)$ дорівнює 10.

10. Знайти точки перетину поверхні $\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{9}=1$ та лінії $\begin{cases}2x+y-10=0;\\ 2y+3z-2=0.\end{cases}$

§ 2. ПЛОЩИНА*

***Приклади.* 1.** Знайти відстань від точки $A(2,\ 7,\ 1)$ до площини

$$4x+2y-3z+7=0.$$

Розв'язання. Знайдемо нормувальний множник

$$M=\frac{-1}{\sqrt{4^2+2^2+3^2}}=-\frac{1}{\sqrt{29}}.$$

*Див. ч. 1, гл. 2, підрозд. 2.1–2.11.

Запишемо рівняння площини у нормальному вигляді

$$-\frac{4x}{\sqrt{29}}-\frac{2y}{\sqrt{29}}+\frac{3z}{\sqrt{29}}-\frac{7}{\sqrt{29}}=0.$$

Підставивши координати точки A у нормальне рівняння площини, одержимо відхилення точки від площини

$$\delta=\frac{-4\cdot 2}{\sqrt{29}}-\frac{2\cdot 7}{\sqrt{29}}+\frac{3\cdot 1}{\sqrt{29}}-\frac{7}{\sqrt{29}}=\frac{-26}{\sqrt{29}}.$$

Відстань від точки A до площини

$$d=|\ \delta\ |=\frac{|-26|}{\sqrt{29}}=\frac{26}{\sqrt{29}}.$$

Відповідь: $d=\frac{26}{\sqrt{29}}$.

2. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $A(3,\ 2,\ 4)$ паралельно векторам $\vec{a}=(4,\ 2,\ 7)$ і $\vec{b}=(-1,\ 2,\ 3)$.

Розв'язання. Відповідно до формули (2.18) [ч. 1, с. 118], послідовно обчислюючи, одержимо

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 2 & 7\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix}=-8\vec{i}-19\vec{j}+10\vec{k},$$

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=-8(x-3)-19(y-2)+10(z-4).$$

Прирівнявши цей вираз до нуля, розкривши дужки та звівши подібні, знаходимо

$$8x+19y-10z-22=0.$$

Відповідь: рівняння площини $8x+19y-10z-22=0$.

3. Знайти косинус кута між площинами $x-2y+z-6=0$ та $2x+y+3z=0$.

Розв'язання. Відповідно до формули (2.23) [ч. 1, с. 119] маємо

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 2-2\cdot 1+1\cdot 3}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\ \sqrt{2^2+1^2+3^2}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

Відповідь: $\cos\varphi=\frac{3}{2\sqrt{21}}$.

4. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $A(2,\ 3,\ 1)$, $B(4,\ 1,-1)$ і $C(0,\ 2,\ 1)$.

Розв'язання. Відповідно до формули (2.15) [ч. 1, с. 117] маємо

$$\begin{vmatrix}x-2 & y-3 & z-1\\ 2 & -2 & -2\\ -2 & -1 & 0\end{vmatrix}=0.$$

Розкривши визначник та звівши подібні, знайдемо $x-2y+3z+1=0$.

Відповідь: рівняння площини $x-2y+3z+1=0$.

11. Знайти косинуси кутів нормалі до площини $2x+3y+6z-12=0$ з осями координат.

12. Написати рівняння площини, яка проходить через точки $(4,\ 2,\ 5)$, $(0,\ 7,\ 2)$ та $(0,\ 2,\ 7)$.

13. Відомі точки $A(4,\ 4,\ 10)$, $B(4,\ 10,\ 2)$, $C(2,\ 8,\ 4)$ і $D\ (0,\ 6,\ 4)$. Знайти косинус кута між площинами ABC та ABD.

14. Відомі точки $A(0,\ -1,\ 3)$ та $B(1,\ 3,\ 5)$. Написати рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно до вектора $\overline{AB}$.

15. Через точку $M(-1,\ 2,\ 3)$ проведена площина, перпендикулярна до OM, де O – початок координат. Написати рівняння площини.

16. Написати рівняння площини, яка паралельна осі Ox і проходить через точки $A(0,\ 1,\ 3)$ та $B(2,\ 4,\ 5)$.

17. Написати рівняння площини, яка проходить через вісь Ox і точку $M(0,-2,\ 3)$.

18. Написати рівняння площини, яка проходить через вісь Oz і точку $M(2,\ -4,\ 3)$.

19. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $M(2,-1,\ 3)$ і відтинає на осях координат рівні відрізки.

20. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $M(-4,\ 0,\ 4)$ і відтинає на осях Ox та Oy відрізки 4 і 3.

21. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $M(1,\ -3,\ 5)$ і відтинає на осях Oy та Oz удвічі більші відрізки, ніж на осі Ox.

22. Знайти кут між площинами $x-2y+3z-8=0$ та $x+z-6=0$.

23. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $(2,\ 2,\ -2)$ паралельно площині $x-2y-3z=0$.

24. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $(-1, -1, 2)$ перпендикулярно до площин $x-2y+z-4=0$ та $x+2y-2z+4=0$.

25. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $(2, -1, 1)$ перпендикулярно до площин $3x+2y-z+4=0$ та $x+y+z-3=0$.

26. Написати рівняння площини, яка проходить через точки $A(-1,-2, 0)$ та $B(1, 1, 2)$ перпендикулярно до площини $x+2y+2z-4=0$.

27. Написати рівняння площини, яка проходить через точки $A(0, -5, 0)$ та $B(0, 0, 2)$ перпендикулярно до площини $x+5y+2z-10=0$.

28. Написати рівняння площини, яка проходить через точки $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, 2)$ та $C(1, 1, 4)$.

29. Написати рівняння площини, яка проходить через вісь Oz і утворює з площиною $2x+y-5z=0$ кут $60°$.

30. Знайти відстань від точки $A(5, 1, -1)$ до площини $x-2y-2z+4=0$.

31. Знайти відстань від точки $(4, 3, 0)$ до площини, яка проходить через точки $(1, 3, 0)$, $(4, -1, 2)$ та $(3, 0, 1)$.

32. Знайти відстань між паралельними площинами $4x+3y-5z-8=0$ та $4x+3y-5z+12=0$.

33. Написати рівняння площин, паралельних площині $x-2y+2z-5=0$ і віддалених від неї на дві одиниці довжини.

34. Написати рівняння площини, яка проходить через лінію перетину площин $2x-y+3z-6=0$, $x+2y-z+3=0$ і через точку $(1, 2, 4)$.

35. Знайти точку перетину площин $2x-y+3z-9=0$, $x+2y+2z-3=0$ та $3x+y-4z+6=0$.

§ 3. ПРЯМА НА КООРДИНАТНІЙ ПЛОЩИНІ*

Приклади. **1.** Знайти рівняння сторони AB трикутника ABC на координатній площині xOy, якщо рівняння сторін AC і BC відповідно мають вигляд $x+y-2=0$ і $2x-3y+6=0$, а $D(6, 2)$ – точка перетину медіан трикутника.

*Див. ч. 1, гл. 2, підрозд. 2.12, 2.13.

Р о з в ' я з а н н я. Як видно з рис. 2.1, C – точка перетину прямих AC і BC. Із системи $\begin{cases} x+y-2=0, \\ 2x-3y+6=0 \end{cases}$ знайдемо координати точки C, $x=0$, $y=2$, тобто маємо $C(0, 2)$. Оскільки медіани в точці перетину діляться у відношенні $2:1$, то координати точки $E\left(\overline{CD}=2\overline{DE}\right)$: $x=9$, $y=2$, $E(9, 2)$. Введемо позначення $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

Використовуючи умову, що точка E ділить відрізок AB навпіл, запишемо

$$\frac{x_1+x_2}{2}=9, \quad \frac{y_1+y_2}{2}=2.$$

Координати точок A і B задовольняють рівняння для сторін AC і BC:

$$x_1+y_1-2=0, \quad 2x_2-3y_2+6=0.$$

Останні чотири рівняння містять невідомі x_1, y_1, x_2 і y_2. Розв'язуючи їх разом, одержимо $x_1=7{,}2$; $y_1=-5{,}2$; $x_2=10{,}8$; $y_2=0{,}2$. Знайдемо рівняння прямої AB, підставивши координати точок A і E в рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки:

$$\frac{x-9}{7{,}2-9}=\frac{y-2}{-5{,}2-2}; \quad 4x-y-34=0.$$

Відповідь: рівняння сторони AB має вигляд $4x-y-34=0$.

2. Знайти відстань від точки $A(3, 2)$ до прямої $y=\frac{4}{3}x+2$.

Р о з в ' я з а н н я. Запишемо рівняння прямої у вигляді $4x-3y+6=0$. Знайдемо нормувальний множник

$$M_1=\frac{-1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=-\frac{1}{5}.$$

Рівняння прямої в нормальній формі має вигляд

$$-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{6}{5}=0.$$

Відстань від точки A до прямої

$$d=\left|-\frac{4}{5}\cdot 3+\frac{3}{5}\cdot 2-\frac{6}{5}\right|=$$

$$=\left|\frac{-12+6-6}{5}\right|=\frac{12}{5}=2{,}4.$$

Відповідь: $d=2{,}4$.

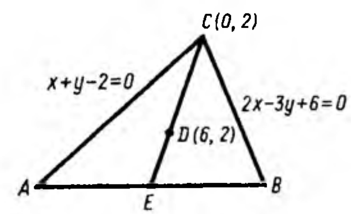

Рис. 2.1

36. Відомі точки $A(-4,\ 0)$ і $B(0,\ 6)$. Вивести рівняння прямої, яка проходить через середину відрізка AB і відсікає на осі Ox відрізок удвічі більший, ніж на осі Oy.

37. Сторони AB та BC паралелограма задані рівняннями $2x-y+5=0$ та $x+2y-4=0$, діагоналі його перетинаються в точці $M(1,\ 4)$. Знайти довжини його висот.

38. Рівняння однієї сторони квадрата $x+3y-5=0$. Скласти рівняння трьох інших сторін квадрата, якщо $P(-1,\ 0)$ – точка перетину його діагоналей .

39. Відомі рівняння однієї із сторін ромба $x-3y+10=0$ і однієї із його діагоналей $x+4y-4=0$. Діагоналі ромба перетинаються в точці $P(0,\ 1)$. Знайти рівняння решти сторін ромба.

40. Рівняння двох сторін паралелограма $x+2y+2=0$ і $x+y-4=0$, рівняння однієї його діагоналі $x-2=0$. Знайти координати вершин паралелограма.

41. Відомі дві вершини $(-3,\ 3)$ і $(5,\ -1)$ та точка $(4,\ 3)$ перетину висот трикутника. Скласти рівняння його сторін.

42. Знайти кути і площу трикутника, утвореного прямими $y=2x,\ y=-2x$ і $y=x+b$.

43. Дві взаємно перпендикулярні прямі, проведені з початку координат, утворюють з прямою $2x+y=a$ рівнобедрений трикутник. Знайти площу цього трикутника.

44. Знайти внутрішні кути трикутника, якщо відомі рівняння його сторін $x-3y+3=0(AB)$ і $x+3y+3=0(AC)$ та координати точки $D(-1,\ 3)$ висоти AD на основі трикутника.

45. У трикутнику ABC відомі: 1) рівняння сторони AB $3x+2y=12$; 2) рівняння висоти BM $x+2y=4$; 3) рівняння висоти AM $4x+y=6$, де M – точка перетину висот. Написати рівняння сторін AC, BC і висоти CM.

46. Дві сторони паралелограма задані рівняннями $y=x-2$ і $5y=x+6$. Діагоналі його перетинаються в початку координат. Написати рівняння двох інших сторін паралелограма та його діагоналей.

47. Дано трикутник з вершинами $A(0,\ -4)$, $B(3,\ 0)$ і $C(0,\ 6)$. Знайти відстань до вершини C від бісектриси кута A.

48. Побудувати області, координати точок яких задовольняють нерівності: 1) $x-2<y<0$ і $x>0$; 2) $-2<y<x<2$; 3) $2<2x+y<8,\ x>0$ і $y>0$.

49. Знайти проекцію точки $A(5,\ 7)$ на пряму $x+2y-4=0$.

50. Рівняння двох сторін трикутника $5x-4y+15=0$ і $4x+y-9=0$. Його медіани перетинаються в точці $(0,\ 2)$. Скласти рівняння третьої сторони трикутника.

51. Відомі дві вершини $(2,\ -2)$ і $(3,\ -2)$ і точка $(1,\ 0)$ перетину медіан трикутника. Скласти рівняння висоти трикутника, проведеної через третю вершину.

52. Рівняння двох висот трикутника $x+y=4$ і $y=2x$. Координати однієї з його вершин $(0,\ 2)$. Скласти рівняння сторін трикутника.

53. Дві сторони трикутника задані рівняннями $5x-2y=8$ і $3x-2y-8=0$, а середина третьої сторони збігається з початком координат. Скласти рівняння цієї сторони.

§ 4. ПРЯМА У ТРИВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ[*]

Приклади. **1.** Знайти відстань від точки $A(6,\ 2,\ 1)$ до прямої $\vec r=\vec r_0+t\vec s$, де $\vec r=(x,\ y,\ z)$, $\vec r_0=(8,\ 5,\ -5)$, $\vec s=(3,\ 2,\ 2)$, t параметр, $\vec r_0$ радіус-вектор точки на прямій (рис. 2.2).

Розв'язання. Нехай $\overline{M_0M_1}=\vec s=(3,\ 2,\ 2)$. Знайдемо компоненти вектора $\overline{M_0A}=(-2,\ -3,\ 6)$. Обчислюючи векторний добуток $\overline{M_0A}\times\vec s$ і його модуль, одержимо

$$\overline{M_0A}\times\vec s=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ -2 & -3 & 6\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=-18\vec i+22\vec j+5\vec k,$$

$$\left|\overline{MA}\times\vec s\right|=\sqrt{324+484+25}=\sqrt{833}.$$

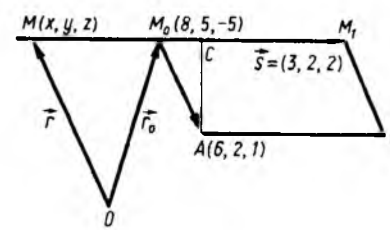

Рис. 2.2

Згідно з означенням векторного добутку площа паралелограма M_0M_1BA дорівнює $\sqrt{833}$.

[*] Див. ч. 1, гл. 2, підрозд. 3.1–3.5.

Знайдемо $\left|\overline{M_0M_1}\right| = |\vec{s}| = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$. Це число дорівнює довжині основи M_0M_1 паралелограма M_0M_1BA. Тому відстань від точки A до прямої M_0M знайдемо як довжину висоти AC цього паралелограма:

$$|AC| = \frac{\sqrt{833}}{\sqrt{17}} = \sqrt{49} = 7.$$

Відповідь: відстань від точки до прямої дорівнює 7.

2. Знайти відстань між прямими

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-6}{4} \text{ і } \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{2}.$$

Розв'язання. Нехай на рис. 2.3 $A(1, -3, 6)$ і $\vec{S}_1 = (2, 3, 4)$ – точка і напрямний вектор першої прямої, $B(-3, 2, 3)$ і $\vec{S}_2 = (1, 3, 2)$ – точка і напрямний вектор другої прямої. Знайдемо вектори $\overline{AB} = (-4, 5, -3)$ і $\vec{n} = \vec{S}_1 \times \vec{S}_2$:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 3\vec{k}.$$

Обчислимо довжину вектора $\vec{n}$ [ч. 1, с. 46] і модуль скалярного добутку $\vec{n} \cdot \overline{AB}$:

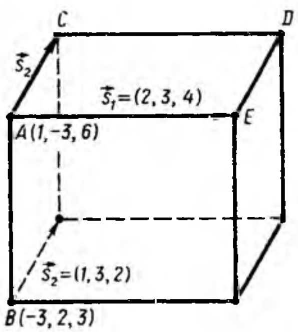

Рис. 2.3

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} = \sqrt{45},$$

$$\left|\vec{n} \cdot \overline{AB}\right| = |24 - 9| = 15.$$

Геометричний зміст $|\vec{n}|$ – площа основи $ACDE$ паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \overline{AB}$, а $\left|\vec{n} \cdot \overline{AB}\right|$ – об'єм цього паралелепіпеда. Тому відстань між прямими дорівнює висоті паралелепіпеда:

$$d = \frac{\left|\vec{n} \cdot \overline{AB}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{15}{\sqrt{45}} = \sqrt{5}.$$

Відповідь: відстань між прямими $d = \sqrt{5}$.

Записати рівняння прямої L у канонічній формі.

54. $L: \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = t - 2, \\ z = 3t + 4. \end{cases}$ **55.** $L: \begin{cases} x + 2y + 3z - 13 = 0, \\ 3x + y + 4z - 14 = 0. \end{cases}$

Знайти косинус кута між прямими L_1 і L_2.

56. $L_1: \begin{cases} x - y + z - 4 = 0, \\ 2x + y - 2z + 5 = 0, \end{cases}$ $L_2: \begin{cases} x + y + z - 4 = 0, \\ 2x + 3y - z - 6 = 0. \end{cases}$

57. $L_1: \begin{cases} 2x - y - z = 0, \\ 2x - z + 5 = 0, \end{cases}$ $L_2: \begin{cases} 3x - 2y + 8 = 0, \\ z = 3x. \end{cases}$

Написати рівняння прямої, яка проходить через точку A паралельно прямій L.

58. $A(-4, 3, 0)$, $L: \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0, \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$

59. $A(-1, 2, 2)$, $L: \begin{cases} x - y = 2, \\ y = 2. \end{cases}$

60. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(4, 3, 0)$ паралельно векторові $\vec{S} = (-1, 1, 1)$.

61. Знайти напрямний вектор прямої

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ y = x. \end{cases}$$

62. Написати рівняння перпендикулярів, опущених з точки $A(2, -3, 4)$ на осі Oz і Oy.

63. Побудувати пряму $x = 4$, $y = 3$ і знайти її напрямний вектор.

64. Побудувати прямі: 1) $y = 3$, $z = 2$; 2) $y = 2$, $z = x + 1$; 3) $x = 4$, $z = y$. Визначити їх напрямні вектори.

65. Написати рівняння прямої, яка проходить через точки $A(-1, 2, 3)$ і $B(2, 6, -2)$, і знайти її напрямні косинуси.

66. Написати рівняння траєкторії точки $M(x, y, z)$, яка виходить із точки $A(4, -3, 1)$ і рухається зі швидкістю $\vec{v} = (2, 3, 1)$.

67. Написати параметричні рівняння прямої, яка: 1) проходить через точку $(-2, 1, -1)$ і паралельна векторові $\vec{p} = (1, -2, 3)$; 2) проходить через точки $A(3, -1, 4)$ і $B(1, 1, 2)$.

68. Знайти кут між прямою $x = 2z - 1$, $y = 1 - 2z$ і прямою, яка проходить через початок координат і точку $(1, -1, -1)$.

69. Знайти кут між прямими $x-y+z-4=0$, $2x+y-2z+5=0$ і $x+y+z-4=0$, $2x+3y-z-6=0$.

70. Довести, що прямі $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=z$ і $x=z+1$, $y=1-z$ взаємно перпендикулярні.

71. Знайти відстань від точки $A(2,-1,\ 3)$ до прямої $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{5}$.

72. Знайти відстань між паралельними прямими

$x-2=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+3}{2}$ і $x-1=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{2}$.

Знайти відстань між прямими L_1 і L_2.

73. $L_1:\begin{cases}x=3+2t,\\ y=10-3t,\\ z=3+4t,\end{cases}$ $L_2:\begin{cases}x=1+3t,\\ y=1-2t,\\ z=1+3t.\end{cases}$

74. $L_1:\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+1}{6}=\dfrac{z-1}{-2}$, $L_2:\dfrac{x-5}{-6}=\dfrac{y}{-12}=\dfrac{z}{4}$.

75. $L_1:\begin{cases}x+y+z-1=0,\\ x+3y-z+2=0,\end{cases}$ $L_2:\begin{cases}x+3y+z+2=0,\\ x+2y-z+1=0.\end{cases}$

76. Точки $A(-1,\ -3,\ 1)$, $B(5,\ 3,\ 8)$, $C(-1,\ -3,\ 5)$, $D(2,\ 1,\ -4)$ є вершинами трикутної піраміди. Знайти косинус кута між перехресними ребрами AD і BC.

§ 5. ПРЯМА І ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ*

***Приклади.* 1.** Знайти точку перетину прямої $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+3}{2}$ і площини $3x+4y+7z-16=0$, а також синус кута між ними.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої у параметричному вигляді

$$\begin{cases}x=2t+3,\\ y=3t-1,\\ z=2t-3.\end{cases}$$

* Див. ч. 1, гл. 2, підрозд. 4.1–4.6.

Підставивши x, y, z у рівняння площини, одержимо $6t+9+12t-4+14t-21-16=0$, звідки $t=1$. Якщо у параметричних рівняннях прямої покласти $t=1$, то $x=5$, $y=2$, $z=-1$. Ці числа є координатами точки перетину прямої і площини.

Синус кута між прямою і площиною знайдемо за формулою 4.2 [ч. 1, с. 136]:

$$\sin\varphi=\frac{|3\cdot2+4\cdot3+7\cdot2|}{\sqrt{3^2+4^2+7^2}\sqrt{2^2+3^2+2^2}}=\frac{32}{\sqrt{74}\sqrt{17}}.$$

Відповідь: $(5,\ 2,\ -1)$; $\dfrac{32}{\sqrt{74}\sqrt{17}}$.

2. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $A(4,\ 3,\ 7)$ і пряму $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-3}{2}$.

Розв'язання. Рівняння прямої в загальному вигляді:

$$\begin{cases}4x-8=3y+3,\\ 2y+2=4z-12,\end{cases}\quad \text{або}\quad \begin{cases}4x+3y-11=0,\\ y-2z+7=0.\end{cases}$$

Запишемо рівняння пучка площин $4x-3y-11+\lambda(y-2z+7)=0$, які проходять через дану пряму. Тут λ – параметр, який потрібно обчислити за умови, що координати точки A задовольняють рівняння площини. Підставивши координати точки A в рівняння пучка площин, одержимо $\lambda=-1$. При $\lambda=-1$ рівняння пучка площин переходить у рівняння шуканої площини:

$$2x-2y+z-9=0.$$

Відповідь: рівняння площини $2x-2y+z-9=0$.

3. Знайти рівняння площини, яка проходить через пряму $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-1}{2}$ паралельно прямій $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+3}{-4}$.

Розв'язання. Шукатимемо рівняння площини у вигляді $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. $M(x,\ y,\ z)$ – точка на площині; $\vec{n}=(A,\ B,\ C)$ – вектор, перпендикулярний до площини. Координати точки $M_0(2,\ -3,\ 1)$, яка лежить на першій прямій, мають задовольняти і рівняння шуканої площини, оскільки пряма лежить у площині. Нормальний вектор до шуканої площини $\vec{n}=(A,\ B,\ C)$ можна знайти як векторний добуток напрямних векторів $\vec{s}_1=(3,\ 4,\ 2)$ і $\vec{s}_2=(2,\ 3,\ -4)$ даних прямих:

$$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 3&4&2\\ 2&3&-4\end{vmatrix}=-22\vec{i}+16\vec{j}+\vec{k}.$$

Отже, $A=-22$, $B=16$, $C=1$. Підставивши значення A, B, C і координати точки M_0 у рівняння площини, одержимо $-22(x-2)+16(y+3)+(z-1)=0$, або $22x-16y-z-91=0$.

Відповідь: рівняння площини $22x-16y-z-91=0$.

4. Знайти відстань між перехресними прямими $\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{s}_1t$ і $\vec{r}=\vec{r}_2+\vec{s}_2t$, де $\vec{r}_1=(3,\ 4,\ 2)$, $\vec{s}_1=(-1,\ 2,\ 4)$, $\vec{r}_2=(4,\ 3,\ -1)$, $\vec{s}_2=(3,\ 7,\ 2)$.

Розв'язання. Знайдемо послідовно $\vec{r}_2-\vec{r}_1=(1,\ -1,\ -3)$;

$$\vec{s}_2\times\vec{s}_1=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 7 & 2\\ -1 & 2 & 4\end{vmatrix}=24\vec{i}-14\vec{j}+13\vec{k},$$

$$(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\cdot(\vec{s}_2\times\vec{s}_1)=24+14-39=-1,$$

$$|\vec{s}_2\times\vec{s}_1|=\sqrt{24^2+(-14)^2+13^2}=\sqrt{941}.$$

За формулою [ч. 1, с. 135] одержимо

$$d=\frac{|(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\cdot(\vec{s}_2\times\vec{s}_1)|}{|\vec{s}_2\times\vec{s}_1|}=\frac{|-1|}{\sqrt{941}}=\frac{1}{\sqrt{941}}.$$

Відповідь: $d=\dfrac{1}{\sqrt{941}}$

77. Знайти синус кута між площиною $x+y+z-4=0$ та прямою $\begin{cases}y=3x-1,\\ 2z=2-3x.\end{cases}$

78. Знайти точку перетину площини $x+y-z=0$ прямою, яка проходить через точки $A(0,\ 0,\ 4)$ і $B(2,\ 2,\ 0)$.

79. Знайти кут між площиною $y=z$ і прямою $\begin{cases}x=1-z,\\ y=2.\end{cases}$

80. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $A(-1,\ 2,\ 3)$ і перпендикулярна до прямої $\begin{cases}x=2,\\ y-z=1.\end{cases}$

81. Написати рівняння площини, що проходить через точку $A(3,\ 4,\ 0)$ і пряму $x-2=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{3}$.

82. Написати рівняння площини, яка проходить через пряму $x-1=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{3}$ і перпендикулярна до площини $2x+3y-z=4$.

83. Знайти проекцію точки $A(3,\ 1,\ -1)$ на площину $3x+y+z-20=0$.

84. Знайти проекцію точки $A(1,\ 2,\ 8)$ на пряму $\dfrac{x-1}{2}=-y=z$.

85. Написати рівняння площини, яка проходить через паралельні прямі $\dfrac{x-3}{2}=y=\dfrac{z-1}{2}$ і $\dfrac{x+1}{2}=y-1=\dfrac{z}{2}$.

86. Знайти точку перетину площини $3x-2y+z=3$ прямою $x=2t-1$, $y=t+2$, $z=-t+t$.

87. Знайти точку перетину площини $x+2y+3z-29=0$ прямою $\dfrac{x}{2}=y-1=\dfrac{z+1}{2}$.

88. Знайти проекцію точки $(3,\ 1,\ -1)$ на площину $x+2y+3z-30=0$.

89. Знайти проекцію точки $(2,\ 3,\ 4)$ на пряму $x=y=z$.

90. Довести, що пряма $\dfrac{x+1}{2}=1+y=\dfrac{z-3}{3}$ паралельна площині $2x+y-z=0$, а пряма $\dfrac{x+1}{2}=-y-1=\dfrac{z+3}{3}$ лежить у цій площині.

91. Написати рівняння прямої, яка проходить через початок координат і утворює з площинами $4y=3x$, $y=0$, $z=0$ рівні між собою кути.

92. Довести, що прямі $\begin{cases}x=z-2,\\ y=2z+1\end{cases}$ і $\dfrac{x-2}{3}=y-4=z-2$ перетинаються, і написати рівняння площини, в якій вони розміщені.

93. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $(2,\ 1,\ 0)$ на пряму $x=3z-1$, $y=2z$.

94. Побудувати площину $y=z$, пряму $x=1-z$, $y=2$ і знайти: 1) точку їх перетину; 2) кут між ними.

95. Довести, що прямі $x+3=\dfrac{y+1}{2}=z+1$ і $x=3z-4$, $y=z+2$ перетинаються, знайти точку їх перетину.

96. Знайти відстань між прямими $x+1=y=z-1$ і $x=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$.

§ 6. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ*

Приклади. **1.** Скласти канонічне рівняння еліпса, знаючи, що відстань між фокусами $|F_1F_2| = 6$, а більша піввісь $a = 5$.

Розв'язання. Оскільки координати фокусів еліпса $F_1(c,\ 0)$ і $F_2(-c,\ 0)$, то відстань між фокусами дорівнює $2c$, $c = 3$. За формулою $a^2 - c^2 = b^2$ обчислюємо $b = 4$. Тоді рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Відповідь: рівняння еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

2. На гіперболі $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$ знайти точку, відстань від якої до однієї асимптоти втричі менша, ніж до другої.

Розв'язання. Рівняння асимптот $y = \frac{4}{7}x$ і $y = -\frac{4}{7}x$. Нехай $A(x_0,\ y_0)$ – точка на гіперболі, яка задовольняє умову задачі: d_1 і d_2 – відстані від точки A до першої і другої асимптот. Тоді

$$d_1 = \frac{|4x_0 - 7y_0|}{\sqrt{16+49}}, \quad d_2 = \frac{|4x_0 + 7y_0|}{\sqrt{16+49}}.$$

За умовою задачі $3d_1 = d_2$, тому

$$3|4x_0 - 7y_0| = |4x_0 + 7y_0|. \qquad (6.1)$$

Нехай для однозначності $4x_0 + 7y_0 > 0$ і $4x_0 - 7y_0 > 0$. Тоді з рівняння (6.1) маємо один з розв'язків:

$$x_0 = 3,\ 5y_0.$$

Оскільки точка A лежить на гіперболі, запишемо рівняння

$$\frac{x_0^2}{49} - \frac{y_0^2}{16} = 1,$$

розв'язуючи яке сумісно з рівнянням $x_0 = 3,\ 5y_0$ дістанемо точку $A\left(\frac{14}{\sqrt{3}},\ \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$.

*Див. ч. 1, гл. 2, підрозд. 5.1–5.7.

Із рівняння гіперболи видно, що вона симетрична відносно координатних осей. Тому точки

$$B\left(\frac{-14}{\sqrt{3}},\ \frac{4}{\sqrt{3}}\right),\quad C\left(\frac{14}{\sqrt{3}},\ \frac{-4}{\sqrt{3}}\right),\quad D\left(\frac{-14}{\sqrt{3}},\ \frac{-4}{\sqrt{3}}\right)$$

також задовольняють умову задачі, тобто рівняння (6.1).

Відповідь: $\left(\pm\frac{14}{\sqrt{3}},\ \pm\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$.

3. Визначити координати вершин параболи, її параметр і напрям осі, якщо парабола задана рівнянням

$$x^2 - 6x - 4y + 29 = 0.$$

Розв'язання. Рівняння параболи можна записати у вигляді

$$x^2 - 6x + 9 = 4y - 20, \quad (x-3)^2 = 4(y-5).$$

Перейдемо до нової системи координат за формулами $x - 3 = x'$, $y - 5 = y'$.

Тоді одержимо $(x')^2 = 4y'$. Порівнюючи одержане рівняння з канонічним $x^2 = 2qy$, робимо висновок, що координати вершини параболи $B(3,\ 5)$, параметр дорівнює 2, вісь симетрії паралельна осі Oy.

Відповідь: $B(3,\ 5)$, $q = 2$, вісь симетрії вертикальна.

4. Написати канонічне рівняння кривої

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0, \qquad (6.2)$$

визначити її тип і знайти систему координат, в якій рівняння має канонічний вигляд.

Розв'язання. При розв'язанні цієї задачі використовується методика приведення квадратичної форми до канонічного вигляду [ч.1, с. 154, 155]. Ліва частина рівняння (6.2) містить квадратичну форму, матриця якої має вигляд $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Її власні числа: $\lambda_1 = 8$, $\lambda = -2$; власні вектори:

$$\vec{b}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \vec{b}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Виконуючи перетворення координат $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$, одержимо

$$8(x')^2 - 2(y')^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}x' + \frac{12}{\sqrt{2}}y' - 13 = 0.$$

Із одержаного рівняння видно, що по кожній з нових змінних x' і y' можливо вилучити повний квадрат:

$$8(x')^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}x' = 8\left(x' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4,$$

$$-2(y')^2 + \frac{12}{\sqrt{2}}y' = -2\left(y' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 9.$$

Після заміни змінних $x'' = x' - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y'' = y' - \frac{3}{\sqrt{2}}$, що відповідає паралельному перенесенню координатних осей, одержимо

$$8(x'')^2 - 2(y'')^2 - 8 = 0, \text{ або } \frac{(x'')^2}{1} - \frac{(y'')^2}{4} = 1.$$

Це канонічне рівняння гіперболи. Після перетворення координат воно має вигляд

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' + y'') + 2, \ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' - y'') - 1.$$

Канонічний вигляд рівняння набуває в системі координат $\left(0' \ \vec{b}_1, \vec{b}_2\right)$,

де $0'(2, -1)$, $\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$, $\vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$.

Відповідь: гіпербола, $(x'')^2 - \frac{y''}{4} = 1$, $0'(2, -1)$, $\vec{b}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{b}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

5. За допомогою наведеної нижче програми ELLIPS, написаної на алгоритмічній мові GWBASIC, визначити геометричний зміст рівняння (6.2). У випадку центральної кривої знайти систему координат, в якій рівняння має канонічний вигляд.

Розв'язання. З урахуванням позначень змінних у програмі ELLIPS рівняння (6.2) має вигляд

$$A11x^2 + 2A12xy + A22y^2 + 2A13x + 2A23y + A33 = 0.$$

Власні числа λ_1 і λ_2 квадратичної форми позначені в програмі L1 і L2, координати власних векторів позначені (N1, N2) та (N3, N4). Координати центра кривої позначені X0, Y0. Канонічні рівняння еліпса, гіперболи та параболи відповідають тому випадку, коли фокуси кривих другого порядку лежать на осі Ox.

Текст програми має такий вигляд:

```
2 CLS
10 PRINT "Визначення геометричного змісту рівняння
A11*X*X+2A12*X*Y+A22*Y*Y+2A13*X+2A23*Y+A33=0
20 INPUT "Введіть коефіцієнти: A11 = ";A11
30 INPUT "2A12 ="; A12: A12 = A12/2: INPUT "A22 ="; A22
40 INPUT "2A13 ="; A13: A13 = A13/2
50 INPUT "2A23 ="; A23: A23 = A23/2: INPUT "A33 ="; A33
60 I = A11+A22: D = A11*A22–A12*A12
70 A = A13*(A12*A23–A22*A13) – A23*(A11*A23–A12*A13) + A33*D
80 DE = SQR(I*I–4*D):L1 = (I–DE) /2:L2 = (I+DE) /2
90 IF L1<L2 THEN L = L1: L1 = L2: L2 = L
100 A1 = A22*A33–A23*A23+A11*A33–A13*A13
105 IF A12 = 0 THEN L1 = A11:L2 = A22: N1 = 1:N2 = 0: N3 = 0: N4 = 1:
GOTO 130
110 N5 = SQR (A12 ^ 2+(L1–A11) ^2): N6 = SQR (A12^2+(L2–A22) ^ 2)
120 N1 = A12/N5: N2 = (L1–A11)/N5: N3 = (A22–L2)/N6: N4 = –A12/N6
130 IF L1<L2 THEN L = L1: L1 = L2: L2 = L
135 IF D< >0 THEN PRINT "Крива центрального типу." ELSE GOTO 170
140 PRINT "Координати центра: X0 =" (A23*A12–A13*A22)/D;
150 PRINT ", Y0 ="; (A12*A13–A11*A23)/D
160 PRINT "Новий координатний базис: N1 = "; N1;", N2 = "; N2;", N3 = "; N3;",
N4 = "; N4: GOTO 180
170 PRINT "Крива нецентральна,": GOTO 240
180 IF D > 0 AND A*I < 0 THEN GOTO 190 ELSE GOTO 200
190 PRINT "Дійсний еліпс (коло) x*x/(a*a) + y*y/(b*b) = 1, де a*a = ";–
A/L1/L2/L2;", b*b = ";–A/L1/L1/L2: STOP
200 IF D > 0 AND A*I > 0 THEN PRINT "Уявний еліпс (жодної дійсної
точки)": STOP
210 IF D > 0 AND A = 0 THEN PRINT "Еліпс виродився в точку": STOP
220 IF D < 0 AND A < > 0 THEN PRINT "Гіпербола x*x/(a*a)–y*y/(b*b) = 1,
де a*a = "; ABS (– A/L1/D);", b*b = ";ABS (A/L2/D): STOP
230 IF D < 0 AND A = 0 THEN PRINT "Дві перетинні прямі x*x/(a*a)–
y*y/(b*b) = 0, де a*a = "; –A/L1/D;", b*b = ";A/L2/D: STOP
240 IF A < > 0 THEN PRINT "Парабола y*y = 2px, де p = "; SQR (–A/L1)/L1:
STOP
250 IF A1 > 0 THEN PRINT "Жодної дійсної точки": STOP
260 IF A1 < 0 THEN PRINT "Дві дійсні рівнобіжні прямі.": STOP
270 PRINT "Одна дійсна пряма.": STOP
280 END
```

97. Написати рівняння кола, яке проходить через точки $A(-1,\ 3)$, $B(0,\ 2)$, $C(1,\ -1)$.

98. Відомі точки $A(-3,\ 0)$, $B(3,\ 6)$. Написати рівняння кола, діаметром якого є відрізок AB.

99. Знайти центр і радіус кола $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$.

100. Знайти фокуси і ексцентриситет еліпса $x^2 + 4y^2 = 16$.

101. Еліпс, симетричний відносно осей координат, проходить через точки $A(2,\ 3)$ і $B(0,\ 2)$. Написати його канонічне рівняння.

102. Знайти ексцентриситет еліпса, якщо відстань між фокусами дорівнює відстані між кінцями великої і малої півосей.

103. Визначити траєкторію точки, якщо під час руху відстань від неї до точки $F(-1,\ 0)$ у два рази менша, ніж до прямої $x = -4$.

104. На гіперболі $x^2 - 4y^2 = 16$ взято точку M з ординатою, рівною 1. Знайти відстані від неї до фокусів.

105. Написати канонічне рівняння гіперболи, якщо відстань між фокусами $2c = 10$, а між вершинами $2a = 8$.

106. Гіпербола, симетрична відносно осей координат, проходить через точку $M\left(6,\ -2\sqrt{2}\right)$ і має уявну піввісь $b = 2$. Написати рівняння цієї гіперболи.

107. Визначити рівняння траєкторії точки, якщо під час руху відстань від неї до прямої $x = 1$ у два рази менша, ніж до точки $P(4,\ 0)$.

108. Скласти рівняння параболи, знаючи, що вона симетрична відносно осі абсцис і проходить через початок координат і через точку $(1,\ -4)$.

Написати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип і вказати положення системи координат, в якій крива описується канонічним рівнянням.

Вказівка. Приклади 109–116 можна розв'язувати з використанням програми ELLIPS. (Див. розв'язання прикладу 5).

109. $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$.

110. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$.

111. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.

112. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$.

113. $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$.

114. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x + 3y - 7 = 0$.

115. $2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0$.

116. $4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 6 = 0$.

§ 7. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ*

Приклад. Написати канонічне рівняння поверхні другого порядку

$$4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4xz - 16x - 16y - 8z + 72 = 0,$$

визначити тип поверхні і знайти систему координат, в якій рівняння поверхні має канонічний вигляд.

Розв'язання. Матриця квадратичної форми (ліва частина рівняння) має вигляд

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Її власні числа $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -9$, $\lambda_3 = 0$; власні вектори

$$b_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right),\quad b_2 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}},\ \frac{1}{3\sqrt{2}},\ -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right),\quad b_3 = \left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right).$$

Для приведення квадратичної форми до канонічного вигляду (5.20) [ч. 1, с. 107], застосовуємо перетворення координат

$$x = \frac{3x' + y' + 2\sqrt{2}z'}{3\sqrt{2}},\quad y = \frac{-3x' + y' + 2\sqrt{2}z'}{3\sqrt{2}},\quad z = \frac{-4y' + 2z'}{3\sqrt{2}}.$$

Виконавши ці перетворення, одержимо

$$9(x')^2 - 9(y')^2 - 72z' + 72 = 0.$$

Паралельне перенесення необхідно виконати лише по змінній z':

$$-72z' + 72 = -72(z' - 1) = -72z'',\ \text{де}\ z'' = z' - 1.$$

*Див. ч. 1, гл. 2, підрозд. 6.1–6.6.

Таким чином, друге перетворення координат має вигляд $x'' = x'$, $y'' = y'$, $z'' = z' - 1$, звідки остаточно одержуємо канонічне рівняння $\frac{(x'')^2}{8} - \frac{(y'')^2}{8} = z''$, яке описує поверхню гіперболічного параболоїда.

Внаслідок перетворення координат маємо

$$x = \frac{\left(3x'' + y'' + 2\sqrt{2}z''\right)}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{3}, \quad y = \frac{\left(-3x'' + y'' + 2\sqrt{2}z''\right)}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{3}, \quad z = \frac{\left(-4y'' + \sqrt{2}z''\right)}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3}.$$

Система координат, в якій рівняння має канонічний вигляд:

$$\left(0', \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right), \text{де } 0'\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \ \vec{b}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

$$\vec{b}_2 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right), \vec{b}_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Відповідь: гіперболічний параболоїд, $\frac{(x'')^2}{8} - \frac{(y'')^2}{8} = z''$; $0'\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\vec{b}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\vec{b}_2 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$, $\vec{b}_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

117. Побудувати поверхні: 1) $y^2 + z^2 = 4$; 2) $y^2 = ax$; 3) $xz = 4$; 4) $x^2 + y^2 = ax$.

118. Побудувати поверхні: 1) $z = 4 - x^2$; 2) $y^2 + z^2 = 4z$; 3) $y^2 = x^3$.

119. Побудувати тіло, обмежене поверхнями $y^2 = x$; $z = 0$; $z = 4$; $x = 4$.

120. Побудувати тіло, обмежене поверхнями $az = x^2 + y^2$; $2az = a^2 - x^2 - y^2$.

121. Знайти центр та радіус сфери $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0$.

122. Написати рівняння геометричного місця точок, відстань від яких до точки $A(2, 0, 0)$ вдвічі менша, ніж до точки $B(-4, 0, 0)$.

123. Написати рівняння площини, яка проходить через центр C поверхні $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y + 3z = 0$ і перпендикулярна до прямої OC, де O – початок координат.

124. Написати рівняння геометричного місця точок, відстань від яких до початку координат вдвічі більша, ніж до точки $(0, -3, 0)$.

125. Написати рівняння поверхні, утвореної обертанням еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$ навколо осі Oz.

126. Написати рівняння поверхні, утвореної обертанням гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$ навколо осі Ox.

127. Написати рівняння геометричного місця точок, відношення відстаней кожної з яких до площини $x = -2$ до відстані їх до точки $B(-1, 0, 0)$ дорівнює 2.

Написати канонічне рівняння поверхні другого порядку; визначити його тип і систему координат, в якій написано канонічне рівняння поверхні.

128. $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$.

129. $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$.

130. $2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy + 20yz - 16zx + 60x - 12y + 12z - 90 = 0$.

131. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 10zx + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$.

132. $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2yz + 2zx - 4x + 6y + 16z + 45 = 0$.

133. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8zx - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$.

134. $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$.

135. $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 6zx - 2x + 6y + 2z = 0$.

Відповіді

1. $x - y = 0$. **2** $x^2 + y^2 = 16$. **3** $x^2 + 5y^2 = 5$. **4.** $x^2 - 4x - 4y + 8 = 0$. **5.** $x^2 + y^2 - x - 2 = 0$. **6.** $x^2 + y^2 = 4$. **7.** $y^2 + 2x - 1 = 0$. **8.** $20y + 53 = 0$. **9.** $25x^2 + 25y^2 + 9z^2 = 225$. **10.** $(6, -2, 2)$, $(3, 4, -2)$. **11.** $\cos\alpha = \frac{2}{7}$, $\cos\beta = \frac{3}{7}$, $\cos\gamma = \frac{6}{7}$. **12.** $x + 2y + 2z - 18 = 0$. **13.** $\cos\varphi = \frac{23}{\sqrt{29}\sqrt{26}}$. **14.** $x + 4y + 2z - 2 = 0$. **15.** $x - 2y - 3z + 14 = 0$. **16.** $2y - 3z + 7 = 0$. **17.** $3y + 2z = 0$. **18.** $2x + y = 0$. **19.** $x + y + z = 4$. **20.** $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$. **21.** $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1$. **22.** 45°. **23.** $x - 2y - 3z - 4 = 0$. **24.** $2x + 3y + 4z - 3 = 0$. **25.** $3x - 4y + z - 11 = 0$. **26.** $2x - 2y + z - 2 = 0$. **27.** $2y - 5z + 10 = 0$. **28.** $2x - y + z - 5 = 0$. **29.** $3x - y = 0$. **30.** $d = 3$. **31.** $\sqrt{6}$. **32.** $2\sqrt{2}$. **33.** 1) $x - 2y + 2z = 11$; 2) $x - 2y + 2z = -1$. **34.** $x - 8y + 9z = 21$. **35.** $(1, -1, 2)$. **36.** $x + 2y - 4 = 0$. **37.** $h_1 = h_2 = \frac{6}{\sqrt{5}}$. **38.** $x + 3y + 7 = 0, 3x - y - 3 = 0, 3x - y + 9 = 0$. **39.** $\frac{x+4}{37} = \frac{y-2}{-39}$, $\frac{x-4}{37} = \frac{y}{-39}$, $x - 3y - 4 = 0$. **40.** $(-6, 6)$, $(2, 2)$, $(2, -2)$, $(10, -6)$. **41.** $x + 2y - 3 = 0$, $x - 4y - 9 = 0, x + 3 = 0$. **42.** $18^\circ 26'$; $108^\circ 27'$; $S_\Delta = \frac{2b^2}{3}$. **43.** $\frac{a^2}{5}$. **44.** $A = 36^\circ 52'$; $B = 127^\circ 52'$. **45.** $2x - y + 6 = 0, x - 4y = 4, 2x - 3y + 2 = 0$. **46.** $y = x + 2, x - 5y = 6, y = -x, 2y = x$.

47. $\sqrt{10}$. **49.** $B(2,1), C(-1,-5)$. **50.** $x-5y+3=0$. **51.** $x+y-1=0$. **52.** $y=x+2$, $y=-0{,}5x+2$, $y=-2x+8$. **53.** $y=2x$. **54.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{3}$. **55.** $\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{1}=\frac{z}{-1}$.

56. $\cos\varphi=\frac{11}{26}$. **57.** $\cos\varphi=\frac{20}{21}$. **58.** $\frac{x+4}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{5}$. **59.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{1}$.

60. $\frac{x-4}{-1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1}$. **61.** $\vec{s}=(1,2,2)$. **62.** $\begin{cases}3x+2y=0;\\ z=4.\end{cases}$ $\begin{cases}y+3=0;\\ 2x-z=0.\end{cases}$ **63.** $\vec{P}=(0,0,1)$. **64.** 1) $\vec{P}=\vec{i}$; 2) $\vec{P}=\vec{i}+\vec{k}$; 3) $\vec{P}=\vec{j}+\vec{k}$. **65.** $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-5}$; $\cos\alpha=0{,}3\sqrt{2}$, $\cos\beta=0{,}4\sqrt{2}$, $\cos\gamma=-0{,}5\sqrt{2}$.

66. Через t секунд координати точки M будуть $x=4+2t$, $y=-3+3t$, $z=1+t$; $\frac{x-4}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{1}$. **67.** 1) $x=-2+t$, $y=1-2t$, $z=-1+3t$; 2) $x=1+t$, $y=1-t$, $z=2+t$. **68.** $\cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **69.** $\cos\varphi=\frac{11}{26}$. **71.** $0{,}3\sqrt{38}$. **72.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **73.** $\sqrt{62}$. **74.** $\frac{\sqrt{26}}{7}$. **75.** $\frac{1}{\sqrt{59}}$. **76.** $\frac{3\sqrt{2}}{10}$.

77. $\sin\varphi=\frac{5}{7\sqrt{3}}$. **78.** $(1,1,2)$. **79.** $\varphi=30^\circ$. **80.** $y+z+1=0$. **81.** $x-2y+z+5=0$. **82.** $8x-5y+z-11=0$. **83.** $(6,2,0)$. **84.** $(3,-1,1)$. **85.** $x+2y-2z-1=0$. **86.** $(5,5,-2)$. **87.** $(6,4,5)$. **88.** $(5,5,5)$. **89.** $(3,3,3)$. **90.** Обидві прямі паралельні площині, оскільки $Am+Bm+Cp=2\cdot2+1(-1)+(-1)3=0$, але точка першої $(-1,-1,3)$ не лежить на площині, а точка другої $(-1,-1,-3)$ лежить на площині. **91.** $\frac{x}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$. **92.** $x+2y-5z=0$. **93.** $\frac{x-2}{-9}=\frac{y-1}{8}=\frac{z}{11}$.

94. $(-1,2,2)$; 30°. **95.** $(-1,3,1)$. **96.** $d=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **97.** $(x+4)^2+(y+1)^2=25$. **98.** $x^2+y^2-6y-9=0$.

99. $(3,-2)$, $R=6$. **100.** $F(\pm2\sqrt{3},0)$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **101.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. **102.** $\sqrt{0{,}4}$. **103.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$.

104. $r_1=\pm9$, $r_2=\pm1$. **105.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **106.** $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$. **107.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$. **108.** $y^2=16x$.

109. Крива центрального типу. Координати центра: $XO=-.8; YO=.4$. Новий координатний базис: N1 = –. 8944272, N2 =. 4472136, N3 =. 4472136, N4 =. 8944272. Дійсний еліпс (коло) $X*\frac{X}{(a*a)}+Y*\frac{Y}{(b*b)}=1$, де $a*a=2$, $b*b=1$. **110.** Крива центрального типу. Координати центра: $XO=1; YO=1$. Новий координатний базис: N1 =. 8320503, N2 =. 5547002, N3 =.5547002, N4 = . 8320503. Гіпербола $X*\frac{X}{(a*a)}-Y*\frac{Y}{(b*b)}=1$, де $a*a=4$, $b*b=9$. **111.** Крива нецентральна. Парабола $Y*Y=2P*X$, де $P=2.828429$. **112.** Дві дійсні рівнобіжні прямі. **113.** Крива центрального типу. Координати центра: $XO=1.166667, YO=.3333334$. Новий координатний базис: N1 =. 4472136, N2 =. 8944272, N3 =. 8944272, N4 =. 4472136. Дійсний еліпс (коло) $X*\frac{X}{(a*a)}+Y*\frac{Y}{(b*b)}=1$, де $a*a=5.83334$, $b*b=.9722222$. **114.** Парабола $Y*Y=2P*X$, де $P=.491935$. **115.** Крива центрального типу. Координати центра: $XO=-3; YO=-1$. Новий координатний базис: N1 = –. 4472136, N2 =.8944272, N3 =. 8944272 N4 =.447136. Дійсний еліпс (коло) $X*\frac{X}{(a*a)}+Y*\frac{Y}{(b*b)}=1$, де $a*a=2$; $b*b=.3333334$. **116.** Крива центрального типу.

Координати центра: $XO=-1; YO=1$. Новий координатний базис: N1 =. 8944272, N2 =. 4472136, N3 =. 4472136, N4 = –. 8944272. Гіпербола $X*\frac{X}{(a*a)}-Y*\frac{Y}{(b*b)}=1$, де $a*a=1$; $b*b=.25$.

121. $C(1{,}5;\ -2{,}5;\ 2)$, $R=2{,}5\sqrt{2}$. **122.** $x^2+y^2+z^2-8x=0$. **123.** $2x-y+3z-7=0$. **124.** $x^2+(y+4)^2+z^2=4$. **125.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. **126.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{(y^2+z^2)}{c^2}=1$. **127.** $\frac{x^2}{2}+y^2+z^2=1$.

128. Двопорожнинний гіперболоїд, $\frac{(x'')^2}{\left(\frac{4}{5}\right)}+\frac{(y'')^2}{\left(\frac{4}{15}\right)}-\frac{(z'')^2}{\left(\frac{4}{25}\right)}=1$; $0'\left(0,1,-\frac{2}{5}\right)$; $\vec{b}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $\vec{b}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $\vec{b}_3=(0,0,1)$. **129.** Еліпсоїд, $\frac{(x'')^2}{2}+(y'')^2+(z'')^2/\left(\frac{2}{3}\right)=1$; $0'(1,2,-1)$; $\vec{b}_1=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\vec{b}_2=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$, $\vec{b}_3=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$. **130.** Гіперболічний параболоїд, $\frac{(x'')^2}{2}-(y'')^2=-2z''$; $0'(1,2,3)$; $\vec{b}_1=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\vec{b}_2=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\vec{b}_3=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.

131. Гіперболічний циліндр, $\frac{(x'')^2}{\left(\frac{1}{3}\right)}-\frac{(y'')^2}{\left(\frac{1}{3}\right)}=1$; $0'\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3},-\frac{5}{6}\right)$; $\vec{b}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{b}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{b}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. **132.** Еліптичний параболоїд, $\frac{(x'')^2}{\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)}+\frac{(y'')^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=2z''$; $0'\left(-\frac{1}{40},-\frac{19}{40},\frac{1}{2}\right)$; $\vec{b}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\vec{b}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{b}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

33. Параболічний циліндр, $(y'')^2=\left(\frac{4}{3}\right)x''$; $0'(2,1,-1)$; $\vec{b}_1=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, $\vec{b}_2=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$, $\vec{b}_3=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$. **134.** Еліптичний циліндр, $\frac{(x'')^2}{2}+(y'')^2=1$; $0'(0,1,0)$; $\vec{b}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{b}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\vec{b}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **135.** Однопорожнинний гіперболоїд, $\frac{(x'')^2}{\left(\frac{1}{3}\right)}+\frac{(y'')^2}{\left(\frac{1}{6}\right)}-\frac{(z'')^2}{\left(\frac{1}{2}\right)}=1$; $0'\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$; $\vec{b}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{b}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\vec{b}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Глава 3

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

§ 1. СИМВОЛІКА МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ*

Приклад. Прочитати висловлення $\forall x\left(x^2 > x \Leftrightarrow (x > 1) \vee (x < 0)\right)$, з'ясувати його значення і встановити, істинне воно чи хибне. Літерою x позначено дійсне число.

Розв'язання. Для всякого дійсного числа $x \in \mathbf{R}$ твердження $x^2 > x$ рівносильне твердженню $x > 1$ або $x < 0$.

З'ясуємо значення цього твердження, а також визначимо, істинне воно чи хибне. Якщо доведемо рівносильність нерівностей [ч. 1, с. 170] $x^2 > x$ і $x > 1$ або $x < 0$, то висловлення x істинне, у противному разі – хибне. Для цього розв'яжемо нерівність $x^2 > x$: $x^2 - x > 0$, $x(x-1) > 0$. Можливі випадки

$$\begin{cases} x > 0, \\ x - 1 > 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x < 0, \\ x - 1 < 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x > 0, \\ x > 1 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x < 0, \\ x < 1. \end{cases}$$

Із нерівностей випливає, що $x > 1$ і $x < 0$. Висловлення істинне, оскільки $x^2 > x$, то $(x > 1) \vee (x < 0)$ і навпаки.

1. Прочитати наведені нижче висловлення, з'ясувати їх значення і встановити, істинні вони чи хибні (символами x, y, z, a, b, c позначено дійсні числа):

1) $\forall x \exists y (x + y = 3)$; 2) $\exists y \forall x (x + y = 3)$; 3) $\exists x, y (x + y = 3)$;

4) $\forall x, y (x + y = 3)$; 5) $\exists x, y (x > y > 0 \wedge x + y = 0)$;

6) $\forall x, y (x < y) \Leftrightarrow \exists z (x < z < y)$; 7) $\forall x, y \left(x^2 \neq 4y^2\right)$;

8) $\forall x \left(x > 3 \wedge \overline{x > 4} \Leftrightarrow 3 < x \leq 4\right)$; 9) $\exists x\left(\sqrt{x^2} < x\right)$;

10) $\forall a,\ b,\ c\left(\exists x\left(ax^2 + bx + c = 0\right) \Leftrightarrow b^2 - 4ac \geq 0\right)$;

11) $\forall a,\ b,\ c\left(\forall x\left(ax^2 + bx + c > 0\right) \Leftrightarrow b^2 - 4ac < 0 \wedge a > 0\right)$;

12) $\forall b \exists a \forall x\left(x^2 + ax + b > 0\right)$;

13) $\exists b \forall a \exists x\left(x^2 + ax + b = 0\right)$;

14) $\exists a \forall b \exists x\left(x^2 + ax + b = 0\right)$;

15) $\forall x\left(x^2 > 2x \Leftrightarrow (x > 2) \vee (x < 0)\right)$.

*Див. ч. 1, гл. 3, підрозд. 1.1–1.5.

§ 2. ПОСЛІДОВНОСТІ І ЗМІННІ*

Приклади. **1.** Розв'язати нерівність $1 < |x - 6| < 4$.

Розв'язання. Із визначення абсолютної величини (модуля) маємо [ч. 1, с. 182]

$$|x - 6| = \begin{cases} x - 6 & \text{при } x - 6 \geq 0; \\ -(x - 6) & \text{при } x - 6 < 0, \end{cases}$$

тоді задана нерівність рівносильна таким нерівностям:

1) $1 < x - 6 < 4$ при $x - 6 \geq 0$,

2) $1 < -(x - 6) < 4$ при $x - 6 < 0$.

Перша пара нерівностей має розв'язок $7 < x < 10$, тобто $x \in (7,\ 10)$. Ці значення задовольняють нерівність $x \geq 6$. Друга пара $-1 > x - 6 > -4$ або $5 > x > 2$, $x \in (2,\ 5)$. Ці значення задовольняють нерівність $x < 6$.

Множина значень x, які задовольняють задані нерівності, складається з двох інтервалів: $(2,\ 5)$ і $(7,\ 10)$.

Відповідь: множина розв'язків даної нерівності є об'єднанням інтервалів $(2,\ 5)$ і $(7,\ 10)$.

2. Описати множину $A = \left\{ x \in Z \mid \frac{1}{9} \leq 3^x < 10 \right\}$ послідовністю елементів.

Розв'язання. A є множина всіх цілих чисел, які задовольняють нерівності [ч. 1, с. 178]

$$\frac{1}{9} = 3^{-2} \leq 3^x < 10 = 3^2 + 1.$$

Отже,

$$A = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}.$$

Відповідь: $A = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$.

*Див. там же, підрозд. 2.1–2.14.

3. Написати формулу загального члена послідовності

$$1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{11},\ \frac{1}{13},\ \ldots$$

Розв'язання. У даному випадку [ч. 1, с. 185]

$$|x_1| = |1| = 1 = \frac{1}{1+2\cdot 0};\quad |x_2| = \left|-\frac{1}{3}\right| = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} = \frac{1}{1+2\cdot 1};$$

$$|x_3| = \left|\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5} = \frac{1}{1+2\cdot 2};\quad |x_4| = \left|-\frac{1}{7}\right| = -\left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7} = \frac{1}{1+2\cdot 3};$$

$$|x_5| = \left|\frac{1}{9}\right| = \frac{1}{9} = \frac{1}{1+2\cdot 4};\quad |x_6| = \left|-\frac{1}{11}\right| = -\left(-\frac{1}{11}\right) = \frac{1}{11} = \frac{1}{1+2\cdot 5};$$

....

$$|x_n| = \frac{1}{1+2(n-1)} = \frac{1}{1+2n-2} = \frac{1}{2n-1}.$$

За умовою знаки членів послідовності чергуються, тобто $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $x_3 > 0$, $x_4 < 0$, ...; тоді $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. За цією формулою при $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ визначаємо кожний член послідовності.

4. Визначити n для послідовності $\{x_n\} = \left\{\frac{(n+3)!}{(n+1)!}\right\}$, якщо $x_n = 20$.

Розв'язання. За означенням $(n+3)! = (n+1)!(n+2)(n+3)$, тому

$$x_n = \frac{(n+3)!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!(n+2)(n+3)}{(n+1)!} = (n+2)(n+3) = n^2 + 5n + 6.$$

Отже, $n^2 + 5n + 6 = 20$, або $n^2 + 5n - 14 = 0$. З цієї рівності $n_1 = 2$, $n_2 = -7$. Згідно з означенням для від'ємних і дробових чисел знак факторіал не має значення, отже, в даному прикладі $n = 2$.

5. Довести, що послідовність із загальним членом $x_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ має границю, яка дорівнює одиниці.

Розв'язання. Покажемо, що для будь-якого $\delta > 0$ знайдеться таке число N, залежне від δ, що для всіх членів послідовності, починаючи з $n > N$, виконується нерівність [ч. 1, с. 187]

$$\left|\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - 1\right| < \delta,\ \text{або} \left|\frac{1}{2^n}\right| < \delta.$$

Розв'язавши останню нерівність, одержимо $n > -\frac{\ln\delta}{\ln 2}$. Вираз $-\frac{\ln\delta}{\ln 2}$, залежно від значення δ, може бути будь-яким дійсним числом. Приймемо за число N найбільше ціле число, яке не більше $-\frac{\ln\delta}{\ln 2}$. Позначимо $N = E\left(-\frac{\ln\delta}{\ln 2}\right)$, що читається так: N є E (ціла частина) від $-\frac{\ln\delta}{\ln 2}$. Тепер покажемо, що при всіх $n > N$ виконується нерівність

$$\left|\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - 1\right| < \delta.$$

Дійсно, з нерівності $n > N$ випливає, що $\frac{1}{n} < \frac{1}{N}$. Оскільки $N < -\frac{\ln\delta}{\ln 2} < N + 1$, то $\frac{1}{2^n} < \delta$, або

$$\left|\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - 1\right| < \delta.$$

Тому $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$. Наприклад, нехай $\delta = \frac{1}{8}$, тоді $N = E\left(-\frac{\ln\delta}{\ln 2}\right) = 3$. При $n > 3$ маємо $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{8}$,

або

$$0 < \left|\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - 1\right| < \frac{1}{8}.$$

Отже, всі члени послідовності $\left\{1 - \frac{1}{2^n}\right\}$, починаючи з четвертого, потрапляють у $\frac{1}{8}$ - окіл $\left(\delta = \frac{1}{8}\right)$ точки 1 (рис. 3.1). Поза околом $\left(-\frac{1}{8},\ \frac{1}{8}\right)$ залишається скінченне число членів послідовності, а саме: $\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8}$.

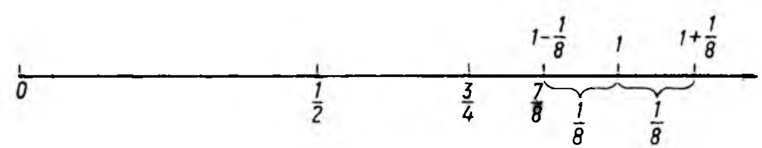

Рис. 3.1

6. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)}{2n^2}$.

Розв'язання. На основі теорем про границю суми та добутку послідовностей дійдемо висновку, що загальний член послідовності $\{(n+1)(n+2)\}$ наближається до $+\infty$ і загальний член послідовності $\{2n^2\}$ теж наближається до $+\infty$ [ч. 1, с. 198 і 208].

Тому дріб $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2n^2}$ є відношенням двох нескінченно великих, тобто маємо невизначеність. Для її розкриття чисельник та знаменник дробу поділимо на n^2, тоді

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}=\frac{n^2+3n+2}{2n^2}=\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{2}.$$

(Тут можна було почленно поділити чисельник на знаменник.) Перейшовши до границі в останньому дробі з урахуванням того, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0,$$

можна записати

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+2}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{2}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}2}=\frac{1+0+0}{2}=\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$.

7. Знайти розклад $\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)^5$ за біномом Ньютона.

Розв'язання. Використовуючи формулу бінома [ч. 1, с. 204]

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^ka^{n-k}b^k+\ldots+b^n,$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)^5=x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}+10xy^{\frac{2}{3}}-10x^{\frac{2}{3}}y+5x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{4}{3}}-y^{\frac{5}{3}}.$$

Розв'язати нерівності.

2. 1) $|\ x-3\ |\ge 1$; 2) $|\ 3x-2\ |<6$; 3) $|\ 4x-2\ |>5$;
4) $|\ 3x-7\ |>2x+3$; 5) $|\ 3x+2\ |<5x-4$.

3. 1) $1<|\ x+2\ |<3$; 2) $1<|\ x-2\ |<5$;
3) $2{,}5<|\ 3-5x\ |<4{,}3$; 4) $2<|\ x-3\ |<7$; 5) $3\le|\ 5-x\ |<8$.

4. 1) $|\ x-2\ |+|\ x+4\ |<8$; 2) $|\ 4x-7\ |+|\ 3-7x\ |<9$;
3) $|\ 2-x\ |-|\ 2x+3\ |>5$; 4) $|\ 3x-1\ |+|2x+3\ |<4$;
5) $|\ x+3\ |-|\ 2-5x\ |<2$.

5. 1) $|\ x+1\ |>|\ x+2\ |$; 2) $|\ x+2\ |>|\ x-3\ |$;
3) $|\ 2x-1\ |<|\ 3x+2|$; 4) $|\ x-5\ |<|\ 2x+3|$;
5) $|\ x-4\ |<|\ 2x+3|$.

6. 1) $\dfrac{1}{|\ x-2\ |}<5-x$; 2) $\dfrac{3}{|\ 2x+1\ |}>x+3$.

Визначити δ - окіл указаної точки x_0.

7. 1) $\delta=3,\ x_0=2$; 2) $\delta=2,\ x_0=1$; 3) $\delta=4,\ x_0=3$.

8. 1) $\delta=0{,}2,\ x_0=-1$; 2) $\delta=0{,}1,\ x_0=-2$; 3) $\delta=0{,}3,\ x_0=0$.

9. 1) $\delta=-1,\ x_0=3$; 2) $\delta=-2,\ x_0=2$; 3) $\delta=-3,\ x_0=1$.

10. 1) $\delta=-2,\ x_0=1$; 2) $\delta=-3,\ x_0=2$; 3) $\delta=-4,\ x_0=3$.

11. $\delta>0,\ x_0=a$.

12. Установити, який з двох записів правильний:

1) $\{3,\ 4\}\in\{3,\ 4,\ \{3,\ 4,\ 5\}\}$ чи $\{3,\ 4\}\subset\{3,\ 4,\ \{3,\ 4,\ 5\}\}$;

2) $\{3,\ 4\}\in\{3,\ 4,\ \{3,\ 4\}\}$ чи $\{3,\ 4\}\subset\{3,\ 4,\ \{3,\ 4\}\}$.

Описати задані множини A перерахуванням усіх елементів.

13. $A=\left\{x\in\mathbf{R}\mid x^3-8x^2+12x=0\right\}$.

14. $A=\left\{x\in\mathbf{R}\mid (x-5)(x^4-1)=0\ \text{ і }\ x\ge 0\right\}$.

15. $A=\left\{x\in\mathbf{N}\mid \dfrac{7x+1}{8}-\dfrac{5x-1}{11}\le 4\right\}$.

16. $A=\left\{x\in\mathbf{N}\mid x^2-4x-5\le 0\right\}$.

17. 1) $A=\left\{x\in\mathbf{Z}\,|\,\dfrac{1}{25}\le 5^x<26\right\}$;

2) $A=\left\{x\in\mathbf{Z}\,|\,\dfrac{1}{16}\le 4^x<65\right\}$.

18. Нехай $A=(-2,\ 3]$ і $B=[2,\ 5)$. Знайти множини $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$ і зобразити їх на числовій осі.

19. Нехай $A=(-3,\ 1]$ і $B=(1,\ 4)$. Знайти множини $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$ і зобразити їх на числовій осі.

Написати формулу загального члена послідовності.

20. 1) $1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{4},\ \ldots$;

2) $\dfrac{2}{1\cdot 2},\ \dfrac{4}{2\cdot 3},\ \dfrac{8}{3\cdot 4},\ \dfrac{16}{4\cdot 5},\ \ldots$;

3) $\dfrac{1}{3\cdot 2},\ \dfrac{2}{9\cdot 3},\ \dfrac{3}{27\cdot 4},\ \dfrac{4}{81\cdot 5},\ \dfrac{5}{243\cdot 6},\ \ldots$

21. 1) $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{5},\ \ldots$;

2) $\dfrac{3}{1\cdot 2},\ \dfrac{4}{2\cdot 3},\ \dfrac{5}{3\cdot 4},\ \dfrac{6}{4\cdot 5},\ \dfrac{7}{5\cdot 6},\ \ldots$;

3) $\dfrac{2}{3\cdot 3},\ \dfrac{3}{9\cdot 4},\ \dfrac{4}{27\cdot 5},\ \dfrac{5}{81\cdot 6},\ \dfrac{6}{243\cdot 7},\ \ldots$

22. 1) $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots$;

2) $\dfrac{1}{2\ln 2},\ \dfrac{1}{3\ln 3},\ \dfrac{1}{4\ln 4},\ \dfrac{1}{5\ln 5},\ \ldots$;

3) $1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 2,\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{7},\ 2\sqrt{2},\ \ldots$

23. 1) $0,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{4},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{6},\ \dfrac{5}{7},\ \dfrac{6}{8},\ \ldots$;

2) $2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ \ldots$;

3) $\dfrac{1}{2!},\ \dfrac{2^3}{3!},\ \dfrac{3^4}{4!},\ \dfrac{4^5}{5!},\ \dfrac{5^6}{6!},\ \ldots$

24. 1) $\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\ -\dfrac{1}{16},\ \dfrac{1}{32},\ \ldots$;

2) $-1,\ 4,\ -9,\ 16,\ -25,\ \ldots$;

3) $2,\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^2,\ \left(\dfrac{4}{3}\right)^3,\ \left(\dfrac{5}{4}\right)^4,\ \left(\dfrac{6}{5}\right)^5,\ \left(\dfrac{7}{6}\right)^6,\ \ldots$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ із загальним членом x_n має своєю границею число a.

25. $x_n=1-\dfrac{1}{n-1}$, $a=1$. **26.** $x_n=\dfrac{2}{n^3}$, $a=0$.

27. $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{7^n}$, $a=0$. **28.** $x_n=\dfrac{n+1}{n+2}$, $a=1$.

29. 1) $x_n=2^n$, $a=+\infty$; 2) $x_n=-n^2$, $a=-\infty$.

Знайти границі послідовностей із загальним членом x_n.

30. 1) $x_n=\dfrac{2n-1}{3n}$; 2) $x_n=\dfrac{n^3}{(n+2)^3}$; 3) $x_n=\dfrac{2+n-n^2+3n^3}{12-7n+5n^3}$.

31. 1) $x_n=\dfrac{3-5n+7n^2}{n^3+n^2-15}$; 2) $x_n=\dfrac{(n+1)^3-(n+3)^3}{(n+2)^2}$.

32. 1) $x_n=\dfrac{(2n-3)(2n-4)(2n-5)}{3-7n+n^2}$; 2) $x_n=\dfrac{(n+2)^4-n^4}{n^4+5}$.

33. 1) $x_n=\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$; 2) $x_n=\dfrac{1+2+3+4+\ldots+n}{n^2+1}$.

34. 1) $x_n=\dfrac{n^3-99n+1}{99n^3+2n}$; 2) $x_n=1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}$.

35. 1) $x_n=\dfrac{(n+3)!+(n+2)!}{(n+3)!-(n+2)!}$; 2) $x_n=\dfrac{(2n)!}{(2n+1)!}$.

36. 1) $x_n=\sqrt{3n+2}-\sqrt{n-1}$; 2) $x_n=\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}$.

Розв'язати рівняння.

37. $\dfrac{k!}{(k-2)!}=30$. **38.** $\dfrac{(k+1)!}{k!}=3$.

39. $\dfrac{(2n)!}{(2n-3)!}=\dfrac{20n!}{(n-2)!}$. **40.** $\dfrac{k!}{(k-4)!}=\dfrac{12k!}{(k-2)!}$.

41. $\dfrac{1}{(n-2)!}=\dfrac{4}{(n-1)!}$.

Знайти розклад виразів за біномом Ньютона.

42. $(x-2y)^6$. **43.** $\left(1+y^2\right)^4$.

44. $\left(p^{-2}-1\right)^{6}$. **45.** $\left(\dfrac{1}{y}+2\right)^{5}$.

46. Знайти два середніх члени розкладу:

1) $\left(a^{3}-ab\right)^{31}$; 2) $\left(\sqrt[12]{x}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^{3}}}\right)^{17}$.

§ 3. ФУНКЦІЇ *

Приклади. **1.** Визначити значення функції $f(x,\ y)=\dfrac{2x-y}{x-2y}$, якщо $x=3,\ y=1$.

Розв'язання. $f(3,\ 1)=\dfrac{2\cdot3-1}{3-2\cdot1}=5$.

2. Визначити, чи функція $u=\operatorname{arctg}(t_1+t_2)+\sqrt{1-t_1t_2}-\dfrac{t_1}{t_2}$ є складною функцією двох змінних.

Розв'язання. Введемо функції $x_1=t_1:t_2$, $x_2=\operatorname{arctg}(t_1+t_2)$, $x_3=\sqrt{1-t_1t_2}$, тоді $u=f(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_2+x_3-x_1$ є складною функцією, оскільки змінні x_1, x_2 і x_3 – функції змінних t_1 і t_2 [ч. 1. с. 211].

3. Скласти параметричне рівняння прямої $5x+2y=0$, заданої в декартовій системі координат, прийнявши за параметр t: а) абсцису x; б) ординату y.

Розв'язання. а) нехай $x=t$, одержимо [ч. 1, с. 228] $5t+2y=0,\ y=-\dfrac{5}{2}t$;

б) якщо $y=t$, то $5x+2t=0,\ x=-\dfrac{2}{5}t$.

Відповідь: а) $\begin{cases}x=t,\\ y=-\dfrac{5}{2}t;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x=-\dfrac{2}{5}t,\\ y=t.\end{cases}$

4. Побудувати область існування x і y, заданих нерівностями $x^2+y^2\le 9$, $y\le 0$.

Розв'язання. Область D є сукупністю всіх точок, що лежать всередині і на границі півкруга з центром у точці $O(0,\ 0)$ радіуса $r=3$. Точки відрізка $[-3,\ 3]$ також належать області D (рис. 3.2).

*Див. ч. 1, гл. 3, підрозд. 3.1–3.18.

5. Знайти область визначення функції

$$z=\sqrt{3x}-\frac{5}{\sqrt{y}}.$$

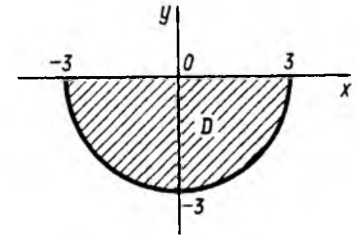

Рис. 3.2

Розв'язання. Функція z визначена в тих і лише в тих точках площини xOy, координати яких задовольняють нерівності $x\ge 0,\ y>0$, тобто x і y належать першому квадранту площини.

47. Скласти параметричне рівняння лінії, заданої в декартовій системі координат, прийнявши за параметр t а) абсцису і б) ординату:

1) $2x+3y=0$; 2) $x^2-y=2$; 3) $x+2y=5$; 4) $y^2-2x=1$;

5) $\begin{cases}x^2+y^2-z^2=0,\\ x^2+2y^2+3z^2=1;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x^2-y^2+z^2=0,\\ 3x^2+2y^2+z^2=1.\end{cases}$

48. Вилучити параметр t і записати рівняння кривих у формі $F(x,\ y)=0$ або $F(x,\ y,\ z)=0$:

1) $x=2-t,\ y=-1+2t,\ t\in(-\infty,\ +\infty)$;

2) $x=t-1,\ y=t^2-2t+1,\ t\in(-\infty,\ +\infty)$;

3) $x=3+2\sin t,\ y=-1+2\cos t,\ t\in[0,\ 2\pi)$;

4) $x=1+2\sec t,\ y=-1+\operatorname{tg}t,\ t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$;

5) $x=3-t,\ y=2+4t,\ z=-2+3t,\ t\in(-\infty,\ +\infty)$;

6) $x=2+t,\ y=3-2t,\ z=3t-4,\ t\in(-\infty,\ +\infty)$.

49. Дано функцію $f(x)=3-2x-x^5$, обчислити $f(0)$, $f(-2)$, $f(1)$, $f(a+1)$, $f(a)+1$, $f(a^3)$, $[f(a)]^2$.

50. Для функції $y(t)=t^3$ знайти:

1) $\dfrac{y(3)-y(2)}{y(1)}$; 2) $\dfrac{y(a+b)-y(a-b)}{2b}$.

Які з наведених у вправах 51–55 функцій є парні, непарні, які не належать ні до тих, ні до інших?

51. $y=5x-3\sqrt[5]{x}$. **52.** $u=3x\cos 2x$. **53.** $z=|\ y\ |+y^5$.

54. $v=|\ t\ |\operatorname{ctg}^4 t$. **55.** $w=\alpha^2-|\ \alpha-3\ |$.

Визначити область існування функцій.

56. $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-9}$. **57.** $y=4\sqrt{4-x^2}$. **58.** $y=\dfrac{5-\sqrt{x-2}}{\sqrt{5-x}}$. **59.** $y=\sin\sqrt{x}$.

60. $y=\log_2 \sin x$. **61.** $y=\dfrac{x^2-1}{2x-4}$. **62.** $y=\lg(x-1)+\arcsin\dfrac{x}{2}$.

63. $y=\lg(x+2)+\lg(x-2)$. **64.** $y=\sqrt[4]{\lg \operatorname{tg} x}$.

Знайти області існування і множину значень наступних функцій.

65. 1) $y=\sqrt{x^2-1}$; 2) $y=\sqrt{2+x-x^2}$;

3) $y=\sqrt{x^2-6x+10}$.

66. $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$.

67. $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$.

68. У трикутнику ABC (рис. 3.3), основа якого $AC=b$ і висота $BD=h$, вписано прямокутник $KLMN$, висота якого $MN=x$. Виразити периметр P прямокутника $KLMN$ і його площу S як функції від x.

69. У трикутнику ABC сторони $AB=6$ см і $AC=8$ см, $\angle BAC=x$. Виразити $BC=a$ і площу S трикутника ABC як функції змінної x.

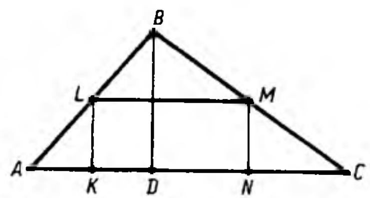

Рис. 3.3

Довести, що наступні функції будуть періодичними, і знайти їх найменші додатні періоди.

70. $y=\arcsin 2x+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. **71.** $y=\cos\dfrac{x}{3}+\operatorname{tg}\dfrac{x}{5}$.

72. $y=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$. **73.** $y=2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-3\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$.

74. $y=\sin^2 x$.

Знайти обернені функції для кожної із заданих функцій і області їх існування.

75. $y=2x-5$. **76.** $y=3^x$. **77.** а) $y=\sqrt{1-x^2}$; б) $-1\le x\le 0$; в) $0\le x\le 1$.

78. $y=\cos\dfrac{x}{3}$, $0\le x\le\dfrac{3}{2}\pi$. **79.** $y=\dfrac{1-x}{1+x}$, $x\ne -1$.

Побудувати (по точках) графіки функцій.

80. $y=4^x$. **81.** $y=\dfrac{1}{x^3}$. **82.** $y=\sqrt{x+1}+2$.

83. $y=4-\sqrt{1-3x}$. **84.** $y=(x-x_0)^2$, якщо $x_0=-1;\ 0;\ 1;\ 2$.

Побудувати (по точках) графіки функцій, заданих параметрично.

85. $x=1-t,\ y=1-t^2,\ t\in(-\infty,\ +\infty)$.

86. $x=10\cos t,\ y=\sin t,\ t\in[0,\ 2\pi]$.

87. $x=5\cos^2 t,\ y=3\sin^2 t,\ t\in[0,\ 2\pi]$.

Побудувати (по точках) графіки функцій, заданих неявно.

88. $x^2-xy+y^2=1$ (еліпс). **89.** $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ (парабола).

Лінія задана рівнянням $r=r(\varphi)$ у полярній системі координат. Потрібно: 1) побудувати лінію по точках, починаючи від $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$ і надавати φ значення через проміжок $\dfrac{\pi}{8}$; 2) знайти рівняння даної лінії в прямокутній декартовій системі координат, у якої початок збігається з полюсом, а додатна піввісь абсцис – з полярною віссю; 3) за одержаним рівнянням визначити, яка це лінія.

90. 1) $r=\dfrac{3}{1-\cos\varphi}$, 2) $r=\dfrac{2}{1+\cos\varphi}$.

91. 1) $r=\dfrac{6}{3+2\cos\varphi}$, 2) $r=\dfrac{5}{2-3\cos\varphi}$.

92. 1) $r=\dfrac{5}{1+\sin\varphi}$, 2) $r=\dfrac{3}{2-\sin\varphi}$.

93. Визначити значення функції $w=\lg\dfrac{x+z}{2y-z}$ в точці $A(6,\ 2,\ -1)$.

94. Довести справедливість рівності

$$z(tx,\ ty)=t^3 z(x,\ y),$$

якщо

$$z=3x^2y-\sqrt{x^6-y^6},\ t \text{ – параметр.}$$

95. Обчислити значення функції в точці $A(1,\ 3)$, якщо $z=3y^2-9xy+y$.

Знайти і зобразити області визначення функцій.

96. $z = 4 - x^2 - 2y^2$. **97.** $v = -\sqrt{2 - x^2 - 2y^2}$.

98. $u = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$. **99.** $g = \dfrac{\ln x^2 y}{\sqrt{y - x}}$.

100. $z = x + \sqrt{y}$. **101.** $v = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

102. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$. **103.** $p = \arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

104. $w = \ln\left(-1 - x^2 - y^2 + z^2\right)$.

Побудувати лінії рівня функцій.

105. $z = x + y$. **106.** $z = x^2 - y^2$.

107. $z = \dfrac{y}{x}$. **108.** $z = \sqrt{xy}$.

109. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{2y}{x^2 + y^2 - 1}$.

Знайти поверхні рівня функцій.

110. $w = x + y + z$. **111.** $w = x^2 + y^2 + z^2$.

112. $w = x^2 + y^2 - z^2$. **113.** $w = (x + y)^2 + z^2$.

114. $w = \operatorname{arctg}\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

115. Для точки $A(1,\ -2,\ 4)$ тривимірного простору скласти кубічний і сферичний δ - окіл.

116. Для точки $A(0,\ 1,\ -2,\ 3)$ чотиривимірного простору знайти кубічний і сферичний δ - окіл.

117. Визначити, яке тіло у просторі E_3 описують нерівності:

1) $225x^2 + 100y^2 + 36z^2 - 450x + 200y \le 575$;

2) $3x^2 + 2y^2 - 6z^2 + 6x + 8y + 12z \le -11$;

3) $6x^2 + 4y^2 - 3z^2 - 36x + 8y \le -46$;

4) $7x^2 - 5y^2 + 42x + 20y - 70z \le 27$;

5) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 30y - 12z \le -101$.

§ 4. ГРАНИЦЯ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ*

Приклади. **1.** Довести, що границя функції $y = 2x - 1$ при $x \to 2$ дорівнює 3.

Розв'язання. Задамо будь-яку малу величину ε. Знайдемо таке значення $\delta(\varepsilon)$, що для всіх x, які задовольняють нерівності $0 < |x - 2| < \delta$, має виконуватися нерівність $|y - 3| < \varepsilon$. Для доведення розглянемо $y - 3 = (2x - 1) - 3 = 2(x - 2)$, $|y - 3| = 2|x - 2| < 2\delta$.

Покладемо $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, тоді $|y - 3| < \varepsilon$ виконується при $|x - 2| < \dfrac{\varepsilon}{2} = \delta$, а це означає, що границя функції дорівнює 3 [ч. 1, с. 247].

2. Довести, що

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x - 1}{x + 2} = 1.$$

Розв'язання. Нехай задано будь-яке $\varepsilon > 0$. Покажемо, що існує таке число $M > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x| > M$, виконується нерівність

$$\left| \frac{x - 1}{x + 2} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Перетворимо ліву частину нерівності:

$$\left| \frac{x - 1}{x + 2} - 1 \right| = \left| \frac{-3}{|x + 2|} \right| = \frac{3}{|x + 2|}.$$

Для будь-якого x можна записати $\dfrac{3}{|x + 2|} < \dfrac{3}{|x|}$. Виберемо ε так, щоб $\dfrac{3}{|x|} < \varepsilon$. При такому ε виконується і $\left| \dfrac{x - 1}{x + 2} - 1 \right| < \varepsilon$. Із нерівності $\dfrac{3}{|x|} < \varepsilon$ визначимо $|x| > \dfrac{3}{\varepsilon}$. Нехай $M = \dfrac{3}{\varepsilon}$, тоді

$$|x| > M \Leftrightarrow |x| > \frac{3}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{3}{|x|} < \varepsilon \Rightarrow \frac{3}{|x + 2|} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{-3}{x + 2} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{x - 1}{x + 2} - 1 \right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{x - 1}{x + 2} = 1.$$

3. Знайти $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2}$.

---

*Див. ч. 1, гл. 3, підрозд. 4.1–4.4, 5.1–5.12.

Розв'язання. Застосування теореми про границю частки приводить до невизначеності $\frac{0}{0}$, тому що $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2+x-3\right)=0$, $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+x-2\right)=0$. Для розкриття цієї невизначеності зазначимо, що в даному виразі чисельник і знаменник мають загальний множник $(x-1)$. Вилучимо цей множник і скоротимо на нього, вважаючи, що $x\neq 1$:

$$\frac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}=\frac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+2)}=\frac{2x+3}{x+2}.$$

Функції $f(x)=\frac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$ і $\varphi(x)=\frac{2x+3}{x+2}$ мають різні області визначення, хоча різниця ця виявляється тільки в точці $x=1$. У цій точці функція $f(x)$ не визначена, а функція $\varphi(x)$ визначена: $\varphi(1)=\frac{2+3}{1+2}=\frac{5}{3}$. Це стосується в даному випадку області, яка має точку $x=1$, де на нуль скорочувати не можна. У будь-якій іншій області, яка не включає точку $x=1$, маємо $f(x)=\varphi(x)$, тобто скорочування можливе. Оскільки $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ повністю визначається поводженням функції $f(x)$ в околі точки $x=a$ без самої точки $x=a$, то $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)$.

Для обчислення застосуємо теорему про границю частки:

$$\lim_{x\to 1}\varphi(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{x+2}=\frac{2\lim\limits_{x\to 1}x+3}{\lim\limits_{x\to 1}x+2}=\frac{2+3}{1+2}=\frac{5}{3}.$$

Отже,

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}=\frac{5}{3}.$$

Відповідь: $\frac{5}{3}$.

4. Знайти $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{(2x+1-9)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}+3}{2\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{3+3}{2(2+2)}=\frac{3}{4}.$$

Відповідь: $\frac{3}{4}$.

5. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x\,\mathrm{tg}\,2x}$.

Розв'язання. Використовуючи першу важливу границю і відомі з тригонометрії формули, виконаємо перетворення функції:

$$\frac{1-\cos 5x}{x\,\mathrm{tg}\,2x}=\frac{2\sin^2\frac{5}{2}x}{x\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}=2\cos 2x\left(\frac{\sin\frac{5}{2}x}{\frac{5}{2}x}\right)^2\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^{-1}\cdot\frac{25}{8}.$$

Знайдемо границю функції [ч. 1, с. 261]

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x\,\mathrm{tg}\,2x}=\frac{25}{4}\lim_{x\to 0}\cos 2x\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{5}{2}x}{\frac{5}{2}x}\right)^2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^{-1}=\frac{25}{4}.$$

Відповідь: $\frac{25}{4}$.

6. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)\left[\ln(x+2)-\ln x\right]$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення заданої функції:

$$(2x+3)\left[\ln(x+2)-\ln x\right]=(2x+3)\ln\frac{x+2}{x}=(2x+3)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^{2x+3}.$$

Використовуючи другу важливу границю і неперервність логарифмічної функції, одержимо [ч. 1, с. 263]

$$\lim_{x\to\infty}(2x+3)\left[\ln(x+2)-\ln x\right]=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^{2x+3}=$$

$$=\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{2x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^3\right]=\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^4+$$

$$+\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^3=\ln e^4+\ln 1=4.$$

Відповідь: 4.

7. Знайти однобічні границі функції $y=\frac{8}{2-x}$ при $x\to 2$ зліва і справа.

Розв'язання. Задача зводиться до знаходження границь $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{8}{2-x}$ і $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{8}{2-x}$. Якщо $x\to 2-0$, то $2-x\to +0$. Обернена їй величина нескінченно велика, вона набуває додатних означень. Таку саму властивість має і величина $y=\dfrac{8}{2-x}$, тому $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{8}{2-x}=+\infty$. Зміну величин $x-2$ і $\dfrac{8}{2-x}$ при $x\to 2-0$ можна проілюструвати таблицею.

Похідні змінні	Змінна $x\to 2-0$						
	1	1,9	1,99	1,999	1,9999	1,99999	1,999999
$2-x$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
$x-2$	–1	–0,1	0,01	–0,001	0,0001	–0,00001	–0,000001
$\dfrac{8}{2-x}$	8	80	800	8 000	80 000	800 000	8 000 000

Якщо $x\to 2+0$, то $2-x\to -0$. Таку саму властивість має і величина $\dfrac{8}{2-x}$, тому

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{8}{2-x}=-\infty.$$

8. Знайти $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} z$, якщо $z=\dfrac{y}{\operatorname{tg}(xy)}$.

Розв'язання. Переконавшись, що функція $z(x,\ y)$ не визначена у граничній точці $M_0(3,\ 0)$, виконаємо перетворення [ч. 1, с. 264].

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\frac{y}{\operatorname{tg}(xy)}=\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\frac{xy}{x\operatorname{tg}(xy)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x}\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\frac{xy}{\operatorname{tg}(xy)}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3},$$

оскільки $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=1$.

Відповідь: $\dfrac{1}{3}$.

9. Перевірити, чи збігатиметься область неперервності функції $y=x^3-5x$ з областю її існування.

Розв'язання. Область визначення функції y — вся числова вісь. Дамо аргументу x довільний приріст Δx і знайдемо значення функції в точці $x+\Delta x$: $y+\Delta y=(x+\Delta x)^3-5(x+\Delta x)$.

Приріст функції

$$\Delta y=(x+\Delta x)^3-5(x+\Delta x)-\left(x^3-5x\right)=\Delta x^3+3x\Delta x^2+\left(3x^2-5\right)\Delta x.$$

Нехай тепер $\Delta x\to 0$, тоді $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ при будь-якому значенні x. Отже, згідно з означенням неперервності функція y неперервна при будь-якому значенні x, тобто в усій області визначення. Тому область неперервності збігається з областю визначення.

10. Знайти точки розриву функції $y=\dfrac{1}{x^3-3x^2-4x}$ і вказати вид розриву.

Розв'язання. Функція y визначена скрізь, за винятком точок, де $x^3-3x^2-4x=0$. Розв'язавши це рівняння, знаходимо точки розриву функції $x_1=-1$, $x_2=0$ і $x_3=4$ [ч. 1, с. 278]. Для визначення роду розривів знайдемо границі зліва і справа:

а) $\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{1}{x^3-3x^2-4x}=\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{1}{x(x+1)(x-4)}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{1}{x(x+1)(x-4)}=+\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{1}{x^3-3x^2-4x}=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{1}{x(x+1)(x-4)}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{1}{x(x+1)(x-4)}=-\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to 4-0}\dfrac{1}{x^3-3x^2-4x}=\lim\limits_{x\to 4-0}\dfrac{1}{x(x+1)(x-4)}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 4+0}\dfrac{1}{x(x+1)(x-4)}=+\infty$.

Отже, в усіх точках $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=4$ функція y має розриви другого роду.

11. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $y=\dfrac{x}{4-x^2}$ в області $-1\le x\le 1$.

Розв'язання. Оскільки функція в $[-1,\ 1]$ неперервна, то на основі теореми Кантора вона рівномірно неперервна на цьому сегменті [ч. 1, с. 291].

12. Знайти всі точки розриву функції $z=\dfrac{6}{x^2-y^2-2}$.

Розв'язання. Функція не визначена в точках, де $x^2-y^2-2=0$. Це рівняння рівнобічної гіперболи $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$. Всі її точки є точками розриву, тому що

$$\lim_{x^2-y^2\to 2}\frac{6}{x^2-y^2-2}=\lim_{\rho^2\to 2}\frac{6}{\rho^2-2}=\infty,$$ де $x=\rho\operatorname{ch}t,\ y=\rho\operatorname{sh}t,\ 0\le t\le 2\pi$.

13. Порівняти нескінченно малі величини $ax,\ cx^3,\ b\sqrt[3]{x}$ з нескінченно малою x, де сталі $a,\ b$ і c не рівні нулю, а $x\to 0$.

Розв'язання. Розглянемо границі відношення даних величин до x. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax}{x}=a$, то ax і x – нескінченно малі однакового порядку. Для cx^3 маємо [ч. 1, с. 284]: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{cx^3}{x}=0$, cx^3 – нескінченно мала вищого порядку порівняно з x. Для $b\sqrt[3]{x}$ одержимо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{b\sqrt[3]{x}}{x}=\infty$, тому $b\sqrt[3]{x}$ – нескінченно мала нижчого порядку порівняно з x.

Довести рівності.

118. $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)=1$.

119. $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2+3\right)=7$.

120. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-2}{2x}=\frac{3}{2}$.

121. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3-x^2}=-2$.

122. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$.

Знайти границі.

123. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

124. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+3x^2-1}{2x^3-3x+1}$.

125. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^3-4x^2+1}{6x^3+3x+2}$.

126. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^6-x^3+2x}{2x^6-1}$.

127. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x^5-2x^2+5}{5x^5+2x-1}$.

128. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x+5}{0{,}01x^2-6x}$.

129. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-5x+2}{x+10^{10}}$.

130. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$.

131. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

132. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+9}}$.

133. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$.

134. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$.

135. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

136. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right]$.

137. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

138*. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

139. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-8x-3}{x^2-x-6}$.

140. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{2x^2-9x-18}{x^2-7x+6}$.

141. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{3x^2-14x-5}{x^2-6x+5}$.

142. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+3x-3}$.

143. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+8x^2+21x+18}$.

144. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)$.

145. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

146. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$.

147. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

148. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left(x^2-x-2\right)^{20}}{\left(x^3-12x+16\right)^{10}}$.

149. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x+10}-4}{x-2}$.

150. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{4x-3}-3}$.

151. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2x-1}-3}$.

152. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$.

153. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$.

154. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

155. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

156. $\lim\limits_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

157. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

158. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

159. $\lim\limits_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

160. $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

161. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x-2\sqrt[3]{x^4}}$.

162. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$.

163. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$.

---

*Для розв'язання прикладу 138 слід додати і відняти x.

164. $\lim\limits_{x\to 0} \sin 8x \operatorname{ctg} 3x$.

165. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{\operatorname{arctg} 6x}$.

166. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{x \sin 3x}$.

167. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{tg} 3x}{\cos x - \cos^3 x}$.

168. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 8x}$.

169. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$.

170. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$.

171. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$.

172. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$.

173. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$.

174. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

175. $\lim\limits_{x\to 1} (3x-2)^{\frac{x}{x-1}}$.

176. $\lim\limits_{x\to 2} (2x-3)^{\frac{x^2}{x-2}}$.

177. $\lim\limits_{x\to 3} (3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$.

178. $\lim\limits_{x\to 1} (3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$.

179. $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$.

180. $\lim\limits_{x\to\infty} (x-2)\left[\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]$.

181. $\lim\limits_{x\to\infty} (x+4)\left[\ln(2x+7)-\ln(2x-3)\right]$.

182. $\lim\limits_{x\to -\infty} (x+3)\left[\ln(2-4x)-\ln(1-4x)\right]$.

183. $\lim\limits_{x\to\infty} (3x+5)\left[\ln(x+5)-\ln x\right]$.

184. $\lim\limits_{x\to\infty} (3x-2)\left[\ln(2x-1)-\ln(2x+1)\right]$.

185. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x^3+2}{5x^3}\right)^{\sqrt{x}}$.

186. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

187. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2}$.

Знайти однобічні границі (зліва і справа від указаних точок) для функцій.

188. $y = \dfrac{4}{(x-2)^2}$, $x \to 2$.

189. $y = 2^{\frac{1}{x-2}}$, $x \to 2$.

190. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2-x}$, $x \to 2$.

191. $y = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $x \to 0$.

192. $y = 3^{\frac{1}{x+1}}$, $x \to -1$.

Знайти границі.

193. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{3-\sqrt{9-xy}}{xy}$.

194. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{xy}{\sin(xy)}$.

195. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2x^3+3y^2}{x^2+y^2}$.

196. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sin(xy)}{x}$.

197. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2+y^2\right)^{x^2 y^2}$.

198. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln\left(x+e^y\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

199. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

200. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

201. $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \left(x^2+y^2\right)^{-(x+y)}$.

202. $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

203. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

Знайти $\lim\limits_{x\to a}\left\{\lim\limits_{y\to b} f(x,\ y)\right\}$ і $\lim\limits_{y\to b}\left\{\lim\limits_{x\to a} f(x,\ y)\right\}$.

204*. $f(x,\ y) = \sin \dfrac{\pi x}{2x+y}$, $a=\infty$, $b=\infty$.

205*. $f(x,\ y) = \dfrac{1}{xy} \operatorname{tg} \dfrac{xy}{1+xy}$, $a=0$, $b=\infty$.

206*. $f(x,\ y) = \log_x (x+y)$, $a=1$, $b=0$.

---

*Спочатку обчислюється границя у фігурних дужках.

Перевірити, чи збігатиметься область неперервності функції з областю її визначення.

207. $y = \sqrt{x}$. **208.** $y = 4 - x^3$.

209. $y = \cos 3x$. **210.** $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$.

211. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

Визначити точки розриву, види розриву, якщо вони існують.

212. $y = \dfrac{8}{x+4}$. **213.** $y = \dfrac{x^2}{(x-1)(x+2)}$.

214. $y = \dfrac{x}{(1+x)^2}$. **215.** $y = \dfrac{1+x}{1+x^3}$.

216. $y = \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$.

Задано функцію $y = f(x)$ і два значення аргументу. Потрібно:

1) знайти границі функції при наближенні до кожного з даних значень x справа і зліва; 2) установити, неперервна чи розривна дана функція для кожного із даних значень x; 3) побудувати графік функції.

217. $y = 2^{\frac{1}{x-5}}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$. **218.** $y = 3^{\frac{1}{x-2}}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$.

219. $y = 4^{\frac{1}{x-3}}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. **220.** $y = 5^{\frac{1}{1-x}}$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

221. $y = 6^{\frac{1}{3-x}}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Функції задані аналітичними виразами для різних областей зміни незалежної змінної. Знайти точки розриву функції, якщо вони існують; визначити вид розриву. Рисунок виконати схематично.

222. $y = \begin{cases} -x & \text{при } x \le 0, \\ x^2 & \text{при } 0 < x \le 2, \\ x+1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$ **223.** $y = \begin{cases} x-3 & \text{при } x < 0, \\ x+1 & \text{при } 0 \le x \le 4, \\ 3+\sqrt{x} & \text{при } x > 4. \end{cases}$

224. $y = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & \text{якщо } x \le 0, \\ 0, & \text{якщо } 0 < x \le 2, \\ x-2, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$ **225.** $y = \begin{cases} \cos x, & \text{якщо } x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{якщо } \frac{\pi}{2} < x < \pi, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{якщо } x \ge \pi. \end{cases}$

226. $y = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0, \\ \operatorname{tg} x, & \text{якщо } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ x, & \text{якщо } x \ge \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Визначити вид розриву функції в зазначених точках.

227. 1) $y = \dfrac{2}{2 + 5^{\frac{1}{x-2}}}$ при $x = 2$; 2) $y = \dfrac{3}{4 + 3^{\frac{1}{x-4}}}$ при $x = 4$.

228. 1) $y = \dfrac{1}{3 + 2^{\frac{1}{x}}}$ при $x = 0$; 2) $y = \dfrac{4}{5 + 6^{\frac{1}{x-1}}}$ при $x = 1$.

229. 1) $y = \dfrac{5}{2 + 7^{\frac{4}{5-x}}}$ при $x = 5$; 2) $y = \dfrac{2}{5 + 4^{\frac{1}{3-x}}}$ при $x = 3$.

Дослідити функції на рівномірну неперервність у заданих областях.

230. $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $0 < x < \pi$. **231.** $y = \operatorname{arctg} x$, $-\infty < x < +\infty$.

232. $y = \sqrt{x}$, $1 \le x < +\infty$. **233.** $y = \ln x$, $0 < x < +\infty$.

234. $y = e^x \cos\dfrac{1}{x}$, $0 < x < 1$. **235.** $y = \sqrt{x^2 + 1}$, $-\infty < x < +\infty$.

236. $y = \sqrt{x}\ln x$, 1) $1 \le x < +\infty$, 2) $0 < x < 1$.

Дослідити функції на неперервність.

237. $z = x^2 + y^2$. **238.** $u = x + y + z$. **239.** $u = x^2 + y^2 - z^2$.

240. $z = x - y^2$. **241.** $u = x^2 - 2y^2 + 3z^2$.

Показати точки або лінії розриву функції.

242. $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. **243.** $z=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

244. $z=\dfrac{y^2+x^2}{y^2-x^2}$. **245.** $u=\dfrac{4}{z^2-x^2-y^2}$.

246. $u=\dfrac{x+y+z}{z-xy}$. **247.** $z=\dfrac{10x}{(x-1)^2+(y-1)^2}$.

248. $z=\dfrac{3y}{2x-y}$. **249.** $z=\dfrac{x^2}{x^2-2y^2-4}$.

250. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **251.** $z=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$.

252. $z=\ln\left(1-x^2-y^2\right)$.

Довести еквівалентність нескінченно малих величин, якщо $x\to 0$.

253. $\operatorname{tg} Cx$ і Cx, $C\neq 0$. **254.** $\arcsin Cx$ і Cx, $C\neq 0$.

255. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}3x$ і x. **256.** $x+2x^2$ і x. **257.** $\ln(1+x)$ і x.

258. e^x-1 і x. **259.** $\sqrt{6x+1}-1$ і $3x$. **260.** $\sqrt[3]{x+8}-2$ і $\dfrac{x}{12}$.

261. $\sin x+\operatorname{tg}x$ і $2x$. **262.** $1-\cos\dfrac{x}{m}$ і $\dfrac{x^2}{2m^2}$, $m\neq 0$. **263.** $\sin x$ і $\operatorname{tg}x$.

Вважаючи, що x – нескінченно мала величина першого порядку малості, визначити порядок нескінченно малих функцій.

264. 1) $y=\ln\left(1+x+x^2\right)$; 2) $y=\dfrac{2\sqrt[3]{x^2}}{2-x}$;

3) $y=\dfrac{1}{1+x}-1+x$; 4) $y=\operatorname{tg}x-\sin x$;

5) $y=\sqrt[5]{1+\sqrt[5]{x}}-1$.

265. 1) $y=\cos 2x-\cos x$; 2) $y=\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[3]{x^2}$; 3) $y=\sqrt{4+x}-2-\dfrac{1}{4}x$;

4) $y=\sin\left(\sqrt{x+4}-2\right)$; 5) $y=\sqrt{1+3x}-1-\sqrt{x}$.

Знайти границі, користуючись теоремами про еквівалентність нескінченно малих.

266. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x+x^2}$. **267.** $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\sqrt{2x}-x}{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$. **268.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\operatorname{arctg}6x}$.

269. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2(x-1)}{x^2-1}$. **270.** $\lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2\varphi\arcsin 3\varphi}{\sin 3\varphi\operatorname{arctg}2\varphi}$. **271.** $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$.

§ 5. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА І ФУНКЦІЇ*

Приклади. **1.** Дано два комплексних числа: $z_1=3+i\cdot 4$, $z_2=4-i$.

Знайти: 1) z_1+z_2 (зобразити на рисунку); 2) z_1-z_2; 3) $\overline{z_1}$; 4) $z_1\cdot z_2$; 5) $z_1:z_2$; 6) z_2^3.

Розв'язання.

1) $z_1+z_2=(3+i\cdot 4)+(4-i)=(3+4)+i(4-1)=7+i\cdot 3$ (рис. 3.4);

2) $z_1-z_2=(3+i\cdot 4)-(4-i)=(3-4)+i(4-(-1))=-1+i\cdot 5$;

3) $\overline{z_1}=\overline{3+i\cdot 4}=3-i\cdot 4$;

4) $z_1\cdot z_2=(3+i\cdot 4)\cdot(4-i)=(3\cdot 4+4\cdot 1)+i(4\cdot 4-3\cdot 1)=16+i\cdot 13$;

5) Перевіримо, чи справджується умова $|z_2|\neq 0$:

$$|z_2|=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}\neq 0.$$

Ділення можна виконати так [ч. 1, с. 298]:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z}_2}{z_2\cdot\overline{z}_2}=\frac{(3+i\cdot 4)(4+i)}{(4-i)(4+i)}=$$
$$=\frac{(3\cdot 4-4\cdot 1)+i(3\cdot 1+4\cdot 4)}{4\cdot 4+1\cdot 1}=$$
$$=\frac{8+i\cdot 19}{17}=\frac{8}{17}+i\cdot\frac{19}{17};$$

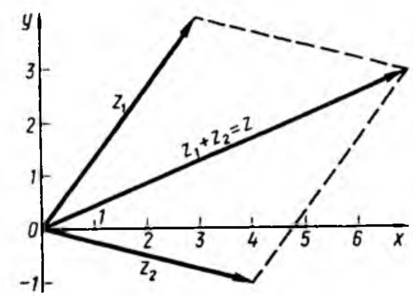

Рис. 3.4

6) Піднесемо z_2 до третього степеня. Виконавши всі перетворення, одержимо $z_2^3=(4-i)^3=64-i\cdot 48-12+i=52-i\cdot 47$.

2. а) Знайти всі значення $\sqrt[3]{-i}$; б) подати $z=-i$ у показниковій формі.

*Див. ч. 1, гл. 3, підрозд. 6.1–6.6.

Розв'язання. а) Подамо $-i$ в тригонометричній формі:

$$-i=\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi .$$

За другою формулою Муавра маємо [ч. 1, с. 297]:

$$\sqrt[3]{-i}=\sqrt[3]{\cos\frac{3}{2}\pi+i\cdot\sin\frac{3}{2}\pi}=\cos\frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{3}.$$

Поклавши $k=0,\ 1,\ 2$, знайдемо три значення кореня:

$$x_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i;\quad x_2=\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\approx-0{,}866-i\cdot0{,}500;$$

$$x_3=\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\approx0{,}866-i\cdot0{,}500 .$$

б) Виходячи з відомих формул, у даному випадку $z=-i=1\cdot\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)=$ $=1\cdot e^{\frac{3}{2}\pi i}$, маємо $-i=e^{\frac{3}{2}\pi i}$.

3. Виразити $\cos 5x$ через $\sin x$ і $\cos x$.

Розв'язання. Поклавши у формулі Муавра $r=1$ і $n=5$ [ч. 1, с. 296], знайдемо $(\cos x+i\sin x)^5=\cos 5x+i\sin 5x$. Розклавши ліву частину за формулою бінома Ньютона і зрівнявши дійсні частини, можна виразити $\cos 5x$ через степені $\sin x$ і $\cos x$:

$$\cos 5x+i\cdot\sin 5x=\cos^5 x+i\cdot5\cos^4 x\sin x-10\cos^3 x\sin^2 x-$$
$$-i\cdot10\cos^2 x\sin^3 x+5\cos x\sin^4 x+i\cdot\sin^5 x.$$

Тому $\cos 5x=\cos^5 x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x$.

4. Виразити через синус і косинус кратних дуг $\sin^5 x$.

Розв'язання. З відомої рівності $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{i\cdot2}$ маємо

$$\sin^5 x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{i\cdot2}\right)^5=-\frac{i}{32}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^5=$$

$$=-\frac{i}{32}\left(e^{i5x}-5e^{i4x}\cdot e^{-ix}+10e^{i3x}e^{-i2x}-10e^{i2x}\cdot e^{-i3x}+5e^{ix}\cdot e^{-i4x}-e^{-i5x}\right)=$$

$$=-\frac{i}{32}\left(e^{i5x}-5e^{i3x}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{-i3x}-e^{-i5x}\right)=$$

$$=-\frac{i}{32}(\cos 5x+i\sin 5x-5\cos 3x-i\cdot5\sin 3x+10\cos x+i\cdot10\sin x-10\cos x+$$
$$+i\cdot10\sin x+5\cos 3x-i\cdot5\sin 3x-\cos 5x+i\sin 5x)=$$
$$=-\frac{i}{32}(i\cdot2\sin 5x-i\cdot10\sin 3x+i\cdot20\sin x)=\frac{1}{16}(\sin 5x-5\cos 3x+10\sin x).$$

Дано комплексні числа z_1 і z_2. Знайти: 1) z_1+z_2; 2) z_1-z_2; 3) z_1; 4) $z_1\cdot z_2$; 5) $z_1:z_2$; 6) z_2^3; 7) зобразити на рисунках z_1+z_2 і z_1-z_2.

272. $z_1=-2,\ z_2=i\cdot2$.
273. $z_1=i\cdot2,\ z_2=-i\cdot2$.
274. $z_1=-i\cdot2,\ z_2=1+i$.
275. $z_1=-1+i,\ z_2=-1-i$.
276. $z_1=\sqrt{15}-i,\ z_2=1-i\cdot\sqrt{15}$.
277. $z_1=-3+i\cdot4,\ z_2=3-i\cdot4$.
278. $z_1=6+i\cdot11,\ z_2=7+i\cdot3$.
279. $z_1=3-i,\ z_2=4+i\cdot5$.

Знайти всі значення кореня. Подати в показниковій формі підкореневий вираз комплексного числа.

280. $\sqrt{1+i}$. **281.** $\sqrt{3+i\cdot4}$. **282.** $\sqrt{-1+i}$. **283.** $\sqrt[3]{\sqrt{15}-i}$.
284. $\sqrt[3]{-3+i\cdot4}$. **285.** $\sqrt[3]{3-i\cdot4}$. **286.** $\sqrt[4]{-1}$. **287.** $\sqrt[5]{1-i}$.
288. $\sqrt[5]{-1-i}$. **289.** $\sqrt[8]{-2+i\cdot2}$.

Виразити через степені синуса і косинуса функції:

290. $\sin 3x$. **291.** $\cos 3x$. **292.** $\sin 4x$. **293.** $\cos 4x$. **294.** $\sin 5x$.

Виразити через синус і косинус кратних дуг функції:

295. $\sin^2 x$. **296.** $\sin^3 x$. **297.** $\sin^4 x$. **298.** $\cos^4 x$.
299. $\cos^5 x$. **300.** $\cos^6 x$.

Відповіді

1. 1) Істинне; 2) хибне; 3) істинне; 4) хибне; 5) хибне; 6) істинне; 7) хибне; 8) істинне; 9) хибне; 10) істинне; 11) істинне; 12) істинне; 13) істинне; 14) хибне; 15) істинне.

2. 1) $(-\infty,2]\cup[4,+\infty)$; 2) $\left(-\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)$; 3) $\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{7}{4},+\infty\right)$; 4) $\left(-\infty,\frac{4}{5}\right)\cup(10,+\infty)$; 5) $(3,+\infty)$.

3. 1) $(-5,-3)\cup(-1,1)$; 2) $(-3,1)\cup(3,7)$; 3) $(-0{,}26,\ 0{,}1)\cup(1{,}1,\ 1{,}46)$; 4) $(-4,1)\cup(5,10)$; 5) $(-3,2]\cup[8,13)$. **4.** 1) $(-5,3)$; 2) $\left(\frac{1}{11},\frac{5}{3}\right)$; 3) $\varnothing$; 4) $(0,\ 0{,}4)$; 5) $\left(-\infty,\frac{1}{6}\right)\cup\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$.

5. 1) $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$; 3) $(-\infty,-3)\cup\left(-\frac{1}{5},+\infty\right)$; 4) $(-\infty,-8)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$;

5) $(-\infty,-7)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$. **6.** 1) $\left(-\infty,\frac{7-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\frac{7-\sqrt{5}}{2},\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)$; 2) $(-\infty,-2)\cup(-1{,}5,-0{,}5)\cup(-0{,}5,0)$.

7. 1) $(-1,5)$; 2) $(-1,3)$; 3) $(-1,7)$. **8.** 1) $\left(-\frac{6}{5},-\frac{4}{5}\right)$; 2) $(-2{,}1,-1{,}9)$; 3) $(-0{,}3,\ 0{,}3)$. **9.** 1) $(-\infty,2)$ і $(4,+\infty)$; 2) $(-\infty,0)$ і $(4,+\infty)$; 3) $(-\infty,-2)$ і $(4,+\infty)$. **10.** 1) $(-\infty,-1)$ і $(3,+\infty)$; 2) $(-\infty,-1)$ і $(5,+\infty)$; 3) $(-\infty,-1)$ і $(7,+\infty)$. **11.** $(a-\delta,a+\delta)$. **12.** 1) $\{3,4\}\subset\{3,4,\{3,4,5\}\}$; 2) обидва правильні. **13.** $A=\{0,2,6\}$. **14.** $A=\{1,5\}$. **15.** $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. **16.** $A=\{1,2,3,4,5\}$. **17.** 1) $A=\{-2,-1,0,1,2\}$; 2) $A=\{-2,-1,0,1,2,3\}$. **18.** $A\cup B=(-2,5)$, $A\cap B=[2,3]$, $A\setminus B=(-2,2)$, $B\setminus A=(3,5)$. **19.** $A\cup B=(-3,4)$, $A\cap B=\varnothing$, $A\setminus B=(3,1)$, $B\setminus A=(1,4)$. **20.** 1) $x_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$; 2) $x_n=\frac{2^n}{n(n+1)}$; 3) $x_n=\frac{n}{3^n(n+1)}$. **21.** 1) $x_n=\frac{n}{n+1}$; 2) $x_n=\frac{n+2}{n(n+1)}$; 3) $x_n=\frac{n+1}{3^n(n+2)}$. **22.** 1) $x_n=n^2$; 2) $x_n=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$; 3) $x_n=\sqrt{n}$. **23.** 1) $x_n=\frac{n-1}{n+1}$; 2) $x_n=2^n$; 3) $x_n=\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$. **24.** 1) $x_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}$; 2) $x_n=(-1)^n n^2$; 3) $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. **30.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) 1; 3) 0,6.

31. 1) 0; 2) -6. **32.** 1) $+\infty$; 2) 0. **33.** 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$. **34.** 1) $\frac{1}{99}$; 2) 1,5. **35.** 1) 1; 2) 0. **36.** 1) $+\infty$; 2) 0. **37.** 6. **38.** 2. **39.** 3. **40.** 6. **41.** 5. **42.** $x^6-12x^5y+60x^4y^2-160x^3y^3+240x^2y^4-192xy^5+64y^6$. **43.** $1+4y^2+6y^4+4y^6+y^8$. **44.** $\frac{1}{p^{12}}-\frac{6}{p^{10}}+\frac{15}{p^8}-\frac{20}{p^6}+\frac{15}{p^4}-\frac{6}{p^2}+1$.

45. $\frac{1}{y^5}+\frac{10}{y^4}+\frac{40}{y^3}+\frac{80}{y^2}+\frac{80}{y}+32$. **46.** 1) $T_{15}=-C_{31}^{15}a^{63}b^{15}$, $T_{16}=C_{31}^{16}a^{61}b^{16}$; 2) $T_9=24\,310x^{-\frac{21}{4}}$, $T_{10}=-19\,448x^{-\frac{53}{12}}$. **47.** 1) а) $\begin{cases}x=t,\\ y=-\frac{2}{3}t;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x=-\frac{3}{2}t,\\ y=t.\end{cases}$ 2) а) $\begin{cases}x=t,\\ y=t^2-2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x=\pm\sqrt{2+t},\\ y=t.\end{cases}$, $t\in(-2,+\infty)$,

3) а) $\begin{cases}x=t,\\ y=\frac{5-t}{2};\end{cases}$ б) $\begin{cases}x=5-2t,\\ y=t.\end{cases}$ 4) а) $\begin{cases}x=t,\\ y=\pm\sqrt{1+2t},\ t\in\left[-\frac{1}{2},+\infty\right);\end{cases}$ б) $\begin{cases}x=\frac{t^2-1}{2},\\ y=t.\end{cases}$

5) а) $\begin{cases}x=t,\\ y=\pm\sqrt{\frac{1-4t^2}{5}},\ t\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right];\\ z=\pm\sqrt{\frac{1+t^2}{5}},\end{cases}$ б) $\begin{cases}x=\frac{\pm\sqrt{1-5t^2}}{2},\\ y=t,\qquad t\in\left[-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right].\\ z=\frac{\pm\sqrt{1-t^2}}{2},\end{cases}$

6) а) $\begin{cases}x=t,\\ y=\pm\sqrt{\frac{1-2t^2}{3}},\ t\in\left[-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right];\\ z=\pm\sqrt{\frac{1-5t^2}{3}},\end{cases}$ б) $\begin{cases}x=\pm\sqrt{\frac{1-3t^2}{2}},\\ y=t,\ t\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{5}}{5}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{3}}{3}\right],\\ z=\pm\sqrt{\frac{5t^2-1}{2}}.\end{cases}$

48. 1) $2x+y-3=0$; 2) $x^2-y=0$; 3) $(x-3)^2+(y+1)^2=4$; 4) $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{1}=1$ (права гілка); 5) $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+2}{3}$; 6) $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+4}{3}$. **49.** $f(0)=3$, $f(-2)=39$, $f(1)=0$, $f(a+1)=a(a^4+5a^3+10a^2+10a+7)$, $f(a)+1=4-2a-a^5$, $f(a^3)=3-2a^3-a^{15}$, $[f(a)]^2=a^{10}+4a^6-6a^5+4a^2-12a+9$. **50.** 1) 19; 2) $3a^2+b^2$. **51.** Непарна. **52.** Непарна. **53.** Загального вигляду. **54.** Парна. **55.** Загального вигляду. **56.** $[2,3)\cup(3,+\infty)$. **57.** $[-2,2]$. **58.** $[2,5)$. **59.** $[0,+\infty)$. **60.** $(2k\pi,(2k+1)\pi)$, $k\in\mathbf{Z}$. **61.** $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$. **62.** $(1,2]$. **63.** $(2,+\infty)$. **64.** $\left[k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$, $k\in\mathbf{Z}$. **65.** 1) $D(f)=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$, $E(f)=[0,+\infty)$; 2) $D(f)=[-1,2]$, $E(f)=\left[0,\frac{3}{2}\right]$; 3) $D(f)=(-\infty,+\infty)$, $E(f)=[1,+\infty)$. **66.** $D(f)=(-\infty,+\infty)$, $E(f)=[0,\pi]$.

67. $D(f)=[1,100]$, $E(f)=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. **68.** $p(x)=2b+2\left(1-\frac{b}{h}\right)x$, $x\in(0,h)$; $S(x)=bx\left(1-\frac{x}{h}\right)$, $x\in(0,h)$. **69.** $a=\sqrt{100-96\cos x}$, $x\in(0,\pi)$; $S=24\sin x$, $x\in(0,\pi)$. **70.** $T=2l=2\pi$. **71.** $T=2l=30\pi$. **72.** $T=2l=2\pi$. **73.** $T=2l=6\pi$. **74.** $T=2l=\pi$. **75.** $x=\frac{1}{2}(y+5)$, $E(f)=(-\infty,+\infty)$.

76. $x=\log_3 y$, $E(f)=(-\infty,+\infty)$. **77.** а) $x=\sqrt{1-y^2}$, $E(f)=[0,1]$; б) $x=-\sqrt{1-y^2}$, $E(f)=[-1,0]$. **78.** $x=3\arccos y$, $E(f)=[0,\pi]$. **79.** $x=\frac{1-y}{1+y}$, $y\neq-1$. **90.** 1) парабола, $y^2=6(x-1{,}5)$; 2) парабола, $y^2=-4(x-1)$. **91.** 1) еліпс, $\frac{(x+2{,}4)^2}{12{,}96}+\frac{y^2}{7{,}2}=1$; 2) гіпербола, $\frac{(x+1{,}2)^2}{0{,}64}-\frac{y^2}{0{,}8}=1$. **92.** 1) парабола, $x^2=-10(y-2{,}5)$; 2) еліпс, $\frac{x^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$. **93.** $w(A)=0$. **95.** $z(A)=3$. **96.** Уся числова площина. **97.** Внутрішні і граничні точки еліпса $x^2+2y^2=2$. **98.** Вся числова площина, за винятком прямих $y=\pm x$. **99.** $y>x$, $y>0$, $x\neq0$ – другий квадрант і точки вище бісектриси першого координатного кута площини xOy. **100.** Півплощина $y\geq0$. **101.** Круг, $x^2+y^2\leq1$. **102.** $x^2+y^2>1$. **103.** $x^2+y^2-z^2\geq0$, виключаючи $O(0,0,0)$. **104.** $x^2+y^2-z^2\leq1$. **105.** Паралельні прямі $x+y=c$. **106.** Сім'я рівнобічних гіпербол зі спільними асимптотами $y=\pm x$. **107.** Пучок прямих з вершиною в початку координат, за винятком вершини. **108.** Сукупність гіпербол $y=\frac{c^2}{x}$ в I і III квадрантах. **109.** Сім'я кіл з центрами на осі Oy, що проходять через точки $(-1,0)$, $(1,0)$ і за їх винятком. **110.** $x+y+z=c$ – сім'я паралельних площин. **111.** $x^2+y^2+z^2=C$ – сім'я концентричних сфер з центром у початку координат. **112.** $x^2+y^2-z^2=c$: при $c>0$ – сім'я однопорожнинних гіперболоїдів, при $c<0$ – двопорожнинних гіперболоїдів, а для $c=0$ – конус. **113.** Сім'я еліптичних циліндрів, спільною віссю якої є пряма $x+y=0, z=0$. **114.** $z^2=\operatorname{tg}^2 c\left(x^2+y^2\right)$ – сім'я кругових конусів зі спільною вершиною в початку координат і спільною віссю Oz. **115.** $\left\{\begin{array}{c} 1-\delta<x<1+\delta \\ -2-\delta<y<-2+\delta \\ 4-\delta<z<4+\delta \end{array}\right\}$, $\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2}<\delta$. **116.** $-\delta<x_1<\delta$, $1-\delta<x_2<1+\delta$, $-2-\delta<x_3<-2+\delta$, $3-\delta<x_4<3+\delta$; $\sqrt{x_1^2+(x_2-1)^2+(x_3+2)^2+(x_4-3)^2}<\delta$. **117.** 1) $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}+\frac{z^2}{25}\le 1$, тіло обмежує тривісний еліпсоїд з центром у точці $A(1,-1,0)$; 2) $\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(y+2)^2}{3}-\frac{(z-1)^2}{1}\le -1$, тіло обмежує двопорожнинний гіперболоїд з центром симетрії в точці $B(-1,-2,1)$; 3) $\frac{(x-3)^2}{2}+\frac{(y+1)^2}{3}-\frac{z^2}{4}\le 1$, тіло обмежує однопорожнинний гіперболоїд з центром симетрії в точці $C(3,-1,0)$; 4) $\frac{(x+3)^2}{5}-\frac{(y-2)^2}{7}\le 2(z+1)$, тіло обмежує гіперболічний параболоїд з центром симетрії в точці $D(-3,2,-1)$; 5) $\frac{(x-1)^2}{3}-\frac{(y+5)^2}{2}\le 2(z-2)$, тіло обмежує еліптичний параболоїд з центром симетрії в точці $E(1,-5,2)$. **123.** $0{,}5$. **124.** 2. **125.** $1{,}5$. **126.** 2. **127.** 2. **128.** 0. **129.** ∞. **130.** 5^{-5} **131.** $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$. **132.** 1. **133.** 2. **134.** 0. **135.** 1. **136.** $\frac{1}{2}(a+b)$. **137.** $0{,}5$. **138.** 2. **139.** 2. **140.** 3. **141.** 4. **142.** $0{,}75$. **143.** 4. **144.** $-0{,}5$. **145.** 6. **146.** 10. **147.** $0{,}5$. **148.** $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$. **149.** $\frac{3}{8}$. **150.** $1{,}5$. **151.** $0{,}75$. **152.** $-\frac{\sqrt{2}}{8}$. **153.** -7. **154.** 4. **155.** $\frac{2}{3}$. **156.** -2. **157.** $1{,}5$. **158.** $\frac{1}{\sqrt{2a}}$. **159.** $0{,}25$. **160.** $2{,}4$. **161.** $\frac{2}{27}$. **162.** $\frac{7}{36}$. **163.** $0{,}5$. **164.** $\frac{8}{3}$. **165.** $\frac{5}{6}$. **166.** $\frac{8}{3}$. **167.** 3. **168.** $0{,}25$. **169.** $0{,}5$. **170.** ∞. **171.** $2\cos a$. **172.** 2. **173.** 4. **174.** $0{,}25$. **175.** e^3. **176.** e^8. **177.** e^6. **178.** e^2. **179.** e^2. **180.** -2. **181.** 5. **182.** $-0{,}25$. **183.** 15. **184.** -3. **185.** 1. **186.** e. **187.** e. **188.** $\lim\limits_{x\to 2+0} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2-0} y=+\infty$. **189.** $\lim\limits_{x\to 2-0} y=0$, $\lim\limits_{x\to 2+0} y=+\infty$. **190.** $\lim\limits_{x\to 2-0} y=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 2+0} y=-\frac{\pi}{2}$. **191.** $\lim\limits_{x\to -0} y=1$, $\lim\limits_{x\to +0} y=0$. **192.** $\lim\limits_{x\to -1-0} y=0$, $\lim\limits_{x\to -1+0} y=+\infty$. **193.** $\frac{1}{6}$. **194.** 1. **195.** Не існує. **196.** 2. **197.** 1. **198.** $\ln 2$. **199.** 0. **200.** 0. **201.** 0. **202.** 0. **203.** e. **204.** 0 і 1. **205.** 0 і 1. **206.** 1 і ∞. **212.** $x_1=-4$, другого роду. **213.** $x_1=1, x_2=-2$, другого роду. **214.** $x_1=-1$, другого роду. **215.** $x_1=-1$, усувний.

216. $x_1=0,\ x_2=1$ – усувні; $x_3=-1$ – другого роду. **217.** $\lim\limits_{x\to 2+0} y=\lim\limits_{x\to 2-0} y=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $\lim\limits_{x\to 5-0} y=0$, $\lim\limits_{x\to 5+0} y=\infty$. **218.** $\lim\limits_{x\to 2-0} y=0$, $\lim\limits_{x\to 2+0} y=\infty$, $\lim\limits_{x\to 5+0} y=\lim\limits_{x\to 5-0} y=\sqrt[3]{3}$. **219.** $\lim\limits_{x\to +0} y=\lim\limits_{x\to -0} y=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, $\lim\limits_{x\to 3-0} y=0$, $\lim\limits_{x\to 3+0} y=\infty$. **220.** $\lim\limits_{x\to 2-0} y=\lim\limits_{x\to 2+0} y=\sqrt[3]{5}$, $\lim\limits_{x\to 1-0} y=\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0} y=0$. **221.** $\lim\limits_{x\to 1-0} y=\lim\limits_{x\to 1+0} y=\sqrt{6}$, $\lim\limits_{x\to 3-0} y=\infty$, $\lim\limits_{x\to 3+0} y=0$. **222.** Розрив першого роду в точці $x=2$, стрибок $h=-1$. **223.** Розрив першого роду в точці $x=0$, стрибок $h=4$. **224.** Розрив першого роду в точці $x=0$, стрибок $h=-1$. **225.** Розрив першого роду в точці $x=\pi$, стрибок $h=\frac{\pi}{2}$. **226.** Розрив другого роду в точці $x=\frac{\pi}{2}$. **227.** 1) точки розриву першого роду, $y(2-0)$ і $y(2+0)$; 2) точки розриву першого роду, $y(4-0)$ і $y(4+0)$. **228.** 1) точка розриву першого роду; 2) точка розриву першого роду. **229.** 1) $y(5-0)=0$, $y(5+0)=\frac{5}{2}$, $y(5-0)\ne y(5+0)$. Точки розривів першого роду; 2) $y(3-0)=0$, $y(3+0)=\frac{2}{5}$. Точки розривів першого роду. **230.** Рівномірно неперервна. **231.** Рівномірно неперервна. **232.** Рівномірно неперервна. **233.** Не рівномірно неперервна. **234.** Не рівномірно неперервна. **235.** Рівномірно неперервна. **236.** 1) і 2) – рівномірно неперервні. **237.** Неперервна на площині xOy. **238.** Неперервна в просторі xyz. **239.** Неперервна в просторі xyz. **240.** Неперервна на площині xOy. **241.** Неперервна в просторі xyz. **242.** $O(0,0)$. **243.** $O(0,0)$. **244.** Прямі $y=\pm x$. **245.** Конус $x^2+y^2-z^2=0$. **246.** Гіперболічний параболоїд $z=xy$. **247.** $A(1,1)$. **248.** Пряма $y=2x$. **249.** Гіпербола $x^2-2y^2=4$. **250.** $O(0,0)$. **251.** Сукупність точок прямих $x=m\pi$, $y=n\pi\ (m,n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$. **252.** Коло $x^2+y^2=1$. **264.** 1) $k=1$; 2) $k=\frac{2}{3}$; 3) $k=2$; 4) $k=3$; 5) $k=\frac{1}{5}$. **265.** 1) $k=2$; 2) $k=\frac{2}{3}$; 3) $k=2$; 4) $k=1$; 5) $k=\frac{1}{2}$. **266.** 5. **267.** $\sqrt{2}$. **268.** $0{,}5$. **269.** 0. **270.** 1. **271.** -1. **272.** 1) $-2+i\cdot 2$; 2) $-2-i\cdot 2$; 3) -2; 4) $-i\cdot 4$; 5) i; 6) $-i\cdot 8$. **273.** 1) 0; 2) $i\cdot 4$; 3) $-i\cdot 2$; 4) 4; 5) -1; 6) $i\cdot 8$. **274.** 1) $1-i$; 2) $-1-i\cdot 3$; 3) $2i$; 4) $2-i\cdot 2$; 5) $-1-i$; 6) $-2+i\cdot 2$. **275.** 1) -2; 2) $2i$; 3) $-1-i$; 4) 2; 5) $-i$; 6) $2-i\cdot 2$. **276.** 1) $\left(\sqrt{15}+1\right)(1-i)$; 2) $\left(\sqrt{15}-1\right)(1+i)$; 3) $\sqrt{15}+i$; 4) $-i\cdot 16$; 5) $\frac{\sqrt{15}}{8}+i\cdot\frac{7}{8}$; 6) $-4\left(11-i\cdot 3\sqrt{15}\right)$. **277.** 1) 0; 2) $-6+i\cdot 8$; 3) $-3-i\cdot 4$; 4) $7+i\cdot 24$; 5) -1; 6) $-117+i\cdot 44$. **278.** 1) $13+i\cdot 14$; 2) $-1+i\cdot 8$; 3) $6-i\cdot 11$; 4) $9+i\cdot 95$; 5) $\frac{75}{58}+i\cdot\frac{59}{58}$; 6) $154+i\cdot 414$. **279.** 1) $7+i\cdot 4$; 2) $-1-i\cdot 6$; 3) $3+i$; 4) $17+i\cdot 11$; 5) $\frac{7}{41}-i\cdot\frac{19}{41}$; 6) $236+i\cdot 115$. **280.** $\pm\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$; $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. **281.** $\sqrt{5}\left(\cos\frac{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2k\pi}{2}\right)$, $k=0,\ 1$, $5e^{i\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}$. **282.** $\sqrt[4]{2}(\cos\frac{3+8k}{8}\pi+$

$+i\sin\frac{3+8k}{8}\pi\Big)$, $k=0,1$, $\sqrt{2}\,e^{i\frac{3}{4}\pi}$. **283.** $\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{2k\pi-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{15}}{15}}{3}+i\sin\frac{2k\pi-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{15}}{15}}{3}\right)$,

$k=0,1,2$, $4e^{i\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{15}}{5}}$. **284.** $\sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{3}+i\sin\frac{(2k+1)\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{3}\right)$,

$k=0,1,2$, $5e^{i\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)}$. **285.** $\sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{2k\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{3}+i\sin\frac{2k\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{3}\right)$, $k=0,1,2$, $5e^{-i\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}$.

286. $\cos\frac{2k+1}{4}\pi+i\sin\frac{2k+1}{4}\pi$, $k=0,1,2,3$, $e^{i\pi}$. **287.** $\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{7+8k}{20}\pi+i\sin\frac{7+8k}{20}\pi\right)$,

$k=0,1,2,3,4$, $\sqrt{2}\,e^{i\frac{7}{4}\pi}$. **288.** $\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{5+8k}{20}\pi+i\sin\frac{5+8k}{20}\pi\right)$, $k=0,1,2,3,4$, $\sqrt{2}\,e^{i\frac{5}{4}\pi}$.

289. $\sqrt[16]{8}\left(\cos\frac{3+8k}{32}\pi+i\sin\frac{3+8k}{32}\pi\right)$, $k=0,1,2,3,4,5,6,7$, $2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3}{4}\pi}$. **290.** $3\sin x\cos^2 x-$ $-\sin^3 x$. **291.** $\cos^3 x-3\sin^2 x\cos x$. **292.** $4\sin x\cos^3 x-4\sin^3 x\cos x$. **293.** $\cos^4 x-6\sin^2 x\cos^2 x+$ $+\sin^4 x$. **294.** $5\cos^4 x\sin x-10\cos^2 x\sin^3 x+\sin^5 x$. **295.** $\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$. **296.** $\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$.

297. $\frac{1}{8}(\cos 4x-4\cos 2x+3)$. **298.** $\frac{1}{8}(\cos 4x+4\cos 2x+3)$. **299.** $\frac{1}{16}(\cos 5x+5\cos 3x+10\cos x)$.

300. $\frac{1}{32}(\cos 6x+6\cos 4x+15\cos 2x+10)$.

Глава 4

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

§ 1. ЗАДАЧІ, ЯКІ ПРИВОДЯТЬ ДО ВВЕДЕННЯ ПОХІДНОЇ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Приклад. Задано закон руху у вигляді залежності шляху від часу $S=t^2-4t+2$, де t – час у секундах; S – шлях у метрах.

Треба знайти швидкість руху: а) у будь-який момент часу; б) наприкінці четвертої секунди.

Розв'язання. У момент t маємо $S=t^2-4t+2$. Нехай з моменту t пройшов деякий час Δt, а шлях, пройдений за цей час, дорівнює ΔS. У момент $t+\Delta t$ одержимо $S+\Delta S=(t+\Delta t)^2-4(t+\Delta t)+2$, тоді $\Delta S=(t+\Delta t)^2-4(t+\Delta t)+$ $+2-\left(t^2-4t+2\right)=t^2+2t\Delta t+\left(\Delta t^2\right)-4t-4\Delta t+2-t^2+4t-2=2t\Delta t-4\Delta t+(\Delta t)^2$.

Середня швидкість руху тіла за час Δt

$$v_{\text{сер}}=\frac{\Delta S}{\Delta t}=2t-4+\Delta t.$$

Швидкість руху тіла у момент t найповніше характеризує та границя, до якої прямує середня швидкість при $\Delta t\to 0$:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0} v_{\text{сер}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(2t-4+\Delta t)=2t-4.$$

Відповідь: у будь-який момент часу швидкість $v=2t-4$, а наприкінці четвертої секунди $v(4)=2\cdot 4-4=4$ (м/с).

1. Задано закон руху:

1) $S=14t+2$; 2) $S=4t^2-3t$; 3) $S=t^3+2t-5$; 4) $S=5t+6$; 5) $S=t^3$.

Знайти швидкість руху у будь-який момент часу і наприкінці десятої секунди.

2. Задано закон нагрівання тіла $w=2\Theta^3-\Theta$, де w – кількість теплоти; Θ – температура. Знайти теплоємність c тіла при будь-якій температурі і при температурі 10 °С.

3. Кількість електрики Q, що проходить через поперечний переріз провідника за час t, змінюється за законом $Q=-2\cos 2t$.

Знайти силу струму у будь-який момент часу і при $t=2\pi$ секунд (середня сила струму $I_{\text{сер}}=\frac{\Delta Q}{\Delta t}$; сила струму $I=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}$).

§ 2. ВИЗНАЧЕННЯ, ГЕОМЕТРИЧНИЙ І ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Приклади. **1.** Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = x^2 + 3x - 1$ у точці $M_0(3,\ 17)$.

Розв'язання. Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0,\ y_0)$ дорівнює $f'(x_0)$. Тому треба знайти значення похідної від функції $y = x^2 + 3x - 1$ при $x = 3$. Знайдемо y' безпосередньо за визначенням похідної:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) - 1 - (x^2 + 3x - 1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x - 1 - x^2 - 3x + 1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + 3\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + 3 + \Delta x) = 2x + 3 .$$

Одержаний вираз похідної дає загальне значення кутового коефіцієнта дотичної до даної кривої у будь-якій її точці. У точці $M_0(3,\ 17)$ кутовий коефіцієнт дотичної

$$k = y'(3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9 .$$

2. Виходячи з визначення похідної, знайти похідну від функції $y = x^3$.

Розв'язання. Застосовуючи визначення похідної, знаходимо приріст функції в точці x:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 .$$

Складаємо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} .$$

Переходячи до границі, знайдемо похідну даної функції

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = 3x^2.$$

Таким чином, похідна функції $y = x^3$ у довільній точці $y' = 3x^2$.

3. Знайти рівняння дотичної в точці $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ до кривої $y = \cos x$.

Розв'язання. Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $A(x_0,\ y_0)$ має вигляд $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$. У нашому випадку $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Знайдемо

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\frac{x + \Delta x - x}{2} \cdot \sin\frac{x + \Delta x + x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = -\lim_{\frac{\Delta x}{2} \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\sin x ,\quad y'(x_0) = y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} .$$

Отже,

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Відповідь: рівняння шуканої дотичної $y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = x^2 + 6x - 7$ у точках: 1) $M_1(1,\ 0)$; 2) $M_2(0, -7)$; 3) $M_3(-3, -16)$.

5. Застосовуючи визначення похідної, знайти похідні від таких функцій:

1) $y = 8x - 1$; 2) $y = \frac{1}{x}$; 3) $y = \sqrt[3]{x}$; 4) $y = \operatorname{tg} x$;

5) $y = \sin x$; 6) $y = x^3 - 5x$; 7) $y = 2^x$; 8) $y = \log_2 x$.

6. Знайти рівняння дотичних у точці (1, 2) до кривих:

1) $y = \sqrt{x + 3}$; 2) $y = 3x^2 + x - 2$; 3) $y = x^4 + 1$.

§ 3. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ВІД ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ТА ЇХ ОБЧИСЛЕННЯ

Приклад. Виходячи з визначення похідної, знайти частинні похідні від функції $z = x\sin y$ у будь-якій точці $M(x,\ y)$.

Розв'язання. Знаходимо частинні прирости $\Delta_x z$ та $\Delta_y z$ у точці $M(x,\ y)$:

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)\sin y - x\sin y = \Delta x \cdot \sin y,$$

$$\Delta_y z = x\sin(y + \Delta y) - x\sin y = x\left[\sin(y + \Delta y) - \sin y\right],$$

$$\Delta_y z = 2x\sin\frac{\Delta y}{2}\cos\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right).$$

Складаємо відношення частинних приростів до приростів незалежних змінних Δx, Δy:

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\Delta x \cdot \sin y}{\Delta x} = \sin y, \quad \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{2x\sin\left(\frac{\Delta y}{2}\right)\cos\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)}{\Delta y}.$$

Переходячи до границі, знайдемо частинні похідні від функції $z = f(x,\ y)$ за змінними x та y у будь-якій точці $M(x,\ y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\sin y = \sin y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\frac{\Delta y}{2} \to 0}\left[x\frac{\sin\left(\frac{\Delta y}{2}\right)}{\frac{\Delta y}{2}}\cos\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)\right] = x\cos y.$$

7. Виходячи з визначення похідної, знайти частинні похідні від функції z двох змінних у точці $M(x,\ y)$: 1) $z = x\cos y$; 2) $z = y\,\mathrm{tg}\,x$; 3) $z = \sin x\cos y$; 4) $z = xy$; 5) $z = y\sin x$; 6) $z = y\cos x$.

8. Знайти частинні похідні від функції трьох змінних у точках, де ця функція означена: 1) $u = \sin x\cos y\,\mathrm{tg}\,z$; 2) $u = x^2 y\,\mathrm{ctg}\,z$; 3) $u = xy^2z^2$; 4) $u = xyz$; 5) $u = xy\cos z$; 6) $u = yz\cos x$.

§ 4. ТЕОРЕМИ ПРО ПОХІДНІ

Приклади. **1.** Знайти похідну від функції $y = 3x^3 + 2^x - 5\cos x$.

Розв'язання. Оскільки похідна лінійної комбінації функцій дорівнює лінійній комбінації похідних від цих функцій, то

$$y' = 3\left(x^3\right)' + \left(2^x\right)' - 5(\cos x)',$$

або
$$y' = 3 \cdot 3x^2 + 2^x\ln 2 - 5(-\sin x) = 9x^2 + 2^x\ln 2 + 5\sin x$$

2. Знайти похідні від функцій: 1) $y = x^4\sin x$; 2) $y = e^x\cos x \cdot \ln x$; 3) $u = x^3y^2\,\mathrm{tg}\,z$.

Розв'язання.

1) Згідно з правилом диференціювання добутку двох функцій знаходимо

$$y' = \left(x^4\right)'\sin x + x^4(\sin x)' = 4x^3\sin x + x^4\cos x = x^3(4\sin x + x\cos x).$$

2) За правилом диференціювання добутку функцій u, v, w

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Знаходимо

$$y' = \left(e^x\right)'\cos x \cdot \ln x + e^x(\cos x)'\ln x + e^x\cos x(\ln x)' =$$

$$= e^x\cos x \cdot \ln x - e^x\sin x \cdot \ln x + e^x\cos x\frac{1}{x}.$$

3) Відповідно до визначення частинної похідної

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y^2\,\mathrm{tg}\,z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3y\,\mathrm{tg}\,z; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^3y^2\sec^2 z.$$

3. Знайти похідні від функцій: 1) $y = \dfrac{x^2}{\cos x}$; 2) $z = \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2}$.

Розв'язання. Згідно з правилом диференціювання частки знаходимо:

1) $$y' = \frac{\left(x^2\right)'\cos x - x^2(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{2x\cos x - x^2(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{2x\cos x + x^2\sin x}{\cos^2 x};$$

2) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\left(x^2y\right)'_x\left(x^2 + y^2\right) - \left(x^2 + y^2\right)'_x x^2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{2xy\left(x^2 + y^2\right) - 2xx^2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{2xy^3}{\left(x^2 + y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\left(x^2y\right)'_y\left(x^2 + y^2\right) - \left(x^2 + y^2\right)'_y x^2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{x^4 - x^2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

Знайти похідні функцій.

9. 1) $y=2x^5-\frac{1}{x}+3\operatorname{tg}x$; 2) $y=\frac{7}{\sqrt{x}}-e^x$;

3) $y=5\operatorname{sh}x-2\operatorname{arctg}x$; 4) $y=3\cos x-4\operatorname{ch}x+2\operatorname{sh}x$;

5) $y=3\arcsin x+5\operatorname{ctg}x$; 6) $u=x^4+y^4-4x^2y^2-3xyz$;

7) $y=\frac{x+1}{x-1}$; 8) $y=\frac{x}{x^2+1}$;

9) $y=\frac{3t^2+1}{t-1}$; 10) $u=\frac{v^3-2v}{v^2+v+1}$; 11) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(a,\ b,\ c,\ d-\text{const})$;

12) $y=\frac{x^2+1}{3(x^2-1)}+(x^2-1)(1-x)$; 13) $y=\frac{2}{x^3-1}$; 14) $y=\frac{2x^4}{b^2-x^2}$;

15) $y=\frac{x^2+x-1}{x^3+1}$; 16) $y=\frac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}$; 17) $y=\frac{mx^2}{\sqrt{x}}+\frac{nx\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{p\sqrt{x}}{x}$;

18) $y=\frac{ax^3+bx^2+c}{(a+b)x}$; 19) $y=\frac{a^2b^2c^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$;

20) $y=\frac{ax+bx^2}{am+bm^2}$ $(a,\ b,\ c,\ m,\ n,\ p-\text{const})$.

10. 1) $y=(x^3-2)\operatorname{tg}x$; 2) $y=\operatorname{ctg}x\operatorname{sh}x$; 3) $y=2^x x^2\arccos x$;

4) $u=3x^2y\sin x+\cos y$; 5) $u=x^y$; 6) $y=\frac{1+\ln\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x}$; 7) $y=\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x+\cos x}$;

8) $y=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$; 9) $y=2\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$; 10) $y=4(\sin x-2\sin^3x)\cos x$.

11. 1) $y=\frac{x^2+4}{x+1}$; 2) $y=\frac{x}{\ln x}$; 3) $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$; 4) $y=\frac{e^x}{\sin x}$;

5) $y=\frac{\arcsin x}{\arccos x}$; 6) $u=xy+\frac{x}{y}$; 7) $u=\frac{x}{y^2}$; 8) $u=\frac{\operatorname{tg}x}{y}$;

9) $u=y\sin x+\sin y$; 10) $u=x^{\sin y}$; 11) $u=z^{xy}\ (z>0)$;

12) $z=e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$; 13) $z=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$; 14) $z=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{y}$;

15) $u=(\sin x)^{yz}$; 16) $z=(2x+y)^{2x+y}$; 17) $u=e^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

§ 5. ПОХІДНА СКЛАДНОЇ ФУНКЦІЇ

Приклади. **1.** Знайти похідні функцій: 1) $y=\sqrt{5x+4}$; 2) $y=\sin(3x^2+x)$;

3) $y=\operatorname{tg}^2 4x$; 4) $y=\arccos\frac{1}{x}$; 5) $y=3^{\sqrt{x}}$.

Розв'язання. 1) Функція $y=\sqrt{5x+4}$ – складна, її можна записати так: $y=\sqrt{w}$, де $w=5x+4$. Застосуємо формулу похідної від складної функції $y'_x=y'_w w'_x$. Знайдемо $y'_w=\frac{1}{2\sqrt{w}}$, $w'_x=5$.

Звідси

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{w}}\cdot 5=\frac{5}{2\sqrt{w}},\quad \text{або}\quad y'=\frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt{5x+4}}.$$

2) Нехай $y=\sin w$, де $w=3x^2+x$, тоді $y'_w=\cos w$, $w'_x=6x+1$.

Тому

$$y'=(6x+1)\cos(3x^2+x).$$

3) $y=\operatorname{tg}^2 4x$ – складна функція, її можна записати у вигляді $y=w^2$, де $w=\operatorname{tg}v$, $v=4x$. Використаємо формулу $y'_x=y'_w w'_v v'_x$:

$$y'=2w\frac{1}{\cos^2 v}\cdot 4.$$

Підставивши вирази для w та v, одержимо

$$y'=2\operatorname{tg}4x\cdot\frac{1}{\cos^2 4x}\cdot 4=\frac{8\operatorname{tg}4x}{\cos^2 4x}.$$

4) Функцію $y=\arccos\frac{1}{x}$ перепишемо так: $y=\arccos w$, де $w=\frac{1}{x}$. Похідна

$$y'_x=y'_w\cdot w'_x=-\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right);\quad y'_x=\frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

5) Функцію $y=3^{\sqrt{x}}$ запишемо у вигляді $y=3^w$, де $w=\sqrt{x}$. Похідна

$$y'_x=y'_w w'_x=\frac{3^w\ln 3}{2\sqrt{x}}=\frac{3^{\sqrt{x}}\ln 3}{2\sqrt{x}}.$$

2. Знайти похідну функції $y=\ln\sqrt{|x|}$, якщо

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{при}\quad x>0;\\ -x, & \text{при}\quad x<0.\end{cases}$$

Розв'язання. За умовою $y=\ln\sqrt{x}$ при $x>0$ та $y=\ln\sqrt{-x}$, якщо $x<0$. У даному випадку $y=\ln u$, $u=\sqrt{x}$ при $x>0$ та $y=\ln u$, $u=\sqrt{v}$, $v=-x$ при $x<0$. Тому

$$y'_x=\frac{1}{u}u'=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2x}\ \text{ при } x>0,$$

$$y'_x=\frac{1}{u}\frac{1}{2\sqrt{v}}v'=\frac{1}{\sqrt{-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{-x}}(-1)=\frac{1}{2x}\ \text{ при } x<0.$$

Відповідь: $\left(\ln\sqrt{|x|}\right)'=\frac{1}{2x}$ при $x\neq 0$.

3. Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

1) $x^2-y^2-4=0$; 2) $\sin\frac{x}{y}+\cos\frac{y}{x}=0$.

Розв'язання. 1) Знаходимо похідні від обох частин рівності $x^2-y^2-4=0$, вважаючи y функцією від x. Маємо $2x-2yy'=0$, а $y'=\frac{x}{y}$.

Відповідь: $y'=\frac{x}{y}$.

2) Знаходимо похідні від обох частин рівності $\sin\frac{x}{y}+\cos\frac{y}{x}=0$. Оскільки y є функцією x, то

$$\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{y-xy'}{y^2}+\left(-\sin\frac{y}{x}\right)\frac{y'x-y}{x^2}=0.$$

Звідси

$$\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}-\frac{x}{y^2}y'\cos\frac{x}{y}-\frac{1}{x}y'\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}=0;$$

$$y'=\frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}+\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}}{\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}+\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}}=\frac{\frac{y}{x}\left(\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}+\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}\right)}{\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}+\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}}=\frac{y}{x}.$$

Відповідь: $y'=y/x$.

4. Знайти похідну від функції $y=x^x$, $x>0$.

Розв'язання. Злогарифмувавши обидві частини рівності $y=x^x$, одержимо $\ln y=x\ln x$. Після диференціювання обох частин останньої рівності, вважаючи y функцією від x, запишемо

$$\frac{y'}{y}=\ln x+x\frac{1}{x}.$$

Звідси $\frac{y'}{y}=\ln x+1$; $y'=y(\ln x+1)$.

Оскільки $y=x^x$, то $y'=x^x(\ln x+1)$.

Відповідь: $y'=x^x(\ln x+1)$.

5. Знайти частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$ та $\frac{\partial u}{\partial y}$ від функції

$$u=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Розв'язання. При знаходженні $\frac{\partial u}{\partial x}$ функцію u слід розглядати як складну функцію однієї змінної x при фіксованому y:

$$u=\arcsin w,\quad w=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Тому
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}\cdot w'_x,$$

$$w'_x=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x=\frac{x'\sqrt{x^2+y^2}-x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\sqrt{1-w^2}=\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Отже,
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}\cdot\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Міркуючи аналогічно, знайдемо

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}\cdot w'_y=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}\cdot\frac{0\cdot\sqrt{x^2+y^2}-x\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}\cdot\frac{-xy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Відповідь: $\frac{\partial u}{\partial x}=y\left(x^2+y^2\right)^{-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-x\left(x^2+y^2\right)^{-1}$.

12. Знайти похідні від складних раціональних та ірраціональних функцій:

1) $y=\left(3+4x+5x^2\right)^3$; 2) $y=\dfrac{1}{\left(4+x^2\right)^5}$; 3) $y=(x+3)^3(2x-5)^2$;

4) $y=\dfrac{x^2+5}{2x-3}$; 5) $y=x\sqrt{x+3}$; 6) $y=\dfrac{x\sqrt{x-1}}{1-x}$;

7) $y=\dfrac{2x-1}{3x^2+4}$; 8) $y=\sqrt{x-\sqrt{3x-1}}$; 9) $y=\dfrac{\sqrt{2-x}}{x}$;

10) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x+x^2}}$; 11) $y=\sqrt{\dfrac{x+5}{x-5}}$; 12) $y=\dfrac{x}{(1-x)^2}$;

13) $y=\sqrt{a^2-x^2}$; 14) $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$; 15) $y=\sqrt{f(x)}$;

16) $y=\sqrt{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$; 17) $y=\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$; 18) $y=\dfrac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$.

13. Знайти похідні від функцій:

1) $y=\sin^2 3x$; 2) $y=2\,\mathrm{tg}^3\dfrac{1}{x}$; 3) $y=\cos x^3$;

4) $y=\sin^3\left(\sqrt{x}+1\right)$; 5) $y=\dfrac{\cos x}{\sin^4 x+1}$; 6) $y=2x+\sin 2x$;

7) $y=3\,\mathrm{ctg}\,x+\mathrm{ctg}^3 x$; 8) $y=x^3\cos 2x$; 9) $y=\dfrac{1}{3\cos^3 x}$;

10) $y=\left(2-x^2\right)\cos x+2x\sin x$; 11) $y=\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$;

12) $y=\dfrac{\cos^3 x}{3}-\cos x$; 13) $y=\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$;

14) $y=x+\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$; 15) $y=\mathrm{ctg}^3 x-3\,\mathrm{ctg}\,x-3x$.

14. Знайти похідні від обернених тригонометричних функцій:

1) $y=\arccos\left(x^2+2\right)$; 2) $y=6\arcsin\left(3-x^2\right)$; 3) $y=x\arcsin\sqrt{x}$;

4) $y=x\arccos\dfrac{1}{x}$; 5) $y=x\arcsin\dfrac{x}{3}+\sqrt{9-x^2}$; 6) $y=\mathrm{arctg}\,\dfrac{x^2}{2}$;

7) $y=\arccos\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}$; 8) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sqrt{2}}{x}$; 9) $y=\arcsin\dfrac{x}{a}$;

10) $y=\dfrac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{a}$; 11) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$; 12) $u=\arcsin xy$;

13) $u=\mathrm{arctg}\,x^2y$; 14) $u=\mathrm{arctg}\,xy^2$.

15. Знайти похідні від логарифмічних функцій:

1) $y=\ln(4-5x)$; 2) $y=\ln\left(\sqrt{1+x^2}+2\right)$; 3) $y=\lg^3 x^2$;

4) $y=\sqrt{x}\ln\left(x^2-2\right)$; 5) $y=\ln\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$; 6) $y=\ln\ln(3x+4)$;

7) $y=3\cos(\ln x)$; 8) $y=\ln|2x-1|$; 9) $y=\ln|x|$;

10) $y=\ln|\sin x|$; 11) $y=\ln|\cos x|$; 12) $y=\ln|f(x)|$;

13) $y=\ln\left|\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}\right|$; 14) $y=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$; 15) $y=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$;

16) $y=\ln\left|x^3+x^2\right|$; 17) $y=\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|$; 18) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$;

19) $y=\dfrac{x^4}{4}\left[(\ln x)^2-\dfrac{1}{2}\ln x+\dfrac{1}{8}\right]$; 20) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$.

16. Знайти похідні від таких функцій:

1) $y=\mathrm{e}^{2x}$; 2) $y=\mathrm{e}^{-x}$; 3) $y=\mathrm{e}^{4x}\sin 5x$; 4) $y=\mathrm{e}^{3x}\cos^2 4x$;

5) $y=3^{\sin 3x}$; 6) $y=a^{\sqrt{1+x}}$; 7) $y=5^{\ln\left(1+x^2\right)}$; 8) $y=\dfrac{\mathrm{tg}^2 x}{2^{\mathrm{tg}\,x}}$;

9) $y=\ln\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$; 10) $y=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$; 11) $y=\mathrm{e}^{-x^2}$;

12) $y=\arcsin\mathrm{e}^x+\arcsin\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}$; 13) $y=\mathrm{e}^{-x}-\sin\mathrm{e}^{-x}\cos\mathrm{e}^{-x}$.

17. Знайти похідні функцій, до яких входять гіперболічні функції:

1) $y=\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{5}$; 2) $y=\mathrm{sh}\,2x-2x$; 3) $y=2\,\mathrm{arctg}\left(\mathrm{th}\,\dfrac{x}{2}\right)$;

4) $y=\mathrm{th}\,x-\dfrac{2}{3}\mathrm{th}^3 x+\dfrac{1}{5}\mathrm{th}^5 x$; 5) $y=\mathrm{arctg}\left(\dfrac{1}{\mathrm{sh}\,x}\right)$; 6) $y=\ln\mathrm{th}\,\dfrac{x^2}{4}$;

7) $y=\sqrt{\mathrm{ch}\,x}$; 8) $y=x\,\mathrm{sh}\,x-\mathrm{ch}\,x$; 9) $y=\mathrm{sh}^3 x$; 10) $y=\sqrt[4]{\left(1+\mathrm{th}^2 x\right)^3}$.

18. Знайти похідні функцій $y(x)$, заданих неявно:

1) $3x^2+\sin y-\ln x+y=0$; 2) $\sqrt{y}+xy+y^2=0$; 3) $x\sin y+y\sin x=1$;

4) $y^2=2px$; 5) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$; 6) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$; 7) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$;

8) $x^3+y^3-3axy=0$; 9) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}\,(a-\text{const})$; 10) $y^2\cos x=a^2\sin 3x$;

11) $x^4+y^4=x^2y^2$; 12) $x-y=\arcsin x-\arcsin y$; 13) $y=\cos(x+y)$;

14) $y\sin x-\cos(x-y)=0$; 15) $y=x+\operatorname{arctg} y$.

19. Знайти похідні від показниково-степеневих функцій:

1) $y=x^{\sin x}$; 2) $y=(\cos x)^x$; 3) $y=(\ln x)^x$; 4) $y=x^{\ln x}$;

5) $y=(\sin x)^{\cos x}$; 6) $y=\sqrt[x]{(x+1)^2}$; 7) $y=2x^{\sqrt{x}}$; 8) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

9) $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$; 10) $y=\left(x^2+1\right)^{\sin x}$.

20. Знайти частинні похідні від таких функцій:

1) $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 2) $u=x\sin(x+y)$; 3) $u=\dfrac{\cos x^2}{y}$;

4) $u=\operatorname{tg}\dfrac{x^2}{y}$; 5) $u=\ln\left(x+y^2\right)$; 6) $u=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

7) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; 8) $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$; 9) $u=x^{\frac{y}{z}}$; 10) $u=x^{y^z}$;

11) $u=x^3y-y^3x$; 12) $u=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$; 13) $u=x\sqrt{y}+\dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$;

14) $u=\ln\left(x^2+y^2\right)$; 15) $u=\arcsin\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 16) $u=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$;

17) $u=xy\ln(x+y)$; 18) $u=xyz$; 19) $u=\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$;

20) $u=\ln(x+\ln y)$.

21. Знайти частинні похідні від таких функцій:

1) $z=\sin^2(4x-5y)$; 2) $z=\arccos\dfrac{x}{y}$; 3) $z=\ln\left(\sqrt{x^2+4y}+1\right)$;

4) $z=e^{x^2+y^2}$; 5) $z=e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{y}{x}}$; 6) $u=\arcsin\dfrac{xy}{z}$.

22. Дано функцію $z=e^{\frac{x}{y}}$. Показати, що

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

23. Дано функцію $z=\arcsin\dfrac{x-y}{x+y}$. Довести, що

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

24. Дано функцію $z=\dfrac{xy}{x+y}$. Показати, що

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

25. Обчислити $f'_x(4,\ 5)$ та $f'_y(4,\ 5)$, якщо $f(x,\ y)=3x^2y^3$.

§ 6. РІВНЯННЯ ДОТИЧНОЇ І НОРМАЛІ ДО ПЛОСКОЇ КРИВОЇ

Приклади. **1.** Знайти рівняння нормалі в точці $M_0(x_0,\ y_0)$ до кривої $y=x\ln x$, якщо $x_0=1$, $y_0=0$.

Розв'язання. Рівняння нормалі до кривої $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0,\ y_0)$ має вигляд

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

У нашому прикладі $x_0=1$, $y_0=0$. Знайдемо $f'(x_0)$:

$$f'(x)=\ln x+x\frac{1}{x}=\ln x+1,\quad f'(x_0)=f'(1)=\ln 1+1=1,$$

тому рівняння нормалі $y-0=-(x-1)$, або $x+y-1$.

Відповідь: $x+y=1$.

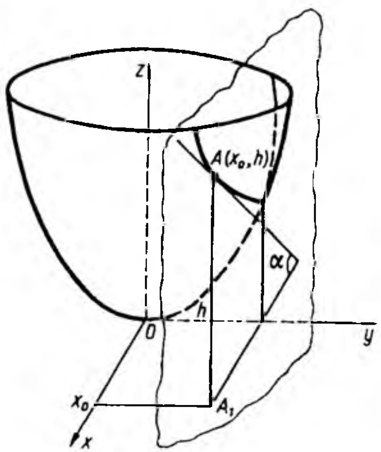

Рис. 4.1

2. Знайти кут α, утворений додатним напрямом осі Ox і дотичною, проведеною до лінії перетину поверхні $z = f(x,\ y)$ з площиною $y = h$ у точці $A(x_0, h,\ f(x_0,\ h))$:

1) $z = x^2 + y^2$, $h = 1$, $x_0 = \frac{1}{2}$; 2) $z = y^2 + 1$, $h = 1$, $x_0 = 1$.

Розв'язання.

1) Тангенс кута α дорівнює значенню частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial x}$ в точці $A_1(x_0,\ h)$ (рис. 4.1):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x;\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=x_0} = 1,\ \operatorname{tg}\alpha = 1;\ \alpha = \frac{\pi}{4};$$

2) $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$; $\operatorname{tg}\alpha = 0$; $\alpha = 0$.

26. Знайти рівняння дотичної і нормалі в точці $A_0(x_0,\ y_0)$ до кривих:

1) $x^2 + y^2 = 25$, $A_0(4,\ 3)$;

2) $y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$, $A_0(2,\ 3)$.

27. Дано криву $y = 2x^2 + 4x + 3$. Знайти координати точки дотику, якщо кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює 12.

28. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $A_0(1,\ 2)$, якщо піднормаль у кожній точці дорівнює 2. Відрізок A_0B дотичної між точкою дотику A_0 і точкою B перетину дотичної з віссю Ox називається довжиною дотичної, а проекція BM цього відрізка на вісь Ox – довжиною піддотичної. При цьому дотична не паралельна осі Ox і не перпендикулярна до неї. Довжина нормалі дорівнює A_0N, а довжина піднормалі – MN; $\angle NBA_0 = \varphi$ (рис. 4.2).

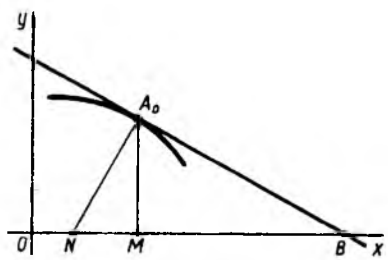

Рис. 4.2

29. Довести, що для параболи $y^2 = 2px$ піддотична дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.

30. 1) Вивести рівняння дотичної до параболи $y^2 = 20x$, яка утворює з віссю Ox кут 45°.

2) Знайти у довільній точці $M(x_0,\ y_0)$ еліпса рівняння дотичної і нормалі $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3) Знайти рівняння дотичної і нормалі в точці $M(x_0,\ y_0)$ гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

31. Довести, що піддотична до кривої $y = a^x$ стала і дорівнює $\frac{1}{\ln a}$.

§ 7. ПОХІДНА ВІД ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ, ЗАДАНОЇ ПАРАМЕТРИЧНО

Приклад. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ від функції

$$\begin{cases} x = 5t^3 + 4t^2 - 8t; \\ y = 3t^4 + 2t, \end{cases} \qquad t \in (0;\ +\infty).$$

Розв'язання. Оскільки $\dot{x} = 15t^2 + 8t - 8$, $\dot{y} = 12t^3 + 2$, то

$$y'_x = \frac{12t^3 + 2}{15t^2 + 8t - 8}.$$

32. Знайти похідні від функцій, заданих параметрично:

1) $\begin{cases} x = t^3 + 4t^2 - 5, \\ y = 3t^2 - 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = 3\cos t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = t, \\ y = t\sin 2t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1), \\ y = \arccos 2t; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = t + \ln\cos t, \\ y = t - \ln\sin t; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x = a\operatorname{ch} t, \\ y = a\operatorname{sh} t; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y = \dfrac{t^2}{t^2-1}; \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t; \end{cases}$

12) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}; \end{cases}$ 13) $\begin{cases} x = 1-t^2, \\ y = t-t^3; \end{cases}$

14) $\begin{cases} x = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \end{cases}$ 15) $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$

§ 8. ДИФЕРЕНЦІЙОВНІ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Приклад. Перевірити, чи функція $y = x^3$ є диференційовною в будь-якій точці x_0.

Розв'язання. Знайдемо

$$\Delta y = (x_0+\Delta x)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3 =$$
$$= 3x_0^2\Delta x + \left(3x_0\Delta x + \Delta x^2\right)\Delta x.$$

Приріст функції запишемо у вигляді

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(x_0, \ \Delta x)\Delta x,$$

де $A = 3x_0^2$, $\alpha(x_0, \ \Delta x) = 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2$, причому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(x_0, \ \Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(3x_0\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 0.$$

33. Показати, що наведені функції є диференційовними у будь-якій точці x_0 області їх визначення:

1) $y = x^3 + 8$; 2) $y = \cos 2x$; 3) $y = \dfrac{1}{x}$.

34. Чи є диференційовною функція $y = |\ x-1\ |$ у точці $x = 1$?

35. Чи є диференційовною в точці $x = 0$ функція

$$y = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad x < 0, \\ \sin x, & \text{якщо} \quad x \geq 0? \end{cases}$$

36. При яких значеннях a і b функція

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо} \quad x \leq 3, \\ ax+b, & \text{якщо} \quad x > 3 \end{cases}$$

буде диференційовною в точці $x = 3$?

§ 9. ОДНОБІЧНІ ПОХІДНІ

Приклад. Знайти ліву похідну $f'_-(x)$ і праву похідну $f'_+(x)$ від функції $f(x) = |\ 2x+3\ |$ в точці $x_0 = -\dfrac{3}{2}$.

Розв'язання. Оскільки

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{якщо} \quad x \geq -\dfrac{3}{2}, \\ -(2x+3), & \text{якщо} \quad x < -\dfrac{3}{2}, \end{cases}$$

то

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x\to -0}\frac{-(2(x+\Delta x)+3) - (-(2x+3))}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to -0}\frac{-2x-2\Delta x-3+2x+3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to -0}\frac{-2\Delta x}{\Delta x} = -2,$$
$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x\to +0}\frac{2(x+\Delta x)+3-(2x+3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to +0}\frac{2x+2\Delta x+3-2x-3}{\Delta x} = 2.$$

Відповідь: $f'_-(x) = -2$, $f'_+(x) = 2$.

37. Знайти ліву і праву похідні від таких функцій:

1) $f(x) = |\ 3x-1\ |$ в точці $x_0 = \dfrac{1}{3}$;

2) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{якщо} \quad x < 0, \\ \sin x, & \text{якщо} \quad x \geq 0, \end{cases}$

в точці $x_0 = 0$.

§ 10. НЕСКІНЧЕННІ ПОХІДНІ

38. Знайти похідну від функції $y=\sqrt[3]{x-1}$ в точці $x=1$.

39. В яких точках графік функції $y=\sqrt[3]{\sin x}$ має вертикальні дотичні?

§ 11. ФУНКЦІЇ, ЯКІ МАЮТЬ РОЗРИВНІ ПОХІДНІ

40. Знайти похідні від функцій і дослідити їх на неперервність:

1) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x<0, \\ \dfrac{x^2}{25}, & \text{якщо} \quad 0<x\le 5, \\ 1, & \text{якщо} \quad x>5; \end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & \text{якщо} \quad x<-1, \\ x^2, & \text{якщо} \quad -1\le x\le 2, \\ 6-x, & \text{якщо} \quad x>2; \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} 2-x, & \text{якщо} \quad x<0, \\ \sin x, & \text{якщо} \quad 0\le x<\pi, \\ x-\pi, & \text{якщо} \quad x\ge\pi. \end{cases}$

§ 12. ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ВІД ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

***Приклади.* 1.** Знайти $y''(x)$ від функції $y=\dfrac{x}{x+1}$.

Розв'язання. Похідна

$$y'=\frac{x'(x+1)-x(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}; \quad y''=\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)'=-\frac{2}{(x+1)^3}.$$

2. Знайти прискорення рухомої точки у момент часу $t=5\text{с}$, якщо закон її руху $S=t^3-3t^2+2$ (нехай S вимірюється у метрах).

Розв'язання. Швидкість $v(t)=\dfrac{dS}{dt}=3t^2-6t$, прискорення $a(t)=\dfrac{d^2S}{dt^2}=$ $=\dfrac{dv}{dt}=6t-6$, $a(5)=24$.

Відповідь: при $t=5$ с прискорення $a=24$ (м/с^2).

3. Знайти другу похідну від функції $y(x)$, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x=3t-t^2; \\ y=4t-t^3. \end{cases}$$

Розв'язання. Застосовуючи формулу $y'_x=\dfrac{\dot y}{\dot x}$ знайдемо y'_x:

$$\dot y=4-3t^2;\ \dot x=3-2t;\ y'_x=\frac{4-3t^2}{3-2t}.$$

Для обчислення y''_x спочатку знайдемо другу похідну $\ddot y=-6t$, $\ddot x=-2$, а потім одержимо відповідно до формули (12.2) підручника [див. ч. 1, с. 333]

$$y''_x=\frac{6t^2-18t+8}{(3-2t)^3}.$$

41. Знайти похідні другого порядку від таких функцій:

1) $y=x\cos x$; 2) $y=e^{3x}$; 3) $y=x\arcsin x$; 4) $y=x\operatorname{ch}2x$; 5) $y=\operatorname{tg}x$; 6) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; 7) $y=x^2\ln x$; 8) $y=\cos^2 2x$; 9) $y=xe^{-x}$; 10) $y=\dfrac{1}{1+x^3}$; 11) $y=\sqrt{a^2-x^2}$; 12) $y=\dfrac{1}{a+\sqrt{x}}$; 13) $y=e^{\sqrt{x}}$.

42. Знайти прискорення рухомої точки у момент часу $t=2\text{с}$, якщо відомий закон руху точки $S(t)$ (S вимірюється у метрах):

1) $S=2t^3-t+3$; 2) $S=t\sqrt{t}$.

43. Знайти y''' функцій:

1) $y=5x^4+2x^2+3$; 2) $y=\ln(x+1)$; 3) $y=\dfrac{x^3}{1-x}$;

4) $y=\dfrac{a}{x^m}$; 5) $y=\dfrac{\ln x}{x}$; 6) $y=e^x\sin x$.

44. Знайти $y^{(n)}(x)$:

1) $y=a^x$; 2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$; 3) $y=xe^x$; 4) $y=\cos^2 x$; 5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$;

6) $y=e^{-x}$; 7) $y=\sin^2 x$; 8) $y=x\ln x$; 9) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$; 10) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

45. Знайти другі похідні від функції $y(x)$, заданої параметрично:

1) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$; 2) $x=\sqrt{t}$, $y=\ln t$;

3) $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$; 4) $x = a\cos^2 t$, $y = b\sin^2 t$;

5) $x=\ln t$, $y = t^2-1$; 6) $x = \arcsin t$, $y=\ln(1-t^2)$;

7) $x = at^2$, $y = bt^3$; 8) $x = at\cos t$, $y = at\sin t$;

9) $x = \operatorname{arctg} t$, $y=\ln(1+t^2)$; 10) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

§ 13. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ТЕОРЕМА ШВАРЦА

Приклад. Знайти другі частинні похідні від функції $z = x^3+5x^2y^2+y$.

Розв'язання. Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = 3x^2+10xy^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = 10x^2y+1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = 6x+10y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = 20xy; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = 10x^2.$$

46. Знайти другі частинні похідні від функцій:

1) $z=\dfrac{x}{y^2}$; 2) $z = x\sin(x+y)$; 3) $z=\dfrac{\cos x^2}{y}$; 4) $z=\ln(x+y^2)$;

5) $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$; 6) $u=\sqrt{\dfrac{1}{3}(x^2+y^2)^3}$; 7) $u=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$;

8) $u=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$; 9) $u=y^{\ln x}$; 10) $u=\sin^2(ax+by)$, $(a,\ b-\text{const})$;

11) $z=e^{xy}$; 12) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; 13) $z=x^5+y^5-5x^3y^3$;

14) $z=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 15) $z = xy+\dfrac{y}{x}$.

47. Дано функцію $z=e^{xy}$. Довести, що

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

48. Дано функцію $u=\sin^2(x-at)$. Показати, що

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

49. Дано функцію $u=e^{-\cos(x+at)}$. Чи вірна рівність

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}?$$

50. Дано функцію $u=\ln\left(x^2+(y+1)^2\right)$. Довести, що

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

51. Дано функцію $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Показати, що

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

52. Перевірити рівність $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ (теорема Шварца), якщо:

а) $z = 3x^3-2xy^2$; б) $z=\dfrac{x+2y}{2x-y}$.

53. Перевірити рівність мішаних похідних третього порядку функції $z=5x^4y^3$.

54. Показати, що функція $\varphi=\dfrac{\mu}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$, яка розглядається у теорії електрики та магнетизму, задовольняє рівняння Лапласа $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$.

55. У теорії електропровідності важливу роль відіграє рівняння $\dfrac{\partial y}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Показати, що це рівняння задовольняє функція $y=e^{-kt}\sin x$.

56. У фізиці (акустиці та теорії коливань) важливу роль відіграє рівняння

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=k^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Показати, що це рівняння задовольняє функція

$$y=\varphi(x+kt)+\psi(x-kt),$$

де φ, ψ – будь-які диференційовні функції відповідних аргументів.

§ 14. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Приклади. **1.** Знайти диференціал функції $y=x^4-2x\ln x$.

Розв`язання. Знаходимо

$$f'(x)=y'=\left(x^4-2x\ln x\right)'=4x^3-2\ln x-2x\frac{1}{x}.$$

За формулою $dy=f'(x)dx$ маємо

$$dy=\left(4x^3-2\ln x-2\right)dx.$$

Відповідь: $dy=\left(4x^3-2\ln x-2\right)dx$.

2. Замінивши приріст функції диференціалом, знайти наближено $\ln 1{,}01$.

Розв'язання. Число $\ln 1{,}01$ – значення функції $y=\ln x$ при $x=1{,}01$. Далі $\ln(x_0+\Delta x)=\ln x_0+\Delta y$. Приріст функції замінюємо диференціалом $\Delta y\approx dy(x_0)$, $dy(x_0)=\frac{1}{x_0}\cdot\Delta x$. У нашому випадку $x_0=1$, $\Delta x=1{,}01-1=0{,}01$. Тому $dy(x_0)=0{,}01$.

Звідси $$\ln 1{,}01=\ln(1+0{,}01)=\ln 1+\Delta y\approx 0{,}01.$$

Відповідь: $\ln 1{,}01\approx 0{,}01$.

57. Знайти диференціали функцій:

1) $y=x^2+\sqrt{x}$; 2) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}$;

3) $y=\frac{\cos x}{1-\sin x}$; 4) $y=\sqrt{4x^2+5x-1}$;

5) $y=\ln\left(1-x^2\right)$, 6) $y=\arccos\frac{1}{x}$;

7) $y=\operatorname{tg}^2 x$; 8) $y=5^{\ln\operatorname{tg}x}$;

9) $y=\frac{\cos x}{1-x^2}$; 10) $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)$.

58. Рівняння руху задано формулою $x=3t^2+1$, де t вимірюється у секундах, а x – у метрах. Для моменту часу $t=5$с знайти Δx – приріст шляху, dx – диференціал шляху і порівняти їх, якщо: а) $\Delta t=1$с; б) $\Delta t=0{,}1$с; в) $\Delta t=0{,}001$с.

59. Замінивши приріст функції диференціалом, знайти наближені значення таких функцій:

1) $\sqrt[3]{1{,}03}$; 2) $\sqrt[4]{15{,}8}$; 3) $\sin 29°$; 4) $\cos 151°$; 5) $\operatorname{arctg}1{,}05$; 6) $\lg 11$; 7) $\ln 2{,}002$; 8) $\arcsin 0{,}05$; 9) $\sqrt[3]{25}$; 10) $\log_{10}202$, якщо $\log_{10}200=2{,}30103$.

60. Знайти наближене значення функції $y=f(x)$ при $x=x_1$:

1) $y=\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$, $x_1=0{,}15$; 2) $y=\sqrt{5x^2+4x-1}$, $x_1=5{,}08$;

3) $y=\sqrt[3]{3x^2+8x-16}$, $x_1=3{,}94$.

61. При статичному розряді конденсатора закон зменшення його напруги залежно від часу задається формулою $u=u_0e^{-\alpha t}$, де u_0 – початкове значення напруги; α – деяка стала; t – час, який відлічується з початку розряду. Показати, що зміна напруги за нескінченно малий проміжок часу dt пропорційна цьому проміжку і значенню напруги конденсатора у даний момент часу.

§ 15. ЧАСТИННИЙ ТА ПОВНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ДИФЕРЕНЦІЙОВНІ ФУНКЦІЇ

Приклади. **1.** Знайти частинні диференціали функції

$$z=3x^2y+4x^3y^2.$$

Розв'язання. Диференціал

$$d_x z=\frac{\partial z}{\partial x}dx=\left(6xy+12x^2y^2\right)dx,\quad d_y z=\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(3x^2+8x^3y\right)dy.$$

2. Знайти повний приріст та повний диференціал функції $z=xy$ у точці $A(3,\ 2)$ при $\Delta x=0{,}2$, $\Delta y=0{,}3$.

Розв'язання. Приріст

$$\Delta z=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy=xy+x\Delta y+y\Delta x+\Delta x\Delta y-xy=x\Delta y+\Delta y\Delta x+y\Delta x,$$

$$\Delta z_A=3\cdot 0{,}3+0{,}2\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}2=1{,}36,$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=ydx+xdy=y\Delta x+x\Delta y,$$

$$dz_A=2\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}3=1{,}3.$$

3. Показати, що функція $z=x^2y$ є диференційовною у будь-якій точці $A(x_0,\ y_0)$.

Розв'язання. Функція $z=x^2y$ називається диференційовною у точці $A(x_0,\ y_0)$, якщо повний приріст Δz може бути записаний у вигляді

$$\Delta z = A_1\Delta x + A_2\Delta y + \alpha_1(x_0,\ y_0,\ \Delta x)\Delta x + \alpha_2(x_0,\ y_0,\ \Delta y)\Delta y,$$

де A_1 та A_2 не залежать від Δx та Δy, $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 0$ при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$.

Маємо

$$\Delta z = (x_0+\Delta x)^2(y_0+\Delta y) - x_0^2y_0 = x_0^2y_0 + 2x_0y_0\Delta x +$$

$$+y_0\Delta x^2 + x_0^2\Delta y + 2x_0\Delta x\Delta y + \Delta x^2\Delta y - x_0^2y_0 =$$

$$= 2x_0y_0\Delta x + x_0^2\Delta y + y_0\Delta x\Delta x + \left(2x_0\Delta x + \Delta x^2\right)\Delta y.$$

Позначимо $A_1 = 2x_0y_0$, $A_2 = x_0^2$, $\alpha_1 = y_0\Delta x$, $\alpha_2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$. Повний приріст одержимо у потрібному вигляді:

$$\Delta z = A_1\Delta x + A_2\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y,$$

де

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha_1 = y_0\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = 0;$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha_2 = \lim_{\Delta x\to 0}\left(2x_0\Delta x + \Delta x^2\right) = 0.$$

62. Знайти частинні диференціали d_xu, d_yu функцій:

1) $u=\dfrac{x^2}{y}$; 2) $u=x\sin 2y$; 3) $u=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$;

4) $u=xyz$; 5) $u=e^{x^2+y^2+z^2}$; 6) $u=x^{yz}$.

63. Знайти повний приріст і повний диференціал функції $z=x^2y$ в точці $B(1,\ 2)$ при $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

64. Знайти повний диференціал таких функцій:

1) $z=\ln\dfrac{x+y}{x-y}$; 2) $z=x^2\cos 4y$; 3) $z=e^{xy}$;

4) $u=\operatorname{tg}(3x-5y+4z)$; 5) $u=x\arcsin\dfrac{y}{z}$;

6) $u=\sin\left(x^2+y^2\right)$; 7) $u=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$; 8) $u=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$;

9) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; 10) $u=\ln(x+y+z)$; 11) $u=\left(\dfrac{y}{x}\right)^z$;

12) $u=\sin x\operatorname{sh} y$; 13) $u=\dfrac{z}{x^2+y^2}$; 14) $u=\left(y^3+2\right)^x$.

65. Обчислити $dz(x,\ y)$ при $x=1$, $y=0$, $dx=\dfrac{1}{2}$, $dy=\dfrac{1}{4}$, якщо $z\sqrt{x^2+y^2}$.

§ 16. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ СКЛАДНОЇ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Приклади. **1.** Знайти похідну $\dfrac{du}{dt}$ функції $u=x^2y-xy^2$, якщо $x=t^2$, $y=e^t$.

Розв'язання. Використовуючи формулу (16.1) [ч. 1, с. 344], запишемо

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Знаходимо похідні зазначених функцій і підставляємо у формулу

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy-y^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x^2-2xy,\quad \frac{dx}{dt}=2t,\quad \frac{dy}{dt}=e^t,$$

$$\frac{du}{dt}=\left(2xy-y^2\right)2t+\left(x^2-2xy\right)e^t.$$

Підставимо $x=t^2$, $y=e^t$.

тоді

$$\frac{du}{dt}=e^t t\left(4t^2-2e^t-2te^t\right).$$

2. Знайти $\dfrac{\partial u}{\partial t_1}$ та $\dfrac{\partial u}{\partial t_2}$, якщо

$$u=3x^2y,\ x=e^{t_1+t_2},\quad y=\sin(2t_1-t_2).$$

Розв'язання. За формулами [ч. 1, с. 346] після диференціювання складної функції двох незалежних змінних t_1 і t_2 одержимо

$$\frac{\partial u}{\partial t_1}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t_1};\quad \frac{\partial u}{\partial t_2}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_2}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t_2}.$$

Тому

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = 6xye^{t_1+t_2} + 3x^2 \cdot 2\cos(2t_1 - t_2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_2} = 6xye^{t_1+t_2} + 3x^2\left(-\cos(2t_1 - t_2)\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = 6e^{2(t_1+t_2)}\left(\sin(2t_1 - t_2) + \cos(2t_1 - t_2)\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_2} = 3e^{2(t_1+t_2)}\left(2\sin(2t_1 - t_2) - \cos(2t_1 - t_2)\right).$$

66. Знайти похідну $\frac{du}{dt}$ функцій:

1) $u = \operatorname{tg}(4x + 5y)$, якщо $x = \sin 3t$, $y = \cos 4t$;

2) $u = x^2 + y^2 + z^2$, $x = \sqrt{t}$, $y = e^{2t}$, $z = t^2$;

3) $u = \sin\frac{x}{y}$, $x = e^t$, $y = t^2$;

4) $u = \sin(3z + 2y - 4x)$, $z = 2t^3$, $y = 3t^2$, $x = t^4$;

5) $u = z^2 + y^2 + zy$, $z = \sin t$, $y = e^t$;

6) $u = v^2 + vy$, $v = \ln t$, $y = e^t$;

7) $u = y^x$, $y = \sin t$, $x = \operatorname{tg} t$;

8) $u = xyz$, $y = \ln t$, $z = \operatorname{tg} t$, $x = \sin t$.

67. Використовуючи формулу (16.2) [ч. 1, с. 345], знайти $\frac{du}{dx}$:

1) $u = x^2 \ln y$, якщо $y = \cos 3x$;

2) $u = \frac{x}{y^2}$, $y = e^{4x}$;

3) $u = x \arcsin y$, $y = 2^x$;

4) $u = x^y$, $y = \ln x$;

5) $u = e^{\frac{x}{y}}$, $y = \sin^3 x$;

6) $u = \ln\left(x^2 + y^2\right)$, $y = e^{x^2}$;

7) $u = \operatorname{arctg}\frac{x + y}{1 - xy}$, $y = \cos x$.

68. Знайти $\frac{\partial u}{\partial t_1}$ та $\frac{\partial u}{\partial t_2}$ для функцій:

1) $u = \sin(3x + 4y)$, де $x = t_1 t_2$, $y = t_1 \operatorname{tg} t_2$;

2) $u = \ln(5x - 4y)$, якщо $x = \arcsin(2t_1 - t_2)$, $y = \frac{t_1}{t_2}$;

3) $u = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, при $x = t_1 \sin t_2$, $y = t_1 \cos t_2$;

4) $u = \ln\left(x^2 + y^2\right)$, якщо $x = t_1 \cos t_2$, $y = t_2 \sin t_1$.

§ 17. ІНВАРІАНТНІСТЬ (НЕЗАЛЕЖНІСТЬ) ФОРМИ ПЕРШОГО ДИФЕРЕНЦІАЛА ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Приклад. Дано функцію $u = x^2 y^3$, $x = t_1^2 \sin t_2$, $y = t_1^3 e^{t_2}$. Показати інваріантність форми першого диференціала, знаходячи диференціал зазначеної функції від t_1, t_2 та x, y.

Розв'язання. Диференціал

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_1}\right)dt_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_2}\right)dt_2 =$$

$$= \left(2xy^3 \cdot 2t_1 \sin t_2 + 3x^2y^2 \cdot 3t_1^2 e^{t_2}\right)dt_1 + \left(2xy^3 t_1^2 \cos t_2 + 3x^2y^2 t_1^3 e^{t_2}\right)dt_2 =$$

$$= 2xy^3\left(2t_1 \sin t_2 dt_1 + t_1^2 \cos t_2 dt_2\right) + 3x^2y^2\left(3t_1^2 e^{t_2} dt_1 + t_1^3 e^{t_2} dt_2\right).$$

Вирази у дужках

$$2t_1 \sin t_2 dt_1 + t_1^2 \cos t_2 dt_2 = dx, \quad 3t_1^2 e^{t_2} dt_1 + t_1^3 e^{t_2} dt_2 = dy,$$

тому $du = 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy$. Запишемо du як диференціал функції $u = x^2y^3$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy,$$

що й доводить інваріантність.

69. Показати інваріантність форми першого диференціала складної функції двох змінних $u = f(x, y)$, $x = x(t_1, t_2)$, $y = y(t_1, t_2)$, знаходячи диференціали зазначених функцій по t_1, t_2 та x, y:

1) $u = 2xy^2$, $x = 2t_1 t_2^3$, $y = t_1 + t_2$; 2) $u = \frac{x}{y}$, $x = \frac{t_1}{t_2}$, $y = \frac{t_2}{t_1}$;

3) $u = 3x^2 y$, $x = t_1 \cos t_2$, $y = t_2 \operatorname{tg} 2t_1$; 4) $u = 2x + 3y$, $x = t_1^{t_2}$, $y = t_2^{t_1}$.

§ 18. ЗАСТОСУВАННЯ ПОВНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛА ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ТА ПОХИБОК

Приклад. Гіпотенуза c і катет a прямокутного трикутника ABC, визначені з максимальними абсолютними похибками $|\Delta^* c| = 0{,}2$ і $|\Delta^* a| = 0{,}1$, відповідно дорівнюють $c = 75$, $a = 32$. Знайти кут A за формулою $\sin A = \frac{a}{c}$ і максимальну абсолютну похибку $|\Delta^* A|$ при обчисленні кута A.

Розв'язання. За умовою задачі $\sin A = \frac{a}{c}$, $A = \arcsin\frac{a}{c}$. Тому

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2}}; \quad \frac{\partial A}{\partial c} = \frac{-a}{c\sqrt{c^2 - a^2}}.$$

Для обчислення максимальної абсолютної похибки застосовуємо відому формулу [ч. 1, с. 349]. Одержимо

$$|\Delta^* A| = \frac{1}{\sqrt{75^2 - 32^2}} \cdot 0{,}1 + \frac{32}{\sqrt{75^2 - 32^2}} \cdot 0{,}2 \approx 0{,}0023.$$

Таким чином,

$$|\Delta^* A| \approx 9'24'', \quad A = \arcsin\frac{32}{75} \pm 9'24''.$$

70. Дано функцію $z = f(x, y)$ і дві точки $A(x_0, y_0)$ та $B(x_1, y_1)$. Треба обчислити значення z_1 наведених нижче функцій в точці B, виходячи із значення z_0 функції в точці A, замінюючи приріст функції при переході від точки A до точки B диференціалом:

1) $z = x^2 + y^2 + 3$, $A(4, 2)$, $B(4{,}03, 1{,}96)$;

2) $z = x^2 - y^2 - 2x + y$, $A(4, 1)$, $B(3{,}98, 1{,}06)$;

3) $z = x^y$, $A(1, 2)$, $B(1{,}04, 2{,}02)$;

4) $z = \sqrt[3]{2x^2 - y^2 + 1}$, $A(6, 3)$, $B(6{,}14, 3{,}16)$;

5) $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $A(2, 2)$, $B(1{,}92, 2{,}12)$.

Для ілюстрації розглянемо розв'язання прикладу 1). Значення z_1 функції в точці B знайдемо за формулою $z_1 \approx z_0 + dz$, виходячи із значення z_0:

$z_0 = z(4, 2) = 4^2 + 2^2 + 3 = 23$. За формулою повного диференціала в точці $A(x_0, y_0)$

$$dz_A = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

знайдемо

$$dz_A = (2x)_A(4{,}03 - 4) + (2y)_A(1{,}96 - 2) = 2 \cdot 4 \cdot 0{,}03 + 2 \cdot 2 \cdot (-0{,}04) = 0{,}08.$$

Тоді

$$z_1 \approx 23 + 0{,}08 = 23{,}08.$$

Якщо p – наближене значення деякої величини, точне значення якої P, то відносна похибка обчислюється за формулою

$$\delta = \frac{|P - p|}{|P|} \cdot 100\%.$$

У нашому прикладі точне значення функції в точці $B(x, y)$

$$z(x_1, y_1) = z(4{,}03, 1{,}96) = 4{,}03^2 + 1{,}96^2 + 3 = 23{,}0825.$$

Тоді

$$\delta = \left|\frac{23{,}0825 - 23{,}08}{23{,}0825}\right| \cdot 100\% \approx 0{,}01\%.$$

71. У прямокутному трикутнику ABC катет $b = 121{,}56$ м, кут $A = 25°21'40''$, максимальна абсолютна похибка визначення катета b дорівнює $|\Delta^* b| = 0{,}05$ м, а кута A дорівнює $12''$, тобто $|\Delta^* b| = 0{,}05$ м, $|\Delta^* A| = 12''$. Визначити максимальну абсолютну похибку при обчисленні катета a за формулою $a = b\operatorname{tg} A$.

72. Період коливань маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{q}}$, де l – довжина маятника, q – прискорення вільного падіння. Яку відносну похибку при визначенні T допускаємо, приймаючи $\pi \approx 3{,}14$ (з похибкою до 0,005), $l = 1$ м (з похибкою до 0,01), $q = 9{,}8$ м/с^2 (з похибкою до 0,02 м/с^2)? Максимальна відносна похибка $|\delta^* T| = |\Delta^* \ln T|$.

§ 19. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ НЕЯВНОЇ ФУНКЦІЇ

73. Знайти похідну від функції $y(x)$, заданої рівняннями:

1) $x^2+2xy-y^2-1=0$; 2) $x^3+y^3-3xy=0$;

3) $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; 4) $y^x=x^y$;

5) знайти похідні всіх функцій, наведених у прикладі № 18.

Для ілюстрації розглянемо приклад 1).

1-й спосіб. За формулою (19.2) [ч. 1, с. 352] знаходимо

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+2y}{2x-2y};\quad \frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{y-x}.$$

2-й спосіб. Запишемо $dF=d\left(x^2+2xy-y^2-1\right)$.

$$dF=2xdx+2ydx+2xdy-2ydy. \text{ Але } dF=0,$$

тому

$$2(x+y)dx+2(x-y)dy=0,\quad dy=-\frac{2(x+y)dx}{2(x-y)},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{y-x}.$$

74. Для функції $z=z(x,\ y)$ знайти частинні похідні першого порядку, якщо

1) $x^2+y^2+z^2-4=0$; 2) $x+y+z-xyz=0$;

3) $3xyz-z^3+1=0$; 4) $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$.

Розглянемо приклад 1). За формулою (19.3) [ч. 1, с. 352] знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{2z}=-\frac{x}{z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}.$$

§ 20. ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ВІД ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Приклади. **1.** Знайти d^2y для функції $y=e^x$ у двох випадках: а) x – незалежна змінна, б) x – проміжний аргумент.

Розв'язання. Диференціал другого порядку – це диференціал від диференціала першого порядку: $d^2y=d(dy)$, де $dy=y'dx$. У випадку а) x – незалежна змінна.

Тому d^2x як диференціал від сталої $d(dx)$ дорівнює нулеві. Звідси $d^2y=e^x(dx)^2$.

У випадку б)

$$d^2y=e^xdx^2+e^xd^2x,\quad d^2y=e^x\left(dx^2+d^2x\right),$$

таким чином, диференціал другого порядку не має властивості інваріантності форми.

2. Знайти диференціал другого порядку від функції $u=x^3y^2$.

Розв'язання. За формулою (20.5) [ч. 1, с. 355] знайдемо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y^2,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6xy^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2x^3y,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2x^3,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=6x^2y.$$

Звідси

$$d^2u=6xy^2(dx)^2+12x^2ydxdy+2x^3(dy)^2.$$

75. Вважаючи x незалежною змінною, знайти d^2y, якщо:

1) $y=\sqrt{1+x^2}$; 2) $y=\frac{\ln x}{x}$; 3) $y=x^x$; 4) $y=\frac{\sin x}{x}$; 5) $xy+y^2=1$;

6) $y=3^{-x}$; 7) $y=ax^2+bx+c$ $(a,\ b,\ c-\text{const})$; 8) $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

76. Знайти диференціали другого порядку від таких функцій (x, y, z – незалежні змінні):

1) $u=\frac{x}{y}$; 2) $u=\sqrt{x^2+y^2}$; 3) $u=e^{xy}$; 4) $u=xy^2-x^2y$;

5) $u=\ln(x-y)$; 6) $u=\frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}$; 7) $u=x\sin^2 y$;

8) $u=\sin(2x+y)$; 9) $u=xyz$; 10) $u=\sin(x+y+z)$.

§ 21. ОРІЄНТОВАНІ КРИВІ

21.1. Диференціал дуги

77. Знайти диференціал довжини дуги кривої:

1) $x=3t,\ y=3t^2,\ z=2t^3$; 2) $x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ z=\frac{at}{2\pi}$;

3) $x=3t^2,\ y=3t-t^3$; 4) $x=a\cos t,\ y=b\sin t$;

5) $y=x^{\frac{3}{2}}$; 6) $y=x^2+x$; 7) $y=\gamma\operatorname{ch}\frac{x}{\gamma}$ (ланцюгова лінія);

8) $x=2t$, $y=\ln t$, $z=t^2$; 9) $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$;

10) $x=\sqrt{2at-t^2}$, $y=a\ln\dfrac{2a}{2a-t}$.

Для ілюстрації розглянемо приклад 1). Знаходимо $\dot{x}=3$, $\dot{y}=6t$, $\dot{z}=6t^2$. Тоді

$$dS=\pm\sqrt{9+36t^2+36t^4}\,dt=\pm\sqrt{9\left(1+4t^2+4t^4\right)}dt=\pm3\left(1+2t^2\right)dt,$$

тобто маємо $dS=\pm3\left(1+2t^2\right)dt$.

У прикладах 3) і 4) $z=0$.

Для кривої, заданої рівнянням $y=f(x)$ у прикладі 5), знаходимо $y'=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Тоді $dS=\pm\sqrt{1+\dfrac{9}{4}x}\,dx$.

78. Яке геометричне місце точок описує годограф вектор-функції:

1) $\bar{r}(t)=5\bar{i}-t^2\bar{j}+t^2\bar{k}$;

2) $\bar{r}(t)=\dfrac{t^2+1}{(t-1)^2}\bar{i}-\dfrac{2t}{(t-1)^2}\bar{j}$;

3) $\bar{r}(t)=R\cos t\cdot\bar{i}+R\sin t\cdot\bar{j}+3\bar{k}$?

Розглянемо приклад 1). Перейдемо до параметричного задання лінії: $x=5$, $y=-t^2$, $z=t^2$. Вилучаючи параметр t, одержимо рівняння площин $x-5=0$ і $y=-z$, лінія перетину яких і означить годограф вектор-функції. Це пряма, канонічні рівняння якої можна записати так:

$$\frac{x-5}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}.$$

21.2. Похідна від вектор-функції скалярного аргументу. Рівняння дотичної до просторової кривої

79. Знайти похідні від таких вектор-функцій:

1) $\bar{r}=a\cos t\cdot\bar{i}+b\sin t\cdot\bar{j}$ у довільній точці;

2) $\bar{r}=t\cdot\bar{i}-e^t\cdot\bar{j}+\sin t\cdot\bar{k}$ у довільній точці;

3) $\bar{r}=(t-1)e^t\cdot\bar{i}+\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)\bar{j}-\operatorname{arctg}t\cdot\bar{k}$ у довільній точці;

4) $\bar{r}=e^{\sin t}\cdot\bar{i}-\dfrac{1}{2}\sin t^2\bar{j}+t\cdot\bar{k}$ у довільній точці;

5) $\bar{r}=\dfrac{t^4}{4}\bar{i}+\dfrac{t^3}{3}\bar{j}+\dfrac{t^2}{2}\bar{k}$ у довільній точці;

6) $\bar{r}=a\cos t\cdot\bar{i}+a\sin t\cdot\bar{j}+\dfrac{b}{2\pi}t\bar{k}$ у точці $M\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{a\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{b}{8}\right)$;

7) $\bar{r}=at\bar{i}+\dfrac{1}{2}at^2\cdot\bar{j}+\dfrac{1}{3}at^3\bar{k}$ у точці $M(6a,\ 18a,\ 72a)$;

8) $\bar{r}=(t-\sin t)\bar{i}+(1-\cos t)\bar{j}+4\sin\dfrac{t}{2}\cdot\bar{k}$ у точці $M\left(\dfrac{\pi}{2}-1,\ 1,\ 2\sqrt{2}\right)$.

Для ілюстрації розглянемо приклад 1). Застосовуючи формулу $\dfrac{d\bar{r}}{dt}=\dot{x}(t)\bar{i}+\dot{y}(t)\bar{j}+\dot{z}(t)\bar{k}$, одержимо

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=-a\sin t\bar{i}+b\cos t\bar{j}.$$

80. Дано $\bar{r}(t)=a\cos wt\cdot\bar{i}+b\sin wt\cdot\bar{j}$, де w, a, b – сталі. Довести, що

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}+w^2\bar{r}=0.$$

81. Скласти рівняння дотичної прямої до просторової кривої і рівняння нормальної площини, які проходять через точку, що відповідає заданому значенню параметра $t=t_0$:

1) $\bar{r}(t)=\left(t^3-1\right)\bar{i}+\left(t^2+1\right)\bar{j}+\left(4t^3-3t+1\right)\bar{k}$, $t_0=1$;

2) $\bar{r}(t)=a\cos t\cdot\bar{i}+a\sin t\cdot\bar{j}+\dfrac{at}{2\pi}\cdot\bar{k}$, $t_0=\pi$;

3) $\bar{r}(t)=(t-\sin t)\bar{i}+(1-\cos t)\bar{j}+2\sin t\cdot\bar{k}$, $t_0=\dfrac{\pi}{2}$;

4) $\bar{r}(t)=\dfrac{1}{t}\bar{i}+\left(t^3+3t\right)\bar{j}+\ln t\cdot\bar{k}$, $t_0=1$;

5) $\bar{r}(t)=\dfrac{t^4}{4}\bar{i}+\dfrac{t^3}{3}\bar{j}+\dfrac{t^2}{2}\cdot\bar{k}$ у довільній точці;

6) $\vec r(t) = a\cos t\cdot\vec i + a\sin t\cdot\vec j + \dfrac{b}{2\pi}t\vec k$ у точці $M\left(\dfrac{a\sqrt2}{2},\ \dfrac{a\sqrt2}{2},\ \dfrac{b}{8}\right)$;

7) $\vec r(t) = at\vec i + \dfrac12 at^2\vec j + \dfrac13 at^3\vec k$ у точці $M(6a,\ 18a,\ 72a)$;

8) $\vec r(t) = (t-\sin t)\vec i + (1-\cos t)\vec j + 4\sin\dfrac{t}{2}\vec k$ у точці $M\left(\dfrac{\pi}{2}-1,\ 1,\ 2\sqrt2\right)$.

Для ілюстрації розглянемо приклад 1). За формулою (21.8) [ч. 1, с. 362] знайдемо координати точки дотику $x(t_0)$, $y(t_0)$, $z(t_0)$:

$$x(t_0) = \left.(t^3-1)\right|_{t=1} = 0,\ y(t_0) = 2,\ z(t_0) = 2.$$

Далі запишемо

$$\dot x(t_0) = \left.3t^2\right|_{t=1} = 3;\ \dot y(t_0) = \left.2t\right|_{t=1} = 2;\ \dot z(t_0) = \left.(12t^2-3)\right|_{t=1} = 9.$$

Тому рівняння дотичної

$$\frac{x}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{9}.$$

Рівняння нормальної площини до кривої

$$3x + 2(y-2) + 9(z-2) = 0,\quad \text{або}\quad 3x + 2y + 9z - 22 = 0.$$

§ 22. КРИВИНА КРИВОЇ

***Приклади.* 1.** Знайти кривину кривої, яка задана рівнянням

$$\vec r(t) = a\cos t\cdot\vec i + a\sin t\cdot\vec j + ht\vec k.$$

Розв'язання. Знаходимо похідні, які входять у формулу (22.9) [ч. 1, с. 369]:

$$\frac{d\vec r}{dt} = -a\sin t\cdot\vec i + a\cos t\cdot\vec j + h\vec k;\quad \left(\frac{d\vec r}{dt}\right)^2 = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + h^2 = a^2 + h^2;$$

$$\frac{d^2\vec r}{dt^2} = -a\cos t\cdot\vec i - a\sin t\cdot\vec j;\quad \left(\frac{d^2\vec r}{dt^2}\right)^2 = (-a\cos t)^2 + (-a\sin t)^2 = a^2;$$

$$\frac{d^2\vec r}{dt^2}\cdot\frac{d\vec r}{dt} = (-a\cos t\cdot\vec i - a\sin t\cdot\vec j)(-a\sin t\cdot\vec i + a\cos t\cdot\vec j + h\vec k) = 0.$$

Таким чином,

$$\frac{d^2\vec r}{dt^2}\cdot\frac{d\vec r}{dt} = 0,\quad \left(\frac{d\vec r}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2\vec r}{dt^2}\right)^2 = (a^2+h^2)a^2,$$

тому

$$K^2 = \frac{(a^2+h^2)a^2}{(a^2+h^2)^3} = \frac{a^2}{(a^2+h^2)^2},\quad K = \frac{a}{a^2+h^2}.$$

2. Знайти кривину кривої, заданої рівняннями $x = t^2$, $y = e^{-t}$, $z = e^{t}$ у точці $t = 0$.

Розв'язання. Знаходимо похідні, які входять у формулу (22.14) [ч. 1, с. 371] для K^2:

$$\dot x = 2t;\quad \dot y = -e^{-t};\quad \dot z = e^{t};\quad \ddot x = 2;\quad \ddot y = e^{-t};\quad \ddot z = e^{t}.$$

Тоді

$$K^2 = \frac{(2^2 + e^{-2t} + e^{2t})(4t^2 + e^{-2t} + e^{2t}) - (4t - e^{-2t} + e^{2t})^2}{(4t^2 + e^{-2t} + e^{2t})^3} =$$

$$= \frac{16t^2 + 4e^{-2t}\cdot t^2 + 4t^2e^{2t} + 4e^{-2t} + e^{-4t} + 1 + 4e^{2t} + 1 + e^{4t}}{(4t^2 + e^{-2t} + e^{2t})^3} -$$

$$- \frac{16t^2 + e^{-4t} + e^{4t} - 8te^{-2t} + 8e^{2t} - 2}{(4t^2 + e^{-2t} + e^{2t})^3} = \frac{4\left[e^{-2t}(t+1)^2 + e^{2t}(t-1)^2 + 1\right]}{(4t^2 + e^{-2t} + e^{2t})^3}.$$

При $t = 0$ одержимо $K^2 = \dfrac32$, $K = \sqrt{\dfrac32}$.

82. Знайти кривину таких ліній:

1) $\vec r(t) = 3t^2\vec i + (3t - t^3)\vec j + 2\vec k$; 2) $\vec r(t) = \ln\cos t\cdot\vec i + \ln\sin t\cdot\vec j + \sqrt2\, t\vec k$;

3) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$; 4) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

5) $y^2 = 2px$; 6) $r = a(1-\cos\Theta)$; 7) $r = ae^{m\Theta}$.

83. Знайти радіус кривини заданих ліній:

1) $\vec r(t) = a\,\mathrm{ch}\,t\cdot\vec i + a\,\mathrm{sh}\,t\cdot\vec j + at\vec k$ у будь-якій точці;

2) $\vec r(t) = t^2\vec i + 2t^3\vec j$;

3) $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, при $t=\frac{\pi}{2}$;

4) $y=\sin x$ у будь-якій точці $M(x;\ y)$;

5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

6) спіралі Архімеда $r=a\varphi$;

7) $\vec{r}(t)=2abt\vec{i}+a^2\ln t\cdot\vec{j}+b^2t^2\vec{k}$;

8) $\vec{r}(t)=e^t\cos t\cdot\vec{i}+e^t\sin t\cdot\vec{j}+e^t\vec{k}$.

§ 23. ВЕКТОРНЕ І СКАЛЯРНЕ ПОЛЕ. ПОХІДНА ЗА НАПРЯМОМ. ГРАДІЄНТ. РІВНЯННЯ ДОТИЧНОЇ ПЛОЩИНИ ДО ПОВЕРХНІ. РІВНЯННЯ НОРМАЛІ

84. Знайти для даних функцій похідну в точці $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ за напрямом до точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$:

1) $u=xyz$, $M_0(1,\ -1,\ 1)$, $M_1(2,\ 3,\ 1)$;

2) $u=x^2y+xz^2-2$, $M_0(1,\ 1,\ -1)$, $M_1(2,\ -1,\ 3)$;

3) $u=xe^y+ye^x-z^2$, $M_0(3,\ 0,\ 2)$, $M_1(4,\ 1,\ 3)$;

4) $u=\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$, $M_0(1,\ 1)$, $M_1(4,\ 5)$;

5) $u=x^2y^2z^2$, $M_0(1,\ -1,\ 3)$, $M_1(0,\ 1,\ 1)$;

6) $u=xy^2+z^3-xyz$ у точці $M_0(1,\ 1,\ 2)$ за напрямом, що має з осями координат кути відповідно 60°, 45° і 60°;

7) $z=x^3-3x^2y+3xy^2+1$, $M_0(3,\ 1)$, $M_1(6,\ 5)$;

8) $z=\ln(x+y)$ у точці $M_0(1,\ 2)$, яка належить параболі $y^2=4x$, за напрямом дотичної до параболи в цій точці.

Для ілюстрації розв'яжемо приклад 1). Знаходимо напрямні косинуси $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ вектора $\overline{M_0M_1}=(1,\ 4,\ 0)$, довжина якого $\left|\overline{M_0M_1}\right|=\sqrt{17}$.

Маємо $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\cos\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$, $\cos\gamma=0$. Значення частинних похідних

від функції $u=xyz$ у точці

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=-1,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=1,\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=-1.$$

Тоді похідна за даним напрямом у точці M_0 за формулою (23.3) [ч. 1, с. 381]

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{M_0}=-\frac{1}{\sqrt{17}}+\frac{4}{\sqrt{17}}-1\cdot 0=\frac{3}{\sqrt{17}}.$$

85. Знайти градієнт скалярного поля в точці $M(x,\ y,\ z)$:

1) $u=x-2y+3z$ у будь-якій точці $M(x,\ y,\ z)$;

2) $u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$, $M(1,\ 1,\ -1)$;

3) $u=ze^{x^2+y^2+z^2}$, $M(0,\ 0,\ 0)$;

4) $z=\sqrt{2xy+y^2}$, $M(3,\ 2)$; 5) $z=\operatorname{arctg}xy$, $M(1,\ 1)$;

6) $z=x^2+y^2$, $M(3,\ 2)$; 7) $z=\sqrt{4+x^2+y^2}$, $M(2,\ 1)$;

8) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $M(x_0,\ y_0)$; 9) $z=x^2-2xy+3y-1$, $M(1,\ 2)$.

Для ілюстрації розв'яжемо приклад 1). Знаходимо частинні похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2,\ \frac{\partial u}{\partial z}=3.$$

Тоді

$$\vec{\Gamma}=\operatorname{grad}u=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}.$$

86. Скласти рівняння нормалі і дотичної площини в точці до поверхні:

1) $x^2+y^2+z^2-169=0$, $P(3,\ 4,\ 12)$; 2) $x^2+3y-4z^2-11=0$, $P(3,\ 2,\ 1)$;

3) $z=x^2+y^2$, $P(1,\ 2,\ 5)$; 4) $z=y+\ln\frac{x}{y}$, $P(1,\ 1,\ 1)$;

5) $z=2x^2-4y^2$, $P(2,\ 1,\ 4)$; 6) $z=xy$, $P(1,\ 1,\ 1)$;

7) $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$, $P(3,\ 4,\ -7)$;

8) $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$, $P(1,\ 2,\ -1)$;

9) $\left(z^2-x^2\right)xyz-y^5=5$, $P(1,\ 1,\ 2)$.

Для ілюстрації розглянемо приклад 1). Знайдемо частинні похідні в точці P:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_P = (2x)_P = 6; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_P = (2y)_P = 8; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_P = (2z)_P = 24.$$

Тоді відповідно до формули (23.6) [ч. 1, с. 377] рівняння нормалі приймає вигляд

$$\frac{X-3}{6} = \frac{Y-4}{8} = \frac{Z-12}{24}, \quad \text{або} \quad \frac{X-3}{3} = \frac{Y-4}{4} = \frac{Z-12}{12},$$

а рівняння дотичної площини

$$3(X-3)+4(Y-4)+12(Z-12)=0, \text{ або } 3X+4Y+12Z-169=0.$$

§ 24. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

87. Перевірити правильність теореми Ролля для функцій

1) $y=(2x-3)(x+1)$; 2) $y=(x-1)(x-2)(x-3)$.

88. Перевірити, чи теорему Ролля можна застосувати для функції $y=1-\sqrt[3]{x^2}$.

89. Знайти на кривій $y=f(x)$ точку M, дотична в якій паралельна хорді, що сполучає точки A і B:

1) $y=x^2$, $A(0,\ 0)$, $B(2,\ 4)$; 2) $y=x^3$, $A(-1,\ -1)$, $B(2,\ 8)$.

Розглянемо приклад 1). Абсцису точки дотику ξ знайдемо з рівняння

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\ \xi\in(a,\ b).$$

У нашому випадку

$$a=0,\quad f(a)=0,\quad b=2,\quad f(b)=4,\quad f'(x)=2x.$$

Одержимо рівняння для знаходження ξ: $\dfrac{4-0}{2-0}=2\xi$, $\dfrac{4}{2}=2\xi$, $\xi=1$.

Ордината точки $y=1^2=1$. Таким чином, шукана точка $M(1,\ 1)$.

90. Пояснити, чому теорема Коші для функцій $f(x)=x^2$ і $\varphi(x)=x^3$ на сегменті $[-1,\ 1]$ є неправильною.

§ 25. ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ – БЕРНУЛЛІ РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ

***Приклади.* 1.** Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

2. Наведемо приклад, в якому для розкриття невизначеності виду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ правило застосовується декілька разів. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Розв'язання. Скориставшись два рази правилом Лопіталя - Бернуллі, а потім першою чудовою границею, одержимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{6}$.

3. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$, $n\in N$.

Розв'язання. З'ясуємо, що невизначеність

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Застосувавши n разів правило Лопіталя – Бернуллі, одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=0$.

Правило Лопіталя – Бернуллі застосовують також для розкриття невизначеностей $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0, приводячи їх до невизначеностей виду $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Для ілюстрації наведемо приклади.

4. Знайти $\lim\limits_{x\to 0} x^5 \ln x$.

Розв'язання. Установимо вид невизначеності $\lim\limits_{x\to0} x^5\ln x = (0\cdot\infty)$. Запишемо приклад так:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^5}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Таким чином, невизначеність $0\cdot\infty$ зведена до виду $\frac{\infty}{\infty}$. Для розкриття невизначеності застосуємо правило Лопіталя – Бернуллі:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^5}} = \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\left(-\frac{5x^4}{x^{10}}\right)^{-1}\right) = \lim_{x\to0}\frac{-x^6}{5x} = -\lim_{x\to0}\frac{x^5}{5}=0.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to0} x^5\ln x = 0$.

5. Розглянемо невизначеність виду $(\infty-\infty)$. Знайти $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$.

Розв'язання. Приведемо до спільного знаменника вираз, який стоїть під знаком границі. Одержимо невизначеність виду $\left(\frac00\right)$. Застосуємо правило Лопіталя – Бернуллі:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to1}\frac{2-x-1}{x^2-1} = \left(\frac00\right)=\lim_{x\to1}\frac{-1}{2x} = -\frac12.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right) = -\frac12$.

6. Знайти $\lim\limits_{x\to+0} x^x$, $x>0$.

Розв'язання. Нехай $y=x^x$, тоді

$$\ln y = x\ln x = \frac{\ln x}{x^{-1}},\quad \lim_{x\to+0}\ln y = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac1x}{\left(\frac1x\right)'} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac1x}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+0} x = 0.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to+0}\ln y=0$. Тому внаслідок неперервності логарифмічної функції $\lim\limits_{x\to+0}\ln y = \ln\left(\lim\limits_{x\to+0} y\right)$. Можна записати $\ln\left(\lim\limits_{x\to+0}y\right)=0$, тоді $\lim\limits_{x\to+0}y = e^0=1$, тобто

$\lim\limits_{x\to+0}x^x=1$. Аналогічно знаходять границі і у випадку невизначеностей виду 1^∞ і ∞^0.

91. Застосувавши правило Лопіталя – Бернуллі, знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-3x-10}{x^3-125}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{ch}x-\cos x}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+1}{5x^5+x+2}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3-x^2+1}{2x^3+x+3}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+3^x}{1+3^{x+1}}$; 8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}5x}$; 9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln x}{\ln\sin x}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}x\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$; 11) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$; 12) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac1x-\frac{1}{e^x-1}\right)$;

13) $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac1x\right)$; 14) $\lim\limits_{x\to+0}x^{\sin x}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac1x\right)^x$;

16) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$; 17) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$; 18) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac1x\right)^{\operatorname{tg}x}$;

19) $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$; 20) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac1x\right)^x$.

§ 26. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Приклади. **1.** Розкласти многочлен

$$P_3(x) = -3+x-x^2+2x^3$$

за степенями $(x-x_0)$ при $x_0=1$.

Розв'язання. Якщо многочлен

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

записати у вигляді

$$P_n(x)=b_0+b_1(x-x_0)+\ldots+b_n(x-x_0)^n,$$

де $b_i = \dfrac{P_n^{(i)}(x_0)}{i!}$, $i=\overline{0,n}$, то у нашому випадку

$$b_0 = P_3(1) = -3+1-1^2+2\cdot 1^3 = -1;$$

$$b_1 = \frac{P_3'(1)}{1!} = \left(1-2x+6x^2\right)\Big|_{x=1} = 5;$$

$$b_2 = \frac{P_3''(1)}{2!} = \frac{(-2+12x)\big|_{x=1}}{2} = 5;$$

$$b_3 = \frac{P_3'''(1)}{3!} = \frac{12}{6} = 2.$$

Отже,

$$P_3(x) = -1+5(x-1)+5(x-1)^2+2(x-1)^3.$$

2. Функцію $f(x,\ y)=x^3+y^3$ розкласти за формулою Тейлора в околі точки $A(1,\ 1)$.

Розв'язання. Для функції двох змінних після $(n+1)$ разів диференціювання по обох змінних як в точці $A_0(x_0,\ y_0)$, так і в її достатньо малому околі, формула Тейлора має вигляд

$$f(M)=f(M,\ A)+df(M,\ A)+\frac{d^2f(M,\ A)}{2!}+\ldots+\frac{d^nf(M,\ A)}{n!}+\frac{d^{n+1}f(M.\ M_1)}{(n+1)!},$$

де M, M_1 – точки з околу точки A.

Оскільки задана функція – многочлен третього степеня, то всі диференціали, починаючи з четвертого порядку, дорівнюють нулеві. Обчислюючи диференціали першого, другого та третього порядків, одержуємо

$$x^3+y^3 = 2+3(x-1)+3(y-1)+3(x-1)^2+3(y-1)^2+(x-1)^3+(y-1)^3.$$

92. Розкласти за степенями $(x-x_0)$ многочлени:

1) $P_4(x)=2+x+5x^2-5x^3+x^4$, $x_0=2$;

2) $P_5(x)=1+x-x^2+2x^4+x^5$, $x_0=-1$;

3) $P_4(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$, $x_0=4$;

4) $P_3(x)=x^3+3x^2-2x+4$, $x_0=-1$;

5) $P_{10}(x)=x^{10}-3x^5+1$, $x_0=1$;

6) $P_3(x)=2x^3-3x^2+5x+1$, $x_0=-1$.

93. Розкласти дані функції за формулою Тейлора, залишковий член записати у формі Лагранжа:

1) $f(x)=e^x$ при $x_0=1$; 2) $f(x)=\ln x$ при $x_0=2$.

Розглянемо приклад 1). Формула Тейлора для функції $y=f(x)$ має вигляд

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\ !}(x-x_0)^{n+1},$$

де $\xi=x_0+\Theta(x-x_0)$, $0<\Theta<1$. Для функції $f(x)=e^x$ похідна $f^{(n+1)}(x)=e^x$. При $x_0=1$, $f^{(k)}(x_0)=e$, $k=\left(\overline{0,\ n}\right)$, $f^{(n+1)}(\xi)=e^\xi$. Звідси

$$e^x=e+e(x-1)+\frac{e}{2!}(x-1)^2+\ldots+\frac{e}{n!}(x-1)^n+\frac{e^\xi}{(n+1)!}(x-1)^{n+1},$$

де $\xi=1+\Theta(x-1)$, $0<\Theta<1$.

При $x_0=0$ одержали б $f^{(k)}(0)=e^0=1$, $f^{(n+1)}(\xi)=e^\xi=e^{\Theta x}$. Тому

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

94. Розкласти за формулою Маклорена такі функції:

1) $f(x)=(1+x)^n$; 2) $f(x)=\ln(1+x)$; 3) $f(x)=e^{-x}$;

4) $f(x)=\sin x$; 5) $f(x)=\cos x$;

6) $f(x)=\operatorname{ch} x$; 7) $f(x)=\operatorname{sh} x$.

95. Функції $f(x,\ y)$, $f(x,\ y,\ z)$ розкласти за формулою Тейлора в околі точки A:

1) $f(x,\ y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$, $A(1,\ -2)$;

2) $f(x,\ y)=x^3-2y^3+3xy$, $A(2,\ 1)$;

3) $f(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2-2(xy+xz+yz)$, $A(1,\ -1,\ 2)$.

96. Записати формулу Тейлора для функції $f(x,\ y)=x^y$ в околі точки $A(1,\ 2)$, поклавши $n=2$.

97. Записати формулу Маклорена для функції $f(x,\ y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$, поклавши $n=2$.

§ 27. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ НА МОНОТОННІСТЬ

Приклад. Знайти проміжки монотонності функцій:

1) $y=2x^3-3x^2+1$; 2) $y=\sqrt[3]{x^2}+2$; 3) $y=|x|$.

Розв'язання [див. ч. 1, с. 403]. 1) а) Область існування $(-\infty,\ +\infty)$;б) $y'=6x^2-6x$; в) $y'=0$, $6x^2-6x=0$; $x_1=0$ і $x_2=1$ - стаціонарні точки; г) розділимо стаціонарними точками область існування на проміжки $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ +\infty)$. У кожному із зазначених проміжків похідна зберігає знак, для визначення якого достатньо знати знак у будь-якій точці проміжку. Наприклад, у $(-\infty,\ 0)$ виберемо $x=-1\in(-\infty,\ 0)$ і підставимо у рівність $y'=6x^2-6x$. Одержимо $y'(-1)=6+6=12>0$, тобто $y'(x)>0$ при $x\in(-\infty,\ 0)$; д) знайдемо знак похідної у кожному інтервалі:

$y'(x)>0$ для $x\in(-\infty,\ 0)$ – функція у цьому інтервалі зростає;

$y'(x)<0$ для $x\in(0,\ 1)$, оскільки $y'\left(\frac{1}{2}\right)=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-6\cdot\frac{1}{2}<0$ – функція спадає;

$y'(x)>0$ для $x\in(1,\ +\infty)$, оскільки $y'(2)=6\cdot 2^2-6\cdot 2>0$ – функція зростає.

2) а) Область існування функції $y=\sqrt[3]{x^2}+2$ – вся числова вісь $(-\infty,\ +\infty)$; б) $y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; в) точка $x=0$ критична – в ній похідна нескінченна; г) розділимо область існування функції на інтервали: $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ +\infty)$; д) в інтервалі $(-\infty,\ 0)$ $y'<0$ – функція спадає, в інтервалі $(0,\ +\infty)$ $y'>0$ – функція зростає. Графік функції показано на рис. 4.3.

3) Функція визначена в інтервалі $(-\infty,\ +\infty)$; y' не існує в точці $x=0$.

В інтервалі $(-\infty,\ 0)$ $y'=-1<0$ – функція спадає. В інтервалі $(0,\ +\infty)$ $y'=1>0$ – функція зростає (рис. 4.4).

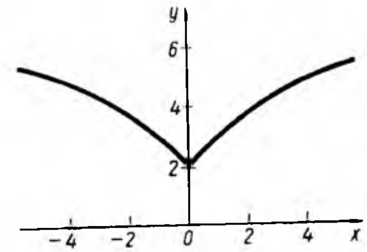

Рис. 4.3

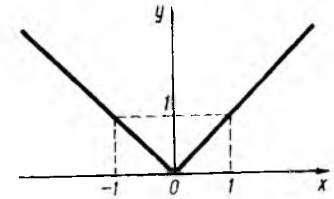

Рис. 4.4

98. Знайти проміжки монотонності таких функцій:

1) $y=3x^2-6x+7$; 2) $y=(x-2)(x+1)(x-3)$;

3) $y=xe^{-x}$; 4) $y=2-\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)}$;

5) $y=|\sin x|$; 6) $y=2x^2-\ln x$;

7) $y=x-2\sin x$ $(0\le x\le 2\pi)$; 8) $y=2\sin x+\cos 2x\,(0\le x\le 2\pi)$;

9) $y=x+\cos x$; 10) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

11) $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$; 12) $y=\frac{e^x}{x}$; 13) $y=\frac{x}{e^x}$.

§ 28. ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. НЕОБХІДНІ УМОВИ ТА ЇХ РОЛЬ

99. Знайти критичні точки таких функцій:

1) $y=2x^3-9x^2+12$; 2) $y=2x^3+3x^2-36x+15$;

3) $y=(x+2)^3(x-1)^2$; 4) $y=(x-3)\sqrt{x}$;

5) $y=|\ x\ |+1$; 6) $z=x^3-y^2$;

7) $z=x^3-3xy+y^3$; 8) $z=2x+\sqrt{y}$;

9) $z=y^2+|\ x\ |$.

§ 29. ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Приклад. Дослідити функції на екстремум:

1) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$; 2) $y = x^3 - 12x$; 3) $y = e^x + e^{-x} + 2\cos x$.

Розв'язання. 1) а) Область існування функції $y = 2x^3 - 3x^2 + 1 - (-\infty,\ +\infty)$; б) знаходимо похідну $y' = 6x^2 - 6x$; в) стаціонарні точки: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; г) розіб'ємо область існування на проміжки $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ +\infty)$; д) знайдемо знак похідної в кожному інтервалі: в інтервалі $(-\infty,\ 0)$ $y' > 0$, в інтервалі $(0,\ 1)$ $y' < 0$, в інтервалі $(1,\ +\infty)$ $y' > 0$; е) при переході від першого інтервалу до другого (через точку $x_1 = 0$) похідна змінює знак з плюса на мінус, тому при $x_1 = 0$ функція має максимум: $y_{\max}(0) = 1$. Оскільки при переході через точку $x_2 = 1$ похідна змінює знак з мінуса на плюс, то при $x_2 = 1$ функція має мінімум: $y_{\min}(1) = 0$. Графік функції показано на рис. 4.5.

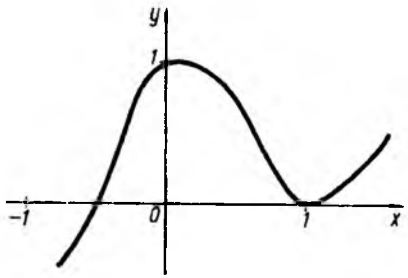

Рис. 4.5

2) Функцію $y = x^3 - 12x$ дослідимо на екстремум, застосовуючи другу достатню умову. Знаходимо стаціонарні точки: $y' = 3x^2 - 12 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Друга похідна $y''(x) = 6x$, $y''(-2) = -12 < 0$, в точці $x_1 = -2$ функція має максимум. Запишемо $y''(x_2) = 12 > 0$, в точці $x_2 = 2$ – мінімум.

3) Функцію $y = e^x + e^{-x} + 2\cos x$ дослідимо на екстремум за третьою достатньою умовою існування екстремуму. Знайдемо похідну від функції

$$y' = e^x - e^{-x} - 2\sin x = 2(\operatorname{sh} x - \sin x).$$

Стаціонарні точки визначимо з рівняння $\operatorname{sh} x - \sin x = 0$. Це трансцендентне рівняння має єдиний розв'язок $x = 0$, оскільки $\operatorname{sh} x > \sin x$ для $x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, де обидві функції зростають. Наприклад, $\operatorname{sh} 0{,}01 = 0{,}010001$, а $\sin 0{,}01 = 0{,}009998$. Стаціонарна точка одна: $x = 0$. Далі маємо

$$y''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x, \quad y''(0) = 1 + 1 - 2 = 0,$$

$$y'''(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x, \quad y'''(0) = 1 - 1 + 0 = 0,$$

$$y^{IV}(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x, \quad y^{IV}(0) = 1 + 1 + 2 = 4.$$

Оскільки першою відмінною від нуля є похідна першого порядку, то маємо екстремум, а саме мінімум, оскільки $f^{IV}(0) > 0$.

100. Дослідити функції на екстремум:

1) $y = \dfrac{x}{4x^2 - 3x + 4}$; 2) $y = (x+2)^3(x-1)^2$; 3) $y = \sqrt[3]{x} + 3$;

4) $y = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$; 5) $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$; 6) $y = \dfrac{3}{4}x^4 - 2x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 6x - 1$;

7) $y = x^6$ (дослідити за третьою достатньою умовою);

8) $y = (x-1)^3$ (дослідити за третьою достатньою умовою);

9) $y = 2x^3 - 3x^2$; 10) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$;

11) $y = \dfrac{3x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 1}$; 12) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8}$.

§ 30. ОПУКЛІСТЬ І УГНУТІСТЬ КРИВОЇ

Приклад. Дослідити дані криві на опуклість вгору і вниз, знайти точки перегину:

1) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$; 2) $y = \sqrt[3]{x - 1}$.

Розв'язання. 1) Область існування даної функції $(-\infty,\ +\infty)$. Знаходимо другу похідну: $y' = 3x^2 - 6x - 9$, $y'' = 6x - 6$. Оскільки друга похідна неперервна всюди на осі Ox, то точки перегину можуть бути тільки при тих значеннях x, при яких $f''(x) = 0$, тобто при $x = 1$. Розіб'ємо область існування функції цією другою критичною точкою на інтервали $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ +\infty)$. Знаходимо знак $f''(x)$ у кожному інтервалі: в інтервалі $(-\infty,\ 1)$ $f''(x) < 0$ крива опукла вгору, в інтервалі $(1,\ +\infty)$ $f''(x) > 0$ – крива опукла вниз. Таким чином, при $x = 1$ крива має точку перегину. Підставивши $x = 1$ у вираз для $f(x)$, знаходимо ординату точки перегину: $y = 0$.

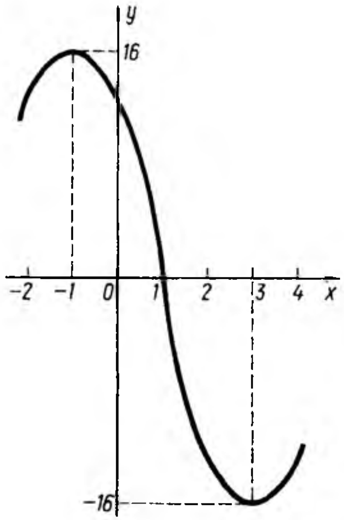

Рис. 4.6

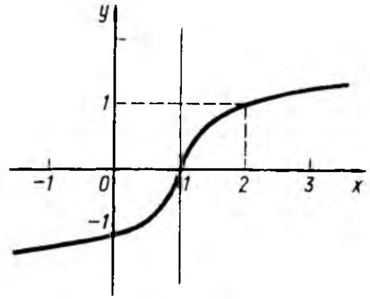

Рис. 4.7

На рис. 4.6 дано наближений графік розглянутої функції.

2) Точкою перегину у даному прикладі є точка, в якій

$$y'' = \infty . \quad y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} ,$$

$$y'' = -\frac{2}{9(x-1)^{\frac{5}{3}}} .$$

Друга критична точка $x = 1$. В інтервалі $(-\infty,\ 1)$ $y'' > 0$ – крива опукла вниз. В інтервалі $(1,\ +\infty)$ $y'' < 0$ – крива опукла вгору. Точка (1, 0) – точка перегину. Крива у цій точці має вертикальну дотичну (рис. 4.7).

101. Дослідити на опуклість вгору, вниз і знайти точки перегину кривих:

1) $y = 1 + 3x - x^2$; 2) $y = \frac{x^3}{3} - x$;

3) $y = \ln\left(1 + x^2\right)$; 4) $y = \frac{x^3}{x^2 + 48}$;

5) $y = (x+1)^4 + e^x$; 6) $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$;

7) $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$; 8) $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$;

9) $y = (x+2)^6 + 2x + 2$; 10) $y = e^{\sin x}\left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$.

§ 31. АСИМПТОТИ КРИВОЇ. ПОБУДОВА ГРАФІКА ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Приклади. **1.** Знайти асимптоти кривих:

$$1)\ f(x) = \frac{2}{x-1};\quad 2)\ f(x) = \frac{x^2}{1+x}.$$

Розв'язання. 1) Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x-1} = 0$, то $y = 0$ – горизонтальна асимптота кривої. Можна записати $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} \frac{2}{x-1} = \pm\infty$, тому $x = 1$ – вертикальна асимптота кривої.

2) Для кривої $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$ пряма $x = -1$ – вертикальна асимптота. Щоб визначити рівняння похилої асимптоти знайдемо

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(1+x)x} = 1,\ b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{1+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{1+x} = -1.$$

Таким чином, $y = x - 1$ – похила асимптота кривої. Графік функції зображено на рис. 4.8.

Побудову графіка функції ілюструє наступний приклад.

2. Побудувати графік функції $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Розв'язання. а) Область існування функції: $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ +\infty)$.

б) Дослідимо функцію на парність і знайдемо точки перетину кривої з осями координат:

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{2(-x+1)^2} = -\frac{x^3}{2(x-1)^2}.$$

Очевидно, що $y(-x) \ne y(x)$, тобто функція не є парною (графік несиметричний відносно осі Oy); $y(-x) \ne -y(x)$, тобто функція не є непарною (графік несиметричний відносно початку координат). При $x = 0$ маємо $y = 0$. Таким чином, графік функції проходить через початок координат.

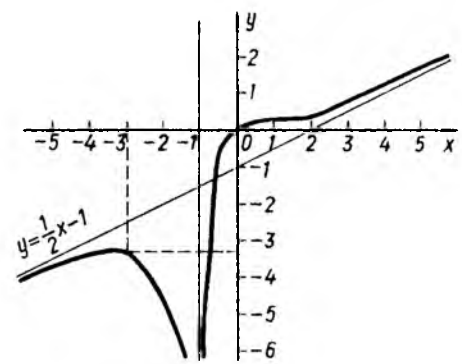

Рис. 4.8

в) Знайдемо точки розриву функції. Оскільки

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=-\infty,$$

то $x=-1$ – точка розриву другого роду.

г) Щоб визначити інтервали монотонності і точки екстремуму функції $y(x)$, знайдемо першу похідну

$$y'=\frac{1}{2}\frac{3x^2(x+1)^2-x^3\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{1}{2}\frac{x^2(x+1)(3x+3-2x)}{(x+1)^3(x+1)}=\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}.$$

Маємо $y'=0$, якщо $x_1=-3$ і $x_2=0$ – стаціонарні точки. У точці $x_3=-1$ функція і її похідна не визначені. Розділяємо область існування функції на інтервали $(-\infty,\ -3)$, $(-3,\ -1)$, $(-1,\ 0)$, $(0,\ +\infty)$. В інтервалі $(-\infty,\ -3)$ похідна $y'>0$ – функція зростає, в інтервалі $(-3,\ -1)$ $y'<0$ – функція спадає, в інтервалі $(-1,\ 0)$ $y'>0$ – функція зростає, в інтервалі $(0,\ +\infty)$ $y'>0$ – функція зростає. При переході через точку $x=-3$ похідна змінює знак плюс на мінус. Тому в цій точці – максимум:

$$y_{\max}=f(-3)=-\frac{27}{8}.$$

В околі точки $x_3=-1$ похідна змінює знак мінус на плюс. Проте зробити висновок, що в точці $x_3=-1$ функція має мінімум, неможливо, оскільки в цій точці функція не визначена.

При переході через точку $x_2=0$ похідна не змінює знак, точка $x_2=0$ не є точкою екстремуму.

д) Знайдемо інтервали опуклості вгору, вниз кривої і точки її перегину. Запишемо

$$y''=\frac{1}{2}\frac{\left[2x(x+3)+x^2\right](x+1)^3-x^2(x+3)\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6}=\frac{3x}{(x+1)^4}.$$

Другі критичні точки $x_1=0$ і $x_2=-1$. Розбиваємо область існування функції на інтервали: $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 0)$, $(0,\ +\infty)$. В інтервалах $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 0)$ $y''<0$ – крива опукла вгору, в інтервалі $(0,\ +\infty)$ $y''>0$ – крива опукла вниз. Точка $O(0,\ 0)$ – точка перегину.

е) Знайдемо асимптоти: $x=-1$ – вертикальна асимптота. Рівняння похилої асимптоти шукаємо у вигляді $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2(x+1)^2x}=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2(x+1)^2}-\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x(x+1)^2}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3-2x^2-x}{(x+1)^2}=-1;$$

$y=\frac{1}{2}x-1$ – похила асимптота. Побудуємо графік функції (рис. 4.9).

102. Знайти асимптоти кривих:

1) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-4}$; 2) $f(x)=x^2\operatorname{tg}x$;

3) $f(x)=\dfrac{2x^2-9}{x+2}$; 4) $f(x)=xe^x$;

5) $f(x)=\dfrac{x}{\left(1-x^2\right)^2}$; 6) $f(x)=\dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$.

103. Побудувати графіки таких функцій:

1) $y=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$; 2) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}$;

3) $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$; 4) $y=\dfrac{(x+1)^3}{4(x-2)^2}$;

5) $y=\dfrac{x}{e^x}$; 6) $y=\dfrac{1}{e^x-1}$;

7) $y=(x-3)\sqrt{x}$;

8) $y=\dfrac{x}{\left(1-x^2\right)^2}$;

9) $y=(x+1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{2}{3}}$.

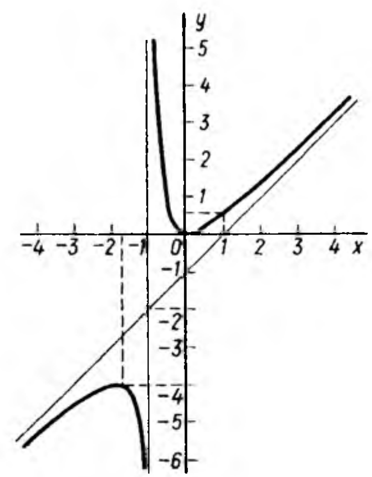

Рис. 4.9

3. Серед прямокутників з даним периметром $2p$ знайти той, площа якого найбільша.

Розв'язання. Нехай x – одна із сторін прямокутника, тоді друга $p-x$. Площа прямокутника $S(x)=x(p-x)$. Функція $S(x)$ має найбільше значення на $[0,\ p]$, оскільки є неперервною. Знаходимо $S'(x)=p-2x$. Перша похідна перетворюється на нуль при $x=\frac{p}{2}$. Оскільки $S''(x)=-2$, тобто від'ємна при всіх значеннях x, то при $x=\frac{p}{2}$ функція має найбільше значення. Шуканий прямокутник – квадрат.

4. Треба виготовити відкритий циліндричний резервуар об'ємом V. Вартість матеріалу, який іде на виготовлення дна, у m разів більша за вартість матеріалу для бічної частини. При яких розмірах резервуара вартість матеріалу буде найменшою?

Розв'язання. Нехай вартість матеріалу для бічної частини – одиниця, тоді вартість затрачених матеріалів на весь циліндр $S=m\pi R^2+2\pi Rh$, де R і h – відповідно радіус і висота резервуара. Застосовуючи формулу об'єму резервуара $V=\pi R^2 h$, знаходимо $h=\frac{V}{\pi R^2}$. Цей вираз висоти підставимо у формулу для визначення вартості матеріалів $S=m\pi R^2+\frac{2V}{R}$. Знайдемо похідну по R і прирівняємо її до нуля:

$$S'_R=2m\pi R-\frac{2V}{R^2}=0,$$

тому

$$R=\sqrt[3]{\frac{V}{m\pi}}.$$

Легко помітити, що друга похідна $S''_R>0$, S має найменше значення для визначеного R. Далі знайдемо

$$h=\frac{V}{\pi R^2}=\frac{V}{\pi\left(\frac{V}{m\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}=m\sqrt[3]{\frac{V}{m\pi}}=mR.$$

Таким чином, вартість матеріалу для резервуара буде мінімальною, якщо висота циліндра у m разів перевищуватиме радіус його основи.

104. У конус з висотою h і радіусом основи r вписаний циліндр найбільшого об'єму. Знайти висоту і радіус циліндра.

105. Витрати вугілля (т/год) паровим катером визначаються за формулою $z=0{,}3+0{,}01v^3$, де v – швидкість катера. Знайти найекономічнішу швидкість катера.

106. Дано пряму MN і точки A і B, які лежать по різні боки від неї. Точка рухається від A до деякої точки P прямої MN по відрізку AP зі швидкістю v_1, а потім до точки B по відрізку PB зі швидкістю v_2. Визначити положення точки P так, щоб час, витрачений на проходження шляху APB, був найменшим.

107. Знайти найменшу зовнішню поверхню котла, яка складається з циліндра, завершеного двома півкулями, із стінками сталої товщини при даному об'ємі V.

108. Судно стоїть на якорі за 9 км від найближчої точки A берега. З судна треба послати зв'язківця до населеного пункту, розташованого на березі за 15 км від точки A. Якщо швидкість зв'язківця пішки 5 км/год, а на веслах 4 км/год, то в якому пункті берега він має причалити, щоб витратити на шлях до населеного пункту найменший час?

§ 32. ДОТИК ПЛОСКИХ КРИВИХ

Приклади. **1.** Підібрати параметри k і b прямої $y=kx+b$ так, щоб вона мала до кривої $y=x^3-3x^2+2$ дотик другого порядку.

Розв'язання. Дотик ліній $f(x)$ і $\varphi(x)$ матиме другий порядок, якщо

$$f(x_0)=\varphi(x_0),\ f'(x_0)=\varphi'(x_0),\ f''(x_0)=\varphi''(x_0),\ f'''(x_0)\neq\varphi'''(x_0)$$

або

$$\begin{cases} kx_0+b=x_0^3-3x_0^2+2, \\ k=3x_0^2-6x_0, \\ 0=6x_0-6. \end{cases}$$

Звідси $\qquad x_0=1,\ k=-3,\ b=3.$

2. Знайти координати центра, радіус і рівняння стичного кола гіперболи $xy=1$ у точці $M(1,\ 1)$.

Розв'язання. Координати центра стичного кола лінії $y=f(x)$ у точці $M_0(x_0,\ y_0)$ обчислюються за формулами

$$\xi=x_0-\frac{1+(y_0')^2}{y_0''}y_0',\quad \eta=y_0+\frac{1+(y_0')^2}{y_0''},\quad x_0=1,\quad y_0=1,$$

$$y'=-\frac{1}{x^2},\quad y_0'=-1,\quad y''=\frac{2}{x^3},\quad y_0''=2,$$

тоді
$$\xi=1-\frac{1+(-1)^2}{2}(-1)=2,\quad \eta=1+\frac{1+(-1)^2}{2}=2.$$

Таким чином, $\xi=2$, $\eta=2$, а рівняння стичного кола

$$(x-2)^2+(y-2)^2=R^2.$$

Радіус R стичного кола обчислюється за формулою

$$R=\frac{\left(1+(y_0')^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|\ y_0''\ |}=\frac{(1+1)^{\frac{3}{2}}}{2}=\frac{\sqrt{2^3}}{2}=\sqrt{2}.$$

Тому рівняння стичного кола запишемо у вигляді

$$(x-2)^2+(y-2)^2=2.$$

109. При яких значеннях коефіцієнтів a, b, c парабола $y=ax^2+bx+c$ має в точці $x=0$ дотик другого порядку до кривої $y=e^x$?

110. Який порядок дотику з віссю Ox має в точці $x=0$ крива:

1) $y=1-\cos x$; 2) $y=e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)$; 3) $y=\sin x-x\sqrt[3]{\cos x}$?

111. Знайти координати центра стичного кола лінії $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0,\ y_0)$, його радіус і рівняння:

1) $y=x^2$, $M(1,1)$; 2) $y=e^x$, $M(0,1)$; 3) $y=\operatorname{tg}x$, $M\left(\dfrac{\pi}{4},\ 1\right)$.

§ 33. КОЛО І ЦЕНТР КРИВИНИ ПЛОСКИХ КРИВИХ. ЕВОЛЮТА, ЕВОЛЬВЕНТА

Приклади. **1.** Знайти координати центра кривини лінії $y=\sin x$ і радіус цієї кривини в точці $M\left(\dfrac{\pi}{2};\ 1\right)$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо координати центра кривини і радіус кривини кривої $y=\sin x$ у довільній точці за формулами (33.3) [ч. 1, с. 420]:

$$\xi=x-\frac{1+\cos^2 x}{-\sin x}\cos x=x+\frac{\cos x\left(1+\cos^2 x\right)}{\sin x};$$

$$\eta=y+\frac{1+\cos^2 x}{-\sin x}=\sin x-\frac{1+\cos^2 x}{\sin x}=-\frac{2\cos^2 x}{\sin x};\quad \rho=\frac{\left(1+\cos^2 x\right)^{\frac{3}{2}}}{|\ \sin x\ |}.$$

Звідси для точки $M\left(\dfrac{\pi}{2},\ 1\right)$ маємо $\xi=\dfrac{\pi}{2}$, $\eta=0$, $\rho=1$.

2. Знайти еволюту кривої $y^2=4x$.

Розв'язання. Запишемо рівняння кривої у вигляді $y=\pm2\sqrt{x}$. Розглянемо функцію $y=2\sqrt{x}$. Знайдемо координати центра її кривини:

$$y'=\frac{1}{\sqrt{x}},\quad y''=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}},\quad \xi=x-\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{-x^{-\frac{3}{2}}}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}=x+\frac{2(x+1)x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}=3x+2,$$

$$\eta=y+\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{-x^{-\frac{3}{2}}}{2}}=2\sqrt{x}-\frac{2(x+1)x\sqrt{x}}{x}=2\sqrt{x}-2x\sqrt{x}-2\sqrt{x}=-2x\sqrt{x}.$$

Для $y=\pm2\sqrt{x}$ одержимо $\xi_1=3x+2$, $\eta_1=2x\sqrt{x}$.

Виключаємо x:

$$x=\frac{\xi-2}{3},\quad \eta^2=4x^3=4\frac{(\xi-2)^3}{27},$$

$$4(\xi-2)^3=27\eta^2.$$

Останній вираз – це рівняння півкубічної параболи. Оскільки при розв'язуванні η підносили до квадрата, то залежність $4(\xi-2)^3=27\eta^2$ є рівнянням еволюти для всієї параболи. Записуючи його у системі координат xOy, одержуємо

$$4(x-2)^3=27y^2 \text{ (рис. 4.10).}$$

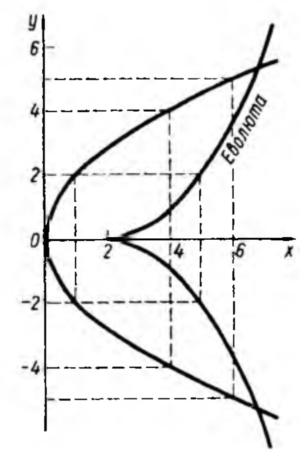

Рис. 4.10

112. Знайти координати центра кривини і радіус кривини лінії $y = x^2 + x$ у точці $M(0,\ \ 0)$.

113. Знайти координати центра кривини і еволюту кривої:

1) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$;   2) $x = 3t$, $y = t^2 - 6$ (парабола);

3) $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$;

4) параболи n-го порядку $y = x^n$;

5) гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;   6) астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;

7) півкубічної параболи $y^3 = ax^2$;

8) параболи $x = 3t$, $y = t^2 - 6$;

9) цисоїди $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$;   10) лінії $\begin{cases} x = a\left(1 + \cos^2 t\right)\sin t, \\ y = a\sin^2 t \cdot \cos t. \end{cases}$

§ 34. ВИЗНАЧЕНІ, НЕВИЗНАЧЕНІ І НАПІВВИЗНАЧЕНІ КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ

***Приклади.* 1.** Дослідити, чи є квадратична форма

$$\Phi(x,\ \ y) = 9x^2 + 10xy + 8y^2$$

додатно визначеною.

Розв'язання. Матриця даної квадратичної форми має вигляд $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$. Обчислимо головні мінори:

$$a_{11} = 9 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 47 > 0.$$

Таким чином, дана квадратична форма є додатно визначеною.

2. Дослідити, при яких значеннях a квадратична форма

$$\Phi(x,\ \ y) = -x^2 + 2xy + ay^2$$

від'ємно визначена.

Розв'язання. Матриця даної квадратичної форми має вигляд $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$.

Головні мінори:

$$\Delta_1 = a_{11} = -1 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -a - 1 > 0, \quad a < -1.$$

Матриця від'ємно визначена при $a < -1$.

114. Дослідити, чи є квадратична форма додатно визначеною:

1) $2x^2 - 4xy - 3y^2$;   2) $2x^2 - 4xy + 3y^2$;

3) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - 4xz - 6yz$;   4) $3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + 2yz$;

5) $3x^2 - 8xy + 3y^2$;   6) $x^2 + 6xy + 10y^2$.

115. Дослідити, при яких значеннях a квадратична форма додатно визначена:

1) $ax^2 + 4xy + y^2$;   2) $ax^2 + 6xy + 3y^2$;   3) $x^2 + 8xy + ay^2$.

§ 35. ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

***Приклади.* 1.** Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 - 3xy + y^3$.

Розв'язання. Щоб знайти стаціонарні точки, частинні похідні прирівнюємо до нуля:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3\left(x^2 - y\right) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3\left(y^2 - x\right) = 0.$$

Розв'яжемо систему

$$\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0, \end{cases} \quad x^4 - x = 0, \quad \begin{matrix} x_1 = 0, & x_2 = 1, \\ y_1 = 0, & y_2 = 1. \end{matrix}$$

Одержимо дві стаціонарні точки: $P_1(0,\ \ 0)$, $P_2(1,\ \ 1)$. Знайдемо частинні похідні другого порядку в цих точках і перевіримо достатні умови:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Для точки $P_1(0,\ \ 0)$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_1} = 0, \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_1} = -3, \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_1} \cdot \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_1} - \left(\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_1}\right)^2 = -9 < 0.$$

Отже, екстремуму в точці P_1 немає.

Для точки $P_2(1,\ \ 1)$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_2}=6,\quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{P_2}=-3,\quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_2}=6,$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_2}\cdot\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_2}-\left(\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{P_2}\right)^2=36-9=27>0.$$

В точці P_2 екстремум є. Оскільки $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_2}>0$, то функція має мінімум

$$z_{\min}=z(1,\ \ 1)=-1.$$

116. Дослідити на екстремум такі функції:

1) $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$; 2) $z=3x^2-x^3+3y^2+4y$;

3) $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$, $(x>0,\ \ y>0)$; 4) $z=x^3+3xy^2-15x-12y$;

5) $z=x^3y^2(a-x-y)$; 6) $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$;

7) $z=x^2-xy+y^2+3x-2y+1$; 8) $z=x^3+y^3-3axy$;

9) $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$, $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$, $0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$;

10) $u=xyz(4a-x-y-z)$; 11) $u=x^2+y^2+z^2-xy+2z+x$;

12) $u=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xyz}$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

§ 36. УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ

Приклади. **1.** Знайти умовний екстремум функції $z=x+2y$ при умові, що $x^2+y^2=5$.

Розв'язання. Складаємо функцію Лагранжа

$$F=x+2y+\lambda\left(x^2+y^2-5\right).$$

Знаходимо з необхідних умов екстремуму стаціонарні точки:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=1+2\lambda x=0;\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y}=2+2\lambda y=0;\\[2mm] x^2+y^2=5;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=-\dfrac{1}{2\lambda};\\[2mm] y=-\dfrac{2}{2\lambda};\\[2mm] x^2+y^2=5.\end{cases}\qquad \begin{aligned}&\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2+\left(-\frac{2}{2\lambda}\right)^2=5;\\ &\frac{1+4}{4\lambda^2}=5;\end{aligned}$$

Звідси

$$\lambda^2=\frac{1}{4};\quad \lambda_1=-\frac{1}{2};\quad x_1=1;\quad y_1=2;\quad P_1(1,\ \ 2);$$

$$\lambda_2=\frac{1}{2};\quad x_2=-1;\quad y_2=-2;\quad P_2(-1,\ \ -2).$$

Характер умовного екстремуму визначається знаком диференціала другого порядку. У нашому випадку

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=2\lambda,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=2\lambda,$$

$$d^2F=2\lambda(dx)^2+2\lambda(dy)^2.$$

Якщо $\lambda=-\dfrac{1}{2}$, то $d^2F<0$, тому в точці $P_1(1,\ \ 2)$ функція має умовний максимум і $z_{\max}=5$. Якщо $\lambda=\dfrac{1}{2}$, то $d^2F>0$, тому в точці $P_2(-1,\ \ -2)$ функція має умовний мінімум, $z_{\min}=-5$. Приклад можна розв'язати зведенням задачі до визначення екстремуму відповідної функції однієї змінної $z=x\pm2\sqrt{5-x^2}$ в інтервалі $\left[-\sqrt{5}\ ;\ +\sqrt{5}\ \right]$.

2. Знайти найбільше і найменше значення функції $z=x^3-3xy+y^3$ в області $0\le x\le2$, $-1\le y\le2$.

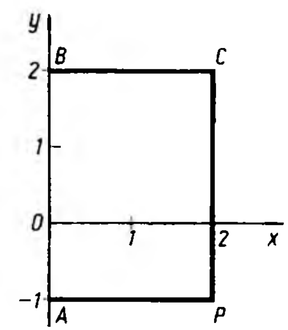

Рис. 4.11

Розв'язання. Якщо функція неперервна в обмеженій замкнутій області, то вона досягає свого найбільшого (найменшого) значення або у стаціонарній точці, яка належить даній області, або у точках, які лежать на межі області. Дана область – прямокутник (рис. 4.11). Знайдемо стаціонарні точки (див. приклад у § 35) $P_1(0,\ \ 0)$, $P_2(1,\ \ 1)$. Значення функції в цих точках: $z_1=0$, $z_2=-1$. Дослідимо функцію на межах області. На відрізку AB $x=0$, маємо $z=y^3$.

Ця функція монотонно зростає і на кінцях відрізка $[-1,\ 2]$ набуває значень $z|_{y=-1}=-1$, $z|_{y=2}=8$. На відрізку BC $y=2$ і $z=x^3-6x+8$; $z'=3x^2-6$, $z'=0$ при $x=\sqrt{2}$ (точка $x=-\sqrt{2}$ не належить області), $z|_{x=\sqrt{2}}=8-4\sqrt{2}$, $z|_{x=0}=8$, $z|_{x=2}=4$. На відрізку CP $x=2$ і $z=8+y^3-6y$. Знайдемо значення цієї функції у стаціонарній точці і на кінцях відрізка $[-1,\ 2]$. Маємо $z'=3y^2-6$, $z'=0$ при $y^2=2$, або у даній області при $y=\sqrt{2}$ $z|_{y=\sqrt{2}}=8-4\sqrt{2}$, $z|_{y=-1}=13$, $z|_{y=2}=4$. На відрізку AP $y=-1$ і $z=x^3+3x-1$, $z'=3x^2+3>0$. Функція монотонно зростає від $z|_{x=0}=-1$ до $z|_{x=2}=13$. Порівнюючи обчислені значення функції, робимо висновок, що найбільше значення $z_{\text{найб.}}=13$ в точці (2, –1), а найменше $z_{\text{найм.}}=-1$ в точках (1, 1), (0, –1).

117. Знайти умовні екстремуми функцій:

1) $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ при $x+y=2$; 2) $z=xy^2$ при $x+2y=1$;

3) $u=2x+y-2z$ при $x^2+y^2+z^2=36$; 4) $z=xy$ при $x^2+y^2=1$;

5) $u=xyz$ при $x^2+y^2+z^2=3$; 6) $u=x^2y^3z^4$ при $2x+3y+4z=a$;

7) $u=x^2+2y^2+3z^2$ при $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+2y+3z=0; \end{cases}$

8) $u=x+y$ при $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{a^2}$;

9) $z=x^2+y^2-xy+x+y-4$ при $x+y+3=0$;

10) $u=x^2+y^2+z^2$ при $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$.

118. Знайти найбільше і найменше значення функції $z=f(x,\ y)$ в області D:

1) $z=x^2-y^2$ у крузі $x^2+y^2\le 4$;

2) $z=x^2y(4-x-y)$ у трикутнику, обмеженому лініями $x=0$, $y=0$, $x+y=6$;

3) $z=x^3+2xy-4x+8y$ в області D, яка задана рівняннями $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=2$;

4) $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ в області D, яка задана нерівностями $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$, $0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$;

5) $z=x-2y-3$ в області D, яка задана нерівностями $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le x+y\le 1$;

6) $z=x^2-xy+2y^2+3x+2y+1$ у трикутнику, обмеженому осями координат і прямою $x+y+5=0$;

7) $z=x^2+y^2-6x+4y+2$ у прямокутнику з вершинами $A(1,\ -3)$, $B(1,\ 2)$, $C(4,\ 2)$, $D(4,\ -3)$;

8) $z=\cos x\cos y\cos(x+y)$ у квадраті, обмеженому лініями $x=0$, $x=\pi$, $y=0$, $y=\pi$.

119. Прямий круговий циліндр завершується прямим круговим конусом. При даній повній поверхні Q тіла визначити кут нахилу твірних конуса до основи так, щоб об'єм тіла був найбільшим.

120. Канал, яким подається вода до турбіни, має у перерізі рівнобедрену трапецію, площа якої дорівнює S. Знайти глибину каналу і кут α нахилу так, щоб периметр, змочений водою, був найменшим.

121. Судна перебувають у пунктах *O*, *A* і *B*. Пункт *A* розташований на відстані 30 миль на північ від *O*. Судна мають припливти у пункт *P*, розташований на північний схід від пункту *O*. Знайти координати точки *P* так, щоб відстань, пройдена всіма суднами, була найменшою.

§ 37. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

122. Застосовуючи метод найменших квадратів, знайти a, b, c у емпіричній формулі $y=Q_m(x)$ для функції, заданої таблицею:

1)

x	1	2	3	5
y	3	4	2,5	0,5

$y=ax+b$, $m=1$.

2)

x	1	2	3	4	5	6
y	15	10	4	0	–6	–10

$y=ax+b$, $m=1$.

3)

x	0,5	1	1,5	2	2,5
y	0,8	1,9	4,9	8,8	13,9

$y=ax^2+bx+c$, $m=2$.

4)

x	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
y	2,50	1,20	1,12	2,25	4,28

$y = ax^2 + bx + c$, $m = 2$.

5)

x	1	2	3	4	5
y	–0,7	1,5	3,2	4,9	7,1

$y = ax + b$, $m = 1$.

Наведемо розв'язання прикладу 1). Для складання системи (37.6) [ч. 1, с. 433] обчислимо

$$\sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 21,\ \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 39,\ \sum_{i=1}^{4} x_i = 11,\ \sum_{i=1}^{4} y_i = 10.$$

Задана система набуває вигляду

$$\begin{cases} 39a + 11b = 21, \\ 11a + 4b = 10. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо $a = -\dfrac{26}{35}$, $b = \dfrac{159}{35}$. Таким чином,

$$y = -\frac{26}{35}x + \frac{159}{35}.$$

§ 38. НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КІНЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Приклади. **1.** Розв'язати рівняння $x^3 - x - 1 = 0$ методом дотичних.

Розв'язання. Знайдемо проміжок ізоляції кореня. Для функції $f(x) = x^3 - x - 1$ покладемо $x = 1$ і $x = 2$, тоді $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 5 > 0$, $f'(x) = 3x^2 - 1 > 0$ для $x \in [1,\ 2]$. Отже, $[1,\ 2]$ – проміжок ізоляції кореня. Оскільки на відрізку $[1,\ 2]$ $f''(x) > 0$ і $f(2) > 0$, то метод дотичних застосуємо до правого кінця відрізка:

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n - \frac{f(\tilde{x}_n)}{f'(\tilde{x}_n)},$$

де $x_0 = 2$; $\tilde{x}_1 = 2 - \dfrac{5}{11} \approx 1,6$, $f(\tilde{x}_1) \approx 1,5$, $f'(\tilde{x}_1) \approx 6,68$; $\tilde{x}_2 = 1,6 - 0,23 = 1,37$, $f(\tilde{x}_2) \approx 0,201$, $f'(\tilde{x}_2) \approx 4,63$; $\tilde{x}_3 = 1,37 - 0,044 \approx 1,326$, $f(\tilde{x}_3) \approx 0,010$, $f'(\tilde{x}_3) \approx 4,283$; $\tilde{x}_4 = 1,326 - 0,002 = 1,324$.

Корінь з точністю до 0,01 дорівнює 1,32.

2. Застосовуючи метод хорд, знайти у проміжку ізоляції [1, 2] корінь рівняння $x^3 - x - 1 = 0$ з точністю до 0,01.

Розв'язання. Оскільки на відрізку [1, 2] $f''(x) > 0$, $f(1) < 0$, $f(2) > 0$, то наближення до точного значення кореня буде здійснюватися з лівого боку. За формулою методу хорд [див. ч. 1, с. 438]

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n) f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}.$$

Тому

$$x_1 = 1 - \frac{(2-1)(-1)}{5+1} \approx 1,1,\quad f(1,1) = 1,331 - 1,1 - 1 \approx -0,77;$$

$$x_2 = 1,1 - \frac{(2-1,1)(-0,77)}{5+0,77} \approx 1,22,\quad f(1,22) \approx -0,404;$$

$$x_3 = 1,22 - \frac{(2-1,22)(-0,408)}{5,404} \approx 1,28,\quad f(1,28) \approx -0,183;$$

$$x_4 = 1,28 - \frac{(2-1,28)(-0,184)}{5,183} \approx 1,305,\quad f(1,305) \approx -0,08;$$

$$x_5 = 1,305 - \frac{(2-1,305)(-0,08)}{5,08} \approx 1,312,\quad f(1,312) \approx -0,02;$$

$$x_6 = 1,312 - \frac{(2-1,312)(-0,02)}{5,02} \approx 1,323,\quad f(1,323) \approx -0,007;$$

$$x_7 = 1,323 - \frac{(2-1,323)(-0,007)}{5,07} \approx 1,324.$$

Таким чином, з точністю до 0,01 корінь рівняння дорівнює 1,32. Порівнюючи це значення з результатом попереднього розрахунку кореня того ж самого рівняння, бачимо, що метод дотичних дає змогу швидше обчислювати корінь із заданим ступенем точності.

3. Методом ітерацій знайти корінь рівняння $x^3 - x - 1 = 0$ у проміжку ізоляції [1, 2] з точністю до $\varepsilon = 0,01$.

Розв'язання. Якщо зобразити рівняння у вигляді $x = \varphi(x)$, тобто $x = x^3 - 1$, то $\varphi(x) = x^3 - 1$, $\varphi'(x) = 3x^2$ і на відрізку [1, 2] $|\varphi'(x)| \le 12$. Відомо, що збіжність ітераційного процесу $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, де $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ гарантується при $|\varphi'(x)| < 1$. Тому запишемо рівняння $f(x) = 0$ у вигляді $x = \varphi(x)$, де $\varphi(x) = \lambda(x^3 - x - 1) + x$, а λ вибираємо таке, що $|\varphi'(x)| < 1$, тобто

$$|\varphi'(x)| = \left|\lambda(3x^2 - 1) + 1\right| < 1.$$

Розв'яжемо нерівність відносно λ для $x \in [1,\ 2]$:

$$\left|\lambda\left(3x^2-1\right)+1\right|<1; \quad -1<\lambda\left(3x^2-1\right)+1<1.$$

З нерівності $\lambda\left(3x^2-1\right)+1<1$ одержуємо $\lambda<0$. З нерівності $\lambda\left(3x^2-1\right)+1>-1$ випливає $\lambda>\frac{-2}{3x^2-1}$, $\lambda>-\frac{2}{11}$. Умова $-\frac{2}{11}<\lambda<0$ виконана, якщо взяти $\lambda=-0{,}181$ (0,181 – значення $\frac{2}{11}$ з недостачею). Таким чином, замість рівняння $x^2-x-1=0$ будемо розв'язувати еквівалентне йому рівняння $x=-0{,}181\left(x^3-x-1\right)+x$. Узагальнюючи, запишемо $x_{n+1}=-0{,}181\left(x_n^3-x_n-1\right)+x_n$. Якщо прийняти $x_0=1$, то

$$x_1=-0{,}181(-1)+1\approx 1{,}2;\ x_2=-0{,}181\left(x_1^3-x_1-1\right)+x_1\approx 1{,}29;$$

$$x_3=-0{,}181\left(x_2^3-x_2-1\right)+x_2\approx 1{,}3158.$$

З прикладу 1 відомо, що корінь з точністю до 0,01 дорівнює 1,32.

123. Знайти проміжки ізоляції коренів і методом проб з точністю до 0,1 уточнити корені рівнянь:

1) $x^3-2x^2+x-3=0$; 2) $x^3-6x+2=0$;

3) $x^3-x-1=0$; 4) $x^3-4x-12=0$;

5) $e^x+x=0$; 6) $x\ln x=0{,}8$.

Для ілюстрації розв'яжемо приклад 1). Проміжком ізоляції кореня є скінченний проміжок монотонності функції, на кінцях якого функція набуває значень з різними знаками. У нашому прикладі $f(x)=x^3-2x^2+x-3$, $f'(x)=3x^2-4x+1$, а $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=1$ – стаціонарні точки. Отже, інтервалами монотонності функції є інтервали $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3};\ 1\right)$, $(1;\ +\infty)$. При цьому

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-2x^2+x-3\right)=-\infty,$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3-2\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}-3=\frac{1}{27}-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}-3<0.$$

Отже, інтервал монотонності $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)$ не містить коренів рівняння. Інтервал $\left(\frac{1}{3};\ 1\right)$ також не має коренів рівняння, оскільки $f(1)=1-2+1-3<0$. Границя $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-2x^2+x-3\right)=+\infty$, тому інтервал монотонності $(1;\ +\infty)$ містить корінь рівняння. Обчислимо $f(2)=2^3-2\cdot 2^2+2-3=8-8+2-3=-1<0$. Переконаємось, що $f(3)>0$:

$$f(3)=3^3-2\cdot 3^2+3-3=27-18=9>0.$$

Отже, інтервал ізоляції кореня (2; 3). Методом проб уточнимо значення кореня з точністю до 0,1:

$$f(2{,}5)=(2{,}5)^3-(2{,}5)^2\cdot 2+2{,}5-3=15{,}625-2\cdot 6{,}25-0{,}5=2{,}625>0.$$

Оскільки $f(2)<0$, а $f(2{,}5)>0$, то корінь лежить в інтервалі $(2;\ 2{,}5)$. Обчислимо $f(2{,}2)$:

$$f(2{,}2)=10{,}648-2\cdot 4{,}84+2{,}2-3=0{,}168>0,$$

$$f(2{,}1)=-0{,}459<0.$$

Таким чином, корінь лежить в інтервалі (2,1; 2,2). Якщо взяти за корінь

$$\xi=\frac{2{,}1+2{,}2}{2}=2{,}15,$$

то похибка буде меншою, ніж довжина відрізка [2,1; 2,2], тобто меншою за 0,1.

У прикладі 5) проміжок ізоляції знаходимо, побудувавши графіки $y=e^x$ і $y=-x$ (рис. 4.12). Точка перетину належить інтервалу (–1; 0). Далі застосовуємо метод проб. Для обчислення можна скористатися таблицею значень функції e^x.

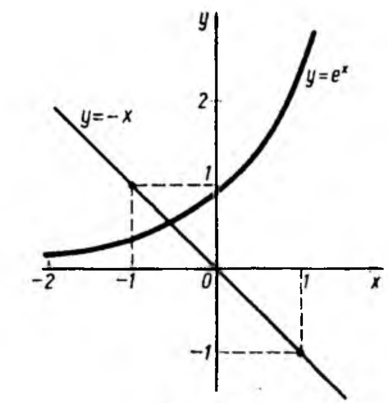

Рис. 4.12

4. Комбінованим методом хорд і дотичних знайти наближене значення кореня рівняння $x^3-x-1=0$, ізольованого у проміжку (1; 2), з точністю до 0,01.

Розв'язання. Маємо $f(x)=x^3-x-1$, $f'(x)=3x^2-1$, $f''(x)=6x$. В (1; 2) $f''(x)>0$, тому за перше наближення у методі дотичних беремо $x_0=2$, оскільки $f(2)=5>0$, можемо записати

$$\tilde{x}_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=2-\frac{5}{11}\approx 1{,}6,\quad f(\tilde{x}_1)\approx 1{,}5,\quad f'(\tilde{x}_1)\approx 6{,}68.$$

За формулою методу хорд

$$x_1\approx 1-\frac{(2-1)(-1)}{5+1}\approx 1{,}1,\quad f(1{,}\ 1)\approx -0{,}67.$$

Шуканий корінь належить проміжку (1,1, 1,6):

$$\tilde{x}_2=1{,}6-0{,}23=1{,}37,\quad f(\tilde{x}_2)\approx 0{,}201,\quad f'(\tilde{x}_2)\approx 4{,}63;$$

$$x_2=1{,}1-\frac{(1{,}6-1{,}1)(-0{,}67)}{1{,}5+0{,}67}\approx 1{,}25,\quad f(1{,}25)\approx -0{,}297.$$

Знаходимо наближення у проміжку (1,25, 1,37):

$$\tilde{x}_3=1{,}37-0{,}044\approx 1{,}326,\quad f(\tilde{x}_3)\approx 0{,}010;$$

$$x_3=1{,}25-\frac{(1{,}37-1{,}25)(-0{,}297)}{0{,}201+0{,}297}\approx 1{,}321.$$

Оскільки $|x_3-\tilde{x}_3|=0{,}005<0{,}01$, то шуканий корінь

$$\xi=\frac{x_3+\tilde{x}_3}{2}\approx 1{,}323.$$

Наведемо програму розв'язання рівняння методом дотичних для рівняння $x-\sin x-0{,}25=0$ на БЕЙСИКУ.

```
10 PRINT "РІШЕННЯ РІВНЯННЯ F(X) = 0"
15 PRINT "МЕТОДОМ ДОТИЧНИХ"
20 PRINT "ЗАДАЙТЕ ПОЧАТКОВЕ НАБЛИЖЕННЯ"
22 INPUT "XO=", X
25 PRINT "ЗАДАЙТЕ ПОХИБКУ"
27 INPUT "РЕЗУЛЬТАТУ E=", E
30 GOSUB 60: X=X–F
40 IF ABS(F) > E THEN 30
50 PRINT "КОРІНЬ РІВНЯННЯ X=", X: END
60 F = (X – SIN(X) – .25) / (1 – COS(X))
70 RETURN
```


У програмі у рядку № 60 написана підпрограма для обчислення $F(x_n)/F'(x_n)$. Якщо візьмемо похибку $\varepsilon=1\cdot 10^{-6}$, то $x=1{,}2$. Результат обчислення: $x=1{,}171229656$.

124. Застосовуючи метод хорд, знайти у вказаних проміжках ізоляції дійсні корені даних рівнянь з точністю до 0,01:

1) $x^4-2x-4=0$, $[1,\ 2]$; 2) $x^3-2x-5=0$, $[2,\ 2{,}2]$;

3) $0{,}1\sin x-x+2=0$, $[2,\ 2{,}3]$; 4) $\cos x=x^2$, $[-1,\ 0]$, $[0,\ 1]$.

125. Комбінованим методом хорд і дотичних знайти дійсні корені рівняння з точністю до 0,001:

1) $x^3-x-1=0$; 2) $x^3+x^2-11=0$; 3) $x^3-2x-5=0$;

4) $x^2\operatorname{arctg} x=1$; 5) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=10x$; 6) $\cos x\operatorname{ch} x=1$.

126. Методом ітерацій знайти дійсні корені рівнянь з заданим ступенем точності ε:

1) $x^3-12x-5=0$, $\varepsilon=0{,}01$; 2) $x^3-2x^2-4x-7=0$, $\varepsilon=0{,}01$;

3) $2x-\cos x=0$, $\varepsilon=0{,}001$, $[0,\ 0{,}5]$.

Відповіді

1. 1) $v(t)=14$, $v(10)=14$; 2) $v(t)=8t-3$, $v(10)=77$; 3) $v(t)=3t^2+2$, $v(10)=302$; 4) $v(t)=v$, $v(10)=5$; 5) $v(t)=3t^2$, $v(10)=302$. **2.** $c(\Theta)=6\Theta^2-1$, $c(10)=599$. **3.** $I(t)=4\sin 2t$, $I(2\pi)=0$. **4.** 1) 8; 2) 6; 3) 0. **5.** 1) 8; 2) $-\dfrac{1}{x^2}$; 3) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 4) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$; 5) $\cos x$; 6) $3x^2-5$; 7) $2^x\ln 2$; 8) $\dfrac{1}{x}\log_2 e$. **6.** 1) $x-4y+7=0$; 2) $7x-y-5=0$; 3) $4x-y-2=0$.

7. 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-x\sin y$; 2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\sec^2 x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\operatorname{tg} x$; 3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos x\cos y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\sin x\sin y$; 4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x$; 5) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\cos x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sin x$; 6) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-y\sin x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\cos x$.

8. 1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos x\cos y\operatorname{tg} z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\sin x\sin y\operatorname{tg} z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\sin x\cos y\sec^2 z$; 2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xy\operatorname{ctg} z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2\operatorname{ctg} z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=-x^2y\operatorname{cosec}^2 z$; 3) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^2z^2$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2xyz^2$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=2xy^2z$; 4) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=4z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=xz$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=xy$; 5) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y\cos z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x\cos z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=-xy\sin z$; 6) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=4z\sin x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=z\cos x$,

$\frac{\partial u}{\partial z}=y\cos x$. **9.** 1) $10x^4+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{\cos^2 x}$; 2) $-\frac{7}{2x\sqrt{x}}-e^x$; 3) $5\operatorname{ch}x-\frac{2}{1+x^2}$; 4) $-3\sin x-4\operatorname{sh}x+2\operatorname{ch}x$; 5) $\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{5}{\sin^2 x}$; 6) $\frac{\partial u}{\partial x}=4x^3-8xy^2-3yz$, $\frac{\partial u}{\partial y}=4y^3-8x^2y-3xz$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-3xy$;

7) $-\frac{2}{(x-1)^2}$; 8) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$; 9) $\frac{3t^2-6t-1}{(t-1)^2}$; 10) $\frac{v^4+2v^3+5v^2-2}{(v^2+v+1)^2}$; 11) $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$;

12) $-\frac{4x}{3(x^2-1)^2}+1+2x-3x^2$; 13) $-\frac{6x^2}{(x^3-1)^2}$; 14) $\frac{4x^3(2b^2-x^2)}{(b^2-x^2)^2}$; 15) $\frac{1+2x+3x^2-2x^3-x^4}{(1+x^3)^2}$;

16) $\frac{6x(1+3x-5x^3)}{(1-x^2)^2(1-2x^3)^2}$; 17) $\frac{3}{2}m\sqrt{x}+\frac{7}{6}n\sqrt[6]{x}+\frac{1}{2}p\frac{1}{\sqrt{x^3}}$; 18) $\frac{2ax}{a+b}+\frac{b}{a+b}-\frac{c}{(a+b)x^2}$;

19) $-\frac{a^2b^2c^2[(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)]}{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}$; 20) $\frac{a+2bx}{m(a+bm)}$. **10.** 1) $\frac{dy}{dx}=3x^2\operatorname{tg}x+(x^3-2)\sec^2 x$; 2) $-\operatorname{cosec}^2 x\operatorname{sh}x+\operatorname{ctg}x\operatorname{ch}x$; 3) $2x\cdot 2^x\arccos x-\frac{2^x x^2}{\sqrt{1-x}}+2^x x^2\arccos x\ln 2$;

4) $\frac{\partial u}{\partial x}=6xy\sin x+3x^2y\cos x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2\sin x-\sin y$; 5) $\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x^y\ln x$; 6) $-\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\sin^2 x}$;

7) $\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}$; 8) $\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$; 9) $\frac{\sqrt{3}}{x^2-x+1}$; 10) $4\cos 4x$. **11.** 1) $\frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}$; 2) $\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$;

3) $\frac{1}{1+\cos x}$; 4) $\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}$; 5) $\frac{\arccos x+\arcsin x}{(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}}$; 6) $\frac{\partial u}{\partial x}=y+\frac{1}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2}$;

7) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2x}{y^3}$; 8) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sec^2 x}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\operatorname{tg}x}{y^2}$; 9) $\frac{\partial u}{\partial x}=y\cos x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\sin x+\cos y$;

10) $\frac{\partial u}{\partial x}=\sin y\cdot x^{\sin y-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x^{\sin y}\cos y\ln x$; 11) $\frac{\partial u}{\partial x}=yz^{xy}\ln z$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xz^{xy}\ln z$, $\frac{\partial u}{\partial z}=xyz^{xy-1}$;

12) $\frac{\partial z}{\partial x}=-e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}$; 13) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}$;

14) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}$; 15) $\frac{\partial u}{\partial x}=yz(\sin x)^{yz-1}\cos x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=z(\sin x)^{yz}\ln\sin x$;

16) $\frac{\partial z}{\partial x}=2(2x+y)^{2x+y}[1+\ln(2x+y)]$, $\frac{\partial z}{\partial y}=(2x+y)^{2x+y}[1+\ln(2x+y)]$; 17) $\frac{\partial u}{\partial x}=(3x^2+y^2+z^2)e^{x(x^2+y^2+z^2)}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2xye^{x(x^2+y^2+z^2)}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=2xze^{x(x^2+y^2+z^2)}$. **12.** 1) $6(3+4x+5x^2)^2(2+5x)$;

2) $-\frac{10x}{(4+x^2)^6}$; 3) $(x+3)^2\cdot(2x-5)(10x-3)$; 4) $\frac{2(x^2-3x-5)}{(2x-3)^2}$; 5) $\frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$; 6) $\frac{(2-x)\sqrt{x-1}}{2(1-x)^2}$;

7) $\frac{-2(3x^2-3x-4)}{(3x^2+4)^2}$; 8) $\frac{2\sqrt{3x-1}-3}{4\sqrt{3x^2-x-(3x-1)^{\frac{3}{2}}}}$; 9) $\frac{x-4}{2x^2\sqrt{2-x}}$; 10) $\frac{x+2}{2\sqrt{1+x+x^2}(1+x+x^2)}$;

11) $\frac{-5}{(x-5)\sqrt{x^2-25}}$; 12) $\frac{1+x}{(1-x)^3}$; 13) $-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$; 14) $\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$; 15) $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$;

16) $\frac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ $(|x|\neq 1)$; 17) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}$ $(x\neq 0)$; 18) $-\frac{(1-x)^{p-1}[(p+q)+(p-q)x]}{(1+x)^{q+1}}$ $(x\neq -1)$.

13. 1) $3\sin 6x$; 2) $-\frac{6\operatorname{tg}^2\frac{1}{x}}{x^2\cos^2\frac{1}{x}}$; 3) $-3x^2\sin x^3$; 4) $\frac{3}{2\sqrt{x}}\sin^2(\sqrt{x}+1)\cos(\sqrt{x}+1)$;

5) $\frac{-\sin x(1+\sin^2 2x+\sin^4 x)}{(\sin^4 x+1)^2}$; 6) $4\cos^2 x$; 7) $-\frac{3}{\sin^4 x}$; 8) $x^2(3\cos 2x-2x\sin 2x)$; 9) $\frac{\sin x}{\cos^4 x}$;

10) $x^2\sin x$; 11) $-\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$; 12) $\sin^3 x$; 13) $\frac{1}{1-\sin x}$; 14) $\frac{\sin x}{1+\sin x}$; 15) $-3\operatorname{ctg}^4 x$.

14. 1) $-\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+2)^2}}$; 2) $-\frac{12x}{\sqrt{1-(3-x^2)^2}}$; 3) $\arcsin\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}}$; 4) $\arccos\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

5) $\arcsin\frac{x}{3}$; 6) $\frac{4x}{x^4+4}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$; 8) $\frac{1}{x^2+2}$; 9) $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$; 10) $\frac{1}{a^2+x^2}$; 11) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

12) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}$; 13) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2xy}{1+x^4y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^2}{1+x^4y^2}$; 14) $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y^2}{1+x^2y^4}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{1+x^2y^4}$. **15.** 1) $-\frac{5}{4-5x}$; 2) $\frac{x}{1+x^2+2\sqrt{1+x^2}}$; 3) $\frac{6}{x}\lg e\lg^2 x^2$;

4) $\frac{(x^2-2)\ln(x^2-2)+4x^2}{2\sqrt{x}(x^2-2)}$; 5) $\frac{2x}{x^4-1}$; 6) $\frac{3}{(3x+4)\ln(3x+4)}$; 7) $-\frac{3\sin\ln x}{x}$; 8) $\frac{2}{2x-1}$; 9) $\frac{1}{x}$;

10) $\operatorname{ctg}x$; 11) $-\operatorname{tg}x$; 12) $\frac{f'(x)}{f(x)}$; 13) $\frac{1}{\sin x}$; 14) $\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$; 15) $\frac{1}{x^2-a^2}$; 16) $\frac{3x+2}{x(1+x)}$;

17) $-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$; 18) $-\frac{1}{\cos x}$; 19) $x^3\ln^2 x$; 20) $\frac{2x^3}{1-x^4}$. **16.** 1) $2e^{2x}$; 2) $-e^{-x}$;

3) $e^{4x}(4\sin 5x+5\cos 5x)$; 4) $e^{3x}(3\cos^2 4x-4\sin 8x)$; 5) $3^{1+\sin 3x}\ln 3\cdot\cos 3x$; 6) $\frac{a^{\sqrt{1+x}}\ln a}{2\sqrt{1+x}}$;

7) $\frac{5^{\ln(1+x^2)}2x\ln 5}{1+x^2}$; 8) $\frac{\operatorname{tg}x(2-\ln 2\operatorname{tg}x)}{2^{\operatorname{tg}x}\cos^2 x}$; 9) $\frac{1}{1+e^x}$; 10) e^{e^x+x}; 11) $-2xe^{-x^2}$; 12) 0;

13) $-2e^{-x}\cdot\sin^2 e^{-x}$. **17.** 1) $\frac15\operatorname{sh}\frac x5$; 2) $4\operatorname{sh}^2 x$; 3) $\frac{1}{\operatorname{ch}x}$; 4) $\frac{1}{\operatorname{ch}^6 x}$; 5) $\frac{1}{\operatorname{ch}x}$; 6) $\frac{x}{\operatorname{sh}\frac{x^2}{2}}$; 7) $\frac{\operatorname{sh}x}{2\sqrt{\operatorname{ch}x}}$;

8) $x\operatorname{ch}x$; 9) $3\operatorname{sh}^2 x\operatorname{ch}x$; 10) $\frac{3\operatorname{th}x}{2\operatorname{ch}^2 x\sqrt[4]{1+\operatorname{tg}^2 x}}$. **18.** 1) $\frac{1-6x^2}{x(1+\cos y)}$; 2) $-\frac{2y\sqrt y}{1+2x\sqrt y+4y\sqrt y}$;

3) $-\frac{y\cos x+\sin y}{x\cos y+\sin x}$; 4) $\frac py$; 5) $-\frac{b^2x}{a^2y}$; 6) $-\sqrt[3]{\frac yx}$; 7) $\frac{x+y}{x-y}$; 8) $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$; 9) $-\sqrt{\frac yx}$;

10) $\frac{3a^2\cos 3x+y^2\sin x}{2y\cos x}$; 11) $\frac xy\cdot\frac{y^2-2x^2}{2y^2-x^2}$; 12) $\frac{\sqrt{1-y^2}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)}$; 13) $\frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$;

14) $\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$; 15) $\frac{1+y^2}{y^2}$ **19.** 1) $x^{\sin x}\cdot\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$; 2) $(\cos x)^x(\ln\cos x-x\operatorname{tg}x)$;

3) $(\ln x)^x\left(\ln\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)$; 4) $2x^{\ln x-1}\ln x$; 5) $(\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\ln\sin x\right)$; 6) $2\sqrt[x]{(x+1)^2}\times$

$\times\left[\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right]$; 7) $x^{\sqrt x-\frac12}(2+\ln x)$; 8) $x^{\frac1x-2}(1-\ln x)$; 9) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^x\left(\frac{1}{x+1}+\ln\frac{x}{x+1}\right)$;

10) $\left(x^2+1\right)^{\sin x}\left[\frac{2x\sin x}{x^2+1}+\cos x\ln\left(x^2+1\right)\right]$. **20.** 1) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac32}}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac32}}$; 2) $\frac{\partial u}{\partial x}=$

$=\sin(x+y)+x\cos(x+y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x\cos(x+y)$; 3) $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2x\sin x^2}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\cos x^2}{y^2}$; 4) $\frac{du}{dx}=$

$=\frac{2x}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x^2}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}$; 5) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2}$; 6) $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$; 7) $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac xv$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac yv$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac zv$, $v=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac32}$; 8) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac zy\left(\frac xy\right)^{z-1}$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{zx}{y^2}\left(\frac xy\right)^{z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac xy\right)^z\ln\left|\frac xy\right|$; 9) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac yz x^{\frac yz-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x^{\frac yz}\cdot\frac1z\ln|x|$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac yz}\ln|x|$;

10) $\frac{\partial u}{\partial x}=u\frac1x y^z$, $\frac{\partial u}{\partial y}=uzy^{z-1}\cdot\ln|x|$, $\frac{\partial u}{\partial z}=uy^z\cdot\ln|x|\ln|y|$; 11) $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y-y^3$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x^3-3y^2x$;

12) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y^4+3x^2y^2-2x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; 13) $\frac{\partial u}{\partial x}=\sqrt y-\frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{2\sqrt y}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

14) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$; 15) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{xy\sqrt2}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2-y^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x^2\sqrt2}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2-y^2}}$;

16) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x^2}\cdot 3^{-\frac yx}\ln 3$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac1x\cdot 3^{-\frac yx}\ln 3$; 17) $\frac{\partial u}{\partial x}=y\ln(x+y)+\frac{xy}{x+y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x\ln(x+y)+\frac{xy}{x+y}$;

18) $\frac{\partial u}{\partial x}=zy$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xz$, $\frac{\partial u}{\partial z}=xy$; 19) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac1y\cos\frac xy\cos\frac yx+\frac{y}{x^2}\sin\frac xy\sin\frac yx$, $\frac{du}{dx}=-\frac{x}{y^2}\cos\frac xy\times$

$\times\cos\frac yx-\frac1x\sin\frac xy\sin\frac yx$; 20) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x+\ln y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{y(x+\ln y)}$. **21.** 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=4\sin 2(4x-5y)$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=-5\sin 2(4x-5y)$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+4y}+1\right)\sqrt{x^2+4y}}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{\left(\sqrt{x^2+4y}+1\right)\sqrt{x^2+4y}}$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=2xz$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2z$; 5) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac1y e^{\frac xy}-\frac{y}{x^2}e^{\frac yx}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}e^{\frac xy}+$

$+\frac1x e^{\frac yx}$; 6) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{\sqrt{z^2-x^2y^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{\sqrt{z^2-x^2y^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{xy}{z\sqrt{z^2-x^2y^2}}$. **25.** $\frac{\partial f}{\partial x}=3000$,

$\frac{\partial f}{\partial y}=3600$. **26.** 1) $y-3=-\frac43(x-4)$, $y-3=\frac34(x-4)$; 2) $y=3$, $x=2$. **27.** $(2, 19)$. **28.** Довжина

$MN=MA_0\operatorname{tg}\varphi=y_0\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ (див. рис. 4.2). За умовою $MN=2$ у кожній точці кривої, у тому числі і в точці $A_0(1, 2)$. Тоді $2=2\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi=1$, $\frac{dy}{dx}=1$. Отже, похідна від невідомої функції дорівнює сталій у кожній точці осі Ox. Розглянемо лінійну функцію $y=Ax+C$ і, знайшовши від неї похідну, одержимо $y'=A=\mathrm{const}$. Отже, невідома у прикладі крива описується рівнянням $y(x)=Ax+C$. Але $A=1$ і з умови проходження прямої $y=x+C$ через точку $A(1, 2)$ знаходимо $C=1$. **29.** З рис. 4.2. маємо $y'=\frac py$; $y'(x_0, y_0)=\frac{p}{y_0}$. Позначимо координати точки дотику $A_0(x_0, y_0)$. Тоді $A_0M=y_0$, а $\operatorname{tg}\varphi=y'(x_0, y_0)$. Знайдемо y' від рівняння параболи за правилом диференціювання неявно заданої функції: $2yy'=2p$. Звідси $y'=\frac py$; $y'(x_0, y_0)=\frac{p}{y_0}$.

Тому $BM=\frac{y_0^2}{p}=\frac{2px_0}{p}=2x_0$. **30.** 1) за умовою $\operatorname{tg}\varphi=\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}45°=1$; з іншого боку, $2y\frac{dy}{dx}=20$. Звідси $\frac{dy}{dx}=\frac{20}{2y}$, тоді $\frac{10}{y}=1$, $y=10$ і $100=20x$, $x=5$. Отже, точка дотику має координати (5, 10). Рівняння дотичної: $y-10=x-5$, $y=x+5$; 2) $\frac{x_0}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$, $\frac{a^2x}{x_0}-\frac{b^2y}{y_0}=c^2$, $c^2=a^2-b^2$;

3) $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$, $\frac{a^2x}{x_0}+\frac{b^2y}{y_0}=c^2$. **31.** Піддотична $BM=A_0M\operatorname{ctg}\varphi=\frac{A_0M}{\operatorname{tg}\varphi}$, де $A_0M=y_0$, $\operatorname{tg}\varphi=y'(x_0)$. Знайдемо $y'(x)=a^x\ln a$, $y'(x_0)=y_0\ln a$. Отже, $BM=\frac{y_0}{y_0\ln a}=\frac{1}{\ln a}$. **32.** 1) $\frac{6}{3t+8}$;

2) $-3\sin t\cos^2 t$; 3) $\sin 2t+2\cos 2t$; 4) $-\dfrac{\sqrt{2-t^2}}{\sqrt{1-4t^2}}$; 5) $-\operatorname{ctg} t$; 6) -1; 7) $\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$; 8) $-\operatorname{tg} t$;

9) $\operatorname{cth} t$; 10) $\dfrac{1+t^2}{t\left(2+3t-t^3\right)}$; 11) $\dfrac{1-\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg} t}$; 12) $\dfrac{t\left(2-t^3\right)}{1-2t^3}$; 13) $\dfrac{3t^2-1}{2t}$; 14) 1; 15) $\operatorname{tg} t$. **34.** Ні.

35. Ні. **36.** $a=6$, $b=-9$. **37.** 1) $f'_-\left(\dfrac{1}{3}\right)=-3$, $f'_+\left(\dfrac{1}{3}\right)=3$; 2) $f'_-(0)=2$, $f'_+(0)=1$.

38. $y'(1)=\infty$. **39.** $k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. **40.** 1) $f'(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ \dfrac{2x}{25}, & \text{якщо } 0<x\le 5,\\ 0, & \text{якщо } x>5;\end{cases}$ $x=5$ – точка розриву,

2) $f'(x)=\begin{cases}2, & \text{якщо } x<-1,\\ 2x, & \text{якщо } -1\le x\le 2,\\ -1, & \text{якщо } x>2;\end{cases}$ $x=-1$, $x=2$ – точки розриву,

3) $f'(x)=\begin{cases}-1, & \text{якщо } x<0,\\ \cos x, & \text{якщо } 0<x<\pi,\\ 1, & \text{якщо } x>\pi,\end{cases}$ $x=0$, $x=\pi$ – точки розриву. **41.** 1) $-2\sin x-x\cos x$;

2) $9e^{3x}$; 3) $\dfrac{2-x^2}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$; 4) $4(\operatorname{sh}2x+x\operatorname{ch}2x)$; 5) $\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$; 6) $\dfrac{2-3x^2}{x^3\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$; 7) $2\ln x+3$;

8) $-8\cos 4x$; 9) $e^{-x}(x-2)$; 10) $\dfrac{6x\left(2x^3-1\right)}{\left(x^3+1\right)^3}$; 11) $\dfrac{a^2}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}$; 12) $\dfrac{a+3\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}\left(a+\sqrt{x}\right)^3}$;

13) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)}{4x\sqrt{x}}$. **42.** 1) 24 м/с²; 2) $\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$ м/с². **43.** 1) $120x$; 2) $\dfrac{2}{(x+1)^3}$; 3) $\dfrac{x^2(3-2x)}{(1-x)^2}$;

4) $-\dfrac{m(m+1)(m+2)a}{x^{m+3}}$; 5) $\dfrac{11-6\ln x}{x^4}$; 6) $2e^x(\cos x-\sin x)$. **44.** 1) $\dfrac{a^x}{(\ln a)^n}$; 2) $\dfrac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$;

3) $e^x(x+n)$; 4) $2^{n-1}\cos\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$; 5) $\dfrac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}}$; 6) $(-1)^n e^{-x}$; 7) $2^{n-1}\sin\left[2x+(n-1)\dfrac{\pi}{2}\right]$;

8) $(-1)^n\dfrac{(n-2)!}{x^{n-1}}(n\ge 2)$; 9) $(-1)^n\dfrac{n!}{2}\left[\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}+\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$; 10) $(-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$.

45. 1) $-\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}$; 2) $\dfrac{-2}{t}$; 3) $-\dfrac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}}$; 4) 0; 5) $4t^2$; 6) $-\dfrac{2}{1-t^2}$; 7) $-\dfrac{2a}{9b^2t^4}$;

8) $\dfrac{2+t^2}{a(\cos t-t\sin t)}$; 9) $2\left(1+t^2\right)$; 10) $\dfrac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$. **46.** 1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{2}{y^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{6x}{y^4}$;

2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\cos(x+y)-x\sin(x+y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos(x+y)-x\sin(x+y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-x\sin(x+y)$; 3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$

$=-\dfrac{2\sin x^2+4x^2\cos x^2}{y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{2x\sin x^2}{y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{2\cos x^2}{y^3}$; 4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{1}{\left(x+y^2\right)^2}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{2y}{\left(x+y^2\right)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{2\left(x-y^2\right)}{\left(x+y^2\right)^2}$; 5) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{z(z-1)}{x^2}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{z(z+1)}{y^2}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$,

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z\ln^2\dfrac{x}{y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{z^2}{xy}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z\left(1+z\ln\dfrac{x}{y}\right)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=-\dfrac{1}{y}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z\left(1+z\ln\dfrac{z}{y}\right)$;

6) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 7) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-x\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=$

$=\dfrac{x^3+\left(x^2-y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-y\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}$; 8) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{2y}{\left(1+y^2\right)^2}$,

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$; 9) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\ln y(\ln y-1)}{x^2}e^{\ln x\ln y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\ln x\ (\ln x-1)}{y^2}\ e^{\ln x\ln y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\ln x\ \ln y+1}{xy}e^{\ln x\ln y}$;

10) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2a^2\cos 2(ax+by)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2b^2\cos 2(ax+by)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2ab\cos 2(ax+by)$; 11) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$

$=y^2e^{xy}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{xy}(xy+1)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2e^{xy}$; 12) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot 2x$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot 2y$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; 13) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=20x^3-3xy^3$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-45x^2y^2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=20y^3-30x^2y$; 14) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$

$=-\dfrac{3xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{5}{2}}}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{3x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{5}{2}}}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{3x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{5}{2}}}$; 15) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2y}{x^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1-\dfrac{1}{x^2}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. **53.** $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}=\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=180x^2y^2$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}=120x^3y$. **57.** 1) $\dfrac{4x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}dx$;

2) $\dfrac{xdx}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+1}}$; 3) $\dfrac{dx}{1-\sin x}$; 4) $\dfrac{(8x+5)dx}{2\sqrt{4x^2+5x-1}}$; 5) $\dfrac{2xdx}{x^2-1}$; 6) $\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; 7) $\dfrac{2\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}dx$;

8) $5^{\ln\operatorname{tg}x}\cdot\dfrac{2\ln 5}{\sin 2x}dx$; 9) $\dfrac{\left(x^2-1\right)\sin x+2x\cos x}{\left(1-x^2\right)^2}dx$; 10) $-\dfrac{dx}{2\sin\dfrac{x}{2}}$. **58.** $\Delta x=30\Delta t+3(\Delta t)^2$,

$dx=30\Delta t$; а) 33 м, 30 м; б) 3,03 м, 3 м; в) 0,030003 м, 0,03 м. **59.** 1) 1,01; 2) 1,9938; 3) 0,4849; 4) –0,8747; 5) 0,8104; 6) 1,043; 7) 0,69415; 8) 0,05; 9) 2,93; 10) 2,30146. **60.** 1) 0,95;

2) 12,18; 3) 3,96. **61.** $\frac{du}{dt}=-\alpha u$, $du=-\alpha u dt$. **62.** 1) $d_x u=\frac{2x}{y}dx$, $d_y u=-\frac{x^2}{y^2}dy$;

2) $d_x u=\sin 2y dx$, $d_y u=2x\cos 2y dy$; 3) $d_x u=\frac{ydx}{x^2+y^2}$, $d_y u=-\frac{xdy}{x^2+y^2}$; 4) $d_x u=yzdx$,

$d_y u=xzdy$, $d_z u=xydz$; 5) $d_x u=2xe^{x^2+y^2+z^2}dx$, $d_y u=2ye^{x^2+y^2+z^2}dy$, $d_z u=2ze^{x^2+y^2+z^2}dz$;

6) $d_x u=yzx^{yz-1}dx$, $d_y u=zx^{yz}\ln x dy$, $d_z u=yx^{yz}\ln x dz$. **63.** 0,662; 0,6. **64.** 1) $dz=\frac{2(xdy-ydx)}{x^2-y^2}$;

2) $dz=2x\cos 4y dx-4x^2\sin 4y dy$; 3) $dz=e^{xy}(ydx+xdy)$; 4) $du=\frac{3dx-5dy+4dz}{\cos^2(3x-5y+4z)}$;

5) $du=\arcsin\frac{y}{z}dx+\frac{x(zdy-ydz)}{z\sqrt{z^2-y^2}}$; 6) $du=\cos(x^2+y^2)(2xdx+2ydy)$; 7) $du=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$;

8) $du=\frac{2}{\sin\frac{2x}{y}}\frac{ydx-xdy}{y^2}$; 9) $du=\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; 10) $du=\frac{dx+dy+dz}{x+y+z}$; 11) $du=\left(\frac{y}{x}\right)^{z-1}\times$

$\times\left(-\frac{zy}{x^2}dx+\frac{z}{x}dy+\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}dz\right)$; 12) $du=\cos x\,\mathrm{sh}\,y\,dx+\sin x\,\mathrm{ch}\,y\,dy$; 13) $du=\frac{dz}{x^2+y^2}-\frac{2z}{(x^2+y^2)^2}\times$

$\times(xdx+ydy)$; 14) $du=(y^3+2)^{x-1}\left((y^3+2)\ln(y^3+2)dx+3xy^2dy\right)$. **65.** $\frac{1}{2}$. **66.** 1) $\frac{12\cos 3t}{\cos^2(4x+5y)}-$

$-\frac{20\sin 4t}{\cos^2(4x+5y)}$; 2) $\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}=\frac{x}{\sqrt{t}}+4ye^{2t}+4zt$; 3) $\frac{du}{dt}=(t-2)\frac{e^t}{t^3}\cos\frac{e^t}{t^2}$;

4) $\frac{du}{dt}=(18t^2+12t-16t^3)\cos(6t^3+6t^2-4t^4)$; 5) $\frac{du}{dt}=3e^{3t}+e^t(\sin t+\cos t)+\sin 2t$; 6) $\frac{du}{dt}=$

$=\frac{2\ln t+e^t}{t}+e^t\ln t$; 7) $\frac{du}{dt}=(\sin t)^{\mathrm{tg}\,t}(1+\sec^2 t\ln\sin t)$; 8) $\frac{du}{dt}=\sin t\ln t+\frac{\sin^2 t}{t\cos t}+\frac{\sin t\ln t}{\cos^2 t}$.

67. 1) $2x\ln y-\frac{3x^2\sin 3x}{y}$; 2) $\frac{y-8xe^{4x}}{y^3}$; 3) $\arcsin y+\frac{x2^x\ln 2}{\sqrt{1-y^2}}$; 4) $x^y\left(\frac{y}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)$;

5) $\frac{1}{y}e^{x/y}\left(1-\frac{3x}{y}\sin^2 x\cos x\right)$; 6) $\frac{2x}{x^2+y^2}\left(1+2ye^{x^2}\right)$; 7) $\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+y^2}\sin x$. **68.** 1) $\frac{\partial u}{\partial t}=$

$=3\cos(3x+4y)t_2+4\cos(3x+4y)\mathrm{tg}\,t_2$, $\frac{\partial u}{\partial t_2}=3\cos(3x+4y)t_1+4\cos(3x+4y)\frac{t_1}{\cos^2 t_2}$; 2) $\frac{\partial u}{\partial t_1}=$

$=\frac{5}{5x-4y}\frac{2}{\sqrt{1-(2t_1-t_2)^2}}-\frac{4}{5x-4y}\frac{1}{t_2}$, $\frac{\partial u}{\partial t_2}=\frac{5}{5x-4y}\frac{-1}{\sqrt{1-(2t_1-t_2)^2}}+\frac{4}{5x-4y}\frac{t_1}{t_2}$; 3) $\frac{\partial u}{\partial t_1}=0$,

$\frac{\partial u}{\partial t_2}=1$; 4) $\frac{\partial u}{\partial t_1}=\frac{2(t_1\cos^2 t_2+t_2^2\sin t_1\cos t_1)}{t_1^2\cos^2 t_2+t_2^2\sin^2 t_1}$, $\frac{\partial u}{\partial t_2}=\frac{2(t_2\sin^2 t_1-t_1^2\sin t_2\cos t_2)}{t_1^2\cos^2 t_2+t_2^2\sin^2 t_1}$. **70.** 2) 7,82;

3) $\approx 1{,}08$; 4) 4,015; 5) $\frac{\pi}{4}+0{,}005\approx 0{,}790$. **71.** $|\Delta^* a|=0{,}0324$ м. **72.** $\delta^* T=0{,}76\%$. **73.** 2) $\frac{x^2-y}{x-y^2}$;

3) $\frac{x+y}{x-y}$; 4) $\frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}$. **74.** 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1-yz}{1-xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1-xz}{1-xy}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{zy}{z^2-xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy}$;

4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}$. **75.** 1) $\frac{dx^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$; 2) $\frac{2\ln x-3}{x^3}dx^2$; 3) $x^x\left((1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right)dx^2$;

4) $\frac{(2-x^2)\sin x-2x\cos x}{x^3}dx^2$; 5) $\frac{2dx^2}{(x+2y)^3}$; 6) $3^{-x^2}\ln 9\cdot(2x^2\ln 3-1)dx^2$; 7) $2adx^2$; 8) $-\frac{R^2dx^2}{(y-b)^3}$.

76. 1) $d^2u=-\frac{2}{y^3}dy(ydx-xdy)$; 2) $d^2u=\frac{(ydx-xdy)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; 3) $d^2u=e^{xy}\left[y^2(dx)^2+2(1+xy)dxdy+\right.$

$\left.+x^2(dy)^2\right]$; 4) $d^2u=-2ydx^2+4(y-x)dxdy+2xdy^2$; 5) $d^2u=\frac{(dx-dy)^2}{(x-y)^2}$;

6) $d^2u=\frac{(3x^2-y^2)dx^2+8xydxdy+(3y^2-x^2)dy^2}{(x^2+y^2)^3}$; 7) $d^2u=2x\sin 2ydxdy+2x\cos 2ydy^2$;

8) $d^2u=-\sin(2x+y)(4dx^2+4dxdy+dy^2)$; 9) $d^2u=2(zdxdy+ydxdz+xdydz)$;

10) $d^2u=-\sin(x+y+z)(dx+dy+dz)^2$. **77.** 2) $\pm\frac{\sqrt{R^2+a^2}}{2\pi}dt$; 3) $\pm 3(t^2+1)dt$;

4) $\pm\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$; 6) $\pm\sqrt{2}\sqrt{2x^2+2x+1}\,dx$; 7) $\pm\mathrm{ch}\frac{x}{\gamma}dx$; 8) $\pm\sqrt{4+\frac{1}{t^2}+4t^2}\,dt$;

9) $\pm e^t\sqrt{3}\,dt$; 10) $\pm\frac{dt}{t(2a-t)}\sqrt{t(2a^3-4a^2t+4at^2-t^3)}$. **78.** 2) $x+1=1$, $z=0$; 3) $x^2+y^2=R^2$,

$z=3$. **79.** 2) $\frac{d\vec r}{dt}=\vec i-e^t\vec j+\vec k\cos t$; 3) $\frac{d\vec r}{dt}=te^t\vec i+\vec j\sin^2 t-\frac{\vec k}{1+t^2}$; 4) $\frac{d\vec r}{dt}=e^{\sin t}\vec i\cos t-\vec j t\cos t^2+\vec k$;

5) $\frac{d\vec r}{dt}=t^3\cdot\vec i+t^2\cdot\vec j+t\cdot\vec k$; 6) $\left.\frac{d\vec r}{dt}\right|_M=-\frac{a\sqrt{2}}{2}\vec i+\frac{a\sqrt{2}}{2}\vec j+\frac{b}{2\pi}\vec k$; 7) $\left.\frac{d\vec r}{dt}\right|_M=a(\vec i+6\vec j+36\vec k)$;

8) $\left.\frac{d\vec r}{dt}\right|_M=\vec i+\vec j+\sqrt{2}\vec k$. **81.** 2) $\frac{x-a}{0}=\frac{y}{-a}=\frac{z-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2\pi}}$, $4\pi y-2z+a=0$; 3) $\frac{x-\frac{\pi}{2}+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{0}$, $x=\frac{\pi}{2}-y$;

4) $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-4}{6}=\frac{z}{1}$, $x-6y-z+23=0$; 5) $\frac{x-\frac{t^4}{4}}{t^2}=\frac{y-\frac{t^3}{3}}{t}=\frac{z-\frac{t^2}{2}}{1}$, $t^2x+ty+z=\frac{t^6}{4}+\frac{t^4}{3}+\frac{t^2}{2}$;

6) $\dfrac{x-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{-a\sqrt{2}}=\dfrac{y-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}}=\dfrac{z-\frac{b}{8}}{\frac{b}{\pi}}$, $\quad -x+y+\dfrac{b}{\pi a\sqrt{2}}z=\dfrac{b^2}{8\pi a\sqrt{2}}$; 7) $\dfrac{x-6a}{a}=\dfrac{y-18a}{6a}=\dfrac{z-72a}{36a}$, $x+6y+36z=2706a$; 8) $\dfrac{x+1-\frac{\pi}{2}}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $\quad x+y+\sqrt{2}z=\dfrac{\pi}{2}+4$. **82.** 1) $\dfrac{2}{3\left(1+t^2\right)^2}$; 2) $\dfrac{|\sin 2t|}{\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{1}{4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}$; 4) $\dfrac{ab}{\left(\varepsilon^2x^2-a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, де $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ – ексцентриситет гіперболи; 5) $\dfrac{p^2}{\left(2px+p^2\right)^{\frac{3}{2}}}$; 6) $\dfrac{3}{2\sqrt{2ar}}$; 7) $\dfrac{1}{r\sqrt{1+m^2}}$. **83.** 1) $2a\operatorname{ch}^2 t$; 2) $\dfrac{2}{3}t\left(1+9t^2\right)^{\frac{3}{2}}$; 3) $\dfrac{1}{2}a\pi$; 4) $\dfrac{\left(1+\cos^2 x\right)^{\frac{3}{2}}}{|\sin x|}$; 5) $\dfrac{\left(a^2-\varepsilon^2x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{ab}$, де $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ – ексцентриситет еліпса; 6) $\dfrac{\left(a^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2a^2+r^2}$; 7) $\rho=\dfrac{\left(a^2+b^2t^2\right)^2}{2abt}$; 8) $\rho=\dfrac{3}{\sqrt{2}}e^t$. **84.** 2) $\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$; 3) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}e^3$; 4) $-\dfrac{2}{5}$; 5) $1-\sqrt{3}$; 6) 22; 7) : 1) 5, 2) $\dfrac{98}{13}$; 8) 0. **85.** 2) $\dfrac{2}{3}\left(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\right)$; 3) $\vec{k}$; 4) $\dfrac{1}{2}\vec{i}+\dfrac{5}{4}\vec{j}$; 5) $\dfrac{1}{2}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$; 6) $6\vec{i}+4\vec{j}$; 7) $\dfrac{1}{3}\left(2\vec{i}+\vec{j}\right)$; 8) $\dfrac{-y_0\vec{i}+x_0\vec{j}}{x_0^2+y_0^2}$; 9) $-2\vec{i}+\vec{j}$. **86.** 2) $\dfrac{X-3}{6}=\dfrac{Y-2}{3}=\dfrac{Z-1}{-8}$, $6X+3Y-8Z-16=0$; 3) $\dfrac{X-1}{-2}=\dfrac{Y-2}{-4}=\dfrac{Z-5}{1}$, $2X+4Y-Z-5=0$; 4) $\dfrac{X-1}{-1}=\dfrac{Y-1}{0}=\dfrac{Z-1}{1}$, $X-Z=0$; 5) $8X-8Y-Z-4=0$, $\dfrac{X-2}{8}=\dfrac{Y-1}{-8}=\dfrac{Z-4}{-1}$; 6) $X+Y-Z-1=0$, $\dfrac{X-1}{1}=\dfrac{Y-1}{1}=\dfrac{Z-1}{-1}$; 7) $17X+11Y+5Z-60=0$; $\dfrac{X-3}{17}=\dfrac{Y-4}{11}=\dfrac{Z+7}{5}$; 8) $X+11Y+5Z-18=0$, $\dfrac{X-1}{1}=\dfrac{Y-2}{11}=\dfrac{Z+1}{5}$; 9) $2X+Y+11Z-25=0$, $\dfrac{X-1}{2}=\dfrac{Y-1}{1}=\dfrac{Z-2}{11}$. **89.** 2) (–1, –1), (1, 1). **91.** 1) $\dfrac{5}{3}$; 2) $\dfrac{7}{75}$; 3) 2; 4) 2; 5) 0; 6) 4; 7) $\dfrac{1}{3}$; 8) 5; 9) 1; 10) 3; 11) $\dfrac{2}{\pi}$; 12) $\dfrac{1}{2}$; 13) 0; 14) 1; 15) e; 16) $\dfrac{1}{e}$; 17) $\dfrac{1}{e}$; 18) 1; 19) 1; 20) 1.

92. 1) $-7(x-2)-(x-2)^2+3(x-2)^3+(x-2)^4$; 2) $(x+1)^2+2(x+1)^3-3(x+1)^4+(x+1)^5$; 3) $(x-4)^4+11(x-4)^3+37(x-4)^2+21(x-4)-56$; 4) $(x+1)^3-5(x+1)+8$; 5) $(x-1)^{10}+10(x-1)^9+45(x-1)^8+120(x-1)^7+210(x-1)^6+249(x-1)^5+195(x-1)^4+90(x-1)^3+15(x-1)^2-5(x-1)-1$; 6) $2(x+1)^3-9(x+1)^2+17(x+1)-9$. **93.** 2) $\ln x=\ln 2+\dfrac{1}{2}(x-2)-\dfrac{1}{2^2\cdot 2}(x-2)^2+\dfrac{1}{2^3\cdot 3}(x-2)^3-\dfrac{1}{2^4\cdot 4}(x-2)^4+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n n}(x-2)^n+\dfrac{(-1)^n}{\xi^{n+1}(n+1)}(x-2)^{n+1}$, $\quad \xi=2+\Theta(x-2)$, $\quad 0<\Theta<1$.

94. 1) $(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\Theta x)^{m-n}$, $\quad 0<\Theta<1$; 2) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\times\dfrac{x^n}{n}+(-1)^n\dfrac{(\Theta x)^{n+1}}{n+1}$, $\quad 0<\Theta<1$; 3) $e^{-x}=1-x+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n!}+(-1)^n\dfrac{e^{-\Theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0<\Theta<1$; 4) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+(-1)^{n+1}\dfrac{\sin\Theta x}{(2n+1)!}x^{2n+3}$, $0<\Theta<1$; 5) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{x^{2(n+1)}}{2(n+1)!}\cos\Theta x$, $0<\Theta<1$; 6) $\operatorname{ch}x=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\ldots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\operatorname{ch}\Theta x$, $0<\Theta<1$; 7) $\operatorname{sh}x=x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\ldots+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dfrac{\operatorname{sh}\Theta x}{(2n+3)!}x^{2n+3}$, $0<\Theta<1$.

95. 1) $f(x,y)=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2$; 2) $f(x,y)=12+15(x-2)+6(x-2)^2+3(x-2)(y-1)-6(y-1)^2+(x-3)^3-2(y-1)^3$; 3) $f(x,y,z)=8-8(y+1)+4(z-2)+(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2-2(x-1)(y+1)-2(x-1)(z-2)-2(y+1)(z-2)$. **96.** $x^y=1+(x-1)+(x-1)\times(y-2)+R_2(1+\Theta(x-1),1+\Theta(y-2))$, $\quad 0<\Theta<1$, $\quad R_2=\dfrac{1}{6}x^y\left[\left(\dfrac{y}{x}dx+\ln x dy\right)^3+3\left(\dfrac{y}{x}dx+\ln x dy\right)^3\times\left(-\dfrac{4}{x^2}dx^2+\dfrac{2}{x}dxdy\right)+\left(\dfrac{2y}{x^3}dx^3-\dfrac{3}{x^2}dx^2dy\right)\right]$, $dx=x-1$, $dy=y-2$. **97.** $f(x,y)=1-\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+R_2(x,y)$, $\quad R_2(x,y)=\dfrac{-1}{2\sqrt{\left(1-(\Theta_1x)^2-(\Theta_2y)^2\right)^3}}\left[\dfrac{\left(\Theta_1x^2+\Theta_2y^2\right)^3}{1-(\Theta_1x)^2-(\Theta_2y)^2}+\Theta_1x^4+(\Theta_1+\Theta_2)x^2y^2+\Theta_2y^4\right]$, $0<\Theta_1<1$, $0<\Theta_2<1$. **98.** 1) $(-\infty, 1)$ – спадає, $(1,+\infty)$ – зростає; 2) $\left(-\infty, \dfrac{4-\sqrt{13}}{3}\right)$ – зростає, $\left(\dfrac{4-\sqrt{13}}{3}, \dfrac{4+\sqrt{13}}{3}\right)$ – спадає, $\left(\dfrac{4+\sqrt{13}}{3}, +\infty\right)$ – зростає; 3) $(-\infty, 1)$ – зростає, $(1,+\infty)$ – спадає; 4) $(-\infty, 1)$ – зростає, $(1,+\infty)$ – спадає; 5) $\left(k\pi, \dfrac{(1+2k)\pi}{2}\right)$ – зростає, $\left(\dfrac{(1+2k)\pi}{2}, (1+k)\pi\right)$ – спадає; 6) $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ – спадає, $\left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$ – зростає; 7) $\left(0, \dfrac{\pi}{3}\right)$ – спадає, $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right)$ – зростає, $\left(\dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$ – спадає; 8) $\left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$ – зростає, $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ – спадає, $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}\right)$ – зростає, $\left(\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ – спадає, $\left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ – зростає; 9) монотонно зростає; 10) монотонно зростає;

11) на $(-\infty, -3)$, $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$ – зростає, на $(-3, -1)$ – спадає; 12) на $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ – спадає, на $(1, +\infty)$ – зростає; 13) на $(1, +\infty)$ – спадає, на $(-\infty, 1)$ – зростає. **99.** 1) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$; 2) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$; 3) $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{1}{5}$, $x_3 = 1$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; 5) $x = 0$; 6) (0, 0); 7) (0, 0), (1, 1); 8) x – будь-яке, $y = 0$; 9) $x = 0$, y – будь-яке. **100.** 1) у точці $\left(-1, -\frac{1}{11}\right)$ – мінімум, у точці (1, 0,2) – максимум; 2) у точці (–0,2, ≈8,4) – максимум, у точці (1, 0) – мінімум; 3) екстремуму немає; 4) у точці (0, 1) – максимум; 5) у точці (0, 0) – максимум, у точці $\left(0{,}4, -0{,}6\sqrt[3]{0{,}16}\right)$ – мінімум; 6) у точці $\left(-1, -\frac{23}{4}\right)$ – мінімум, у точці $\left(1, \frac{9}{4}\right)$ – максимум, у точці (2, 1) – мінімум; 7) у точці (0, 0) – мінімум; 8) екстремуму в стаціонарній точці $x = 1$ немає, оскільки не дорівнює нулю непарна похідна $(y''' = 6)$; 9) у точках (0, 0) і (1, –1) – максимум; 10) у точці (–1, 17) – максимум, у точці (3, –47) – мінімум; 11) у точці (0, 4) – максимум, у точці $\left(-2, \frac{8}{3}\right)$ – мінімум; 12) у точці (0, 2) – максимум, у точці $\left(2, \sqrt[3]{4}\right)$ – мінімум. **101.** 1) всюди опукла вгору; 2) на інтервалі $(-\infty, 0)$ – опукла вгору, на $(0, +\infty)$ – опукла вниз; 3) на інтервалі $(-\infty, -1)$ – опукла вгору, на $(-1, 1)$ – опукла вниз, на $(1, +\infty)$ – опукла вгору. Точка перегину – $(1, \ln 2)$; 4) на $(-\infty, -12)$ – опукла вниз, на (–12, 0) – опукла вгору, на (0, 12) – опукла вниз, на $(12, +\infty)$ – опукла вгору; 5) всюди опукла вниз; 6) на інтервалі $(-\infty, 2)$ – опукла вниз, на (2, 4) – опукла вгору, на $(4, +\infty)$ – опукла вниз. Точки перегину – (2, 62) та (4, 206); 7) на інтервалі $(-\infty, -3)$ – опукла вгору, на (–3, 2) – опукла вниз, на $(2, +\infty)$ – опукла вгору. Точки перегину – (–3, 294) та (2, 114); 8) на $(-\infty, 1)$ – опукла вгору, на $(1, +\infty)$ – опукла вниз. Точка перегину – (1, –1); 9) точок перегину немає. Крива опукла вниз; 10) на $\left(-\frac{\pi}{2}, \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ – опукла вниз, на $\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ – опукла вгору. Точка перегину $\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \exp\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right)$. **102.** 1) $x = \pm 2$ – вертикальні асимптоти; 2) $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – вертикальні асимптоти; 3) $x = -1$ – вертикальна асимптота; 4) $y = 0$ – горизонтальна асимптота при $x \to -\infty$; 5) $x = \pm 1$ – вертикальні асимптоти, $y = 0$ – горизонтальна асимптота; 6) $y = \frac{x}{2}$ при $x \to +\infty$; $y = -\frac{x}{2}$ при $x \to -\infty$. **103.** 1) визначена на всій числовій осі; графік симетричний відносно осі координат; $y_{\min} = 0$, при $x = 0$; точка перегину – (1, 1); $y = 2$ – горизонтальна асимптота; 2) область визначення $(1, +\infty)$; $y_{\min} = 4$ при $x = 2$; точка перегину $\left(4, \frac{8}{\sqrt{3}}\right)$; асимптот немає; 3) визначена всюди, крім $x = 0$; $y_{\min} = 3$ при $x = \frac{1}{2}$; точка перегину – $\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}, 0\right)$; асимптота $x = 0$; 4) визначена всюди, крім $x = 2$; $y_{\min} = 5{,}0625$ при $x = 8$; точка перегину (–1, 0); асимптота

$y = \frac{x+7}{4}$; 5) визначена всюди; $y_{\max} = \frac{1}{e}$ при $x = 1$; точка перегину $\left(2, \frac{2}{e^3}\right)$; асимптота $y = 0$; 6) визначена всюди, крім $x = 0$; екстремуму немає; точок перегину немає; асимптоти $x = 0$, $y = 0$, $y = -1$; 7) область визначення $[0, +\infty)$; графік перетинає вісь абсцис у точках $x = 0$, $x = 3$; $y_{\min} = -2$ при $x = 1$; опукла вниз; 8) симетрична відносно початку координат; точок екстремуму немає; точка перегину (0, 0); асимптоти $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$; 9) симетрична відносно осі Oy; $y_{\min} = \sqrt[3]{4}$ при $x = \pm 1$; $y_{\max} = 2$ при $x = 0$. **104.** Радіус циліндра $\frac{2}{3}r$, висота – $\frac{h}{3}$. **105.** Розділивши на v, одержимо $y = \frac{0{,}3}{v} + 0{,}001v^2$ – функцію, яка є питомою витратою вугілля за 1 год. Необхідно знайти таке v, при якому y має мінімум: $v_{\min} = \sqrt[3]{150} \approx 5{,}3$ км/год. **106.** Якщо пряма $L'PL \perp MN$, то $\frac{\sin \angle APL}{\sin \angle BPL} = \frac{v_2}{v_1}$. **107.** Котел повинен мати форму кулі з внутрішнім радіусом $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$. **108.** За 3 км від пункту. **109.** $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 1$. **110.** 1) Перший; 2) другий; 3) третій; 4) п'ятий. **111.** 1) $(X+4)^2 - \left(Y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{125}{4}$; 2) $(X+2)^2 + (Y-3)^2 = 8$; 3) $\left(X - \frac{\pi - 10}{4}\right)^2 + \left(Y - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{125}{16}$. **112.** $\xi = -1$, $\eta = 1$, $\rho = \sqrt{2}$. **113.** 1) $(2\xi)^{\frac{2}{3}} - (3\eta)^{\frac{2}{3}} = 2 \cdot 2^{\frac{2}{3}}$; 2) $\xi^2 = \frac{16}{243}\left(\eta + \frac{3}{2}\right)^3$; 3) $\xi^2 + \eta^2 = a^2$; 4) $\xi = x - \frac{\left[1 + n^2 x^{2(n-1)}\right]x}{n-1}$, $\eta = x^n + \frac{1 + n^2 x^{2(n-1)}}{n(n-1)x^{n-2}}$; 5) $\xi = -\frac{\left(a^2 + b^2\right)x^3}{a^4}$, $\eta = -\frac{\left(a^2 + b^2\right)y^2}{b^4}$, $(a\xi)^{\frac{2}{3}} - (b\eta)^{\frac{2}{3}} = \left(a^2 + b^2\right)^{\frac{2}{3}}$; 6) $\xi = x + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$, $\eta = y + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$, $(\xi + \eta)^{\frac{2}{3}} + (\xi - \eta)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$; 7) $\xi = \pm\frac{4}{3}\sqrt{\frac{y}{a}}(3y + a)$, $\eta = -\frac{9y^2 + 2ay}{2a}$; 8) $\xi = -\frac{4}{3}t^2$, $\eta = 3t^2 - \frac{3}{2}$, $\xi^2 = \frac{16}{243}\left(\eta + \frac{3}{2}\right)^2$; 9) $\left(\frac{3\eta}{8}\right)^4 + 6a^2\left(\frac{3\eta}{8}\right)^2 + 3a^2\xi = 0$; 10) $\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}$. **114.** 1) ні; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) ні; 6) так. **115.** 1) $a > 4$; 2) $a > 3$; 3) $a > 16$. **116.** 1) $z_{\min} = -9$ при $x = 0$, $y = 3$; 2) $z_{\min} = -\frac{4}{3}$ при $x = 0$, $y = -\frac{2}{3}$. У стаціонарній точці $\left(2, -\frac{2}{3}\right)$ екстремуму немає; 3) $z_{\min} = 30$ при $x = 5$, $y = 2$; 4) $z_{\min} = -28$ при $x = 2$, $y = 1$; $z_{\max} = 28$ при $x = -2$, $y = -1$. У стаціонарних точках (1, 2), (–1, –2) екстремумів немає; 5) максимум при $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{3}$; 6) максимум при $x = \sigma\sqrt{2}$, $y = -\sigma\sqrt{2}$, $\sigma = \pm 1$; при $x = y = 0$ екстремуму немає; 7) мінімум при $3x = 4$, $3y = 1$; 8) при $x = y = a$ мінімум, якщо $a > 0$, максимум, якщо $a < 0$; 9) максимум при $3x = 3y = \pi$; 10) максимум при $x = y = z = a$; при $x = y = z = 0$ екстремуму немає;

11) мінімум при $3x=-2$, $3y=-1$, $z=-1$; 12) мінімум при $x=y=z$. **117.** 1) $z_{\min}=2$ при $x=y=1$; 2) $z_{\min}=0$ при $x=1$, $y=0$; $z_{\max}=\frac{1}{27}$ при $x=y=\frac{1}{3}$; 3) $u_{\min}=-18$ при $x=-4$, $y=-2$, $z=4$; $u_{\max}=18$ при $x=4$, $y=2$, $z=-4$; 4) максимум при $x\sqrt{2}=y\sqrt{2}=\pm1$, мінімум при $x\sqrt{2}=-y\sqrt{2}=\pm1$; 5) максимум при $x=y=z=1$, при $x=-y=-z=1$ і т. п.; мінімум при $x=y=z=-1$, $x=-y=-z=-1$ і т. п.; максимум $u=1$, мінімум $u=-1$; 6) максимум $u=\left(\frac{a}{9}\right)^7$ при $x=y=z=\frac{a}{9}$; 7) максимум – $u=\frac{1}{7}\left(12+\sqrt{18}\right)$, мінімум – $u=\frac{1}{7}\left(12-\sqrt{18}\right)$; 8) максимум при $x=y=-a\sqrt{2}$, мінімум при $x=y=a\sqrt{2}$; 9) $z_{\min}=-\frac{19}{4}$ при $x=y=-\frac{3}{2}$; 10) $u_{\min}=4$ при $x=y=0$, $z=\pm2$; $u_{\max}=16$ при $x=\pm4$, $y=z=0$; $x=z=0$, $y=\pm3$, екстремуму немає. **118.** 1) $z_{нб}=4$ у точках (–2, 0), (2, 0); $z_{нм}=-4$ у точках (0, –2), (0, 2); 2) $z_{нб}=4$ у точці (2, 1); $z_{нм}=-64$ у точці (4, 2); 3) $z_{нб}=17$ у точці (1, 2); $z_{нм}=-3$ у точці (1, 0), стаціонарна точка (–4, 6) лежить за даною областю; 4) $z_{нб}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ у точці $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, яка є точкою максимуму; 5) $z_{нб}=-2$, $z_{нм}=-5$; 6) $z_{нб}=41$ у точці (0, –5); $z_{нм}=-3$ у точці (-2, -1); 7) $z_{нб}=-11$ у точці (3, -2); $z_{нм}=9$ у точці (1, 2); 8) найбільших значень функція досягає у вершинах квадрата, $z_{нб}=1$: найменших набуває у стаціонарних точках $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ і $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right)$, $z_{нм}=-\frac{1}{8}$. **119.** Кут нахилу твірних конуса до його основи $\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$. **120.** Площини поперечних перерізів $q_j=\frac{cl_j i_j}{E}\left(1+\frac{l_0 i_0}{\sqrt{i_0\left(l_1^2 i_1+l_2^2 i_2+l_3^2 i_3\right)}}\right)$. **121.** Точку O приймемо за початок координат $P(10, 10)$. **122.** 2) $y=5{,}06x+19{,}87$; 3) $y=2{,}54x^2-x+0{,}575$; 4) $y=1{,}009x^2-4{,}043x+$ $+5{,}045$; 5) $y=2{,}08x-3{,}04$. **123.** 2) –2,6; 0,3; 2,2; 3) 1,3; 4) 2,8; 5) –0,6; 6) 1,6. **124.** 1) 1,64; 2) 2,09; 3) 2,09; 4) ±0,82. **125.** 1) 1,325; 2) 1,936; 3) 2,095; 4) 1,096; 5) 0,472; 9,999; 6) 4,730; 4,853. **126.** 1) 0,42; 2) 3,62; 3) 0,450.

Глава 5

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ

§ 1. ПЕРВІСНА ФУНКЦІЯ І НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x)$.

2. $d\left(\int f'(x)\,dx\right)=f(x)\,dx$.

3. $\int f'(x)\,dx=f(x)+C$.

4. $\int d\,f(x)=f(x)+C$.

5. $\int k\,f(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$, $k=\text{const}$.

6. $\int\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]dx=\int f_1(x)\,dx\pm\int f_2(x)\,dx$.

7. $\int\left[C_1 f_1(x)+C_2 f_2(x)+\ldots+C_n f_n(x)\right]dx=$

$=C_1\int f_1(x)\,dx+C_2\int f_2(x)\,dx+\ldots+C_n\int f_n(x)\,dx$.

Таблиця невизначених інтегралів

1. $\int 0\cdot dx=C$.

2. $\int x^{\mu}dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C,\ \mu\neq-1$.

3. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$.

4. $\int e^x dx=e^x+C$.

5. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C,\ a>0,\ a\neq1$.

6. $\int\cos x\,dx=\sin x+C$.

7. $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$.

8. $\int\sec^2 x\,dx=\operatorname{tg}x+C$.

9. $\int\operatorname{cosec}^2 x\,dx=-\operatorname{ctg}x+C$.

10. $\int\operatorname{tg}x\,dx=-\ln|\cos x|+C$.

11. $\int\operatorname{ctg}x\,dx=\ln|\sin x|+C$.

12. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C=-\arccos x+C$.

13. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C=-\arccos\frac{x}{a}+C$.

14. $\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x+C=-\operatorname{arcctg}x+C$.

15. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C=-\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}+C.$

16. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$, або $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=-\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C.$

17. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C.$

18. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm s}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm s}\right|+C.$

19. $\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C=\ln\left|\sec x+\operatorname{tg}x\right|+C.$

20. $\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|\operatorname{cosec}x-\operatorname{ctg}x\right|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$

21. $\int\operatorname{ch}x\,dx=\operatorname{sh}x+C.$ 22. $\int\operatorname{sh}x\,dx=\operatorname{ch}x+C.$

23. $\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2x}=\operatorname{th}x+C.$ 24. $\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2x}=-\operatorname{cth}x+C.$

§ 2. МЕТОД БЕЗПОСЕРЕДНЬОГО ІНТЕГРУВАННЯ

Приклади. Обчислити інтеграли.

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$.

Розв'язання. Використовуючи властивість 5 та табличний інтеграл 13, маємо

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{9}-x^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{5}+C.$$

Відповідь: $I=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{5}+C.$

2. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}$.

Розв'язання. Помноживши чисельник і знаменник підінтегральної функції на $\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}\right)$, дістанемо

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}=\int\frac{\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}\right)dx}{\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}\right)}=$$

$$=\int\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}{x+4-x+1}dx=\frac{1}{5}\int\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{5}\left[\frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]+C=\frac{2}{15}(x+4)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{15}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Відповідь: $I=\frac{2}{15}(x+4)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{15}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C.$

3. $\int\frac{\left(2x^2-3\right)dx}{x^2\left(x^2-3\right)}$.

Розв'язання. Запишемо чисельник у вигляді $2x^2-3=x^2+\left(x^2-3\right)$.

Тоді

$$I=\int\frac{2x^2-3}{x^2\left(x^2-3\right)}dx=\int\frac{x^2+\left(x^2-3\right)}{x^2\left(x^2-3\right)}dx=\int\frac{dx}{x^2-3}+\int\frac{dx}{x^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|-\frac{1}{x}+C.$$

Відповідь: $I=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|-\frac{1}{x}+C$.

4. $\int\frac{1+2\sin^2x}{1+\cos 2x}dx$.

Розв'язання. Використовуючи тригонометричні формули $1+\cos 2x=2\cos^2x$ та $\sin^2x=1-\cos^2x$, знаходимо

$$I=\int\frac{1+2\sin^2x}{1+\cos 2x}dx=\int\frac{1+2\sin^2x}{2\cos^2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos^2x}+$$

$$+\int\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}dx=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\cos^2x}-\int dx=\frac{3}{2}\operatorname{tg}x-x+C.$$

Відповідь: $I=\frac{3}{2}\operatorname{tg}x-x+C$.

5. $\int \frac{x^4dx}{x^2+2}$.

Розв'язання. Віднімаючи та додаючи до чисельника підінтегральної функції число 4, дістанемо

$$I=\int \frac{x^4dx}{x^2+2}=\int \frac{x^4-4+4}{x^2+2}dx=\int (x^2-2)dx+4\int \frac{dx}{x^2+2}=\frac{x^3}{3}-2x+\frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

Відповідь: $I=\frac{x^3}{3}-2x+\frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

Обчислити інтеграли.

1. $\int \frac{x^3-5x^2+1}{\sqrt{x}}dx$.

2. $\int \left(\sqrt{t^3}+\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\right)dt$.

3. $\int \sqrt{x^3}\left(5\sqrt[3]{x^2}-1\right)dx$.

4. $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{16-\varphi^2}}$.

5. $\int \left(y\sqrt{y}-\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{(y+2)^2}\right)dy$.

6. $\int \frac{x-16}{\sqrt{x}+4}dx$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$.

9. $\int \frac{dx}{16x^2-9}$.

10. $\int \frac{2^{x-1}+3^{x+1}}{6^x}dx$.

11. $\int 5^{x-1}e^x dx$.

12. $\int (3^x-2)(3^{-x}+2)dx$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}}$.

14. $\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx$.

15. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}-6}{x^2+4}dx$.

16. $\int \frac{x^4dx}{x^2+1}$.

17. $\int \frac{x^3-1}{x+1}dx$.

18. $\int \sin^2\frac{x}{2}dx$.

19. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$.

20. $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx$.

21. $\int \frac{5-\cos x}{\cos x}dx$.

22. $\int \frac{e^{2x}-4}{e^x+2}dx$.

23. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\cos 2x}$.

24. $\int \frac{1-5x^2}{x^2(1-x^2)}dx$.

25. $\int \frac{8-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}+4}dx$.

26. $\int e^{-x}(e^x+5)dx$.

27. $\int (\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)dx$.

28. $\int (3\operatorname{ctg} x-1)(3\operatorname{tg} x+1)dx$.

29. $\int \frac{1+2\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$.

30. $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$.

§ 3. МЕТОД ЗАМІНИ ЗМІННОЇ ПІД ЗНАКОМ ІНТЕГРАЛА

Приклади. Обчислити інтеграли.

1. $\int \frac{5x^4-6}{x^5-6x}dx$.

Розв'язання. Оскільки $(5x^4-6)\,dx=d(x^5-6x)$, то

$$I=\int \frac{5x^4-6}{x^5-6x}dx=\int \frac{d(x^5-6x)}{x^5-6x}=\ln|x^5-6x|+C.$$

Відповідь: $I=\ln|x^5-6x|+C$.

2. $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}dx$.

Розв'язання. Оскільки $d(\operatorname{arctg} x)=\frac{dx}{1+x^2}$, то

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}dx=\int \operatorname{arctg}^3 x\,d(\operatorname{arctg} x).$$

Ввівши $u = \operatorname{arctg} x$, знайдемо

$$I = \int \frac{\operatorname{arctg}^3 x dx}{1+x^2} = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{\operatorname{arctg}^4 x}{4} + C.$$

Відповідь: $I = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}^4 x + C$.

3. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

Розв'язання. Оскільки $d\left(1+x^3\right) = 3x^2 dx$, то $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(1+x^3\right)}{\sqrt{1+x^3}}$. Введемо $u = 1+x^3$ і матимемо

$$I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{u} + C = \frac{2}{3}\sqrt{1+x^3} + C.$$

Відповідь: $I = \frac{2}{3}\sqrt{1+x^3} + C$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\cos^2\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання. Використовуючи заміну $x = t^3$, знаходимо $dx = 3t^2 dt$,

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\cos^2\sqrt[3]{x}} = 3\int \frac{t^2 dt}{t^2\cos^2 t} = 3\int \frac{dt}{\cos^2 t} = 3\operatorname{tg} t + C = 3\operatorname{tg}\sqrt[3]{x} + C.$$

Відповідь: $I = 3\operatorname{tg}\sqrt[3]{x} + C$.

5. $\int \frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{x+\sqrt{x}} dx.$

Розв'язання. Приймаючи $x = t^2$, маємо $dx = 2t dt$, тоді

$$I = \int \frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{x+\sqrt{x}} dx = 2\int \frac{\ln(1+t)}{t^2+t} t\, dt = 2\int \frac{\ln(1+t)}{1+t} dt =$$

$$= \frac{2\ln^2(1+t)}{2} + C = \ln^2\left(1+\sqrt{x}\right) + C.$$

Відповідь: $I = \ln^2\left(1+\sqrt{x}\right) + C$.

Узагальнення деяких табличних інтегралів (за умови, що $a \neq 0$)

1. $\int (x \pm a)^\alpha dx = \frac{(x \pm a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$;

$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$.

2. $\int \frac{dx}{x \pm a} = \ln|x \pm a| + C$; $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$.

3. $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$.

4. $\int a^{kx+b} dx = \frac{1}{k}\ \frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C$.

5. $\int \sin(ax \pm b) dx = -\frac{1}{a}\cos(ax \pm b) + C$.

6. $\int \cos(ax \pm b) dx = \frac{1}{a}\sin(ax \pm b) + C$.

7. $\int \operatorname{tg}(ax \pm b) dx = -\frac{1}{a}\ln\left|\cos(ax \pm b)\right| + C$.

8. $\int \operatorname{ctg}(ax \pm b) dx = \frac{1}{a}\ln\left|\sin(ax \pm b)\right| + C$.

9. $\int \sec^2(ax \pm b) dx = \frac{1}{a}\operatorname{tg}(ax \pm b) + C$.

10. $\int \operatorname{cosec}^2(ax \pm b) dx = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg}(ax \pm b) + C$.

Обчислити інтеграли.

31. $\int \left(\sin\frac{\pi}{20}x - \cos\frac{x}{20}\right) dx$. **32.** $\int (11x-7)^7 dx$.

33. $\int \frac{d(\mathrm{arctg}\, x)}{\mathrm{arctg}^2 x}$.

34. $\int \frac{dx}{\sin^2 x (1+\mathrm{ctg}\, x)^{\frac{3}{2}}}$.

35. $\int \sqrt{3x+5}dx$.

36. $\int \frac{dx}{(2x-3)^2}$.

37. $\int 4^{3x+7} dx$.

38. $\int \pi^{2x-1} dx$.

39. $\int \frac{3\,\mathrm{ctg}^2 x - 1}{\cos^2 x} dx$.

40. $\int \frac{dx}{x(9+\ln^2 x)}$.

41. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-5}}$.

42. $\int 2^{x^5+1} x^4 dx$.

43. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$.

44. $\int e^x \cos e^x dx$.

45. $\int \sec^2(1+\ln^2 x)\, d(1+\ln^2 x)$.

46. $\int \frac{\pi^{\frac{1}{x^2}} dx}{x^3}$.

47. $\int \frac{2x^3+x}{x^4+x^2} dx$.

48. $\int \frac{\sqrt{\ln z}}{z} dz$.

49. $\int \frac{e^{3x} dx}{\sqrt{1+e^{6x}}}$.

50. $\int \frac{5\cos x - \mathrm{ctg}\, x}{\sin^2 x} dx$.

51. $\int x^{-2} e^{-\frac{1}{x}} dx$.

52. $\int \frac{udu}{\cos^2 u^2}$.

53. $\int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

54. $\int \frac{dx}{25\cos^2 x + 9\sin^2 x}$.

55. $\int 3^{\sin^2 x} \sin 2x\, dx$.

56. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{\arccos^2 x - 4}}$.

57. $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x \sqrt{\cos x}}$.

58. $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{\mathrm{ctg}^5 x}\sin^2 x}$.

59. $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{\mathrm{arctg}\, x + 1}}$.

60. $\int e^{5\sin x - 2} \cos x dx$.

61. $\int \frac{3^x dx}{7+3^{2x}}$.

62. $\int \frac{dx}{e^{2x}+5}$.

63. $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

64. $\int \sqrt[3]{2-3\sin 2x}\cos 2x\, dx$.

65. $\int \frac{e^{5x} dx}{(e^{5x}+11)^2}$.

66. $\int \frac{x^2 dx}{\sin^2 x^3}$.

67. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-\ln^2 2x}}$.

68. $\int \frac{t^2 dt}{t^6-1}$.

69. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{1+\cos^2 2x}$.

70. $\int \frac{x\, dx}{16+x^4}$.

71. $\int \frac{x\, dx}{1-x^4}$.

72. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.

73. $\int \cos^2\left(\sin\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}\, dx$.

74. $\int \mathrm{th}\, 2x\, dx$.

75. $\int x\, \mathrm{tg}(x^2-5)\, dx$.

76. $\int \frac{x^2 e^{\sqrt{x^3+1}}}{\sqrt{x^3+1}} dx$.

77. $\int \left[\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)\right]^{-2} dx$.

78. $\int \frac{x\, dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$.

79. $\int \frac{\sin 2xdx}{\sin^2 x + 5}$.

80. $\int (1-x)^{99} dx$.

81. $\int x^2(1+x^3)^4 dx$.

§ 4. МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Приклад. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

Розв'язання. Нехай

$$u = \ln x, \quad dv = \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$$

(визначаючи v, беремо одну з найпростіших первісних – ту, для якої $C = 0$).

З формули інтегрування частинами [ч. І, с. 451] дістанемо

$$I = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\ln|x| - \frac{3}{2}\int x^{\frac{2}{3}}\frac{dx}{x} = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\ln|x| - \frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\left(\ln|x| - \frac{3}{2}\right) + C.$$

Відповідь: $I = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\left(\ln|x| - \frac{3}{2}\right) + C.$

Обчислити інтеграли.

82. $\int x\cos 2x\,dx$.

83. $\int \arcsin 2x\,dx$.

84. $\int \ln x\,dx$.

85. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x^2 dx$.

86. $\int \sqrt{x}\ln\sqrt{x}\,dx$.

87. $\int x\ln\left(x^2+4\right)dx$.

88. $\int x^3\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

89. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$.

90. $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

91. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,dx$.

92. $\int \ln\left(x^2+1\right)dx$.

93. $\int x^2 5^x dx$.

94. $\int x^{99}\left(x\cos x+100\sin x\right)dx$.

95. $\int x^{\frac{3}{2}}\cos\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

96. $\int \frac{\ln^3 x}{\sqrt{x}}\,dx$.

97. $\int x^{\frac{1}{3}}\ln^2 x\,dx$.

98. $\int \sec^2 x\ln(\sec x)\,dx$.

99. $\int x\,\mathrm{ch}\,x\,dx$.

§ 5. ТИПИ ІНТЕГРАЛІВ, ЯКІ ОБЧИСЛЮЮТЬСЯ ІНТЕГРУВАННЯМ ЧАСТИНАМИ

Приклади. Обчислити інтеграли.

1. $\int(x+3)\sin x dx$.

Розв'язання. Тут маємо

$$u=x+3,\ dv=\sin x\,dx;\ du=dx,\ v=-\cos x.$$

Отже,

$$I=-(x+3)\cos x+\int\cos x\,dx=-(x+3)\cos x+\sin x+C.$$

Відповідь: $I=-(x+3)\cos x+\sin x+C$.

2. $\int x^2\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

Розв'язання. Визначимо $u=\mathrm{arctg}\,x$, $dv=x^2dx$, звідки $du=\frac{dx}{1+x^2}$, $v=\frac{x^3}{3}$.

Тоді за формулою інтегрування частинами

$$I=\frac{x^3}{3}\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}\,dx.$$

Останній інтеграл знайдемо так:

$$\int\frac{x^3dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{x^2d\left(x^2\right)}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{tdt}{1+t}=\frac{1}{2}\int\frac{t+1-1}{1+t}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t}=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\ln|1+t|+C=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C.$$

Відповідь: $I=\frac{x^3}{3}\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln\left(1+x^2\right)+C$.

3. $\int\arcsin x\,dx$.

Розв'язання. Визначимо $u=\arcsin x$, $dv=dx$, звідки $du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v=x$.

Тоді

$$I=x\arcsin x-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

Відповідь: $I=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

4. $\int\left(x^2+3x\right)e^x dx$.

Розв'язання. Визначимо $u=x^2+3x$, $dv=e^x dx$, звідки $du=(2x+3)dx$, $v=e^x$. Використавши формулу інтегрування частинами, знайдемо

$$I=\left(x^2+3x\right)e^x-\int(2x+3)e^x dx.$$

Для обчислення $I_1=\int(2x+3)e^x dx$ знову використаємо формулу інтегрування частинами: $u=2x+3$, $dv=e^x dx$, $v=e^x$, $du=2dx$, тоді

$$I_1=(2x+3)e^x-2\int e^x dx=(2x+3)e^x-2e^x+C.$$

Відповідь: $I=\left(x^2+3x\right)e^x-(2x+3)e^x+2e^x+C=\left(x^2+x-1\right)e^x+C$.

Інтеграли типу $\int e^{ax}\sin bx dx$, $\int e^{ax}\cos bx dx$ мають бути зведені до самих себе дворазовим використанням формули інтегрування частинами.

5. $I = \int e^{2x}\sin 3x\,dx$.

Розв'язання. Визначимо $u = \sin 3x$, $dv = e^{2x}dx$, звідки $du = 3\cos 3x\,dx$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$, тоді за формулою інтегрування частинами

$$I = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\,dx.$$

Для знаходження $I_1 = \int e^{2x}\cos 3x\,dx$ знову використаємо формулу інтегрування частинами. Введемо позначення $u = \cos 3x$, $dv = e^{2x}dx$, звідки $du = -3\sin 3x\,dx$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$. Тоді

$$I_1 = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,dx.$$

Отже,

$$I = \frac{1}{2}e^{2x}\left(\sin 3x - \frac{3}{2}\cos 3x\right) - \left(\frac{9}{4}\right)I + C;$$

$$\frac{13}{4}I = \frac{1}{4}e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + C;\ I = \frac{1}{13}e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + C.$$

Відповідь: $I = \frac{1}{13}e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + C$.

Обчислити інтеграли.

100. $\int(3x^2 - 8x)e^{2x}dx$.

101. $\int(x^2 + 3x + 5)e^{3x+1}dx$.

102. $\int(x+2)\cos(3x+7)dx$.

103. $\int(1+x)^2\sin x dx$.

104. $\int(3x^2 + 6x + 5)\operatorname{arctg} x\,dx$.

105. $\int(x-2)\arcsin x\,dx$.

106. $\int e^{3x}\cos 2x\,dx$.

107. $\int(1 - 3x - x^2)\ln x\,dx$.

108. $\int(x^3 - x - 1)\ln^2 x\,dx$.

109. $\int(\arcsin x)^2 dx$.

110. $\int\frac{\ln(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2}dx$.

111. $\int\sin x\ln|\cos x|\,dx$.

112. $\int\sin(\ln x)dx$. **113.** $\int\cos(\ln x)dx$. **114.** $\int\frac{\cos 2x}{e^{3x}}dx$.

§ 6. ІНТЕГРУВАННЯ ВИРАЗІВ, ЩО МІСТЯТЬ У ЗНАМЕННИКУ КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН

Приклади. Обчислити інтеграли.

1. $\int\frac{dx}{x^2 - x - 2}$.

Розв'язання. Визначимо повний квадрат:

$$x^2 - x - 2 = x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - 2 - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4};$$

$$I = \int\frac{dx}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{x - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}}\right| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C.$$

Відповідь: $I = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C$.

2. $\int\frac{dx}{2x^2 + 5x + 16}$.

Розв'язання. Визначимо повний квадрат:

$$2x^2 + 5x + 16 = 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x + 8\right) = 2\left(x^2 + 2\cdot\frac{5}{4}x + \frac{25}{16} + 8 - \frac{25}{16}\right) = 2\left[\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{103}{16}\right],$$

тоді

$$I = \int\frac{dx}{2x^2 + 5x + 16} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{103}{16}} = \frac{1\cdot 4}{2\sqrt{103}}\operatorname{arctg}\frac{x + \frac{5}{4}}{\left(\frac{1}{4}\right)\sqrt{103}} + C.$$

Відповідь: $I = \frac{2}{\sqrt{103}}\operatorname{arctg}\frac{4x+5}{\sqrt{103}} + C$.

3. $\int\frac{4x-5}{x^2 - 3x + 5}dx$.

Розв'язання. Оскільки $(x^2 - 3x + 5)' = 2x - 3$ та $4x - 5 = 2(2x - 3) + 1$, то

$$I = \int\frac{4x-5}{x^2 - 3x + 5}dx = 2\int\frac{2x-3}{x^2 - 3x + 5}dx + \int\frac{dx}{x^2 - 3x + 5} = 2\ln|x^2 - 3x + 5| + I_1,$$

де

$$I_1 = \int\frac{dx}{x^2 - 3x + 5}.$$

Визначимо повний квадрат знаменника підінтегральної функції:

$$x^2-3x+5=x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}+5-\frac{9}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4},$$

тоді

$$I_1=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}=\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}}+C=\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{11}}+C.$$

Отже,

$$I=2\ln\left|x^2-3x+5\right|+\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{11}}+C.$$

Відповідь: $I=2\ln\left|x^2-3x+5\right|+\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{11}}+C.$

4. $\int\frac{dx}{\sqrt{-3x^2+18x+2}}$.

Розв'язання. Перетворимо вираз під коренем:

$$-3x^2+18x+2=-3\left(x^2-6x+9\right)+2+27=-3(x-3)^2+29;$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{-3x^2+18x+2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{29-3(x-3)^2}}.$$

Позначивши $t=\sqrt{3}(x-3)$, маємо $dt=d\left[\sqrt{3}(x-3)\right]$;

тоді $dt=\sqrt{3}dx$, $dx=\frac{1}{\sqrt{3}}dt$.

Отже,

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{29-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{t}{\sqrt{29}}+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}(x-3)}{\sqrt{29}}+C.$$

Відповідь: $I=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}(x-3)}{\sqrt{29}}+C.$

5. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+18x+2}}$.

Розв'язання. Перетворимо вираз під коренем:

$$3x^2+18x+2=3\left(x^2+6x+9\right)+2-27=3(x+3)^2-25.$$

Маємо

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+18x+2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3(x+3)^2-25}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d\left[\sqrt{3}(x+3)\right]}{\sqrt{3(x+3)^2-25}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}(x+3)+\sqrt{3x^2+18x+2}\right|+C.$$

Відповідь: $I=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}(x+3)+\sqrt{3x^2+18x+2}\right|+C.$

6. $\int\frac{8x+11}{\sqrt{x^2+16x+7}}dx$.

Розв'язання. В чисельнику відокремимо в підкореневий вираз знаменника, тобто

$$d\left(x^2+16x+7\right)=(2x+16)dx;\quad (8x+11)dx=\left[4(2x+16)-53\right]dx.$$

Маємо

$$I=\int\frac{(8x+11)dx}{\sqrt{x^2+16x+7}}=\int\frac{4(2x+16)-53}{\sqrt{x^2+16x+7}}dx=4\int\frac{d\left(x^2+16x+7\right)}{\sqrt{x^2+16x+7}}-$$

$$-53\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+16x+7}}=8\sqrt{x^2+16x+7}-53I_1;$$

$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+16x+7}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+8)^2-57}}=\ln\left|x+8+\sqrt{x^2+16x+7}\right|+C;$$

$$I=8\sqrt{x^2+16x+7}-53\ln\left|x+8+\sqrt{x^2+16x+7}\right|+C.$$

Відповідь: $I=8\sqrt{x^2+16x+7}-53\ln\left|x+8+\sqrt{x^2+16x+7}\right|+C.$

7. $\int \frac{dx}{\left(x^2+4x+5\right)^4}$.

Розв'язання. Замінимо змінну:

$$x^2+4x+5=\left(x+2\right)^2+1,\ t=x+2;$$

тоді за рекурентною формулою (4.1) [ч. 1, с. 456] знайдемо

$$I=\int \frac{dx}{\left(x^2+4x+5\right)^4}=\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^4}=\frac{t}{2\cdot 3\left(t^2+1\right)^3}+\frac{5}{2\cdot 3}\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^3}=$$

$$=\frac{t}{6\left(t^2+1\right)^3}+\frac{5}{6}\left[\frac{t}{2\cdot 2\left(t^2+1\right)^2}+\frac{3}{2\cdot 2}\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}\right]=$$

$$=\frac{t}{6\left(t^2+1\right)^3}+\frac{5t}{24\left(t^2+1\right)^2}+\frac{15}{24}\left(\frac{t}{2\left(t^2+1\right)}+\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1}\right)=$$

$$=\frac{t}{6\left(t^2+1\right)^3}+\frac{5t}{24\left(t^2+1\right)^2}+\frac{5t}{16\left(t^2+1\right)}+\frac{15}{48}\operatorname{arctg} t+C.$$

Переходячи до змінної x, маємо остаточний результат.

Відповідь: $I=\frac{x+2}{6\left(x^2+4x+5\right)^3}+\frac{5x+10}{24\left(x^2+4x+5\right)^2}+\frac{5x+10}{16\left(x^2+4x+5\right)}+\frac{5}{16}\operatorname{arctg}(x+2)+C.$

8. $\int \frac{3x+5}{\left(x^2+2x-2\right)^2}dx$.

Розв'язання. Відокремимо в чисельнику похідну від квадратного виразу, який міститься у знаменнику:

$$I=\int \frac{3x+5}{\left(x^2+2x-2\right)^2}dx=\int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)(2x+2)+2}{\left(x^2+2x-2\right)^2}dx.$$

Розіб'ємо знайдений інтеграл на два:

$$I=\frac{3}{2}\int \frac{d\left(x^2+2x-2\right)}{\left(x^2+2x-2\right)^2}+2\int \frac{d(x+1)}{\left[(x+1)^2-3\right]^2}.$$

Якщо вважати, що в першому інтегралі $u=x^2+2x-2$, а в другому $t=x+1$, то

$$I=\frac{3}{2}\int \frac{du}{u^2}+2\int \frac{dt}{\left(t^2-3\right)^2}=-\frac{3}{2\left(x^2+2x-2\right)}+2\int \frac{dt}{\left(t^2-3\right)^2}.$$

Застосовуючи до інтеграла $\int \frac{dt}{\left(t^2-3\right)^2}$ рекурентну формулу, знаходимо

$$\int \frac{dt}{\left(t^2-3\right)^2}=\left(-\frac{1}{3}\right)\left[\frac{t}{2\left(t^2-3\right)}+\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-3}\right]=$$

$$=-\frac{1}{3}\left[\frac{t}{2\left(t^2-3\right)}+\frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|\right]+C;$$

тоді

$$I=-\frac{3}{2\left(x^2+2x-2\right)}-\frac{1}{3}\left[\frac{x+1}{x^2+2x-2}+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+1-\sqrt{3}}{x+1+\sqrt{3}}\right|\right]+C=$$

$$=\frac{-2x+11}{6\left(x^2+2x-2\right)}-\frac{1}{12\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+1-\sqrt{3}}{x+1+\sqrt{3}}\right|+C.$$

Відповідь: $I=\frac{-2x+11}{6\left(x^2+2x-2\right)}-\frac{1}{12\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+1-\sqrt{3}}{x+1+\sqrt{3}}\right|+C.$

9. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x-x^2-5}}$.

Розв'язання. Визначаючи $x-1=\frac{1}{t}$, маємо

$$x=1+\frac{1}{t}=\frac{1+t}{t};\ dx=-\frac{dt}{t^2};$$

тоді

$$I=-\int \frac{dt}{t^2\frac{1}{t}\frac{1}{t}\sqrt{6t(1+t)-(1+t)^2-5t^2}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{4t-1}}=-\frac{1}{2}\sqrt{4t-1}+C=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-x}{x-1}}+C.$$

Відповідь: $I=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-x}{x-1}}+C.$

Обчислити інтеграли.

115. $\int\frac{dx}{15-9x^2-6x}$. **116.** $\int\frac{dx}{x^2+2x+17}$. **117.** $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+25}}$.

118. $\int\frac{(x-2)dx}{x^2-4x+13}$. **119.** $\int\frac{(4x-5)dx}{x^2-2x+5}$. **120.** $\int\frac{(3x-5)dx}{\sqrt{2x^2-12x+15}}$.

121. $\int\frac{e^x dx}{e^{2x}-2e^x+6}$. **122.** $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-6x+1}}$. **123.** $\int\frac{(2x-1)dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$.

124. $\int\frac{6x+1}{\sqrt{x-x^2}}dx$. **125.** $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-5x+4}}$. **126.** $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

127. $\int\frac{dx}{(x^2-3x+3)^2}$. **128.** $\int\frac{dx}{(x^2+2x)^2}$. **129.** $\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

130. $\int\frac{x\,dx}{(2x^2+3x+5)^2}$. **131.** $\int\frac{dx}{5x^2+7x+11}$. **132.** $\int\frac{dx}{3x^2-8x+9}$.

133. $\int\frac{3x+4}{x^2+7x+14}dx$. **134.** $\int\frac{2x-3}{x^2+x+5}dx$. **135.** $\int\frac{dx}{(1+x^2)^4}$.

136. $\int\frac{3x+5}{(x^2+2x+5)^2}dx$. **137.** $\int\frac{dx}{\sqrt{9-x-x^2}}$. **138.** $\int\frac{dx}{\sqrt{3+2x-5x^2}}$.

139. $\int\frac{(3x-7)dx}{\sqrt{5x^2+8x+1}}$. **140.** $\int\frac{(2x+5)dx}{\sqrt{7+8x-11x^2}}$.

§ 7. РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНА НА МНОЖНИКИ

Приклади. **1.** Визначити остачу від ділення многочлена

$$P_4(x)=2x^4-3x^3-8x^2+7x+9 \text{ на } x+2.$$

Р о з в ' я з а н н я. За формулою (5.4) [ч. 1, с. 458] маємо

$$R=P_4(-2)=2(-2)^4-3(-2)^3-8(-2)^2+7(-2)+9=19.$$

Відповідь: $R=P_4(-2)=19$.

2. Перевірити, чи скорочується дріб

$$f(x)=\frac{P_4(x)}{P_2(x)}=\frac{2x^4-x^3+x^2-2}{x^2-1}.$$

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо $R=P_4(1)=2\cdot1-1-2=0$,

$$R=P_4(-1)=2(-1)^4-(-1)^3+(-1)^2-2=2.$$

Отже, чисельник та знаменник дробу діляться на $x-1$ і дріб спрощується:

$$\frac{2x^4-x^3+x^2-2}{x^2-1}=\frac{2x^4-2x^3+x^3-x^2+2x^2-2}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{2x^3(x-1)+x^2(x-1)+2(x^2-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2x^3+x^2+2x+2}{x+1}.$$

Відповідь: $f(x)=\frac{2x^3+x^2+2x+2}{x+1}$.

Розкласти на множники многочлени.

141. x^3+x^2-2. **142.** $3x^4-4x^3+1$.

143. $x^4+4x^3+4x^2-1$. **144.** $x^5-2x^4+x^3+2x^2-2x$.

§ 8. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

8.1. Визначення цілої частини раціонального дробу

Приклад. Визначити цілу частину дробу

$$R(x)=\frac{Q_r(x)}{P_n(x)}=\frac{(x^3+2)^2}{(x^2-1)(x+2)}.$$

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки $r=6>n=3$, то дріб неправильний. Для визначення цілої частини дробу подамо чисельник і знаменник у такому вигляді:

$$(x^3+2)^2=x^6+4x^3+4;\quad (x^2-1)(x+2)=x^3+2x^2-x-2,$$

а потім поділимо чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{l|l}
-\dfrac{x^6+4x^3+4}{\underline{x^6+2x^5-x^4-2x^3}} & \dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-2x^2+5x-6} \\
\quad -\dfrac{-2x^5+x^4+6x^3+4}{\underline{-2x^5-4x^4+2x^3+4x^2}} & \\
\qquad -\dfrac{5x^4+4x^3-4x^2+4}{\underline{5x^4+10x^3-5x^2-10x}} & \\
\qquad\quad -\dfrac{-6x^3+x^2+10x+4}{\underline{-6x^3-12x^2+6x+12}} & \\
\qquad\qquad 13x^2+4x-8 &
\end{array}$$

Маємо x^3-2x^2+5x-6 – частка, а $13x^2+4x-8$ – остача. Отже,

$$\frac{\left(x^3+2\right)^2}{\left(x^2-1\right)(x+2)}=x^3-2x^2+5x-6+\frac{13x^2+4x-8}{\left(x^2-1\right)(x+2)}.$$

8.2. Розкладання правильного раціонального дробу на елементарні. Методи порівняння коефіцієнтів та довільних (підхожих) значень аргументу при відшуканні невизначених коефіцієнтів у розкладі раціонального дробу на елементарні

Приклади. Розкласти дроби на елементарні.

1. $\dfrac{x^3-3}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+2\right)}$.

Розв'язання. Розкладемо дріб на елементарні [див. ч. 1, с. 461]:

$$\frac{x^3-3}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+2\right)}=\frac{M_1x+N_1}{x^2+x+1}+\frac{M_2x+N_2}{x^2+2};$$

$$x^3-3=\left(M_1x+N_1\right)\left(x^2+2\right)+\left(M_2x+N_2\right)\left(x^2+x+1\right).$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{l|l}
x^3 & M_1+M_2=1, \\
x^2 & N_1+M_2+N_2=0, \\
x^1 & 2M_1+M_2+N_2=0, \\
x^0 & 2N_1+N_2=-3,
\end{array}$$

$M_1=-\dfrac{2}{3}$, $N_1=-\dfrac{4}{3}$, $M_2=\dfrac{5}{3}$, $N_2=-\dfrac{1}{3}$.

Відповідь: $\dfrac{x^3-3}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+2\right)}=\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)x-\frac{4}{3}}{x^2+x+1}+\dfrac{\left(\frac{5}{3}\right)x-\frac{1}{3}}{x^2+2}$.

2. $\dfrac{x}{(x+1)^2(x-1)}$.

Розв'язання. Розкладемо дріб на елементарні методом надання підхожих значень аргументу [див. ч. 1, с. 465]:

$$\frac{x}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{A_3}{x-1},$$

$$A_1(x+1)(x-1)+A_2(x-1)+A_3(x+1)^2=x.$$

При $x=1$ з останньої рівності дістанемо $A_3=\dfrac{1}{4}$. Якщо $x=-1$, то $A_2=\dfrac{1}{2}$.

При $x=0$ маємо $-A_1-A_2+A_3=0$, звідси $A_1=A_3-A_2=-\dfrac{1}{4}$.

Відповідь: $\dfrac{x}{(x+1)^2(x-1)}=\dfrac{-1}{4(x+1)}+\dfrac{1}{2(x+1)^2}+\dfrac{1}{4(x-1)}$.

Як видно з прикладу, відповідними значеннями є дійсні корені знаменника.

3. $\dfrac{2x^2+1}{x(x-1)\left(x^2+3\right)}$.

Розв'язання. Розкладемо дріб на елементарні, застосувавши методи порівняння коефіцієнтів та надання аргументу підхожих значень. Частину коефіцієнтів визначимо, надавши відповідні значення x, а решту коефіцієнтів – методом порівняння:

$$\frac{2x^2+1}{x(x-1)\left(x^2+3\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+3},$$

$$2x^2+1=A(x-1)\left(x^2+3\right)+Bx\left(x^2+3\right)+(Cx+D)(x-1)x.$$

Надаючи відповідні значення x, маємо коефіцієнти: $A=-\frac{1}{3}$ при $x=0$, $B=\frac{3}{4}$ при $x=1$. Для визначення коефіцієнтів C та D застосуємо метод порівняння коефіцієнтів:

$$\begin{array}{c|ll} x^3 & A+B+C=0, & C=-\frac{5}{12}, \\ x^2 & -A-C+D=2, & D=\frac{5}{4}. \end{array}$$

Відповідь: $\dfrac{2x^2+1}{x(x-1)(x^2+3)}=\dfrac{-1}{3x}+\dfrac{3}{4(x-1)}+\dfrac{\left(-\frac{5}{12}\right)x+\frac{5}{4}}{x^2+3}$.

Коефіцієнти при степенях x потрібно визначати, не розкриваючи дужок у правій частині. Це зменшує можливість помилок та полегшує вибір підхожих значень x.

8.3. Методи множення та послідовного диференціювання при відшуканні невизначених коефіцієнтів у розкладі раціонального дробу на елементарні

Приклади. Розкласти раціональні дроби на елементарні.

1. $\dfrac{1}{x^5(x^2+1)}$.

Розв'язання. Розкладемо раціональний дріб на елементарні методом множення [див. ч. 1, с. 467]:

$$\frac{1}{x^5(x^2+1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{A_4}{x^4}+\frac{A_5}{x^5}+\frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Помноживши ліву та праву частини рівняння на x^5, дістанемо

$$\frac{1}{x^2+1}=A_5+A_1x^4+A_2x^3+A_3x^2+A_4x+\frac{(Bx+C)x^5}{x^2+1}.$$

Вважаючи, що $x=0$, визначаємо $A_5=1$, тобто можна записати

$$\frac{1}{x^5(x^2+1)}-\frac{1}{x^5}=\frac{-1}{x^3(x^2+1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{A_4}{x^4}+\frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Помноживши цей вираз на x^4, маємо

$$-\frac{x}{x^2+1}=A_4+A_1x^3+A_2x^2+A_3x+\frac{Bx+C}{x^2+1}x^4.$$

Вважаючи, що $x=0$, знаходимо $A_4=0$. Аналогічно визначимо інші коефіцієнти:

$$-\frac{1}{x^3(x^2+1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{Bx+C}{x^2+1};$$

$$-\frac{1}{x^2+1}=A_3+A_1x^2+A_2x+\frac{Bx+C}{x^2+1}x^3;\quad A_3=-1.$$

Підставляючи значення A_3, дістанемо

$$-\frac{1}{x^3(x^2+1)}+\frac{1}{x^3}=\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{Bx+C}{x^2+1},$$

звідси

$$\frac{x}{x^2+1}=A_2+A_1x+\frac{Bx+C}{x^2+1}x^2,\quad A_2=0.$$

Тоді

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}x^2.$$

Помноживши обидві частини рівняння на x, дістанемо

$$\frac{1}{x^2+1}=A_1+\frac{Bx+C}{x^2+1}x^3.$$

Покладаючи в останньому рівнянні $x=0$, визначаємо $A_1=1$. Отже,

$$\frac{1}{x(x^2+1)}-\frac{1}{x}=-\frac{x}{x^2+1};\quad \frac{Bx+C}{x^2+1}=-\frac{x}{x^2+1}.$$

Прирівнюючи чисельники, дістаємо $B=-1$, $C=0$.

Відповідь: $\dfrac{1}{x^5(x^2+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}-\dfrac{x}{x^2+1}$.

2. $\dfrac{x^3+2}{(x+1)^5}$.

Розв'язання. Розкладемо дріб на елементарні методом послідовного диференціювання [див. ч. 1, с. 469]:

$$\frac{x^3+2}{(x+1)^5}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{A_3}{(x+1)^3}+\frac{A_4}{(x+1)^4}+\frac{A_5}{(x+1)^5}.$$

Приведемо вираз до загального знаменника:

$$x^3+2=A_1(x+1)^4+A_2(x+1)^3+A_3(x+1)^2+A_4(x+1)+A_5.$$

Використавши формули (8.14) [ч. 1, с.470], дістанемо

$A_5=\left(x^3+2\right)\Big|_{x=-1}=1;$ $\quad A_4=\dfrac{d}{dx}\left(x^3+2\right)\Big|_{x=-1}=3x^2\Big|_{x=-1}=3;$

$A_3=\dfrac{1}{2!}\dfrac{d^2}{dx^2}\left(x^3+2\right)\Big|_{x=-1}=\dfrac{6x}{2!}\Big|_{x=-1}=-3;$ $\quad A_2=\dfrac{1}{3!}\dfrac{d^3}{dx^3}\left(x^3+2\right)\Big|_{x=-1}=\dfrac{1}{3!}6=1;$

$A_1=\dfrac{1}{4!}\dfrac{d^4}{dx^4}\left(x^3+2\right)\Big|_{x=-1}=0.$

Відповідь: $\dfrac{x^3+2}{(x+1)^5}=\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{3}{(x+1)^3}+\dfrac{3}{(x+1)^4}+\dfrac{1}{(x+1)^5}.$

3. $\dfrac{x^3}{(x+1)^2(x-1)^2}$.

Розв'язання. Розкладемо дріб на елементарні методом послідовного диференціювання [див. ч. 1, с. 469]:

$$\frac{x^3}{(x+1)^2(x-1)^2}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}.$$

Помножимо обидві частини цього виразу на $(x+1)^2$:

$$\frac{x^3}{(x-1)^2}=A_2+A_1(x+1)+\left[\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}\right](x+1)^2.$$

Визначимо A_1 і A_2:

$$A_2=\left[\frac{x^3}{(x-1)^2}\right]\Bigg|_{x=-1}=-\frac{1}{4};$$

$$A_1=\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{(x-1)^2}\right]\Bigg|_{x=-1}=\frac{3x^2(x-1)^2-2(x-1)x^3}{(x-1)^4}\Bigg|_{x=-1}=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}\Bigg|_{x=-1}=\frac{1}{2}.$$

Тепер помножимо початковий вираз на $(x-1)^2$:

$$\frac{x^3}{(x+1)^2}=B_2+B_1(x-1)+(x-1)^2\left[\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}\right].$$

Маємо

$$B_2=\left[\frac{x^3}{(x+1)^2}\right]\Bigg|_{x=1}=\frac{1}{4};$$

$$B_1=\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{(x+1)^2}\right]\Bigg|_{x=1}=\frac{3x^2(x+1)^2-2(x+1)x^3}{(x+1)^4}\Bigg|_{x=1}=\frac{x^3+3x^2}{(x+1)^3}\Bigg|_{x=1}=\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\dfrac{x^3}{(x+1)^2(x-1)^2}=\dfrac{1}{2(x+1)}-\dfrac{1}{4(x+1)^2}+\dfrac{1}{2(x-1)}+\dfrac{1}{4(x-1)^2}.$

4. $\dfrac{x^3}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Розв'язання. Розкладемо знаменник x^2+1 на множники в комплексному просторі: $x^2+1=(x-j)(x+j)$. Тоді

$$\frac{x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^3}{(x-j)^2(x+j)^2};$$

$$\frac{x^3}{(x-j)^2(x+j)^2}=\frac{A_1}{x-j}+\frac{A_2}{(x-j)^2}+\frac{B_1}{x+j}+\frac{B_2}{(x+j)^2}. \qquad (8.1)$$

Помножимо обидві частини (8.1) на $(x-j)^2$:

$$\frac{x^3}{(x+j)^2}=A_2+A_1(x-j)+(x-j)^2\left[\frac{B_1}{x+j}+\frac{B_2}{(x+j)^2}\right].$$

Методом послідовного диференціювання [ч. 1, с. 469, 470] визначимо

$$A_2 = \left[\frac{x^3}{(x+j)^2}\right]\Bigg|_{x=j} = \frac{-j}{-4} = \frac{j}{4};$$

$$A_1 = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{(x+j)^2}\right]\Bigg|_{x=j} = \frac{3x^2(x+j)^2 - 2(x+j)x^3}{(x+j)^4}\Bigg|_{x=j} = \frac{x^3 + 3x^2 j}{(x+j)^3}\Bigg|_{x=j} = \frac{1}{2}.$$

Помножимо обидві частини (8.1) на $(x+j)^2$:

$$\frac{x^3}{(x-j)^2} = B_2 + B_1(x+j) + (x+j)^2\left[\frac{A_1}{x-j} + \frac{A_2}{(x-j)^2}\right].$$

Маємо

$$B_2 = \left[\frac{x^3}{(x-j)^2}\right]\Bigg|_{x=-j} = -\frac{j}{4};$$

$$B_1 = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{(x-j)^2}\right]\Bigg|_{x=-j} = \frac{3x^2(x-j)^2 - 2(x-j)x^3}{(x-j)^4}\Bigg|_{x=-j} = \frac{x^3 - 3x^2 j}{(x-j)^3}\Bigg|_{x=-j} = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$\frac{x^3}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{2(x-j)} + \frac{j}{4(x-j)^2} + \frac{1}{2(x+j)} - \frac{j}{4(x+j)^2} =$$

$$= \frac{x+j+x-j}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{j}{4}\frac{x^2 + 2xj - 1 - x^2 + 2xj + 1}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Відповідь: $\dfrac{x^3}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Розкласти раціональні дроби на елементарні.

145. $\dfrac{5-4x}{(x+1)(x-2)}$.

146. $\dfrac{2x^4+6x^2+x+4}{x^5+4x^3+4x}$.

147. $\dfrac{12x^2-5x-8}{x(x-2)(x+1)}$.

148. $\dfrac{x^3+4x^2+6x}{x^4+2x^3+3x^2+4x+2}$.

149. $\dfrac{2x^3-3x^2-1}{x^4-x^2}$.

150. $\dfrac{x^3+x}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$.

151. $\dfrac{2x^3+5x^2+6x+4}{x\left(x^2+1\right)(x+4)}$.

152. $\dfrac{x^7}{(1+x)^{10}}$.

153. $\dfrac{\left(x^2+1\right)^3}{x\left(x^2-2x+1\right)}$.

154. $\dfrac{x^5}{(x-3)^7}$.

155. $\dfrac{x^2+2x+4}{(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)}$.

156. $\dfrac{x^2}{1-x^4}$.

157. $\dfrac{1}{x^3+1}$.

Обчислити інтеграли.

158. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)(x-3)}$.

159. $\displaystyle\int\frac{xdx}{(2+x)(x-3)}$.

160. $\displaystyle\int\frac{\left(2x^2+3x+6\right)dx}{(1+x)^2(4-x)}$.

161. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{(x+5)^2(x+4)^2}$.

162. $\displaystyle\int\frac{\left(x^2-5x\right)dx}{x^2-5x+6}$.

163. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+2x^2+x}$.

164. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}$.

165. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)\left(x^2+4\right)}$.

166. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)^2}$.

167. $\displaystyle\int\frac{\left(x^3+1\right)dx}{\left(x^2-4x+5\right)^2}$.

168. $\displaystyle\int\frac{1-2x+5x^2-2x^3}{(1-x)^4\left(x^2+1\right)}\,dx$.

169. $\displaystyle\int\frac{x^3-10x+25}{x^4-10x^3+25x^2}\,dx$.

170. $\displaystyle\int\frac{x^5dx}{8-x^3}$.

171. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\left(1-x^3\right)^2}$.

172. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$.

173. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^7+x^5}$.

174. $\int\frac{x^2dx}{(2-3x)^7}$.

175. $\int\frac{dx}{x(1+x)^5}$.

176. $\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^5}$.

177. $\int\frac{\left(9x^2-14x+1\right)dx}{x^3-2x^2-x+2}$.

178. $\int\frac{6\,dx}{x(x-1)\left(x^2-5x+6\right)}$.

179. $\int\frac{\left(x^4+1\right)dx}{x^3-x^2+x-1}$.

180. $\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^4}$.

181. $\int\frac{x^3+x+2}{(x-3)(x-4)}\,dx$.

182. $\int\frac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)}$.

183. $\int\frac{x^2+2x+3}{x^3-9x^2+20x}\,dx$.

§ 9. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ, ДО ЯКИХ ВХОДЯТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Приклади. Обчислити інтеграли.

1. $\int\frac{dx}{\sin x+\cos x-1}$.

Розв'язання. Використаємо універсальну підстановку [ч. 1, с. 472]:

$$I=\int\frac{dx}{\sin x+\cos x-1}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}-1}=2\int\frac{dt}{2t+1-t^2-1-t^2}=$$

$$=\int\frac{dt}{t(1-t)}=\int\frac{dt}{t}+\int\frac{dt}{1-t}=\ln|t|-\ln|1-t|+C=\ln\left|\frac{t}{1-t}\right|+C=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}\right|+C.$$

Відповідь: $I=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}\right|+C.$

2. $\int\frac{\sin^3x}{1+\cos^2x}dx$.

Розв'язання. Перевіримо підінтегральну функцію на парність:

$$\frac{(-\sin x)^3}{1+\cos^2x}=-\frac{\sin^3x}{1+\cos^2x}.$$

Функція є непарною. Застосуємо заміну $t=\cos x$, тоді $dt=-\sin x dx$, тобто

$$I=\int\frac{\sin^3x}{1+\cos^2x}dx=\int\frac{1-\cos^2x}{1+\cos^2x}\sin x dx=\int\frac{t^2-1}{t^2+1}dt=$$

$$=\int\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt=t-2\operatorname{arctg}t+C=\cos x-2\operatorname{arctg}(\cos x)+C.$$

Відповідь: $I=\cos x-2\operatorname{arctg}(\cos x)+C$.

3. $\int\frac{2\sin x+3\cos x}{\sin x+\cos x}dx$.

Розв'язання. Перевіримо підінтегральну функцію на парність:

$$R(-\sin x,\ -\cos x)=\frac{2(-\sin x)-3\cos x}{-\sin x-\cos x}=\frac{2\sin x+3\cos x}{\sin x+\cos x}.$$

Функція є парною. Покладемо $\operatorname{tg}x=t$, тоді

$$I=\int\frac{\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}+\frac{3}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{2t+3}{(t+1)\left(t^2+1\right)}dt.$$

Знайшли інтеграл від раціонального дробу.

Для обчислення останнього інтеграла розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби:

$$\frac{2t+3}{(t+1)\left(t^2+1\right)}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2+1},$$

звідси $\qquad A\left(t^2+1\right)+(Bt+C)(t+1)=2t+3.$

Для визначення коефіцієнта A покладемо в останній рівності $t=-1$, тоді $2A=1$, $A=\frac{1}{2}$.

Для знаходження B та C прирівняємо коефіцієнти при t^2 та t^0 в тій самій рівності:

$$t^2: A+B=0,\quad B=-\frac{1}{2};\quad t^0: A+C=3,\quad C=\frac{5}{2}.$$

Шуканий інтеграл

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{2}\int\frac{t-5}{t^2+1}\,dt=\frac{1}{2}\ln|t+1|-\frac{1}{2}\int\frac{t}{t^2+1}dt+\frac{5}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|t+1|-\frac{1}{4}\ln\left|t^2+1\right|+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}t+C=\frac{1}{4}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2+1}+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}t+C.$$

Повертаючись до змінної x, дістанемо

$$I=\frac{1}{4}\ln\frac{(\operatorname{tg}x+1)^2}{\operatorname{tg}^2x+1}+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)+C=\frac{1}{4}\ln(\operatorname{tg}x+1)^2\cos^2x+\frac{5}{2}x+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+\frac{5}{2}x+C.$$

Відповідь: $I=\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+\frac{5}{2}x+C.$

4. $\int\frac{\sin 2x}{1+\sin^2x}\,dx.$

Розв'язання. За формулою $\sin 2x=2\sin x\cos x$ маємо

$$I=\int\frac{\sin 2x}{1+\sin^2x}\,dx=2\int\frac{\sin x\cos x\,dx}{1+\sin^2x}=2\int\frac{\sin x\,d(\sin x)}{1+\sin^2x}.$$

Увівши підстановку $\sin x=t$, одержимо

$$2\int\frac{tdt}{1+t^2}=\ln\left|1+t^2\right|+C=\ln\left|1+\sin^2x\right|+C.$$

Відповідь: $I=\ln\left|1+\sin^2x\right|+C.$

Обчислити інтеграли.

184. $\int\frac{\sin x\,dx}{\sin x+\cos x}.$

185. $\int\frac{\cos x\,dx}{1+\cos x}.$

186. $\int\frac{dx}{1-\operatorname{ctg}x}.$

187. $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\,dx.$

188. $\int\frac{dx}{\sin^2x-5\sin x\cos x}.$

189. $\int\frac{dx}{1+\cos x+\sin x}.$

190. $\int\frac{dx}{(\sin x-\cos x)^2}.$

191. $\int\frac{dx}{\cos x(1+\sin x)}.$

192. $\int\frac{\sin x\,dx}{6\cos^2x+\sin^2x}.$

193. $\int\frac{\sin x+\sin^3x}{\cos 2x}\,dx.$

194. $\int\frac{dx}{\sin^2x-2\operatorname{tg}x+3\cos^2x}.$

195. $\int\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}\,dx.$

196. $\int\frac{\sin^3x+1}{\cos^2x}\,dx.$

197. $\int\frac{dx}{3+5\cos x}.$

198. $\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}.$

199. $\int\frac{dx}{4+3\operatorname{tg}x}.$

200. $\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^3x-\cos^3x}.$

201. $\int\frac{1+\operatorname{tg}x}{\sin x}\,dx.$

9.1. Інтеграли від добутку тригонометричних функцій

Нагадаємо спочатку деякі формули, відомі з курсу математики загальноосвітніх закладів:

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right];\qquad(9.1)$$

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)-\cos(x-y)\right];\qquad(9.2)$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right];\qquad(9.3)$$

$$\sin^2x=\frac{1-\cos 2x}{2};\qquad(9.4)$$

$$\cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2};\qquad(9.5)$$

$$\cos^2x+\sin^2x=1;\qquad(9.6)$$

$$\operatorname{tg}^2x+1=\frac{1}{\cos^2x}\ (\cos x\neq 0),\text{ або}$$

$$\operatorname{tg}^2x=\sec^2x-1;\qquad(9.7)$$

$$\sin^2x=2\sin x\cos x;\qquad(9.8)$$

$$\operatorname{ctg}^2x+1=\frac{1}{\sin^2x}\ (\sin x\neq 0),\text{ або }\operatorname{ctg}^2x=\operatorname{cosec}^2x-1.\qquad(9.9)$$

Приклади. Обчислити інтеграли.

1. $\int \sin 7x \sin 2x\, dx$.

Розв'язання. Використаємо формулу (9.2):

$$I = \int \sin 7x \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 5x - \cos 9x)\, dx = \frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{18}\sin 9x + C.$$

Відповідь: $I = \frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{18}\sin 9x + C$.

2. $\int \cos^5 x\, dx$.

Розв'язання. Використаємо формулу (9.6):

$$I = \int \cos^5 x dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) = \int (1 - t^2)^2 dt =$$

$$= \int (t^4 - 2t^2 + 1) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{2}{3}t^3 + t + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2}{3}\sin^3 x + \sin x + C.$$

Відповідь: $I = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2}{3}\sin^3 x + \sin x + C$.

3. $\int \sin^4 x dx$.

Розв'язання. Використаємо формулу (9.4):

$$I = \int \sin^4 x dx = \frac{1}{4}\int (1 - \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \int \cos^2 2x dx\right) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int (1 + \cos 4x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Відповідь: $I = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$.

4. $\int \mathrm{tg}^6 x\, dx$.

Розв'язання. Використаємо формулу (9.7):

$$I = \int \mathrm{tg}^6 x dx = \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{tg}^4 x dx = \int \mathrm{tg}^4 x \sec^2 x dx - \int \mathrm{tg}^4 x dx =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}^5 x}{5} \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{tg}^2 x dx = \frac{\mathrm{tg}^5 x}{5} - \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + \int (\sec^2 x - 1) dx =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}^5 x}{5} - \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + \mathrm{tg}\, x - x + C.$$

Відповідь: $I = \frac{\mathrm{tg}^5 x}{5} - \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + \mathrm{tg}\, x - x + C$.

5. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

Розв'язання. Використаємо формулу (9.6):

$$I = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\mathrm{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}\, x + C.$$

Відповідь: $I = \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}\, x + C$.

6. $\int \frac{dx}{\sin^{2k+1} x} = I_{2k+1}$.

Розв'язання. Виведемо рекурентну формулу для I_{2k+1}:

$$I_{2k+1} = \int \frac{dx}{\sin^{2k+1} x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^{2k+1} x} dx = I_{2k-1} + \int \cos x \frac{\cos x}{\sin^{2k+1} x} dx.$$

Позначивши $u = \cos x$, $dv = \frac{\cos x}{\sin^{2k+1} x} dx$, маємо

$$du = -\sin x dx, \quad v = -\frac{1}{2k \sin^{2k} x}.$$

Отже,

$$I_{2k+1} = I_{2k-1} - \frac{\cos x}{2k \sin^{2k} x} - \frac{1}{2k}\int \frac{\sin x dx}{\sin^{2k} x} = I_{2k-1} -$$

$$- \frac{\cos x}{2k \sin^{2k} x} - \frac{1}{2k} I_{2k-1} = -\frac{\cos x}{2k \sin^{2k} x} + \left(1 - \frac{1}{2k}\right) I_{2k-1}.$$

Зокрема, знайдемо $\int \frac{dx}{\sin^7 x}$:

$$I_7 = \int \frac{dx}{\sin^7 x} = -\frac{\cos x}{6\sin^6 x} + \frac{5}{6}\int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos x}{6\sin^6 x} +$$

$$+\frac{5}{6}\left(-\frac{\cos x}{4\sin^4 x} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\sin^3 x}\right) = -\frac{\cos x}{6\sin^6 x} - \frac{5}{24}\frac{\cos x}{\sin^4 x} +$$

$$+\frac{5}{8}\left(-\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x}\right) = -\frac{\cos x}{6\sin^6 x} - \frac{5}{24}\frac{\cos x}{\sin^4 x} - \frac{5}{16}\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{5}{16}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Відповідь: $I_7 = -\frac{\cos x}{6\sin^6 x} - \frac{5}{24}\frac{\cos x}{\sin^4 x} - \frac{5}{16}\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{5}{16}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

9.2. Інтеграли, що містять добуток степенів синусів і косинусів

Приклади. Обчислити інтеграли.

1. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^8 x}dx$.

Розв'язання. Оскільки знаменником є $\sin x$, диференціал від якого $\cos x\,dx$, тому з $\cos^3 x$ виділимо $\cos x$ в першому степені:

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^8 x}dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x}{\sin^8 x}dx = \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)\cos x}{\sin^8 x}dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array}\right] = \int \frac{1-t^2}{t^8}dt = \int \frac{dt}{t^8} - \int \frac{dt}{t^6} = -\frac{1}{7t^7} + \frac{1}{5t^5} + C = -\frac{1}{7\sin^7 x} + \frac{1}{5\sin^5 x} + C.$$

Відповідь: $I = -\frac{1}{7\sin^7 x} + \frac{1}{5\sin^5 x} + C.$

2. $\int \cos^2 x \sin^4 x\,dx$.

Розв'язання. Перетворимо підінтегральний вираз

$$\sin^4 x\cos^2 x = \sin^2 x\cos^2 x\sin^2 x = \left(\sin x\cos x\right)^2 \sin^2 x =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 \sin^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x\sin^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right).$$

Для перетворень були використані формули (9.8), (9.4).
Тоді

$$I = \int \cos^2 x\sin^4 x dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\left(1-\cos 2x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int\left(1-\cos 4x\right)dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2x dx = \frac{1}{16}x - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\frac{\sin^3 2x}{3} + C =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

Відповідь: $I = \frac{1}{16}x - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$.

3. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx$.

Розв'язання.

$$I = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx = \left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg} x = t, \\ x = \operatorname{arctg} t, \\ dx = -\frac{dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ \cos x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{array}\right] = -\int \frac{\frac{t^2}{\sqrt{\left(1+t^2\right)^2}}}{\frac{1}{\sqrt{\left(1+t^2\right)^6}}}\frac{dt}{1+t^2} = -\int \frac{t^2\left(1+t^2\right)^2}{1+t^2}dt =$$

$$= -\int t^2\left(1+t^2\right)dt = -\int t^2 dt - \int t^4 dt = -\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x + C.$$

Відповідь: $I = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x + C$.

4. $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sin^4 x}$.

Розв'язання. Введемо до чисельника квадрат тригонометричної одиниці:

$$\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 = \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 1$$

та поділимо почленно чисельник на знаменник:

$$I = \int \frac{dx}{\cos^3 x \sin^4 x} = \int \frac{\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^3 x \sin^4 x} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^3 x} + 2\int \frac{dx}{\cos x \sin^2 x} + \int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx;$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx + \int \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \left[\begin{matrix} u = \sin x; & dv = \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx; \\ du = \cos x dx; & v = \frac{1}{2\cos^2 x} \end{matrix} \right] =$$

$$= \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\cos x \sin^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \frac{1}{\sin x} + C;$$

$$I_3 = \int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx = -\frac{1}{3\sin^3 x} + C;$$

$$I = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + 2\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| -$$

$$-\frac{2}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{2}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{5}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Відповідь: $I = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{2}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{5}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

Обчислити інтеграли.

202. $\int \cos^3 2x dx$.

203. $\int \cos^2 5x \, dx$.

204. $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$.

205. $\int \sin^2 2x \cos^3 x \, dx$.

206. $\int \cos^7 x \, dx$.

207. $\int \sin^6 x \, dx$.

208. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$.

209. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

210. $\int \frac{\sin^2 2x}{\cos^4 2x} dx$.

211. $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$.

212. $\int \cos 3x \sin 5x \, dx$.

213. $\int \sin\frac{x}{2} \sin\frac{x}{4} dx$.

214. $\int \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx$.

215. $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$.

216. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x \, dx$.

217. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx$.

218. $\int \operatorname{ctg}^3 x \, dx$.

219. $\int \operatorname{tg}^6 3x \, dx$.

220. $\int \operatorname{tg}^4 \varphi \sec^4 \varphi \, d\varphi$.

221. $\int \frac{\operatorname{ctg}^{\frac{3}{2}} x \, dx}{\sin^4 x}$.

222. $\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x}$.

223. $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos x}$.

224. $\int \cos 3x \cos 9x \, dx$.

225. $\int \sin 6x \cos 7x \, dx$.

226. $\int \sin 2x \cos 5x \sin 9x dx$.

227. $\int \sin^2 x \cos^5 x \, dx$.

228. $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$.

229. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$.

230. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx$.

231. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x} dx$.

232. $\int \sqrt{\frac{\sin x}{\cos^9 x}} dx$.

233. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$.

234. $\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$.

235. $\int \sin^4 x \cos^4 x \, dx$.

§ 10. ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

Приклади. Обчислити інтеграли.

1. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}+1}$.

Розв'язання. Нехай $t^2 = x$, тоді $dx = 2t\,dt$, а

$$I = \int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+1} = 2\int \frac{t^2 dt}{t+1} = 2\int \frac{t^2-1+1}{t+1}dt = 2\int (t-1)\,dt + 2\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= 2\left(\frac{t^2}{2} - t\right) + 2\ln|t+1| + C = x - 2\sqrt{x} + 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C.$$

Відповідь: $I = x - 2\sqrt{x} + 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C$.

2. $\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$.

Розв'язання. Вважатимемо, що $1+x = t^2$, тоді $dx = 2t\,dt$, а

$$I = \int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}} = 2\int \frac{t\,dt}{(4+t^2)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+4} = \operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x}}{2} + C.$$

Відповідь: $I = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x}}{2} + C$.

3. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{(x-1)^3}$.

Розв'язання. Підстановка $\frac{x+1}{x-1} = t^3$ [ч. I, с. 476] приведе до інтегрування раціональної функції. З цієї підстановки визначимо x, а потім dx:

$$t^3(x-1) = x+1;\ xt^3 - x = 1+t^3;\ x\left(t^3-1\right) = 1+t^3;\ x = \frac{1+t^3}{t^3-1};$$

$$dx = \frac{3t^2\left(t^3-1\right) - 3t^2\left(t^3+1\right)}{\left(t^3-1\right)^2}dt = \frac{3t^5 - 3t^2 - 3t^5 - 3t^2}{\left(t^3-1\right)^2} = -\frac{6t^2}{\left(t^3-1\right)^2}dt.$$

Тоді $$x-1 = \frac{1+t^3}{t^3-1} - 1;\quad x-1 = \frac{1+t^3-t^3+1}{t^3-1} = \frac{2}{t^3-1}.$$

$$I = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{(x-1)^3} = -\int t\frac{\frac{6t^2}{\left(t^3-1\right)^2}}{\left(\frac{2}{t^3-1}\right)^3}dt = -\frac{6}{8}\int \frac{t^3\left(t^3-1\right)^3}{\left(t^3-1\right)^2}dt = -\frac{3}{4}\int t^3\left(t^3-1\right)dt =$$

$$= -\frac{3}{4}\int\left(t^6 - t^3\right)dt = -\frac{3}{28}t^7 + \frac{3}{16}t^4 + C = \frac{3}{16}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4} - \frac{3}{28}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7} + C.$$

Відповідь: $I = \frac{3}{16}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4} - \frac{3}{28}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7} + C.$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

Розв'язання. Нехай $x = t^4$, $dx = 4t^3dt$, тоді

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = 4\int \frac{t^3dt}{t^2+t} = 4\int \frac{t^2dt}{t+1} = 4\int \frac{t^2-1+1}{t+1}dt =$$

$$= 4\int\left(t - 1 + \frac{1}{t+1}\right)dt = 2t^2 - 4t + 4\ln|t+1| + C = 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + C.$$

Відповідь: $I = 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + C$.

5. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x+4} - \sqrt[3]{x+4}\right)\sqrt[6]{(x+4)^5}}$.

Розв'язання. Нехай $x+4 = t^6$, $dx = 6t^5dt$, тоді

$$I = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{x+4} - \sqrt[3]{x+4}\right)\sqrt[6]{(x+4)^5}} = 6\int \frac{t^5dt}{\left(t^3-t^2\right)t^5} = 6\int \frac{dt}{t^2(t-1)}.$$

Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби:

$$\frac{1}{t^2(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t-1} = \frac{At(t-1) + B(t-1) + Ct^2}{t^2(t-1)};$$

$$1 = At(t-1) + B(t-1) + Ct^2.$$

Для визначення коефіцієнтів використаємо методи довільних значень аргументів і порівняння:

$$\begin{array}{c|ll} 0 & 1 = -B; & B = -1; \\ 1 & 1 = C; & C = 1; \end{array}$$

$$t^2\,|\,0 = A + C;\ A = -C = -1.$$

Тоді

$$I=6\int\frac{dt}{t^2(t-1)}=6\int\left(-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t-1}\right)dt=-6\ln|t|+\frac{6}{t}+6\ln|t-1|+C_1=$$

$$=6\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|+\frac{6}{t}+C_1=6\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x+4}-1}{\sqrt[6]{x+4}}\right|+\frac{6}{\sqrt[6]{x+4}}+C_1.$$

Відповідь: $I=6\ln\left|\dfrac{\sqrt[6]{x+4}-1}{\sqrt[6]{x+4}}\right|+\dfrac{6}{\sqrt[6]{x+4}}+C_1$.

6. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\right)(x+1)^2}$.

Розв'язання. Підстановка $\dfrac{x-1}{x+1}=t^6$ приведе до інтегрування раціональної функції. З цієї підстановки визначимо x, а потім dx:

$$t^6(x+1)=x-1;\quad xt^6+t^6=x-1;\quad x\left(t^6-1\right)=-1-t^6;\quad x=\frac{t^6+1}{1-t^6};$$

$$dx=\frac{6t^5\left(1-t^6\right)+6t^5\left(1+t^6\right)}{\left(1-t^6\right)^2}=\frac{6t^5-6t^{11}+6t^5+6t^{11}}{\left(1-t^6\right)^2}=\frac{12t^5}{\left(1-t^6\right)^2}dt;\quad x+1=\frac{t^6+1}{1-t^6}+1;$$

$$(x+1)^2=\left(\frac{t^6+1}{1-t^5}+1\right)^2;\ (x+1)^2=\left(\frac{t^6+1+1-t^6}{1-t^6}\right)^2;\ (x+1)^2=\left(\frac{2}{1-t^6}\right)^2;\ (x+1)^2=\frac{4}{\left(1-t^6\right)^2}.$$

Тоді

$$I=\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\right)(x+1)^2}=\int\frac{t^3\cdot 12t^5dt}{\left(1-t^6\right)^2\left(1+t^2\right)\left[\dfrac{4}{\left(1-t^6\right)^2}\right]}=3\int\frac{t^8}{1+t^2}dt.$$

Отриманий дріб є неправильним. Виділимо цілу частину. Для цього розділимо чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{r|l}
t^8 & t^2+1 \\ \cline{2-2}
-\underline{t^8+t^6} & t^6-t^4+t^2-1 \\
-t^6 & \\
-\underline{-t^6-t^4} & \\
t^4 & \\
-\underline{t^4+t^2} & \\
-t^2 & \\
-\underline{-t^2-1} & \\
1 &
\end{array}$$

Тоді

$$I=3\int\frac{t^8}{1+t^2}dt=3\int\left(t^6-t^4+t^2-1\right)dt+3\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{3}{7}t^7-\frac{3}{5}t^5+t^3-3t+3\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=\frac{3}{7}\sqrt[6]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^7}-\frac{3}{5}\sqrt[6]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5}+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-3\sqrt[6]{\frac{x-1}{x+1}}+3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{\frac{x-1}{x+1}}+C.$$

Відповідь: $I=\dfrac{3}{7}\sqrt[6]{\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^7}-\dfrac{3}{5}\sqrt[6]{\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^5}+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-3\sqrt[6]{\dfrac{x-1}{x+1}}+3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{\dfrac{x-1}{x+1}}+C$.

Обчислити інтеграли.

236. $\int x(2x-1)^{\frac{1}{3}}dx$. **237.** $\displaystyle\int\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{3}{2}}dx$. **238.** $\displaystyle\int\frac{x+1+\sqrt{x+2}}{x+3}dx$.

239. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{x-3}{x}}\frac{dx}{x}$. **240.** $\displaystyle\int\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{(1+x)^2}$. **241.** $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+25}}{x}dx$.

242. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{\left(\frac{x}{1-x}\right)^3}dx}{x+\sqrt{\frac{x}{1-x}}}$. **243.** $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx$. **244.** $\displaystyle\int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$.

245. $\displaystyle\int\frac{\sqrt[6]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$. **246.** $\displaystyle\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$.

247. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+2}\right)\sqrt[6]{x+2}}$.

248. $\int \frac{\sqrt[6]{x}\,dx}{x\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}$.

249. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

250. $\int \frac{x^4}{\sqrt{x-1}}dx$.

251. $\int \frac{x^2dx}{(5x+2)\sqrt{5x+2}}$.

252. $\int \frac{\sqrt{3x+4}}{x^2}dx$.

253. $\int \frac{\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}-4}dx$.

254. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3+2x)^2}-\sqrt{3+2x}}$.

255. $\int \frac{x+3}{x-3}\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}dx$.

256. $\int \sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}dx$.

§ 11. ІНТЕГРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ БІНОМІВ

Приклади. Обчислити інтеграли.

1. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Розв'язання. Відповідно до позначень диференціального бінома [ч. 1, с. 478] $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, $p=\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n}=2$.

Отже, маємо другий випадок інтегровності. Застосуємо підстановку $1+\sqrt[4]{x}=t^2$:

$$x=\left(t^2-1\right)^4,\quad \sqrt{x}=\left(t^2-1\right)^2,\quad t=\sqrt{1+\sqrt[4]{x}},$$

$$dx=4\left(t^2-1\right)^3 2tdt=8t\left(t^2-1\right)^3dt.$$

Тоді

$$I=\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int \frac{t}{\left(t^2-1\right)^2}8t\left(t^2-1\right)^3dt=8\int\left(t^4-t^2\right)dt=$$

$$=\frac{8}{5}t^5-\frac{8}{3}t^3+C=\frac{8}{5}\left(\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}\right)^5-\frac{8}{3}\left(\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}\right)^3+C.$$

Відповідь: $I=\frac{8}{5}\left(\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}\right)^5-\frac{8}{3}\left(\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}\right)^3+C.$

2. $\int \frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$.

Розв'язання. Маємо $p=-2$ – ціле число, тому розглянемо перший випадок інтегровності. За умовою $m=-1$, $n=\frac{1}{3}$, тобто $s=3$.

Покладемо $x=t^3$, тоді $dx=3t^2dt$, а

$$I=\int \frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}=\int \frac{3t^2dt}{t^3\left(1+t\right)^2}=3\int \frac{dt}{t\left(1+t^2\right)};$$

$$\frac{1}{t\left(1+t\right)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1+t}+\frac{C}{\left(1+t\right)^2};$$

$$A\left(1+t\right)^2+Bt\left(1+t\right)+Ct=1;$$

$$t=0:\ A=1;\quad t=-1:C=-1;\quad t^2:\ A+B=0,\quad B=-A=-1.$$

Отже,

$$I=3\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}-\frac{1}{\left(1+t\right)^2}\right)dt=3\ln|t|-3\ln|1+t|+\frac{3}{1+t}+C_1=$$

$$=3\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\frac{3}{1+\sqrt[3]{x}}+C_1.$$

Відповідь: $I=3\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\frac{3}{1+\sqrt[3]{x}}+C_1$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}}$.

Розв'язання. Тут $m=-\frac{3}{2}$, $n=\frac{3}{4}$, $p=-\frac{1}{3}$, тобто

$$\frac{m+1}{n}+p=\frac{-\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{4}}-\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=-1 \text{ – ціле число.}$$

Маємо третій випадок інтегровності. Покладемо $x^{-\frac{3}{4}}+1=t^3$, тобто $x=\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}}$,

$$dx=-\frac{4}{3}\left(t^3-1\right)^{-\frac{7}{3}}\cdot 3t^2dt=-4t^2\left(t^3-1\right)^{-\frac{7}{3}}dt.$$

Перетворимо даний інтеграл так:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac13}}=\int x^{-\frac32}\left[x^{-\frac14}\left(x^{-\frac34}+1\right)\right]^{-\frac13}dx=\int x^{-\frac74}\left(x^{-\frac34}+1\right)^{-\frac13}dx=$$

$$=-\int\left(t^3-1\right)^{\frac73}t^{-1}4t^2\left(t^3-1\right)^{-\frac73}dt=-4\int t\,dt=-2t^2+C=-2\sqrt[3]{\left(x^{-\frac34}+1\right)^2}+C.$$

Відповідь: $I=-2\sqrt[3]{\left(x^{-\frac34}+1\right)^2}+C.$

Обчислити інтеграли.

257. $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$. **258.** $\int\frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$. **259.** $\int\sqrt{x}\left(1+2\sqrt[6]{x}\right)^3dx$.

260. $\int x^5\sqrt{x^2+4}\,dx$. **261.** $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$. **262.** $\int\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{x^2}dx$. **263.** $\int\frac{x^7dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

264. $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$. **265.** $\int\frac{dx}{x\left(1+x^3\right)^{\frac14}}$. **266.** $\int\frac{dx}{x^{\frac32}\sqrt[3]{2+x^{\frac34}}}$.

§ 12. ПІДСТАНОВКИ ЕЙЛЕРА. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ПІДСТАНОВКИ

12.1. Підстановки Ейлера

Приклади. Обчислити інтеграли.

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1}$.

Розв'язання. Оскільки $C=1>0$, то застосуємо другу підстановку Ейлера [ч. 1, с. 480]:

$$\sqrt{1-x^2}=tx-1.$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:

$$1-x^2=t^2x^2-2tx+1,\quad x=\frac{2t}{t^2+1}.$$

Тоді

$$dx=\frac{2\left(1+t^2\right)-4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt=\frac{2\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}dt.$$

Виразимо $\sqrt{1-x^2}-1$ через t:

$$\sqrt{1-x^2}-1=tx-2=t\frac{2t}{t^2+1}-2=2\frac{t^2-t^2-1}{t^2+1}=-\frac{2}{t^2+1}.$$

Отже,

$$I=-2\int\frac{\left(1-t^2\right)dt}{\left(1+t^2\right)^2\frac{2}{\left(t^2+1\right)}}=\int\frac{t^2-1}{t^2+1}dt=\int\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=t-2\operatorname{arctg}t+C=\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}+C.$$

Відповідь: $I=\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}+C.$

2. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Розв'язання. Оскільки $a=1>0$, то застосуємо першу підстановку Ейлера [ч. 1, с. 480]. Поклавши $\sqrt{x^2+2x+2}=t-x$, дістанемо:

$$x^2+2x+2=t^2-2tx+x^2,\quad x=\frac{t^2-2}{2(t+1)}.$$

Тоді

$$dx=\frac{2t(t+1)-t^2+2}{2(t+1)^2}dt=\frac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2}dt.$$

Виразимо $1+\sqrt{x^2+2x+2}$ через t:

$$1+\sqrt{x^2+2x+2}=1+t-\frac{t^2-2}{2(t+1)}=\frac{2+4t+2t^2-t^2+2}{2(t+1)}=\frac{t^2+4t+4}{2(t+1)}=\frac{(t+2)^2}{2(t+1)},$$

тоді

$$I=\int\frac{\left(t^2+2t+2\right)\cdot 2(t+1)}{2(t+1)^2(t+2)^2}dt=\int\frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2}\,dt\,;$$

$$\frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2}+\frac{C}{(t+2)^2}\,;$$

$$A(t+2)^2+B(t+2)(t+1)+C(t+1)=t^2+2t+2\,;$$

$$t=-2:\ \ -C=4-4+2=2\,,\ C=-2\,;\ t=-1:\ A=1-2+2=1\,,\ A=1\,;$$

$$t^2:\ A+B=1\,,\ B=0\,.$$

Отже,

$$I=\int\frac{dt}{t+1}-2\int\frac{dt}{(t+2)^2}=\ln|t+1|+\frac{2}{t+2}+C_1=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+$$

$$+\frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}}+C_1.$$

Відповідь: $I=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+\dfrac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}}+C_1$.

3. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{\left(3x-2-x^2\right)^3}}$.

Розв'язання. Оскільки $a=-1<0$, $c=-2<0$, $b^2-4ac=9-8>0$, то застосуємо третю підстановку Ейлера [ч. 1, с. 480]. Квадратний тричлен має корені $x_1=1$, $x_2=2$.

Покладемо $\sqrt{3x-2-x^2}=\sqrt{(x-1)(2-x)}=(x-1)t$, звідки $(x-1)t^2=2-x$, $x=\dfrac{2+t^2}{1+t^2}$,

тоді

$$dx=-\frac{2t}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt\,.$$

Знайдемо

$$x-1=\frac{2+t^2}{1+t^2}-1=\frac{1}{1+t^2}\,.$$

Отже,

$$I=\int\frac{xdx}{\sqrt{\left(3x-2-x^2\right)^3}}=-\int\frac{2t\left(2+t^2\right)dt}{\left(1+t^2\right)^2\left(1+t^2\right)\dfrac{t^3}{\left(1+t^2\right)^3}}=-2\int\frac{2+t^2}{t^2}dt=$$

$$=-2\int\left(\frac{2}{t^2}+1\right)dt=-2\left(-\frac{2}{t}+t\right)+C=-2\left(\frac{\sqrt{3x-2-x^2}}{x-1}-2\frac{x-1}{\sqrt{3x-2-x^2}}\right)+C.$$

Відповідь: $I=-2\left(\dfrac{\sqrt{3x-2-x^2}}{x-1}-2\dfrac{x-1}{\sqrt{3x-2-x^2}}\right)+C$.

Обчислити інтеграли.

267. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x+1}}$. **268.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+4}}$. **269.** $\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{\left(6x-8-x^2\right)^3}}$.

270. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$. **271.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-5}}$. **272.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

273. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{\left(7x-x^2-10\right)^3}}$.

12.2. Тригонометричні підстановки

Приклади. Обчислити інтеграли.

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(x^2-2x+5\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Розв'язання. Оскільки $a=1>0$, $b^2-4ac=1-4\cdot5<0$, маємо перший випадок застосування тригонометричних підстановок [ч. 1, с. 480]. Перетворюючи квадратний тричлен, виділяємо повний квадрат:

$$x^2-2x+5=(x-1)^2+4\,.$$

Покладемо $x-1=2\operatorname{tg}\varphi$, тоді $dx=\dfrac{2}{\cos^2\varphi}d\varphi$.

Використаємо формулу (9.7):

$$x^2-2x+5=(x-1)^2+4=4\left(1+\operatorname{tg}^2\varphi\right)=\frac{4}{\cos^2\varphi}.$$

Отже,

$$I=\int\frac{2d\varphi}{\cos^2\varphi\frac{8}{\cos^3\varphi}}=\frac{1}{4}\int\cos\varphi d\varphi=\frac{1}{4}\sin\varphi+C=\frac{1}{4}\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi+1}}+C=\frac{1}{4}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}+C.$$

Відповідь: $I=\frac{1}{4}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}+C.$

2. $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx.$

Розв'язання. Нехай $x=3\sec\varphi$, тоді $dx=3\sec\varphi\operatorname{tg}\varphi d\varphi$, а

$$x^2-9=9\left(\sec^2\varphi-1\right)=9\operatorname{tg}^2\varphi.$$

Отже,

$$I=\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx=\int\frac{3\operatorname{tg}\varphi}{3\sec\varphi}\cdot3\sec\varphi\operatorname{tg}\varphi d\varphi=\int3\operatorname{tg}^2\varphi d\varphi=$$

$$=3\int\left(\sec^2\varphi-1\right)d\varphi=3\operatorname{tg}\varphi-3\varphi+C=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{x}+C.$$

Відповідь: $I=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{x}+C.$

3. $\int\frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}dx.$

Розв'язання. Введемо нову змінну φ: $x=4\sin\varphi$, тоді $dx=4\cos\varphi d\varphi$.

Отже,

$$I=\int\frac{4\cos\varphi4\cos\varphi d\varphi}{4^4\sin^4\varphi}=\frac{1}{16}\int\frac{\operatorname{ctg}^2\varphi}{\sin^2\varphi}d\varphi=-\frac{1}{16}\frac{\operatorname{ctg}^3\varphi}{3}+C=-\frac{1}{48}\frac{\sqrt{\left(16-x^2\right)^3}}{x^3}+C.$$

Відповідь: $I=-\frac{1}{48}\frac{\sqrt{\left(16-x^2\right)^3}}{x^3}+C.$

Обчислити інтеграли.

274. $\int\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}dx$. **275.** $\int\sqrt{4+x^2}\,dx$. **276.** $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

277. $\int\sqrt{x^2-25}\,dx$. **278.** $\int\sqrt{x^2-6x-7}\,dx$. **279.** $\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\sqrt{1-x^2}}$.

280. $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(9-x^2\right)^3}}$. **281.** $\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$.

282. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$. **283.** $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$. **284.** $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{\left(x^2-4\right)^3}}$.

285. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$. **286.** $\int\frac{dx}{\left(x^2+9\right)\sqrt{x^2+9}}$. **287.** $\int\frac{dx}{\left(x^2-5\right)\sqrt{x^2-5}}$.

288. $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$. **289.** $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(16+x^2\right)^3}}$. **290.** $\int\frac{dx}{\left(2-x^2\right)\sqrt{2-x^2}}$.

§ 13. МЕТОД ОСТРОГРАДСЬКОГО

Приклад. Обчислити інтеграл

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$$

Розв'язання. За методом Остроградського [ч. 1, с. 482] маємо:

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\left(bx^2+cx+d\right)\sqrt{x^2+4x+5}+a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$$

Диференціюючи, маємо:

$$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+4x+5}}=(2bx+c)\sqrt{x^2+4x+5}+\frac{\left(bx^2+cx+d\right)(2x+4)}{2\sqrt{x^2+4x+5}}+\frac{a}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$$

Помноживши цей вираз на $\sqrt{x^2+4x+5}$, дістанемо

$$(2bx+c)\left(x^2+4x+5\right)+\left(bx^2+cx+d\right)(x+2)+a=x^3.$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, визначаємо за відомими правилами коефіцієнти a, b, c, d:

x^3: $3b = 1,\quad b = \frac{1}{3}$;

x^2: $10b + 2c = 0,\quad c = -5b = -\frac{5}{3}$;

x^1: $10b + 6c + d = 0,\quad d = -4c = \frac{20}{3}$;

x^0: $5c + 2d + a = 0,\quad a = -5c - 2d = \frac{25}{3} - \frac{40}{3} = -5.$

Тоді

$$I = \frac{1}{3}\left(x^2 - 5x + 20\right)\sqrt{x^2 + 4x + 5} - 5\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 + 1}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2 - 5x + 20\right)\sqrt{x^2 + 4x + 5} - 5\ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 5}\right| + C.$$

Відповідь: $I = \frac{1}{3}\left(x^2 - 5x + 20\right)\sqrt{x^2 + 4x + 5} - 5\ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 5}\right| + C.$

Обчислити інтеграли.

291. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$. **292.** $\int\sqrt{4x^2 - 4x + 1}\,dx$. **293.** $\int\frac{\left(x^3 - x + 1\right)dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$.

294. $\int\sqrt{x^2 + x}\,dx$. **295.** $\int\frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}dx$. **296.** $\int\frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}dx$.

Відповіді

1. $2\sqrt{x}\left(\frac{x^3}{7} - x^2 + 1\right) + C$. **2.** $\frac{2}{5}t^2\sqrt{t} + 3\sqrt[3]{t} + C$. **3.** $\frac{30}{19}x^{\frac{19}{6}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$. **4.** $\arcsin\frac{\varphi}{4} + C$. **5.** $\frac{2}{5}y^2\sqrt{y} - 2\sqrt{y} - \frac{1}{y+2} + C$. **6.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 4x + C$. **7.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3} + C$. **8.** $\ln\left|x + \sqrt{x^2 + 5}\right| + C$. **9.** $\frac{1}{24}\ln\left|\frac{4x-3}{4x+3}\right| + C$. **10.** $-\frac{1}{2\cdot 3^x\ln 3} - \frac{3}{2^x\ln 2} + C$. **11.** $\frac{1}{5}\frac{(5e)^x}{\ln 5 + 1} + C$. **12.** $\frac{2}{\ln 3}\left(3^x + 3^{-x}\right) - 3x + C$. **13.** $\frac{2}{9}\left[(x+2)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{3}{2}}\right] + C$. **14.** $\ln\left|x + \sqrt{2 + x^2}\right| + \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C$. **15.** $\ln\left|x + \sqrt{x^2 + 4}\right| - 3\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$. **16.** $\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + C$. **17.** $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 2\ln|1 + x| + C$. **18.** $\frac{1}{2}(x - \sin x) + C$.

19. $-\operatorname{ctg} x - x + C$. **20.** $x - \operatorname{cth} x + C$. **21.** $5\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - x + C$. **22.** $e^x - 2x + C$. **23.** $\operatorname{tg} x + C$.

24. $-\frac{1}{x} + 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$. **25.** $2x - \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + C$. **26.** $x - 5e^{-x} + C$. **27.** $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - x + C$.

28. $8x + 3\ln|\sin 2x| + C$. **29.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x + x + C$. **30.** $\frac{8}{15}x\sqrt[8]{x^7} + C$. **31.** $-\frac{20}{\pi}\cos\frac{\pi}{20}x - 20\sin\frac{x}{20} + C$.

32. $\frac{(11x-7)^8}{88} + C$. **33.** $-\frac{1}{\operatorname{arctg} x} + C$. **34.** $\frac{2}{(1 + \operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{2}}} + C$. **35.** $\frac{2}{9}(3x+5)^{\frac{3}{2}} + C$. **36.** $-\frac{1}{2(2x-3)} + C$.

37. $\frac{4^{3x+7}}{3\ln 4} + C$. **38.** $\frac{\pi^{2x-1}}{2\ln\pi} + C$. **39.** $-3\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C$. **40.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\ln x}{3} + C$. **41.** $\sqrt{x^2 - 5} + C$.

42. $\frac{2^{x^5+1}}{5\ln 2} + C$. **43.** $\ln|\arcsin x| + C$. **44.** $\sin e^x + C$. **45.** $\operatorname{tg}\left(1 + \ln^2 x\right) + C$. **46.** $-\frac{1}{2}\frac{\pi^{\frac{1}{x^2}}}{\ln\pi} + C$.

47. $\frac{1}{2}\ln\left(x^4 + x^2\right) + C$. **48.** $\frac{2}{3}(\ln z)^{\frac{3}{2}} + C$. **49.** $\frac{1}{3}\ln\left|e^{3x} + \sqrt{1 + e^{6x}}\right| + C$. **50.** $-\frac{5}{\sin x} + \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + C$.

51. $e^{-\frac{1}{x}} + C$. **52.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg} u^2 + C$. **53.** $\frac{2}{\ln 5}5^{\sqrt{x}} + C$. **54.** $\frac{1}{15}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg} x}{5} + C$. **55.** $\frac{3^{\sin^2 x}}{\ln 3} + C$.

56. $-\ln\left|\arccos x + \sqrt{(\arccos x)^2 - 4}\right| + C$. **57.** $\frac{2}{3}\frac{1}{\cos x\sqrt{\cos x}} + C$. **58.** $-\frac{7}{2}\operatorname{ctg}^{\frac{2}{7}} x + C$.

59. $2\sqrt{\operatorname{arctg} x + 1} + C$. **60.** $\frac{1}{5}e^{5\sin x - 2} + C$. **61.** $\frac{1}{\ln 3}\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{3^x}{\sqrt{7}} + C$. **62.** $-\frac{\ln\left|1 + 5e^{-2x}\right|}{10} + C$.

63. $-\sqrt{2x - x^2} + C$. **64.** $-\frac{(2 - 3\sin 2x)^{\frac{4}{3}}}{8} + C$. **65.** $-\frac{1}{5\left(e^{5x} + 11\right)} + C$. **66.** $-\frac{\operatorname{ctg}\left(x^3\right)}{3} + C$.

67. $\arcsin\frac{\ln|2x|}{3} + C$. **68.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{t^3 - 1}{t^3 + 1}\right| + C$. **69.** $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\cos 2x) + C$. **70.** $\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{4} + C$.

71. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1 + x^2}{1 - x^2}\right| + C$. **72.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$. **73.** $\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(2\sin\frac{x}{2}\right) + C$. **74.** $\frac{1}{2}\ln\operatorname{ch} 2x + C$.

75. $-\frac{1}{2}\ln\left|\cos\left(x^2 - 5\right)\right| + C$. **76.** $\frac{2}{3}e^{\sqrt{x^3+1}} + C$. **77.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + C$. **78.** $-\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} + C$.

79. $\ln\left(\sin^2 x + 5\right) + C$. **80.** $-\frac{(1-x)^{100}}{100} + C$. **81.** $\frac{1}{15}\left(1 + x^3\right)^5 + C$. **82.** $\frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

83. $x\arcsin 2x + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4x^2} + C$. **84.** $x\ln|x| - x + C$. **85.** $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x^2 - \frac{1}{4}\ln\left(1 + x^4\right) + C$.

86. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln\left|\sqrt{x}\right|-\frac{1}{3}\right)+C$. **87.** $\frac{x^2+4}{2}\ln\left(x^2+4\right)-\frac{x^2}{2}+C$. **88.** $\frac{x^4-1}{4}\operatorname{arctg}x-\frac{x^3}{12}+\frac{x}{4}+C$.

89. $-\frac{\ln|x|}{x}-\frac{1}{x}+C$. **90.** $-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x+C$. **91.** $-\frac{x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x+C$. **92.** $x\ln\left(x^2+1\right)-$ $-2x+2\operatorname{arctg}x+C$. **93.** $\frac{5^x}{(\ln 5)^3}\left[x^2(\ln 5)^2-2x\ln 5+2\right]+C$. **94.** $x^{100}\sin x+C$. **95.** $2\sqrt{x}\,(x-6)\sin\sqrt{x}+$ $+6(x-2)\cos\sqrt{x}+C$. **96.** $2\sqrt{x}\ln|x|\left(\ln^2|x|-6\ln|x|+24\right)-96\sqrt{x}+C$. **97.** $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\left(\ln^2|x|-\frac{3}{2}\ln|x|+\right.$ $\left.+\frac{9}{8}\right)+C$. **98.** $x+\operatorname{tg}x[\ln|\sec x|-1]+C$. **99.** $x\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}x+C$. **100.** $\frac{e^{2x}}{4}\left(6x^2-22x+11\right)+C$.

101. $\frac{e^{3x+1}}{27}\left(9x^2+21x+38\right)+C$. **102.** $\frac{x+2}{3}\sin(3x+7)+\frac{1}{9}\cos(3x+7)+C$. **103.** $2(1+x)\sin x+$ $+\left(1-2x-x^2\right)\cos x+C$. **104.** $\left(x^3+3x^2+5x+3\right)\operatorname{arctg}x-\frac{x^2}{2}-3x-2\ln\left(x^2+1\right)+C$. **105.** $\frac{2x^2-8x-1}{4}\times$ $\times\arcsin x+\frac{x-8}{4}\sqrt{1-x^2}+C$. **106.** $\frac{e^{3x}}{13}(3\cos 2x+2\sin 2x)+C$. **107.** $\left(x-\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\ln|x|-x+$ $+\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{9}x^3+C$. **108.** $\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-x\right)\ln^2|x|-\left(\frac{x^4}{8}-\frac{x^2}{2}-2x\right)\ln|x|+\frac{x^4}{32}-\frac{x^2}{4}-2x+C$. **109.** $x(\arcsin x)^2+$ $+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$. **110.** $\operatorname{arctg}x(\ln|\operatorname{arctg}x|-1)+C$. **111.** $\cos x(1-\ln|\cos x|)+C$.

112. $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$. **113.** $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]+C$. **114.** $\frac{2\sin 2x-3\cos 2x}{13e^{3x}}+C$.

115. $-\frac{1}{24}\ln\left|\frac{x-1}{x+\frac{5}{3}}\right|+C$. **116.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{4}+C$. **117.** $\ln\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+25}\right|+C$. **118.** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-\right.$ $\left.-4x+13\right|+C$. **119.** $2\ln\left|x^2-2x+5\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$. **120.** $\frac{3}{2}\sqrt{2x^2-12x+15}+\frac{4}{\sqrt{2}}\ln\left|x-3+\right.$ $\left.+\sqrt{x^2-6x+\frac{15}{2}}\right|+C$. **121.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{e^x-1}{\sqrt{5}}+C$. **122.** $\sqrt{x^2-6x+1}+3\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+1}\right|+C$.

123. $-2\sqrt{5+4x-x^2}+3\arcsin\frac{x-2}{3}+C$. **124.** $-6\sqrt{x-x^2}+4\arcsin(2x-1)+C$.

125. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{4\sqrt{x^2-5x+4}-5x}{x}\right|+C$. **126.** $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$. **127.** $\frac{2x-3}{3\left(x^2-3x+3\right)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}}+C$.

128. $-\frac{x+1}{2\left(x^2+2x\right)}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+C$. **129.** $\frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2}+\frac{3x}{8\left(x^2+1\right)}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x+C$.

130. $-\frac{3x+10}{31\left(2x^2+3x+5\right)}-\frac{6}{31\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{4x+3}{\sqrt{31}}+C$. **131.** $\frac{2}{\sqrt{171}}\operatorname{arctg}\frac{10x+7}{\sqrt{171}}+C$. **132.** $\frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{3x-4}{\sqrt{11}}+C$.

133. $\frac{3}{2}\ln\left(x^2+7x+14\right)-\frac{13}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+7}{\sqrt{7}}+C$. **134.** $\ln\left(x^2+x+5\right)-8\sqrt{19}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{19}}+C$.

135. $\frac{1}{6}\frac{x}{\left(1+x^2\right)^3}+\frac{5}{24}\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{5}{16}\frac{x}{1+x^2}+\frac{5}{16}\operatorname{arctg}x+C$. **136.** $\frac{x-5}{4\left(x^2-2x+5\right)}+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$.

137. $\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{37}}+C$. **138.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{5x-1}{4}+C$. **139.** $\frac{3}{5}\sqrt{5x^2+8x+1}-\frac{47}{5\sqrt{5}}\ln\left|10x+8\right|+$ $+2\sqrt{5\left(5x^2+8x+1\right)}\Big|+C$. **140.** $-\frac{2}{11}\sqrt{7+8x-11x^2}+\frac{63\arcsin\frac{11x-4}{\sqrt{93}}}{11\sqrt{11}}+C$. **141.** $(x-1)\left(x^2+2x+2\right)$.

142. $(x-1)^2\left(3x^2+2x+1\right)$. **143.** $(x+1)^2\left(x^2+2x-1\right)$. **144.** $x(x-1)(x+1)\left(x^2-2x+2\right)$. **145.** $-\frac{3}{x+1}-$ $-\frac{1}{x-2}$. **146.** $\frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{\left(x^2+2\right)^2}+\frac{1}{x}$. **147.** $\frac{4}{x}+\frac{5}{x-2}+\frac{3}{x+1}$. **148.** $\frac{-1}{3(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4x+8}{3\left(x^2+1\right)}$.

149. $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x-1}$. **150.** $\frac{x-2}{x^2+2x+2}+\frac{3x+4}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$. **151.** $\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+1}$. **152.** $\frac{1}{(1+x)^3}-$ $-\frac{7}{(1+x)^4}+\frac{21}{(1+x)^5}-\frac{35}{(1+x)^6}+\frac{35}{(1+x)^7}-\frac{21}{(1+x)^8}+\frac{7}{(1+x)^9}-\frac{1}{(1+x)^{10}}$. **153.** $x^3+2x^2+6x+10+$ $+\frac{1}{x}+\frac{16}{x-1}+\frac{8}{(x-1)^2}$. **154.** $\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{15}{(x-3)^3}+\frac{90}{(x-3)^4}+\frac{270}{(x-3)^5}+\frac{405}{(x-3)^6}+\frac{243}{(x-3)^7}$. **155.** $-\frac{1}{12(x-1)}-$ $-\frac{2}{5(x-2)}+\frac{1}{140(x+3)}+\frac{10}{21(x-4)}$. **156.** $\frac{1}{4(1-x)}+\frac{1}{4(1+x)}-\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}$. **157.** $\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-2}{3\left(x^2-x+1\right)}$.

158. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C$. **159.** $\frac{1}{5}(2\ln|x+2|+3\ln|x-3|)+C$. **160.** $-\frac{1}{1+x}-2\ln|4-x|+C$.

161. $-\left(\frac{25}{x+5}+\frac{16}{x+4}\right)+40\ln\left|\frac{x+5}{x+4}\right|+C$. **162.** $x-6\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$. **163.** $\frac{1}{1+x}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$.

164. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C$. **165.** $\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)+C$. **166.** $\ln|x+1|+\frac{x+2}{3\left(x^2+x+1\right)}+$ $+\frac{5}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|+C$. **167.** $\frac{3x-17}{2\left(x^2-4x+5\right)}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+5\right|+\frac{15}{2}\operatorname{arctg}(x-2)+C$.

168. $-\frac{1}{3(x-1)^3}+\frac{1}{x-1}+\operatorname{arctg}x+C$. **169.** $\ln|x-5|-\frac{1}{x}-\frac{4}{x-5}+C$. **170.** $-\frac{x^3}{3}-\frac{8}{3}\ln\left|8-x^3\right|+C$.

171. $\frac{x^2}{3\left(1-x^3\right)}+\frac{1}{18}\ln\frac{1+x+x^2}{(1-x)^2}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. **172.** $-\frac{1}{2}\left[\frac{x+2}{x^2+2x+2}+\operatorname{arctg}(x+1)\right]+C$.

173. $-\frac{1}{4x^4}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C$. **174.** $\frac{1}{27}\left[-\frac{1}{4(2-3x)^4}+\frac{4}{5(2-3x)^5}-\frac{2}{3(2-3x)^6}\right]+C$.

175. $\frac{1}{4(1+x)^4}+\frac{1}{3(1+x)^3}+\frac{1}{2(1+x)^2}+\frac{1}{1+x}-\ln\left|\frac{1+x}{x}\right|+C$. **176.** $\frac{x}{8(1+x^2)^4}+\frac{7x}{48(1+x^2)^3}+\frac{35x}{192(1+x)^2}+$ $+\frac{35x}{128(1+x^2)}+\frac{35}{128}\operatorname{arctg}x+C$. **177.** $\ln\left|(x+1)^4(x-2)^3(x-1)^2\right|+C$. **178.** $\ln\left|\frac{x(x-2)^3}{(x-3)(x-1)^3}\right|+C$.

179. $\frac{x^2}{2}+x+\ln\left|\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}\right|-\operatorname{arctg}x+C$. **180.** $\frac{x}{24(x^2+4)^3}+\frac{5x}{38(x^2+4)^2}+\frac{5x}{1024(x^2+4)}+\frac{5}{2048}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$.

181. $\frac{1}{2}x^2+7x-32\ln|x-3|+70\ln|x-4|+C$. **182.** $-\frac{5}{6}\ln|x|+\frac{11}{15}\ln|x+3|+\frac{11}{10}\ln|x-2|+C$.

183. $\frac{3}{20}\ln|x|-\frac{24}{7}\ln|x-4|+\frac{38}{5}\ln|x-5|+C$. **184.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+C$. **185.** $x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$.

186. $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}|\sin x-\cos x|+C$. **187.** $\ln|\sin x-\cos x|+C$. **188.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C$. **189.** $-\ln\left|1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.

190. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x-5}{\operatorname{tg}x}\right|+C$. **191.** $-\frac{1}{2(1+\sin x)}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$. **192.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{5}\cos x\right)+C$.

193. $\frac{1}{2}\cos x-\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C$. **194.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{2}}+C$. **195.** $-\ln|\cos x-\sin x|+C$.

196. $\frac{1}{\cos x}+\cos x+\operatorname{tg}x+C$. **197.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right|+C$. **198.** $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C$. **199.** $\frac{4}{25}x+$ $+\frac{3}{25}\ln|4\cos x+3\sin x|+C$. **200.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}^2x-2\operatorname{tg}x+1}{\operatorname{tg}^2x-\operatorname{tg}x+1}\right|+C$. **201.** $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}x+\ln|\operatorname{tg}x|)+C$. **202.** $\frac{\sin 2x}{2}-$ $-\frac{\sin^3 2x}{6}+C$. **203.** $\frac{x}{2}+\frac{\sin 10x}{20}+C$. **204.** $\frac{1}{8}\left(x-\frac{\sin 4x}{4}\right)+C$. **205.** $4\left(\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{2\sin^5 x}{5}+\right.$ $\left.+\frac{\sin^7 x}{7}\right)+C$. **206.** $\sin x-\sin^3 x+\frac{3}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C$. **207.** $\frac{5x}{16}-\frac{15}{24}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{192}\sin 6x+C$.

208. $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C$. **209.** $-2\operatorname{ctg}2x+C$. **210.** $\frac{\operatorname{tg}^3 2x}{6}+C$. **211.** $\frac{\sin^3 x\cos^2 x}{5}+\frac{2}{15}\sin^3 x+C$.

212. $-\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 8x}{16}+C$. **213.** $\frac{8}{3}\sin^3\frac{x}{4}+C$. **214.** $-\frac{1}{12}\cos 6x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$. **215.** $\operatorname{tg}x-x+C$.

216. $\frac{\cos 6x}{24}-\frac{\cos 4x}{16}-\frac{\cos 2x}{8}+C$. **217.** $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. **218.** $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x-\ln|\sin x|+C$.

219. $\frac{\operatorname{tg}^5 3x}{15}-\frac{\operatorname{tg}^3 3x}{9}+\frac{\operatorname{tg}3x}{3}+C$. **220.** $\frac{\operatorname{tg}^5\varphi}{5}+\frac{\operatorname{tg}^7\varphi}{7}+C$. **221.** $-\frac{2}{5}\operatorname{ctg}^{\frac{5}{2}}x+\frac{2}{9}\operatorname{ctg}^{\frac{9}{2}}x+C$.

222. $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg}x+C$. **223.** $-\left(\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x+\operatorname{ctg}^2 x+\ln|\operatorname{ctg}x|\right)+C$. **224.** $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\sin 6x+\frac{1}{12}\sin 12x\right)+C$.

225. $\frac{1}{2}\left(\cos x-\frac{1}{13}\cos 13x\right)+C$. **226.** $\frac{1}{4}\left(\frac{\sin 12x}{12}-\frac{\sin 6x}{6}+\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 16x}{16}\right)+C$. **227.** $\frac{1}{3}\sin^3 x-$ $-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x+C$. **228.** $\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$. **229.** $2\sqrt{\sin x}\left(1-\frac{1}{5}\sin^2 x\right)+C$. **230.** $\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+$ $+\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7}+C$. **231.** $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+\frac{\operatorname{tg}^6 x}{6}+C$. **232.** $2\sqrt{\operatorname{tg}x}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}x+\frac{1}{7}\operatorname{tg}^3 x\right)+C$. **233.** $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+$ $+3\ln|\operatorname{tg}x|+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C$. **234.** $\frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{12}\sin 6x\right)+C$. **235.** $\frac{1}{128}\times$ $\times\left(3x-\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C$. **236.** $\frac{3}{112}(2x-1)^{\frac{4}{3}}(3+8x)+C$. **237.** $2t-\frac{t}{t^2-1}+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+2}\right|+C$ $\left(t=\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)$. **238.** $x+2\sqrt{x+2}-2\ln|x+3|-2\operatorname{arctg}\sqrt{x+2}+C$. **239.** $-2t+\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C\left(t=\sqrt{\frac{x-3}{x}}\right)$.

240. $-\frac{3}{8}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{3}{2}}+C$. **241.** $2\sqrt{x+5}+5\ln\left|\frac{\sqrt{x+25}-5}{\sqrt{x+25}+5}\right|+C$. **242.** $-2\operatorname{arctg}t+\ln\left|t^2+t+1\right|+$ $+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$ $\left(t=\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)$. **243.** $4\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+24\sqrt[12]{x}+24\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|+C$. **244.** $\frac{2t}{t^2-1}+$ $+\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C$ $\left(t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$. **245.** $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. **246.** $6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+$ $+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$. **247.** $3\sqrt[3]{x+2}+6\sqrt[6]{x+2}+6\ln\left|\sqrt[6]{x+2}-1\right|+C$. **248.** $\ln\frac{\left(\sqrt[12]{x}+1\right)^{12}}{|x|}-\frac{12}{\sqrt[12]{x}}+C$.

249. $6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-6\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|+C$. **250.** $2\sqrt{x-1}\left[\frac{1}{9}(x-1)^4+\frac{4}{7}(x-1)^3+\frac{6}{5}(x-1)^2+\right.$ $\left.+\frac{4}{3}(x-1)+1\right]+C$. **251.** $\frac{2}{125}\sqrt{5x+2}\left[\frac{1}{3}(5x+2)-4-\frac{4}{5x+2}\right]+C$. **252.** $-\frac{\sqrt{3x+4}}{x}+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{3x+4}-2}{\sqrt{3x+4}+2}\right|+C$.

253. $x+14\sqrt{x+2}+56\ln\left|\sqrt{x+2}-4\right|+C$. **254.** $3\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{3+2x}+\sqrt[6]{3+2x}+\ln\left|\sqrt[6]{3+2x}-1\right|\right)+C$.

255. $(x-15)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}-9\ln\left|\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}}\right|+C$. **256.** $\frac{\sqrt{(5-3x)(4+7x)}}{7}-\frac{47\sqrt{21}}{147}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}\right)+C$.

257. $\frac{8}{5}z^5-\frac{8}{3}z^3+C$ $\left(z=\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}\right)$. **258.** t^3-3t+C $\left[t=\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$. **259.** $4x^2+\frac{72}{11}x\sqrt[6]{x^5}+$

$+\frac{18}{5}\sqrt[3]{x^5}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$. **260.** $\frac{(x^2+4)^{\frac{7}{2}}}{7}-\frac{8(x^2+4)^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{16(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$. **261.** $\frac{1}{6}\ln\frac{1+z+z^2}{(1-z)^2}-$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}+C\ \left(z=\frac{\sqrt{1+x^3}}{x}\right)$. **262.** $\frac{1}{6}\ln\left|t^2+t+1\right|+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\ln|1-t|+C$.

263. $\frac{3}{5}(x^2+1)^{\frac{5}{2}}+(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-(x^2+1)^{\frac{1}{2}}+C$. **264.** $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{(x^2-1)\sqrt{x^2+1}}{3x^3}+C$. **265.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^3}-1}{\sqrt[4]{1+x^3}+1}\right|+$
$+\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{1+x^3}+C$. **266.** $\left(2x^{-\frac{3}{4}}+1\right)^{\frac{2}{3}}+C$. **267.** $\ln\left|\frac{t+x-1}{t-x+1}\right|+C\ \left(t=\sqrt{x^2+4x+1}\right)$.

268. $-\frac{1}{2}\ln|t-1|+8\ln|2t+1|-\frac{5}{2}\ln|t+1|+\frac{5}{t+1}+C\ \left(t=\frac{\sqrt{x^2-x+4}+2}{x}\right)$. **269.** $-\frac{\sqrt{6x-8-x^2}}{x-2}+$
$+\frac{2(x-2)}{\sqrt{6x-8-x^2}}+C$. **270.** $\frac{x-3}{2}\sqrt{x^2+2x+5}-\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C$. **271.** $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2-x-5}+x}{\sqrt{5}}+C$.

272. $\frac{1}{4}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$. **273.** $\frac{2}{27}\left(\frac{1}{t}-2t-\frac{t^3}{3}\right)+C\ \left(t=\frac{\sqrt{7x-x^2-10}}{x-2}\right)$.

274. $\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|-\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}+C$. **275.** $\frac{x}{2}\sqrt{4+x^2}+2\ln\left|x+\sqrt{4+x^2}\right|+C$. **276.** $\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-$
$-\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+C$. **277.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-25}-\frac{25}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-25}\right|+C$. **278.** $\frac{x-3}{2}\sqrt{x^2-6x-7}-$
$-\frac{1}{8}\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x-7}\right|+C$. **279.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}+C$. **280.** $\frac{x}{9\sqrt{9-x^2}}+C$.

281. $-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+C$. **282.** $-\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+2\arcsin\frac{x}{2}+C$. **283.** $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\arcsin x+C$.

284. $\frac{x^2-8}{\sqrt{x^2-4}}+C$. **285.** $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}-\sqrt{x^2+1}+C$. **286.** $\frac{1}{9}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}+C$. **287.** $-\frac{1}{5}\frac{x}{\sqrt{x^2-5}}+C$.

288. $\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}+C$. **289.** $\frac{x}{16}\sqrt{16+x^2}+C$. **290.** $\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}+C$. **291.** $\frac{x+3}{2}\sqrt{2-2x+x^2}+$
$+\frac{1}{2}\ln\left|x-1+\sqrt{2-2x+x^2}\right|+C$. **292.** $\frac{2x-1}{4}\sqrt{4x^2-4x+1}+C$. **293.** $\frac{2x^2-5x+1}{6}\sqrt{x^2+2x+2}+$
$+\frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$. **294.** $\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x}-\frac{1}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|+C$. **295.** $\frac{2x+7}{4}\times$
$\times\sqrt{x^2-x+1}+\frac{11}{8}\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right|+C$. **296.** $-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x+C$.

Глава 6
ВИЗНАЧЕНІ ІНТЕГРАЛИ

§ 1. БЕЗПОСЕРЕДНЄ ІНТЕГРУВАННЯ

Приклад. За означенням визначеного інтеграла обчислити площу, обмежену лініями $y=x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$ (рис. 6.1).

Розв'язання. Розіб'ємо відрізок $[0,\ 1]$ на n рівних частин точками ділення $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{n}$, $x_2=\frac{2}{n}$, ... , $x_n=1$, довжина кожного частинного відрізка $\Delta\mu_i=\Delta x_i=\frac{1}{n}$, причому, якщо $\frac{1}{n}\to 0$, то $n\to\infty$ і навпаки. За довільні точки $P_i\in[x_i,\ x_{i+1}]$ візьмемо праві кінці частинних відрізків $P_i=x_{i+1}=\frac{i+1}{n}$. Складемо інтегральну суму

$$\sum_{i=0}^{n-1}f(P_i)\Delta\mu_i=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i+1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{n+1}{2n}.$$

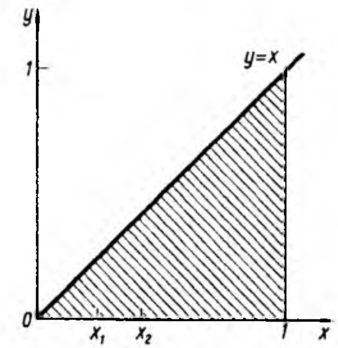

Рис. 6.1

За умови $n\to\infty$, $\frac{1}{n}=\lambda\to 0$ обчислимо шукану площу за формулою

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(P_i)\Delta\mu_i=\lim_{\lambda\to 0}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Це підтверджується геометрично (перевірити самостійно).

Відповідь: $S=\frac{1}{2}$ кв. од.

1. Показати, що при іншому виборі точок P_i у наведеному прикладі границя інтегральної суми буде такою самою (взяти, наприклад, за точку P_i лівий кінець або середину відрізків).

2. За означенням визначеного інтеграла обчислити площу, обмежену лініями $y=x^2$, $x=0$, $x=4$, $y=0$ (ділення відрізка $[0,\ 4]$ та вибір точок P_i можна провести аналогічно наведеному прикладові).

§ 2. ПРАВИЛА ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Приклади. Обчислити інтеграли.

1. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 3x}$.

Розв'язання. Застосуємо формулу Ньютона – Лейбніца [див. ч. 1, с. 511]. Оскільки $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$ є табличним, тому

$$I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 3x} = \frac{1}{3}\operatorname{tg}3x \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}\pi - \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: $I = \frac{1}{3}$.

2. $\int\limits_0^4 \sqrt{4 - x^2}\,dx$.

Розв'язання. Застосуємо метод заміни змінної. Припустимо, що $x = 2\sin t$, $dx = 2\cos t\,dt$; якщо $x = 0$, то $t = 0$; якщо $x = 2$, то $t = \frac{\pi}{2}$ ($\sin t = 1$ головне значення $t = \frac{\pi}{2}$). Тоді

$$I = \int\limits_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot 2\cos t\,dt = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,dt = 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \sin 2t \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

Відповідь: $I = \pi$.

3. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

Розв'язання. Скористаємося методом інтегрування частинами [див. ч. 1, с. 514].

Припустимо, що $u = x$, $dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$, звідки $du = dx$, $v = \int \frac{dx}{\cos^2 x}$, $v = \operatorname{tg} x$. Тоді

$$I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x\operatorname{tg}x \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}x\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{3}\sqrt{3} - \frac{\pi}{4} \cdot 1 + \ln|\cos x| \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \frac{\left(4\sqrt{3} - 3\right)\pi}{12} + \ln\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}6818.$$

Відповідь: $I \approx 0{,}6818$.

4. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

Розв'язання. Виконаємо креслення (рис. 6.2); визначимо координати точок A та B перетину парабол, розв'язавши рівняння

$$4 - x^2 = x^2 - 2x,\quad x^2 - x - 2 = 0,\quad x_1 = 2,\ x_2 = -1.$$

Тоді точка B має координати $x_1 = 2$, $y_1 = 0$, а точка A – $x_2 = -1$, $y_2 = 3$. Площа

$$S = \int\limits_{-1}^{0} \left(4 - x^2 - x^2 + 2x\right)dx + \int\limits_0^2 \left(4 - x^2\right)dx - \int\limits_0^2 \left(x^2 - 2x\right)dx = \int\limits_{-1}^{2} \left(4 - 2x^2 + 2x\right)dx = 9.$$

Відповідь: $S = 9$ кв. од.

Обчислити інтеграли за формулою Ньютона – Лейбніца.

3. $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$.

4. $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt{2 - 3x}\,dx$.

5. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{4x - 3}$.

6. $\int\limits_0^1 \left(5 + \frac{1}{1 + x^2}\right)dx$.

7. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{3}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{4}{\sqrt{3 - x^2}}\right)dx$.

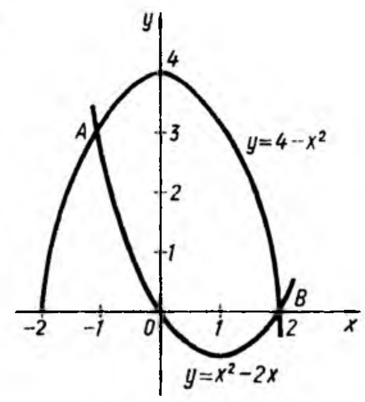

Рис. 6.2

8. $\int\limits_{-2}^{2} e^{3x+4}dx$. **9.** $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\sin 3x-\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx$. **10.** $\int\limits_{0}^{2}\frac{2dx}{x^2+4}$.

11. $\int\limits_{-3}^{-2}\frac{dx}{9-(x-2)^2}$. **12.** $\int\limits_{5}^{6}\frac{3dx}{\sqrt{-4x+x^2}}$.

13. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x dx}{1+\cos x}$. **14.** $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{3x^2+8}}$.

15. Показати, що

1) $\int\limits_{0}^{\pi}\sin 2x\,dx=0$; 2) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=0$; 3) $\int\limits_{-1}^{1}e^{-x^2}dx=2\int\limits_{0}^{1}e^{-x^2}dx$.

16. Обчислити $\int\limits_{0}^{3}f(x)dx$ для функції

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1,\\ \sqrt{x}, & 1\le x\le 3.\end{cases}$$

17. Обчислити $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$ для функції

$$f(x)=\begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2}\le x\le 0,\\ -\frac{2}{\pi}x+1, & 0<x\le\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Використовуючи формулу інтегрування частинами, обчислити інтеграли.

18. 1) $\int\limits_{0}^{1}xe^{-x}dx$; 2) $\int\limits_{-1}^{1}x^2e^{-x}dx$.

19. 1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cos 2x\,dx$; 2) $\int\limits_{1}^{e}\ln x\,dx$.

20. 1) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x\,dx}{\sin^2 x}$; 2) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}x\,dx$.

21. 1) $\int\limits_{0}^{e-2}\ln(x+2)dx$; 2) $\int\limits_{1}^{e}\ln^2 x\,dx$.

22. 1) $\int\limits_{0}^{\pi}e^x\sin x\,dx$; 2) $\int\limits_{-1}^{1}x\operatorname{arctg}x\,dx$.

23. 1) $\int\limits_{0}^{\pi}x\sin 2x\,dx$; 2) $\int\limits_{1}^{2}(2x+1)\ln x\,dx$.

Обчислити інтеграли за допомогою слушної заміни змінної.

24. 1) $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{1+x^4}$; 2) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

25. 1) $\int\limits_{0}^{2}xe^{-x^2}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1}x^3\sqrt{1-x^4}\,dx$.

26. 1) $\int\limits_{e^2}^{e^3}\frac{dx}{x\ln x}$; 2) $\int\limits_{0}^{1}\frac{e^x dx}{4+e^{2x}}$.

27. 1) $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x\,dx}{4-\cos^2 x}$.

28. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta}d\theta$. **29.** $\int\limits_{0}^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$.

30. $\int\limits_{0}^{a}y^2\sqrt{a^2-y^2}\,dy$. **31.** $\int\limits_{0}^{\pi}\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta$.

Обчислити площу фігури, обмеженої кривими (побудувати креслення).

32. $y=-x^2$, $y+x+2=0$. **33.** $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$.

34. $y^2=x+1$, $y^2=9-x$, $y=0$. **35.** $x^2=4y$, $y=\frac{8}{x^2+4}$ (локон Аньєзі).

36. $y=x+1$, $y=\cos x$, $y=0$.

§ 3. ОБЧИСЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ПЕРШОГО РОДУ І ДОВЖИНИ ДУГИ КРИВОЇ*

Приклади. **1.** Обчислити криволінійний інтеграл першого роду

$$\int\limits_{AB} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dl,$$

де AB – перший виток гвинтової лінії

$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t, \ 0 \le t \le 2\pi. \\ z = 4t, \end{cases}$$

Розв'язання. Першому виткові відповідає зміна параметра $t_0 = 0$, $T = 2\pi$ та $dl = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + 16}\,dt = 5dt$. У точках гвинтової лінії підінтегральна функція має вигляд $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{9+16t^2}$.

Отже,

$$I = \int\limits_{AB} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dl = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{9+16t^2} \cdot 5dt = 5\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{9+16t^2}\,dt.$$

Обчислимо інтеграл, застосувавши формулу Остроградського [ч. 1, с. 482]:

$$\int \sqrt{16t^2+9}\,dt = \int \frac{16t^2+9}{\sqrt{16t^2+9}}\,dt; \quad \int \frac{16t^2+9}{\sqrt{16t^2+9}}\,dt = (At+B)\sqrt{16t^2+9} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{16t^2+9}},$$

де A, B, λ – невизначені коефіцієнти для визначення коефіцієнтів A, B, λ. Здиференціюємо здобутий вираз:

$$\frac{16t^2+9}{\sqrt{16t^2+9}} = A\sqrt{16t^2+9} + (At+B)\frac{16t}{\sqrt{16^2+9}} + \frac{\lambda}{\sqrt{16t^2+9}}.$$

Якщо дроби звести до спільного знаменника і відкинути його, то

$$16t^2+9 = A(16t^2+9) + 16t(At+B) + \lambda:$$

$$\begin{array}{c|l} t^2 & 16 = 32A, \ A = \dfrac{1}{2}; \\ t & 0 = 16B, \ B = 0; \\ t^0 & 9 = A9 + \lambda, \ \lambda = \dfrac{9}{2}. \end{array}$$

* Див. ч. 1, гл. 6, підрозд. 7.4, 7.5.

Тоді

$$\int \sqrt{9+16t^2} = \frac{t}{2}\sqrt{9+16t^2} + \frac{9}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{16t^2+9}} = \frac{t}{2}\sqrt{9+16t^2} + \frac{9}{2\cdot 4}\ln\left|4t + \sqrt{16t^2+9}\right|.$$

Остаточно маємо

$$I = 5\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{9+16t^2}\,dt = \left(\frac{5t}{2}\sqrt{9+16t^2} + \frac{45}{8}\ln\left|4t+\sqrt{9+16t^2}\right|\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 427{,}718.$$

Відповідь: $I \approx 427{,}718$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_{AB} x^2 y\,dl$, де AB – частина кола $x^2+y^2=4$, розміщена в першій чверті $(x \ge 0, \ y \ge 0)$.

Розв'язання. Рівняння частини кола, розміщеної в першій чверті, запишемо у вигляді $y = \sqrt{4-x^2}$, $0 \le x < 2$. Визначимо

$$dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx, \ y' = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}, \ dl = \sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\,dx;$$

після елементарних перетворень маємо

$$dl = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$$

Тоді

$$I = \int\limits_{AB} x^2 y\,dl = \int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,\frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2\int\limits_0^2 x^2\,dx = 2\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{2}{3}(8-0) = \frac{16}{3}.$$

Відповідь: $I = \dfrac{16}{3}$.

3. Визначити масу дуги конічної гвинтової лінії $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi, \\ z = e^t, \end{cases}$ якщо щільність розподілу матеріалу $f(x, y, z) = 2z$.

Розв'язання. Шукана маса $m = \int\limits_{AB} 2z\,dl$ у точках конічної гвинтової лінії $f(x, y, z) = 2e^t$ параметра t змінюється від 0 до 2π, а $dl = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$, тоді $\dot{x}(t) = e^t\cos t - e^t\sin t$, $\dot{y}(t) = e^t\sin t + e^t\cos t$, $\dot{z}(t) = e^t$. Маємо

$$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} = \sqrt{e^{2t}\left(2\cos^2 t - 2\sin t\cos t + 2\sin^2 t + 2\sin t\cos t + 1\right)} = \sqrt{3}e^t,$$

або $dl=\sqrt{3}e^t dt$. Остаточно $m=\int\limits_{AB} 2z dl=2\sqrt{3}\int\limits_0^{2\pi} e^{2t}dt=\sqrt{3}e^{2t}\Big|_0^{2\pi}=\sqrt{3}$.

Відповідь: $m=\sqrt{3}$ од. маси.

4. Обчислити довжину дуги кривої:

1) $\begin{cases} x=4\cos t, \\ y=4\sin t,\ 0\le t\le\dfrac{\pi}{2} \\ z=3t, \end{cases}$ (гвинтова лінія).

Розв'язання. Довжина дуги гвинтової лінії у разі зміни t від 0 до $\dfrac{\pi}{2}$ обчислюється за формулою

$$l=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt=5\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{5\pi}{2}.$$

Відповідь: $l=\dfrac{5\pi}{2}$ лін. од.

2) $\begin{cases} x=R\cos t, \\ y=R\sin t, \end{cases}$ $0\le t\le\pi$ (половина довжини кола радіуса R).

Розв'язання. Довжина дуги кола у разі зміни t від 0 до π обчислюється за формулою

$$l=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=R\int\limits_0^{\pi}dt=\pi R.$$

Відповідь: $l=\pi R$ лін. од.

3) $y^2=x^3$, від $x=0$ до $x=1$ $(y\ge 0)$.

Розв'язання. Довжина дуги кривої

$$l=\int\limits_0^1\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int\limits_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13}-1\right)\approx 1{,}44.$$

Відповідь: $l\approx 1{,}44$ лін. од.

Обчислити криволінійні інтеграли першого роду.

37. $\int\limits_{AB} xyz\,dl$, де AB – дуга кривої $\begin{cases} x=t, \\ y=\dfrac{1}{3}\sqrt{8t^3},\ 0\le t\le 1. \\ z=\dfrac{1}{2}t^2, \end{cases}$

38. $\int\limits_{AB}\dfrac{z^3}{x^2+y^2}dl$, де AB – перший виток гвинтової лінії $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \\ z=t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.

39. $\int\limits_C\left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)dl$, де C – виток гвинтової лінії $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=2\sin t, \\ z=\dfrac{1}{4}t, \end{cases}$ $0\le t\le\pi$.

40. $\int\limits_C\dfrac{dl}{\left(x^2-y^2\right)^2}$, де C – частина кола $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases}$ $0\le t\le\dfrac{\pi}{6}$.

41. $\int\limits_{AB}\dfrac{dl}{x-y}$, де AB – відрізок прямої $y=\dfrac{1}{3}x-3$ з кінцями в точках $A(0,\ -3)$, $B(9,\ 0)$.

42. Визначити масу ділянки ланцюгової лінії $y=\operatorname{ch}x$ між точками $x=0$, $x=2$, якщо:

1) щільність кривої в кожній точці обернено пропорційна ординаті точки $\rho(x)=\dfrac{k}{y}$;

2) щільність кривої в кожній її точці є сталою і дорівнює одиниці: $\rho(x)=1$.

43. Визначити масу ділянки гвинтової лінії, розміщеної неперервно вздовж дуги кривої (C) зі щільністю $\rho(x,\ y)=x^2+y^2$.

Рівняння гвинтової лінії

$$\begin{cases} x=\cos t,\\ y=\sin t,\ \ 0\le t\le 2\pi.\\ z=t,\end{cases}$$

44. Обчислити довжину дуги кривої (циклоїди) $\begin{cases} x=2(t-\sin t),\\ y=2(1-\cos t),\end{cases}\ 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}.$

Обчислити довжину дуги кривої.

45. $\begin{cases} x=16t,\\ y=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}t^3,\ \ 0\le t\le 5.\\ z=\dfrac{1}{5}t^5,\end{cases}$

46. $\begin{cases} x=R\cos t,\\ y=R\sin t,\ \ 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}.\\ z=\dfrac{h}{2\pi}t,\end{cases}$

§ 4. ОБЧИСЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ДРУГОГО РОДУ*

Приклади. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду.

1. $\int\limits_{OA} xy\,dx+yz\,dy+zx\,dz$, де $OA:\begin{cases} x=\cos t,\\ y=\sin t,\quad 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}.\\ z=1,\end{cases}$

Розв'язання. Знайдемо $dx=-\sin t\,dt$, $dy=\cos t\,dt$, $dz=0$,тоді

$$I=\int\limits_{OA} xy\,dx+yz\,dy+zx\,dz=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin^2 t\,dt+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,d\sin t+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=-\frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\cos 2t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

Відповідь: $I=\dfrac{1}{6}$.

* Див. ч. 1, гл. 6, підрозд. 7.6, 7.7.

2. $\int\limits_{OB} x^2y\,dx+x^3dy$, де $OB:\ \{y^2=x,\quad y\ge 0,\ 0\le x\le 4$.

Розв'язання. Знайдемо $dx=2y\,dy$, y змінюється від $y=0$ до $y=2$, тоді

$$I=\int\limits_{OB} x^2y\,dx+x^3dy=\int\limits_0^2 y^4\cdot y\cdot 2y\,dy+\int\limits_0^2 y^6dy=3\int\limits_0^2 y^6dy=3\cdot\frac{y^7}{7}\Bigg|_0^2=\frac{384}{7}.$$

Відповідь: $I=\dfrac{384}{7}$.

3. Обчислити площу круга (рівняння кола в параметричній формі $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\le t\le 2\pi$).

Розв'язання. Для обчислення площі круга скористаємося формулою (7.20) [ч. 1, с. 520]. Знайдемо $dx=-a\sin t\,dt$, $dy=a\cos t\,dt$, тоді

$$S_D=\frac{1}{2}\oint\limits_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2 t\right)dt+\left(a^2\sin^2 t\right)dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}a^2\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)dt=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}dt=\pi a^2.$$

Відповідь: $S_D=\pi a^2$ кв. од.

Обчислити криволінійний інтеграл другого роду.

47. $\int\limits_{OA} xy\,dx+yz\,dy+z^2x\,dz$, де

$$OA:\begin{cases} x=2\cos t,\\ y=2\sin t,\ \ 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}.\\ z=2,\end{cases}$$

48. $\int\limits_{AB}\left(x^2-y^2\right)dy$, де AB – дуга кубічної параболи $y=2x^3$, $0\le x\le 1$.

49. $\int\limits_{AB}(x+3y)dx+(y+3x)dy$, де AB – дуга параболи $x=\dfrac{1}{2}y^2$ від точки $A\left(1,\ \sqrt{2}\right)$ до точки $B(2,\ 2)$.

50. $\oint\limits_L\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(\dfrac{2}{y}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy$, де L – замкнутий контур ABC: $A(1,\ 1)$, $B(4,\ 1)$, $C(4,\ 4)$ (рис. 6.3).

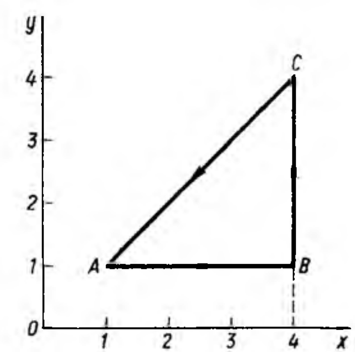

Рис. 6.3

51. Обчислити роботу силового поля $\bar{F} = 2xy\bar{i} + y^2\bar{j} - x^2\bar{k}$ під час переміщення матеріальної точки вздовж перерізу гіперболоїда $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2$ площиною $y = x$ від точки $A(1,\ 1,\ 0)$ до точки $B\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 1\right)$.

Обчислити площу фігури.

52. Фігура обмежена чвертю кола $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

53. Фігура обмежена лініями $y^2 = 2x,\ y^2 = 2 - x$.

§ 5. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ*

Приклади. Для зазначених областей D записати подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy$ у вигляді повторних.

1. Область D обмежена лініями $y^2 = 2x$, $x = 2$, $y = 0$, $x = 0$.

Розв'язання. Побудуємо область D (рис. 6.4). Перша лінія $y^2 = 2x$ є параболою з вершиною в точці $O(0,\ 0)$, симетричною відносно осі Ox; $x = 2$ та $y = 0$, $x = 0$ – прямі лінії. Контур області D перетинається будь-якою прямою, паралельною осі Oy або Ox тільки у двох точках, отже, область D виявляється правильною у напрямі осей Ox та Oy.

Область змінної x від 0 до 2, змінної y від 0 до $\sqrt{2x}$ (див. точки перетину прямої, паралельної осі Oy з контуром області), тоді

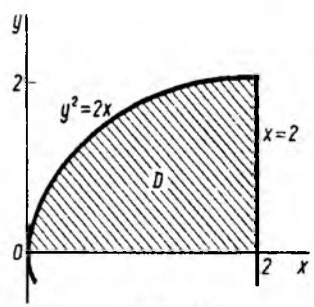

Рис. 6.4

$$I = \iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x}} f(x,\ y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{1}{2}y^2}^{2} f(x,\ y)\,dx.$$

Відповідь: $I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x}} f(x,\ y)\,dx = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{1}{2}y^2}^{2} f(x,\ y)\,dx.$

* Див. ч. I, гл. 6, підрозд. 7.8–7.10.

2. Область D обмежена лініями $y = 2x,\ 2y - x = 0,\ x + y - 6 = 0.$

Розв'язання. Побудуємо область (рис. 6.5), обмежену прямими $y = 2x$, $2y - x = 0$, $x + y - 6 = 0$. Розв'язуючи системи рівнянь

$$\begin{cases} y = 2x, \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} 2y - x = 0, \\ x + y - 6 = 0, \end{cases} \text{ дістанемо } \begin{cases} x = 2, \\ y = 4 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x = 4, \\ y = 2. \end{cases}$$

Ці розв'язки виявляються координатами точок $A(2,\ 4)$ і $B(4,\ 2)$. Область, заштрихована на рис. 6.5, виявляється неправильною у напрямі осі Oy. Розіб'ємо її на дві області: D_1 і D_2; ці області є правильними в напрямі осі Oy. Рівняння границь областей

$$D_1 : y = 2x,\ x = 2,\ y = \frac{x}{2};\quad D_2 : x + y - 6 = 0,\ y = \frac{x}{2},\ x = 2.$$

Маємо

$$I = \iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x,\ y)\,dx\,dy +$$

$$+ \iint\limits_{D_2} f(x,\ y)\,dx\,dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x,\ y)\,dy + \int\limits_2^4 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{6-x} f(x,\ y)\,dy.$$

Відповідь: $I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x,\ y)\,dy + \int\limits_2^4 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{6-x} f(x,\ y)\,dy$.

Для зазначених областей D записати подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy$ у вигляді повторних.

54. D – прямокутник з вершинами $A(1,\ 2)$, $B(5,\ 2)$, $A_1(5,\ 4)$, $B_1(1,\ 4)$.

55. D – область, обмежена кривими $y^2 = x,\ x^2 + y^2 = 2,\ y \ge 0$.

56. D – область, обмежена лініями $y = \dfrac{9}{x},\ y = 10 - x$.

57. D – область, обмежена лініями $y = e^x,\ x = 0,\ y = 2$.

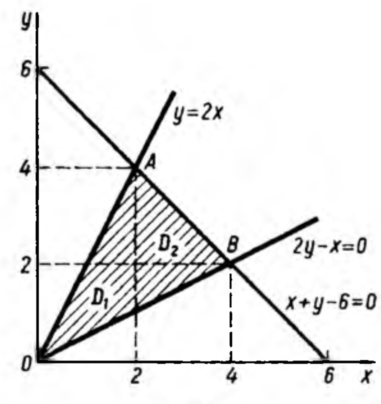

Рис. 6.5

58. D – область, обмежена прямими $y = x,\ x + y = 4,\ x = 0$.

Обчислити подвійні інтеграли.

59. $\iint\limits_D \left(x^3 + y^3\right) dx\, dy$, де D – область, обмежена лініями $y = \dfrac{x}{2}$, $y = x,\ x = 4$.

60. $\iint\limits_D \left(3x^2 - 2xy + y\right) dx\, dy$, де D – область, обмежена лініями $y = 2$, $y^2 = x,\ x = 0$.

61. $\iint\limits_D (x - y)\, dx\, dy$, де D – область, обмежена лініями $x = 0,\ y = 2 - x^2$, $y = 2x - 1$.

62. $\iint\limits_D dx\, dy$, де D - область, обмежена лініями $y^2 = x,\ x^2 + y^2 = 2$, $y = 0,\ y > 0$.

63. $\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy$, де D – область, обмежена лініями $y = \dfrac{x}{2},\ y = 2x$, $y = \dfrac{2}{x},\ x > 0$.

§ 6. ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ*

Приклади. Обчислити потрійний інтеграл.

1. $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(1 + x + y + z)^3}$, область V обмежена площинами $x + y + z - 1 = 0$, $x = 0,\ y = 0, z = 0$.

Розв'язання. Область V обмежена координатними площинами $x = 0$, $y = 0,\ z = 0$ і площиною $x + y + z - 1 = 0$ (рис. 6.6). Проекцією області V на площину xOy є область D, створена прямими $x = 0,\ y = 0,\ x + y - 1 = 0$. Область V є правильною в напрямі осі Oz, отже, потрійний інтеграл можна обчислити за формулою (7.31) [ч. 1, с. 528]. Границі зміни x від 0 до 1; y від 0 до $1 - x$; z від 0 до $1 - x - y$. Тоді

* Див. ч. 1, гл. 6, підрозд. 7.11.

$$I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1 + x + y + z)^3} =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1 + x + y + z)^3} \right] dy \right\} dx =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1 + x + y + z)^3} =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\frac{-1}{2(1 + x + y + z)^2} \right] \Bigg|_0^{1-x-y} =$$

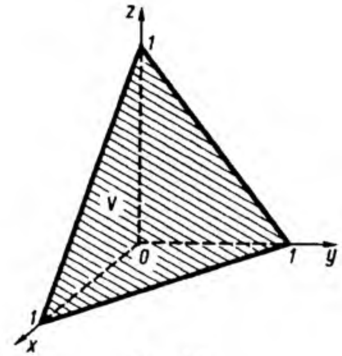

Рис. 6.6

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\frac{1}{2(x + y + 1)^2} - \frac{1}{8} \right) dy = \int_0^1 dx \left[-\frac{1}{2(1 + x + y)} \Bigg|_0^{1-x} - \frac{1}{8}(1 - x) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{1 + x} - \frac{3 - x}{4} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{1 + x} - \frac{1}{8} \int_0^1 (3 - x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|1 + x| \Big|_0^1 + \frac{1}{16}(3 - x)^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{4}{16} - \frac{9}{16} \approx 0{,}034.$$

Відповідь: $I \approx 0{,}034$.

Примітка. Область D є правильною і в напрямі осі Ox, тому потрійний інтеграл можна обчислити за формулою (7. 32) [ч. 1, с. 528]:

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1 + x + y + z)^3} = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-y} \left[\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1 + x + y + z)^3} \right] dx \right\} dy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1 + x + y + z)^3} = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} \left(\frac{1}{2(1 + x + y)^2} - \frac{1}{8} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dy}{1 + y} - \frac{1}{8} \int_0^1 (3 - y)\, dy = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{15}{16} \approx 0{,}034.$$

2. $\iiint\limits_V \dfrac{xy}{\sqrt{z}}\, dx\, dy\, dz$, область V обмежена поверхнями $z^2 = 4x^2 + 4y^2$, $z = 2$, $x = 0,\ y = 0$.

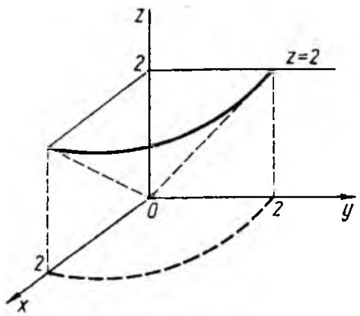

Рис. 6.7

Розв'язання. Область V обмежена конічною поверхнею $z^2 = 4x^2 + 4y^2$, площиною $z = 2$ і координатними площинами $x = 0$, $y = 0$ (рис. 6.7). Конус $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ перетинається площиною $z = 2$ по колу, проекція якої на xOy має рівняння $x^2 + y^2 = 1$. Ця область є правильною у напрямі осі Oy, тому потрійний інтеграл обчислюємо за формулою (7. 31) [ч. 1, с. 528]. Границя зміни x від 0 до 1, y від 0 до $\sqrt{1-x^2}$, z від $\sqrt{4x^2+4y^2}$ до 2. Тоді

$$I = \iiint_V \frac{xy}{\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{2}\frac{xy}{\sqrt{z}}\,dz\right)dy\right]dx =$$

$$= \int_0^1 x\,dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy \int_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{2}\frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^1 x\,dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\left(2\sqrt{z}\,\Big|_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{2}\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^1 x\,dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(y - y\sqrt[4]{x^2+y^2}\right)dy = 2\sqrt{2}\int_0^1 \frac{x}{10}\,dx - 2\sqrt{2}\int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx -$$

$$-2\sqrt{2}\int_0^1 \frac{2}{5}x^{\frac{7}{2}}\,dx = 2\sqrt{2}\,\frac{x^2}{20}\Bigg|_0^1 - 2\sqrt{2}\,\frac{x^4}{8}\Bigg|_0^1 - 2\sqrt{2}\,\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{9}\,x^{\frac{9}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{36} \approx 0{,}039.$$

Відповідь: $I \approx 0{,}039$.

Обчислити потрійні інтеграли.

64. $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$, якщо область V обмежена площинами $x+y+z+1=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

65. $\iiint_V x\,dx\,dy\,dz$, якщо область V обмежена площинами $2x+3y+4z=12$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

66. $\iiint_V xyz\,dx\,dy\,dz$, якщо область V обмежена поверхнями $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$, $z = 0$.

67. $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$, якщо область V обмежена поверхнями $x^2+y^2+z^2=1$, $z=0$, $x=0$, $y=0$, $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

68. $\iiint_V xyz\,dx\,dy\,dz$, якщо область V обмежена поверхнями $x^2+y^2 \le 4$, $z=0$, $z=4$, $(x>0,\ y>0)$.

Використовуючи потрійний інтеграл, у прикладах 69–73 визначити об'єми, обмежені поверхнями.

69. Площини $x-y+z-6=0$, $x+y-2=0$, $x-y=0$, $y=0$, $z=0$.

70. Площини $x+y+z=6$, $x-y=0$, $x=3$, $y=0$, $z=0$.

71. Параболоїда $x = y^2 + z^2$ і площини $x-y=0$, $z=0$ $(z>0)$.

72. Параболоїда $5z = x^2 + y^2$ і площини $z-5=0$.

73. Площини $3y+2x=6$, $z=0$, $x=0$ і параболічного циліндра $z=y^2$.

74. Визначити масу куба $0 \le x \le 6$, $0 \le y \le 6$, $0 \le z \le 6$, якщо щільність у точці $(x,\ y,\ z)$ дорівнює $\rho(x,\ y,\ z) = x+y+z$.

75. Визначити масу тіла, обмеженого площинами $x=0$, $z=0$, $y-1=0$, $y-3=0$, $x-2z-3=0$, якщо щільність у точці $(x,\ y,\ z)$ дорівнює $\rho(x,\ y,\ z) = y$.

§ 7. ЗАМІНА ЗМІННИХ У ПОДВІЙНОМУ ТА ПОТРІЙНОМУ ІНТЕГРАЛАХ*

Приклади. **1.** Обчислити $\iint_D (x^2-y^2)(x-y)\,dx\,dy$, якщо область D обмежена прямими $x+y-1=0$, $x-y-1=0$, $x+y-3=0$, $x-y+1=0$.

Розв'язання. Зобразимо область D у системі координат xOy (рис. 6.8). Область D є неправильною в напрямі осей Ox та Oy. Для обчислення подвійного інтеграла по цій області її треба розбити на правильні підобласті; щоб уникнути цього, введемо нові змінні u, v:

$$x+y=u,\ x-y=v \text{ або } x=\frac{1}{2}(u+v),\ y=\frac{1}{2}(u-v).$$

* Див. ч. 1, гл. 6, підрозд. 7.12, 7.13.

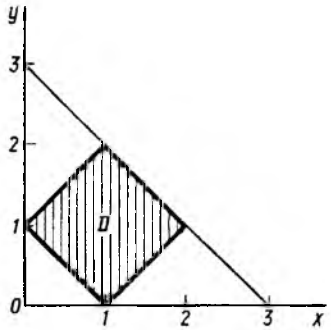

Рис. 6.8

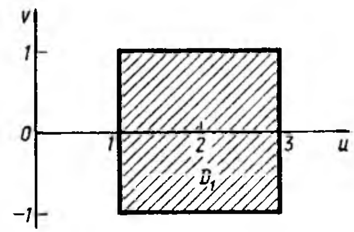

Рис. 6.9

Обчислимо якобіан перетворення

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}; |\ I\ | = \frac{1}{2}.$$

При заданому відображенні маємо

$$\iint\limits_D \left(x^2 - y^2\right)(x-y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_1} uv^2\,du\,dv,$$

де D_1 – замкнена область у площині (u, v), яку відображаємо перетворенням $x = \frac{1}{2}(u+v)$, $y = \frac{1}{2}(u-v)$ (рис. 6.9). Прямі $x+y-1=0$, $x-y-1=0$, $x+y-3=0$, $x-y+1=0$ переходять у відповідні прямі $u=1$, $v=1$, $u=3$, $v=-1$. Область D_1 є правильною у напрямі осей u та v. Область змінних $1 \le u \le 3$, $-1 \le v \le 1$. Тоді

$$I = \iint\limits_D \left(x^2 - y^2\right)(x-y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_1} uv^2\,du\,dv = \frac{1}{2}\int\limits_1^3 u\,du\int\limits_{-1}^1 v^2 dv = \frac{1}{2}\int\limits_1^3 u\,du \frac{v^3}{3}\Bigg|_{-1}^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_1^3 u\,du = \frac{1}{3}\frac{u^2}{2}\Bigg|_1^3 = \frac{4}{3}.$$

Відповідь: $I = \frac{4}{3}$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лемніскатою Бернуллі $\left(x^2+y^2\right)^2 = 4xy$ (рис. 6.10).

Розв'язання. Запишемо рівняння лемніскати в полярній системі координат за формулою (1.2) [ч. 1, с. 8]:

$$\left(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi\right)^2 = 4\rho^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Виконавши перетворення, дістанемо $\rho^2 = 4\sin\varphi\cos\varphi$, $\rho = 2\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}$. З умови $\cos\varphi\sin\varphi \ge 0$ маємо $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ $\left(\pi \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}\right)$, якобіан $I = \rho$. Віссю симетрії половини лемніскати є промінь $\varphi = \frac{\pi}{4}$, тому D_1 – чверть лемніскати. Тоді

$$S = \iint\limits_D dx\,dy = 4\iint\limits_{D_1}\rho\,d\rho\,d\varphi = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}} \rho\,d\rho = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \cdot \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{2\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}} =$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin 2\varphi\,d\varphi = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2\varphi\,d\varphi = -2\cos 2\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2.$$

Відповідь: $S = 2$ кв. од.

3. Перейшовши до циліндричних координат, обчислити $\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz$, де область V задана виразами $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, $x = 2$, $z = 5$, $y = \sqrt{2x - x^2}$ (рис. 6.11).

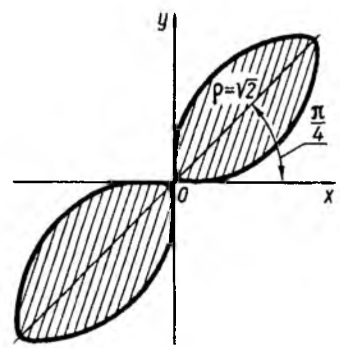

Рис. 6.10

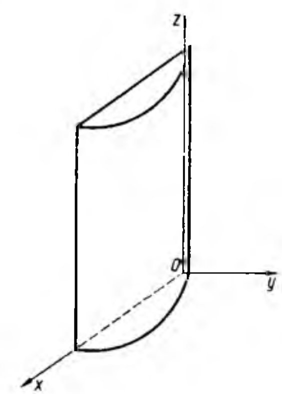

Рис. 6.11

Розв'язання. Рівняння $x=0$, $y=0$, $z=0$ визначають координатні площини, $z=5$ – площина, паралельна площині xOy, яка відтинає від осі Oz відрізок, що дорівнює 5. Рівняння $y=\sqrt{2x-x^2}$ визначає частину циліндричної поверхні з твірною, паралельною осі Oz.

У циліндричній системі координат

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, & 0\le\rho<+\infty; \\ y=\rho\sin\varphi, & \rho\le\varphi<2\pi; \\ z=z, & -\infty<z<+\infty \end{cases}$$

рівняння $y=\sqrt{2x-x^2}$ набирає вигляду $\rho=2\cos\varphi$. Область змінних $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\rho\le 2\cos\varphi$, $0\le z\le 5$, якобіан $I=\rho$. Тоді за формулою (7.31) [ч. 1, с. 528]

$$I=\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}d\rho\int\limits_0^5\rho^2\sin\varphi\,dz=5\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi\,d\rho=$$

$$=\frac{5}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\cdot\rho^3\Big|_0^{2\cos\varphi}=\frac{40}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin\varphi\,d\varphi=$$

$$=-\frac{40}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\,d\cos\varphi=-\frac{40}{3}\frac{\cos^4\varphi}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{10}{3}.$$

Відповідь: $I=\frac{10}{3}$.

4. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V\frac{xyz}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, де область V обмежена зверху поверхнею $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=xy$ та площинами $z=0$, $y=0$.

Розв'язання. Перейдемо до сферичних координат:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi\sin\theta, & 0\le r<+\infty; \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, & 0\le\varphi<2\pi; \\ z=r\cos\theta, & -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Рівняння поверхні набирає вигляду

$$r^2=\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi \quad \text{або} \quad r=\sin\theta\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Область змінних r – від 0 до $\sin\theta\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}$; для існування поверхні має виконуватись умова $\sin\varphi\cos\varphi\ge 0$ чи, з урахуванням обмеження на φ, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$; з умови $r\ge 0$ випливає $\sin\theta\ge 0$ чи $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, якобіан $I=r^2\sin\theta$. Тоді

$$I=\iiint\limits_V\frac{xyz}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_V r^3\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{\sin\theta\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}r^3\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,dr=$$

$$=\frac{1}{32}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\cos\theta\sin^3 2\varphi\,d\theta=\frac{1}{192}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 2\varphi\,d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{384}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 2\varphi\right)d\cos 2\varphi=-\frac{1}{384}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\cos 2\varphi+\frac{1}{384}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2\varphi\,d\cos 2\varphi=$$

$$=-\frac{1}{384}\cos 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{384}\frac{\cos^3 2\varphi}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{288}.$$

Відповідь: $I=\frac{1}{288}$.

76. Обчислити $\iint\limits_D(x+y)^3(x-y)^3dx\,dy$, якщо D – квадрат, обмежений прямими $x+y=1$, $x+y=3$, $x-y=1$, $y-x=1$.

Перейшовши до полярних координат, обчислити подвійні інтеграли.

77. $\iint\limits_D\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)dx\,dy$, якщо D – круг $x^2+y^2\le\pi^2$.

78. $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, якщо область D обмежена лініями $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=16$.

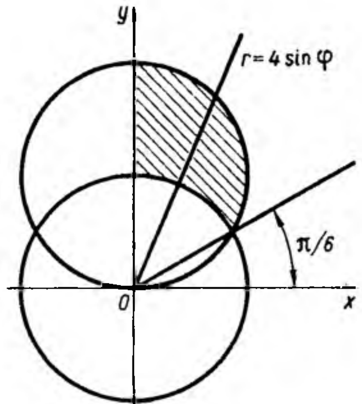

Рис. 6.12

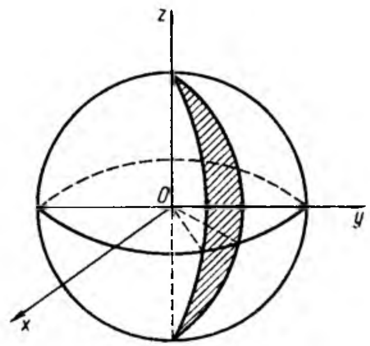

Рис. 6.13

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями (перейти до полярних координат).

79. $x^3 + y^3 = 2xy$.

80. $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 - 4y = 0$, $x = 0$ (рис. 6.12).

81. $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $x^2 + y^2 - x = 0$.

82. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2xy$.

83. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a\left(x^3 + y^3\right)$, $a > 0$.

Перейшовши до сферичних координат, визначити такі величини.

84. Об'єм кулі радіуса $R\left(x^2 + y^2 + z^2 = R^2\right)$.

85. Об'єм тіла, обмеженого циліндричною поверхнею $2x = x^2 + y^2$, сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ та площиною $z = 0$.

86. Об'єм частини кулі радіуса $R\left(x^2 + y^2 + z^2 = R^2\right)$, замкненої між двома меридіанними площинами $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{6}$ та $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{3}$ (рис. 6.13).

87. Масу частини кулі $x^2 + y^2 + z^2 \le 16$, що міститься в першому октанті $(x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0)$, якщо щільність розподілу матеріалу $f(x,\ y,\ z) = z$.

88. Масу півкулі $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, $z \ge 0$, якщо щільність розподілу матеріалу $f(x,\ y,\ z) = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

89. Обчислити $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, перейшовши до сферичних координат, якщо V – внутрішня частина сектора кулі радіуса $R = 3\left(x^2 + y^2 + z^2 \le 9\right)$ з центром у початку координат та кутом при вершині $\alpha = 90^\circ$.

Перейшовши до циліндричних координат, обчислити об'єм тіла, обмеженого такими поверхнями.

90. $z = x^2 + y^2$ (параболоїд), $z = 1$ (площина, паралельна площині xOy).

91. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (сфера) та $x^2 + y^2 = 4z$ (параболоїд).

Обчислити потрійні інтеграли.

92. $\iiint\limits_V z\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} dx\,dy\,dz$, якщо область V обмежена циліндричною поверхнею $x = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$ та площинами $y = 0$, $z = 0$, $z = 1$.

93. $\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} dx\,dy\,dz$, якщо область V обмежена знизу параболоїдом $z = x^2 + y^2$, зверху площиною $z = 1$ (на площину xOy тіло проеціюється в коло $x^2 + y^2 \le 1$).

§ 8. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА ПЕРШОГО РОДУ ПО ПОВЕРХНІ*

Приклад. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma \left(x^2 + y^2\right) d\sigma$, де σ – півсфера, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Р о з в ' я з а н н я. За відомою формулою [ч. 1, с. 540] маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},\quad d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy,$$

* Див. ч. 1, гл. 6, підрозд. 7.15.

$$d\sigma = \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \quad I = \iint_\sigma (x^2+y^2)d\sigma = \iint_D \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dx\,dy.$$

Поверхня σ проеціюється на площину xOy в область D. Область D – коло $x^2+y^2 \le 1$. Для обчислення подвійного інтеграла

$$\iint_D \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

по області D перейдемо до полярних координат:

$$x = \rho\cos\varphi,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ y = \rho\sin\varphi,\ 0 \le \rho < +\infty.$$

У полярних координатах область D визначається за такими формулами: $x^2+y^2 \le 1$, $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi \le 1$, $\rho \le 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$. З огляду на симетрію кола та парність підінтегральної функції виберемо значення полярного кута $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Тоді

$$I = \iint_\sigma (x^2+y^2)\ d\sigma = \iint_D (x^2+y^2)\ \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{4\pi}{3}.$$

Внутрішній інтеграл обчислюється підстановкою $\rho = \sin t$, $d\rho = \cos t dt$. Встановимо границі змінної t з умови $\sqrt{1-\rho^2} = \cos t$: $\rho = 0$, $t = 0$; $\rho = 1$, $t = \frac{\pi}{2}$. Тоді

$$\int_0^1 \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t\cos t}{\cos t}dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\,d\cos t =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\cos t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,d\cos t = -\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Відповідь: $I = \frac{4\pi}{3}$.

Обчислити поверхневий інтеграл першого роду.

94. $\iint_\sigma z d\sigma$, де σ – півсфера $x^2+y^2+z^2 = 9$, $z \ge 0$.

95. $\iint_\sigma (x^2+y^2)d\sigma$, де σ – частина конічної поверхні $z^2 = x^2+y^2$, укладеної між площинами $z = 0$, $z = 1$.

96. Визначити масу, розподілену на поверхні куба з площинами $x=4$, $y=4$, $z=4$, $x=-4$, $y=-4$, $z=-4$, якщо поверхнева густина в точці $(x,\ y,\ z)$ дорівнює $u = \sqrt[3]{|xyz|}$.

Обчислити площу поверхні тіла, обмеженого поверхнями.

97. $z^2 = x^2+y^2$ (конічна поверхня) та площинами $z = 0$, $z = 3$.

98. $z = x$, $x+y = 1$, $y = 0$, $x = 0$.

§ 9. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА ДРУГОГО РОДУ ПО ПОВЕРХНІ*

Приклад. Визначити потік векторного поля $\vec{a} = x^2\vec{i} + x\vec{j} + xz\vec{k}$ крізь зовнішній бік поверхні σ, що є частиною параболоїда обертання $y - z^2 - x^2 = 0$, який лежить у першому октанті між площинами $y = 0$, $y = 1$.

Розв'язання. Потік векторного поля $\vec{a}$ крізь поверхню σ в напрямі нормалі $\vec{n}$ (рис. 6.14) обчислюється за формулою (7.45) [ч. 1, с. 540]

$$\Pi = \iint_\sigma \vec{a}\vec{n}^0 d\sigma.$$

Вибір боку на поверхні σ рівнозначний виборові напряму нормального вектора $\vec{n}^0$ в кожній точці поверхні. Для верхнього (зовнішнього) боку поверхні σ кут γ між $\vec{n}^0$ та віссю Oz підлягає умові $0 \le \gamma \le \frac{\pi}{2}$, тобто $\cos\varphi \ge 0$. Рівняння поверхні в нашому випадку задане в неявній формі: $x^2 - y + z^2 = 0$. Запишемо його в явній формі $z = \sqrt{y-x^2}$ (перед коренем вибрано знак +, тому що поверхня розміщена в першому октанті: $z \ge 0$). Визначимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{y-x^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y-x^2}},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{y-x^2}+\frac{1}{4(y-x^2)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4y+1}{4(y-x^2)}}.$$

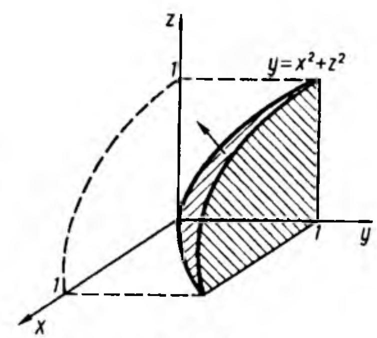

Рис. 6.14

* Див. ч. 1, гл. 6, підрозд. 7.16.

Тоді за умовою $\cos\gamma \ge 0$ маємо

$$\cos\gamma = \sqrt{\frac{4(y-x^2)}{4y+1}}, \quad \cos\alpha = \frac{\frac{x}{\sqrt{y-x^2}}}{\sqrt{\frac{4y+1}{4(y-x^2)}}}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{y-x^2}}}{\sqrt{\frac{4y+1}{4\ (y-x^2)}}}$$

($x \ge 0$ – поверхня, розміщена в першому октанті). Отже, $\cos\alpha \ge 0$, $\cos\beta \le 0$, $\cos\gamma \ge 0$. Згідно з умовою задачі

$$\varPi = \iint_\sigma x^2 dy\,dz + x\,dz\,dx + xz\,dx\,dy.$$

Переходячи в правій частині рівності від поверхневих інтегралів до подвійних, дістанемо

$$\varPi = \iint_{D_{yz}} (y - z^2)\,dy\,dz - \iint_{D_{zx}} x\,dz\,dx + \iint_{D_{xy}} x\sqrt{y-x^2}\,dy\,dz,$$

де D_{yz}, D_{zx}, D_{xy} – проекції поверхні на площини yOz, zOx, xOy. Знаки подвійних інтегралів визначені з умови $\cos\alpha \ge 0$, $\cos\beta \le 0$, $\cos\gamma \ge 0$.

Обчислимо подвійні інтеграли:

$$\iint_{D_{yz}} (y - z^2)\,dy\,dz = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} (y - z^2)\,dz = \frac{4}{15}, \quad -\iint_{D_{zx}} x\,dz\,dx = -\int_0^1 x\,dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz = -\frac{1}{3},$$

$$\iint_{D_{xy}} x\sqrt{y-x^2}\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} x\sqrt{y-x^2}\,dx = \frac{2}{15}.$$

Остаточно маємо $\varPi = \frac{4}{15} - \frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{1}{15}$.

Відповідь: $\varPi = \frac{1}{15}$.

99. Визначити потік векторного поля $\vec{a} = (x+y)\vec{i} + 2(y+z)\vec{j} + (2x+z)\vec{k}$ крізь трикутник σ, вирізаний з площини $3x + 2z - 2y = 6$ з координатними площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ в тому напрямі нормалі, що утворює гострий кут з віссю Oy.

100. Визначити потік векторного поля $\vec{a} = x^2\vec{i} - y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ крізь поверхню тіла $x^2 + y^2 + z^2 \le 3$, $0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ у напрямі зовнішньої нормалі.

Визначити потік вектора $\vec{a}$ крізь частину площини (p), замкненої в першому октанті, у тому напрямі нормалі до площини, що утворює з віссю Ox гострий кут.

101. $\vec{a} = (y-x)\vec{i} + (x+y)\vec{j} + y\vec{k}$; p: $x + y + z - 1 = 0$.

102. $\vec{a} = (2x + 4y + 3z)\vec{k}$; p: $3x + 2y + 3z = 6$.

103. $\vec{a} = (5x + 2y + 3z)\vec{k}$; p: $x + y + 3z - 3 = 0$.

104. Визначити потік векторного поля $\vec{a} = x^2\vec{i} + x\vec{j} + xz\vec{k}$ крізь верхню сторону σ, яка є частиною параболоїда обертання $y = z^2 + x^2$, розміщеною між площинами $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ (рис. 6.14).

105. Визначити потік вектора $\vec{a} = x^2\vec{i} - y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ крізь частину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$ у напрямі зовнішньої нормалі.

§ 10. СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ РІЗНИМИ ТИПАМИ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ*

Приклади. **1.** Застосовуючи формулу Остроградського – Гріна (8.5) [ч. 1, с. 544], обчислити інтеграл

$$\oint_L \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx + \frac{2}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dy,$$

де L – замкнутий контур $ABCD$ (рис. 6.15), обмежений колами $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ та відрізками прямих $y = x$, $y = x\sqrt{3}$, $x > 0$, $y > 0$.

Розв'язання. Тут

$$P(x,\ y) = \frac{1}{x}\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad Q(x,\ y) = \frac{2}{x}\ \operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

Визначимо $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2}{x^2 + y^2}$, тоді за формулою (8.5) [ч. 1, с. 542]

$$\oint_L \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}dx + \frac{2}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}dy = \iint_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2},$$

де D – область, обмежена лініями $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $y = x$, $y = x\sqrt{3}$, $x > 0$, $y > 0$.

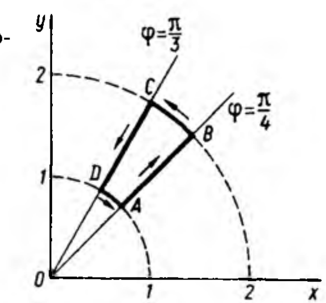

Рис. 6.15

* Див. ч. 1, гл. 6, підрозд. 8.1–8.9.

Обчислюючи подвійний інтеграл, переходимо до полярних координат

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \ 0 \le \rho < +\infty, \\ y = \rho\sin\varphi, \ 0 \le \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Область змінних: ρ – від 1 до 2, $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$, якобіан $I = \rho$. Тоді

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_1^2 \frac{1}{\rho^2}\rho d\rho = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_1^2 \frac{d\rho}{\rho} = \ln 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi = \frac{\pi}{12}\ln 2 \approx 0{,}18.$$

Відповідь: $I = \frac{\pi}{12}\ln 2 \approx 0{,}18$.

2. Перевірити, чи є вираз $(\sin 2x - 2\cos(x+y))dx - 2\cos(x+y)dy = 0$ повним диференціалом деякої функції $u(x,\ y)$, та у випадку позитивної відповіді визначити $u(x,\ y)$ за допомогою криволінійного інтеграла.

Розв'язання. Переконаємося, що ліва частина рівняння є повним диференціалом:

$$P(x,\ y) = \sin 2x - 2\cos(x+y),\ Q(x,\ y) = -2\cos(x+y),$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2\sin(x+y),\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2\sin(x+y),\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Отже, ліва частина рівняння є повним диференціалом функції $u(x,\ y)$, яка визначається за формулою (8.13) [ч. 1, с. 547]:

$$u(x,\ y) = \int_{x_0}^{x}(\sin 2x - 2\cos(x+y_0))dx - 2\int_{y_0}^{y}\cos(x+y)dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_{x_0}^{x} - 2\sin(x+y_0)\Big|_{x_0}^{x} - 2\sin(x+y)\Big|_{y_0}^{y} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2x - 2\sin(x+y) + \frac{1}{2}\cos 2x_0 + 2\sin(x_0+y_0).$$

Остаточно маємо

$$u(x,\ y) = -\frac{1}{2}\cos 2x - 2\sin(x+y) + C,$$

де $C = \frac{1}{2}\cos 2x_0 + 2\sin(x_0+y_0)$.

Відповідь: $u(x,\ y) = -\frac{1}{2}\cos 2x - 2\sin(x+y) + C$.

3. Використовуючи формулу Остроградського, обчислити потік векторного поля $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j} - 4z\vec{k}$ крізь всю поверхню тіла $x^2+y^2 \le 4z$, $z \le 1$ в напрямі зовнішньої нормалі.

Розв'язання. Визначимо

$$\mathrm{div}\vec{a} = 2+1-4 = -1,$$

тоді

$$Ц = \oint_{\sigma_+} \vec{a}\cdot\vec{n}^0 d\sigma = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{a}\,dV = -\iiint_V dx\,dy\,dz.$$

Для обчислення потрійного інтеграла перейдемо до циліндричних координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Тоді рівняння даної поверхні набирає вигляду $z = \frac{\rho^2}{4}$, де $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \rho \le 2$, $\frac{\rho^2}{4} \le z \le 1$. У цьому випадку

$$П = -\iiint_V dx\,dy\,dz = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho\,d\rho \int_{\frac{\rho^2}{4}}^{1} dz = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho\left(1-\frac{\rho^2}{4}\right)d\rho =$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\varphi\left[\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{\rho^4}{16}\Big|_0^2\right] = -2\pi.$$

Відповідь: $П = -2\pi$.

4. Визначити циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (2x+4y+3z)\vec{k}$ по контуру поверхні σ: $3x+2y+3z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Розв'язання. Використаємо формулу Стокса (8.24) [ч. 1, с. 554]

$$Ц = \oint_L \vec{a}\cdot\vec{dr} = \iint_{\sigma+}\vec{n}^0\,\mathrm{rot}\,\vec{a}\,d\sigma.$$

Маємо

$$\mathrm{rot}\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 2x+4y+3z \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 2\vec{j}.$$

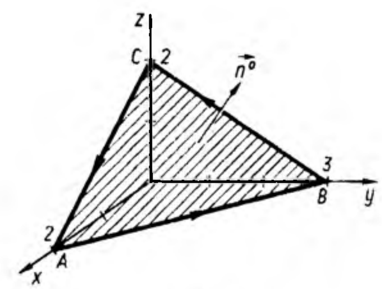

Рис. 6.16

Поверхня σ – частина площини, обмеженої трикутником ABC, який лежить у площині $3x+2y+3z=6$; нормальний вектор $\vec{n}^0$ забезпечує потрібний напрям орієнтації поверхні (рис. 6.16):

$$Ц = \iint_{\sigma+} \vec{n}^0 \operatorname{rot}\vec{a}\, d\sigma = \iint_{\sigma} \left\{ (\operatorname{rot}\vec{a})_x\, dy\, dz + (\operatorname{rot}\vec{a})_y\, dx\, dz + (\operatorname{rot}\vec{a})_z\, dx\, dy \right\} =$$

$$= 4\iint_{D_{yz}} dy\, dz - 2\iint_{D_{xz}} dx\, dz = 4\int_0^3 dy \int_0^{-\frac{2}{3}y+2} dz - 2\int_0^2 dx \int_0^{2-x} dz =$$

$$= 4\int_0^3 \left(-\frac{2}{3}y + 2\right) dy - 2\int_0^2 (2-x)\, dx = 8,$$

де $(\operatorname{rot}\vec{a})_x$, $(\operatorname{rot}\vec{a})_y$, $(\operatorname{rot}\vec{a})_z$ – координати вектора $\operatorname{rot}\vec{a}$. Поверхня σ проеціюється на площину yOz в область D_{yz}, обмежену лініями $2y+3z=6$, $z=0$, $x=0$ (рис. 6.17); на площину xOz поверхня σ проеціюється в область D_{xz}, обмежену лініями $x+z=2$, $z=0$, $x=0$ (рис. 6.18).

Відповідь: $Ц = 8$.

5. Перевірити, чи виявиться векторне поле $\vec{a} = (3x - yz)\vec{i} + (3y - xz)\vec{j} + (3z - xy)\vec{k}$ потенціальним та соленоїдним. У випадку потенціальності поля $\vec{a}$ визначити його потенціал.

Розв'язання. Перевіримо, чи є поле потенціальним. Для цього визначимо

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3x - yz & 3y - xz & 3z - xy \end{vmatrix} = (-x + x)\vec{i} - (y - y)\vec{j} + (-z + z)\vec{k} = 0.$$

Отже, поле є потенціальним. Потенціал поля встановимо за формулою (8.13) [ч. 1, с. 547] та узагальненням формули (8.36) [ч. 1, с. 556]:

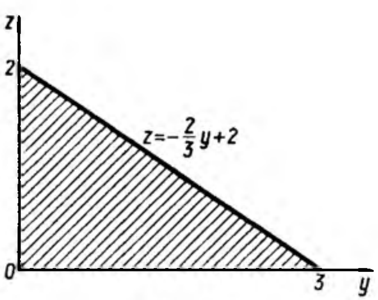

Рис. 6.17

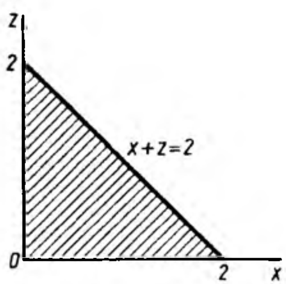

Рис. 6.18

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} (3x - y_0 z_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} (3y - xz_0)\, dy + \int_{z_0}^{z} (3z - xy)\, dz =$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 - xyz + x_0 y_0 z_0 - \frac{3}{2}\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2\right),$$

або

$$u(x, y, z) = \frac{3}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - xyz + C,$$

де $C = x_0 y_0 z_0 - \frac{3}{2}\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2\right)$. Поле вважають соленоїдним, якщо $\operatorname{div}\vec{a} = 0$ [ч. 1, с. 549]. Визначимо $\operatorname{div}\vec{a}$: $a_x = 3x - yz$, $a_y = 3y - xz$, $a_z = 3z - xy$; $\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 3 + 3 + 3 = 9$, тобто векторне поле не є соленоїдним.

Відповідь: $u(x, y, z) = \frac{3}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - xyz + C$; поле не є соленоїдним.

Використовуючи формулу Остроградського – Гріна, обчислити інтеграли.

106. $\oint_L 2\left(x^2 + y^2\right) dx + (x + y)^2 dy$, де L – контур трикутника ABC: $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, $C(1, 3)$.

107. $\oint_D xy^2 dy - x^2 y dx$, де L – коло $x^2 + y^2 = 1$, проходимо проти руху стрілки годинника (подвійний інтеграл рекомендується обчислювати в полярній системі координат).

Перевірити, чи виявиться даний вираз повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, та у випадку позитивної відповіді визначити $u(x, y)$ за допомогою криволінійного інтеграла.

108. $\left(y - \dfrac{1}{1+x^2}\right) dx + \left(x + 2e^{2y}\right) dy$.

109. $\left(\dfrac{2x}{y} + 3\cos 3x\right) dx + \left(2 - \dfrac{x^2}{y^2}\right) dy$.

110. $\left(3x^2 e^{2y} - y\sin x\right) dx + \left(2x^3 e^{2y} + \cos x\right) dy$.

111. $\left(4x^3 y^3 - 3y^2 + 5\right) dx + \left(3x^4 y^2 - 6xy - 4\right) dy$.

Визначити функцію $u(x,\ v)$ за її повним диференціалом.

112. $du=\left(5x^4y^2+e^x\right)dx+\left(2x^5y-\sin y\right)dy$.

113. $du=\left(3x^2y^4-1\right)dx+\left(4x^3y^3+\dfrac{1}{y}\right)dy$.

114. $du=\left(3x^2-\dfrac{y\cos x}{\sin^2 x}\right)dx+\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{y}\right)dy$.

Використовуючи формулу Остроградського, обчислити потік векторного поля $\vec{a}$ крізь усю поверхню σ тіла в напрямі зовнішньої нормалі.

115. $\vec{a}=(y-x)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+y\vec{k}$;

σ: $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(\cos\gamma>0)$.

116. $\vec{a}=(2z-x)\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+3z\vec{k}$;

σ: $x+4y+z=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(\cos\gamma>0)$.

117. $\vec{a}=x^2\vec{i}+x\vec{j}+xz\vec{k}$; σ: $y=x^2+z^2$, $y=1$, $x=0$, $z=0$ (див. рис. 6.14). Порівняти результати задач 117 і 104.

118. $\vec{a}=(2x+4y+3z)\vec{k}$; σ: $3x+2y+3z-6=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

119. $\vec{a}=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}+z\vec{k}$;

σ: $x^2+y^2\le z\le 1$ у напрямі зовнішньої нормалі (у потрійному інтегралі перейти до циліндричних координат).

120. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}=(x-2z)\vec{i}+(x+3y+z)\vec{j}+(5x+y)\vec{k}$ за контуром трикутника ABC: $A(1,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 1,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 1)$, використавши формулу Стокса.

121. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}=(5x+2y+3z)\vec{k}$ за контуром трикутника, вирізаного з площини $x+y+3z-3=0$ координатними площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$.

122. Обчислити циркуляцію вектора $\vec{a}=z\vec{i}+x\vec{j}+y\vec{k}$ по перерізу сфери $x^2+y^2+z^2=4$ площиною $x+y+z=2$ у позитивному напрямі орта $\vec{k}$. Приклад розв'язати, використавши формулу Стокса.

123. Обчислити циркуляцію вектора $\vec{a}=y\vec{i}-2z\vec{j}+x\vec{k}$ вздовж еліпса, утвореного перерізом гіперболоїда $2x^2-y^2+z^2=1$ площиною $y=x$ в позитивному напрямі відносно орта $\vec{i}$. Відповідь перевірити, застосувавши формулу Стокса.

124. Визначити для вектора $\vec{a}$:

1) $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a})$, $\vec{a}=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}+z^3\vec{k}$;

2) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a})$, $\vec{a}=xy^2\vec{i}+yz\vec{j}+zx^2\vec{k}$.

Показати, що векторне поле є потенціальним, та визначити його потенціал.

125. $\vec{a}=\left(3x^2y-y^3\right)\vec{i}+\left(x^3-3xy^2\right)\vec{j}$.

126. $\vec{a}=(yz-xy)\vec{i}+\left(xz-\dfrac{x^2}{2}+yz^2\right)\vec{j}+\left(xy+y^2z\right)\vec{k}$.

127. $\vec{a}=(2z-x)\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+3z\vec{k}$.

128. $\vec{a}=2xy\vec{i}+\left(x^2-2yz\right)\vec{j}-y^2\vec{k}$.

Перевірити соленоїдність таких полів.

129. $\vec{a}=\left(x^2y+y^3\right)\vec{i}+\left(x^3-xy^2\right)\vec{j}$.

130. $\vec{a}=(3yz+2x)\vec{i}+(2y+3xz)\vec{j}+(2z+2xy)\vec{k}$.

131. $\vec{a}=(2z-x)\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+3z\vec{k}$.

§ 11. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ ПО НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ*

Приклади. **1.** Обчислити невласний інтеграл $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}$ або довести його розбіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$ визначена для $x\in[-1,\ +\infty)$ та інтегрована для кожного сегмента $[-1,\ b]$. Тоді

$$I=\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}=\lim_{b\to+\infty}\int_{-1}^{b}\frac{dx}{x^2+x+1}=\lim_{b\to+\infty}\int_{-1}^{b}\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\lim_{b\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Bigg|_{-1}^{b}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{2b+1}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{2b+1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Відповідь: $I=\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$. Даний інтеграл є збіжним.

---

* Див. ч. 1, гл. 6, підрозд. 9.1, 9.2.

2. Обчислити невласний інтеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}$ або довести його розбіжність, якщо область D визначена нерівностями $x \geq 1$, $y \geq x$.

Р о з в ' я з а н н я. Область D зобразимо на кресленні (рис. 6.19). Підобласть D_1 задамо нерівностями $1 \leq x \leq a$, $x \leq y \leq b$, де $a \to +\infty$, $b \to +\infty$. Тоді

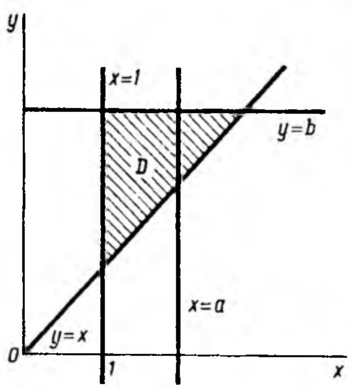

Рис. 6.19

$$I = \iint\limits_D \frac{dx\quad dy}{x^2+y^2} = \lim_{D_1 \to D} \iint\limits_{D_1} \frac{dx\quad dy}{x^2+y^2} =$$

$$= \lim_{\substack{a\to+\infty \\ b\to+\infty}} \int_1^a dx \int_x^b \frac{dy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{a\to+\infty \\ b\to+\infty}} \int_1^a dx \left(\frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right)\Bigg|_x^b =$$

$$= \lim_{\substack{a\to+\infty \\ b\to+\infty}} \int_1^a \frac{1}{x}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{x} - \frac{\pi}{4} \right) dx =$$

$$= \lim_{a\to+\infty} \int_1^a \lim_{b\to+\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{b}{x} - \frac{\pi}{4} \right) \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{4} \lim_{a\to+\infty} \ln|x| \Big|_1^a = \frac{\pi}{4} \lim_{a\to+\infty} \ln a = +\infty.$$

Відповідь: $I = +\infty$. Даний інтеграл є розбіжним.

3. Дослідити на збіжність невласний інтеграл від необмеженої функції $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Р о з в ' я з а н н я. Точка розриву підінтегральної функції $x = 1$. Тоді

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-1}{(x-1)} \Bigg|_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) = +\infty.$$

Відповідь: $I = +\infty$. Даний інтеграл є розбіжним.

4. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\iint\limits_D \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де D: $x^2+y^2 \leq 1$.

Р о з в ' я з а н н я. Початок координат є точкою розриву підінтегральної функції $u(x,\ y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. З області D вилучимо $E_\varepsilon = \left\{ y,\ \ x \mid x^2+y^2 \leq \varepsilon^2 \right\}$-окіл початку координат; $D - E_\varepsilon$ -областю є кільце між колами з радіусами ε та 1. Тоді

$$\iint\limits_D \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{E_\varepsilon \to 0} \iint\limits_{D\setminus E_\varepsilon} \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Перейдемо до полярних координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ (Γ - полярний образ області D, Γ_ε – полярний образ області $D - E_\varepsilon$). Маємо

$$\iint\limits_D \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\rho d\quad \rho d\varphi}{\rho} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\varepsilon^1 d\rho = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{2\pi} (1-\varepsilon)d\varphi = 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0}(1-\varepsilon) = 2\pi.$$

Відповідь: $I = 2\pi$. Невласний інтеграл є збіжним.

Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність.

132. 1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^6}$; 2) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} dx$; 3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x}$; 4) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x}\, dx$.

133. 1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; 2) $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\, dx$; 3) $\int\limits_{-\infty}^0 xe^x dx$; 4) $\int\limits_0^{+\infty} \operatorname{arctg} x\, dx$.

134. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^4+y^2}$, де область D задана нерівностями $x \geq 1$, $y \geq x$ (рис. 6.20).

135. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^4 y^3}$, де область D задана нерівностями $x \geq 1$, $xy \geq 1$ (рис. 6.21).

136. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$, де V: $x^2+y^2+z^2 \geq 1$ (зовнішня ділянка відносно сфери).

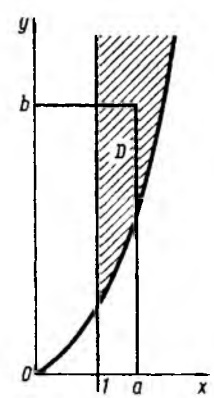

Рис. 6.20

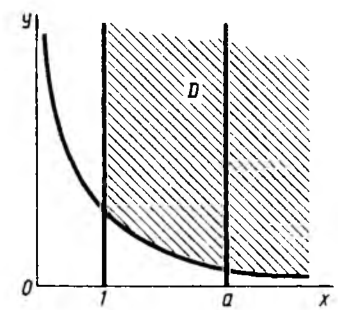

Рис. 6.21

Дослідити на збіжність невласні інтеграли.

137. 1) $\int\limits_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^5}}$; 2) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 3) $\int\limits_0^1 \ln x dx$.

138. 1) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$; 2) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$; 3) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2}$.

139. 1) $\int\limits_2^3 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-4)^3}}$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x dx$; 3) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$.

140. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$, де D: круг $x^2+y^2 \le 1$ (обчислюючи інтеграл, перейти до полярних координат).

141. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{xy}}$, де D: $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$.

142. $\iiint\limits_T \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2}$, де T: куля $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

§ 12. ІНТЕГРАЛИ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ПАРАМЕТРА*

Приклад. Обчислити інтеграл

$$F(\lambda) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2 - \frac{\lambda^2}{x^2}} dx.$$

Розв'язання. Після диференціювання по параметру λ маємо

$$\frac{dF}{d\lambda} = -2\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2-\frac{\lambda^2}{x^2}} \lambda \frac{dx}{x^2}.$$

Виконаємо заміну: $z = \frac{\lambda}{x}$, $dz = -\frac{\lambda}{x^2}dx$, $x^2 = \frac{\lambda^2}{z^2}$; z змінюється від ∞ до 0.

Звідси
$$\frac{dF}{d\lambda} = 2\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{z^2}-z^2} dz = -2\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{z^2}-z^2} dz,$$

* Див. ч. 1, гл. 6, § 10.

або
$$\frac{dF}{d\lambda} = -2F(\lambda).$$

Тоді

$$\frac{dF(\lambda)}{F(\lambda)} = -2d\lambda, \quad \ln F(\lambda) = -2\lambda + \ln C, \quad F(\lambda) = Ce^{-2\lambda}.$$

Для визначення C вважатимемо, що $\lambda = 0$, тоді

$$F(0) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Отже, $F(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\lambda}$.

Відповідь: $F(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\lambda}$.

Здиференціювати функцію за параметром.

143. 1) $F(\lambda) = \int\limits_0^{\lambda} \frac{\ln(1+\lambda x)}{x} dx$; 2) $F(\alpha) = \int\limits_{\alpha-1}^{\alpha+1} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$;

3) $F(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{\alpha^2} e^{-\alpha x^2} dx$.

Обчислити інтеграл.

144. $I = \int\limits_0^{\infty} e^{x^2} dx$ (заміна $x = \lambda t$).

§ 13. ПОХІДНА ТА ІНТЕГРАЛ ВІД ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОГО ЗМІННОГО*

Приклад. Застосовуючи умови Коші – Рімана (11.1) [ч. 1, с. 572] визначити, в яких точках функція $w = e^{2z}$ буде аналітичною.

Розв'язання.

$$e^{2z} = e^{2x}\cos 2y + ie^{2x}\sin 2y; \quad u(x, y) = e^{2x}\cos 2y; \quad v(x, y) = e^{2x}\sin 2y.$$

Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x}\cos 2y; \; \frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{2x}\sin 2y; \; \frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x}\sin 2y; \; \frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x}\cos 2y.$$

* Див. ч. 1, гл. 6, § 11.

Отже, умови Коші – Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

виконуються на всій площині.

Відповідь: функція $w=e^{2z}$ буде аналітичною на всій площині.

13.1. Визначення інтеграла від функції комплексного змінного

Оскільки функції $f(z)$, $u(x,\ y)$, $v(x,\ y)$ неперервні, то слушною є формула (11.5) [ч. 1, с. 573]

$$\int_{AB} f(z)dz=\int_{AB}(u\,dx-v\,dy)+i\int_{AB}(v\,dx+u\,dy).$$

Приклад. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного $\int_{AB}\bar{z}|z|dl$, де AB: $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\le t\le\pi$, обходимо проти руху стрілки годинника $|z|=1$.

Розв'язання. Маємо $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$; $u(x,\ y)=x\sqrt{x^2+y^2}$; $v(x,\ y)=$ $=y\sqrt{x^2+y^2}$. Тоді

$$\int_{AB} f(z)dz=\int_{AB}\sqrt{x^2+y^2}(x\,dx-y\,dy)+i\int_{AB}\sqrt{x^2+y^2}(-y\,dx+x\,dy)=$$

$$=\int_0^{\pi}(-\cos t\sin t\,dt)+\int_0^{\pi}\sin t\cos t\,dt+i\int_0^{\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)dt=\pi i.$$

Відповідь: $I=\pi i$.

Застосовуючи умови Коші – Рімана, визначити, в яких точках функція буде аналітичною, і знайти її похідні.

145. 1) $\omega(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y$; 2) $\omega(z)=\left(x^2-y^2\right)+i2xy$; 3) $\omega(z)=\sin x\,\mathrm{ch}\,y+i\cos x\,\mathrm{ch}\,y$.

Обчислити інтеграл $\int_{AB} f(z)dz$ по заданій лінії інтегрування.

146. 1) $f(z)=x^2+y^2i$, по лінії AB, що сполучає точки $z_1=0$, $z_2=1+i$, $z_3=-(1+i)$, $z_4=2+3i$; 2) $f(z)=3z^2+2z$, $z_1=1$, $z_2=2i$; 3) $f(z)=$ $=f(z)=2z+z^4$, $z_1=0$, $z_2=i$.

§ 14. ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛІВ*

147. Обчислити площу фігури, обмежену:

1) гіперболою $xy=4$ та прямою $x-y-5=0$;

2) параболами $y^2=x+1$ та $y^2=9-x$.

148. Обчислити площу, обмежену:

1) астроїдою $\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t,\end{cases}$ $0\le t<2\pi$;

2) еліпсом $\begin{cases}x=4\cos\varphi,\\ y=3\sin\varphi,\end{cases}$ $0\le\varphi<2\pi$.

149. Використовуючи подвійний інтеграл у прямокутних або полярних координатах, обчислити площу, обмежену лініями:

1) $x=4y-y^2$, $x+y=6$;

2) $\left(x^2+y^2\right)^2=2xy$ (перейти до полярних координат).

Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями, використовуючи різні типи інтегралів.

150. $x^2+y^2=9$, $x^2+z^2=9$.

151. $x+2z=3$, $x=0$, $y=1$, $z=0$.

152. $x^2+y^2=2x$, $y=0$, $z=0$, $z=5$ (перейти до циліндричної системи координат).

153. $x^2+y^2+z^2\le 1$, $z\ge 0$ (перейти до сферичної системи координат).

Визначити координати центра мас тіла, обмеженого такими поверхнями.

154. $x+2z-3=0$, $x=0$, $y=1$, $z=0$, $y-3=0$, густина тіла $\gamma(x,\ y,\ z)=1$.

155. $x+y+z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, густина тіла $\gamma(x,\ y,\ z)=x$.

За умови, що лінійна густина $\gamma(x,\ y,\ z)=\mathrm{const}$, визначити координати центра ваги фігури, обмеженої такими лініями.

156. $y^2=x$, $x^2=y$.

157. $y=\sqrt{2x-x^2}$, $y=0$.

---

* Див. ч. 1, гл. 6, підрозд. 12.1–12.3.

158. Визначити координати центра мас дуги кривої L:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}t^2, \quad 0 \le t \le 1, \\ z = \dfrac{1}{3}t^3, \end{cases}$$

лінійна густина якої змінюється згідно із законом $\gamma(x, \ y, \ z) = xyz$.

159. Обчислити статичні моменти відносно осей Ox та Oy однорідної пластини, обмеженої лініями $y = x^2, \quad y + x = 2$.

160. Визначити моменти інерції трикутника, обмеженого прямими лініями $x + y = 1, \quad x = 1, \quad y = 1$ відносно осей Ox і Oy та відносно початку координат, якщо густина $\gamma(x, \ y) = 2y$.

161. Визначити момент інерції однорідного кругового конуса відносно його висоти (осі Oz), якщо висота становить 5 см, радіус основи 2 см, кут між висотою та твірною дорівнює α. Рівняння поверхні конуса в циліндричних координатах $z = \rho\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Відповіді

3. $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$. **4.** $\frac{2}{9}\left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right)$. **5.** $\ln\sqrt[4]{9}$. **6.** $\frac{20+\pi}{4}$. **7.** $\frac{5\pi}{3}$. **8.** $\frac{e^2-1}{3e^2}$. **9.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$. **10** $\frac{\pi}{4}$. **11.** $\frac{1}{6}\ln\frac{4}{7}$. **12.** $3\ln\frac{4+2\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}}$. **13.** 0. **14.** $\frac{\sqrt{11}-\sqrt{8}}{3}$. **16.** $\frac{6\sqrt{3}-1}{3}$. **17.** $\frac{4+\pi}{4}$. **18.** 1) $1-2e^{-1}$; 2) $\frac{e^2-5}{e}$. **19.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) 1. **20.** 1) $\frac{\pi\left(9-4\sqrt{3}\right)}{36} + \ln\sqrt{\frac{3}{2}}$; 2) $\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2$. **21.** 1) $2(1-\ln 2)$; 2) $e-2$. **22.** 1) $\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+1\right)$; 2) $\frac{\pi}{4}-1$. **23.** 1) $-\frac{\pi}{2}$; 2) $-2{,}5+6\ln 2$. **24.** 1) $\frac{\pi}{8}$; 2) $\frac{\pi^2}{24}$. **25.** 1) $\frac{e^4-1}{2e^4}$; 2) $\frac{1}{6}$. **26.** 1) $\ln\frac{3}{2}$; 2) $\frac{1}{2}\left(\mathrm{arctg}\frac{e}{2} - \mathrm{arctg}\frac{1}{2}\right)$. **27.** 1) $4-\ln 9$; 2) $\ln\frac{4}{3}$. **28.** $-\frac{3}{8}+\ln 2$. **29.** $\frac{4-\pi}{2}$. **30.** $\frac{\pi a^4}{16}$ (заміна $y = a\sin t$). **31.** $\frac{\pi}{2}$. **32.** 4,5. **33.** $\sqrt{2}-1$. **34.** $\frac{20\sqrt{5}}{3}$. **35.** $2\pi - \frac{4}{3}$. **36.** 1,5. **37.** $\frac{16\sqrt{2}}{143}$. **38.** $4\sqrt{2}\,\pi^4$. **39.** $\frac{\sqrt{65}}{16}\pi(\pi-8)$. **40.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **41.** $\frac{\sqrt{10}}{2}\ln 3$. **42.** 1) $2k$; 2) $\mathrm{sh}\,2$. **43.** $3\pi\sqrt{2}$. **44.** $4\left(2-\sqrt{2}\right)$. **45.** 705. **46.** $\frac{\sqrt{8\pi^2R^2+h^2}}{4}$.

47. $\frac{4}{3}$. **48.** $-\frac{28}{15}$. **49.** $15-3\sqrt{2}$. **50.** 0. **51.** $2\sqrt{2}-\frac{7}{3}$. **52.** $\frac{\pi R^2}{4}$. **53.** $\frac{48}{9\sqrt{3}}$. **59.** 150,4. **60.** $\frac{244}{11}$. **61.** $-1{,}1$. **62.** 2. **63.** $\frac{13}{3}$. **64.** $\frac{1}{24}$. **65.** 14,625. **66.** $\frac{7}{480}$. **67.** $\frac{\pi}{4}$. **68.** 16. **69.** $\frac{16}{3}$. **70.** 13,5. **71.** $\frac{\pi}{32}$. **72.** $\frac{125\pi}{2}$. **73.** 2. **74.** 2592. **75.** 9. **76.** $\frac{20}{3}$. **77.** $2\pi^3$. **78.** $\frac{14a^3}{3}$. **79.** 1,5. **80.** $2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **81.** $\frac{3\pi}{4}$. **82.** a^2. **83.** $\frac{5\pi}{16}a^3$. **84.** $\frac{4}{3}\pi R^3$. **85.** $\frac{8}{9}(3\pi-4)$. **86.** $\frac{\pi R^3}{9}$. **87.** 16π. **88.** π. **89.** 9π. **90.** $\frac{\pi}{2}$. **91.** $\frac{19\pi}{6}$. **92.** $\frac{8}{9}$. **93.** $\frac{16\pi}{77}$. **94.** 36π. **95.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. **96.** 864. **97.** $9\pi\sqrt{2}$. **98.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **99.** $-14{,}5$. **100.** $\frac{7\pi}{2}$. **101.** 0,5. **102.** 22. **103.** 36. **104.** $\frac{1}{15}$. **105.** $\frac{\pi}{8}$. **106.** $-\frac{4}{3}$. **107.** $\frac{\pi}{2}$. **108.** $xy + e^{2y} - \mathrm{arctg}\,x + C$. **109.** $-\cos 3x + 2y + \frac{x^2}{y} + C$. **110.** $x^3e^{2y} + y\cos x + C$. **111.** $x^4y^3 - 3xy^2 + 5x - 4y + C$. **112.** $e^{x} + x^5y^2 + \cos y + C$. **113.** $x^3y^4 - x + \ln y + C$. **114.** $x^3 + \frac{y}{\sin x} - \ln y + C$. **115.** 0,5. **116.** $42\frac{2}{3}$. **117.** 0,4. **118.** 22. **119.** π. **120.** -3. **121.** 10,5. **122.** $\frac{8\pi}{\sqrt{3}}$. **123.** 3π. **124.** 1) $\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{a}) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\cdot\vec{k}$; 2) $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{a}) = (-2z-y)\vec{i} + 2y\vec{j} - (2z+1)\vec{k}$. **125.** $x^3y - xy^3 = C$, $C = y_0x_0^3 - y_0^3x_0$. **126.** $xyz - \frac{x^2y}{2} + \frac{y^2z^2}{2} = C$, $C = x_0y_0z_0 - \frac{1}{2}\left(y_0^2z_0^2 + y_0x_0^2\right)$. **127.** Поле не потенціальне. **128.** $x^2y - y^2z = C$, $C = x_0^2y_0 - y_0^2z_0$. **132.** 1) $\frac{\pi}{12}$; 2) 1; 3) $-\frac{1}{4}\ln 4$; 4) інтеграл розбіжний. **133.** 1) π; 2) інтеграл розбіжний; 3) -1; 4) інтеграл розбіжний. **134.** Інтеграл розбіжний. **135.** $\frac{5\pi}{6}$. **136.** $\frac{4\pi}{3}$. **137.** 1) 0,4; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) -1. **138.** 1) інтеграл розбіжний; 2) 0; 3) інтеграл розбіжний. **139.** 1) інтеграл розбіжний; 2) інтеграл розбіжний; 3) $2\sqrt{2}$. **140.** 2π. **142.** Інтеграл розбіжний. **143.** 1) $\frac{2\ln(1+\lambda)}{\lambda}$; 2) $\frac{2(\alpha+1)}{\alpha(\alpha+2)}\sin\alpha(\alpha+2) - \frac{2(\alpha-1)}{\alpha(\alpha-2)}\sin\alpha(\alpha-2)$; 3) $\frac{4\alpha^4+1}{\alpha^2}e^{-\alpha^4} - \frac{3\alpha^3+1}{\alpha^2}e^{-\alpha^3}$. **144.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **145.** 1) $\omega'(z) = e^z$, $z = x + iy$; 2) $\omega'(z) = 2z$; 3) $\omega'(z) = \cos z$. **146.** 1) $\frac{2}{3}i$; 2) $-\frac{19}{3}+9i$; 3) $-6-8i$. **147.** 1) 4,5; 2) $\frac{40\sqrt{5}}{3}$. **148.** 1) $\frac{3\pi}{8}$; 2) 12π. **149.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 0,5. **150.** 18. **151.** 4,5. **152.** $\frac{1000}{9}$. **153.** $\frac{4\pi}{15}$. **154.** $\left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$. **155.** $\left(\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right)$. **156.** $\left(\frac{9}{20}, \frac{9}{20}\right)$. **157.** $\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$. **158.** $\left(\frac{567}{640}, \frac{35}{44\sqrt{2}}, \frac{77}{320}\right)$. **159.** $x_0 = -\frac{36}{5}$, $y_0 = -\frac{9}{4}$. **160.** $I_x = 0{,}4$; $I_y = 0{,}3$; $Z_0 = 0{,}7$. **161.** 8π.

ЗМІСТ

Навчальний посібник

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЗБІРНИК ЗАДАЧ

У двох частинах

Частина 1

ЛІНІЙНА І ВЕКТОРНА АЛГЕБРА
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

2-ГЕ ВИДАННЯ, СТЕРЕОТИПНЕ

Редактори *П. Ф. Боброва, С. К. Кашка*
Оформлення художника *В. О. Гурлєва*
Художній редактор *С. В. Анненков*
Коректори *Н. М. Мірошниченко, І. В. Іванюсь, Л. В. Чмель*
Комп'ютерна верстка *Т. В. Скалиги*

Підписано до друку 24 09 2004. Формат $60\times84^1/_{16}$.
Папір офсетний Гарнітура Times New Roman.
Друк офсетний. Умов друк. арк. 16,28.
Обл.-вид. арк. 14,02. Тираж 10 000 пр. Зам № 4-504.

Видавництво "Техніка".
04053 Київ, вул. Обсерваторна, 25.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
України суб'єктів видавничої справи ДК № 357
від 12.03.2001 р.

Віддруковано на Білоцерківській книжковій фабриці
09117 Біла Церква, вул. Леся Курбаса, 4
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
України суб'єктів видавничої справи ДК № 567
від 14 08.2001 р.