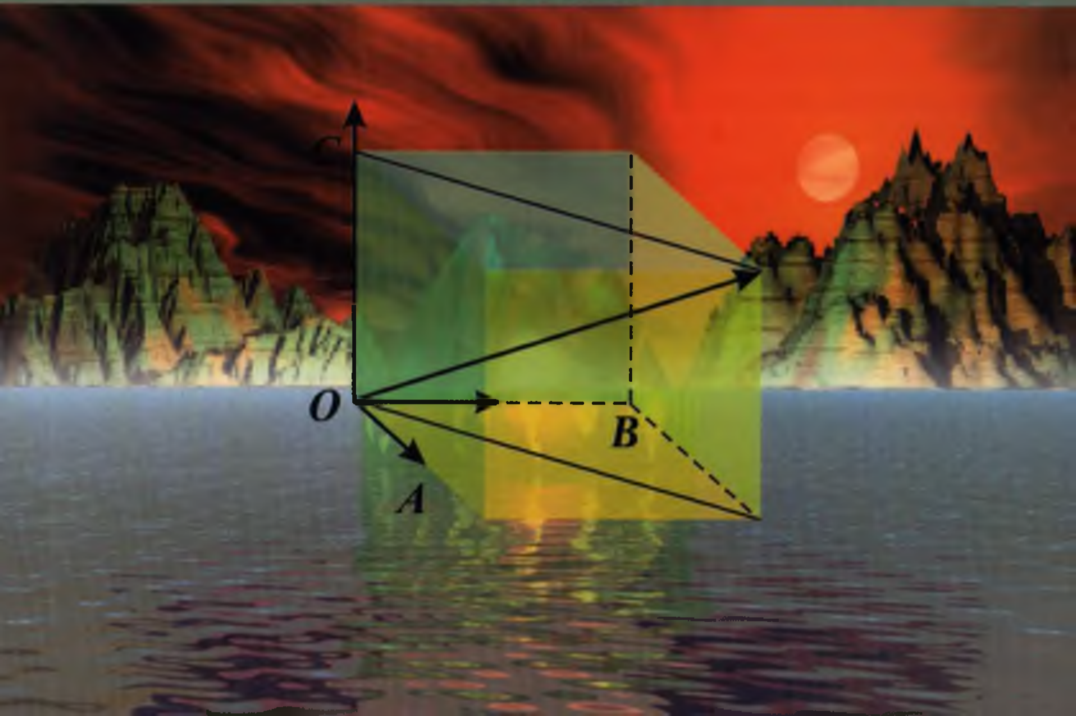
Т. В. ЛУБЕНСЬКА, Л. Д. ЧУПАХА

ЗБІРНИК ЗАДАЧ
З ЛІНІЙНОЇ, ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Навчальний посібник



Т. В. ЛУБЕНСЬКА, Л. Д. ЧУПАХА

ЗБІРНИК ЗАДАЧ

З ЛІНІЙНОЇ, ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів

Київ
Книжкове видавництво НАУ
2005

УДК 512.64: 514.12(076)
ББК В152.2я7
Л 821

Рецензенти:

І. О. Парасюк, д-р фіз.-мат. наук, проф.,

Н. О. Вірченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.,

Гриф надано Міністерством освіти і науки України (Лист № 14/18.2-1086 від 16.05.2005)

Видання друкується за рішенням Вченої ради НАУ Протокол № 1 від 26.01.2005

Лубенська Т. В., Чупаха Л. Д.

Л 821 Збірник задач з лінійної, векторної алгебри та аналітичної геометрії / Навч. посібник. — К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. — 212 с.

ISBN 966–598–236–2

Збірник містить теоретичний матеріал у вигляді таблиць, завдання для аудиторних робіт трьох рівнів складності, а також індивідуальні завдання, складені у 30 варіантах. До всіх завдань подано відповіді.

Призначений для студентів інженерних, технологічних та економічних спеціальностей усіх форм навчання.

УДК 512.64: 514.12(076)
ББК В152.2я7

ISBN 966–598–236–2

ЗМІСТ

ВСТУП

Збірник задач містить теоретичний матеріал, завдання для аудиторної і самостійної роботи з трьох розділів: лінійна алгебра, векторна алгебра та аналітична геометрія.

Теоретичний матеріал подається у вигляді таблиць, що сприятиме, на думку авторів, кращому його запам'ятовуванню. З метою полегшення роботи основні поняття, положення та формулювання виділені в тексті. Деякі факти проілюстровано.

Завдання для аудиторної роботи поділені на три групи: А, Б, В за їх зростаючою складністю. Такий поділ має більш-менш умовний характер, але він наближає до диференційованого навчання.

Кожне із самостійних завдань складається з 30 варіантів. Система індивідуальних завдань активізує самостійну роботу студентів і сприяє глибшому засвоєнню предмета.

До всіх наведених у посібнику прикладів і задач подаються відповіді, що забезпечує самоконтроль з боку студентів.

У збірнику застосована наскрізна нумерація параграфів, нумерація пунктів дається автономно у межах кожного параграфа. Це дає змогу за допомогою лише подвійної нумерації задач і рисунків легко орієнтуватися за темами: перша цифра — номер параграфа, друга — порядковий номер у його межах.

Збірник відповідає програмі вищої школи з математики для технічних вузів і може бути використаний студентами та викладачами технічних, технологічних і економічних спеціальностей ВНЗ.

1 Розділ

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

§ 1. Визначники

1. Визначники та їх властивості

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ВИЗНАЧНИКІВ

Назва	Формули та позначення
Визначник n-го порядку	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_j (-1)^{\alpha(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$, де сума поширюється на всі перестановки $j = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ інших індексів; $\alpha(j)$ — кількість інверсій у перестановці j
M_{ij} — мінор елемента a_{ij}	$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,i-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$
A_{ij} — алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}	$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
Визначник 2-го порядку	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
Визначник 3-го порядку	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

Назва	Формули та позначення
Алгебраїчні доповнення елементів визначника 3-го порядку	$A_{11}=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$; $A_{12}=-\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}$; $A_{13}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$; $A_{21}=-\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$; $A_{22}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}$; $A_{23}=-\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$; $A_{31}=\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}$; $A_{32}=-\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{21}&a_{23}\end{vmatrix}$; $A_{33}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$.
Визначник 3-го порядку у вигляді розкладу його за елементами першого рядка	$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$

1.01. Обчислити визначники другого порядку:

1) $\begin{vmatrix}2&9\\5&1\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}3&-2\\4&6\end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix}3&-2\\-4&5\end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix}2&3\\6&-10\end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix}-1&4\\-5&2\end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix}0&-4\\5&37\end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix}\sqrt{a}&-1\\a&\sqrt{a}\end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix}a^2&ab\\ab&b^2\end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix}n+1&n\\n&n-1\end{vmatrix}$;

10) $\begin{vmatrix}\sin\alpha&\cos\alpha\\-\cos\alpha&\sin\alpha\end{vmatrix}$; 11) $\begin{vmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{vmatrix}$; 12) $\begin{vmatrix}a+b&a-b\\a-b&a+b\end{vmatrix}$;

13) $\begin{vmatrix}a+1&b-c\\a^2+a&ab-ac\end{vmatrix}$.

1.02. Розв'язати рівняння:

1) $\begin{vmatrix}1&-4\\3x&-x+22\end{vmatrix}=0$; 2) $\begin{vmatrix}a-1&3\\1&a+1\end{vmatrix}=0$;

3) $\begin{vmatrix}x&x+1\\-4&x+1\end{vmatrix}=0$; 4) $\begin{vmatrix}x+2&-3\\x-2&x\end{vmatrix}=0$.

1.03. Обчислити визначники третього порядку за допомогою правила трикутника:

1) $\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&3&1\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}-1&3&4\\-2&5&7\\-1&1&2\end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix}2&-1&-1\\3&4&-2\\3&-2&4\end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix}0&x&0\\x&1&x\\0&x&0\end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix}a+x&x&x\\x&b+x&x\\x&x&c+x\end{vmatrix}$.

1.04. Обчислити визначники, розклавши їх за елементами 1) першого рядка; 2) другого стовпця:

1) $\begin{vmatrix}2&3&4\\5&-2&1\\1&2&3\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}1&2&0\\-2&3&1\\1&-1&1\end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix}-3&0&1\\2&-1&3\\5&-4&2\end{vmatrix}$.

1.05. Обчислити визначники, розклавши їх за елементами 1) першого стовпця; 2) другого рядка:

1) $\begin{vmatrix}2&7&15\\0&-1&1\\0&2&-3\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}1&2&-2\\2&1&-1\\0&3&-2\end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix}0&2&-1\\3&-4&2\\1&-2&0\end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&-1&2\\3&2&-3\end{vmatrix}$.

1.06. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix}2&-1&3&1\\0&-1&5&-3\\0&0&5&-3\\0&0&0&2\end{vmatrix}.$$

А Відповіді

1.01. 1) -43; 2) 26; 3) 7; 4) -38; 5) 18; 6) 20; 7) $2a$; 8) 0; 9) -1; 10) 1; 11) $\cos 2\alpha$; 12) $4ab$; 13) 0.

1.02. 1) $x=-2$; 2) $a=\pm 2$; 3) $x_1=-4$, $x_2=-1$; 4) $x_1=-6$, $x_2=1$.

1.03. 1) 1; 2) 0; 3) 60; 4) 0; 5) $3abc-a^3-b^3-c^3$; 6) $abc+x(ab+ac+bc)$.

1.04. 1) -10; 2) 10; 3) 0; 4) -33.

1.05. 1) 2; 2) -3; 3) 6; 4) -8.

1.06. -20.

Б

1.07. Обчислити визначники другого порядку:

1) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} \dfrac{x}{1+x} & \dfrac{2x+1}{1+x} \\ \dfrac{-1}{1+x} & \dfrac{x}{1+x} \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} \cos^2\gamma-\sin^2\gamma & 2\cos\gamma\sin\gamma \\ -2\cos\gamma\sin\gamma & \cos^2\gamma-\sin^2\gamma \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$.

1.08. Розв'язати рівняння:

1) $\begin{vmatrix} \sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix}=0$; 2) $\begin{vmatrix} 3\sin 2x & \cos 2x \\ -7 & \sin 2x \end{vmatrix}=3$;

3) $\begin{vmatrix} x-4 & x-8 \\ \sqrt{x}+2 & 1 \end{vmatrix}=0$; 4) $\begin{vmatrix} \lg(35-x^3) & 3 \\ \lg(5-x) & 1 \end{vmatrix}=0$.

1.09. Обчислити визначники, розклавши їх за елементами того рядка, який містить найбільшу кількість нулів:

1) $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix}$.

1.10. Обчислити визначники шляхом утворення нулів у першому стовпчику:

1) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \\ -3 & 6 & -2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -9 & 0 & 1 \\ 27 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

1.11. Спростити і обчислити визначники:

1) $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} & \sin\alpha & 1 \\ 2\cos^2\dfrac{\beta}{2} & \sin\beta & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} m+a & m-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix}$; 10) $\begin{vmatrix} \sin 3\alpha & \cos 3\alpha & 1 \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 1 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$.

Вказівка У прикладі 1.11 (9) винести α за знак визначника, потім від першого та другого рядків відняти третій і винести $(x-z)$ та $(y-z)$ за знак визначника.

1.12. Довести, що:

1) $\begin{vmatrix} \dfrac{x_1+x_2}{2} & \dfrac{y_1+y_2}{2} & 1 \\ \dfrac{x_1-x_2}{2} & \dfrac{y_1-y_2}{2} & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$;

2) рівняння $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix} = 0$ має корені $x = a,\ x = b$;

3) $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a)$.

1.13. Розв'язати рівняння:

1) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

1.14. Обчислити визначники:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 12 & 31 & 62 \\ 122 & 315 & 623 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 12314 & 16536 & 20537 \\ 6157 & 8268 & 10268 \\ 513 & 689 & 126 \end{vmatrix}$.

1.15. Обчислити визначники, використовуючи їх властивості:

1) $\begin{vmatrix} (a+1)^2 & a^2+1 & a \\ (b+1)^2 & b^2+1 & b \\ (c+1)^2 & c^2+1 & c \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\gamma \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$.

1.16. Розв'язати нерівність:

$\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$.

1.17. Визначити, які з добутків:

1) $a_{21}a_{44}a_{53}a_{35}a_{12}$; 2) $a_{31}a_{53}a_{15}a_{43}a_{22}$; 3) $a_{36}a_{52}a_{41}a_{13}a_{65}a_{24}$

входять до визначників відповідних порядків і з якими знаками.

1.18. Обчислити визначники:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

1.19. Довести, що:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Б Відповіді

1.07. 1) $\cos(\alpha+\beta)$; 2) 1; 3) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$; 4) 1; 5) 0.

1.08. 1) $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}k$, де k — ціле число;

2) $x=\dfrac{\pi}{4}(2k+1)$, де k — ціле число;

3) $x=9$; 4) $x_1=2,\ x_2=3$.

1.09. 1) $-2b^2$; 2) $-2x$; 3) 0.

1.10. 1) 90; 2) 80; 3) 66.

1.11. 1) $-4a^3$; 2) 144; 3) 10; 4) 72;

5) $(x-y)(y-z)(x-z)$; 6) 1; 7) $\sin(\beta-\alpha)$;

8) amn; 9) $a(x-z)(y-z)(y-x)$; 10) $4\sin\alpha\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$.

1.13. 1) $x_1=2,\ x_2=3$; 2) $x_1=-2,\ x_2=0$.

1.14. 1) $2(ad-bc)$; 2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1$;

3) $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)$; 4) 35; 5) 689.

1.15. 1) 0; 2) 0; 3) 0.

1.16. $x\in[-6;-4]$.

1.17. 1) Входить зі знаком плюс.
2) Не входить.
3) Входить зі знаком мінус.

1.18. 1) –3; 2) 54; 3) 180; 4) 0.

1.20. Користуючись властивостями визначників, довести тотожність (визначник не розкладати):

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

1.21. Обчислити визначники:

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 \\ 1 & 6 & 6^2 & 6^3 \end{vmatrix};\quad 2)\ \begin{vmatrix} a & b & b & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix};\quad 3)\ \begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$4)\ \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix};\quad 5)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix};$$

$$6)\ \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix};\quad 7)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix};$$

$$8)\ \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & \dots & 5 \\ 0 & -5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -5 \end{vmatrix};\quad 9)\ \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & \cos\varphi & \sin\varphi \\ \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 2\cos 2\varphi & 2\sin 2\varphi \\ \cos 3\varphi & \sin 3\varphi & 3\cos 3\varphi & 3\sin 3\varphi \\ \cos 4\varphi & \sin 4\varphi & 4\cos 4\varphi & 4\sin 4\varphi \end{vmatrix}.$$

1.22. Знайти члени визначника:

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix},$$

які містять x^4 і x^3.

1.23. Знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють нерівність:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \le 0.$$

1.24. Обчислити визначники порядку n зведенням їх до трикутного вигляду:

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix};\quad 2)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

1.25. Знайти елемент визначника порядку n, симетричний елементу a_{ik} відносно «центра» визначника.

1.26. Як зміниться визначник, якщо кожний його елемент замінити елементом, симетричним з даним відносно «центра» визначника.

Відповіді

1.21. 1) 72; 2) $2a+b$; 3) $(be-cd)^2$;

4) $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$;

5) $(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$;

6) 665; 7) 394; 8) $(-1)^{n-1}5^n$; 9) $4\sin^4\varphi$.

1.22. $10x^4-5x^3$.

1.23. (0; 0).

1.24. 1) $n!$; 2) $2n+1$.

1.25. $a_{n-i+1,\,n-k+1}$.

1.26. Визначник не зміниться.

2. Застосування визначників до розв'язування систем двох і трьох лінійних алгебраїчних рівнянь

Вигляд системи	Формули для розв'язання
$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$	Формули Крамера $x_1=\dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta};\ x_2=\dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$, де $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq0;\ \Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix};$ $\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{12}&b_2\end{vmatrix}$
$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2;\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$	Формули Крамера $x_1=\dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta};\ x_2=\dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta};\ x_3=\dfrac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$

Вигляд системи	Формули для розв'язання
$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2;\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$	де $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq0;$ $\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix};$ $\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix};\ \Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}$
$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\end{cases}$	$x_1=\dfrac{\begin{vmatrix}b_1-a_{13}t&a_{12}\\b_2-a_{23}t&a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}};$ $x_2=\dfrac{\begin{vmatrix}a_{11}&b_1-a_{13}t\\a_{21}&b_2-a_{23}t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}};\ x_3=t,$ де $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq0,\ t\in R$

1.27. Розв'язати системи рівнянь за формулами Крамера:

1) $\begin{cases}-x+2y=-5;\\-7x+3y=-13;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-2y=-5;\\2x+7y=12;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}2x-4y=-11;\\-x+5y=14\dfrac{1}{2};\end{cases}$

4) $\begin{cases}\dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{3}y=6;\\x-y=0;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}\dfrac{1}{4}x-\dfrac{2}{3}y=2\dfrac{1}{2};\\-3x+y=-9;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}ax+y=1;\\x+ay=a\end{cases}$ $(a\neq\pm1)$;

7) $\begin{cases} x - \dfrac{y}{a} = -a; \\ 3ax + y = 5a \end{cases}$ $(a \neq 0)$; 8) $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2; \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0 \end{cases}$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$; 9) $\begin{cases} 3mx + 2ny = 15; \\ mx - ny = -5 \end{cases}$ $(m \neq 0,\ n \neq 0)$;

10) $\begin{cases} (a-1)x + (2a-3)y = a+2; \\ (a+1)x + (a+3)y = 3a+1 \end{cases}$ $(a \neq 0,\ a \neq 3)$.

1.28. Визначити, при яких значеннях a система має єдиний розв'язок, і знайти його:

1) $\begin{cases} (a-2)x + 5y = 5; \\ x + (a+2)y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (a+1)x + 3y = 3; \\ x + (a-1)y = 1. \end{cases}$

1.29. Розв'язати системи рівнянь за формулами Крамера:

1) $\begin{cases} x + y + z = 2; \\ 2x + 2y + 3z = 3; \\ 3x - y + z = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 3; \\ x + 2y - z = 0; \\ -x + y - 2z = -3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - y = 1; \\ x + y - z = 0; \\ -x + 2y + 2z = 9; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - y - z = -3; \\ 3x + y + 3z = 2; \\ x + y + z = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + y + z = 6; \\ x + y = 5; \\ y + z = 4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 7; \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 22; \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 12; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x - 4y - z = 9; \\ 3x + y - 2z = 8; \\ 4x + y + z = 0; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x + y - z = 36; \\ x + z - y = 13; \\ y + z - x = 7; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x + y = 5; \\ x + 3z = 16; \\ 5y - z = 10; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x + y + z = 36; \\ 2x - 3z = -17; \\ 6x - 5z = 7. \end{cases}$

А Відповіді

1.27. 1) $x = 1,\ y = -2$; 2) $x = -1,\ y = 2$; 3) $x = 0{,}5,\ y = 3$;
4) $x = -36,\ y = -36$; 5) $x = 2,\ y = -3$; 6) $x = 0,\ y = 1$;
7) $x = \dfrac{5-a}{4};\ y = \dfrac{5a + 3a^2}{4}$; 8) $x = a,\ y = b$;
9) $x = \dfrac{1}{m},\ y = \dfrac{6}{n}$; 10) $x = \dfrac{5a+3}{a},\ y = -\dfrac{2a+1}{a}$.

1.28. 1) $a \neq \pm 3,\ x = \dfrac{5}{a+3},\ y = \dfrac{5}{a+3}$; 2) $a \neq \pm 2,\ x = \dfrac{3}{a+2},\ y = \dfrac{1}{a+2}$.

1.29. 1) $x = 2,\ y = 1,\ z = -1$; 2) $x = 0,\ y = 1,\ z = 2$;
3) $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$; 4) $x = -1,\ y = -1,\ z = 2$;
5) $x = 2,\ y = 3,\ z = 1$; 6) $x_1 = 6,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$;
7) $x = 1,\ y = -1;\ z = -3$; 8) $x = \dfrac{49}{2},\ y = \dfrac{43}{2},\ z = 10$;
9) $x = 1,\ y = 3,\ z = 5$; 10) $x = \dfrac{53}{4},\ y = \dfrac{33}{4},\ z = \dfrac{29}{2}$.

Б

1.30. Розв'язати системи рівнянь за формулами Крамера:

1) $\begin{cases} 2ax - 3by + cz = 0; \\ 3ax - 6by + 5cz = 2abc; \\ 5ax - 4by + 2cz = 3abc; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y + z = a; \\ x - y + z = b; \\ x + y - z = c; \end{cases}$

3) $\begin{cases} bx + ay = -2ab; \\ -2cy + bz = 3bc; \\ cx + az = 0 \end{cases}$ $(a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$; 4) $\begin{cases} x - y + z - 1 = 0; \\ x + y - z - 2 = 0; \\ 5x + y - z - 7 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2; \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3; \end{cases}$

1.31. Знайти всі розв'язки системи:

1) $\begin{cases} 2x-3y+4z=0; \\ 3x+y-2z=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y-3z=0; \\ 2x+4y-6z=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+2y-3z=4; \\ 3x-4y+z=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x+3y-z=-1; \\ x-2y+2z=2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x+y+z=0; \\ 2x-3y+4z=0; \\ 5x-7y+8z=0. \end{cases}$

1.32. Визначити, при яких значеннях a система рівнянь

1) $\begin{cases} 2ax-3y=5; \\ 4x+ay=8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+2ay=4; \\ -4ax+5y=2 \end{cases}$

має розв'язок $x>0,\ y<0$.

1.33. Визначити координати вершин трикутника, якщо відомі рівняння його сторін:

$$y=2x-1,\ \ 2y-x=3,\ \ 3y=2x-5=0.$$

1.34. Визначити, при якому α система рівнянь

1) $\begin{cases} (2+\alpha)x+y=1; \\ (6+\alpha)x+(3+\alpha)y=-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y+(\alpha+3)z=8; \\ 2x+3y+(\alpha+4)z=12; \\ 3x+(6\alpha+5)y+7z=20 \end{cases}$

має єдиний розв'язок. Знайти цей розв'язок.

1.35. Вантажопідйомний кран має лінійну характеристику $p=a+bG$. Це означає, що на піднімання вантажу вагою G на відповідну висоту буде потрібне зусилля p. Тут a і b — деякі сталі величини. Відомо, що на піднімання вантажу вагою 150Н необхідне зусилля 42Н, а на піднімання вантажу вагою 210Н — зусилля 63Н. Яке зусилля необхідно прикласти до даного вантажопідйомного пристрою, щоб з його допомогою підняти вантаж вагою 360Н?

1.36. Перевезення вантажу з пункту А до пунтку В, який перебуває на відстані 100 км від пункту А, коштує 200 грош. од., а до пункту С, який лежить на відстані 400 км, — 350 грош. од. Визначити залежність вартості перевезення від відстані x, якщо вартість є лінійною функцією відстані (якість доріг при цьому не враховується).

Б Відповіді

1.30. 1) $x=bc,\ y=ac,\ z=ab$; 2) $x=\dfrac{b+c}{2},\ y=\dfrac{a-b}{2},\ z=\dfrac{a-c}{2}$;

3) $x=-a,\ y=-b,\ z=c$; 4) система розв'язків не має;

5) система розв'язків не має.

1.31. 1) $x=2t,\ y=16t,\ z=11t,\ t\in R$; 2) $y=\dfrac{3}{2}z-\dfrac{1}{2}x,\ x\in R,\ z\in R$;

3) $x=\dfrac{5t+9}{5},\ y=\dfrac{10t+11}{10},\ z=t,\ t\in R$;

4) $x=-\dfrac{4}{7}(t-1),\ y=\dfrac{5}{7}(t-1),\ z=t,\ t\in R$; 5) $x=y=z=0$.

1.32. 1) $-4\dfrac{4}{5}<a<1\dfrac{1}{4}$; 2) $a<-\dfrac{3}{8}$.

1.33. $\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{7}{3}\right)$; $(1;1)$; $\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{11}{7}\right)$.

1.34. 1) $\alpha\neq 0,\ \alpha\neq -4,\ x=\dfrac{1}{\alpha},\ y=-\dfrac{2}{\alpha}$;

2) $\alpha\neq 0,\ \alpha\neq -\dfrac{7}{3},\ x=\dfrac{12(\alpha+1)}{3\alpha+7},\ y=\dfrac{4}{3\alpha+7},\ z=\dfrac{12}{3\alpha+7}$.

1.35. $p=115{,}5$Н $(a=-10{,}5;\ b=0{,}35)$.

1.36. $y=0{,}5x+150$.

В

1.37. Побудувати на площині Oxy фігуру, що описується системою нерівностей:

$$\begin{cases} x-y+1\geq 0; \\ x+y-3\leq 0; \\ x+3y+1\geq 0. \end{cases}$$

Знайти координати вершин утвореного многокутника, користуючись формулами Крамера.

1.38. Визначити, при яких значеннях c система рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + cx_3 = 1; \\ x_1 + cx_2 + x_3 = 1; \\ cx_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

1) має єдиний розв'язок; знайти цей розв'язок;
2) зовсім не має розв'язків.

1.39. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера:

$$1)\begin{cases} y - 3z + 4t = -5; \\ x - 2z + 3t = -4; \\ 3x + 2y - 5t = 12; \\ 4x + 3y - 5z = 5; \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 4 = 0; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 6 = 0; \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 12 = 0; \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 6 = 0; \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6; \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6; \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6; \end{cases} \qquad 4)\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7; \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 = 6; \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1. \end{cases}$$

1.40. Знайти два двозначні числа, які мають таку властивість: якщо до більшого шуканого числа дописати справа 0 і за ним менше число, а до меншого дописати справа більше число і потім 0, то з утворених таким чином двох п'ятизначних чисел перше, будучи поділене на друге, дасть у частці 2 і в остачі — 590. Крім того, відомо, що сума, складена з подвоєного більшого шуканого числа і потроєного меншого, дорівнює 72.

1.41. Латунь складається з міді і цинку. Скільки міді і цинку міститься в 124 кг латуні, якщо 89 кг міді важать у воді на 10 кг менше, 7 кг цинку — на 1 кг. А 124 кг латуні — на 15 кг менше (густина води дорівнює 1кг/дм^3)?

1.42. Для переправи 72 танків через річку шириною 250 м є п'ять однакових переправних засобів. Тривалість рейсу переправного засобу дорівнює 15 хв. З метою скорочення часу переправи танків частину з них вирішили переправити під водою. Швидкість руху танків під водою 6км/год, дистанція між ними 150м. Визначити мінімальний час комбінованої переправи танків, якщо час підготовки до переправи не враховувати.

Розв'язання. Нехай x — кількість танків, які переправляються під водою; y — кількість танків, які переправляються на переправних засобах.

Відстань, яку пройде останній танк до виходу з річки на іншому боці, дорівнюватиме $150(x-1)+250$.

Час, який буде витрачено на переправу танків під водою, дорівнюватиме $\dfrac{150(x-1)+250}{100}$ (6 км/год = 100 м/хв — швидкість руху танка під водою).

Час переправи танків на переправних засобах обчислюється за формулою: $t_n = \dfrac{nt_p}{m}$,

де n — кількість танків, що переправляються;
m — кількість однакових переправних засобів;
t_p — тривалість одного рейсу.

При заданих початкових даних $t_n = \dfrac{15y}{5}$.

Оскільки за умовою задачі переправа танків проводиться обома способами одночасно, то можна припустити, що час, витрачений на переправу під водою, дорівнює часу переправи на переправних засобах.

Тому маємо

$$\begin{cases} \dfrac{150(x-1)+250}{100} = \dfrac{15y}{5}; \\ x + y = 72. \end{cases}$$

(Самостійно розв'язати систему за формулами Крамера.)
Приблизним розв'язком цієї системи є пара чисел: $x = 48$, $y = 24$.
Час комбінованої переправи приблизно дорівнюватиме 1 год 15 хв.

Відповіді

1.37. A (1; 2), B (–1; 0), C (5; –2).

1.38. 1) $c \neq 1$, $c \neq -2$, $x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{1}{c+2}$; 2) $c = -2$.

1.39. 1) $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$, $t = -1$;
2) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -1$;
3) $x_1 = 8$, $x_2 = 6$, $x_3 = 4$, $x_4 = 2$;
4) система розв'язків не має.

1.40. $x=21,\ y=10$.

1.41. У 124 кг латуні міститься 89 кг міді і 35 кг цинку.

(Розв'язок шукається з системи: $\begin{cases} x+y=124; \\ \dfrac{x}{8{,}9}+\dfrac{y}{7}=\dfrac{124}{8\frac{4}{15}}. \end{cases}$)

§ 2. Алгебра матриць

1. Матриці. Дії над матрицями

ОСНОВНІ ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

Назва	Позначення	Означення
Додавання матриць	$A_{[m\times n]}+B_{[m\times n]}=C_{[m\times n]}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$
Віднімання матриць	$A_{[m\times n]}-B_{[m\times n]}=C_{[m\times n]}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$
Множення матриці на число	$\lambda A_{[m\times n]}=C_{[m\times n]}$	$\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

Назва	Позначення	Означення
Множення матриць	$A_{[m\times n]}\cdot B_{[n\times p]}=C_{[m\times p]}$	$\begin{array}{cc} & \\ & \\ i & \\ & \\ & \end{array}\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}\times$ $\times\begin{array}{c} \qquad\quad j \\ \begin{pmatrix} \dots & \dots & b_{1j} & \dots \\ \dots & \dots & b_{2j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & b_{nj} & \dots \end{pmatrix}\end{array}=$ $=\begin{array}{cc} & \\ & \\ i & \\ & \\ & \end{array}\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad j \\ \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}\end{array}$

2.01. Транспонувати матриці:

$$1)\ \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};\quad 2)\ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix};\quad 3)\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.02. Знайти матрицю $A+B^T$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & -7 \\ 8 & 3 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -5 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.03. Обчислити лінійні комбінації матриць A, B, C:

$$1)\ 2A-3B,\ A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 8 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

2) $4A+3B-2C$,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

2.04. Обчислити добуток матриць:

1) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 8 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 5 & -4\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 8\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 5 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

2.05. Обчислити A^2, A^3, якщо $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

2.06. Знайти значення матричного многочлена:

1) $3X^2-X+5E$, якщо $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

2) B^2+E, якщо $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

А Відповіді

2.01. 1) $\begin{pmatrix}5 & 3\\ -8 & 1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1 & 5 & -8 & 2\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1\\ 4\\ 5\end{pmatrix}$.

2.02. $\begin{pmatrix}-2 & 2 & 10\\ -2 & 6 & -7\\ 8 & -2 & 4\end{pmatrix}$.

2.03. 1) $\begin{pmatrix}5 & -15 & 10\\ -28 & 0 & -7\\ -3 & 2 & 16\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}-3 & 9 & -3\\ 16 & 1 & 6\end{pmatrix}$.

2.04. 1) -3; 2) $\begin{pmatrix}4 & -8 & 12\\ 5 & -10 & 15\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}16 & -11\\ 33 & -12\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}0 & 11\\ -1 & 23\\ -1 & -7\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}-1 & 7 & 7\\ -1 & 2 & 3\\ -2 & 25 & 24\end{pmatrix}$.

2.05. $A^2=\begin{pmatrix}8 & -5\\ 5 & 3\end{pmatrix}$; $A^3=\begin{pmatrix}19 & -18\\ 18 & 1\end{pmatrix}$.

2.06. 1) $\begin{pmatrix}-11 & 10\\ -15 & -11\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

Б

2.07. Показати, що матриця $2A-3B$ є симетричною, якщо

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ -4 & 4 & 0\\ 4 & 0 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -3 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2.08. При якому значенні λ матриця $A+\lambda B$ буде нульовою, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 0\\ -7 & 28\end{pmatrix}?$$

2.09. Перевірити існування добутку матриць і, якщо можна, обчислити його:

1) $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 8 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}0 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$.

2.10. Обчислити добуток матриць:

$$1)\ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix};$$

$$2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

3) $A^T A$, де $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.11. Чи будуть матриці A і B комутуючими, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}?$$

Переконатися, що $\det(AB) = \det(BA) = \det A \det B$.

2.12. Обчислити: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

2.13. Знайти всі матриці, комутуючі з матрицею A:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

2.14. Знайти значення многочлена $f(A)$ від матриці A, якщо

1) $f(x) = x^2 - 5x - 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

2) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Відповіді

2.08. $\lambda = -\frac{1}{7}$.

2.09. 1) $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$; 2) добуток не існує; 3) $\begin{pmatrix} 40 & 40 \end{pmatrix}$.

$$2.10.\ 1)\ \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix};$$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

2.11. Матриці A і B не комутуючі матриці.

2.12. 1) $2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.13. 1) $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} a & 3b \\ -5b & a+9b \end{pmatrix}$,

де a і b — будь-які числа.

2.14. 1) $f(A) = \begin{pmatrix} -13 & 0 \\ 0 & -13 \end{pmatrix}$; 2) $f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

В

2.15. Довести справедливість тотожності:

$$(A+B)^T = A^T + B^T.$$

2.16. Обчислити добуток матриць A і B, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & -f & e & -d \\ f & 0 & -c & b \\ -e & c & 0 & -a \\ d & -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

2.17. Обчислити:

1) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$.

2.18. Знайти всі матриці 2-го порядку, які задовольняють рівняння:

1) $A^2=0$; 2) $A^2=E$.

2.19. Нехай A і B — довільні квадратні матриці. При якій умові справедливі рівності:

1) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$;

2) $(A+B)(A-B)=(A-B)(A+B)$;

3) $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$?

2.20. Довести, що довільна квадратна матриця $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ задовольняє рівняння $x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$.

Відповіді

2.16. $\begin{pmatrix} af-be+cd & 0 & 0 & 0 \\ 0 & af-be+cd & 0 & 0 \\ 0 & 0 & af-be+cd & 0 \\ 0 & 0 & 0 & af-be+cd \end{pmatrix}$.

2.17. 1) $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.18. 1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, a, b, c — будь-які числа, які задовольняють співвідношення $a^2+bc=0$;

2) $\pm E$ і $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, де $a^2+bc=1$.

2.19. Рівності 1), 2), 3) справедливі лише тоді, коли матриці A і B — комутуючі.

ПОЗНАЧЕННЯ, ОЗНАЧЕННЯ, ІСНУВАННЯ І БУДОВА ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ

Позначення і означення	Існування	Будова
$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ A^{-1} — матриця, обернена до матриці A, якщо $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$, де E — одинична матриця n-го порядку	A^{-1} існує $\Leftrightarrow$ $\det A\neq 0$, де $\det A$ — визначник матриці A.	$A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, A_{ij} — алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці A

2.21. Чи мають подані матриці обернені матриці:

$$A=\begin{pmatrix} 12 & -8 \\ -15 & 10 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}?$$

2.22. Знайти обернені матриці для таких матриць:

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};\ 2)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix};\ 3)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};\ 4)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.23. Розв'язати матричне рівняння $AX=C$,

де 1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 15 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

2.24. Перевірити виконання рівності $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ для матриць

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

А Відповіді

2.21. Для матриці A не існує оберненої матриці, а для матриці B — існує.

2.22. 1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.23. 1) $X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $X=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Б

2.25. Довести рівність:

$$(\alpha A)^{-1}=\frac{1}{\alpha}A^{-1},$$

де α — будь-яке число, відмінне від нуля.

2.26. Знайти обернені матриці для таких матриць:

1) $\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.27. Знайти матрицю X з рівняння:

1) $X\cdot\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

4) $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Б Відповіді

2.26. 1) $\begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$; 2) $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$;

3) $-\frac{1}{18}\begin{pmatrix} -6 & 9 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & -6 & 0 \\ -18 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.27. 1) $\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 21 & -14 & -10 \\ -10 & 7 & 5 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

В

2.28. Довести рівності: 1) $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$;

2) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

2.29. Знайти обернені матриці для таких матриць:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

2.30. Знайти квадратні матриці другого порядку X і Y, які задовольняють систему:

1) $\begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$

Відповіді

2.29. 1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & \dots & 2^{n-2} \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \dots & 2^{n-3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 2^{n-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

2.30. 1) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Ранг матриці

РАНГ МАТРИЦІ A

Значення мінорів	Ранг
Усі $M^{(1)} = 0$ (A — нульова матриця)	$r(A) = 0$
Усі $M^{(2)} = 0$ і хоча б один із $M^{(1)} \neq 0$	$r(A) = 1$
Усі $M^{(3)} = 0$ і хоча б один із $M^{(3)} \neq 0$	$r(A) = 2$
Усі $M^{(4)} = 0$ і хоча б один із $M^{(3)} \neq 0$	$r(A) = 3$
....	....
Усі $M^{(r+1)} = 0$ і хоча б один із $M^{(r)} \neq 0$	$r(A) = r$

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ РАНГУ МАТРИЦІ

Назва	Суть
Метод елементарних перетворень	За допомогою елементарних перетворень матриця A зводиться до трапецієподібної матриці B: $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \dots & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & \dots & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ $(b_{ii} \neq 0)$, $r(A) = r(B) = r$

Назва	Суть
Метод обвідних мінорів	$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$ 1. Хоча б один із $M^{(1)}$, наприклад $M^{(1)}=a_{11}\neq 0$, а всі обвідні мінори $M^{(2)}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=\dots=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{r1} & a_{rn} \end{vmatrix}=\dots=0\Rightarrow r(a)=1.$ 2. Хоча б один із $M^{(2)}$, наприклад $M^{(2)}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0,$ а всі обвідні мінори $M^{(3)}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}=\dots=$ $=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{rn} \end{vmatrix}=\dots=0\Rightarrow r(a)=2.$ .... 3. Хоча б один із $M^{(r)}\neq 0$, а всі обвідні мінори $M^{(r+1)}=0\Rightarrow$ $\Rightarrow r(A)=r.$

2.31. Обчислити ранг матриці:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.32. Обчислити ранг матриці, користуючись означенням рангу, та вказати один з її базисних мінорів:

1) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.33. Обчислити ранг матриці методом елементарних перетворень:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 16 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

2.34. Обчислити ранг матриці методом обвідних мінорів:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповіді

2.31. 1) $r=2$; 2) $r=2$; 3) $r=3$; 4) $r=4$.

2.32. 1) $r=2,\ M^{(2)}=\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $r=2,\ M^{(2)}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$;

3) $r=3,\ M^{(3)}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

2.33. 1) $r=3$; 2) $r=2$; 3) $r=3$.

2.34. 1) $r=2$; 2) $r=2$; 3) $r=2$.

Б

2.35. Довести, що ранг транспонованої матриці збігається з рангом даної матриці.

2.36. Обчислити ранг матриці методом елементарних перетворень та вказати один із її базисних мінорів:

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix};\quad 2)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$3)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.37. Знайти ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.38. Задано матриці A і B. Порівняти їх ранги, якщо:

$$1)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$2)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Б Відповіді

2.36. 1) $r=3,\ M^{(3)}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -5 & 8 \end{vmatrix}$; 2) $r=4,\ M^{(4)}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$;

3) $r=5$, базисний мінор збігається з визначником матриці.

2.37. $r=1$.

2.38. 1) $r(A)=r(B)=3$; 2) $r(A)=3,\ r(B)=4$.

В

2.39. Довести, що коли в матриці всі мінори k-го порядку дорівнюють нулю, то і всі мінори $(k+1)$-го порядку дорівнюють нулю.

2.40. Довести, що коли до матриці дописати нульовий рядок (стовпець), то ранг матриці при цьому не зміниться.

2.41. Як зміниться ранг матриці, якщо до неї дописати:

1) один стовпець; 2) два стовпці?

2.42. Довести, що $r(AA^T)=r(A^TA)=r(A)$.

2.43. При яких значеннях λ ранг матриці $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ дорівнює 1?

2.44. Чому дорівнює ранг матриці A при довільних значеннях λ?

$$1)\ A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix};\quad 2)\ A=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & \lambda \end{pmatrix}?$$

В Відповіді

2.41. 1) Ранг матриці може залишитися без зміни або збільшитися на одиницю;

2) ранг матриці може залишитися без зміни або збільшитися на одиницю чи на два.

2.43. $\lambda = 2 \pm \sqrt{3}$.

2.44. 1) $r(A) = 2$, якщо $\lambda = 0$; $r(A) = 3$, якщо $\lambda \neq 0$.

2) $r(A) = 3$ при будь-якому значенні λ.

4. *Власні вектори і власні числа матриці*

Означення	Знаходження власних чисел	Знаходження власних векторів
$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$; $A \cdot X = \lambda \cdot X$, X – власний вектор матриці A; λ — власне число матриці $A (X \neq 0)$	Власне число λ — корінь характеристичного рівняння $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$	Власний вектор $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ є розв'язком системи $\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0; \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{cases}$

А

2.45. Знайти власні числа і власні вектори матриці:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

А Відповіді

2.45. 1) $\lambda_1 = 1$, $X_1 = \begin{pmatrix} C_1 \\ -C_1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 3$, $X_2 = \begin{pmatrix} C_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$; $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$;

2) $\lambda_1 = 7$, $X_1 = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -2$, $X_2 = \begin{pmatrix} 4C_2 \\ -5C_2 \end{pmatrix}$; $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$;

3) $\lambda_1 = -1$, $X_1 = \begin{pmatrix} 2C_1 \\ 0 \\ C_1 \end{pmatrix}$, $C_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 4$, $X_2 = \begin{pmatrix} -3C_2 \\ -5C_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$, $C_2 \neq 0$,

$\lambda_3 = 3$, $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ C_3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_3 \neq 0$.

Б

2.46. Знайти власні числа і власні вектори матриці:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Б Відповіді

2.46. 1) $\lambda_1 = 1$, $X_1 = \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 3$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ C_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_2 \neq 0$,

$\lambda_3 = -4$, $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_3 \neq 0$, $\lambda_4 = 5$, $X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_4 \end{pmatrix}$, $C_4 \neq 0$;

2) $\lambda_1=1,\ X_1=\begin{pmatrix}C_1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ C_1\neq 0,\ \lambda_2=3,\ X_2=\begin{pmatrix}C_2\\C_2\\0\\0\end{pmatrix},\ C_2\neq 0,$

$$\lambda_3=-4,\ X_3=\begin{pmatrix}-C_3\\-15C_3\\35C_3\\0\end{pmatrix},\ C_3\neq 0,\ \lambda_4=5,\ X_4=\begin{pmatrix}73C_4\\6C_4\\-8C_4\\36C_4\end{pmatrix},\ C_4\neq 0;$$

3) $\lambda=2,\ X=\begin{pmatrix}2C_1-2C_2\\C_2\\C_1\end{pmatrix},\ C_1^2+C_2^2\neq 0,$

$$\lambda=-7,\ X=\begin{pmatrix}C_3\\2C_3\\-2C_3\end{pmatrix},\ C_3\neq 0.$$

2.47. Знайти власні числа матриці A^2, якщо відомі власні числа матриці A.

2.48. Довести, що коли стовпці X та Y є власними векторами матриці A, які відповідають одному власному числу λ, то їх лінійна комбінація C_1X+C_2Y, де C_1, C_2 — довільні сталі, є також власним вектором для власного числа λ.

2.49. Довести, що коли X є власним вектором кожної з матриць A і B, то X є власним вектором і матриці $\alpha A+\beta B$ (α і β — довільні сталі).

2.50. Довести, що всі власні вектори матриці A є власними векторами матриці $f(A)$, де f — многочлен.

Відповіді

2.47. Власні числа матриці A^2 дорівнюють квадратам власних чисел матриці A.

§ 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Формули для розв'язання $n\times n$ системи $(\Delta\neq 0)$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}$$

Назва	Формули для розв'язання
Формули Крамера	$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta};\ x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta};\ldots;\ x_n=\frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$, де $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{1n}&a_{2n}&\ldots&a_{nn}\end{vmatrix}$; $\Delta_{x_i}=\begin{vmatrix}a_{11}&\ldots&a_{1,i-1}&b_1&a_{1,i+1}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&\ldots&a_{2,i-1}&b_2&a_{2,i+1}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n1}&\ldots&a_{n,i-1}&b_n&a_{n,i+1}&\ldots&a_{nn}\end{vmatrix}$ $(i=\overline{1,n})$
Матричний запис розв'язку	$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\ldots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\ldots&A_{n2}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\A_{1n}&A_{2n}&\ldots&A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\ldots\\b_n\end{pmatrix}$, де $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n1}&a_{n2}&\ldots&a_{nn}\end{vmatrix}$; A_{ij} — алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} визначника матриці системи; b_i — вільний член i-го рівняння системи $(i,\ j=\overline{1,n})$

Дослідження $m\times n$ системи щодо кількості її розв'язків

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}$$

Умова	Тип системи
$r(A)=r(\bar{A})=n$	**Визначена**
$r(A)=r(\bar{A})<n$	**Невизначена**
$r(A)\neq r(\bar{A})$	**Несумісна**

тут $r(A)$ — ранг матриці системи $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$;

$r(\bar{A})$ — ранг розширеної матриці системи $\bar{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$.

Дослідження однорідної $m\times n$ системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=0; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

Умова		Кількість розв'язків системи
$r(A)=n$	$\Delta\neq 0\ (m=n)$	Єдиний нульовий
$r(A)<n$	$\Delta=0\ (m=n)$	Безліч

A — матриця системи

3.01. За формулами Крамера знайти розв'язок СЛАР, яка задана матрицею A і стовпцем вільних членів B:

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3.02. Розв'язати систему матричним методом:

1) $\begin{cases} 2x+y-z=2; \\ 3x+y-2z=3; \\ x+z=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1+5x_2+7x_3=6; \\ x_2+3x_3=-1; \\ 2x_1+3x_2+5x_3=3. \end{cases}$

3.03. Розв'язати матричне рівняння:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.04. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:

1) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=3; \\ 3x_1+x_2-5x_3=0; \\ 4x_1-x_2+x_3=3; \\ x_1+3x_2-13x_3=-6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1; \\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=2; \\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4=-1; \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1; \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1; \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3+x_4=16; \\ x_1+7x_2+x_3+x_4=23; \\ 2x_1+x_2+3x_3+5x_4=10; \\ 4x_1-3x_2+4x_3+6x_4=1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3+2x_4=-2; \\ 5x_1+2x_3+5x_4=-2; \\ 6x_1+x_2+5x_3+7x_4=-4; \\ 2x_1+x_2+2x_3+2x_4=-2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1+x_3+x_4+x_5=6; \\ x_2+x_3+x_4+x_5=8. \end{cases}$

3.05. З'ясувати питання про сумісність системи і, якщо можливо, знайти її розв'язок:

1) $\begin{cases} x_1+x_2=3; \\ x_1+x_3=4; \\ x_1+x_4=-2; \\ x_1+x_5=-1; \\ x_1+x_6=0; \\ x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6; \\ 3x_1+5x_2+3x_3+2x_4=4; \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x-5y+2z+4t=2; \\ 7x-4y+z+3t=5; \\ 5x+7y-4z-6t=3. \end{cases}$

3.06. Знайти всі значення α, при яких система визначена. Дослідити систему щодо її розв'язків при заданому значенні α:

1) $\begin{cases} x+\alpha y-2z=1; \\ 2x+y-5z=-1; \\ x-y-z=-2,\ \alpha=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y+\alpha z=4; \\ 2x+4y+6z=8; \\ 3x+y-z=1,\ \alpha=3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1+(\alpha-1)x_2+2x_3=1; \\ x_1+2x_2-x_3=2-\alpha; \\ 3\alpha x_1+2x_2+2\alpha x_3=2,\ \alpha=-1,\ \alpha=2,\ \alpha=0. \end{cases}$

3.07. Розв'язати однорідну систему:

1) $\begin{cases} x_1-7x_2+5x_3-2x_4=0; \\ 2x_2-3x_3+6x_4=0; \\ x_1-7x_2+4x_3=0; \\ x_1-3x_2+x_3+7x_4=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y+3z=0; \\ 2x+3y+4z=0; \\ x+y+z=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x+2y+z=0; \\ 2x+5y+3z=0; \\ 3x+4y+2z=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0; \\ 2x_1-3x_2+4x_3=0; \\ 3x_1-2x_2+5x_3=0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5x-8y+3z=0; \\ 2x-3y+2z=0. \end{cases}$

3.08. Знайти такі значення параметра α, при яких система має ненульові розв'язки. Знайти загальний розв'язок системи при кожному з цих значень параметра:

1) $\begin{cases} \alpha^2x_1+3x_2+2x_3=0; \\ \alpha x_1-x_2+x_3=0; \\ 8x_1+x_2+4x_3=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-y+3z=0; \\ x+2y-5z=0; \\ \alpha x+y-2z=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=0; \\ 4x_1-x_2+7x_3=0; \\ x_1+\alpha x_2+2x_3=0. \end{cases}$

Відповіді

3.01. 1) $x_1=-35,\ x_2=25,\ x_3=-9,\ x_4=2;$

2) $x_1=0,\ x_2=\dfrac{1}{2},\ x_3=\dfrac{3}{2},\ x_4=0.$

3.02. 1) $x=2,\ y=-1,\ z=1;$

2) $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=-1.$

3.03. 1) $X=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix};$ 2) $X=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix};$

3) $X=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix};$ 4) $X=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ \frac{5}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

3.04. 1) $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=1;$

2) система несумісна;

3) $x_1=C_1,\ x_2=C_2,\ x_3=2C_2-C_1,\ x_4=1;$

4) $x_1=1,\ x_2=3,\ x_3=0,\ x_4=1;$

5) $x_1=-1-5C,\ x_2=6C,\ x_3=-1-5C,\ x_4=1+7C;$

6) $x_1=6-C_1-C_2-C_3,\ x_2=8-C_1-C_2-C_3,\ x_3=C_1,\ x_4=C_2,$ $x_5=C_3.$

3.05. Система визначена:

1) $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = -3,\ x_5 = -2,\ x_6 = -1;$

2) $x_1 = -\frac{2}{11} + \frac{C_1}{11} - \frac{9C_2}{11},\ x_2 = \frac{10}{11} - \frac{5C_1}{11} + \frac{C_2}{11},\ x_3 = C_1,\ x_4 = C_2;$

3) система несумісна.

3.06. 1) $\alpha = R/\{0\}$. Якщо $\alpha = 0$, то система несумісна.

2) $\alpha = R/\{3\}$. Якщо $\alpha = 3$, то система невизначена. Загальний її розв'язок:

$$x = -\frac{2}{5} + C,\ y = \frac{11}{5} - 2C,\ z = C;$$

3) $\alpha = R\{-1;\ 2\}$. Якщо $\alpha = -1$, то система несумісна. Якщо $\alpha = 2$, то система невизначена. Загальний її розв'язок:

$$x_1 = \frac{2}{5} - C,\ x_2 = C - \frac{1}{5},\ x_3 = C.$$

Якщо $\alpha = 0$, то система визначена, її розв'язок:

$$x_1 = 0{,}4,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0{,}4.$$

3.07. 1) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0;$

2) $x = C;\ y = -2C,\ z = C;$

3) $x = y = z = 0;$

4) $x_1 = -7C,\ x_2 = 2C,\ x_3 = 5C;$

5) $x = y = z = C.$

3.08. 1) $\alpha = -4: x_1 = -5C,\ x_2 = 24C,\ x_3 = 4C;$

$\alpha = 2: x_1 = -C,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2C;$

2) $\alpha = 3: x = -C,\ y = 13C,\ z = 5C;$

3) $\alpha = -1: x_1 = -5C,\ x_2 = C;\ x_3 = 3C.$

3.09. За формулами Крамера знайти розв'язок СЛАР, яка задана матрицею A і стовпцем вільних членів B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 30 \\ 34 \\ 41 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

3.10. Розв'язати матричне рівняння і записати відповідну йому систему:

1) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix};$ 2) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

3) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

3.11. Знайти значення параметрів α, β, при яких матричне рівняння має розв'язок. Знайти розв'язок при заданих значеннях параметрів:

1) $\begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -4 & \beta \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ \alpha = 1,\ \beta = 0;$

2) $\begin{pmatrix} \alpha - 1 & \beta + 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \beta & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \alpha = 5,\ \beta = 7.$

3.12. Дослідити систему щодо її розв'язків залежно від значень параметра α:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = \alpha; \\ 2x_1 - 3x_2 + \alpha x_3 - 2x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = \alpha; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + \alpha x_4 = 1. \end{cases}$

3.13. Розв'язати однорідну систему і вказати ранг її матриці A:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 = 0; \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 + 9x_5 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+2x_4+5x_5=0; \\ 2x_1+2x_2+3x_3+2x_4+5x_5=0; \\ 3x_1+x_2+x_3+2x_4+2x_5=0; \\ x_1+x_2-x_3+x_4=0. \end{cases}$

3.14. Знайти такі значення параметра α, при яких система має:

а) єдиний нульовий розв'язок;

б) ненульові розв'язки, а також знайти загальний розв'язок системи при кожному з цих значень параметра:

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4+3x_5=0; \\ x_1+2x_2-x_3+3x_4+4x_5=0; \\ x_1+x_2-x_3+x_4+x_5=0; \\ x_1+\alpha x_2+x_3+x_4+2x_5=0; \\ -x_1+2x_2+\alpha x_3+x_5=0. \end{cases}$$

Б Відповіді

3.09. $x=4,\ y=3,\ z=2,\ t=1$.

3.10. 1) $X=\begin{pmatrix}5 & -2\end{pmatrix}$; 2) $X=\begin{pmatrix}3 & -2 \\ 4 & -3\end{pmatrix}$; 3) $X=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

3.11. 1) α, β — будь-які дійсні числа, окрім $\alpha=-4, \beta=2$ і $\alpha=4$, $\beta=-2$;

при $\alpha=1, \beta=0$ $X=\begin{pmatrix}0 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{19}{8}\end{pmatrix}$;

2) α, β — будь-які дійсні числа, окрім $\alpha=5, \beta=7$; при $\alpha=5, \beta=7$ система несумісна.

3.12. 1) При $\alpha=\frac{9}{5}$ система несумісна, при $\alpha\neq\frac{9}{5}$ система невизначена;

2) при $\alpha=-1$ система несумісна, при $\alpha\neq-1$ система невизначена.

3.13. 1) $x_1=C_1,\ x_2=C_2,\ x_3=\frac{-4C_1-5C_2}{6},\ x_4=x_5=\frac{2C_1+C_2}{18},\ r(A)=3$;

2) $x_1=C_1,\ x_2=C_1+C_2,\ x_3=C_2,\ x_4=-2C_1,\ x_5=-C_2,\ r(A)=3$.

3.14. а) Система має єдиний нульовий розв'язок при будь-якому значенні α, крім $\alpha=3;\ \alpha=-2$;

б) якщо $\alpha=3$ і $\alpha=-2$, система має ненульові розв'язки:

при $\alpha=3$ $x_1=-\frac{3}{2}C_1,\ x_2=C_1,\ x_3=-\frac{3}{2}C_1,\ x_4=-2C_1,\ x_5=C_1$;

при $\alpha=-2$ $x_1=C_1,\ x_2=C_1,\ x_3=C_1,\ x_4=-2C_1,\ x_5=C_1$.

В

3.15. Довести, що у разі елементарних перетворень над рядками розширеної матриці система лінійних рівнянь переходить в еквівалентну СЛАР.

3.16. Як змінюються розв'язки СЛАР у разі елементарних перетворень над стовпцями матриці системи?

3.17. До якого найпростішого вигляду можна привести розширену матрицю $\bar{A}$ системи n рівнянь з n невідомими, застосовуючи до неї перетворення Гаусса, за умови, що ранг матриці A системи дорівнює n.

3.18. На скільки одиниць ранг матриці системи може відрізнятися від рангу її розширеної матриці?

3.19. Яку систему рівнянь найпростішого вигляду можна одержати, застосовуючи перетворення методу Гаусса до рядків розширеної матриці системи m рівнянь з n невідомими, якщо $r(A)=n$, $r(\bar{A})\neq r(A)$?

3.20. Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ і $y_1, y_2, ..., y_n$ — єдині розв'язки відповідних СЛАР:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n=b_1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+...+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} a_{11}y_1+...+a_{1n}y_n=C_1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}y_1...+a_{nn}y_n=C_n. \end{cases}$$

Довести, що $C_1x_1+...+C_nx_n=b_1y_1+...+b_ny_n$, і записати цю суму в термінах визначників.

3.21. Довести, що для будь-яких різних чисел x_1, x_2, x_3 і будь-яких чисел y_1, y_2, y_3 існує єдиний многочлен $y = f(x)$ степеня не вище 2, для якого $f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, 3$.

Відповіді

3.16. З компонентами розв'язків виконуються ті самі елементарні перетворення.

3.17. Наведена матриця A системи являє собою одиничну матрицю, а матриця-стовпець B вільних членів збігається з розв'язком даної системи.

3.18. Не більше, ніж на 1.

3.19. $\begin{cases} x_1 = b_1; \\ x_2 = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = b_n; \\ 0 = 1. \end{cases}$

3.20. $C_1x_1 + \dots + C_nx_n = b_1y_1 + \dots + b_ny_n = \dfrac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \\ C_1 & \dots & C_n & 0 \end{vmatrix} =$

$= C^T A^{-1} B.$

3.21.

Вказівка Показати, що матриця системи рівнянь для визначення коефіцієнтів многочлена має відмінний від нуля визначник Вандермонда.

2 Розділ ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

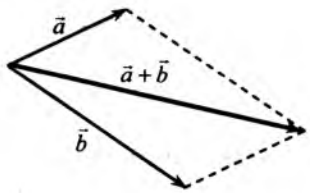
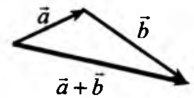
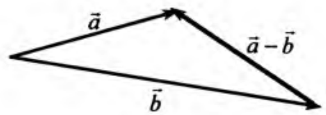
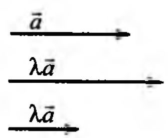
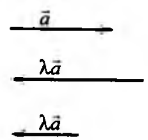
§ 4. Вектори. Системи координат

1. Вектори. Лінійні дії з ними

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

Назва поняття	Позначення
Вектор $\vec{a}$	$\vec{a}$
Довжина вектора $\vec{a}$	$\lvert\vec{a}\rvert$
Орт вектора $\vec{a}$	$\vec{a}^0$, $\dfrac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}$
Нульовий вектор	$\vec{0}$
Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$	$-\vec{a}$
Паралельність векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$	$\vec{a} \parallel \vec{b}$
Сума векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$	$\vec{a} + \vec{b}$
Різниця векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$	$\vec{a} - \vec{b}$
Добуток вектора $\vec{a}$ на число (скаляр) λ	$\lambda\vec{a}$
Лінійна комбінація векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$	$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n$
Ортонормований базис відповідно в R^1, R^2, R^3	$\vec{i}$; $\vec{i}, \vec{j}$; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
Проекція вектора $\vec{a}$: на вісь l на вектор $\vec{b}$ на координатні осі	 $np_l\vec{a}$ $np_{\vec{b}}\vec{a}$ $np_{Ox}\vec{a}$, $np_{Oy}\vec{a}$, $np_{Oz}\vec{a}$
Координати вектора: абсциса ордината апліката	 x y z

ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ З ВЕКТОРАМИ, ЗАДАНИМИ ГЕОМЕТРИЧНО

Назва операції	Виконання операції	
	Правило паралелограма	*Правило трикутника*
Додавання векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$		
Віднімання векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$		
Множення вектора $\vec{a}$ на скаляр λ	 $\lambda > 0$; $\lambda > 1$; $0 < \lambda < 1$	 $\lambda < 0$; $\lvert\lambda\rvert > 1$; $\lvert\lambda\rvert < 1$

А

4.01. У ромбі серед векторів $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$ вказати рівні і протилежно напрямлені вектори.

4.02. У правильному шестикутнику $ABCDEF$ знайти суму векторів $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$, де O — центр шестикутника.

4.03. Задано два вектори — $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Побудувати вектори:

1) $2\vec{a}-\vec{b}$; 2) $-\vec{a}-3\vec{b}$; 3) $-\vec{a}+\vec{b}$.

4.04. Задано три вектори — $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Побудувати вектори:

1) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 2) $-\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$; 3) $\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$;

4) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$; 5) $-2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; 6) $-\vec{a}-3\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$.

4.05. Дано: $|\vec{a}|=11$, $|\vec{b}|=23$, $|\vec{a}-\vec{b}|=20$.

Обчислити: $|\vec{a}-\vec{b}|$.

4.06. Дано: $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$, $|\vec{a}-\vec{b}|=22$.

Обчислити: $|\vec{a}+\vec{b}|$.

4.07. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, причому $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=12$. Обчислити $|\vec{a}+\vec{b}|$ і $|\vec{a}-\vec{b}|$.

4.08. На тіло діють дві сили — $\vec{F_1}$ і $\vec{F_2}$, $|\vec{F_1}|=8$Н, $|\vec{F_2}|=6$Н. Знайти їх рівнодійну, якщо величина кута між ними дорівнює 90°.

4.09. На літак діє сила тяги мотора 15 kH, сила опору повітря 11 kH і сила бічного вітру, напрямлена під кутом $\frac{\pi}{2}$ до курсу й рівна 3 kH. Знайти рівнодійну цих сил.

4.10. На підйомному крані швидкість вертикального піднімання вантажу 20 м/хв. Швидкість переміщення візка крана — 10 м/хв. Визначте сумарну швидкість руху вантажу.

А Відповіді

4.02. $\vec{O}$.

4.05. $|\vec{a}-\vec{b}|=30$.

4.06. $|\vec{a}+\vec{b}|=24$.

4.07. $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|=13$.

4.08. $|\vec{R}|=10$Н.

4.09. 5 kH.

4.10. $10\sqrt{5}$ м/хв.

Б

4.11. Побудувати такі чотири вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, щоб їх сума дорівнювала одному з них:

1) $\vec{a}$; 2) $\vec{b}$; 3) $\vec{c}$; 4) $\vec{d}$.

4.12. Точка O — центр ваги трикутника ABC. Довести, що $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{O}$.

4.13. У трикутнику ABC проведено середню лінію $\overrightarrow{MN}$ $(M \in AB)$, причому $\overrightarrow{MB}=\vec a$, $\overrightarrow{NC}=\vec b$, $\overrightarrow{CA}=\vec c$. Знайти вектори $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{BN}$.

4.14. При якій умові вектори $\vec a+\vec b$ і $\vec a-\vec b$ колінеарні?

4.15. У прямокутнику $ABCD$ вектори $\overrightarrow{AB}=\vec a$, $\overrightarrow{AC}=\vec b$. Знайти вектори $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}$.

4.16. Довести, що $|\vec a+\vec b|\le|\vec a|+|\vec b|$. При якій умові рівність правильна?

4.17. Які умови повинні задовольняти вектори $\vec a$ і $\vec b$, щоб справджувалося одне із співвідношень:

1) $|\vec a+\vec b|=|\vec a-\vec b|$; 2) $|\vec a+\vec b|>|\vec a-\vec b|$; 3) $|\vec a+\vec b|<|\vec a-\vec b|$;

4) вектор $\vec a+\vec b$ ділить навпіл кут між векторами $\vec a$ і $\vec b$?

4.18. Знайти $|\vec a-\vec b|$ і $|\vec a+\vec b|$, якщо $|\vec a|=5, |\vec b|=3, (\vec a \wedge \vec b)=120°$.

4.19. Довести, що в трикутнику ABC виконується векторна рівність: $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, де AD — медіана.

4.20. Три сили $\vec F_1, \vec F_2, \vec F_3$ прикладені до однієї точки і мають взаємно перпендикулярні напрямки. Визначити величину їхньої рівнодійної $\vec R$, якщо

$$|\vec F_1|=2 \text{ кг}, \; |\vec F_2|=10 \text{ кг}, \; |\vec F_3|=11 \text{ кг}.$$

Відповіді

4.13. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MN}=2\vec a+2\vec b-\frac{1}{2}\vec c$, $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}=\vec a+\vec b-\frac{1}{2}\vec c$,

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{BN}=-(\vec a+\vec b+\vec c)$.

4.14. $\vec a \parallel \vec b$.

4.15. $\overrightarrow{BC}=\vec b-\vec a$, $\overrightarrow{CB}=\vec a-\vec b$, $\overrightarrow{BD}=\vec b-2\vec a$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=\vec b-2\vec a$.

4.16. $\vec a \parallel \vec b$.

4.17. 1) $\vec a \perp \vec b$; 2) $(\vec a, \wedge \vec b)<\frac{\pi}{2}$; 3) $(\vec a, \wedge \vec b)>\frac{\pi}{2}$; 4) $|\vec a|=|\vec b|$.

4.18. $|\vec a-\vec b|=7$; $|\vec a+\vec b|=\sqrt{19}$.

4.20. $|\vec R|=15$ кг.

4.21. Довести, що можна побудувати трикутник, сторони якого рівні і паралельні медіанам даного трикутника ABC.

4.22. Трикутник ABC побудований на векторах $\overrightarrow{AB}=\vec a$ і $\overrightarrow{AC}=\vec b$. Знайти ненульовий вектор $\vec C$, який лежить на бісектрисі кута A.

4.23. У тетраедрі $ABCS$ спростити суму векторів:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CS}$; 2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB}$.

4.24. Для правильної чотирикутної піраміди довести, що

$$\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA},$$

де S — вершина, O — основа висоти піраміди.

4.25. Визначити число λ, на яке треба помножити вектор $\vec a$, щоб вектор $\vec b=\lambda\vec a$:

1) мав довжину, рівну одиниці;

2) мав довжину, рівну 3 і $\vec a \| \vec b$.

4.26. Швидкість плавця в стоячій воді 4 км/год, а швидкість течії річки — 3 км/год. Визначити, в якому напрямку потрібно плисти, щоб приплисти до найближчої точки протилежного берега річки.

4.27. До центру правильного шестикутника прикладені три сили — $\vec F_1, \vec F_2, \vec F_3$, напрямлені у три послідовні вершини і $|\vec F_1|=|\vec F_2|=|\vec F_3|=1H$. Знайти величину і напрямок рівнодійної $\vec R$.

4.28. Знайти рівнодійну трьох сил, прикладених до точки O, якщо відомо, що ці сили зображуються векторами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, де точки A, B, C — вершини рівнобічного трикутника, вписаного в коло з центром O.

Відповіді

4.22. $\vec c=\lambda\left(\frac{\vec a}{|\vec a|}+\frac{\vec b}{|\vec b|}\right)$, $\lambda \ne 0$.

4.23. 1) $\overrightarrow{AS}$; 2) $\overrightarrow{AB}$.

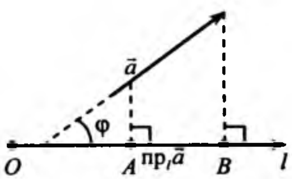
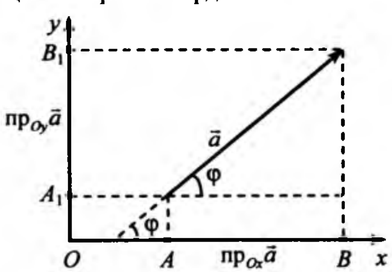
4.25. 1) $\lambda = \pm\frac{1}{|\vec{a}|}$; 2) $\lambda = -\frac{3}{|\vec{a}|}$.

4.26. Під кутом $\alpha = 90^\circ - \arcsin\frac{3}{4}$ до берега річки.

4.27. $|\vec{R}| = 2$ Н, напрямок вектора $\vec{R}$ збігається з напрямком сили $\vec{F}_2$.

4.28. $\vec{R} = \vec{0}$.

2. Проекція вектора на вісь

Назва і геометрична ілюстрація	Формули для знаходження
Проекція вектора на вісь 	$np_l\vec{a} = \|\vec{a}\|\cos\varphi$
Проекція вектора на координатні осі 	$np_{O_x}\vec{a} = \|\vec{a}\|\cos\varphi$, $np_{O_y}\vec{a} = \|\vec{a}\|\sin\varphi$

4.29. Знайти проекцію вектора $\vec{a}$ на напрям вектора $\vec{b}$ і проекцію вектора $\vec{b}$ на напрям вектора $\vec{a}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, а кут між ними дорівнює 120°.

4.30. Знайти проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь l у кожному з випадків (рис. 4.1), якщо $|\vec{a}| = 3$:

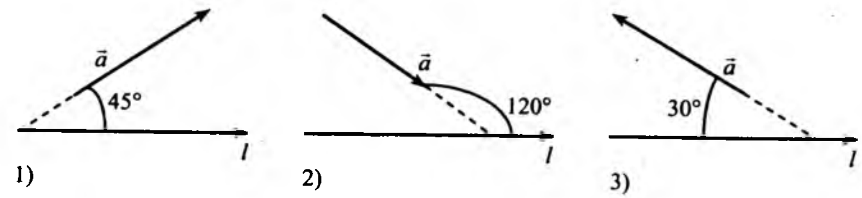


Рис. 4.1

4.31. Знайти проекції вектора $\vec{a}$ (рис. 4.2) на осі координат, якщо $|\vec{a}| = 2$.

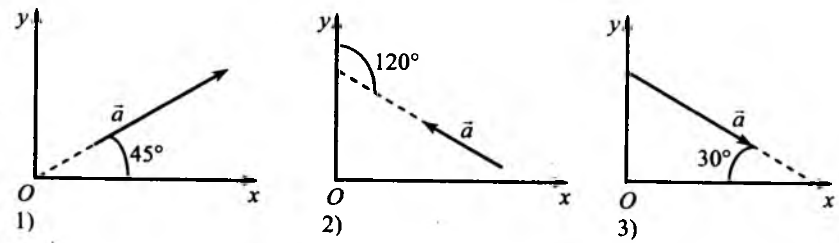


Рис. 4.2

4.32. Знайти проекцію вектора $\vec{a} + \vec{b}$ на вісь l, якщо відомо: $(\hat{\vec{a}, l}) = 60^\circ$, $(\hat{\vec{b}, l}) = \frac{\pi}{4}$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$.

Відповіді

4.29. $np_{\vec{b}}\vec{a} = -1$, $np_{\vec{a}}\vec{b} = -\frac{1}{2}$.

4.30. 1) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

4.31. 1) $np_{Ox}\vec{a} = \sqrt{2}$, $np_{Oy}\vec{a} = \sqrt{2}$; 2) $np_{Ox}\vec{a} = -\sqrt{3}$, $np_{Oy}\vec{a} = 1$;
3) $np_{Ox}\vec{a} = \sqrt{3}$, $np_{Oy}\vec{a} = -1$.

4.32. $\approx 1{,}9$.

Б

4.33. Знайти кути між векторами куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$:

1) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{D_1C_1}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DD_1}$; 3) $\overrightarrow{AB_1}$ і $\overrightarrow{D_1C}$;

4) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{A_1D}$; 5) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{B_1D}$; 6) $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{B_1D}$.

4.34. Знайти проекцію вектора $\vec{a}+\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$, якщо $|\vec{a}|=23$; $|\vec{b}|=11$; $|\vec{a}-\vec{b}|=30$.

4.35. Знайти проекцію вектора $\vec{a}+\vec{b}$ на вісь l, якщо

$(\widehat{\vec{a},l})=20^\circ$; $(\widehat{\vec{b},l})=100^\circ$; $|\vec{a}+\vec{b}|=6$; $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

Б Відповіді

4.33. 1) 0; 2) 90°; 3) 90°; 4) 90°; 5) 90°;

6) $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{B_1D}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4.34. $\approx 8{,}87$.

4.35. 3.

В

4.36. Знайти довжину вектора $\vec{a}+\vec{b}$, якщо його проекція на вісь l дорівнює 8 і $(\widehat{\vec{a},l})=30^\circ$; $(\widehat{\vec{b},l})=90^\circ$; $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

4.37. У трикутнику ABC відомі: $|\overrightarrow{AB}|=3\sqrt{2}$; $|\overrightarrow{BC}|=3$; $|\overrightarrow{CA}|=3$. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$.

4.38. Знайти проекцію діагоналі $\overrightarrow{AC_1}$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на вектор $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, якщо довжина ребра куба дорівнює одиниці. Знайти кут між векторами $\overrightarrow{AC_1}$ і $\overrightarrow{AC}$.

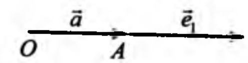
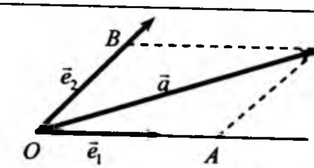
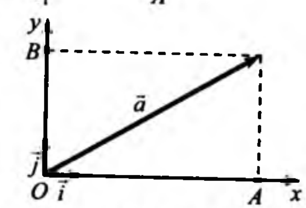
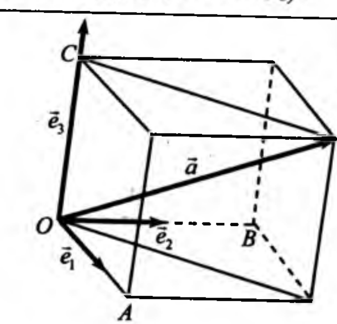
В Відповіді

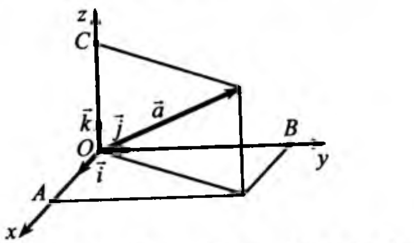
4.36. 16.

4.37. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

4.38. $np_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}\overrightarrow{AC_1}=\sqrt{2}\left(\widehat{\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{AC}}\right)\approx 35^\circ$.

3. Розкладання вектора за базисом

Алгебраїчний запис	Геометрична ілюстрація
$\vec{a}\in R^1$ $\vec{a}=x\vec{e}_1$ $\vec{a}=x\vec{i}$	 $x=OA=np_{\vec{e}_1}\vec{a}$  $x=OA=np_{\vec{i}}\vec{a}$
$\vec{a}\in R^2$ $\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$ $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$	 $x=OA,$ $y=OB$  $x=OA=np_{Ox}\vec{a},\quad y=OB=np_{Oy}\vec{a}$
$\vec{a}\in R^3$ $\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$	 $x=OA,$ $y=OB,$ $z=OC$

Алгебраїчний запис	Геометрична ілюстрація
$\vec{a} \in R^3$ $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$	 $x = OA = пр_{Ox}\vec{a}$, $y = OB = пр_{Oy}\vec{a}$, $z = OC = пр_{Oz}\vec{a}$

ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ З ВЕКТОРАМИ, ЗАДАНИМИ В КООРДИНАТНІЙ ФОРМІ

Назва операції	Виконання операції
Додавання векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$	$\vec{a} + \vec{b} = (x_1;\ y_1;\ z_1) + (x_2;\ y_2;\ z_2) = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$
Віднімання векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$	$\vec{a} - \vec{b} = (x_1;\ y_1;\ z_1) - (x_2;\ y_2;\ z_2) = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2)$
Множення вектора $\vec{a}$ на скаляр λ	$\lambda\vec{a} = \lambda(x_1;\ y_1;\ z_1) = (\lambda x_1;\ \lambda y_1;\ \lambda z_1)$
Лінійна комбінація векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$	$\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} = \lambda_1(x_1;\ y_1;\ z_1) + \lambda_2(x_2;\ y_2;\ z_2) =$ $= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2;\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2;\ \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$

A

4.39. У паралелограмі $ABCD$ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, E — середина сторони CD. Розкласти вектор $\overrightarrow{BE}$ за базисом $\vec{a}$, $\vec{c}$.

4.40. У трикутнику ABC точка M є серединою відрізка AB, а точка O — точкою перетину медіан, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Довести, що $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$.

4.41. У правильному шестикутнику $ABCDEF$ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Розкласти за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори: $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$.

4.42. У ромбі $ABCD$ діагоналі $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$. Розкласти за цими векторами вектори: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

4.43. На векторах $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ побудовано паралелепіпед. Точка M — центр грані, яка проходить через точку C і паралельна $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Розкласти вектор $\overrightarrow{OM}$ за векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

4.44. Знайти розклад за базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ діагоналей $\vec{d}_1$, $\vec{d}_2$ паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{k} - 3\vec{j}$.

4.45. Знайти значення x і y, при яких неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задовольняють співвідношення: $(x + y + 1)\vec{a} + (x - 2y + 3)\vec{b} = 0$.

4.46. При яких значеннях x, y, z некомпланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ можуть задовольняти співвідношення: $(x + y + z)\vec{a} + (x - 2y + 1)\vec{b} + (z + 5)\vec{c} = 0$.

4.47. Знайти координати вектора $\vec{c} = 3\vec{b} - 2\vec{a}$, якщо $\vec{a} = (1;\ 2;\ -3)$, $\vec{b} = (-2;\ 1;\ 4)$.

4.48. Накресліть довільний базис $\vec{l}_1, \vec{l}_2$. Побудуйте вектори: $\vec{a} = (1;\ 4)$, $b = \vec{l}_1 - 2\vec{l}_2$, $\vec{c} = (-3;\ -1)$.

4.49. Задано вектори $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} - 3\vec{j}$. Обчислити координати векторів: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $2\vec{a} - \vec{b} + c$, $\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

4.50. Перевірити колінеарність векторів $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ і $\vec{b} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$. Знайти їх лінійну залежність.

4.51. Розкласти вектор $\vec{c}$ за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a} = (1;\ -2)$, $\vec{b} = (-1;\ 1)$, $\vec{c} = (0;\ -1)$;
2) $\vec{a} = (1;\ 2)$, $\vec{b} = (2;\ -3)$, $\vec{c} = (9;\ 4)$;
3) $\vec{a} = (0;\ 1)$, $\vec{b} = (-1;\ 0)$, $\vec{c} = (1;\ 1)$;
4) $\vec{a} = (1;\ 1)$, $\vec{b} = (-1;\ 0)$, $\vec{c} = (-1;\ 1)$.

4.52. Розкласти вектор $\vec{d}$ за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо:

1) $\vec{a} = (1;\ 1;\ -2)$, $\vec{b} = (1;\ -1;\ 0)$, $\vec{c} = (0;\ 2;\ 3)$, $\vec{d} = (0;\ 1;\ 1)$;
2) $\vec{a} = (2;\ 1;\ -3)$, $\vec{b} = (3;\ -2;\ 1)$, $\vec{c} = (-1;\ 1;\ -2)$, $\vec{d} = (11;\ -6;\ 5)$;
3) $\vec{a} = (1;\ 0;\ 1)$, $\vec{b} = (0;\ 1;\ 0)$, $\vec{c} = (0;\ 0;\ -1)$, $\vec{d} = (4;\ -1;\ 1)$.

А Відповіді

4.39. $\vec{c}-\frac{3}{2}\vec{a}$.

4.41. $\overrightarrow{CD}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{DE}=-\vec{a}$, $\overrightarrow{EF}=-\vec{b}$, $\overrightarrow{FA}=\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$,
$\overrightarrow{AD}=2\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=2\vec{b}-\vec{a}$.

4.42. $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{DA}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

4.43. $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$.

4.44. $\vec{d}_1=\vec{a}+\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{d}_2=\vec{a}-\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k}$.

4.45. $x=-\frac{5}{3}$, $y=\frac{2}{3}$.

4.46. $x=3, y=2, z=-5$.

4.47. $\vec{c}=(7;4;-17)$.

4.49. $(2;-3;2)$, $(-1;0;1)$, $\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2};0\right)$.

4.50. $\vec{b}=-2\vec{a}$.

4.51. 1) $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{c}=5\vec{a}+2\vec{b}$; 3) $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$; 4) $\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$.

4.52. 1) $\vec{d}=0{,}1\vec{a}-0{,}1\vec{b}+0{,}4\vec{c}$; 2) $\vec{d}=\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}$; 3) $\vec{d}=4\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$.

Б

4.53. Довжини сторін AD і BC трапеції $ABCD$ відносяться як 3:2. Записати розклад векторів $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CD}$ за векторами $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$.

4.54. У правильному шестикутнику $ABCDEF$ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{b}$. Розкласти за базисом $\vec{a},\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EF}$.

4.55. У рівнобічній трапеції $ABCD$ нижня основа $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, бічна сторона $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ і кут між ними дорівнює 60°. Розкласти за базисом $\vec{a},\vec{b}$ вектори: $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$.

4.56. На площині задано правильний шестикутник зі стороною 4. Розкласти за ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$ вектори, зображені на рис. 4.3

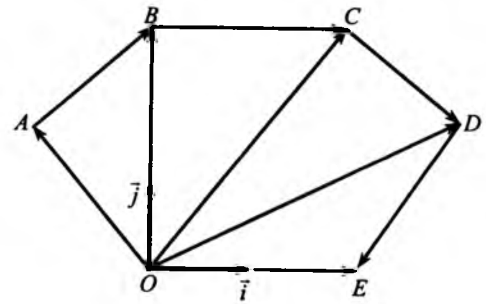


Рис. 4.3

4.57. Визначити α і β, при яких вектори $\vec{a}=\alpha\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ і $\vec{b}=3\vec{i}+6\vec{j}-\beta\vec{k}$ колінеарні. Написати лінійну залежність між векторами для знайдених значень α і β.

4.58. З'ясувати, чи утворюють вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ базис:

1) $\vec{a}=(1;0;-1)$; $\vec{b}=(-1;1;0)$; $\vec{c}=(0;0;1)$;

2) $\vec{a}=(1;2;1)$; $\vec{b}=(1;-1;3)$; $\vec{c}=(3;3;5)$.

4.59. Сила $\vec{F}$, рівна 100Н, діє вздовж діагоналі прямокутного паралелепіпеда, ребра якого рівні 6, 8, 10 см. Знайти складові цієї сили вздовж ребер.

Б Відповіді

4.53. $\overrightarrow{BC}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DA}=-\frac{5}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{5}{3}\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{5}{3}\overrightarrow{BD}$.

4.54. $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$.

4.55. $\overrightarrow{BC}=-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\frac{|\vec{b}|-|\vec{a}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\frac{|\vec{a}|-|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{BD}=-\vec{a}+\vec{b}$.

4.56. $\overrightarrow{OE}=4\vec{i}$, $\overrightarrow{OA}=-2\vec{i}+2\sqrt{3}\vec{j}$, $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+2\sqrt{3}\vec{j}$,

$\overrightarrow{OB}=4\sqrt{3}\vec{j}$, $\overrightarrow{BC}=4\vec{i}$, $\overrightarrow{Cd}=2\vec{i}-2\sqrt{3}\vec{j}$.

$\overrightarrow{DE}=-2\vec{i}-2\sqrt{3}\vec{j}$, $\overrightarrow{OC}=4\vec{i}+4\sqrt{3}\vec{j}$, $\overrightarrow{OD}=6\vec{i}+2\sqrt{3}\vec{j}$.

4.57. $\alpha=-1$, $\beta=9$, $\vec{b}=-3\vec{a}$.

4.58. 1) так; 2) ні.

4.59. $30\sqrt{2}H$, $40\sqrt{2}H$, $50\sqrt{2}H$.

4.60. У трикутній піраміді $ABCD$ $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$.

Розкласти за базисом $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ вектори: $\overrightarrow{DC}$, медіану $\overrightarrow{DM}$, грані BCD, вектор $\overrightarrow{AQ}$, де Q — центр ваги грані BCD.

4.61. Довести, що для двох неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які виходять з однієї точки, вектор $|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}$ колінеарний бісектрисі кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, а вектор $|\vec{b}|\vec{a}-|\vec{a}|\vec{b}$ колінеарний бісектрисі суміжного з ним кута.

4.62. Сторона BC трикутника ABC поділена точкою D у відношенні $\frac{m}{n}$, тобто $\frac{BD}{DC}=\frac{m}{n}$. Розкласти вектор $\overrightarrow{AD}$ за векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

4.63. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M, N, P, Q, R, S, T — середини ребер $A_1B_1, B_1C_1, AB, AD, DC, BC, BB_1$ відповідно. Розкласти за базисом $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB_1}$ вектори: $\overrightarrow{DT}, \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{NP}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QS}, \overrightarrow{B_1D}, \overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RN}$.

4.64. Знайти лінійну залежність між векторами $\vec{m},\vec{n},\vec{p},\vec{q}$, якщо $\vec{m}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$, $\vec{n}=\vec{b}-\frac{\vec{c}}{2}$, $\vec{p}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{b}+\vec{c}$.

4.65. При яких значеннях α,β,γ з векторів $\vec{a}=(\alpha;-2;1)$, $\vec{b}=(-3;5;\beta)$, $\vec{c}=(4;\beta;\gamma)$ можна скласти трикутник?

4.66. Знайти значення параметра γ, при якому вектори $\vec{a}=(\alpha;\beta;1)$, $\vec{b}=(1;1;0)$, $\vec{c}=(1;2;\gamma)$ утворюють базис, за умови, що $\alpha-\beta=2$.

4.67. Довести, що вектори $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{c}-\vec{a}$ компланарні для будь-яких заданих векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

4.68. Знайти значення λ, при якому вектори $\lambda\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}+\lambda\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}+\lambda\vec{c}$ є компланарними для будь-яких некомпланарних векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

4.69. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a}=(\alpha+\beta)\vec{i}-2\vec{j}+8\vec{k}$ і $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+(\alpha-3\beta)\vec{k}$ є колінеарними?

Відповіді

4.60. $\overrightarrow{DC}=\vec{c}-\vec{a}$, $\overrightarrow{DM}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\vec{a}$, $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$.

4.62. $\overrightarrow{AD}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}+\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}$.

4.63. $\overrightarrow{DT}=-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{AB_1}=-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}$,

$\overrightarrow{NP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$,

$\overrightarrow{QS}=-\vec{a}$, $\overrightarrow{B_1D}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{RM}=-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}$,

$\overrightarrow{RN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}$.

4.64. $3\vec{m}-3\vec{p}+4\vec{n}-4\vec{q}=0$.

4.65. $\alpha=-1$, $\beta=-3$, $\gamma=2$.

4.66. γ набуває будь-яких значень, крім $\gamma=-\frac{1}{2}$.

4.68. $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=2$.

4.69. $\alpha=\frac{5}{2}$, $\beta=-\frac{1}{2}$.

4. Системи координат

4.70. У відповідному просторі R^1, R^2 чи R^3 у прямокутній декартовій системі координат побудувати точки $A(-8)$, $B(0;5)$, $D(5;1)$, $E(-2;-3)$, $F(-1;2;4)$, $L(2;-1;0)$, $M(0;0;-5)$.

4.71. У відповідному просторі побудувати вектори $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}$; $\vec{b}=5\vec{j}$; $\vec{c}=-\vec{i}+3\vec{j}$; $\vec{d}=(0;-8;1)$; $\vec{e}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{f}=-3\vec{k}$. У кожному з випадків указати проекції вектора на координатні осі.

4.72. Побудувати точку М (1; –3; 6) і визначити її радіус-вектор.

4.73. Знайти координати вектора $\overline{AB}$ і записати його розклад за базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, якщо $A(2;0;-1)$, $B(-1;1;2)$.

4.74. Вектор $\vec{a}$ колінеарний вектору $\vec{b}=(5;1)$. Визначити абсцису $\vec{a}$, якщо його ордината дорівнює 5.

4.75. Задано дві суміжні вершини паралелограма $A(-2;6)$, $B(2;8)$ і точка перетину його діагоналей $M(2;2)$. Знайти координати двох інших вершин паралелограма.

4.76. Відрізок з кінцями $A(3;-2)$ і $B(6;4)$ поділено на три рівні частини. Знайти координати точок поділу A_1 і A_2.

4.77. Знайти координати точки M перетину медіан трикутника ABC, якщо $A(1;2;3)$, $B(0;1;1)$, $C(-1;0;1)$.

4.78. Точка M (1; –5; 5) задана своїми координатами в прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$. Визначити координати цієї точки в системі координат $O'x'y'z'$, якщо $\overline{OO'}=(-2;1;-1)$, $Ox\|O'x'$, $Oy\|O'y'$, $Oz\|O'z'$.

4.79. Побудувати точки за полярними координатами:

$$A\left(1;\frac{\pi}{2}\right),\ B\left(2;\frac{\pi}{6}\right),\ C(1;\pi),\ D(3;0),\ E\left(1;-\frac{\pi}{4}\right).$$

4.80. У полярній системі координат задані точки: $A\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{2};\frac{3}{4}\pi\right)$, $C\left(5;\frac{\pi}{5}\right)$. Знайти координати цих точок у прямокутній системі координат при умові, що вісь Ox збігається з полярною віссю, а початок координат — з полюсом.

4.81. Задані координати трьох вершин A (0; 1; –1), B (1; 0; 2), C (2; 3; 0) паралелограма $ABCD$. Знайти координати точки D.

4.82. Точка C (–5; 4) поділяє відрізок AB у відношенні 3:4, а точка D (6; –5) — у відношенні 2:3. Знайти координати точок A і B.

Відповіді

4.72. $\vec{r}=\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$.

4.73. $\overline{AB}=(-3;1;3)$, $\overline{AB}=-3\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$.

4.74. $x=25$.

4.75. $C(6;-2)$, $D(2;-4)$.

4.76. $A_1(4;0)$, $A_2(5;2)$.

4.77. $M\left(0;1;\frac{5}{3}\right)$.

4.78. $M(3;-6;6)$.

4.80. $A(1;\sqrt{3})$, $B(-1;1)$, $C(0;5)$.

4.81. $D(1;4;-3)$.

4.82. $A(160;-131)$, $B(-225;184)$.

Б

4.83. Вектор $\overline{AB}$ колінеарний вектору $\vec{a}=(3;-4)$. Визначити координати точки B, якщо $A(8;5)$.

4.84. Визначити координати кінців відрізка CD, який точками A(2; 0; 2) і B (5; –2; 0) поділений на три рівні частини.

4.85. На векторах $\overline{AB}=(2;6;-4)$ і $\overline{AC}=(4;2;-2)$ побудовано трикутник ABC. Визначити координати векторів $\overline{AM}$, $\overline{BN}$, $\overline{CP}$, які збігаються з медіанами трикутника.

4.86. Точка M перетину медіан трикутника лежить на осі Ox; дві вершини трикутника — точки A (2; –3) і B (–5; 1) ; третя вершина C лежить на осі Oy. Визначити координати точок M і C.

4.87. Точка M (1; –5; 5) задана своїми координатами в системі координат з початком у точці O і базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Знайти її координати в системі координат з початком у точці O' і базисом $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$, якщо

1) $O'=O$, $\vec{i}'=-\vec{j}$, $\vec{j}'=\vec{k}$, $\vec{k}'=\vec{i}$;

2) $\overline{OO'}=\vec{j},\ \vec{i}'=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j}),\ \vec{j}'=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j}),\ \vec{k}'=\vec{k}.$

4.88. У полярній системі координат задані точки $M_1\left(1;\frac{\pi}{4}\right)$ і $M_2\left(2;-\frac{\pi}{3}\right)$. Визначити полярні координати точок, симетричних даним відносно полюса.

Б Відповіді

4.83. $B(3\lambda+8;-4\lambda+5),\ \lambda\in R$.

4.84. $C(-1;2;4),\ D(8;-4;-2)$.

4.85. $\overline{AM}=(3;4;-3),\ \overline{BN}=(0;-5;3),\ \overline{CP}=(-3;1;0)$.

4.86. $M(-1;0),\ C(0;2)$.

4.87. 1) $M(5;5;1)$; 2) $M\left(-\frac{5}{\sqrt{2}};\frac{7}{\sqrt{2}};5\right)$.

4.88. $\left(1;-\frac{3}{4}\pi\right);\left(2;\frac{2}{3}\pi\right)$.

В

4.89. Задано точки A (1; 2; 3), B (2; –2; 1), C (3; 0; 3), D (16; 10; 18). E — точка перетину площини OAB (O — початок координат) з прямою, що проходить через точку D паралельно прямій OC. Знайти координати точки E.

4.90. Задано точки A (2; 5; 2) і B (14; 5; 4), C — точка перетину координатної площини Oxy з прямою, що проходить через точку B паралельно прямій OA. Знайти координати точки C.

4.91. Задано вершини однорідної трикутної пластинки: $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3,y_3)$. Якщо з'єднати середини сторін даної пластинки, отримаємо нову однорідну трикутну пластинку. Довести, що центри ваги обох пластинок збігаються.

4.92. У полярній системі координат задано точки $A\left(8;-\frac{2}{3}\pi\right)$ і $B\left(6;\frac{1}{3}\pi\right)$. Обчислити полярні координати середини відрізка AB.

4.93. Використовуючи вектори і лінійні операції над ними, довести, що медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну з медіан у відношенні 2:1, рахуючи від вершини.

4.94. На сторонах AB, BC, CA трикутника ABC вибрані відповідно точки M, N, P так, що $\overline{AM}=\alpha\overline{AB},\ \overline{BN}=\beta\overline{BC},\ \overline{CP}=\gamma\overline{CA}$ (α,β,γ — дійсні числа). Якими повинні бути числа α,β,γ, щоб вектори $\overline{CM},\ \overline{AN},\ \overline{BP}$ утворювали трикутник?

4.95. У трикутнику ABC точки M, N, P — основи бісектрис CM, AN, BP внутрішніх кутів трикутника. Довести, що вектори $\overline{CM},\ \overline{AN},\ \overline{BP}$ утворюють правильний трикутник.

4.96. На сторонах BC і CD паралелограма $ABCD$ вибрані точки F і E так, що $BF:FC=\mu,\ DE:EC=\lambda\ (\mu>0;\ \lambda>0)$. Прямі FD і AE перетинаються в точці O. Знайти відношення $FO:OD,\ AO:OE$.

4.97. На стороні AB паралелограма $ABCD$ розташована точка K, на продовженні сторони CD за точку D — точка L. Прямі KD і BL перетинаються в точці N, а прямі LA і CK — в точці M. Довести, що $MN\parallel AD$.

4.98. На діагоналях AB_1 і CA_1 бічних граней трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ розміщені відповідно точки E і F так, що $EF\parallel BC_1$. Довести, що $EF:BC_1=1:3$.

4.99. На ребрах SA і SB трикутної піраміди $SABC$ вибрано відповідні точки A_1 і B_1 так, що $SA_1:SB=n,\ SB_1:SB=m$. Точки M і N належать відрізкам A_1B і CB_1 відповідно, причому $CN:CB_1=p$, а відрізок MN паралельний до площини ASC. Довести, що $BM:BA_1=1-pm$.

В Відповіді

4.89. E (–19; 10; –17). (Розкласти вектор $\overline{OD}$ за базисом $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$.)

4.90. $C\,(10; -5; 0)$. (Розкласти вектор $\overrightarrow{OB}$ за базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\overrightarrow{OA}$.)

4.92. $\left(1; -\dfrac{2}{3}\pi\right)$.

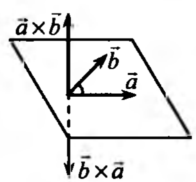
4.94. $\alpha=\beta=\gamma$.

4.96. $FO:OD=\dfrac{1+\lambda+\mu}{\lambda(1+\mu)}$, $AO:OE=\dfrac{(1+\lambda)(1+\mu)}{\lambda}$.

§ 5. Множення векторів

Основні види добутків векторів

$\vec{a}=(x_1;\, y_1;\, z_1)$; $\vec{b}=(x_2;\, y_2;\, z_2)$; $\vec{c}=(x_3;\, y_3;\, z_3)$

Назва і позначення	Означення	Координатна форма	Результат
Скалярний добуток векторів $(\vec{a},\vec{b})$: $(\vec{a},\ \vec{b})$	$(\vec{a},\vec{b})=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$ або $(\vec{a},\vec{b})=\lvert\vec{a}\rvert\, np_{\vec{a}}\vec{b}$	$(\vec{a},\vec{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$	Число
Векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{a}\times\vec{b}$	1. $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$. 2. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ — права трійка 3. $\lvert\vec{c}\rvert=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\sin(\vec{a},\vec{b})$ 	$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$ або $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\vec{k}$	Вектор
Мішаний добуток векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}:\vec{a}\vec{b}\vec{c}$	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}$	Число

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ, ЯКІ ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ВЕЛИЧИН

$(\vec{a}=(x_1;\, y_1;\, z_1),\ \ \vec{b}=(x_2;\, y_2;\, z_2),\ \ \vec{c}=(x_3;\, y_3;\, z_3))$

Назва	Формули для обчислення	
	векторна форма	координатна форма
Довжина вектора $\vec{a}$	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}$	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$
Орт вектора $\vec{a}$	$\vec{a}^{\,0}=\dfrac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}$	$\vec{a}^{\,0}=\left(\dfrac{x_1}{\lvert\vec{a}\rvert};\dfrac{y_1}{\lvert\vec{a}\rvert};\dfrac{z_1}{\lvert\vec{a}\rvert}\right)$
Напрямні косинуси вектора $\vec{a}$	$\cos\alpha=\dfrac{(\vec{a},\vec{i})}{\lvert\vec{a}\rvert}$, $\cos\beta=\dfrac{(\vec{a},\vec{j})}{\lvert\vec{a}\rvert}$, $\cos\gamma=\dfrac{(\vec{a},\vec{k})}{\lvert\vec{a}\rvert}$ $(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\equiv 1)$	$\cos\alpha=\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$, $\cos\beta=\dfrac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$, $\cos\gamma=\dfrac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$
Косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$	$\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}$	$\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$
Площа трикутника ABC	$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left\lvert\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\rvert$, де $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$	$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}^2}$
Висота трикутника ABC, опущена з вершини A	$h_A=\dfrac{\left\lvert\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\rvert}{\lvert\vec{b}-\vec{a}\rvert}$, де $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$	$h_A=\dfrac{\sqrt{\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$
Площа паралелограма $ABCD$	$S_{ABCD}=\left\lvert\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\rvert$, де $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$	$S_{ABCD}=\sqrt{\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}^2}$
Об'єм трикутної піраміди $SABC$	$V_{\text{пір}}=\dfrac{1}{6}\mathrm{mod}\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$ $(\vec{a}=\overrightarrow{AB};\ \vec{b}=\overrightarrow{AC};\ \vec{c}=\overrightarrow{AS})$	$V_{\text{пір}}=\dfrac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}$

Назва	Формули для обчислення	
	векторна форма	координатна форма
Об'єм паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$	$V_{пар} = \mathrm{mod}(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ $(\vec{a}=\overrightarrow{AB};\ \vec{b}=\overrightarrow{AD};\ \vec{c}=\overrightarrow{AA_1})$	$V_{пар} = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$
Висота паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, опущена на грань $A_1B_1C_1D_1$	$h = \dfrac{\mathrm{mod}(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}{\lvert[\vec{a},\vec{b}]\rvert}$ $(\vec{a}=\overrightarrow{AB};\ \vec{b}=\overrightarrow{AD};\ \vec{c}=\overrightarrow{AA_1})$	$h = \dfrac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}}$

УМОВИ ПЕВНОГО ВЗАЄМНОГО РОЗМІЩЕННЯ ВЕКТОРІВ
$\vec{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1),\quad \vec{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2),\quad \vec{c}=(x_3;\ y_3;\ z_3)$
І УМОВИ ПЕВНОГО ВЗАЄМНОГО РОЗМІЩЕННЯ ТОЧОК У ПРОСТОРІ

Опис взаємного розміщення векторів і точок	Умова взаємного розміщення векторів і точок	
	векторна форма	координатна форма
Перпендикулярність векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$	$(\vec{a},\vec{b})=0$	$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$
Колінеарність векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$	$[\vec{a},\vec{b}]=0$	$\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$
Компланарність векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$	$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$
$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — права трійка векторів	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}>0$	$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}>0$
$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — ліва трійка векторів	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}<0$	$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}<0$

Опис взаємного розміщення векторів і точок	Умова взаємного розміщення векторів і точок	
	векторна форма	координатна форма
Належність точок $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$ до однієї прямої	$[\overline{M_1M_2}, \overline{M_2M_3}]=0$	$\dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_2}=\dfrac{y_2-y_1}{y_3-y_2}=\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_2}$
Належність точок $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$, $M_4(x_4;\ y_4;\ z_4)$ до однієї площини	$\overline{M_1M_2}\,\overline{M_1M_3}\,\overline{M_1M_4}=0$	$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0$

1. Скалярний добуток двох векторів

5.01. Спростити вирази:

1) $(\vec{b}-\vec{c},\ \vec{a})+(\vec{c},\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+(\vec{b},\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$;

2) $(\vec{i},\ \vec{j}+\vec{k})+(\vec{j},\ \vec{i}-\vec{k})+2\vec{i}$;

3) $(3\vec{i}-2\vec{j},\ \vec{i}+4\vec{j})$.

5.02. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=150^\circ$ і $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$. Знайти:

1) $(\vec{a},\vec{b})$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $\vec{b}^2$;

4) $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$; 5) $|\vec{a}+\vec{b}|^2$; 6) $|\vec{a}-\vec{b}|$.

5.03. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}=\vec{m}+\vec{n}$ і $\vec{b}=\vec{n}-\vec{p}$, якщо $|\vec{m}|=1$, $|\vec{n}|=2$, $|\vec{p}|=3$, $(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n})=\dfrac{\pi}{3}$, $(\vec{n}\,\hat{,}\,\vec{p})=\dfrac{2}{3}\pi$, $(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{m})=-\dfrac{\pi}{2}$.

5.04. Знайти довжину вектора $\vec{c}=4\vec{b}-\vec{a}$, якщо відомо, що $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=60^\circ$.

5.05. Знайти кут між векторами:

1) $\vec{i}$ та $\vec{j}+\vec{k}$;

2) $\vec{j}$ та $\vec{i}-\vec{k}$;

3) $\vec{k}$ та $2\vec{j}-3\vec{k}$.

5.06. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$. Обчислити кут між векторами $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=\sqrt{3}, |\vec{b}|=1$.

5.07. Знайти проекцію вектора $\vec{a}=10\vec{i}+2\vec{j}$ на вектор $\vec{b}=5\vec{i}-12\vec{j}$. Обчислити кути між вектором $\vec{b}$ і векторами $\vec{i}$ та $\vec{j}$.

5.08. Знайти проекцію вектора $\vec{a}=\vec{m}+4\vec{n}$ на вектор $\vec{b}=2\vec{m}-3\vec{n}$, якщо $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$, $(\vec{m}\hat{,}\vec{n})=\dfrac{\pi}{3}$.

5.09. Знайти довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, якщо $|\vec{p}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{q}|=3$, $(\vec{p}\hat{,}\vec{q})=\dfrac{\pi}{4}$.

5.10. Задано вектори $\vec{a}=(4;-2;-4)$, $\vec{b}=(6;-3;2)$. Обчислити:

1) $(\vec{a};\vec{b})$; 2) $|\vec{a}|$; 3) $|\vec{b}|$; 4) $(\vec{a}+\vec{b})^2$;

5) $(\vec{a}-\vec{b})^2$; 6) $(2\vec{a}-3\vec{b},\ \vec{a}+2\vec{b})$; 7) $\vec{a}^{\circ}$.

5.11. Знайти:

1) $(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}, 2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$; 2) $\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$; 3) $|\overrightarrow{AC}|$;

4) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(-1;3;-7)$, $B(2;-1;5)$, $C(1;2;-5)$.

5.12. Знайти проекцію вектора $\vec{S}=\sqrt{2}\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ на вісь, яка утворює з координатними осями Ox, Oz кути $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, $\gamma=\dfrac{\pi}{3}$, а з віссю Oy — гострий кут β.

5.13. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь, яка утворює з координатними осями Ox, Oy кути $\alpha=60^\circ$, $\beta=120^\circ$, а з віссю Oz — тупий кут γ.

5.14. Знайти величину внутрішнього кута трикутника ABC при вершині A і довжину висоти, проведеної з вершини B, якщо A (1; 2; 0), B (3; 0; –3), C (5; 2; 6).

5.15. Знайти внутрішні кути трикутника ABC з вершинами A (5; 0; 0), B (1; 1; 1), C (3; –1; 2).

5.16. Задано вершини чотирикутника A (1; –2; 2), B (1; 4; 0), C (– 4; 1; 1), D (–5; –5; 3). Довести, що діагоналі його взаємно перпендикулярні.

5.17. Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{F}=3\vec{i}-2\vec{j}-5\vec{k}$, коли її точка прикладання переміщується рівномірно і прямолінійно із положення A (2; –3; 5) у положення B (3; –2; –1).

5.18. Задано три сили $\vec{F}_1=(3;-4;2)$, $\vec{F}_2=(2;3;-5)$, $\vec{F}_3=(-3;-2;4)$, прикладені до однієї точки. Знайти роботу, яку виконує рівнодійна цих сил при прямолінійному переміщенні її точки прикладання з положення A (5; 3; –7) у положення B (4; –1; –4).

5.19. Обчислити $np_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$, якщо $\vec{a}=(1;-3;4)$, $\vec{b}=(3;-4;2)$, $\vec{c}=(-1;1;4)$.

Відповіді

5.01. 1) $(\vec{b}+\vec{c})^2+2(\vec{a},\vec{b})$; 2) $2\vec{i}$; 3) –5.

5.02. 1) $-6\sqrt{3}$; 2) 9; 3) 16; 4) $-37-24\sqrt{3}$; 5) $25-12\sqrt{3}$; 6) $\sqrt{25+12\sqrt{3}}$.

5.03. 8.

5.04. 23.

5.05. 1) 90°; 2) 90°; 3) $\cos\varphi=-\dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

5.06. $\cos\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

5.07. $np_{\vec{b}}\vec{a}=2$, $\cos(\vec{b}\hat{,}\vec{i})=\dfrac{5}{13}$, $\cos(\vec{b}\hat{,}\vec{j})=\dfrac{12}{13}$.

5.08. $np_{\vec{b}}\vec{a}=-\dfrac{15}{2\sqrt{7}}$.

5.09. 15, $\sqrt{593}$.

5.10. 1) 22; 2) 6; 3) 7; 4) 129; 5) 41; 6) –200; 7) $\vec{a}^{\circ}=\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$.

5.11. 1) –523; 2) 13; 3) 3; 4) $\cos\alpha=\dfrac{3}{13}$, $\cos\beta=-\dfrac{4}{13}$, $\cos\gamma=\dfrac{12}{13}$.

5.12. –3.

5.13. –5.

5.14. $\pi-\arccos\dfrac{5}{\sqrt{13}\sqrt{17}}$, $\dfrac{14}{13}$.

5.15. $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$.
5.17. 31.
5.18. 13.
5.19. 5.

5.20. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні; вектор $\vec{c}$ утворює з векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ кути, рівні 60°. Обчислити:

1) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$; 2) $(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})^2$, якщо $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=5, |\vec{c}|=8$.

5.21. Довести тотожність: $(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=2(\vec{a}^2+\vec{b}^2)$ і дати її геометричне тлумачення.

5.22. Три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ задовольняють умову: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Обчислити $(\vec{a}, \vec{b})+(\vec{b}, \vec{c})+(\vec{c}, \vec{a})$, якщо $|\vec{a}|=13, |\vec{b}|=14, |\vec{c}|=15$.

5.23. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ попарно утворюють між собою кути, кожен з яких дорівнює 60°. Обчислити модуль вектора $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, якщо $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=6$.

5.24. Задано вектор $\vec{c}=4\vec{i}-7\vec{j}$. Знайти координати якого-небудь вектора $\vec{b}$, перпендикулярного до вектора $\vec{c}$. Скільки розв'язків має задача?

5.25. Заданий вектор $\vec{a}$ = (1; 2; –3). Відомо, що абсциса перпендикулярного до нього вектора $\vec{b}$ дорівнює 3, ордината — 6. Знайти третю координату цього вектора.

5.26. Визначити значення α, при якому вектори $\vec{a}+\alpha\vec{b}$ і $\vec{a}-\alpha\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, якщо $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$.

5.27. Знайти зовнішній кут при вершині *A* трикутника *ABC*, якщо *A* (3; 2; –3), *B* (5; 1; –1), *C* (1; –2; 1).

5.28. Трикутник *ABC* побудований на векторах $\overline{AB}=(1;5)$ і $\overline{AC}=(5;12)$. Знайти довжину його висоти, проведеної з вершини *B*.

5.29. Вектор $\vec{x}$, колінеарний вектору $\vec{a}=(6;-8;-7{,}5)$, утворює гострий кут з віссю *Oz* і $|\vec{x}|=50$. Знайти координати вектора $\vec{x}$.

5.30. Знайти вектор $\vec{x}$, колінеарний вектору $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, якщо $(\vec{x}, \vec{a})=3$.

5.31. Знайти проекцію вектора $\vec{a}=(4;-3;2)$ на вісь, яка утворює з координатними осями рівні гострі кути.

5.32. Тіло рухається прямолінійно під дією сили $\vec{F}$, яка задовольняє умову $2\vec{F}=3\vec{F}_1-3\vec{F}_2$. Відомі проекції сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ на напрям переміщення тіла: $np_{\vec{S}}\vec{F}_1=4$, $np_{\vec{S}}\vec{F}_2=\frac{4}{5}$. Знайти роботу сили $\vec{F}$, витрачену на подолання відстані, рівної 8 одиницям.

5.33. Трикутна піраміда задана своїми вершинами *A* (3; 0; 1), *B* (–1; 4; 1), *C* (5; 2; 3), *D* (0; –5; 4). Обчислити:

1) косинус кута між векторами $\overline{BM}$ і $\overline{BC}$, де *M* — середина ребра *AC*;

2) довжину $\overline{AO}$, де *O* — точка перетину медіан грані *BCD*.

Відповіді

5.20. 1) 162; 2) 373.
5.22. – 13.
5.23. 10.
5.24. $\vec{b}=(7;4)$. Безліч.
5.25. 3.
5.26. $\alpha=\pm\frac{3}{5}$.
5.27. $\arccos\left(-\frac{4}{9}\right)$.
5.28. 1.
5.29. $\vec{x}=(-24;32;30)$.
5.30. $\vec{x}=\left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.
5.31. $\sqrt{3}$.
5.32. 64.
5.33. 1) $\cos\varphi=\frac{19}{\sqrt{35}\sqrt{11}}$; 2) $\frac{\sqrt{51}}{3}$.

5.34. Довести, що вектор $\vec{p} = \vec{b} \cdot (\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a}, \vec{b})$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$.

5.35. Довести, що вектор $\vec{p} = \vec{b} - \dfrac{\vec{a} \cdot (\vec{a}, \vec{b})}{\vec{a}^2}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$.

5.36. Обчислити тупий кут, який утворюють медіани, проведені з вершини гострих кутів рівнобедреного прямокутного трикутника.

5.37. Визначити геометричне місце кінців змінного вектора $\vec{x}$, якщо його початок міститься у фіксованій точці A і вектор $\vec{x}$ задовольняє умову: $(\vec{x}, \vec{a}) = \alpha$, де $\vec{a}$ — заданий вектор, α — задане число.

5.38. За допомогою елементів векторної алгебри довести формулу Герона для площі трикутника: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де a, b, c — довжини сторін, p — півпериметр.

5.39. Довести, що при будь-якому розміщенні точок A, B, C, D на площині чи в просторі має місце рівність: $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$.

5.40. У трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $\angle BAA_1 = \alpha$, $\angle CAA_1 = \beta$. Знайти $\angle BCC_1$.

5.41. У прямокутній трапеції $ABCD$ діагоналі взаємно перпендикулярні, а відношення довжин основ $BC : AD = \lambda$. Знайти відношення довжин діагоналей.

5.42. Знайти вектор бісектриси $\overrightarrow{CL}$ трикутника ABC, якщо $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$.

5.43. У трикутнику ABC медіана CM перпендикулярна до бісектриси AL, причому CM: $AL = n$. Знайти кут A.

5.44. Довести, що висоти трикутника перетинаються в одній точці.

5.45. Визначити геометричне місце кінців векторів $\vec{a}$, які задовольняють умову:

1) $|\vec{a} - \vec{i}| = |\vec{a} + 2\vec{j}|$, 2) $|\vec{a} - \vec{i}| > |\vec{a} - \vec{j}|$,

якщо вектори $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ відкладати від початку координат.

5.46. Довести, що для правильного n-кутника $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ з центром у точці O справджується рівність: $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{O}$. Скориставшись цим результатом, довести рівності:

1) $\cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{4\pi}{5} = -\dfrac{1}{2}$;

2) $\cos\dfrac{\pi}{5} + \cos\dfrac{3\pi}{5} = \dfrac{1}{2}$.

5.47. Довести, що відрізки, які сполучають середини протилежних ребер трикутної піраміди, перетинаються в одній точці і діляться нею навпіл.

5.48. Спираючись на властивості скалярного добутку векторів, довести формулу: $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Відповіді

5.36. $\varphi = \arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)$.

5.37. Площина, перпендикулярна до вектора $\vec{a}$ і віддалена від точки A на відстань $\dfrac{|\alpha|}{|\vec{a}|}$.

5.40. $\arccos\dfrac{c\cos\alpha - b\cos\beta}{a}$.

5.41. $AC : BD = \sqrt{\lambda}$.

5.42. $\overrightarrow{CL} = \dfrac{\vec{a}|\vec{b}| + \vec{b}|\vec{a}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$.

5.43. $\angle A = \arccos\left(\dfrac{9 - 4n^2}{9 + 4n^2}\right)$.

5.45. 1) Пряма $2x + 4y + 3 = 0$; 2) півплощина $x < y$.

2. Векторний добуток двох векторів

5.49. Спростити вирази ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орти правої системи координат):

1) $[\vec{i}, 2\vec{j} + \vec{k}] + [\vec{i}, \vec{i} - 3\vec{j}]$;

2) $[\vec{i}, \vec{i}+2\vec{j}]-[2\vec{j}, \vec{k}+\vec{j}]$;

3) $[\vec{k}, \vec{i}-\vec{j}]+3[\vec{k}, \vec{j}+2\vec{k}]$;

4) $[\vec{i}, \vec{k}]^2$; 5) $[\vec{i}+2\vec{j}, \vec{i}-2\vec{j}]^2$.

5.50. Обчислити $[\vec{a}, \vec{b}]$, якщо $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $(\vec{a}, \vec{b})=\dfrac{\pi}{4}$.

5.51. Обчислити $|[\vec{a}, \vec{b}]|$, якщо $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=10$, $(\vec{a}, \vec{b})=10$.

5.52. Відомо, що $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$, $|[\vec{a}, \vec{b}]|=10$. Обчислити $(\vec{a}, \vec{b})$.

5.53. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}=6\vec{a}-3\vec{b}$ і $\overrightarrow{AC}=3\vec{a}+2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $(\hat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{6}$.

5.54. Задано вектори $\vec{a}=(3;-1;-2)$ і $\vec{b}=(1;2;-1)$. Знайти координати векторних добутків:

1) $[\vec{a}, \vec{b}]$;

2) $[2\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}]$;

3) $[2\vec{a}-\vec{b}, 2\vec{a}+\vec{b}]$.

5.55. Задано вектори $\vec{a}=(1;0;-2)$, $\vec{b}=(0;1;1)$, $\vec{c}=(1;1;1)$ і $\vec{d}=(-1;2;0)$. Обчислити:

1) $[\vec{a}+\vec{b}, \vec{d}-\vec{c}]$; 2) $[\vec{a}-\vec{b}, 3\vec{c}+2\vec{d}]$.

5.56. Задано два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайти і побудувати вектор $\vec{c}=[\vec{a}, \vec{b}]$: 1) $\vec{a}=2\vec{i}$, $\vec{b}=3\vec{k}$; 2) $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{k}$.

5.57. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=(3;4)$, $\vec{b}=(4;-3)$.

5.58. Знайти площу S і висоту h_A трикутника ABC, якщо A (0; 2; 6), B (4; 0; 0), C (8; –2; 1).

5.59. Задано паралелограм координатами його вершин A (1; –2), B (–2; 2), C (4; 10), D (7; 6). Знайти його площу і висоти.

5.60. У трикутнику ABC задано $\overrightarrow{AB}=(-3;-2;6)$ і $\overrightarrow{BC}=(-2;4;4)$. Знайти висоту AD.

5.61. Паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ побудовано на векторах $\overrightarrow{AB}=(1;0;1)$, $\overrightarrow{AD}=(-1;2;1)$, $\overrightarrow{AA_1}=(0;-1;1)$. Обчислити площу перерізу BA_1DC.

5.62. Обчислити синус кута між векторами $\vec{a}=(2;-2;1)$ і $\vec{b}=(2;3;6)$.

5.63. Сила $\vec{F}=2\vec{i}+2\vec{j}+9\vec{k}$ прикладена до точки A (4; –2; –3). Визначити величину і напрямні косинуси моменту $\vec{M}_C(\vec{F})$ цієї сили відносно точки C (2; 4; 0), в якій тіло закріплене.

5.64. Сила $\vec{F}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ прикладена до точки M (1; 5; –2). Знайти величину моменту сили $\vec{F}$ відносно початку координат.

5.65. Знайти величину моменту сили $\vec{F}=(3;0;1)$ відносно точки M (2; –1; 3), якщо сила прикладена до точки N (2; 1; 4).

5.66. Три сили $\vec{F_1}=(2;-1;-3)$, $\vec{F_2}=(3;2;-1)$, $\vec{F_3}=(-4;1;3)$ прикладені до точки C (–1; 4; –2). Визначити величину і напрямні косинуси моменту рівнодійної цих сил відносно точки A (2; 3; –1).

Відповіді

5.49. 1) $-\vec{j}-\vec{k}$; 2) $2\vec{k}-2\vec{i}$; 3) $\vec{j}-2\vec{i}$; 4) 1; 5) 16.

5.50. $3\sqrt{2}$.

5.51. $10\sqrt{3}$.

5.52. $10\sqrt{3}$.

5.53. $\dfrac{315}{2}$.

5.54. 1) (5; 1; 7); 2) (10; 2; 14); 3) (20; 4; 28).

5.55. 1) (0; 3; 3); 2) (18; –6; 8).

5.56. 1) $-6\vec{j}$; 2) $-12\vec{j}$.

5.57. 25.

5.58. $S=7\sqrt{5}$, $h_A=\dfrac{14\sqrt{5}}{\sqrt{21}}$.

5.59. 48; 4,8; 9,6.

5.60. $\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$.

5.61. $\sqrt{11}$.

5.62. $\sin\varphi=\dfrac{5\sqrt{17}}{21}$.

5.63. $\left|\vec{M}_C(\vec{F})\right|=56$, $\cos\alpha=\dfrac{6}{7}$, $\cos\beta=\dfrac{3}{7}$, $\cos\gamma=\dfrac{2}{7}$.

5.64. $\sqrt{429}$.

5.65. 7.

5.66. $\sqrt{66}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{66}}$, $\cos\beta = \frac{-4}{\sqrt{66}}$, $\cos\gamma = \frac{-7}{\sqrt{66}}$.

Б

5.67. Яку умову повинні задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб вектори $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$ були колінеарними?

5.68. Довести тотожність: $[\vec{a}, \vec{b}]^2 + (\vec{a}, \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$.

5.69. Довести, що $[\vec{a}, \vec{b}]^2 \le \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$; за якої умови справджується знак рівності?

5.70. Довести компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, якщо $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}] = \vec{0}$.

5.71. Обчислити $[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}]$ і $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$, якщо $\vec{a} = (2; -3; 1)$, $\vec{b} = (-3; 1; 2)$, $\vec{c} = (1; 2; 3)$.

5.72. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (4; -2; -3)$ і $\vec{b} = (0; 1; 3)$, утворює з віссю Oy гострий кут і $|\vec{x}| = 26$. Знайти його координати.

5.73. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярний до осі Oz і до вектора $\vec{a} = (8; -15; 3)$, утворює з віссю Ox гострий кут. Знайти його координати, якщо $|\vec{x}| = 51$.

5.74. Знайти координати вектора $\vec{x}$, якщо він перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (2; -3; 1)$ і $\vec{b} = (1; -2; 3)$ і задовольняє умову $(\vec{x}, \vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.

Б Відповіді

5.67. $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

5.69. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

5.71. (–7; 14; –7), (10; 13; 19).

5.72. (–6; –24; 8).

5.73. (45; 24; 0).

5.74. (7; 5; 1).

В

5.75. Довести, що коли вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ задовольняють рівність $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, то $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$.

5.76. Переконатись, що вектори $\vec{a} = [\vec{p}, \vec{n}]$, $\vec{b} = [\vec{q}, \vec{n}]$, $\vec{c} = [\vec{r}, \vec{n}]$ компланарні, де вектори $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{n}$ — довільно задані.

5.77. Довести колінеарність векторів $\vec{a} - \vec{d}$ і $\vec{b} - \vec{c}$, якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ зв'язані співвідношеннями $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{c}, \vec{d}]$, $[\vec{a}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{d}]$.

5.78. Чи можна визначити вектор $\vec{x}$, який задовольняє два рівняння: $(\vec{x}, \vec{a}) = \alpha$ і $[\vec{x}, \vec{b}] = \vec{c}$, де $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — задані вектори, α — заданий скаляр.

5.79. Довести, що площа S_1 трикутника, вектори сторін якого дорівнюють векторам медіан трикутника ABC, становить 75 % площі S трикутника ABC.

5.80. Задано трикутник ABC. На сторонах AB, BC, CA вибрано відповідні точки M, N, P так, щоб $\overline{AM} = \alpha\overline{AB}$, $\overline{BN} = \alpha\overline{BC}$, $\overline{CP} = \alpha\overline{CA}$. При якому значенні α площа трикутника, вектори сторін якого $\overline{CM}$, $\overline{AN}$, $\overline{BP}$, найменша?

5.81. Трикутники ABC і ACD розміщені в одній площині так, що точки B і D лежать по різні боки від прямої AC. Довести, що площа чотирикутника $ABCD$ дорівнює $S = \frac{1}{2}|[\overline{AC}, \overline{BD}]|$.

5.82. Довести, що $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] + [\vec{b}, [\vec{c}, \vec{a}]] + [\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]] = \vec{O}$.

5.83. За яких умов $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{O}$?

В Відповіді

5.78. $\vec{x} = \dfrac{\alpha\vec{b} + [\vec{a}, \vec{c}]}{(\vec{a}, \vec{b})}$.

5.80. $\alpha = \frac{1}{2}$, $S = \frac{3}{4} S_{ABC}$, $\overline{CM}$, $\overline{AN}$, $\overline{BP}$ — медіани.

5.83. Або $\vec{b} \parallel \vec{c}$, або $\vec{b} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{a}$, або один із векторів — нуль-вектор.

А

5.84. Спростити вирази:

1) $\left(\vec{a}, [\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}, \vec{a}+\vec{b}]\right)$;

2) $\left(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}, [\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}-\vec{c}]\right)$;

3) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{c}+\vec{a}\right)$.

5.85. Пересвідчитись, що вектори $\vec{a}=(1; 0; -1)$, $\vec{b}=(-1; 1; 0)$ і $\vec{c}=(2; 0; -3)$ не компланарні. Знайти орієнтацію цієї трійки векторів.

5.86. Задано три вектори $\vec{a}=(2; -3; 1)$, $\vec{b}=(1; 1; 2)$, $\vec{c}=(3; 1; -1)$. Обчислити добутки $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ і $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$ і визначити орієнтацію цих трійок векторів.

5.87. Обчислити об'єм паралелепіпеда $ABCDA'B'C'D'$, якщо $A\ (1; 2; 3)$, $B\ (9; 6; 4)$, $D\ (3; 0; 4)$, $A'(5; 2; 6)$, а також його висоту, проведену з вершини A' на грань $ABCD$.

5.88.* На векторах $\vec{a}=(3; 2; 0)$, $\vec{b}=(2; 3; 0)$, $\vec{c}=(1; 2; 3)$ побудований паралелепіпед. Обчислити його об'єм V, площу грані S, утворену векторами $\vec{a}, \vec{b}$, і висоту h, проведену на цю грань.

5.89. Задано координати вершин трикутної піраміди $ABCD$. Знайти її об'єм V і довжину зазначеної висоти:

1) $A(-5; -4; 8)$, $B(2; 3; 1)$, $C(4; 1; -2)$, $D(6; 3; 7)$; h_A;

2) $A(0; 0; 2)$, $B(3; 0; 5)$, $C(1; 1; 0)$, $D(4; 1; 2)$; h_D.

5.90. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

5.91. Довести, що чотири точки $A\ (1; 2; -1)$, $B\ (0; 1; 5)$, $C\ (-1; 2; 1)$, $D\ (2; 1; 3)$ належать одній площині.

5.92. Довести, що вектори $\vec{a}=(2; -1; 2)$, $\vec{b}=(1; 2; -3)$, $\vec{c}=(3; -4; 7)$ компланарні.

5.93. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку і є взаємно перпендикулярними. Обчислити $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, якщо $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$.

5.94. Встановити, чи утворюють вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ базис; якщо так, то розкласти вектор $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ за цим базисом:

1) $\vec{a}_1=(2; 3; -1)$, $\vec{a}_2=(1; -1; 3)$, $\vec{a}_3=(1; 9; -11)$;

2) $\vec{a}_1=(3; -2; 1)$, $\vec{a}_2=(2; 1; -1)$, $\vec{a}_3=(0; 0; -1)$.

Відповіді

5.84. 1) $\vec{a}\vec{c}\vec{b}$; 3) $3\ \vec{a}\vec{b}\vec{c}$; 3) $2\ \vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5.85. Трійка векторів — ліва.

5.86. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-29$, $\vec{b}\vec{a}\vec{c}=29, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — права трійка, $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ — ліва трійка.

5.87. 48, $\frac{8}{3}\sqrt{2}$.

5.88. $V=15$, $S=5$, $h=3$.

5.89. 1) $V=\frac{154}{3}$, $h_A=11$; 2) $V=\frac{1}{2}$, $h_D=\frac{1}{\sqrt{11}}$.

5.90. 1.

5.93. 6.

5.94. 1) ні; 2) так, $\vec{b}=-\frac{1}{7}\vec{a}_1+\frac{5}{7}\vec{a}_2-\frac{13}{7}\vec{a}_3$.

Б

5.95. Довести, що $|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|\le|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|$. За яких умов має місце знак рівності?

5.96. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $\frac{\pi}{6}$. Обчислити $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, якщо $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=6$, $|\vec{c}|=3$.

5.97. Довести тотожність $\vec{a}\vec{b}(\vec{c}+\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})=\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, де λ і μ — будь-які числа.

5.98. Об'єм піраміди $V=5$, три її вершини містяться в точках $A\ (2; 1; -1)$, $B\ (3; 0; 1)$, $C\ (2; -1; 3)$. Знайти координати четвертої вершини D, якщо відомо, що вона лежить на осі Oy.

5.99. Довести, що при будь-яких векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вектори $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}, \vec{c}-\vec{a}$ компланарні. Встановити геометричний зміст цього твердження.

Б Відповіді

5.95. $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{a}\perp\vec{c}$, $\vec{b}\perp\vec{c}$.

5.96. 27, якщо $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку векторів,
−27, якщо $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють ліву трійку векторів.

5.98. $D\,(0; 8; 0)$ або $D\,(0; -7; 0)$.

В

5.100. Довести, що якщо $\alpha[\vec{a}, \vec{b}]+\beta[\vec{b}, \vec{c}]+\gamma[\vec{c}, \vec{a}]=\vec{0}$, причому хоча б одне з чисел α, β, γ не дорівнює нулю, то вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — компланарні.

5.101. Задані базисні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, до того ж $|\vec{e}_1|=1$, $|\vec{e}_2|=2$, $|\vec{e}_3|=\sqrt{2}$, $(\vec{e}_1\hat{,}\vec{e}_2)=120^\circ$, $(\vec{e}_1\hat{,}\vec{e}_3)=45^\circ$, $(\vec{e}_2\hat{,}\vec{e}_3)=135^\circ$. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах, заданих у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$: $\vec{a}=(-1; 0; 2)$, $\vec{b}=(1; 1; 3)$, $\vec{c}=(2; -1; 1)$.

5.102. У піраміді $ABCD$ точки M, N, P, Q належать відповідно ребрам BC, AD, AB, CD, причому $AP=PB$, $AN=ND$, $CQ=QD$, $MC=2BM$. Пари точок A_1, B_1 і C_1, D_1 вибрані відповідно на відрізках NM і PQ так, щоб $NA_1=A_1B_1=B_1M$, $PC_1=C_1D_1=D_1Q$. Знайдіть відношення об'ємів пірамід $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$.

5.103. Довести, що коли вектори $[\vec{a}, \vec{b}]$, $[\vec{b}, \vec{c}]$, $[\vec{c}, \vec{a}]$ компланарні, то вони колінеарні.

5.104. Задані вектори $\overline{DA}=\vec{a}$, $\overline{DB}=\vec{b}$, $\overline{DC}=\vec{c}$ трьох ребер піраміди $ABCD$. Знайти вираз вектора $\overline{DH}$ висоти піраміди.

В Відповіді

5.101. $10\sqrt{2}$.

5.102. $V_{ABCD}:V_{A_1B_1C_1D_1}=216$.

5.104. $\overline{DH}=\dfrac{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}{|[\vec{c}, \vec{a}]+[\vec{a}, \vec{b}]+[\vec{b}, \vec{c}]|^2}\left([\vec{c}, \vec{a}]+[\vec{a}, \vec{b}]+[\vec{b}, \vec{c}]\right)$.

3 Розділ ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

§ 6. Аналітична геометрія на площині

1. Лінії на площині та їх рівняння

А

6.01. Встановити, які з точок $M_1(1; 2)$, $M_2(-1; 3)$, $M_3(4; 0)$, $M_4(-1; 0)$ належать заданій лінії $2x+3y-8=0$. Зобразити цю лінію.

6.02. Точки $M_1(0; y_1)$, $M_2(1; y_2)$, $M_3(x_1; 0)$, $M_4(x_2; 3)$ належать лінії $y=3x^2-1$. Знайти невідомі координати цих точок.

6.03. Побудувати лінії:
1) $x-y=0$; 2) $x-2y=0$; 3) $3x-y+1=0$; 4) $x=0$; 5) $y=0$; 6) $y=|x|$; 7) $xy=1$; 8) $y=x^2+5$.

6.04. Знайти точки перетину ліній:
1) $3x-2y=1$; 2) $y=x^2-2x+1$; 3) $y=\dfrac{3}{x}$; 4) $x^2+y^2=1$ з осями координат.

6.05. У полярній системі координат задано рівняння лінії $\rho=2\sin\varphi$. Встановити, які з точок $M_1(3; \frac{\pi}{2})$, $M_2(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4})$, $M_3(0; \pi)$ належать цій лінії. Побудувати її.

6.06. Знайти невідомі полярні координати точок лінії $\rho=5\varphi$ (спіраль Архімеда):
1) $M_1(1; \varphi_1)$; 2) $M_2(5; \varphi_2)$; 3) $M_3(\rho_3; 0)$; 4) $M_4(\rho_4; \pi)$. Побудувати цю лінію.

6.07. Побудувати лінію: $\rho=\dfrac{3}{\cos\varphi}$.

6.08. Записати явне рівняння параметрично заданої кривої:

1) $\begin{cases} x=t-1; \\ y=2t+1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=3t; \\ y=4t-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=t-1; \\ y=t^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=2t; \\ y=t^2+2. \end{cases}$

6.09. Знайти декартові координати точок M_1, M_2, M_3 лінії $x=\cos t$, $y=\sin t$, що відповідають параметрам $t_1=0$, $t_2=\frac{\pi}{2}$, $t_3=\frac{\pi}{4}$ відповідно.

А) Відповіді

6.01. Точки M_1, M_3. Лінія — пряма.

6.02. $y_1=-1$, $y_2=2$, $x_1^{(1,2)}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2^{(1,2)}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$.

6.04. 1) $M_1\left(\frac{1}{3};\,0\right)$; $M_2\left(0;\,-\frac{1}{2}\right)$; 2) $M_1(1;\,0)$; $M_2(0;\,1)$;

3) крива не перетинає координатних осей;

4) $M_{1,2}(\pm 1;\,0)$; $M_{3,4}(0;\,\pm 1)$.

6.05. Точки M_2, M_3; лінія — коло з центром $O(0;\,1)$ і радіусом $R=1$.

6.06. 1) $\varphi_1=\frac{1}{5}$; 2) $\varphi_2=1$; 3) $\rho_3=0$; 4) $\rho_4=5\pi$.

6.07. Пряма перпендикулярна до полярної осі і проходить через точку з полярними координатами $\rho=3$, $\varphi=0$.

6.08. 1) $y=2x+3$; 2) $y=\frac{4}{3}x-1$; 3) $y=(x+1)^2$; 4) $y=\frac{x^2}{4}+2$.

6.09. $M_1(1;\,0)$, $M_2(0;\,1)$, $M_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Б)

6.10. Встановити, які лінії визначаються рівняннями:

1) $x^2-3xy=0$; 2) $x^2-2x+1=0$;

3) $y^2=16$; 4) $x^2+5x+4=0$;

5) $y=|x+3|$; 6) $y=-|x-1|$.

6.11. Знайти точки перетину двох ліній:

1) $x^2+y^2=8$ і $x-y=0$;

2) $x^2+y^2-16x+4y+18=0$ і $x+y=0$;

3) $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ і $x^2+y^2=25$.

6.12. Встановити, які лінії визначаються рівняннями:

1) $\rho=3$; 2) $\varphi=\frac{\pi}{6}$; 3) $\rho=10\cos\varphi$.

6.13. З точки $M\,(5;\,-12)$ проведено безліч променів до перетину з віссю Ox. Скласти рівняння множини точок їх середин.

6.14. З точки $M\,(4;\,-10)$ проведено безліч променів до перетину з віссю Oy. Скласти рівняння множини точок їх середин.

6.15. Скласти рівняння множини точок, які в кожний момент руху рівновіддалені від точок $M_1(5;\,-1)$ і $M_2(1;\,-5)$.

6.16. Матеріальна точка M рухається у площині xOy. Її перпендикулярна проекція на вісь Ox рухається зі швидкістю $5\vec{i}$, а проекція на вісь Oy — зі швидкістю $4\vec{j}$. Визначити траєкторію руху точки M, якщо відомо, що у певний момент вона має координати (7; 11).

6.17. Навколо точок $A\,(a;\,0)$ і $B\,(-a;\,0)$ обертаються два стержні, причому добуток відрізків, які вони відтинають на осі Oy, дорівнює сталому числу $b\cdot b_1=a^2$. Написати рівняння множини точок перетину стержнів, які обертаються.

Б) Відповіді

6.10. 1) Пара прямих: $x=0$, $y=\frac{1}{3}x$;

2) пряма $x=1$;

3) пара паралельних осі Ox прямих $y=4$, $y=-4$;

4) пара паралельних осі Oy прямих $x=-1$; $x=-4$;

5) пара променів: $y=x+3$ при $x\geq -3$, $y=-x-3$ при $x<-3$;

6) пара променів: $y=-x+1$ при $x\geq 1$, $y=x-1$ при $x<1$.

6.11. 1) $M_1(2;\,2)$, $M_2(-2;\,-2)$; 2) $M_1(1;\,-1)$, $M_2(9;\,-9)$;

3) $M_1(3;\,-4)$, $M_2\left(\frac{7}{5};\,-\frac{24}{5}\right)$.

6.12. 1) Коло радіуса $R=3$ з центром у полюсі;

2) промінь, що виходить з полюса під кутом $\frac{\pi}{6}$ до полярної осі;

3) коло з центром $C\,(5;\,0)$ і радіусом $R=5$.

6.13. $y+6=0$.
6.14. $x-2=0$.
6.15. $x+y=0$.
6.16. $4x+5y-83=0$.
6.17. $x^2+y^2=a^2$.

6.18. Виключивши параметр t, знайти рівняння ліній у вигляді $F(x, y)=0$:

1) $\begin{cases} x=a\sec t; \\ y=a\operatorname{tg} t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=\dfrac{a}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right); \\ y=\dfrac{b}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right); \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=2R\cos^2 t; \\ y=R\sin t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=R\sin 2t; \\ y=2R\sin^2 t. \end{cases}$

6.19. Побудувати лінії, які задані в полярній системі координат: 1) $\sin\varphi=\frac{1}{2}$; 2) $\sin\rho=\frac{1}{2}$.

6.20. Скласти рівняння множини точок, сума квадратів відстаней яких до точок $M_1(-3; 0)$ і $M_2(3; 0)$ дорівнює 50.

6.21. Скласти рівняння множини точок, для яких відстань до точки F (3; 0) дорівнює відстані до прямої $x+3=0$.

6.22. Визначити траєкторію точки M, яка при своєму русі весь час залишається удвічі ближчою до точки A (1; 0), ніж до точки B (4; 0).

6.23. Розкласти силу $P=15$ кг на дві складові у відношенні 2:3. Знайти рівняння множини точок вершин силових трикутників, які задовольняють цю умову.

6.24. Скласти рівняння множини точок, які містяться від точки $A(3; 0)$ удвічі ближче, ніж від прямої $x-12=0$.

6.25. Кулька скочується по жолобу і, набуваючи швидкості V, зривається з нього в тій точці, де дотична має горизонтальний напрям. Визначити подальшу траєкторію кульки.

6.26. Визначити, за якою траєкторією буде рухатися тіло, кинуте догори зі швидкістю V під кутом α до горизонтального напряму. Опір повітря до уваги не брати.

Відповіді

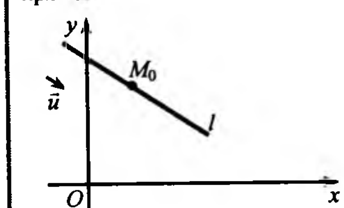
6.18. 1) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$;
3) $x^2+y^2-2Rx=0$; 4) $x^2+y^2-2Ry=0$.

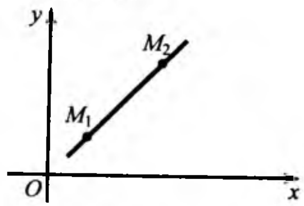
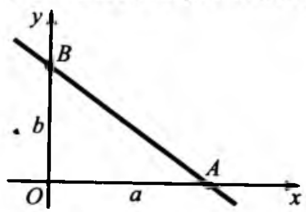
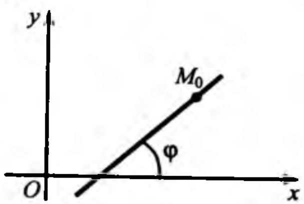
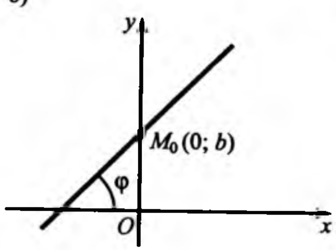
6.19. 1) Лінія складається з двох променів, які виходять з полюса і нахилені до полярної осі під кутом $\varphi_1=\frac{\pi}{6}$, $\varphi_2=\frac{5}{6}\pi$;
2) концентричні кола з центром у полюсі, радіуси яких дорівнюють $R=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$ $(n=0, 1, \ldots)$.

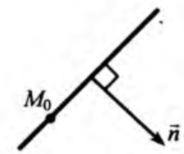
6.20. $x^2+y^2=16$.
6.21. $y^2=12x$.
6.22. $x^2+y^2=4$.
6.23. $x^2+y^2+24x=180$.
6.24. $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$.
6.25. $y^2=2\dfrac{V^2}{g}x$.
6.26. $y=mx-nx^2$, де $m=\operatorname{tg}\alpha$, $n=\dfrac{g}{2V^2\cos\alpha}$.

2. Пряма на площині

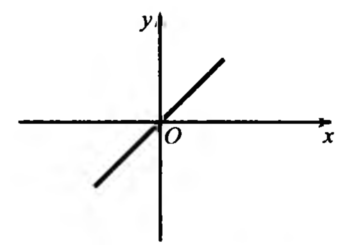
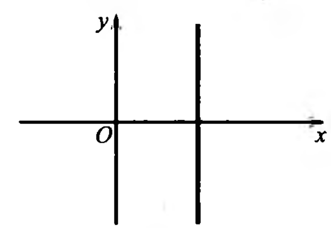
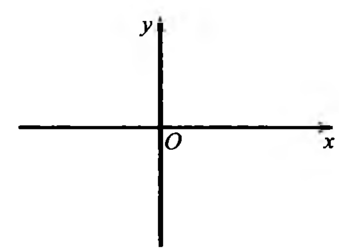
ВИДИ РІВНЯНЬ ПРЯМОЇ НА ПЛОЩИНІ

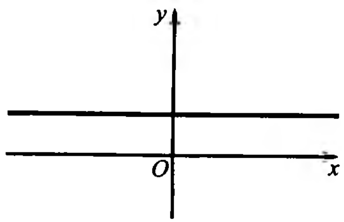
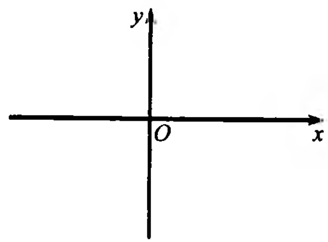
Вихідні дані	Вид рівняння	Назва рівняння
$M_0(x_0; y_0)$ — точка прямої; $\vec{u}=(l; m)$ — напрямний вектор прямої 	$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{u}$	Векторне рівняння прямої
	$\begin{cases} x=x_0+tl; \\ y=y_0+tm, \end{cases}$ $-\infty<t<+\infty$	Параметричні рівняння прямої
	$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}$	Канонічне рівняння прямої

Вихідні дані	Вид рівняння	Назва рівняння
Дві точки прямої $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ 	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$	Рівняння прямої, що проходить через дві точки
Точки $A(a; 0)$ і $B(0; b)$ прямої розміщені на координатних осях 	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	Рівняння прямої у відрізках на осях
Точка $M_0(x_0; y_0)$ прямої; кут φ, який утворює пряма з додатним напрямом осі Ox а)  б) 	а) $y-y_0=k(x-x_0)$, $k=\mathrm{tg}\varphi$ б) $y=kx+b$; $k=\mathrm{tg}\varphi$	Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Вихідні дані	Вид рівняння	Назва рівняння
Точка $M_0(x_0; y_0)$ прямої; вектор $\vec{n}=(A; B)$, перпендикулярний до прямої 	$A(x-x_0)+$ $+B(y-y_0)=0$ $Ax+By+C=0$	Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до вектора $\vec{n}$ Загальне рівняння прямої

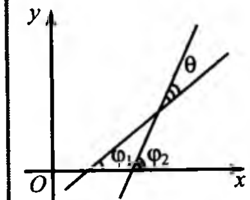
ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

Рівняння прямої	Геометричне зображення прямої	Характеристика прямої
$Ax+By=0$		Пряма проходить через початок координат
$Ax+C=0$		Пряма паралельна осі Oy
$x=0$		Пряма збігається з віссю Oy

Рівняння прямої	Геометричне зображення прямої	Характеристика прямої
$By + C = 0$		Пряма паралельна осі Ox
$y = 0$		Пряма збігається з віссю Ox

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

Вихідні дані	Кут між прямими	Умова паралельності прямих	Умова перпендикулярності прямих
$\vec{u}_1 = (l_1; m_1)$, $\vec{u}_2 = (l_2; m_2)$ — напрямні вектори прямих 	$\cos\theta = \frac{(\vec{u}_1, \vec{u}_2)}{\lvert\vec{u}_1\rvert \lvert\vec{u}_2\rvert} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$	$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$	$(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0 \Leftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0$
$\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$ — вектори нормалей прямих 	$\cos\theta = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{\lvert\vec{n}_1\rvert \lvert\vec{n}_2\rvert} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$	$\frac{A_2}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$	$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$

Вихідні дані	Кут між прямими	Умова паралельності прямих	Умова перпендикулярності прямих
k_1, k_2 — кутові коефіцієнти прямих 	$\mathrm{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$, $k_1 = \mathrm{tg}\varphi_1$, $k_2 = \mathrm{tg}\varphi_2$	$k_1 = k_2$	$k_1 k_2 = -1$

6.27. Які з наступних рівнянь визначають пряму:

$x + 2y = 1$, $x^2 + 1 = 2y^2$, $x^2 + y + 1 = 0$,

$2x - 5y - 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 5 = 0$?

6.28. Написати канонічне і параметричні рівняння прямої L, якщо задано:

1) $M_1(1; -2) \in L$, $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{u} \parallel L$;
2) $M_1(1; 3)$, $M_2(-1; 0)$, $M_1 \in L$, $M_2 \in L$;
3) $M_1(4; 5) \in L, L \parallel Ox$;
4) $M_1(-5; 2) \in L, L \parallel Oy$;
5) $M_1(1; -1) \in L, L \parallel L_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{5}$;
6) $M_1(0; 1) \in L, L \parallel L_1 : 2x + 3y + 1 = 0$.

У кожному з випадків побудувати пряму.

6.29. Написати загальне рівняння прямої, яка проходить через точку A (1; –2) паралельно прямій $2x - y + 1 = 0$. Знайти точки A_1, A_2 перетину її з координатними осями.

6.30. Написати загальне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-1; 1)$ перпендикулярно прямій $\begin{cases} x = 1 + t; \\ y = -3 - 2t, \end{cases}$ і побудувати цю пряму.

6.31. Знайти кутовий коефіцієнт k прямої L і відрізок b, який вона відтинає на осі Oy, якщо задано:

1) $M_1(1;-2)$, $M_2(0;1)$, $M_1 \in L$, $M_2 \in L$;

2) $M_0(-1;1) \in L$, $\left(L\hat{,}Ox\right) = \dfrac{3\pi}{4}$;

3) $L: x = 1 - t;\ y = 3 + 2t$;

4) $5x - 2y + 1 = 0$;

5) $M_0(1;-3) \in L$; $\vec{n} = -\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{n} \perp L$.

У кожному випадку побудувати пряму.

6.32. Знайти координати одиночного вектора нормалі прямої L, якщо відомо:

1) $L: x = 1 - t,\ y = 2t$;

2) $k = \dfrac{3}{2}$; $b = 1$;

3) $2x = 3y + 1$;

4) $M_0(1;5) \in L$; $\vec{u} = (-1;1)$, $\vec{u} \parallel L$.

6.33. Записати рівняння прямої, яка відтинає на осі Ox відрізок a, на осі Oy — відрізок b:

1) $a = 1$; $b = 2$;

2) $a = -2$; $b = 1$.

Знайти координати вектора нормалі цієї прямої та координати будь-яких трьох точок M_1, M_2, M_3, які їй належать.

6.34. Визначити, які з наступних рівнянь прямої є нормальними:

1) $\dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y - 3 = 0$; 5) $-x + 3 = 0$;

2) $\dfrac{2}{5}x - \dfrac{3}{5}y - 1 = 0$; 6) $x - 3 = 0$;

3) $\dfrac{5}{13}x - \dfrac{12}{13}y + 3 = 0$; 7) $y + 4 = 0$;

4) $-\dfrac{5}{13}x + \dfrac{12}{13}y - 3 = 0$; 8) $-y - 4 = 0$.

6.35. Привести загальне рівняння прямої до нормального вигляду:

1) $4x - 3y - 10 = 0$;

2) $x + 2 = 0$;

3) $-12x + 5y + 13 = 0$.

Визначити відстань p від початку координат до кожної із заданих прямих.

6.36. Знайти відстань від точки A (2; –5) до прямої $x - 2y - 7 = 0$.

6.37. Знайти точку M_0 перетину прямих L_1 і L_2 та гострий кут θ між ними, якщо:

1) $L_1: x + 5y - 35 = 0$, $L_2: 3x + 2y - 27 = 0$;

2) $L_1: x = \dfrac{y-1}{2}$, $L_2: \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y}{3}$;

3) $L_1: y = \dfrac{3x+7}{2}$, $L_2: y = \dfrac{3-2x}{3}$;

4) $L_1: 2x - 4y + 3 = 0$, $L_2: \begin{cases} x = 2 + 6t; \\ y = -1 + 3t. \end{cases}$

6.38. Встановити, які з наступних пар рівнянь визначають паралельні прямі, а які — перпендикулярні прямі:

1) $3x - 2y + 1 = 0$, $2x + 3y + 5 = 0$.

2) $y = 3x - 1$, $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y+3}{1}$.

3) $4y - x + 1 = 0$, $2x - 8y + 1 = 0$.

4) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{4}$, $x + 4y = 1$.

6.39. Визначити, при яких значеннях a і b прямі $ax - 2y - 1 = 0$ і $6x - 4y - b = 0$.

1) мають спільну точку;
2) паралельні;
3) збігаються;
4) перпендикулярні.

6.40. Задані вершини трикутника A (–10; –13), B (–2; 3), C (2; 1). Знайти довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, проведену з вершини C.

6.41. Знайти проекцію точки P (–6; 4) на пряму $4x - 5y + 3 = 0$.

6.42. Задані вершини трикутника A (1; 0), B (0; –1), C (2; –3). Скласти рівняння медіани AM, висоти AN і бісектриси AK. Обчислити довжину висоти AN.

Відповіді

6.27. Перше і четверте.

6.28. 1) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3}$, $\begin{cases} x = 1 + 2t; \\ y = -2 - 3t; \end{cases}$ 2) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{3}$, $\begin{cases} x = 1 + 2t; \\ y = 3 + 3t; \end{cases}$

3) $\frac{x-4}{1}=\frac{y-5}{0}$, $\begin{cases} x=4+t; \\ y=5; \end{cases}$ 4) $\frac{x+5}{0}=\frac{y-2}{1}$, $\begin{cases} x=-5; \\ y=2+t; \end{cases}$

5) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{5}$, $\begin{cases} x=1+2t; \\ y=-1+5t; \end{cases}$ 6) $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}$, $\begin{cases} x=2t; \\ y=1+3t. \end{cases}$

6.29. $2x-y-4=0$, $A_1(2;\,0)$, $A_2(0;\,-4)$.

6.30. $x-2y+3=0$.

6.31. 1) $k=-3$, $b=1$; 2) $k=-1$; $b=0$; 3) $k=-2$, $b=5$; 4) $k=\frac{5}{2}$, $b=\frac{1}{2}$; 5) $k=1$, $b=-4$.

6.32. 1) $\vec{n}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; 2) $\vec{n}=\left(\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$;

3) $\vec{n}=\left(\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$; 4) $\vec{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

6.33. 1) $\vec{n}=(2;\,1)$, $M_1(1;\,0)$, $M_2(0;\,2)$, $M_3(-1;\,4)$;

2) $\vec{n}=(1;\,-2)$, $M_1(-2;\,0)$, $M_2(0;\,1)$, $M_3(2;\,2)$.

6.34. 1), 4), 6), 8).

6.35. 1) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-2=0$, $p=2$; 2) $-x-2=0$, $p=2$;

3) $\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}y-1=0$, $p=1$.

6.36. $\sqrt{5}$.

6.37. 1) $M_0(5;\,6)$, $\theta=\frac{\pi}{4}$; 2) $M_0\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)$, $\theta=\frac{\pi}{4}$;

3) $M_0\left(-\frac{15}{13};\frac{23}{13}\right)$, $\theta=\frac{\pi}{2}$, прямі взаємно перпендикулярні;

4) $\theta=0$, прямі L_1, L_2 паралельні.

6.38. 1) і 4) визначають перпендикулярні прямі;

2) і 3) визначають паралельні прямі.

6.39. 1) $a\neq 3$; 2) $a=3$, $b\neq 2$; 3) $a=3$, $b=2$; 4) $a=-\frac{4}{3}$.

6.40. 4.

6.41. $(-2;\,-1)$.

6.42. $AM: x-1=0$, $AN: x-y-1=0$, $AK: (3-\sqrt{5})x+(1+\sqrt{5})y-3-\sqrt{5}=0$, $AN=\sqrt{2}$.

6.43. Задані рівняння двох сторін паралелограма $8x+3y+1=0$, $2x+y-1=0$ і рівняння однієї з його діагоналей $3x+2y+3=0$. Визначити координати вершин паралелограма.

6.44. Обчислити площу трикутника, сторони якого лежать на прямих $x+5y-7=0$, $3x-2y-4=0$, $7x+y+19=0$.

6.45. Відомі рівняння двох сторін прямокутника $2x-3y+5=0$, $3x+2y-7=0$ і одна з його вершин A (2; –3). Скласти рівняння двох інших сторін прямокутника.

6.46. Відомі рівняння двох сторін прямокутника $x-2y=0$, $x-2y+15=0$ і рівняння однієї з його діагоналей $7x+y-15=0$. Знайти координати вершин прямокутника.

6.47. Визначити координати точки перетину висот трикутника, якщо його сторони задаються рівняннями: $4x-y-7=0$, $x+3y-31=0$, $x+5y-7=0$.

6.48. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини A трикутника ABC на медіану, проведену з вершини B, якщо A (1; –1), B (–2; 1), C (3; 5).

6.49. Пряма проходить через точку M (4; –3) й утворює з координатними осями трикутник, площа якого дорівнює 3. Скласти рівняння цієї прямої.

6.50. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку P (5; 2) і відтинає рівні відрізки на координатних осях.

6.51. Діагоналі ромба, рівні 12 і 6 одиницям довжини, взято за осі координат. Написати рівняння його сторін.

6.52. Визначити площу трикутника, обмеженого координатними осями та прямою $x+2y-6=0$.

6.53. Знайти точку осі Oy, однаково віддалену від початку координат і від прямої $3x-4y+12=0$.

6.54. Знайти відстань між двома паралельними прямими $3x-4y+10=0$ і $6x-8y+15=0$.

6.55. Точка рухається так, що відстань її від початку координат залишається весь час удвічі більшою, ніж відстань від прямої $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$. Знайти траєкторію цієї точки.

6.56. З точки $M_0(-2;\,3)$ під кутом α до осі Ox спрямований промінь світла. Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha=3$. Промінь, дійшовши до осі Ox, відбивається. Скласти рівняння прямих, на яких лежать промінь, що падає, і відбитий.

6.57. Точка, яка виходить з початку координат, повинна одночасно рухатись у напрямі осі Ox зі сталою швидкістю V_1 і в напрямі осі Oy зі сталою швидкістю V_2. Знайти траєкторію цієї точки.

6.58. Промінь світла спрямовано по прямій $y=\frac{2}{3}x-4$; дійшовши до осі Ox, промінь відбивається від неї. Визначити точку M, зустрічі променя з віссю і рівняння відбитого променя.

Б Відповіді

6.43. (1; –3), (–2; 5), (5; –9), (8; –17).

6.44. 17.

6.45. $3x+2y=0$, $2x-3y-13=0$.

6.46. (2; 1), (4; 2), (–1; 7), (1; 8).

6.47. (3; 4).

6.48. $4x+y-3=0$.

6.49. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ або $\frac{x}{4}+\frac{2y}{3}=-1$.

6.50. $x+y=7$.

6.51. $\pm\frac{x}{6}\pm\frac{y}{2}=1$.

6.52. 9.

6.53. (0; –12), $\left(0; \frac{4}{3}\right)$.

6.54. 0,5.

6.55. $y=0$ або $y=\sqrt{3}x$.

6.56. $3x-y+9=0$, $3x+y+9=0$.

6.57. $y=\frac{V_2}{V_1}x$.

6.58. $M(6; 0)$, $y=-\frac{2}{3}x+4$.

В

6.59. Скласти рівняння діагоналей ромба зі стороною a, якщо дві його суміжні сторони взяті за координатні осі так, що весь ромб розміщений у третьому координатному куті.

6.60. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(3; 2)$ так, що її відрізок, обмежений осями координат, у точці M ділиться навпіл. Побудувати цю пряму.

6.61. Діагоналі ромба, довжиною 30 і 16 одиниць, взято за координатні осі. Обчислити відстань між паралельними сторонами ромба.

6.62. Через точку A (–2; 1) проведена пряма так, що її відстань від точки C (3; 1) дорівнює 4. Знайти кутовий коефіцієнт цієї прямої.

6.63. Дано рівняння прямої $12x+5y-52=0$. Знайти рівняння прямої, паралельної заданій прямій і віддаленої від неї на відстань, рівну 2.

6.64. Скласти рівняння прямої, паралельної двом заданим прямим $4x-6y-3=0$ і $2x-3y+7=0$ та рівновіддаленої від кожної з них.

6.65. Знайти координати точки, яка розміщена на відстані 5 одиниць від кожної з прямих: $3x+4y-10=0$ і $5x-12y+26=0$.

6.66. Для трикутника ABC відомі рівняння: сторони AB: $4x+y-12=0$, висоти BN_1: $5x-4y-15=0$ і висоти AN_2: $2x+2y-9=0$. Скласти рівняння двох інших сторін трикутника і рівняння висоти CN_3.

6.67. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо відомі одна з його вершин A (–4; 2) і рівняння двох медіан $3x-2y+2=0$ та $3x+5y-12=0$.

6.68. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо відомі одна з його вершин A (2; –4) і рівняння двох його бісектрис $x+y-2=0$ та $x-3y-6=0$.

6.69. Знайти координати точки Q, симетричної точці $P(-5; 13)$ відносно прямої $2x-3y-3=0$.

6.70. Довести, що рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$, можна записати у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

6.71. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку P (3; 5) на однаковій відстані від точок A (–7; 3) і B (11; –15).

6.72. На осі Ox знайти точку P, сума відстаней якої до точок $M_1(1;\,2)$ і $M_2(3;\,4)$ є найменшою.

6.73. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо відомі одна з його вершин C (4; –1), рівняння висоти $2x-3y+12=0$ і медіани $2x+3y=0$, які проведені з однієї вершини.

6.74. Як зміниться результат задачі 6.57, якщо обидва рухи точки M у напрямі осей — рівноприскорені і сталі прискорення відповідно дорівнюють g_1 і g_2? (Початкова швидкість в обох рухах дорівнює нулю.)

6.75. З точки A (6; 9) спрямований промінь під кутом $\frac{\pi}{4}$ до прямої $y=0{,}4x+0{,}8$. Знайти рівняння променя, відбитого від цієї прямої.

Відповіді

6.59. $x+y+a=0,\ \ x-y=0.$

6.60. $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1.$

6.61. $14\frac{2}{17}.$

6.62. $\pm\frac{4}{3}.$

6.63. $12x+5y-26=0.$

6.64. $8x-12y+11=0.$

6.65. (1; 8).

6.66. $BC: x-y-3=0,\ \ AC: 4x+5y-20=0,\ \ CN_3: 3x-12y-1=0.$

6.67. $2x+y-8=0,\ \ x-3y+10=0,\ \ x+4y-4=0.$

6.68. $x+7y-6=0,\ \ x-y-6=0,\ \ 7x+y-10=0.$

6.69. $Q\,(11;\,-11).$

6.71. $x+y-8=0,\ \ 11x-y-28=0.$

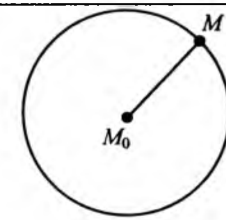
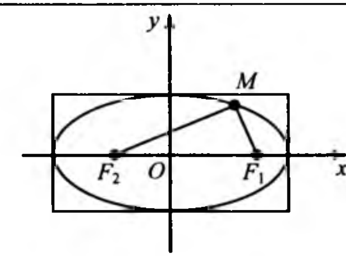
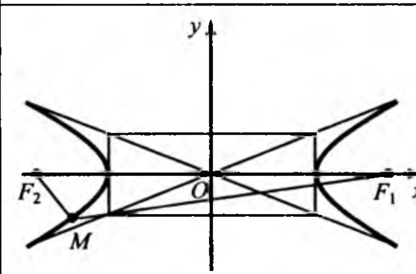
6.72. $P\left(\frac{5}{3};\,0\right).$

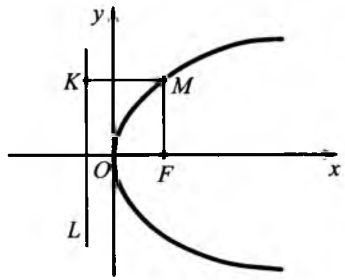
6.73. $3x+7y-5=0,\ \ 3x+2y-10=0,\ \ 9x+11y+5=0.$

6.74. $y=\frac{g_2}{g_1}x.$

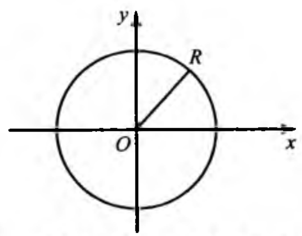
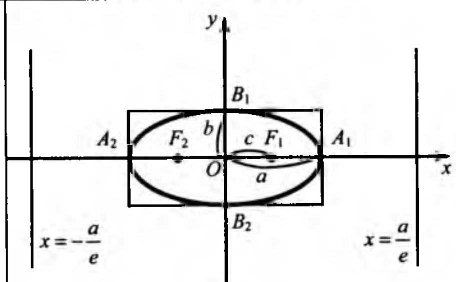
6.75. $y=-\frac{3}{7}x+\frac{23}{7}$ або $y=\frac{7}{3}x-\frac{73}{3}.$

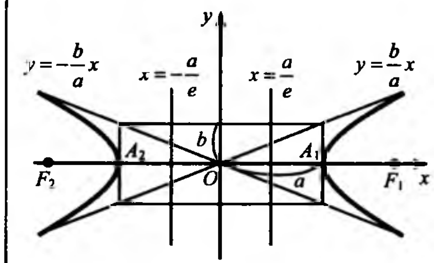
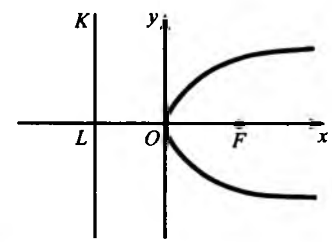
3. Лінії другого порядку

Назва	Геометричне зображення	Означення в аналітичному вигляді
Коло	 M_0 — центр кола; M — змінна точка кола	$M_0M=R$
Еліпс	 F_1, F_2 — фокуси (задані точки); M — змінна точка еліпса	$F_1M+F_2M=2a$, $a=\text{const}$
Гіпербола	 F_1, F_2 — фокуси (задані точки); M — змінна точка гіперболи	$\lvert F_1M-F_2M\rvert=2a$, $a=\text{const}$

Назва	Геометричне зображення	Означення в аналітичному вигляді
Парабола	 F — фокус (задана точка); KL — директриса (задана пряма); M — змінна точка параболи	$FM = MK$

КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ КРИВИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Назва кривої	Геометричне зображення у прямокутній системі координат і основні характеристики кривої	Канонічне рівняння кривої й основні залежності між параметрами
Коло	 O — центр кола; R — радіус кола	$x^2 + y^2 = R^2$, R — радіус
Еліпс	 $A_1(a; 0)$, $A_2(-a; 0)$, $B_1(0; b)$, $B_2(0; -b)$ — вершини еліпса; $F_1(c; 0)$, $F_2(-c; 0)$ — фокуси еліпса	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ a — велика піввісь; b — мала піввісь ($b < a$); c — фокальна піввісь; $c^2 = a^2 - b^2;$ ексцентриситет $e=\frac{c}{a},$ $0 < e < 1;$ рівняння директрис $x=\pm\frac{a}{e}$

Назва кривої	Геометричне зображення у прямокутній системі координат і основні характеристики кривої	Канонічне рівняння кривої й основні залежності між параметрами
Гіпербола	 $A_1(a; 0)$, $A_2(-a; 0)$ — вершини гіперболи; $F_1(c; 0)$, $F_2(-c; 0)$ — фокуси гіперболи	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$ a — дійсна піввісь; b — уявна піввісь; c — фокальна піввісь; $c^2 = a^2 + b^2;$ ексцентриситет $e=\frac{c}{a}, e > 1;$ рівняння директрис: $x=\pm\frac{a}{e};$ рівняння асимптот: $y=\pm\frac{b}{a}x$
Парабола	 $O(0; 0)$ — вершина параболи; $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ — фокус параболи; KL — директриса параболи	$y^2 = 2px,$ $p = FL$ — параметр параболи; ексцентриситет $e = 1;$ рівняння директриси: $x=-\frac{p}{2}$

6.76. Скласти рівняння кола у кожному з наступних випадків:

1) центр кола збігається з початком координат, і його радіус — $R = 5$;

2) центр кола збігається з точкою $C(-1; 4)$, і його радіус — $R = 3$;

3) коло проходить через точку $A(1; 1)$, і його центр збігається з точкою $C(4; -2)$;

4) точки A (1; 3) і B (–5; 3) є кінцями одного з діаметрів кола;

5) коло дотикається до прямої $x=3$, і його центр збігається з початком координат;

6) коло дотикається до осі Ox, і його центр збігається з точкою C (3; 7);

7) коло дотикається до прямої $x-y+1=0$, і його центр збігається з точкою C (1; –1).

6.77. Скласти рівняння кола, яке дотикається до осі Oy і центр якого міститься в точці перетину прямих: $2x+3y-13=0$, $x+y-5=0$.

6.78. Яку криву описує кожне з рівнянь:

1) $(x-1)^2+(y+1)^2=4$;

2) $(x+2)^2+(y-1)^2=0$;

3) $x^2+(y+1)^2=9$;

4) $x^2+(y+1)^2=0$;

5) $(x-1)^2+(y+5)^2=16$?

6.79. Знайти координати центра і радіус кола:

1) $x^2-2x+4y+y^2-20=0$;

2) $x^2+y^2+y=0$;

3) $x^2+x+y^2+y=-\frac{1}{4}$;

4) $x^2+y^2+6x-4y-12=0$.

Побудувати коло.

6.80. Визначити, як розміщена точка M (–2; 1) відносно кожного з кіл:

1) $x^2+y^2=2$;

2) $x^2+y^2-5=0$;

3) $x^2+y^2=25$.

6.81. Скласти рівняння еліпса, розміщеного симетрично відносно координатних осей з фокусами на осі Ox, якщо:

1) його півосі дорівнюють $a=7$; $b=2$;

2) його велика піввісь $a=5$, а відстань між фокусами — $2c=6$;

3) його мала піввісь $b=4$, а відстань між фокусами — $2c=6$;

4) його велика піввісь $a=5$, а ексцентриситет $e=\frac{3}{5}$;

5) відстань між фокусами $2c=6$ і ексцентриситет $e=\frac{3}{5}$;

6) відстань між фокусами $2c=4$, а відстань між директрисами дорівнює 5.

У кожному з випадків побудувати еліпс.

6.82. Скласти рівняння еліпса, розміщеного симетрично відносно координатних осей, з фокусами на осі Oy, якщо:

1) півосі еліпса $a=3$, $b=4$;

2) велика піввісь еліпса $b=6$, а мала $a=3$;

3) велика піввісь еліпса $b=8$ і відстань між фокусами $2c=12$;

4) мала піввісь еліпса $a=4$, а ексцентриситет $e=\frac{3}{5}$.

6.83. Для кожного з еліпсів визначити півосі, координати вершин і фокусів:

1) $9x^2+16y^2=144$;

2) $4x^2+y^2=9$;

3) $16x^2+9y^2=144$;

4) $x^2+4y^2=4$.

Побудувати еліпси.

6.84. Встановити, що кожне з наступних рівнянь визначає еліпс; знайти координати його центра, півосі, ексцентриситет і рівняння директрис:

1) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$;

2) $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$;

3) $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$.

Побудувати ці еліпси.

6.85. Скласти параметричні рівняння еліпса, якщо в прямокутній декартовій системі координат еліпс має рівняння: $4x^2+9y^2-36=0$.

6.86. Виключити параметр t з рівнянь кривої $x=4\cos t$, $y=3\sin t$. Визначити цю криву.

6.87. Скласти рівняння гіперболи, розміщеної симетрично відносно координатних осей, з фокусами на осі Ox, якщо:

1) $a=4$, $b=3$;

2) відстань між фокусами $2c=16$ і уявна вісь $2b=12$;

3) відстань між фокусами $2c=6$ і ексцентриситет $e=\frac{3}{2}$;

4) дійсна вісь $2a=16$ і ексцентриситет $e=\frac{5}{4}$;

5) рівняння асимптот $y=\pm\frac{3}{2}x$; $2a=4$;

6) відстань між директрисами дорівнює $\frac{8}{3}$ і ексцентриситет $e=1{,}5$;

7) відстань між директрисами дорівнює 12,8 і рівняння асимптот $y=\pm 0{,}75x$.

У кожному випадку побудувати гіперболу.

6.88. Скласти рівняння гіперболи, розміщеної симетрично відносно координатних осей, з фокусами на осі Oy, якщо:

1) $a=6$, $b=3$;

2) відстань між фокусами $2c=10$ і ексцентриситет $e=\frac{5}{3}$;

3) уявна вісь дорівнює 48 і рівняння асимптот $y=\pm\frac{12}{5}x$;

4) дійсна вісь дорівнює 8 і ексцентриситет дорівнює $\frac{5}{3}$.

У кожному випадку побудувати гіперболу.

6.89. Визначити півосі, координати фокусів, координати вершин і рівняння асимптот кожної з гіпербол:

1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$;

2) $16x^2-y^2=1$;

3) $9x^2-16y^2=-144$.

У кожному з випадків побудувати гіперболу.

6.90. Переконатись, що кожне з наступних рівнянь визначає гіперболу:

1) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$;

2) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$;

3) $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$.

6.91. Знайти координати центра гіперболи, її півосі, ексцентриситет, рівняння асимптот та директрис. Побудувати гіперболу.

1) $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{16}=1$;

2) $\frac{(x+5)^2}{64}-\frac{(y-1)^2}{36}=1$;

3) $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{16}=-1$.

6.92. Знайти точки перетину гіперболи $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ з кожною з прямих:

1) $x-y+1=0$;

2) $x-2y=0$;

3) $5x-4y-16=0$.

6.93. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо:

1) парабола розміщена у верхній півплощині симетрично відносно осі Oy і $p=4$;

2) парабола розміщена у нижній півплощині симетрично відносно осі Oy і $p=6$;

3) парабола розміщена у правій півплощині симетрично відносно осі Ox і $p=3$;

4) парабола розміщена у лівій півплощині симетрично відносно осі Ox і $p=5$.

У кожному випадку побудувати параболу.

6.94. Скласти рівняння параболи, яка проходить через початок координат, розміщена симетрично відносно осі Oy і має фокус $F(0;-3)$.

6.95. Скласти рівняння параболи, якщо задані її фокус $F(-6;0)$ і директриса $x=6$.

6.96. Визначити координати вершини, фокуса і рівняння директриси кожної із заданих парабол:

1) $y^2=20x$; 2) $x^2=12y$;

3) $y^2=-10x$; 4) $x^2=-4y$.

У кожному випадку побудувати параболу.

6.97. Переконатись, що кожне з наступних рівнянь визначає параболу; знайти координати вершини, параметр p і побудувати параболу:

1) $x=2y^2-12y+14$; 2) $x=-\frac{1}{4}y^2+y$;

3) $y=\frac{1}{4}x^2+x+2$; 4) $y=-\frac{1}{6}x^2+2x-7$.

6.98. Виключенням параметра t знайти рівняння параболи у декартовій системі координат і побудувати її:

1) $\begin{cases} x=2t; \\ y=t^2-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=1-3t; \\ y=4-t^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = t^2 + 1; \\ y = 2t + 8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 1 - 2t^2; \\ y = 1 - t. \end{cases}$

6.99. Меридіан земної кулі має форму еліпса, відношення осей якого дорівнює $\frac{299}{300}$. Визначити ексцентриситет меридіана.

Відповіді

6.76. 1) $x^2 + y^2 = 25$; 2) $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 9$;
3) $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 18$; 4) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 36$;
5) $x^2 + y^2 = 9$; 6) $(x-3)^2 + (y-7)^2 = 49$;
7) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{9}{2}$.

6.77. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$.

6.78. 1) Коло з центром $C(1; -1)$ і $R = 2$;
2) точку $C(-2; 1)$;
3) коло з центром $C\ (0; -1)$ і $R = 3$;
4) точку $C\ (0; -1)$;
5) коло з центром $C\ (1; -5)$ і $R = 4$.

6.79. 1) $C\ (1; -2)$, $R = 5$;
2) $C\left(0; -\frac{1}{2}\right)$, $R = \frac{1}{2}$;
3) $C\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $R = \frac{1}{2}$;
4) $C\ (-3; 2)$, $R = 5$.

6.80. 1) Поза колом; 2) на колі; 3) у колі.

6.81. 1) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$;
4) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 5) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 6) $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$.

6.82. 1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$;

3) $\frac{x^2}{28} + \frac{y^2}{64} = 1$; 4) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$.

6.83. 1) $a = 4,\ b = 3,\ A_{1,2}(\pm 4; 0),\ B_{1,2}(0; \pm 3),\ F_{1,2}(\pm\sqrt{7}; 0)$;
2) $a = \frac{3}{2},\ b = 3,\ A_{1,2}(\pm\frac{3}{2}; 0),\ B_{1,2}(0; \pm 3),\ F_{1,2}(0; \pm\frac{3\sqrt{3}}{2})$;
3) $a = 3,\ b = 4,\ A_{1,2}(\pm 3; 0),\ B_{1,2}(0; \pm 4),\ F_{1,2}(0; \pm\sqrt{7})$;
4) $a = 2,\ b = 1,\ A_{1,2}(\pm 2; 0),\ B_{1,2}(0; \pm 1),\ F_{1,2}(\pm\sqrt{3}; 0)$.

6.84. 1) $C(3; -1),\ a = 3,\ b = \sqrt{5},\ e = \frac{2}{3},\ x = \frac{15}{2},\ x = -\frac{3}{2}$;
2) $C(-1; 2),\ a = 5,\ b = 4,\ e = \frac{3}{5},\ x = \frac{22}{3},\ x = -\frac{28}{3}$;
3) $C(1; -2),\ a = 2\sqrt{3},\ b = 4,\ e = \frac{1}{2},\ y = 6,\ y = -10$.

6.85. $\begin{cases} x = 3\cos t; \\ y = 2\sin t. \end{cases}$

6.86. Еліпс $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

6.87. 1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{36} = 1$; 3) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$;
4) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$; 5) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$; 6) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$;
7) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

6.88. 1) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = -1$; 2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$;
3) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{576} = -1$; 4) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$.

6.89. 1) $a = 4,\ b = 1,\ F_{1,2}(\pm 5; 0),\ A_{1,2}(\pm 4; 0),\ y = \pm\frac{3}{4}x$;
2) $a = 0{,}25,\ b = 1,\ F_{1,2}\left(\pm\frac{\sqrt{17}}{4}; 0\right),\ A_{1,2}\left(\pm\frac{1}{4}; 0\right),\ y = \pm 4x$.
3) $a = 4,\ b = 3,\ F_{1,2}(0; \pm 5),\ A_{1,2}(0; \pm 4),\ y = \pm\frac{3}{4}x$.

6.91. 1) $C(2;-3)$, $a=3$, $b=4$, $e=\dfrac{5}{3}$, асимптоти: $4x-3y-17=0$, $4x+3y+1=0$, директриси: $x=\dfrac{1}{5}$, $x=\dfrac{19}{5}$;

2) $C(-5;1)$, $a=8$, $b=6$, $e=1{,}25$, асимптоти: $3x-4y+19=0$, $3x+4y+11=0$, директриси: $x=-11{,}4$, $x=1{,}4$;

3) $C(2;-1)$, $a=3$, $b=4$, $e=1{,}25$, асимптоти: $4x+3y-5=0$, $4x-3y-11=0$, директриси: $y=-4{,}2$, $y=2{,}2$.

6.92. 1) Пряма не перетинає гіперболу;

2) $\left(\dfrac{12}{\sqrt{5}};\dfrac{6}{\sqrt{5}}\right)$; $\left(-\dfrac{12}{\sqrt{5}};-\dfrac{6}{\sqrt{5}}\right)$;

3) Пряма дотикається до гіперболи у точці $\left(5;\dfrac{9}{4}\right)$.

6.93. 1) $x^2=8y$; 2) $x^2=-12y$; 3) $y^2=6x$; 4) $y^2=-10x$.

6.94. $x^2=-12y$.

6.95. $y^2=-24x$.

6.96. 1) $O(0;0)$, $F(5;0)$, $x=-5$; 2) $O(0;0)$, $F(0;3)$, $y=-3$;
3) $O(0;0)$, $F(-2{,}5;0)$, $x=2{,}5$; 4) $O(0;0)$, $F(0;-1)$, $y=1$.

6.97. 1) $A(-4;3)$, $p=\dfrac{1}{4}$; 2) $A(1;2)$, $p=2$;
3) $A(-2;1)$, $p=2$; 4) $A(6;-1)$, $p=3$.

6.98. 1) $x^2=4(y+1)$; 2) $(x-1)^2=-9(y-4)$;
3) $(y-8)^2=4(x-1)$; 4) $(y-1)^2=-\dfrac{1}{2}(x-1)$.

6.99. $e\approx 0{,}08$.

Б

6.100. Скласти рівняння кола у кожному з наступних випадків:

1) коло проходить через точки A (3; 1) і B (–1; 3), і його центр належить прямій $3x-y-2=0$;

2) коло проходить через три точки A (1; 1), B (1; –1), C (2; 0);

3) коло відтинає на прямій $2x-5y+18=0$ хорду, довжина якої дорівнює 6, центр кола лежить у точці C (3; –1);

4) коло радіусом $R=\sqrt{5}$ дотикається до прямої $x-2y-1=0$ у точці $M(3;1)$.

6.101. Встановити, які лінії визначаються рівняннями:

1) $y=\sqrt{9-x^2}$; 2) $y=-\sqrt{25-x^2}$;
3) $x=-\sqrt{4-y^2}$; 4) $y=15+\sqrt{64-x^2}$;
5) $y=-3-\sqrt{21-4x-x^2}$; 6) $x=-5+\sqrt{40-6y-y^2}$.

6.102. Скласти рівняння діаметра кола $x^2+y^2+4x-6y-17=0$, перпендикулярного до прямої $5x+2y-13=0$.

6.103. Визначити точки перетину прямої $7x-y+12=0$ і кола $(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

6.104. Користуючись лише циркулем, побудувати фокуси еліпса $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

6.105. Визначити площу чотирикутника, дві вершини якого збігаються з фокусами еліпса $9x^2+5y^2=1$, а дві інші — з кінцями його малої півосі.

6.106. Ексцентриситет еліпса $e=\dfrac{2}{3}$, фокальний радіус точки M еліпса дорівнює 10. Обчислити відстань від точки M до односторонньої з цим фокусом директриси.

6.107. Визначити точки еліпса $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$, відстань яких до правого фокуса дорівнює 14.

6.108. Які лінії визначаються рівняннями:

1) $y=\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$; 2) $y=-\dfrac{5}{3}\sqrt{9-x^2}$;
3) $x=-\dfrac{2}{3}\sqrt{9-y^2}$; 4) $x=\dfrac{1}{7}\sqrt{49-y^2}$;
5) $y=-7+\dfrac{2}{5}\sqrt{16+6x-x^2}$;
6) $x=-2\sqrt{-5-6y-y^2}$.

Побудувати ці лінії.

6.109. Ліва вершина гіперболи міститься у точці A (–3; 0), а лівий фокус — у точці B (–5; 0). Скласти рівняння гіперболи.

6.110. Користуючись лише циркулем, побудувати фокуси гіперболи $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$.

6.111. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі Ox симетрично відносно початку координат, якщо:

1) гіперболі належать точки $M_1(6;-1)$ і $M_2(-8;2\sqrt{2})$;

2) точка $M(-5;3)$ належить гіперболі і ексцентриситет $e=\sqrt{2}$;

3) рівняння асимптот: $y=\pm\frac{2}{3}x$ і точка $M\left(\frac{9}{2};-1\right)$ належить гіперболі.

6.112. На гіперболі $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$ розглядається точка, абсциса якої дорівнює 10, а ордината додатна. Обчислити фокальні радіуси цієї точки і кут між ними.

6.113. На гіперболі $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$ знайти точку, яка була б утричі ближчою до однієї асимптоти, ніж до другої.

6.114. Встановити, які лінії визначаються рівняннями:

1) $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$; 2) $x=-\frac{4}{3}\sqrt{y^2+9}$;

3) $y=7-\frac{3}{2}\sqrt{x^2-6x+13}$; 4) $x=9-2\sqrt{y^2+4y+8}$.

6.115. Скласти рівняння параболи, якщо відомі її фокус $F(7;2)$ і директриса $x=5$.

6.116. Скласти рівняння параболи, якщо відомі її фокус $F(4;3)$ і директриса $y+1=0$.

6.117. Задана вершина параболи $A(6;3)$ і рівняння її директриси $3x-5y+1=0$. Знайти фокус F цієї параболи.

6.118. Встановити, які лінії визначаються рівняннями, і побудувати ці лінії:

1) $y=3-4\sqrt{x-1}$;

2) $x=-4+3\sqrt{y+5}$;

3) $x=2-\sqrt{6-2y}$;

4) $y=-5+\sqrt{-3x-21}$.

6.119. Скласти рівняння параболи і знайти точки перетину її з координатними осями, якщо фокус параболи лежить у точці $(-3;-4)$, а рівняння директриси $x+1=0$.

6.120. Стальний трос підвішений за два кінці; точки закріплення розміщені на одній висоті; відстань між ними дорівнює 20 м. Величина його прогину на відстані 2 м від точки закріплення, рахуючи по горизонталі, дорівнює 14,4 см. Визначити величину прогину цього троса у середині між точками закріплення, приблизно вважаючи, що трос має форму дуги параболи.

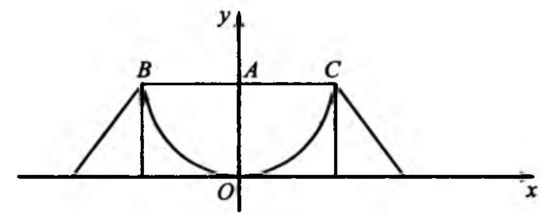


Рис. 6.1

6.121. Канат підвісного моста має форму параболи (рис. 6.1). Скласти рівняння цієї параболи відносно зазначених на малюнку координатних осей, якщо прогин каната OA = 10 м, а довжина моста BC = 60 м.

6.122. Мостова арка має форму параболи. Визначити її параметр, якщо прогин арки дорівнює 24 м, а висота — 6 м.

6.123. Камінець, який кинули вгору під гострим кутом до горизонту, описавши дугу параболи, впав на відстані 16 м від початкового положення. Визначити параметр цієї траєкторії, якщо найбільша висота, якої досягає камінець, дорівнює 12 м.

6.124. Струмінь води, який викидає фонтан, набирає форми параболи з параметром $p=0{,}1$. Визначити висоту h струменя, якщо відомо, що він падає до басейну на відстані двох метрів від місця виходу.

Відповіді

6.100. 1) $(x-2)^2+(y-4)^2=10$;

2) $(x-1)^2+y^2=1$;

3) $(x-3)^2+(y+1)^2=38$;

4) $(x-4)^2+(y+1)^2=5$ і $(x-2)^2+(y-3)^2=5$.

6.101. 1) Верхня частина кола з центром у точці O (0; 0) і R = 3 (рис. 6.2);

2) нижня частина кола з центром у точці O (0; 0) і R = 5 (рис. 6.3);

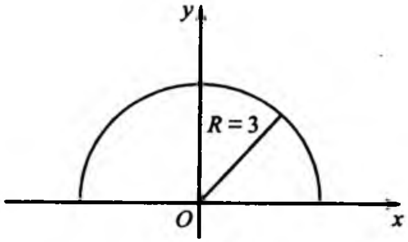


Рис. 6.2

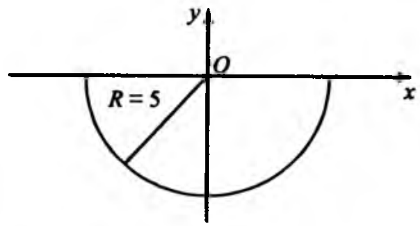


Рис. 6.3

3) ліва частина кола з центром у точці O (0; 0) і $R = 2$ (рис. 6.4);

4) півколо з радіусом $R = 8$ із центром C (0; 15), розміщене над прямою $y = 15$ (рис. 6.5);

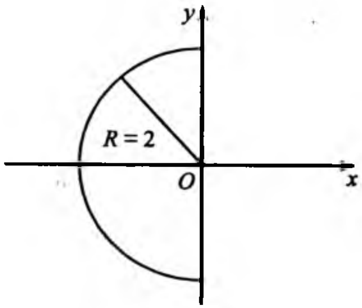


Рис. 6.4

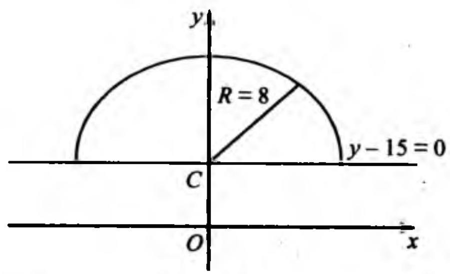


Рис. 6.5

5) півколо з радіусом $R = 5$ із центром C (–2; –3), розміщене під прямою $y = -3$ (рис. 6.6);

6) півколо з радіусом $R = 7$ із центром C (–5; –3), розміщене праворуч від прямої $x = -5$ (рис. 6.7).

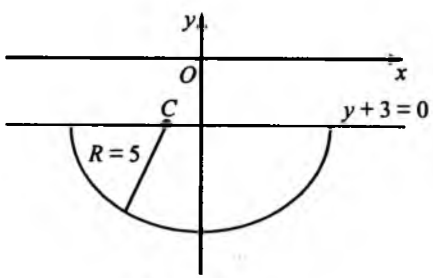


Рис. 6.6

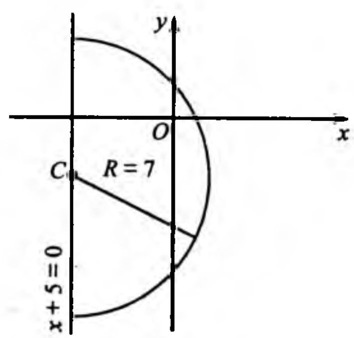


Рис. 6.7

6.102. $2x - 5y + 19 = 0$.

6.103. $M_1(-1; 5)$, $M_2(-2; -2)$.

6.104. Фокуси є точками перетину кола з радіусом $R = 3$ з центром у точці B (0; 2) з віссю Ox.

6.105. $\frac{4\sqrt{5}}{45}$.

6.106. 15.

6.107. $(-5; 3\sqrt{3})$ і $(-5; -3\sqrt{3})$.

6.108. 1) Половина еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, що розміщена у верхній півплощині;

2) половина еліпса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$, що розміщена у нижній півплощині;

3) половина еліпса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, що розміщена у лівій півплощині;

4) половина еліпса $x^2 + \frac{y^2}{49} = 1$, що розміщена у правій півплощині;

5) половина еліпса $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+7)^2}{4} = 1$, що розміщена над прямою $y = -7$ (рис. 6.8);

6) половина еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$, що розміщена у лівій півплощині (рис. 6.9).

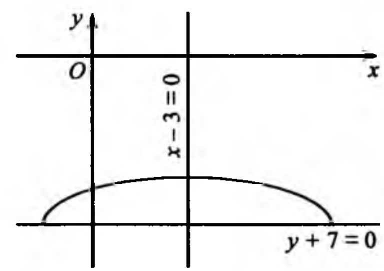


Рис. 6.8

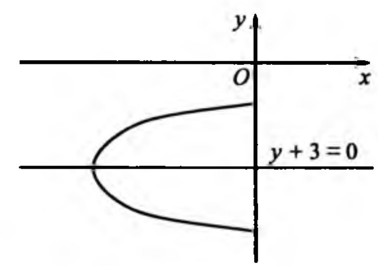


Рис. 6.9

6.109. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$

6.110. Побудувати точки A (4; 0) і B (0; 5), провести коло з центром у початку координат з радіусом $R = AB$. Точки перетину цього кола з віссю Ox — фокуси гіперболи.

6.111. 1) $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$; 2) $x^2-y^2=16$; 3) $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{8}=1$.

6.112. $r_1=9$, $r_2=19$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{28\sqrt{2}}{41}$.

6.113. $\left(\frac{14\sqrt{3}}{3};\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{14\sqrt{3}}{3};-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\frac{14\sqrt{3}}{3};\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\frac{14\sqrt{3}}{3};-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

6.114. 1) Частина гіперболи $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$, що розміщена у верхній півплощині (рис. 6.10);

2) вітка гіперболи $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, що розміщена у лівій півплощині (рис. 6.11);

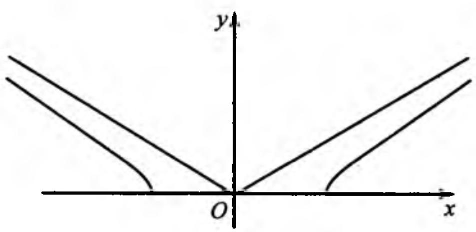


Рис. 6.10

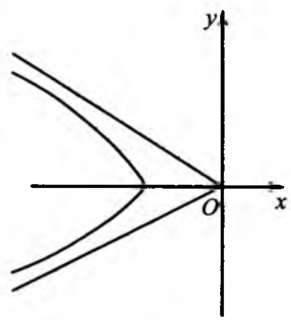


Рис. 6.11

3) вітка гіперболи $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y-7)^2}{9}=-1$, що розміщена під прямою $y-7=0$ (рис. 6.12);

4) вітка гіперболи $\frac{(x-9)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$, що розміщена ліворуч від прямої $x-9=0$ (рис. 6.13).

6.115. $x=\frac{1}{4}y^2-y+7$.

6.116. $y=\frac{1}{8}x^2-x+3$.

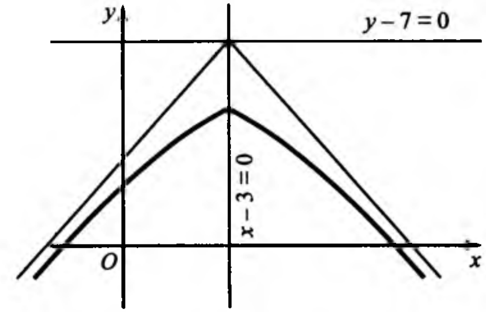


Рис. 6.12

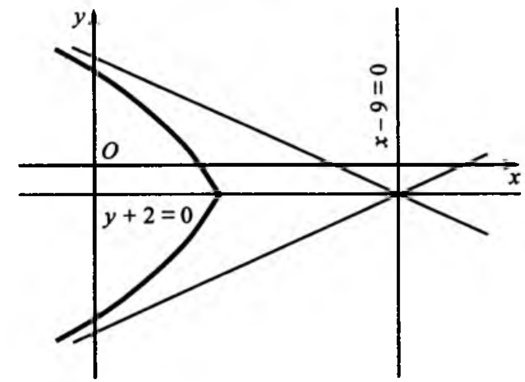


Рис. 6.13

6.117. F (9; –8).

6.118. 1) частина параболи $(y-3)^2=16(x-1)$, що розміщена під прямою $y-3=0$ (рис. 6.14);

2) частина параболи $(x+4)^2=9(y+5)$, що розміщена праворуч від прямої $x+4=0$ (рис. 6.15);

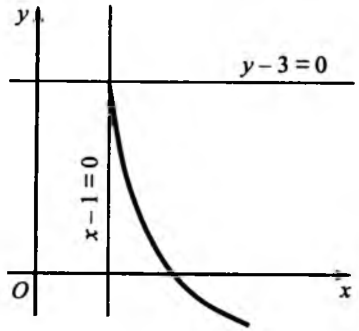


Рис. 6.14

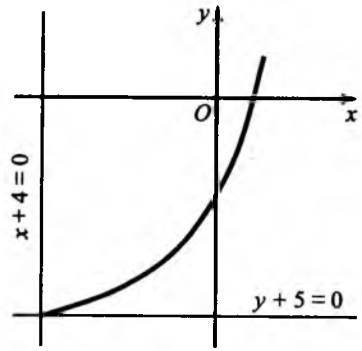


Рис. 6.15

3) частина параболи $(x-2)^2 = -2(y-3)$, що розміщена ліворуч від прямої $x-2=0$ (рис. 6.16);

4) частина параболи $(y+5)^2 = -3(x+7)$, що розміщена під прямою $y+5=0$ (рис. 6.17).

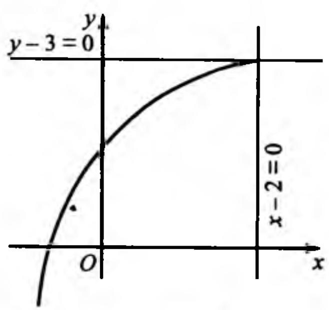


Рис. 6.16

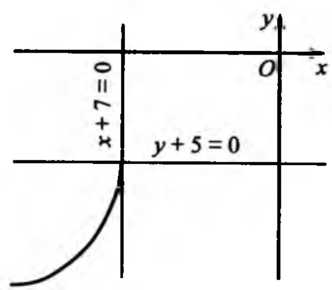


Рис. 6.17

6.119. $(y+4)^2 = -4(x+2)$.

6.120. 40 см.

6.121. $90y = x^2$.

6.122. $p = 12$.

6.123. $p = 2\frac{2}{3}$.

6.124. $h = 5$ м.

6.125. Скласти рівняння кола, яке дотикається до двох паралельних прямих $2x+y-5=0$ і $2x+y+15=0$, причому до однієї з них — у точці A (2; 1).

6.126. Скласти рівняння кіл, які проходять через точку A (1; 0) і дотикаються до двох паралельних прямих $2x+y+2=0$ і $2x+y-18=0$.

6.127. Скласти рівняння кола, яке дотикається до двох паралельних прямих $4x-3y+10=0$ і $4x-3y-30=0$ і центр якого належить прямій $2x+y=0$.

6.128. Скласти рівняння кіл, які проходять через точку A (–1; 5) і дотикаються до двох прямих $3x+4y-35=0$, $4x+3y+14=0$, що перетинаються.

6.129. Написати рівняння кіл, які дотикаються до трьох прямих $3x+4y-35=0$, $3x-4y-35=0$, $x-1=0$.

6.130. Визначити, за яких значень кутового коефіцієнта k пряма $y = kx$:

1) перетинає коло $x^2+y^2-10x+16=0$;
2) дотикається до цього кола;
3) проходить поза цим колом.

6.131. Скласти рівняння еліпса, якщо відомі його ексцентриситет $e = \frac{2}{3}$, фокус $F(2; 1)$ і рівняння відповідної директриси $x-5=0$.

6.132. Визначити, за яких значень m пряма $y = -x+m$:

1) перетинає еліпс $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$;
2) дотикається до нього;
3) проходить поза еліпсом.

6.133. На еліпсі $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ знайти точку M, яка була б найменш віддаленою від прямої $4x-2y+23=0$, і обчислити відстань між ними.

6.134. Визначити точки перетину еліпса $25x^2+36y^2-900=0$ і кола $x^2+y^2=R^2$. Дослідити, скільки буде таких точок залежно від значення радіуса і як вони будуть розміщені.

6.135. Визначити умови, за яких асимптоти гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ взаємно перпендикулярні.

6.136. Фокуси гіперболи збігаються з фокусами еліпса $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$. Скласти рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет $e = 2$.

6.137. Довести, що відстань від фокуса гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ до її асимптоти дорівнює b.

6.138. Визначити, за яких значень m пряма $y = \frac{5}{2}x + m$:

1) перетинає гіперболу $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$;
2) дотикається до неї;
3) проходить поза гіперболою.

6.139. На гіперболі $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{18} = 1$ знайти точку M, найближчу до прямої $3x + 2y + 1 = 0$, і обчислити відстань від цієї точки до заданої прямої.

6.140. Скласти рівняння гіперболи, відстань між вершинами якої дорівнює 24, а фокуси мають координати (–10; 2) і (16; 2).

6.141. Знайти геометричне місце середин фокальних радіусів, проведених з правого фокуса до всіх точок гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

6.142. Скласти найпростіше рівняння параболи, фокус якої міститься у точці перетину прямої $2x - 5y - 8 = 0$ з віссю Ox.

6.143. Скласти рівняння параболи, якщо її вершина лежить у точці A (–4; 5), а фокус — у точці B (–2; 5). Написати рівняння її осі і директриси.

6.144. Скласти рівняння параболи, яка проходить через точку перетину прямої $y = x$ і кола $x^2 + y^2 - 10y = 0$, симетрично осі Oy.

6.145. Довести, що дві параболи, які мають спільну вісь і спільний фокус, розміщений між їхніми вершинами, перетинаються під прямим кутом.

6.146. Довести, що коли дві параболи зі взаємно перпендикулярними осями перетинаються у чотирьох точках, то ці точки належать одному колу.

6.147. З фокуса параболи $y^2 = 12x$ під гострим кутом α до осі Ox спрямований промінь світла. Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$. Скласти рівняння прямої, на якій лежить відбитий від параболи промінь.

6.148. Орбіта земної кулі — еліпс, в одному з фокусів якого міститься Сонце. Відомо, що ексцентриситет цього еліпса $e = 0{,}017$, а піввісь $a = 150 \cdot 10^6$ км. Знайти, на скільки найкоротша відстань від Землі до Сонця (це має місце в грудні) коротша за найдовшу (у червні).

6.149. За даними деяких гідравліків виявляється, що коли на відповідних глибинах відкласти праворуч від осі Oy горизонтальні відрізки, які дорівнюють швидкості води у річці на цих глибинах, то вийде парабола з горизонтальною віссю симетрії. При цьому вершина параболи лежить на глибині однієї третьої глибини річки. Знаючи швидкість a на поверхні і найбільшу швидкість b, знайти швидкість біля дна.

6.150. Параболічне дзеркало рефлектора Симеїзької обсерваторії в Криму з діаметром 1,02 м має фокусну відстань 5 м. Знайти глибину параболічної виїмки, яку мали зробити при виготовленні дзеркала із плоского скла.

6.151. Дзеркало автомобільного ліхтаря має форму параболи (у розрізі). Знайти рівняння цієї параболи, вважаючи, що діаметр ліхтаря 20 см, глибина 15 см. Вісь Ox — вісь ліхтаря. Початок координат у глибині дзеркала.

6.152. Навколо початку координат обертається стержень $OP = p$ з кутовою швидкістю ω, а навколо P — другий стержень $PQ = q$ з кутовою швидкістю — ω. Знайти траєкторію точки Q, якщо спочатку обидва стержні збігалися з віссю Ox і точка P містилась між O і Q. Розглянути випадки: $p > q, p < q, p = q$.

6.153. З лівого фокуса еліпса $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ під тупим кутом α до осі Ox напрямлений промінь світла. Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha = -2$. Скласти рівняння прямої, на якій лежить відбитий від еліпса промінь світла.

Відповіді

6.125. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 20$.

6.126. $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 20$ і $\left(x - \frac{9}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{22}{5}\right)^2 = 20$.

6.127. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$.

6.128. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ і $\left(x + \frac{202}{49}\right)^2 + \left(y - \frac{349}{49}\right)^2 = \left(\frac{185}{49}\right)^2$.

6.129. $(x-5)^2+y^2=16,\ (x+15)^2+y^2=256,$

$$\left(x-\frac{35}{3}\right)^2+\left(y-\frac{40}{3}\right)^2=\left(\frac{32}{3}\right)^2,$$

$$\left(x-\frac{35}{3}\right)^2+\left(y+\frac{40}{3}\right)^2=\left(\frac{32}{3}\right)^2.$$

6.130. 1) $|k|<\frac{3}{4}$; 2) $k=\pm\frac{3}{4}$; 3) $|k|>\frac{3}{4}$.

6.131. $5x^2+9y^2+4x-18y-55=0.$

6.132. 1) $|m|<5$; 2) $m=\pm5$; 3) $|m|>5$.

6.133. $M(-3;\,2)$, $\sqrt{13}$.

6.134. При $R=5$ дві точки перетину: $(0;\,-5)$ і $(0;\,5)$,
при $R=6$ дві точки перетину: $(-6;\,0)$ і $(6;\,0)$,
при $5<R<6$ чотири точки перетину: $\left(6\sqrt{\frac{R^2-25}{11}};\ 5\sqrt{\frac{36-R^2}{11}}\right)$,

$$\left(6\sqrt{\frac{R^2-25}{11}};\ -5\sqrt{\frac{36-R^2}{11}}\right),\ \left(-6\sqrt{\frac{R^2-25}{11}};\ 5\sqrt{\frac{36-R^2}{11}}\right),$$

$$\left(-6\sqrt{\frac{R^2-25}{11}};\ -5\sqrt{\frac{36-R^2}{11}}\right).$$

6.135. $a=b$.

6.136. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1.$

6.138. 1) $|m|>4{,}5$; 2) $m=\pm4{,}5$; 3) $|m|<4{,}5$.

6.139. $M(-6;\,3)$, $\frac{11}{\sqrt{13}}$.

6.140. $\frac{(x-3)^2}{144}-\frac{(y-2)^2}{25}=1.$

6.141. Гіпербола $\dfrac{\left(x-\frac{c}{2}\right)^2}{\frac{a^2}{4}}-\dfrac{y^2}{\frac{b^2}{4}}=1.$

6.142. $y^2=16x$.

6.143. $(y-5)^2=8(x+4)$, вісь: $y=5$, директриса: $x=-6$.

6.144. $x^2=5y$.

6.147. $y-18=0$.

6.148. $5{,}1\cdot10^6$ км.

6.149. $V=4a-3b$.

6.150. 13 мм.

6.151. $y^2=\frac{20x}{3}$.

6.152. $\frac{x^2}{(p+q)^2}+\frac{y^2}{(p-q)^2}=1.$

При $p>q$ точка Q рухається уздовж еліпса проти годинникової стрілки;

при $p<q$ точка рухається за годинниковою стрілкою;

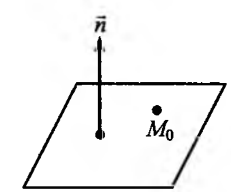
при $p=q$ точка Q під час повного обертання стержня OP опише двічі відрізок осі Ox довжиною 2 $(p+q)$.

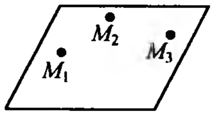
6.153. $2x+11y-10=0$.

§ 7. Аналітична геометрія у просторі

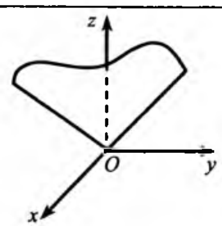
1. Площина у просторі

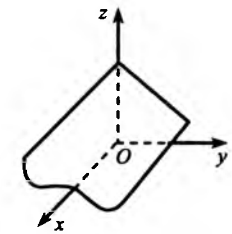
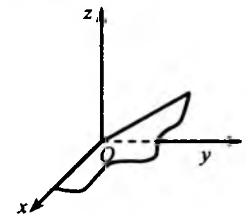
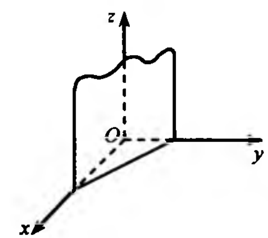
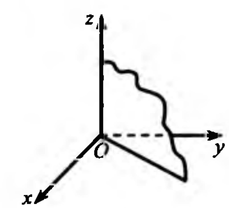
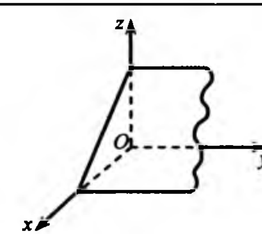
ВИДИ РІВНЯНЬ ПЛОЩИНИ

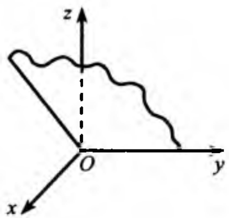
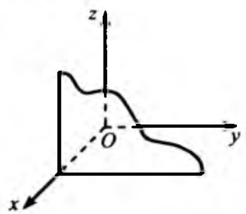
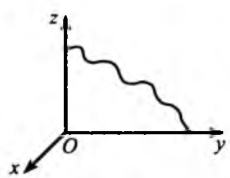
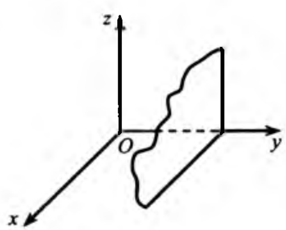
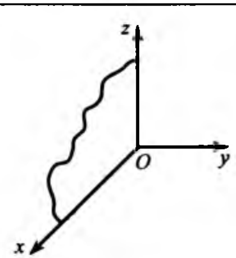
Вихідні дані	Вид рівняння	Назва рівняння
$M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$ — точка площини; $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ — вектор нормалі площини	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+$ $+C(z-z_0)=0$	Рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\vec{n}$
	$Ax+By+Cz+D=0$	Загальне рівняння площини

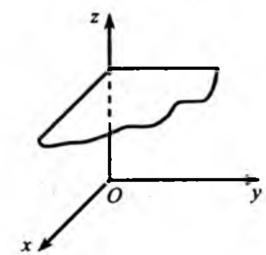
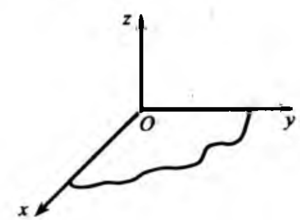
Вихідні дані	Вид рівняння	Назва рівняння
$M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$ — три точки площини  	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$	Рівняння площини, що проходить через три точки
$A(a;\ 0;\ 0)$; $B(0;\ b;\ 0)$; $C(0;\ 0;\ c)$ — точки перетину площини з координатними осями  	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$	Рівняння площини у відрізках на осях
p — відстань від початку координат до площини; $\vec{n}_0=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\cos\beta+$ $+\vec{k}\cos\gamma$ — орт вектора нормалі площини	$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$	Нормальне рівняння площини

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕПОВНОГО РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

Рівняння	Геометричне зображення (рисунки зроблені в першому октанті)	Характеристика
$Ax+By+Cz=0$	 	Площина проходить через початок координат

Рівняння	Геометричне зображення (рисунки зроблені в першому октанті)	Характеристика
$By+Cz+D=0$	 	Площина паралельна осі Ox
$By+Cz=0$	 	Площина проходить через вісь Ox
$Ax+By+D=0$	 	Площина паралельна осі Oz
$Ax+By=0$	 	Площина проходить через вісь Oz
$Ax+Cz+D=0$	 	Площина паралельна осі Oy

Рівняння	Геометричне зображення (рисунки зроблені в першому октанті)	Характеристика
$Ax + Cz = 0$		Площина проходить через вісь Oy
$Ax + D = 0$		Площина паралельна координатній площині Oyz
$x = 0$		Координатна площина Oyz
$By + D = 0$		Площина паралельна координатній площині Oxz
$y = 0$		Координатна площина Oxz

Рівняння	Геометричне зображення (рисунки зроблені в першому октанті)	Характеристика
$Cz + D = 0$		Площина паралельна координатній площині Oxy
$z = 0$		Координатна площина Oxy

7.01. Задані точки A (–1; 0; 2), B (1; 2; 6), C (0; 0; 3), D (1; –1; 4). Визначити, які з них належать площині $x - 2y + 3z - 15 = 0$.

7.02. Визначити координати будь-яких трьох точок, які належать площині $3x + y + 2z + 5 = 0$.

7.03. Записати будь-який нормальний вектор площини $2x - y - 3z + 5 = 0$.

7.04. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M (0; –1; 2) перпендикулярно до вектора $\vec{n} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. Побудувати цю площину.

7.05. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(1; 2; -1)$ перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_2}$, якщо $M_2(0; -1; 2)$.

7.06. Написати загальне рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1; 1; 2)$, $M_2(0; -1; 1)$, $M_3(1; -1; 0)$.

7.07. Скласти рівняння площини, що проходить через точку A (1; –1; –2) паралельно площині $3x - y + z - 1 = 0$.

7.08. Скласти рівняння і побудувати площину, що проходить:

1) через точку $M_0(1; 1; -2)$ паралельно площині Oxy;

2) через точку $M_1(1; -1; 3)$ паралельно площині Oyz;

3) через точку $M_2(0; 1; -1)$ паралельно площині Oxz.

7.09. Скласти рівняння і побудувати площину, що проходить:

1) через вісь Ox і точку $M_0(1; 5; 1)$;

2) через вісь Oy і точку $M_1(-1; 2; 1)$;

3) через вісь Oz і точку $M_2(9; 1; -1)$.

7.10. Загальне рівняння площини $3x-5y+2z-9=0$ записати у відрізках на осях. Побудувати площину.

7.11. Знайти площу трикутника, який площина $3x-2y+5z-12=0$ відтинає від координатного кута Oyz.

7.12. Обчислити об'єм піраміди, обмеженої площиною $2x-3y+6z-12=0$ і координатними площинами.

7.13. Визначити, які з наступних рівнянь площини є нормальними:

1) $\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z-5=0$;

2) $\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z-2=0$;

3) $\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z+5=0$;

4) $z+5=0$;

5) $x-15=0$.

7.14. Знайти відстань від точки A $(-1; 1; 4)$ до площини $8x-y+z-5=0$.

7.15. Визначити кути між площинами:

1) $4x-5y+3z-1=0$ і $x-4y-z+9=0$;

2) $6x+2y-4z+17=0$ і $9x+3y-6z-4=0$;

3) $4x+2y-4z+5=0$ і $2x+y-2z-1=0$;

4) $2x+5y-z=0$ і $x+2z-8=0$.

Відповіді

7.01. Точки B і D належать площині.

7.02. $\left(-\frac{5}{3}; 0; 0\right)$, $(0; -5; 0)$, $\left(0; 0; -\frac{5}{2}\right)$.

7.03. $\vec{n}=(2; -1; -3)$.

7.04. $x-y+2z-5=0$.

7.05. $x+3y-3z-10=0$.

7.06. $x-y+z-2=0$.

7.07. $3x-y+z-2=0$.

7.08. 1) $z+2=0$; 2) $x-1=0$; 3) $y-1=0$.

7.09. 1) $y-5z=0$; 2) $x+z=0$; 3) $x-9y=0$.

7.10. $\frac{x}{3}+\frac{y}{-\frac{9}{5}}+\frac{z}{\frac{9}{2}}=1$.

7.11. 7,2 од^2.

7.12. 8 од^3.

7.13. 1) і 5) — нормальні рівняння площини.

7.14. $\frac{10}{\sqrt{66}}$.

7.15. 1) $\theta=\arccos 0,7$; 2) $\theta=0$, площини паралельні;

3) $\theta=0$, площини паралельні;

4) $\theta=\frac{\pi}{2}$, площини перпендикулярні.

Б

7.16. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(3; 4; -5)$ паралельно двом векторам $\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ і $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.

7.17. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1; 1; 0)$ і $M_2(0; -1; 2)$ паралельно вектору $\vec{a}=(1; 2; 3)$.

7.18. Скласти рівняння площини, що проходить через точку A $(1; 1; 1)$ перпендикулярно до двох площин — $2x-y+z+1=0$ і $x=0$.

7.19. Переконатися, що три площини — $x-2y+z-7=0$, $2x+y-z+2=0$, $x-3y+2z-11=0$ мають одну загальну точку. Обчислити її координати.

7.20. Скласти рівняння і побудувати площину, що проходить:

1) через точки $M_1(1; 2; 3)$ і $M_2(0; -1; 1)$ паралельно осі Ox;

2) через точки $P_1(1; 1; 1)$ і $P_2(2; 0; 1)$ паралельно осі Oy;

3) через точки $Q_1(-1; 0; 1)$ і $Q_2(2; 1; 0)$ паралельно осі Oz.

7.21. Скласти рівняння площини, що проходить через точку P (7; –5; 1) і відтинає на координатних осях додатні і рівні між собою відрізки.

7.22. Площина відтинає на координатних осях відрізки $a=11$, $b=55$, $c=10$. Обчислити напрямні косинуси вектора, перпендикулярного до цієї площини.

7.23. Скласти рівняння площини, яка відтинає на координатних осях Ox і Oy відрізки $a=3$, $b=-2$ і паралельна вектору $\vec{e}=(2;1;-1)$.

7.24. Скласти рівняння площини, яка відтинає на координатних осях Ox і Oy відрізки $a=-2$, $b=\dfrac{2}{3}$ і перпендикулярна до площини $2x-2y+4z-5=0$.

7.25. Обчислити відстань d між двома паралельними площинами $6x-18y-9z-28=0$ і $4x-12y-6z-7=0$.

7.26. Дві грані куба лежать на площинах $2x-2y+z-1=0$, $2x-2y+z+5=0$. Обчислити об'єм цього куба.

7.27. Визначити, за яких значень l і m площини $2x+ly+3z-5=0$, $mx-6y-6z+2=0$:

1) паралельні; 2) перпендикулярні?

7.28. Положення дзеркала визначається рівнянням $3x+y-2z=0$. З якою точкою суміщається дзеркальне зображення точки A (1; 3; – 4)?

Б Відповіді

7.16. $x+4y+7z+16=0$.

7.17. $2x-y-1=0$.

7.18. $y+z-2=0$.

7.19. $M_0(1;-2;2)$.

7.20. 1) $2y-3z+5=0$; 2) $z-1=0$; 3) $x-3y+1=0$.

7.21. $x+y+z-3=0$.

7.22. $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$; $\cos\beta=\dfrac{2}{15}$; $\cos\gamma=\dfrac{11}{15}$.

7.23. $2x-3y+z-6=0$.

7.24. $x-3y-2z+2=0$.

7.25. $d=\dfrac{5}{6}$.

7.26. 8 од^3.

7.27. 1) $l=3$, $m=-4$;

2) при значеннях l і m, які задовольняють рівняння $m-3l-9=0$.

7.28. B (–5; 1; 0).

В

7.29. Довести, що рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ паралельно двом векторам $\vec{a}=(l_1;m_1;n_1)$ і $\vec{b}=(l_2;m_2;n_2)$, має вигляд: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$

7.30. Довести, що рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$ паралельно вектору $\vec{a}=(l_1;m_1;n_1)$, має вигляд: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}=0.$

7.31. Довести, що рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно до площин $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, має вигляд: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=0.$

7.32. Довести, що рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$ перпендикулярно до площини $Ax+By+Cz+D=0$, має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0.$$

7.33. Три грані піраміди $CAOB$, розміщеної у другому октанті $(x\geq 0;\ y\leq 0;\ z\geq 0)$, збігаються з координатними площинами. Скласти рівняння четвертої її грані, якщо відомі довжини ребер: $AB=6$, $BC=\sqrt{29}$, $CA=5$.

7.34. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від точки M (1; –2; 0) і площини $3x-2y+6z-9=0$.

7.35. Знайти точку, симетричну з початком координат відносно площини $6x+2y-9z+121=0$.

7.36. Написати рівняння площин, які ділять навпіл двогранні кути між площинами $3x-y+7z-4=0$ і $5x+3y-5z+2=0$.

7.37. Написати рівняння площин, паралельних до площини $3x-6y-2z+14=0$ і віддалених від неї на відстань трьох одиниць.

7.38. Написати рівняння площини, яка ділить навпіл той двогранний кут між площинами $2x-14y+6z-1=0$, $3x+5y-5z+3=0$, в якому лежить початок координат.

7.39. Визначити параметри a і b площин $2x-y+3z-1=0$, $x+2y-z+b=0$, $x+ay-6z+10=0$, при яких:

1) площини проходять через одну пряму;
2) перетинаються по трьох різних паралельних прямих.

Відповіді

7.33. $\frac{x}{4}-\frac{y}{2\sqrt{5}}+\frac{z}{3}=1$.

7.34. (0; 0; –2), $\left(0;\,0;\,-6\frac{4}{13}\right)$.

7.35. (–12; –4; 18).

7.36. $x+2y-6z+3=0$, $4x+y+z-1=0$.

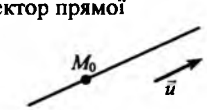
7.37. $3x-6y-2z+35=0$, $3x-6y-2z-7=0$.

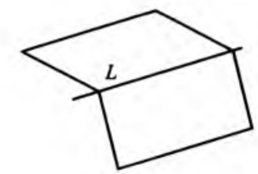
7.38. $8x-4y-4z+5=0$.

7.39. 1) $a=7, b=3$; 2) $a=7, b\neq 3$.

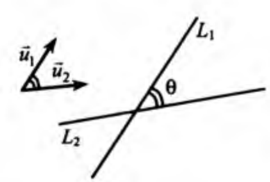
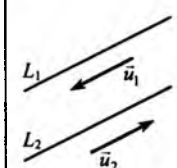
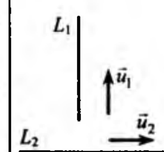
2. Пряма лінія у просторі

ВИДИ РІВНЯНЬ ПРЯМОЇ У ПРОСТОРІ

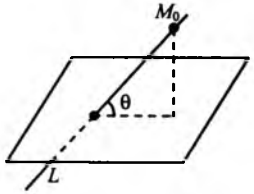
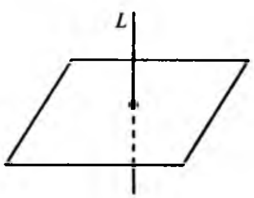
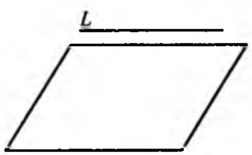
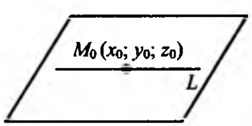
Вихідні дані	Вид рівняння	Назва рівняння
$M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$ — точка прямої; $\vec{u}=(l;\,m;\,n)$ — напрямний вектор прямої 	$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{u}$	Векторне рівняння прямої
	$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$	Канонічні рівняння прямої
	$\begin{cases}x=x_0+tl;\\ y=y_0+tm;\\ z=z_0+tn, \quad -\infty<t<+\infty\end{cases}$	Параметричні рівняння прямої

Вихідні дані	Вид рівняння	Назва рівняння
$M_1(x_1;\,y_1;\,z_1)$, $M_2(x_2;\,y_2;\,z_2)$ — дві точки прямої 	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$	Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки
$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ — площини, лінією перетину яких є пряма 	$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases};$	Загальні рівняння прямої

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ

Вихідні дані	Кут між прямими	Умова паралельності прямих	Умова перпендикулярності прямих
$\vec{u}_1=(l_1;\,m_1;\,n_1)$, $\vec{u}_2=(l_2;\,m_2;\,n_2)$ — напрямні вектори прямих L_1 і L_2	 $\cos\theta=\frac{(\vec{u}_1,\vec{u}_2)}{\lvert\vec{u}_1\rvert\lvert\vec{u}_2\rvert}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$	 $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$	 $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ І ПЛОЩИНИ $Ax+By+Cz+D=0$

Взаємне розміщення прямої і площини	Основні характеристики	Аналітичний вираз характеристики
Пряма перетинає площину 	Кут θ між прямою і площиною Координати x, y, z точки перетину прямої з площиною	$\sin\theta=\frac{\lvert Al+Bm+Cn\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ $\begin{cases} x=x_0+tl; \\ y=y_0+tm; \\ z=z_0+tn; \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$
Пряма перпендикулярна до площини 	Умова перпендикулярності прямої і площини	$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$
Пряма паралельна площині 	Умова паралельності прямої і площини	$Al+Bm+Cn=0$
Пряма належить площині 	Умова належності прямої до площини	$\begin{cases} Ax_0+By_0+Cz_0+D=0; \\ Al+Bm+Cn=0 \end{cases}$

7.40. Скласти параметричні і канонічні рівняння прямої, яка проходить через точки A (1; 2; –3) і B (0; –1; 4).

7.41. Скласти параметричні і канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1;-1;1)$ паралельно:

1) вектору $\vec{a}=(2;3;1)$;

2) прямій $x=-1+t$, $y=3+2t$, $z=-t$;

3) осі Ox;

4) осі Oy.

7.42. Визначити точки перетину прямої, що проходить через точки $M_1(-6;6;-5)$ і $M_2(12;-6;1)$ з координатними площинами.

7.43. Скласти параметричні рівняння медіани трикутника ABC, проведеної з вершини C, якщо A (3; 6; –7), B (–5; 2; 3), C (4; –7; –2).

7.44. Скласти канонічні рівняння прямої $\begin{cases} x-2y+3z-4=0; \\ 3x+2y-5z-4=0. \end{cases}$

7.45. Скласти параметричні рівняння прямої, що проходить через точку M (2; 3; –5) паралельно прямій $\begin{cases} 3x-y+2z-7=0; \\ x+3y-2z+3=0. \end{cases}$

7.46. Знайти гострий кут θ між прямими: $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$, $\begin{cases} x=-2+t; \\ y=3+t; \\ z=-5+\sqrt{2}t. \end{cases}$

7.47. Визначити тупий кут θ між прямими $\begin{cases} x-y-4z-5=0; \\ 2x+y-2z-4=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x=\frac{1}{7}+6t; \\ y=\frac{5}{14}+3t; \\ z=-2t. \end{cases}$

7.48. Довести перпендикулярність прямих $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$, $\begin{cases}3x+y-5z+1=0;\\2x+3y-8z+3=0.\end{cases}$

7.49. Довести паралельність прямих $\begin{cases}x=2t+5;\\y=-t+2;\\z=t-7,\end{cases}$ $\begin{cases}x+3y+z+2=0;\\x-y-3z-2=0.\end{cases}$

7.50. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ і площини $2x+3y+z-1=0$.

7.51. Довести, що пряма $x=3t-2$, $y=-4t+1$, $z=4t-5$ паралельна площині $8x-6y-12z-1=0$.

7.52. Довести, що пряма $\begin{cases}5x-3y+2z-5=0;\\2x-y-z-1=0\end{cases}$ лежить на площині $4x-3y+7z-7=0$.

7.53. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1;\,2;\,-3)$ перпендикулярно до площини $3x-2y+7z+4=0$.

7.54. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1;-2;3)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}$.

7.55. Обчислити відстань від точки A (2; 3; –1) до прямої $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}$.

7.56. Знайти рівняння і довжину висоти піраміди $SABC$, опущеної з вершини S, якщо A (1; 0; 0), B (0; 1; 0), C (0; 0; 1), S (–1; 1; –1).

7.57. Задані рівняння руху точки $M(x;\,y;\,z)$: $x=3-4t$, $y=5+3t$, $z=-2+12t$. Визначити її швидкість.

7.58. Задані рівняння руху точки $M(x;\,y;\,z)$: $x=5-2t$, $y=-3+2t$, $z=5-t$. Визначити шлях S, пройдений точкою за проміжок часу від $t=0$ до $t=7$.

7.59. Скласти рівняння руху точки $M(x;\,y;\,z)$, яка з початкового положення $M_0(3;\,-1;\,-5)$ рухається прямолінійно і рівномірно у напрямі вектора $\vec{S}=(-2;\,6;\,3)$ зі швидкістю $V=21$.

Відповіді

7.40. $\begin{cases}x=1-t;\\y=2-3t;\\z=-3+7t,\end{cases}$ $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{7}$.

7.41. 1) $x=1+2t$, $y=-1+3t$, $z=1+t$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{1}$;

2) $x=1+t$, $y=-1+2t$, $z=1-t$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$;

3) $x=1+t$, $y=-1$, $z=1$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{0}$;

4) $x=1$, $y=-1$, $z=1+t$, $\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{1}$.

7.42. (9; –4; 0), (3; 0; –2), (0; 2; –3).

7.43. $x=4+5t$, $y=-7-11t$, $z=-2$.

7.44. $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}$.

7.45. $x=2+2t$, $y=3-4t$, $z=-5-5t$.

7.46. $\theta=\frac{\pi}{3}$.

7.47. $\cos(180^\circ-\theta)=\frac{4}{21}$, $\theta\approx101^\circ$.

7.50. (2; –3; 6).

7.53. $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{7}$.

7.54. $2x-3y+4z-20=0$.

7.55. 21.

7.56. $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{1}$, $h=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

7.57. $V=13$.

7.58. $S=21$.

7.59. $x=3-6t$, $y=-1+12t$, $z=-5+9t$.

7.60. Довести, що прямі $\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-5}{4}$ і $\frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$ перетинаються, і визначити координати точки перетину.

7.61. Записати рівняння перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму $\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{2}$.

7.62. Записати канонічні рівняння спільного перпендикуляра двох прямих: $\begin{cases} x=-7+3t; \\ y=4-2t; \\ z=4+3t \end{cases}$ і $\begin{cases} x=1+t; \\ y=-8+2t; \\ z=-12-t. \end{cases}$

7.63. Визначити проекцію точки P (5; 2; –1) на площину: $2x-y+3z+23=0$.

7.64. Визначити проекцію точки P (2; –1; 3) на пряму $x=3t$, $y=-7+5t$, $z=2+2t$.

7.65. Задані вершини трикутника A (1; –2; –4), B (3; 1; –3) і C (5; 1; –7). Скласти параметричні рівняння висоти трикутника, опущеної з вершини B.

7.66. Скласти рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$, $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$.

7.67. Визначити точку Q, симетричну з точкою P (4; 1; 6) відносно прямої $\begin{cases} x-y-4z+12=0; \\ 2x+y-2z+3=0. \end{cases}$

7.68. Визначити відстань d між двома паралельними прямими: $\begin{cases} 2x+2y-z-10=0; \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x=3t-7; \\ y=-t+5; \\ z=4t+9. \end{cases}$

7.69. При якому значенні C пряма $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0; \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$ паралельна площині $2x-y-Cz-2=0$?

7.70. При яких значеннях l і C пряма $\frac{x-2}{l}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна до площини $3x-2y+Cz+1=0$?

7.71. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1;2;-3)$ паралельно прямим $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3}$, $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}$.

7.72. Точка $M(x;y;z)$ рухається прямолінійно і рівномірно з початкового положення $M_0(11;-21;20)$ у напрямі вектора $\vec{S}=(-1;2;-2)$ із швидкістю V = 12. Визначити, за який час вона пройде відрізок траєкторії, обмежений двома паралельними площинами $2x+3y+5z+31=0$, $2x+3y+5z-41=0$.

7.73. Точка $M(x;y;z)$ рухається прямолінійно і рівномірно з початкового положення $M_0(20;-18;-32)$ у напрямі, протилежному вектору $\vec{S}=(3;-4;-12)$ з швидкістю V = 26. Скласти рівняння руху точки M і визначити точку M_1, з якою вона збігається в момент часу $t=3$.

Відповіді

7.60. (–3; 5; –3).

7.61. $\frac{x}{33}=\frac{y}{-26}=\frac{z}{27}$.

7.62. $\frac{x+5}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z}{-4}$.

7.63. (1; 4; – 4).

7.64. (3; –2; 4).

7.65. $x=3+3t$, $y=1+15t$, $z=-3+19t$.

7.66. $6x-20y-11z+1=0$.

7.67. Q (2; –3; 2).

7.68. $d=25$.

7.69. $C=-2$.

7.70. $l=-6$, $C=\frac{3}{2}$.

7.71. $9x+11y+5z-16=0$.

7.72. $t=3$.

7.73. $x=20-6t$, $y=-18+8t$, $z=-32+24t$, $M_1(2;6;40)$.

7.74. Написати канонічні рівняння бісектриси кута A трикутника, визначеного вершинами A (4; 1; –2), B (2; 0; 0), C (–2; 3; –5).

7.75. На прямій $\begin{cases} x+2y+z-1=0; \\ 3x-y+4z-29=0 \end{cases}$ визначити точку, рівновіддалену від точок A (3; 11; 4) і B (–5; –13; –2).

7.76. Задано куб, ребро якого дорівнює одиниці. Обчислити відстань d від вершини куба до його діагоналі, яка не проходить через цю вершину.

7.77. Довести, що рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ і $\frac{x-x_2}{l}=\frac{y-y_2}{m}=\frac{z-z_2}{n}$, має вигляд: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0.$

7.78. Довести, що рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ паралельно прямій $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$, має вигляд: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}=0.$

7.79. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точку M (3; –2; – 4) паралельно площині $3x-2y-3z-7=0$ і перетинає пряму $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}$.

7.80. Скласти параметричні рівняння прямої, що проходить паралельно площинам $3x+12y-3z-5=0$, $3x-4y+9z+7=0$ і перетинає прямі $\frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{3}$, $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$.

7.81. На прямій $\begin{cases} x+2y+z-1=0; \\ 3x-y+4z-29=0 \end{cases}$ визначити точку, рівновіддалену від точок A (3; 11; 4) і B (–5; –13; –2).

7.82. Знайти найкоротшу відстань між двома прямими, які не перетинаються: $\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}$ і $\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}$.

7.83. Обчислити відстань між прямими $\frac{x+3}{4}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-3}{2}$ і $\frac{x-4}{8}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+7}{3}$.

7.84. Точки $M(x;\, y;\, z)$ і $N(x;\, y;\, z)$ рухаються прямолінійно і рівномірно: перша з початкового положення $M_0(-5;\, 4;\, -5)$ із швидкістю $V_M = 14$ у напрямі вектора $\vec{S}_1=(3;\,-6;\,2)$, друга — з початкового положення $N_0(-5;\,16;\,-6)$ з швидкістю $V_N = 13$ у напрямі, протилежному вектору $\vec{S}_2=(-4;\,12;\,-3)$. Скласти рівняння руху кожної з точок; переконатися, що їх траєкторії перетинаються, і знайти:

1) точку P перетину їх траєкторій;
2) час t_1, витрачений точкою M на переміщення від M_0 до P;
3) час t_2, витрачений точкою N на переміщення від N_0 до P.

Відповіді

7.74. $\frac{x-4}{32}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-5}$.

7.75. (2; –3; 5).

7.76. $d=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

7.79. $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z+4}{9}$.

7.80. $\begin{cases} x=8t-3; \\ y=-3t-1; \\ z=-4t+2. \end{cases}$

7.81. (2; –3; 5).

7.82. 7.

7.83. 13.

7.84. M: $x=-5+6t,\ \ y=4-12t,\ \ z=-5+4t;$
N: $x=-5+4t,\ \ y=16-12t,\ \ z=-6+3t.$
1) $P\,(7;-20;3)$;
2) $t_1=2$;
3) $t_2=3$.

3. Поверхні другого порядку

КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Назва поверхні	Канонічні рівняння
Сфера	$x^2+y^2+z^2=R^2$
Циліндр	
еліптичний	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
гіперболічний	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
параболічний	$y^2=2px\ \ (p>0)$
Конус із віссю	
Ox	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$
Oy	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$
Oz	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
Еліпсоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
Гіперболоїд	
однопорожнинний	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
двопорожнинний	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
Параболоїд	
еліптичний	$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z\ \ (p>0,\ q>0)$
гіперболічний	$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z\ \ (p>0,\ q>0)$

7.85. Скласти рівняння сфери, коли:

1) центр її міститься в точці $M_0(3;-1;5)$, а радіус $R=4$;

2) сфера проходить через початок координат і має центр у точці $M_0(-6;2;-3)$;

3) точки $A\ (-2;3;-7)$ і $B\ (4;-1;3)$ є кінцями одного з діаметрів сфери.

7.86. Визначити координати центра M_0 і радіус сфери:

1) $(x-3)^2+(y+1)^2+z^2=9$;

2) $x^2+y^2+z^2+2x-4y+8z+17=0$.

7.87. Скласти рівняння кругового циліндра, вісь якого проходить через точку $P\ (1;2;-1)$, твірна паралельна осі Oz, а радіус його напрямної дорівнює 3.

7.88. Пряма $x=b$, задана в площині Oxy, обертається навколо осі Oy. Написати рівняння описаного нею циліндра.

7.89. Які поверхні визначаються рівняннями:

1) $y^2+z^2=9$;

2) $x^2=4z$;

3) $x^2-4z^2=4$;

4) $yz=3$;

5) $9x^2+4y^2-18x-36=0$.

7.90. Скласти рівняння конуса, вершина якого міститься у початку координат, а напрямну задано рівнянням $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1;\\ y=2.\end{cases}$

7.91. Написати рівняння поверхні, утвореної обертанням гіперболи $\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;\\ x=0\end{cases}$ навколо осі Oy.

7.92. Встановити, які поверхні визначаються рівняннями:

1) $y^2=-8z$;

2) $x^2=z^2$;

3) $xz=2$;

4) $z^2+4z-2x+6=0$;

5) $x^2+y^2+z^2-4x+8y-6z+20=0$;
6) $4x^2+16y^2+z^2-24x+2z+21=0$;
7) $9x^2+4y^2-36z^2+36x+72z-36=0$;
8) $100x^2+25y^2-4z^2+16z-16=0$;
9) $3x^2-4y^2-18x-8y-24z+23=0$.

А Відповіді

7.85. 1) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=16$;
2) $(x+6)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=49$;
3) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=38$.
7.86. 1) $M_0(3;-1;0)$, $R=3$;
2) $M_0(-1;2;-4)$, $R=2$.
7.87. $(x-1)^2+(y-2)^2=9$.
7.88. $x^2+z^2=b^2$.
7.89. 1) Круговий циліндр з твірною, паралельною осі Ox;
2) параболічний циліндр з твірною, паралельною осі Oy;
3) гіперболічний циліндр з твірною, паралельною осі Oy;
4) гіперболічний циліндр з твірною, паралельною осі Ox;
5) еліптичний циліндр з твірною, паралельною осі Oz.
7.90. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$.
7.91. Двопорожнинний гіперболоїд $-\frac{x^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
7.92. 1) Параболічний циліндр з твірною, паралельною осі Ox;
2) пара площин $z=\pm x$, що перетинаються по осі Oy;
3) гіперболічний циліндр з твірною, паралельною осі Oy;
4) параболічний циліндр $(z+2)^2=2(x-1)$;
5) сфера $(x-2)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=9$;
6) еліпсоїд $\frac{(x-3)^2}{4}+y^2+\frac{(z+1)^2}{16}=1$;
7) однопорожнинний гіперболоїд $\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{y^2}{9}-(z-1)^2=1$;

8) конус $x^2+\frac{y^2}{4}-\frac{(z-2)^2}{25}=0$;
9) гіперболічний параболоїд $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{3}=2z$.

Б

7.93. Скласти рівняння сфери, яка має центр у точці $M_0(-2;-4;3)$ і дотикається до площини $2x-y+2z+3=0$.

7.94. Визначити рівняння конуса, який проектує еліпс $\begin{cases}\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1;\\ x=0,\end{cases}$ з точки (4; 0; –3).

7.95. Коефіцієнт рівномірного стиснення простору до площини Oxz дорівнює $\frac{3}{5}$. Скласти рівняння поверхні, в яку при такому стисненні перетвориться сфера $x^2+y^2+z^2=25$.

7.96. Знайти точку перетину двопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{9}=-1$ з прямою $x-3=y-1=\frac{z-6}{3}$.

7.97. Методом перерізів дослідити форму і розміщення відносно системи координат поверхні $x^2-y^2=2z$.

7.98. Доведіть, що пряма $\frac{x-3}{0}=y=\frac{7}{2}$ лежить на однопорожнинному гіперболоїді: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{4}=1$.

Б Відповіді

7.93. $(x+2)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=9$.

7.94. $18y^2+50z^2+75xz+225x=450$. (Заданий еліпс є напрямною, задана точка — вершиною шуканого еліпса.)

7.95. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{25}=1.$

7.96. $M\,(4;\ 2;\ 9)$ (пряма дотикається поверхні).

В

7.99. Знайти координати центра M_0 і радіус R кола $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25; \\ x-2y+3z-7=0. \end{cases}$

7.100. Напрямну циліндра задано рівняннями: $\begin{cases} x=y^2+z^2; \\ x=2z, \end{cases}$ твірна його перпендикулярна до площини напрямної. Скласти рівняння циліндра.

7.101. Довести, що рівняння $z^2=xy$ виражає конус з вершиною в початку координат. Методом перерізів дослідити форму і побудувати цю поверхню.

7.102. Визначити коефіцієнти k_1 і k_2 двох послідовних рівномірних стиснень простору до координатних площин Oxy і Oxz, які перетворюють сферу $x^2+y^2+z^2=25$ в еліпсоїд $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1.$

В Відповіді

7.99. $M_0\left(\frac{1}{2};-1;\frac{3}{2}\right)$, $R=\sqrt{\frac{43}{2}}.$

7.100. $(2x+z)^2-10(2x+z)+25y^2=0.$

7.102. $k_1=\frac{2}{5};\ k_2=\frac{4}{5}.$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 1

Обчислити визначник другого порядку.

1. $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$.
2. $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$.
3. $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$.
4. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$.
6. $\begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 12 & 4 \end{vmatrix}$.
7. $\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 12 \end{vmatrix}$.
8. $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 18 & 1 \end{vmatrix}$.
9. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 18 \end{vmatrix}$.
10. $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$.
11. $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}$.
12. $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$.
13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.
14. $\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$.
15. $\begin{vmatrix} -4 & 7 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$.
16. $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.
17. $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix}$.
18. $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$.
19. $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}$.
20. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$.
21. $\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$.
22. $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -16 \end{vmatrix}$.
23. $\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$.
24. $\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$.
25. $\begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 4 & -31 \end{vmatrix}$.
26. $\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -1 & 12 \end{vmatrix}$.
27. $\begin{vmatrix} 16 & 11 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$.
28. $\begin{vmatrix} 4 & -9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.
29. $\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$.
30. $\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$.

Завдання 2

Обчислити визначник третього порядку:

1) за правилом трикутника;

2) за допомогою розкладання його за елементами:

а) першого рядка;

б) третього стовпця;

3) за допомогою розкладання його за елементами деякого рядка або стовпця з попереднім застосуванням методу утворення нулів.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$. **8.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$. **9.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$. **11.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}$. **12.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$. **14.** $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix}$. **15.** $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. **17.** $\begin{vmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$. **18.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix}$. **20.** $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$. **21.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$. **23.** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$. **24.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$. **26.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$. **27.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. **29.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. **30.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

Завдання 3

Обчислити визначник четвертого порядку.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. **4.** $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 7 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \\ 5 & 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. **8.** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$

11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$

12. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 7 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \\ 5 & 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$

13. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$

14. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$

15. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

16. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$

17. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$

18. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$

19. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

20. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

21. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$

22. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 9 & 8 \end{vmatrix}.$

23. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$

24. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$

25. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$

26. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$

27. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$

28. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \end{vmatrix}.$

29. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

30. $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 4 & 2 \\ 6 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

Завдання 4

Знайти:

1) добуток матриць A і B;

2) значення многочлена $f(A)$;

3) матрицю A^{-1}, обернену до матриці A.

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad f(x)=x^2+2x-3$.

2. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad f(x)=x^2+3x-1$.

3. $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-4x+1$.

4. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-3x+1$.

5. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^2+2x+2$.

6. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-2x+2$.

7. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^2+4x-1$.

8. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-2x+1$.

9. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-2x+3$.

10. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^2+2x-2$.

11. $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^2+3x+1$.

12. $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^2+2x-1$.

13. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^2+3x-2$.

14. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^2+2x+4$.

15. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-2x-2$.

16. $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-3x-1$.

17. $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-3x+2$.

18. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^2+2x+1$.

19. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-3x+3$.

20. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-2x-3$.

21. $A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-3x+4$.

22. $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-2x-1$.

23. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-2x+4$.

24. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ -1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$, $f(x)=x^2+3x+2$.

25. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $f(x)=x^2+2x+3$.

26. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $f(x)=x^2+3x-4$.

27. $A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-3x-2$.

28. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $f(x)=x^2+2x-4$.

29. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $f(x)=x^2+3x-3$.

30. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 4 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-3x-4$.

Завдання 5

Знайти ранг матриці.

1. $\begin{pmatrix}3 & -1 & 4 & 2\\ -5 & 1 & -2 & -1\\ 1 & -1 & 6 & 3\\ 7 & -1 & 0 & 0\\ -3 & -1 & 10 & 5\end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix}2 & -4 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 3 & -2 & 4\\ 5 & 4 & 2 & 1 & -3\\ 5 & 4 & 9 & -3 & 4\end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix}3 & -10 & 6 & 6 & -9\\ 1 & -2 & 4 & 3 & -1\\ -2 & 3 & 0 & -1 & 7\\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 11 & 0 & -2 & 8\end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 4 & -1\\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0\\ 3 & -2 & 1 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 4 & 9 & 0\end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -4 & -5\\ -4 & 3 & 2 & -1 & 4\\ -5 & 5 & 5 & -5 & -1\\ 3 & -1 & 1 & -3 & -9\end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix}3 & 5 & 0 & -1\\ 2 & 0 & -5 & 6\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 5 & 6 & -6 & 9\\ 5 & 4 & -4 & 1\end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2 & 3\\ 2 & -1 & 0 & 4\\ -3 & 2 & 1 & -1\\ -2 & 3 & -1 & 6\\ 4 & -2 & 0 & 8\end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 3 & 0 & 2 & -1 & 4\\ 3 & 5 & 7 & 0 & 9\end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & -5 & -3 \\ -2 & 4 & 10 & 3 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} -8 & 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & -7 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 7 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & -1 \\ 1 & 8 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & 6 & -6 \\ -3 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 6 & -6 \\ 4 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 9 & 0 \\ 8 & -5 & -1 & 6 \\ 6 & -2 & 8 & 6 \\ -10 & 8 & 10 & -6 \\ -6 & 2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & -5 \\ -2 & -1 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 4 \\ -5 & 1 & 9 & 3 \\ 8 & -4 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & -5 & -9 & 7 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & -5 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

24. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & -3 & -9 & 3 \end{pmatrix}$.

26. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 4 & 3 \\ 3 & -7 & -2 & 1 \\ 2 & -7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -6 & -7 & 0 & 5 \\ 2 & 10 & 0 & 7 & 8 \\ 5 & -8 & -11 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 5 \\ -2 & -2 & 9 & 2 \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -8 & 10 & -1 \end{pmatrix}$.

30. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -7 & 1 & -7 \end{pmatrix}$.

Завдання 6

Знайти власні числа і власні вектори матриці.

1. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} -9 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 12 & -2 \end{pmatrix}$. 5. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. 9. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$. 11. $\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. 14. $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$. 15. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$. 17. $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$. 18. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. 20. $\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$. 21. $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. 23. $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. 24. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$. 26. $\begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. 27. $\begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$. 29. $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$. 30. $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Завдання 7

Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера.

1. $\begin{cases} 2x+3y=8; \\ 3x+2y=7. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x+5y=15; \\ x-2y=3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x+5y=21; \\ 2x-y=1. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=1; \\ 3x-5y=-3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{1}{4}x-y=-5; \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{7}y=3. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 3x-2y=\frac{1}{2}; \\ 4y-x=\frac{2}{3}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3y-x=-17; \\ 5x+3y=-5. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 11x-5y=37; \\ 4y-x=25. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x-3y=-4; \\ 4y-10x=3. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} 2x+4y=-10; \\ y-2x=-5. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 5x-3y=16; \\ 2y+3x=2. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 7x-2y=11; \\ 5x+8y=-11. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x+2y=7; \\ -2x+5y=8. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} 8x-3y=-1; \\ 7x+13y=46. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x+3y=8; \\ -5x+y=14. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} 2x-7y=-3; \\ 3y-5x=-7. \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2x+5y=17; \\ 3x+8y=27. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} -x+5y=2; \\ 3x-7y=2. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \frac{x}{2}+y=5; \\ 5x-\frac{y}{3}=19. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} 5x-3y=16; \\ 4x+5y=-2. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 13x+8y=-3; \\ x-2y=5. \end{cases}$ 22. $\begin{cases} -11x+y=27; \\ 4x+2y=2. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x-7y=15; \\ -x+5y=-13. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} 2x+9y=-2; \\ -4x+3y=-3. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 5x+2y=-3; \\ -10x+y=-4. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 7x+2y=8; \\ -x+4y=1. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x - y = 7; \\ -\dfrac{x}{2} + 3y = -10. \end{cases}$

28. $\begin{cases} -11x + 2y = -15; \\ 10x - 3y = 16. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - y = 3; \\ 2x + 5y = 7. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 3x - 11y = 12; \\ -6x + 7y = -9. \end{cases}$

Завдання 8

Розв'язати систему рівнянь:
1) за формулами Крамера;
2) матричним методом.

1. $\begin{cases} 7x + 3y - z = 2; \\ 2x - y + 2z = 7; \\ -x + y + z = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x - y + 2z = 3; \\ -2x + y - z = -2; \\ 3x - y + 4z = 10. \end{cases}$

3. $\begin{cases} -3x - y + z = -7; \\ 2x + 2y - z = 5; \\ 4x - 3y + 5z = 3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x - y + z = 6; \\ 3x + 3y - z = 6; \\ -x + 2y + 4z = 15. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x + 2y - 3z = 15; \\ -5x - y + z = -9; \\ 2x - 3y - 2z = 5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x - 2y + 3z = -5; \\ 3x + y - z = 9; \\ -2x - y + 2z = -8. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - 2y - z = 5; \\ -3x + 4y + 2z = -11; \\ 2x - y - 3z = 9. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 6x - 2y + z = 10; \\ -x + y - 2z = -1; \\ 4x - 3y + z = 5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 1; \\ -x + y - 2z = 1; \\ 4x - y + 3z = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x - 2y - 3z = -9; \\ x + 3y - z = 1; \\ 5x - 2y + 4z = 15. \end{cases}$

11. $\begin{cases} -2x + 3y + z = 8; \\ 3x - y + 2z = -5; \\ x + 3y - 3z = -2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x - 2y + z = 2; \\ 3x - 6y + z = 7; \\ -4x - y - 5z = 7. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 5x - y + 2z = -1; \\ -2x + 2y - z = 4; \\ 3x - 2y + 3z = -7. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x - y + 2z = -5; \\ -2x + 3y - z = 7; \\ 4x + 5y - 2z = 20. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x + 2y - z = -9; \\ 4x + 3y + 2z = -6; \\ x - y - 3z = -5. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x + 2y - 5z = 11; \\ -x - y + 3z = -6; \\ x + 3y - 2z = 7. \end{cases}$

17. $\begin{cases} -3x + 2y + z = -3; \\ 2x - 3y - 2z = 4; \\ 5x + y + 4z = 2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x + y - z = 7; \\ -x - z + 2y = -2; \\ y + 2x - 3z = 9. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x - y + 3z = -5; \\ z + 2y - x = 1; \\ -x - 3z + y = 7. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x - y + 2z = -1; \\ 3x + z - y = 6; \\ z - 2x - 3y = -13. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x - y + z = -3; \\ -3x + y + 2z = 0; \\ x - y - 3z = 1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 4x - 3y + z = -7; \\ x - 2y - 2z = -11; \\ -x - 3y + 3z = 4. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x - y + 3z = -4; \\ z + y - 3x = -5; \\ 2y - x - z = 1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 5x - z + 3y = 12; \\ x - y + z = 0; \\ 3x - 2z + 2y = 5. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x - y - z = 5; \\ 4x + 3z + y = -5; \\ 2z - 3x - y = -9. \end{cases}$

26. $\begin{cases} -x + 2y + 3z = 10; \\ 4x - y - z = 0; \\ z - x - y = 1. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x + y - z = 2; \\ 7x + 3y - z = 9; \\ -x - y + 2z = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} -3x - y - z = -7; \\ x + 3y + 2z = -2; \\ 3x + z - y = 9. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x - y - 3z = -1; \\ -x + 3y + z = 5; \\ 4x - y - 2z = 2. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 7x + y + 3z = 7; \\ -3x - z + 2y = 0; \\ y - 10x + z = 3. \end{cases}$

Завдання 9

Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=3; \\ -x_1+x_2+2x_3-3x_4=-10; \\ -3x_1-2x_2+x_4=-1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} -x_1+x_2+3x_3-x_4=-5; \\ 2x_1-x_3+2x_4=6; \\ 3x_1+x_2+x_3+3x_4=7; \\ x_1-2x_2-2x_3+3x_4=0; \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=3; \\ 5x_1-2x_2-4x_3+3x_4=2; \\ -x_1+4x_2+2x_3-x_4=4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4=-3; \\ -2x_1+x_2-3x_3+2x_4=-3; \\ x_1-5x_2-x_4=-12. \end{cases}$

5. $\begin{cases} -x_1+x_2-x_3+2x_4=-2; \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=3; \\ x_1-x_2+2x_3+x_4=-3; \\ -x_1+4x_2-3x_3+2x_4=2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1-2x_2+2x_3-x_4=0; \\ -x_1+3x_2-x_3+x_4=4; \\ x_1+x_2+2x_3+2x_4=7. \end{cases}$

7. $\begin{cases} -3x_1+x_2+x_4=-1; \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=3; \\ -5x_1+x_2+2x_3+x_4=1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4=4; \\ -x_1-x_2+2x_3+x_4=-3; \\ 2x_1+6x_2-6x_3-x_4=9; \\ -2x_1+3x_2-x_3+2x_4=-1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+2x_4=3; \\ -3x_1+5x_2-3x_3+4x_4=-5; \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x_1-x_2+2x_3-3x_4=-7; \\ -2x_1-3x_2+5x_4=1; \\ -x_1+2x_2-x_3-x_4=3; \\ x_1+5x_2-x_3-6x_4=2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} -2x_1-x_2+2x_3-x_4=1; \\ x_1+x_2-x_3=-1; \\ -x_1+2x_2-x_3+2x_4=3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3-2x_4=-4; \\ -x_1+2x_2-x_3+x_4=2; \\ 2x_1+x_2+2x_3-x_4=2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3+x_4=0; \\ -x_1-x_2+2x_3-x_4=-2; \\ x_1+2x_2+x_3+x_4=4; \\ 6x_1+5x_2-4x_3+4x_4=8. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3-x_4=-8; \\ 7x_1-4x_2+5x_3-5x_4=-23; \\ -x_1+2x_2-x_3+3x_4=7. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3+2x_4=1; \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=-2; \\ x_1-3x_2-3x_3+4x_4=5; \\ -2x_1+x_2+2x_3-3x_4=-3. \end{cases}$

16. $\begin{cases} -2x_1+3x_2-2x_3+3x_4=4; \\ 3x_1+x_2+x_3-2x_4=4; \\ -x_1+2x_2-x_3+x_4=2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-6; \\ 2x_1-x_2+2x_3=10; \\ x_1-3x_2+3x_3=16; \\ 5x_1+3x_3=14. \end{cases}$

18. $\begin{cases} -x_1+x_2+x_3+2x_4=6; \\ 3x_1+2x_2-x_3+x_4=1; \\ -x_1-4x_2-x_3-5x_4=-13. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=-2; \\ -x_1-3x_2+2x_3+x_4=7; \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=4; \\ 5x_1+6x_2-3x_3=-7. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4=0; \\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4=0; \\ -x_1+2x_2+x_3+x_4=6; \\ -x_1+2x_2-x_3+2x_4=3. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_4=0; \\ -2x_1-3x_2+3x_3-x_4=0; \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4=4. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=3; \\ -4x_2+7x_3=17; \\ 3x_1+x_2-x_3=-8; \\ -2x_1-2x_2+3x_3=11. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=0; \\ -2x_1-x_2+x_3-x_4=5; \\ -x_1+x_2+2x_3=5. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1-x_2-2x_3+x_4=4; \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=-1; \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=4; \\ 2x_1+4x_2+2x_3+x_4=-1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3=-7; \\ 2x_1+8x_2-x_3=23; \\ 3x_1+4x_2+x_3=16; \\ x_1+12x_2-3x_3=30. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1-3x_2+x_4=-8; \\ 2x_1-4x_2+x_3-2x_4=1; \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=9. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-4x_4=6; \\ 2x_1+3x_3-5x_4=7; \\ 4x_1-2x_2+4x_3-9x_4=13; \\ 2x_2+2x_3-x_4=1. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=0; \\ -2x_1+x_2-x_3=-1; \\ 4x_1-3x_2+5x_3=1; \\ 3x_1-2x_2+3x_3=1. \end{cases}$

29. $\begin{cases} -x_1+x_2+4x_3-x_4=5; \\ 2x_1-x_2-x_3+x_4=2; \\ -x_1+2x_2-x_4=-4. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+x_4=-6; \\ -x_1+x_2+x_4=1; \\ 3x_1+x_2-x_3-x_4=-8; \\ 4x_2-x_3+2x_4=-5. \end{cases}$

Завдання 10

Знайти значення параметра α, при якому система має ненульові розв'язки, і знайти ці розв'язки.

1. $\begin{cases} x-4y+7z=0; \\ 5x-3y+\alpha z=0; \\ -3x-5y+5z=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+\alpha y+3z=0; \\ 2x+y-z=0; \\ 5x+3y+z=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-2y-z=0; \\ \alpha x+3y-2z=0; \\ x-3y-5z=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-y+3z=0; \\ 4x+\alpha y+z=0; \\ 7x+5y-z=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+2y+\alpha z=0; \\ x+y-4z=0; \\ 2x+3y-8z=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x-6y+4z=0; \\ x+\alpha y-2z=0; \\ 5x-12y+8z=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x+6y-7z=0; \\ x+y-2z=0; \\ x-2y+\alpha z=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x+2y+3z=0; \\ \alpha x+3y+z=0; \\ 2x-y+2z=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x+2y-3z=0; \\ \alpha x-7y+4z=0; \\ x-5y+z=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} -x-2y+z=0; \\ -x+4y+z=0; \\ x+2y+\alpha z=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x+\alpha y+z=0; \\ x+2y+2z=0; \\ x+2y-3z=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x+y+z=0; \\ 3x-2y-2z=0; \\ x+y+\alpha z=0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x-y+z=0; \\ \alpha x+y-3z=0; \\ x-3y+7z=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} -2x-y+2z=0; \\ x+\alpha y+z=0; \\ x-y-3z=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x+y+6z=0; \\ x+5y+3z=0; \\ x+2y+\alpha z=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 4x+y+\alpha z=0; \\ 3x-2y+2z=0; \\ x+3y-z=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} -3x+\alpha y+z=0; \\ x+4y-z=0; \\ x-9y+z=0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} -7x-2y+z=0; \\ -2x+\alpha y-z=0; \\ x-4y+2z=0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x+2y-6z=0; \\ 2x+3y+\alpha z=0; \\ x-y-2z=0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} -2x+\alpha y+z=0; \\ -x+3y+5z=0; \\ x-3y+4z=0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 4x+y+6z=0; \\ \alpha x+3y-2z=0; \\ x-y+4z=0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} -5x-10y+z=0; \\ 2x+4y-13z=0; \\ \alpha x+2y+4z=0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \alpha x-5y+11z=0; \\ 2x+y+3z=0; \\ x+4y-z=0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 4x+\alpha y-3z=0; \\ -2x+2y-z=0; \\ x-y+3z=0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 6x+y+5z=0; \\ x+\alpha y+2z=0; \\ 3x-2y-z=0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x-y+3z=0; \\ -3x+2y-z=0; \\ -x+2y+\alpha z=0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 3x+y+z=0; \\ \alpha x+y-z=0; \\ x-3y+z=0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5x-4z=0; \\ 3x+y+\alpha z=0; \\ x+2y+2z=0. \end{cases}$

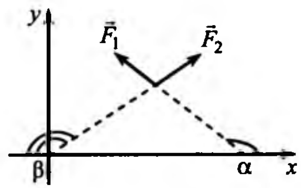
29. $\begin{cases} -x+\alpha y+2z=0; \\ 3x-3y-8z=0; \\ x-y-4z=0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 5x-6y+8z=0; \\ x+\alpha y-4z=0; \\ 8x+3y-4z=0. \end{cases}$

Завдання 11

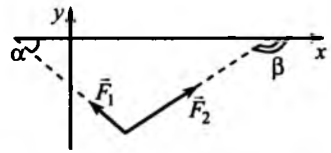
Знайти проекції R_x, R_y рівнодійної двох заданих сил.

1.



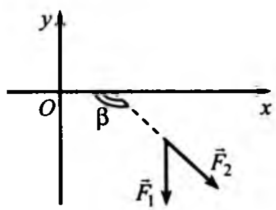
$|\overline{F_1}| = 2, |\overline{F_2}| = 4, \alpha = 135°, \beta = 150°$

2.



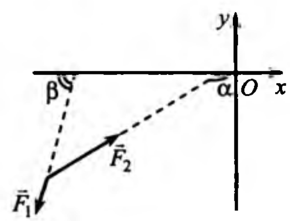
$|\overline{F_1}| = 2, |\overline{F_2}| = 3, \alpha = 45°, \beta = 150°$

3.



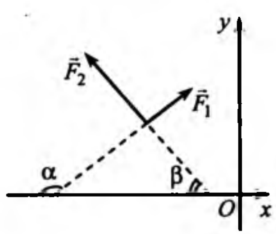
$|\overline{F_1}| = 4, |\overline{F_2}| = 6, \beta = 150°$

4.



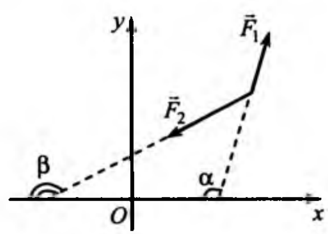
$|\overline{F_1}| = 4, |\overline{F_2}| = 3, \alpha = 150°, \beta = 60°$

5.



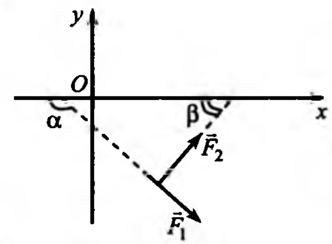
$|\overline{F_1}| = 2, |\overline{F_2}| = 6, \alpha = 150°, \beta = 45°$

6.



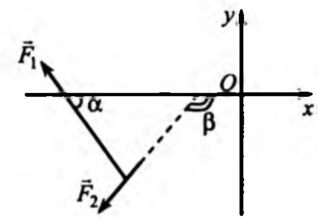
$|\overline{F_1}| = 4, |\overline{F_2}| = 3, \alpha = 120°, \beta = 150°$

7.



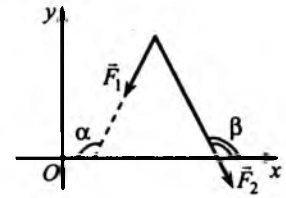
$|\overline{F_1}| = 2, |\overline{F_2}| = 3, \alpha = 135°, \beta = 60°$

8.



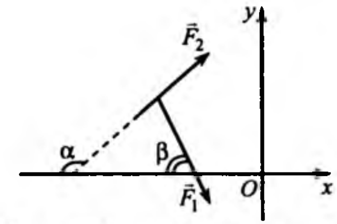
$|\overline{F_1}| = 3, |\overline{F_2}| = 1, \alpha = 45°, \beta = 150°$

9.



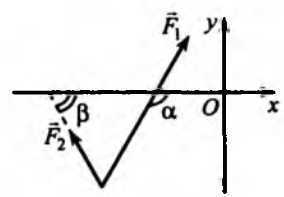
$|\overline{F_1}| = 2, |\overline{F_2}| = 5, \alpha = 135°, \beta = 120°$

10.



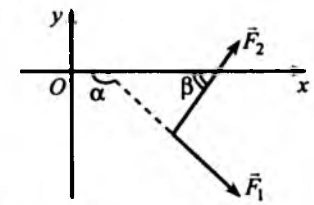
$|\overline{F_1}| = 4, |\overline{F_2}| = 3, \alpha = 150°, \beta = 60°$

11.



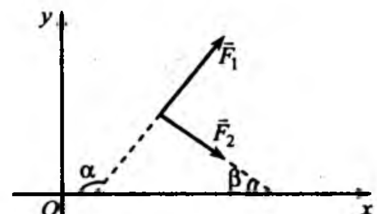
$|\overline{F_1}| = 5, |\overline{F_2}| = 4, \alpha = 120°, \beta = 60°$

12.



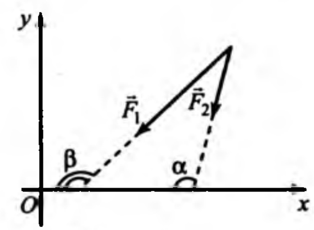
$|\overline{F_1}| = 4, |\overline{F_2}| = 1, \alpha = 150°, \beta = 45°$

13.



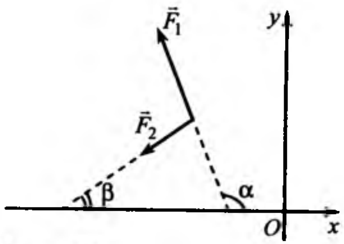
$|\overline{F_1}| = 4, |\overline{F_2}| = 1, \alpha = 135°, \beta = 60°$

14.



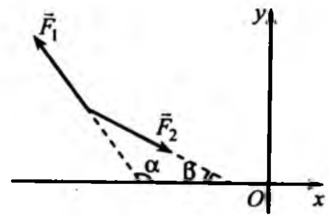
$|\overline{F_1}| = 4, |\overline{F_2}| = 3, \alpha = 135°, \beta = 120°$

15.



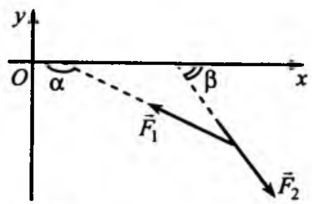
$|\vec{F_1}| = 3, |\vec{F_2}| = 2, \alpha = 120°, \beta = 30°$

16.



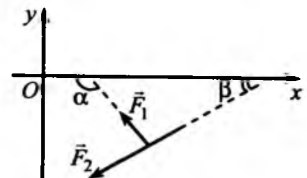
$|\vec{F_1}| = 4, |\vec{F_2}| = 1, \alpha = 150°, \beta = 30°$

17.



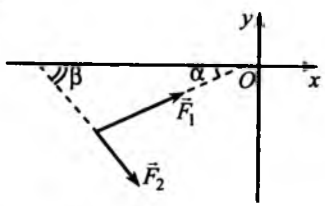
$|\vec{F_1}| = 2, |\vec{F_2}| = 3, \alpha = 150°, \beta = 60°$

18.



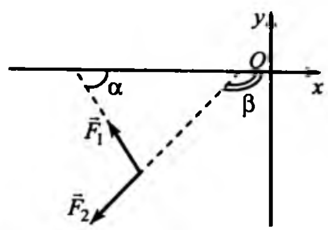
$|\vec{F_1}| = 1, |\vec{F_2}| = 3, \alpha = 135°, \beta = 30°$

19.



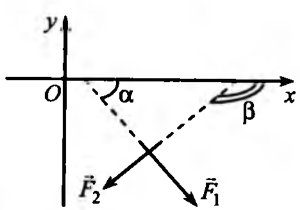
$|\vec{F_1}| = 5, |\vec{F_2}| = 2, \alpha = 30°, \beta = 45°$

20.



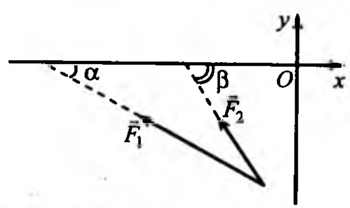
$|\vec{F_1}| = 1, |\vec{F_2}| = 3, \alpha = 60°, \beta = 120°$

21.



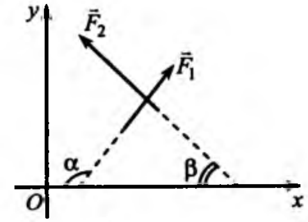
$|\vec{F_1}| = 3, |\vec{F_2}| = 2, \alpha = 60°, \beta = 120°$

22.



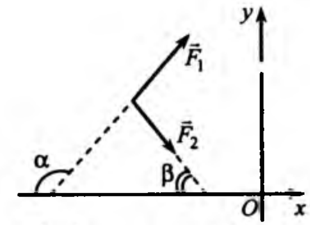
$|\vec{F_1}| = 3, |\vec{F_2}| = 2, \alpha = 45°, \beta = 60°$

23.



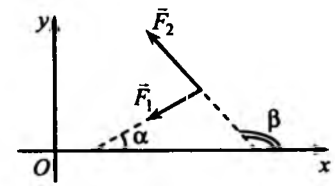
$|\vec{F_1}| = 1{,}5, |\vec{F_2}| = 3, \alpha = 120°, \beta = 45°$

24.



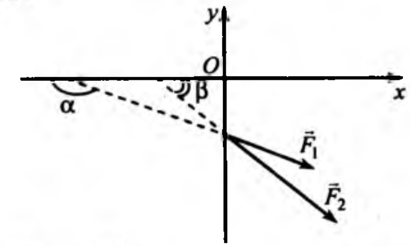
$|\vec{F_1}| = 2, |\vec{F_2}| = 1, \alpha = 120°, \beta = 45°$

25.



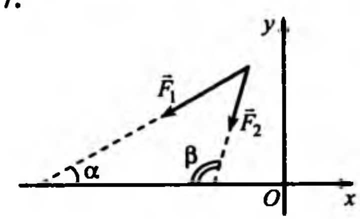
$|\vec{F_1}| = 4, |\vec{F_2}| = 5, \alpha = 30°, \beta = 135°$

26.



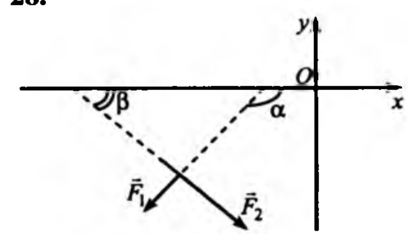
$|\vec{F_1}| = 3, |\vec{F_2}| = 4, \alpha = 150°, \beta = 45°$

27.



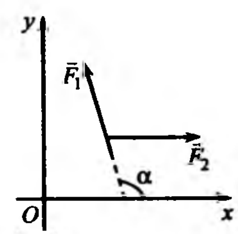
$|\vec{F_1}| = 3, |\vec{F_2}| = 1, \alpha = 30°, \beta = 120°$

28.



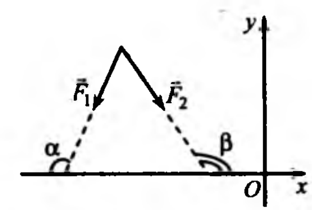
$|\vec{F_1}| = 2, |\vec{F_2}| = 6, \alpha = 135°, \beta = 45°$

29.



$|\vec{F_1}| = 1, |\vec{F_2}| = 2, \alpha = 120°$

30.



$|\vec{F_1}| = 2, |\vec{F_2}| = 6, \alpha = 135°, \beta = 45°$

Завдання 12

Задано координати векторів $\vec{p}, \vec{q}$ і $\vec{r}$ у базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ і розклад вектора $\vec{a}$ за цим базисом.

Розкласти вектор $\vec{a}$ за базисом $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$

Номер варіанта	$\vec{p}$	$\vec{q}$	$\vec{r}$	$\vec{a}$
1	(2; –7; 1)	(3; 2; –5)	(–4; 1; 3)	$-12\vec{i}+15\vec{j}+\vec{k}$
2	(2; 8; 2)	(1; 3; 5)	(3; 5; –1)	$-9\vec{i}-13\vec{j}-5\vec{k}$
3	(5; 3; 2)	(8; –2; 1)	(1; 6; –1)	$2\vec{i}-7\vec{j}-5\vec{k}$
4	(1; 3; 2)	(2; –5; 7)	(1; 3; –1)	$4\vec{i}+\vec{j}+8\vec{k}$
5	(1; 2; 1)	(2; 3; 1)	(–4; –1; –4)	$15\vec{i}+11\vec{j}+10\vec{k}$
6	(2; –1; 1)	(–1; 1; 3)	(1; –5; –1)	$9\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$
7	(2; 1; 0)	(0; 3; –1)	(5; 16; 10)	$-7\vec{i}+16\vec{j}+8\vec{k}$
8	(2; 1; 1)	(–3; 4; –4)	(1; 2; 0)	$-7\vec{i}-\vec{j}-5\vec{k}$
9	(–1; 2; 3)	(4; –1; 1)	(–5; 1; –2)	$6\vec{i}+3\vec{j}+11\vec{k}$
10	(3; 2; 1)	(1; –4; 5)	(–6; 5; –2)	$-13\vec{i}-9\vec{j}+5\vec{k}$
11	(–2; 3; 0)	(5; –1; 4)	(–3; 2; –1)	$-\vec{j}+\vec{k}$
12	(3; –2; 5)	(–2; 1; 0)	(4; –1; 3)	$9\vec{i}+7\vec{k}$
13	(2; 7; 7)	(–4; 3; 9)	(9; –6; –9)	$28\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$
14	(5; –1; 2)	(–1; 2; 3)	(3; –4; –1)	$5\vec{i}+9\vec{j}+4\vec{k}$
15	(3; –1; 2)	(–1; –1; 1)	(0; 3; –1)	$-11\vec{i}+16\vec{j}-9\vec{k}$
16	(2; 1; 0)	(1; 0; 5)	(0; 3; –1)	$5\vec{i}+16\vec{j}+10\vec{k}$
17	(7; 3; –1)	(–1; 0; 8)	(5; 4; –3)	$4\vec{i}-8\vec{j}+3\vec{k}$
18	(3; 5; 2)	(–2; –8; 1)	(1; 9; 4)	$-9\vec{i}+3\vec{j}+20\vec{k}$
19	(3; –1; 5)	(1; 2; –1)	(–7; –10; 8)	$7\vec{i}-4\vec{j}+8\vec{k}$
20	(9; –4; 3)	(0; 1; 7)	(1; –6; 8)	$8\vec{i}+4\vec{j}+9\vec{k}$
21	(4; 0; 5)	(7; 11; –1)	(–1; 2; –3)	$-11\vec{i}-4\vec{j}-10\vec{k}$
22	(–1; 3; 2)	(5; –1; 4)	(–4; 0; –9)	$-7\vec{i}+13\vec{j}-9\vec{k}$
23	(6; 0; 1)	(–2; 4; 7)	(1; –3; –5)	$-7\vec{i}+9\vec{j}+13\vec{k}$

Номер варіанта	$\vec{p}$	$\vec{q}$	$\vec{r}$	$\vec{a}$
24	(1; –8; 3)	(–3; 1; 5)	(7; –1; 0)	$-4\vec{i}+18\vec{j}+9\vec{k}$
25	(–7; 2; 5)	(2; 0; –1)	(–4; –1; 6)	$7\vec{i}+4\vec{j}-10\vec{k}$
26	(0; 2; 1)	(–3; 2; –7)	(–4; 1; –1)	$22\vec{i}+15\vec{j}+2\vec{k}$
27	(–2; –1; –6)	(3; –1; 2)	(5; 1; 4)	$8\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k}$
28	(–4; 7; 2)	(5; 2; –1)	(–1; –1; 1)	$19\vec{i}-7\vec{j}+3\vec{k}$
29	(–6; 1; 0)	(1; 4; –1)	(–5; 2; 3)	$9\vec{i}+20\vec{j}-15\vec{k}$
30	(5; 0; –2)	(8; 3; 1)	(1; –7; 6)	$18\vec{i}+\vec{j}-22\vec{k}$

Завдання 13

Задано координати вершин трикутника ABC.
Скласти чи знайти:

1) довжину сторони AB;
2) напрямні косинуси вектора $\overline{AB}$;
3) косинус кута при вершині A;
4) площу ΔABC;
5) рівняння сторони AB;
6) рівняння медіани, проведеної з вершини B;
7) а) рівняння і б) довжину висоти, проведеної з вершини C.

Номер варіанта	A	B	C	Номер варіанта	A	B	C
1	(–1; 3)	(1; 1)	(3; 5)	16	(3; 5)	(5; –1)	(–3; –2)
2	(1; –2)	(4; 0)	(1; 1)	17	(–2; 2)	(–1; –2)	(3; 1)
3	(–1; –1)	(–2; 1)	(1; 2)	18	(0; 4)	(4; 2)	(1; 1)
4	(2; –3)	(4; 2)	(2; 2)	19	(–2; –3)	(3; 0)	(0; 5)
5	(1; –3)	(–2; –1)	(1; 3)	20	(–3; 0)	(4; –2)	(2; 3)
6	(0; 1)	(–1; –2)	(2; 0)	21	(–1; 0)	(–2; –5)	(2; –3)
7	(1; –3)	(0; –1)	(3; –1)	22	(3; 4)	(5; 0)	(–1; –1)
8	(4; –2)	(2; –2)	(3; 1)	23	(3; –7)	(1; –2)	(6; –4)

Номер варіанта	A	B	C	Номер варіанта	A	B	C
9	(–2; –1)	(0; 2)	(1; –1)	24	(6; 3)	(2; 0)	(1; 4)
10	(–1; 1)	(2; 0)	(–1; –3)	25	(–3; 4)	(–1; 1)	(–6; 0)
11	(–3; 3)	(0; 0)	(3; 2)	26	(–4; –1)	(0; 3)	(2; –2)
12	(–2; –2)	(–1; 0)	(1; –2)	27	(2; 4)	(4; 0)	(–3; –1)
13	(0; 3)	(2; 1)	(4; 4)	28	(–2; 1)	(1; –3)	(4; 2)
14	(–1; –5)	(3; –4)	(0; –2)	29	(5; 0)	(6; 4)	(2; –3)
15	(–3; 2)	(0; 5)	(3; 0)	30	(–3; 0)	(1; 5)	(4; 1)

Завдання 14

Матеріальна точка, рухаючись рівномірно і прямолінійно, переміщується з положення M_1 у положення M_2 під дією трьох сил $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$, що прикладені до неї. Задано координати точок M_1, M_2 і розклад векторів $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ за базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Знайти кут між напрямком рівнодійної $\vec{R}$ заданих сил і вектором переміщення $\overline{M_1M_2}$, а також роботу A, яка при цьому виконується.

№ вар.	M_1	M_2	$\vec{F_1}$	$\vec{F_2}$	$\vec{F_3}$
1	(–1; 3; 5)	(2; 6; –7)	$-2\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$	$3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$	$-4\vec{j}-\vec{k}$
2	(2; 4; –5)	(–3; 1; 4)	$3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$	$-4\vec{i}+2\vec{j}$	$-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$
3	(–2; 1; 3)	(4; 2; –1)	$-\vec{j}+3\vec{k}$	$2\vec{i}+\vec{j}-5\vec{k}$	$2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$
4	(3; 0; –2)	(–2; 3; 1)	$2\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}$	$3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$	$3\vec{i}-4\vec{k}$
5	(2; 1; 4)	(–3; 1; 0)	$3\vec{i}-4\vec{j}$	$-\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$	$2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$
6	(2; 4; 6)	(0; 3; –4)	$4\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$	$5\vec{i}-2\vec{j}$	$\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$
7	(–3; 4; 1)	(2; 5; –1)	$2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$	$-3\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$	$3\vec{i}-5\vec{j}$
8	(1; –2; 4)	(3; 1; –2)	$\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$	$-7\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$	$5\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$
9	(2; 4; –6)	(–4; 5; 1)	$6\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$	$-4\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$	$\vec{i}-3\vec{k}$
10	(1; 0; 7)	(6; 4; –3)	$-4\vec{i}+5\vec{k}$	$3\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}$	$2\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$

№ вар.	M_1	M_2	$\vec{F_1}$	$\vec{F_2}$	$\vec{F_3}$
11	(3; 5; –6)	(–4; 2; 0)	$3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$	$-\vec{j}+2\vec{k}$	$-5\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$
12	(–4; –1; 0)	(–5; 4; 1)	$\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$	$2\vec{i}+6\vec{j}-\vec{k}$	$2\vec{j}+4\vec{k}$
13	(2; –3; 4)	(0; 2; –8)	$-5\vec{i}+\vec{j}$	$4\vec{i}+7\vec{j}+3\vec{k}$	$-2\vec{i}-9\vec{j}+\vec{k}$
14	(–5; 6; 7)	(–2; –3; –1)	$-7\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k}$	$8\vec{i}+3\vec{k}$	$-4\vec{i}-6\vec{j}+4\vec{k}$
15	(3; 4; –5)	(–6; 7; 2)	$2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$	$-3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$	$4\vec{i}-6\vec{j}$
16	(1; 0; –8)	(3; –2; –11)	$5\vec{i}+\vec{k}$	$2\vec{i}-\vec{j}+7\vec{k}$	$-7\vec{i}-3\vec{j}-6\vec{k}$
17	(4; –3; 2)	(7; –4; –1)	$-4\vec{i}+2\vec{j}+7\vec{k}$	$-\vec{i}-3\vec{j}-9\vec{k}$	$-2\vec{j}+3\vec{k}$
18	(–3; 2; 7)	(–2; 5; 9)	$-6\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}$	$3\vec{i}+5\vec{j}$	$2\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$
19	(0; –1; 10)	(4; 3; 8)	$-3\vec{j}-2\vec{k}$	$\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$	$-5\vec{i}+6\vec{j}+4\vec{k}$
20	(5; –6; 2)	(8; –3; –5)	$2\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$	$-3\vec{i}-5\vec{j}+6\vec{k}$	$4\vec{i}+3\vec{j}$
21	(–7; 9; 3)	(–9; 11; 6)	$2\vec{i}+3\vec{j}$	$-4\vec{i}-\vec{j}-7\vec{k}$	$3\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$
22	(–3; 2; 0)	(–4; –1; –5)	$-4\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$	$2\vec{j}-7\vec{k}$	$2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$
23	(4; 2; 1)	(5; –3; –5)	$-7\vec{i}+2\vec{j}+6\vec{k}$	$3\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$	$2\vec{i}-7\vec{k}$
24	(–5; 7; 4)	(0; 8; 6)	$4\vec{j}-\vec{k}$	$2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$	$-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$
25	(3; 4; 0)	(7; –2; –3)	$5\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$	$-3\vec{i}+5\vec{k}$	$-4\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$
26	(–2; 5; 4)	(–3; 7; 6)	$2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$	$-5\vec{i}+9\vec{j}-5\vec{k}$	$-7\vec{j}+6\vec{k}$
27	(3; 2; –7)	(5; –1; –9)	$-\vec{i}+5\vec{j}$	$3\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}$	$2\vec{i}-4\vec{j}-6\vec{k}$
28	(–5; 2; –3)	(–6; –3; 2)	$3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$	$2\vec{j}-4\vec{k}$	$-5\vec{i}-6\vec{j}-2\vec{k}$
29	(–1; 5; –2)	(3; 8; –5)	$-2\vec{i}-7\vec{j}-3\vec{k}$	$-3\vec{i}+2\vec{j}+7\vec{k}$	$-3\vec{i}+4\vec{j}$
30	(–4; 9; 5)	(–5; 8; 9)	$-7\vec{i}-\vec{j}$	$5\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$	$-4\vec{i}+5\vec{j}-2\vec{k}$

Завдання 15

Задано силу $\vec{F}$ проекціями F_x, F_y, F_z і координати точки A — точки її прикладання. Знайти величину і напрямок моменту сили $\vec{F}$ відносно початку координат. Зобразити у тривимірній прямокутній системі координат заданий вектор сили $\vec{F}$ і знайдений вектор моменту $\vec{M}_0\left(\vec{F}\right)$.

Номер варіанта	F_x	F_y	F_z	A
1	–1	1	0	(2; 3; 0)
2	0	–2	3	(0; 4; 2)
3	–3	0	4	(4; 0; 1)
4	6	–1	0	(4; –5; 0)
5	0	5	–6	(0; 3; 4)
6	–5	0	–2	(–2; 0; –3)
7	3	4	0	(–5; 7; 0)
8	0	2	–2	(0; –6; –3)
9	–1	0	2	(3; 0; –4)
10	6	–5	0	(–4; –1; 0)
11	0	3	1	(0; –4; 2)
12	–4	0	2	(–1; 0; 4)
13	–2	–4	0	(5; 7; 0)
14	0	–1	–4	(0; 4; 7)
15	–1	0	–5	(5; 0; 7)
16	–2	4	0	(–3; –6; 0)
17	0	–4	2	(0; 5; –6)
18	4	0	–1	(–9; 0; 5)
19	–3	–3	0	(–2; 4; 0)
20	0	–2	5	(0; –3; 4)
21	–2	0	–3	(4; 0; –5)
22	2	3	0	(3; 1; 0)
23	0	2	–4	(0; 4; 6)
24	2	0	–5	(4; 0; 8)
25	–4	1	0	(5; –6; 0)
26	0	4	2	(0; 4; –5)
27	5	0	2	(–7; 0; –4)
28	3	–5	0	(4; 7; 0)
29	0	–2	–5	(0; –2; 6)
30	–5	0	–3	(8; 0; 4)

Завдання 16

Задано координати вершин піраміди $ABCD$.
Скласти чи знайти:

1) об'єм піраміди;

2) а) рівняння і б) площу основи ABC;
3) а) рівняння і б) довжину висоти DK, проведеної з вершини D;
4) косинус внутрішнього кута між гранями ABC і ACD;

5) координати x, y, z точки перетину висоти DK з площиною ABC.

Номер варіанта	A	B	C	D
1	(1; –1; 3)	(5; –6; 4)	(3; 4; –3)	(6; 1; –6)
2	(2; 3; 1)	(4; 5; –2)	(6; 2; 4)	(–2; 1; 3)
3	(–4; 1; 3)	(1; –4; 1)	(–3; 5; 6)	(–1; 7; 2)
4	(3; 4; 5)	(7; 0; 1)	(6; 4; 2)	(8; 3; 7)
5	(2; 5; 6)	(4; 7; 9)	(–3; 8; 1)	(0; 6; 4)
6	(4; 0; 3)	(0; 2; 2)	(1; 5; 4)	(3; 10; 5)
7	(3; 1; 5)	(6; 4; 4)	(0; 3; 4)	(4; 2; 5)
8	(3; 2; 2)	(4; 1; 0)	(0; 3; 4)	(3; 4; 7)
9	(2; 2; 0)	(3; 0; 4)	(4; 6; 1)	(5; 7; 2)
10	(2; 0; 1)	(5; 5; 3)	(4; 2; –1)	(5; –2; 4)
11	(–1; 5; 3)	(–3; 7; 6)	(2; 3; 4)	(4; 6; 1)
12	(3; 5; 4)	(5; 7; 2)	(2; 8; 1)	(6; 4; 3)
13	(–2; 1; –6)	(–3; 2; –4)	(–4; 2; –7)	(5; 6; 8)
14	(2; 1; –1)	(4; 3; –4)	(3; 5; 2)	(5; 7; 7)
15	(2; 4; 7)	(4; 6; 8)	(6; 9; 1)	(–2; 4; 3)
16	(3; 2; 4)	(7; 2; 1)	(4; –2; 1)	(–4; 5; 6)
17	(–1; 1; 5)	(–1; 5; 2)	(3; 2; 6)	(0; 4; –1)
18	(4; 6; 2)	(3; 1; 1)	(–1; 5; 4)	(7; 8; 3)
19	(2; 3; 1)	(3; 4; 2)	(8; 3; 5)	(–4; 7; 6)
20	(4; 6; 4)	(8; 9; 5)	(6; 8; –1)	(2; 4; 6)
21	(3; 2; 1)	(4; 5; 2)	(6; 2; 4)	(–4; 6; 5)

Номер варіанта	*A*	*B*	*C*	*D*
22	(1; 0; –2)	(2; –2; 1)	(4; 4; –1)	(5; 6; 2)
23	(2; 5; 4)	(5; 7; 0)	(–1; 8; 1)	(–2; 4; 3)
24	(2; 1; 0)	(4; –2; 3)	(6; 4; –3)	(2; 8; 4)
25	(1; 0; –2)	(2; –2; 3)	(4; 3; –1)	(6; 2; 5)
26	(4; 8; 3)	(7; 6; 4)	(1; 9; 5)	(1; 2; 6)
27	(–1; 1; 1)	(3; 0; 4)	(0; 4; 5)	(2; 7; 1)
28	(3; 1; 2)	(5; –1; –1)	(4; 3; 6)	(–2; 5; 4)
29	(–2; –1; –3)	(–5; 1; –6)	(–4; 3; –2)	(1; 0; 3)
30	(0; 4; –2)	(2; 6; –1)	(–2; –1; –3)	(4; 7; 1)

Завдання 17

Спростити рівняння ліній і побудувати ці лінії.

1.
1) $4x^2+9y^2-24x=0$;
2) $x^2+y^2-8x+18y+48=0$;
3) $x=-1+2\sqrt{y-5}$.

2.
1) $x=2-3\sqrt{1+y^2}$;
2) $x^2+6x+4y-15=0$;
3) $x^2+y^2-50y+621=0$.

3.
1) $4x^2+9y^2+24x-72y+144=0$;
2) $x^2-4y^2-2x-16y+1=0$;
3) $x=-4+\sqrt{3-2y}$.

4.
1) $4x^2+25y^2+100y=0$;
2) $y^2-6y-9x-9=0$;
3) $x=-1+\sqrt{2y+4}$.

5.
1) $x^2+y^2+6x+1=0$;
2) $y=-7+3\sqrt{x-1}$;
3) $9x^2+4y^2+18x-27=0$.

6.
1) $9x^2-y^2-4y-13=0$;
2) $x^2+2x+2y-5=0$;
3) $x=-4-\dfrac{5}{2}\sqrt{4y-y^2}$.

7.
1) $x=7-5\sqrt{4-y}$;
2) $9x^2+4y^2+18x-8y-23=0$;
3) $25x^2-16y^2+50x+32y-391=0$.

8.
1) $y^2-8y+8x+24=0$;
2) $x^2+y^2-10x+4y+4=0$;
3) $x=3-\dfrac{3}{5}\sqrt{y^2-25}$.

9.
1) $x^2-9y^2+6x+36y-18=0$;
2) $x^2+4x-4y+8=0$;
3) $y=-3-\dfrac{2}{3}\sqrt{36-x^2}$.

10.
1) $x=-4+\sqrt{8-y^2+2y}$;
2) $4x^2+9y^2-18y-27=0$;
3) $y^2+10y-8x+49=0$.

11.
1) $25x^2-4y^2+50x+16y-91=0$;
2) $y=-1-\sqrt{3x-6}$;
3) $x^2+y^2-8x+15=0$.

12.
1) $x^2-4x+y+9=0$;
2) $4x^2+y^2-40x+4y+100=0$;
3) $x=1+\dfrac{2}{3}\sqrt{y^2+9}$.

13.
1) $x^2+y^2-2x=0$;
2) $y=-1-3\sqrt{x^2-4x+5}$;
3) $y^2+8y-5x+31=0$.

14.
1) $x=1{,}5+\sqrt{2y+4}$;
2) $x^2+16y^2+4x-96y+132=0$;
3) $9x^2-4y^2-72x-8y+104=0$.

15.
1) $x^2-9y^2+8x+18y-2=0$;
2) $x^2+2x-7y+29=0$;
3) $y=3-\sqrt{24-x^2-10x}$.

16.
1) $4x^2+y^2+16x-8y+16=0$;
2) $x^2+y^2-4x+12y-24=0$;
3) $y=-3-\sqrt{2-x}$.

17.
1) $y^2+4y+3x+7=0$;
2) $x^2+y^2-6x+4y-12=0$;
3) $y=\dfrac{2}{5}\sqrt{x^2+6x-16}$.

18.
1) $y=\dfrac{2}{3}\sqrt{-x^2-12x-27}$;
2) $x^2-12x+5y+46=0$;
3) $x^2+y^2+2x-63=0$.

19.
1) $16x^2-9y^2-32x-54y+79=0$;
2) $x^2+y^2-6x+8y-11=0$;
3) $x=4-3\sqrt{2-2y}$.

20.
1) $y^2-6y-5x-11=0$;
2) $x^2+y^2-4x-12y+36=0$;
3) $x=2-\dfrac{1}{2}\sqrt{y^2+2y+17}$.

21.

1) $x^2+y^2-4y-5=0$;

2) $36x^2-4y^2+72x+24y+144=0$;

3) $y=5-2\sqrt{-x}$.

22.

1) $x^2+y^2+10x-14y+73=0$;

2) $x^2+12x-y+38=0$;

3) $x=-5+\frac{3}{2}\sqrt{y^2-6y+5}$.

23.

1) $4x^2-y^2-16x-16y-52=0$;

2) $x^2+y^2+2x-8y+13=0$;

3) $x=-1-\sqrt{5-y}$.

24.

1) $y^2+2y+4x-11=0$;

2) $4x^2+9y^2+24x-18y+9=0$;

3) $y=1+\frac{5}{3}\sqrt{x^2+12x+27}$.

25.

1) $x^2+y^2-14x+4y+37=0$;

2) $x^2-4x-3y-11=0$;

3) $x=1+\frac{2}{5}\sqrt{21-y^2-4y}$.

26.

1) $4x^2-y^2+8x-4y+16=0$;

2) $y=2+\sqrt{2x+8}$;

3) $x^2+y^2+4x-12=0$.

27.

1) $25x^2-y^2+100x-2y+74=0$;

2) $x^2+y^2+8x-6y+9=0$;

3) $x=-7-\sqrt{y}$.

28.

1) $y^2+2y+3x+7=0$;

2) $4x^2+y^2-12y+32=0$;

3) $x=-6-\frac{3}{5}\sqrt{y^2-2y-24}$.

29.

1) $y=3-\frac{1}{2}\sqrt{15-x^2-2x}$;

2) $x^2-4x-8y-20=0$;

3) $x^2+y^2+10x-6y+24=0$.

30.

1) $x^2-64y^2+4x+128y-124=0$;

2) $x^2+y^2+6x-2y+8=0$;

3) $y=5+\sqrt{9-3x}$.

Завдання 18

Виділенням повних квадратів спростити рівняння поверхні другого порядку. Визначити тип поверхні та її розташування.

1. $x^2+4y^2+z^2-4x+24y-2z+37=0$.

2. $9x^2+4y^2-36z^2-72x-72z+72=0$.

3. $x^2+y^2+z^2+4x-2y-8z-4=0$.

4. $9x^2+y^2+36x-6y-36z+45=0$.

5. $9x^2+9y^2-4z^2-18x-16z-7=0$.

6. $4x^2+9y^2-z^2-16x+54y+2z+132=0$.

7. $y^2-6x-10y+7=0$.

8. $x^2+4y^2+4z^2+6x-8y+9=0$.

9. $9x^2-z^2+18x-9y+6z=0$.

10. $x^2-4y^2-4z^2+6x+32y-8z-59=0$.

11. $4x^2+16y^2-z^2-8x+32y+2z+3=0$.

12. $x^2+y^2+z^2-6x+4y+4=0$.

13. $9x^2-y^2+36z^2+18x+4y+41=0$.

14. $x^2-9y^2+z^2+2x-4z+5=0$.

15. $25y^2+z^2-25x+100y-2z+101=0$.

16. $4x^2-y^2+16x+12y-24=0$.

17. $9x^2+9y^2+4z^2-90x+18y-8z+202=0$.

18. $x^2+y^2+6x-2y+1=0$.

19. $16x^2-4y^2-z^2+64x+8y+76=0$.

20. $4x^2+4y^2-25z^2+24x-8y-50z+15=0$.

21. $9x^2-4y^2-36z^2+18x-32y+144z-235=0$.

22. $4x^2+y^2+6y-7=0$.

23. $x^2+9z^2+10x-9y-36z+61=0$.

24. $4x^2-y^2-z^2+8x-8y+4z-16=0$.

25. $36x^2+9y^2+4z^2+216x+16z+304=0$.

26. $4y^2-9z^2-36x+16y+18z+7=0$.

27. $100x^2-4y^2+25z^2+16y+50z-91=0$.

28. $4x^2-25y^2-24x-50y-100z+11=0$.

29. $x^2+y^2+14x-4y+4=0$.

30. $36x^2+y^2-4z^2+4y+8z+36=0$.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 1—4

№ вар.	Номер завдання					
	1	2	3	4(1)	4(2)	4(3)
				AB	$f(A)$	A^{-1}
1	–29	32	5	$\begin{pmatrix}-1 & 9\\ 5 & 11\\ -5 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-13 & -4 & 4\\ -8 & -8 & 14\\ -12 & 6 & -9\end{pmatrix}$	$\frac{1}{18}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -5\\ -14 & 10 & 2\\ -3 & 6 & 3\end{pmatrix}$
2	14	–12	–4	$\begin{pmatrix}4 & 5\\ 22 & 3\\ -3 & 6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}11 & -2 & 2\\ 4 & 29 & 16\\ 3 & 11 & 11\end{pmatrix}$	$-\frac{1}{46}\begin{pmatrix}-18 & 4 & -10\\ 4 & -6 & -8\\ -3 & -7 & 6\end{pmatrix}$
3	2	2	–20	$\begin{pmatrix}-3 & 8\\ -6 & 5\\ 4 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4 & -4 & 2\\ 3 & -4 & 5\\ -4 & 8 & 2\end{pmatrix}$	$\frac{1}{25}\begin{pmatrix}10 & -10 & 5\\ 9 & 1 & 2\\ -7 & 2 & 4\end{pmatrix}$
4	1	68	1800	$\begin{pmatrix}7 & 9\\ 7 & -4\\ 6 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}9 & -2 & 4\\ -2 & 12 & -1\\ 4 & -1 & 6\end{pmatrix}$	$-\frac{1}{42}\begin{pmatrix}-1 & -11 & 7\\ -11 & 5 & -7\\ 7 & -7 & -7\end{pmatrix}$
5	23	14	–900	$\begin{pmatrix}0 & 10\\ 12 & 0\\ -3 & -7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8 & 2 & 1\\ 5 & 13 & -2\\ -3 & -8 & 13\end{pmatrix}$	$-\frac{1}{21}\begin{pmatrix}0 & -6 & -3\\ -7 & -3 & 2\\ -7 & 0 & -7\end{pmatrix}$
6	8	28	12	$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -4 & 13\\ 9 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 5 & -3\\ 6 & 0 & 6\end{pmatrix}$	$-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-3 & -2 & 1\\ -5 & 0 & -5\\ 7 & -2 & 1\end{pmatrix}$
7	59	42	–54	$\begin{pmatrix}4 & 5\\ -8 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}12 & -9 & -1\\ -8 & 19 & 8\\ 9 & -17 & 2\end{pmatrix}$	$\frac{1}{8}\begin{pmatrix}5 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -2\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$

№ вар.	Номер завдання					
	1	2	3	4(1)	4(2)	4(3)
				AB	$f(A)$	A^{-1}
8	55	14	48	$\begin{pmatrix}1 & -7\\ 9 & 3\\ 7 & -5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -16 & 6\\ -4 & 8 & -6\\ 6 & -14 & 1\end{pmatrix}$	$-\frac{1}{22}\begin{pmatrix}1 & -10 & -3\\ 2 & 2 & -6\\ 9 & -2 & -5\end{pmatrix}$
9	33	0	1	$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -14 & 4\\ 6 & -2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & -2 & 6\\ 6 & 0 & 4\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$	$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 10\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}$
10	1	1	160	$\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & -4\\ 1 & -5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-7 & 4 & 6\\ -1 & -6 & 15\\ 5 & -3 & 3\end{pmatrix}$	$\frac{1}{9}\begin{pmatrix}5 & -4 & 6\\ 7 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$
11	–19	6	900	$\begin{pmatrix}-5 & 7\\ 1 & 0\\ 2 & 7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & -3 & 2\\ -2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 10\end{pmatrix}$	$\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-4 & -3 & 2\\ -2 & -5 & 1\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}$
12	2	60	900	$\begin{pmatrix}-9 & 1\\ -1 & 8\\ -8 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 9 & 3\\ 1 & 11 & 6\\ -5 & 0 & 8\end{pmatrix}$	$-\frac{1}{15}\begin{pmatrix}3 & -6 & 3\\ -4 & -2 & 1\\ 5 & -5 & -5\end{pmatrix}$
13	–2	34	40	$\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 2 & -3\\ 5 & -6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}17 & 12 & -6\\ 7 & -6 & 11\\ 8 & -10 & 21\end{pmatrix}$	$-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & -6 & 3\\ -2 & 13 & -7\\ -1 & 8 & -5\end{pmatrix}$
14	1	13	18	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -7 & 3\\ -7 & 4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}13 & 3 & -11\\ 7 & 18 & -8\\ 2 & 12 & 5\end{pmatrix}$	$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & -5 & 5\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & -4 & 5\end{pmatrix}$
15	17	–21	–9	$\begin{pmatrix}-5 & 11\\ 0 & -5\\ -9 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-7 & -5 & 9\\ 3 & -9 & -2\\ 5 & 1 & 7\end{pmatrix}$	$\frac{1}{32}\begin{pmatrix}1 & -14 & 3\\ 9 & 2 & -5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$
16	6	4	–70	$\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 6 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}13 & -6 & 1\\ -13 & 0 & -1\\ 6 & -2 & -4\end{pmatrix}$	$-\frac{1}{11}\begin{pmatrix}2 & -3 & -2\\ -4 & -5 & -7\\ 3 & 1 & -3\end{pmatrix}$

№ вар.	Номер завдання					
	1	2	3	4(1)	4(2)	4(3)
				AB	$f(A)$	A^{-1}
17	–1	0	–94	$\begin{pmatrix} -13 & 0 \\ 0 & -3 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -6 \\ 8 & 1 & -3 \\ 1 & -11 & 2 \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 9 & -2 & -5 \\ -3 & -10 & -1 \end{pmatrix}$
18	–19	6	–8	$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 8 \\ 1 & 2 & 8 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 5 \\ -1 & -4 & 7 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
19	23	–3	0	$\begin{pmatrix} 3 & -11 \\ 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7 & -4 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -8 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -2 & 12 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
20	–11	180	96	$\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -11 & 10 & 0 \\ -4 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & -7 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
21	7	87	900	$\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 5 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 23 & -5 & 6 \\ -13 & 8 & -5 \\ -9 & 7 & -1 \end{pmatrix}$	$-\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$
22	–24	0	223	$\begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 5 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -7 & 2 & -5 \\ -6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -8 \\ -3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$
23	–2	–12	1	$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -5 & -4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -6 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 \\ 7 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$
24	–4	29	2	$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & -3 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 16 \\ -10 & 7 & 7 \\ -12 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -3 & 8 & -7 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
25	1	87	1	$\begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 1 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 4 & 10 & 22 \\ 0 & 10 & 11 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -7 & 8 & -11 \\ -6 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

№ вар.	Номер завдання					
	1	2	3	4(1)	4(2)	4(3)
				AB	$f(A)$	A^{-1}
26	–53	0	–3	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & -3 & 2 \\ -2 & 7 & 5 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{22}\begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -5 \\ -5 & -8 & 1 \end{pmatrix}$
27	–1	–5	4	$\begin{pmatrix} 5 & -11 \\ 3 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 14 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -6 & -5 & 1 \\ 4 & -10 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
28	17	–12	–70	$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 6 & -8 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -5 \\ 9 & 0 & -6 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -8 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$
29	–31	7	–7	$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 17 & 1 \\ 4 & 11 & -4 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -5 \\ -2 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -1 \end{pmatrix}$
30	50	28	2	$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 8 & -2 & -2 \\ -20 & 7 & 6 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 8 & -3 & 2 \\ -12 & 9 & -3 \end{pmatrix}$

Завдання 5–8

№ варіанта	Номер завдання									
	5	6				7		8		
		λ_1	λ_2	X_1	X_2	x	y	x	y	z
1	2	2	5	C_1 $-C_1$	C_2 $2C_2$	1	2	1	–1	2
2	3	–7	4	C_1 $-C_1$	C_2 $1{,}2C_2$	5	1	–1	–1	3
3	3	–8	–3	C_1 $-C_1$	C_2 $-6C_2$	2	3	2	0	–1
4	3	–8	4	C_1 $-2C_1$	C_2 $2C_2$	4	3	1	2	3

№ варіанта	Номер завдання									
	5	6				7		8		
		λ_1	λ_2	X_1	X_2	x	y	x	y	z
5	2	–3	7	C_1 $-C_1$	C_2 C_2	8	7	1	1	–3
6	3	5	7	C_1 $-3\,C_1$	C_2 $-C_2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	2	2	–1
7	3	4	6	C_1 $2\,C_1$	C_2 C_2	2	–5	1	–1	–2
8	3	3	4	C_1 $-2\,C_1$	C_2 $-C_2$	7	8	2	1	0
9	2	2	3	C_1 $-C_1$	C_2 $-2C_2$	$\frac{1}{2}$	2	1	–2	–2
10	3	8	9	C_1 $0{,}5\,C_1$	C_2 C_2	1	–3	1	1	3
11	2	–3	–2	C_1 $0{,}8\,C_1$	C_2 C_2	2	–2	–2	1	1
12	3	–9	–3	C_1 $-C_1$	C_2 $0{,}5\,C_2$	1	–2	1	–1	–2
13	2	1	4	C_1 $-C_1$	C_2 $2\,C_2$	1	2	1	2	–2
14	3	–7	–5	C_1 $-3\,C_1$	C_2 $-C_2$	1	3	1	2	–3
15	3	4	5	C_1 $-C_1$	C_2 $-2\,C_2$	–2	4	–1	–2	2
16	4	–4	2	C_1 $-C_1$	C_2 $-7\,C_2$	2	1	2	1	–1
17	4	–4	–3	C_1 $-C_1$	C_2 $-0{,}5\,C_2$	1	3	0	–2	1
18	4	–1	5	C_1 $-C_1$	C_2 $0{,}5\,C_2$	3	1	3	0	–1

№ варіанта	Номер завдання									
	5	6				7		8		
		λ_1	λ_2	X_1	X_2	x	y	x	y	z
19	5	–6	1	C_1 $-C_1$	C_2 $0{,}75\,C_2$	4	3	1	2	–2
20	3	–9	7	C_1 $-C_1$	C_2 $2{,}2\,C_2$	2	–2	3	2	–1
21	3	5	10	C_1 $-C_1$	C_2 $0{,}25\,C_2$	1	–2	0	2	–1
22	4	2	7	C_1 $1{,}5\,C_1$	C_2 $-C_2$	–2	5	–1	2	3
23	3	–7	–2	C_1 $-0{,}25\,C_1$	C_2 C_2	–2	–3	1	0	–2
24	4	–1	5	C_1 C_1	C_2 $-2\,C_2$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	1	3	2
25	3	–2	6	C_1 $0{,}5\,C_1$	C_2 $2{,}5\,C_2$	$\frac{1}{5}$	–2	1	0	–3
26	4	–3	1	C_1 $-0{,}5\,C_1$	C_2 $-C_2$	1	$\frac{1}{2}$	1	1	3
27	2	–5	1	C_1 $-0{,}5\,C_1$	C_2 $-2\,C_2$	2	–3	1	1	1
28	4	–4	6	C_1 $-C_1$	C_2 $9\,C_2$	1	–2	3	–1	–1
29	3	–1	5	C_1 $-2\,C_1$	C_2 $-0{,}8\,C_2$	6	–1	1	2	0
30	3	1	11	C_1 $-1{,}5\,C_1$	C_2 C_2	$\frac{1}{3}$	–1	0	1	2

Завдання 9

Номер варіанта	Номер завдання			
	9			
	x_1	x_2	x_3	x_4
1	$1+\frac{1}{3}C$	-1	$-4+\frac{5}{3}C$	C
2	$2-\frac{9}{7}C$	$3+\frac{10}{7}C$	$-2-\frac{4}{7}C$	C
3	$\frac{8}{9}+\frac{2}{3}C_1-\frac{5}{9}C_2$	$\frac{11}{9}-\frac{1}{3}C_1+\frac{1}{9}C_2$	C_1	C_2
4	$3-\frac{5}{3}C_1+C_2$	$3-\frac{1}{3}C_1$	C_1	C_2
5	$5+3C$	$-2-2C$	$-5-3C$	C
6	$-1+\frac{9}{4}C$	$2-\frac{1}{4}C$	$3-2C$	C
7	$-1+C_1$	$-4+3C_1-C_2$	C_1	C_2
8	$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}C$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}C$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}C$	C
9	$\frac{15}{7}-\frac{2}{7}C_1+\frac{1}{7}C_2$	$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}C_1-\frac{5}{7}C_2$	C_1	C_2
10	$-\frac{11}{7}-\frac{3}{7}C_1+C_2$	$\frac{5}{7}+\frac{2}{7}C_1+C_2$	C_1	C_2
11	$-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}C$	$-1+C$	$-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}C$	C
12	$-\frac{8}{5}+\frac{3}{5}C$	$\frac{6}{5}-\frac{1}{5}C$	2	C
13	$-\frac{10}{11}-\frac{1}{11}C$	$\frac{28}{11}-\frac{6}{11}C$	$-\frac{2}{11}+\frac{2}{11}C$	C
14	$-\frac{9}{5}-\frac{3}{5}C_1-\frac{1}{5}C_2$	$\frac{13}{5}+\frac{1}{5}C_1-\frac{8}{5}C_2$	C_1	C_2
15	$\frac{4}{5}+\frac{3}{5}C_1-C_2$	$-\frac{7}{5}-\frac{4}{5}C_1+C_2$	C_1	C_2
16	$3-C$	C	$-5+4C$	C

Номер варіанта	Номер завдання			
	9			
	x_1	x_2	x_3	x_4
17	$\frac{14}{5}-\frac{3}{5}C$	$-\frac{22}{5}+\frac{4}{5}C$	C	
18	$-\frac{11}{5}+\frac{3}{5}C_1+\frac{3}{5}C_2$	$\frac{19}{5}-\frac{2}{5}C_1-\frac{7}{5}C_2$	C_1	C_2
19	$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}C$	$\frac{7}{2}-\frac{9}{2}C$	$\frac{17}{2}-\frac{13}{2}C$	C
20	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}C$	$2-C$	$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}C$	C
21	$\frac{12}{7}-\frac{5}{7}C$	$-\frac{6}{7}-\frac{1}{7}C$	$\frac{2}{7}-\frac{2}{7}C$	C
22	$-\frac{5}{4}-\frac{1}{4}C$	$-\frac{17}{4}+\frac{7}{4}C$	C	
23	$-\frac{10}{3}+C-\frac{1}{3}C$	$\frac{5}{3}-C-\frac{1}{3}C$	C_1	C_2
24	$\frac{11}{4}-\frac{7}{12}C$	$-\frac{7}{4}-\frac{1}{12}C$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}C$	C
25	$\frac{9}{4}-\frac{3}{4}C$	$\frac{37}{16}+\frac{5}{16}C$	C	
26	$\frac{35}{2}-\frac{3}{2}C_1+5C_2$	$\frac{17}{2}-\frac{1}{2}C_1+2C_2$	C_1	C_2
27	$\frac{7}{2}-\frac{3}{2}C_1+\frac{5}{2}C_2$	$\frac{1}{2}-C_1+\frac{1}{2}C_2$	C_1	C_2
28	$C+1$	$3C+1$	C	
29	$\frac{14}{11}-\frac{3}{11}C$	$-\frac{15}{11}+\frac{4}{11}C$	$\frac{21}{11}+\frac{1}{11}C$	C
30	$-\frac{9}{4}+\frac{1}{4}C_1+\frac{1}{2}C_2$	$-\frac{5}{4}+\frac{1}{4}C_1-\frac{1}{2}C_2$	C_1	C_2

Завдання 10

Номер варіанта	Номер завдання			
	10			
	α	x	y	z
1	9	$-\frac{15}{17}t$	$\frac{26}{17}t$	t
2	1	$4t$	$-7t$	t
3	−2	$-7t$	$-4t$	t
4	2	$-\frac{7}{6}t$	$\frac{11}{6}t$	t
5	−4	$4t$	0	t
6	3	0	$\frac{2}{3}t$	t
7	−1	$\frac{5}{3}t$	$\frac{1}{3}t$	t
8	1	$-t$	0	t
9	−3	$\frac{13}{22}t$	$\frac{7}{22}t$	t
10	−1	t	0	t
11	6	$-2t$	t	0
12	1	0	$-t$	t
13	1	$\frac{1}{2}t$	$\frac{5}{2}t$	t
14	2	$\frac{5}{3}t$	$-\frac{4}{3}t$	t
15	3	$-3t$	0	t
16	1	$-\frac{4}{11}t$	$\frac{5}{11}t$	t
17	1	$\frac{5}{13}t$	$\frac{2}{13}t$	t
18	2	0	$\frac{1}{2}t$	t

Номер варіанта	Номер завдання			
	10			
	α	x	y	z
19	−4	$2t$	0	t
20	6	$3t$	t	0
21	2	$-2t$	$2t$	t
22	1	$-2t$	t	0
23	4	$-\frac{13}{7}t$	$\frac{5}{7}t$	t
24	−4	t	t	0
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
25	1	$-\frac{3}{5}t$	$-\frac{7}{5}t$	t
26	9	$-5t$	$-7t$	t
27	−2	$-\frac{2}{5}t$	$\frac{1}{5}t$	t
28	−1	$\frac{4}{5}t$	$-\frac{7}{5}t$	t
29	1	t	t	0
30	3	0	$\frac{4}{3}t$	t

Завдання 11, 12

Номер варіанта	Номер завдання		
	11		12
	R_x	R_y	$\vec{a}$
1	$\sqrt{2}\left(\sqrt{6}-1\right)$	$\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)$	$-\vec{p}+2\vec{q}+4\vec{r}$
2	$\frac{3}{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}+\frac{3}{2}$	$\vec{p}-2\vec{q}-3\vec{r}$
3	$3\sqrt{3}$	−7	$-3\vec{p}+2\vec{q}+\vec{r}$

Номер варіанта	Номер завдання		
	11		12
	R_x	R_y	$\vec{a}$
4	$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(4-\sqrt{3}\right)$	$\frac{1}{2}\left(4-3\sqrt{3}\right)$	$\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}$
5	$\sqrt{3}\left(1-\sqrt{6}\right)$	$1+3\sqrt{2}$	$-3\vec{p}+5\vec{q}-2\vec{r}$
6	$2-\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$4\vec{p}-2\vec{q}-\vec{r}$
7	$\frac{1}{2}\left(5\sqrt{2}+3\right)$	$\frac{1}{2}\left(3\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right)$	$-6\vec{p}+2\vec{q}+\vec{r}$
8	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{6}+1\right)$	$\frac{1}{2}\left(3\sqrt{2}-1\right)$	$-\vec{p}+\vec{q}-2\vec{r}$
9	$\frac{5}{2}-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}-\frac{5}{2}\sqrt{3}$	$2\vec{p}-3\vec{q}-4\vec{r}$
10	$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(4+\sqrt{3}\right)$	$\frac{1}{2}\left(4-3\sqrt{3}\right)$	$-3\vec{p}+2\vec{q}+\vec{r}$
11	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}\sqrt{3}$	$-2\vec{p}+\vec{q}+3\vec{r}$
12	$\frac{1}{2}\left(4\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-4\right)$	$-\vec{p}+2\vec{q}+4\vec{r}$
13	$\frac{1}{2}\left(4\sqrt{2}+1\right)$	$\frac{1}{2}\left(4\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$	$2\vec{p}+3\vec{q}+4\vec{r}$
14	$-\frac{1}{2}\left(4\sqrt{2}+3\right)$	$-\frac{1}{2}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)$	$3\vec{p}-2\vec{q}-4\vec{r}$
15	$-\frac{1}{2}\left(3+2\sqrt{3}\right)$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}-1$	$-3\vec{p}+2\vec{q}+5\vec{r}$
16	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\vec{p}+3\vec{q}+5\vec{r}$
17	$\frac{3}{2}-\sqrt{3}$	$1-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$4\vec{p}-\vec{q}-5\vec{r}$
18	$-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-3\right)$	$-2\vec{p}+4\vec{q}+5\vec{r}$
19	$\frac{1}{2}\left(5\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)$	$\frac{1}{2}\left(5-2\sqrt{2}\right)$	$2\vec{p}-6\vec{q}-\vec{r}$

Номер варіанта	Номер завдання		
	11		12
	R_x	R_y	$\vec{a}$
20	-2	$-\sqrt{3}$	$\vec{p}+2\vec{q}-\vec{r}$
21	$\frac{1}{2}$	$-5\frac{\sqrt{3}}{2}$	$3\vec{p}-2\vec{q}+9\vec{r}$
22	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}-1$	$\frac{1}{2}\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)$	$5\vec{p}+2\vec{q}+3\vec{r}$
23	$\frac{3}{4}\left(1-2\sqrt{2}\right)$	$\frac{3}{4}\left(\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)$	$-\vec{p}-3\vec{q}-7\vec{r}$
24	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-2\vec{p}+3\vec{q}+\vec{r}$
25	$-\frac{1}{2}\left(4\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)$	$\frac{1}{2}\left(5\sqrt{2}-4\right)$	$\vec{p}+3\vec{q}-2\vec{r}$
26	$\frac{1}{2}\left(3\sqrt{3}+4\sqrt{2}\right)$	$-\frac{1}{2}\left(3+4\sqrt{2}\right)$	$9\vec{p}+2\vec{q}-7\vec{r}$
27	$-\frac{1}{2}\left(1+3\sqrt{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$	$3\vec{p}-2\vec{q}+4\vec{r}$
28	$2\sqrt{2}$	$-4\sqrt{2}$	$-\vec{p}+5\vec{q}+10\vec{r}$
29	3	$\sqrt{3}$	$2\vec{p}+6\vec{q}-3\vec{r}$
30	$\frac{1}{2}\left(5\sqrt{2}-3\right)$	$-\frac{1}{2}\left(3\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)$	$7\vec{p}-2\vec{q}-\vec{r}$

Завдання 13 (1—4)

Номер варіанта	Номер завдання				
	13				
	1	2		3	4
		$\cos\alpha$	$\cos\beta$		
1	$2\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	6
2	$\sqrt{13}$	$\frac{3}{\sqrt{13}}$	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	4,5

Номер варіанта	Номер завдання				
	13				
	1	2		3	4
		cos α	cos β		
3	$\sqrt{5}$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{4}{\sqrt{65}}$	3,5
4	$\sqrt{29}$	$\frac{2}{\sqrt{29}}$	$\frac{5}{\sqrt{29}}$	$\frac{5}{\sqrt{29}}$	5
5	$\sqrt{13}$	$-\frac{3}{\sqrt{13}}$	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	9
6	$\sqrt{10}$	$-\frac{1}{\sqrt{10}}$	$-\frac{3}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{5\sqrt{2}}$	3,5
7	$\sqrt{5}$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	3
8	2	-1	0	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	3
9	$\sqrt{13}$	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	$\frac{3}{\sqrt{13}}$	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	4,5
10	$\sqrt{10}$	$\frac{3}{\sqrt{10}}$	$-\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	6
11	$3\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{7}{\sqrt{74}}$	7,5
12	$\sqrt{5}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	3
13	$2\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{\sqrt{34}}$	5
14	$\sqrt{17}$	$\frac{4}{\sqrt{17}}$	$\frac{1}{\sqrt{17}}$	$\frac{7}{\sqrt{170}}$	5,5
15	$3\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	12
16	$2\sqrt{10}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$-\frac{3}{\sqrt{10}}$	$\frac{3}{\sqrt{34}}$	25

Номер варіанта	Номер завдання				
	13				
	1	2		3	4
		cos α	cos β		
17	$\sqrt{17}$	$\frac{1}{\sqrt{17}}$	$-\frac{4}{\sqrt{17}}$	$\frac{9}{\sqrt{442}}$	9,5
18	$2\sqrt{5}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	5
19	$\sqrt{34}$	$\frac{5}{\sqrt{34}}$	$\frac{3}{\sqrt{34}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	17
20	$\sqrt{53}$	$\frac{7}{\sqrt{53}}$	$-\frac{2}{\sqrt{53}}$	$\frac{29}{\sqrt{1802}}$	15,5
21	$\sqrt{26}$	$-\frac{1}{\sqrt{26}}$	$-\frac{5}{\sqrt{26}}$	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	9
22	$2\sqrt{5}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{6}{\sqrt{205}}$	13
23	$\sqrt{29}$	$-\frac{2}{\sqrt{29}}$	$\frac{5}{\sqrt{29}}$	$\frac{3}{\sqrt{58}}$	10,5
24	5	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{17}{5\sqrt{26}}$	9,5
25	$\sqrt{13}$	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	$-\frac{3}{\sqrt{13}}$	$\frac{6}{5\sqrt{13}}$	8,5
26	$4\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{5}{\sqrt{74}}$	14
27	$2\sqrt{5}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	15
28	5	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{14}{5\sqrt{37}}$	13,5
29	$\sqrt{17}$	$\frac{1}{\sqrt{17}}$	$\frac{4}{\sqrt{17}}$	$-\frac{5}{\sqrt{34}}$	4,5
30	$\sqrt{41}$	$\frac{4}{\sqrt{41}}$	$\frac{5}{\sqrt{41}}$	$\frac{33}{5\sqrt{82}}$	15,5

Завдання 13(5–7)

Номер варіанта	Номер завдання			
	13			
	5	6	7	
			а	б
1	$x+y-2=0$	$x=1$	$x-y+2=0$	$\frac{6}{\sqrt{2}}$
2	$2x-3y-8=0$	$x-6y-4=0$	$3x+2y-5=0$	$\frac{9}{\sqrt{13}}$
3	$2x+y+3=0$	$x+4y-2=0$	$x-2y+3=0$	$\frac{7}{\sqrt{5}}$
4	$5x-2y-16=0$	$5x-4y-12=0$	$2x+5y-14=0$	$\frac{10}{\sqrt{29}}$
5	$2x+3y+7=0$	$x-3y-1=0$	$3x-2y+3=0$	$\frac{18}{\sqrt{13}}$
6	$3x-y+1=0$	$5x-4y-3=0$	$x+3y-2=0$	$\frac{7}{\sqrt{10}}$
7	$2x+y+1=0$	$x+2y+2=0$	$x-2y-5=0$	$\frac{6}{\sqrt{5}}$
8	$y=-2$	$x-y-4=0$	$x=3$	3
9	$3x-2y+4=0$	$6x-y+2=0$	$2x+3y+1=0$	$\frac{9}{\sqrt{13}}$
10	$x+3y-2=0$	$x-3y-2=0$	$y=3x$	$\frac{12}{\sqrt{10}}$
11	$x+y=0$	$x=0$	$x-y-1=0$	$\frac{5}{\sqrt{2}}$
12	$2x-y+2=0$	$4x+y+4=0$	$x+2y+3=0$	$\frac{6}{\sqrt{5}}$
13	$x+y-3=0$	$x=2$	$y=x$	$\frac{5}{\sqrt{2}}$
14	$x-4y-19=0$	$x+7y+25=0$	$4x+y+2=0$	$\frac{11}{\sqrt{17}}$

Номер варіанта	Номер завдання			
	13			
	5	6	7	
			а	б
15	$x-y+5=0$	$x=0$	$x+y-3=0$	$4\sqrt{2}$
16	$3x+y-14=0$	$x+2y-3=0$	$x-3y-3=0$	$\frac{25}{\sqrt{10}}$
17	$4x+y+6=0$	$7x-3y+1=0$	$x-4y+1=0$	$\frac{19}{\sqrt{17}}$
18	$x+2y-8=0$	$x+7y-18=0$	$2x-y-1=0$	$\sqrt{5}$
19	$3x-5y-9=0$	$x+4y-3=0$	$5x+3y-15=0$	$\sqrt{34}$
20	$2x+7y+6=0$	$7x+9y-10=0$	$7x-2y-8=0$	$\frac{31}{\sqrt{53}}$
21	$5x-y+5=0$	$7x-5y-11=0$	$x+5y+13=0$	$\frac{18}{\sqrt{26}}$
22	$2x+y-10=0$	$3x+8y-15=0$	$x-2y-1=0$	$\frac{13}{\sqrt{5}}$
23	$5x+2y-1=0$	$x+y+1=0$	$2x-5y-32=0$	$\frac{21}{\sqrt{29}}$
24	$3x-4y-6=0$	$7x-3y-14=0$	$4x+3y-16=0$	$\frac{19}{5}$
25	$3x+2y+1=0$	$2x+7y-5=0$	$2x-3y+12=0$	$\frac{17}{\sqrt{13}}$
26	$x-y+3=0$	$9x-2y+6=0$	$x+y=0$	$\frac{7}{\sqrt{2}}$
27	$2x+y-8=0$	$x+3y-4=0$	$x-2y+1=0$	$3\sqrt{5}$
28	$4x+3y+5=0$	$x=1$	$3x-4y-4=0$	$\frac{27}{5}$
29	$4x-y-20=0$	$11x-5y-46=0$	$x+4y+10=0$	$\frac{9}{\sqrt{17}}$
30	$5x-4y+15=0$	$9x-y-4=0$	$4x+5y-21=0$	$\frac{31}{\sqrt{41}}$

Завдання 14—15

Номер варіанта	Номер завдання					
	14		15			
	$\cos\left(\vec{R},\,^\wedge\overline{M_1M_2}\right)$	A	$\left\lvert\vec{M}_0\left(\vec{F}\right)\right\rvert$	Напрямні косинуси вектора $\vec{M}_0\left(\vec{F}\right)$		
				cos α	cos β	cos γ
1	$\frac{5}{\sqrt{42}}$	45	5	0	0	1
2	$-\frac{50}{3\sqrt{690}}$	–50	16	1	0	0
3	$\frac{51}{\sqrt{3233}}$	51	19	0	–1	0
4	$-\frac{29}{5\sqrt{43}}$	–58	26	0	0	1
5	$-\frac{6}{\sqrt{205}}$	–12	38	–1	0	0
6	$-\frac{37}{\sqrt{11865}}$	–37	11	0	1	0
7	$\frac{9}{5\sqrt{6}}$	9	41	0	0	–1
8	$\frac{1}{7\sqrt{30}}$	1	18	1	0	0
9	$-\frac{44}{\sqrt{2494}}$	–44	2	0	–1	0
10	$-\frac{11}{3\sqrt{94}}$	–11	26	0	0	1
11	$-\frac{1}{\sqrt{2726}}$	–1	10	–1	0	0
12	$\frac{53}{3\sqrt{393}}$	53	14	0	–1	0
13	$-\frac{47}{\sqrt{4498}}$	–47	6	0	0	–1
14	$-\frac{23}{\sqrt{4466}}$	–23	9	–1	0	0

Номер варіанта	Номер завдання					
	14		15			
	$\cos\left(\vec{R},\,^\wedge\overline{M_1M_2}\right)$	A	$\left\lvert\vec{M}_0\left(\vec{F}\right)\right\rvert$	Напрямні косинуси вектора $\vec{M}_0\left(\vec{F}\right)$		
				cos α	cos β	cos γ
15	$-\frac{23}{\sqrt{12371}}$	–23	18	0	1	0
16	$\frac{1}{\sqrt{85}}$	2	24	0	0	–1
17	$-\frac{15}{\sqrt{665}}$	–15	14	–1	0	0
18	$\frac{6}{7}$	12	11	0	1	0
19	$-\frac{7}{9\sqrt{2}}$	–14	18	0	0	1
20	$\frac{5}{\sqrt{737}}$	5	7	–1	0	0
21	$-\frac{7}{17\sqrt{3}}$	–7	22	0	1	0
22	$-\frac{8}{5\sqrt{42}}$	–8	7	0	0	1
23	$-\frac{3}{2\sqrt{93}}$	–3	28	–1	0	0
24	$\frac{6}{\sqrt{105}}$	12	36	0	1	0
25	$-\frac{26}{\sqrt{1281}}$	–26	19	0	0	–1
26	$\frac{11}{3\sqrt{35}}$	11	28	1	0	0
27	$\frac{29}{5\sqrt{34}}$	29	6	0	–1	0
28	$-\frac{3}{\sqrt{255}}$	–3	41	0	0	–1

Номер варіанта	Номер завдання					
	14		15			
	$\cos\left(\vec{R}, \hat{} \overline{M_1M_2}\right)$	A	$\left\lvert\vec{M}_0\left(\vec{F}\right)\right\rvert$	Напрямні косинуси вектора $\vec{M}_0\left(\vec{F}\right)$		
				$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$
29	$-\dfrac{23}{\sqrt{714}}$	–23	22	1	0	0
30	$-\dfrac{13}{6\sqrt{47}}$	–13	4	0	1	0

Завдання 16 (1–3)

Номер варіанта	Номер завдання				
	16				
	1	2		3	
		а	б	а	б
1	$\dfrac{31}{2}$	$25x+26y+30z-89=0$	$\dfrac{\sqrt{2201}}{2}$	$\dfrac{x-6}{25}=\dfrac{y-1}{26}=\dfrac{z+6}{30}$	$\dfrac{93}{\sqrt{2201}}$
2	$\dfrac{2}{3}$	$3x-18y-10z+58=0$	$\dfrac{\sqrt{433}}{2}$	$\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-1}{18}=\dfrac{z-3}{10}$	$\dfrac{4}{\sqrt{433}}$
3	$\dfrac{74}{3}$	$7x+17y-25z+86=0$	$\dfrac{3}{2}\sqrt{107}$	$\dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y-7}{17}=\dfrac{z-2}{-25}$	$\dfrac{148}{3\sqrt{107}}$
4	14	$x+z-8=0$	$6\sqrt{2}$	$\dfrac{x-8}{1}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z-7}{1}$	$\dfrac{7}{\sqrt{2}}$
5	$\dfrac{1}{6}$	$19x+5y-16z+33=0$	$\dfrac{\sqrt{642}}{2}$	$\dfrac{x}{19}=\dfrac{y-6}{5}=\dfrac{z-4}{-16}$	$\dfrac{1}{\sqrt{642}}$
6	$\dfrac{35}{6}$	$x+y-2z+2=0$	$\dfrac{7}{2}\sqrt{6}$	$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-10}{1}=\dfrac{z-5}{-2}$	$\dfrac{5}{\sqrt{6}}$
7	$\dfrac{5}{6}$	$x-6y-15z+78=0$	$\dfrac{\sqrt{262}}{2}$	$\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y-2}{6}=\dfrac{z-5}{15}$	$\dfrac{5}{\sqrt{262}}$
8	$\dfrac{1}{3}$	$2y-z-2=0$	$\sqrt{5}$	$\dfrac{x-3}{0}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-7}{1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$
9	$\dfrac{1}{2}$	$18x-7y-8z-22=0$	$\dfrac{\sqrt{437}}{2}$	$\dfrac{x-5}{-18}=\dfrac{y-7}{7}=\dfrac{z-2}{8}$	$\dfrac{3}{\sqrt{437}}$

Номер варіанта	Номер завдання				
	16				
	1	2		3	
		а	б	а	б
10	$\dfrac{37}{3}$	$7x-5y+2z-16=0$	$\sqrt{78}$	$\dfrac{x-5}{7}=\dfrac{y+2}{-5}=\dfrac{z-4}{2}$	$\dfrac{37}{\sqrt{78}}$
11	$\dfrac{55}{6}$	$8x+11y-2z-41=0$	$\dfrac{3\sqrt{21}}{2}$	$\dfrac{x-4}{8}=\dfrac{y-6}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$	$\dfrac{55}{3\sqrt{21}}$
12	$\dfrac{8}{3}$	$y+z-9=0$	$4\sqrt{2}$	$\dfrac{x-6}{0}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-3}{1}$	$\sqrt{2}$
13	$\dfrac{16}{3}$	$3x+5y-z-5=0$	$\dfrac{\sqrt{35}}{2}$	$\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y-6}{5}=\dfrac{z-8}{-1}$	$\dfrac{32}{\sqrt{35}}$
14	8	$6x-3y+2z-7=0$	$\dfrac{21}{2}$	$\dfrac{x-5}{6}=\dfrac{y-7}{-3}=\dfrac{z-7}{2}$	$x-2z-4=0$
15	10	$17x-16y-2z+44=0$	$\dfrac{3\sqrt{61}}{2}$	$\dfrac{x+2}{-17}=\dfrac{y-4}{16}=\dfrac{z-3}{2}$	$\dfrac{20}{\sqrt{61}}$
16	$\dfrac{79}{6}$	$12x-9y+16z-82=0$	$\dfrac{\sqrt{481}}{2}$	$\dfrac{x+4}{12}=\dfrac{y-5}{-9}=\dfrac{z-6}{16}$	$\dfrac{79}{\sqrt{481}}$
17	$\dfrac{67}{6}$	$7x-12y-16z+99=0$	$\dfrac{\sqrt{449}}{2}$	$\dfrac{x}{-7}=\dfrac{y-4}{12}=\dfrac{z+1}{16}$	$\dfrac{67}{\sqrt{449}}$
18	$\dfrac{43}{6}$	$11x-7y+24z-50=0$	$\dfrac{\sqrt{746}}{2}$	$\dfrac{x-7}{11}=\dfrac{y-8}{-7}=\dfrac{z-3}{24}$	$\dfrac{43}{\sqrt{746}}$
19	$\dfrac{23}{3}$	$2x+y-3z-4=0$	$\sqrt{14}$	$\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z-6}{-3}$	$\dfrac{23}{\sqrt{14}}$
20	1	$17x-22y-2z+72=0$	$\dfrac{\sqrt{777}}{2}$	$\dfrac{x-2}{-17}=\dfrac{y-4}{22}=\dfrac{z-6}{2}$	$\dfrac{6}{\sqrt{777}}$
21	$\dfrac{33}{2}$	$x-z-2=0$	$\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{x+4}{-1}=\dfrac{y-6}{0}=\dfrac{z-5}{1}$	$\dfrac{11}{\sqrt{2}}$
22	$\dfrac{16}{3}$	$7x-4y-5z-17=0$	$3\sqrt{10}$	$\dfrac{x-5}{-7}=\dfrac{y-6}{4}=\dfrac{z-2}{5}$	$\dfrac{16}{3\sqrt{10}}$
23	10	$2x+7y+5z-59=0$	$\dfrac{3\sqrt{78}}{2}$	$\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-4}{7}=\dfrac{z-3}{5}$	$\dfrac{20}{\sqrt{78}}$

Номер варіанта	Номер завдання				
	16				
	1	2		3	
		а	б	а	б
24	33	$y+z-1=0$	$9\sqrt{2}$	$\frac{x-2}{0}=\frac{y-8}{1}=\frac{z-4}{1}$	$\frac{11}{\sqrt{2}}$
25	1	$17x-14y-9z-35=0$	$\frac{\sqrt{566}}{2}$	$\frac{x-6}{-17}=\frac{y-2}{14}=\frac{z-5}{9}$	$\frac{6}{\sqrt{566}}$
26	10	$5x+9y+3z-101=0$	$\frac{\sqrt{115}}{2}$	$\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{9}=\frac{z-6}{3}$	$\frac{60}{\sqrt{115}}$
27	$\frac{39}{2}$	$x+y-z+1=0$	$\frac{13\sqrt{3}}{2}$	$\frac{x-2}{1}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-1}{-1}$	$\frac{9}{\sqrt{3}}$
28	$\frac{11}{3}$	$2x+y-z+1=0$	$\frac{\sqrt{161}}{2}$	$\frac{x+2}{2}=\frac{y-5}{11}=\frac{z-4}{-6}$	$\frac{22}{\sqrt{161}}$
29	$\frac{1}{2}$	$14x+9y-8z+13=0$	$\frac{\sqrt{341}}{2}$	$\frac{x-1}{14}=\frac{y}{9}=\frac{z-3}{-8}$	$\frac{3}{\sqrt{341}}$
30	1	$x-2z-4=0$	$\frac{3\sqrt{5}}{2}$	$\frac{x-4}{-1}=\frac{y-7}{0}=\frac{z-1}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$

Завдання 16 (4–5)

Номер варіанта	Номер завдання			
	16			
	4	5		
		x	y	z
1	$\frac{19}{\sqrt{426}}$	$\frac{501}{71}$	$\frac{149}{71}$	$-\frac{336}{71}$
2	$-\frac{123}{\sqrt{15155}}$	$-\frac{878}{433}$	$\frac{505}{433}$	$\frac{1339}{433}$
3	$\frac{83}{3\sqrt{16585}}$	$-\frac{1999}{963}$	$\frac{4225}{963}$	$\frac{5626}{963}$

Номер варіанта	Номер завдання			
	16			
	4	5		
		x	y	z
4	$\frac{2}{\sqrt{102}}$	$\frac{9}{2}$	3	$\frac{7}{2}$
5	$-\frac{35}{2\sqrt{321}}$	$\frac{19}{642}$	$\frac{3857}{642}$	$\frac{1276}{321}$
6	$-\frac{11}{2\sqrt{39}}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{55}{6}$	$\frac{20}{3}$
7	$\frac{82}{3\sqrt{786}}$	$\frac{1053}{262}$	$\frac{247}{131}$	$\frac{1235}{262}$
8	$-\frac{36}{\sqrt{1310}}$	3	$\frac{22}{5}$	$\frac{34}{5}$
9	$\frac{77}{\sqrt{6118}}$	$\frac{2131}{437}$	$\frac{3080}{437}$	$\frac{898}{437}$
10	$\frac{27}{2\sqrt{1209}}$	$\frac{131}{78}$	$\frac{29}{78}$	$\frac{119}{39}$
11	$-\frac{119}{3\sqrt{6279}}$	$\frac{316}{189}$	$\frac{529}{189}$	$\frac{299}{189}$
12	$\frac{9}{10}$	6	5	4
13	$\frac{179}{\sqrt{38185}}$	$\frac{79}{35}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{312}{35}$
14	$-\frac{69}{7\sqrt{233}}$	$\frac{149}{49}$	$\frac{391}{49}$	$\frac{311}{49}$
15	$-\frac{17}{\sqrt{366}}$	$-\frac{26}{183}$	$\frac{412}{183}$	$\frac{509}{183}$
16	$-\frac{559}{\sqrt{474747}}$	$-\frac{976}{481}$	$\frac{1694}{481}$	$\frac{4150}{481}$
17	$\frac{539}{\sqrt{371323}}$	$-\frac{469}{449}$	$\frac{2600}{449}$	$\frac{623}{449}$

Номер варіанта	Номер завдання			
	16			
	4	5		
		x	y	z
18	$-\frac{300}{\sqrt{145470}}$	$\frac{4749}{746}$	$\frac{6269}{746}$	$\frac{603}{373}$
19	$\frac{79}{\sqrt{13118}}$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{121}{14}$	$\frac{15}{14}$
20	$-\frac{39}{\sqrt{1554}}$	$\frac{484}{259}$	$\frac{1080}{259}$	$\frac{1558}{259}$
21	$\frac{8}{3\sqrt{34}}$	$\frac{3}{2}$	6	$-\frac{1}{2}$
22	$\frac{23}{3\sqrt{105}}$	$\frac{281}{45}$	$\frac{238}{45}$	$\frac{10}{9}$
23	$-\frac{21}{\sqrt{741}}$	$-\frac{58}{39}$	$\frac{226}{39}$	$\frac{167}{39}$
24	$-\frac{12}{\sqrt{4258}}$	2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$
25	$\frac{314}{\sqrt{98767}}$	$\frac{1749}{283}$	$\frac{524}{283}$	$\frac{1388}{283}$
26	$\frac{11}{\sqrt{345}}$	$\frac{83}{23}$	$\frac{154}{23}$	$\frac{174}{23}$
27	$-\frac{1}{3\sqrt{3}}$	-1	4	4
28	$-\frac{175}{\sqrt{33166}}$	$-\frac{366}{161}$	$-\frac{563}{161}$	$\frac{776}{161}$
29	$-\frac{569}{5\sqrt{12958}}$	$\frac{299}{341}$	$-\frac{27}{341}$	$\frac{1047}{341}$
30	$\frac{20}{\sqrt{430}}$	$\frac{22}{5}$	7	$\frac{1}{5}$

Завдання 17

№	Номер завдання		
	17		
1	$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$	$(x-4)^2+(y+9)^2=49$	$(x+1)^2=4(y-5),\ x\geq -1$
2	$\frac{(x-2)^2}{9}-y^2=1,$ $x\leq 2$	$(x+3)^2=-4(y-6)$	$x^2+(y-25)^2=4$
3	$\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{4}=1$	$\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{4}=-1$	$(x+4)^2=-2\left(y-\frac{3}{2}\right),$ $x\geq -4$
4	$\frac{x^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$	$(y-3)^2=9(x+2)$	$\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1,\ x\geq -1$
5	$(x+3)^2+y^2=8$	$(y+7)^2=9(x-1),$ $y\geq -7$	$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$
6	$x^2-\frac{(y+2)^2}{9}=1$	$(x+1)^2=-2(y-3)$	$\frac{(x+4)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{4}=1,\ x\leq -4$
7	$(x-7)^2=-25(y-4),$ $x\leq 7$	$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$	$\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{25}=1$
8	$(y-4)^2=-8(x+1)$	$(x-5)^2+(y+2)^2=25$	$\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{y^2}{25}=-1,\ x\leq 3$
9	$\frac{(x+3)^2}{9}-(y-2)^2=-1$	$(x-2)^2=-4(y+1)$	$\frac{x^2}{36}+\frac{(y+3)^2}{16}=1,\ y\leq -3$
10	$(x+4)^2+(y-1)^2=9,$ $x\geq -4$	$\frac{x^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$	$(y+5)^2=8(x-3)$
11	$\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{25}=1$	$(y+1)^2=3(x-2),$ $y\leq -1$	$(x-4)^2+y^2=1$
12	$(x-2)^2=-(y+5)$	$(x-5)^2+\frac{(y+2)^2}{4}=1$	$\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1,\ x\geq 1$

№	Номер завдання		
	17		
13	$(x-1)^2+y^2=1$	$(x-2)^2-\frac{(y+1)^2}{9}=-1,$ $y\le -1$	$(y+4)^2=5(x-3)$
14	$(x-1{,}5)^2=2(y+2),$ $x\ge 1{,}5$	$\frac{(x+2)^2}{16}+(y-3)^2=1$	$\frac{(x-4)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{9}=1$
15	$\frac{(x+4)^2}{9}-(y-1)^2=-1$	$(x+1)^2=7(y-4)$	$(x+5)^2+(y-3)^2=49,$ $y\le 3$
16	$\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$	$(x-2)^2+(y+6)^2=64$	$(y+3)^2=-(x-2),\ \ y\le -3$
17	$(y+2)^2=-3(x+1)$	$(x-3)^2+(y+2)^2=25$	$\frac{(x+3)^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1,\ y\ge 0$
18	$\frac{(x+6)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,\ y\ge 0$	$(x-6)^2=-5(y+2)$	$(x+1)^2+y^2=64$
19	$\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{16}=-1$	$(x-3)^2+(y+4)^2=36$	$(x-4)^2=-18(y-1),\ \ x\le 4$
20	$(y-3)^2=5(x+4)$	$(x-2)^2+(y-6)^2=4$	$\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{16}=1,\ x\le 2$
21	$x^2+(y-2)^2=9$	$\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{36}=-1$	$(y-5)^2=-4x,\ \ y\le 5$
22	$(x+5)^2+(y-7)^2=1$	$(x+6)^2=y-2$	$\frac{(x+5)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{4}=-1,\ x\ge -5$
23	$(x-2)^2-\frac{(y+8)^2}{4}=1$	$(x+1)^2+(y-4)^2=4$	$(x+1)^2=-(y-5),\ x\le -1$
24	$(y+1)^2=-4(x-3)$	$\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$	$\frac{(x+6)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{25}=1,\ y\ge 1$
25	$(x-7)^2+(y+2)^2=16$	$(x-2)^2=3(y+5)$	$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{25}=1,\ x\ge 1$

№	Номер завдання		
	17		
26	$\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{16}=-1$	$(y-2)^2=2(x+4),$ $y\ge 2$	$(x+2)^2+y^2=16$
27	$(x+2)^2-\frac{(y+1)^2}{25}=1$	$(x+4)^2+(y-3)^2=16$	$(x+7)^2=y,\ \ x\le -7$
28	$(y+1)^2=-3(x+2)$	$x^2+\frac{(y-6)^2}{4}=1$	$\frac{(x+6)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{25}=-1,\ \ x\le -6$
29	$\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{4}=1,$ $y\le 3$	$(x-2)^2=8(y+3)$	$(x+5)^2+(y-3)^2=10$
30	$\frac{(x+2)^2}{64}-(y-1)^2=1$	$(x+3)^2+(y-1)^2=2$	$(y-5)^2=-3(x-3),\ \ y\ge 5$

Завдання 18

Номер варіанта	Номер завдання
	18
1	Еліпсоїд обертання $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{1}+\frac{(z-1)^2}{4}=1$
2	Однопорожнинний гіперболоїд $\frac{(x-4)^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{(z+1)^2}{1}=1$
3	Сфера $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=25$
4	Еліптичний параболоїд $\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{36}=z$
5	Прямий круговий конус $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{(z+2)^2}{9}=0$
6	Двопорожнинний гіперболоїд $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}-\frac{(z-1)^2}{36}=-1$
7	Параболічний циліндр $(y-5)^2=6(x+3)$

Номер варіанта	Номер завдання
	18
8	Еліпсоїд обертання $\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{1}+\frac{z^2}{1}=1$
9	Гіперболічний параболоїд $\frac{(x+1)^2}{1}-\frac{(z-3)^2}{9}=y$
10	Прямий круговий конус $\frac{(y-4)^2}{1}+\frac{(z+1)^2}{1}-\frac{(x+3)^2}{4}=0$
11	Однопорожнинний гіперболоїд $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{1}-\frac{(z-1)^2}{16}=1$
12	Сфера $(x-3)^2+(y+2)^2+z^2=9$
13	Двопорожнинний гіперболоїд $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{z^2}{1}-\frac{(y-2)^2}{36}=-1$
14	Прямий круговий конус $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(z-2)^2}{9}-\frac{y^2}{1}=0$
15	Еліптичний параболоїд $\frac{(y+2)^2}{1}+\frac{(z-1)^2}{25}=x$
16	Гіперболічний циліндр $\frac{(x+2)^2}{1}-\frac{(y-6)^2}{4}=1$
17	Еліпсоїд обертання $\frac{(x-5)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{4}+\frac{(z-1)^2}{9}=1$
18	Прямий круговий циліндр $(x+3)^2+(y-1)^2=9$
19	Однопорожнинний гіперболоїд $\frac{(y-1)^2}{4}+\frac{z^2}{16}-\frac{(x+2)^2}{1}=1$
20	Прямий круговий конус $\frac{(x+3)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{25}-\frac{(z+1)^2}{4}=0$
21	Двопорожнинний гіперболоїд $\frac{(y+4)^2}{9}+\frac{(z-2)^2}{1}-\frac{(x+1)^2}{4}=-1$
22	Еліптичний циліндр $\frac{x^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$

Номер варіанта	Номер завдання
	18
23	Еліптичний параболоїд $\frac{(x+5)^2}{9}+\frac{(z-2)^2}{1}=y$
24	Прямий круговий конус $\frac{(y+4)^2}{4}+\frac{(z-2)^2}{4}-\frac{(x+1)^2}{1}=0$
25	Триосний еліпсоїд $\frac{(x+3)^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{(z+2)^2}{9}=1$
26	Гіперболічний параболоїд $\frac{(y+2)^2}{9}-\frac{(z-1)^2}{4}=x$
27	Однопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{1}+\frac{(z+1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{25}=1$
28	Гіперболічний параболоїд $\frac{(x-3)^2}{25}-\frac{(y+1)^2}{4}=z$
29	Прямий круговий циліндр $(x+7)^2+(y-2)^2=49$
30	Двопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{1}+\frac{(y+2)^2}{36}-\frac{(z-1)^2}{9}=-1$

ЛІТЕРАТУРА

1. *Білоусова В. П. та ін.* Аналітична геометрія. — К.: Вища шк., 1973.

2. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1987.

3. *Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — М.: Наука, 1987.

4. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. — М.: Наука, 1984.

5. *Вишенський В. А., Перестюк М. О., Самойленко А. М.* Збірник задач з математики. — К.: Либідь, 1993.

6. *Головина Л. И.* Линейная алгебра и некоторые её приложения. — М.: Наука, 1985.

7. *Гусятников П. П., Резниченко С. В.* Векторная алгебра в примерах и задачах. — М.: Высшая шк., 1985.

8. *Дубовик Н. В., Юрик І. І.* Вища математика. — К.: Вища шк., 1993.

9. *Ефимов Н. В.* Краткий курс аналитической геометрии. — М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1958.

10. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1981.

11. *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1975.

12. *Лопатинський Я. Б.* Основи лінійної алгебри. — Львів: Вид-во Львів. ун-ту, 1959.

13. *Мантуров О. В., Матвеев Н. М.* Курс высшей математики. — М.: Высшая шк., 1986.

14. *Фадеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре. — М.: Наука, 1977.

15. Сборник задач по математике / Под ред. Ефимова А. В., Демидовича Б. П. — М.: Наука, 1981.

16. *Цубербиллер О. Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. — М.: Гос. изд-во техн.-теорет. литературы, 1948.

17. *Шкіль М. Л., Колесник Т. В., Котлова В. М.* Вища математика. — К.: Вища шк. Головне вид-во, 1985.

Навчальне видання

ЛУБЕНСЬКА Тетяна Валентинівна
ЧУПАХА Людмила Дмитрівна

ЗБІРНИК ЗАДАЧ
З ЛІНІЙНОЇ, ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Навчальний посібник

Редактор *Л. Тютюнник*
Художник обкладинки *Т. Зяблiцева*
Верстка *О. Іваненко, Н. Андреєва*