М. І. Шкіль

# Математичний аналіз

$\lim \int \frac{d}{dx}$

Частина 2

М. І. ШКІЛЬ

# Математичний аналіз

У двох частинах

ЧАСТИНА

**2**

*Затверджено Міністерством освіти і науки України*

Підручник для студентів
математичних спеціальностей
вищих навчальних закладів

3-тє видання, перероблене
і доповнене



КИЇВ
«ВИЩА ШКОЛА»
2005

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
Ш66

*Гриф надано Міністерством освіти і науки України (лист від 23 червня 2004 р. № 1/11-3052)*

*Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено*

*Автору за підручник «Математичний аналіз» у двох частинах (К.: Вища шк., 1978. — Ч. 1; 1981. — Ч. 2) присуджено Державну премію України в галузі науки і техніки 1996 року*

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. *І. О. Шевчук* (Київський національний університет імені Тараса Шевченка); д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. П. Яковець* (Ніжинський державний педагогічний університет імені Миколи Гоголя); д-р пед. наук, проф. *З. І. Слєпкань* (Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова); д-р пед. наук, проф. *Н. М. Шунда* (Вінницький державний педагогічний університет імені М. Коцюбинського)

Редактор *Т. М. Глушко*

**Шкіль М. І.**

Ш66 Математичний аналіз: Підручник: У 2 ч. Ч. 2. — 3-тє вид., переробл. і допов. — К.: Вища шк., 2005. — 510 с.: іл.
ISBN 966-642-290-5 (ч. 2)
ISBN 966-642-285-9

Розглянуто такі поняття, як функція кількох змінних, неперервність, а також диференціальне та інтегральне числення. На конкретних прикладах показано застосування методу математичного аналізу до розв'язування задач із геометрії, фізики, механіки, техніки.

Третє видання (2-ге вид. — 1995 р.) перероблене і доповнене з урахуванням змін у навчальних програмах і державних освітніх стандартів з математики.

Для студентів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів.

**УДК 517(075.8)**
**ББК 22.161я73**

ISBN 966-642-290-5 (ч. 2)
ISBN 966-642-285-9



# Ряди

## РОЗДІЛ 1

### 1.1 ПОНЯТТЯ ПРО ЧИСЛОВИЙ РЯД І ЙОГО СУМУ

Поняття про числовий ряд розглядають ще в шкільному курсі математики під час вивчення нескінченної геометричної прогресії.

Справді, нехай маємо числову послідовність виду

$$u,\ ua,\ uq^2, ...,\ uq^{n-1}, ....$$

Таку послідовність називають *нескінченною геометричною прогресією,* а число $q$ — *знаменником прогресії.*

Постає запитання: що розуміти під сумою такої прогресії? Адже застосовувати метод послідовного додавання членів прогресії не можна, оскільки їх нескінченна множина. Тому введено спеціальне означення суми нескінченної геометричної прогресії.

Знайдемо суму $S_n$ перших $n$ членів прогресії. Таку суму можна знайти, оскільки в ній скінченне число доданків, а саме $n$:

$$S_n = u + uq + ... + uq^{n-1} = \frac{u\left(1-q^n\right)}{1-q},\ \text{якщо}\ q \neq 1;$$

$S_n = nu$, якщо $q = 1$;

$$\begin{cases} 0, \text{якщо } q = -1 \text{ і } n - \text{парне число;} \\ u, \text{якщо } q = -1 \text{ і } n - \text{непарне число.} \end{cases}$$

***Означення.*** Границю $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, якщо вона існує, називають *сумою нескінченної геометричної прогресії.*

Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Для цього розглянемо такі випадки.

I. $|q| < 1$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u\left(1-q^n\right)}{1-q} = \frac{u}{1-q}.$$

II. $|q| > 1$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u\left(1-q^n\right)}{1-q} = \infty.$$

III. $q = 1$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} nu = \infty.$$

IV. $q=-1$. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує.

Отже, нескінченна геометрична прогресія має суму тоді і тільки тоді, коли $|q|<1$, тобто коли вона є спадною. У цьому випадку записують

$$u+uq+\ldots+uq^{n-1}+\ldots=\frac{u}{1-q}.$$

Нехай маємо довільну числову послідовність

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n,\ldots.$$

Вираз вигляду

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \tag{1}$$

називають *числовим рядом* або *рядом.* Числа $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n$ називають *членами ряду*, відповідно першим, другим і т. д., $n$-м членом; $a_n$ називають ще *загальним членом ряду*.

Для позначення ряду застосовують і такий символ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots.$$

Поняття суми числового ряду (1) вводять так само, як і для нескінченної геометричної прогресії. Знайдемо суму перших $n$ членів ряду

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

Надаючи $n$ значень 1, 2, 3, … , дістанемо таку числову послідовність:

$$S_1=a_1;$$
$$S_2=a_1+a_2;$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Числа $S_1,\ S_2,\ldots,\ S_n$ називають *частковими сумами* ряду (1), зокрема $S_1$ — першою, $S_2$ — другою і т. д., $S_n$ — $n$-ю частковою сумою.

***Означення.*** Скінченну границю, якщо вона існує, послідовності $\{S_n\}$ часткових сум називають *сумою числового ряду* (1).

Отже, якщо через $S$ позначити суму ряду, то, згідно з означенням,

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n.$$

У цьому випадку також записують

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=S.$$

***Означення.*** Числовий ряд (1) називають *збіжним*, якщо він має суму (існує скінченна границя послідовності часткових сум).

Числовий ряд (1) називають *розбіжним*, якщо він не має суми (границя послідовності часткових сум цього ряду не існує).

Інакше кажучи, числовий ряд (1) називають *збіжним*, якщо послідовність $\{S_n\}$ його часткових сум є збіжною, і числовий ряд (1) називають *розбіжним*, якщо послідовність $\{S_n\}$ його часткових сум є розбіжною.



Розглянемо ряд

$$u+uq+uq^2+\ldots+uq^{n-1}+\ldots.$$

Цей ряд називають *геометричним*, а число $q$ — *знаменником* ряду. Отже, при $|q|<1$ геометричний ряд є збіжним, а при $|q|\ge 1$ — розбіжним.

❑ **Приклади**

**1.** Числовий ряд $1+2+3+\ldots+n+\ldots$ є розбіжним.

Справді,

$$S_n=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

звідси

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2}=+\infty,$$

тобто послідовність $S_n$, $n=1,2,\ldots$, є розбіжною.

**2.** Числовий ряд $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$ є збіжним.

Справді,

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Отже, ряд збігається і його сума дорівнює 1

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=1.$$

Як бачимо, кожному числовому ряду можна поставити у відповідність послідовність його часткових сум. Тоді питання про збіжність ряду зводиться до дослідження збіжності (розбіжності) числової послідовності.

Виявляється, що й, навпаки, кожній числовій послідовності $\{x_n\}$ можна поставити у відповідність числовий ряд

$$x_1+(x_2-x_1)+\ldots+(x_n-x_{n-1})+\ldots$$

такий, що часткова сума $S_n$ дорівнює загальному члену послідовності $\{x_n\}$.

Справді,

$$S_n=x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\ldots+(x_n-x_{n-1})=x_n.$$

Звідси, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ існує (ряд збігається), то й $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ також існує (числова послідовність збігається), а якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує (ряд розбігається), то й $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ також не існує (числова послідовність розбігається).

У багатьох випадках досліджувати на збіжність (розбіжність) значно простіше числовий ряд, ніж числову послідовність.

Числові ряди часто використовуються під час розв'язування найважливіших задач як теоретичних, так і практичних. Зокрема, застосування рядів є досить ефективним при наближених обчисленнях значень тригонометричних функцій, логарифмів чисел тощо.

## 1.2
## НЕОБХІДНА УМОВА ЗБІЖНОСТІ РЯДУ. ЗАЛИШОК РЯДУ. ДІЇ НАД РЯДАМИ

Нехай числовий ряд

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \qquad (1)$$

є збіжним. Тоді є збіжною й послідовність $\{S_n\}$ його часткових сум, тобто

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

але тоді й

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S,$$

де $n>1$.

Знайдемо різницю

$$S_n - S_{n-1} = a_n.$$

Звідси

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Отже, дістали таку необхідну умову збіжності числового ряду: для того щоб числовий ряд збігався, потрібно, щоб границя загального члена цього ряду при $n\to\infty$ дорівнювала нулю:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \qquad (2)$$

❑ **Приклади**

**1.** Числовий ряд $1+1+1+\ldots+1+\ldots$ є розбіжним.

Справді,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0.$$

**2.** Числовий ряд $\frac{1}{1001}+\frac{2}{2001}+\ldots+\frac{n}{1000n+1}$ є розбіжним.

Справді,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{1000n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1000+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1000} \neq 0.$$

Зазначимо, що умова (2) є тільки необхідною умовою збіжності числового ряду (вона може виконуватися, але відповідний числовий ряд при цьому може бути розбіжним).

❑ **Приклад**

**3.** Числовий ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \qquad (3)$$

називають *гармонічним* тому, що кожен член цього ряду, починаючи з другого, є середнім гармонічним числом двох сусідніх членів.

Число $c$ називають *середнім гармонічним числом* чисел $a$ і $b$, якщо

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$



Звідси випливає, що необхідна умова збіжності для ряду (3) виконується. Тут $a_n=\frac{1}{n}$ і

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Проте цей ряд є розбіжним. Справді, запишемо часткову суму

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Нехай $n=2^k$. Тоді

$$S_{2^k} = 1+\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}_{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)}_{2^2}+$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}\right)}_{2^3}+\ldots+\underbrace{\left(\frac{1}{2^{k-1}}+\ldots+\frac{1}{2^k-1}\right)}_{2^{k-1}}.$$

Складемо таку очевидну нерівність:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n-1} > n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Застосувавши цю нерівність до кожної із сум, що містяться в круглих дужках попередньої рівності, матимемо

$$S_{2^k} > 1+\frac{k}{2}.$$

Звідси

$$\lim_{k\to\infty} S_{2^k} = +\infty.$$

Отже, гармонічний ряд є розбіжним.

У ряду (1) відкинемо перші $n$ членів. Дістанемо

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+k}+\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}. \qquad (4)$$

Ряд (4) називають $n$-м *залишком* ряду (1).

**Т е о р е м а 1.** Якщо збігається (розбігається) ряд (1), то й збігається (розбігається) ряд (4); і, навпаки, якщо збігається (розбігається) ряд (4), то й збігається (розбігається) ряд (1).

Цю теорему можна сформулювати ще так: числові ряди (1) і (4) одночасно збігаються або розбігаються.

Д о в е д е н н я. Нехай ряд (1) збігається. Позначимо його часткові суми через $S_m$. Тоді

$$S_m = a_1+a_2+\ldots+a_m;\quad \lim_{m\to\infty} S_m = S.$$

Часткові суми ряду (4) позначимо через $S'_k$. При цьому справджується рівність

$$S'_k = S_{n+k}-(a_1+a_2+\ldots+a_n) = S_{n+k}-S_n. \qquad (5)$$

Перейдемо в цій рівності до границі, якщо $k\to\infty$ при фіксованому $n$. Матимемо

$$\lim_{k\to\infty} S'_k = \lim_{k\to\infty}\left(S_{n+k}-S_n\right) = S-S_n.$$

Отже, ряд (4) збігається, причому його сума (позначимо її через $r_n$) дорівнює

$$r_n = S - S_n. \qquad (6)$$

Нехай ряд (4) збігається. Доведемо, що й ряд (1) збігається. Запишемо рівність (5) так:

$$S_{n+k} = S'_k + S_n.$$

Перейдемо до границі, якщо $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty} S_{n+k} = \lim_{k\to\infty} \left(S'_k + S_n\right) = r_n + S_n.$$

Отже, існує границя послідовності часткових сум ряду (1), тобто ряд (1) збігається.

Справедливість двох інших тверджень (із розбіжності ряду (1) випливає розбіжність ряду (4) і з розбіжності ряду (4) впливає розбіжність ряду (1)) дістанемо з доведеного.

Справді, якщо один із цих рядів розбігається, то й другий розбігається, тому що якби другий ряд збігався, то за доведеним і перший ряд також збігався б.

Зазначимо, що ряд (4) утворюється з ряду (1) відкиданням з його початку скінченного числа членів. Ряд (1) можна розглядати як такий, що утворюється з ряду (4) приєднанням до нього на початку скінченного числа нових членів. Тоді, згідно з теоремою, матимемо, що на збіжність (розбіжність) ряду не впливає приєднання чи відкидання на початку скінченного числа членів.

**Н а с л і д о к.** У збіжному ряду сума $n$-го залишку при $n \to \infty$ прямує до нуля.

Справді, якщо в рівності (6) перейти до границі при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \left(S - S_n\right) = S - S = 0.$$

Це дає змогу дістати для збіжних рядів наближену рівність

$$S \approx S_n. \qquad (7)$$

При цьому похибка дорівнює $r_n$ і прямує до нуля, якщо $n \to \infty$.

❑ **Приклад**

**4.** Знайти суму ряду

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots$$

і суму $n$-го залишку.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$



Тоді

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Отже, ряд збігається і його сума (позначимо її через $S$) $S = \frac{1}{2}$.

Знаходимо суму $n$-го залишку

$$r_n = S - S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2(2n+1)}.$$

Таким чином, якщо в наближеній рівності (7) взяти $n = 25$, то матимемо похибку

$$r_n = \frac{1}{102} < 0,01.$$

Нехай маємо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (8)$$

і число $c \neq 0$.

Числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n \qquad (9)$$

називають *добутком ряду* (8) на число $c$.

Нехай крім ряду (8) маємо ще ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n. \qquad (10)$$

*Сумою рядів* (8) і (10) називають числовий ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + b_n\right). \qquad (11)$$

*Різницею рядів* (8) і (10) називають числовий ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - b_n\right). \qquad (12)$$

**Т е о р е м а 2.** Якщо збігається ряд (8), то збігається й ряд (9); при цьому справджується рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

**Т е о р е м а 3.** Якщо збігаються ряди (8) і (10), то збігаються й ряди (11) і (12), причому виконуються рівності

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Доведемо теорему 2 (теорема 3 доводиться аналогічно).

**Доведення.** Позначимо часткові суми ряду (8) через $A_n$, а часткові суми ряду (9) — через $C_n$, $n = 1, 2, \ldots$ . Нехай

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A,$$

тоді

$$C_n = cA_n.$$

Перейдемо в цій рівності до границі при $n \to \infty$. Маємо

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} cA_n = c \lim_{n\to\infty} A_n = cA.$$

Отже, ряд (9) збігається і його сума (позначимо її через $B$)

$$B = cA$$

або

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Теорему доведено.

## 1.3 ДОДАТНІ РЯДИ. ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ

Числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{1}$$

в якого всі члени є невід'ємними числами, $a_n \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots,$ називають *додатним*.

Як і раніше, позначимо через $S_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ часткові суми додатного ряду (1). Оскільки

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то послідовність $\{S_n\}$ є неспадною. Така послідовність, згідно з теоремою про існування границі монотонної послідовності, збігається, якщо вона обмежена зверху, і розбігається, якщо вона не обмежена зверху. Отже, дістанемо таку теорему.

**Теорема 1.** Для того щоб додатний ряд (1) збігався, необхідно й достатньо, щоб послідовність його часткових сум $\{S_n\}$ була обмеженою зверху.

Наступні теореми (ознаки) ґрунтуються на цій теоремі.

**Теорема 2 (ознака порівняння).** Якщо члени додатних рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{A}$$

і

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots, \tag{B}$$



починаючи з певного значення $n$ і для всіх наступних його значень (при $n > N$), задовольняють нерівність

$$a_n \leq b_n,$$

то зі збіжності ряду (B) випливає збіжність ряду (A), а з розбіжності ряду (A) випливає розбіжність ряду (B).

**Доведення.** Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що нерівності

$$a_n \leq b_n$$

виконуються для всіх $n = 1, 2, \ldots,$ оскільки відкидання скінченного числа перших членів ряду не впливає на його збіжність (розбіжність). Позначимо часткові суми ряду (A) через $S_n$, а часткові суми ряду (B) — через $S'_n$. Тоді справджуються нерівності

$$S_n \leq S'_n.$$

Нехай ряд (B) збігається. Тоді послідовність $\{S'_n\}$, згідно з попередньою теоремою, обмежена зверху

$$S'_n < M, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Проте

$$S_n < M, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Звідси і з попередньої теореми випливає, що ряд (A) збігається.

Нехай ряд (A) розбігається. Тоді ряд (B) також розбігається, оскільки якби останній збігався, то за доведеним і ряд (A) також збігався б.

Теорему доведено.

❑ **Приклади**

Дослідити на збіжність (розбіжність) числові ряди

**1.**

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}} + \ldots . \tag{2}$$

**Розв'язання.** Побудуємо числовий додатний ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots + \frac{1}{2^{2k}} + \ldots . \tag{3}$$

Члени заданого ряду, починаючи з другого, менші за відповідні члени побудованого ряду. Ряд (3) без першого члена є геометричним рядом, знаменник якого $q = \frac{1}{2^2} < 1$. Отже, він збігається, тому й ряд (2) збігається.

**2.**

$$\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{4} + \ldots + \sin\frac{\pi}{2^n} + \ldots . \tag{4}$$

**Розв'язання.** Члени ряду (4) менші за відповідні члени ряду

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \ldots + \frac{\pi}{2^n} + \ldots . \tag{5}$$

Ряд (5) є геометричним рядом із знаменником $q = \frac{1}{2} < 1$. Тому він збіжний. Отже, згідно з попередньою теоремою, ряд (4) також збіжний.

**3.**

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln(n+1)} + \ldots . \tag{6}$$

Р о з в ' я з а н н я. Члени ряду (6) більші від членів додатного ряду

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}+\ldots. \qquad (7)$$

Ряд (7) є гармонічним рядом без першого члена. Він розбіжний, тому й ряд (6) розбіжний.

**Т е о р е м а 3 (ознака Д'Аламбера[1]).** Якщо в ряду (1) всі члени $a_n > 0$ та існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=r, \qquad (8)$$

то при $r<1$ ряд (1) збігається, а при $r>1$ ряд (1) розбігається.

Д о в е д е н н я. Розглянемо випадок, коли $r<1$. Випадок, коли $r>1$, доводиться аналогічно.

Візьмемо число $q$ таке, що $r<q<1$. Тоді існує натуральне число $N$ таке, що при всіх $n>N$ виконується нерівність

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<q, \text{ або } a_{n+1}<a_n q, \; n>N.$$

Надаючи $n$ значень $N+1$, $N+2, \ldots$, матимемо такі нерівності:

$$a_{N+2}<a_{N+1}q;$$
$$a_{N+3}<a_{N+1}q^2;$$
$$a_{N+4}<a_{N+1}q^3;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{N+k}<a_{N+1}q^{k-1};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Як бачимо, члени числового додатного ряду (1), починаючи з члена ряду $a_{N+2}$, менші за відповідні члени ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{N+1}q^k.$$

Цей ряд збігається, оскільки він є геометричним рядом, знаменник $q$ якого $0<q<1$.

Теорему доведено.

Зазначимо, що ознаку Д'Аламбера не можна застосовувати при $r=1$. Визначити збіжність (розбіжність) ряду в цьому випадку потрібно за допомогою інших ознак.

❑ **Приклади**

Дослідити на збіжність (розбіжність) числові ряди

**4.**

$$\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}+\ldots. \qquad (9)$$

[1] *Д'Аламбер Ж.* (1717—1783) — французький математик.



Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо ознаку Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}=0.$$

Отже, тут $r=0<1$. Ряд (9) збігається.

**5.**

$$\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\ldots+\frac{3^n}{n\cdot 2^n}+\ldots. \qquad (10)$$

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}n2^n}{3^n(n+1)2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{3}{2}.$$

Отже, тут $r=\frac{3}{2}>1$. Ряд (10) розбігається.

**Т е о р е м а 4 (ознака Коші).** Якщо в додатному ряду (1) існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=k, \qquad (11)$$

то при $k<1$ ряд (1) збігається, а при $k>1$ — розбігається.

Д о в е д е н н я. Розглянемо випадок, коли $k<1$. Випадок, коли $k>1$, доводиться аналогічно.

Візьмемо таке число $q$, що $k<q<1$. Тоді існує таке число $N$, що при $n>N$ виконується нерівність

$$\sqrt[n]{a_n}<q, \text{ або } a_n<q^n, \; n>N.$$

Отже, члени ряду (1), починаючи з $a_{N+1}$, менші за відповідні члени збіжного геометричного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n,$$

знаменник $q$ якого

$$0<q<1.$$

Тому й ряд (1) за ознакою порівняння є збіжним.

Теорему доведено.

Зауважимо, що за ознакою Коші, як і за ознакою Д'Аламбера, не можна встановити збіжність (розбіжність) ряду тоді, коли границя (11) існує і дорівнює 1. У цьому випадку ряд може збігатися або розбігатися. Тому його потрібно досліджувати за допомогою інших ознак.

❑ **Приклади**

Дослідити на збіжність числові ряди

**6.**

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}.$$

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо границю

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0.$$

Отже, тут $r=0<1$. Ряд збігається.

7.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^n, \quad a>0.$$

**Р о з в ' я з а н н я.** Знаходимо границю
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{an}{n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{n+1}=a.$$

Отже, цей ряд збігається, якщо $a<1$, і розбігається, якщо $a>1$. При $a=1$ ознаку Коші не можна застосовувати, тому що
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

Проте цей ряд розбігається при $a=1$. Справді, знайдемо границю загального члена
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}\neq 0.$$

Як бачимо, тут не виконується необхідна умова збіжності числового ряду (границя загального члена при $n\to\infty$ не дорівнює нулю). Тому ряд розбігається.

**Т е о р е м а 5 (інтегральна ознака).** Якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $1\le x<+\infty$ і при $x\ge a\ge 1$ неперервна, додатна й спадна, то для того щоб збігався числовий ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+\ldots, \qquad (12)$$
необхідно й достатньо, щоб збігався невласний інтеграл
$$\int_a^{+\infty}f(x)dx. \qquad (13)$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо натуральні числа $k$, $k+1$, ..., $k+n$, де $k\ge a$. Тоді на відрізку $[k;k+1]$ функція, згідно з теоремою, спадає. Тому для $x\in[k;k+1]$ справджуються нерівності
$$f(k+1)\le f(x)\le f(k).$$

За властивістю визначеного інтеграла виконуються нерівності
$$\int_k^{k+1}f(k+1)dx\le\int_k^{k+1}f(x)dx\le\int_k^{k+1}f(k)dx$$
або
$$f(k+1)\le\int_k^{k+1}f(x)dx\le f(k).$$

Ці нерівності справедливі для будь-якого $k=n, n+1, \ldots, n+m, \ldots$ . Надаючи $k$ значень $n$, $n+1, \ldots$, $n+m$, маємо
$$f(n+1)\le\int_n^{n+1}f(x)dx\le f(n);$$



$$f(n+2)\le\int_{n+1}^{n+2}f(x)dx\le f(n+1);$$
$$f(n+m+1)\le\int_{n+m}^{n+m+1}f(x)dx\le f(n+m).$$

Додамо почленно ці нерівності
$$f(n+1)+f(n+2)f(n+3)+\ldots+f(n+m+1)\le$$
$$\le\int_n^{n+m+1}f(x)dx\le f(n)+f(n+1)+\ldots+f(n+m). \qquad (14)$$

Звідси й випливає справедливість теореми.

Справді, нехай невласний інтеграл (13) збігається. Тоді, оскільки $f(x)$ додатна при $x\ge a$, маємо
$$\int_n^{n+m+1}f(x)dx<\int_a^{+\infty}f(x)dx.$$

Проте
$$f(n+1)+f(n+2)+\ldots+f(n+1+m)<\int_a^{+\infty}f(x)dx.$$

У лівій частині останньої нерівності є часткова сума $n$-го залишку ряду (12). Отже, ряд, що є $n$-м залишком ряду (12), збігається. Тому й ряд (12) збігається.

Нехай невласний інтеграл (13) розбігається. Тоді й ряд (12) розбігається. Припустимо супротивне. Нехай ряд (12) збігається. Тоді збігатиметься й будь-який ряд, що є залишком ряду (12), зокрема ряд
$$f(n)+f(n+1)+\ldots+f(n+m)+\ldots .$$

Послідовність часткових сум $\{S_m\}$ цього ряду є обмеженою зверху, тобто
$$S_m=f(n)+f(n+1)+\ldots+f(n+m)<M.$$

Проте, згідно з нерівністю (14),
$$\int_n^{n+m+1}f(x)dx<M.$$

Оскільки $f(x)>0$, то інтеграл $\int_n^{n+m+1}f(x)dx$ при зростанні $m$ монотонно зростає і є обмеженим зверху. Отже, існує границя
$$\lim_{m\to\infty}\int_n^{n+m+1}f(x)dx.$$

Це означає, що невласний інтеграл (13) збігається, а за припущенням він розбігається. Отже, зайшли у суперечність.

Теорему доведено.

Таким чином, ряд (12) і невласний інтеграл одночасно збігаються або розбігаються.

❑ **Приклади**

Дослідити на збіжність числові ряди

**8.** Ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\ldots$, де $\alpha$ — дійсне число.

Р о з в ' я з а н н я. Якщо $\alpha\in(-\infty;0)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=+\infty,$$

і, отже, не виконується необхідна умова збіжності. Тому при $\alpha\in(-\infty;0)$ ряд Діріхле розбігається. При $\alpha=0$ загальний член $\alpha_n=1$. Тоді ряд також розбігається.

Якщо $\alpha>0$, то застосуємо інтегральну ознаку Коші. Для цього візьмемо функцію

$$f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}},$$

яка при $x\geq 1$ задовольняє всі умови теореми 5. Знайдемо інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$. Якщо $\alpha\neq 1$, то

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to+\infty}\int\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\right)=\begin{cases}+\infty, & \text{якщо } 0<\alpha<1;\\ \frac{1}{\alpha-1}, & \text{якщо } \alpha>1.\end{cases}$$

Отже, невласний інтеграл при $0<\alpha<1$ розбігається, а при $\alpha>1$ збігається. При $\alpha=1$ інтеграл розбігається

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\ln b=+\infty.$$

Таким чином, ряд Діріхле при $\alpha>1$ збігається, а при $\alpha\leq 1$ розбігається.

**9.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}=\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}+\ldots.$$

Розглянемо функцію

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}.$$

Ця функція задовольняє умови теореми 5 при $x\geq 1$. Знайдемо інтеграл

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln(x+1)}\right)\bigg|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln(b+1)}\right)=\frac{1}{\ln 2}.$$

Отже, невласний інтеграл збігається, тому ряд також збігається.



## 1.4 ЗНАКОЗМІННІ РЯДИ

Числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3+a_4+\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots, \quad (1)$$

в якому числа $a_n$ додатні, $a_n>0$, $n=1,2,\ldots$, називають *знакозмінним*.

Так, числові ряди

$$1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots;$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

є знакозмінними. Останній ряд називають *рядом Лейбниця*.

Для знакозмінних рядів правильною є теорема Лейбниця.

**Т е о р е м а  Л е й б н і ц а.** Якщо в знакозмінному ряду (1) числа $a_n$ монотонно не зростають,

$$a_{n+1}\leq a_n,\ n=1,2,\ldots \quad (2)$$

і

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0, \quad (3)$$

то такий ряд збігається.

Д о в е д е н н я. Часткові суми ряду (1) позначимо через $S_n$. Поклавши $n=2m$, $m=1,\ 2,\ldots$, дістанемо

$$S_{2m}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_{2m-1}-a_{2m}). \quad (4)$$

Згідно з нерівністю (2), кожна різниця в круглих дужках є невід'ємним числом. Тому послідовність $\{S_{2m}\}$ є монотонно неспадною.

Запишемо рівність (4) у такому вигляді:

$$S_{2m}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\ldots-(a_{2m-2}-a_{2m-1})-a_{2m}.$$

Звідси і з нерівностей (2) випливає, що

$$S_{2m}\leq a_1. \quad (5)$$

Отже, послідовність часткових сум $\{S_{2m}\}$ парного порядку, будучи неспадною й обмеженою зверху, збігається (існує границя). Позначимо

$$\lim_{m\to\infty}S_{2m}=S. \quad (6)$$

Розглянемо часткові суми ряду (1) непарного порядку, тобто $S_{2m-1}$. Тоді $S_{2m-1}$ можна записати у вигляді

$$S_{2m-1}=S_{2m}+a_{2m}.$$

Перейдемо до границі при $m\to\infty$. Згідно з рівностями (3) і (6), маємо

$$\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}=\lim_{m\to\infty}(S_{2m}+a_{2m})=\lim_{m\to\infty}S_{2m}+\lim_{m\to\infty}a_{2m}=S.$$

Таким чином, послідовність парних і непарних часткових сум збігається до того самого числа $S$. Це означає, що ряд (1) є збіжним і його сума дорівнює $S$.

Теорему доведено.

Перейдемо в нерівності (5) до границі при $m \to \infty$. Матимемо

$$S \le a_1. \tag{7}$$

Отже, якщо ряд (1) задовольняє умови теореми Лейбніца, то такий ряд збігається і його сума не більша за перший член цього ряду.

Нерівність (7) дає змогу оцінити $n$-й залишок ряду (1). Справді, запишемо $n$-й залишок ряду (1):

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n+k-1} a_{n+k} = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \ldots + (-1)^{n+k-1} a_{n+k} + \ldots. \tag{8}$$

Розглянемо знакозмінний ряд

$$a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots + (-1)^{k-1} a_{n+k} + \ldots. \tag{9}$$

Нехай ряд (1) задовольняє умови теореми Лейбніца. Тоді й ряд (9) задовольняє умови теореми Лейбніца. Отже, ряд (9) збігається і його сума $r'_n$, згідно з нерівністю (7), не більша за перший член

$$r'_n \le a_{n+1}. \tag{10}$$

Ряд (8) можна розглядати як добуток числа $(-1)^n$ на ряд (9) або як добуток числа $(-1)^n$ на число $r'_n$. Отже, суму ряду (8) можна записати у вигляді

$$r_n = (-1)^n r'_n. \tag{11}$$

Звідси із нерівності (10) дістанемо, що

$$|r_n| \le a_{n+1}. \tag{12}$$

З виразів (11) і (12) випливає такий наслідок.

Н а с л і д о к. Якщо знакозмінний ряд (1) задовольняє умови теореми Лейбніца, то сума $n$-го залишку має знак свого першого члена і за модулем не перевищує модуль цього члена.

Цей наслідок використовують при застосуванні рядів до наближених обчислень.

❑ **Приклади**

Дослідити на збіжність числові ряди

**1.**

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots. \tag{13}$$

Р о з в ' я з а н н я. Числовий ряд (13) задовольняє умови теореми Лейбніца. Справді,

$$a_n = \frac{1}{n}; \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$



Отже, $a_{n+1} < a_n$ і

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ряд (13) збігається.

**2.**

$$\frac{1}{2+\ln 2} - \frac{1}{3+\ln 3} + \frac{1}{4+\ln 4} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n+\ln n} + \ldots. \tag{14}$$

Числовий ряд (14) задовольняє умови теореми Лейбніца. Справді,

$$a_n = \frac{1}{n+\ln n}; \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1+\ln(n+1)}; \quad n = 2, 3, \ldots,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim \frac{1}{n+\ln n} = 0.$$

Отже, $a_{n+1} < a_n$ і ряд (14) збігається.

**3.** Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n-1} = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n-1} + \ldots \tag{15}$$

з точністю до 0,0001.

Р о з в ' я з а н н я. Легко помітити, що члени ряду (15) задовольняють обидві умови теореми Лейбніца. Тому цей ряд збігається і його суму $S$ можна записати так:

$$S = S_n + r_n,$$

де $S_n$ — $n$-на часткова сума, а $r_n$ — одна $n$-на залишка ряду (15).

Згідно з нерівністю (12),

$$|r_n| \le \frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n+1}.$$

Отже, потрібно знайти таке найменше значення $n$, щоб

$$\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n+1} < 10^{-5}.$$

Таким числом є $n = 2$. При $n = 2$

$$\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 < \frac{1}{5!}\left(\frac{3,6}{18}\right)^5 < \frac{2^5}{120\cdot 10^5} = \frac{4}{15\cdot 10^5} < \frac{4}{12\cdot 10^5} = \frac{1}{3\cdot 10^5} < \frac{1}{10^5} = 10^{-5}.$$

Для розв'язання цієї задачі можна застосувати наближену формулу

$$S \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3,$$

обчисливши кожний доданок у правій частині з шістьма знаками після коми.

У цьому випадку похибка обчислення кожного доданка правої частини не перевищує за модулем числа $0,5\cdot 10^{-5}$ і вся похибка за модулем менша за число

$$2\cdot 0,5\cdot 10^{-5} + 10^{-5} = 2\cdot 10^{-5},$$

а отже, менша за число $10^{-4}$.

Оскільки

$$\frac{\pi}{18} \approx 0,174533, \quad \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 \approx 0,000886,$$

то $S \approx 0,17542$, причому перші чотири цифри після коми правильні.

## 1.5
## АБСОЛЮТНО ТА УМОВНО ЗБІЖНІ РЯДИ. ВЛАСТИВОСТІ ЗБІЖНИХ РЯДІВ

Нехай маємо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \qquad (1)$$

в якому члени $a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, є довільними дійсними числами. Одні з них можуть бути додатними, інші — від'ємними або навіть дорівнювати нулю. Такі числові ряди називають *рядами з довільними членами.*

***Означення 1.*** Ряд (1) називають *абсолютно збіжним*, якщо збігається числовий ряд, утворений з модулів членів цього ряду, тобто ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots. \qquad (2)$$

❑ **Приклад**

**1.** Числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} + \ldots \qquad (3)$$

є абсолютно збіжним. Справді, тут ряд (2) має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}. \qquad (4)$$

Застосуємо до цього ряду ознаку Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Ряд (4) збігається.

У цьому прикладі ряд (3) є збіжним (члени ряду задовольняють умови теореми Лейбніца). Проте існують числові ряди, які самі збігаються, а ряд, утворений з модулів членів цього ряду, розбігається.

***Означення 2.*** Числовий ряд (1) називають *умовно або не абсолютно збіжним*, якщо цей ряд збігається, а складений для нього ряд (2) розбігається.

❑ **Приклад**

**2.** Ряд Лейбніца

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots$$

є умовно збіжним. Справді, цей ряд збігається, а ряд, складений з модулем його членів, є гармонічним рядом

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

а він, як відомо, розбігається.



**Критерій Коші збіжності числового ряду.** Для того щоб збігався числовий ряд (1), необхідно й достатньо, щоб для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існувало натуральне число $N = N_{(\varepsilon)}$ таке, що для всіх $n > N$ і будь-якого натурального числа $p = 1, 2, \ldots$ виконувалася нерівність

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\right| < \varepsilon. \qquad (5)$$

Критерій Коші збіжності числового ряду є наслідком критерію Коші збіжності числової послідовності. Позначимо через $\{S_n\}$ послідовність часткових сум ряду (1) і застосуємо до неї критерій Коші збіжності числової послідовності. Тоді для збіжності послідовності $\{S_n\}$ необхідно й достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існувало натуральне число $N = N_{(\varepsilon)}$ таке, щоб для всіх $n > N$ і $m > N$ виконувалася нерівність

$$|S_m - S_n| < \varepsilon.$$

Поклавши в цій нерівності $m = n + p$, $p = 1, 2, \ldots$, дістанемо нерівність (5).

**Теорема 1 (Коші).** Якщо числовий ряд (1) абсолютно збіжний, то він є збіжним.

Доведення. Якщо ряд (2) збігається, то для нього виконується нерівність (5), яка має вигляд

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\right| < \varepsilon \qquad (6)$$

для всіх $n > N$ і будь-якого $p = 1, 2, \ldots$.

Використовуючи властивість модуля суми, матимемо

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\right| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Теорему доведено.

Сформулюємо у вигляді теорем властивості збіжних числових рядів.

**Теорема 2 (сполучна властивість).** Якщо збігається ряд (1), то збігається й ряд

$$\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1}\right) + \left(a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}\right) + \ldots +$$
$$+\left(a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \ldots + a_{n_k}\right) + \ldots, \qquad (7)$$

причому він має ту саму суму, що й ряд (1).

Доведення. Часткові суми ряду (7) позначатимемо через $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \ldots, \tilde{S}_k, \ldots$. Тоді послідовність $\{\tilde{S}_k\}$ є підпослідовністю послідовності $\{\tilde{S}_n\}$ часткових сум ряду (1). Оскільки послідовність $\{\tilde{S}_n\}$ є збіжною (ряд (1) збігається), то послідовність $\{\tilde{S}_k\}$ також збігається, причому збігається до тієї границі, що й послідовність $\{\tilde{S}_n\}$.

Теорему доведено.

Отже, якщо в збіжному ряду (1) об'єднувати його члени у групи, не змінюючи розміщення їх, то на збіжність ряду це не впливає. Проте цю властивість не можна застосовувати у зворотному порядку.

❑ **Приклад**

**3.** Числовий ряд

$$(1-1)+(1-1)+\ldots+(1-1)+\ldots$$

збігається і його сума дорівнює нулю. Якщо зняти дужки, то дістанемо розбіжний ряд: $1-1+1-1+\ldots+1-1+\ldots$.

**Т е о р е м а 3 (Діріхле) (переставна властивість).** Якщо числовий ряд (1) абсолютно збіжний, то ряд, утворений довільною перестановкою членів ряду (1), є збіжним і має ту саму суму, що й ряд (1).

Д о в е д е н н я. Зробимо в ряду (1) довільним чином перестановку його членів. Отримаємо деякий числовий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_k +, \tag{8}$$

у якому кожний член $a'_k$ збігається з певним членом $a_{n_k}$ ряду (1).

Доведення теореми проводитимемо для двох випадків.

В и п а д о к 1. Припустимо, що ряд (1) додатний, тобто його члени $a_n \geq 0,\ n = 1, 2, \ldots$.

Тоді часткова сума $S'_k$ ряду (8)

$$S'_k = \sum_{i=1}^{k} a_{k_i}$$

і, отже, не може бути більшою за часткову суму $S_{n'}$ ряду (1), де число $n'$ більше за всі числа $n_1,\ n_2, \ldots,\ n_k$, тобто виконуються нерівності

$$S'_k \leq S_{n'} < S,$$

де $S$ — сума ряду (1).

Отже, послідовність $\left\{S'_k\right\}$, як неспадна й обмежена зверху, збігається, і її границя $S'\left(\lim\limits_{k\to\infty} S'_k\right)$ задовольняє нерівність

$$S' \leq S.$$

Далі, оскільки ряд (1) можна розглядати як такий, що утворився перестановкою членів ряду (8), то, згідно з доведеним, маємо

$$S \leq S'.$$

Із попередніх двох нерівностей випливає

$$S' = S.$$

Для випадку 1 теорему доведено.

В и п а д о к 2. Нехай ряд (1) є абсолютно збіжним рядом, у якому є нескінченна множина як додатних, так і від'ємних членів. Побудуємо числовий додатний ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots. \tag{9}$$



За умовою теореми цей ряд збігається і згідно з доведеним його збіжність не порушиться за будь-якої перестановки його членів. Отже, не порушиться й абсолютна збіжність ряду (1).

Побудуємо наступні два додатні ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_k + \ldots; \tag{10}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m = c_1 + c_2 + \ldots + c_m + \ldots, \tag{11}$$

де ряд (10) утворений з додатних членів, а ряд (11) — з абсолютних величин від'ємних членів ряду (1), причому як додатні, так і від'ємні члени взяті в порядку їх розміщення в ряду (1).

Тоді зі збіжності ряду (9) випливає збіжність рядів (10) і (11). Справді, будь-яка часткова сума $B_k = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i$ і будь-яка часткова сума $C_m = \sum\limits_{i=1}^{m} c_m$ не можуть бути більшими, наприклад, за часткову суму $\sum\limits_{j=1}^{k+m} |a_j|$ ряду (9).

Отже, часткові суми $B_k$ і $C_m$, як неспадні, є обмеженими зверху

$$B_k < A,\ C_m < A,\ k,\ m = 1, 2, \ldots,$$

де $A$ — сума ряду (9). Отже, існують

$$\lim_{k\to\infty} B_k = B,\ \lim_{m\to\infty} C_m = C.$$

Збіжність рядів (10), (11) доведено.

Тоді часткову суму $S_n$ ряду (1) можна записати у вигляді

$$S_n = B_k - C_m, \tag{12}$$

де $k$ і $m$ відповідно дорівнюють числу додатних і числу від'ємних доданків у сумі $S_n$, тобто $k$ і $m$ залежать від $n$ і при $n \to \infty$ прагнуть також до нескінченності. Тому, переходячи в рівності (12) до границі, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{k\to\infty} B_k - \lim_{m\to\infty} C_m = B - C.$$

Отже, ряд (1) збігається і його сума

$$S = B - C.$$

Теорему доведено.

Зазначимо, що вимога в теоремі 3 абсолютної збіжності ряду (1) є істотною. Умовно збіжні ряди цієї властивості не мають. З'ясуємо це на прикладі.

❑ **Приклад**

**4.** Розглянемо умовно збіжний ряд Лейбніца

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \ldots. \tag{13}$$

Нижче буде доведено, що сума цього ряду дорівнює $\ln 2$. Зробимо в ряду (13) перестановку членів

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\ldots. \tag{14}$$

Нехай $S_{2m}$ — часткова сума ряду (13), а $S'_{3m}$ — $m$-на часткова сума ряду (9). Тоді

$$S_{2m}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$$

і

$$S'_{3m}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right).$$

Суму $S'_{3m}$ запишемо у вигляді

$$S'_{3m}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}S_{2m}.$$

Звідси

$$\lim_{m\to\infty}S'_{3m}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}S_{2m}=\frac{1}{2}\ln 2.$$

Згідно із співвідношеннями

$$S'_{3m-1}=S'_{3m}+\frac{1}{4m}\quad \text{і}\quad S'_{3m-2}=S'_{3m-1}+\frac{1}{4m-2}$$

маємо

$$\lim_{m\to\infty}S'_{3m-1}=\lim_{m\to\infty}S'_{3m-2}=\lim_{m\to\infty}S'_{3m}=\frac{1}{2}\ln 2.$$

Отже, сума ряду (14) дорівнює $\frac{1}{2}\ln 2$, тобто ряд (14), утворений з ряду (13) перестановкою його членів, збігається. Проте його сума дорівнює половині суми ряду (13).

Стосовно умовно збіжних рядів правильною є така теорема.

**Теорема 4 (Рімана).** Якщо ряд (1) умовно збіжний, то яке б не було число $A$ скінченне або $\pm\infty$, можна в ряду (1) переставити його члени таким чином, що новоутворений ряд матиме суму, яка дорівнює $A$.

Для доведення теореми скористуємося лемою.

**Лема.** Якщо ряд (1) умовно збіжний, то побудовані для нього ряди (10) і (11) є розбіжними.

Доведення леми. Нехай серед перших $n$ членів в ряду (1) є $k$ додатних і $m$ від'ємних. Тоді, часткову суму $S_n$ ряду (1) можна записати у вигляді (12). Розглянемо таку рівність:

$$S'_n=B_k+C_m,$$

де $S'_n$ — $n$-на часткова сума ряду (9). З цієї рівності випливає, що ряди (10) і (11) не можуть одночасно збігатися. У протилежному випадку збігався б і ряд (9). А з рівності (12) випливає, що не може один ряд збігатися, а другий розбігатися. Припустивши супротивне, матимемо, що ряд (1) також розбігається. А це суперечить умові цієї леми.

Лему доведено.

Доведення теореми. Розглянемо спочатку випадок, коли $A$ — скінченне число. Оскільки додатні ряди (10) і (11) розбіжні, то в обох із



них можна набрати членів від початку стільки, що отримані їх часткові суми будуть більші за будь-яке наперед задане число. Отже, в ряду (10) візьмемо стільки членів, наприклад $k_1$, від початку і в тому порядку, в якому вони розміщені в цьому ряду, щоб

$$b_1+b_2+\ldots+b_{k_1}>A.$$

За цими членами запишемо від'ємні члени, наприклад, $m_1$, у тому порядку, в якому вони розміщені в ряду (11), щоб виконувалася нерівність

$$b_1+b_2+\ldots+b_{k_1}-c_1-c_2-\ldots-c_{n_1}<A.$$

Після цього розмістимо наступні $k_2$ членів ряду (10) в тому порядку, в якому вони розміщені в цьому ряду, щоб виконувалася нерівність

$$b_1+b_2+\ldots+b_{k_1}-c_1-c_2-\ldots-c_{m_1}+b_{k_1+1}+b_{k_1+2}+\ldots+b_{k_2}>A.$$

Після цього в ряду (11) з членів, що залишилися, візьмемо $m_2$ членів у тому порядку, в якому вони розміщені, щоб виконувалася нерівність

$$b_1+b_2+\ldots+b_{k_1}-c_1-c_2-\ldots-c_m+b_{k_1+1}+b_{k_1+2}+\ldots+$$
$$+b_{k_2}-c_{m_1+1}-c_{m_1+2}-\ldots-c_{m_2}<A$$

і т. д. Процес набору потрібної кількості членів рядів (10) і (11) для виконання відповідних нерівностей можна продовжувати до нескінченності. Тоді отримаємо ряд

$$\sum_{i=2}^{k_1}b_i-\sum_{k=1}^{m_i}c_i+\sum_{i=k_1+1}^{k_2}b_i-\sum_{i=m_1+1}^{k_2}c_i+\ldots, \tag{15}$$

який є результатом перестановки членів ряду (1).

Доведемо, що ряд (15) збігається і має своєю сумою число $A$.

Часткові суми ряду (15) позначатимемо через $S'_n$. Тоді, оскільки щоразу з рядів (10), (11) бралася лише необхідна (мінімальна) кількість членів цих рядів, щоб відповідні часткові суми $S'_{k_1}$, $S'_{k_1+m_1}, \ldots$ відрізнялися від числа $A$ за рахунок останнього члена часткових сум, то при $S'_n>A$ маємо

$$0<S'_n-A<b_{n_k},$$

де $b_{n_k}$ — останній член у сумі $S'_n$, а при $S'_n<A$ маємо

$$0<A-S'_n<c_{m_k},$$

де $c_{m_k}=\left|-c_{m_k}\right|$.

Тому правильною є нерівність

$$\left|S'_n-A\right|<\left|a_l\right|,$$

де $a_l$ — відповідний член ряду (1) і $l\to\infty$ при $n\to\infty$. Оскільки ряд (1) збігається, то

$$\lim_{l\to\infty}a_l=0.$$

Тому звідси і з попередньої нерівності отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = A.$$

Отже, ряд (15) збігається і його сума дорівнює числу $A$.

Розглянемо випадок, коли число $A$ є невластивим, наприклад, $+\infty$ (випадок, коли $A$ є невластивим числом $-\infty$, досліджується аналогічно). Отже, потрібно довести, що в ряду (1) можна так зробити перестановку його членів, що новоутворений ряд збігається. З цією метою додатні й від'ємні члени в ряду (1) розміщуватимемо, наприклад, у такий спосіб:

$$\sum_{k=1}^{n_1} b_k > 1,\ \sum_{k=1}^{n_1} b_k - c_1;$$

$$\sum_{k=1}^{n_1} b_k - c_1 + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} b_k > 2,\ \sum_{k=1}^{n_1} b_k - c_1 + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} b_k - c_2$$

і т. д. Якщо цей процес продовжити до нескінченності, то отримаємо ряд

$$\sum_{k=1}^{n_1} b_k - c_1 + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} b_k - c_2 + \ldots, \tag{16}$$

утворений за вказаним способом перестановкою членів ряду (1), часткові суми $S'_n$ якого є монотонно неспадними й необмеженими зверху, $\lim S'_n = +\infty$. Отже, побудований ряд (16) розбігається.

Теорему доведено.

Доведемо ще одну теорему, яка належить до такого поняття, як добуток двох числових рядів.

Для цього розглянемо два ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots; \tag{17}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots. \tag{18}$$

Із членів цих рядів утворимо ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} (a_k b_{n+1-k}) = a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + \ldots + (a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1) + \ldots. \tag{19}$$

Ряд (19) називають добутком рядів (17) і (18) за Коші.

**Теорема 5 (Коші).** Якщо ряди (17) і (18) збігаються абсолютно і мають відповідно суми $S'$ і $S''$, то ряд (19) також збігається абсолютно і має суму $S = S'S''$.

Доведення. Згідно з умовою теореми збіжними є ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots; \tag{20}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = |b_1| + |b_2| + \ldots + |b_n| + \ldots. \tag{21}$$



Тоді буде збіжним і ряд

$$|a_1||b_1| + (|a_2||b_2| + |a_2||b_1|) + \ldots + (|a_1||b_n| + |a_2||b_{n-1}| + \ldots + |a_n||b_n|) + \ldots. \tag{22}$$

Справді, якщо суми рядів (20) і (21) позначити через $A$, $B$, то $n$-на часткова сума ряду (22) буде меншою за число

$$(|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|)(|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_n|) < AB.$$

Збіжність, очевидно, збережеться, якщо дужки в ряду (22) опустити. Тоді ряд (19) після зняття дужок набирає вигляду

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + \ldots \tag{23}$$

і є абсолютно збіжним, а отже, збіжним. Тому він має переставну властивість (для нього справджується теорема 4). Тоді сума ряду (23), що дорівнює сумі ряду (22), може бути отримана як

$$S = \lim_{n\to\infty} (S_n S'_n) = SS_1,$$

де $S_n$, $S'_n$ — часткові суми рядів (17) і (18).

Теорему доведено.

Зазначимо, що вимога абсолютної збіжності рядів (17) і (18) є істотною. Ряд, що є добутком, за теоремою Коші, двох умовно збіжних рядів, може бути й розбіжним.

❑ **Приклад**

**5.** Розглянемо ряд

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots, \tag{24}$$

який за теоремою Лейбніца збігається, однак збігається умовно, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ розбігається. Побудуємо ряд, що є добутком, за теоремою Коші, ряду (24) самого на себе. Загальний член $\omega_n$ має вигляд

$$\omega_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1\sqrt{n}} + \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n\cdot 1}}\right).$$

Оскільки

$$(n-k+1)k \le n^2,\ 1 \le k \le n,$$

то

$$\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}} \ge \frac{1}{n},\ 1 \le k \le n.$$

Отже, $|\omega_n| \ge 1$. Загальний член $\omega_n$ не прямує до нуля при $n\to\infty$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n$ розбігається.

## 1.6
## ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ. РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ

Нехай маємо деяку послідовність функцій $f_1(x),\ f_2(x), ...,\ f_n(x), ...,$ визначених на деякій множині $E \subset (-\infty; +\infty)$. Тоді вираз

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + ... \qquad (1)$$

називають *функціональним рядом.*

Функціональний ряд (1) називають *збіжним у точці* $x_0 \in E$, *якщо збіжним є числовий ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + ... + f_n(x_0) + .... \qquad (2)$$

Множину всіх точок $x \in E$, в яких функціональний ряд збігається, називають *областю збіжності* цього ряду. Областю збіжності функціонального ряду може бути або деякий проміжок, або окремі точки числової осі, або навіть порожня множина.

❑ **Приклад**

**1.** Областю збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} + ...$$

є інтервал (–1; 1).

**2.** Областю збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n = 1!x + 2!x^2 + ... + n!^{x^n} + ...$$

є тільки одна точка $x = 0$.

Нехай областю збіжності функціонального ряду (1) є деяка множина точок $E$. Тоді сума цього ряду $S$ є функцією від $x$, $S = S(x)$. Отже, можна записати рівність

$$S(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + .... \qquad (3)$$

Введемо позначення

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x); \qquad (4)$$

$$r_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{n+k}\left(x = f_{n+1}(x)\right) + f_{n+2}(x) + ... + f_{n+k}(x) + .... \qquad (5)$$

$S_n(x)$, як і для числових рядів, називають $n$-ю *частковою сумою*, а $r_n(x)$, $n = 1, 2, ...$ — $n$-м *залишком* ряду (1).

Тоді для кожного $x \in E$ рівність (3) можна записати так:

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x). \qquad (6)$$

Перейдемо в цій рівності до границі при $n \to \infty$ і фіксованому $x$. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \qquad (7)$$



то з рівностей (6) і (7) випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0. \qquad (8)$$

Отже, якщо функціональний ряд (1) збігається на множині $E$, то для кожної точки $x \in E$ виконується співвідношення (8). Очевидно, що справедливе й обернене твердження: якщо для кожної точки $x \in E$ виконується співвідношення (8), то функціональний ряд (1) на множині $E$ збігається.

Розглянемо докладніше співвідношення (8). Візьмемо деяку точку $x_0 \in E$. Тоді виконується рівність

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x_0) = 0. \qquad (9)$$

Згідно з цією рівністю, $r_n(x_0)$, $n = 1, 2, ...$, є нескінченно малою послідовністю. Це означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $N_0$, яке залежить від $\varepsilon$ і від точки $x_0$, $N_0 = N_0(\varepsilon, x_0)$, таке, що справджується нерівність

$$|r_n(x_0)| < \varepsilon$$

для всіх $n > N_0(\varepsilon, x_0)$.

Візьмемо іншу, відмінну від $x_0$, точку $x_1 \in E$. У цій точці виконується рівність

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x_1) = 0,$$

тобто $r_n(x_1)$, $n = 1, 2, ...$, є нескінченно малою послідовністю. Інакше кажучи, для числа $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $N_1 = N_1(\varepsilon, x_1)$ таке, що справджується нерівність

$$|r_n(x_1)| < \varepsilon$$

для всіх $n > N_1(\varepsilon, x_1)$ і т. д.

Унаслідок цього приходимо до такого означення збіжності функціонального ряду на множині.

***Означення 1.*** Функціональний ряд (1) називають *збіжним на множині* $E$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ і для кожного $x \in E$ існує натуральне число $N(\varepsilon, x)$, яке залежить від $\varepsilon$ і може залежати від $x \in E$, таке, що

$$|r_n(x)| < \varepsilon \qquad (10)$$

для всіх $n > N(\varepsilon, x)$.

❑ **Приклад**

**3.** Розглянемо функціональний ряд

$$x + x(1-x) + ... + x(1-x)^{n-1} + ... \qquad (11)$$

на множині $E$, якою є піввідрізок $[0; 1)$.

Якщо $x = 0$, всі члени ряду (11) дорівнюють нулю, тому цей ряд у точці $x = 0$ збігається, і його сума $S(0) = 0$. Якщо $0 < x < 1$, то

$$0 < 1 - x < 1.$$

Тоді ряд (11) є геометричним із знаменником $q = 1 - x < 1$. Отже, цей ряд збігається, і його сума дорівнює

$$\frac{x}{1-(1-x)} = 1.$$

Таким чином, ряд (11) на піввідрізку $[0;1)$ збігається, і його сума

$$S(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x=0;\\ 1, & \text{якщо } 0<x<1.\end{cases} \tag{12}$$

Доведемо, що ряд (11) збігається і за наведеним означенням. Знайдемо $n$-й залишок ряду (11) при $x\in(0;1)$. Маємо

$$r_n(x)=x(1-x)^n+x(1-x)^{n+1}+\ldots=\frac{x(1-x)^n}{1-(1-x)}=(1-x)^n.$$

Підставимо в нерівність (10) значення $r_n(x)$ і розв'яжемо відносно $n$ утворену нерівність

$$|r_n(x)|=(1-x)^n<\varepsilon.$$

Звідси

$$n\lg(1-x)<\lg\varepsilon$$

або

$$n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg(1-x)}.$$

Отже, за даними $\varepsilon$ і $x\in(0;1)$ знайшлося натуральне число

$$N(\varepsilon,x)=E\left(\frac{\lg\varepsilon}{\lg(1-x)}\right) \tag{13}$$

таке, що при $n>N(\varepsilon,x)$ виконується нерівність (10). При $x=0$ ряд (11) збігається при будь-якому натуральному числу $N$.

Ряд (11) для всіх $x\in(0;1)$ збігається.

Із формули (13) випливає, що число $N=N(\varepsilon,x)$ залежить і від $\varepsilon$, і від точок $x$, причому, якщо $x\to 0$, то $N(\varepsilon,x)$ необмежено зростає

$$\lim_{x\to 0}N(\varepsilon,x)=\infty.$$

Проте якщо в ряду (11) звузити область збіжності, а саме розглядати піввідрізок $q\le x<1$, де $q>0$, то для всіх точок цього піввідрізка можна задати те саме число $N$, тобто число, що залежить від $\varepsilon$ і не залежить від точок цього піввідрізка. При цьому виконуватиметься нерівність

$$|r_n(x)|=(1-x)^n\le(1-q)^n.$$

Якщо виконується нерівність

$$(1-q)^n<\varepsilon, \tag{14}$$

то виконується й нерівність

$$(1-x)^n<\varepsilon.$$

Із нерівності (14) знаходимо

$$n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg(1-q)}.$$

Отже, за $N$ можна взяти число

$$N=E\left(\frac{\lg\varepsilon}{\lg(1-q)}\right),$$

що залежить тільки від $\varepsilon$ і є спільним для всіх точок

$$x\in[q;1).$$

***Означення 2.*** Функціональний ряд (1) називають *рівномірно збіжним на множині* $E$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує натуральне число $N(\varepsilon)$,



яке залежить від $\varepsilon$ і не залежить від точок $x\in E$, а також таке, що при $n>N(\varepsilon)$ виконується нерівність (10) для всіх точок $x\in E$.

Таким чином, ряд (11) на множині точок $x\in[q;1)$, $0<q<1$ збігається рівномірно. Можна довести, що на піввідрізку $[0;1)$ він не є рівномірно збіжним.

**Теорема (ознака Вейєрштрасса).** Якщо на множині $E$ члени функціонального ряду (1) за модулем не перевищують відповідні члени збіжного числового додатного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots, \tag{15}$$

то функціональний ряд (1) на множині $E$ збігається рівномірно.

Доведення. Нехай для всіх точок $x\in E$ виконуються нерівності

$$|f_n(x)|\le a_n,\quad n=1,2,\ldots. \tag{16}$$

Звідси і з умови теореми випливає, що ряд на множині $E$ абсолютно збіжний, а отже, він на цій множині збіжний.

Запишемо $n$-й залишок для числового ряду (15)

$$r_n'=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+k}+\ldots.$$

Оскільки ряд (15) збігається, то

$$\lim_{n\to\infty}r_n'=0.$$

Це означає, що для будь-якого $\varepsilon>0$ існує натуральне число $N(\varepsilon)$, яке не залежить від точок $x\in E$ і таке, що для всіх $n>N(\varepsilon)$ справджується нерівність

$$r_n'<\varepsilon. \tag{17}$$

Тоді, згідно з нерівностями (16) і (17), для всіх $n>N(\varepsilon)$ і $x\in E$ виконуються нерівності

$$|r_n(x)|=|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\ldots+f_{n+k}(x)+\ldots|\le$$
$$\le|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\ldots+|f_{n+k}(x)|+\ldots\le a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+k}+\ldots<\varepsilon.$$

Теорему доведено.

❑ **Приклад**

**4.** Довести, що функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^{n-1}}=\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin nx}{2^{n-1}}+\cdots \tag{18}$$

збігається рівномірно для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$.

Розв'язання. Для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$ члени функціонального ряду (18) задовольняють нерівність

$$\left|\frac{\sin nx}{2^{n-1}}\right|\le\frac{1}{2^{n-1}},\quad n=1,2,\ldots.$$

Складемо додатний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots.$$

Цей ряд збігається як геометричний ряд, в якого знаменник $q = \frac{1}{2} < 1$. Тому, за ознакою Вейєрштрасса, ряд (18) збігається рівномірно на всій числовій осі.

Зазначимо, що ознака Вейєрштрасса дає достатні умови рівномірної збіжності функціонального ряду, які не є необхідними. Функціональний ряд може рівномірно збігатися і тоді, коли ці умови не виконуються.

## 1.7 ВЛАСТИВОСТІ СУМИ РІВНОМІРНО ЗБІЖНОГО РЯДУ

Сформулюємо властивості у вигляді теорем.

**Теорема 1.** Якщо члени функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{1}$$

є функціями, неперервними на проміжку $\langle a;b\rangle$, і ряд (1) на ньому рівномірно збіжний, то сума функціонального ряду (1) є функцією, неперервною в кожній точці цього проміжку.

Доведення. Позначимо суму ряду (1) через $S(x)$:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Тоді виконується рівність

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x), \tag{2}$$

де $S_n(x)$ — $n$-на часткова сума, а $r_n(x)$ — $n$-й залишок ряду (1).

Доведемо, що в довільній точці $x_0 \in \langle a;b\rangle$ сума $S(x)$ є неперервною функцією. Задамо число, наприклад $\frac{\varepsilon}{3}$, де $\varepsilon > 0$. Для цього числа існує натуральне число $N(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n > N(\varepsilon)$ і $x \in \langle a;b\rangle$ справджується нерівність

$$|r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Нехай натуральне число $m > N(\varepsilon)$. Тоді виконується нерівність

$$|r_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

Поклавши в рівності (2) $n = m$, дістанемо

$$S(x) = S_m(x) + r_m(x).$$

Оцінимо модуль різниці

$$|S(x) - S(x_0)| = |(S_m(x) - S_m(x_0)) + (r_m(x) - r_m(x_0))| \le$$
$$\le |S_m(x) - S_m(x_0)| + |r_m(x)| + |r_m(x_0)|. \tag{4}$$

Функція

$$S_m(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)$$



як скінченна сума неперервних функцій є неперервною в точці $x_0$. Тому для числа $\frac{\varepsilon}{3}$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх $x \in \langle a;b\rangle$ і $|x - x_0| < \delta$ справджується нерівність

$$|S_m(x) - S_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отже, розглядатимемо точки $x$, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$. Із нерівностей (3) і (4) випливає нерівність

$$|S(x) - S(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Це означає, що $S(x)$ у точці $x_0$ є неперервною. Оскільки $x_0$ — довільна точка проміжку $\langle a;b\rangle$, то $S(x)$ є неперервною в кожній точці проміжку $\langle a;b\rangle$.

Слід зазначити, що умова рівномірної збіжності в теоремі є істотною. Сума збіжного ряду, складеного з неперервних функцій, може бути розривною функцією.

Так, сума ряду (11) п. 1.6, розглядуваного на піввідрізку $[0;1)$, у точці $x = 0$ є розривною. Справді, згідно з умовою (12) п. 1.6,

$$S(0) = 0, \quad \lim_{\substack{x\to 0 \\ (x>0)}} S(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ (x>0)}} 1 = 1.$$

Отже,

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ (x>0)}} S(x) \ne S(0),$$

вище зазначалося, що ряд (11) на піввідрізку $[0;1)$ збігається нерівномірно.

**Теорема 2.** Якщо члени функціонального ряду (1) на відрізку $[a;b]$ є неперервними функціями і ряд (1) на цьому відрізку рівномірно збіжний, то сума цього ряду є функцією, інтегровною на відрізку $[a;b]$, і визначений інтеграл від неї дорівнює сумі ряду

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)dx + \ldots. \tag{5}$$

Доведення. Те, що функція $S(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$, випливає з попередньої властивості (будь-яка неперервна на відрізку функція є на цьому відрізку інтегровною). Отже, залишається довести рівність (5). Із рівності (2) випливає, що $r_n(x)$ є інтегровною функцією на відрізку $[a;b]$ як різниця двох неперервних функцій. Крім цього, оскільки ряд (1) є рівномірно збіжним, то для числа $\frac{\varepsilon}{b-a}$, $\varepsilon > 0$, існує натуральне число $N(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n > N(\varepsilon)$ і $x \in [a;b]$ виконується нерівність

$$|r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Тому

$$\left|\int_a^b S(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx\right| \le \int_a^b |r_n(x)dx| < \frac{\varepsilon}{b-a}x\Big|_a^b = \varepsilon,$$

тобто при $n > N(\varepsilon)$ маємо

$$\left| \int_a^b S(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Інакше кажучи, існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx. \quad (6)$$

Підставивши в рівність (6) значення $S_n(x)$, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty} \left( \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)dx \right) = \int_a^b S(x)dx.$$

У лівій частині цієї рівності під знаком границі є $n$-на часткова сума ряду, який міститься в правій частині рівності (5).

Отже, теорему доведено.

Теорему 2 формулюють ще так: рівномірно збіжний на відрізку $[a;b]$ ряд, складений з неперервних функцій, можна на цьому відрізку почленно інтегрувати.

У кожному вигляді теорема 2 є узагальненням відомої властивості визначеного інтеграла: визначений інтеграл від скінченної суми інтегровних функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від кожної функції окремо.

**Теорема 3 (про почленне диференціювання функціонального ряду).** Якщо члени ряду (1) є функціями, неперервними на відрізку $[a;b]$ разом із похідними першого порядку $f_n'(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \quad (7)$$

на відрізку $[a;b]$ рівномірно збігається, а ряд (1) збігається на відрізку $[a;b]$, то сума ряду (1) є функцією, диференційовною на цьому відрізку, і похідна її дорівнює

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x) + \ldots. \quad (8)$$

Доведення. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ збігається на відрізку $[a;b]$, тоді для будь-якого $x \in [a;b]$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Ряд (7) є рівномірно збіжним на відрізку $[a;b]$, тому він є рівномірно збіжним і на будь-якому відрізку $[a;x]$, де $a \le x \le b$. Отже, цей ряд на відрізку $[a;x]$ можна почленно інтегрувати. Позначивши через $\sigma(x)$ суму ряду (7), матимемо

$$\int_a^x \sigma(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n'(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n(t)\right)\Big|_a^x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) = S(x) - S(a),$$



або

$$\int_a^x \sigma(t)dt + S(a) = S(x). \quad (9)$$

Оскільки $\sigma(t)$ є неперервною функцією на відрізку $[a;b]$, то існує похідна визначеного інтеграла $\int_a^x \sigma(t)dt$ за верхньою змінною межею

$$\frac{d}{dx}\left( \int_a^x \sigma(t)dt \right) = \sigma(x).$$

Тоді існує й похідна функції

$$F(x) = \int_a^x \sigma(t)dt + S(a),$$

$$F'(x) = \sigma(x).$$

Отже, згідно з рівністю (9), існує похідна функції $S(x)$

$$S'(x) = \sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Теорему доведено.

## 1.8 СТЕПЕНЕВІ РЯДИ. ТЕОРЕМА АБЕЛЯ. РАДІУС ТА ІНТЕРВАЛ ЗБІЖНОСТІ СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ

*Степеневим рядом* називають функціональний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots, \quad (1)$$

де $a_0$, $a_1, \ldots$, $a_n, \ldots$ — сталі дійсні числа, які називають *коефіцієнтами ряду*, $c$ — фіксоване дійсне число.

Якщо в ряду (1) взяти $c = 0$, то дістанемо степеневий ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots. \quad (2)$$

Наприклад, функціональні ряди

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots; \quad (3)$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots; \quad (4)$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots \quad (5)$$

є степеневими. Далі доведемо, що степеневі ряди (3) — (5) збігаються на всій числовій осі, причому сума ряду (3) є $e^x$, ряду (4) — $\sin x$, а ряду (5) — $\cos x$.

Оскільки степеневий ряд (1) підстановкою $z = x - c$ зводиться до степеневого ряду (2), то надалі розглядатимемо тільки ряди вигляду (2). Цей ряд збігається в точці $x = 0$.

Наступна теорема дає змогу знаходити й інші точки числової осі, в яких ряд (2) збігається.

**Теорема Абеля**[1]. Якщо степеневий ряд (2) збігається в точці $x_0 \neq 0$, то він абсолютно збігається в усіх точках $x$ числової осі, які задовольняють умову $|x| < |x_0|$.

Якщо степеневий ряд (2) розбігається в деякій точці $x_1$, то він розбігається в усіх точках $x$ числової осі, які задовольняють умову $|x| > |x_1|$.

Доведення. Нехай ряд (2) збігається в точці $x_0$. Тоді для числового ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

виконується необхідна умова збіжності, тобто

$$\lim_{x \to \infty} a_n x_0^n = 0,$$

але тоді послідовність $\left\{a_n x_0^n\right\}$ є обмеженою

$$\left|a_n x_0^n\right| < M, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Звідси, враховуючи, що $x_0 \neq 0$, дістанемо нерівність

$$|a_n| < \frac{M}{|x_0|^n}.$$

Беручи до уваги цю нерівність, маємо таку оцінку для загального члена ряду (2):

$$\left|a_n x^n\right| = |a_n||x|^n < M\left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{6}$$

Нехай $|x| < |x_0|$. Введемо позначення

$$q = \frac{|x|}{|x_0|} < 1.$$

Складемо геометричний ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$. Цей ряд збігається. Тоді збігається й ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} M q^n. \tag{7}$$

Отже, зі збіжності ряду (7) і нерівностей (6) випливає, що ряд (2) абсолютно збіжний для будь-якого $x$, який задовольняє умову $|x| < |x_0|$.

Першу частину теореми доведено. Справедливість другої частини випливає з доведеного вище.

[1] *Абель Н.* (1802—1829) — норвезький математик.



Справді, візьмемо довільне число $x_2$ таке, що $|x_2| > |x_1|$. Якби ряд (2) збігався в точці $x_2$, то він збігався б і в точці $x_1$. Зайшли у суперечність.

Теорему доведено.

Теорема Абеля дає можливість з'ясувати, що є областю збіжності степеневого ряду. Так, нехай крім $x = 0$ є ще точки $\bar{x}$ числової осі, в яких ряд (2) збігається. Позначимо через $E$ множину точок $\{|\bar{x}|\}$. Тоді матимемо два випадки.

I. Множина $E$ обмежена зверху. В цьому випадку для множини $E$ існує верхня грань. Позначимо її через $R$, $0 < R < +\infty$,

$$\sup\{|\bar{x}|\} = R. \tag{8}$$

Оскільки $R = \sup E$, то для довільного $x$, що задовольняє нерівність $|x| < R$, знайдеться таке $\bar{x}_0 \in E$, що $|x| < |\bar{x}_0|$. Оскільки $\bar{x}_0 \in E$, то в точці $\bar{x}_0$ ряд збігається. За теоремою Абеля він збігається абсолютно і в точці $x$. Отже, степеневий ряд абсолютно збігається при всіх значеннях $x$, для яких $|x| < R$, тобто при

$$-R < \bar{x} < R.$$

Поза цим інтервалом степеневий ряд розбігається. Візьмемо будь-яку точку $x_1$ таку, що $|x_1| > R$. Тоді $|x_1| \notin E$ і, отже, в цій точці ряд (2) розбігається.

II. Множина $E$ необмежена зверху. У цьому випадку степеневий ряд (2) збігається в усіх точках числової осі. Справді, яку б точку $x$ числової осі не взяти у множині $E$, знайдеться така точка $|\bar{x}_1|$, що $|x| < |\bar{x}_1|$. Оскільки степеневий ряд (2) у точці $\bar{x}_1$ збігається, то за теоремою Абеля він збігається і в точці $x$.

Отже, областю збіжності степеневого ряду є нескінченний інтервал

$$-\infty < x < +\infty. \tag{9}$$

Таким чином, для кожного степеневого ряду (2) існує або скінченне число $R$, або $R = +\infty$ таке, що для всіх точок $x$, які задовольняють нерівність $|x| < R$, степеневий ряд збігається, а для всіх точок $x$, які задовольняють нерівність $|x| > R$ (у випадку скінченного $R$), степеневий ряд (2) розбігається.

Число $R$ при цьому називають *радіусом збіжності*, а інтервал

$$-R < x < R \tag{10}$$

називають *інтервалом збіжності* степеневого ряду.

Щодо кінців інтервалу (у випадку скінченного $R$), то в них степеневий ряд може або збігатися, або розбігатися.

Користуючись ознакою Д'Аламбера, виведемо формулу для радіуса збіжності степеневого ряду.

Припустимо, що існує скінченна або нескінченна границя

$$\lim_{n \to \infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l.$$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера до додатного ряду при скінченному $l$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|. \quad (11)$$

Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|}=\lim_{n\to\infty}|x|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|x|l. \quad (12)$$

Нехай $l\neq 0$ — скінченне число. Тоді ряд (11) збігається, якщо

$$|x|l<1, \text{ або } |x|<\frac{1}{l},$$

і розбігається, якщо

$$|x|>\frac{1}{l}.$$

Отже, при скінченному $l\neq 0$ радіус збіжності

$$R=\frac{1}{l}. \quad (13)$$

Якщо $l=0$, то $|x|l=0<1$ і, отже, ряд (11) збігається при будь-якому $x\in(-\infty;+\infty)$, при цьому $R=+\infty$.

Якщо $l=+\infty$, то ряд (11), а отже, і ряд (2) збігаються тільки в точці $x=0$, тоді $R=0$.

Формально, вважаючи у формулі (13) $l=0$, $l=+\infty$, дістанемо відповідно $R=+\infty$, $R=0$. Отже, формула (13) і є формулою радіуса збіжності степеневого ряду.

❑ **Приклад**

**1.** Знайти область збіжності степеневого ряду

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots.$$

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Звідси $l=0$, тому $R=+\infty$. Заданий степеневий ряд збігається на всій числовій осі; $-\infty<x<+\infty$.

Можна довести, що степеневі ряди (4) і (5) також збігаються на всій числовій осі.

❑ **Приклад**

**2.** Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}. \quad (14)$$

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n n}{(-1)^{n-1}(n+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$



Отже, тут $R=1$, тобто ряд в інтервалі

$$-1<x<1 \quad (15)$$

збігається, а в інтервалах

$$-\infty<x<-1 \text{ і } 1<x<+\infty$$

розбігається.

Дослідимо кінці інтервалу (15). Підставивши в ряд (14) кінці цього інтервалу, дістанемо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}; \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}. \quad (17)$$

Числовий ряд (16) є добутком числа $-1$ на гармонічний ряд. Тому ряд (16) — розбіжний. Числовий ряд (17) є знакозмінним рядом Лейбніца, він збіжний. Отже, областю збіжності степеневого ряду (14) є півінтервал

$$-1<x\leq 1.$$

## 1.9 ВЛАСТИВОСТІ СУМИ СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ

**Т е о р е м а 1.** Степеневий ряд рівномірно збігається на кожному відрізку $[-r;r]$, що знаходиться всередині його інтервалу збіжності.

Д о в е д е н н я. Нехай степеневий ряд збігається в інтервалі $(-R;R)$. Візьмемо додатне число $0<r<R$. Тоді для всіх $x\in[-r;r]$ виконується нерівність

$$\left|a_n x^n\right|\leq|a_n|r^n, \ n=0,1,2,\ldots. \quad (1)$$

Оскільки степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \quad (2)$$

в інтервалі $(-R;R)$ збігається абсолютно і $r<R$, то числовий додатний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n$$

збігається. Згідно з нерівністю (1) й ознакою Вейєрштрасса, степеневий ряд (2) на відрізку $[-r,r]\subset(-R;R)$ збігається рівномірно.

Теорему доведено.

**В л а с т и в і с т ь 1°.** Сума степеневого ряду всередині інтервалу збіжності є неперервною функцією.

**В л а с т и в і с т ь 2°.** Сума степеневого ряду (2) на будь-якому відрізку $[-r,r]$, що міститься всередині інтервалу збіжності $(-R;R)$, є інтегровною функцією, і визначений інтеграл від неї можна дістати почленним інтегруванням цього ряду.

**В л а с т и в і с т ь 3°.** Сума степеневого ряду (2) є функцією, диференційовною в кожній точці інтервалу збіжності, і її похідну можна дістати почленним диференціюванням цього ряду.

Справедливість властивостей 1° і 2° випливає з попередньої теореми та теорем 1 і 2 п. 1.7. Тому розглянемо доведення властивості 3°.

Д о в е д е н н я. Спочатку доведемо, що ряд, утворений з похідних членів ряду (2), тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots, \tag{3}$$

збігається рівномірно на відрізку $[-r_0; r_0]$, де $0 < r_0 < R$.

Візьмемо два числа $r_0$ і $r_1$ такі, щоб виконувалися нерівності $0 < r_0 < r_1 < R$. Тоді числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_1^n = a_1 r_1 + a_2 r_1^2 + \ldots + a_n r_1^n + \ldots$$

збігається. Тому

$$\lim_{n\to\infty} a_n r_1^n = 0.$$

Звідси випливає, що послідовність $\{a_n r_1^n\}$ є обмеженою

$$|a_n r_1^n| < M, \ n = 1, 2, \ldots,$$

або

$$|a_n| < \frac{M}{r_1^n}, \ n = 1, 2, \ldots .$$

При $|x| \le r_0$ виконується нерівність

$$\left|na_n x^{n-1}\right| \le n|a_n| r_0^{n-1} < n\frac{M}{r_1}\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{n-1}. \tag{4}$$

Розглянемо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{r_1} n\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{n-1} = \frac{M}{r_1}\left(1 + 2\left(\frac{r_0}{r_1}\right) + \ldots + n\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{n-1} + \ldots\right). \tag{5}$$

До цього ряду застосуємо ознаку Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{M}{r_1}(n+1)\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^n}{\frac{M}{r_1} n\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{r_0}{r_1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{r_0}{r_1}.$$

Оскільки $r_0 < r_1$, то $\frac{r_0}{r_1} < 1$, а отже, числовий додатний ряд (5) збігається. Згідно з нерівністю (4) й ознакою Вейєрштрасса, степеневий ряд (3) для всіх $|x| \le r_0$ збігається рівномірно. Тому ряд (2) на відрізку $[-r_0; r_0]$ можна почленно диференціювати. Беручи до уваги те, що число $r_0$ може бути як завгодно близьким до числа $R$, властивість доведено. Зробимо зауваження відносно інтервалів збіжності степеневих рядів (2) і (3) та



степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \ldots, \tag{6}$$

утвореного почленним інтегруванням ряду (2) на відрізку $[0; x] \subset (-R; R)$.

Нехай радіус збіжності ряду (3) є $R_1$, а ряду (6) — $R_2$.

Із властивостей 2° і 3° випливає, що радіуси збіжності степеневих рядів (3) і (6) не менші за радіус збіжності степеневого ряду (2), тобто $R_1 \ge R$ і $R_2 \ge R$.

Степеневий ряд (2) можна розглядати як такий, що утворився з ряду (3) почленним інтегруванням. Тому $R \ge R_1$. Отже, $R_1 = R$.

Степеневий ряд (2) можна розглядати також як такий, що утворений з ряду (6) почленним диференціюванням. Тому $R \ge R_2$ і $R_2 = R$.

Звідси маємо, що інтервали збіжності степеневих рядів (3) і (6) збігаються з інтервалом збіжності степеневого ряду (2).

Позначимо через $f(x)$ суму степеневого ряду (2). Оскільки ряд (3) є степеневим, то для нього також справджується властивість 3°, тобто його сума $f'(x)$ всередині інтервалу $(-R; R)$ є диференційовною функцією і похідну її можна дістати почленним диференціюванням ряду (3). Маємо

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + \ldots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \ldots . \tag{7}$$

Степеневий ряд (7) також має властивість 3° і т. д.

Таким чином, дістанемо таку теорему.

**Т е о р е м а 2.** Сума $f(x)$ степеневого ряду (2) в інтервалі збіжності має похідну будь-якого порядку $f^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$. Цю похідну можна дістати почленним диференціюванням відповідне число разів ряду (2); причому, всі ряди, утворені почленним диференціюванням ряду (2), мають той самий інтервал збіжності, що й ряд (2).

## 1.10
## РЯД ТЕЙЛОРА

Нехай $f(x)$ є сумою степеневого ряду

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{1}$$

а областю збіжності ряду (1) є інтервал $(-R; R)$, $R > 0$. Тоді ряд (1) в інтервалі $(-R; R)$ можна почленно диференціювати будь-яке число разів, тобто в інтервалі збіжності виконуються рівності

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots;$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x + \ldots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_n x^{n-1} + (n+1)a_{n+1}x^n + \ldots;$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + \ldots + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + $$
$$+ n(n-1)a_n x^{n-2} + (n+1)na_{n+1}x^{n-1} + \ldots;$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1a_n+(n+1)n(n-1)(n-2)\dots 2a_{n+1}x+\dots;$$
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Кожний із цих рядів збігається у точці $x=0$. Вважаючи $x=0$, дістанемо

$$a_0=f(0);\ a_1=\frac{f'(0)}{1!};\ a_2=\frac{f''(0)}{2!},\dots,\ a_n=\frac{f^n(0)}{n!},\dots. \qquad (2)$$

Підставивши ці коефіцієнти в рівність (1), матимемо ряд

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots. \qquad (3)$$

Степеневий ряд, що становить праву частину рівності (3), називають *рядом Тейлора* функції $f(x)$. Цей ряд називають ще *рядом Маклорена*[1].

Таким чином, якщо функція $f(x)$ зображується степеневим рядом вигляду (1), то останній є рядом Тейлора цієї функції.

Обернене твердження не виконується, тобто не будь-яка функція, для якої можна побудувати ряд Тейлора, зображується цим рядом (є сумою цього ряду).

❑ **Приклад Коші**

Функція

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{якщо } x\neq 0;\\ 0, & \text{якщо } x=0\end{cases} \qquad (4)$$

у точці $x=0$ має похідні будь-якого порядку, і всі похідні в цій точці дорівнюють нулю

$$f^{(k)}(0)=0,\ k=1,2,\dots$$

(пропонуємо довести це самостійно).

Ряд Тейлора для такої функції при будь-якому $x\in(-\infty;+\infty)$ збігається, його сума в кожній точці $x\in(-\infty;+\infty)$ дорівнює нулю. Оскільки функція тільки в одній точці $x=0$ дорівнює нулю, то ряд Тейлора, складений для функції (4), тільки в точці $x=0$ зображує цю функцію. У решті точок, $x\neq 0$, цей ряд збігається, але не до функції $f(x)$, тобто сума цього ряду при $x\neq 0$ не дорівнює функції $f(x)$.

Очевидно, щоб ряд Тейлора, складений для функції $f(x)$, збігався до цієї самої функції, потрібно, щоб остання задовольняла певні умови. Розглянемо — які саме.

Нехай функція на деякому відрізку $[a;b]$, що містить точку $x=0$, має похідні будь-якого порядку. Тоді для кожного $x\in[a;b]$ функцію $f(x)$ можна зобразити за допомогою формули Тейлора

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+R_n(x), \qquad (5)$$

де $R_n(x)$ — додатковий член формули Тейлора. Отже, сума перших $n$ членів у формулі Тейлора є не що інше, як $n$-на часткова сума ряду Тейлора,

[1] *Маклорен К.* (1698—1746) — шотландський математик.



складеного для $f(x)$. Позначимо її через $S_n(x)$

$$S_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (6)$$

Тоді рівність (5) можна записати так:

$$f(x)=S_n(x)+R_n(x).$$

Звідси

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=f(x)$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0. \qquad (7)$$

Отже, умова (7) є необхідною й достатньою для того, щоб функція $f(x)$ розвивалася в ряд Тейлора, а саме: щоб ряд Тейлора, складений для функції $f(x)$, збігався до $f(x)$ (мав суму $f(x)$), необхідно й достатньо, щоб границя додаткового члена у формулі Тейлора цієї функції при $n\to\infty$ дорівнювала нулю.

Користуючись необхідною й достатньою умовою (7), можна довести наступну теорему.

**Т е о р е м а.** Якщо в деякому околі $(-\delta;\delta)$ $(\delta>0)$ точки $x=0$ функція $f(x)$ має похідні будь-якого порядку й існує число $M>0$ таке, що виконуються нерівності

$$\left|f^{(k)}(x)\right|\le M,\ k=1,2,\dots, \qquad (8)$$

то $f(x)$ у цьому околі розвивається в ряду Тейлора.

Д о в е д е н н я. Запишемо додатковий член формули Тейлора у формі Лагранжа:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1.$$

Тоді, згідно з нерівністю (8), для кожного $x$ із розглядуваного околу точки $x=0$ виконується нерівність

$$\left|R_n(x)\right|\le\frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1},\ n=1,2,\dots. \qquad (9)$$

Нехай $x$ — довільне, але фіксоване число околу $(-\delta;\delta)$. Складемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (10)$$

Застосуємо до нього ознаку Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{M\frac{|x|^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0.$$

Отже, ряд (10) збігається. Тому границя його загального члена при $n \to \infty$ дорівнює нулю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Звідси і з нерівності (9) випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Таким чином, умова (7) виконується.
Теорему доведено.

## 1.11 РОЗВИНЕННЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ У РЯД ТЕЙЛОРА

**Ряд Тейлора для функції e$^x$.** Розглянемо функцію $f(x) = e^x$. Ця функція у кожній точці $x$ числової осі має похідну будь-якого порядку, причому

$$f^{(k)}(x) = e^x, \; k = 1, 2, \ldots.$$

Підставивши $x = 0$, дістанемо

$$f^{(k)}(0) = e^0 = 1, \; k = 1, 2, \ldots.$$

Тоді ряд Тейлора для функції $e^x$ має вигляд

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots. \tag{1}$$

Як було доведено, степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ збігається в кожній точці числової осі, тобто областю збіжності цього ряду є інтервал $(-\infty; +\infty)$.

Доведемо, що ряд (1) при будь-якому $x \in (-\infty; +\infty)$ збігається до $e^x$. Візьмемо довільне число $h > 0$. Тоді для всіх $|x| \le h$

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \le e^h, \; k = 1, 2, \ldots.$$

Отже, всі похідні для $|x| \le h$ обмежені тим самим числом $M = e^h$. Тому ряд (1) на відрізку $[-h; h]$ збігається до функції $e^x$. Оскільки для будь-якого $x \in (-\infty; +\infty)$ можна підібрати число $h > 0$ таке, що $|x| \le h$, то ряд Тейлора (1) збігається до $e^x$ у кожній точці числової осі, тобто виконується рівність

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots. \tag{2}$$

**Ряд Тейлора для функції sin *x*.** Функція $f(x) = \sin x$ при будь-якому $x \in (-\infty; +\infty)$ має всі похідні, причому

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right), \; k = 1, 2, \ldots.$$



Тоді

$$f^{(k)}(0) = \sin k\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k = 2n; \\ (-1)^{n-1}, & \text{якщо } k = 2n-1, n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Ряд Тейлора для функції $\sin x$ має вигляд

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots. \tag{3}$$

Застосовуючи ознаку Д'Аламбера, можна довести, що ряд (3) збігається в інтервалі $(-\infty; +\infty)$. Оскільки будь-яка похідна

$$\left|f^{(k)}(x)\right| = \left|\sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1, \; k = 1, 2, \ldots,$$

то ряд (3) збігається до функції $\sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots. \tag{4}$$

**Ряд Тейлора для функції cos *x*.** Нехай $f(x) = \cos x$. Ця функція при будь-якому $x \in (-\infty; +\infty)$ має похідні всіх порядків, причому

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right), \; k = 1, 2, \ldots.$$

Нехай $x = 0$. Тоді

$$f^{(k)}(0) = \cos k\frac{\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^n, & \text{якщо } k = 2n; \\ 0, & \text{якщо } k = 2n-1, n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Отже, ряд Тейлора для функції $\cos x$ має вигляд

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots.$$

Оскільки для будь-якого $x \in (-\infty; +\infty)$

$$\left|f^{(k)}(x)\right| = \left|\cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1, \; k = 1, 2 \ldots,$$

то цей ряд збігається при кожному $x \in (-\infty; +\infty)$ до $\cos x$, тобто виконується рівність

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots. \tag{5}$$

**Ряд Тейлора для функції ln(1 + *x*).** Як і в попередніх прикладах, для функції $f(x) = \ln(1+x)$ можна скласти ряд, користуючись загальним видом ряду Тейлора. Проте для цієї функції ряд Тейлора можна дістати значно простіше.

Справді, розглянемо геометричний ряд

$$1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \ldots. \tag{6}$$

Цей ряд збігається при $|x|<1$ і його сума дорівнює $\frac{1}{1+x}$:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+...+(-1)^{n-1}x^{n-1}+....$$

Проінтегруємо почленно цей ряд на відрізку $[0; x]$, де $|x|<1$:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x}=\int_0^x dx-\int_0^x xdx+...+\int_0^x (-1)^{n-1}x^{n-1}dx+....$$

Звідси дістанемо для функції $\ln(1+x)$ ряд Тейлора

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+.... \qquad (7)$$

Інтервал збіжності ряду (7) той самий, що й ряду (6), тобто інтервал $(-1; 1)$.

Зауважимо, що ряд, який становить праву частину рівності (7), при $x=-1$ розбігається, а при $x=1$ збігається як знакозмінний ряд Лейбніца. Можна довести, що рівність (7) виконується й при $x=1$. Підставивши $x=1$, матимемо

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+...,$$

тобто сума ряду Лейбніца дорівнює $\ln 2$.

**Ряд Тейлора для функції $(1+x)^m$.** Розглянемо функцію $f(x)=(1+x)^m$, де $m$ — довільне дійсне число. Таку функцію називають *біномом*. Похідна $k$-го порядку бінома дорівнює

$$f^{(k)}(x)=m(m-1)(m-2)...(m-k+1)(1+x)^{m-k},\quad k=1, 2, ....$$

Підставивши у цю рівність $x=0$, дістанемо

$$f^{(k)}(0)=m(m-1)(m-2)...(m-k+1),\quad k=1, 2, ....$$

Тоді ряд Тейлора для функції $(1+x)^m$ має вигляд

$$1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)m(m-2)...(m-n+1)}{n!}x^n+.... \qquad (8)$$

Степеневий ряд (8) називають *біномним*. Знайдемо його радіус збіжності. Обчислимо границю

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)m(m-2)...(m-n+1)(m-n)n!}{(n+1)!\,m(m-1)m(m-2)...(m-n+1)}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m}{n+1}-\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right|=1.$$

Отже, радіус збіжності $R=1$.

Таким чином, інтервалом збіжності біномного ряду (8) є $(-1; 1)$.

Доведемо, що при $|x|<1$ границя додаткового члена $R_n(x)$ формули Тейлора для функції $(1+x)^m$ при $n\to\infty$ дорівнює нулю. Запишемо



додатковий член у формі Коші:

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)(1-\theta)^n}{n!}\right||x|^{n+1}=$$

$$=\left|\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}(1-\theta)^n}{n!}\right||x|^{n+1}$$

або

$$|R_n(x)|=\left|\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n)}{n!}x^{n+1}\right|\times\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n|1+\theta x|^{m-1},\quad 0<\theta<1. \qquad (9)$$

У правій частині рівності (9) множник $\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n$ при $|x|<1$ менший за одиницю. Справді,

$$\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|<1 \text{ при } 0\le x<1 \qquad (10)$$

і

$$1+\theta x=1-\theta|x| \text{ при } -1<x<0.$$

Отже, $1-\theta|x|>1-\theta,\ 0<\theta<1$. Тому нерівність (10) справджується й при $-1<x<0$.

Щодо множника $(1+\theta x)^{m-1}$, то при $x\in(-1;1)$ виконуються нерівності

$$(1-|x|)^{m-1}<(1+\theta x)^{m-1}<(1+|x|)^{m-1}.$$

Перший множник у рівності (9) при $n\to\infty$ прямує до нуля. Справді, застосувавши до ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n)}{n!}\right||x|^{n+1} \qquad (11)$$

ознаку Д'Аламбера, матимемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|m(m-1)m(m-2)...(m-n)(m-n-1)||x|^{n+2}n!}{(n+1)!|m(m-1)m(m-2)...(m-n)||x|^{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}|x|\left|\frac{m-n-1}{n+1}\right|=|x|<1.$$

Ряд (11) збігається, тому границя загального члена його при $n\to\infty$ дорівнює нулю.

Таким чином, $R_n(x)$ при $n\to\infty$ і $|x|<1$ є добутком нескінченно малої та обмеженої функцій. Тому

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

Отже, для всіх $x$, які задовольняють нерівність $|x|<1$, біномний ряд (8) збігається до функції $(1+x)^m$, тобто

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n+.... \qquad (12)$$

Зазначимо, що показникова функція $e^x$ та тригонометричні функції $\sin x$ і $\cos x$ пов'язані між собою формулами Ейлера. Виведемо ці формули.

Нехай у ряду (2) замість $x$ візьмемо $ix$, де $i^2=-1$. Матимемо

$$e^{ix}=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots\right)+ +i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\right). \quad (13)$$

У круглих дужках містяться степеневі ряди, які зображають відповідно функції $\cos x$ і $\sin x$. Тому рівність (13) можна записати так:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x. \quad (14)$$

Якщо в ряду (2) замість $x$ взяти $-ix$, то дістанемо рівність

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x. \quad (15)$$

Із формул (14) і (15) знаходимо

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}. \quad (16)$$

Формули (14) і (15), а також рівносильні їм формули (16) називають *формулами Ейлера*.

## 1.12 ЗАСТОСУВАННЯ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ ДО НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

**Обчислення значень тригонометричних функцій.** Розглянуті в п. 1.11 степеневі ряди (4) і (5) можна використати для обчислення значень тригонометричних функцій $\sin x$ і $\cos x$. Взявши в цих рядах суму перших $n$ членів, дістанемо наближені формули

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}; \quad (1)$$

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!}. \quad (2)$$

Оскільки степеневі ряди для $\sin x$ і $\cos x$ при будь-якому $x\in(-\infty;+\infty)$ є знакозмінними, то похибка за модулем не перевищує модуля першого члена $n$-го залишку для цих рядів.

Для $\sin x$ маємо

$$|r_n(x)|\le\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (3)$$

а для $\cos x$

$$|r_n(x)|\le\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}. \quad (4)$$



Користуючись нерівностями (3) і (4), можна підібрати таке найменше число $n$, щоб за формулами (1) і (2) дістати значення $\sin x$ і $\cos x$ із наперед заданою точністю.

❑ **Приклад**

1. Обчислити $\cos 5^\circ$ з точністю до $10^{-4}$.

Р о з в ' я з а н н я. Спочатку переведемо градусну міру в радіанну:

$$\frac{2\pi}{360}5=\frac{\pi}{36}.$$

Скориставшись формулою (2), матимемо

$$\cos 5^\circ=\cos\frac{\pi}{36}\approx 1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^4-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^{2n-2}, \quad (5)$$

при цьому

$$|r_n(x)|\le\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^{2n}.$$

Знайдемо найменше значення $n$ таке, що

$$\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^{2n}<10^{-5}.$$

Оскільки $\frac{\pi}{36}<0,1$, то попередня нерівність виконується, якщо виконується нерівність

$$\frac{1}{(2n)!10^{2n}}<10^{-5}.$$

Очевидно, що при $n=2$

$$\frac{1}{(2n)!10^{2n}}=\frac{1}{4!10^4}<10^{-5}.$$

Отже, у формулі (5) достатньо взяти два перші доданки, тобто

$$\cos 5^\circ\approx 1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2. \quad (6)$$

Підставивши в останню формулу $\pi=3,14159$, дістанемо значення $\cos 5^\circ$ з п'ятьма правильними цифрами

$$\cos 5^\circ\approx 0,99619.$$

**Обчислення числа e.** Скористаємося степеневим рядом (2) для функції $e^x$. Підставивши в нього $x=1$, матимемо

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{2}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots. \quad (7)$$

Беручи в цьому ряду суму перших $n+1$ членів, дістанемо наближену формулу для числа $e$:

$$e\approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}. \quad (8)$$

Оцінимо $n$-й залишок числового ряду (7)

$$r_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots\frac{1}{(n+k)!}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(n+k)}+\ldots\right)<$$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^{k-1}}+\ldots\right).$$

У круглих дужках маємо геометричний ряд із знаменником $q=\frac{1}{n+1}<1$, $n=1, 2, \ldots$. Тому

$$r_n<\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{n+1}{(n+1)!n}=\frac{1}{n!n}. \qquad (9)$$

Отже, якщо для числа e скористатися наближеною формулою (8), то похибка буде меншою ніж $\frac{1}{n!n}$, тобто

$$r_n<\frac{1}{n!n}.$$

Нехай, наприклад, у формулі (8) $n=5$. Тоді

$$e\approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}.$$

При цьому похибка менша ніж

$$\frac{1}{6!\cdot 6}<0{,}24\cdot 10^{-3}.$$

❑ **Приклад**

**2.** Знайти з чотирма точними знаками $\frac{1}{3!}$; $\frac{1}{4!}$; $\frac{1}{5!}$.

Р о з в ' я з а н н я:

$$\frac{1}{3!}\approx 0{,}16667;$$

$$\frac{1}{4!}\approx 0{,}04167;$$

$$\frac{1}{5!}\approx 0{,}00833.$$

Тоді

$$e\approx 2{,}717.$$

Тут перші дві цифри після коми — правильні.

**Обчислення логарифмів.** Оскільки ряд (7) п. 1.11 збігається досить повільно, то застосовувати цей ряд для обчислення натуральних логарифмів не раціонально. Для обчислення логарифмів використовують інший ряд, який знайдемо так.

У степеневому ряду (7) п. 1.11 замість $x$ покладемо $-x$, при цьому, як і раніше, $|-x|<1$. Дістанемо

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots. \qquad (10)$$



Віднявши почленно від ряду (7) п. 1.11 ряд (10), матимемо степеневий ряд

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots\right). \qquad (11)$$

Нехай

$$x=\frac{1}{2m+1},$$

де $m$ — натуральне число. Тоді

$$\ln(m+1)=$$

$$=\ln m+2\left(\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{3(2m+1)^3}+\frac{1}{5(2m+1)^5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2m+1)^{2n-1}}+\ldots\right). \qquad (12)$$

Ряд (12) і є тим числовим рядом, який можна застосувати для обчислення логарифмів натуральних чисел.

Оцінимо $n$-й залишок ряду (12):

$$r_n=2\left(\frac{1}{(2n+1)(2m+1)^{2n+1}}+\frac{1}{(2n+3)(2m+1)^{2n+3}}+\ldots\right)<$$

$$<\frac{2}{(2n+1)(2m+1)^{2n+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{(2m+1)^2}}=$$

$$=\frac{2}{(2n+1)(2m+1)^{2n-1}2m(2m+2)}<\frac{1}{m(2n+1)(2m+1)^{2n}}. \qquad (13)$$

Отже, якщо користуватися наближеною формулою

$$\lg(m+1)\approx\ln m+2\left(\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{3(2m+1)^3}+\frac{1}{5(2m+1)^5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2m+1)^{2n-1}}\right), \qquad (14)$$

то похибка буде меншою за праву частину нерівності (13).

❑ **Приклад**

**3.** Обчислити наближено $\ln 2$, поклавши у формулі (14) $n=4$.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай $m=1$. Використовуючи формулу (14) при $n=4$, маємо

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}\right)\approx 0{,}69313.$$

При цьому похибка, згідно з формулою (13), буде меншою за

$$\frac{1}{5\cdot 3^8}<10^{-4}.$$

Якщо відомо натуральний логарифм числа, то можна знайти й логарифм цього числа за будь-якою основою $a>0$, $a\neq 1$.

Справді, нехай потрібно знайти логарифм числа $c$ за основою $a$, тобто

$$\log_a c.$$

За означенням логарифма маємо

$$a^{\log_a c} = c.$$

Прологарифмуємо цю рівність за основою e:

$$\log_a c \cdot \ln a = \ln c.$$

Звідси

$$\log_a c = \frac{\ln c}{\ln a}. \quad (15)$$

Число

$$M = \frac{1}{\ln a}$$

називають *модулем переходу.*

З рівності (15) випливає, що коли натуральний логарифм числа $c$ помножити на модуль переходу $M = \frac{1}{\ln a}$, то дістанемо логарифм цього числа за основою $a$.

**Наближене обчислення коренів.** Для обчислення коренів застосовують біномний ряд (12) п. 1.11.

❑ **Приклад**

**4.** Обчислити $\sqrt[3]{30}$ з точністю до $10^{-4}$.

Р о з в ' я з а н н я. Запишемо $\sqrt[3]{30}$ так:

$$\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{27+3} = \sqrt[3]{27\left(1+\frac{1}{9}\right)} = 3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}}.$$

Використовуючи біномний ряд (12), дістанемо

$$\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}} = \left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{3}\frac{1}{9}-\frac{1}{2!}\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{9^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{5}{3}\frac{1}{9^3}-\frac{1}{4!}\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{5}{3}\frac{8}{3}\frac{1}{9^4}+\ldots \quad (16)$$

Числовий ряд (16), починаючи з другого члена, є знакозмінним, його $n$-й залишок за модулем менший від модуля першого члена залишку.

Розглянемо п'ятий член у ряду (16):

$$\frac{1}{4!}\frac{80}{3^4 9^4} = \frac{10}{3^{13}} = \frac{10}{1\,581\,201} < 10^{-5}.$$

Отже, $\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}}$ з точністю до $10^{-4}$ можна обчислити за наближеною формулою

$$\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}} \approx 1+\frac{1}{3\cdot 9}-\frac{1}{3\cdot 3\cdot 9^2}+\frac{5}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 9^3}.$$

Обчислюючи останні три доданки з шістьма знаками, маємо

$$\frac{1}{3\cdot 9} \approx 0{,}037037,\ \frac{1}{3\cdot 3\cdot 9^2} \approx 0{,}001383,\ \frac{5}{3^4\cdot 9^3} \approx 0{,}000089.$$

Звідси

$$\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}} \approx 1{,}038509,\ \sqrt[3]{30} = 3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}} \approx 3{,}115527.$$

Перші чотири цифри після коми правильні, оскільки загальна похибка менша ніж $4\cdot 10^{-5}$.



**Обчислення визначених інтегралів.** Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку, тобто існує визначений інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx. \quad (17)$$

Проте цей інтеграл, як відомо, не можна обчислити за допомогою формули Ньютона — Лейбніца, якщо первісна функція для $f(x)$ не є елементарною. Тоді застосовують степеневі ряди.

Справді, нехай $f(x)$ розвивається в степеневий ряд

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \quad (18)$$

причому відрізок $[a;b]$ знаходиться всередині інтервалу, де виконується рівність (18). Тоді степеневий ряд (18) на відрізку $[a;b]$ можна почленно інтегрувати, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = a_0\int_a^b dx + a_1\int_a^b xdx + a_2\int_a^b x^2 dx + \ldots + a_n\int_a^b x^n dx + \ldots.$$

Звідси

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n b^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n a^{n+1}}{n+1}. \quad (19)$$

❑ **Приклад**

**5.** Обчислити з точністю до $10^{-4}$ визначений інтеграл

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{1+x^3}\,dx.$$

Р о з в ' я з а н н я. Первісна функція для функції $f(x) = \sqrt[3]{1+x^3}$ не є елементарною. Застосувати формулу Ньютона — Лейбніца не можна. Проте підінтегральна функція $\sqrt[3]{1+x^3}$ за допомогою біномного ряду для $|x|<1$ зображується у вигляді

$$\sqrt[3]{1+x^3} = 1+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2!}\frac{2}{3^2}x^6+\frac{1}{3!}\frac{2\cdot 5}{3^3}x^9-\frac{1}{4!}\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3^4}x^{12}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-4)}{n!3^n}x^{3n}+\ldots.$$

Тоді

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{1+x^3}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}}dx+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}}x^3dx-\frac{1\cdot 2}{2!3^2}\int_0^{\frac{1}{2}}x^6dx+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3!3^3}\int_0^{\frac{1}{2}}x^9dx-\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{4!3^4}\int_0^{\frac{1}{2}}x^{12}dx+\ldots+$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-4)}{n!3^n}\int_0^{\frac{1}{2}}x^{3n}dx+\ldots.$$

Після обчислення інтегралів маємо

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{1+x^3}\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{4\cdot 2^4} - \frac{1\cdot 2}{2!3^2}\frac{1}{7\cdot 2^7} + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3!3^3}\frac{1}{10\cdot 2^{10}} -$$

$$-\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{4!3^4}\frac{1}{13\cdot 2^{13}} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}\cdot 2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-4)}{n!3^n}\frac{1}{(3n+1)2^{3n+1}} + \ldots. \quad (20)$$

Числовий ряд без першого члена в правій частині рівності (20) є знакозмінним. Тому $n$-й залишок за модулем менший від модуля першого свого члена.

Розглянемо четвертий член

$$\frac{1}{3!\,3^3\cdot 2^{10}} < 10^{-5}.$$

Взявши в ряду (20) перші три члени, дістанемо

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{1+x^3}\,dx \approx 0{,}50309.$$

Тут перші чотири цифри — правильні.

## 1.13 ОРТОГОНАЛЬНА СИСТЕМА ФУНКЦІЙ. РЯД ФУР'Є

Задача про розвинення функції в ряд Тейлора вимагає, щоб функція була нескінченне число разів диференційовною (мала похідні всіх порядків) у деякому околі точки $x = 0$. Це звужує область застосування степеневих рядів.

Розглянемо так званий ряд Фур'є[1], за допомогою якого можна розвивати в ряди неперервні й навіть кусково-неперервні функції.

Нехай на відрізку $[a; b]$ задано дві інтегровні функції $g(x)$ і $\varphi(x)$.

***Означення 1.*** Функції $g(x)$ і $\varphi(x)$ називають *ортогональними на відрізку* $[a; b]$, якщо

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Так, функції $\sin x$ і $\cos x$ є ортогональними на відрізку $[-\pi; \pi]$. Справді,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = \left.\frac{\sin^2 x}{2}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Нехай $g(x)$ — непарна функція, а $\varphi(x)$ — парна. Такі функції на відрізку $[-a; a]$, де $a$ — довільне додатне число, є ортогональними.

***Означення 2.*** Скінченну чи нескінченну систему (множину) функцій $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x), \ldots$ називають *ортогональною на відрізку* $[a; b]$, якщо будь-які дві різні функції цієї системи ортогональні на цьому відрізку,

[1] *Фур'є Ж. Б. Ж.* (1768—1830) — французький математик.



тобто виконується співвідношення

$$\int_a^b f_k(x) f_j(x) dx = 0 \text{ для } k \ne j,\ k,\ j = 1, 2, \ldots,\ n, \ldots.$$

Прикладом ортогональної системи є так звана тригонометрична система функцій

$$1, \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx, \ldots, \quad (1)$$

яка розглядається на відрізку $[-\pi; \pi]$.

Доведемо, що система функцій (1) на відрізку $[-\pi; \pi]$ ортогональна. Обчислимо інтеграли:

1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 1\cos nx dx = \left.\frac{1}{n}\sin nx\right|_{-\pi}^{\pi} = 0;$

2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 1\sin nx dx = -\left.\frac{1}{n}\cos nx\right|_{-\pi}^{\pi} = 0;$

3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin jx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(k+j)x + \sin(k-j)x) dx =$

$\displaystyle= -\frac{1}{2}\left.\left(\frac{1}{k+j}\cos(k+j)x + \frac{1}{k-j}\cos(k-j)x\right)\right|_{-\pi}^{\pi} = 0,\ k \ne j;$

4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin jx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(k-j)x - \cos(k+j)x) dx =$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\left.\left(\frac{1}{k-j}\sin(k-j)x - \frac{1}{k+j}\sin(k+j)x\right)\right|_{-\pi}^{\pi} = 0,\ k \ne j;$

5) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin kx dx = \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx d(\sin kx) = \frac{1}{2k}\left.\left(\sin^2 kx\right)\right|_{-\pi}^{\pi} = 0;$

6) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos jx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(k+j)x + \cos(k-j)x) dx =$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\left.\left(\frac{1}{k+j}\sin(k+j)x + \frac{1}{k-j}\sin(k-j)x\right)\right|_{-\pi}^{\pi} = 0,\ k \ne j. \quad (2)$

Ці рівності доводять наведене твердження. Обчислимо ще такі інтеграли:

7) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2kx) dx = \frac{1}{2}\left.\left(x - \frac{1}{2k}\sin 2kx\right)\right|_{-\pi}^{\pi} = \pi;\ k = 1, 2, \ldots;$

8) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2kx) dx = \frac{1}{2}\left.\left(x + \frac{1}{2k}\sin 2kx\right)\right|_{-\pi}^{\pi} = \pi;\ k = 1, 2, \ldots. \quad (3)$

Розглянемо функціональний ряд такого вигляду

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right), \tag{4}$$

де $a_0, a_k, b_k, k=1,2,\ldots,$ — сталі дійсні числа.

Функціональний ряд (4) називають *тригонометричним*, а числа $a_0$, $a_k$, $b_k$, $k=1,2,\ldots,$ — *коефіцієнтами* тригонометричного ряду.

Нехай тригонометричний ряд (4) збігається рівномірно на відрізку $[-\pi;\pi]$. Позначимо його суму через $f(x)$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right). \tag{5}$$

Оскільки члени ряду (5) є неперервними функціями, а ряд, за припущенням, є рівномірно збіжним на відрізку $[-\pi;\pi]$, то його на цьому відрізку можна почленно інтегрувати, тобто

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx\right).$$

Інтеграли $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx$ і $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx$, згідно з рівностями (2), дорівнюють нулю. Тому

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi}=\pi a_0.$$

Звідси

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx. \tag{6}$$

Помножимо ліву й праву частини рівності (5) на $\cos nx$. Дістанемо такий функціональний ряд:

$$f(x)\cos nx=\frac{a_0}{2}\cos nx+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)\cos nx.$$

Можна довести, що цей ряд рівномірно збігається на відрізку $[-\pi;\pi]$, якщо на цьому відрізку рівномірно збігається ряд (5). Тоді, інтегруючи почленно попередню рівність, маємо

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nxdx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nxdx\right).$$

У правій частині цієї рівності всі інтеграли, крім інтеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=\pi,$$

дорівнюють нулю (згідно з рівностями (2)). Тому



$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\pi a_n,$$

звідси

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx, n=1,2,\ldots. \tag{7}$$

Помноживши обидві частини рівності (5) на $\sin nx$ і проінтегрувавши в межах від $-\pi$ до $\pi$, знайдемо

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx, n=1,2,\ldots. \tag{8}$$

Об'єднаємо формули (6) і (7). Матимемо

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ n=0,1,2,\ldots;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\ n=1,2,\ldots. \tag{9}$$

Формули (9) називають *формулами Ейлера — Фур'є*, а числа $a_n$, $n=0,1,2,\ldots$, і $b_n$, $n=1,2,\ldots,$ — *коефіцієнтами Фур'є функції* $f(x)$.

Отже, якщо функція $f(x)$ розвивається на відрізку $[-\pi;\pi]$ у рівномірно збіжний тригонометричний ряд (5), то коефіцієнти цього ряду визначаються формулами Ейлера — Фур'є, тобто є коефіцієнтами Фур'є функції $f(x)$.

Розглянемо тепер довільну інтегровну на відрізку $[-\pi;\pi]$ функцію $f(x)$. Для такої функції за формулами Ейлера — Фур'є знайдемо коефіцієнти Фур'є $a_0$, $a_k$ і $b_k$, $k=1,2,\ldots$. Складемо тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right), \tag{10}$$

де $a_0$, $a_k, b_k, k=1,2,\ldots,$ — коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$.

Тригонометричний ряд (10) називають *рядом Фур'є* функції $f(x)$. Отже, кожній інтегровній на відрізку $[-\pi;\pi]$ функції $f(x)$ відповідає свій ряд Фур'є. Оскільки про збіжність ряду (10) нічого невідомо, то замість знака «=» ставлять знак «~» (відповідає), тобто записують

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right). \tag{11}$$

Із попередніх міркувань випливає така теорема.

**Теорема.** Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[-\pi;\pi]$ розвивається в рівномірно збіжний тригонометричний ряд, то цей тригонометричний ряд єдиний і він є рядом Фур'є функції $f(x)$.

**Зауваження.** Оскільки члени ряду Фур'є (11) — періодичні функції, що мають спільний період $2\pi$, то сума цього ряду (якщо він збігається) є також періодичною з періодом $2\pi$. Отже, щоб ряд Фур'є функції $f(x)$ збігався до цієї функції, необхідно, щоб $f(x)$ була періодичною з періодом $2\pi$, тобто

$$f(x+2\pi)=f(x)$$

для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$.

Якщо $f(x)$ не є періодичною, а визначеною, наприклад на деякому відрізку $[a;b]\subset[-\pi;\pi]$, то можна побудувати допоміжну інтегровну періодичну функцію $\varphi(x)$ з періодом $2\pi$ таку, щоб всередині відрізка $[a;b]$ вона збігалася з функцією $f(x)$. Якщо ряд Фур'є функції $\varphi(x)$ на відрізку $[-\pi;\pi]$ збігається до $\varphi(x)$, то для $x\in[a;b]$ він збігається до $f(x)$.

Якщо неперіодична функція $f(x)$ визначена на деякому відрізку $[a;b]\supset[-\pi;\pi]$ або навіть на нескінченному інтервалі $(-\infty;+\infty)$, то можна побудувати інтегровну функцію $\varphi(x)$, яка на відрізку $[-\pi;\pi]$ збігається з $f(x)$ і має період $2\pi$. Якщо ряд Фур'є, складений для $\varphi(x)$, збігається до $\varphi(x)$, то на відрізку $[-\pi;\pi]$ він зображує задану функцію $f(x)$.

Побудову періодичної з періодом $2\pi$ функції $\varphi(x)$, яка дорівнює заданій функції $f(x)$ на відрізку $[-\pi;\pi]$ або на деякій частині його у випадку, коли $f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]\subset[-\pi;\pi]$, називають *періодичним продовженням функції* $f(x)$.

Щоб періодичне продовження було однозначним і всюди визначеним, потрібно спочатку задати $\varphi(x)$ на півінтервалі $(-\pi;\pi]$ або на піввідрізку $[-\pi;\pi)$. На кінцях відрізка $[-\pi;\pi]$ періодичним продовженням функції $f(x)$ вважають

$$\varphi(\pi)=\varphi(-\pi)=\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}. \tag{12}$$

## 1.14 ЗБІЖНІСТЬ РЯДУ ФУР'Є ДЛЯ КУСКОВО-ДИФЕРЕНЦІЙОВНОЇ ФУНКЦІЇ

Розглянемо поняття кусково-диференційовної функції.

Нехай функцію $f(x)$ задано на відрізку $[a;b]$. Тоді $f(x)$ називають *кусково-диференційовною* на відрізку $[a;b]$, якщо точками

$$a=a_0<a_1<a_2<\ldots<a_k<a_{k+1}<\ldots<a_n=b$$

цей відрізок можна розбити на скінченне число відрізків $[a_k;a_{k+1}]$, $k=0,1,\ldots,n-1$, таких, що в кожному інтервалі $(a_k;a_{k+1})$ функція $f(x)$ диференційовна, а на кінцях відрізків функція і її похідна першого порядку мають скінченні односторонні границі

$$f(a_k+0),\ f(a_{k+1}-0),\ f'(a_k+0),\ f'(a_{k+1}-0).$$

Функція $f(x)=|x|$ на відрізку $[-\pi;\pi]$ є кусково-диференційовною. Справді, відрізок $[-\pi;\pi]$ можна розбити на два відрізки $[-\pi;0]$ і $[0;\pi]$, в кожному з яких функція $f(x)=x$ задовольняє зазначені умови.

**Теорема.** Якщо функція $f(x)$ періодична з періодом $2\pi$ і кусково-диференційовна на відрізку $[-\pi;\pi]$, то її ряд Фур'є в кожній точці $x_0$



збігається і має суму

$$S_0=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}. \tag{13}$$

Ця сума, очевидно, дорівнює $f(x_0)$, якщо $f(x)$ у точці $x_0$ є неперервною.

Перш ніж доводити теорему сформулюємо і доведемо дві леми.

**Лема 1.** Якщо функція $f(x)$ неперервна або кусково-неперервна на будь-якому відрізку $[a;b]$ і періодична з періодом $2\pi$, то величина інтеграла

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)dx$$

не залежить від $\alpha$.

**Доведення.** Обмежимося випадком, коли $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$. Тоді маємо рівність

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)dx=\int_{\alpha}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2\pi} f(x)dx+\int_{2\pi}^{\alpha+2\pi} f(x)dx.$$

В останньому інтегралі застосуємо підстановку $x=2\pi+t$. Тоді, врахувавши, що $f(2\pi+t)=f(t)$, матимемо

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)dx=\int_{0}^{2\pi} f(x)dx.$$

Лему доведено.

**Лема 2** (Рімана). Якщо функція $g(x)$ неперервна або кусково-неперервна на деякому відрізку $[a;b]$, то правильними є рівності

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b g(t)\cdot\sin pt\,dt=0;$$

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b g(t)\cdot\cos pt\,dt=0.$$

Доведемо першу рівність, припустивши, що $g(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$.

Далі скористаємося очевидною нерівністю

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta}\sin pt\,dt\right|\le\left|\frac{\cos p\alpha-\cos p\beta}{p}\right|\le\frac{2}{p}, \tag{14}$$

де $\alpha,\beta$ — довільні дійсні числа.

Утворимо $T$-розбиття відрізка $[a;b]$ на частини

$$a=t_0<t_1<\ldots<t_k<t_{k+1}<\ldots<t_n=b. \tag{15}$$

Тоді матимемо рівність

$$\int_a^b g(t)\sin pt\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} g(t)\sin pt\,dt.$$

Оскільки функція $g(x)$ є неперервною на кожному відрізку $[t_k; t_{k+1}]$ $(k = 0, 1, ..., n-1)$, то вона на кожному з цих відрізків набуває свого найменшого значення $m_k$. Тому попередню рівність можна записати у вигляді

$$\int_a^b g(t)\sin pt\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (g(t)-m_k)\sin pt\,dt + \sum_{k=0}^{n-1} m_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sin pt\,dt.$$

Тоді маємо таку нерівність

$$\left|\int_a^b g(t)\sin pt\,dt\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k \Delta t_k + \frac{2}{p}\sum_{k=0}^{n-1}|m_k|,$$

де $\omega_k$ — коливання функції на відрізку $[t_k; t_{k+1}]$, $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Оскільки $g(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то $T$-розбиття (15) можна вибрати таким, щоб

$$\omega_k < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

де $\varepsilon > 0$ — довільне число. Тоді

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k \Delta t_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оскільки число $p \to \infty$, то його можна вибрати таким, щоб виконувалася нерівність

$$p > \frac{4}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{n-1}|m_k|$$

(числа $m_k$ для вибраного $T$-розбиття фіксовані).

Тоді для вибраного числа $p$ маємо нерівність

$$\left|\int_a^b g(t)\sin pt\,dt\right| < \varepsilon.$$

Отримана нерівність і доводить цю лему.

Доведення теореми. Користуватимемося означенням збіжності функціонального ряду. Для цього візьмемо довільну точку $x_0$ і побудуємо $n$-ну часткову суму $S_n(x_0)$ ряду Фур'є:

$$S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n}(a_m \cos mx_0 + b_m \sin mx_0).$$



Підставимо сюди значення коефіцієнтів $a_0$, $a_m$, $b_m$ $(m = 1, ..., n)$ Фур'є. Матимемо

$$S_n(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du + \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)(\cos mu \cos mx_0 + \sin mu \sin mx_0)\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos m(u-x_0)\right)du.$$

Скористаємося відомою тотожністю

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos m\alpha = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sum_{m=1}^{n}\left(\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(m-\frac{1}{2}\right)\alpha\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Тоді матимемо

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{\sin(2n+1)\frac{u-x_0}{2}}{2\sin\frac{u-x_0}{2}}\,du. \qquad (16)$$

Інтеграл (16) називають *інтегралом Діріхле*.

Оскільки функція $f(u)$ є періодичною з періодом $2\pi$, то відрізок інтегрування $[-\pi; \pi]$ в інтегралі (16), згідно з лемою 1, можемо замінити на інший відрізок завдовжки $2\pi$, наприклад на відрізок $[x_0 - \pi; x_0 + \pi]$.

Отримаємо

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(u)\frac{\sin(2n+1)\frac{u-x_0}{2}}{2\sin\frac{u-x_0}{2}}\,du.$$

Застосувавши підстановку $t = u - x_0$, матимемо

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

Використовуючи адитивну властивість визначеного інтеграла, остаточно знаходимо

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt. \qquad (17)$$

Далі у рівності (17) покладемо $f(x)\equiv 1$ (така функція задовольняє умови теореми). Тоді $S_n(x_0)\equiv 1$ і маємо рівність

$$1=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt. \tag{18}$$

Помножимо обидві частини рівності (18) на число $S_0$ (див. (13)) і, віднімаючи почленно отриманий результат від рівності (17), матимемо

$$S_n(x_0)-S_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(f\left(x_0+t+f(x_0-t)\right)-f(x_0+0)-f(x_0-0)\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt. \tag{19}$$

Праву частину останньої рівності запишемо у вигляді

$$S_n(x_0)-S_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt,$$

де

$$g(t)=\left(\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}-\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t}\right)\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}. \tag{20}$$

При $t\in(0;\pi]$ функція $g(x)$ є кусково-неперервною. В точці $t=0$ вона не визначена. Доведемо, що в точці $t=0$ існує

$$\lim_{t\to 0}g(t)=K.$$

Тоді за законом неперервності покладемо $g(0)=K$. Функція в точці $t=0$ стає неперервною.

Зауважимо, що другий співмножник у (20) при $t\to 0$ має границю, яка дорівнює одиниці. Дослідимо вираз, що знаходиться в дужках. Його значення при $t\to 0$ залежить від розміщення точки $x_0$. Якщо $x_0$ знаходиться в інтервалі, в якому функція $f(x)$ диференційовна, то $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$. Отже,

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}=f'(x_0),\quad \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0-t)-f'(x_0-0)}{-t}=f'(x_0).$$

Тоді

$$\lim_{t\to 0}g(t)=0.$$

У цьому випадку $K=0$.

Якщо $x_0$ є спільним кінцем двох сусідніх відрізків $[x_{k-1};x_k]$, $[x_k;x_{k+1}]$ з $T$-розбиття, то попередні границі існують і рівні відповідно $f'(x_0+0)$, $f'(x_0-0)$. Отже, в цьому випадку $K=f'(x_0+0)-f'(x_0-0)$.

Робимо висновок, що в обох випадках функція $g(x)$, задана формулою (20), при $t\to 0$ має границю, а отже, вона є кусково-неперервною на



відрізку $[0;\pi]$. Тому в рівності (19) можна перейти до границі при $n\to\infty$. Оскільки границя правої частини цієї рівності при $n\to\infty$, згідно з лемою 2, дорівнює нулю, то

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)=S_0.$$

Теорему доведено.

❑ **Приклади**

**1.** Розвинути в ряд Фур'є функцію

$$f(x)=|x|,\ -\pi\le x\le\pi,\ \ f(x+2\pi)=f(x).$$

Р о з в ' я з а н н я. Ця функція є періодичною (рис. 1) і на відрізку $[-\pi;\pi]$, як згадувалося вище, є кусково-диференційовною. Тому вона задовольняє умови попередньої теореми. Оскільки в кожній точці відрізка $[-\pi;\pi]$ задана функція є неперервною, то ряд Фур'є, згідно з рівністю (13), збігається на цьому відрізку до функції $f(x)=|x|$, тобто

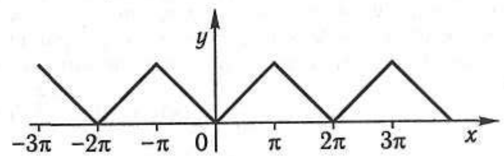


**Рис. 1**

$$|x|=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \tag{21}$$

Знайдемо коефіцієнти Фур'є $a_0$, $a_k$, $b_k$, $k=1,2,\dots$, за формулами Ейлера — Фур'є (9):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\pi;$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos kxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos kxdx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{k}x\sin kx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin kxdx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi k^2}\cos kx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi k^2}\left((-1)^k-1\right),\ k=1,2,\dots;$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin kxdx=0,\ k=1,2,\dots.$$

Підставивши в рівність (21) значення коефіцієнтів, матимемо

$$|x|=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi k^2}\left((-1)^k-1\right)\cos kx.$$

Число $(-1)^k-1$ при $k=2m$, $m=1,2,\dots$, дорівнює нулю, а при $k=2m-1$ дорівнює $-2$. Тому остаточно

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2},\ -\pi\le x\le\pi. \tag{22}$$

Зазначимо, що ряд (22) не містить членів із синусами. Це не випадково. Якщо функція $f(x)$ парна, то функція $f(x)\sin kx$ — непарна. Тому

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx=0,\ k=1,2,\dots,$$

і коефіцієнти Фур'є $b_k=0$, $k=1,2,\dots$.

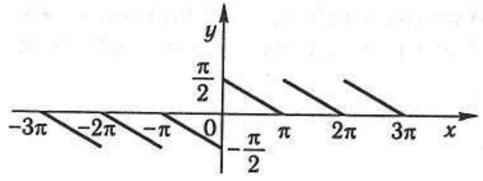


**Рис. 2**

Якщо функція $f(x)$ непарна, то й $f(x)\cos kx$ також непарна. Тоді

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = 0, \ k=1,2,\dots,$$

і коефіцієнти Фур'є $a_k = 0$, $k=1,2,\dots$. У цьому випадку ряд Фур'є містить тільки члени із синусами.

**2.** Розвинути в ряд за синусами функцію $y=\frac{\pi-x}{2}$ в інтервалі $(0;\pi)$.

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки функцію задано не на всьому відрізку $[-\pi;\pi]$, то потрібно побудувати її періодичне продовження. За умови слід розвинути функцію в ряд, який містив би тільки синуси, тому періодичне продовження буде непарною функцією. Побудуємо періодичне продовження, як це зображено на рис. 2. Тоді

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\sin kx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx dx =$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin kx dx = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi-x}{k}\cos kx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx dx\right) = -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{k}+\frac{1}{k^2}\sin kx\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{1}{k}, \ k=1,2,\dots.$$

Отже,

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k} \ \text{ для } x\in(0;\pi).$$

**Зауваження.** Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[-l;l]$, де $l$ — довільне дійсне число. Застосовуючи підстановку

$$x=\frac{ly}{\pi},$$

де $-\pi \le y \le \pi$, функцію $f(x)$ можна звести до такої:

$$\varphi(y) = f\left(\frac{ly}{\pi}\right),$$

що вже задана на відрізку $[-\pi;\pi]$.

Припустимо, що $\varphi(y)$ розвивається в ряд Фур'є

$$\varphi(y)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos ky + b_k \sin ky), \tag{23}$$

де

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(y)\cos ky dy, \ k=0,1,2,\dots, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(y)\sin ky dy, \ k=1,2,\dots. \tag{24}$$

Зробивши в ряду (23) та в інтегралах (24) заміну змінної

$$y=\frac{\pi x}{l},$$

дістанемо ряд Фур'є для функції $f(x)$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi k}{l}x + b_k\sin\frac{\pi k}{l}x\right), \tag{25}$$

де

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi}{l}x dx, \ k=0,1,2,\dots;$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x dx, \ k=1,2,\dots. \tag{26}$$



Скориставшись формулами Ейлера, ряд Фур'є можна записати в компактнішій формі. Справді, функції $\cos kx$, $\sin kx$ за формулами Ейлера можна записати так:

$$\cos kx = \frac{1}{2}\left(e^{ikx}+e^{-ikx}\right); \ \sin kx = \frac{i}{2}\left(e^{-ikx}-e^{ikx}\right), \ k=1,2,\dots. \tag{27}$$

Підставивши ці значення в ряд (11) (п. 1.13), дістанемо

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}(a_k-ib_k)e^{ikx}+\frac{1}{2}(a_k+ib_k)e^{-ikx}\right). \tag{28}$$

Введемо позначення

$$c_0=\frac{1}{2}a_0; \ c_k=\frac{1}{2}(a_k-ib_k); \ c_{-k}=\frac{1}{2}(a_k-ib_k); k=1,2,\dots. \tag{29}$$

Тоді ряд (28) набирає вигляду

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}. \tag{30}$$

Це і є комплексна форма ряду Фур'є функції $f(x)$. Користуючись формулами Ейлера — Фур'є та формулами (29), можна дістати формули для коефіцієнтів

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx. \tag{31}$$

## 1.15 СЕРЕДНЄ КВАДРАТИЧНЕ ВІДХИЛЕННЯ. МІНІМАЛЬНА ВЛАСТИВІСТЬ БАГАТОЧЛЕНА ФУР'Є

Нехай на відрізку $[a;b]$ задано дві неперервні функції $f(x)$ і $\varphi(x)$. Поставимо задачу: знайти «середнє відхилення» функції $f(x)$ від функції $\varphi(x)$ на відрізку $[a;b]$. Для цього розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на $n$ рівних частин точками

$$a=x_1<x_2<\dots<x_{n+1}=b$$

і знайдемо різниці

$$\delta_1=f(x_1)-\varphi(x_1); \ \delta_2=f(x_2)-\varphi(x_2),\dots; \ \delta_n=f(x_n)-\varphi(x_n). \tag{1}$$

Числа $\delta_1,\dots,\delta_n$ характеризують відхилення функції $f(x)$ від функції $\varphi(x)$ у точках $x_0, \ x_1,\dots, \ x_n$.

Тоді число $\Delta^{(n)}=\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}\delta_k^2}{n}}$ характеризує деякою мірою середнє відхилення функції $f(x)$ від функції $\varphi(x)$ на відрізку $[a;b]$. При цьому, що більше $n$, то точніше $\Delta^{(n)}$ характеризуватиме відхилення $f(x)$ від $\varphi(x)$ на відрізку $[a;b]$. Тому природно дати таке означення.

***Означення.*** *Середнім квадратичним відхиленням* функції $f(x)$ від функції $\varphi(x)$ на відрізку $[a;b]$ називають число

$$\Delta=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\delta_k^2}{n}}. \tag{2}$$

**Теорема.** Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$, то середнє квадратичне відхилення функції $f(x)$ від функції $\varphi(x)$ на відрізку $[a;b]$ дорівнює

$$\Delta=\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x)-\varphi(x))^2\,dx}. \tag{3}$$

**Доведення.** Підставимо в (2) значення $\delta_1,\dots,\delta_n$, а також числа $n$, враховуючи при цьому, що

$$n=\frac{b-a}{x_{k+1}-x_k},\quad k=1,\dots,n.$$

Дістанемо

$$\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\delta_k^2}{n}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-\varphi(x_k))^2(x_{k+1}-x_k)}{b-a}}. \tag{4}$$

У правій частині цієї рівності під знаком границі маємо інтегральну суму функції

$$F(x)=\frac{(f(x)-\varphi(x))^2}{b-a}.$$

Оскільки $F(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-\varphi(x_k))^2(x_{k+1}-x_k)}{b-a}=\frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x)-\varphi(x))^2\,dx.$$

Теорему доведено.

❑ **Приклад**

Знайти середнє квадратичне відхилення функції $f(x)=x^n$ від функції $\varphi(x)=0$ на відрізку $[0;1]$.

**Розв'язання.** Скориставшись формулою (3), дістанемо

$$\Delta=\sqrt{\int_0^1 x^{2n}dx}=\sqrt{\frac{1}{2n+1}}.$$

Звідси випливає, що більше число $n$, то менше середнє квадратичне відхилення функції $x^n$ від нуля на відрізку $[0;1]$.

Розглянемо тригонометричний ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx), \tag{5}$$

де $\alpha_k,\beta_k,\ k=0,1,\dots,$ — довільні дійсні числа. Тоді $n$-на часткова сума тригонометричного ряду (5) є *тригонометричним багаточленом* порядку $n$.

**Теорема.** Серед усіх тригонометричних многочленів порядку $n$ найменше середнє квадратичне відхилення від інтегровної функції $f(x)$ на відрізку $[-\pi;\pi]$ має багаточлен, який є $n$-ю частковою сумою ряду Фур'є



функції $f(x)$, тобто багаточленом

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

в якому числа $a_0,\ a_k,\ b_k,\ k=1,2,\dots,$ є коефіцієнтами Фур'є функції $f(x)$.

**Доведення.** Для доведення теореми, потрібно показати, що число

$$\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right)^2dx \tag{6}$$

має найменше значення тоді і тільки тоді, коли

$$\alpha_0=\frac{a_0}{2},\ \alpha_k=a_k,\ \beta_k=b_k,\ k=1,2,\dots,n.$$

У правій частині рівності (6) виконаємо піднесення до квадрата

$$\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)dx+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right)^2dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx+\sum_{k=0}^{n}\left(\alpha_k\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx+\beta_k\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\alpha_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx+\beta_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kxdx\right)+2\sum_{k=0}^{n}\sum_{k\neq j\, j=0}^{n}\alpha_k\alpha_j\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos jxdx+\right.$$

$$\left.+2\sum_{k=0}^{n}\sum_{k\neq j\, j=0}^{n}(\alpha_k\beta_j+\alpha_j\beta_k)\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin jxdx+2\sum_{k=0}^{n}\sum_{k\neq j\, j=0}^{n}\beta_k\beta_j\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin jxdx\right). \tag{7}$$

Використовуючи формули (2), (3) і (9) п. 1.13, праву частину рівності (7) можна записати так:

$$\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\alpha_0 a_0-\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k+\beta_k b_k)+\alpha_0^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2).$$

Виокремивши повні квадрати, дістанемо

$$\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx+\left(\alpha_0-\frac{a_0}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-a_k)^2+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-b_k)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right). \tag{8}$$

У правій частині рівності (8) вираз

$$\left(\alpha_0-\frac{a_0}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-a_k)^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-b_k)^2 \tag{9}$$

є невід'ємним. Отже, $\delta_n^2$ буде найменшим тоді, коли вираз (9) дорівнюватиме нулю. Ця умова виконуватиметься тоді і тільки тоді, коли виконуватимуться рівності

$$\alpha_0 - \frac{a_0}{2} = 0,\ \alpha_k - a_k = 0,\ \beta_k - b_k = 0,\quad k = 1, 2, \ldots,$$

або

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{2},\ \alpha_k = a_k,\ \beta_k = b_k,\quad k = 1, 2, \ldots .$$

Теорему доведено.

Цю властивість багаточлена Фур'є називають *мінімальною.*

## 1.16 ЗБІЖНІСТЬ РЯДУ ФУР'Є В СЕРЕДНЬОМУ. НЕРІВНІСТЬ БЕССЕЛЯ. РІВНІСТЬ ПАРСЕВАЛЯ

Із поняттям середнього квадратичного відхилення тісно пов'язане таке поняття, як збіжність функціонального ряду в середньому.

Нехай маємо функціональний ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \tag{1}$$

де функції $f_k(x)$ інтегровні на відрізку $[a;b]$. Складемо часткову суму ряду (1):

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x). \tag{2}$$

***Означення.*** Функціональний ряд (1) називають *збіжним у середньому* на відрізку $[a;b]$ до функції $S(x)$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (S(x) - S_n(x))^2\,dx = 0. \tag{3}$$

**Теорема.** Якщо функціональний ряд (1) на відрізку $[a;b]$ збігається до $S(x)$ рівномірно, то він збігається і в середньому на цьому відрізку до $S(x)$.

Доведення. Нехай ряд (1) на відрізку $[a;b]$ збігається рівномірно. Тоді для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $N = N(\varepsilon)$, яке не залежить від точок $x \in [a;b]$ і таке, що при $n > N$ виконується нерівність

$$|S(x) - S_n(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}$$

для всіх точок $x$ з відрізка $[a;b]$.

У цьому випадку при $n > N$ виконується нерівність

$$\int_a^b (S(x) - S_n(x))^2\,dx \le \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{b-a}x\Big|_a^b = \varepsilon.$$



Це означає, що

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (S(x) - S_n(x))^2\,dx = 0.$$

Теорему доведено.

Зазначимо, що обернена теорема справджується не завжди.

Можна було б навести приклад функціонального ряду, який на цьому відрізку збігається в середньому, але є навіть розбіжним у звичайному розумінні. Це підкреслює той факт, що збіжність у середньому вимагає від функціонального ряду більш слабких умов, ніж рівномірна чи звичайна збіжність.

**Лема.** Для будь-якої інтегровної на відрізку $[-\pi;\pi]$ функції та будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує тригонометричний багаточлен

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

такий, що виконується нерівність

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - P(x))^2\,dx < \varepsilon. \tag{4}$$

Цю лему приймемо без доведення.

**Теорема.** Для будь-якої інтегровної на відрізку $[-\pi;\pi]$ функції $f(x)$ ряд Фур'є збігається в середньому до цієї функції.

Доведення. Нехай $S_n(x)$ є $n$-на часткова сума ряду Фур'є функції $f(x)$

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Згідно з мінімальною властивістю багаточлена Фур'є і нерівністю (4), дістанемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x))^2\,dx \le \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - P(x))^2\,dx < \varepsilon. \tag{5}$$

Це означає, що ряд Фур'є збігається в середньому до функції $f(x)$.

Теорему доведено.

Виведемо досить важливу для теорії рядів Фур'є нерівність Бесселя[1].

Нехай $f(x)$ є інтегровною функцією на відрізку $[-\pi;\pi]$. Тоді

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left((x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right)\right)^2 dx \ge 0, \tag{6}$$

де $a_0, a_k, b_k$, $k = 1, 2, \ldots,$ — коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$.

[1] *Бессель Ф.* (1784—1846) — німецький математик і астроном.

Розкривши під інтегралом квадрат, дістанемо

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 2\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right)dx +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right)^2 dx \ge 0. \quad (7)$$

Використовуючи формули (2), (3), (9) п. 1.13, ліву частину нерівності (7) можна записати у вигляді

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right) \ge 0$$

або

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx. \quad (8)$$

Нерівність (8) називають *нерівністю Бесселя*.

З цієї нерівності випливає такий наслідок.

Н а с л і д о к. Для будь-якої інтегровної на відрізку $[-\pi;\pi]$ функції $f(x)$ її коефіцієнти Фур'є прямують до нуля при $n\to\infty$.

Справді, з нерівності (8) маємо, що послідовність часткових сум числового ряду

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right) \quad (9)$$

обмежена. Оскільки часткові суми ряду (9) є монотонно неспадними, то цей числовий ряд збігається. Для ряду (9) тоді виконується необхідна умова збіжності, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)=0.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} b_k = 0.$$

Перейдемо в нерівності (8) до границі при $n\to\infty$. Ліва частина нерівності прямуватиме до суми ряду (9), а права не залежить від $n$. Маємо

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx. \quad (10)$$

Доведемо, що нерівність (10) може бути рівністю, тобто

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx. \quad (11)$$

Рівність (11) називають *рівністю Парсеваля*[1]. Щоб довести її, скористаємося тим, що ряд Фур'є в середньому збігається до функції $f(x)$,

[1] *Парсеваль М.* (1755—1836) — французький математик.



тобто

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-S_n(x)\right)^2 dx = 0. \quad (12)$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на число $\frac{1}{\pi}$, матимемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-S_n(x)\right)^2 dx = 0.$$

Проте

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-S_n(x)\right)^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right).$$

Тому

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right)\right)=0$$

або

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx. \quad (13)$$

Під знаком границі тут маємо $n$-ну часткову суму ряду (9). Отже, з рівності (13) випливає рівність (11).

## 1.17 УЗАГАЛЬНЕНИЙ РЯД ФУР'Є

Нехай на відрізку $[a;b]$ задано довільну (не обов'язково тригонометричну) ортогональну систему функцій $\{\varphi_k(x)\}$, $k=0,1,2,\ldots$, і нехай на цьому відрізку задано деяку інтегровну функцію $f(x)$. Потрібно розвинути в ряд функцію $f(x)$ за функціями $\varphi_k(x)$, $k=0,1,\ldots$. Для цього, як і під час розгляду тригонометричного ряду Фур'є, припустимо, що $f(x)$ є сумою рівномірно збіжного ряду

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x). \quad (1)$$

Припустимо також, що функції $\varphi_k(x)$ інтегровні на відрізку $[a;b]$. Тоді, помноживши обидві частини рівності (1) на функцію $\varphi_m(x)$, $m=0,1,2,\ldots$, і проінтегрувавши результат у межах від $a$ до $b$, дістанемо

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = c_m\int_a^b \varphi_m^2(x)dx, \quad m=0,1,\ldots. \quad (2)$$

Нехай

$$\int_a^b \varphi_m^2(x)dx = \lambda_m > 0. \quad (3)$$

Тоді з рівності (2) знаходимо

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m} \int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx, \quad m = 0, 1, \ldots. \tag{4}$$

Отже, якщо функція $f(x)$ є сумою рівномірно збіжного ряду (1), то коефіцієнти цього ряду визначаються формулами (4).

Таким чином, формули Ейлера — Фур'є, виведені для коефіцієнтів тригонометричного ряду Фур'є, є окремим випадком формул (4).

Формули (4) називають *узагальненими формулами Ейлера — Фур'є*; числа $c_m$, що визначаються формулами (4), називають *узагальненими коефіцієнтами Фур'є*, а функціональний ряд (1), в якому коефіцієнти $c_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, визначають за формулами (4), називають *узагальненим рядом Фур'є*.

Щодо узагальненого ряду Фур'є можна повторити деякі міркування, стосовно тригонометричного ряду Фур'є. Зокрема, можна стверджувати, що кожній інтегровній на відрізку $[a; b]$ функції відповідає свій узагальнений ряд Фур'є

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \tag{5}$$

де $c_k$ — узагальнені коефіцієнти Фур'є.

Правильною є, наприклад, така теорема.

**Теорема.** Для будь-якої інтегровної на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$ серед усіх «багаточленів»

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(x),$$

де $\alpha_k$ — довільні дійсні числа, найменше квадратичне відхилення має «узагальнений багаточлен» Фур'є:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x), \tag{6}$$

де $c_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$ — узагальнені коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$.

Зазначимо, що для узагальненого ряду Фур'є виконується також нерівність Бесселя

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k c_k^2 \le \int_a^b f^2(x)dx. \tag{7}$$

# Диференціальне числення функцій кількох змінних

РОЗДІЛ 2

## 2.1 ФУНКЦІЯ ДВОХ ЗМІННИХ

У першій частині цього підручника було розглянуто функції однієї змінної, де зазначалося, що в природі й техніці трапляються випадки, коли явища й процеси описуються більше ніж двома величинами. Отже, йдеться про функції, в яких незалежних змінних є відповідно дві, три, …, $n$. Такі функції називають *функціями кількох змінних*.

Розглянемо найпростіший випадок, коли незалежних змінних є дві, тобто функцію *двох змінних*.

❑ **Приклади**

**1.** Нехай у просторі без опору вільно падає точка. Шлях $S$, пройдений точкою за час $t$, визначають за формулою

$$S = v_0 t + \frac{gt^2}{2}, \tag{1}$$

де $v_0$ — початкова швидкість; $g$ — прискорення вільного падіння. Якщо змінювати швидкість $v_0$, то для кожного її значення і для кожного моменту часу $t$ за формулою (1) матимемо відповідне значення шляху $S$. Отже, значення величини $S$ визначається значенням двох величин $v_0$ і $t$.

**2.** Позначимо через $m_1$ і $m_2$ маси точок $M_1$ і $M_2$, розміщених на площині $xOy$. Тоді момент інерції $I$ системи точок $M_1$, $M_2$ відносно деякої прямої $l$ (рис. 3) дорівнює

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2, \tag{2}$$

де $r_1$, $r_2$ — відповідно відстань точок $M_1$ і $M_2$ до прямої $l$. Беручи різні значення цих відстаней, за допомогою формули (2) для кожної пари значень $r_1$ і $r_2$ дістанемо відповідне значення моменту $I$. Отже, величина $I$ є функцією двох змінних $r_1$ і $r_2$.

**3.** Якщо через $r$ позначити радіус основи циліндра, а через $h$ — його висоту, то об'єм такого циліндра, як відомо, дорівнює

$$V = \pi r^2 h. \tag{3}$$

Отже, для кожної пари значень $r$ і $h$ маємо одне значення $V$. Величина $V$ є функцією двох змінних: $r$ і $h$.

З'ясуємо математичну суть цього питання.

Нехай $x$ і $y$ — два довільні дійсні числа. Розглядаючи ці числа разом, маємо пару чисел, яку позначимо через $(x, y)$. Цій парі чисел на площині $xOy$ відповідає одна точка з координатами $x$ і $y$ (рис. 4). Можна довести, що й, навпаки, кожній точці площини $xOy$ відповідає одна деяка пара

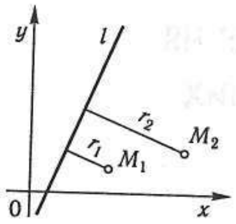


Рис. 3

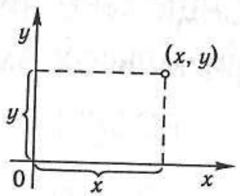


Рис. 4

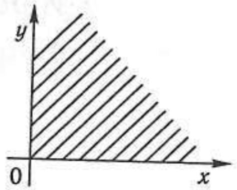


Рис. 5

дійсних чисел. Тому пару дійсних чисел $(x, y)$ ще називають *точкою площини* $xOy$.

Позначимо через $M$ множину всіх можливих пар (значень) $(x, y)$, які вони можуть набувати сумісно. Тоді множину $M$ називають *областю зміни змінних* $x$ і $y$.

***Означення.*** Якщо кожній парі (точці) дійсних чисел $(x, y)$ з множини $M$ за певним правилом або законом поставлено у відповідність одне дійсне число $z$ із множини $Z$, $z \in Z$, то кажуть, що на множині $M$ визначено функцію $z$ і записують $z = f(x, y)$. При цьому множину $M$ називають *областю визначення* або *областю існування функції*, множину $Z$ — *множиною значень* функції або *областю зміни* функції, $x$ і $y$ називають *аргументами* або *незалежними змінними*, $z$ — залежною змінною або функцією; $f(x, y)$ — значенням функції в точці $(x, y)$.

Як і у випадку функції однієї змінної, в математичному аналізі здебільшого вивчають функції кількох змінних, які задано аналітично (за допомогою формул). Розглянемо приклади таких функцій та визначимо області існування їх.

❑ **Приклади**

**1.** $z = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Задана функція визначена для всіх пар $(x, y)$ невід'ємних чисел $x \ge 0$, $y \ge 0$. Кожній парі невід'ємних дійсних чисел $(x, y)$ на площині $xOy$ відповідає одна точка.

Отже, областю існування функції є всі точки, що знаходяться в першому квадранті (рис. 5).

**2.** $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$.

Тут на аргументи потрібно накласти умову:

$$|x| \le 1; \ |y| \le 1, \text{ або } -1 \le x \le 1; \ -1 \le y \le 1. \tag{4}$$

Отже, областю існування функції є множина всіх дійсних пар $(x, y)$, в яких $x$ і $y$ задовольняють нерівності (4). На площині $xOy$ — це всі точки квадрата (рис. 6).

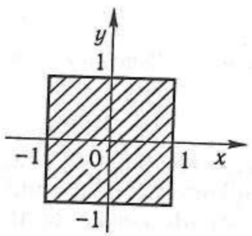


Рис. 6

**3.** $z = \log_a xy$.

У цьому випадку $z$ набуває дійсних значень, якщо $xy > 0$. Отже, областю існування цієї функції є всі пари дійсних чисел $(x, y)$, в яких $x$ і $y$ мають однакові знаки, тобто $x > 0$, $y > 0$, або $x < 0$, $y < 0$.

На площині $xOy$ — це точки, що лежать в першому і третьому квадрантах, крім координатних осей (рис. 7).

Стрілки на рисунку означають, що межі квадрантів не належать області існування функції $z = \log_a xy$.



4. Позначимо дві сторони трикутника через $x, y$, його периметр — через $2p$, а площу — через $Z$. Тоді третя сторона трикутника дорівнює $2p - x - y$. Обчислимо площу трикутника за формулою Герона:

$$Z = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}. \tag{5}$$

Таким чином, $Z$ є функцією двох змінних $x$ і $y$, причому $x$ і $y$ мають задовольняти умови

$$0 < x < p; \ 0 < y < p; \ x + y > p. \tag{6}$$

Отже, область існування функції (5) задається нерівностями (6). На площині $xOy$ вона зображується у вигляді відкритого трикутника (трикутника, до якого не входять сторони) (рис. 8).

Зауважимо, що аналітичний вираз (5) має ширшу область існування. Так, він набуває дійсних значень при $x > p$ і $y > p$. Надалі, якщо у величини, які входять у формулу, не вкладено ніякого змісту, то під областю існування функції розумітимемо область існування відповідного аналітичного виразу.

Функції двох змінних, як і функції однієї змінної, можна зобразити графічно. Для цього візьмемо в просторі прямокутну систему координат. Позначимо координатні осі через $P$ $x$, $y$, $z$ (рис. 9).

Нехай $(x, y)$ — точка з області існування функції. Тоді цій точці відповідатиме число $z = f(x, y)$. Отже, маємо трійку чисел $x$, $y$, $z$. З аналітичної геометрії відомо, що сукупності трьох дійсних чисел у просторі відповідає одна точка. Позначимо її через $P$ $(x, y, z)$.

Геометричне місце точок $(x, y, z)$ називають *графіком функції* $z = f(x, y)$.

Графік функції двох змінних ще називають *поверхнею*, а рівність $z = f(x, y)$ — *рівнянням поверхні*.

У загальному випадку не вдається побудувати поверхню та визначити її вигляд. Тільки в окремих випадках можна геометрично зобразити функції двох змінних. Так, геометричним образом функції $z = x^2 + y^2$ є параболоїд обертання (рис. 10).

Графіком функції $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ є верхня частина півсфери з центром у початку координат і радіусом $R$ (рис. 11).

Більш наочним способом геометричного зображення функції двох змінних є зображення за допомогою ліній однакового рівня.

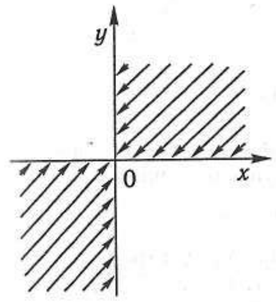


Рис. 7

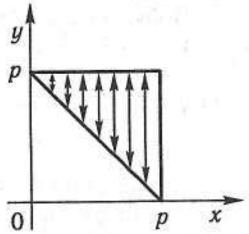


Рис. 8

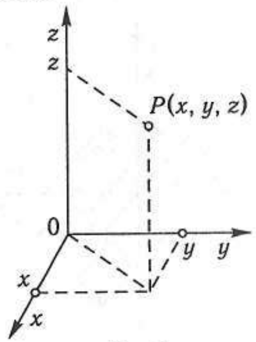


Рис. 9

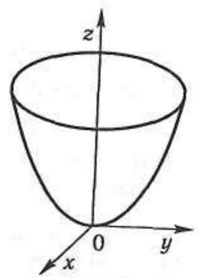


Рис. 10

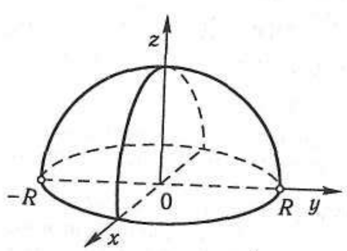


Рис. 11

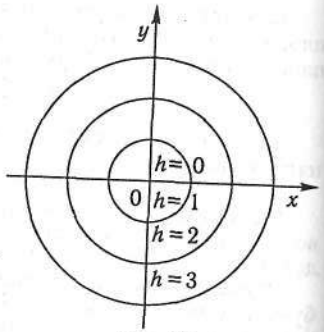


Рис. 12

Нехай функцію $z = f(x, y)$ зображено деякою поверхнею $Q$. Різні точки цієї поверхні можуть знаходитися на різних відстанях від площини $xOy$. Виокремимо на поверхні всі точки, що знаходяться від цієї площини на відстані $h$, тобто ті точки, в яких апліката $z = h$ (це можна зробити, провівши площину $z = h$). У сукупності ці точки утворюють деяку лінію $c$. Спроектувавши її ортогонально на площину $xOy$, дістанемо лінію $c'$. Апліката кожної точки лінії $c$, згідно з її побудовою, дорівнює $h$. Рівняння цієї лінії у площині $xOy$ має вигляд

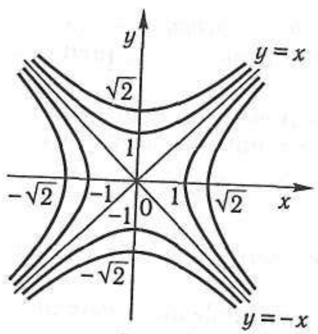


Рис. 13

$$f(x, y) = h. \tag{7}$$

Лінію $c$ називають *лінією рівня функції* $z = f(x, y)$, а рівняння (7) — рівнянням лінії рівня.

Надаючи $h$ різних дійсних значень, щоразу діставатимемо на площині $xOy$ різні лінії рівня. Чим більше побудовано ліній рівня, тим яскравіше можна уявити характер зміни функції $z$, а саме в тій частині області існування функції, де густіше розміщені лінії рівня, функція швидше змінюється (частина поверхні крутіша), а там, де лінії рівня розміщені рідше, функція змінюється повільніше (частина поверхні пологіша).

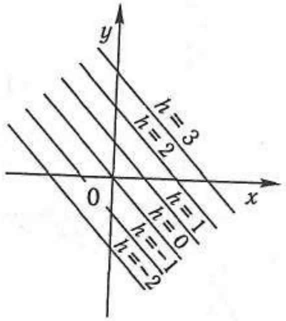


Рис. 14

❑ **Приклади**

Побудувати лінії рівня функцій

**1.** $z = x^2 + y^2$.

Р о з в ' я з а н н я. Підставляючи в (7) значення $f(x, y) = x^2 + y^2$, дістанемо таке рівняння:

$$x^2 + y^2 = h. \tag{8}$$

Рівняння (8) є рівнянням кола з центром у початку координат і радіусом $\sqrt{h}$. Отже, лініями рівня функції $z = x^2 + y^2$ є концентричні кола (рис. 12).



**2.** $z = x^2 - y^2$.

Р о з в ' я з а н н я. Скориставшись рівнянням (7), маємо

$$x^2 - y^2 = h.$$

Таким чином, лініями рівня функції $z = x^2 - y^2$ є гіперболи (рис. 13).

**3.** $z = x + y$.

Р о з в ' я з а н н я. Для функції $z = x + y$ лініями рівня є сім'я прямих

$$x + y = h,$$

паралельних бісектрисі другого та четвертого координатних кутів (рис. 14).

## 2.2 n-ВИМІРНИЙ ПРОСТІР. НЕРІВНІСТЬ ТРИКУТНИКА

Перш ніж дати означення функції більш як двох змінних, розглянемо поняття $n$-вимірного простору.

Як уже зазначалося, за допомогою методу координат можна кожній парі дійсних чисел $(x, y)$ на площині $xOy$ задати точку з координатами $x, y$. За цим методом кожній трійці чисел $(x, y, z)$ відповідає в просторі $xOyz$ одна точка, координатами якої є числа $x$, $y$, $z$. Можна довести також, що кожній точці простору відповідає одна певна трійка дійсних чисел. Тому, замість трійка дійсних чисел, кажуть *точка простору* і навпаки.

Отже, природно виникає питання про розгляд системи (сукупності) з $n$ дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, розміщених у певному порядку, де $n$ — будь-яке натуральне число. При $n \geq 4$ не існує такого геометричного образу, який відповідав би системі чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, проте за аналогією з попереднім цю систему називають *точкою* і позначають $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а самі числа $x_1, \ldots, x_n$ — координатами точки $x$ ($x_1$ — першою, $x_2$ — другою і т. д., $x_n$ — $n$-ю координатою).

Множину всіх точок $x$, де кожна координата $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ розглядається як довільне дійсне число, називають *n-вимірним простором.*

Так, при $n = 1$ маємо одновимірний простір (сукупність точок, розміщених на прямій), при $n = 2$ — двовимірний простір (точки площини), при $n = 3$ — тривимірний простір (точки простору).

Серед основних понять аналітичної геометрії є поняття *відстані між точками.* Якщо, наприклад, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ є точками простору, то відстань між ними визначають за формулою

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Аналогічно відстань між точками $x = (x_1, \ldots, x_n)$ і $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ $n$-вимірного простору визначають за формулою

$$\rho(x, x') = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x'_i - x_i)^2}. \tag{1}$$

$n$-Вимірний простір, в якому відстань між точками визначають за формулою (1), називають *n-вимірним евклідовим простором* і позначають $R_n$.

Зауважимо, що відстань між точками в $n$-вимірному просторі можна визначати й іншим способом, наприклад,

$$\rho(x, x') = \max_{1 \le i \le n} |x_i' - x_i| \tag{2}$$

або

$$\rho(x, x') = \sum_{i=1}^{n} |x_i' - x_i|. \tag{3}$$

Проте ці $n$-вимірні простори, відмінні від $n$-вимірного евклідового простору $R_n$.

Відстань $\rho(x, x')$ у $n$-вимірному евклідовому просторі має такі властивості:

**1°.** $\rho(x, x') = \rho(x', x)$;

**2°.** $\rho(x, x') \ge 0$, причому $\rho(x, x') = 0$ тоді і тільки тоді, коли точка $x$ збігається з точкою $x'$, тобто коли $x_i = x_i'$, $i = 1, 2, \dots, n$;

**3°.**

$$\rho(x, x'') \le \rho(x, x') + \rho(x', x''), \tag{4}$$

де

$$x'' = (x_1'', x_2'', \dots, x_n'').$$

Перші дві властивості очевидні, доведемо третю властивість, яку називають *нерівністю трикутника*. Ця назва походить від того, що при $n = 3$ нерівність (4) означає: довжина сторони трикутника не більша за суму довжини двох інших сторін цього трикутника.

Перш ніж довести нерівність (4), доведемо нерівність Коші

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}, \tag{5}$$

де $a_i, b_i, i = 1, \dots, n,$ — будь-які дійсні числа.

Для цього розглянемо такий квадратний тричлен:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i t + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 t^2 + 2\sum_{i-1}^{n} a_i b_i t + \sum_{i=1}^{n} b_i^2. \tag{6}$$

Таким чином, при будь-якому дійсному значенні $t \in (-\infty; +\infty)$ значення квадратного тричлена невід'ємні. Тому його дискримінант недодатний, тобто

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \le 0$$

або

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right). \tag{7}$$

Добуваючи корінь квадратний з обох частин нерівності (7), дістанемо нерівність Коші (5).



Як наслідок з нерівності Коші випливає така нерівність:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \tag{8}$$

Справді, помножимо обидві частини нерівності (5) на 2 і додамо до обох її частин невід'ємне число $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$.

Матимемо

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Останню нерівність можна записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^2.$$

Добуваючи корінь квадратний з обох частин останньої нерівності, дістанемо нерівність (8).

Скориставшись нерівністю (8), доведемо третю властивість відстані в $n$-вимірному евклідовому просторі $\mathbf{R}_n$.

Нехай у нерівності (8)

$$a_i = x_i - x_i'; \quad b_i = x_i' - x_i''; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тоді

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i'')^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i')^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i' - x_i'')^2}. \tag{9}$$

У лівій частині останньої нерівності, згідно з формулою (1), є відстань $\rho(x, x'')$, а в правій — сума відстаней $\rho(x, x') + \rho(x', x'')$.

Нерівність (9) і доводить властивість (4).

***Означення.*** Якщо для будь-яких точок $x = (x_1, \dots, x_n)$ і $x' = (x_1', \dots, x_n')$ $n$-вимірного простору можна вказати невід'ємне число $\rho(x, x') \ge 0$, яке задовольняє властивості 1°—3°, то такий $n$-вимірний простір називають *метризованим*.

Отже, $n$-вимірний евклідовий простір є метризованим.

❑ **Приклади**

**1.** Довести, що $n$-вимірний простір, відстань між точками якого визначається співвідношенням (2), є метризованим.

Р о з в ' я з а н н я. Доведемо, що число (2) задовольняє властивості 1°—3°.

Оскільки для будь-яких дійсних чисел $a$ і $b$ виконуються рівність $|a - b| = |b - a|$ і нерівність $|a - b| \ge 0$, то справджуються властивості 1° і 2°.

Доведемо властивість 3°. Розглянемо рівність

$$x_i - x_i'' = (x_i - x_i') + (x_i' - x_i''), \ i = 1, 2, \dots, n.$$

Звідси

$$|x_i - x_i''| \le |x_i - x_i'| + |x_i' - x_i''|$$

і

$$\max_{1\le i\le n}|x_i - x_i''| \le \max_{1\le i\le n}|x_i - x_i'| + \max_{1\le i\le n}|x_i' - x_i''|. \qquad (10)$$

Із нерівності (10) випливає справедливість властивості 3°.

**2.** Довести, що $n$-вимірний простір, відстань між точками якого визначають за формулою (3), є метризованим.

(Розв'язання аналогічне розв'язанню прикладу 1.)

## 2.3 ОСНОВНІ ТИПИ МНОЖИН ЕВКЛІДОВОГО ПРОСТОРУ

У $n$-вимірному евклідовому просторі $\mathbf{R}_n$, як і в реальному тривимірному просторі, при $n>3$ можна розглядати такі «тіла», як «куля», «паралелепіпед», «куб». Для цього, користуючись формулою для відстані (1) п. 2.2, наведемо низку означень.

Нехай маємо точку $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ $n$-вимірного евклідового простору $\mathbf{R}_n$, і деяке фіксоване дійсне число $r>0$. Множину точок $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$, для яких виконується нерівність

$$\rho(x, x_0) \le r, \qquad (1)$$

називають *замкненою «кулею»* з центром у точці $x_0 = \left(x_1^0, ..., x_n^0\right)$ і радіусом $r$.

Множину точок $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$, що задовольняють нерівність

$$\rho(x, x_0) < r, \qquad (2)$$

називають *відкритою «кулею»* з центром у точці $x_0$ і радіусом $r$.

Нерівність (1) можна виразити через координати точок

$$\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^2 + \cdots + \left(x_n - x_n^0\right)^2 \le r^2. \qquad (3)$$

Нехай у цій нерівності $n=2$ $(n=3)$. Тоді дістанемо відповідно круг «кулю» з центром у точці $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0\right)\left(x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right)\right)$ і радіусом $r$.

Відкриту «кулю» з центром у точці $x_0$ і радіусом $r$ називають *кульовим околом точки* $x_0$.

Отже, окіл точки $x_0$ можна записати так:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_i^0\right)^2 < r^2.$$

При $n=2$ маємо відкритий круг, при $n=3$ — відкриту кулю.

Множину точок $x=(x_1, ..., x_n)$ $n$-вимірного евклідового простору $\mathbf{R}_n$, координати яких незалежно одна від одної задовольняють нерівності

$$a_i \le x_i \le b_i, \quad i=1, 2, ..., n, \qquad (4)$$

де $a_i, b_i$ — довільні дійсні числа, називають *замкненим $n$-вимірним прямокутним «паралелепіпедом»*. Цей паралелепіпед позначають

$$[a_1, b_1; a_2, b_2; ...; a_n, b_n].$$



Числа $b_i - a_i$, $i=1, 2, ..., n$ називають *вимірами «паралелепіпеда»*.

При $n=1$ $n$-вимірний прямокутний «паралелепіпед» є відрізком, при $n=2$ — прямокутником і при $n=3$ — прямокутним паралелепіпедом.

Якщо всі виміри $b_i - a_i$, $i=1, 2, ..., n$, рівні, то $n$-вимірний прямокутний «паралелепіпед» називають *$n$-вимірним «кубом»*.

Множину точок $x=(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}_n$, координати яких незалежно одна від одної задовольняють нерівність

$$a_i < x_i < b_i, \ i=1, 2, ..., n, \qquad (5)$$

називають *відкритим $n$-вимірним прямокутним «паралелепіпедом»* і позначають

$$(a_1, b_1; a_2, b_2; ...; a_n, b_n).$$

Числа $b_i - a_i$, $i=1, 2, ..., n$, як і для замкненого $n$-вимірного прямокутного «паралелепіпеда», називають *вимірами* цього «паралелепіпеда», а точку

$$a = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, ..., \frac{a_n+b_n}{2}\right) \in \mathbf{R}_n$$

— *центром обох $n$-вимірних прямокутних «паралелепіпедів»*.

Терміни «куля», прямокутний «паралелепіпед» взято в лапки, щоб наголосити, що при $n>3$ з цими термінами не пов'язано жодних геометричних уявлень. У подальшому лапки опускатимемо.

Сформулюємо ще низку означень.

*Прямокутним околом* точки $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ називають будь-який відкритий $n$-вимірний прямокутний паралелепіпед

$$\left(x_1^0 - \delta_1, x_1^0 + \delta_1; ...; x_n^0 - \delta_n, x_n^0 + \delta_n\right). \qquad (6)$$

Якщо всі числа $\delta_i > 0$, $i=1, 2, ..., n$, рівні між собою, то $n$-вимірний прямокутний окіл називають *кубічним*.

Отже, існують два види околів точки: кульовий і прямокутний. Можна довести такі твердження.

Якщо точка $x_0 = \left(x_1^0, ..., x_n^0\right)$ окутана околом одного із зазначених видів, то її можна окутати й околом другого виду так, щоб цей окіл містився в першому.

Справді, нехай $x_0 = \left(x_1^0, ..., x_n^0\right)$ має прямокутний окіл (6). Візьмемо кулю з тим самим центром і радіусом $r$, який менший за всі числа $\delta_i$, $i=1, 2, ..., n$. Тоді для будь-якої точки $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ цієї кулі

$$\left|x_i - x_i^0\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - x_k^0\right)^0} < r < \delta_i.$$

Звідси випливає, що $\left|x_i - x_i^0\right| < \delta_i$, або

$$x_i^0 - \delta_i < x_i < x_i^0 + \delta_i, \quad i=1, 2, ..., n.$$

Отже, точка $x$ знаходиться у відкритому паралелепіпеді з центром у точці $x_0$.

Нехай тепер точка $x_0=\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$ має кульовий окіл радіуса $r$. Тоді, взявши відкритий прямокутний паралелепіпед з центром у цій точці й поклавши

$$\delta_1=\delta_2=\cdots=\delta_n=\frac{r}{\sqrt{n}},$$

для будь-якої точки $x=(x_1\ldots,x_n)$ цього паралелепіпеда дістанемо, що відстань

$$\rho(x,x_0)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-x_k^0\right)^2}<\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\delta_k^2}=r.$$

Отже, точка $x$ знаходиться у відкритій кулі радіуса $r$.

Твердження доведено.

Надалі, говорячи про окіл точки, не називатимемо його вид.

Нехай маємо деяку множину $W$ точок $n$-вимірного евклідового простору $\mathbf{R}_n$. Тоді точку $x'=(x_1',\ldots,x_n')$ $n$-вимірного евклідового простору $\mathbf{R}_n$ називають *внутрішньою точкою множини* $W$, якщо вона належить цій множині з деяким досить малим її околом.

Доведемо, наприклад, що кожна точка відкритого прямокутного паралелепіпеда є внутрішньою. Справді, нехай координати точки $x'=(x_1',x_2',\ldots,x_n')$ задовольняють нерівність

$$a_i<x_i'<b_i,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Можна знайти досить мале число $\delta>0$ таке, що виконуються нерівності

$$a_i<x_i'-\delta<x_i'+\delta<b_i,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Отже, знайшовся окіл точки $x'$, який разом з точкою $x'$ належить розглядуваному паралелепіпеду.

Довільна точка $x'$ відкритого прямокутного паралелепіпеда є внутрішньою.

Аналогічно можна довести, що кожна точка відкритої кулі є внутрішньою.

Точку $x_0=\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$ $n$-вимірного евклідового простору $\mathbf{R}_n$ називають *граничною точкою множини* $W$, якщо в будь-якому її околі міститься нескінченна множина точок з множини $W$.

Так, нехай $n=1$. Тоді $\mathbf{R}_n$ є множиною всіх дійсних чисел $x\in(-\infty;+\infty)$. Нехай $W$ є числами (точками) відрізка $[a;b]$. Тоді кожна точка цього відрізка є граничною.

Кожна точка інтервалу $(a;b)$, а також точки $a$ і $b$ є граничними точками цього інтервалу.

Зауважимо, що граничні точки множини можуть цій множині й не належати, як, наприклад, кінці інтервалу $(a;b)$.



Множину $E$ точок $x=(x_1,\ldots,x_n)$ $n$-вимірного евклідового простору $\mathbf{R}_n$, до якої належать усі її граничні точки, називають *замкненою*.

Прикладами замкнених множин у $n$-вимірному евклідовому просторі є замкнений $n$-вимірний прямокутний паралелепіпед, замкнена куля.

Множину $W$ точок $n$-вимірного евклідового простору $\mathbf{R}_n$ називають *обмеженою*, якщо вона повністю міститься в деякому замкненому прямокутному $n$-вимірному паралелепіпеді.

Розглянемо $n$ скалярних неперервних функцій

$$x_1=\varphi_1(t);\quad x_2=\varphi_2(t);\quad x_n=\varphi_n(t),\tag{7}$$

де $t\in[t';t'']$. Для кожного значення $t\in[t';t'']$ маємо систему $n$ чисел

$$x_1=\varphi_1(t);\quad x_2=\varphi_2(t);\quad x_n=\varphi_n(t).$$

Ці числа можна вважати точкою $n$-вимірного простору.

Множину точок, що є відповідними значеннями неперервних функцій (7), де $t\in[t';t'']$, називають *неперервною кривою* в $n$-вимірному просторі.

Так, при $n=2$ маємо неперервну криву, задану на площині, при $n=3$ — неперервну криву в просторі. При $n>3$ немає геометричного образу, який би зображав наочно систему функцій (7). Якщо взяти два значення $t_1,t_2\in[t';t'']$, то дістанемо дві точки $n$-вимірного простору

$$x_1=(\varphi_1(t_1),\ldots,\varphi_n(t_1))\ \text{ і }\ x_2=(\varphi_1(t_2),\ldots,\varphi_n(t_2)).$$

Таким чином, неперервна крива (7) *сполучає точки* $x_1$ і $x_2$.

Розглянемо випадок, коли всі функції $\varphi_k(t)$, $k=1,2,\ldots,n$ є лінійними, тобто

$$\varphi_k(t)=\alpha_k t+\beta_k,\quad k=1,2,\ldots,n,\tag{8}$$

де $\alpha_k,\beta_k$ — дійсні числа і $t\in(-\infty;+\infty)$.

Таким чином, функції (8) *задають пряму* в $n$-вимірному просторі.

Зауважимо, що при $n=2\,(n=3)$ — це пряма на площині (в просторі).

Вважатимемо, що точки на прямій ідуть одна за одною в порядку зростання параметра $t$, тобто якщо $t'<t<t''$, то точка $x=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t))$ лежить між точками $x'=(\varphi_1(t'),\ldots,\varphi_n(t'))$ і $x''=(\varphi_2(t''),\ldots,\varphi_n(t''))$.

Можна довести, що відстані між цими точками задовольняють рівність

$$\rho(x',x'')=\rho(x',x)+\rho(x,x'').$$

Рівняння прямої, що проходить через дві точки, можна записати так:

$$x_1=x_1'+t(x_1''-x_1'),\ldots,\ x_n=x_n'+t(x_n''-x_n'),\tag{9}$$

де $-\infty<t<+\infty$, а $x_1',\ldots,x_n',x_1'',\ldots,x_n''$ — координати точок $x'$ і $x''$.

Отже, координати точок $x'$ і $x''$ можна дістати з рівностей (9), поклавши в останніх відповідно $t=0$ і $t=1$. Якщо $t\in[0;1]$, то матимемо прямолінійний відрізок $x'x''$, який сполучає точки $x'$ і $x''$.

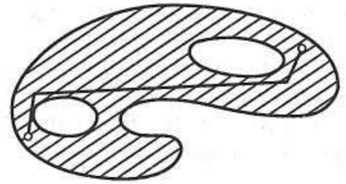

Рис. 15

Криву, що складається зі скінченного числа прямолінійних відрізків, називають *ламаною*.

Множину $W$ $n$-вимірного евклідового простору називають *зв'язною*, якщо будь-які її дві точки можна сполучити ламаною, всі точки якої належать цій множині.

Зв'язну множину (її заштриховано) зображено на рис. 15.

Зв'язну відкриту множину $D$ евклідового простору $\mathbf{R}_n$ називають *областю*.

Так, інтервал $(a;b)$, прямокутник $(a, b; c, d)$, паралелепіпед $(a, b; c, d; k, l)$ є прикладами областей відповідно у просторах $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$.

Точку $x \in \mathbf{R}_n$ називають *межовою точкою* множини $D \subset \mathbf{R}_n$, якщо будь-який її окіл містить як точки множини $D$, так і точки, що їй не належать.

Множину всіх межових точок множини $D \subset \mathbf{R}_n$ називають її *межею*. Область разом із її межею називають *замкненою областю* і позначають $\bar{D}$.

Так, відрізок $[a;b]$, прямокутник $[a, b; c, d]$, паралелепіпед $[a, b; c, d; k, l]$ є прикладами замкнених областей відповідно у просторах $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$.

$n$-Вимірний замкнений прямокутний паралелепіпед і замкнена куля в просторі $\mathbf{R}_n$ є прикладами замкнених областей.

Звертаємо увагу на те, що замкнена область простору не є областю цього простору, оскільки до замкненої області належать межові точки, які не є внутрішніми точками цієї множини.

Надалі, якщо через $D$ позначити область простору $\mathbf{R}_n$, то замкнену область позначатимемо через $\bar{D}$.

Сформулюємо ще таке означення.

Нехай $W$ — довільна множина $n$-вимірного евклідового простору $\mathbf{R}_n$. *Діаметром* цієї множини називають $\sup\limits_{x', x'' \in W} \rho(x, x')$, де $\rho(x', x'')$ — відстань між довільними точками $x' = (x_1', ..., x_n')$ і $x'' = (x_1'', ..., x_n'')$ цієї множини.

## 2.4 ФУНКЦІЯ $n$ ЗМІННИХ. ГРАНИЦЯ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ

Нехай у $n$-вимірному евклідовому просторі $\mathbf{R}_n$ задано деяку множину $W$ точок $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in W$.

***Означення.*** Якщо існує правило або закон, за допомогою якого кожній точці $x = (x_1, ..., x_n) \in W$ відповідає одне дійсне число $u \in U$ ($U$ — деяка множина дійсних чисел), то кажуть, що на множині $W$ задано функцію $n$ змінних і записують

$$u = f(x_1, x_2, ..., x_n), \text{ або } u = f(x);$$

$x_1, x_2, ..., x_n$ — називають *незалежними змінними*, або *аргументами*, а множину $W$ — *областю визначення*, або *областю існування функції*, множину $U$ — *множиною значень функції*.



Якщо незалежних змінних є дві, то функцію записують у вигляді

$$z = f(x, y).$$

Якщо незалежних змінних три, функцію записують так:

$$u = f(x, y, z).$$

Якщо $x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ — фіксована точка множини $W$, то число $u_0 = f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ називають *значенням функції* $u$ при $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, ..., $x_n = x_n^0$ або *значенням функції* в точці $x_0$.

Тоді множину можливих точок $P = (u_0, x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ $(n+1)$ — вимірного евклідового простору $\mathbf{R}_{n+1}$ називають *графіком функції* $n$ змінних.

Для функції двох змінних, як уже зазначалося, графіком є деяка поверхня.

Як і функції двох змінних, функцію $n$ змінних можна задавати формулою. Так,

$$u = 1 + x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2;$$

$$u = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{\sqrt{x_1 x_2 ... x_n}};$$

$$u = \frac{\ln(x + y + z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$u = x^{y^z}.$$

Нехай точка $x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ є граничною точкою для області існування $W \subset \mathbf{R}_n$ функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, а $x = (x_1, ..., x_n)$ — довільна точка множини $W$.

***Означення.*** Число $A$ називають *границею функції* $u = f(x_1, ..., x_n)$ в точці $x_0$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існують додатні числа $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, ..., \delta_n > 0$ такі, що як тільки виконуються нерівності

$$0 < |x_1 - x_1^0| < \delta_1,\ 0 < |x_2 - x_2^0| < \delta_2, ...,\ 0 < |x_n - x_n^0| < \delta_n, \tag{1}$$

то виконується й нерівність

$$|f(x_1, x_2, ..., x_n) - A| < \varepsilon. \tag{2}$$

Тоді записують

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2, ..., x_n) = A$$

або

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Означення границі функції в точці можна сформулювати компактніше. Справді, якщо $x_1 \to x_1^0, x_2 \to x_2^0, \ldots, x_n \to x_n^0$, то відстань $\rho(x, x_0)$ між точками $x$ і $x_0$ наближається до нуля, тому означення границі функції в точці можна сформулювати так.

***Означення.*** Число $A$ називають *границею функції* $f(x)$ у точці $x_0$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що як тільки

$$0 < \rho(x, x_0) < \delta,$$

то

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Це записують

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

**Приклади**

**1.** Довести, що $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} \left(x^2 + y^2 - 2\right) = 0.$

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки $x \to 1$ і $y \to 1$, то вважатимемо, що

$$0 < x < 2, \quad 0 < y < 2. \tag{3}$$

Тоді

$$\left|\left(x^2 + y^2 - 2\right) - 0\right| = \left|\left(x^2 - 1\right) + \left(y^2 - 1\right)\right| \le |x-1||x+1| +$$
$$+ |y-1||y+1| \le |x-1|(|x|+1) + |y-1|(|y|+1) < 3|x-1| + 3|y-1|.$$

Звідси випливає, що при $|x-1| < \frac{\varepsilon}{6}$ і $|y-1| < \frac{\varepsilon}{6}$ маємо

$$\left|\left(x^2 + y^2 - 2\right) - 0\right| < \varepsilon. \tag{4}$$

Якщо $0 < \varepsilon < 6$, то

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Якщо $\varepsilon \ge 6$, то, згідно з нерівностями (3),

$$S_1 = S_2 = 1.$$

Таким чином, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ такі, що з нерівностей $|x - 14| < \delta_1$, $|y - 1| < \delta_2$ випливає нерівність (4).

**2.** Довести, що

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0 \\ z \to 0}} \left( x \sin\frac{1}{y} + z \sin\frac{1}{x} + y \sin\frac{1}{z} \right) = 0.$$

Р о з в ' я з а н н я. Задамо довільне число $\varepsilon > 0$. Поклавши $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \frac{\varepsilon}{3}$, матимемо, що з нерівностей $|x| < \delta_1$, $|y| < \delta_2$, $|z| < \delta_3$ випливає нерівність

$$\left| x \sin\frac{1}{y} + z \sin\frac{1}{x} + y \sin\frac{1}{z} \right| < \varepsilon.$$

Справді,

$$\left| x \sin\frac{1}{y} + z \sin\frac{1}{x} + y \sin\frac{1}{z} \right| \le |x| + |z| + |y| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$



Зазначимо, що було дано означення границі функції у точці в термінах «$\varepsilon, \delta$» або означення за Коші. Проте можна було б, як і для функції однієї змінної, дати означення границі функції в точці за допомогою границі послідовності точок (означення за Гейне[1]).

Для цього спочатку сформулюємо означення границі послідовності точок $x^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, які належать простору $\mathbf{R}_n$.

***Означення.*** Точку $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) \in \mathbf{R}_n$ називають *границею для послідовності точок* $x_k = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right) \in \mathbf{R}_n$, $k = 1, 2, \ldots$, якщо відстань від точки $x_k$ до точки $x_0$ прямує до нуля при $k \to \infty$, тобто

$$\lim_{k \to \infty} \rho(x_k, x_0) = 0. \tag{5}$$

Той факт, що точка $x_0$ є границею послідовності точок $x_k$, $k = 1, 2, \ldots$, символічно записують так:

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x_0 \quad \text{або} \quad x_k \to x_0, k \to \infty.$$

Послідовність точок $x_k \in \mathbf{R}_n, k = 1, 2, \ldots$, яка має границю, називають *збіжною* (збіжною до точки $x_0$).

Послідовність точок, яка не має границі, називають *розбіжною*.

**Т е о р е м а.** Для того щоб послідовність точок $x_k = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right) \in \mathbf{R}_n$, $k = 1, 2, \ldots$, мала границю $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) \in \mathbf{R}_n$, необхідно й достатньо, щоб виконувалися такі умови:

$$\lim_{k \to \infty} x_i^{(k)} = x_i^0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Д о в е д е н н я н е о б х і д н о с т і. Нехай послідовність точок $x = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right) \in \mathbf{R}_n$ збігається до точки $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) \in \mathbf{R}_n$, тобто виконується співвідношення (5).

Доведемо, що тоді виконуються і співвідношення (6). Справді, зі співвідношення (5) випливає, що для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться натуральне число $N = N(\varepsilon)$ таке, що для всіх $k > N$ виконуватиметься нерівність

$$\rho(x_k; x_0) < \varepsilon$$

або

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{(k)} - x_i^0\right)^2} < \varepsilon, \ k > N.$$

Звідси маємо

$$\left|x_i^{(k)} - x_i^0\right| < \varepsilon, \ k > N, \ i = 1, \ldots, n.$$

Останні нерівності доводять справедливість співвідношень (6).

[1] *Гейне Г.* (1821—1881) — німецький математик.

Д о в е д е н н я   д о с т а т н о с т і. Нехай виконуються умови (6) (має місце покоординатна збіжність). Тоді для числа $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ $(\varepsilon > 0)$ існують натуральні числа $N_i$, $(i = 1, ..., n)$ такі, що справджуються нерівності

$$\left|x_i^{(k)} - x_i^0\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},\ k > N_i,\ i = 1, 2, ..., n. \qquad (7)$$

Серед чисел $N_1, ..., N_n$ виберемо найбільше і позначимо його

$$N = \max(N_1, ..., N_n).$$

Тоді при $k > N$ виконуватимуться всі нерівності (7), а отже, виконуватиметься і нерівність

$$\rho(x_k; x_0)\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{(k)} - x_i^0\right)} = \sqrt{n\frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon,\ k > N.$$

Звідси випливає $\lim\limits_{k\to\infty}\rho(x_k, x_0) = 0$.

Теорему доведено.

***Означення.*** Число $A$ називають *границею функції* $u = f(x_1, ..., x_n)$ у точці $x_0 = \left(x_1^0, ..., x_n^0\right)$ і записують $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, якою б не була послідовність точок $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}\right)$, $k = 1, 2, ...,$ таких, що

$$x^{(k)} \neq x_0,\quad k = 1, 2, ...,$$

і

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x_0,$$

границя послідовності значень функції $f\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}\right)$ дорівнює числу $A$, тобто

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}\right) = A. \qquad (8)$$

Еквівалентність цих означень границі функції в точці за Коші й за Гейне доводиться так само, як і у випадку функції однієї змінної.

Можна було б узагальнити окремі теореми про границі для функції кількох змінних. Проте, оскільки доведення цих теорем майже не відрізняється від доведення теорем про границі для функції однієї змінної, то потреба в цьому відпадає.

❑ **Приклади**

**3.** Довести, що

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Р о з в ' я з а н н я. Скористаємося означенням за Гейне. Візьмемо послідовність точок $\left(x^{(k)};\ y^{(k)}\right)$ таких, що $\left(x^{(k)};\ y^{(k)}\right) \neq (0; 0)$ і



$$\lim_{k\to\infty}\left(x^{(k)};\ y^{(k)}\right) = (0; 0).$$

Беручи до уваги нерівність

$$\left|\frac{\left(x^{(k)}\right)^2 y^{(k)}}{\left(\left(x^{(k)}\right)^2 + \left(y^{(k)}\right)^2\right)}\right| \le \frac{1}{2}\left|x^{(k)}\right|$$

і те, що $\lim\limits_{k\to\infty}\left|x^{(k)}\right| = 0$, маємо

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\left(x^{(k)}\right)^2 y^{(k)}}{\left(x^{(k)}\right)^2 + \left(y^{(k)}\right)^2} = 0.$$

**4.** Довести, що функція

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

у точці $(0; 0)$ границі не має.

Р о з в ' я з а н н я. Виберемо послідовність точок $\left(\frac{1}{n};\ \frac{1}{n}\right)$. Ця послідовність при $n\to\infty$ наближається до точки $(0; 0)$. Знайдемо

$$f\left(\frac{1}{n};\ \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Отже, границя цієї послідовності при $n\to\infty$ дорівнює $\frac{1}{2}$.

Візьмемо послідовність точок $\left(\frac{1}{n};\ \frac{1}{n^2}\right)$, яка при $n\to\infty$ також наближається до точки $(0; 0)$. Тоді

$$f\left(\frac{1}{n};\ \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}.$$

Звідси

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n};\ \frac{1}{n^2}\right) = 0.$$

Таким чином, задана функція в точці $(0; 0)$ границі не має.

Як і для функції однієї змінної, можна дати означення границі функції в тому випадку, коли точка $x_0 = \left(x_1^0, ..., x_n^0\right)$ є невластивою (точку називають *невластивою*, якщо всі її координати або деякі з них є нескінченними).

Сформулюємо, наприклад, означення границі для випадку, коли всі координати точки $x_0$ є $+\infty$.

***Означення.*** Число $A$ називають *границею функції* $u = f(x_1, ..., x_n)$ при $x_1\to+\infty$, $x_2\to+\infty, ...,$ $x_n\to+\infty$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\Delta > 0$ таке, що як тільки $x_1 > \Delta$, $x_2 > \Delta, ...,$ $x_n > \Delta$, то

$$\left|f(x_1, x_2, ..., x_n) - A\right| < \varepsilon. \qquad (9)$$

Тоді записують

$$\lim_{\substack{x_1\to+\infty\\ \cdots\cdots\\ x_n\to+\infty}} f(x_1, x_2, ..., x_n) = A.$$

Аналогічно можна дати означення невласних границь $+\infty$ і $-\infty$. Так, якщо $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ — скінченна точка $n$-вимірного евклідового простору $\mathbf{R}_n$, то кажуть, що функція $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ у точці $x_0$ має невласну границю $+\infty$, і записують

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, \ldots, x_n) = +\infty,$$

якщо, яким би не було додатне число $E$, існують числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0, \ldots$, $\delta_n > 0$ такі, що з нерівностей

$$0 < \left|x_1 - x_1^0\right| < \delta_1, 0 < \left|x_2 - x_2^0\right| < \delta_2, \ldots, 0 < \left|x_n - x_n^0\right| < \delta_n$$

випливає нерівність

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > E.$$

Розглянемо ще одне важливе поняття, а саме поняття про неперервність функції в точці.

Нехай функцію $u = f(x)$ визначено в точці $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ та деякому її околі.

***Означення.*** Функцію $u = f(x)$ називають *неперервною в точці* $x_0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$, якщо існує границя функції в точці $x_0$ і вона дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{10}$$

Так, функція

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{якщо } x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & \text{якщо } x = y = 0, \end{cases} \tag{11}$$

неперервна в точці $O(0;\ 0)$. Справді,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

і значення функції $f(0; 0) = 0$.

Отже, виконується співвідношення (10). Тому функція (11) є неперервною в точці $O(0; 0)$, тоді як функція

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{якщо } x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & \text{якщо } x = y = 0, \end{cases} \tag{12}$$

в точці $O(0; 0)$ не є неперервною, оскільки задана функція в точці $O(0; 0)$ границі не має.



Якщо функція є неперервною в кожній точці деякої відкритої або замкненої області $n$-вимірного евклідового простору, то її називають *неперервною* в цій області.

Якщо функція не є неперервною в точці, то її називають *розривною* в точці, а саму точку — *точкою розриву* цієї функції.

**Теорема 1.** Якщо функції $u_1 = f(x)$ і $u_2 = \varphi(x)$ неперервні в точці $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, то сума $f(x) + \varphi(x)$ цих функцій і добуток $f(x)\varphi(x)$ є також неперервними функціями в цій точці.

Якщо при цьому $\varphi(x_0) \neq 0$, то й частка $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ є функцією, неперервною в точці $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$.

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню відповідної теореми для функцій однієї змінної.

❑ **Приклади**

5. Знайти границю

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}.$$

Розв'язання. Скористаємося нерівністю $(x - y)^2 \geq 0$. Тоді $x^2 - xy + y^2 \geq xy$. Звідси при $x \neq 0, y \neq 0$

$$0 \leq \left|\frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}\right| \leq \frac{x + y}{xy} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}.$$

Оскільки $\lim\limits_{y \to \infty} \frac{1}{y} = 0$ і $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, то й

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2} = 0.$$

6. Знайти границю функції

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x}, & \text{якщо } x \neq 0; \\ a, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$

де $a$ — дійсне число $(a \neq 0)$, якщо $x \to 0$, $y \to a$.

Розв'язання. Запишемо вираз $\dfrac{\sin(xy)}{x}$ у вигляді

$$\frac{\sin(xy)}{x} = \frac{\sin(xy)}{xy} y.$$

Оскільки $x \to 0$, $y \to a$, то й $xy \to 0$. Тому

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to a}} \frac{\sin(xy)}{x} = \left(\lim_{xy \to 0} \frac{\sin(xy)}{xy}\right) \lim_{y \to a} y = 1a = a.$$

7. Знайти точки розриву функції

$$z = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Р о з в ' я з а н н я. Як було доведено, ця функція в точці $O(0;0)$ не є неперервною. Отже, точка $O(0,0)$ є точкою розриву функції. В інших точках площини $xOy$ задана функція за теоремою 1 є неперервною.

**8.** Довести, що функція (13) є неперервною за кожною змінною $x$ і $y$ окремо (при фіксованому значенні другої змінної) в довільній точці $(x_0; y_0) \in \mathbf{R}$, в тому числі й у точці $(0, 0)$.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай $y \neq 0$ і $x_0$ — будь-яке фіксоване число. Тоді

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \lim_{x\to x_0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{x_0 y}{x_0^2+y^2} = f(x_0, y).$$

Якщо $y=0$, то при будь-якому $x_0 \neq 0$

$$\lim_{x\to x_0} f(x,0) = 0 = f(x_0, 0).$$

Якщо $y=0, x_0=0$, то

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0 = f(0,0).$$

Отже, при кожному фіксованому $y$ функція неперервна за змінною $x$.

Аналогічно доводиться, що задана функція при кожному фіксованому $x$ є неперервною за $y$. Раніше було доведено, що функція (13) у точці $O(0,0)$ не є неперервною за сукупністю обох змінних.

Проте можна довести, що коли функція $u=f(x)$ неперервна в точці за сукупністю всіх змінних, то вона буде неперервною в цій точці й за кожною змінною окремо.

Функція $n$ змінних, областю існування якої є обмежена замкнена область, має низку властивостей. Сформулюємо ці властивості у вигляді теорем.

**Т е о р е м а 2 (Вейєрштрасса).** Якщо функція $u=f(x)$ задана і неперервна в обмеженій замкненій області $\overline{W}$ $n$-вимірного евклідового простору $\mathbf{R}_n$, то вона в цій області обмежена, тобто існує число $M>0$ таке, що для всіх точок $x \in \overline{W}$ виконується нерівність

$$|f(x)| < M. \tag{13}$$

**Т е о р е м а 3 (Вейєрштрасса).** Якщо функція $u=f(x)$ задана і неперервна в обмеженій замкненій області $\overline{W}$ $n$-вимірного евклідового простору $\mathbf{R}_n$, то серед множини її значень є найменше і найбільше значення.

**Т е о р е м а 4.** Якщо функція $u=f(x)$ визначена і неперервна в деякій обмеженій замкненій і зв'язній області $\overline{W}$ $n$-вимірного евклідового простору $\mathbf{R}_n$ і в двох точках цієї області набуває значень із протилежними знаками, то в області $\overline{W}$ знайдеться хоча б одна точка $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ така, що $f(x_0)=0$.

**Т е о р е м а 5 (Кантора).** Якщо функція $u=f(x)$ задана і неперервна в обмеженій замкненій області $\overline{W}$ $n$-вимірного евклідового простору, то вона в цій області є рівномірно неперервною, тобто для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$, яке залежить від $\varepsilon$ і не залежить від точок області, таке, що як тільки

$$\rho(x', x'') < \delta,$$

то

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

де $x' = (x_1', \ldots, x_n')$, $x'' = (x_1'', \ldots, x_n'')$ — будь-які дві довільні точки області $\overline{W}$.

Ці теореми приймемо без доведення.



## 2.5
## ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ТА ЇХНІЙ ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ

У подальшому, де не виникає порушень щодо загальності міркувань, розглядатимемо функцію двох змінних. Це дасть змогу спростити запис і виклад теорії.

Отже, нехай у деякій відкритій області $D \subset \mathbf{R}_2$, де $\mathbf{R}_2$ — двовимірний евклідовий простір, визначено функцію двох змінних

$$z = f(x,y).$$

Візьмемо в цій області довільну точку $(x_0, y_0)$. Якщо $y=y_0$, то розглядувана функція $z=(x, y_0)$ є функцією однієї змінної, а саме функцією від $x$.

Надамо $x$ довільного приросту $\Delta x \neq 0$ так, щоб точка $(x_0+\Delta x, y)$ належала області $D$. Тоді функція $z=f(x,y_0)$ має приріст $f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$, який називають *частинним приростом функції* $z=f(x,y)$ за $x$ у точці $(x_0, y_0)$ і позначають

$$\Delta_x z = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \tag{1}$$

або

$$\Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Аналогічно різницю $f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$, де $\Delta y \neq 0$ — приріст $y$, називають *частинним приростом функції* $z=f(x,y)$ по $y$ у точці $(x_0, y_0)$ і позначають

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0). \tag{2}$$

***Означення 1.*** Границю відношення частинного приросту функції $z=(x,y)$ за $x$ у точці $(x_0, y_0)$ до приросту $\Delta x$ при $\Delta x \to 0$, якщо ця границя існує, називають *частинною похідною по* $x$ від цієї функції в точці $(x_0, y_0)$ і позначають одним із символів

$$\frac{\partial z}{\partial x};\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x};\ f_x'(x_0, y_0).$$

Аналогічно означається частинна похідна за $y$.

***Означення 2.*** Границю відношення частинного приросту функції $z=f(x,y)$ за $y$ у точці $(x_0, y_0)$ до приросту $\Delta y$ при $\Delta y \to 0$, якщо ця границя існує, називають *частинною похідною по* $y$ цієї функції в точці $(x_0, y_0)$ і позначають одним із символів:

$$\frac{\partial z}{\partial y};\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y};\ f_y'(x_0, y_0).$$

Отже, за означеннями 1 і 2, частинні похідні $f_x'(x_0, y_0)$ і $f_y'(x_0, y_0)$ визначають відповідно такими співвідношеннями:

$$f_x'(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x};$$

$$f_y'(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}. \tag{3}$$

Якщо замість фіксованої точки $(x_0, y_0)$ розглядають довільну точку $(x, y)$ області $D$, то похідні відповідно записують $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$.

Операцію знаходження частинних похідних функції називають її *диференціюванням*.

Оскільки в означенні частинної похідної функції один з аргументів вважається сталим, то при диференціюванні цієї функції, наприклад по $x$, її потрібно диференціювати як функцію однієї змінної $x$, вважаючи змінну $y$ сталою. Тому правила знаходження частинних похідних функції ті самі, що й правила диференціювання функції однієї змінної.

❑ **Приклади**

Знайти частинні похідні функцій

**1.**

$$z = x^y.$$

Розв'язання:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

**2.**

$$z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Розв'язання:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

**3.**

$$u = \left(\frac{x}{y}\right)^z.$$

Розв'язання:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\frac{1}{y} = \frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln\left(\frac{x}{y}\right).$$

Зазначимо, що, позначаючи частинні похідні буквою $\partial$, слід їх розглядати як єдині символи, а не як дріб. Для звичайної похідної $\frac{dy}{dx}$ — дріб.

❑ **Приклад**

**4.** Із фізики відома формула Клапейрона — Менделєєва

$$pV = RT, \tag{4}$$

де $R = \text{const}$, що виражає зв'язок між об'ємом $V$, тиском $p$ і абсолютною температурою $T$ одного моля ідеального газу.



Якщо у формулі (4) $p$ і $V$ вважати незалежними змінними, а $T$ — функцією

$$T = \frac{pV}{R},$$

то

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{V}{R}; \quad \frac{\partial T}{\partial V} = \frac{p}{R}.$$

Якщо незалежними змінними вважати $p$ і $T$, а $V$ — функцією від них

$$V = R\frac{T}{p},$$

то

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{p}; \quad \frac{\partial V}{\partial p} = -R\frac{T}{p^2}.$$

Отже, якщо вважати $V$ і $T$ незалежними змінними, а $p$ — функцією від них

$$p = R\frac{T}{V},$$

то

$$\frac{\partial p}{\partial T} = R\frac{1}{V}; \quad \frac{\partial p}{\partial V} = -R\frac{T}{V^2}.$$

Тоді

$$\frac{\partial p}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{RT}{V^2}\frac{R}{p}\frac{V}{R} = -\frac{RT}{pV} = -1.$$

Якщо в лівій частині цього співвідношення формально зробити скорочення (чого не можна робити!), то дістали б 1.

Для функції однієї змінної неперервність її є необхідною умовою існування похідної в розглядуваній точці. Виявляється, що для функцій кількох змінних ця властивість не зберігається. Справді, розглянемо функцію двох змінних

$$z = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{якщо } x^2+y^2 > 0; \\ 0, & \text{якщо } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Ця функція, як було наведено в п. 2.4, в точці $(0; 0)$ є розривною, але частинні похідні цієї функції в точці $(0; 0)$ існують:

$$f'_x(0; 0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(\Delta x, 0) - f(0; 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{0-0}{\Delta x} = 0;$$

$$f'_y(0; 0) = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{f(0; \Delta y) - f(0; 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{0-0}{\Delta y} = 0.$$

Розглянемо геометричний зміст частинних похідних функції двох змінних.

Нехай функцію $z = f(x, y)$ зображено поверхнею $(P)$ (рис. 16). В області існування $(D)$ функції візьмемо довільну точку $M_0(x_0, y_0)$. Цій точці на поверхні $(P)$ відповідає точка $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Як зазначалося при знаходженні, наприклад, частинної похідної за $x$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ функції $z = f(x, y)$, змінна $y$ вважається сталою, що

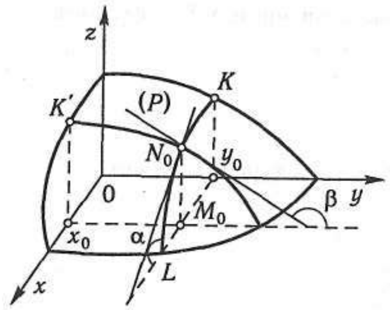

**Рис. 16**

дорівнює $y_0$. Отже, функція $z = f(x, y)$ при $y = y_0$ вироджується на функцію однієї змінної

$$z = f(x, y_0) = f_1(x).$$

Геометричним образом функції $z = f_1(x)$ є лінія, що утворюється при перетині поверхні $(P)$ площиною, паралельною площині $xOz$, і яка проходить через точку $N_0$. На рис. 16 це крива $KN_0L$. Похідна $f_1'(x)$ функції $z = f_1(x)$ у точці $x_0$ означає тангенс кута, який утворює дотична, проведена до кривої $KN_0L$ у точці $N_0$, з додатним напрямком осі $Ox$ (цей кут позначено через $\alpha$). Зрозуміло, що

$$f_1'(x_0) = f_x'(x_0, y_0). \qquad (5)$$

Отже, з попереднього і з рівності (5) випливає такий геометричний зміст частинної похідної по $x$ функції $z = f(x, y)$: частинна похідна по $x$ функції $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ дорівнює тангенсу кута між віссю $Ox$ (береться додатний напрямок) і дотичною, проведеною в точці $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ до кривої $KN_0L$, що є перетином поверхні $(P)$ площиною, паралельною площині $xOz$, що проходить через точку $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Якщо для функції $z = f(x, y)$ взяти $x = x_0$, то матимемо функцію однієї змінної $y$:

$$z = f(x_0, y) = f_2(y).$$

Похідна функції $f_2(y)$ у точці $y_0$ збігається з частинною похідною по $y$ функції $z = f(x, y)$ у точці $(x_0, y_0)$, тобто

$$f_2'(y_0) = f_y'(x_0, y_0).$$

Звідси випливає такий геометричний зміст частинної похідної по $y$ функції $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$: частинна похідна по $y$ функції $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ дорівнює тангенсу кута $\beta$ між віссю $Oy$ (береться додатний напрямок) і дотичною, проведеною в точці $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ до кривої, утвореної при перетині поверхні $(P)$ площиною, яка паралельна площині $yOz$ і проходить через точку $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

## 2.6 ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Щоб сформулювати означення диференційовності функції кількох змінних у точці, введемо поняття повного приросту функції. При цьому розглядатимемо тільки функцію двох змінних, хоча всі наведені означення й твердження справедливі для функцій $n$ змінних.



Нехай маємо функцію $z = f(x, y)$. Надалі припускатимемо, що область існування її — деяка відкрита область $D$. Візьмемо в цій області дві точки $(x_0, y_0)$ і $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, де $\Delta x$ і $\Delta y$ — відповідно прирости $x$ і $y$, які за припущенням одночасно не дорівнюють нулю.

Різницю $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ називають *повним приростом функції* $z = f(x, y)$ у точці $(x_0, y_0)$ і позначають

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \qquad (1)$$

Повний приріст функції позначають ще символом $\Delta f(x_0, y_0)$. При такому позначенні стає зрозуміло, в якій точці розглядається приріст функції. Якщо у формулі (1) взяти $\Delta y = 0$, але $\Delta x \neq 0$, то матимемо частинний приріст $\Delta_x z$; якщо взяти $\Delta x = 0$, а $\Delta y \neq 0$, то матимемо частинний приріст функції $z = f(x_0, y_0)$ по $y$, тобто $\Delta_y z$.

Користуючись поняттям повного приросту функції, дають означення неперервності функції в точці, а саме: функцію $z = f(x, y)$ називають *неперервною в точці* $(x_0, y_0)$, якщо при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ існує границя повного приросту функції в цій точці, яка дорівнює нулю:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0. \qquad (2)$$

Можна довести, що це означення й означення неперервності, наведене в п. 2.4, еквівалентні між собою.

Справді, нехай виконується співвідношення (2). Доведемо, що

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0). \qquad (3)$$

Підставимо у рівність (2) значення $\Delta z$. Матимемо

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left( f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \right) = 0.$$

Звідси

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0). \qquad (4)$$

Застосувавши в рівності (4) позначення

$$x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y \qquad (5)$$

і врахувавши, що $x \to x_0, y \to y_0$ при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, дістанемо, що з рівності (4) випливає рівність (3).

Справедливе й обернене твердження. Для цього досить підставити з рівності (5) у співвідношення (3) значення $x$ і $y$. Отже, зі співвідношення (3) випливає рівність (2).

❑ **Приклад**

**1.** Довести, що функція

$$z = x^3 + y^2 \tag{6}$$

неперервна в усіх точках площини $xOy$.

Р о з в ' я з а н н я. Скористаємося означенням неперервності функції в точці, наведеним у цьому параграфі. Для цього візьмемо довільну точку $(x_0; y_0)$ і знайдемо повний приріст функції (6) у точці $(x_0; y_0)$:

$$\Delta z = (x_0 + \Delta x)^3 + (y_0 + \Delta y)^2 - \left(x_0^3 + y_0^2\right) = 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3 + 2y_0\Delta y + \Delta y^2. \tag{7}$$

Звідси

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Отже, функція (6) є неперервною в точці $(x_0, y_0)$. Оскільки $(x_0, y_0)$ — довільна точка площини, то функція (6) є неперервною в усіх точках площини $xOy$.

Зауважимо, що рівність (2) можна записати й інакше. Для цього введемо позначення

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}. \tag{8}$$

Якщо $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, то й $\rho \to 0$, і, навпаки, оскільки $|\Delta x| \le \rho$, $|\Delta y| \le \rho$, а $\rho \to 0$, то $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$.

Отже, співвідношення (2) можна записати так:

$$\lim_{\rho \to 0} \Delta z = 0.$$

Сформулюємо означення диференційовності функції двох змінних у точці.

***Означення.*** Функцію $z = f(x, y)$ називають *диференційовною в точці* $(x_0, y_0)$, якщо її повний приріст $\Delta z$ у цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \tag{9}$$

де $A, B$ не залежать від приростів $\Delta x, \Delta y$, а $\alpha$ і $\beta$ мають таку властивість:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha = 0; \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta = 0. \tag{10}$$

❑ **Приклад**

**2.** Довести, що функція $z = x^3 + y^2$ диференційовна в довільній точці $(x_0, y_0)$.

Р о з в ' я з а н н я. Повний приріст цієї функції, згідно зі співвідношенням (7), можна записати так:

$$\Delta z = 3x_0^2\Delta x + 2y_0\Delta y + \left(3x_0\Delta x + \Delta x^2\right)\Delta x + \Delta y\Delta y.$$

Введемо позначення

$$A = 3x_0^2; \quad B = 2y_0; \quad \alpha = 3x_0\Delta x + \Delta x^2; \quad \beta = \Delta y. \tag{11}$$

Повний приріст заданої функції набирає вигляду (9), причому, як це випливає з рівностей (11), $A$ і $B$ не залежать від $\Delta x$ і $\Delta y$, а $\alpha$ і $\beta$ такі, що

$$\lim_{\rho \to 0} \alpha = \lim_{\rho \to 0} \beta = 0.$$



Якщо функція диференційовна в кожній точці відкритої області $D$, то її називають *диференційовною в цій області.* Так, функція з попереднього прикладу диференційовна в усій площині $xOy$.

Доведемо низку теорем.

**Т е о р е м а 1.** Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $(x_0, y_0)$, то вона в цій точці неперервна.

Д о в е д е н н я. Якщо функція диференційовна в точці, то для повного приросту справджується рівність (9). Перейшовши в цій рівності до границі при $\rho \to 0$ і враховуючи рівності (10), матимемо

$$\lim_{\rho \to 0} \Delta z = 0.$$

Це означає, що фукція $z = f(x, y)$ є неперервною в точці $(x_0, y_0)$.

Теорему доведено.

З цієї теореми випливає, що необхідною умовою диференційовності функції в точці є неперервність функції в цій точці. Проте неперервність функції в точці не є достатньою умовою диференційовності.

**Т е о р е м а 2.** Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $(x_0, y_0)$, то в цій точці існують частинні похідні функції і вони дорівнюють

$$f_x'(x_0, y_0) = A; \quad f_y'(x_0, y_0) = B. \tag{12}$$

Д о в е д е н н я. Нехай для функції $z = f(x, y)$ у точці $(x_0, y_0)$ виконується рівність (9) і нехай $\Delta y = 0$, а $\Delta x \ne 0$. Тоді повний приріст $\Delta z$ збігається з частинним приростом $\Delta_x z$, який у цьому випадку дорівнює

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha\Delta x.$$

Поділимо обидві частини останньої рівності на $\Delta x$:

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha.$$

Перейшовши в цій рівності до границі при $\Delta x \to 0$ і врахувавши властивість (10), дістанемо

$$\lim_{\Delta x \to \infty} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A.$$

Проте за означенням

$$\lim_{\Delta x \to \infty} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = f_x'(x_0, y_0).$$

Тому

$$f_x'(x_0, y_0) = A.$$

Якщо в рівності (9) покласти $\Delta x = 0$, а $\Delta y \ne 0$, то матимемо

$$\Delta_y z = B\Delta y + \beta\Delta y.$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на $\Delta y$ і перейшовши до границі при $\Delta y \to 0$, знайдемо

$$f_y'(x_0, y_0) = B.$$

Теорему доведено.

З цієї теореми випливає, що для диференційовності функції кількох змінних в точці потрібно, щоб в цій точці існували частинні похідні від заданої функції.

Зауважимо, що для диференційовності функції однієї змінної в точці необхідно й достатньо, щоб існувала похідна функції в цій точці, тоді як для диференційовності функції кількох змінних існування частинних похідних у точці є тільки необхідною умовою, але не достатньою. З'ясуємо це на прикладі.

Розглянемо функцію

$$z=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{якщо } x^2+y^2>0;\\ 0, & \text{якщо } x^2+y^2=0.\end{cases} \tag{13}$$

Покажемо, що ця функція в точці $(0;0)$ має частинні похідні по $x$ і по $y$, які дорівнюють нулю.

Справді,

$$f'_x(0;0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0;0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0;$$

$$f'_y(0;0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(\Delta y,0)-f(0;0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0.$$

Проте функція (13) не є диференційовною в точці $(0;0)$. Так, повним приростом заданої функції в точці $(0;0)$ є

$$\Delta z=\frac{\Delta x^2\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}. \tag{14}$$

Якщо припустити, що при цьому виконується рівність (9), і врахувати, що

$$f'_x(0;0)=f'_y(0;0)=0,$$

то рівність (14) можна записати у вигляді

$$\Delta z=\eta\rho,$$

де $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$; $\eta=\dfrac{\Delta x^2\Delta y}{\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Функція $\eta$ при $\Delta x\to 0$ і $\Delta y\to 0$ має наближатися до нуля. Якщо взяти, наприклад, $\Delta y=\Delta x>0$, то $\eta=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ і $\eta$ не прямує до нуля при $\Delta x\to 0$. Це суперечить припущенню про диференційовність заданої функції в точці $(0;0)$.

**Теорема 3.** Якщо функція $z=f(x,y)$ в околі точки має частинні похідні, які є неперервними функціями в точці $(x_0,y_0)$, то функція $z=f(x,y)$ диференційовна в цій точці.



Доведення. Запишемо повний приріст функції в точці $(x_0,y_0)$:

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=$$
$$=\left(f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)\right)+\left(f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\right). \tag{15}$$

Вираз у перших дужках є приростом функції $f(x,y_0+\Delta y)$ однієї змінної $x$ у точці $x_0$, а вираз у других дужках є приростом функції $f(x_0,y)$ змінної $y$ у точці $y_0$. За умовою теореми функції $f(x,y_0+\Delta y)$ і $f(x_0,y)$ мають відповідно похідні (це будуть частинні похідні від функції $z=f(x,y)$) у деяких околах точки $(x_0,y_0)$. Тоді ці прирости за теоремою Лагранжа можна записати так:

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)=f'_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x;$$
$$f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0+\theta_1\Delta y)\Delta y, \tag{16}$$

де

$$0<\theta<1,\quad 0<\theta_1<1.$$

Унаслідок неперервності частинних похідних $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ у точці $(x_0,y_0)$ праві частини попередніх рівностей можна подати у вигляді

$$f'_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+\alpha\Delta x;$$
$$f'_y(x_0,y_0+\theta_1\Delta y)\Delta y=f'_x(x_0,y_0)\Delta y+\beta\Delta y, \tag{17}$$

де $\alpha=\alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)$; $\beta=\beta(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)$, причому

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta=0.$$

Взявши за основу вирази (15)—(17), знайдемо повний диференціал функції:

$$\Delta z=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y.$$

Теорему доведено.

Ця теорема дає достатні умови диференційовності функції в точці.

Наприкінці зазначимо, що питання про диференційовність розглядалося на прикладі функції двох змінних. Проте можна досить просто сформулювати всі наведені означення і теореми й для функції $n$ змінних.

Зокрема, якщо функцію $n$ змінних $u=f(x)$, де $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}_n$, задано в деякій відкритій області $W\subset\mathbf{R}_n$, то означення диференційовності функції в точці $x_0=\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$ формулюють так:

функцію $u=f(x)$ називають *диференційовною в точці* $x_0$, якщо повний приріст

$$\Delta y=f\left(x_1^0+\Delta x_1,\ldots,x_n^0+\Delta x_n\right)-f\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$$

функції у цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta u=\sum_{i=1}^{n}A_i\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Delta x_i, \tag{18}$$

де $A_i$ не залежать від приростів аргументів $\Delta x_i$, $i=1,2,...,n$, а $\alpha_i$ залежать від $\Delta x_i$ і такі, що

$$\lim_{\rho\to 0}\alpha_i=0,\quad i=1,2,...,n,$$

тут

$$\rho=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}.$$

Як і для функції двох змінних, можна довести, що коли функція $u=f(x)$ диференційовна в точці $x_0=\left(x_1^0,...,x_n^0\right)$, то в рівності (18)

$$A_i=f'_{x_i}(x_0),\quad i=1,2,...,n. \tag{19}$$

## 2.7 ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Розглянемо диференційовну функцію $z=f(x,y)$ у точці $(x_0,y_0)$.

Повний приріст цієї функції в точці $(x_0,y_0)$ за формулами (12) п. 2.6 запишемо у вигляді

$$\Delta z=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y. \tag{1}$$

Уведемо величину

$$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}>0. \tag{2}$$

Вираз $\alpha\Delta x+\beta\Delta y$ можна подати так:

$$\alpha\Delta x+\beta\Delta y=\rho\left(\alpha\frac{\Delta x}{\rho}+\beta\frac{\Delta y}{\rho}\right).$$

Позначимо

$$\alpha\frac{\Delta x}{\rho}+\beta\frac{\Delta y}{\rho}=\eta.$$

Оскільки $|\Delta x|\le\rho, |\Delta y|\le\rho$, а $\alpha\to 0$ і $\beta\to 0$ при $\rho\to 0$, то й $\eta\to 0$ при $\rho\to 0$. Тому праву частину рівності (1) можна записати ще так:

$$\Delta z=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+\eta\rho. \tag{3}$$

Зазначимо, що останній доданок є величиною вищого порядку мализни, ніж $\rho$, оскільки

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\eta\rho}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\eta=0.$$

***Означення.*** Якщо функція $z=f(x,y)$ диференційовна в точці $(x_0,y_0)$, то вираз

$$f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y$$

у формулі (3), тобто лінійну відносно $\Delta x$ і $\Delta y$ частину приросту функції, називають *повним диференціалом* функції в точці $(x_0,y_0)$ і позначають $dz$ або $df(x_0,y_0)$.



Надалі користуватимемося першим позначенням і записуватимемо

$$dz=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y, \tag{4}$$

якщо $(x_0,y_0)$ — фіксована точка області $D$, і

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y, \tag{5}$$

якщо $(x,y)$ — довільна точка області $D$.

Отже, рівність (3) набирає вигляду

$$\Delta z=dz+\eta\rho. \tag{6}$$

Звідси

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-dz}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\eta=0.$$

Таким чином, різниця між повним приростом функції та її повним диференціалом у цій точці є величиною при $\rho\to 0$ вищого порядку мализни, ніж $\rho$. Тому диференціал функції $dz$ ще називають *головною частиною приросту функції.* Отже, дістанемо

$$\Delta z\approx dz \tag{7}$$

або

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y. \tag{8}$$

Цією формулою користуються за наближеного обчислення значень функції.

❑ **Приклад**

1. Користуючись формулою (8), наближено обчислити

а) $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$; б) $0{,}97^{1{,}05}$.

Розв'язання:

а) розглянемо таку функцію двох змінних:

$$z=\sqrt{x^3+y^3}.$$

Знайдемо частинні похідні цієї функції

$$f'_x(x,y)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}};\quad f'_y(x,y)=\frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}.$$

Уведемо позначення

$$x=x_0+\Delta x;\quad y=y_0+\Delta y,$$

де $x_0=1$; $y_0=2$; $\Delta x=0{,}02$; $\Delta y=-0{,}03$.

Отже,

$$f(x_0,y_0)=f(1,2)=\sqrt{1^3+2^3}=\sqrt{9}=3;$$

$$f'_x(x_0,y_0)=f'_x(1,2)=\frac{3\cdot 1^2}{2\sqrt{1^3+2^3}}=\frac{3}{2\cdot 3}=\frac{1}{2};$$

$$f'_y(x_0,y_0)=f'_y(1,2)=\frac{3\cdot 2^2}{2\sqrt{1^3+x^3}}=\frac{3\cdot 4}{2\cdot 3}=2.$$

За формулою (8) дістанемо

$$\sqrt{1,02^3+1,97^3} \approx 3+\frac{1}{2}\cdot 0,02+2(-0,03)=2,95.$$

б) Розглянемо функцію

$$z=x^y.$$

Її частинні похідні

$$f'_x(x, y)=yx^{y-1};\ f'_y(x, y)=x^y \ln x.$$

Нехай

$$x=x_0+\Delta x; \quad y=y_0+\Delta y,$$

де $x_0=1$; $y_0=1$; $\Delta x=-0,03$; $\Delta y=0,05$.

Обчислюємо

$$f(1,1)=1^1=1;\ f'_x(1,1)=1\cdot 1^0=1;\ f'_y(1,1)=1^1\cdot \ln 1=0.$$

Отже,

$$0,95^{1,05}\approx 1+1(-0,03)+0(0,05)=0,97.$$

Диференціал функції кількох змінних застосовують також для оцінювання похибок за наближених обчислень. Нехай, наприклад, маємо функцію двох змінних $z=f(x, y)$ і нехай при обчисленні значень аргументів $x$ і $y$ допускаються похибки відповідно $\Delta x$ і $\Delta y$. Значення функції, яке обчислено за наближеними значеннями аргументів, знаходять з деякою похибкою $\Delta z$. Потрібно оцінити цю похибку, якщо відомо оцінки для похибок $\Delta x$ і $\Delta y$.

Очевидно, що

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y).$$

Скориставшись наближеною формулою (7), дістанемо

$$\Delta z\approx f'_x(x, y)\Delta x+f'_y(x, y)\Delta y$$

або

$$|\Delta z|\le |f'_x(x, y)||\Delta x|+|f'_y(x, y)||\Delta y|.$$

Якщо позначити відповідно через $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ найбільші абсолютні похибки, то

$$\delta z=|f'_x(x, y)|\delta x+|f'_y(x, y)|\delta y. \tag{9}$$

Формулою (9) користуються при виведенні правил наближених обчислень.

Так, якщо функція $z=xy$, де $x>0, y>0$, то

$$dz=y\Delta x+x\Delta y,$$

звідси

$$\delta z=y\delta x+x\delta y.$$

Поділивши обидві частини останньої рівності на $z=xy$, знаходимо

$$\frac{\delta z}{z}=\frac{\delta x}{x}+\frac{\delta y}{y}. \tag{10}$$

Формула (10) виражає відоме правило наближених обчислень: *гранична відносна похибка добутку дорівнює сумі відносних похибок множників.*

Це саме правило дістанемо у випадку, коли $z=\frac{x}{y}$.



Дамо означення диференціала функції $n$ змінних.

***Означення.*** Якщо функція $u=f(x)$, де $x\in \mathbf{R}_n$, диференційовна в точці $x_0=\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)\in \mathbf{R}_n$, то вираз

$$du=f'_{x_1}(x_0)\Delta x_1+f'_{x_2}(x_0)\Delta x_2+\cdots+f'_{x_n}(x_0)\Delta x_n \tag{11}$$

називають *повним диференціалом функції* $u=f(x)$ у точці $x_0=\left(x_1^0, ..., x_n^0\right)$.

Якщо у формулі (11) за означенням вважати

$$\Delta x_i=dx_i,\ i=1, 2, ..., n,$$

то диференціал $du$ набирає вигляду

$$du=f'_{x_1}(x_0)dx_1+\cdots+f'_{x_n}(x_0)dx_n. \tag{12}$$

Відповідно диференціал для функції двох змінних $z=f(x, y)$ дорівнюватиме

$$dz=f'_x(x_0, y_0)dx+f'_y(x_0, y_0)dy. \tag{13}$$

Зауважимо, що досі розглядалася фіксована точка $(x_0, y_0)\in \mathbf{R}_2$, або $x_0=\left(x_1^0, ..., x_n^0\right)\in \mathbf{R}_n$. Якщо розглядати довільну точку $(x, y)\in \mathbf{R}_2$, в якій функція $z=f(x, y)$ є диференційовною, то диференціал $dz$ матиме вигляд

$$dz=f'_x(x, y)dx+f'_y(x, y)dy, \tag{14}$$

або

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{15}$$

Відповідно для функції $n$ змінних матимемо

$$du=f'_{x_1}(x)dx_1+\cdots+f'_{x_n}(x)dx_n, \tag{16}$$

або

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n. \tag{17}$$

❑ **Приклади**

**2.** Знайти диференціал функції

$$z=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{якщо } x^2+y^2>0; \\ 0, & \text{якщо } x^2+y^2=0, \end{cases} \tag{18}$$

у точці $(0;0)$.

Розв'язання. Спочатку доведемо, що задана функція диференційовна в точці $(0;0)$. Знайдемо повний приріст її в цій точці

$$\Delta z=f(\Delta x, \Delta y)-f(0,0)=e^{-\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\,\frac{e^{-\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}.$$

Скориставшись формулою (2), дістанемо

$$\Delta z = \rho \frac{e^{-\frac{1}{\rho^2}}}{\rho}.$$

Введемо позначення

$$\eta = \frac{e^{-\frac{1}{\rho^2}}}{\rho}.$$

Тоді $\eta \to 0$ при $\rho \to 0$. Справді, зробивши підстановку $\frac{1}{\rho} = t$, функцію $\eta$ запишемо у вигляді

$$\eta = \frac{t}{e^{t^2}},$$

причому якщо $\rho \to 0$, то $t \to \infty$. Застосуємо правила Лопіталя до попереднього дробу

$$\lim_{t\to\infty} \eta = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2te^{t^2}} = 0.$$

Отже, приріст цієї функції в точці $(0; 0)$ зображується у вигляді

$$\Delta z = \rho\eta, \tag{19}$$

де $\lim\limits_{\rho\to 0} \eta = 0$.

Тому функція (18) є диференційовною в точці $(0; 0)$, а отже, вона має диференціал

$$dz = f'_x(0;0)dx + f'_y(0;0)dy.$$

Знайдемо частинні похідні

$$f'_x(0;0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0;0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{\Delta x^2}}}{\Delta x} = 0;$$

$$f'_y(0;0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0;0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{\Delta y^2}}}{\Delta y} = 0.$$

Таким чином,

$$dz = f'_x(0;0)\Delta x + f'_y(0;0)\Delta y = 0 \cdot dx + 0 \cdot dy = 0.$$

**3.** Довести, що функція

$$u = xy + yz + zx$$

диференційовна в довільній точці $(x, y, z)$. Знайти її диференціал.

Р о з ' я з а н н я. Знайдемо частинні похідні цієї функції в точці $(x, y, z)$. Маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x + z; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = y + x.$$

Як бачимо, частинними похідними є функції, неперервні в точці $(x, y, z)$. Тому за теоремою 3 п. 2.6 розглядувана функція диференційовна в точці $(x, y, z)$ і її диференціал

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = (y+z)dx + (x+z)dy + (y+x)dz.$$



## 2.8
## СКАЛЯРНЕ ПОЛЕ. ПОВЕРХНІ РІВНЯ. ЦИЛІНДРИЧНІ Й СФЕРИЧНІ КООРДИНАТИ

Розглянемо функцію трьох змінних $u = f(x, y, z)$, задану в деякій області $\Omega$ тривимірного простору ($\Omega$ може бути і всім простором).

Якщо позначити через $P(x, y, z)$ довільну точку області $\Omega$, то функцію $u = f(x, y, z)$ можна розглядати як функцію точки $u = f(P)$.

***Означення.*** Якщо кожній точці $P(x, y, z)$ області $\Omega$ відповідає за певним правилом або законом одне і тільки одне значення деякої скалярної фізичної величини $u$, то кажуть, що в області $\Omega$ *визначено скалярне поле* величини $u$.

Прикладами скалярного поля є поле температури, електричне поле.

Якщо через $u$ позначити ньютонівський потенціал матеріальної точки $M$ маси $m$, то, як відомо,

$$u = \gamma \frac{m}{r}, \tag{1}$$

де $\gamma$ — стала всесвітнього тяжіння; $r$ — відстань від точки $P(x, y, z)$ до точки $M$.

Отже, формула (1) задає потенціальне поле. Можна розглядати також поле тиску в атмосфері.

Якщо величина $u = f(P)$ не залежить від часу $t$, то скалярне поле називають *стаціонарним*. Якщо $u$ залежить від $t$, тобто $u = f(t, P)$, то скалярне поле називають *нестаціонарним*.

Так, коли в середовище, яке проводить тепло, помістити нагріте тіло, то з часом воно охолоджуватиметься. Температура в точках цього середовища залежатиме від розглядуваної точки і від плину часу $t$. Отже, матимемо нестаціонарне поле температур.

Зауважимо, що означення скалярного поля не відрізняється від означення функції. Термін «поле» перенесено з фізики і наголошує на походженні розглядуваного поняття.

У загальному випадку скалярне стаціонарне поле характеризується функцією трьох змінних $u = f(x, y, z)$, тому цю функцію називають *функцією поля*.

Якщо систему координат $xOyz$ можна вибрати так, що функція поля буде тільки функцією двох змінних, наприклад $u = f(x, y)$, то поле називають *плоским*. Наприклад, поле температури навколо необмеженого в обох напрямках рівномірно нагрітого прямолінійного дроту є плоским.

Прикладом плоского поля є також освітленість частини площини, що освітлюється деяким джерелом світла.

Задання поля за допомогою функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ (розглядається декартова система координат) не завжди дає достатнє уявлення про зміну цього поля. Тому, як і для функції двох змінних, зручно користуватися так званими *поверхнями рівня* (для функції двох змінних розглядалися лінії рівня).

***Означення.*** *Поверхнею рівня* скалярного поля (функції) $u = f(P)$ називають множину точок області $\Omega$, в яких поле (функція) $u = f(P)$ має те саме значення $C$, тобто

$$f(x, y, z) = C = \text{const}. \qquad (2)$$

Рівняння (2) називають *рівнянням поверхні рівня*.

Надаючи $C$ різних числових значень, щоразу матимемо окремі поверхні рівня. Взаємне розміщення поверхонь рівня в просторі й дає наочне уявлення про це скалярне поле.

Так, якщо функцію поля задано формулою

$$u = x + y + z,$$

то поверхнями рівня є паралельні площини, рівняння яких

$$x + y + z = C.$$

Для функції поля $u = x^2 + y^2 + z^2$ поверхнями рівня є концентричні сфери з центром у початку координат. Поверхні рівня часто розглядають у фізиці. Це ізотерми, ізобари, ізохори та ін.

Під час вивчення скалярних полів користуються не тільки прямокутною декартовою системою координат, а й іншими системами координат. До них належать циліндричні й сферичні координати.

**Циліндричні координати.** Відомо, що положення точки на площині $xOy$ можна визначити не тільки за допомогою декартових координат $x, y$, а й за допомогою так званих *полярних координат* $\rho$ і $\varphi$ (рис. 17), де $\rho$ означає відстань від точки $M$ до початку координат, а $\varphi$ — кут, утворений радіусом-вектором $OM$ точки $M$ і додатним напрямком осі $Ox$.

При цьому якщо полюс $O$ знаходиться в початку декартової системи координат, полярна вісь напрямлена в напрямку додатної осі $Ox$, а полярний кут $\varphi$ утворено радіусом-вектором $OM$ точки $M$ із полярною

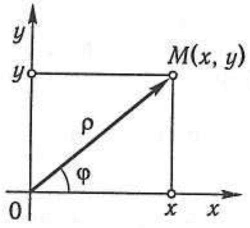


Рис. 17

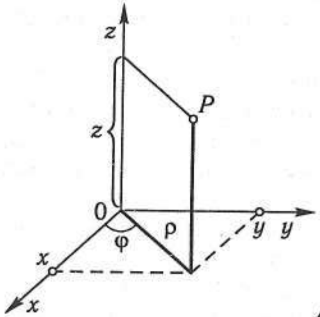


Рис. 18

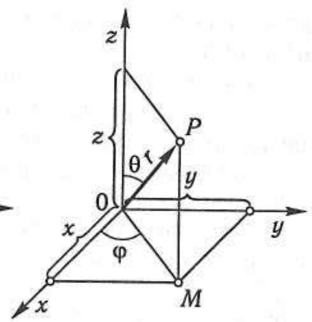


Рис. 19



віссю, то декартові координати $x$ і $y$ однозначно виражаються формулами

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi. \qquad (3)$$

Знаючи декартові координати точки, можна знайти полярні координати, а саме:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad (4)$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{якщо } x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{якщо } x < 0, y \geq 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{якщо } x < 0, y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } x = 0, y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Визначимо положення точки $P$ у просторі декартовою координатою $z$ (аплікатою) і полярними координатами $\rho$ і $\varphi$ (рис. 18).

Величини $z$, $\rho$ і $\varphi$ називають *циліндричними координатами точки* $P$. Якщо через $x, y, z$ позначити декартові координати точки $P$, то виконуються такі співвідношення:

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi; \quad z = z. \qquad (5)$$

У циліндричній системі координат є такі координатні поверхні:

1) циліндри $\rho = \text{const}, 0 \leq \rho < +\infty$;

2) вертикальні півплощини $\varphi = \text{const}, 0 \leq \varphi < 2\pi$, що проходять через вісь $Oz$;

3) горизонтальні площини $z = \text{const}, -\infty < z < +\infty$.

Попарні перетини координатних поверхонь утворюють координатні лінії. На кожній координатній лінії дві координати залишаються сталими і тільки одна змінюється.

Координатні лінії $z$ утворюються при перетині координатних поверхонь $\rho = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ і є вертикальними прямими.

Координатні лінії $\varphi$ утворюються при перетині координатних поверхонь $z = \text{const}$, $\rho = \text{const}$ і є горизонтальними колами з центром на осі $Oz$.

Координатні лінії $\rho$ утворюються при перетині координатних поверхонь $z = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ і є півпрямими, перпендикулярними до осі $Oz$.

**Сферичні координати.** Положення точки $P$ у просторі визначають три величини:

1) $r$ — відстань від точки $P$ до початку координат $O$;

2) $\theta$ — кут між радіусом-вектором $OP$ точки $P$ і додатним напрямком осі $Oz$;

3) $\varphi$ — кут між проекцією $OM$ радіуса-вектора $OP$ на площину $xOy$ і додатним напрямком осі $Ox$ (рис. 19).

Величини $r$, $\varphi$, $\theta$ називають *сферичними координатами* точки $P$.

Користуючись рис. 19, можна встановити залежність між декартовими і сферичними координатами точки, а саме:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta; \quad y = r\sin\varphi\sin\theta; \quad z = r\cos\theta. \tag{6}$$

У сферичній системі координат є такі координатні поверхні:

1) сфери $r = \text{const}$, $0 \le r < +\infty$;
2) півконуси $\theta = \text{const}$, $0 \le \theta \le \pi$;
3) вертикальні півплощини $\varphi = \text{const}$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Координатними лініями у сферичній системі координат є: великі кола сфери (меридіани); малі кола сфери (паралелі); промені, що виходять із початку координат.

## 2.9 ЧАСТИННІ ПОХІДНІ Й ДИФЕРЕНЦІАЛ СКЛАДЕНОЇ ФУНКЦІЇ

Нехай функцію $z = f(x, y)$ задано в області $D$, а $x$ і $y$ є функціями від $t$:

$$x = \varphi(t); \quad y = \psi(t), \tag{1}$$

заданими в деякому проміжку $\langle\alpha; \beta\rangle$. Припустимо, що всім значенням $t \in \langle\alpha; \beta\rangle$ відповідають точки $(\varphi(t), \psi(t)) \in D$.

Якщо підставити замість $x$ і $y$ їхні значення з формул (1) у функцію $z = f(x, y)$, то дістанемо складену функцію від $t$:

$$z = f(\varphi(t), \psi(t)). \tag{2}$$

**Теорема 1.** Якщо функції $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ у точці $t \in \langle\alpha; \beta\rangle$ мають скінченні похідні, а функція $z = f(x, y)$ у точці $(x = \varphi(t); y = \psi(t)) \in D$ є диференційовною, то складена функція (2) в точці $t$ має похідну і ця похідна дорівнює

$$f'(\varphi(t), \psi(t)) = f'_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f'_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \tag{3}$$

або

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{4}$$

Доведення. Доведемо теорему на основі означення похідної. Для цього аргументу $t$ надамо довільного приросту $\Delta t$, але такого, щоб точка $t + \Delta t \in \langle\alpha; \beta\rangle$. Тоді функції $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$ матимуть прирости відповідно $\Delta x = \Delta\varphi(t)$, $\Delta y = \Delta\psi(t)$, а разом із ними і функція $z = f(x, y)$ матиме приріст $\Delta z = \Delta f(\varphi(t), \psi(t))$.



Оскільки функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $(x = \varphi(t), y = \psi(t))$, то $\Delta f(\varphi(t), \psi(t))$ можна записати так:

$$\Delta f(\varphi(t), \psi(t)) = f'_x(\varphi(t), \psi(t))\Delta\varphi(t) + f'_y(\varphi(t), \psi(t))\Delta\psi(t) + \alpha\Delta\varphi(t) + \beta\Delta\psi(t). \tag{5}$$

Поділимо обидві частини цієї рівності на $\Delta t$

$$\frac{\Delta f(\varphi(t), \psi(t))}{\Delta t} = f'_x(\varphi(t), \psi(t))\frac{\Delta\varphi(t)}{\Delta t} + f'_y(\varphi(t), \psi(t))\frac{\Delta\psi(t)}{\Delta t} + \alpha\frac{\Delta\varphi(t)}{\Delta t} + \beta\frac{\Delta\psi(t)}{\Delta t}.$$

Зауважимо, що, згідно з умовою теореми, функції $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$ у точці $t \in \langle\alpha; \beta\rangle$ мають похідні. Тому вони в цій точці неперервні. Отже, $\Delta\varphi(t) \to 0$ і $\Delta\psi(t) \to 0$ при $\Delta t \to 0$, а $\alpha \to 0$ і $\beta \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Тому, перейшовши до границі в попередній рівності при $\Delta t \to 0$, дістанемо рівність (3).

Теорему доведено.

**Зауваження.** Під час доведення цієї теореми було використано формулу (5), яка виконується за умови, що $\Delta x$ і $\Delta y$ одночасно не дорівнюють нулю, тобто функції $\alpha$ і $\beta$ не визначені в точці $(0; 0)$. У цьому випадку $\Delta x$ і $\Delta y$ є приростами функцій $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ і не виключено, що за окремих значень $t \in \langle\alpha; \beta\rangle$ вони можуть дорівнювати нулю. Проте оскільки існують границі

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta = 0,$$

то функції $\alpha$ і $\beta$ можна довизначити в точці $(0; 0)$, а саме покласти в цій точці

$$\alpha = \beta = 0.$$

Тоді функції $\alpha$ і $\beta$ будуть неперервними в точці $(0, 0)$ і формула (5) виконується за будь-яких $\Delta x = \Delta\varphi(t)$ і $\Delta y = \Delta\psi(t)$, якщо $\Delta t \ne 0$ є достатньо малим.

У теоремі 1 було розглянуто випадок складеної функції від однієї змінної. Цю теорему можна узагальнити й на випадок, коли аргументи функції $z = f(x, y)$, у свою чергу, є функціями кількох змінних, наприклад двох.

**Теорема 2.** Нехай функцію $z = f(x, y)$ визначено в області $D \subset \mathbf{R}_2$, а $x$ і $y$ є функціями двох змінних $u$ і $v: x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, визначеними в деякій області $W \subset \mathbf{R}_2$; причому якщо точка $(u, v) \in W$, то відповідна точка $(x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v) \in D)$.

Тоді якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $(x, y) \in D$, а функції $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ у точці $(u, v) \in D$ мають частинні похідні по $u$ і по $v$, то функція $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ у точці $(u, v)$ має частинні похідні по $u$ і по $v$ і ці частинні похідні дорівнюють відповідно

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{6}$$

Доведення цієї теореми безпосередньо випливає з теореми 1.

## ❑ Приклади

**1.** Знайти похідну $\frac{dz}{dt}$ функції $z = \arcsin(x-y)$, якщо $x = 3t,\ y = 4t^3$.

Р о з в ' я з а н н я. Скористаємося формулою (4). Маємо

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}3 + \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}(-1)12t^2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\left(3-12t^2\right) = \frac{3\left(1-4t^2\right)}{\sqrt{1-\left(3t-4t^3\right)^2}}.$$

**2.** Знайти похідну $\frac{dz}{dt}$ функції

$$z = \operatorname{arctg}\left(3t - 2x^2 - y\right),$$

якщо $x = \frac{1}{t},\ y = \sqrt{t}$.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо функцію трьох аргументів. Ця функція безпосередньо залежить від $t$, а також від $x$ і $y$, які, в свою чергу, є функціями від $t$. Отже, маємо складену функцію такого вигляду:

$$z = f(t, y, z),$$

де $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$.

Узагальнюючи формулу (4) на цей випадок, дістанемо

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{7}$$

У лівій частині маємо повну похідну $\frac{dz}{dt}$, а в правій — частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial t}$.

Отже, підставляючи у формулу (7) значення відповідних похідних, знаходимо

$$\frac{dz}{dt} = \frac{3}{1+\left(3t-2x^2-y\right)^2} + \frac{1}{1+\left(3t-2x^2-y\right)^2}(-4x)\left(-\frac{1}{t^2}\right) +$$

$$+\frac{1}{1+\left(3t-2x^2-y\right)^2}(-1)\frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{1+\left(3t-\frac{2}{t^2}-\sqrt{t}\right)^2}\left(3+\frac{4}{t^3}-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right).$$

**3.** Довести, що функція

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y},$$

де $x = u + v,\ y = u - v$ задовольняє співвідношення

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}. \tag{8}$$



Р о з в ' я з а н н я. Користуючись формулами (6), знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right) = \frac{y-x}{y^2+x^2} = \frac{-2v}{2\left(u^2+v^2\right)} = -\frac{v}{u^2+v^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\left(\frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right) = \frac{x+y}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{2u}{2\left(u^2+v^2\right)} = -\frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

Звідси

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

Отже, дістали рівність (8).

**4.** Знайти частинні похідні функції

$$u = f(x, xy, xyz),$$

де $f$ — диференційовна функція в деякій області тривимірного простору.

Р о з в ' я з а н н я. Введемо позначення:

$$\zeta = x;\quad \xi = xy;\quad \eta = xyz. \tag{9}$$

Тоді цю функцію можна записати як складену

$$u = f(\zeta, \xi, \eta).$$

Отже, для частинних похідних можна використовувати такі формули:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z}.$$

Підставляючи в ці формули значення відповідних похідних із (9), остаточно дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial \xi}y + \frac{\partial u}{\partial \eta}yz;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}x + \frac{\partial u}{\partial \eta}xz; \tag{10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \eta}xy.$$

Зауважимо, що в першій рівності (10) у лівій частині — це повна частинна похідна за $x$, перший доданок у правій частині (10) є частинною похідною функцією тільки за першим аргументом.

Розглянемо питання про диференціал складеної функції.

**Теорема 3.** Якщо функція $z = f(x, y)$ в точці $(x, y) \in D$ має неперервні частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, а функції $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ у точці $(u, v) \in W$ мають неперервні частинні похідні $\varphi'_u(u, v)$, $\varphi'_v(u, v)$, $\psi'_u(u, v)$, $\psi'_v(u, v)$ по $u$, $v$, то функція $z = f(x, y)$, розглядувана як складена функція в точці $(u, v)$, має диференціал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (11)$$

Доведення. За умовами теореми функція $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ у точці $(u, v) \in W$ має неперервні частинні похідні по $u$ і по $v$. Тому вона є диференційовною у цій точці і її диференціал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Підставивши в цю рівність значення похідних $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ із формул (6), матимемо

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right).$$

Оскільки $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$ є функціями, неперервними в точці $(u, v) \in W$, то вирази в дужках попередньої рівності є відповідно диференціалами $dx$, $dy$.

Теорему доведено.

З доведеної теореми випливає, що форма диференціала зберігається і у випадку складеної функції.

Цю властивість диференціала функції кількох змінних, а саме властивість зберігати свою форму, називають *інваріантною*.

Використовуючи властивість інваріантності форми повного диференціала, можна вивести такі формули:

$$d(cx) = cdx;$$
$$d(x \pm y) = dx \pm dy;$$
$$d(xy) = xdy + ydx; \qquad (12)$$
$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Виведемо, наприклад, останню формулу. Для цього скористаємося формулою (11), причому $x$ і $y$ можуть бути як незалежними змінними, так і функціями інших змінних. Введемо позначення

$$z = \frac{x}{y}.$$



Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y};\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}.$$

Підставляючи значення похідних у формулу (11), дістанемо

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Формули (12) називають ще *правилами диференціювання функцій*, оскільки, знаючи диференціал функції, можна знайти частинні похідні цієї функції.

❑ **Приклад**

**5.** Знайти частинні похідні функції

$$u = e^{xyz}.$$

Розв'язання. Маємо

$$du = e^{xyz}d(xyz) = e^{xyz}(yzdx + xzdy + xydz). \qquad (13)$$

Оскільки коефіцієнти при диференціалах незалежних змінних є відповідними частинними похідними, то зі співвідношення (13) знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{xyz}yz;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{xyz}xz;\quad \frac{\partial u}{\partial z} = e^{xyz}xy.$$

## 2.10 ВЕКТОР-ФУНКЦІЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТУ, ЇЇ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Коротко сформулюємо основні поняття математичного аналізу щодо вектор-функції скалярного аргументу. При цьому не вдаватимемося у подробиці, оскільки нового порівняно зі скалярними функціями тут мало.

***Означення 1.*** Якщо існує правило або закон, за яким кожному значенню змінної $t \in \langle\alpha;\beta\rangle$ відповідає один і тільки один вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то кажуть, що на проміжку $\langle\alpha;\beta\rangle$ визначено *вектор-функцію,* або *векторну функцію* $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Наприклад, нехай точка $M$ рухається в просторі так, що при кожному значенні часу $t$ відоме її положення, тобто відомі її координати $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Тоді кожному значенню $t$ відповідає радіус-вектор $\vec{R} = \overrightarrow{OM}$ точки $M$ (рис. 20).

Отже, $\vec{R} = \vec{R}(t)$ є вектор-функцією скалярного аргументу $t$.

Прикладом вектор-функції є вектор швидкості або вектор прискорення рухомої точки.

Якщо в просторі взяти прямокутну декартову систему координат, то, як відомо з аналітичної геометрії, кожному вектору відповідає певна трійка дійсних чисел (проекції цього вектора на координатні осі), які ще назива-

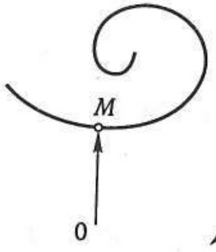


Рис. 20

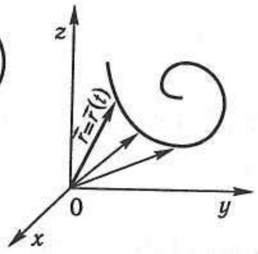


Рис. 21

ють *координатами вектора*; і, навпаки, кожній трійці дійсних чисел у просторі відповідає вектор, для якого ці числа є його координатами.

Тому задання вектор-функції еквівалентне заданню трьох скалярних функцій

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Тоді вектор-функцію можна записати у вигляді

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \tag{1}$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орти.

Якщо в декартовій системі координат $xOyz$ від початку координат відкласти вектори $\vec{r} = \vec{r}(t)$, що відповідають різним значенням $t$, то кінці цих векторів утворять деяку просторову криву (рис. 21), яку називають *графіком вектор-функції*. Графік вектор-функції ще називають *годографом*.

Якщо аргумент $t$ у вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$ розглядати як час, то годограф вектор-функції збігається з траєкторією, що описує кінець вектора.

Зазначимо, що надалі через $|\vec{R}|$ позначатимемо довжину вектора $\vec{R}$.

***Означення 2.*** Нехай вектор-функцію $\vec{r} = \vec{r}(t)$ визначено в деякому околі точки $t_0$, крім, можливо, самої точки $t_0$. Тоді сталий вектор

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \tag{2}$$

називають *границею вектор-функції* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ у точці $t_0$ (при $t \to t_0$) і записують

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a},$$

якщо

$$\lim_{t\to t_0} \left|\vec{r}(t) - \vec{a}\right| = 0. \tag{3}$$

**Т е о р е м а 1.** Для того щоб вектор $\vec{a}$ був границею вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$ у точці $t_0$, необхідно й достатньо, щоб у цій точці існували границі скалярних функцій $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, які відповідно дорівнювали б:

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = a_1; \quad \lim_{t\to t_0} y(t) = a_2; \quad \lim_{t\to t_0} z(t) = a_3. \tag{4}$$



Д о в е д е н н я   н е о б х і д н о с т і. Нехай $\vec{a}$ є границею вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$ у точці $t_0$. Тоді рівність (3) можна записати так:

$$\lim_{t\to t_0} \sqrt{\left(x(t)-a_1\right)^2 + \left(y(t)-a_2\right)^2 + \left(z(t)-a_3\right)^2} = 0. \tag{5}$$

Із рівності (5) випливає, що для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $t$, які задовольняють нерівність $0 < |t - t_0| < \delta$, виконується нерівність

$$\sqrt{\left(\left(x(t)-a_1\right)^2 + \left(y(t)-a_2\right)^2 + \left(z(t)-a_3\right)^2\right)} < \varepsilon. \tag{6}$$

Отже, виконуються й нерівності

$$|x(t)-a_1| < \varepsilon, \quad |y(t)-a_2| < \varepsilon, \quad |z(t)-a_3| < \varepsilon \tag{7}$$

або рівності (4).

Д о в е д е н н я   д о с т а т н о с т і. Нехай виконуються рівності (4). Тоді для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх значень $t$, які задовольняють нерівність

$$0 < |t - t_0| < \delta_1,$$

виконується нерівність

$$|x(t)-a_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}. \tag{8}$$

Аналогічно існують числа $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ і $\delta_3 = \delta_3(\varepsilon) > 0$ такі, що з нерівностей

$$0 < |t - t_0| < \delta_2, \quad 0 < |t - t_0| < \delta_3$$

випливають відповідно нерівності

$$|y(t)-a_2| < \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{3}}; \tag{9}$$

$$|z(t)-a_3| < \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{3}}. \tag{10}$$

Позначимо через $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Тоді при $0 < |t - t_0| < \delta$ одночасно виконуються нерівності (8) — (10). Тому при $0 < |t - t_0| < \delta$ маємо

$$\sqrt{\left(\left(x(t)-a_1\right)^2 + \left(y(t)-a_2\right)^2 + \left(z(t)-a_3\right)^2\right)} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{\varepsilon^2}{3}} = \varepsilon.$$

Отже, дістали нерівність (6).

Теорему доведено.

❑ **Приклад**

**1.** Знайти границю векторної функції

$$\vec{r}(t)=\frac{\sin 3t}{t}\vec{i}+\cos 2t\,\vec{j}+\frac{\operatorname{tg}4t}{t}\vec{k}$$

в точці $t=0$.

Розв'язання.

$$x(t)=\frac{\sin 3t}{t};\quad y(t)=\cos 2t;\quad z(t)=\frac{\operatorname{tg}4t}{t}.$$

Знайдемо границю цих скалярних функцій у точці $t=0$. Маємо

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{3\sin 3t}{3t}=3\cdot 1=3;$$

$$\lim_{t\to 0}\cos 2t=\cos\left(\lim_{t\to 0}2t\right)=\cos 0=1;$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg}4t}{t}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{4}{\cos 4t}\,\frac{\sin 4t}{4t}\right)=4\cdot 1=4.$$

Отже, за попередньою теоремою

$$\lim_{t\to 0}\vec{r}(t)=3\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}.$$

Сформулюємо властивості границь вектор-функції:

**1°.** Якщо існує $\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}$, то існує границя функції $\left|\vec{r}(t)\right|$, яка дорівнює $\lim_{t\to t_0}\left|\vec{r}(t)\right|=\left|\vec{a}\right|$.

**2°.** Якщо існують $\lim_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)$ і $\lim_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)$, то в цій точці існує границя вектор-функції $\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t)$ і

$$\lim_{t\to t_0}\left(\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t)\right)=\lim_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)+\lim_{t\to t_0}\vec{r}_2(t).$$

**3°.** Якщо існують $\lim_{t\to t_0}f(t)$ і $\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)$, де $f(t)$ — скалярна функція, то існує границя добутку $f(t)\vec{r}(t)$ і

$$\lim_{t\to t_0}\left(f(t)\vec{r}(t)\right)=\lim_{t\to t_0}f(t)\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t).$$



**4°.** Якщо в точці $t_0$ існують $\lim_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)$ і $\lim_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)$, то існують границі скалярного й векторного добутків векторів $\vec{r}_1,\vec{r}_2$ і

$$\lim_{t\to t_0}\left(\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)\right)=\left(\lim_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)\right)\left(\lim_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)\right),$$

$$\lim_{t\to t_0}\left[\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)\right]=\left[\lim_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)\lim_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)\right].$$

***Означення 3.*** Якщо вектор-функцію $\vec{r}=\vec{r}(t)$ визначено в околі точки $t_0\in(\alpha;\beta)$ і виконується рівність

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0), \tag{11}$$

то вектор-функцію $\vec{r}=\vec{r}(t)$ називають *неперервною в точці* $t_0$.

Якщо вектор-функція $\vec{r}=\vec{r}(t)$ неперервна в кожній точці інтервалу $(\alpha;\beta)$, то її називають *неперервною на цьому інтервалі.*

З теореми 1 як наслідок випливає така теорема.

**Теорема 2.** Для того щоб вектор-функція

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

була неперервною в точці $t_0$, необхідно й достатньо, щоб у цій точці були неперервними скалярні функції $x(t);\ y(t);\ z(t)$.

Означення неперервності вектор-функції в точці можна сформулювати за допомогою приросту вектор-функції. Візьмемо дві точки $t_0$, $t_0+\Delta t\in\in(\alpha;\beta)$. Тоді вектор-функцію

$$\Delta\vec{r}(t_0)=\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0) \tag{12}$$

називають *приростом вектор-функції* $\vec{r}=\vec{r}(t)$ у точці $t_0$.

***Означення 4.*** Вектор-функцію $\vec{r}=\vec{r}(t)$ називають *неперервною в точці* $t_0$, якщо

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\vec{r}(t_0)=\vec{0}, \tag{13}$$

де $\vec{0}$ — нульовий вектор.

Як і для скалярної функції, можна довести, що означення 3 і 4 еквівалентні.

***Означення 5.*** Нехай вектор-функцію $\vec{r}=\vec{r}(t)$ визначено в околі точки $t_0\in(\alpha;\beta)$.

Тоді якщо існує границя

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t},$$

то її називають *похідною вектор-функції* $\vec{r}=\vec{r}(t)$ в точці $t_0$ і позначають $\vec{r}'(t_0)$, тобто

$$\vec{r}'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}. \qquad (14)$$

**Теорема 3.** Для того щоб вектор-функція $\vec{r}=\vec{r}(t)$ у точці $t_0\in(\alpha;\beta)$ мала похідну, необхідно й достатньо, щоб у цій точці скалярні функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ мали похідні $x'(t_0)$, $y'(t_0)$, $z'(t_0)$.

Доведення необхідності. Нехай вектор-функція $\vec{r}=\vec{r}(t)$ у точці $t_0$ має похідну, тобто виконується співвідношення (14).

Згідно з теоремою 1, існують границі

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x(t_0)}{\Delta t},\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y(t_0)}{\Delta t},\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z(t_0)}{\Delta t},$$

де $\Delta x(t_0)$, $\Delta y(t_0)$, $\Delta z(t_0)$ — відповідно прирости функцій $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ у точці $t_0$, які є для скалярних функцій похідними в точці $t_0$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x(t_0)}{\Delta t}=x'(t_0);\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y(t_0)}{\Delta t}=y'(t_0);\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z(t_0)}{\Delta t}=z'(t_0). \qquad (15)$$

Доведення достатності. Нехай скалярні функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ у точці $t_0\in(\alpha;\beta)$ мають похідні, тобто виконуються співвідношення (15). Доведемо, що вектор-функція $\vec{r}=\vec{r}(t)$ має в точці $t_0\in(\alpha;\beta)$ похідну $\vec{r}'(t_0)$.

Запишемо відношення $\dfrac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$:

$$\frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}=\frac{\Delta x(t_0)}{\Delta t}\vec{i}+\frac{\Delta y(t_0)}{\Delta t}\vec{j}+\frac{\Delta z(t_0)}{\Delta t}\vec{k}.$$

Перейшовши до границі при $t\to t_0$ і використавши співвідношення (15), дістанемо

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}=x'(t_0)\vec{i}+y'(t_0)\vec{j}+z'(t_0)\vec{k}. \qquad (16)$$

Теорему доведено.

Якщо умови цієї теореми виконуються в будь-якій точці $t\in(\alpha;\beta)$, то в цій точці вектор-функція $\vec{r}=\vec{r}(t)$ має похідну

$$\vec{r}'(t)=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k}. \qquad (17)$$

❑ **Приклад**

**2.** Знайти похідну вектор-функції

$$\vec{r}(t)=e^{\sin^2 t}\vec{i}+\sqrt{1+t^2}\,\vec{j}+\operatorname{arctg} t^2\vec{k}.$$



Розв'язання. Використовуючи формулу (17), знаходимо

$$\vec{r}'(t)=\sin 2t e^{\sin^2 t}\vec{i}+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\vec{j}+\frac{2t}{1+t^4}\vec{k}.$$

Як і для скалярної функції, для вектор-функції справедливі такі правила диференціювання.

**1.** Якщо вектор-функція $\vec{r}=\vec{r}(t)=\text{const}$, то $\vec{r}'(t)=\vec{0}$, де $\vec{0}=0\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}+0\cdot\vec{k}$.

**2.** Якщо $\vec{r}(t)$ має похідну в точці $t\in(\alpha;\beta)$ і $c=\text{const}$, то $\left(c\vec{r}(t)\right)'=c\vec{r}'(t)$.

**3.** Якщо скалярна функція $f(t)$ і вектор-функція $\vec{r}(t)$ у точці $t\in(\alpha;\beta)$ мають похідні, то

$$\left(f(t)\vec{r}(t)\right)'=f'(t)\vec{r}(t)+f(t)\vec{r}'(t).$$

**4.** Якщо вектор-функція $\vec{r}_1(t),\vec{r}_2(t)$ у точці $t\in(\alpha;\beta)$ мають похідні, то

$$\left(\vec{r}_1(t)\pm\vec{r}_2(t)\right)'=\vec{r}'(t)\pm\vec{r}_2'(t);$$

$$\left(\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)\right)'=\left(\vec{r}_1'(t)\vec{r}_2(t)\right)+\left(\vec{r}_1(t)\vec{r}_1'(t)\right);$$

$$\left[\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)\right]'=\left[\vec{r}_1'(t)\vec{r}_2(t)\right]+\left[\vec{r}_1(t)\vec{r}_2'(t)\right].$$

**5.** Якщо вектор-функція $\vec{r}(t)$ є складеною, тобто $t=\varphi(\tau)$ і $\vec{r}(t)$ має похідну в точці $t=\varphi(\tau)$, а скалярна функція $\varphi(\tau)$ має похідну в точці $\tau$, то вектор-функція $\vec{r}(t)$ має похідну $\vec{r}_\tau'(\varphi(\tau))$ по $\tau$ і

$$\vec{r}_\tau'(\varphi(\tau))=\vec{r}_t'(\varphi(\tau))\varphi_\tau'(\tau).$$

Для напрямку похідної $\vec{r}'(t_0)$ можна дати таку геометричну інтерпретацію.

Нехай вектор-функцію $\vec{r}=\vec{r}(t)$ зображено графіком (годографом), як зображено на рис. 22. Припустимо, що вектор $\vec{r}(t_0)$ є $\overrightarrow{OM}$, а $\vec{r}(t_0+\Delta t)\in\overrightarrow{OM_1}$. Тоді $\Delta\vec{r}(t_0)=\overrightarrow{MM_1}$. Вектор $\dfrac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ напрямлений вздовж січної $MM_1$, яка проходить через точки $M$ і $M_1$ годографа. Якщо $\Delta t\to 0$, то точка $M_1$ по годографу наближатиметься до точки $M$, а січна $MM_1$ при цьому обертатиметься навколо точки $M$ і наближатиметься до свого граничного положення — дотичної, проведеної до годографа в точці $M$.

Вектор $\dfrac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$, напрямок якого збігається з напрямком січної $MM_1$,

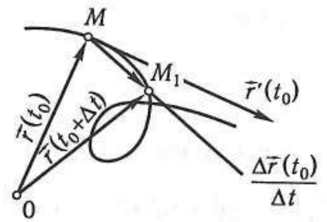


Рис. 22

при $\Delta t \to 0$ наближається до вектора $\vec{r}'(t_0)$.

Отже, напрямок вектора $\vec{r}'(t_0)$ збігається з напрямком дотичної до годографа в точці $M$.

Кінематичний зміст похідної $\vec{r}'(t_0)$ — це швидкість точки в момент часу $t = t_0$, яка рухається за законом $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

***Означення 6.*** Вектор-функцію $\vec{r} = \vec{r}(t)$ називають *диференційовною в точці* $t_0 \in (\alpha; \beta)$, якщо її приріст $\Delta\vec{r}(t_0)$ можна зобразити у вигляді

$$\Delta\vec{r}(t_0) = \vec{a}\Delta t + \vec{\alpha}\Delta t, \tag{18}$$

де вектор $\vec{a}$ не залежить від $\Delta t$, а вектор $\vec{\alpha}$ залежить від $\Delta t$, причому

$$\lim_{\Delta t \to 0} \vec{\alpha} = \vec{0}, \tag{19}$$

де $\vec{0}$ — нульовий вектор.

Як і для скалярної функції одного аргументу, можна довести таку теорему.

**Теорема 5.** Для того щоб вектор-функція була диференційовною в точці $t_0 \in (\alpha; \beta)$, необхідно й достатньо, щоб у цій точці вектор-функція мала похідну $\vec{r}'(t_0)$.

При виконанні умови цієї теореми можна довести, що

$$\vec{a} = \vec{r}'(t_0),$$

тобто

$$\Delta\vec{r}'(t_0) = \vec{r}'(t_0)\Delta t + \vec{\alpha}\Delta t. \tag{20}$$

Добуток $\vec{r}'(t_0)\Delta t$ називають *диференціалом вектор-функції* в точці $t_0 \in (\alpha; \beta)$ і позначають

$$\overrightarrow{dr}(t_0) = \vec{r}'(t_0)\Delta t. \tag{21}$$

Нехай

$$\Delta t = dt.$$

Тоді диференціал

$$\overrightarrow{dr}(t_0) = \vec{r}'(t_0)dt. \tag{22}$$

Звідси дістанемо таке позначення похідної:

$$\vec{r}'(t_0) = \frac{\overrightarrow{dr}(t_0)}{dt}.$$



Якщо розглядати довільну точку $t \in (\alpha; \beta)$, то

$$\vec{r}'(t) = \frac{\overrightarrow{dr}(t)}{dt},$$

або

$$\vec{r}' = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt}. \tag{23}$$

Отже, рівність (20) можна записати у вигляді

$$\Delta\vec{r}(t_0) = \overrightarrow{dr}(t_0) + \vec{\alpha}\Delta t. \tag{24}$$

Тут

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t_0) - \overrightarrow{dr}(t_0)}{\Delta t} = \vec{0},$$

тобто диференціал $\overrightarrow{dr}(t_0)$ становить головну частину приросту вектор-функції.

З рівності (23) дістанемо ще таку формулу для диференціала:

$$\overrightarrow{dr} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}. \tag{25}$$

Наприкінці зазначимо, що напрямок вектора $\overrightarrow{dr}(t_0)$, згідно з формулою (22), збігається з напрямком вектора $\vec{r}'(t_0)$, тобто він напрямлений вздовж дотичної до годографа вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$, проведеної в точці $M(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$.

❑ **Приклади**

**3.** Нехай довжина (модуль) $|\vec{r}(t)|$ вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$ є сталою для всіх значень $t \in (\alpha; \beta)$. Довести, що $\vec{r}'(t) \perp \vec{r}(t)$, з'ясувати геометричний зміст цього факту.

**Розв'язання.** Можна довести, що

$$|\vec{r}(t)|^2 = (\vec{r}(t)\vec{r}(t)) = \vec{r}^2(t).$$

За умовою задачі маємо таку тотожність:

$$\vec{r}^2(t) = \text{const}.$$

Диференціюючи цю тотожність як скалярний добуток $(\vec{r}(t)\vec{r}(t))$, знаходимо

$$(\vec{r}(t)\vec{r}'(t)) = 0.$$

Тоді $\vec{r}'(t) \perp \vec{r}(t)$.

Оскільки $|\vec{r}(t)| = \text{const}$, то годограф вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$ лежить на сфері з центром у точці $O(0, 0, 0)$ і з радіусом $R = |\vec{r}(t)|$. Вектор $\vec{r}'(t)$ напрямлений вздовж дотичної до годографа (у цьому випадку до сферичної лінії — лінії, що лежить на сфері).

Отже, дотична до сферичної лінії перпендикулярна до радіуса сфери, проведеного в точку дотику.

Справедливе й обернене твердження: якщо для всіх $t \in (\alpha;\beta)$ вектор $\vec{r}(t)$ перпендикулярний до вектора $\vec{r}'(t)$, тобто $\vec{r}(t) \perp \vec{r}'(t)$, то $|\vec{r}(t)| = \text{const}$.

Пропонуємо довести це твердження самостійно.

**4.** Знайти траєкторію рухомої точки, для якої радіус-вектор при кожному $t \in (\alpha;\beta)$ задовольняє умову

$$\frac{\vec{dr}}{dt} = [\vec{a}\vec{r}], \tag{26}$$

де $\vec{a}$ — сталий вектор.

Р о з в ' я з а н н я. Помножимо скалярно обидві частини рівності (26) на вектор $\vec{a}$. Тоді, згідно з властивістю мішаного добутку трьох векторів,

$$\left(\frac{\vec{dr}}{dt}\vec{a}\right) = 0$$

або

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}(t)\vec{a}) = 0.$$

Таким чином, $(\vec{r}(t)\vec{a}) = \text{const} = c$, або в координатній формі

$$a_1x + a_2y + a_3z - c = 0. \tag{27}$$

Дістали рівняння площини. Отже, координати рухомої точки задовольняють рівняння площини.

Помноживши скалярно обидві частини рівності (26) на вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$, знайдемо

$$\left(\frac{\vec{dr}}{dt}\vec{r}(t)\right) = 0,$$

тобто

$$\vec{r}'(t) \perp \vec{r}(t).$$

Отже, рухома точка знаходиться на сфері радіуса $R = |\vec{r}(t)| = \text{const}$. Перерізом сфери з площиною (27) є коло.

Звідси шукана траєкторія є колом, площина якого перпендикулярна до вектора $\vec{a}$.

## 2.11 ДОТИЧНА ПЛОЩИНА І НОРМАЛЬ ДО ПОВЕРХНІ. ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ДИФЕРЕНЦІАЛА ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Дотепер було розглянуто вектор-функцію одного скалярного аргументу $t$. Розглянемо вектор-функцію двох скалярних аргументів $u$ і $v$, тобто

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \tag{1}$$



де

$$\vec{r} = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}.$$

Припустимо, що функції

$$x = x(u, v); \quad y = y(u, v); \quad z = z(u, v) \tag{2}$$

неперервні й мають неперервні частинні похідні по $u$ і по $v$ у деякій області $G$.

Далі покажемо, що вектор-функцію (1) або систему рівнянь (2) можна інтерпретувати як деяку поверхню.

***Означення 1.*** Сталий вектор $\vec{a}$ називають *границею вектор-функції* $\vec{r}(u, v)$ у точці $(u_0, v_0)$ і записують

$$\lim_{\substack{u \to u_0 \\ v \to v_0}} \vec{r}(u, v) = \vec{a},$$

якщо

$$\lim_{\substack{u \to u_0 \\ v \to v_0}} |\vec{r}(u, v) - \vec{a}| = 0.$$

Як і для вектор-функції одного скалярного аргументу, можна довести, що для існування границі необхідно й достатньо, щоб у точці $(u_0, v_0)$ існували границі скалярних функцій (2).

***Означення 2.*** Якщо

$$\lim_{\substack{u \to u_0 \\ v \to v_0}} \vec{r}(u, v) = \vec{r}(u_0, v_0),$$

то вектор-функцію $\vec{r}(u, v)$ у точці $(u_0, v_0)$ називають *неперервною*.

Нехай точки $(u_0, v_0), (u_0 + \Delta u, v_0), (u_0, v_0 + \Delta v)$ належать області $G$. Тоді вектор

$$\Delta_u \vec{r} = \vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \vec{r}(u_0, v_0)$$

називають *частинним приростом по $u$* вектор-функції $\vec{r}(u, v)$ у точці $(u_0, v_0)$.

Аналогічно вектор

$$\Delta_v \vec{r} = \vec{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0)$$

називають *частинним приростом по $v$* вектор-функції

$$\vec{r}(u, v) \text{ у точці } (u_0, v_0).$$

***Означення 3.*** Границю

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta_u\vec{r}}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\vec{r}(u_0+\Delta u, v_0)-\vec{r}(u_0,v_0)}{\Delta u},$$

якщо вона існує, називають *частинною похідною по $u$* вектор-функції $\vec{r}(u,v)$ у точці $(u_0,v_0)$ і позначають $\vec{r}_u' =(u_0,v_0)$.

***Означення 4.*** Границю

$$\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta_v\vec{r}}{\Delta v}=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\vec{r}(u_0, v_0+\Delta v)-\vec{r}(u_0,v_0)}{\Delta v},$$

якщо вона існує, називають *частинною похідною по $v$* вектор-функції $\vec{r}(u,v)$ у точці $(u_0,v_0)$ і позначають $\vec{r}_v'(u,v)$.

Якщо скалярні функції (2) у цій точці мають частинні похідні, то й вектор-функція $\vec{r}(u,v)$ має в ній частинні похідні, які дорівнюють

$$\vec{r}_u'(u,v)=x_u'(u,v)\vec{i}+y_u'(u,v)\vec{j}+z_u'(u,v)\vec{k};$$

$$\vec{r}_v'(u,v)=x_v'(u,v)\vec{i}+y_v'(u,v)\vec{j}+z_v'(u,v)\vec{k}.$$

Припустимо, що $u$ і $v$, в свою чергу, є функціями деякого аргументу $t$, тобто

$$u=u(t);\quad v=v(t),$$

де

$$t\in(\alpha;\beta).$$

Тоді функцію $\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t))$ називають *складеною вектор-функцією скалярного аргументу $t$.*

Можна, як і для вектор-функції однієї змінної, довести, що коли вектор-функція $\vec{r}(u,v)$ має в точці $(u,v)$ неперервні частинні похідні, а функції $u(t)$, $v(t)$ у точці $t$ мають похідні, то складена вектор-функція $\vec{r}(u(t),v(t))$ у точці $t$ має похідну

$$\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}=\vec{r}_u'(u,v)\frac{du}{dt}+\vec{r}_v'(u,v)\frac{dv}{dt}. \tag{3}$$

Розглянемо параметричне задання поверхні.

Дотепер вивчали поверхню, задану рівнянням

$$z=f(x,y). \tag{4}$$



Ширший клас поверхонь задається рівнянням

$$F(x,y,z)=0, \tag{5}$$

де $F(x,y,z)$ — функція трьох змінних, задана в деякій області $G\subset R_3$.

Наприклад, рівняння $x^2+y^2+z^2-R^2=0$ задає сферу з центром у початку координат і радіусом $R$; рівняння $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ задає тривісний еліпсоїд обертання.

Зазначимо, що рівняння (4) також можна записати у вигляді рівняння (5), поклавши

$$F(x,y,z)=f(x,y)-z.$$

Проте задання поверхні рівнянням (4) чи (5) незручне тим, що ці рівняння пов'язані з вибором системи координат. Виявляється, що можна задати рівняння поверхні, яке не пов'язане з вибором тієї чи іншої системи координат. Таким рівнянням і є параметричне рівняння. Щоб вивести його, дамо кілька означень.

***Означення 5.*** Нехай $D$ — деяка область на площині. Називають її *однозв'язною*, якщо вона задовольняє умову: яка б не була замкнена крива (контур) $L$, що лежить всередині цієї області, обмежена цією кривою частина площини цілком знаходиться в області $D$.

Прикладами однозв'язних областей є прямокутник, трикутник, круг, трапеція і т. д.

Якщо область не є однозв'язною, то її називають *багатозв'язною*.

Так, кільце, тобто частина площини, обмежена двома концентричними колами з радіусами $R_2>R_1$, є прикладом багатозв'язної області.

Справді, область, обмежена контуром $L$ (рис. 23), не є частиною кільця.

***Означення 6.*** Множину точок тривимірного простору називають *простою поверхнею*, якщо вона є взаємно однозначним і в обидва боки неперервним образом якої-небудь замкненої обмеженої однозв'язної області.

***Означення 7.*** *Поверхнею* називають об'єднання будь-якого скінченного числа простих поверхонь.

При цьому поверхня може мати й точки самоперетину, як це зображено на рис. 24.

Так, якщо в рівнянні (4) права частина є функцією, неперервною в обмеженій замкненій і однозв'язній області, то це рівняння задає просту поверхню.

Розглянемо на поверхні деяку криву, задану параметрично, причому за параметр взято величину $t\in(\alpha,\beta)$. Кожному значенню $t$ відповідає на кривій, а отже, і на поверхні деяка точка з координатами $u$ і $v$. Тоді координати $u$, $v$ є функціями $t$, тобто

$$u=u(t),\quad v=v(t). \tag{6}$$

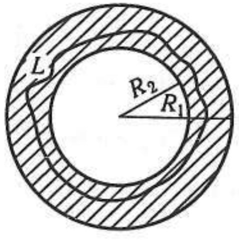


Рис. 23

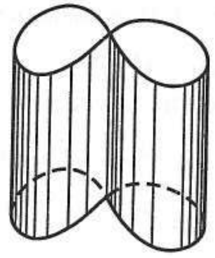

Рис. 24

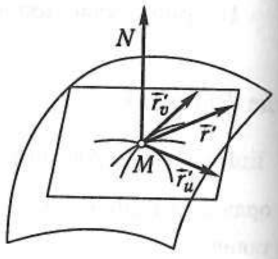


Рис. 25

Рівняння (6) називають *рівняннями кривої на поверхні*.

Підставивши значення $u$ і $v$ з рівняння (6) у рівняння поверхні (1), дістанемо векторне рівняння цієї кривої

$$\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t)).$$

Припустимо, що вектор-функція $\vec{r}(u,v)$ має неперервні частинні похідні по $u$ і по $v$, а функції $u(t)$, $v(t)$ мають похідні в точці $t\in(\alpha,\beta)$. Тоді складена вектор-функція $\vec{r}(u(t),v(t))$ має похідну в точці $t$, яку визначають за формулою (3).

Напрямок вектора $\dfrac{\overline{dr}}{dt}$, як випливає з п. 2.10, збігається з напрямком дотичної до кривої (6), проведеної в точці з координатами $u$ і $v$.

Розглянемо всі можливі криві на поверхні, що проходять через точку $(u,v)$ (рис. 25), в тому числі й координатні лінії $u(v=\text{const})$ і лінії $v(u=\text{const})$.

Надалі, як правило, матимемо справу з поверхнями, що є об'єднанням скінченного числа простих поверхонь, рівнянням яких є (4) і функція $f(x,y)$ є неперервною в деякій обмеженій замкненій і однозв'язній області.

Нехай на деякій поверхні $P$ задано однопараметричну сім'ю ліній. Цю сім'ю ліній називають *правильною*, якщо через кожну точку поверхні проходить одна і тільки одна лінія з цієї сім'ї.

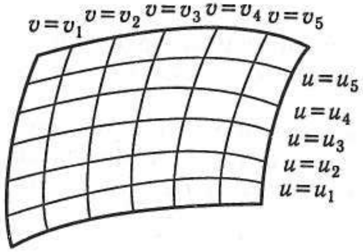


Рис. 26

Якщо на поверхні задано дві правильні сім'ї ліній і при цьому кожна лінія першої сім'ї перетинається (без дотику) з кожною лінією другої сім'ї не більш як в одній точці, то кажуть, що на поверхні задано *координатну сітку* (рис. 26).

Отже, нехай лінії першої сім'ї, що утворюють координатну сітку, визначають деяким параметром $u$, а лінії другої сім'ї — параметром $v$. Оскільки через кожну точку поверхні проходить тільки одна лінія з координатної сітки, то положення точки на поверхні цілком визначається парою дійсних чисел $(u_0,v_0)$ що є відповідними значеннями параметрів $u$ і $v$.



Тоді параметри $u$ і $v$, які визначають лінії, що утворюють координатну сітку на поверхні, називають ще *координатами на цій поверхні*.

Наприклад, нехай поверхню задано рівнянням (4), де $f(x,y)$ — неперервна функція в деякій замкненій обмеженій і однозв'язній області $D$. Тоді цю поверхню можна однозначно спроектувати на область $D$. Лінії, які при цьому проектуються в пряму $x=\text{const}$, $y=\text{const}$ (координатні лінії на площині), утворюють на поверхні координатну сітку.

З викладеного випливає, що кожна точка на поверхні визначається значеннями параметрів $u$ і $v$. Проте цю точку можна задати і її декартовими координатами $x$, $y$, $z$, які є функціями координат на поверхні

$$x=x(u,v);\quad y=y(u,v);\quad z=z(u,v). \tag{7}$$

Ці скалярні рівняння іноді замінюють одним векторним рівнянням

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v)=\vec{i}x(u,v)+\vec{j}y(u,v)+\vec{k}z(u,v). \tag{8}$$

Рівняння (7) називають *параметричними рівняннями поверхні*, а рівняння (8) — *векторним рівнянням поверхні*. З рівняння (8) випливають рівняння (7) і навпаки. Отже, вектор-функцію

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$$

можна інтерпретувати як деяку поверхню.

Зауважимо, що рівняння (4) розглядають як окремий випадок задання поверхні, поклавши

$$x=u;\quad y=v;\quad z=f(u,v),$$

або у векторній формі

$$\vec{r}=\vec{i}u+\vec{j}v+\vec{k}f(u,v).$$

Припустимо, що рівняння координатних ліній є $u=u(t)$, $v=v(t)$. Тоді будь-який вектор $\dfrac{\overline{dr}}{dt}$ напрямлений вздовж дотичної до розглядуваної кривої, що проходить через точку $M(u,v)$. Вектори $\vec{r}_u'(u,v)$, $\vec{r}_v'(u,v)$ напрямлені вздовж дотичних до координатних ліній. Проте, згідно з (3), вектор $\dfrac{\overline{dr}}{dt}$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{r}_u'(u,v)$, $\vec{r}_v'(u,v)$. Тому всі вектори $\dfrac{\overline{dr}}{dt}$ лежать у тій самій площині, що визначається векторами $\vec{r}_u'(u,v)$, $\vec{r}_v'(u,v)$.

***Означення 8.*** Площину, що визначається векторами $\vec{r}_u'(u,v)$, $\vec{r}_v'(u,v)$, називають *дотичною площиною до поверхні* $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ *у точці* $M(u,v)$.

Виведемо рівняння дотичної площини. Для цього скористаємося властивістю векторного добутку

$$\vec{N}=\left[\vec{r}_u'\vec{r}_v'\right].$$

Оскільки вектори $\vec{r}_u'$ і $\vec{r}_v'$ лежать у дотичній площині, то вектор $\vec{N}$ перпендикулярний до дотичної площини. Отже, скалярний добуток

$$\left((\vec{\rho}-\vec{r})\vec{N}\right)=0, \tag{9}$$

де $\vec{r}$ — радіус-вектор точки дотику; $\vec{\rho}$ — радіус-вектор біжучої точки дотичної площини.

Нехай поверхню задано рівнянням

$$z=f(x,y).$$

Тоді

$$\vec{r}=\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z,$$

$$\vec{N}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & f_x'\\ 0 & 1 & f_y'\end{vmatrix}=\vec{i}f_x'-\vec{j}f_y'+\vec{k}.$$

Позначивши координати біжучої точки дотичної площини через $X$, $Y$, $Z$, дістанемо

$$\vec{\rho}-\vec{r}=\vec{i}(X-x)+\vec{j}(Y-y)+\vec{k}(Z-z).$$

Підставивши значення векторів $\vec{N}$ і $\vec{\rho}-\vec{r}$ у (9), матимемо рівняння дотичної площини:

$$f_x'(x,y)(X-x)+f_y'(x,y)(Y-y)=Z-z. \tag{10}$$

***Означення 9.*** Пряму, що проходить через точку $M$ поверхні перпендикулярно до дотичної площини, проведеної в цій точці, називають *нормаллю до поверхні в точці* $M$.

Використовуючи умову перпендикулярності прямої й площини, можна записати рівняння нормалі до поверхні, заданої рівнянням $z=f(x,y)$, а саме:

$$\frac{X-x}{f_x'(x,y)}=\frac{Y-y}{f_y'(x,y)}=\frac{Z-z}{-1}. \tag{11}$$



При цьому напрямні косинуси визначають за формулами

$$\cos\left(\vec{N},x\right)=\frac{-f_x'(x,y)}{\sqrt{1+\left[f_x'(x,y)\right]^2+\left[f_y'(x,y)\right]^2}};$$

$$\cos\left(\vec{N},y\right)=\frac{-f_y'(x,y)}{\sqrt{1+\left[f_x'(x,y)\right]^2+\left[f_y'(x,y)\right]^2}};$$

$$\cos\left(\vec{N},z\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\left[f_x'(x,y)\right]^2+\left[f_y'(x,y)\right]^2}}. \tag{12}$$

Маючи рівняння дотичної площини, можна з'ясувати геометричний зміст диференціала функції двох змінних.

Візьмемо на дотичній площині точку з координатами $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$. Координати цієї точки мають задовольняти рівняння (10). Підставивши в це рівняння $X=x+\Delta x$, $Y=y+\Delta y$, $Z=z+\Delta z$, дістанемо

$$f_x'(x,y)\Delta x+f_y'(x,y)\Delta y=\Delta z.$$

У лівій частині останньої рівності маємо диференціал функції $z=f(x,y)$ у точці $(x,y)$. Тоді

$$dz=\Delta z.$$

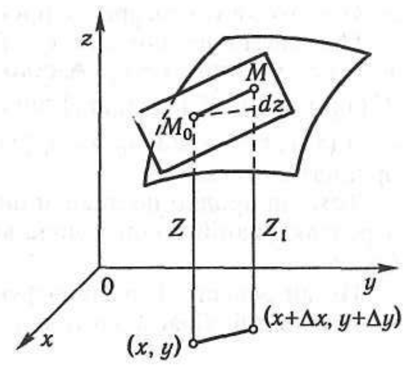


**Рис. 27**

Ця рівність з'ясовує геометричний зміст диференціала, а саме диференціал функції $z=f(x,y)$ у точці $(x,y)$ є приростом аплікати точки дотичної площини до цієї поверхні в точці $M_0$ з координатами $x$, $y$, $f(x,y)$, якщо з цієї точки дотику перейти до точки $M$ дотичної площини з координатами $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ (рис. 27).

❑ **Приклад**

Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні

$$z=\sin\frac{x}{y}$$

в точці $(\pi;1;0)$.

Р о з в ' я з а н н я. Скористаємось рівняннями (10) і (11). Для цього знайдемо

$$f_x'(x,y)=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y};$$

$$f'_x(\pi,1)=\cos\pi=-1;$$

$$f'_y(x,y)=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y};$$

$$f'_y(\pi,1)=-\pi\cos\pi=\pi.$$

Шукані рівняння мають відповідно вигляд

$$x+\pi y-z=0;\ \frac{x-\pi}{-1}=\frac{y-1}{\pi}=\frac{z-0}{-1}.$$

## 2.12 ПОХІДНА ЗА НАПРЯМКОМ. ГРАДІЄНТ. ОПЕРАТОР НАБЛА

Розглянемо знову скалярне поле. Однією з найважливіших характеристик поля є похідна за напрямком. З'ясуємо це поняття.

Нехай поле задано функцією

$$u=f(M),$$

де $M$ — точка тривимірного простору, тобто вона має координати $x$, $y$, $z$.

Нагадаємо, що похідна $y'=f'(x_0)$ виражає швидкість зміни функції $y=f(x)$ у точці $x=x_0$. Аналогічно частинні похідні $f'_x(x_0,y_0,z_0)$, $f'_y(x_0,y_0,z_0)$, $f'_z(x_0,y_0,z_0)$ виражають швидкість зміни функції (поля) $u=f(x,y,z)$ у точці $(x_0,y_0,z_0)$ відповідно в напрямку, паралельному координатним осям.

Тому природно поставити питання про швидкість зміни цієї функції в розглядуваній точці в довільному напрямку, що виходить з точки $(x_0,y_0,z_0)$.

Нехай областю існування функції є зв'язна відкрита область $\Omega$. Розглянемо в цій області дві точки, одна з яких фіксована $M_0(x_0,y_0,z_0)$, а інша — довільна $M(x,y,z)$. Візьмемо також пряму $\lambda$, що проходить через ці точки. Поставимо питання про швидкість зміни функції $u=f(M)$ при переході від точки $M_0$ до точки $M$ у напрямку, що задається променем $\lambda$ (рис. 28).

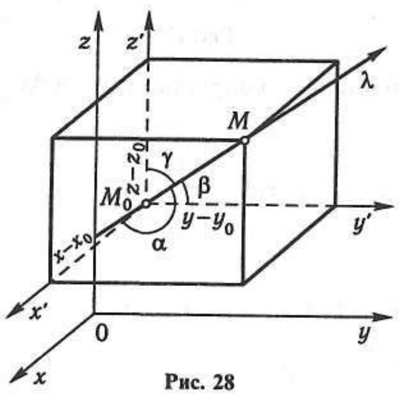

Рис. 28

Нехай промінь $\lambda$ утворює з координатними осями відповідно кути $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Позначимо через $|\overline{M_0M}|$ довжину відрізка $\overline{M_0M}$. Якщо напрямок вектора $\overline{M_0M}$ збігається з напрямком променя $\lambda$, то $\overline{M_0M}$ братимемо зі знаком



«плюс», у протилежному випадку — зі знаком «мінус». Нехай точка $M$ наближається вздовж променя $\lambda$ до точки $M_0$.

***Означення.*** Границю

$$\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{|\overline{MM_0}|},$$

якщо вона існує, називають *похідною функції* (поля) $u=f(M)$ *у точці* $M_0(x_0,y_0,z_0)$ *за напрямком* $\lambda$ і позначають

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial\lambda}=\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{|\overline{MM_0}|}. \qquad (1)$$

**Теорема.** Якщо функція $u=f(M)$ у розглядуваній області $\Omega$ має неперервні частинні похідні, то в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ існує похідна цієї функції за напрямком $\lambda$ і

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial\lambda}=f'_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+$$

$$+f'_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+f'_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma. \qquad (2)$$

Доведення. Позначимо довжину відрізка $|\overline{M_0M}|=t$. Тоді матимемо рівності

$$x-x_0=t\cos\alpha;\quad y-y_0=t\cos\beta;\quad z-z_0=t\cos\gamma$$

або

$$x=x_0+t\cos\alpha;\quad y=y_0+t\cos\beta;\quad z=z_0+t\cos\gamma. \qquad (3)$$

Підставивши значення $x$, $y$, $z$ у функцію $u=f(x,y,z)$, дістанемо складену функцію $t$:

$$u=f(x_0+t\cos\alpha,\ \ y_0+t\cos\beta,\ \ z_0+t\cos\gamma)=F(t). \qquad (4)$$

За умовою теореми функція $u=f(x,y,z)$ в області $\Omega$ має неперервні частинні похідні, а функції $x$, $y$, $z$, як це випливає з рівностей (3), мають похідні за $t$, причому

$$\frac{dx}{dt}=\cos\alpha;\quad \frac{dy}{dt}=\cos\beta;\quad \frac{dz}{dt}=\cos\gamma. \qquad (5)$$

Отже, можна використати формулу для похідної складеної функції

$$F'(t)=f'_x(x_0+t\cos\alpha,\ \ y_0+t\cos\beta,\ \ z_0+t\cos\gamma)x'(t)+$$

$$+f'_y(x_0+t\cos\alpha,\ \ y_0+t\cos\beta,\ \ z_0+t\cos\gamma)y'(t)+$$

$$+f'_z(x_0+t\cos\alpha,\ \ y_0+t\cos\beta,\ \ z_0+t\cos\gamma)z'(t). \qquad (6)$$

Таким чином,

$$\frac{f(M)-f(M_0)}{\left|\overrightarrow{MM_0}\right|}=\frac{F(t)-F(0)}{t-0}, \qquad (7)$$

де права частина є відношенням приросту функції $F(t)$ у точці $t=0$ до приросту аргументу.

Якщо $t\to 0$, то, згідно з формулою (6), існує границя цього відношення, яка дорівнює похідній $F'(0)$, тобто

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(t)-F(0)}{t-0}=F'(0). \qquad (8)$$

Якщо точка $M\to M_0$ вздовж променя $\lambda$, то $t\to 0$. Тому зі співвідношень (7) і (8) знаходимо

$$\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{\left|\overrightarrow{MM_0}\right|}=F'(0)$$

або

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial\lambda}=F'(0). \qquad (9)$$

Підставивши у формулу (6) $t=0$ і скориставшись рівностями (5), дістанемо

$$F'(0)=f'_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+f'_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma. \qquad (10)$$

Зі співвідношень (9) і (10) випливає співвідношення (2).

Теорему доведено.

Зазначимо, що частинні похідні $f'_x(x_0,y_0,z_0)$, $f'_y(x_0,y_0,z_0)$, $f'_z(x_0,y_0,z_0)$ можна також розглядати як похідну функції $f(M)$ за напрямком. Так, якщо напрямок променя паралельний осі $Ox$, тобто $\alpha=0$, $\beta=\gamma=\frac{\pi}{2}$, то за формулою (2) маємо

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial\lambda}=f'_x(x_0,y_0,z_0).$$

Отже, похідна функції за напрямком є узагальненням поняття про частинну похідну.

Як уже зазначалося, похідна за напрямком характеризує швидкість зміни функції $u=f(M)$, коли точка починає рухатися з точки $M_0$ вздовж променя $\lambda$. Якщо $\frac{\partial f(M_0)}{\partial\lambda}$ — додатне число, то функція $u=f(M)$ при виході з точки $M_0$ зростає і що більше, то більше це число. Якщо $\frac{\partial f(M_0)}{\partial\lambda}$ — від'ємне число, то функція $u=f(M)$ спадає, і що швидше спадає, то більше число $\left|\frac{\partial f(M_0)}{\partial\lambda}\right|$.



Припустимо, що $f'_x, f'_y, f'_z$ у точці $M_0$ одночасно не дорівнюють нулю. Тоді з'ясуємо, за яким напрямком функція $u=f(M)$ у точці $M_0$ зростатиме найшвидше. Введемо такі вектори:

$$\overline{N}=f'_x(x_0,y_0,z_0)\bar{i}+f'_y(x_0,y_0,z_0)\bar{j}+f'_z(x_0,y_0,z_0)\bar{k}; \qquad (11)$$

$$\bar{l}=\cos\alpha\bar{i}+\cos\beta\bar{j}+\cos\gamma\bar{k}. \qquad (12)$$

Вектор $\overline{N}$ називають *градієнтом функції* $u=f(M)$ у точці $M_0$ і позначають $\operatorname{grad} f(M_0)=\overline{N}$.

Отже, напрямок вектора $\bar{l}$ збігається з напрямком променя $\lambda$, а його довжина

$$|\bar{l}|=\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}=1,$$

тобто $\bar{l}$ є одиничним вектором.

Знайдемо скалярний добуток векторів (11) і (12):

$$\left(\operatorname{grad} f(M_0)\bar{l}\right)=f'_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+f'_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma.$$

Права частина цієї рівності дорівнює $\frac{\partial f(M_0)}{\partial\lambda}$. Отже,

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial\lambda}=\left(\operatorname{grad} f(M_0)\bar{l}\right)=\left|\operatorname{grad} f(M_0)\right|\cos\widehat{\operatorname{grad} f\left(\widehat{M_0}\right)\bar{l}}. \qquad (13)$$

Звідси число $\frac{\partial f(M_0)}{\partial\lambda}$ буде найбільшим і набуватиме значення

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial\lambda}=\left|\operatorname{grad} f(M_0)\right|$$

тоді, коли

$$\cos\widehat{\operatorname{grad} f\left(\widehat{M_0}\right)\bar{l}}=1,$$

тобто коли напрямок променя $\lambda$ збігатиметься з напрямком градієнта функції $f(M_0)$ в точці $M_0$.

Отже, градієнт функції $u=f(M)$ в точці $M_0$ є вектором, напрямок якого вказує на найшвидше зростання функції у цій точці, а його довжина

$$\left|\operatorname{grad} f(M_0)\right|=\sqrt{\left(f'_x(x_0,y_0,z_0)\right)^2+\left(f'_y(x_0,y_0,z_0)\right)^2+\left(f'_z(x_0,y_0,z_0)\right)^2} \qquad (14)$$

визначає найбільше значення відповідної похідної за напрямком.

❑ **Приклади**

**1.** Знайти похідну функції $z=x^2+y^2$ в точці $M(1,1)$ за напрямком $\lambda$, який утворює кут $\alpha=60°$ із додатним напрямком осі $Ox$.

Р о з в ' я з а н н я. Поле задано функцією двох змінних на площині $xOy$. Тому формула похідної за напрямком набирає вигляду

$$\frac{\partial_f(1,1)}{\partial\lambda}=f'_x(1,1)\cos\alpha+f'_y(1,1)\cos\beta. \qquad (15)$$

Знаходимо

$$f'_x(x,y)=2x;\quad f'_x(1,1)=2;$$

$$f'_y(x,y)=2y;\quad f'_y(1,1)=2;$$

$$\cos\alpha=\cos 60^\circ=\frac{1}{2};\quad \cos\beta=\cos(90^\circ-60^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Підставивши знайдені значення у формулу (15), дістанемо

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial\lambda}=2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}.$$

**2.** Знайти похідну функції $u=\ln(x+y+z+1)$ в точці $M(0,0,0)$ за напрямком, що утворює однакові кути з координатними осями.

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо частинні похідні

$$f'_x(x,y,z)=\frac{1}{x+y+z+1},\quad f'_x(0,0,0)=1;$$

$$f'_y(x,y,z)=\frac{1}{x+y+z+1},\quad f'_y(0,0,0)=1;$$

$$f'_z(x,y,z)=\frac{1}{x+y+z+1},\quad f'_z(0,0,0)=1.$$

Тоді

$$\frac{\partial f(0,0,0)}{\partial\lambda}=f'_x(0,0,0)\cos\alpha+f'_y(0,0,0)\cos\beta+f'_z(0,0,0)\cos\gamma=$$

$$=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma.$$

Оскільки за умовою задачі $\alpha=\beta=\gamma$, то

$$\frac{\partial f(0,0,0)}{\partial\lambda}=3\cos\alpha.$$

Як відомо з аналітичної геометрії,

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

У цьому випадку $3\cos^2\alpha=1$, або $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$.
Отже,

$$\frac{\partial f(0,0,0)}{\partial\lambda}=3\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

**3.** Знайти напрямок найбільшої зміни функції $u=x\sin z-y\cos z$ у початку координат.

Р о з в ' я з а н н я. Як уже зазначалося, напрямок найбільшої (найшвидшої) зміни функції в точці збігається з напрямком градієнта цієї функції. Отже, за формулою (11)



дістанемо градієнт. Для цього знайдемо частинні похідні функції

$$f'_x(x,y,z)=\sin z,\quad f'_x(0,0,0)=\sin 0=0;$$

$$f'_y(x,y,z)=-\cos z,\quad f'_y(0,0,0)=-\cos 0=-1;$$

$$f'_z(x,y,z)=x\cos z+y\sin z,\quad f'_z(0,0,0)=0.$$

Градієнт заданої функції в точці $(0,0,0)$ дорівнює

$$\overline{N}=\operatorname{grad} f(0,0,0)=0\cdot\vec{i}-1\cdot\vec{j}+0\cdot\vec{k}=-\vec{j}.$$

Отже, напрямок найбільшої зміни функції в початку координат збігається з від'ємним напрямком осі $Oy$.

Формула (11) для градієнта функції стосується прямокутної декартової системи координат. Проте на практиці часто потрібно обчислювати градієнт в інших системах координат, зокрема в циліндричній і сферичній системах.

Виведемо формулу градієнта в циліндричних координатах.

Відомо, що в циліндричній системі координат через кожну точку $M(\rho,\varphi,z)$, яка не лежить на осі $Oz$, проходять такі координатні лінії: промінь, перпендикулярний до осі $Oz$ і виходить з цієї точки ($\rho$-лінія); коло, що лежить в площині, перпендикулярній до осі $Oz$, і з центром на цій осі ($\varphi$-лінія); пряма, паралельна осі $Oz$ ($z$-лінія) (рис. 29).

Позначимо одиничні вектори, дотичні до координатних ліній у циліндричних координатах, відповідно через $\overrightarrow{e_\rho}$, $\overrightarrow{e_\varphi}$, $\overrightarrow{e_z}$.

Скориставшись відомими формулами з аналітичної геометрії, матимемо

$$\begin{aligned}\overline{e_\rho}&=\cos\varphi\vec{i}+\sin\varphi\vec{j};\\ \overrightarrow{e_\varphi}&=-\sin\varphi\vec{i}+\cos\varphi\vec{j};\\ \overrightarrow{e_z}&=\vec{k}.\end{aligned} \qquad (16)$$

Підставимо у функцію

$$u=f(x,y,z)$$

значення декартових координат, виражених через циліндричні координати:

$$x=\rho\cos\varphi;\quad y=\rho\sin\varphi;\quad z=z. \qquad (17)$$

Дістанемо

$$u=f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z).$$

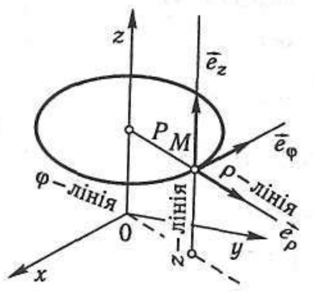


Рис. 29

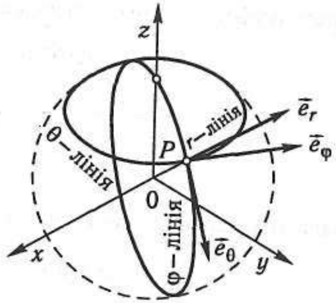


Рис. 30

Отже, функція $u$ складена. Вона залежить від $\rho$, $\varphi$, $z$, а $\rho$ і $\varphi$, у свою чергу, залежать від $x$ і $y$. Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{18}$$

Із перших двох рівностей (17) після диференціювання по $x$ і по $y$ маємо

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \rho}{\partial x}\cos\varphi-\rho\sin\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=1,\\ \dfrac{\partial \rho}{\partial x}\sin\varphi-\rho\cos\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=0;\end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \rho}{\partial y}\cos\varphi-\rho\sin\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}=0,\\ \dfrac{\partial \rho}{\partial y}\sin\varphi+\rho\cos\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}=1.\end{cases} \tag{20}$$

Звідси

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}=\cos\varphi;\ \frac{\partial \rho}{\partial y}=\sin\varphi;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\sin\varphi;\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\cos\varphi. \tag{21}$$

Отже, за формулами (18) і (21) дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{1}{\rho}\sin\varphi;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{1}{\rho}\cos\varphi.$$



Підставивши значення похідних $\frac{\partial u}{\partial x}$ і $\frac{\partial u}{\partial y}$ у формулу для градієнта і скориставшись рівностями (16), матимемо формулу для градієнта в циліндричній системі координат

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial \rho}\overrightarrow{e_\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi}+\frac{\partial u}{\partial z}\overrightarrow{e_z}. \tag{22}$$

Аналогічно можна вивести формулу для градієнта у сферичній системі координат:

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial r}\overrightarrow{e_r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi}, \tag{23}$$

де $\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi}$ взаємно перпендикулярні одиничні вектори, що виходять з розглядуваної точки і дотикаються відповідно до координатних ліній (рис. 30).

Пропонуємо формулу (23) вивести самостійно.

Розглянемо ще одне поняття, а саме поняття про *оператор Гамільтона*[1]. Запишемо градієнт функції $u=f(x,y,z)$

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{dy}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

або

$$\operatorname{grad} u=\vec{\nabla}u,$$

де $\vec{\nabla}$ трактується як символічний вектор

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}. \tag{24}$$

Символічний вектор (24) за Гамільтоном називають *оператором набла*. Цей оператор має властивість, аналогічну операції диференціювання $\frac{d}{dx}$. Відміна полягає тільки в тому, що операція $\frac{d}{dx}$ скалярну функцію $y=f(x)$ переводить у скалярну функцію $y'=f'(x)$, тоді як оператор $\vec{\nabla}$ скалярну функцію $u=f(x,y,z)$ переводить у векторну функцію.

Використовуючи правила диференціювання функцій, можна вивести такі властивості оператора набла:

$$\vec{\nabla}(c_1u_1+c_2u_2)=c_1\vec{\nabla}u_1+c_2\vec{\nabla}u_2; \tag{25}$$

$$\vec{\nabla}(uv)=v\vec{\nabla}u+u\vec{\nabla}v;$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{v^2}(v\vec{\nabla}u-u\vec{\nabla}v);$$

$$\vec{\nabla}F(u)=F'(u)\vec{\nabla}u,$$

де $c_1$, $c_2$ — сталі, а функції $u_1$, $u_2$, $u$, $v$, $F$ мають частинні похідні у відповідних точках.

[1] *Гамільтон У. Р.* (1805—1865) — англійський математик і механік.

Доведемо друге співвідношення

$$\vec\nabla(u,v)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec i+\frac{\partial}{\partial y}\vec j+\frac{\partial}{\partial z}\vec k\right)(uv)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(uv)\vec i+\frac{\partial}{\partial y}(uv)\vec j+\frac{\partial}{\partial z}(uv)\vec k=$$

$$=\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\vec i+u\left(u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec j+$$

$$+\left(u\frac{\partial v}{\partial z}+v\frac{\partial u}{\partial z}\right)\vec k=u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\vec i+\frac{\partial v}{\partial y}\vec j+\frac{\partial v}{\partial z}\vec k\right)+$$

$$+v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec i+\frac{\partial u}{\partial y}\vec j+\frac{\partial u}{\partial z}\vec k\right)=u\vec\nabla v+v\vec\nabla u.$$

❑ **Приклад**

**4.** Знайти похідну $\vec\nabla$ функції $u=r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Розв'язання. Знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{r};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{r};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{r}.$$

Тоді

$$\vec\nabla u=\frac{x}{r}\vec i+\frac{y}{r}\vec j+\frac{z}{r}\vec k=\frac{\vec r}{r},$$

де $\vec r=x\vec i+y\vec j+z\vec k$ — радіус-вектор точки $M(x,y,z)$.

Проте $\frac{\vec r}{r}=\vec{r_0}$ — одиничний вектор. Тому

$$\vec\nabla u=\vec{r_0}.$$

Якщо $u=f(r)$, то, згідно з формулами (25),

$$\vec\nabla u=f'(r)\vec\nabla r.$$

Користуючись цією формулою, знайдемо градієнт потенціалу поля притягання матеріальної точки маси $m$, що знаходиться в початку координат. У цьому разі ньютонівський потенціал

$$u=\gamma\frac{m}{r}.$$

Тоді

$$\vec\nabla u=\vec\nabla\left(\gamma\frac{m}{r}\right)=\gamma m\vec\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\gamma m}{r^2}\vec\nabla r=-\frac{\gamma m}{r^2}\vec{r_0}.$$

Таким чином, сила притягання напрямлена до початку координат і за величиною обернено пропорційна до квадрата відстані від точки маси $m$ до початку координат.



Користуючись формулами (22) і (23), можна записати оператор набла у циліндричних координатах

$$\vec\nabla=\frac{\partial}{\partial\rho}\vec{e_\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e_\varphi}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}$$

і у сферичних координатах

$$\vec\nabla=\frac{\partial}{\partial r}\vec{e_r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e_\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e_\theta}.$$

## 2.13 ЧАСТИННІ ПОХІДНІ Й ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Нехай функцію $z=f(x,y)$ задано у відкритій області $D\subset\mathbf{R}_2$ і нехай у кожній точці $(x,y)\in D$ вона має частинні похідні $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$. Ці похідні називають *частинними похідними першого порядку.*

Частинні похідні першого порядку, будучи функціями від $x$ і $y$, у свою чергу, в точці $(x,y)$ можуть мати частинні похідні.

Нехай функції $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ мають у точці $(x,y)\in D$ частинні похідні, які називають *частинними похідними другого порядку* і позначають $f''_{x^2}(x,y)$; $f''_{xy}(x,y)$; $f''_{y^2}(x,y)$; $f''_{yx}(x,y)$ або

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

При цьому $f''_{x^2}(x,y)$ називають частинною похідною другого порядку по $x^2$; $f''_{xy}(x,y)$ — частинною похідною другого порядку по $xy$; $f''_{y^2}(x,y)$ — частинною похідною другого порядку по $y^2$; $f''_{yx}(x,y)$ — частинною похідною другого порядку по $yx$.

Похідні $f''_{yx}(x,y), f''_{xy}(x,y)$ називають ще мішаними.

Отже, за означенням справедливі такі співвідношення:

$$f''_{x^2}(x,y)=\left(f'_x(x,y)\right)'_x;\quad f''_{xy}(x,y)=\left(f'_x(x,y)\right)'_y;$$

$$f''_{y^2}(x,y)=\left(f'_y(x,y)\right)'_y;\quad f''_{yx}(x,y)=\left(f'_y(x,y)\right)'_x.$$

Із цих співвідношень випливає спосіб знаходження частинних похідних другого порядку, а саме: щоб знайти частинні похідні другого порядку, потрібно знайти частинні похідні першого порядку цієї функції, а потім від цих похідних знайти відповідні частинні похідні першого порядку.

❑ **Приклад**

**1.** Знайти частинні похідні другого порядку функції

а) $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$; б) $x=x^y$.

**Розв'язання:**

а) знаходимо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Тоді

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)=-y\frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{\left(x^2+y^2\right)1-y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=-x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)=x\frac{2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=-\frac{\left(x^2+y^2\right)1-x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

б) знаходимо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln y.$$

Отже,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(yx^{y-}\right)=y\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{y-1}\right)=y(y-1)x^{y-2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(yx^{y-1}\right)=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^y\ln x\right)=\ln x\frac{\partial}{\partial y}\left(x^y\right)=x^y\ln^2 x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{dy dx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^y\ln x\right)=yx^{y-1}\ln x+x^y\frac{1}{x}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x.$$

Було розглянуто функції двох змінних. Аналогічно означаються і знаходяться частинні похідні другого порядку функцій трьох, чотирьох і $n$ змінних.

❑ **Приклад**

**2.** Знайти частинні похідні другого порядку функції

$$u=e^{xyz}.$$

**Розв'язання.** Знаходимо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{xyz}yz;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=e^{xyz}xz;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=e^{xyz}xy.$$

Тоді за означенням

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=yz\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xyz}\right)=y^2z^2e^{xyz};$$



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=z\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xyz}y\right)=ze^{xyz}(xyz+1);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=y\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{xyz}z\right)=ye^{xyz}(xyz+1);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=xz\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xyz}\right)=x^2z^2e^{xyz};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=z\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xyz}x\right)=ze^{xyz}(xyz+1);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=x\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{xyz}z\right)=xe^{xyz}(xyz+1);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=xy\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{xyz}\right)=x^2y^2e^{xyz};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=y\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xyz}x\right)=ye^{xyz}(xyz+1);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=x\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xyz}y\right)=xe^{xyz}(xyz+1).$$

Якщо в області $D$ функція $z=f(x,y)$ має частинні похідні другого порядку, то вони є функціями від $x$ і $y$. Якщо ці функції (частинні похідні другого порядку) мають у точці $(x,y)\in D$ частинні похідні першого порядку, то останні називають *частинними похідними третього порядку* і позначають

$$f'''_{x^3}(x,y);\quad f'''_{x^2y}(x,y);\quad f'''_{xyx}(x,y),\quad f'''_{xy^2}(x,y);$$
$$f'''_{y^3}(x,y);\quad f'''_{y^2x}(x,y);\quad f'''_{yxy}(x,y),\quad f'''_{yx^2}(x,y)$$

або

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3};\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y};\ \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x};\ \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2};\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3};\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x};\ \frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2};\ \frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x\partial y}.$$

Індуктивно можна означити частинні похідні $n$-го порядку як частинні похідні першого порядку частинних похідних $(n-1)$-го порядку. Позначають частинні похідні $n$-го порядку так:

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n};\ \frac{\partial^n z}{\partial y^n};\ \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y};\ \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}\ \text{і т. д.}$$

❑ **Приклад**

**3.** Знайти частинну похідну четвертого порядку $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}$ функції $z=x^5y^5$ у точці (1, 1).

**Розв'язання.** Знайдемо частинну похідну першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x}$ у довільній точці $(x,y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=5x^4y^5.$$

Тоді

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=20x^3y^5;\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=100x^3y^4;\quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}=400x^3y^3.$$

Підставимо в похідну $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}$ точку (1, 1):

$$\frac{\partial^4 z(1,1)}{\partial x^2\partial y^2}=400.$$

Повернемося до частинних похідних другого порядку. Розглядаючи попередні приклади, бачимо, що мішані похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ рівні між собою. Проте це не завжди так.

❑ **Приклад**

**4.** Нехай задано функцію

$$z=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{якщо } x^2+y^2>0;\\ 0, & \text{якщо } x^2+y^2=0.\end{cases}$$

Показати, що

$$f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0).$$

Р о з в ' я з а н н я. Знайдемо $f'_x(0,0)$ і $f'_y(0,0)$:

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0;$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0.$$

При $x^2+y^2>0$

$$f'_x(x,y)=y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+x\frac{(x^2+y^2)2x-(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2}\right)=y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right); \tag{1}$$

$$f'_y(x,y)=x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+y\frac{(x^2+y^2)(-2y)-(x^2-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2}\right)=x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right). \tag{2}$$

Нехай $x=0, y\neq 0$ — будь-яке число. Тоді з рівності (1) матимемо

$$f'_x(0,y)=-y.$$

Користуючись означенням частинної похідної, знайдемо

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f'_x(0,\Delta y)-f'_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y-0}{\Delta y}=-1.$$



Якщо в рівності (2) взяти $y=0$, а $x\neq 0$ — будь-яке число, то

$$f'_y(x,0)=x.$$

Аналогічно можна довести, що

$$f''_{yx}(0;0)=1.$$

Отже,

$$f''_{xy}(0;0)\neq f''_{yx}(0;0).$$

**Т е о р е м а 1.** Якщо функція $z=f(x,y)$ задовольняє умови:

1) $f(x,y)$ визначена в області $D\subset \mathbf{R}_2$;

2) у цій області існують частинні похідні першого порядку $f'_x(x,y)$ і $f'_y(x,y)$, а також мішані похідні $f''_{xy}(x,y)$ і $f''_{yx}(x,y)$;

3) мішані похідні $f''_{xy}(x,y), f''_{yx}(x,y)$ як функції $x$ і $y$ у точці $(x_0,y_0)\in D$ неперервні.

Тоді виконується рівність

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0).$$

Д о в е д е н н я. Візьмемо в області $D$ такі точки: $(x_0,y_0)$; $(x_0+h,y_0)$; $(x_0,y_0+k)$; $(x_0+h,y_0+k)$, де $h\neq 0$, $k\neq 0$ — прирости незалежних змінних. Побудуємо вираз

$$W=\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0)}{hk}. \tag{3}$$

Розглянемо на відрізку $[x_0;x_0+h]$ функцію

$$\varphi(x)=\frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k}. \tag{4}$$

Вираз (3) за допомогою функції $\varphi(x)$ можна записати так:

$$W=\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}. \tag{5}$$

Згідно з умовою (2) і рівністю (4), функція $\varphi(x)$ у точці $x$ має похідну

$$\varphi'(x)=\frac{f'_x(x,y_0+k)-f'_x(x,y_0)}{k}.$$

Тому, застосувавши теорему Лагранжа про скінченний приріст до різниці $\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)$, з формули (5) дістанемо

$$W=\varphi'(x_0+\theta_1 h)=\frac{f'_x(x_0+\theta h,y_0+k)-f'_x(x_0+\theta h,y_0)}{k}, \tag{6}$$

де $0<\theta_1<1$.

У чисельнику правої частини рівності (6) маємо частинний приріст функції $f'_x(x, y)$ за $y$ у точці $(x_0+\theta_1 h, y_0)$. Тому до нього, згідно з умовою 2), на відрізку $[y_0; y_0+k]$ можна застосувати теорему Лагранжа.

Отже,

$$W = f''_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 k), \text{ де } 0<\theta_2<1. \tag{7}$$

Введемо до розгляду функцію

$$\psi(y)=\frac{f(x_0+h, y)-f(x_0, y)}{k}, \text{ де } y\in[y_0; y_0+k]. \tag{8}$$

Тоді вираз (3) за допомогою цієї функції можна записати так:

$$W=\frac{\psi(y_0+k)-\psi(y_0)}{n}=\psi'(y_0+\theta_3 k),$$

де $0<\theta_3<1$.

З рівності (8) знаходимо

$$\psi'(y_0+\theta_3 k)=\frac{f'_y(x_0+h, y_0+\theta_3 k)-f'_y(x_0, y_0+\theta_3 k)}{h}.$$

Застосувавши теорему Лагранжа, маємо

$$W = f''_{yx}(x_0+\theta_4 h, y_0+\theta_3 k), \text{ де } 0<\theta_4<1. \tag{9}$$

Тоді, згідно з рівностями (7) і (9), отримуємо

$$f''_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 k)=f''_{yx}(x_0+\theta_4 h, y_0+\theta_3 k). \tag{10}$$

Скориставшись умовою 3), знайдемо

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} f''_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 k)=f''_{xy}\Big(\lim_{h\to 0}(x_0+\theta_1 h)\Big),$$
$$\lim_{k\to 0}(y_0+\theta_2 k)\Big)=f''_{xy}(x_0, y_0); \tag{11}$$
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} f''_{yx}(x_0+\theta_4 h, y_0+\theta_3 k)=f''_{yx}\Big(\lim_{h\to 0}(x_0+\theta_4 h)\Big),$$
$$\lim_{k\to 0}(y_0+\theta_3 k)\Big)=f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Перейшовши в рівності (10) до границі при $h\to 0$, $k\to 0$ і врахувавши (11), дістанемо

$$f''_{xy}(x_0, y_0)=f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Теорему доведено.

У теоремі 1 було розглянуто випадок мішаних похідних другого порядку. Ця теорема узагальнюється й на мішані похідні вищого порядку.



**Т е о р е м а 2.** Нехай функція $z=f(x, y)$ задовольняє такі умови:
1) $f(x, y)$ визначена в області $D\subset \mathbf{R}_2$;
2) в області $D$ функція $f(x, y)$ має всі частинні похідні до $(k-1)$-го порядку включно;
3) $f(x, y)$ в області $D$ має мішані похідні $k$-го порядку, і ці похідні є неперервними функціями в області $D$.

Тоді в кожній точці цієї області виконується рівність

$$\frac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^i \partial y^i}=\frac{\partial^k f(x, y)}{\partial y^i \partial x^i}, \quad i+j=k.$$

Розглянемо диференціали вищих порядків.

Нехай функція $z=f(x, y)$ в області $D\subset \mathbf{R}_2$ має неперервні частинні похідні першого порядку. Тоді в кожній точці $(x, y)\in D$ функція диференційовна, а отже, в точці $(x, y)$ вона має диференціал

$$dz=f'_x(x, y)dx+f'_y(x, y)dy. \tag{12}$$

Цей диференціал називатимемо *диференціалом першого порядку*. Таким чином, диференціал першого порядку $dz$ є функцією від $x$ і $y$, $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$ — прирости незалежних змінних, і вони розглядаються як сталі числа. Тому, припустивши, що функція $dz$, або частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ мають, у свою чергу, неперервні частинні похідні першого порядку, можемо стверджувати, що $dz$ має диференціал $d(dz)$.

Диференціал першого порядку від диференціала першого порядку називають *диференціалом другого порядку* функції $z=f(x, y)$ у точці $(x, y)$ і позначають символом $d^2z$, тобто

$$d^2z=d(dz).$$

Підставляючи в цю рівність значення $dz$ з формули (12), дістанемо

$$d^2z=d\big(f'_x(x, y)dx+f'_y(x, y)dy\big)=d\big(f'_x(x, y)dx\big)+$$
$$+d\big(f'_y(x, y)dy\big)=f''_{x^2}(x, y)dx^2+f''_{xy}(x, y)dxdy+$$
$$+f''_{yx}(x, y)dydx+f''_{y^2}(x, y)dy^2.$$

Тут введено позначення $dx^2=dxdy$; $dy^2=dydy$. Оскільки за припущенням $f''_{xy}(x, y)$ і $f''_{yx}(x, y)$ є функціями, неперервними в точці $(x, y)\in D$, то, згідно з теоремою про рівність мішаних похідних, матимемо

$$f''_{xy}(x, y)=f''_{yx}(x, y).$$

Отже, дістанемо таку формулу для диференціала другого порядку:

$$d^2z=f''_{x^2}(x, y)dx^2+2f''_{xy}(x, y)dxdy+f''_{y^2}(x, y)dy^2. \tag{13}$$

Як бачимо, диференціал другого порядку є функцією від $x$ і $y$, тому він може мати диференціал першого порядку.

Диференціал першого порядку від диференціала другого порядку називають *диференціалом третього порядку* функції $z = f(x, y)$ у точці $(x, y)$ і позначають символом $d^3z$, тобто

$$d^3z = d\left(d^2z\right). \tag{14}$$

Якщо функція $z = f(x, y)$ має в області $D$ неперервні частинні похідні третього порядку, то $d^2z$ є диференційовною функцією, тобто має диференціал. Підставивши у вираз (14) значення $d^2z$, матимемо формулу для диференціала третього порядку

$$d^3z = f''_{x^3}(x, y)dx^3 + 3f''_{x^2y}(x, y)dx^2dy + 3f''_{xy^2}(x, y)dxdy^2 + f'''_{y^3}(x, y)dy^3, \tag{15}$$

де $dx^3 = dxdxdx;\ dy^3 = dydydy$.

Індуктивно можна означити диференціал четвертого, п'ятого і $n$-го порядків. Так, якщо означено диференціал $(n-1)$-го порядку, то диференціалом $n$-го порядку функції $z = f(x, y)$ називають *диференціал першого порядку від диференціала* $(n-1)$*-го порядку* цієї функції і позначають $d^nz$, тобто

$$d^nz = d\left(d^{n-1}z\right).$$

Зауважимо, якщо для позначення похідних користуватися символами $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ і т. д., то формули (12), (13) і (15) можна записати компактніше, а саме:

$$dz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)z;$$

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z;$$

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z.$$

Для диференціала $d^nz$ матимемо таку формулу:

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z. \tag{16}$$

Формулу (16) називають символічно *степеневою формулою* і в розгорнутому вигляді її записують так:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z = \frac{\partial^n z}{\partial x^n}dx^n + C_n^1\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy +$$

$$+ C_n^2\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}dx^{n-2}dy^2 + \ldots + C_n^k\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}dy^k + \ldots + \frac{\partial^n z}{\partial x^n}dy^n,$$



де $C_n^k$ — число комбінацій із $n$ по $k$:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

❑ **Приклади**

**5.** Знайти диференціал $d^2z$ функції

$$z = x\sin^2 y$$

у точці $\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$.

Р о з в ' я з а н н я. Користуватимемося формулою (13). Знайдемо частинні похідні першого й другого порядків:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin^2 y;\quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\sin 2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \sin 2y;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x\cos 2y.$$

Тоді

$$d^2z = 2\sin 2y dxdy + 2x\cos 2y dy^2.$$

Підставивши точку $\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$, дістанемо

$$d^2z\left(1; \frac{\pi}{2}\right) = -2dy^2.$$

**6.** Знайти диференціал $d^3z$ функції $z = e^{xy}$ у довільній точці $(x, y)$.

Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо формулу (15). Знайдемо відповідні частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2e^{xy};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = e^{xy}(1 + xy);\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2e^{xy};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = y^3e^{xy};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} = y(2 + yx)e^{xy};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} = x(2 + xy)e^{xy};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x^3e^{xy}.$$

Тоді

$$d^3z = y^3e^{xy}dx^3 + 3y(2 + xy)e^{xy}dx^2dy + 3x(2 + xy)e^{xy}dxdy^2 + x^3e^{xy}dy^3.$$

**7.** Знайти $d^2u$ функції $u = \ln(x + y + z)$ в довільній точці $(x, y, z)$, що належить області існування функції.

Р о з в ' я з а н н я. Вище було виведено формулу для диференціала функції двох змінних. Проте формулу (16) можна узагальнити й на випадок функцій від трьох, чотирьох і $n$ змінних. Зокрема, для функції трьох змінних

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}dydz + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2.$$

Знаходимо похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x+y+z};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x+y+z};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{x+y+z};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x+y+z)^2};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{(x+y+z)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=-\frac{1}{(x+y+z)^2};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=-\frac{1}{(x+y+z)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{(x+y+z)^2};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{(x+y+z)^2}.$$

Тоді

$$d^2u=-\frac{1}{(x+y+z)^2}\left(dx^2+dy^2+dz^2+2dxdy+2dxdz+2dydz\right).$$

Зазначимо, що диференціали вищих порядків, на відміну від диференціала першого порядку, не мають інваріантної властивості. З'ясуємо це на прикладі диференціала другого порядку.

Нехай функція $z=f(x,y)$ визначена в області $D\subset \mathbf{R}_2$, а $x=x(t)$, $y=y(t)$ — функції, визначені в інтервалі $(\alpha;\beta)$, причому якщо $t\in(\alpha;\beta)$, то відповідна точка $(x(t),y(t))\in D$.

Припустимо, що функція $z$ має неперервні частинні похідні в області $D$ до другого порядку включно, а функції $x(t), y(t)$ мають неперервні похідні в інтервалі $(\alpha;\beta)$ до другого порядку включно. Тоді функція $z=f(x,y)$ має диференціал першого порядку

$$dz=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy.$$

Тут $dx$ і $dy$, на відміну від розглянутого випадку, не є сталими величинами, вони є функціями від $t$:

$$dx=x'(t)dt;\quad dy=y'(t)dt.$$

Звідси

$$d^2z=d\left(f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy\right)=d\left(f'_x(x,y)dx\right)+d\left(f'_y(x,y)dy\right)=$$

$$=d\left(f'_x(x,y)\right)dx+d\left(f'_y(x,y)\right)dy+f'_x(x,y)d^2x+f'_y(x,y)d^2y.$$

Розкриваючи диференціали, матимемо

$$d^2z=f''_{x^2}(x,y)dx^2+2f''_{xy}(x,y)dxdy+$$

$$+f''_{y^2}(x,y)dy^2+f'_x(x,y)x''(t)dt^2+f'_y(x,y)y''(t)dt^2.$$

Отже, на відміну від формули (13) тут з'явилися нові доданки:

$$f'_x(x,y)x''(t)dt^2;\quad f'_y(x,y)y''(t)dt^2.$$



Якщо ці доданки не дорівнюють нулю, то форма диференціала другого порядку не зберігається.

Якщо функції $x=x(t)$ і $y=y(t)$ — лінійні, тобто

$$x(t)=a_1t+b_1,\quad y(t)=a_2t+b_2,$$

де $a_1,a_2,b_1,b_2$ — сталі числа, то $x''(t)=y''(t)=0$.

У цьому випадку форма диференціала другого порядку зберігається.

## 2.14
## ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Під час вивчення властивостей функції однієї змінної важливу роль відіграє формула Тейлора. Велике значення вона має і для функцій кількох змінних. Виведемо формулу Тейлора, розглядаючи для простоти функції двох змінних.

Отже, нехай функція $z=f(x,y)$ задана у зв'язній області $D\subset\mathbf{R}_2$ і нехай у цій області функція $f(x,y)$ має неперервні частинні похідні до $(n+1)$-го порядку включно.

Розглянемо в області $D$ дві довільні точки $M_0(x_0,y_0)$ і $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ (рис. 31).

Сполучимо ці точки відрізком прямої. Запишемо рівняння прямої, що проходить через точки $M_0$ і $M$:

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=t.$$

Звідси

$$x=x_0+t\Delta x;\quad y=y_0+t\Delta y. \tag{1}$$

Якщо в рівностях (1) взяти $t=0$, то дістанемо координати точки $M_0$, а якщо $t=1$, то — координати точки $M$. Тому можна вважати, що $t$ змінюється на відрізку $[0;1]$, тобто

$$0\le t\le 1.$$

Функцію $z=f(x,y)$ уздовж відрізка $M_0M$ можна записати як функцію однієї змінної $t$:

$$F(t)=f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y), \tag{2}$$

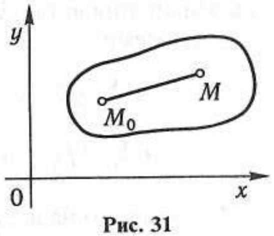

Рис. 31

де $t\in[0;1]$.

За припущенням функція $f(x,y)$ має неперервні частинні похідні $(n+1)$-го порядку включно. Отже, складена функція $F(t)$ має на відрізку $[0;1]$ неперервні похідні також до $(n+1)$-го порядку включно і для функції $F(t)$ можна записати формулу Тейлора за степенями $t$:

$$F(t)=F(0)+\frac{F'(0)}{1!}t+\frac{F''(0)}{2!}t^2+\ldots+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n+\frac{F^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1}, \qquad (3)$$

де $0<\theta<1$.

Поклавши $t=1$ і помітивши, що

$$F(1)-F(0)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=\Delta f(x_0, y_0),$$

дістанемо

$$\Delta f(x_0, y_0)=\frac{F'(0)}{1!}+\frac{F''(0)}{2!}+\ldots+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}+\frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}. \qquad (4)$$

Знайдемо $F'(0), F''(0), F'''(0)$ і т. д., $F^{n+1}(\theta)$. Для цього знаходимо

$$F'(t)=f'_x(x, y)x'(t)+f'_y(x, y)y'(t).$$

За формулами (1)

$$x'(t)=\Delta x; \quad y'(t)=\Delta y.$$

Тоді

$$F'(t)=f'_x(x, y)\Delta x+f'_y(x, y)\Delta y=df(x, y).$$

Звідси знаходимо $F''(t)$, пам'ятаючи, що $f'_x(x, y)$ і $f'_y(x, y)$ є складеними функціями ($x$ і $y$ залежать від $t$, і ця залежність виражається формулами (1), а $\Delta x$ і $\Delta y$ — сталі числа):

$$F''(t)=f''_{x^2}(x, y)\Delta x^2+2f''_{xy}(x, y)\Delta x\Delta y+f''_{y^2}(x, y)\Delta y^2=d^2 f(x, y).$$

Аналогічно можна довести, що

$$F'''(t)=d^3 f(x, y),$$

$$F^{\mathrm{IV}}(t)=d^4 f(x, y) \text{ і т. д.},$$

$$F^{(n+1)}(t)=d^{n+1} f(x, y).$$

Тоді, поклавши в цих формулах $t=0$ і $t=\theta$ у похідній $F^{(n+1)}(t)$, підставимо значення відповідних похідних у рівність (4).

Матимемо

$$\Delta f(x_0, y_0)=df(x_0, y_0)+\frac{1}{2!}d^2 f(x_0, y_0)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n!}d^n f(x_0, y_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y). \qquad (5)$$

Формулу (5) називають *формулою Тейлора для функції двох змінних.*



Отже, формула Тейлора (5) зовні не відрізняється від формули Тейлора для функції однієї змінної, записаної в диференціальній формі. Проте в розгорнутому вигляді формула (5) значно складніша. Запишемо, наприклад, формулу Тейлора для функції $z=f(x, y)$, припустивши, що в розглядуваній області вона має неперервні похідні до третього порядку включно:

$$\Delta f(x_0, y_0)=f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y+$$

$$+\frac{1}{2}\left(f''_{x^2}(x_0, y_0)\Delta x^2+2f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta x\Delta y+f''_{y^2}(x_0, y_0)\Delta y^2\right)+$$

$$+\frac{1}{6}\left(f'''_{x^2}(\bar{x}, \bar{y})\Delta x^3+3f'''_{x^2y}(\bar{x}, \bar{y})\Delta x^2\Delta y+3f'''_{xy^2}(\bar{x}, \bar{y})\Delta x\Delta y^2+f'''_{y^3}(\bar{x}, \bar{y})\Delta y^3\right),$$

де $\bar{x}=x_0+\theta\Delta x, \bar{y}=y_0+\theta\Delta y$.

❑ **Приклади**

**1.** За формулою Тейлора розвинути функцію $z=x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ в околі точки $M_0(1,-2)$.

Р о з в ' я з а н н я. Задана функція має неперервні частинні похідні будь-якого порядку. При цьому частинні похідні цієї функції, вище другого порядку, дорівнюють нулю. Справді,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y-6; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-x-2y-3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2.$$

Частинні похідні другого порядку сталі. Тому наступні похідні дорівнюють нулю. Отже, поклавши $\Delta x=x-1, \Delta y=y+2$ і знайшовши

$$df(1,-2)=-2(x-1);$$

$$d^2 f(1,-2)=2(x-1)^2-2(x-1)(y+2)-2(y+2)^2,$$

маємо

$$z=-2(x-1)+(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2+4.$$

**2.** Розвинути за формулою Тейлора (до членів другого порядку) функцію $z=e^{xy}$.

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо частинні похідні цієї функції в точці $(x, y)$ до другого порядку включно:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^{xy}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{xy}(1+xy); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2e^{xy}.$$

Тоді

$$\Delta f(x, y)=e^{xy}(y\Delta x+x\Delta y)+\frac{1}{2}e^{xy}\left(y^2\Delta x^2+2(1+xy)\Delta x\Delta y+x^2\Delta y^2\right)+\frac{1}{6}d^3 f(\bar{x}, \bar{y}).$$

## 2.15 НЕЯВНІ ФУНКЦІЇ. ТЕОРЕМИ ПРО ІСНУВАННЯ НЕЯВНИХ ФУНКЦІЙ

Досі вивчалися функції однієї чи багатьох змінних, які здебільшого було задано рівняннями, розв'язаними відносно цієї функції, тобто рівнянням

$$y = f(x),$$

якщо йшлося про функцію однієї змінної, і рівнянням

$$u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

для функції *n* змінних. Іноді функцію можна задати рівнянням, не розв'язаним відносно цієї функції

$$F(x, y) = 0. \qquad (1)$$

Розглянемо, наприклад, рівняння

$$y^2 - x = 0. \qquad (2)$$

Оскільки кожному значенню $x \in (0; +\infty)$ рівняння (2) ставить у відповідність два різних значення $y$

$$y = \pm\sqrt{x},$$

то це рівняння при значеннях $x \in (0; +\infty)$ не задає $y$ як функцію від $x$. Проте якщо $x$ і $y$ брати з певного околу точки $M_0(x_0, y_0)$, яка лежить на параболі (рис. 32) і не збігається з вершиною параболи (точкою $O$), то в цьому околі рівняння (2) задає $y$ як функцію від $x$, тоді як у будь-якому як завгодно малому околі точки $O$ рівняння (2) не визначає $y$ як функцію від $x$.

Це саме можна сказати й про рівняння

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \qquad (3)$$

яке на площині $xOy$ задає коло, центр якого знаходиться у початку координат, а радіус дорівнює одиниці (рис. 33).

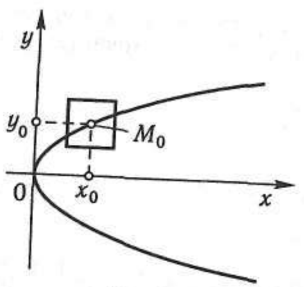


Рис. 32

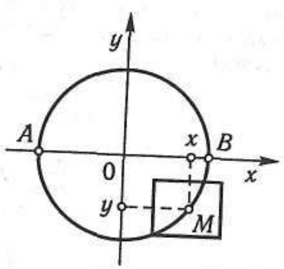


Рис. 33



Тоді рівняння (3) у кожній точці цього кола, крім точок $A$ і $B$, визначає ординату $y$ як функцію від абсциси $x$ у досить малому околі (прямокутнику) цієї точки.

Із наведених прикладів випливає, що рівняння виду (1) в околі однієї точки, координати якої задовольняють це рівняння, може задавати $y$ як функцію від $x$, а в околі іншої точки рівняння (1) не задає $y$ як функцію від $x$.

Розглянемо таке питання. Нехай координати точки $(x_0, y_0)$ задовольняють рівняння (1), тобто

$$F(x_0, y_0) = 0. \qquad (4)$$

Які умови має задовольняти функція $F(x, y)$, щоб рівняння (1) у деякому околі точки $(x_0, y_0)$ визначало $y$ як функцію від $x$ і щоб ця функція була неперервною й диференційовною? Дамо спочатку таке означення.

***Означення 1.*** Якщо в прямокутнику $R: [a \le x \le b; c \le y \le d]$ рівняння (1) має таку властивість, що при кожному значенні $x \in [a; b]$ це рівняння має один і тільки один корінь $y = f(x)$ з відрізка $[c; d]$, то $y = f(x)$ називають *неявною функцією від* $x$, заданою рівнянням (1).

Отже, якщо функція $y = f(x)$, задана рівнянням (1), є неявною, то для всіх $x \in [a; b]$ виконується тотожність

$$F(x, f(x)) = 0. \qquad (5)$$

**Теорема 1.** Нехай

1) функція $F(x, y)$ визначена й неперервна в прямокутнику $R'$: $[x_0 - \Delta, x_0 + \Delta; y_0 - \Delta', y_0 + \Delta']$ ($\Delta, \Delta'$ — додатні числа) з центром у точці $(x_0, y_0)$;

2) у прямокутнику $R'$ існують і є неперервними частинні похідні $F'_x(x, y), F'_y(x, y)$;

3) $F(x, y)$ у точці $(x_0, y_0)$ дорівнює нулю:

$$F(x_0, y_0) = 0; \qquad (6)$$

4) похідна $F'_y(x, y)$ у точці $(x_0, y_0)$ не дорівнює нулю:

$$F'_y(x_0, y_0) \ne 0. \qquad (7)$$

Тоді

а) в деякому околі точки $(x_0, y_0)$ рівняння (1) визначає неявну функцію від $x$:

$$y = f(x);$$

б) при $x = x_0$ ця функція набуває значення $y_0$:

$$f(x_0) = y_0;$$

в) функція $f(x)$ неперервна в деякому околі точки $x_0$;
г) функція $f(x)$ у точці $x_0$ має неперервну похідну

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}. \tag{8}$$

Доведення. Припустимо, що

$$F'_y(x_0, y_0) > 0. \tag{9}$$

Тоді, згідно з умовою 2), ця похідна є додатною і в досить малому околі точки $(x_0, y_0)$.

Розглянемо замкнений прямокутник

$$R'': [x_0 - \Delta'', x_0 + \Delta''; y_0 - \Delta'', y_0 + \Delta''],\ \Delta'' > 0,$$

який повністю міститься в зазначеному околі. Отже, нерівність (9) виконується в усіх точках прямокутника $R''$. Звідси випливає, що за будь-якого сталого значення $x$ з відрізка $[x_0 - \Delta'', x_0 + \Delta'']$ функція $F(x, y)$ як функція від $y$ монотонно зростає на відрізку $[y_0 - \Delta'', y_0 + \Delta'']$.

Оскільки $F(x_0, y_0) = 0$, то

$$F(x_0, y) < 0 \text{ при } y_0 - \Delta'' \le y < y_0$$

і

$$F(x_0, y) > 0 \text{ при } y_0 < y \le y_0 + \Delta'',$$

зокрема (рис. 34)

$$F(A_0) = F(x_0, y_0 - \Delta'') < 0 \tag{10}$$

і

$$F(B_0) = F(x_0, y_0 + \Delta'') > 0. \tag{11}$$

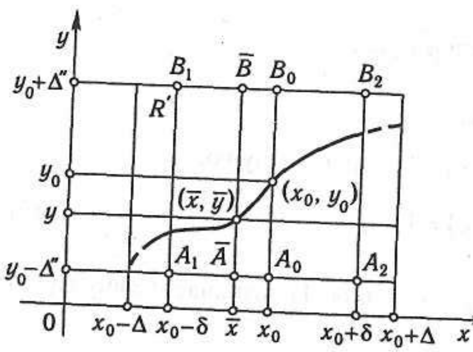


Рис. 34

Розглянемо дві функції однієї змінної

$$F(x, y_0 - \Delta'') \text{ і } F(x, y_0 + \Delta'').$$

Функція $F(x, y_0 - \Delta'')$ при $x = x_0$ набуває від'ємних значень, а функція $F(x, y_0 + \Delta'')$ при $x = x_0$, згідно з (11), набуває додатного значення. Оскільки, згідно з умовою 1), функція $F(x, y)$ неперервна за сукупністю змінних $x$ і $y$, то функції $F(x, y_0 - \Delta'')$ і $F(x, y_0 + \Delta'')$ також неперервні в точці $x = x_0$. Отже, знайдеться окіл $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$, $0 < \delta \le \Delta$, точки $x_0$ такий, що обидві функції зберігатимуть сталий знак, а саме:

$$F(x, y_0 - \Delta'') < 0, \text{ якщо } x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$$

і

$$F(x, y_0 - \Delta'') > 0, \text{ якщо } x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta].$$

Візьмемо з відрізка $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ будь-яке значення $x = \overline{x}$ і розглянемо відрізок, що сполучає точки $\overline{A}(\overline{x}, y_0 - \Delta'')$ і $\overline{B}(\overline{x}, y_0 + \Delta'')$. Уздовж цього відрізка функція $F(x, y)$ зводиться до функції однієї змінної $F(\overline{x}, y)$, яка має ту властивість, що на кінцях відрізка $[y_0 - \Delta'', y_0 + \Delta'']$ набуває протилежних знаків:

$$F(\overline{x}, y_0 - \Delta'') < 0,\quad F(\overline{x}, y_0 + \Delta'') > 0.$$

За теоремою Больцано — Коші всередині відрізка $[y_0 - \Delta'', y_0 + \Delta'']$ знайдеться точка $y = \overline{y}$, в якій функція $F(x, y)$ дорівнює нулю, тобто

$$F(\overline{x}, \overline{y}) = 0. \tag{12}$$

Оскільки функція $F(\overline{x}, y)$ зростаюча, $y = \overline{y}$ є єдиною точкою, в якій виконується рівність (12). Отже, для кожного значення $\overline{x} \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ рівняння $F(\overline{x}, y) = 0$ має тільки один корінь $y = \overline{y}$, зокрема, для $x = x_0$, згідно з умовою 2), це рівняння має один корінь $y = y_0$.

Таким чином, у прямокутнику $R'': [x_0 - \delta, x_0 + \delta; y_0 - \Delta'', y_0 + \Delta'']$ рівняння (1) визначає неявну функцію $y = f(x)$, яка при $x = x_0$ дорівнює $y_0$:

$$f(x_0) = y_0.$$

Доведемо, що функція $y = f(x)$ неперервна в інтервалі

$$(x_0 - \delta; x_0 + \delta).$$

Неперервність функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ випливає з попередніх міркувань. Справді, для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна знайти число $\delta_0$ $(0 < \delta_0 \le \delta)$ таке, що як тільки

$$|x - x_0| < \delta_0,$$

то $|y - y_0| < \varepsilon$ (рис. 34), або

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Доведення неперервності функції $y = f(x)$ в довільній іншій точці $x = \overline{x} \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ аналогічне доведенню неперервності цієї функції в точці $x = x_0$. Адже точка $x = \overline{x}$ має ту саму властивість, що й точка $x_0$, тобто вона єдина точка в інтервалі $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, яка разом із числом $\overline{y}$

перетворює рівняння (1) на нуль: $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Тому в околі точки $(\bar{x}, \bar{y})$ рівняння (1) визначає єдину неявну функцію, яка неперервна в точці $x = \bar{x}$ і збігається з функцією $y = f(x)$.

Доведемо, що функція $y = f(x)$, існування якої доведено вище, в деякому інтервалі має неперервну похідну, яка визначається співвідношенням (8).

Отже, нехай $y = f(x)$ — неявна функція, що визначається рівнянням (1). Тоді

$$F(x, f(x)) \equiv 0. \tag{13}$$

Оскільки $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ і $F'_y(x, y)$ є неперервною функцією в точці $(x_0, y_0)$, то існує окіл цієї точки $(x_0 - \delta'; x_0 + \delta')$ $(0 < \delta' \leq \delta)$ такий, що для будь-якого $x \in (x_0 - \delta', x_0 + \delta')$

$$F'_y(x, y) \neq 0. \tag{14}$$

Надамо $x$ приросту $\Delta x$ такого, щоб

$$x + \Delta x \in (x_0 - \delta'; x_0 + \delta').$$

Позначимо $f(x + \Delta x)$ через $y + \Delta y$. Матимемо рівність

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0. \tag{15}$$

Віднімемо почленно від рівності (15) рівність (13):

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0. \tag{16}$$

У лівій частині цієї рівності маємо повний приріст функції $F(x, y)$ у точці $(x, y)$, і оскільки $F(x, y)$ у точці $(x, y)$ має за умовою 2) неперервні частинні похідні першого порядку, то рівність (16) можна записати так:

$$F'_x(x, y)\Delta x + F'_y(x, y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \tag{17}$$

де $\alpha, \beta$ — нескінченно малі функції в точці $(x, y)$:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta = 0.$$

Оскільки за малих значень $|\Delta x|, |\Delta y|$ функція $F'_y(x, y) + \beta \neq 0$, то з рівності (17) знаходимо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x, y) + \alpha}{F'_y(x, y) + \beta}.$$

Перейшовши до границі при $\Delta x \to 0$ і врахувавши, що внаслідок неперервності функції $y = f(x)$, $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, маємо

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \tag{18}$$



Оскільки $F'_x(x, y), F'_y(x, y)$ — функції, неперервні в прямокутнику $R''': [x_0 - \delta', x_0 + \delta'; y_0 - \Delta', y_0 + \Delta']$, і виконується умова (14), то із співвідношення (18) випливає, що похідна $y'(x)$ є функцією, неперервною в інтервалі $(x_0 - \delta', x_0 + \delta')$, зокрема в точці $x_0$. При $x = x_0$ із формули (18) отримаємо формулу (8).

Теорему доведено.

Ця теорема дає достатні умови для того, щоб рівняння (1) визначало неявну функцію однієї змінної $y = f(x)$.

Зазначимо, що внаслідок теореми 1 за властивостями функції $F(x, y)$ можна говорити про властивості неявної функції $y = f(x)$ навіть тоді, коли функція $y = f(x)$ в явному вигляді невідома.

Іноді частинна похідна

$$F'_y(x_0, y_0) = 0,$$

але $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$, і виконується решта умов теореми 1. Тоді рівняння (1) задає $x$ як неявну функцію від $y$:

$$x = \varphi(y).$$

Ця функція має ті самі властивості, що й функція $y = f(x)$, зокрема $\varphi(y)$ має неперервну похідну

$$\varphi'(y) = -\frac{F'_y(x, y)}{F'_x(x, y)}. \tag{19}$$

Знаючи формулу похідної неявної функції $y = f(x)$, можна записати рівняння дотичної і нормалі в точці $(x_0, y_0)$ до кривої, що є графіком цієї функції в околі точки $x_0$.

Для цього скористаємося рівнянням дотичної

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \tag{20}$$

і нормалі

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \tag{21}$$

до кривої, заданої рівнянням $y = f(x)$.

Підставляючи у рівності (20) і (21) значення $f'(x_0)$ з формули (18), дістанемо рівняння дотичної

$$F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) = 0 \tag{22}$$

і рівняння нормалі

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0)}. \tag{23}$$

❑ **Приклади**

**1.** Скласти рівняння дотичної і нормалі до кола $x^2+y^2-1=0$ в точці $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Розв'язання. Легко бачити, що функція $F(x,y)=x^2+y^2-1$ у малому околі точки $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ задовольняє умови теореми 1. Тому для розв'язання цієї задачі скористаємося рівняннями (22) і (23). Знаходимо

$$F'_x(x,y)=2x,\quad F'_y(x,y)=2y,$$

$$F'_x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},\quad F'_y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

Тоді рівняння дотичної запишемо у вигляді

$$\sqrt{2}\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$$

або

$$y+x-\sqrt{2}=0.$$

Рівняння нормалі

$$y-x=0.$$

**2.** Знайти похідну $y'(x)$ у точці $(1,2)$ неявної функції $y=f(x)$, заданої рівнянням

$$x^y-y^x+1=0.$$

Розв'язання. Тут функція $F(x,y)=x^y-y^x+1$ в околі точки $(1,2)$ задовольняє умови теореми 1, зокрема

$$F'_y(x,y)=x^y\ln x-xy^{x-1};\quad F'_y(1,2)=-1\neq 0.$$

Тому

$$y'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}=-\frac{yx^{y-1}-y^x\ln y}{x^y\ln x-xy^{x-1}};$$

$$y'(1)=-\frac{2-2\ln 2}{-1}=2(1-\ln 2).$$

Зазначимо, що формула (18) для похідної неявної функції дає змогу знайти й похідні вищих порядків. Знайдемо, наприклад, $y''(x)$. Для цього праву частину у формулі (18) продиференціюємо як дріб, пам'ятаючи при цьому, що $F'_x(x,y)$ і $F'_y(x,y)$ є складеними функціями двох аргументів $x$ і $y=f(x)$:

$$y''(x)=-\frac{F'_y(x,y)\left(F''_{x^2}(x,y)+F''_{xy}(x,y)y'(x)\right)}{\left(F'_y(x,y)\right)^2}+$$

$$+\frac{F'_x(x,y)\left(F''_{y^2}(x,y)y'(x)+F''_{yx}(x,y)\right)}{\left(F'_y(x,y)\right)^2}.$$

Підставляючи сюди значення $y'(x)$ з формули (18), остаточно дістанемо

$$y''=-\frac{\left(F'_x\right)^2F''_{y^2}+\left(F'_y\right)^2F''_{x^2}-2F'_xF'_yF''_{xy}}{\left(F'_y\right)^3} \qquad (24)$$

(тут аргументи не вказано).



❑ **Приклад**

**3.** Знайти похідну другого порядку неявної функції, заданої рівнянням

$$e^y+xy=e,$$

у точці $(0,1)$.

Розв'язання. Маємо

$$F(x,y)=e^y+xy-e.$$

Знаходимо

$$F'_y(x,y)=e^y+x;\quad F'_y(0,1)=e\neq 0.$$

Отже, щоб знайти $y''$, можна застосувати формулу (24). Для цього знайдемо відповідні похідні

$$F'_x=y;\quad F'_y=e^y+x;$$

$$F''_{x^2}=0;\quad F''_{xy}=1;\quad F''_{y^2}=e^y.$$

Тоді

$$y''(x)=-\frac{y^2e^y-2y\left(e^y+x\right)}{\left(e^y+x\right)^3};$$

$$y''(0)=-\frac{e-2e}{e^3}=\frac{1}{e^2}.$$

Таким чином, уже вивчено питання про неявну функцію однієї змінної. Аналогічно можна розглянути неявну функцію багатьох змінних.

Введемо, наприклад, поняття неявної функції двох змінних. Нехай маємо рівняння

$$F(x,y,z)=0, \qquad (25)$$

причому функцію $F(x,y,z)$ визначено в паралелепіпеді

$$T:[a,b;c,d;l,k].$$

***Означення 2.*** Рівняння (25) задає неявну функцію двох змінних $z=f(x,y)$ у паралелепіпеді $T$, якщо для кожної пари значень $(x,y)$ із прямокутника $R:[a,b;c,d]$ рівняння (25) має тільки один дійсний корінь $z$ з відрізка $[l;k]$.

Як і для неявної функції однієї змінної, виникає запитання: які умови має задовольняти функція $F(x,y,z)$, щоб рівняння (25) визначало неявну функцію $z=f(x,y)$]? Відповідь дає така теорема.

**Теорема 2.** Нехай функція $F(x,y,z)$ задовольняє умови:

1) $F(x,y,z)$ та її частинні похідні $F'_x(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z)$, $F'_z(x,y,z)$ — неперервні функції в деякому околі $T':[x_0-\Delta'_1, x_0+\Delta'_1; y_0-\Delta'_2, y_0+\Delta'_2; z_0-\Delta'_3, z_0+\Delta'_3]$ точки $(x_0,y_0,z_0)$;

2) функція $F(x,y,z)$ у точці $(x_0,y_0,z_0)$ дорівнює нулю:

$$F(x_0,y_0,z_0)=0; \qquad (26)$$

3) частинна похідна

$$F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0. \tag{27}$$

Тоді існує окіл

$$T'': [x_0 - \Delta''_1, x_0 + \Delta''_1; y_0 - \Delta''_2, y_0 + \Delta''_2; z_0 - \Delta''_3, z_0 + \Delta''_3],$$

$$0 < \Delta''_i \leq \Delta'_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

точки $(x_0, y_0, z_0)$, в якому:

а) рівняння (25) задає функцію двох змінних $z = f(x, y)$, що задовольняє рівняння (25),

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0;$$

б) функція $f(x, y)$ при $x = x_0, y = y_0$ дорівнює $z_0$, тобто

$$f(x_0, y_0) = z_0;$$

в) $f(x, y)$ у відкритому прямокутнику $(x''_0 - \Delta''_1, x_0 + \Delta''_1; y_0 - \Delta''_2, y''_0 + \Delta''_2)$ є неперервною і має неперервні частинні похідні

$$f'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)};$$

$$f'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \tag{28}$$

Оскільки доведення теореми 2 аналогічне доведенню теореми 1, то його тут не наводимо. Зазначимо тільки, що коли умова (27) цієї теореми не виконується, проте, наприклад,

$$F'_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

і виконується решта умов теореми 2, то рівняння (25) в околі точки $(x_0, y_0, z_0)$ задає $y$ як функцію двох змінних

$$u = f(x, z).$$

Якщо поверхню задано рівнянням

$$z = f(x, y),$$

то рівняння дотичної площини в точці $(x_0, y_0, z_0)$ до цієї поверхні має вигляд

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{29}$$

Нехай поверхня задається рівнянням (25), в якому функція $F(x, y, z)$ в околі точки $(x_0, y_0, z_0)$ задовольняє умови теореми 2. Підставляючи у



рівність (29) значення похідних із формул (28), дістанемо таке рівняння дотичної площини до поверхні:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \tag{30}$$

Рівняння нормалі до поверхні (25) у точці $(x_0, y_0, z_0)$ має вигляд

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \tag{31}$$

Зазначимо, що рівняння (30) і (31) виведено в припущенні, що виконуються умови теореми 2, зокрема, якщо

$$F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Проте ці рівняння правильні й тоді, коли

$$|\operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0)| \neq 0.$$

❑ **Приклад**

**4.** Довести, що поверхні $xy = z^2$ і $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ортогональні.

Р о з в ' я з а н н я. Введемо позначення

$$F_1(x, y, z) = xy - z^2; \quad F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Тоді задані поверхні запишуться рівняннями такого вигляду:

$$F_1(x, y, z) = 0; \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

Поверхні називають *ортогональними,* якщо нормалі до цих поверхонь у будь-якій точці взаємно перпендикулярні.

Використаємо умову перпендикулярності двох прямих. Для цього знайдемо частинні похідні функції $F_1$ і $F_2$ у довільній точці $(x, y, z)$, яка лежить на цих поверхнях:

$$F'_{1x}(x, y, z) = y; \quad F'_{1y}(x, y, z) = x; \quad F'_{1z}(x, y, z) = -2z;$$

$$F'_{2x}(x, y, z) = 2x; \quad F'_{2y}(x, y, z) = 2y; \quad F'_{2z}(x, y, z) = 2z.$$

Знаходимо:

$$F'_{1x}F'_{2x} + F'_{1y}F'_{2y} + F'_{1z}F'_{2z} = 2xy + 2xy - 4z^2 = 4(xy - z^2) = 0.$$

Отже, виконується умова перпендикулярності двох прямих (у цьому випадку — нормалей).

Зазначимо, що як і для неявної функції однієї змінної, користуючись формулами (28), можна для неявної функції $z = f(x, y)$ вивести формули для частинних похідних другого, третього і т. д., $n$-го порядків. Запишемо формули частинних похідних другого порядку:

$$f''_{x^2} = -\frac{F'_z\left(F''_{x^2} + F''_{xz}f'_x\right) - F'_x\left(F''_{xz} + F''_{z^2}f'_x\right)}{(F'_z)^2};$$

$$f''_{xy}=-\frac{F'_z\left(F''_{xy}+F''_{xz}f'_y\right)-F'_x\left(F''_{zy}+F''_{z^2}f'_y\right)}{\left(F'_z\right)^2}; \tag{32}$$

$$f''_{y^2}=-\frac{F'_z\left(F''_{y^2}+F''_{yz}f'_y\right)-F'_y\left(F''_{zy}+F''_{z^2}f'_y\right)}{\left(F'_z\right)^2}.$$

❑ **Приклад**

**5.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ неявної функції, заданої рівнянням

$$x^2+y^2+z^2-2z=0. \tag{33}$$

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{2x}{2z-2}=-\frac{x}{z-2}.$$

Тоді

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{(z-2)1-x\frac{\partial z}{\partial x}}{(z-2)^2}=-\frac{z-2+\frac{x^2}{z-2}}{(z-2)^2}=-\frac{(z-2)^2+x^2}{(z-2)^3}.$$

Іноді неявні функції можуть задаватися не одним рівнянням, як було в попередніх випадках, а системою рівнянь.

Так, система рівнянь

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0;\\ G(x,y,z)=0\end{cases} \tag{34}$$

задає дві функції однієї змінної.

Справді, нехай у деякому околі точки $(x_0, y_0, z_0)$ функція $G(x,y,z)$ задовольняє умови теореми 2. Тоді друге рівняння з (34) задає неявну функцію $z=f(x,y)$ двох змінних. Підставимо $z=f(x,y)$ у перше рівняння системи (34). Маємо

$$F(x,y,f(x,y))=0$$

або

$$\Phi(x,y)=0. \tag{35}$$

Якщо функція $\Phi(x,y)$ в околі точки $(x_0, y_0)$ задовольняє умови теореми 1, то рівняння (35) задає неявну функцію $y=\varphi(x)$ однієї змінної $x$. Підставивши $y=\varphi(x)$ у функцію $z=f(x,y)$, дістанемо другу функцію: $z=f(x,\varphi(x))=\psi(x)$.

У паралелепіпеді $[a, b; c, \partial; k, l]$ система рівнянь (34) визначає $y$ і $z$ як однозначні функції від $x$: $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$, якщо для кожного значення $x\in[a;b]$ ця система має одну і тільки одну систему розв'язків $(y=\varphi(x) z=\psi(x))$ із прямокутника $[c, \partial; k, l]$.

Як і в попередніх випадках, постає запитання: коли система рівнянь (34) визначає дві дійсні функції? Відповідь дає така теорема.



**Т е о р е м а 3.** Нехай виконуються умови:

1) функції $F(x,y,z)$, $G(x,y,z)$ в деякому околі точки $(x_0, y_0, z_0)$ неперервні й мають неперервні частинні похідні першого порядку;

2) виконуються рівності

$$F(x_0,y_0,z_0)=0 \text{ і } G(x_0,y_0,z_0)=0;$$

3) детермінант

$$I(x_0,y_0,z_0)=\begin{vmatrix}F'_y(x_0,y_0,z_0) & F'_z(x_0,y_0,z_0)\\ G'_y(x_0,y_0,z_0) & G'_z(x_0,y_0,z_0)\end{vmatrix}\neq 0. \tag{36}$$

Тоді існує окіл точки $(x_0, y_0, z_0)$, в якому система рівнянь (34) визначає єдину пару дійсних функцій

$$y=\varphi(x),\quad z=\psi(x),$$

які мають такі властивості.

1°. $\varphi(x_0)=y_0, \psi(x_0)=z_0$.

2°. Функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ у згаданому околі є неперервними і мають неперервні похідні

$$\varphi'(x)=\frac{\begin{vmatrix}F'_z(x,y,z) & F'_x(x,y,z)\\ G'_z(x,y,z) & G'_x(x,y,z)\end{vmatrix}}{I(x,y,z)};$$

$$\psi'(x)=\frac{\begin{vmatrix}F'_x(x,y,z) & F'_y(x,y,z)\\ G'_x(x,y,z) & G'_y(x,y,z)\end{vmatrix}}{I(x,y,z)}. \tag{37}$$

Д о в е д е н н я. Оскільки за умовою (36) детермінант $I$ у точці $(x_0, y_0, z_0)$ не дорівнює нулю, то хоч один елемент у другому його стовпці не дорівнює нулю. Припустимо, наприклад, що $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. Тоді за теоремою 2 цього параграфа перше рівняння в системі (36) в деякому $\Delta_1$-околі точки $(x_0, y_0, z_0)$ задає собою $z$ як неявну функцію двох змінних $z=f(x,y)$, яка має властивості, перелічені у теоремі 2.

Отже, в межах околу $\Delta_1$ система рівнянь (34) еквівалентна системі рівнянь

$$\begin{cases}G(x,y,z)=0;\\ z=f(x,y).\end{cases}$$

Якщо у перше рівняння замість $z$ підставити значення $z=f(x,y)$, то прийдемо до простішої системи

$$\begin{cases}\Phi(x,y)=G(x,y,z)=0;\\ z=f(x,y).\end{cases}$$

Оскільки в системі (38) перше рівняння містить лише дві змінні $x$ і $y$, то, можливо, в цьому рівнянні функція $\Phi(x, y)$ в околі точки $(x_0, y_0)$, який є ортогональною проекцією околу $\Delta_1$ на площину $x_0y$, задовольняє умови теореми 1 цього параграфа.

Достовірність перших двох умов теореми 1 є очевидною. Перевіримо третю умову. Для цього знайдемо

$$\Phi'_y(x, y) = G'_y + G'_z \cdot z'_y.$$

Підставивши

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z},$$

отримаємо

$$\Phi'_y(x, y) = -\frac{I}{F'_z}. \qquad (39)$$

Зауважимо, що в правій частині рівності (39) замість $z$ ставимо його значення $z = f(x, y)$, де точки $(x, y) \in \delta_1$. І оскільки $f(x_0, y_0) = z_0$, то в рівності (39) точці $(x_0, y_0)$ зліва відповідає точка $(x_0, y_0, z_0)$ справа. За умовою цієї теореми детермінант $I(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, тому і $\Phi'_y(x_0, y_0)$, як випливає з (39), не дорівнює нулю.

Тому до рівняння

$$\Phi(x, y) = 0 \qquad (40)$$

можна застосувати теорему 1. Згідно з цією теоремою, рівняння (40) в $\delta_1$-околі точки $(x_0, y_0)$ визначає собою неявну функцію $y = \varphi(x)$, яка в околі $[x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $(0 < \delta \leq \delta_1)$ має властивості, перелічені в цій теоремі. Тоді, підставивши в друге рівняння системи (38) замість $y$ його значення $y = \varphi(x)$ отримаємо $z = f(x, \varphi(x)) = \psi(x)$.

Теорему доведено.

Зауважимо, що теорему 3 можна узагальнити на той випадок, коли в системі більше ніж два рівняння, зокрема на систему $m \geq 2$ рівнянь вигляду

$$\left|\begin{array}{l} F_1(x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_m) = 0, \\ F_2(x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_m) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_m) = 0 \end{array}\right|. \qquad (41)$$

Не наводитимемо формулювання і доведення загальної теореми, а лише звернемо увагу на те, що в питанні існування неявних функцій $y_1, ..., y_m$ від $n$ змінних $x_1, ..., x_n$, заданих системою рівнянь (41), головну роль



відіграє визначник

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}. \qquad (42)$$

У розглядуваній точці він повинен не дорівнювати нулю.

У літературі визначник (42) називають *визначником Остроградського — Якобі*[1], або *якобіаном*.

❑ **Приклад**

**6.** Знайти похідні $\varphi'(x), \psi'(x)$ функцій, заданих системою рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0; \\ z - y = 0 \end{cases}$$

у точці $\left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо відповідні частинні похідні:

$$F'_x = 2x; \quad F'_y = 2y; \quad F'_z = 2z;$$

$$G'_x = 0; \quad G'_y = -1; \quad G'_z = 1.$$

Тоді

$$F'_x\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0, \quad F'_y\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}, \quad F'_z\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

Обчислюємо визначник

$$I\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{4}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Скориставшись формулами (37), матимемо

$$\varphi'(0) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\frac{4}{\sqrt{2}}} = \frac{0}{\frac{4}{\sqrt{2}}} = 0;$$

$$\psi'(0) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\frac{4}{\sqrt{2}}} = \frac{0}{\frac{4}{\sqrt{2}}} = 0.$$

[1] *Якобі К.* (1804—1851) — німецький математик.

## 2.16
## ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ. НАЙБІЛЬШЕ Й НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

Як і для функції однієї змінної, для функції кількох змінних вводять поняття екстремальної точки. Для простоти розглядатимемо функцію двох змінних

$$z = f(x, y). \tag{1}$$

Нехай областю існування цієї функції є деяка область $D \subset R_2$, а точка $(x_0, y_0) \in D$.

***Означення.*** Якщо існує окіл

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta; y_0 - \delta, y_0 + \delta), \delta > 0,$$

точки $(x_0, y_0)$, який повністю міститься в $D$, і для всіх точок цього околу, крім точки $(x_0, y_0)$, виконується нерівність

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \quad (f(x, y) > f(x_0, y_0)) \tag{2}$$

то точку $(x_0, y_0)$ називають *точкою максимуму* (*мінімуму*) функції $z = f(x, y)$, а число $f(x_0, y_0)$ — *максимумом* (*мінімумом*) цієї функції.

Точки максимуму й мінімуму ще називають *точками екстремуму*, а максимум і мінімум — *екстремумом* цієї функції.

❑ **Приклади**

**1.** Нехай задано функцію

$$z = x^2 + y^2 + 1. \tag{3}$$

Легко бачити, що точка $(0; 0)$ є точкою мінімуму цієї функції. Справді, яку б точку $(x, y)$ площини $xOy$ не взяти (крім точки $(0; 0)$), то

$$f(x, y) > f(0; 0) = 1.$$

Отже, виконується нерівність (2). Число $f(0; 0) = 1$ є мінімумом функції (3).

**2.** Для функції

$$z = -|x-1| - |y-1| \tag{4}$$

точка $(1; 1)$ є точкою максимуму, оскільки для всіх точок площини $xOy$, крім точки $(1; 1)$,

$$f(x, y) < f(1; 1) = 0.$$

Число $f(1; 1) = 0$ є максимумом функції (4).

Надалі окіл $(x_0 - \delta, x_0 + \delta; y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ називатимемо δ-*околом точки* $(x_0, y_0)$.

**Необхідні умови.** У подальшому цікавитиме питання, як знайти екстремальні точки функції $z = f(x, y)$, якщо вони існують. Для цього знайдемо спочатку необхідні умови існування екстремуму функції в точці.

**Т е о р е м а 1.** Якщо точка $(x_0, y_0) \in D \subset \mathbf{R}_2$ є точкою екстремуму для функції (1) і в цій точці існують частинні похідні $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$, то ці похідні дорівнюють нулю:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0; \quad f'_y(x_0, y_0) = 0. \tag{5}$$

Д о в е д е н н я. Зафіксуємо у функції $z = f(x, y)$ змінну $y$, поклавши $y = y_0$. Тоді розглядувана функція перетвориться на функцію однієї змінної $x$:

$$z = f(x, y_0) = f_1(x).$$

Для функції $f_1(x)$ точка $x = x_0$ є точкою екстремуму. Крім цього, функція $f_1(x)$, згідно з умовою цієї теореми, у точці $x = x_0$ має похідну

$$f_1'(x_0) = f'_x(x_0, y_0).$$

Використовуючи необхідну умову існування екстремуму функції однієї змінної, робимо висновок, що

$$f'_x(x_0, y_0) = 0.$$

Аналогічно доводиться, що й $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Теорему доведено.

Таким чином, умови (5) є необхідними умовами того, щоб точка $(x_0, y_0)$ була точкою екстремуму функції $z = f(x, y)$.

Точку, в якій частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю, називають *стаціонарною точкою* цієї функції. Отже, в стаціонарних точках функція може мати екстремум. Щоб знайти стаціонарні точки, потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0; \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

❑ **Приклад**

**3.** Знайти стаціонарні точки функції

$$z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2). \tag{7}$$

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо частинні похідні функції:

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x + y^2) + e^{\frac{x}{2}},$$

$$f'_y(x, y) = 2y\,e^{\frac{x}{2}}.$$

Складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y^2 + 1\right) = 0; \\ 2ye^{\frac{x}{2}} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

З другого рівняння знаходимо $y = 0$, а з першого маємо $x = -2$. Отже, функція (7) має одну стаціонарну точку $(-2; 0)$.

**Достатні умови.** Теорема 1 дає тільки необхідні умови існування екстремуму функції. Стаціонарна точка не завжди є точкою екстремуму функції. Стаціонарні точки є тільки «підозрілими» на екстремальні точки. Так, функція $z = xy$ має частинні похідні

$$f'_x(x, y) = y; \quad f'_y(x, y) = x,$$

які в точці $(0; 0)$ дорівнюють нулю. Отже, точка $(0; 0)$ для цієї функції є стаціонарною. Проте можна бачити, що ця точка не є точкою екстремуму, оскільки який би окіл точки (0, 0) не взяти, в ньому знайдуться точки, в яких функція набуває додатного значення, і точки, в яких функція набуває від'ємного значення.

Тому постає питання про знаходження достатніх умов існування екстремуму функції.

**Теорема 2.** Нехай для функції $z = f(x, y)$ виконуються умови:

1) $(x_0, y_0)$ є для неї стаціонарною точкою;

2) в $\delta$-околі точки $(x_0, y_0)$ функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно.

Тоді якщо число

$$\Delta = AC - B^2 > 0, \tag{9}$$

де

$$A = f''_{x^2}(x_0, y_0), \; B = f''_{xy}(x_0, y_0), \; C = f''_{y^2}(x_0, y_0), \tag{10}$$

то в точці $(x_0, y_0)$ функція $z = f(x, y)$ має екстремум: максимум, якщо $A < 0$, і мінімум, якщо $A > 0$.

Якщо число $\Delta < 0$, то функція $z = f(x, y)$ у стаціонарній точці екстремуму не має.

*Доведення.* Оскільки функція $f(x, y)$ в околі стаціонарної точки $(x_0, y_0)$ має неперервні похідні до другого порядку включно, то її можна розвинути за формулою Тейлора:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y +$$
$$+\frac{1}{2}\Big(f''_{x^2}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x\Delta y +$$
$$+f'_{y^2}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y^2\Big), \tag{11}$$

де $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $0 < \theta < 1$.

Оскільки частинні похідні другого порядку в $\delta$-околі є неперервними функціями, то при малих за модулем значеннях $\Delta x$ і $\Delta y$ ці похідні набирають вигляду

$$f''_{x^2}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) = A + \alpha;$$
$$F''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) = B + \beta;$$
$$f''_{y^2}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) = C + \gamma, \tag{12}$$



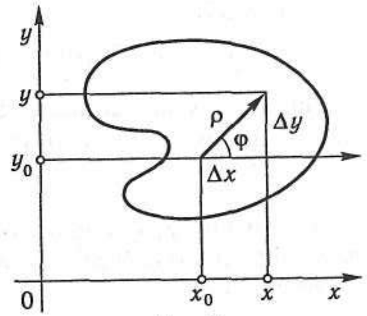

Рис. 35

де $\alpha, \beta, \gamma$ — функції від $\Delta x$ і $\Delta y$ такі, що

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \beta = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \gamma = 0, \tag{13}$$

а числа $A, B, C$ визначають рівностями (10).

Тоді, враховуючи, що $(x_0, y_0)$ — стаціонарна точка (похідні $f'_x$ і $f'_y$ у цій точці дорівнюють нулю), рівність (11) можна, згідно з позначеннями (12), записати так:

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\Big(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 + \alpha\Delta x^2 + 2\beta\Delta x\Delta y + \gamma\Delta y^2\Big), \tag{14}$$

де

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) \tag{15}$$

— повний приріст функції $z = f(x, y)$ у точці $(x_0, y_0)$.

Введемо полярні координати $\rho$ і $\varphi$ (рис. 35). Тоді $\Delta x$ і $\Delta y$ виразяться через $\rho$ і $\varphi$ такими співвідношеннями:

$$\Delta x = \rho\cos\varphi; \quad \Delta y = \rho\sin\varphi; \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}. \tag{16}$$

Приріст $\Delta f(x_0, y_0)$ при цьому матиме вигляд

$$\Delta f(x_0, y_0) =$$
$$= \frac{\rho^2}{2}\Big(A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi + \alpha\cos^2\varphi + 2\beta\sin\varphi\cos\varphi + \gamma\sin^2\varphi\Big). \tag{17}$$

Розглянемо такі випадки.

I. $\Delta > 0$.

Нехай виконується умова (9). Тоді число $A \neq 0$ і, отже, суму перших трьох доданків у співвідношенні (17) можна зобразити так:

$$A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi = \frac{1}{A}\Big((A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + \big(AC - B^2\big)\sin^2\varphi\Big). \tag{18}$$

Вираз у зовнішніх дужках за будь-яких значень $\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, є строго додатним. Отже, функція, що є лівою частиною рівності (18), набуває значень, які за знаком збігаються зі знаком числа $A$ для всіх $\varphi \in [0; 2\pi]$. Оскільки $\left|A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi\right|$ є функцією, неперервною на відрізку $[0; 2\pi]$, то вона на цьому відрізку набуває найменшого додатного значення $m > 0$, тобто

$$\left|A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi\right| \ge m > 0. \tag{19}$$

Розглянемо

$$\left|\alpha\cos^2\varphi + 2\alpha\beta\sin\varphi\cos\varphi + \gamma\sin^2\varphi\right| \le |\alpha| + 2|\alpha||\beta| + |\gamma|.$$

Вираз у правій частині цієї нерівності за формулами (13) при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$ прямує до нуля. Отже, при малих значеннях $|\Delta x|$ і $|\Delta y|$

$$|\alpha| + 2|\alpha||\beta| + |\gamma| < m.$$

Таким чином, при малих значеннях $|\Delta x|$ і $|\Delta y|$ значення виразу в правій частині рівності (17) збігаються за знаком зі знаком числа $A$.

Якщо $A > 0$, то

$$\Delta f(x_0, y_0) > 0,$$

або

$$f(x, y) > f(x_0, y_0). \tag{20}$$

Якщо $A < 0$, то

$$f(x, y) < f(x_0, y_0). \tag{21}$$

Таким чином, якщо $A > 0$, то в стаціонарній точці $(x_0, y_0)$ функція $z = f(x, y)$ має мінімум.

Якщо $A < 0$, то функція в стаціонарній точці має максимум.

II. $\Delta < 0$.

Якщо число $A \ne 0$, то виконується рівність (18). При $\varphi = \varphi_1 = 0$ вираз у дужках співвідношення (18) додатний, він дорівнює $A^2$.

Якщо $\varphi = \varphi_2$, де $\varphi_2$ — один із коренів рівняння

$$A\cos\varphi + B\sin\varphi = 0, \quad \sin\varphi \ne 0,$$

то вираз у дужках співвідношення (18) від'ємний, він дорівнює $\Delta\sin^2\varphi_2$.

При досить малих значеннях $|\Delta x|$ і $|\Delta y|$ сума останніх трьох доданків у рівності (17) як при $\varphi = \varphi_1$, так і при $\varphi = \varphi_2$ є досить малою.

Отже, приріст $\Delta f(x_0, y_0)$ на променях $\varphi = \varphi_1$ і $\varphi = \varphi_2$ матиме значення протилежних знаків. Тому точка $(x_0, y_0)$ не є точкою екстремуму.

Якщо число $A = 0$, то

$$A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi = 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi =$$
$$= \sin\varphi(2B\cos\varphi + C\sin\varphi). \tag{22}$$

Оскільки $\Delta < 0$, то $B \ne 0$, а отже, кут $\varphi_1$ можна визначити так, що $|C|\sin\varphi_1 < 2$. Тоді при $\varphi = \varphi_1$ і $\varphi = -\varphi_1$ вираз (22) матиме значення, протилежні за знаком. Таким чином, приріст $\Delta f(x_0, y_0)$ на променях $\varphi = \varphi_1$ і $\varphi = -\varphi_1$ матиме значення протилежних знаків. Точка $(x_0, y_0)$ не є екстремальною.

Теорему доведено.

Зазначимо, що теорема 2 не дає відповіді для того випадку, коли $\Delta = 0$. Цей випадок не досліджуватимемо.



Із теорем 1 і 2 випливає таке правило дослідження функції двох змінних на екстремум.

Щоб дослідити функцію двох змінних $z = f(x, y)$ на екстремум, потрібно:

1) знайти стаціонарні точки цієї функції;
2) для кожної стаціонарної точки обчислити число $\Delta = AC - B^2$.

Якщо в стаціонарній точці $\Delta > 0$, то ця стаціонарна точка є точкою екстремуму; при $A > 0$ — точкою мінімуму, при $A < 0$ — точкою максимуму.

Якщо в стаціонарній точці число $\Delta < 0$, то ця стаціонарна точка не є екстремальною.

❑ **Приклади**

Дослідити на екстремум функції

**4.** $z = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right)$.

Р о з в ' я з а н н я. Ця функція має одну стаціонарну точку $(-2; 0)$. Знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$f''_{x^2} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}\left(x, y^2\right) + e^{\frac{x}{2}}, \quad A = f''_{x^2}(-2, 0) = \frac{1}{2e};$$
$$f''_{xy} = ye^{\frac{x}{2}}, \quad B = f''_{xy}(-2, 0) = 0;$$
$$f''_{y^2} = 2e^{\frac{x}{2}}, \quad C = f''_{y^2}(-2, 0) = \frac{2}{e}.$$

Знайдемо число $\Delta$:

$$\Delta = AC - B^2 = \frac{1}{2e}\cdot\frac{2}{e} - 0^2 = \frac{1}{e^2} > 0.$$

Отже, точка $(-2, 0)$ є екстремальною, а саме точкою мінімуму $\left(A = \frac{1}{2e} > 0\right)$. Цей мінімум дорівнює

$$f(-2, 0) = -\frac{2}{e}.$$

**5.** $z = xy$.

Р о з в ' я з а н н я. Стаціонарною точкою для заданої функції є (0, 0). Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$f''_{x^2} = 0 = A; \quad f''_{xy} = 1 = B; \quad f''_{y^2} = 0 = C.$$

Тоді

$$\Delta = AC - B^2 = -1 < 0.$$

Отже, для функції $z = xy$ стаціонарна точка (0, 0) не є екстремальною.

**6.** $z = 3x^3y - x^2y^2 + x$. (23)

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо частинні похідні

$$f'_x = 9x^2y - 2xy^2 + 1;$$
$$f'_y = 3x^3 - 2x^2y.$$

Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 9x^2y - 2xy^2 + 1 = 0; \\ 3x^3 - 2x^2y = 0. \end{cases} \qquad (24)$$

З другого рівняння системи (24) знаходимо

$$3x^3 - 2x^2y = x^2(3x - 2y) = 0$$

або

$$x = 0 \text{ і } 3x - 2y = 0.$$

Проте $x = 0$ не задовольняє перше рівняння системи (24). Тому розглянемо систему

$$\begin{cases} 9x^2y - 2xy^2 + 1 = 0; \\ 3x - 2y = 0. \end{cases} \qquad (25)$$

З другого рівняння системи (25) маємо

$$y = \frac{3}{2}x.$$

Підставивши це значення $y$ у перше рівняння системи (25), дістанемо

$$9x^3 + 1 = 0,$$

звідси

$$x = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}.$$

Отже, точка $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}, -\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\right)$ є стаціонарною для функції (23). Обчислимо

$$f''_{x^2} = 18xy - 2y^2, \quad A = f''_{x^2}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}, -\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\right) = \frac{15}{2\sqrt[3]{3}};$$

$$f''_{y^2} = -2x^2, \quad C = f''_{y^2}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}, -\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\right) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{3}};$$

$$f''_{xy} = 9x^2 - 4xy, \quad B = f''_{xy}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}, -\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{3}};$$

$$\Delta = AC - B^2 < 0.$$

Функція (23) екстремуму не має.

**Найбільше (найменше) значення функції.** Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена й неперервна в обмеженій замкненій області $\overline{D} \subset \mathbf{R}_2$ і має в ній скінченні частинні похідні першого порядку. За теоремою Вейєрштрасса задана функція в області $\overline{D}$ набуває найбільшого і найменшого значень, тобто існує хоча б одна точка $(x_1, y_1) \in \overline{D}$, в якій значення функції серед усіх інших значень є найбільшим, і існує хоча б одна точка $(x_2, y_2) \in \overline{D}$, в якій значення функції серед усіх інших значень є найменшим.

Зазначимо, що теорема Вейєрштрасса не дає способу знаходження точок $(x_1, y_1)$ і $(x_2, y_2)$, тоді як методи визначення екстремуму функції в окремих випадках дають змогу знайти її найбільше й найменше значення.



Справді, нехай точка $(x_0, y_0)$, в якій функція набуває найбільшого (найменшого) значення, знаходиться всередині області $\overline{D}$. Звідси випливає, що $(x_0, y_0)$ є точкою екстремуму заданої функції. Отже, тоді точки, в яких функція набуває найбільшого (найменшого) значення, містяться серед точок екстремуму. Проте функція $z = f(x, y)$ свого найбільшого (найменшого) значення може набувати в точках, що лежать на межі області. Дістанемо таке правило.

Щоб знайти найбільше (найменше) значення функції $z = f(x, y)$, заданої і неперервної в обмеженій замкненій області $\overline{D} \subset \mathbf{R}_2$, потрібно:

1) знайти всі внутрішні точки області $\overline{D}$, в яких функція може мати екстремум, і якщо цих точок скінченне число, то обчислити значення функції в цих точках;

2) знайти, якщо це можливо, значення функції, яке є найбільшим (найменшим) серед усіх значень функції, яких вона набуває на межі цієї області;

3) вибрати найбільше (найменше) число серед значень функції, яких вона набуває в точках, «підозрілих» на екстремум, і порівняти його з найбільшим (найменшим) значенням функції на межі області. Більше (менше) з цих чисел і є найбільшим (найменшим) значенням функції в області $\overline{D}$.

❑ **Приклад**

**7.** Знайти найбільше і найменше значення функції

$$z = x^2 + y^2 - xy + x + y, \qquad (26)$$

у трикутнику, обмеженому прямими $x = 0$, $y = 0$, $x + y = -3$.

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо стаціонарні точки функції, що знаходяться в трикутнику $AOB$ (рис. 36). Для цього знаходимо похідні

$$f'_x = 2x - y + 1; \quad f'_y = 2y - x + 1.$$

Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0; \\ 2y - x + 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язками цієї системи є $x = -1, y = -1$.

Отже, функція (26) має одну стаціонарну точку $(-1, -1)$, яка лежить всередині цього трикутника. Точка $(-1, -1)$ є стаціонарною для функції (26). Знайдемо значення функції в стаціонарній точці:

$$z = f(-1, -1) = -1.$$

Досліджуємо цю функцію на межі області, тобто на сторонах трикутника $AOB$.

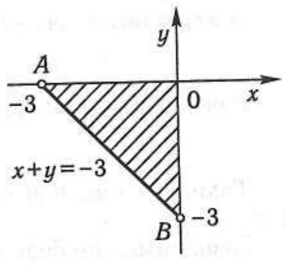

**Рис. 36**

I. Візьмемо сторону $AO$. Тут $y = 0$, тому функція (26) вироджується у функцію однієї змінної $x$:

$$z_1 = x^2 + x, \qquad (27)$$

заданої на відрізку $[-3, 0]$. Знаходимо найбільше і найменше значення цієї функції на відрізку $[-3, 0]$. Для цього визначимо її стаціонарні точки. Маємо

$$z_1' = 2x + 1 = 0,$$

звідси $x=-\frac{1}{2}$ є стаціонарною точкою функції (27). Ця точка знаходиться всередині відрізка $[-3, 0]$. Обчислимо значення заданої функції в стаціонарній точці

$$z_{11}=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{-1}{4}.$$

Обчислимо значення функції (27) на кінцях відрізка $[-3, 0]$:

$$z_{12}=(-3)^2-3=9-3=6,\quad z_{13}=0^2-0=0.$$

Отже, на відрізку $[-3, 0]$ функція (27) набуває найбільшого і найменшого значень відповідно в точках $x=-3$ і $x=-0{,}5$, при цьому

$$z_{\text{найб}}=z_{12}=6,\quad z_{\text{найм}}=z_{13}=0. \tag{28}$$

II. Досліджуємо функцію (26) на стороні $OB$. Тут $x=0$ і функція (26) набирає вигляду

$$z_2=y^2+y, \tag{29}$$

де $-3\le y\le 0$. Оскільки функція (29) виражається тією самою формулою, що й функція (27), і маємо той самий відрізок $[-3; 0]$, то нових точок, в яких функція набувала б найбільшого (найменшого) значення, не дістанемо.

III. Беремо сторону $AB$

$$y=-3-x.$$

Функція (26) набирає вигляду

$$z_3=3x^2+9x+6, \tag{30}$$

де $x$ змінюється на відрізку $[-3; 0]$. Знаходимо

$$z_3'=6x+9=0,$$

звідси

$$x=-\frac{3}{2}\in[-3; 0]$$

є стаціонарною точкою функції (30). Обчислимо значення функції (30) у цій точці:

$$z_{31}=3\left(-\frac{3}{2}\right)^2+9\left(-\frac{3}{2}\right)+6=-\frac{3}{4}.$$

На кінцях відрізка $[-3; 0]$ функція набуває значень:

$$z_{32}=3(-3)^2+9(-3)+6=6;$$
$$z_{33}=3\cdot 0^2+9\cdot 0+6=6.$$

Отже, найменше значення функції (30) має в стаціонарній точці $x=-\frac{3}{2}$:

$$z_{\text{найм}}=-\frac{3}{4}.$$

Найбільше значення функція має на кінцях відрізка $[-3; 0]$:

$$z_{\text{найб}}=6.$$

Таким чином, найбільше значення функції (26) дорівнює 6, найменше — 1.

Зазначимо, що було докладно вивчено екстремум на прикладі функції двох змінних. Проте значна частина міркувань залишається справедливою й для функцій більше ніж двох змінних. Зокрема, якщо в точці $\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)\in D\subset \mathbf{R}_n$ функція $n>2$ змінних

$$u=f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) \tag{31}$$

має екстремум і в цій точці існують частинні похідні першого порядку, то вони дорівнюють нулю:

$$f'_{x_i}\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)=0,\quad i=1, 2, \dots, n. \tag{32}$$

Отже, те, що частинні похідні першого порядку в точці дорівнюють нулю, є необхідною умовою того, що ця точка для функції була точкою екстремуму.

Точку $\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)$, в якій виконуються умови (32), називають *стаціонарною точкою функції* (31).

Стаціонарні точки є «підозрілими» на точки екстремуму функції. Щоб знайти стаціонарні точки функції (31), потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} f'_{x_1}\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)=0; \\ f'_{x_2}\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)=0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f'_{x_n}\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)=0 \end{cases} \tag{33}$$

з $n$ невідомими $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Розв'язки системи (33) і визначають координати стаціонарних точок.

Правило знаходження найбільшого (найменшого) значення функції $n$ змінних залишається таким самим, як і для функції двох змінних.

Достатні умови існування екстремуму функції $n>2$ змінних значно складніші, ніж достатні умови для функції двох змінних. Тому їх тут не наводимо.

## 2.17
## УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ

Було розглянуто екстремум функції, коли на незалежні змінні не накладалося ніяких додаткових умов, а тільки вимагалося, щоб екстремальні точки належали області існування функції. Проте на практиці зустрічаються такі екстремальні задачі, коли на незалежні змінні накладаються додаткові умови.

Так, нехай потрібно знайти екстремум функції $z=f(x, y)$ не в усій області існування цієї функції $D\subset \mathbf{R}_2$, а тільки в точках деякої кривої

$$\varphi(x, y)=0, \tag{1}$$

яка лежить в області $D$. Такий екстремум називають *умовним* (розглянутий вище екстремум називають *безумовним*). Зазначимо, якщо рівняння

(1) допускає розв'язання відносно однієї зі змінних, то, підставивши це значення у функцію $z = f(x, y)$, матимемо безумовний екстремум для функції однієї змінної.

Існує метод дослідження функції на умовний екстремум (*метод Лагранжа*), який не потребує розв'язання рівнянь вигляду (1) чи системи таких рівнянь відносно деяких змінних.

**Метод невизначених множників Лагранжа.** Не зменшуючи загальності, з'ясуємо суть цього методу на прикладі функції трьох змінних.

Отже, нехай функція

$$u = f(x, y, z) \tag{2}$$

задана в деякій області $\Omega \subset \mathbf{R}_3$, а на незалежні змінні $x, y, z$ накладено умови

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0; \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

(умов має бути менше, ніж незалежних змінних).

Рівняння (3) називають *рівняннями зв'язку.*

***Означення.*** Точку $(x_0, y_0, z_0)$, координати якої задовольняють рівняння зв'язку (3), називають *точкою умовного максимуму* (*мінімуму*) функції $u = f(x, y, z)$, якщо існує окіл

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta, y_0 - \delta, y_0 + \delta, z_0 - \delta, z_0 + \delta) \subset \Omega$$

цієї точки такий, що для всіх точок, крім точки $(x_0, y_0, z_0)$ цього околу, координати яких задовольняють рівнянням зв'язку (3), виконується нерівність

$$f(x, y, z) < f(x_0, y_0, z_0) \big(f(x, y, z) > f(x_0, y_0, z_0)\big).$$

Число $f(x_0, y_0, z_0)$ при цьому називають *умовним максимумом* (*мінімумом*). Точку умовного максимуму (мінімуму) називають *точкою умовного екстремуму,* а число $f(x_0, y_0, z_0)$ — *умовним екстремумом.*

Виведемо необхідні умови того, щоб точка $(x_0, y_0, z_0)$ була точкою умовного максимуму (мінімуму) функції (2). Припустимо, що $(x_0, y_0, z_0)$ є точкою умовного екстремуму і, крім того, виконуються умови:

1) функція $f(x, y, z)$ в $\delta$-околі точки $(x_0, y_0, z_0)$ має неперервні частинні похідні першого порядку;

2) функції $F(x, y, z), G(x, y, z)$ в $\delta$-околі точки $(x_0, y_0, z_0)$ задовольняють умови теореми 3, п. 15, про існування двох неявних функцій заданих системою рівнянь (3).

Згідно з припущенням 2), система рівнянь (3) задає в деякому $\delta$-околі точки $(x_0, y_0, z_0)$ дві функції: $y = \varphi(x); z = \psi(x)$.



Отже, мають виконуватися тотожності

$$\begin{cases} F(x, \varphi(x), \psi(x)) \equiv 0; \\ G(x, \varphi(x), \psi(x)) \equiv 0. \end{cases} \tag{4}$$

Тоді із системи (4) знаходимо

$$\begin{aligned} &F'_x(x_0, y_0, z_0)dx + F'_y(x_0, y_0, z_0)dy + F'_z(x_0, y_0, z_0)dz = 0; \\ &G'_x(x_0, y_0, z_0)dx + G'_y(x_0, y_0, z_0)dy + G'_z(x_0, y_0, z_0)dz = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

де $y = \varphi(x), z = \psi(x)$.

Крім того, якщо значення $y = \varphi(x)$ і $z = \psi(x)$ підставити у функцію (2), то задача про умовний екстремум для функції трьох змінних у точці $(x_0, y_0, z_0)$ зводитиметься до задачі про безумовний екстремум для складеної функції однієї змінної

$$u = f(x, \varphi(x), \psi(x)). \tag{6}$$

У цьому випадку похідна першого порядку від функції (6) у точці $x_0$ дорівнюватиме нулю. Знайдемо похідну

$$\frac{du}{dx} = f'_x(x, y, z) + f'_y(x, y, z)y'(x) + f'_z(x, y, z)z_1(x), \tag{7}$$

звідси

$$du = f'_x(x, y, z)dx + f'_y(x, y, z)dy + f'_z(x, y, z)dz. \tag{8}$$

Якщо при $x = x_0$ похідна (7) перетворюється на нуль, то й диференціал (8) при $x = x_0$ також дорівнює нулю, тобто

$$f'_x(x_0, y_0, z_0)dx + f'_y(x_0, y_0, z_0)dy + f'_z(x_0, y_0, z_0)dz = 0. \tag{9}$$

Помножимо рівності (5) відповідно на деякі, поки що не визначені, множники $\lambda_1$ і $\lambda_2$. Результати почленно додамо до рівності (9). Матимемо

$$\begin{aligned} &\big(f'_x(x_0, y_0, z_0) + \lambda_1 F'_x(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 G'_x(x_0, y_0, z_0)\big)dx + \\ &+\big(f'_y(x_0, y_0, z_0) + \lambda_1 F'_y(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 G'_y(x_0, y_0, z_0)\big)dy + \\ &+\big(f'_z(x_0, y_0, z_0) + \lambda_1 F'_z(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 G'_z(x_0, y_0, z_0)\big)dz = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Виберемо множники (числа) $\lambda_1$ і $\lambda_2$ так, щоб коефіцієнти при $dy$ і $dz$ у співвідношенні (10) дорівнювали нулю, тобто

$$\begin{cases} f'_y(x_0, y_0, z_0) + \lambda_1 F'_y(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 G'_y(x_0, y_0, z_0) = 0; \\ f'_z(x_0, y_0, z_0) + \lambda_1 F'_z(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 G'_z(x_0, y_0, z_0) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Система (11) є системою двох рівнянь з невідомими $\lambda_1$ і $\lambda_2$. Ця система має єдиний розв'язок, оскільки її визначник

$$I = \begin{vmatrix} F'_y(x_0, y_0, z_0) & G'_y(x_0, y_0, z_0) \\ F'_z(x_0, y_0, z_0) & G'_z(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

(див. теорему 3 п. 2.15).

Нехай числа $\lambda_1 = \lambda_1^0, \lambda_2 = \lambda_2^0$ є розв'язками системи (11). Підставляючи ці числа у співвідношення (10) і (11), дістанемо

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0, z_0) + \lambda_1^0 F'_x(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2^0 G'_x(x_0, y_0, z_0) = 0; \\ f'_y(x_0, y_0, z_0) + \lambda_1^0 F'_y(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2^0 G'_y(x_0, y_0, z_0) = 0; \\ f'_z(x_0, y_0, z_0) + \lambda_1^0 F'_z(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2^0 G'_z(x_0, y_0, z_0) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Отже, якщо точка $(x_0, y_0, z_0)$ є точкою умовного екстремуму функції (2), то її координати мають задовольняти рівняння зв'язку (3) та рівняння (12). Рівності (3) при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ та рівності (12) і є необхідними умовами того, щоб точка $(x_0, y_0, z_0)$ була точкою умовного екстремуму.

Таким чином, за методом Лагранжа координати точок можливого умовного екстремуму знаходять із системи рівнянь:

$$\begin{cases} f'_x(x, y, z) + \lambda_1 F'_x(x, y, z) + \lambda_2 G'_x(x, y, z) = 0; \\ f'_y(x, y, z) + \lambda_1 F'_y(x, y, z) + \lambda_2 G'_y(x, y, z) = 0; \\ f'_z(x, y, z) + \lambda_1 F'_z(x, y, z) + \lambda_2 G'_z(x, y, z) = 0; \\ F(x, y, z) = 0; \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases} \tag{13}$$

яка містить п'ять рівнянь із п'ятьма невідомими $x$, $y$, $z$, $\lambda_1$, $\lambda_2$.

❑ **Приклад**

Знайти можливі точки умовного екстремуму функції

$$u = xyz,$$

якщо

$$\begin{cases} x + y - z = 3; \\ x - y - z = 8. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} yz + \lambda_1 + \lambda_2 = 0; \\ xz + \lambda_1 - \lambda_2 = 0; \\ xy - \lambda_1 - \lambda_2 = 0; \\ x + y - z = 3; \\ x - y - z = 8. \end{cases} \tag{14}$$



Розв'язуючи цю систему, знаходимо: $x = \frac{11}{4}$; $y = -\frac{5}{2}$; $z = -\frac{11}{4}$.

Отже, точка $\left(\frac{11}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}\right)$ може бути точкою умовного екстремуму. Можна бачити, що ця точка і є точкою умовного екстремуму. Справді, з рівнянь (14) маємо $y = -\frac{5}{2}; z = x - \frac{11}{2}$.

Функція трьох змінних перетворюється на функцію однієї змінної

$$u = -\frac{5}{2}x\left(x - \frac{11}{2}\right) = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{55}{4}x. \tag{15}$$

Дослідимо цю функцію на екстремум

$$u' = -5x + \frac{55}{4} = 0,$$

звідси $x = \frac{11}{4}$ є стаціонарною точкою. Знайдемо $u'' = -5 < 0$.

Отже, функція (15) в точці $x = \frac{11}{4}$ має максимум. Тому й розглядувана функція в точці $x = \frac{11}{4}$; $y = -\frac{5}{2}$; $z = \frac{1}{4} - \frac{11}{2} = -\frac{11}{4}$ має умовний максимум

$$u_{\max} = \frac{11}{4}\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{11}{4}\right) = \frac{605}{32}.$$

# Інтегральне числення функцій кількох змінних

## РОЗДІЛ 3

### 3.1 КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ПЕРШОГО РОДУ

У цьому розділі викладено основні питання, пов'язані з інтегруванням функцій кількох змінних. При цьому розглядатимемо інтеграли від функцій, заданих на кривій, на плоскій фігурі (області), поверхні, просторовій фігурі (області). Залежно від цього інтеграли відповідно називають *криволінійними, подвійними, поверхневими, потрійними.*

Спочатку розглянемо криволінійний інтеграл першого роду. До таких інтегралів приводить, наприклад, задача про обчислення маси матеріальної кривої.

Нехай на площині $xOy$ задано деяку спрямлювану криву, вздовж якої розповсюджено масу (рис. 37).

Якщо крива $\overset{\frown}{AB}$ однорідна, то відношення маси цієї кривої до її довжини називають *лінійною густиною.* Отже, якщо $m$ — маса однорідної кривої $\overset{\frown}{AB}$, а $S$ — її довжина, то лінійну густину $\rho$ визначають за формулою

$$\rho = \frac{m}{S}.$$

Якщо крива неоднорідна, то густина в кожній її точці буде різною. Для визначення густини кривої, наприклад, в точці $M(x, y)$ беруть ділянку кривої, що містить цю точку. Тоді число

$$\rho_c = \frac{\Delta m}{\Delta S},$$

де $\Delta m$ — маса цієї ділянки кривої, а $\Delta S$ — її довжина, називають *середньою густиною на цій ділянці.*

Зрозуміло, що середня густина на різних ділянках неоднорідної кривої різна. Чим менша ділянка кривої, тим точніше середня густина визначатиме значення густини в точці $M$. Тому природно за лінійну густину кривої в точці $M(x, y)$ взяти границю

$$\rho(M) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta S},$$

або

$$\rho(M) = \frac{dm}{dS}.$$



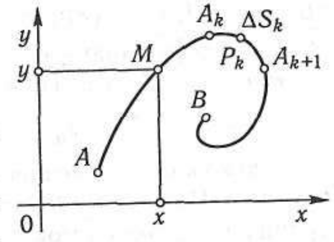


Рис. 37

Проте на практиці доводиться частіше розв'язувати обернену задачу, а саме: за відомою лінійною густиною $\rho = \rho(M)$ як неперервною функцією точки $M(x, y)$ знайти масу кривої.

Для розв'язання цієї задачі застосуємо типовий для інтегрального числення спосіб. Припустивши, що крива $\overset{\frown}{AB}$ не має подвійних точок (точок, в яких крива сама себе перетинає), розіб'ємо цю криву на $n$ частин точками $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$. Позначимо ділянку кривої, що знаходиться між точками $A_k$ і $A_{k+1}$, через $\overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$, а довжину цієї ділянки — через $\Delta S_{k,\, k=0,1,\ldots,n-1}$. На кожній з цих ділянок виберемо довільну точку $P_k(\xi_k, \eta_k)$ й утворимо суму

$$\sum_{k=0}^{n-1} \rho(P_k)\Delta S_k = \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k. \qquad (1)$$

Сума (1) дає наближене значення маси кривої $\overset{\frown}{AB}$, і чим менша кожна ділянка дуги $\overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$, тим побудована сума (1) дає точніше значення маси $m$ цієї кривої.

Тому, якщо позначити через

$$\lambda = \max_{0 \le k \le n-1} \{\Delta S_k\}$$

найбільшу довжину ділянок кривих $\overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$, то природно за масу кривої $\overset{\frown}{AB}$ взяти число

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k. \qquad (2)$$

Границю (2) називають *криволінійним інтегралом першого роду функції* $\rho = \rho(x, y)$ *по кривій* $\overset{\frown}{AB}$.

Отже, задача про обчислення маси матеріальної кривої з її змінною лінійною густиною $\rho = \rho(x, y)$ приводить до обчислення границі виду (2), тобто обчислення криволінійного інтеграла першого роду.

Щоб вивести формулу для обчислення криволінійного інтеграла першого роду, абстрагуємося від фізичного змісту функції $\rho = \rho(x, y)$ і розглянемо довільну функцію двох змінних

$$z = f(x, y).$$

Нехай у площині $xOy$ задано спрямлювану криву $\overset{\frown}{AB}$, параметричні рівняння якої

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad 0 \le s \le S, \qquad (3)$$

де $x(s)$, $y(s)$ — неперервні функції на відрізку $[0; S]$. За параметр взято довжину дуги $s$, що пов'язує початкову точку $A(x(0), y(0))$ зі змінною точкою $M(x(s), y(s))$; $S$ — довжина всієї кривої $\overset{\frown}{AB}$. Нехай на кривій $\overset{\frown}{AB}$ задано функцію двох змінних $z = f(x, y)$.

Утворимо $T$-розбиття відрізка $[0; S]$ на частини:

$$T : 0 = s_0 < s_1 < ... < s_k < s_{k+1} < ... < s_n = S.$$

Тоді кожному значенню цього розбиття на кривій $\overset{\frown}{AB}$ відповідає певна точка. Позначимо ці точки через $A = A_0, A_1, ..., A_k, A_{k+1}, ..., A_n = B$. Координати цих точок можна знайти за допомогою рівнянь (3), підставивши у них відповідні значення параметра $s$, зокрема координати точки $A_k$ визначають за формулами

$$x_k = x(s_k);\ y_k = y(s_k);\ k = 0, 1, ..., n.$$

Візьмемо на відрізку $[s_k; s_{k+1}]$ довільну точку $\tau_k \in [s_k; s_{k+1}]$ і утворимо суму

$$\sigma(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x(\tau_k), y(\tau_k))\Delta s_k, \tag{4}$$

де $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k, k = 0, 1, ..., n-1$.

Суму (4) називають *інтегральною сумою для функції* $f(x, y)$, побудованою для цього $T$-розбиття.

Нехай $\lambda = \lambda(T)$ — найбільше з чисел $\Delta S_k$, тобто

$$\lambda(T) = \max_{0 \le k \le n-1} \Delta s_k.$$

Надалі розглядатимемо тільки такі розбиття відрізка $[0; S]$ на частини, за яких зі збільшенням числа $n$ число $\lambda(T) \to 0$.

***Означення.*** Якщо існує границя інтегральної суми (4) при $\lambda(T) \to 0$, то цю границю називають *криволінійним інтегралом першого роду функції* $f(x, y)$ *по кривій* $\overset{\frown}{AB}$ і записують

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x(s), y(s))ds \quad \text{або} \quad \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds.$$

Отже, за означенням

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x(s), y(s))ds = \lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x(\tau_k), y(\tau_k))\Delta s_k. \tag{5}$$

Зауважимо, що означення границі інтегральної суми (4) таке, як і означення границі інтегральної суми для функції однієї змінної, заданої на відрізку $[a; b]$.

Нехай функція $f(x, y)$ неперервна на кривій $\overset{\frown}{AB}$ (у подальшому розглядатимемо тільки такі функції), тоді сума

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x(\tau_k), y(\tau_k))\Delta s_k \tag{6}$$



є інтегральною сумою, побудованою для неперервної функції однієї змінної

$$F(s) = f(x(s), y(s))$$

на відрізку $[0; S]$. Отже, існує границя суми (6) при $\lambda(T) \to 0$, яка дорівнює визначеному інтегралу

$$\int_0^S f(x(s), y(s))ds.$$

**Теорема.** Якщо функція $f(x, y)$ задана на спрямлюваній кривій $\overset{\frown}{AB}$, рівняння якої $x = x(s)$, $y = y(s)$, $0 \le s \le S$, є неперервною, і функції $x(s)$, $y(s)$ є неперервними на відрізку $[0; S]$, то криволінійний інтеграл першого роду від функції $f(x, y)$ по кривій $\overset{\frown}{AB}$ існує і дорівнює

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds = \int_0^S f(x(s), y(s))ds. \tag{7}$$

Формула (7) дає змогу обчислити криволінійний інтеграл першого роду у випадку, коли крива $\overset{\frown}{AB}$ задана параметричними рівняннями, де за параметр взято довжину кривої. Це ускладнює застосування формули (7), оскільки потрібно наперед обчислити довжину кривої, а також мати спеціально параметричне зображення рівнянь, якими вона задається.

Отже, нехай крива $\overset{\frown}{AB}$ задана рівняннями

$$x = x(t), y = y(t), \alpha \le t \le \beta, \tag{8}$$

де за параметр взято довільну величину $t$. Припустимо, що функції $x(t)$ і $y(t)$ неперервні разом із похідними $x'(t)$ і $y'(t)$ на відрізку $[\alpha; \beta]$. Така крива є спрямлюваною і довжина кривої $\overset{\frown}{AM}$, де $M$ — довільна точка на кривій, дорівнює

$$s = \int_\alpha^t \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt,$$

звідси

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt.$$

Зробивши заміну змінних у визначеному інтегралі формули (7), дістанемо таку формулу для обчислення криволінійного інтеграла першого роду:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt. \tag{9}$$

Якщо крива $\overset{\frown}{AB}$ задана в прямокутній системі координат одним із рівнянь $y=\varphi(x), a\le x\le b$, або $x=\psi(y), k\le y\le l$, і функції $\varphi(x), \psi(y)$ неперервні відповідно на відрізках $[a;b]$ і $[k;l]$ разом із похідними першого порядку $\varphi'(x)$ і $\psi'(y)$, то для обчислення криволінійного інтеграла першого роду дістанемо такі формули:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds=\int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}\,dx; \tag{10}$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds=\int_k^l f(\psi(y),y)\sqrt{1+[\psi'(y)]^2}\,dy. \tag{11}$$

Якщо крива $\overset{\frown}{AB}$ задана рівнянням у полярній системі координат

$$\rho=\rho(\theta),\quad \theta_1\le\theta\le\theta_2, \tag{12}$$

де $\rho(\theta)$ і її похідна першого порядку $\rho'(\theta)$ є функціями, неперервними на відрізку $[\theta_1;\theta_2]$, то криволінійний інтеграл першого роду обчислюють за формулою

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds=\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta. \tag{13}$$

❑ **Приклади**

**1.** Знайти масу дуги параболи $y^2=2px, 0\le x\le\frac{p}{2}$, якщо лінійна густина $\rho(x,y)$ у будь-якій точці $M(x,y)$ параболи дорівнює $|y|$.

Р о з в ' я з а н н я. З попереднього випливає, що шукана маса дорівнює криволінійному інтегралу першого роду

$$m=\int_{\overset{\frown}{AB}}|y|ds.$$

Для обчислення цього інтеграла скористаємося формулою (10). Знайдемо диференціал дуги

$$ds=\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx.$$

З рівняння кривої знаходимо

$$2yy'=2p,$$

звідси

$$y'=\frac{p}{y}.$$

Тоді

$$ds=\sqrt{1+\frac{p}{2x}}\,dx.$$



Оскільки параболою є лінія, симетрична відносно осі $Ox$, то

$$m=\int_{\overset{\frown}{AB}}|y|ds=2\int_0^{\frac{p}{2}}\sqrt{2px}\sqrt{1+\frac{p}{2x}}\,dx=$$

$$=2\int_0^{\frac{p}{2}}\sqrt{2px+p^2}\,dx=\left.\frac{2\left(2px+p^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3p}\right|_2^{\frac{p}{2}}=\frac{2p^2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

**2.** Обчислити криволінійний інтеграл першого роду

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} xyds,$$

де $\overset{\frown}{AB}$ — частина еліпса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

що лежить у першому квадранті.

Р о з в ' я з а н н я. Скористаємося формулою (9). Для цього дугу еліпса запишемо в параметричній формі

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}.$$

Знайдемо диференціал дуги

$$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt.$$

Тоді

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} xyds=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=$$

$$=\frac{ab}{3\left(a^2-b^2\right)}\left.\left(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{ab}{3\left(a^2-b^2\right)}\left(a^3-b^3\right)=\frac{ab\left(a^2+ab+b^2\right)}{3(a+b)}.$$

Криволінійний інтеграл першого роду крім обчислення мас матеріальних дуг застосовується також при розв'язуванні інших задач. Зокрема, при обчисленні координат центра мас кривої; обчисленні моментів інерції матеріальної кривої відносно точки або прямої; обчисленні сили, з якою матеріальна крива притягує матеріальну точку, тощо.

Розглянемо останню задачу.

Нехай маємо дві матеріальні точки $M$ і $M_0$, масами яких відповідно є $m$ і $m_0$, а відстань між цими точками дорівнює $r$. За законом Ньютона сила $F$, з якою точка $M$ притягує точку $M_0$, дорівнює

$$F = k\frac{m_0 m}{r^2}, \qquad (14)$$

де $k$ — коефіцієнт пропорційності, що залежить від одиниць виміру. Надалі припускатимемо, що $k=1$. Це завжди можна зробити, вибираючи відповідним чином одиниці виміру.

Розглянемо спрямлювану криву $\overset{\frown}{AB}$, вздовж якої суцільно розповсюджено масу. Нехай відомо лінійну густину цієї кривої як функцію точки

$$\rho = \rho(M) = \rho(x, y),$$

де $x$ і $y$ — координати точки $M$.

Розіб'ємо криву $\overset{\frown}{AB}$ на $n$ частин точками $A = A_0$, $A_1, \dots$, $A_k$, $A_{k+1}, \dots$, $A_n = B$. Візьмемо на кривій $\overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$ довільну точку $C_k(x_k, y_k)$. Тоді вважатимемо, що маса кривої $\overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$ зосереджена в точці $C_k$ і наближено дорівнює $\rho(x_k, y_k)\Delta s_k$, де $\Delta s_k$ — довжина кривої $\overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$.

Сила $F_k$, з якою точка $C_k$ притягує точку $M_0$, згідно з формулою (14), дорівнює

$$F_k = \frac{m_0 \rho(x_k, y_k)\Delta s_k}{r_k^2}.$$

Нехай вектор $\overrightarrow{F_k}$ утворює з додатним напрямком осі $Ox$ кут $\theta_k$. Тоді проекціями $X_k$, $Y_k$ цієї сили на координатні осі є

$$X_k = \frac{m_0 \rho(x_k, y_k)\Delta s_k}{r_k^2}\cos\theta_k;$$

$$Y_k = \frac{m_0 \rho(x_k, y_k)\Delta s_k}{r_k^2}\sin\theta_k. \qquad (15)$$

Якщо на кожній кривій $\overset{\frown}{A_0 A_1}$, $\overset{\frown}{A_1 A_2}, \dots$, $\overset{\frown}{A_{n-1} B}$ вибирати довільно точки $C_0(x_0, y_0)$, $C_1(x_1, y_1), \dots$, $C_{n-1}(x_n, y_n)$, то за формулами (15) можна знайти проекції сил на координатні осі, якими ці точки притягують точку $M_0$. Проекції рівнодійної сили дорівнюватимуть алгебраїчній сумі проекції кожної сили зокрема. Отже, якщо через $X$ і $Y$ позначити проекції на координатні осі рівнодійної сили, то матимемо наближені рівності

$$X \cong \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m_0 \rho(x_k, y_k)\Delta s_k}{r_k^2}\cos\theta_k;$$

$$Y \cong \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m_0 \rho(x_k, y_k)\Delta s_k}{r_k^2}\sin\theta_k. \qquad (16)$$



Якщо в рівностях (16) перейти до границі при $\lambda = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta s_k \to 0$, то дістанемо криволінійні інтеграли першого роду

$$X = m_0 \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \frac{\rho(x, y)\cos\theta}{r^2} ds; \quad Y = m_0 \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \frac{\rho(x, y)\cos\theta ds}{r^2}. \qquad (17)$$

За формулами (17) обчислюють проекції на координатні осі $Ox$ і $Oy$ сили, з якою матеріальна дуга $\overset{\frown}{AB}$ притягує до себе матеріальну точку $M_0$.

❑ **Приклад**

**3.** Знайти силу, з якою однорідне півколо радіуса $R$ притягує точку з одиничною масою, що знаходиться в центрі кола.

Р о з в ' я з а н н я. Виберемо систему координат так, щоб початок координат збігався з центром кола, а вісь $Ox$ проходила через кінці півкола (рис. 38).

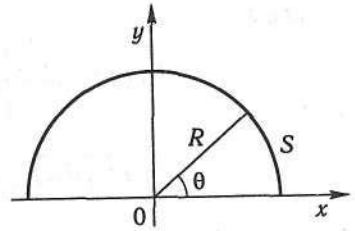

**Рис. 38**

Оскільки півколо — це лінія, симетрична відносно осі $Oy$, то проекція на вісь $Ox$ сили притягання дорівнює нулю, $X = 0$, а проекція на вісь $Oy$

$$Y = m_0 \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \frac{\rho(x, y)\cos\theta}{r^2} ds.$$

За умовою задачі $m_0 = 1$, а півколо — однорідне. Отже, вважатимемо, що $\rho(x, y) \equiv 1$. Щодо $r$ і $s$, то

$$r = R, s = R\theta.$$

Тому

$$Y = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \frac{\sin\theta}{R^2} R d\theta = \frac{1}{R}\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = \frac{1}{R}\cos\theta\Big|_{\pi}^{0} = \frac{2}{R}.$$

Зауважимо, що означення криволінійного інтеграла першого роду і формули для його обчислення дано для випадку плоскої кривої. Однак без особливих труднощів означення та способи обчислення такого інтеграла можна перенести й на випадок просторових кривих. Зокрема, якщо просторову криву $\overset{\frown}{AB}$ задано параметричними рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \alpha \le t \le \beta,$$

де функції $x(t), y(t), z(t)$, а також похідні $x'(t), y'(t), z'(t)$ є неперервними на відрізку $[\alpha; \beta]$, а функція трьох змінних $f(x, y, z)$, у свою чергу, неперервна в точках цієї кривої, то криволінійний інтеграл першого роду функції $f(x, y, z)$ по кривій $\overset{\frown}{AB}$ існує і дорівнює

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt. \qquad (18)$$

❑ ***Приклад***

**4.** Знайти масу дуги кривої

$$x = at,\quad y = \frac{at^2}{2},\quad z = \frac{at^3}{3},\quad 0 \le t \le 1,$$

якщо лінійна густина змінюється за законом

$$\rho(x, y, z) = \sqrt{\frac{2y}{a}}.$$

Р о з в ' я з а н н я. Використаємо формулу (18), поклавши в ній

$$f(x, y, z) = \rho(x, y, z).$$

Маємо

$$m = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \rho(x, y, z)\,ds = \int_0^1 \sqrt{\frac{2y(t)}{a}} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt =$$

$$= a\int_0^1 t\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt = \frac{a}{2}\int_0^1 \sqrt{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,d\left(t^2+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{a}{4}\left(\left(t^2+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+t^2+t^4} + \frac{3}{4}\ln\left(t^2+\frac{1}{2}+\sqrt{1+t^2+t^4}\right)\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{a}{8}\left(\left(3\sqrt{3}-1\right) + \frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right).$$

## 3.2
## ЗАДАЧА ПРО ОБЧИСЛЕННЯ РОБОТИ ЗМІННОЇ СИЛИ ВЗДОВЖ КРИВОЛІНІЙНОГО ШЛЯХУ. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ДРУГОГО РОДУ

З курсу фізики відомо, що коли на точку $M$ діє стала сила $F$ і точка під дією цієї сили рухається прямолінійно, то робота, виконана цією силою,

$$W = FS\cos\theta, \tag{1}$$

де $S$ — шлях, пройдений точкою; $\theta$ — кут, утворений вектором сили $\vec{F}$ і вектором-переміщенням $\vec{S}$.

Формулу (1) можна записати також у вигляді скалярного добутку

$$W = \left(\vec{F}\vec{S}\right). \tag{2}$$

Проте якщо на точку $M$ діє змінна сила — сила, що залежить, наприклад, від розміщення точки на площині, й точка описує деяку криву, то застосовувати формулу (2) або (1) для обчислення роботи вже не можна. У цьому випадку потрібно застосовувати граничний перехід, внаслідок



чого прийдемо до поняття криволінійного інтеграла другого роду.

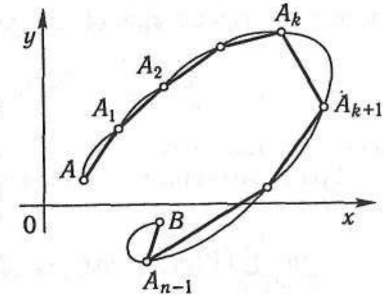


**Рис. 39**

Отже, нехай під дією сили $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$ точка $M(x, y)$ на площині $xOy$ описує деяку спрямлювану криву $\overset{\frown}{AB}$ (рис. 39). Поставимо задачу: обчислити роботу, виконану силою $\vec{F}$ при переміщенні точки $M$ вздовж плоскої кривої $\overset{\frown}{AB}$ від точки $A$ до точки $B$.

Для цього розіб'ємо криву $\overset{\frown}{AB}$ точками $A = A_0,\ A_1, \ldots,\ A_k,\ A_{k+1}, \ldots,\ A_n = B$ на $n$ довільних часткових кривих (дуг). Ці точки сполучимо відрізками прямої. В результаті в криву $\overset{\frown}{AB}$ впишемо ламану. Припустимо, що на кожній частковій кривій $\overset{\frown}{A_kA_{k+1}}$, $k = 0, 1, \ldots,\ n-1$, точка $M$ рухається не вздовж кривої, а вздовж прямої $A_kA_{k+1}$ під дією сталої сили

$$\vec{F_k} = \vec{F}(\xi_k, \eta_k),$$

де $(\xi_k, \eta_k)$ — довільна точка на кривій $\overset{\frown}{A_kA_{k+1}}$. Нехай проекціями вектора-зміщення $\overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ на координатній осі є $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, а проекціями вектора сили $\vec{F_k}$ — відповідно $P(\xi_k, \eta_k)$, $Q(\xi_k, \eta_k)$. Отже, ці вектори можна зобразити так:

$$\overrightarrow{A_kA_{k+1}} = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j},\quad \vec{F_k} = P(\xi_k, \eta_k)\vec{i} + Q(\xi_k, \eta_k)\vec{j},$$

де $\vec{i}, \vec{j}$ — одиничні орти.

Тоді робота $W_k$, виконана сталою силою $\vec{F_k} = \vec{F}(\xi_k, \eta_k)$ при переміщенні точки вздовж прямої $A_kA_{k+1}$, дорівнює

$$W_k = \left(\vec{F}(\xi_k, \eta_k)\overrightarrow{A_kA_{k+1}}\right) = P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k.$$

Робота $W$, виконана силою вздовж ламаної, вписаної в криву $\overset{\frown}{AB}$, дорівнює

$$W = \sum_{k=0}^{n-1}\left(P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + \theta(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k\right). \tag{3}$$

Позначимо найбільше з чисел $|\Delta x_k|$, $|\Delta y_k|$, $k = 0, 1, \ldots,\ n-1$ через $\lambda$. Тоді за величину роботи, виконаної силою $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$ при переміщенні точки $M$ вздовж кривої $\overset{\frown}{AB}$, візьмемо границю

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left( P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k \right), \tag{4}$$

якщо границя існує.

Границю (4) називають *криволінійним інтегралом другого роду* і позначають

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left( P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k \right) = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Таким чином, задача про обчислення роботи змінної сили вздовж кривої зводиться до обчислення криволінійного інтеграла другого роду. Щоб дати метод обчислення цього інтеграла, абстрагуємося від фізичного змісту розглядуваних тут величин.

Отже, нехай спрямлювану плоску криву $\overset{\frown}{AB}$ задано параметричними рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \le t \le \beta,$$

де функції $x(t), y(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$, причому за зміни параметрів $t$ від $\alpha$ до $\beta$ відповідні точки на кривій $\overset{\frown}{AB}$ заповнюють її від точки $A$ до точки $B$. Нехай уздовж кривої $AB$ задано деяку обмежену функцію $f(x, y)$. Розіб'ємо криву $\overset{\frown}{AB}$ довільними точками $A = A_0, A_1, \ldots, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_n = B$ на часткові криві (дуги). На кожній частковій кривій $\overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$ виберемо довільну точку $C_k(\xi_k, \eta_k)$ й утворимо суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k, \tag{5}$$

де $\Delta x_k$ — проекція хорди (відрізка) $\overrightarrow{A_k A_{k+1}}$ на вісь $Ox$.

Суму (5) називають *інтегральною сумою*.

Позначимо через $\lambda$ найбільше з чисел $|\Delta x_k|$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$:

$$\lambda = \max_{0 \le k \le n-1} |\Delta x_k|.$$

***Означення 1.*** Якщо при $\lambda \to 0$ інтегральна сума (5) має скінченну границю $I$, яка не залежить ні від способу розбиття кривої $\overset{\frown}{AB}$ на часткові криві, ні від вибору точок $C_k(\xi_k, \eta_k)$, то цю границю називають *криволінійним інтегралом другого роду* функції $f(x, y)$ за змінною $x$ по кривій $\overset{\frown}{AB}$ і позначають

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)dx.$$



Аналогічно можна розглядати інтегральну суму виду

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k, \tag{6}$$

де $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ — проекція хорди $\overline{A_k A_{k+1}}$ на вісь $Oy$.

Введемо позначення

$$\lambda' = \max_{0 \le k \le n-1} |\Delta y_k|.$$

***Означення 2.*** Якщо при $\lambda' \to 0$ інтегральна сума (6) має скінченну границю $I'$, яка не залежить ні від способу розбиття кривої $\overset{\frown}{AB}$ на частини, ні від вибору точок $C_k(\xi_k; \eta_k)$, то цю границю називають *криволінійним інтегралом другого роду* від функції $f(x, y)$ за змінною $y$ по кривій $\overset{\frown}{AB}$ і позначають

$$I' = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)dy.$$

У застосуваннях, як це випливає з попередньої задачі, зустрічаються криволінійні інтеграли другого роду такого вигляду:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

тобто сума криволінійних інтегралів

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx \quad \text{і} \quad \int_{\overset{\frown}{AB}} Q(x, y)dy.$$

Якщо кожен із цих інтегралів існує, то виконується рівність

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + \int_{\overset{\frown}{AB}} Q(x, y)dy. \tag{7}$$

Перейдемо до обчислення криволінійних інтегралів другого роду. Для цього доведемо таку теорему.

**Теорема.** Якщо функції $x(t)$ і $y(t)$ та їхні похідні першого порядку $x'(t)$ і $y'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$, а функція $f(x, y)$ неперервна вздовж кривої $\overset{\frown}{AB}$, то криволінійні інтеграли другого роду

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)dx; \quad \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)dy$$

існують і виражаються через визначені інтеграли такими рівностями:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))x'(t)dt; \tag{8}$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))y'(t)dt. \tag{9}$$

Д о в е д е н н я. Доведемо рівність (8) (рівність (9) доводиться аналогічно).

Візьмемо довільне $T$-розбиття відрізка $[\alpha;\beta]$ на частини

$$T:\alpha=t_0<t_1<\ldots<t_k<t_{k+1}<\ldots<t_n=\beta.$$

Цьому розбиттю на кривій $\overset{\frown}{AB}$ відповідають точки

$$A=A_0(x_0,y_0),\ A_1(x_1,y_1),\ldots,A_k(x_k,y_k),\ A_{k+1}(x_{k+1},y_{k+1}),\ldots,A_n(x_n,y_n)=B,$$

де координати точок визначають рівностями

$$x_i=x(t_i),\ y_i=y(t_i),\ i=0,1,2,\ldots,n. \qquad (10)$$

Розглянемо для $T$-розбиття інтегральну суму

$$\sigma(T)=\sum_{k=0}^{n-1}f(x(\tau_k),y(\tau_k))(x(t_{k+1})-x(t_k)), \qquad (11)$$

де $\tau_k$ — точка відрізка $[t_k;t_{k+1}]$,

$$\tau_k\in[t_k;t_{k+1}],\quad k=0,1,\ldots,n-1.$$

Оскільки функція $x(t)$ на відрізку $[\alpha;\beta]$ за умовою теореми має похідну $x'(t)$, то до різниці $x(t_{k+1})-x(t_k)$ можна застосувати теорему Лагранжа про скінченний приріст. Тому маємо рівність

$$\sigma(T)=\sum_{k=0}^{n-1}f(x(\tau_k),y(\tau_k))x'(\tau_k^*)\Delta t_k, \qquad (12)$$

де $\Delta t_k=t_{k+1}-t_k$, а $\tau_k^*$ — точка з відрізка $[t_k;t_{k+1}]$, $\tau_k^*\in[t_k;t_{k+1}]$.

Якби точка $\tau_k^*$ збігалася з точкою $\tau_k$, то в правій частині рівності (12) мали б інтегральну суму для функції однієї змінної $t$:

$$F(t)=f(x(t),y(t))x'(t),$$

побудовану на відрізку $[\alpha;\beta]$, тобто суму вигляду

$$\sigma^*(T)=\sum_{k=0}^{n-1}f(x(\tau_k),y(\tau_k))x'(\tau_k)\Delta t_k. \qquad (13)$$

Оскільки за умовою теореми функція $F(t)$ неперервна на відрізку $[\alpha;\beta]$, то вона інтегровна на ньому, тобто існує границя $\sigma^*(T)$ при $\max\limits_{0\le k\le n-1}\Delta t_k\to 0$, яка дорівнює визначеному інтегралу

$$\lim_{\lambda=\max\Delta t_k\to 0}\sigma^*(T)=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))x'(t)dt. \qquad (14)$$



Доведемо, що існує

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma(T)$$

і виконується рівність

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma(T)=\lim_{\lambda\to 0}\sigma^*(T). \qquad (15)$$

Оцінимо за модулем різницю

$$|\sigma(T)-\sigma^*(T)|=$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{n-1}f(x(\tau_k),y(\tau_k))x'(\tau_k^*)\Delta t_k-\sum_{k=0}^{n-1}f(x(\tau_k),y(\tau_k))x'(\tau_k)\Delta t_k\right|\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{n-1}|f(x(\tau_k),y(\tau_k))|\left|x'(\tau_k^*)-x'(\tau_k)\right|\Delta t_k. \qquad (16)$$

Оскільки функція $f(x(t),y(t))$ неперервна на відрізку $[\alpha;\beta]$, то вона на ньому обмежена, тобто для всіх $t\in[\alpha;\beta]$ виконується нерівність

$$|f(x(t),y(t))|<M. \qquad (17)$$

Функція $x'(t)$ неперервна на відрізку $[\alpha;\beta]$, тому вона на ньому й рівномірно неперервна. Отже, для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$ таке, що з нерівності $|t'-t''|<\delta$, де $t',t''$ — довільні точки відрізка $[\alpha;\beta]$, випливає нерівність $|x'(t')-x'(t'')|<\varepsilon$. Розглядатимемо такі $T$-розбиття відрізка $[\alpha;\beta]$ на частини, що

$$t_{k+1}-t_k<\delta,\quad k=0,1,\ldots,n-1.$$

Тоді виконується нерівність

$$|\tau_k^*-\tau_k|<\delta.$$

Таким чином,

$$\left|x'(\tau_k^*)-x'(\tau_k)\right|<\varepsilon,$$

і нерівність (16) можна записати так:

$$|\sigma(T)-\sigma^*(T)|<M(\beta-\alpha)\varepsilon.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{\lambda\to 0}(\sigma(T)-\sigma^*(T))=0.$$

Оскільки існує $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma^*(T)$, то існує $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(T)$, і ці границі рівні між собою, тобто

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma(T)=\lim_{\lambda\to 0}\sigma^*(T)=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))x'(t)dt.$$

За умовою теореми функція $x(t)$ неперервна на відрізку $[\alpha;\beta]$. Оскільки $\Delta t_k \to 0$, то й $\Delta x_k \to 0$, $k=0,1,\dots,\ n-1$.

Отже,

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sigma(T) = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sigma^*(T) = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))x'(t)dt.$$

Теорему доведено.

Таким чином, якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ — неперервні вздовж кривої $\overset{\frown}{AB}$, а функції $x(t)$ і $y(t)$ та їхні похідні $x'(t)$ і $y'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha,\beta]$, то існує криволінійний інтеграл другого роду

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

який дорівнює

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_\alpha^\beta \big(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\big)dt. \tag{18}$$

Формула (18) значно спрощується, якщо криву $\overset{\frown}{AB}$ задано в декартовій системі координат одним із рівнянь

$$y=\varphi(x), \quad a \le x \le b \tag{19}$$

або

$$x=\psi(y), \quad k \le y \le l, \tag{20}$$

де $\varphi(x), \psi(y)$ — неперервні функції разом із похідними першого порядку $\varphi'(x), \psi'(y)$ відповідно на відрізках $[\alpha;\beta]$, $[k;l]$.

Так, якщо криву задано рівнянням (19), то, беручи у формулі (18) $t=x$, матимемо

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \big(P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)\big)dx. \tag{21}$$

Аналогічно, якщо криву задано рівнянням (20), то

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_\alpha^\beta \big(P(\psi(y), y)\psi'(y) + Q(\psi(y), y)\big)dy. \tag{22}$$



❑ **Приклади**

**1.** Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{x}{y}dx + \frac{1}{y-a}dy,$$

де $\overset{\frown}{AB}$ — частина циклоїди

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t)$$

від точки $t=\frac{\pi}{6}$ до точки $t=\frac{\pi}{3}$.

Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо формулу (18). Запишемо підінтегральний вираз

$$\frac{x}{y}dx + \frac{1}{y-a}dy = -\left(a\cos t\frac{1-\sin t}{1-\cos t} + \operatorname{tg} t\right)dt.$$

Тоді

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{x}{y}dx + \frac{1}{y-a}dy = -a\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t - \cos t \sin t}{1-\cos t}dt - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} t dt =$$

$$= -a\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t(1+\cos t)}{\sin^2 t}dt + a\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t \sin t}{1-\cos t}dt +$$

$$+ \ln|\cos t|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = a\left(\frac{1}{\sin t} + \operatorname{ctg} t + t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} + \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = a\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + \ln\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**2.** Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \left(x^2-2xy\right)dx + \left(y^2-2xy\right)dy,$$

де $\overset{\frown}{AB}$ — частина параболи

$$y=x^2; \quad -1 \le x \le 1.$$

Р о з в ' я з а н н я. Використаємо формулу (21)

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \left(x^2-2xy\right)dx + \left(y^2-2xy\right)dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(x^2 - 2x^3 + 2\left(x^4-2x^3\right)x\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{1}{3}x^6 - \frac{4}{5}x^5\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{14}{15}.$$

**3.** Нехай на матеріальну точку маси $m$ діє сила $\overline{F}$, проекції якої на координатні осі дорівнюють $P(x,y)=xy$ і $Q(x,y)=x+y$. Обчислити роботу цієї сили при переміщенні точки з початку координат до точки (1, 1):

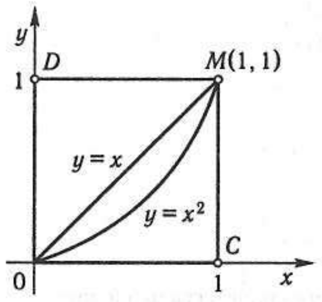


Рис. 40

а) вздовж прямої $y = x$;
б) вздовж параболи $y = x^2$;
в) вздовж дволанцюгової ламаної, відрізки якої паралельні координатним осям (два випадки (рис. 40)).

Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо формулу

$$W = m\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = m\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} xydx + (x,y)dy. \tag{23}$$

а) Підставимо у формулу (23) значення

$$y = x;\quad 0 \le x \le 1;$$

$$W = m\int_0^1 \left(x^2 + 2x\right)dx = m\left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}m.$$

б) Підставимо у формулу (23) значення $y = x^2;\ 0 \le x \le 1;$

$$W = m\int_0^1 \left(x^3 + \left(x + x^2\right)2x\right)dx =$$

$$= m\left(\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4\right)\Bigg|_0^1 = \frac{17}{12}m.$$

в) Розглянемо два випадки. Обчислимо роботу сили $\overline{F}$ уздовж ламаної $OCM$:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} xydx + (x+y)dy = \int\limits_{\overset{\frown}{OC}} xydx + (x+y)dy + \int\limits_{\overset{\frown}{CM}} xydx + (x+y)dy.$$

Вздовж відрізка $OC$ $y = 0$, а вздовж відрізка $CM$ $dx = 0$. Тому

$$W = m\int_0^1 (1+y)dy = m\left(y + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2}m.$$

Обчислимо роботу сили $\overline{F}$ уздовж ламаної $ODM$:

$$W = m\int\limits_{\overset{\frown}{OD}} xydx + (x+y)dy +$$

$$+\int\limits_{\overset{\frown}{DM}} xydx + (x+y)dy = m\left(\int_0^1 ydy + \int_0^1 xdx\right) = m\left(\frac{y^2}{y}\Bigg|_0^1 + \frac{x^2}{x}\Bigg|_0^1\right) = m.$$

Наведемо найпростіші властивості криволінійного інтеграла другого роду.

**1°.** Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Cf(x,y)dx = C\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)dx. \tag{24}$$



**2°.** Інтеграл суми скінченного числа функцій дорівнює сумі інтегралів цих функцій:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \sum_{k=1}^{p} f_k(x,y)dx = \sum_{k=1}^{p} \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f_k(x,y)dx. \tag{25}$$

**3°.** Якщо крива $\overset{\frown}{AB}$ точкою $C$ поділяється на дві частини $\overset{\frown}{AC}$ і $\overset{\frown}{CB}$, то

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)dx = \int\limits_{\overset{\frown}{AC}} f(x,y)dx + \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} f(x,y)dx. \tag{26}$$

**4°.** Якщо в інтегралі змінити шлях інтегрування на протилежний (змінити напрямок на кривій), то інтеграл змінює знак на протилежний:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)dx = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y)dx. \tag{27}$$

Зазначимо, що в рівностях (24) — (27) інтеграли в лівих частинах існують, якщо вони існують у правих частинах цих рівностей. Справедливість самих рівностей безпосередньо випливає з означення криволінійного інтеграла.

Розглянемо випадок замкненого контура $L$, тобто випадок, коли початкова точка $A$ кривої $\overset{\frown}{AB}$ збігається з кінцевою точкою $B$ (рис. 41).

У цьому разі на кривій (контурі $L$) визначають певний напрямок (на рис. 41 його позначено стрілками). Припустивши, що існують інтеграли

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AmC}} f(x,y)dx,\quad \int\limits_{\overset{\frown}{CnA}} f(x,y)dx,$$

де $C$ — довільна точка кривої $L$, відмінна від точки $A$, за означенням покладають

$$\int\limits_{L} f(x,y)dx = \int\limits_{\overset{\frown}{AmC}} f(x,y)dx + \int\limits_{\overset{\frown}{CnA}} f(x,y)dx.$$

Це саме стосується й інтегралів

$$\int\limits_{L} f(x,y)dy \ \text{ і } \int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

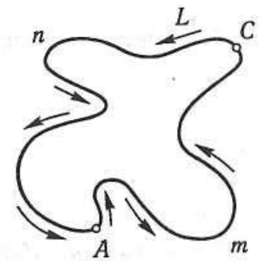


Рис. 41

Особливість випадку замкненого контура полягає в тому, що на відміну від незамкненого контура початкова й кінцева точки збігаються, тому вони не визначають напрямку шляху інтегрування.

Для випадку плоскої замкненої кривої з двох можливих напрямків обходу — проти руху годинникової стрілки і за її рухом — один вибирається додатним. Цим самим задається певна орієнтація площини $xOy$. Якщо додатним напрямком вважати напрямок проти руху годинникової стрілки, то орієнтацію площини називають *правою*, в другому випадку — *лівою*.

Надалі розглядатимемо праву орієнтацію площини. Отже, якщо $L$ є простою замкненою кривою, то при розгляді криволінійного інтеграла

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

розумітимемо інтеграл, взятий у додатному напрямку.

Якщо інтеграл розглядають у від'ємному напрямку (за рухом годинникової стрілки), то перед інтегралом ставлять знак «–», тобто

$$-\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Зауважимо, що криволінійний інтеграл вздовж замкненого контура $L$ позначають ще таким символом:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

❑ **Приклади**

**4.** Обчислити інтеграл

$$S = \oint_L xdy - ydx,$$

якщо $L$ — коло $x^2 + y^2 = R^2$.

Р о з в ' я з а н н я. Запишемо рівняння кола в параметричному вигляді

$$x = R\cos t;\quad y = R\sin t;\quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Додатному напрямку відповідає зміна параметра $t$ від 0 до $2\pi$. Тому

$$\oint_L xdy - ydx = \int_0^{2\pi} (R\cos t\, R\cos t + R\sin t\, R\sin t)dt = R^2\int_0^{2\pi} dt = R^2 t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi R^2.$$

**5.** Обчислити криволінійний інтеграл

$$\oint_L (x+y)dx + (x-y)dy,$$

де

$$L - \text{еліпс};\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Р о з в ' я з а н н я. Параметричні рівняння еліпса мають вигляд

$$x = a\cos t,\quad y = b\sin t,\quad 0 \le t \le 2\pi.$$



Тому

$$\oint_L (x+y)dx + (x-y)dy = \int_0^{2\pi} ((a\cos t + b\sin t)(-a\sin t) + (a\cos t - b\sin t)b\cos t)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-a^2 \sin t\cos t - ab\sin^2 t + ab\cos^2 t - b^2 \sin t\cos t\right)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( ab\cos 2t - \frac{a^2+b^2}{2}\sin 2t \right)dt = \left( \frac{ab}{2}\sin 2t + \frac{a^2+b^2}{4}\cos 2t \right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

Наприкінці зазначимо, що для простоти викладу було розглянуто криволінійний інтеграл другого роду на прикладі плоскої кривої. Проте означення, властивості та формули для обчислення криволінійного інтеграла другого роду без будь-яких змін переносяться й на випадок просторової кривої. Зокрема, якщо просторову криву $AB$ задано параметричними рівняннями

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t);\quad \alpha \le t \le \beta,$$

де функції $x(t), y(t), z(t)$ неперервні і мають на відрізку $[\alpha; \beta]$ неперервні похідні першого порядку $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ і вздовж цієї кривої задано неперервні функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, то криволінійний інтеграл

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

існує і дорівнює визначеному інтегралу

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$

$$= \int_\alpha^\beta \big(P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) +$$

$$+ R(x,(t), y(t), z(t))z'(t)\big)dt.$$

❑ **Приклад**

**6.** Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} xdx + ydy + (x+y-1)dz,$$

де $\overset{\frown}{AB}$ є відрізком прямої, що проходить через точки $(1,1,1)$ і $(2,3,4)$.

Р о з в ' я з а н н я. Запишемо рівняння прямої, що проходить через задані точки:

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-1}{4-1}=t.$$

Звідси

$$x=1+t,\quad y=1+2t,\quad z=1+3t,$$

причому $0\le t\le 1$.

Отже,

$$\int\limits_{AB} xdx+ydy+(x+y-1)dz=$$

$$=\int\limits_0^1\left(1+t+(1+2t)2+(1+3t)3\right)dt=\int\limits_0^1(6+14t)dt=\left(6t-7t^2\right)\Big|_0^1=13.$$

## 3.3 ВЕКТОРНЕ ПОЛЕ, ДИВЕРГЕНЦІЯ, РОТОР, ЦИРКУЛЯЦІЯ

Вважатимемо, що в тривимірному просторі $V$ (або в деякій області $\Omega$ цього простору) визначено векторне поле, якщо кожній точці $M$ цього простору відповідає певний вектор $\vec{a}=\vec{a}(M)$.

З точки зору математики задання векторного поля еквівалентне заданню вектор-функції трьох змінних

$$\vec{a}=\vec{a}(x,y,z).$$

Прикладами векторних полів є: напруга електростатичного поля, індукція магнітного поля, швидкість $\vec{v}$ частинок рухомої рідини. Векторним полем є поле градієнта скалярної функції $u=u(x,y,z)$:

$$\operatorname{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Якщо $\vec{a}=\vec{a}(M)$ є деяке векторне поле в просторі, то, беручи в цьому просторі декартову систему координат, вектор $\vec{a}$ можна зобразити у вигляді

$$\vec{a}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k},$$

де $P,Q,R$ — проекції цього вектора на координатні осі.

Надалі припускатимемо, що функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ неперервні й мають неперервні частинні похідні першого порядку.

Одним з основних понять векторного поля є поняття векторної лінії.

*Векторною лінією* поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$ називають криву $L$, у кожній точці якої дотична має напрямок вектора поля.



Зокрема, якщо $\vec{a}=\vec{a}(M)$ є полем швидкостей стаціонарного потоку рідини, то його векторні лінії є траєкторіями частинок рідини.

Вивчення векторного поля полегшується, якщо це поле має ті або інші властивості симетрії. До цих полів належать такі.

1. *Плоскопаралельне поле*, в якому проекції вектора $\vec{a}(M)$ на координатні осі залежать тільки від двох змінних, наприклад від $x$ і $y$. Зокрема, якщо $R(x,y)=0$, то поле називають *плоским.* Прикладом такого поля є поле швидкостей рідини, швидкості частинок якої паралельні деякій фіксованій площині й не залежать від відстані частинки до заданої площини.

2. *Осьосиметричне поле.* Векторне поле називають *осьосиметричним,* якщо існує така циліндрична система координат $r,\theta,z$, що в кожній точці $M$ вектор $\vec{a}(M)$ залежить тільки від $r$ та $z$ і не залежить від $\theta$. Якщо вектор $\vec{a}(M)$ залежить тільки від $r$, то поле називають *циліндричним.*

3. *Одновимірне поле.* Векторне поле називають *одновимірним,* якщо існує така декартова система координат, в якій проекції вектора $\vec{a}(M)$ відповідно дорівнюють

$$P(x,y,z)=P(x),\quad Q(x,y,z)=R(x,y,z)=0.$$

Як уже зазначалося, полем градієнта скалярного поля $u=u(x,y,z)$ є векторне поле. Це векторне поле називають ще *потенціальним,* а скалярне поле $u=u(x,y,z)$ — *потенціалом векторного поля*

$$\vec{a}=\operatorname{grad}u(x,y,z).$$

Розглянемо такий приклад. Нехай $u=u(r)$, де $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, тобто $u$ — сферичне поле. Побудуємо потенціальне поле. Знайдемо

$$\operatorname{grad}u(r)=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

де

$$\frac{\partial u}{\partial x}=u'(r)\frac{\partial r}{\partial x}=u'(r)\frac{x}{r};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=u'(r)\frac{\partial r}{\partial y}=u'(r)\frac{y}{r};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=u'(r)\frac{\partial r}{\partial z}=u'(r)\frac{z}{r}.$$

Тоді

$$\operatorname{grad}u(r)=u'(r)\frac{\vec{r}}{r},$$

де $\vec{r}$ — радіус-вектор точки $M(x, y, z)$:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Якщо векторне поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ має потенціал $u = u(x, y, z)$, то цей потенціал векторним полем визначається одночасно з точністю до сталого доданка.

Справді, нехай векторне поле $\vec{a}(M)$ має два різні потенціали $u = u(x, y, z)$ і $v = v(x, y, z)$. Тоді градієнти цих скалярних полів дорівнюють один одному:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \frac{\partial v}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}.$$

Звідси випливають такі рівності:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z}. \tag{1}$$

Введемо функцію

$$q(x, y, z) = u(x, y, z) - v(x, y, z).$$

З рівностей (1) випливає, що

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

На основі рівностей (2) можна зробити висновок, що функція

$$q(x, y, z) = u(x, y, z) - v(x, y, z) = C = \text{const}.$$

Векторними лініями потенціального поля є лінії градієнта, тобто лінії найшвидшої зміни функції (потенціалу) $u = u(x, y, z)$.

Нехай маємо довільне векторне поле

$$\vec{a} = \vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Нехай також в однозв'язній області $\Omega$ функції $P$, $Q$, $R$ неперервні і мають неперервні частинні похідні першого порядку.

Поставимо задачу: які умови мають задовольняти функції $P$, $Q$, $R$, щоб векторне поле $\vec{a}(M)$ було потенціальним?

Припустимо, що поле $\vec{a}(M)$ є потенціальним, тобто воно породжене градієнтом деякої функції $u = u(x, y, z)$. Тоді виконується рівність

$$\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}.$$



Звідси

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R. \tag{3}$$

Продиференціюємо першу рівність по $y$, а другу — по $x$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Оскільки за припущенням мішані похідні в останніх рівностях однакові, то

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Продиференціювавши першу рівність (3) по $z$, а останню — по $x$, дістанемо

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Продиференціювавши другу рівність (3) по $z$, а останню — по $y$, матимемо

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Отже, щоб векторне поле $\vec{a}(M)$ було потенціальним, необхідно, щоб справджувалися умови:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}. \tag{4}$$

Можна довести, що умови (4) є достатніми для того, щоб векторне поле $\vec{a}(M)$ було потенціальним.

Розглянемо ще приклад потенціального поля.

Нехай у початку координат $O$ розміщено масу $m$. Якщо в деякій точці $M(x, y, z)$ розмістити одиничну масу, то на неї за законом Ньютона діє сила притягання

$$\vec{F} = -k\frac{m}{r^2}\vec{r}, \tag{5}$$

де $\vec{r}$ — радіус-вектор точки $M(x, y, z)$:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Поле, що визначається вектором (5), називають *векторним полем тяжіння* точкової маси $m$. Це поле є потенціальним. Його можна зобразити як градієнт скалярного поля

$$u=\frac{km}{r}.$$

Справді,

$$\operatorname{grad} u=\operatorname{grad}\left(\frac{km}{r}\right)=-\frac{km}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}\right)=$$

$$=-\frac{km}{r^2}\left(\frac{x}{r}\vec{i}+\frac{y}{r}\vec{j}+\frac{z}{r}\vec{k}\right)=-\frac{km}{r^2}\vec{r}=\vec{F}.$$

Отже,

$$\operatorname{grad}\left(\frac{km}{r}\right)=\vec{F}.$$

Скалярну функцію

$$u=\frac{km}{r}$$

називають *ньютонівським потенціалом точкової маси* $m$.

Дамо низку означень.

Нехай маємо векторне поле

$$\vec{a}=\vec{a}(M)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

і нехай $P,Q,R$ — неперервні функції, що мають неперервні частинні похідні першого порядку в деякій точці, які одночасно не перетворюються на нуль у цій точці. Таке векторне поле називають *неперервно диференційовним.*

***Означення 1.*** Число $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ називають *дивергенцією поля* $\vec{a}(M)$ у цій точці і позначають

$$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}. \qquad (6)$$

Нижче буде з'ясовано фізичний зміст дивергенції. Введемо до розгляду оператор набла

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Тоді дивергенцію можна зобразити як скалярний добуток

$$\operatorname{div}\vec{a}=(\vec{\nabla}\vec{a}).$$



***Означення 2.*** Вектор із координатами

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$$

називають *ротором* (вихорем) векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$ у точці $M(x,y,z)$ і позначають

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}. \qquad (7)$$

Цей вектор можна символічно записати також через детермінант третього порядку

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}. \qquad (8)$$

***Означення 3.*** Нехай $L$ — замкнена гладка крива в області $\Omega$. Тоді криволінійний інтеграл по замкненому контуру $L$

$$\oint_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

називають *циркуляцією векторного поля* $\vec{a}=\vec{a}(M)$ *уздовж кривої* $L$ *і позначають*

$$\oint_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\oint_L \vec{a}\,d\vec{r}, \qquad (9)$$

де $d\vec{r}$ — вектор,

$$d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}.$$

Формула (9) є векторним записом криволінійного інтеграла другого роду.

Введемо позначення:

$$\vec{t}=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}$$

— одиничний вектор, напрямлений вздовж дотичної до кривої $L$; $s$ — змінна довжина кривої; $\text{пр}_t\vec{a}$ — проекція вектора $\vec{a}$ на дотичну. Тоді формулу (9) можна записати так:

$$\oint_L \vec{a}\,d\vec{r}=\oint_L \text{пр}_t\vec{a}\,ds. \qquad (10)$$

Справді,

$$\oint_L \vec{a}\,d\vec{r} = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \oint_L (P\cos\alpha + P\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds = \oint_L (\vec{a}\vec{t}\,)\,ds = \oint_L \text{пр}_t\vec{a}\,ds.$$

Властивості дивергенції.

**1°.** $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0.$

**2°.** $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0.$

**3°.** $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u$, де $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$

**4°.** $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta\vec{a}$, де $\Delta\vec{a} = \Delta P\vec{i} + \Delta Q\vec{j} + \Delta R\vec{k}.$

**5°.** $\operatorname{div}(f\vec{a}) = f\operatorname{div}\vec{a} + \operatorname{grad} f\vec{a}.$

**6°.** $\operatorname{div}\left[\vec{a}\vec{b}\,\right] = \vec{b}\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\operatorname{rot}\vec{b}.$

Виведемо перші дві формули (решта виводяться аналогічно).

**1°.** Нехай маємо скалярну функцію $u = u(x, y, z)$. Тоді

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Скориставшись формулою (7), матимемо

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\vec{j} +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\vec{k} = 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k} = 0.$$

**2°.** Згідно з формулою (7),

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z} = 0.$$

## 3.4

## ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВОДЯТЬ ДО ПОНЯТТЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

**1°. Задача про обчислення маси плоскої замкненої області.** Нехай маємо плоску замкнену область $(D)$ (фігуру), суцільно заповнену масою. Потрібно обчислити масу цієї фігури.



Припустимо, що густина $\rho$ фігури змінюється при переході від точки до точки, тобто є функцією точки

$$\rho = \rho(M) = \rho(x, y).$$

Розглядатимемо тільки квадровні плоскі фігури, тобто такі, що мають площу.

Поняття площі плоскої фігури вже розглядалося під час вивчення визначеного інтеграла. Тому тільки зазначимо, що коли контур фігури (області) $(D)$ містить скінченне число неперервних кривих, кожна з яких задана одним із рівнянь вигляду

$$y = \varphi(x) \text{ або } x = \psi(y),$$

де $\varphi(x), \psi(y)$ — неперервні функції, то така фігура є квадровною.

Про такі криві кажуть, що вони мають *нульову площу*.

Отже, нехай плоска фігура $(D)$ (рис. 42) є квадровною. Позначимо її площу буквою $S$. Якби густина цієї фігури була сталою,

$$\rho = \text{const},$$

тобто фігура була однорідною, то її масу $m$ можна було б обчислити за формулою

$$m = \rho S. \tag{1}$$

Якщо фігури неоднорідні, то користуватися цією формулою не можна. Тоді область $(D)$ розбивають кривими нульової площі на $n$ часткових областей $(D_0), \dots, (D_{n-1})$, площу яких відповідно позначимо через $\Delta S_0, \dots, \Delta S_{n-1}$.

Розглянемо $k$-ту часткову область $(D_k)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Візьмемо в цій області довільну точку $P_k(\xi_k, \eta_k)$ і припустимо, що розбиття області $(D)$ настільки щільне, що густина $\rho(x, y)$ у кожній частковій області мало змінюється. Тоді вважатимемо, що густина в області $(D_k)$ є сталою і дорівнює, наприклад, $\rho(\xi_k, \eta_k)$. У цьому випадку маса $m_k$ області $(D_k)$

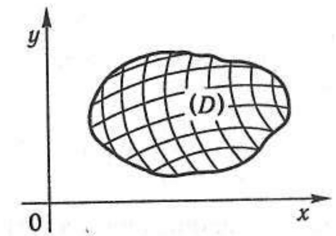


Рис. 42

$$m_k \approx \rho(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k,$$

а маса всієї області $(D)$

$$m \approx \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k. \tag{2}$$

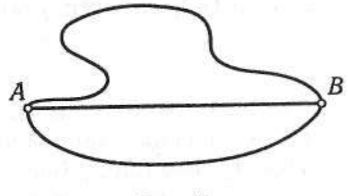


Рис. 43

***Означення 1.*** *Діаметром замкненої області* $(D)$ називають найбільшу відстань між двома точками контура цієї області.

Так, діаметром області, зображеної на рис. 43, є довжина відрізка $AB$.

Діаметром прямокутника є довжина його діагоналі, діаметром паралелограма — довжина його більшої діагоналі, діаметром еліпса — довжина його великої осі, діаметром круга радіуса $R$ є число $2R$.

Повернемося до задачі про обчислення маси плоскої замкненої області.

Сума в правій частині наближеної рівності (2) тим точніше визначає масу заданої області $(D)$, чим менші розміри часткових областей $(D_0), \dots, (D_{n-1})$.

Зменшити розміри цих областей можна за рахунок зменшення їхніх діаметрів. Тому, позначаючи діаметри областей $(D_k)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ через $d_k = \operatorname{diam}(D_k)$, замінимо наближену рівність (2) точною рівністю вигляду

$$m = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k. \tag{3}$$

Отже, задача про обчислення маси замкненої області $(D)$ зводиться до обчислення границі (3).

Цю границю, якщо вона існує, називають *подвійним інтегралом* і позначають

$$\iint_D \rho(x, y)dS = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k. \tag{4}$$

Отже, шукану масу виражають через подвійний інтеграл так:

$$m = \iint_{(D)} \rho(x, y)dS. \tag{5}$$

Зокрема, якщо область є однорідною, $\rho = \text{const}$, то з рівності (3) випливає, що

$$\lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k = \lim_{\max d_k \to 0} \rho \sum_{k=0}^{n-1} \Delta S_k = \lim_{\max d_k \to 0} \rho S = \rho S,$$

де $S$ — площа області $(D)$.

Отже, $m = \rho S$, тобто дістали формулу (1).

**2°. Задача про об'єм циліндричного тіла (бруска).** Розглянемо просторове тіло $(V)$, яке зверху обмежене поверхнею, заданою рівнянням

$$z = f(x, y), \tag{6}$$

з боків — циліндричними поверхнями, твірні яких паралельні осі $Oz$, а знизу — плоскою квадровною фігурою $(D)$ (рис. 44).

Просторове тіло, зображене на рис. 44, називають *циліндричним тілом*, або *циліндричним бруском*.



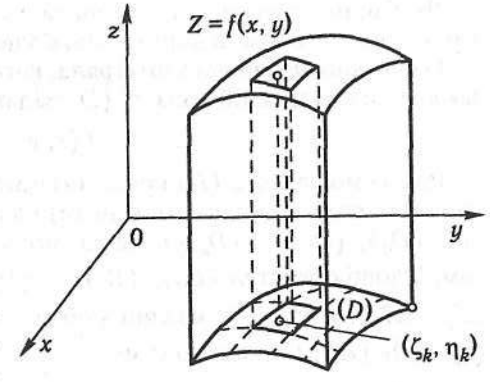


Рис. 44

Обчислимо об'єм циліндричного тіла.

Для цього розіб'ємо область $(D)$ кривими нульової площі на $n$ часткових областей $(D_0)$, $(D_1)$, …, $(D_{n-1})$ і розглянемо ряд циліндричних брусків (стовпчиків), в основі яких лежать часткові області $(D_k)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, що утворюють тіло $(V)$.

У кожній з часткових областей $(D_k)$ візьмемо довільну точку $(\xi_k, \eta_k)$ і замінимо кожен циліндричний брусок циліндром з висотою $f(\xi_k, \eta_k)$ і основою $(D_k)$. Тоді об'єм кожного циліндричного бруска

$$V_k \approx f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k, k = 0, 1, \dots, n-1,$$

де $\Delta S_k$ — площа області $(D_k)$.

Додавши почленно ці рівності, дістанемо наближену формулу для об'єму $V$ розглядуваного циліндричного тіла

$$V \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k. \tag{7}$$

Якщо існує границя

$$\lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k, \tag{8}$$

де $d_k$ — діаметр області $(D_k)$, то цю границю приймають за об'єм циліндричного тіла:

$$V = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k. \tag{9}$$

Границя (8), згідно з позначенням (4), є подвійним інтегралом

$$\iint_{(D)} f(x, y)dS.$$

Отже, остаточно маємо таку формулу для обчислення об'єму циліндричного тіла:

$$V = \iint_{(D)} f(x, y)dS.$$

Таким чином, задача про знаходження об'єму циліндричного тіла також зводиться до обчислення границі виду (8), або обчислення подвійного інтеграла.

Як бачимо, задачі 1° і 2° різні за своїм змістом, проте розв'язуються тим самим методом за допомогою подвійного інтеграла.

**Означення подвійного інтеграла, його існування, властивості.** Нехай у замкненій квадровній області $(D)$ задано функцію двох змінних

$$z = f(x, y).$$

Розіб'ємо область $(D)$ кривими (можна й прямими, зокрема прямими, паралельними координатним осям) на скінченне число часткових областей $(D_0)$, $(D_1), \dots, (D_{n-1})$. Це розбиття області називатимемо *T*-розбиттям. Площі областей $(D_0)$, $(D_1), \dots, (D_{n-1})$ позначимо відповідно через $\Delta S_0$, $\Delta S_1, \dots, \Delta S_{n-1}$. У кожній з областей $(D_k)$ візьмемо довільну точку $(\xi_k, \eta_k) \in (D_k)$ і складемо суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k. \tag{10}$$

Суму вигляду (10) називають *інтегральною сумою* для функції $f(x, y)$ в області $(D)$, складеною для заданого *T*-розбиття і заданого вибору точок $(\xi_k, \eta_k)$.

Позначимо через $\lambda$ найбільше з чисел $d_0$, $d_1, \dots, d_{n-1}$, де $d_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, — діаметр області $(D_k)$,

$$\lambda = \max_{0 \le k \le n-1} (d_k).$$

***Означення 2.*** Якщо інтегральна сума (10) має при $\lambda \to 0$ скінченну границю

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k, \tag{11}$$

яка не залежить ні від *T*-розбиття області $(D)$ на часткові області, ні від вибору точок $(\xi_k, \eta_k)$ у цих областях, то таку границю називають *подвійним інтегралом функції* $f(x, y)$, *поширеним на область* $(D)$, і позначають

$$I = \iint\limits_{(D)} f(x, y)dS. \tag{12}$$

Функцію $f(x, y)$ при цьому називають *інтегровною в області* $(D)$, а область $(D)$ — *областю інтегрування*.

Вираз $f(x, y)dS$ називають *підінтегральним виразом*, а $dS$ — *елементом площі*.

Якщо область $(D)$ віднесено до прямокутної системи координат, то елемент площі записують у вигляді

$$dS = dxdy.$$

Таке зображення елемента площі відповідає *T*-розбиттю області $(D)$ на частини, коли $(D)$ розбивається прямими, паралельними координат-



ним осям. Часткова область $(D_k)$ є прямокутником, його площа $\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$. Тому подвійний інтеграл записують ще так:

$$I = \iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy. \tag{13}$$

Надалі застосовуватимемо в основному позначення (13).

Зауважимо, що означення границі інтегральної суми (10) таке саме, як і означення границі інтегральної суми для функції однієї змінної. Тому тут його не наводимо.

Розглянемо коротко питання про існування подвійного інтеграла функції $f(x, y)$.

**Теорема 1.** Якщо функція $f(x, y)$ інтегровна в замкненій квадровній області $(D)$, то вона в цій області обмежена.

Доведення цієї теореми подібне до доведення теореми про обмеженість інтегровної функції однієї змінної.

Отже, необхідною умовою інтегровності функції в області $(D)$ є її обмеженість.

Проте не будь-яка обмежена функція в області $(D)$ є в цій області інтегровною.

Наприклад, нехай в області $(D)$ задано функцію

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \text{ і } y \text{ раціональні числа;} \\ 0, \text{ якщо хоча б одне з чисел } x \text{ або } y \text{ ірраціональне.} \end{cases}$$

Така функція є обмеженою (для всіх точок $(x, y) \in (D)$ виконується нерівність $|f(x, y)| \le 1$), але неінтегровною.

Справді, можна побудувати таке $T_0$-розбиття області $(D)$ на часткові області, що в кожній області $(D_k)$ існуватимуть точки, в яких координатами є раціональні числа, і точки, в яких хоча б одна з координат є ірраціональним числом. Тому, вибираючи точки $(\xi_k, \eta_k) \in (D_k)$ так, щоб $\xi_k$ і $\eta_k$ були раціональними числами, матимемо

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k = S.$$

Якщо точки $(\xi_k, \eta_k) \in (D)$ вибирати так, що хоча б одне з чисел $\xi_k$ або $\eta_k$ було ірраціональним, то інтегральна сума

$$\sigma = 0.$$

Отже, при $\lambda \to 0$ інтегральна сума $\sigma$ до жодної границі не наближається.

Тому надалі розглядатимемо тільки функції, обмежені в розглядуваній області.

Як і для обмеженої функції однієї змінної, заданої на відрізку $[a; b]$, так і для обмежених функцій двох змінних, заданих у замкненій квадровній області $(D)$, вводяться нижня і верхня суми Дарбу:

$$\underline{S}(T)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta S_k; \quad \overline{S}(T)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta S_k,$$

де $m_k, M_k$ — відповідно нижня і верхня межі множини значень функції в області $(D_k)$. Якщо $f(x, y)$ неперервна в області $(D)$, то $m_k$, $M_k$ є відповідно найменшим і найбільшим значенням функції $f(x, y)$ в області $(D_k)$. За допомогою сум Дарбу можна сформулювати критерій інтегровності функції $f(x, y)$ в області $(D)$.

**Теорема 2.** Для того щоб функція $f(x, y)$ була інтегровною (щоб існував подвійний інтеграл) у квадровній області $(D)$, необхідно й достатньо, щоб виконувалося співвідношення

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\overline{S}(T)-\underline{S}(T)\right)=0. \tag{14}$$

Користуючись цим критерієм, можна довести (як і для функції однієї змінної), що неперервна функція $f(x, y)$, задана в замкненій області $(D)$, є інтегровною в цій області.

Надалі розглядатимемо тільки неперервні функції.

Сформулюємо основні властивості подвійного інтеграла. Доведення цих властивостей аналогічне доведенню таких самих властивостей для визначеного інтеграла неперервної функції однієї змінної, розглядуваних на відрізку $[a; b]$.

1°. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла

$$\iint_{(D)} Cf(x, y)\,dxdy = C\iint_{(D)} f(x, y)\,dxdy,$$

де $C$ — const.

2°. Інтеграл скінченної алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів цих функцій

$$\iint_{(D)} \sum_{i=1}^{p} f_i(x, y)\,dxdy = \sum_{i=1}^{p} \iint_{(D)} f_i(x, y)\,dxdy.$$

3°. Якщо область $(D)$ розбито лініями нульової площі на дві області $(D_1)$ і $(D_2)$, що не перекриваються (тобто попарно не мають спільних внутрішніх точок), то з інтегровності функції $f(x, y)$ у всій області $(D)$ випливає її інтегровність у кожній області зокрема, і, навпаки, з інтегровності функції в областях $(D_1)$ і $(D_2)$ випливає її інтегровність в області $(D)$. При цьому виконується рівність

$$\iint_{(D)} f(x, y)\,dxdy = \iint_{(D_1)} f(x, y)\,dxdy + \iint_{(D_2)} f(x, y)\,dxdy.$$

Цю властивість подвійного інтеграла називають *адитивною*.

4°. Якщо для функцій $f(x, y)$ і $\varphi(x, y)$ в області $(D)$ виконується нерівність

$$f(x,y)\le\varphi(x,y),$$



то для інтегралів цих функцій виконується нерівність

$$\iint_{(D)} f(x, y)\,dxdy \le \iint_{(D)} \varphi(x, y)\,dxdy,$$

тобто нерівності можна почленно інтегрувати.

З цієї властивості як наслідок випливає наступна властивість.

5°. $\left|\iint_{(D)} f(x, y)\,dxdy\right| \le \iint_{(D)} |f(x, y)|\,dxdy.$

Зазначимо, що інтеграли в правих частинах, що виражають властивості 1°—5°, існують, якщо існують інтеграли в лівих частинах цих рівностей. Справедливість самих властивостей випливає безпосередньо з означення подвійного інтеграла.

6°. Цю властивість сформулюємо у вигляді теореми.

**Теорема про середнє значення.** Якщо функція $f(x, y)$ є неперервною в замкненій квадровній області $(D)$, то в цій області існує така точка $(\bar{x}, \bar{y})$, що

$$\iint_{(D)} f(x, y)\,dxdy = f(\bar{x}, \bar{y})S,$$

де $S$ — площа області $(D)$.

**Доведення.** Використаємо властивість 4°. Оскільки $f(x, y)$ неперервна в замкненій області $(D)$, то за теоремою Веєрштрасса функція $f(x, y)$ в області $(D)$ має своє найбільше $M$ і найменше значення $m$. Тоді правильними є нерівності

$$m \le f(x, y) \le M.$$

Проінтегруємо ці нерівності:

$$\iint_{(D)} m\,dxdy \le \iint_{(D)} f(x, y)\,dxdy \le \iint_{(D)} M\,dxdy,$$

або

$$m\iint_{(D)} dxdy \le \iint_{(D)} f(x, y)\,dxdy \le M\iint_{(D)} dxdy. \tag{15}$$

Користуючись означенням подвійного інтеграла, знаходимо

$$\iint_{(D)} dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} 1\Delta S_k = \lim_{\lambda\to 0} S = S.$$

Тоді нерівності (15) можна записати у вигляді

$$mS \le \iint_{(D)} f(x, y)\,dxdy \le MS.$$

Звідси

$$m \le \frac{\int\limits_{(D)} f(x,y)dxdy}{S} \le M. \qquad (16)$$

Введемо позначення

$$\mu = \frac{\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy}{S}. \qquad (17)$$

Тоді нерівності (16) набирають вигляду

$$m \le \mu \le M. \qquad (18)$$

Оскільки $f(x, y)$ є неперервною функцією в замкненій області, а $m$ і $M$ — це два її значення, то за теоремою Коші про проміжне значення робимо висновок, що в області $(D)$ є точка $(\bar{x}, \bar{y}) \in (D)$ така, що

$$\mu = f(\bar{x}, \bar{y}).$$

Тоді рівність (17) можна записати так:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dsdy = f(\bar{x}, \bar{y})S. \qquad (19)$$

Теорему доведено.

З'ясуємо геометричний зміст теореми про середнє значення подвійного інтеграла. Нехай $f(x, y) \ge 0$ в області $(D)$. Тоді в лівій частині рівності (19) матимемо число, що виражає об'єм циліндричного тіла, а в правій частині — число, що виражає об'єм циліндра з основою $(D)$ і висотою $f(\bar{x}, \bar{y})$.

Отже, формула (19) означає, що існує прямий циліндр з основою, що дорівнює основі циліндричного тіла, і висотою $f(\bar{x}, \bar{y})$. Функцію $f(\bar{x}, \bar{y})$ називають «середнім» значенням функції $f(x, y)$, об'єм якого дорівнює об'єму циліндричного тіла.

## 3.5 ОБЧИСЛЕННЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА

Подвійний інтеграл, як і визначний та криволінійний інтеграли, можна обчислювати, користуючись його означенням, тобто знаходити границю інтегральної суми

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k.$$

Проте такий спосіб громіздкий, крім того, в багатьох випадках не можна безпосередньо обчислити цю границю. Тому застосовують інший



спосіб, який зводить обчислення подвійного інтеграла до повторного інтегрування, тобто до послідовного обчислення двох одномірних інтегралів. При цьому розглядають два випадки області інтегрування.

**Випадок прямокутної області.** Нехай областю інтегрування є прямокутник $(R): a \le x \le b,\ c \le y \le d$, де $a,\ b,\ c,\ d$ — довільні дійсні числа, і нехай функція $f(x, y)$ задана й неперервна в зазначеному прямокутнику. Тоді вона є неперервною і за кожною змінною $x$ і $y$. Отже, існують визначені інтеграли

$$F(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy; \quad \Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

Припустимо, що функції $F(x)$ і $\Phi(y)$ є інтегровними відповідно на відрізках $[a;b]$ і $[c;d]$, тобто існують інтеграли

$$\int\limits_a^d F(x)dx = \int\limits_a^b \left( \int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx;$$

$$\int\limits_a^d \Phi(y)dy = \int\limits_c^d \left( \int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy. \qquad (1)$$

Інтеграли вигляду (1) називають *повторними.*

**Теорема 1.** Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в прямокутнику $(R)$, то існують повторні інтеграли (1) і виконуються рівності

$$\iint\limits_{(R)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left( \int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx; \qquad (2)$$

$$\iint\limits_{(R)} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left( \int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy. \qquad (3)$$

Доведення. Доведемо формулу (2), формула (3) доводиться аналогічно.

Оскільки $f(x, y)$ є неперервною функцією в прямокутнику $(R)$, то подвійний інтеграл не залежить від способу розбиття цього прямокутника на часткові області. Тому для зручності розіб'ємо його прямими, паралельними координатним осям.

Для цього відрізок $[a;b]$ розіб'ємо, наприклад, на $n$ частин точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = b,$$

а відрізок $[c;d]$ — на $m$ частин точками

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_j < y_{j+1} < \ldots < y_m = d.$$

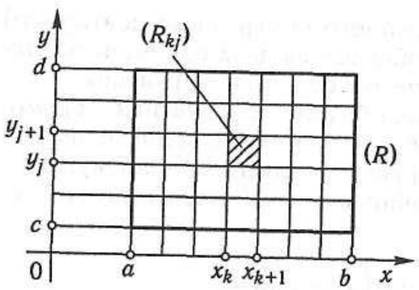


Рис. 45

Через точки поділу проведемо прямі, паралельні координатним осям (рис. 45). Тоді прямокутник $(R)$ розіб'ється на часткові прямокутники $(R_{kj})$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $j = 0, 1, \dots, m-1$.

Оскільки функція $f(x, y)$ неперервна в прямокутнику $(R_{kj})$, то вона набуває в ньому найбільшого значення $M_{kj}$ і найменшого значення $m_{kj}$. Отже, для кожної точки $(x, y) \in (R_{kj})$ виконуються нерівності

$$m_{kj} \le f(x, y) \le M_{kj}. \tag{4}$$

Позначимо $x = \xi_k \in [x_k; x_{k+1}]$ і проінтегруємо утворені нерівності за $y$ в межах від $y_j$ до $y_{j+1}$. Матимемо

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} m_{kj} dy \le \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_k, y) dy \le \int_{y_j}^{y_{j+1}} M_{kj} dy$$

або

$$m_{kj} \Delta y_j \le \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_k, y) dy \le M_{kj} \Delta y_j, \tag{5}$$

де

$$\Delta y_j = y_{j+1} - y_j.$$

Фіксуючи в нерівності (5) індекс $k$ і надаючи індексу $j$ значень $0, 1, \dots, m-1$, дістанемо $m$ нерівностей. Додамо почленно ці нерівності

$$\sum_{j=0}^{m-1} m_{kj} \Delta y_j \le \int_c^d f(\xi_k, y) dy \le \sum_{j=0}^{m-1} M_{kj} \Delta y_j. \tag{6}$$

Введемо позначення

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy. \tag{7}$$

Тоді нерівності (6) можна записати так:

$$\sum_{j=0}^{m-1} m_{kj} \Delta y_j \le F(\xi_k) \le \sum_{j=0}^{m-1} M_{kj} \Delta y_j. \tag{8}$$

Помножимо останні нерівності на число $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k > 0$ і здобуті нерівності знову почленно додамо, надавши індексу $k$ значень $0, 1, \dots, n-1$.



Матимемо

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{j=0}^{m-1} m_{kj} \Delta_{y_j} \right) \Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{j=0}^{m-1} M_{kj} \Delta_{y_j} \right) \Delta x_k. \tag{9}$$

У лівій і правій частинах нерівностей (9) містяться відповідно нижня і верхня суми Дарбу, побудовані для функції $f(x, y)$. Отже, нерівності (9) набирають вигляду

$$\underline{S} \le \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \Delta x_k \le \overline{S} \tag{10}$$

(букву $T$ пропускаємо, оскільки подвійний інтеграл не залежить від $T$-розбиття).

Суми Дарбу для неперервної функції є окремими випадками інтегральної суми

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(\xi_k, \eta_j) \Delta x_k \Delta y_j, \tag{11}$$

а саме тими випадками, коли значення функції $f(\xi_k, \eta_j)$ збігається відповідно з $m_{kj}$ і $M_{kj}$. Оскільки для неперервної функції $f(x, y)$ границя інтегральної суми (11) існує при $\lambda \to 0$ і не залежить від вибору точок $(\xi_k, \eta_j)$, то виконуються рівності

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \underline{S} = \lim_{\lambda \to 0} \overline{S} = \iint_{(R)} f(x, y) dx dy.$$

Перейшовши в нерівностях (10) до границі при $\lambda \to 0$, дістанемо

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \Delta x_k = \iint_{(R)} f(x, y) dx dy. \tag{12}$$

У лівій частині останньої рівності маємо границю інтегральної суми, побудованої для функції (7) однієї змінної $x$. Ця границя існує і дорівнює визначеному інтегралу

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b F(x) dx. \tag{13}$$

Тому рівність (12) матиме вигляд

$$\iint_{(R)} f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx.$$

Підставивши значення $F(x)$, дістанемо формулу (2).
Теорему доведено.

Зазначимо, що в співвідношенні (13) $\lambda$ означає довжину найбільшої з діагоналей прямокутників $(R_{kj})$. Якщо довжина діагоналі

$$\lambda_{kj} = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_j^2}$$

прямує до нуля, то кожна зі сторін $\Delta x_k$ і $\Delta y_j$ також прямує до нуля. Тому

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ 0 \le k \le n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\Delta x_k.$$

Оскільки у формулах (2) і (3) ліві частини рівні, то праві частини також рівні. Тоді ці формули можна записати так:

$$\iint_{(R)} f(x, y)dxdy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y)dx \right) dy. \qquad (14)$$

Звідси випливає такий висновок.

Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в прямокутнику $(R)$, то подвійний інтеграл цієї функції, поширений на прямокутник $(R)$, обчислюють повторним інтегруванням, причому інтеграл не залежить від порядку інтегрування (спочатку інтегруємо за $x$, а потім за $y$, чи навпаки), результат (число) залишається тим самим.

Проте на практиці дуже часто правильний вибір порядку інтегрування значно полегшує обчислення інтегралів

$$\int_c^d f(x, y)dy \quad \text{і} \quad \int_a^b f(x, y)dx.$$

**Приклади**

**1.** Обчислити подвійний інтеграл

$$I = \iint_{(R)} \frac{ydxdy}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

де $(R)$ — прямокутник: $0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1$.

Р о з в ' я з а н н я. Спочатку доцільно знайти інтеграл за $y$, а потім за $x$. У протилежному випадку довелося б обчислювати біномний інтеграл, який у загальному випадку обчислювати досить складно. Отже, використаємо формулу (2). Маємо

$$I = \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{ydy}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right) dx = \int_0^1 \left( \frac{-1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \right) \Bigg|_0^1 dx =$$

$$= \int_0^1 \left( \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} \right) dx = \ln \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{2+x^2}} \Bigg|_0^1 = \ln \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$



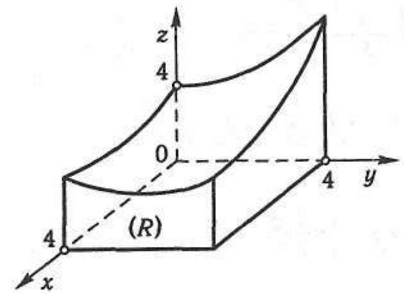


Рис. 46

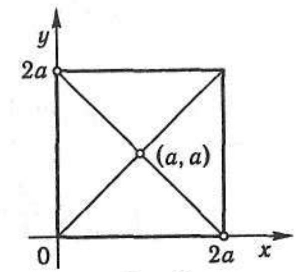


Рис. 47

**2.** Знайти об'єм циліндричного тіла, обмеженого координатними площинами, площинами $x = 1, y = 1$ і зверху параболоїдом обертання $Z = x^2 + y^2 + 1$.

Р о з в ' я з а н н я. Тіло, об'єм якого потрібно знайти, зображено на рис. 46. Областю інтегрування тут є квадрат $(R)$: $0 < x \le 1$; $0 \le y \le 1$. Тому шуканий об'єм

$$V = \iint_{(R)} f(x, y)dxdy = \iint_{(R)} \left(1 + x^2 + y^2\right)dxdy =$$

$$= \int_0^1 \left( \int_0^1 \left(1 + x^2 + y^2\right)dy \right) dx = \int_0^1 \left( y + x^2 y + \frac{1}{3}y^3 \right) \Bigg|_0^1 dx =$$

$$= \int_0^1 \left( \frac{4}{3} + x^2 \right) dx = \left( \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}x^3 \right) \Bigg|_0^1 = \frac{5}{3}.$$

**3.** Знайти масу квадратної пластинки зі стороною $2a$, якщо густина матеріалу пластинки пропорційна квадрату відстані від точки перетину діагоналей і в кутах квадрата дорівнює одиниці.

Р о з в ' я з а н н я. Використаємо формулу

$$m = \iint_{(R)} \rho(x, y)dxdy.$$

Знайдемо формулу для густини $\rho(x, y)$. За умовою задачі

$$\rho(x, y) = k\left((x-a)^2 + (y-a)^2\right) \qquad (15)$$

(рис. 47), де $k$ — коефіцієнт пропорційності.

Підставивши у рівність (15) $x = 0, y = 0$ і $\rho = 1$, знайдемо

$$k = \frac{1}{2a^2}.$$

Тоді формула для густини набирає вигляду

$$\rho(x, y) = \frac{1}{2a^2}\left((x-a)^2 + (y-a)^2\right).$$

Оскільки областю інтегрування є квадрат $(R): 0 < x \le 2a, \ 0 \le y \le 2a$, то

$$m = \iint_{(R)} \frac{1}{2a^2}\left((x-a)^2 + (y-a)^2\right)dxdy = \frac{1}{2a^2} \int_0^{2a} \left( \int_0^{2a} \left((x-a)^2 + (y-a)^2\right)dy \right) dx =$$

$$=\frac{1}{2a^2}\int_0^{2a}\left((x-a)^2 y+\frac{(y-a)^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2a} dx =$$

$$=\frac{1}{2a^2}\int_0^{2a}\left(2a(x-a)^2+\frac{2a^3}{3}\right)dx=\frac{1}{2a^2}\left(2a\frac{(x-a)^3}{3}+\frac{2a^3}{3}x\right)\Bigg|_0^{2a}=$$

$$=\frac{1}{2a^2}\left(2a\frac{a^3}{3}+\frac{4}{3}a^4+\frac{2}{3}a^4\right)=\frac{4}{3}a^2.$$

**Випадок криволінійної області.** Нехай областю інтегрування є криволінійна квадровна область $(D)$. Розглядатимемо окремі випадки, коли область $(D)$ обмежено контуром або першого, або другого роду.

***Означення.*** *Контуром першого (другого) роду* називають такий контур, який з прямими, паралельними осі $Oy$ (осі $Ox$), має не більше двох спільних точок, крім, можливо, двох крайніх прямих.

Так, на рис. 48 зображено контур першого роду, а на рис. 49 — контур другого роду. Існують контури, що належать як до першого, так і до другого роду (рис. 50), а також контури, що не належать ні до першого, ні до другого роду (рис. 51).

Отже, нехай областю інтегрування є квадровна область, обмежена контуром першого роду (рис. 52).

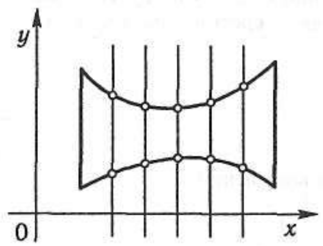

Рис. 48

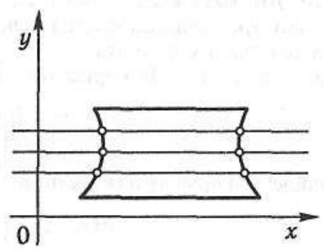

Рис. 49

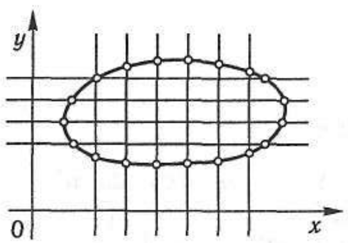

Рис. 50

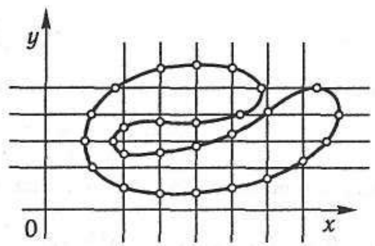

Рис. 51



Припустимо, що криві $\overset{\frown}{AB}$ і $\overset{\frown}{CD}$ задано рівняннями в декартовій системі координат

$$y=\varphi(x),\ y=\psi(x),\ a\le x\le b,$$

де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — неперервні функції на відрізку $[a;b]$.

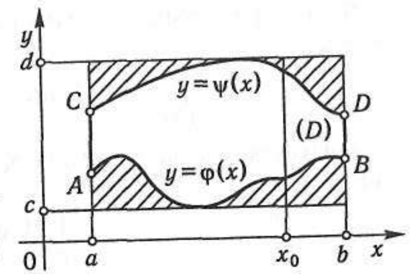

Рис. 52

**Теорема 2.** Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в квадровній області $(D)$, обмеженій контуром першого роду, то для кожного значення $x\in[a;b]$ існує повторний інтеграл

$$\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

і виконується рівність

$$\int_{(D)} f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx. \tag{16}$$

Доведення. Оскільки область $(D)$ обмежена, то її можна помістити в прямокутник $(R)$: $a\le x\le b;\ c\le y\le d$ (рис. 52), де $c$ — найменше значення функції $\varphi(x)$ на відрізку $[a;b]$, $d$ — найбільше значення функції $\psi(x)$ на цьому відрізку.

У прямокутнику $(R)$ розглянемо функцію

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & \text{якщо } (x,y)\in(D);\\ 0, & \text{якщо } (x,y)\in(D_1),\end{cases}$$

де $(D_1)=(R)\setminus(D)$ — область, що складається з точок прямокутника $(R)$, які не належать області $(D)$.

Оскільки функція $F(x,y)$ збігається з функцією $f(x,y)$ в області $(D)$, то вона інтегровна в цій області й

$$\iint_{(D)} F(x,y)dxdy=\iint_{(D)} f(x,y)dxdy. \tag{17}$$

Функція $F(x,y)$ також інтегровна в області $(D_1)$, оскільки в цій області вона дорівнює нулю:

$$\iint_{(D_1)} F(x,y)dxdy=0. \tag{18}$$

З рівностей (17) і (18) та з адитивної властивості подвійного інтеграла випливає, що $F(x,y)$ інтегровна в прямокутнику $(R)$ і

$$\iint_{(R)} F(x,y)dxdy=\iint_{(R)} f(x,y)dxdy. \tag{19}$$

До інтеграла в лівій частині рівності (19) застосуємо формулу (2). Матимемо

$$\iint\limits_{(R)} F(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left( \int_c^d F(x,y)\,dy \right) dx. \tag{20}$$

Зафіксуємо деяке значення $x_0 \in [a;b]$ і розглянемо визначений інтеграл

$$\int_c^d F(x_0,y)\,dy.$$

Цей інтеграл можна записати так:

$$\int_c^d F(x_0,y)\,dy = \int_c^{\varphi(x_0)} F(x_0,y)\,dy + \int_{\varphi(x_0)}^{\psi(x_0)} F(x_0,y)\,dy + \int_{\psi(x_0)}^{d} F(x_0,y)\,dy. \tag{21}$$

Згідно з побудовою функції $F(x,y)$

$$\int_c^{\varphi(x_0)} F(x_0,y)\,dy = 0; \quad \int_{\psi(x_0)}^{d} F(x_0,y)\,dy = 0.$$

Тому рівність (21) набирає вигляду

$$\int_c^d F(x_0,y)\,dy = \int_{\varphi(x_0)}^{\psi(x_0)} f(x_0,y)\,dy. \tag{22}$$

Оскільки $x_0$ — довільна точка відрізка $[a;b]$, то формула (22) виконується й для будь-якого значення $x \in [a;b]$. Отже,

$$\iint\limits_{(R)} F(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Використовуючи рівність (19), дістанемо формулу (16).

Теорему доведено.

**Теорема 3.** Нехай $(D)$ — квадровна область, обмежена контуром другого роду (рис. 53). Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в області $(D)$, то існує повторний інтеграл

$$\int_c^d \left( \int_{\omega(y)}^{\rho(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

і виконується рівність

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left( \int_{\omega(y)}^{\rho(y)} f(x,y)\,dx \right) dy. \tag{23}$$



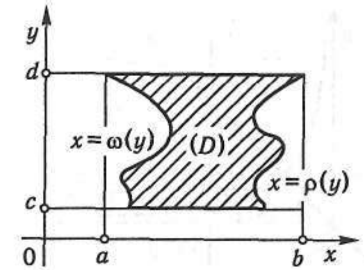


Рис. 53

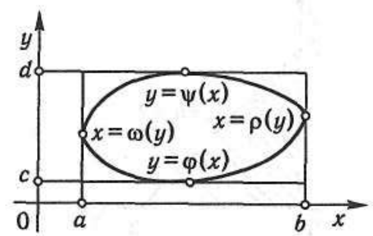


Рис. 54

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 2, тому його не наводитимемо.

Нехай область $(D)$ обмежена контуром, який належить як до першого, так і до другого роду (рис. 54), і нехай функція $f(x,y)$ неперервна в цій області. Тоді одночасно виконуються формули (16) і (23). Отже,

$$\int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_{\omega(y)}^{\rho(y)} f(x,y)\,dx \right) dy,$$

тобто результат не залежить від порядку інтегрування.

Якщо область $(D)$ обмежена контуром складнішої природи, то її розбивають прямими, паралельними координатним осям, на скінченне число областей, кожна з яких вже обмежена контуром одного з розглядуваних типів. Тоді подвійний інтеграл записують у вигляді суми інтегралів, поширених на відповідну часткову область.

❑ **Приклади**

**4.** Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint\limits_{(D)} (x-y)\,dxdy,$$

якщо область інтегрування обмежено прямими

$$x=0, \quad y=0, \quad x+y=2.$$

**Розв'язання.** Область $(D)$ є трикутником (рис. 55), причому контур належить і до першого, і до другого роду. Оскільки підінтегральна функція $f(x,y)=x-y$ є неперервною, то для обчислення подвійного інтеграла можна використати формулу (16) або (23). Візьмемо, наприклад, формулу (16). Матимемо

$$\iint\limits_{(D)} (x-y)\,dxdy = \int_0^2 \left( \int_0^{2-x} (x-y)\,dy \right) dx = \int_0^2 \left( xy - \frac{1}{2}y^2 \right)\Big|_0^{2-x} dx =$$

$$= \int_0^2 \left( x(2-x) - \frac{1}{2}(2-x)^2 \right) dx = \int_0^2 \left( 4x - \frac{3}{2}x^2 - 2 \right) dx = \left( 2x^2 - \frac{1}{2}x^3 - 2x \right)\Big|_0^2 = 0.$$

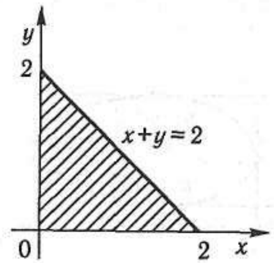


Рис. 55

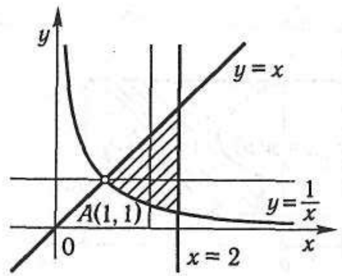


Рис. 56

**5.** Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_{(D)} \frac{x^2}{y^2}\,dxdy,$$

якщо область $(D)$ обмежена прямими $y = x, x = 2$ і гіперболою $xy = 1$ (рис. 56).

Розв'язання. Область $(D)$ (на рисунку її заштриховано) обмежена контуром, що належить і до першого, і до другого роду. Проте зручніше скористатися формулою (16). Тоді матимемо справу тільки з одним повторним інтегралом, оскільки прямі, паралельні осі $Oy$, входячи в область $(D)$, перетинають ту саму лінію (гіперболу) $y = \frac{1}{x}$, а виходячи з області $(D)$, перетинають ту саму лінію (бісектрису) $y = x$.

Якщо користуватися формулою (23), то область потрібно розбити на дві області, провівши через точку $A(1,1)$ пряму, паралельну осі $Ox$. Тоді для обчислення подвійного інтеграла довелося б обчислювати два повторні інтеграла.

Отже, скориставшись формулою (16), матимемо

$$\iint_{(D)} \frac{x^2}{y^2}\,dxdy = \int_1^2 \left( \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy \right) dx = \int_1^2 \left( -\frac{x^2}{y} \right)\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x} dx =$$

$$= \int_1^2 \left( x^3 - x \right) dx = \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_1^2 = \frac{9}{4}.$$

**6.** Знайти межі в одному з повторних інтегралів, якщо область інтегрування є паралелограмом зі сторонами $y = x$, $y = x + 3$, $y = -2x$, $y = -2x + 5$.

Розв'язання. Розглянемо випадок, коли у повторному інтегралі внутрішній інтеграл обчислюють за $y$, а зовнішній — за $x$.

У цьому випадку доцільно паралелограм розбити на три області $(D_1)$, $(D_2)$, $(D_3)$ (рис. 57). Тоді подвійний інтеграл запишемо у вигляді суми трьох подвійних інтегралів

$$\iint_{(D)} f(x, y)\,dxdy = \iint_{(D_1)} f(x, y)\,dxdy + \iint_{(D_2)} f(x, y)\,dxdy + \iint_{(D_3)} f(x, y)\,dxdy. \tag{24}$$



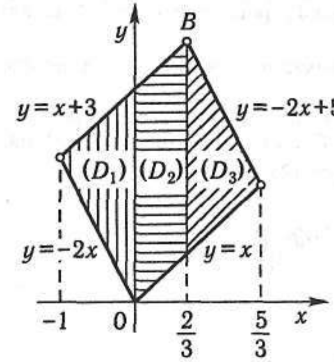


Рис. 57

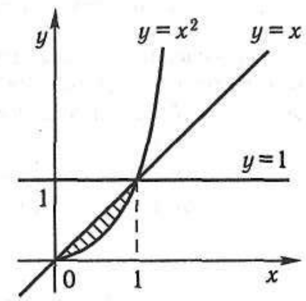


Рис. 58

Розв'язавши системи рівнянь

$$\begin{cases} y = x + 3; \\ y = -2x; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x + 3; \\ y = -2x + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2x + 5; \\ y = x, \end{cases}$$

знайдемо відповідно координати точок: $A(-1, 2)$; $B\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$; $C\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Кожний з інтегралів у правій частині рівності (24) виразиться через повторні інтеграли:

$$\iint_{(D_1)} f(x, y)\,dxdy = \int_{-1}^{0} \left( \int_{-2x}^{x+3} f(x, y)\,dy \right) dx;$$

$$\iint_{(D_2)} f(x, y)\,dxdy = \int_{0}^{\frac{2}{3}} \left( \int_{x}^{x+3} f(x, y)\,dy \right) dx;$$

$$\iint_{(D_3)} f(x, y)\,dxdy = \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{3}} \left( \int_{x}^{-2x+5} f(x, y)\,dy \right) dx.$$

**7.** Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі

$$\int_0^1 \left( \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx \right) dy. \tag{25}$$

Розв'язання. Оскільки внутрішній інтеграл обчислюють за $x$, то межі внутрішнього інтеграла визначають лінії, якими обмежена область інтегрування зліва і справа, а саме:

$$x = y \text{ і } x = \sqrt{y}.$$

Перше рівняння є рівнянням бісектриси першого і третього координатних кутів, а друге — права вітка параболи $y = x^2$.

Межі в зовнішньому інтегралі $(y = 0, y = 1)$ показують, в яких межах змінюється $y : 0 \le y \le 1$.

Отже, побудувавши ці лінії, знайдемо область інтегрування $(D)$ (на рис. 58 її заштриховано). Як бачимо, прямі, паралельні осі $Oy$, входять в область $(D)$ на лінії $y = x^2$, а виходять з області на лінії $y = x$. Інтеграл (25) має вигляд

$$\int_0^1 \left( \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y)dx \right) dy = \int_0^1 \left( \int_{x^2}^{x} f(x, y)dy \right) dx.$$

## 3.6 ЗАМІНА ЗМІННИХ У ПОДВІЙНОМУ ІНТЕГРАЛІ. ВИПАДОК ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТ

Під час обчислення визначеного інтеграла часто застосовують заміну змінної інтегрування. Цим методом обчислюють і подвійний інтеграл.

Отже, нехай у подвійному інтегралі

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy,$$

де $f(x, y)$ — неперервна функція у квадровній області $(D)$, потрібно зробити заміну змінних за формулами

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v). \tag{1}$$

Припустимо, що функції $\varphi(u, v)$ і $\psi(u, v)$ задано в деякій області $(G)$ і в цій області вони неперервні й такі, що при кожній парі значень $(u, v) \in G$ значення функцій $\varphi(u, v)$ і $\psi(u, v)$ належать області $(D)$. Тоді кожній парі чисел $(u, v)$ з області $(G)$ відповідає одна точка $(x, y)$ з області $(D)$, координати якої визначають за формулами (1).

Нехай і навпаки, кожній парі чисел $(x; y)$ з області $(D)$ відповідає одна точка $(u, v)$ з області $(G)$, координати якої визначають за формулами

$$u = \Phi(x, y), \quad v = \Psi(x, y), \tag{2}$$

які є результатом розв'язання рівнянь (1) відносно $u$ і $v$.

Отже, між точками областей $(D)$ і $(G)$ за допомогою формул (1) і (2) встановлюється взаємно однозначна відповідність. Інакше кажучи, за формулами (1) область $(G)$ на площині $uOv$ відображається в область $(D)$ на площині $xOy$, а за формулами (2) область $(D)$ на площині $xOy$ відображається в область $(G)$ на площині $uOv$. Звідси випливає, що кожну пару чисел $(u, v)$ можна розглядати як координати точки $(u, v) \in (G)$ і як координати точки $(x, y) \in (D)$, оскільки кожній парі чисел $(u, v)$ в області $(D)$ відповідає певна точка $(x, y)$. Числа $u$ і $v$ на відміну від декартових координат $x$ і $y$, як уже зазначалося, на-



зивають *криволінійними координатами*.

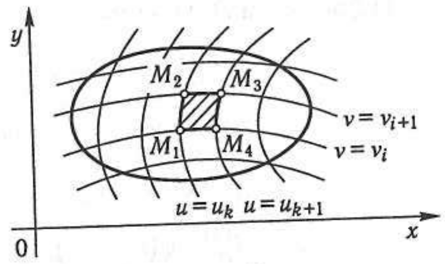


Рис. 59

Якщо в рівняннях (2) $u = \text{const}$, тобто

$$\Phi(x, y) = C = \text{const},$$

то за кожного значення $C$ у площині $xOy$ матимемо координатну лінію $u$, вздовж якої змінюється тільки $v$. Аналогічно, якщо

$$\Psi(x, y) = C = \text{const},$$

то в площині $xOy$ матимемо координатну лінію $v$, вздовж якої змінюється тільки $u$.

У загальному випадку координатні лінії $u$ і $v$ утворюють дві сім'ї однопараметричних кривих.

Тоді через кожну точку $(x, y) \in (D)$ проходить одна координатна лінія $u = \text{const}$ і одна координатна лінія $v = \text{const}$. У результаті перетину цих ліній утворюється точка $(x, y) \in (D)$.

Подвійний інтеграл, якщо він існує, не залежить від способу розбиття області $(D)$ на часткові області $(\Delta D_{ik})$. Тому в подальшому розбиватимемо область $(D)$ на часткові області координатними лініями $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ (рис. 59).

Розглянемо часткову область $(\Delta D_{ik})$ (на рисунку її заштриховано). Ця область є криволінійним чотирикутником із вершинами $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$, криволінійними координатами яких є відповідно числа $(u_k, v_i)$, $(u_k, v_{i+1})$, $(u_{k+1}, v_{i+1})$, $(u_{k+1}, v_i)$. Позначимо площу цього чотирикутника через $\Delta\sigma_{ik}$.

Тоді подвійний інтеграл можна записати так:

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} f(\varphi(u_k, v_i), \psi(u_k, v_i))\Delta\sigma_{ik}. \tag{3}$$

У формулі (3) для зручності значення функції $f(x, y)$ взято в точці $M_1$ (подвійний інтеграл не залежить від вибору точок у частинних областях $(\Delta D_{ik})$.

Оскільки функція $f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ в області $(G)$ є неперервною, то границя в правій частині рівності (3) існує і дорівнює подвійному інтегралу $\iint\limits_{(G)} f(\varphi, (u, v), \psi(u, v))d\sigma$.

Знайдемо диференціал площі $d\sigma$ через диференціали $du$ і $dv$ криволінійних координат $u$ і $v$.

Позначимо декартові координати точок $M_1, M_2, M_3, M_4$ відповідно через

$$M_1\left(x_{ki}^{(1)}; y_{ki}^{(1)}\right), \; M_2\left(x_{ki}^{(2)}; y_{ki}^{(2)}\right), \; M_3\left(x_{ki}^{(3)}; y_{ki}^{(3)}\right), \; M_4\left(x_{ki}^{(4)}; y_{ki}^{(4)}\right).$$

За формулами (1) маємо

$$x_{ki}^{(1)} = \varphi(u_k, v_i); \quad y_{ki}^{(1)} = \psi(u_k, v_i);$$

$$x_{ki}^{(2)} = \varphi(u_k, v_{i+1}); \quad y_{ki}^{(2)} = \psi(u_k, v_{i+1});$$

$$x_{ki}^{(3)} = \varphi(u_{k+1}, v_{i+1}); \quad y_{ki}^{(3)} = \psi(u_{k+1}, v_{i+1});$$

$$x_{ki}^{(4)} = \varphi(u_{k+1}, v_i); \quad y_{ki}^{(4)} = \psi(u_{k+1}, v_i).$$

Припустимо, що функції $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ в області $(G)$ мають неперервні похідні до другого порядку включно. Тоді, ввівши позначення

$$\Delta u_k = u_{k+1} - u_k, \quad \Delta v_i = v_{i+1} - v_i$$

і використавши формулу Тейлора, дістанемо такі рівності:

$$x_{ki}^{(2)} = \varphi(u_k, v_i) + \varphi_v'(u_k, v_i)\Delta v_i + R_2^{(2)}\varphi;$$

$$y_{ki}^{(2)} = \psi(u_k, v_i) + \psi_v'(u_k, v_i)\Delta v_i + R_2^{(2)}\psi;$$

$$x_{ki}^{(3)} = \varphi(u_k, v_i) + \varphi_u'(u_k, v_i)\Delta u_k + \varphi_v'(u_k, v_i)\Delta v_i + R_2^{(3)}\varphi;$$

$$y_{ki}^{(3)} = \psi(u_k, v_i) + \psi_u'(u_k, v_i)\Delta u_k + \psi_v'(u_k, v_i)\Delta v_i + R_2^{(3)}\psi;$$

$$x_{ki}^{(4)} = \varphi(u_k, v_i) + \varphi_u'(u_k, v_i)\Delta u_k + R_2^{(4)}\varphi;$$

$$y_{ki}^{(4)} = \psi(u_k, v_i) + \psi_u'(u_k, v_i)\Delta u_k + R_2^{(4)}\psi, \qquad (4)$$

де $R_2^{(2)}\varphi, R_2^{(2)}\psi, \ldots$ — залишкові члени формули Тейлора. Оскільки ці члени є величинами вищого порядку мализни щодо $\Delta u_k$ і $\Delta v_i$, то ними можна знехтувати. Тоді рівності (4) замінюються наближеними рівностями.

Можна було б довести, що з точністю до нескінченно малих вищого порядку відстань $|M_1M_2|$ дорівнює відстані $|M_3M_4|$, а відстань $|M_1M_4|$ дорівнює $|M_2M_3|$. Тоді $M_1, M_2, M_3, M_4$ можна вважати вершинами звичайного паралелограма. Знайдемо площу цього паралелограма.

З аналітичної геометрії відомо, що площа паралелограма дорівнює модулю детермінанта третього порядку:

$$\begin{vmatrix} x_{ki}^{(1)} & y_{ki}^{(1)} & 1 \\ x_{ki}^{(2)} & y_{ki}^{(2)} & 1 \\ x_{ki}^{(3)} & y_{ki}^{(3)} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{ki}^{(2)} - x_{ki}^{(1)} & y_{ki}^{(2)} - y_{ki}^{(1)} \\ x_{ki}^{(3)} - x_{ki}^{(1)} & y_{ki}^{(3)} - y_{ki}^{(1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_u'(u_k, v_i) & \psi_u'(u_k, v_i) \\ \varphi_v'(u_k, v_i) & \psi_v'(u_k, v_i) \end{vmatrix} \Delta u_k \Delta v_i.$$



Введемо позначення

$$I = I(u, v) = \begin{vmatrix} \varphi_u'(u_k, v_i) & \psi_u'(u_k, v_i) \\ \varphi_v'(u_k, v_i) & \psi_v'(u_k, v_i) \end{vmatrix}.$$

Цей детермінант називають *детермінантом Остроградського системи двох функцій* $\varphi(u, v)$ і $\psi(u, v)$.

Отже, шукана площа

$$d\sigma_{ki} = |I(u_k, v_k)| \Delta u_k \Delta v_i.$$

Тоді формула заміни змінних у подвійному інтегралі має вигляд

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{(G)} f(\varphi(u, v), \psi(u, v))|I|\,dudv. \qquad (5)$$

Зазначимо, що у формулі (5) нові координати $u$ і $v$ залишаються прямокутними, як і старі координати $x$ і $y$. Проте відбувається деформація області: область $(D)$ на площині $xOy$ перетворюється за співвідношенням (1) на область $(G)$ на площині $uOv$. Крім формули (5), можна користуватися формулою

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{(D)} f(\varphi(u, v), \psi(u, v))|I|\,dudv, \qquad (6)$$

в якій область інтегрування $(D)$ залишається без зміни, але $u$ і $v$ розглядають вже як криволінійні координати на площині $xOy$.

❑ **Приклади**

**1.** У подвійному інтегралі

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dxdy,$$

де $(D)$ — паралелограм зі сторонами $x=3$, $x=5$, $3x-2y+4=0$, $3x-2y+1=0$ (рис. 60), перейти до криволінійних координат $u, v$ так, щоб у повторному інтегралі межі за $u$ і за $v$ були сталими.

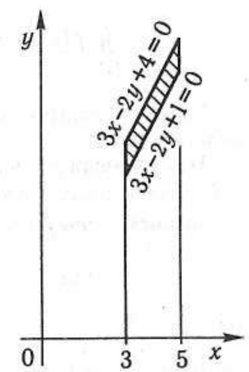

**Рис. 60**

Р о з в ' я з а н н я. Введемо нові змінні $u$ і $v$ за формулами

$$u = x; \quad v = 3x - 2y. \qquad (7)$$

Тоді $u$ і $v$ змінюватимуться в межах

$$\begin{cases} 3 \le u \le 5; \\ -4 \le v \le -1. \end{cases} \qquad (8)$$

Із формул (7) знаходимо

$$x = u; \quad y = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}v.$$

Отже, детермінант Остроградського

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & \frac{3}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}.$$

Скориставшись формулою (5), матимемо

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{(G)} f\left(u,\frac{3}{2}u-\frac{1}{2}v\right)\frac{1}{2}\,dudv.$$

Записавши останній інтеграл через повторний і застосувавши нерівності (8), дістанемо

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_{3}^{5}\left(\int\limits_{-4}^{-1} f\left(u,\frac{3}{2}u-\frac{1}{2}v\right)dv\right)du.$$

**2.** У подвійному інтегралі

$$K=\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy,$$

де область $(D)$ обмежена кривими $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $x=0$, $y=0$, $a>0$, перейти до криволінійних координат $u$ і $v$, якщо

$$x=u\cos^4 v;\quad y=u\sin^4 v.$$

Р о з в ' я з а н н я. Знайдемо детермінант Остроградського

$$I(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos^4 v-4u\cos^3 v\sin v\\ \sin^4 v-4u\sin^3 v\cos v\end{vmatrix}=4u\sin^3 v\cos^3 v.$$

Отже,

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy=4\iint\limits_{(G)} f\left(u\cos^4 v,u\sin^4 v\right)u\sin^2 v\cos^3 v\,dudv.$$

Перейдемо від подвійного інтеграла до повторного. Для цього знайдемо межі зміни змінних $u$ і $v$.

Підставивши у рівняння кривої $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ значення $x$ і $y$, знайдемо $u=a$, тобто крива в системі координат $uOv$ переходить у пряму.

Візьмемо точку з координатами $(0,y)$, де $0<y\le a$, на прямій $x=0$. Тоді

$$u\cos^4 v=0,$$

звідси $v=\frac{\pi}{2}$.

Якщо точка $(x,0)$ лежить на прямій $y=0$, де $0<x\le a$, то $v=0$. Початку координат $(0,0)$ відповідає значення $u=0$.



Отже,

$$K=4\int\limits_{0}^{a}\left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(u\cos^4 v,u\sin^4 v\right)u\sin^3 v\cos^3 v\,dv\right)du.$$

**3.** Обчислити інтеграл $\iint\limits_{(D)} dxdy$, де $(D)$ — область, обмежена еліпсом

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Р о з в ' я з а н н я. Щоб обчислити заданий інтеграл, доцільно перейти до змінних $u$ і $v$, поклавши

$$x=au\cos v;\quad y=bu\sin v.$$

Тоді детермінант Остроградського

$$I=\begin{vmatrix}a\cos v & b\sin v\\ -au\sin v & bu\cos v\end{vmatrix}=abu.$$

При цьому область інтегрування $(D)$ переходить у прямокутник

$$0\le v\le 2\pi;\quad 0\le u\le 1.$$

Отже,

$$\iint\limits_{(R)} dxdy=ab\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{0}^{2\pi} u\,dv\right)du=ab\int\limits_{0}^{1} u(v)\Big|_0^{2\pi}du=2\pi ab\int\limits_{0}^{1} u\,du=\pi ab.$$

**Випадок полярних координат.** У полярній системі координат координатними лініями є $\rho=\text{const}$ і $\theta=\text{const}$. Координатні лінії $\rho=\text{const}$ — це концентричні кола з центром у початку координат, а координатні лінії $\theta=\text{const}$ — півпромені, що виходять із початку координат.

Отже, нехай у подвійному інтегралі

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy$$

потрібно перейти до полярних координат $\rho$ і $\theta$ за формулами

$$x=\rho\cos\theta;\quad y=\rho\sin\theta.$$

Розіб'ємо область $(D)$ на частини координатними лініями $\rho=\text{const}$ і $\theta=\text{const}$ (рис. 61).

Обчислимо площу $\Delta\sigma$ заштрихованої частини. Її можна розглядати як різницю площ двох кругових секторів $ODCO$ і $OABO$. Тоді

$$\Delta\sigma=\frac{1}{2}(\rho+\Delta\rho)^2\Delta\theta-\frac{1}{2}\rho^2\Delta\theta=\rho\Delta\rho\Delta\theta+\frac{1}{2}\Delta\rho\Delta\rho\Delta\theta.$$

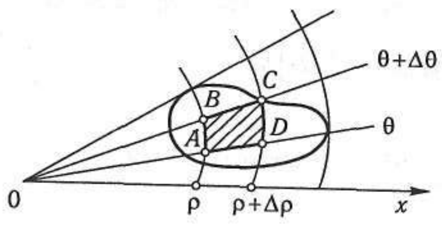


Рис. 61

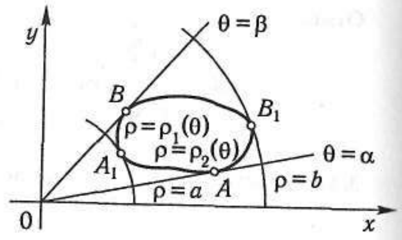


Рис. 62

Отже, диференціал площі $d\sigma$ (лінійна частина приросту площі)

$$d\sigma=\rho d\rho d\theta.$$

Таким чином, остаточно маємо

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{(G)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta. \tag{9}$$

Цей самий результат можна дістати, обчисливши детермінант Остроградського

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\rho}\\ \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta\end{vmatrix}=\rho.$$

Виразимо подвійний інтеграл у правій частині рівності (9) через повторні інтеграли в полярній системі координат.

Нехай область $(D)$ лежить між прямими $\theta=\alpha$ і $\theta=\beta$ та між колами $\rho=a$ і $\rho=b$ (рис. 62). Припустимо, що рівнянням кривої $BA_1A$ в полярній системі координат є $\rho=\rho_1(\theta)$, а рівнянням кривої $BB_1A$ — $\rho=\rho_2(\theta)$. Тоді при кожному $\theta\in[\alpha;\beta]$ змінна $\rho$ в області $(D)$ змінюватиметься в межах

$$\rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta).$$

Отже,

$$\iint\limits_{(D)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\int\limits_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho\right)d\theta. \tag{10}$$

У формулі (10) межі за $\rho$ змінні, а межі за $\theta$ сталі. Якщо межі за $\theta$ зробити змінними, а межі за $\rho$ сталими, то дістанемо такі формули:

$$\iint\limits_{(D)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta=\int\limits_{a}^{b}\left(\int\limits_{\theta_1(\rho)}^{\theta_2(\rho)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\theta\right)d\rho, \tag{11}$$

де $\theta=\theta_1(\rho)$ — рівняння кривої $A_1AB_1$, а $\theta=\theta_2(\rho)$ — рівняння кривої $B_1BA_1$.



❑ **Приклад**

4. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint\limits_{(D)}\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy,$$

якщо областю інтегрування є круг $x^2+y^2\le ax$, $a>0$.

Р о з в ' я з а н н я. Запишемо рівняння контура (кола) в полярних координатах. Для цього в рівняння кола

$$x^2+y^2=ax$$

підставимо значення $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$. Матимемо

$$\rho^2=a\rho\cos\theta,$$

звідси

$$\rho_1=0;\ \ \rho_2=a\cos\theta.$$

Отже, межами за $\rho$ є

$$0\le\rho\le a\cos\theta.$$

Згідно з рис. 63 межами за $\theta$ є

$$\theta=-\frac{\pi}{2},\ \ \theta=\frac{\pi}{2}.$$

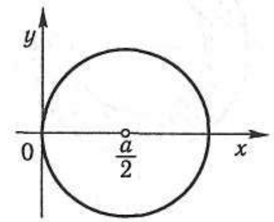


Рис. 63

Обчислюємо інтеграл

$$\iint\limits_{(D)}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\ dxdy=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_{0}^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-\rho^2}\rho d\rho\right)d\theta=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{3}\sqrt{\left(a^2-\rho^2\right)^3}\Bigg|_0^{a\cos\theta}\right)d\theta=\frac{1}{3}a^3\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sqrt{\sin^6\theta}\right)d\theta=$$

$$=\frac{2}{3}a^3\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^3\theta\right)d\theta=\frac{2}{3}a^3\left(\theta+\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

## 3.7 НЕВЛАСНІ ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Раніше розглядали подвійний інтеграл від обмеженої функції $f(x,y)$, яку задано в обмеженій замкненій області $(D)$.

Проте, як і для функції однієї змінної, для функції двох змінних поняття інтегровності можна поширити ще й на такі випадки:

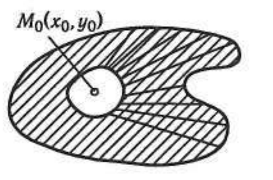

Рис. 64

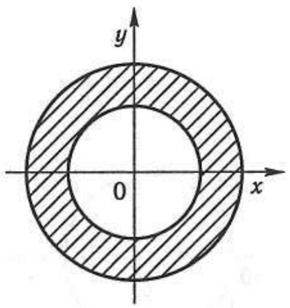

Рис. 65

1) $f(x, y)$ обмежена в усіх точках області $(D)$, крім деякого скінченного числа точок, в околі яких функція $f(x, y)$ необмежена;

2) область інтегрування необмежена.

Розглянемо такі випадки.

I. Функція $f(x, y)$ необмежена.

Припустимо, що функція $f(x, y)$ необмежена в околі однієї точки $M_0(x_0, y_0) \in (D)$, що міститься всередині області $(D)$; в решті точок області $f(x, y)$ обмежена й інтегровна. Точку $M_0(x_0, y_0)$ тоді називають *особливою* для функції $f(x, y)$. Нехай $(\Omega)$ є круговим околом точки $M_0(x_0, y_0)$.

Отже, за припущенням, функція $f(x, y)$ інтегровна в області $(T) = (D) \setminus (\Omega)$ (на рис. 64 цю область заштриховано), тобто існує інтеграл

$$\iint\limits_{(T)} f(x, y)\,dxdy.$$

Візьмемо довільну послідовність кругів $(\Omega_1) \supset (\Omega_2) \supset \ldots \supset (\Omega_n) \supset \ldots$, що є околами точки $M_0(x_0, y_0)$. Позначимо довжини їхніх діаметрів через $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$ і припустимо, що послідовність чисел $\{d_n\}$ збігається до нуля, тобто

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0.$$

Тоді кажуть, що круги $(\Omega_1), (\Omega_2), \ldots, (\Omega_n), \ldots$ стягуються в точку $M_0(x_0, y_0)$.

***Означення 1.*** Невласним інтегралом функції $f(x, y)$ по області $(D)$ називають *границю*, якщо вона існує,

$$\lim_{d_n\to 0} \iint\limits_{((D)\setminus(\Omega))} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dxdy. \tag{1}$$

Якщо ця границя є скінченним числом для будь-якої послідовності кругів, що стягуються в точку $M_0(x_0, y_0)$, то невласний інтеграл називають *збіжним*, у протилежному випадку — *розбіжним*.

❑ **Приклад**

**1.** Обчислити $\iint\limits_{(D)} \dfrac{dxdy}{\sqrt[4]{(x^2+y^2)^3}}$, де $(D)$ є кругом $x^2 + y^2 \le 1$.

Р о з в ' я з а н н я. Особливою точкою є точка $O(0; 0)$ (рис. 65). Візьмемо круг $(\Omega_n)$ з діаметром $d_n$, $x^2 + y^2 \le \frac{1}{4}d_n^2$, який вміщено в крузі $(D)$. Тоді $(T_n) = (D \setminus \Omega_n)$ — кільце (на рис. 65 його заштриховано). У цьому кільці підінтегральна функція інтегровна. Обчислимо інтеграл

$$\iint\limits_{(T_n)} \frac{dxdy}{\sqrt[4]{(x^2+y^2)^3}}.$$

Перейдемо до полярних координат: $x = \rho\cos\theta$; $y = \rho\sin\theta$.

Тоді, підставивши в рівняння кіл $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}d_n^2$ і $x^2 + y^2 = 1$ значення $x$ і $y$, матимемо $\rho = \frac{1}{2}d_n$ і $\rho = 1$. Отже, межі за $\rho$ такі: $\frac{1}{2}d_n \le \rho \le 1$.

Як бачимо, кут $\theta$ змінюється в межах $0 \le \theta \le 2\pi$. Тому маємо

$$\iint\limits_{(T_n)} \frac{dxdy}{\sqrt[4]{(x^2+y^2)^3}} = \int\limits_{\frac{1}{2}d_n}^{1} \left( \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho d\theta}{\sqrt[4]{\rho^3}} \right) d\rho =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{2}d_n}^{1} \frac{d\rho}{\sqrt[4]{\rho}} \int\limits_0^{2\pi} d\theta = 4\pi\sqrt[4]{\rho}\Big|_{\frac{1}{2}d_n}^{1} = 4\pi\left(1 - \frac{1}{2}d_n\right).$$

Знаходимо границю:

$$\lim_{d_n\to 0}\left(4\pi\left(1 - \sqrt[4]{\frac{1}{2}d_n}\right)\right) = 4\pi.$$

Границя існує і є скінченним числом. Тому невласний інтеграл збігається і дорівнює

$$\iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{\sqrt[4]{(x^2+y^2)^3}} = 4\pi.$$

**Т е о р е м а 1.** Якщо невласні інтеграли

$$\iint\limits_{(D)} f_1(x, y)\,dxdy \quad і \quad \iint\limits_{(D)} f_2(x, y)\,dxdy$$

збігаються, то збігається й невласний інтеграл

$$\iint\limits_{(D)} \left(c_1 f_1(x, y) \pm c_2 f_2(x, y)\right) dxdy,$$

де $c_1$ і $c_2$ — сталі числа, і виконується рівність

$$\iint\limits_{(D)} \left(c_1 f_1(x, y) \pm c_2 f_2(x, y)\right) dxdy =$$

$$= c_1 \iint\limits_{(D)} f_1(x, y)\,dxdy \pm c_2 \iint\limits_{(D)} f_2(x, y)\,dxdy.$$

Справедливість цієї теореми випливає з умови теореми та означення 1.

В означенні невласного інтеграла було взято окремий випадок областей $(\Omega_1)$, $(\Omega_2), \dots, (\Omega_n)$, а саме довільну послідовність кругів, що стягуються в точку $M_0(x_0, y_0)$.

Проте можна було б під $(\Omega_1), (\Omega_2), \dots, (\Omega_n)$ розуміти довільні області, що стягуються в точку $M_0(x_0, y_0)$. Тоді дістали б означення власного інтеграла.

***Означення 2.*** *Невласним інтегралом* називають границю, якщо вона існує,

$$\lim_{\delta \to 0} \iint\limits_{(D \setminus \Omega_\delta)} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dxdy, \tag{2}$$

де $\delta$ — діаметр області $(\Omega_\delta)$.

Якщо невласний інтеграл збігається за означенням 2, то він збігається й за означенням 1, причому границі (1) і (2) рівні між собою.

Якщо невласний інтеграл розбігається за означенням 1, то він розбігається й за означенням 2.

Іноді буває, що невласний інтеграл розбігається за означенням 2, але збігається за означенням 1. У цьому випадку границю (1) називають *головним значенням розбіжного невласного інтеграла.*

Головне значення розбіжного подвійного інтеграла застосовують у математичній фізиці.

Проте в деяких випадках зі збіжності невласного інтеграла за означенням 1 випливає збіжність його за означенням 2.

**Теорема 2.** Нехай підінтегральна функція $f(x, y)$ в інтегралі (2) є невід'ємною, а за послідовність областей $(\Omega_{\delta_1})$, $(\Omega_{\delta_2}), \dots, (\Omega_{\delta_n}), \dots$ взято будь-яку монотонно спадну послідовність кругів із центром у точці $M_0(x_0, y_0)$, тобто таку, що

$$(\Omega_{\delta_1}) \supset (\Omega_{\delta_2}) \supset \dots \supset (\Omega_{\delta_n}) \supset \dots, \delta_n \to 0, n \to \infty.$$

Тоді для збіжності інтеграла (2) необхідно й достатньо, щоб послідовність чисел

$$\iint\limits_{(D \setminus \Omega_{\delta_1})} f(x, y)\,dxdy, \dots,$$

$$\iint\limits_{(D \setminus \Omega_{\delta_n})} f(x, y)\,dxdy, \dots$$

була обмеженою.

Доведення теореми не наводимо.



Надалі під невласним інтегралом розумітимемо невласний інтеграл за означенням 1.

***Означення 3.*** Невласний інтеграл

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dxdy$$

називають *абсолютно збіжним,* якщо збігається інтеграл

$$\iint\limits_{(D)} |f(x, y)|\,dxdy.$$

**Теорема 3.** Якщо невласний інтеграл

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dxdy$$

абсолютно збігається, то він є збіжним.

Доведення. Зобразимо функцію $f(x, y)$ у вигляді різниці двох невід'ємних функцій

$$f(x, y) = |f(x, y)| - (|f(x, y)| - f(x, y)). \tag{3}$$

Нехай

$$f_1(x, y) = |f(x, y)| \ \text{ і } \ f_2(x, y) = |f(x, y)| - f(x, y).$$

Тоді

$$f_2(x, y) \le 2|f(x, y)|. \tag{4}$$

Отже, невласні інтеграли

$$\iint\limits_{(D)} f_1(x, y)\,dxdy, \quad \iint\limits_{(D)} f_2(x, y)\,dxdy,$$

згідно з умовою теореми і з нерівністю (4) збігаються.

Тоді з рівності (3) випливає, що збігається інтеграл

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dxdy.$$

Теорему доведено.

Наступна теорема дає достатню ознаку абсолютної збіжності невласного інтеграла.

**Теорема 4.** Нехай в області $(D)$ виконуються нерівності

$$0 \le |f(x, y)| \le \varphi(x, y), \tag{5}$$

де функції $f(x, y)$ і $\varphi(x, y)$ мають ту саму особливу точку $M_0(x_0, y_0)$, що знаходиться всередині області $(D)$. Тоді

1) якщо збігається інтеграл

$$\iint\limits_{(D)} \varphi(x, y)\,dxdy, \tag{6}$$

то абсолютно збіжним є інтеграл

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dxdy; \tag{7}$$

2) якщо інтеграл (7) розбігається, то розбігається й інтеграл (6).

**Доведення.** Візьмемо довільну послідовність кругів $\Omega_n$, $n = 1, 2, \ldots$, що стягується в точку $M_0(x_0, y_0)$. В області $D \setminus \Omega_n$ існують подвійні інтеграли

$$\iint\limits_{(D\setminus\Omega_n)} |f(x, y)|\,dxdy, \quad \iint\limits_{(D\setminus\Omega_n)} \varphi(x, y)\,dxdy$$

і виконується нерівність

$$\iint\limits_{(D\setminus\Omega_n)} |f(x, y)|\,dxdy \le \iint\limits_{(D\setminus\Omega_n)} \varphi(x, y)\,dxdy.$$

Тоді:

1) якщо інтеграл (7) збігається, то послідовність чисел

$$\left\{ \iint\limits_{(D\setminus\Omega_n)} \varphi(x, y)\,dxdy \right\}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

є обмеженою, а отже, є обмеженою й послідовність чисел

$$\left\{ \iint\limits_{(D\setminus\Omega_n)} |f(x, y)|\,dxdy \right\}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

За теоремою 2 інтеграл

$$\iint\limits_{(D)} |f(x, y)|\,dxdy \tag{10}$$

збігається;

2) якщо інтеграл (7) розбігається, то розбігається й інтеграл (6) (у протилежному випадку збігався б інтеграл (7)). Із розбіжності інтеграла (10) випливає, що яку б послідовність кругів $(\Omega_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, що стягується в точку $M_0(x_0, y_0)$, не взяти, послідовність чисел (9) — необмежена. Тоді й послідовність чисел (8) необмежена, а тому інтеграл (6) розбігається.

Теорему доведено.

Як наслідок із теореми 4 випливає така теорема.

**Теорема 5.** Якщо функція $f(x, y)$ в області $(D)$ має єдину особливу точку $M_0(x_0, y_0)$, що міститься всередині цієї області, й для точок



області $(D)$ виконується нерівність

$$|f(x, y)| \le \frac{C}{r^{\alpha}},$$

де $C > 0$ — стала, а $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}$, і $\alpha < 2$, то інтеграл

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dxdy$$

збігається абсолютно.

**Доведення.** Для доведення цієї теореми достатньо довести, що збігається інтеграл

$$\iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)^{\alpha}}. \tag{11}$$

Візьмемо круг $(K)$ із центром у точці $(x_0, y_0)$ і досить малим радіусом $R$ таким, щоб круг $(K)$ уміщався в області $(D)$: $(D) \supset (K)$. Тоді дослідження збіжності інтеграла (11) по області $(D)$ можна замінити інтегралом

$$\iint\limits_{(K)} \frac{dxdy}{\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)^{\alpha}}. \tag{12}$$

Візьмемо круг $(\Omega_n)$,

$$(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2 \le \frac{1}{4} d_n^2,$$

де $d_n < 2R$ і $\lim\limits_{n \to \infty} d_n = 0$.

Обчислимо подвійний інтеграл

$$\iint\limits_{(K\setminus\Omega_n)} \frac{dxdy}{\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)^{\alpha}}. \tag{13}$$

Перейдемо в інтеграл (13) до полярних координат, поклавши $x - x_0 = \rho\cos\theta$, $y - y_0 = \rho\sin\theta$.

Маємо

$$\iint\limits_{(K\setminus\Omega_n)} \frac{dxdy}{\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)^{\alpha}} =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{2}d_n}^{R} \rho^{1-\alpha} d\rho \int\limits_{0}^{2\pi} d\theta = 2\pi \left( R^{2-\alpha} - \frac{1}{2^{2-\alpha}} d_n^{2-\alpha} \right) \frac{1}{2 - \alpha}.$$

Отже,

$$\lim_{d_n \to 0}\left(2\pi\left(R^{2-\alpha}-\frac{1}{2^{2-\alpha}}d_n^{2-\alpha}\right)\right)\frac{1}{2-\alpha}=2\pi R^{2-\alpha}\frac{1}{2-\alpha}.$$

Інтеграл (12) збігається.

Теорему доведено.

II. Область інтегрування необмежена. Припустимо, що функція $f(x, y)$ задана в необмеженій області $(G)$ й інтегровна в будь-якій обмеженій підобласті $(D)\subset(G)$.

***Означення 4.*** Нехай $(G)$ є необмеженою областю. Розширювальну послідовність обмежених підобластей $(D_1)$, $(D_2), \ldots,$ $(D_n), \ldots$ називають *вичерпною,* якщо для будь-якого числа $R>0$ існує число $N$ таке, що всі точки області $(G)$, що належать кругу радіуса $R$ із центром у початку координат, належать усім областям $(D_n)$, в яких $n>N$.

***Означення 5.*** Нехай у необмеженій області $(G)$ задана функція $f(x, y)$ інтегровна в будь-якій обмеженій області $(D)\subset(G)$. Якщо за будь-якого вибору вичерпної послідовності областей $(D_n)$, $n=1, 2, \ldots,$ відповідна послідовність чисел

$$\left\{\iint\limits_{(D_n)} f(x, y)dxdy\right\}, n=1, 2, \ldots \tag{14}$$

має ту саму границю $I$, то інтеграл

$$\iint\limits_{(G)} f(x, y)dxdy \tag{15}$$

називають *збіжним* і позначають

$$\iint\limits_{(G)} f(x, y)dxdy=I.$$

У протилежному випадку інтеграл (15) називають *розбіжним.*

Зазначимо, що для невласних інтегралів з необмеженими областями справджуються теореми, аналогічні теоремам 1—5, зокрема, така.

**Т е о р е м а 6.** Якщо функція $f(x, y)$ в усіх точках області задовольняє умову

$$|f(x, y)|\le\frac{C}{r^{\alpha}},$$

де $C>0$ — стала, $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, $(x_0, y_0)$ — будь-яка фіксована точка області $(G)$, то при $\alpha>2$ інтеграл (15) збігається.

Зауважимо, що збіжні невласні подвійні інтеграли зводяться до повторних інтегралів так, як і подвійний інтеграл.



❑ **Приклади**

**2.** Обчислити невласний інтеграл

$$I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx. \tag{16}$$

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки $e^{-x^2}\le\frac{1}{x^2}$ при $x\ge1$, то невласний інтеграл (16) збігається. Очевидно, що можна записати таку рівність:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy.$$

Тому

$$I^2=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy=\int_0^{+\infty}\left(e^{-x^2}\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy\right)dx=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy. \tag{17}$$

Перейдемо у подвійному інтегралі (17) до полярних координат

$$I^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}.$$

Отже,

$$I=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

тобто $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Вперше такий спосіб обчислення заданого інтеграла запропонував Пуассон[1].

## 3.8 ФОРМУЛА ГРІНА

Подвійний і криволінійний інтеграли другого роду пов'язані формулою Гріна[2]. Виведемо цю формулу.

Припустимо, що функція $P(x, y)$ та її похідна $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$ неперервні в обмеженій замкненій області $(D)$, яка обмежена контуром першого роду (рис. 66).

Нехай криві $\overset{\frown}{AB}$ і $\overset{\frown}{A_1B_1}$ задано рівняннями

$$y=\varphi(x) \quad і \quad y=\psi(x),$$

де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — неперервні функції на відрізку $[a; b]$.

---

[1] *Пуассон С. Д.* (1781—1840) — французький математик і фізик.

[2] *Грін Дж.* (1793—1841) — англійський математик і фізик.

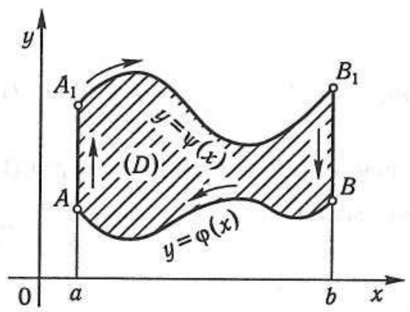



**Рис. 66**

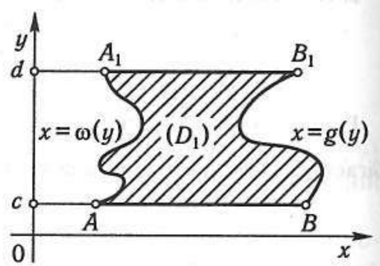



**Рис. 67**

Знайдемо подвійний інтеграл

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b \left( \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy \right) dx.$$

Обчислимо внутрішній інтеграл за формулою Ньютона — Лейбніца

$$\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy = P(x,y) \Big|_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)} = \rho(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x)).$$

Отже,

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b P(x,\psi(x))dx - \int\limits_a^b P(x,\varphi(x))dx. \quad (1)$$

Права частина рівності (1) є різницею двох криволінійних інтегралів

$$\int\limits_{\overset{\frown}{A_1B_1}} P(x,y)dx - \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx.$$

Тому рівність (1) можна записати так:

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = \int\limits_{\overset{\frown}{A_1B_1}} P(x,y)dx - \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx =$$

$$= \int\limits_{\overset{\frown}{A_1B_1}} P(x,y)dx + \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)dx. \quad (2)$$

Додамо до правої частини цієї рівності два криволінійні інтеграли по прямолінійних відрізках $AA_1$ і $B_1B$:

$$\int\limits_{AA_1} P(x,y)dx = 0, \quad \int\limits_{B_1B} P(x,y)dx = 0.$$



У результаті дістанемо криволінійний інтеграл по замкненому контуру $AA_1B_1BA$, який позначимо буквою $C$:

$$\int\limits_{AA_1B_1BA} P(x,y)dx = \int\limits_C P(x,y)dx.$$

У правій частині інтеграл береться в додатному напрямку. Таким чином,

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = -\int\limits_C P(x,y)dx. \quad (3)$$

Розглянемо деяку замкнену область $(D_1)$, обмежену контуром $C_1$ другого роду (рис. 67).

Нехай в області $(D_1)$ задано неперервну функцію $Q(x,y)$, яка в $(D_1)$ має неперервну частинну похідну $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$.

Аналогічно до попереднього можна вивести таку формулу:

$$\iint\limits_{(D_1)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy = \int\limits_{C_1} Q(x,y)dy. \quad (4)$$

Нехай область $(D)$ обмежено таким контуром, який належить і до першого, і до другого роду. Тоді до такої області можна застосувати формули (3) і (4).

Віднімаючи почленно від рівності (4) рівність (3), в яких області $(D_1)$ і $(D_2)$ замінено на область $(D)$, а контури $C_1$ і $C_2$ — на контур $C$, матимемо

$$\iint\limits_{(D)} \left( \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy = \int\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \quad (5)$$

Цю формулу називають *формулою Гріна*.

Формулу (5) було виведено в припущенні, що область обмежено контуром, який належить і до першого, і до другого роду. Цю формулу можна узагальнити й на випадок, коли область $(D)$ обмежено довільним гладким контуром Г (рис. 68). Прямими $A_1B_1$ і $A_2B_2$ область $(D)$ розбивається на три області $(D_1)$, $(D_2)$, $(D_3)$, кожну з яких обмежено контуром, що належить і до першого, і до другого роду. Оскільки криволінійні інтеграли по прямих $A_1B_1$ і $A_2B_2$ беруться двічі в додатному і від'ємному напрямках, то в сумі вони дорівнюють нулю. Отже, формула (5) виконується й для цього випадку.

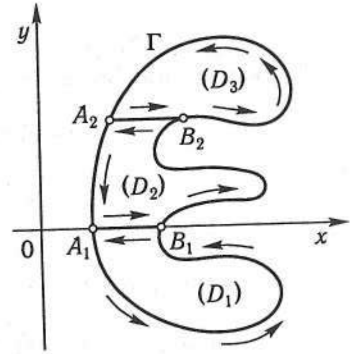



**Рис. 68**

Користуючись формулою Гріна, можна вивести формулу для обчислення площі області $(D)$, обмеженої контуром $C$, через криволінійний інтеграл.

Справді, площа $S$ області $(D)$ виражається через подвійний інтеграл формулою

$$S = \iint\limits_{(D)} dxdy. \tag{6}$$

Поклавши у формулі (5) $Q(x, y) = x$, $P(x, y) = -y$, дістанемо

$$2\iint\limits_{(D)} dxdy = \int\limits_C xdy - ydx,$$

звідси площа

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_C xdy - ydx. \tag{7}$$

❑ **Приклади**

**1.** Користуючись формулою (7), обчислити площу області, обмеженої еліпсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Розв'язання. Оскільки при зростанні $t$ від 0 до $2\pi$ відповідна точка $(x, y)$ описує еліпс у додатному напрямку, то шукана площа

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (a\cos tb\cos t - b\sin t(-a\sin t))dt =$$

$$= \frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi} dt = \frac{1}{2}abt\Big|_0^{2\pi} = \pi ab.$$

**2.** За формулою Гріна обчислити криволінійний інтеграл по замкненому контуру $C$:

$$I = \int\limits_C xy^2dy - x^2ydx,$$

де $C$ — коло $x^2 + y^2 = a^2$.

Розв'язання. Введемо позначення

$$Q(x, y) = xy^2; \quad P(x, y) = -x^2y.$$

Тоді

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2.$$

Отже, згідно з формулою (5), маємо

$$\int\limits_C xy^2dy - x^2ydx = \iint\limits_{(D)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint\limits_{(D)}\left(y^2 + x^2\right)dxdy.$$



Перейшовши у подвійному інтегралі до полярних координат, знаходимо

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\theta\int\limits_0^a \rho^3 d\rho = \theta\Big|_0^{2\pi}\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^a = \frac{1}{2}\pi a^4.$$

**3.** Довести, що криволінійний інтеграл

$$I = \int\limits_C\left(\frac{1}{4}y^4 + e^y\right)dx + \left(xy^3 + xe^y - 2y\right)dy$$

по замкненому контуру дорівнює нулю.

Розв'язання. Записуємо формулу Гріна. Введемо позначення

$$P(x, y) = \frac{1}{4}y^4 + e^y;$$

$$Q(x, y) = xy^3 + xe^y - 2y.$$

Тоді

$$\frac{\partial P}{\partial y} = y^3 + e^y; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^3 + e^y.$$

Отже,

$$I = \iint\limits_{(D)} 0dxdy = 0.$$

## 3.9 НЕЗАЛЕЖНІСТЬ КРИВОЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ВІД ШЛЯХУ ІНТЕГРУВАННЯ. УМОВИ ПОВНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛА

Розглянемо спочатку такий приклад.

❑ **Приклад**

**1.** Обчислити криволінійний інтеграл

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{OB}} 2xydx + x^2dy$$

від точки $O(0; 0)$ до точки $B(1; 1)$: а) по бісектрисі $y = x$; б) по параболі $y = x^2$; в) по ламаній $OAB$ (рис. 69).

Розв'язання:

а) $I = \int\limits_0^1\left(2x^2 + x^2\right)dx = x^3\Big|_0^1 = 1;$

б) $I = \int\limits_0^1\left(2x^2 + 2x^3\right)dx = 4\int\limits_0^1 x^3dx = x^4\Big|_0^1 = 1;$

в) $I = \int\limits_{\overset{\frown}{OA}} 2xydx + x^2dy + \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} 2xydx + x^2dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} x^2dy = \int\limits_0^1 dy = y\Big|_0^1 = 1.$

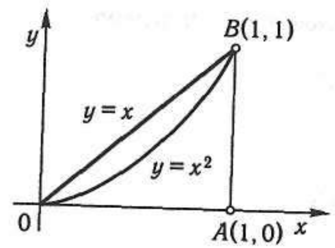

Рис. 69

Як бачимо, в усіх цих випадках криволінійний інтеграл дорівнює тому самому числу, тобто він не залежить від кривої, за якою обчислюють інтеграл. Тому кажуть, що криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування.

Виявляється, що можна виокремити певний клас функцій, для яких криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Доведемо таку теорему.

**Теорема 1.** Нехай функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ та їхні частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в однозв'язній області $(D)$. Тоді для того щоб криволінійний інтеграл

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

по будь-якому замкненому гладкому контуру $C$, який лежить в області $(D)$, дорівнював нулю, необхідно й достатньо, щоб в області $(D)$ виконувалася тотожність

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1}$$

Доведення достатності. Нехай умова (1) виконується. Тоді до області $(D_1) \subset (D)$, яку охоплює контур $C$, можна застосувати формулу Гріна. Матимемо

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{2}$$

Доведення необхідності. Нехай виконується рівність (2), де $C$ — будь-який гладкий замкнений контур, що лежить в $(D)$. Доведемо, що в області $(D)$ виконується тотожність (1).

Доведемо від супротивного. Припустимо, що хоча б в одній точці $(x_0, y_0) \in (D)$, що знаходиться всередині області $(D)$,

$$\frac{\partial P(x_0,y_0)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x_0,y_0)}{\partial x}. \tag{3}$$

Нехай, наприклад,

$$\frac{\partial P(x_0,y_0)}{\partial y} < \frac{\partial Q(x_0,y_0)}{\partial x}. \tag{4}$$

Тоді нерівність (4) набирає вигляду

$$\frac{\partial Q(x_0,y_0)}{\partial x} - \frac{\partial P(x_0,y_0)}{\partial y} > 0.$$



Очевидно, що існує таке число $c > 0$, для якого

$$\frac{\partial Q(x_0,y_0)}{\partial x} - \frac{\partial P(x_0,y_0)}{\partial y} > c > 0. \tag{5}$$

Оскільки частинні похідні $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ є функціями, неперервними в точці $(x_0, y_0)$, то нерівність (5) виконується не тільки в точці $(x_0, y_0)$, а й у деякому її околі $(D_1) \subset (D)$:

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} > c > 0. \tag{6}$$

Візьмемо в області $(D_1)$ замкнений гладкий контур $L$, що охоплює деяку область $(D_2) \in (x_0, y_0)$. Тоді до області $(D_2)$ і контура $L$ можна застосувати формулу Гріна

$$\iint_{(D_2)} \left( \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{7}$$

Згідно з нерівністю (6),

$$\iint_{(D^2)} \left( \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy > c \iint_{(D_2)} dxdy = cS, \tag{8}$$

де $S$ — площа області $(D_2)$.

Таким чином, криволінійний інтеграл

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy > cS > 0,$$

а за умовою теореми криволінійний інтеграл по будь-якому замкненому контуру і, отже, по контуру $L$ дорівнює нулю. Зайшли у суперечність.

Теорему доведено.

Як наслідок із теореми 1 випливає така теорема.

**Теорема 2.** Нехай функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ та їхні частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в однозв'язній області $(D)$. Для того щоб криволінійний інтеграл

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

не залежав від шляху інтегрування, необхідно й достатньо, щоб в області $(D)$ виконувалася тотожність (1).

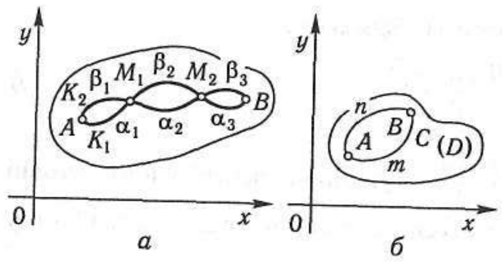

**Рис. 70**

Д о в е д е н н я  д о с т а т н о с т і. Нехай в області $(D)$ виконується умова (1). З'єднаємо точки $A$ і $B$ кривими $K_1$ і $K_2$ (рис. 70, *а*), припустивши, що криві $K_1$ і $K_2$ перетинаються, наприклад, у двох точках $M_1$ і $M_2$. Доведемо, що виконується рівність

$$\int_{K_1} P(x, y)dx+Q(x, y)dy=\int_{K_2} P(x, y)dx+Q(x, y)dy. \tag{9}$$

Криві $K_1$ і $K_2$ (див. рис. 70, *а*), перетнувшись у двох точках, утворили три замкнені контури. На основі попередньої теореми маємо

$$\begin{aligned}&\oint_{A\alpha_1M_1\beta_1A} Pdx+Qdy=0;\\ &\oint_{M_1\alpha_2M_2\beta_2M_1} Pdx+Qdy=0;\\ &\oint_{M_2\alpha_3B\beta_3M_2} Pdx+Qdy=0.\end{aligned} \tag{10}$$

Запишемо рівності (10) у такому вигляді:

$$\begin{aligned}&\int_{A\alpha_1M_1} Pdx+Qdy=\int_{A\beta_1M_1} Pdx+Qdy;\\ &\int_{M_1\beta_2M_2} Pdx+Qdy=\int_{M_1\alpha_2M_2} Pdx+Qdy;\\ &\int_{M_2\alpha_3B} Pdx+Qdy=\int_{M_2\beta_3B} Pdx+Qdy.\end{aligned} \tag{11}$$

Додавши почленно рівності (11), дістанемо рівність (9).

Д о в е д е н н я  н е о б х і д н о с т і. Нехай криволінійний інтеграл

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx+Qdy$$

не залежить від шляху інтегрування. Візьмемо в $(D)$ довільний гладкий замкнений контур $C=AmB+BnA$ (рис. 70, *б*). Тоді

$$\int_{AmB} Pdx+Qdy=\int_{AnB} Pdx+Qdy=-\int_{BnA} Pdx+Qdy.$$



Звідси

$$\iint_{AmB} Pdx+Qdy+\int_{BnA} Pdx+Qdy=0.$$

У лівій частині останньої рівності маємо криволінійний інтеграл по замкненому контуру $C$

$$\int_C Pdx+Qdy=0.$$

Згідно з теоремою 1 робимо висновок, що в області $(D)$ виконується умова (1).

Теорему доведено.

У розглянутому прикладі 1 умова (1) виконується:

$$P(x, y)=2xy;\quad Q(x, y)=x^2;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x;\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2x.$$

Отже, інтеграл не залежить від шляху інтегрування.

Доведемо ще одну теорему, яка дає умови того, щоб вираз

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy \tag{12}$$

був повним диференціалом деякої функції двох змінних $u(x, y)$.

**Т е о р е м а  3.** Нехай функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ та їхні частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в однозв'язній області $(D)$.

Для того щоб в області $(D)$ вираз (12) був повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, необхідно й достатньо, щоб у цій області виконувалася тотожність (1).

Д о в е д е н н я  н е о б х і д н о с т і. Нехай вираз (12) в області $(D)$ є повним диференціалом функції $u(x, y)$, тобто

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy=\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}dx+\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}dy, \tag{13}$$

де $dx=\Delta x, dy=\Delta y$ — довільні прирости незалежних змінних $x$ і $y$ такі, що точка $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ разом із точкою $(x, y)$ належить області $(D)$.

Поклавши в рівності (13) $\Delta y=0, \Delta x\neq 0$, дістанемо

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}=P(x, y), \tag{14}$$

а якщо $\Delta x=0, \Delta y\neq 0$, то

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}=Q(x, y). \tag{15}$$

Диференціюючи обидві частини рівності (14) по $y$, а рівність (15) по $x$, маємо

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \tag{16}$$

Оскільки за умовою теореми $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ — неперервні функції в області $(D)$, то й функції $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ також неперервні. Отже, за теоремою про рівність мішаних похідних

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x}.$$

Таким чином, в області $(D)$ праві частини рівностей (16) рівні між собою

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Доведення достатності. Нехай в області $(D)$ виконується умова (1). Тоді криволінійний інтеграл

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{17}$$

не залежить від шляху інтегрування і визначається лише заданням початкової точки $A$ та кінцевої точки $B$ кривої, вздовж якої здійснюється інтегрування. Тому в подальшому криволінійний інтеграл позначатимемо

$$\int_A^B P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{18}$$

Нехай початкова точка $A$ є фіксованою з координатами $(x_0, y_0)$, а кінцева точка $B$ шляху інтегрування є змінною точкою з координатами $(x, y)$.

Тоді криволінійний інтеграл (18) в області $(D)$ є функцією від $x$ і $y$. Запишемо цю функцію у вигляді

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{19}$$

Доведемо, що в області $(D)$ функція $u(x,y)$ має частинні похідні, які дорівнюють відповідно

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y); \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y). \tag{20}$$

Розглянемо в області $(D)$ дві точки: $(x,y)$ і $(x+\Delta x, y)$.



Побудуємо частинний приріст функції $u(x,y)$ за $x$ у точці $(x,y)$:

$$\Delta_x u(x,y) = u(x+\Delta x, y) - u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x, y)} Pdx + Qdy - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy.$$

Оскільки інтеграли в правій частині останньої рівності не залежать від шляху інтегрування, то шлях від точки $A(x_0, y_0)$ до точки $C(x+\Delta x, y)$ можна провести через точку $B(x,y)$, з'єднавши точки $B$ і $C$ відрізком прямої $BC$ (рис. 71). Тоді матимемо

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x, y)} Pdx + Qdy = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy + \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x, y)} Pdx + Qdy.$$

Отже,

$$\Delta_x u(x,y) = \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x, y)} Pdx + Qdy.$$

Оскільки вздовж відрізка $BC$ $y = \text{const}$, то $dy = 0$. Внаслідок цього

$$\Delta_x u(x,y) = \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x, y)} Pdx. \tag{21}$$

Звівши криволінійний інтеграл (21) до визначеного інтеграла і скориставшись теоремою про середнє, знаходимо

$$\Delta_x u(x,y) = P(x+\theta\Delta x, y)\Delta x, \quad 0 < \theta < 1.$$

Звідси

$$\frac{\Delta_{xu(x,y)}}{\Delta x} = P(x+\theta\Delta x, y).$$

Беручи до уваги, що функція $P(x,y)$ є неперервною в будь-якій точці області $(D)$, і переходячи в попередній рівності до границі при $\Delta x \to 0$, дістаємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u(x,y)}{\Delta x} = P(x,y).$$

Отже, функція $u(x,y)$ в точці $(x,y)$ має частинну похідну

$$\frac{\partial y(x,y)}{dx} = P(x,y). \tag{22}$$

Аналогічно можна довести, що функція $u(x,y)$ в будь-якій точці області $(D)$

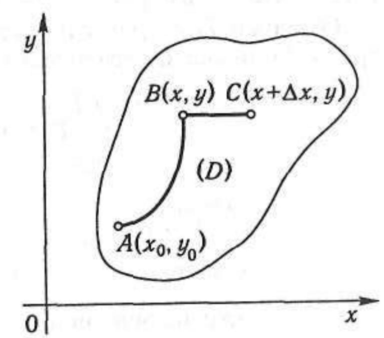

Рис. 71

має частинну похідну по $y$:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y). \tag{23}$$

Оскільки в області $(D)$ функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні, то зі співвідношень (22) і (23) випливає, що й частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ у цій області також неперервні. Отже, функція $u(x,y)$, яку задано формулою (19), в області $(D)$ є диференційовною і її повний диференціал

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{24}$$

Теорему доведено.

Зазначимо, що між теоремою 3 і теоремою про похідну визначеного інтеграла за верхньою змінною межею існує аналогія. З формул (19) і (24) випливає, що криволінійне інтегрування — це операція, обернена операції диференціювання — знаходженню повного диференціала функції двох змінних.

Якщо виконуються умови теореми 3, то можна дістати формулу, аналогічну формулі Ньютона — Лейбніца, що виражає визначений інтеграл через первісну функцію для підінтегральної функції.

Справді, нехай потрібно обчислити криволінійний інтеграл

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{25}$$

Сполучимо точки $A(x_0,y_0)$ і $B(x_1,y_1)$ довільною гладкою кривою, яка повністю лежить в області $(D)$.

Нехай параметричними рівняннями цієї кривої є

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

де $t$ змінюється від $\alpha$ до $\beta$, коли точка $(x,y)$ описує криву $AB$, причому $(x(\alpha), y(\alpha)) = A, (x(\beta), y(\beta)) = B$.

Оскільки $Pdx + Qdy$ є повним диференціалом функції $u(x,y)$, то інтеграл (25) можна записати у вигляді

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} du(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy.$$

Запишемо цей криволінійний інтеграл через визначений інтеграл, застосувавши формулу Ньютона — Лейбніца:



$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{\partial u(x(t),y(t))}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial u(x(t),y(t))}{\partial y}y'(t)\right)dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}\frac{d}{dt}u(x(t),y(t))dt = u(x(t),y(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} =$$

$$= u(x(\beta),y(\beta)) - u(x(\alpha),y(\alpha)) = u(x_1,y_1) - u(x_0,y_0) = u(B) - u(A).$$

Отже,

$$\int_A^B P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(B) - u(A), \tag{26}$$

де $u(x,y)$ — функція, повний диференціал якої дорівнює підінтегральному виразу $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

❑ **Приклад**

**2.** Обчислити криволінійний інтеграл

$$I = \int_{(-1;2)}^{(2;3)} ydx + xdy. \tag{27}$$

Р о з в ' я з а н н я. Тут умова (1) виконується. Справді,

$$P(x,y) = y; \quad Q(x,y) = x;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Отже, заданий інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Від точки $A(-1;2)$ до точки $B(2;3)$ можна йти вздовж будь-якої лінії. Наприклад, вздовж ламаної $AA_1B$ (рис. 72)

$$I = \int_{AA_1} ydx + xdy + \int_{A_1B} ydx + xdy = \int_{-1}^{2} 2dx + \int_{2}^{3} 2dy = 2x\Big|_{-1}^{2} + 2y\Big|_{2}^{3} = 6 + 2 = 8.$$

Оскільки в інтегралі (27) підінтегральний вираз є повним диференціалом функції $xy$

$$ydx + xdy = d(xy),$$

то його можна обчислити також за формулою (26)

$$\int_{(-1;2)}^{(2;3)} ydx + xdy = xy\Big|_{(-1;2)}^{(2;3)} = 6 + 2 = 8.$$

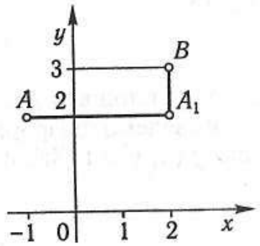

Рис. 72

Розглянемо одне з найважливіших понять фізики — потенціальне поле.

Нехай поле задано вектором сили

$$\vec{F}(x,y) = \vec{i}P(x,y) + \vec{j}Q(x,y).$$

Тоді робота $W$, виконана заданою силою, при переміщенні матеріальної точки $M$ від точки $A$ до точки $B$ уздовж деякої кривої $\overset{\frown}{AB}$ дорівнює криволінійному інтегралу

$$W = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy.$$

Припустимо, що $P$ і $Q$ — неперервні функції в однозв'язній області $(D)$, які мають в цій області неперервні частинні похідні $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, і нехай виконується умова

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Тоді вираз $Pdx + Qdy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто

$$P(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}.$$

Отже, маємо рівність

$$\overline{F} = \bar{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial u}{\partial y}, \text{ або } \overline{F} = \operatorname{grad} u(x, y).$$

Таке поле називають *потенціальним,* а функцію $u(x, y)$ — *потенціалом поля.*

Робота сили, як це випливає з попереднього, в потенціальному полі не залежить від шляху переміщення точки, а дорівнює різниці потенціалів $u(B) - u(A)$.

## 3.10 ЗАСТОСУВАННЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ІЗ ГЕОМЕТРІЇ

**Обчислення площі плоскої області.** Подвійний інтеграл застосовують під час обчислення площ плоских областей. Для цього користуються формулою

$$S = \iint\limits_{(D)} dxdy, \tag{1}$$

де $S$ — площа області $(D)$.

Виведемо цю формулу. Нехай у квадровній області $(D)$ задано функцію $f(x, y) \equiv 1$. Згідно з означенням подвійного інтеграла, маємо

$$\iint\limits_{(D)} 1dxdy = \lim \sum_{k=0}^{n-1} 1\Delta S_k = S,$$

де $\Delta S_k$ — площа частинної області $(\Delta\sigma_k)$. Отже, дістали формулу (1).



❑ **Приклади**

**1.** Знайти площу області, обмеженої лемніскатою (рис. 73):

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2xy, \quad a > 0.$$

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки задана фігура симетрична відносно початку координат, а також відносно бісектриси $y = x$, то достатньо обчислити площу області $(D_1)$ (на рисунку її заштриховано) і результат помножити на 4

$$S = 4 \iint\limits_{(D_1)} dxdy.$$

Для зручності перейдемо до полярних координат $\rho$ і $\theta$. Рівняння лемніскати у полярних координатах має вигляд

$$\rho = a\sqrt{\sin 2\theta}.$$

Кут $\theta$ змінюється в межах $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ (див. рис. 73), а межі за $\rho$ такі:

$$0 \le \rho \le a\sqrt{\sin 2\theta}.$$

Отже,

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} \rho d\rho = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} d\theta = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\theta d\theta = -a^2 \cos 2\theta \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

**2.** Знайти площу плоскої фігури, обмеженої лемніскатою Бернуллі

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2 - y^2\right) \tag{2}$$

і колом

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \left(x^2 + y^2 \ge a^2\right). \tag{3}$$

Р о з в ' я з а н н я. Фігури, площу яких потрібно обчислити, на рис. 74 заштриховано. Оскільки чотири фігури однакові, то шукана площа

$$S = 4 \iint\limits_{(D)} dxdy,$$

де $(D)$ — область (на рисунку її заштриховано), що знаходиться в першому квадранті.

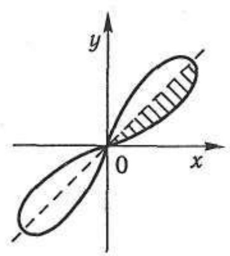

Рис. 73

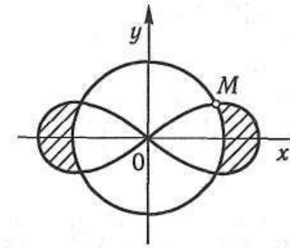

Рис. 74

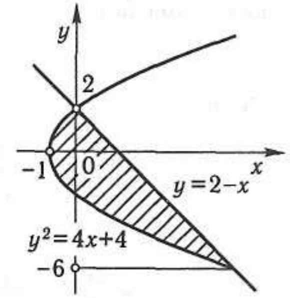

Рис. 75

Запишемо криві (2) і (3) у полярних координатах $\rho$ і $\theta$:

$$\rho = a\sqrt{2\cos 2\theta}; \tag{4}$$

$$\rho = a. \tag{5}$$

Знайдемо полярні координати точки $M$. Точка $M$ лежить і на лемніскаті Бернуллі, й на колі. Тому, прирівнюючи праві частини в рівностях (4) і (5), дістанемо

$$a = a\sqrt{2\cos 2\theta}, \quad \text{або} \quad \cos 2\theta = \frac{1}{2}.$$

Отже, $\theta = \frac{\pi}{6}$. Таким чином, полярними координатами точки $M$ є

$$\rho = a, \quad \theta = \frac{\pi}{6},$$

а межами по $\theta$ і $\rho$ — відповідно

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}, \quad a \le \rho \le a\sqrt{2\cos 2\theta}.$$

Шукана площа

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_a^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} \rho d\rho = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\rho^2}{2}\Big|_a^{a\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta =$$

$$= 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 2\theta - 1)d\theta = 2a^2(\sin 2\theta - 0)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = a^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right).$$

**3.** Обчислити площу фігури, обмежену параболою $y^2 = 4x + 4$ і прямою $y = 2 - x$ (рис. 75).

Розв'язання. Скористаємося формулою $S = \iint\limits_{(D)} dxdy$. Межі за $y$ краще брати сталими

$$-6 \le y \le 2,$$

а по $x$ — змінними

$$\frac{1}{4}\left(y^2 - 4\right) \le x \le 2 - y.$$

Тоді

$$S = \int_{-6}^{2} dy \int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{2-y} dx = \int_{-6}^{2} x\Big|_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{2-y} dy =$$

$$= \int_{-6}^{2}\left(2 - y - \frac{y^2-4}{4}\right)dy = \left(3y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{12}y^3\right)\Big|_{-6}^{2} = \frac{64}{3}.$$



**Обчислення об'ємів тіл.** Нехай функцію $z = f(x, y)$ задано у квадровній області $(D)$ і в цій області вона є невід'ємною, тобто $z \ge 0$, і неперервною. Тіло, обмежене зверху поверхнею $z = f(x, y)$, з боків — циліндричними поверхнями, твірні яких паралельні осі $Oz$, а знизу — фігурою $(D)$, називають *циліндричним*. Об'єм такого тіла виражають подвійним інтегралом

$$V = \iint\limits_{(D)} zdxdy. \tag{6}$$

Формулою (6) користуються і для знаходження об'ємів тіл, що мають складнішу форму.

❑ **Приклади**

**4.** Обчислити об'єм тіла, обмеженого параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$, координатними площинами і площиною $x + y = 1$.

Розв'язання. Тіло, об'єм якого потрібно знайти, зображено на рис. 76. При обчисленні об'єму тіла бажано, хоча б схематично, зробити рисунок. У випадках, коли цього зробити неможливо, потрібно в площині $xOy$ побудувати область інтегрування.

У цьому випадку областю інтегрування є прямокутний трикутник (рис. 77). Оскільки тіло, об'єм якого потрібно обчислити, зверху обмежене поверхнею $z = x^2 + y^2$, знизу — частиною (трикутником) площини $xOy$, справа — площиною $x + y = 1$, зліва — частиною площини $xOz$, на зворотному боці (невидима частина) — частиною площини $yOz$, то воно є циліндричним тілом. Отже, його об'єм

$$V = \iint\limits_{(D)} \left(x^2 + y^2\right)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(x^2 + y^2\right)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{3} - x\right)dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

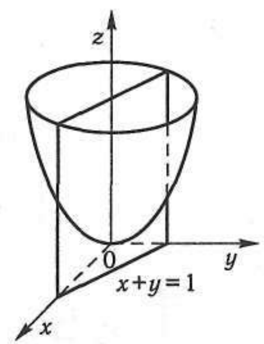


Рис. 76

**5.** Знайти об'єм тіла, обмеженого площинами $y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$, $x + y + z = 6$.

Розв'язання. Тіло, об'єм якого потрібно знайти, зображено на рис. 78. Це чотирикутна піраміда, вершина якої лежить на осі $Oy$, а основою є трапеція. Зверху вона обмежена площиною $z = 6 - y - x$, знизу — площиною $z = 0$, з боків — площинами $x = 2 - \frac{1}{3}y, x = 4 - \frac{2}{3}y$, зліва — площиною $y = 0$.

Отже, ця піраміда — циліндричне тіло. Тому шуканий об'єм

$$V = \iint\limits_{(D)} zdxdy,$$

де областю інтегрування є трикутник (рис. 79).

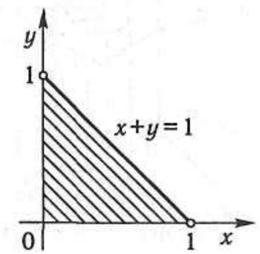


Рис. 77

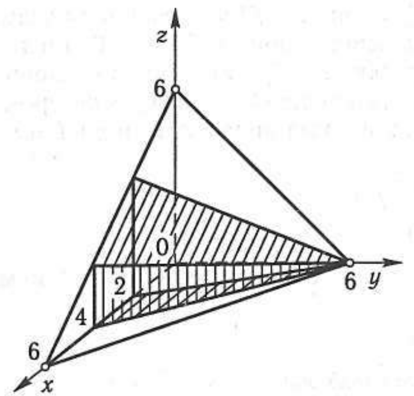


Рис. 78

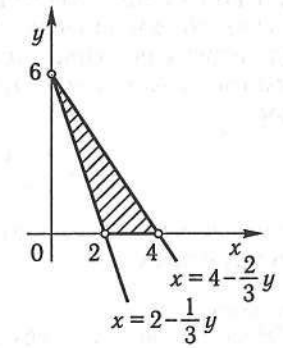


Рис. 79

При обчисленні подвійного інтеграла доцільно межі за $y$ вибирати сталими

$$0\le y\le 6,$$

а межі за $x$ — змінними

$$2-\frac{1}{3}y\le x\le 4-\frac{2}{3}y.$$

Тоді

$$V=\int_0^6 dy\int_{2-\frac{1}{3}y}^{4-\frac{2}{3}y}(6-x-y)\,dx=\int_0^6\left(6x-\frac{1}{2}x^2-xy\right)\Big|_{2-\frac{1}{3}y}^{4-\frac{2}{3}y}dy=$$

$$=\int_0^6\left(6-2y-\frac{4}{9}y^2\right)dy=\left(6y-y^2+\frac{4}{27}y^3\right)\Big|_0^6=32.$$

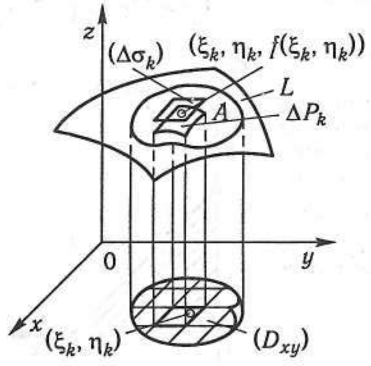


Рис. 80

**Площа кривої поверхні.** Подвійний інтеграл застосовують також і для обчислення площ поверхонь. Дамо означення площі такої поверхні.

Нехай поверхню задано рівнянням

$$z=f(x,y), \tag{7}$$

де $f(x,y)$ — неперервна функція і має неперервні частинні похідні першого порядку в деякій квадровній області $(D)$.

На поверхні (7) виокремимо деяку її ділянку $A$ (вона може збігатися і з поверхнею (7)). Нехай цю ділянку обмежено замкненим контуром $L$ (рис. 80). Поставимо



завдання: дати означення площі ділянки $A$ і вивести формулу для обчислення цієї площі.

Спроектуємо поверхню $A$ на площину $xOy$. Нехай проекцією поверхні $A$ є квадровна область, позначимо її $(D_{xy})$. Розіб'ємо область $(D_{xy})$ на частинні області $(\Delta D_0)$, $(\Delta D_1)$, ..., $(\Delta D_{n-1})$ за допомогою прямих, паралельних координатним осям $Ox$ і $Oy$. Позначимо площі цих частинних областей відповідно

$$\Delta S_0, \Delta S_1, ..., \Delta S_{n-1}.$$

Провівши через точки контуру кожної частинної області $(\Delta D_k)$, $k=0,1,...,\ n-1$, прямі, паралельні осі $Oz$, дістанемо циліндричні поверхні, які розіб'ють ділянку $A$ на $n$ частинних поверхонь:

$$\Delta P_0, \Delta P_1, ..., \Delta P_{n-1}. \tag{8}$$

Виберемо довільно в кожній області $(\Delta D_k)$ по одній точці $(\xi_k, \eta_k)\in(\Delta D_k)$. Тоді в точці $(\xi_k, \eta_k, f(\xi_k,\eta_k))$ до поверхні $\Delta P_k$ можна провести дотичну площину. Рівняння цієї площини має вигляд

$$f'_x(\xi_k,\eta_k)(x-\xi_k)+f'_y(\xi_k,\eta_k)(y-\eta_k)=z-f(\xi_k,\eta_k). \tag{9}$$

Циліндричні поверхні, які на поверхні $A$ виокремлюють поверхні (8), на дотичних площинах (9) виокремлюють ділянки площин

$$(\Delta\sigma_0), (\Delta\sigma_1), ..., (\Delta\sigma_{n-1}).$$

Позначимо площі ділянок цих площин відповідно через $\Delta\sigma_0$, $\Delta\sigma_1$, ..., $\Delta\sigma_{n-1}$.

***Означення.*** *Площею обмеженої частини $A$ поверхні* (7) називають границю

$$P=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta\sigma_k, \tag{10}$$

де $\lambda=\max\limits_{0\le k\le n-1}\operatorname{diam}(\Delta D_k)$, якщо ця границя існує і не залежить ні від розбиття області $(D_{xy})$ на часткові області $(\Delta D_k)$, ні від вибору точок $(\xi_k,\eta_k)\in(\Delta D_k)$, $k=0,1,...,\ n-1$.

**Теорема.** Якщо функція $f(x,y)$ у квадровній області $(D_{xy})$ — неперервна і має неперервні частинні похідні $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$, то границя (10) існує і дорівнює

$$P=\iint\limits_{(D_{xy})}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy. \tag{11}$$

Д о в е д е н н я. Скористаємося таким твердженням: площа проекції плоскої фігури на будь-яку площину дорівнює добутку площі області, що проектується, на косинус гострого кута між площиною проекції і площиною, в якій лежить фігура, що проектується.

Отже, маємо

$$\Delta S_k = \Delta\sigma_k \cos\gamma_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{12}$$

де $\gamma_k$ — гострий кут між площиною $xOy$ і дотичною площиною (9) до поверхні (7) в точці $(\xi_k, \eta_k, f(\xi_k, \eta_k))$.

Знайдемо $\cos\gamma_k$. Зазначимо, що кут між площинами дорівнює куту, який утворюють нормалі, проведені до площин у заданій точці. Оскільки нормаллю до площини $xOy$ у точці $(\xi_k, \eta_k)$ є пряма

$$\frac{x-\xi_k}{0} = \frac{y-\eta_k}{0} = \frac{z-0}{1},$$

а нормаллю до поверхні (7) в точці $(\xi_k, \eta_k, f(\xi_k, \eta_k))$ є пряма

$$\frac{x-\xi_k}{f'_x(\xi_k, \eta_k)} = \frac{y-\eta_k}{f'_y(\xi_k, \eta_k)} = \frac{z-f(\xi_k, \eta_k)}{-1},$$

то

$$\cos\gamma_k = \frac{1}{\sqrt{1+\left(f'_x(\xi_k, \eta_k)\right)^2 + \left(f'_y(\xi_k, \eta_k)\right)^2}}. \tag{13}$$

Тоді з рівностей (12) і (13) дістанемо

$$\Delta\sigma_k = \sqrt{1+\left(f'_x(\xi_k, \eta_k)\right)^2 + \left(f'_y(\xi_k, \eta_k)\right)^2}\,\Delta S_k. \tag{14}$$

Знайдемо

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta\sigma_k = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+\left(f'_x(\xi_k, \eta_k)\right)^2 + \left(f'_y(\xi_k, \eta_k)\right)^2}\,\Delta S_k. \tag{15}$$

У правій частині цієї рівності маємо інтегральну суму, побудовану для неперервної функції

$$F(x, y) = \sqrt{1+\left(f'_x(x, y)\right)^2 + \left(f'_y(x, y)\right)^2}. \tag{16}$$

Отже, існує границя цієї суми при $\lambda \to 0$, яка дорівнює подвійному інтегралу

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\sigma_k = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+\left(f'_x(\xi_k, \eta_k)\right)^2 + \left(f'_y(\xi_k, \eta_k)\right)^2}\,\Delta S_k =$$

$$= \iint\limits_{(D_{xy})} \sqrt{1+\left(f'_x(x, y)\right)^2 + \left(f'_y(x, y)\right)^2}\,dxdy.$$

Теорему доведено.



Таким чином, якщо виконуються умови цієї теореми, то будь-яка частина поверхні (7), обмежена замкненим контуром, має площу, яку обчислюють за формулою (11).

Зауважимо, що формулу (11) виведено для випадку, коли частина поверхні $A$ проектувалася на площину $xOy$. Проте під час розв'язування задач іноді доводиться проектувати поверхню, наприклад, на площину $yOz$ або $xOz$. Тоді для обчислення площі матимемо формули

$$P = \iint\limits_{(D_{yz})} \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz; \tag{17}$$

$$P = \iint\limits_{(D_{xz})} \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz, \tag{18}$$

де $(D_{yz})$ і $(D_{xz})$ — відповідно проекції поверхні $A$ на площини $yOz$ і $xOz$.

❑ **Приклади**

**6.** Обчислити площу поверхні кулі

$$x^2+y^2+z^2 \le R^2. \tag{19}$$

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки куля симетрична відносно координатних площин (вона розміщена у восьми октантах), то обчислимо площу восьмої частини кулі, що лежить у октанті додатних $x$, $y$, $z$ (рис. 81). Отже,

$$P = 8 \iint\limits_{(D_{xy})} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\,dxdy, \tag{20}$$

де $(D_{xy})$ — частина круга, що лежить у першому квадранті.

З рівняння сфери (19) знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

Тоді

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2} = \frac{R^2}{z^2}.$$

Отже,

$$P = 8 \iint\limits_{(D_{xy})} \sqrt{\frac{R^2}{z^2}}\,dxdy = 8R \iint\limits_{(D_{xy})} \frac{dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Перейшовши в останньому інтегралі до полярних координат, матимемо

$$P = 8R\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = 8R\,\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2-\rho^2}\Big|_R^0 = 4\pi R^2.$$

**7.** Обчислити площу частини конуса

$$x^2+y^2 = \frac{R^2}{H^2}z^2, \quad z \ge 0, \tag{21}$$

що відтинається площиною $z = H$.

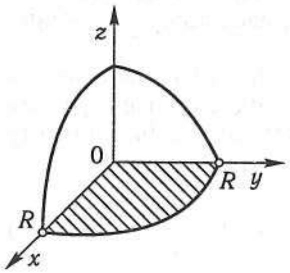


**Рис. 81**

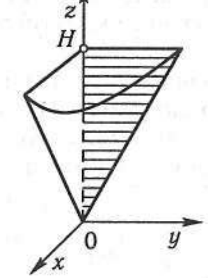


**Рис. 82**

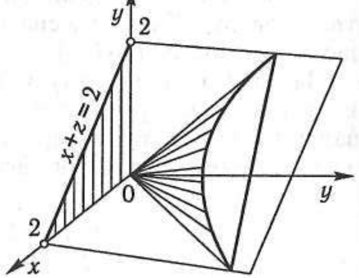


**Рис. 83**

Р о з в ' я з а н н я. Користуючись тим, що конус (його верхня частина) є тілом симетричним відносно координатних півплощин, достатньо обчислити площу поверхні частини конуса, яка знаходиться в першому октанті $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ (рис. 82).

У цьому випадку проектувати поверхню на площину $xOy$ незручно (утвориться точка). Можна проектувати або на площину $yOz$, або на $xOz$. В обох випадках дістанемо трикутник. Якщо спроектуємо, наприклад, на площину $yOz$, то трикутник буде обмежений прямими $y = 0$, $z = H$, $y = \frac{R}{H}z$.

Знаходимо

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{R^2}{H^2}z.$$

Тоді

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} = \frac{R\sqrt{H^2+R^2}z}{H^2\sqrt{\frac{R^2}{H^2}z^2-y^2}}.$$

Отже,

$$P = 4\iint\limits_{(D_{yz})}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz = \frac{4R\sqrt{H^2+R^2}}{H^2}\iint\limits_{(D_{yz})}\frac{zdydz}{\sqrt{\frac{R^2}{H^2}z^2-y^2}} =$$

$$= \frac{4R\sqrt{H^2+R^2}}{H^2}\int\limits_0^H zdz\int\limits_0^{\frac{R}{H}z}\frac{dy}{\sqrt{\frac{R^2}{H^2}z^2-y^2}} =$$

$$= \frac{4R\sqrt{H^2+R^2}}{H^2}\int\limits_0^H z\left(\arcsin\frac{y}{\frac{R}{H}z}\right)\Bigg|_0^{\frac{R}{H}z}dz = \frac{\pi}{2}\frac{4R\sqrt{H^2+R^2}}{H^2}\int\limits_0^H zdz =$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{4R\sqrt{H^2+R^2}}{H^2}\frac{1}{2}z^2\Big|_0^H = \pi RL, \quad L = \sqrt{H^2+R^2}.$$



**8.** Обчислити площу частини поверхні конуса $y^2 = x^2 + z^2$, розміщеного в першому октанті й обмеженого площиною $x + z = 2$.

Розв'язання. У цьому випадку (рис. 83) доцільно проектувати поверхню на площину $xOz$.

Отже, шукану площу обчислюють за формулою

$$P = \iint\limits_{(D_{xz})}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz.$$

Знаходимо

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{y}; \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{z}{y}.$$

Тоді

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}+\frac{z^2}{y^2}} = \sqrt{\frac{y^2+x^2+z^2}{y^2}} = \sqrt{2}.$$

Таким чином,

$$P = \sqrt{2}\iint\limits_{(D_{xz})}dxdz = \sqrt{2}\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x}dz = \sqrt{2}\int\limits_0^2 z\Big|_0^{2-x}dx =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_0^2 z\Big|_0^{2-x}dx = \sqrt{2}\int\limits_0^2(2-x)\,dx = \sqrt{2}\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^2 = 2\sqrt{2}.$$

## 3.11
## ЗАСТОСУВАННЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ІЗ ФІЗИКИ

**Маса плоскої пластини.** Нехай деяка замкнена квадровна область $(D)$ суцільно заповнена масою так, що густина $\rho$ змінюється при переході від точки до точки, тобто $\rho$ є неперервною функцією точки $M(x, y)$,

$$\rho = \rho(x, y).$$

Як було доведено, масу такої області обчислюють за формулою

$$m = \iint\limits_{(D)}\rho(x, y)\,dxdy. \tag{1}$$

❑ **Приклад**

**1.** Плоске кільце обмежене двома концентричними колами (рис. 84), радіуси яких дорівнюють $R$ і $r$, $R > r$. Відомо, що густина матеріалу обернено пропорційна до відстані від центра кіл і на внутрішньому колі вона дорівнює одиниці. Знайти масу кільця.

Р о з в ' я з а н н я. Згідно з умовою, густину в кожній точці $M(x, y)$ виражено формулою

$$\rho(x, y) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{2}$$

де $k$ — коефіцієнт пропорційності. Оскільки в точках внутрішнього кола густина дорівнює одиниці, то, підставивши в рівність (2) $x^2+y^2=r^2$ і $\rho(x,y)=1$, знайдемо $k=r$. Отже, для густини кільця маємо формулу

$$\rho(x,y)=\frac{r}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Відповідно до формули (1) шукана маса

$$m=r\iint\limits_{(D)}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Перейшовши в подвійному інтегралі до полярних координат, дістанемо

$$m=r\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_r^R\frac{\rho d\rho}{\rho}=r\theta\Big|_0^{2\pi}\rho\Big|_r^R=2\pi r(R-r).$$

**Статичний момент плоскої фігури.** Статичним моментом $n$ матеріальних точок $M_0(x_0,y_0),\dots,M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$ з масами $m_0,m_1,\dots,m_{n-1}$ відносно деякої осі $l$ (прямої) називають число

$$\sum_{k=0}^{n-1}m_kr_k,$$

де $r_k$ — відстань точки $M_k$ до прямої $l$.

Зокрема, якщо за $l$ брати осі координат $Ox$ і $Oy$, то формули

$$K_x^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1}y_km_k,\quad K_y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1}x_km_k \tag{3}$$

виражають статичні моменти цих точок відносно осей $Ox$ і $Oy$.

Припустимо, що деяка плоска квадровна область (фігура) (рис. 85) суцільно заповнена масою. Нехай густина цієї області є неперервною функцією точки

$$\rho=\rho(x,y).$$

Поставимо задачу: знайти статичні моменти області $(D)$ відносно осей $Ox$ і $Oy$.

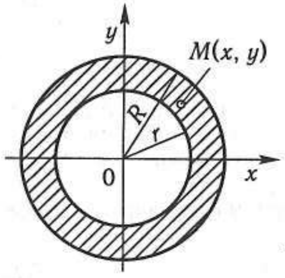

Рис. 84

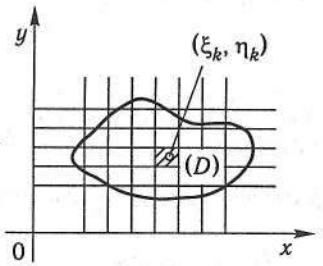

Рис. 85

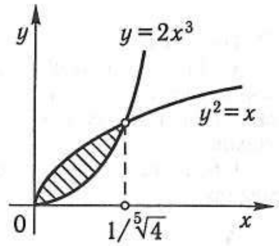

Рис. 86



Формули (3) у цьому випадку не можна застосувати, оскільки точок в області $(D)$ — нескінченна множина. Тому розіб'ємо область $(D)$ на $n$ частинних областей $(\Delta D_0)$, $(\Delta D_1),\dots,(\Delta D_{n-1})$ за допомогою прямих, паралельних координатним осям. Позначимо площу кожної області $(\Delta D_k)$ через $\Delta S_k$, $k=0,1,\dots,n-1$. Виберемо довільно в кожній області $(\Delta D_k)$ точку $(\xi_k,\eta_k)$. Тоді за формулами (3) можна обчислити статичні моменти точок $(\xi_k,\eta_k)$, $k=0,1,\dots,n-1$, а саме:

$$K_x^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1}\eta_k\rho(\xi_k,\eta_k)\Delta S_k;$$

$$K_y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\rho(\xi_k,\eta_k)\Delta S_k. \tag{4}$$

Природно дати таке означення.

***Означення.*** Статичним моментом плоскої області $(D)$ відносно осі $Ox$ або $Oy$ називають відповідно границі

$$K_x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=0}^{n-1}\eta_k\rho(\xi_k,\eta_k)\Delta S_k, \tag{5}$$

або

$$K_y=\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=0}^{n-1}\eta_k\rho(\xi_k,\eta_k)\Delta S_k, \tag{6}$$

де $\lambda=\max\limits_{0\le k\le n-1}\operatorname{diam}(\Delta D_k)$, якщо ці границі існують і не залежать ні від розбиття області $(D)$ на частинні області $(\Delta D_k)$, ні від вибору точок $(\xi_k,\eta_k)$, $k=0,1,\dots,n-1$, у цих областях.

У формулах (5) і (6) під знаком границі містяться інтегральні суми, побудовані відповідно для неперервних функцій

$$F_1(x,y)=y\rho(x,y);\quad F_2(x,y)=x\rho(x,y).$$

Тому ці границі існують і дорівнюють подвійним інтегралам

$$K_x=\iint\limits_{(D)}y\rho(x,y)dxdy,\quad K_y=\iint\limits_{(D)}x\rho(x,y)dxdy. \tag{7}$$

За формулами (7) обчислюють статичні моменти плоских областей.

❑ **Приклад**

**2.** Знайти статичні моменти відносно координатних осей фігури, обмеженої кривими $y=2x^3$ і $y^2=x$, якщо $\rho(x,y)$ у кожній точці дорівнює одиниці.

Розв'язання. Область, статичні моменти якої потрібно знайти, зображено на рис. 86. Скориставшись формулами (7), матимемо

$$K_x = \iint\limits_{(D)} y\,dxdy = \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt[5]{4}}} dx \int\limits_{2x^3}^{\sqrt{x}} y\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt[5]{4}}} y^2\Big|_{2x^3}^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt[5]{4}}} \left(x-4x^6\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{7}x^7\right)\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt[5]{4}}} = \frac{3}{7\sqrt[5]{16}};$$

$$K_y = \iint\limits_{(D)} x\,dxdy = \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt[5]{4}}} x\,dx \int\limits_{2x^3}^{\sqrt{x}} dy = \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt[5]{4}}} x\left(\sqrt{x}-2x^3\right)dx = \frac{1}{10}.$$

**Координати центра маси плоскої області.** З питаннями статичних моментів плоскої області пов'язано питання про знаходження координат центра маси цієї області.

Як відомо, центр маси має ту властивість, що його статичний момент відносно осі дорівнює статичному моменту всієї області відносно цієї осі. Отже, якщо точка $C(\overline{x}, \overline{y})$ є центром маси області $(D)$, то виконують такі рівності:

$$\overline{y} \iint\limits_{(D)} \rho(x, y)\,dxdy = K_x;$$

$$\overline{x} \iint\limits_{(D)} \rho(x, y)\,dxdy = K_y.$$

Звідси

$$\overline{x} = \frac{K_y}{\iint\limits_{(D)} \rho(x, y)\,dxdy}; \quad \overline{y} = \frac{K_x}{\iint\limits_{(D)} \rho(x, y)\,dxdy}. \tag{8}$$

Підставляючи у формули (8) значення статичних моментів $K_x$ і $K_y$, дістаємо формули для координат центра маси плоскої області $(D)$:

$$\overline{x} = \frac{\iint\limits_{(D)} x\rho(x, y)\,dxdy}{\iint\limits_{(D)} \rho(x, y)\,dxdy}; \quad \overline{y} = \frac{\iint\limits_{(D)} y\rho(x, y)\,dxdy}{\iint\limits_{(D)} \rho(x, y)\,dxdy}. \tag{9}$$

❑ **Приклад**

**3.** Знайти координати центра маси однорідної $(\rho(x, y) = \text{const} = C)$ області, обмеженої верхньою частиною еліпса, що спирається на велику вісь.

Розв'язання. Оскільки верхньою частиною еліпса є фігура, симетрична відносно осі $Oy$, то центр маси знаходиться на $Oy$ (рис. 87), тобто $\overline{x} = 0$. Знайдемо

$$I_1 = \iint\limits_{(D)} y\rho(x, y)\,dxdy = C\iint\limits_{(D)} y\,dxdy;$$

$$I_2 = \iint\limits_{(D)} \rho(x, y)\,dxdy = C\iint\limits_{(D)} dxdy.$$



Запишемо рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Тоді

$$I_1 = C\iint\limits_{(D)} y\,dxdy = C\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy = \frac{1}{2}C\int\limits_{-a}^{a} y^2\Big|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2}C\frac{b^2}{a^2}\int\limits_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx = \frac{Cb^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^a = \frac{2}{3}Cab^2,$$

$$I_2 = C\iint\limits_{(D)} dxdy = \frac{1}{2}CS,$$

де $S = \pi ab$ — площа еліпса.

Отже,

$$I_2 = \frac{1}{2}\pi abC.$$

Таким чином,

$$\overline{y} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{2}{3}Cab^2}{\frac{1}{2}\pi abC} = \frac{4}{3}\frac{b}{\pi}.$$

**Момент інерції плоскої області.** Моментом інерції системи $n$ матеріальних точок $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1), \ldots,$ $M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ з масами $m_0$, $m_1, \ldots,$ $m_{n-1}$ відносно деякої осі (прямої) називають число

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k r_k^2,$$

де $r_k$ — відстань від точки $M_k$ до прямої $l$. Зокрема, моменти інерції цих точок відносно координатних осей $Ox$ і $Oy$ відповідно дорівнюють

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k y_k^2 \quad \text{і} \quad \sum_{k=0}^{n-1} m_k x_k^2.$$

Розглянемо випадок плоскої квадровної області $(D)$, суцільно заповненої масою. Нехай густина цієї області є неперервною функцією $\rho = \rho(x, y)$. Розбивши задану область на $n$ частинних областей $(\Delta D_k)$ з площами $\Delta S_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, і вибравши по одній точці $(\xi_k, \eta_k) \in (\Delta D_k)$, замінимо область $(D)$ системою $n$ точок із масами

$$\rho(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k.$$

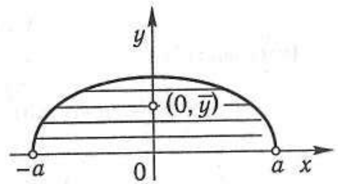


**Рис. 87**

Побудуємо такі інтегральні суми:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\eta_k^2\rho(\xi_k,\eta_k)\Delta S_k;\quad \sum_{k=0}^{n-1}\xi_k^2\rho(\xi_k,\eta_k)\Delta S_k. \qquad (10)$$

Оскільки функції

$$y^2\rho(x,y)\ \text{і}\ x^2\rho(x,y)$$

неперервні в області $(D)$, то існують границі інтегральних сум (10) при

$$\lambda=\max_{0\le k\le n-1}\operatorname{diam}(\Delta D_k)\to 0,$$

які дорівнюють подвійним інтегралам

$$\iint\limits_{(D)} y^2\rho(x,y)\,dxdy,\quad \iint\limits_{(D)} x^2\rho(x,y)\,dxdy.$$

Ці подвійні інтеграли вважають моментами інерції відносно осей $Ox$ і $Oy$ відповідно і позначають

$$I_x=\iint\limits_{(D)} y^2\rho(x,y)\,dxdy;\quad I_y=\iint\limits_{(D)} x^2\rho(x,y)\,dxdy. \qquad (11)$$

❑ **Приклад**

**4.** Знайти моменти інерції круга радіуса $R$ відносно дотичної, проведеної до кола, якщо густина $\rho(x,y)\equiv 1$.

Р о з в ' я з а н н я. Виберемо дотичну до кола так, щоб вона збігалася з віссю $Ox$ (рис. 88). Отже, потрібно знайти момент інерції $I_x$ круга

$$x^2+(y-R)^2\le R^2$$

відносно осі $Ox$. Скориставшись формулами (11), маємо

$$I_x=\iint\limits_{(D)} y^2\,dxdy. \qquad (12)$$

Перейдемо у подвійному інтегралі (12) до полярних координат $\rho$ і $\theta$, поклавши

$$x=\rho\cos\theta;\quad y=R+\rho\sin\theta. \qquad (13)$$

Підставивши ці значення в рівняння кола

$$x^2+(y-R)^2=R^2,$$

матимемо $\rho=R$. Тоді величини $\theta$ і $\rho$ змінюються в таких межах:

$$0\le\theta\le 2\pi;\quad 0\le\rho\le R.$$

Інтеграл (12)

$$I_x=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\rho(R+\rho\sin\theta)^2\,d\rho=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}R^2\rho^2+\frac{2}{3}R\rho^3\sin\theta+\frac{1}{4}\rho^4\sin^2\theta\right)\Big|_0^R d\theta=$$

$$=R^4\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sin\theta+\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)d\theta=R^4\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{2}{3}\cos\theta+\frac{1}{8}\theta-\frac{1}{16}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{5}{4}\pi R^4.$$



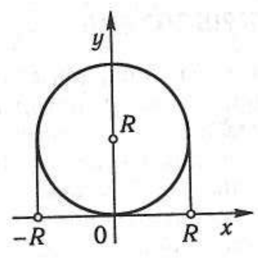


Рис. 88

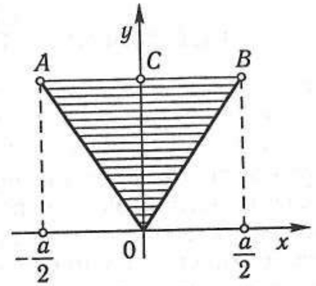


Рис. 89

У механіці розглядають ще момент інерції $I_0$ плоскої області (пластини) відносно деякої точки, наприклад відносно початку координат. Користуючись наведеними міркуваннями, можна вивести таку формулу для моменту інерції відносно початку координат:

$$I_0=\iint\limits_{(D)}\left(x^2+y^2\right)\rho(x,y)\,dxdy, \qquad (14)$$

або

$$I_0=I_x+I_y.$$

❑ **Приклад**

**5.** Знайти момент інерції однорідного $(\rho(x,y)\equiv 1)$ рівнобедреного трикутника з основою $a$ і висотою $h$ відносно вершини.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай трикутник має вигляд, зображений на рис. 89. Згідно з умовою задачі,

$$AC=CB=\frac{a}{2};\quad OC=h.$$

Тому рівняння прямих $OB$ і $OA$ можна відповідно записати так:

$$y=\frac{2h}{a}x;\quad y=-\frac{2h}{a}x.$$

Скориставшись формулою (14), маємо

$$I_0=\iint\limits_{(D)}\left(x^2+y^2\right)dxdy.$$

Перейдемо до повторного інтеграла

$$I_0=\int_0^h dy\int_{-\frac{a}{2h}y}^{\frac{a}{2h}y}\left(x^2+y^2\right)dx=2\int_0^h\left(\frac{1}{3}x^3+y^2x\right)\Big|_0^{\frac{a}{2h}y}dy=$$

$$=2\int_0^h\left(\frac{a^3}{24h^3}y^3+\frac{a}{2h}y^3\right)dy=2\left(\frac{a^3}{96h^3}y^4+\frac{a}{8h}y^4\right)\Big|_0^h=\frac{ah\left(a^2+12h^2\right)}{48}.$$

## 3.12 ПОВЕРХНЕВИЙ ІНТЕГРАЛ ПЕРШОГО РОДУ

У багатьох фізичних задачах зустрічаються величини, пов'язані з деякою поверхнею. Це густина розподілу електричного заряду на поверхні деякого провідника; освітленість поверхні; густина маси, що суцільно заповнює деяку поверхню; швидкість потоку рідини, що протікає через задану поверхню, тощо. Ці задачі приводять до розгляду функцій, областю існування яких є деяка поверхня. Якщо поверхня, на якій задано функцію $u = f(x, y, z)$, має площу, то можна, як і при розгляді криволінійного інтеграла, вводити поняття поверхневого інтеграла.

Теорія поверхневих інтегралів аналогічна теорії криволінійного інтеграла. Як і для криволінійних інтегралів, тут також розглядають поверхневі інтеграли першого й другого роду.

Надалі розглядатимемо, як правило, гладкі поверхні.

Поверхню називають *гладкою,* якщо в кожній її точці можна провести дотичну площину і при переході від точки до точки положення дотичної площини змінюється неперервно.

Розглянемо поверхневі інтеграли першого роду.

Нехай задано поверхню $(P)$ рівнянням

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

де $f(x, y)$ — неперервна функція, яка має неперервні частинні похідні першого порядку $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ у квадровній області $(D)$, що є проекцією поверхні (1) на площину $xOy$ (рис. 90).

Нехай також на поверхні $(P)$ задано обмежену функцію

$$u = F(x, y, z). \tag{2}$$

Підставивши сюди з рівняння (1) значення $z$, дістанемо складену функцію двох змінних $x$ і $y$:

$$u = F(x, y, f(x, y)).$$

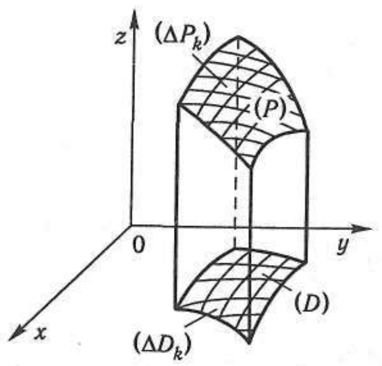

Рис. 90

Розіб'ємо поверхню $(P)$ за допомогою ліній нульової площі на $n$ частинних поверхонь $(\Delta P_0)$, $(\Delta P_1)$, ..., $(\Delta P_{n-1})$ з площами $\Delta P_0$, $\Delta P_1$, ..., $\Delta P_{n-1}$. Проекцію частинної поверхні $(\Delta P_k)$ на площину $xOy$ позначимо через $(\Delta D_k)$, а її площу — через $\Delta S_k$.

На кожній поверхні $(\Delta P_k)$ візьмемо довільно точку $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in (\Delta P_k)$ і складемо суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta P_k. \tag{3}$$



Вираз (3) називають *інтегральною сумою, побудованою для функції $F(x, y, z)$ за заданого розбиття поверхні $(P)$ на частинні поверхні й заданого вибору точок $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$.*

Нехай

$$\mu = \max_{0 \le k \le n-1} \operatorname{diam}(\Delta P_k).$$

***Означення.*** Границю інтегральної суми (3) при $\mu \to 0$, якщо ця границя існує і не залежить ні від способу розбиття поверхні $(P)$ на частинні поверхні $(\Delta P_k)$, ні від вибору точок $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in (\Delta P_k)$, називають *поверхневим інтегралом першого роду* і позначають

$$\iint\limits_{(P)} F(x, y, z)\,dP.$$

Функцію $F(x, y, z)$ називають *інтегральною на поверхні* $(P)$.

Отже, за означенням

$$\lim_{\mu \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta P_k = \iint\limits_{P} F(x, y, z)\,dP. \tag{4}$$

**Теорема.** Якщо функція $z = f(x, y)$ у квадровній області $(D)$ має неперервні частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, а функція $F(x, y, z)$, у свою чергу, є неперервною на поверхні (1), то функція $F(x, y, z)$ інтегровна на заданій поверхні і її поверхневий інтеграл першого роду дорівнює подвійному інтегралу виду

$$\iint\limits_{(P)} F(x, y, z)\,dP = \iint\limits_{(D)} F(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy. \tag{5}$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми п. 1 розд. 3. Формулою (5) користуються при обчисленні поверхневого інтеграла першого роду.

❑ **Приклад**

**1.** Обчислити поверхневий інтеграл

$$I = \iint\limits_{(P)} (x + y + z)\,dP,$$

де $(P)$ — верхня частина сфери

? $$z = x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Розв'язання. Застосуємо формулу (5). Для цього знайдемо $z$ із рівняння сфери

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Тоді

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Отже,

$$I = R\iint\limits_{(D)}\left(x+y+\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)\frac{dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = R\iint\limits_{(D)}\left(\frac{x+y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}+1\right)dxdy, \qquad (6)$$

де $(D)$ — круг $x^2+y^2 \le R^2$.

Перейшовши у подвійному інтегралі (6) до полярних координат $\rho$ і $\theta$, дістанемо

$$I = R\int\limits_0^{2\pi} d\theta\int\limits_0^R \rho\left(\frac{\rho\cos\theta+\rho\sin\theta}{\sqrt{R^2-\rho^2}}+1\right)d\rho =$$

$$= R\int\limits_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta\int\limits_0^R\frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} + R\int\limits_0^{2\pi} d\theta\int\limits_0^R \rho d\rho =$$

$$= R\int\limits_0^R\frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}(\sin\theta-\cos\theta)\Big|_0^{2\pi} + R(\theta)\Big|_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(\rho^2\right)\Big|_0^R = \pi R^3.$$

Слід зазначити, що при розв'язанні цього прикладу дістали невласний інтеграл, а саме $\int\limits_0^R\frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$ (підінтегральна функція стає необмеженою поблизу верхньої межі).

Проте для підінтегральної функції існує неперервна на відрізку $[0; R]$ первісна функція

$$\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{\rho}{R}-\frac{\rho}{2}\sqrt{R^2-\rho^2}.$$

Тому при обчисленні цього невласного інтеграла можна користуватися формулою Ньютона — Лейбніца (див. ч. I, п. 5.7).

Таким чином, розглянули випадок, коли поверхню $(P)$ задано рівнянням $z = f(x, y)$ і її проектували на площину $xOy$. Проте може бути випадок, коли поверхню задано рівнянням $x = \varphi(y, z)$ або $y = \psi(x, z)$. Тоді поверхню доцільно проектувати відповідно на площини $yOz$ і $xOz$, а для поверхневих інтегралів першого роду матимемо такі формули:

$$\iint\limits_{(P)} F(x, y, z)dP = \iint\limits_{(D_{yz})} F(\varphi(y, z), y, z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz;$$

$$\iint\limits_{(P)} F(x, y, z)dP = \iint\limits_{(D_{xz})} F(x, \psi(x, z), z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz,$$

де $(D_{yz}), (D_{xz})$ — проекції поверхні $(P)$ відповідно на площини $yOz$ і $xOz$.



Як відомо, поверхню $(P)$ можна задавати параметричними рівняннями

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v). \qquad (7)$$

Якщо функції $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ в області $(G)$ неперервні й мають неперервні частинні похідні першого порядку, а функція $F(x, y, z)$ неперервна на поверхні $(P)$, то виконується рівність

$$\iint\limits_{(P)} F(x, y, z)dP = \iint\limits_{(G)} F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv, \qquad (8)$$

де

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2;$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2;$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}. \qquad (9)$$

Виведемо формулу (8). Для цього у формулі (5) зробимо заміну змінних згідно з формулами (7). Матимемо

$$\iint\limits_{(P)} F(x, y, z)dP =$$

$$= \iint\limits_{(G)} F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,|I|\,dudv, \qquad (10)$$

де $I$ — якобіан системи функцій $x(u, v), y(u, v)$,

$$I = \begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}. \qquad (11)$$

Виразимо $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ через похідні функцій $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ за змінними $u$ і $v$. Для цього в рівностях (7) розглядатимемо $u$ і $v$ як функції від $x$ і $y$:

$$u = U(x, y), \quad v = V(x, y). \qquad (12)$$

Тоді $z = Z(u, v)$ є складеною функцією від $x$ і $y$. Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (13)$$

Розглянемо рівності

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v). \tag{14}$$

Оскільки $u$ і $v$ є функціями від $x$ і $y$, то рівності (14) можна вважати тотожностями. Продиференціюємо кожну з них по $x$ і $y$. Матимемо системи рівнянь відносно $\frac{\partial x}{\partial u}$; $\frac{\partial v}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial v}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 1, \\ \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0; \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 1. \end{cases} \tag{16}$$

Із систем (15) і (16) знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{I},\quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial y}{\partial u}}{I};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{I},\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial x}{\partial u}}{I}, \tag{17}$$

де $I$ — якобіан, що визначається співвідношенням (11).

Підставимо у рівність (13) знайдені значення похідних. Матимемо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{I}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{I}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right). \tag{18}$$

Підставляючи у вираз

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

значення $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ з формули (18), дістанемо

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{|I|}.$$

Звідси і з рівності (10) випливає справедливість формули (8).



❑ **Приклад**

**2.** Обчислити поверхневий інтеграл

$$I = \iint\limits_{(P)} z dP,$$

де $P$ — частина поверхні

$$x = u\cos v;\quad y = u\sin v;\quad z = v;$$

$$0 \le u \le a;\quad 0 \le v \le 2\pi.$$

Р о з в ' я з а н н я. Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos v;\quad \frac{\partial x}{\partial v} = -u\sin v;$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \sin v;\quad \frac{\partial y}{\partial v} = u\cos v;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 0;\quad \frac{\partial z}{\partial v} = 1.$$

Тоді

$$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{1+u^2}.$$

Отже,

$$\iint\limits_{(P)} z dP = \iint\limits_{(G)} v\sqrt{1+u^2}\,du dv = \int\limits_0^a \sqrt{1+u^2}\,du \int\limits_0^{2\pi} v dv = 2\pi^2 \int\limits_0^a \sqrt{1+u^2}\,du =$$

$$= \pi^2\left(u\sqrt{1+u^2} + \ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right)\Big|_0^a = \pi^2\left(a\sqrt{1+a^2} + \ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right).$$

Розглянемо, нарешті, випадок векторної функції

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{i}P(x, y, z) + \vec{j}Q(x, y, z) + \vec{k}R(x, y, z). \tag{19}$$

Поверхневий інтеграл першого роду векторної функції (19) визначають за формулою

$$\iint\limits_{(P)} \vec{F}(x, y, z)d\Omega = \vec{i}\iint\limits_{(P)} P(x, y, z)d\Omega +$$

$$+ \vec{j}\iint\limits_{(P)} Q(x, y, z)d\Omega + \vec{k}\iint\limits_{(P)} R(x, y, z)d\Omega.$$

Отже, поверхневий інтеграл першого роду векторної функції $\vec{F}(x, y, z)$ є вектором і його існування зводиться до існування трьох поверхневих інтегралів скалярних функцій $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ і $R(x, y, z)$.

Поверхневі інтеграли першого роду використовують при розв'язуванні багатьох задач з фізики, зокрема, при знаходженні координат центра маси, розповсюдженої по деякій поверхні $(P)$, моменту інерції поверхні тощо. Так, якщо густину в кожній точці поверхні

$$z = f(x, y)$$

задано функцією $\rho=\rho(x, y, z)$, то момент інерції $I_z$ цієї поверхні, наприклад, відносно осі $Oz$ визначають за формулою

$$I_z = \iint\limits_{(D)} \left(x^2+y^2\right)\rho(x, y, f(x, y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy. \qquad (21)$$

❑ **Приклад**

3. Знайти момент інерції однорідної $(\rho(x, y, z)=1)$ частини сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$, що знаходиться в першому октанті, відносно осі $Oz$.

Розв'язання. Скористуємося формулою (21). Маємо

$$I_z = \iint\limits_{(D)} \left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy =$$

$$= R\iint\limits_{(D)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dxdy.$$

Перейдемо до полярних координат $\rho$ і $\theta$:

$$I_z = R\iint\limits_{(D)} \frac{\rho^3 d\rho d\theta}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^R \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\pi R\left(\left(-\frac{1}{3}\rho^2+\frac{2}{3}R^2\right)\sqrt{R^2-\rho^2}\right)\Bigg|_0^R = \frac{\pi R^4}{3}.$$

## 3.13 ПОВЕРХНЕВИЙ ІНТЕГРАЛ ДРУГОГО РОДУ

Теорію поверхневих інтегралів другого роду розглядатимемо в основному так, як це зроблено в посібнику [1].

Оскільки площа частинних поверхонь $(\Delta P_k)$ не залежить від їх розміщення в просторі, то й поверхневий інтеграл першого роду не залежить від орієнтації цих поверхонь у просторі. Проте є багато задач, в яких орієнтація поверхонь $(\Delta P_k)$ відіграє істотну роль. Наприклад, задача про обчислення потоку рідини, що протікає через поверхню за одиницю часу. Такі задачі приводять до поняття поверхневого інтеграла другого роду.

Поверхневі інтеграли другого роду будують аналогічно криволінійним інтегралам другого роду. Щоб можна було дати означення такого інтеграла, розглянемо поняття сторони поверхні.

**Сторона поверхні.** Нехай задано деяку гладку поверхню $(\Omega)$. На ній візьмемо внутрішню точку $M_0$ і проведемо через цю точку нормаль до поверхні. На нормалі за допомогою одиничного вектора $\vec{n}$ виберемо один із двох напрямків. Проведемо на поверхні $(\Omega)$ через точку $M_0$ деяку замкнену криву $C$, яка не має спільних точок з краями поверхні $(\Omega)$.



Уздовж $C$ переміщатимемо вектор $\vec{n}$ так, щоб він весь час був нормальним до поверхні $(\Omega)$ і змінювався неперервно. Тоді матимемо такі два випадки.

I. При поверненні в точку $M_0$ напрямок вектора $\vec{n}$ не зміниться.

II. Напрямок вектора $\vec{n}$ зміниться на протилежний.

Отже, приходимо до такого означення.

***Означення 1.*** Гладку поверхню $(\Omega)$ називають *двосторонньою,* якщо при обході вздовж будь-якого замкненого контура $C$, який лежить на поверхні $(\Omega)$ і не має спільних точок з краями поверхні, напрямок нормалі до поверхні не змінюється.

Якщо на поверхні $(\Omega)$ існує замкнений контур, при обході вздовж якого напрямок нормалі змінюється на протилежний, то поверхню $(\Omega)$ називають *односторонньою.*

Отже, з цього означення випливає, що коли поверхня $(\Omega)$ двостороння, то в кожній її точці $M$ можна вибрати одиничний вектор нормалі $\vec{n}(M)$ так, щоб вектор $\vec{n}(M)$ залежав від точки $M$ неперервно. Очевидно, що на двосторонній поверхні $(\Omega)$ можна побудувати тільки дві такі неперервні функції $\vec{n}(M)$, причому кожна з цих функцій задає на $(\Omega)$ неперервне поле нормалей.

Прикладами двосторонньої поверхні є звичайна площина; будь-яка частина площини (круг, багатокутник).

Якщо поверхню задано рівнянням

$$z=f(x, y),$$

де $f(x, y)$ — неперервна і має неперервні частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ в деякій області $(D)$, то така поверхня є двосторонньою (рис. 91).

Двосторонню поверхню ще називають *орієнтованою,* а вибір певної її сторони — *орієнтацією* поверхні.

Нехай $(\Omega)$ — орієнтована поверхня, обмежена одним або кількома контурами.

Напрямок обходу контуру $L$ вважають *додатним* (узгодженим з орієнтацією $(\Omega)$), якщо спостерігач розміщений на поверхні так, що напрямок вектора нормалі збігається з напрямком від ніг до голови, обходить контур $L$, залишаючи поверхню $(\Omega)$ зліва від себе.

Протилежний напрямок обходу контуру вважають *від'ємним.*

Якщо $L$ — будь-який замкнений контур, що охоплює частину орієнтованої поверхні $(\Omega)$, то напрямок обходу цього контуру, узгоджений з орієнтацією поверхні $(\Omega)$, вважають додатним, якщо при обході контуру частина поверхні залишається зліва (рис. 92).

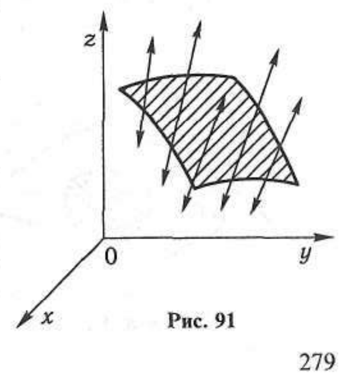


Рис. 91

Правило узгодження орієнтації поверхні $(\Omega)$ і контура $L$, що її окутує, можна сформулювати так.

Нехай $\vec{n}$ — одиничний вектор нормалі до поверхні $(\Omega)$ в деякій точці $M$, що лежить на $L$, а $\vec{v}$ — вектор, перпендикулярний до $L$ і $\vec{n}$ і напрямлений у той бік, де розміщено поверхню $(\Omega)$. Тоді додатний напрямок обходу контура $L$ задається напрямком вектора, що є векторним добутком $[\vec{v}\vec{n}]$.

**Потік векторного поля через поверхню.** Розглянемо задачу про обчислення потоку рідини, що протікає через деяку поверхню.

Нехай простір заповнено рухомою рідиною, швидкість якої в точці $(x, y, z)$ позначимо через $\vec{v}(x, y, z)$, а проекції цього вектора на координатні осі — відповідно через

$$v_x(x, y, z);\ \ v_y(x, y, z);\ \ v_z(x, y, z);$$

$$\vec{v}(x, y, z) = \vec{i}\,v_x(x, y, z) + \vec{j}\,v_y(x, y, z) + \vec{k}\,v_z(x, y, z). \qquad (1)$$

Кількість рідини, що протікає за одиницю часу через деяку орієнтовану поверхню $(\Omega)$, називають *потоком рідини*, або *потоком векторного поля* $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$.

Поставимо задачу про обчислення потоку рідини.

Для цього лініями нульової площі розіб'ємо поверхню $(\Omega)$ на $n$ частинних поверхонь $(\Delta\Omega_k)$. Кількість рідини $\Delta\Pi_k$, що протікає через $(\Delta\Omega_k)$ за одиницю часу, наближено дорівнює об'єму побудованого циліндра (рис. 93), тобто

$$\Delta\Pi_k \approx v_n(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta\Omega_k,$$

де $v_n$ — проекція швидкості $\vec{v}$ на нормаль до поверхні в точці $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in (\Delta\Omega_k)$, $\Delta\Omega_k$ — площа поверхні $(\Delta\Omega_k)$.

Проекцію $v_n(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ можна записати у вигляді скалярного добутку

$$v_n(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) = (\vec{v}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\vec{n}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)) =$$
$$= v_x(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\cos\alpha_k + v_y(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\cos\beta_k + v_z(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\cos\gamma_k,$$

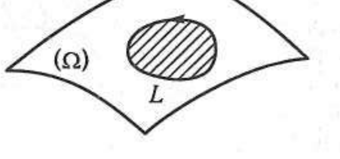

Рис. 92

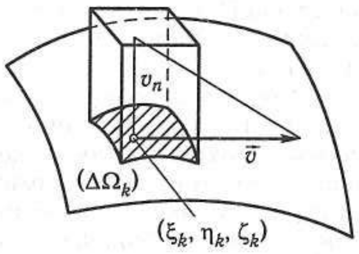

Рис. 93



де $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ — кути, що утворює вектор нормалі $\vec{n}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ до поверхні $(\Delta\Omega_k)$ в точці $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ з координатними осями. Тоді

$$\Delta\Pi_k \approx \big(v_x(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\cos\alpha_k + v_y(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\cos\beta_k +$$
$$+ v_z(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\cos\gamma_k\big)\Delta\Omega_k,$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (2)$$

Додавши почленно наближені рівності (2), дістаємо наближену рівність

$$\Pi \approx \sum_{k=0}^{n-1}\big(v_x(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\cos\alpha_k +$$
$$+ v_y(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\cos\beta_k + v_z(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\cos\gamma_k\big)\Delta\Omega_k \qquad (3)$$

для потоку $\Pi$ рідини, що протікає через поверхню $(\Omega)$ за одиницю часу.

Якщо в сумі (3) перейти до границі при

$$\lambda = \max_{0\le k\le n-1} \operatorname{diam}(\Delta\Omega_k) \to 0,$$

то матимемо для $\Pi$ точну рівність

$$\Pi = \iint\limits_{(\Omega)} \big(v_x(x, y, z)\cos\alpha + v_y(x, y, z)\cos\beta + v_z(x, y, z)\cos\gamma\big)\,d\Omega,$$

де в правій частині міститься поверхневий інтеграл першого роду.

Однак цей інтеграл на відміну від інтеграла, розглянутого в попередньому параграфі, залежить не лише від вектора-функції, а й від нормалі в кожній точці поверхні. Такий інтеграл називають *поверхневим інтегралом другого роду*.

**Означення поверхневого інтеграла другого роду.** Нехай $(\Omega)$ — гладка двостороння поверхня. Розглядатимемо надалі одну зі сторін цієї поверхні, тобто одне з двох полів нормалей до поверхні. Припустимо, що на поверхні $(\Omega)$ задано неперервну вектор-функцію

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{i}P(x, y, z) + \vec{j}Q(x, y, z) + \vec{k}R(x, y, z).$$

***Означення 2.*** Інтеграл

$$\iint\limits_{(\Omega)} \big(P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma\big)\,d\Omega,$$

де $\alpha, \beta, \gamma$ — кути між напрямком нормалі до поверхні й напрямками координатних осей, називають *поверхневим інтегралом другого роду* і позначають

$$\iint\limits_{(\Omega)} P(x, y, z)\,dydz + Q(x, y, z)\,dxdz + R(x, y, z)\,dxdy.$$

Таким чином, за означенням маємо рівність

$$\iint\limits_{(\Omega)} \left(P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma\right) d\Omega =$$

$$= \iint\limits_{(\Omega)} \left(P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)\cos\gamma\right) dxdy. \quad (4)$$

Слід зазначити, що коли в поверхневому інтегралі другого роду перейти на другий бік поверхні або, що те саме, змінити напрямок вектора $\vec{n}$ на протилежний, то й знак інтеграла зміниться на протилежний.

**Зведення поверхневого інтеграла до подвійного інтеграла.** Нехай гладку поверхню $(\Omega)$ задано рівнянням

$$z = z(x, y), \quad (5)$$

де $z(x, y)$ — неперервна функція разом із похідними $z'_x, z'_y$ у квадровній області $(D_{xy})$, яка є проекцією $(\Omega)$ на площину $xOy$.

Нехай $\vec{n} = \vec{n}(x, y, z)$ — зовнішня нормаль (з координатними осями вона утворює гострі кути) до поверхні (5). Тоді для поверхневого інтеграла на зовнішній поверхні можна вивести таку формулу:

$$\iint\limits_{(\Omega)} R(x, y, z)\,dxdy = \iint\limits_{(D_{xy})} R(x, y, z(x, y))\,dxdy. \quad (6)$$

Якщо інтеграл береться за внутрішнім боком поверхні, то

$$\iint\limits_{(\Omega)} R(x, y, z)\,dxdy = -\iint\limits_{(D_{xy})} R(x, y, z(x, y))\,dxdy. \quad (7)$$

Формули (6) і (7) запишемо у вигляді

$$\iint\limits_{(\Omega)} R(x, y, z)\,dxdy = \pm\iint\limits_{(D_{xy})} R(x, y, z(x, y))\,dxdy. \quad (8)$$

Якщо поверхню $(\Omega)$ задано рівнянням

$$y = y(x, z), \text{ або } x = x(y, z),$$

то справедливі формули, аналогічні формулам (8):

$$\iint\limits_{(\Omega)} P(x, y, z)\,dydz = \pm\iint\limits_{(D_{yz})} P(x(y, z), y, z)\,dydz; \quad (9)$$

$$\iint\limits_{(\Omega)} Q(x, y, z)\,dxdz = \pm\iint\limits_{(D_{xz})} Q(x, y(x, z), z)\,dxdz, \quad (10)$$

де $(D_{yz}), (D_{xz})$ — проекція поверхні $(\Omega)$ відповідно на площини $yOz$, $xOz$.



Якщо поверхню $(\Omega)$ задано векторним рівнянням

$$\vec{r} = \vec{i}x(u, v) + \vec{j}y(u, v) + \vec{k}z(u, v),$$

то поверхневий інтеграл за зовнішнім боком поверхні обчислюється за формулою

$$\iint\limits_{(\Omega)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{(D)} \big(P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))A +$$

$$+Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v))B +$$

$$+R(x(u, v), y(u, v), z(u, v))C\big)\,dudv, \quad (11)$$

де

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix};$$

$$C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \quad (12)$$

❑ **Приклад**

Обчислити поверхневий інтеграл другого роду

$$I = \iint\limits_{(\Omega)} zdxdy$$

за зовнішнім боком сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Розв'язання. Цей інтеграл можна записати у вигляді двох інтегралів

$$I = \iint\limits_{(\Omega_1)} zdxdy = I + \iint\limits_{(\Omega_2)} zdxdy,$$

де $(\Omega_1)$ — зовнішній бік верхньої частини сфери; $(\Omega_2)$ — зовнішній бік нижньої частини сфери. У першому випадку

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

в другому

$$z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Нехай $(D)$ — проекція $(\Omega_1)$ на площину $xOy$. Поверхню $\Omega_2$ проектують на площину $xOy$ зі сторони зовнішньої нормалі, що утворює з додатним напрямком осі $Oz$ тупий кут. Тому при заміні інтеграла по поверхні $(\Omega_2)$ подвійним інтегралом потрібно перед останнім поставити знак «мінус». Отже,

$$I = 2\iint\limits_{(D)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^R \rho\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho = -\frac{4}{3}\pi\left(R^2-\rho^2\right)^{3/2}\Big|_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

## 3.14 ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

**Поняття про об'єм тіла.** Перш ніж дати означення потрійного інтеграла, розглянемо поняття об'єму просторового тіла.

Питання про об'єм тіл обертання було розглянуто в ч. 1 цього курсу. У частині 2, п. 3.4 дано означення й формулу для об'єму циліндричного тіла.

Тепер на основі поняття об'єму багатогранника дамо означення об'єму довільного просторового тіла.

Отже, нехай дано тіло $(v)$ довільної форми, тобто обмежену замкнену область у тривимірному евклідовому просторі $\mathbf{R}_3 : (v) \subset \mathbf{R}_3$. Межею цього тіла є замкнена поверхня $(\Omega)$.

Розглянемо всі можливі багатогранники $(x)$ з об'ємом $x$, що містяться в тілі $(v) \supset (x)$, а також багатогранники $(y)$ з об'ємом $y$, що містять тіло $(v) \subset (y)$.

Тоді множина дійсних чисел $\{x\}$ обмежена зверху: будь-яке число $x$ менше за будь-яке число $y$, тобто існує верхня грань множини $\{x\}$. Позначимо її через $v_*$:

$$v_* = \sup\{x\}.$$

Множина дійсних чисел $\{y\}$ обмежена знизу: для будь-якого числа $y \in \{y\}$ виконується нерівність

$$y \geq v_*.$$

Тому існує нижня грань цієї множини, позначимо її через $v^*$:

$$v^* = \inf\{y\}.$$

Зрозуміло, що числа $v_*$ і $v^*$ задовольняють нерівність $v_* \leq v^*$.

***Означення 1.*** Якщо виконується рівність

$$v_* = v^*,$$

то спільне значення $v$ цих чисел називають *об'ємом тіла* $(v)$, а саме тіло — *кубовним*.

Зазначимо, що коли за тіло $(v)$ взято деякий багатогранник, наприклад $(T)$ з об'ємом $T$, то

$$v_* = v^* = T.$$

Отже, поняття об'єму багатогранника не суперечить наведеному означенню.



**Теорема 1.** Для того щоб тіло $(v)$ було кубовним, необхідно й достатньо, щоб для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існували два багатогранники $(x) \subset (v)$ і $(y) \supset (v)$, об'єми яких задовольняють нерівність

$$y - x < \varepsilon. \tag{1}$$

Доведення необхідності. Нехай тіло $(v)$ має об'єм $V$. Доведемо, що існують такі два багатогранники, для яких виконується нерівність (1).

Оскільки $v = \sup\{x\}$, то для будь-якого числа, наприклад $\frac{\varepsilon}{2}$, де $\varepsilon > 0$, існує багатогранник $(x_0) \subset (v)$ з об'ємом $x_0$ таким, що

$$x_0 > v - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогічно оскільки $v = \inf\{y\}$, то існує багатогранник $(y_0) \supset (v)$, об'єм якого $y_0$ задовольняє нерівність

$$y_0 < v + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Віднімаючи від цієї нерівності попередню, дістанемо

$$y_0 - x_0 < \varepsilon.$$

Доведення достатності. Нехай виконується нерівність (1). Доведемо, що в цьому випадку тіло $(v)$ є кубовним.

Справді, використаємо нерівність

$$x \leq v_* \leq v^* \leq y.$$

Оскільки $y - x < \varepsilon$, то

$$v^* - v_* < \varepsilon.$$

Ця нерівність означає, що

$$v_* = v^*.$$

Теорему доведено.

***Означення 2.*** Поверхню $(\Omega)$ називають *поверхнею нульового об'єму*, якщо її можна помістити у багатогранну область з як завгодно малим об'ємом.

Із попередньої теореми випливає таке твердження: для того щоб тіло $(v)$ було кубовним, необхідно й достатньо, щоб поверхня $(\Omega)$, яка його обмежує, мала нульовий об'єм.

До поверхонь з нульовим об'ємом належать поверхні, задані, наприклад, рівняннями

$$z = z(x, y); \quad x = x(y, z); \quad y = y(x, z),$$

де $z(x, y), x(y, z), y(x, z)$ — неперервні функції в деяких обмежених областях.

Надалі розглядатимемо тіла, які обмежені поверхнями з нульовим об'ємом.

Нехай тіло $(v)$ має об'єм $V$. Тоді властивість адитивності: якщо тіло $(v)$ розбити на два тіла $(v_1)$ і $(v_2)$ без спільних внутрішніх точок, то з цих двох тіл випливає існування об'єму вихідного тіла, причому виконується рівність

$$v = v_1 + v_2.$$

**Задача про обчислення маси тіла.** Нехай просторове кубовне тіло $(v)$ суцільно заповнено масою, густина якої $\rho$ змінюється від точки до точки, тобто є функцією точки:

$$\rho = \rho(x, y, z).$$

Поставимо задачу про обчислення маси такого тіла.

Для цього тіло $(v)$ поверхнями нульового об'єму розіб'ємо на $n$ частинних тіл $(\Delta v_0)$, $(\Delta v_1)$, …, $(\Delta v_{n-1})$, об'єми яких позначимо відповідно через $\Delta v_0$, $\Delta v_1$, …, $\Delta v_{n-1}$. У кожному частинному тілі $(\Delta v_k)$ виберемо довільно по одній точці $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in (\Delta v_k)$. Тоді масу $\Delta m_k$, що заповнює тіло $(\Delta v_k)$, визначають за формулою

$$\Delta m_k \approx \rho(\xi_k, \eta_k, \xi_k)\Delta v_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Додавши почленно наближені рівності, дістанемо число, яке дає наближене значення маси $m$ тіла $(v)$, тобто

$$m \approx \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta v_k.$$

Природно за масу $m$ тіла $(v)$ взяти число

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta v_k, \tag{2}$$

де

$$\lambda = \max_{0 \le k \le n-1} \operatorname{diam}(\Delta v_k)$$

у припущенні, що границя (2) існує.

**Означення і властивості потрійного інтеграла.** Нехай функцію трьох змінних $u = f(x, y, z)$ визначено й обмежено в кубовній просторовій області $(v)$. Розіб'ємо цю область (тіло) поверхнями нульового об'єму на $n$ частинних областей $(\Delta v_k)$ з об'ємом $\Delta v_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. У кожній області $(\Delta v_k)$ виберемо довільно точку $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in (\Delta v_k)$ і розглянемо суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta v_k. \tag{3}$$

Суму (3) називають *інтегральною сумою* функції $f(x, y, z)$, побудованою для заданого розбиття області $(v)$ на частинні області й заданого вибору точок $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$.



Введемо позначення

$$\lambda = \max_{0 \le k \le n-1} \operatorname{diam}(\Delta v_k).$$

***Означення 3.*** Границю інтегральної суми (3) при $\lambda \to 0$, якщо ця границя існує і не залежить ні від способу розбиття області $(v)$ на частинні області $(\Delta v_k)$, ні від вибору точок $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, називають *потрійним інтегралом* і позначають

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dv.$$

Отже, за означенням

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta v_k = \iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dv. \tag{4}$$

Функцію $f(x, y, z)$ називають *інтегровною в області* $(v)$.

Таким чином, маса $m$ тіла $(v)$, згідно з рівністю (2) і означенням 3, дорівнює потрійному інтегралу

$$m = \iiint\limits_{(v)} \rho(x, y, z)\,dv. \tag{5}$$

**Теорема 2.** Якщо функція $f(x, y, z)$ у кубовній області $(v)$ неперервна, то вона в цій області є інтегровною.

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми про існування визначеного інтеграла для неперервної функції $y = f(x)$, заданої на відрізку $[a; b]$.

У подальшому розглядатимемо тільки неперервні функції.

**Властивості потрійного інтеграла.** Властивості потрійного інтеграла такі самі, як і властивості визначеного інтеграла. Сформулюємо їх.

**1°.** Існування й величина потрійного інтеграла на залежать від тих значень функції, яких вона набуває вздовж скінченного числа поверхонь нульового об'єму.

**2°.** Якщо область $(v) = (v_1) + (v_2)$, то

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dv = \iiint\limits_{(v_1)} f(x, y, z)\,dv + \iiint\limits_{(v_2)} f(x, y, z)\,dv$$

(адитивна властивість інтеграла).

**3°.** Якщо $k = \text{const}$, то

$$\iiint\limits_{(v)} kf(x, y, z)\,dv = k\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dv$$

(сталий множник можна виносити за знак інтеграла).

**4°.** $$\iiint\limits_{(v)} (f_1(x, y, z) \pm f_2(x, y, z))\,dv = \iiint\limits_{(v)} f_1(x, y, z)\,dv \pm \iiint\limits_{(v)} f_2(x, y, z)\,dv$$

(інтеграл алгебраїчної суми функцій дорівнює сумі інтегралів від кожної функції окремо).

**5°.** Нехай $m$ — найменше значення неперервної функції в області $(v)$, $M$ — її найбільше значення. Тоді виконуються нерівності

$$mv \le \iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dv \le Mv,$$

тобто справджується теорема про середнє значення

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dv = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})v,$$

де $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ — деяка внутрішня точка області $(v)$.

## 3.15 ОБЧИСЛЕННЯ ПОТРІЙНОГО ІНТЕГРАЛА

**Випадок прямокутного паралелепіпеда.** Нехай функція $f(x, y, z)$ неперервна в прямокутному паралелепіпеді $(T):[a,b;c,d;l,k]$. Отже, вона в цьому паралелепіпеді є інтегровною. Розіб'ємо паралелепіпед $(T)$ на частинні паралелепіпеди за допомогою площин, паралельних координатним площинам. Для цього відрізки $[a;b]$, $[c;d]$, $[l;k]$ поділимо на частинні відрізки точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_n = b;$$
$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_j < \dots < y_m = d;$$
$$l = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_h < \dots < z_p = k.$$

Через кожну точку $(x_i, y_j, z_h)$ проведемо площини, перпендикулярні відповідно до координатних осей $Ox$, $Oy$, $Oz$. В результаті паралелепіпед $(T)$ розіб'ється на частинні паралелепіпеди

$$(\Delta T_{ijh}):[x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}; z_h, z_{h+1}].$$

У кожному з цих паралелепіпедів неперервна функція $f(x, y, z)$ набуває свого найменшого значення $m_{ijh}$ і найбільшого значення $M_{ijh}$, тобто для кожної точки $(x, y, z) \in (\Delta T_{ijh})$ виконуються нерівності

$$m_{ijh} \le f(x, y, z) \le M_{ijh}.$$

Проінтегруємо почленно ці нерівності за змінною $z$ у межах від $z_k$ до $z_{k+1}$:

$$\int\limits_{z_k}^{z_{k+1}} m_{ijh}\,dz \le \int\limits_{z_h}^{z_{h+1}} f(x, y, z)\,dz \le \int\limits_{z_h}^{z_{h+1}} M_{ijh}\,dz.$$



Звідси

$$m_{ijh}\Delta z_h \le \int\limits_{z_h}^{z_{h+1}} f(x, y, z)\,dz \le M_{ijh}\Delta z_h, \quad k = 0, 1, \dots, p, \qquad (1)$$

де $\Delta z_h = x_{h+1} - z_h$.

Візьмемо точку $(\xi_k, \eta_k, z) \in (\Delta T_{ijh})$. Для цієї точки нерівності (1) також виконуються. Тому, підставивши точку $(\xi_k, \eta_k, z)$ в нерівності (1) і почленно додавши їх по $h$ від $0$ до $p-1$, дістанемо

$$\sum_{h=0}^{p-1} m_{ijh}\,\Delta z_h \le \int\limits_l^k f(\xi_i, \eta_j, z)\,dz \le \sum_{h=0}^{p-1} M_{ijn}\,\Delta z_h. \qquad (2)$$

Введемо позначення

$$\int\limits_l^k f(\xi_k, \eta_j, z)\,dz = F(\xi_k, \eta_j). \qquad (3)$$

Помножимо нерівності (2) на число $\Delta x_i \Delta y_j = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$ і додамо утворені нерівності за $i$ від $0$ до $n-1$ і за $j$ від $0$ до $m-1$. Матимемо

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{h=0}^{p-1} m_{ijh}\,\Delta x_i \Delta y_j\,\Delta z_h \le \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} F(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i \Delta y_j \le$$
$$\le \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{h=0}^{p-1} M_{ijh}\,\Delta x_i \Delta y_j\,\Delta z_h. \qquad (4)$$

У крайніх частинах нерівностей (4) містяться інтегральні суми для функції $f(x, y, z)$, а в середній — інтегральна сума для функції двох змінних

$$F(x, y) = \int\limits_l^k f(x, y, z)\,dz.$$

Оскільки функції $f(x, y, z)$ і $F(x, y)$ неперервні у відповідних областях, то границі зазначених інтегральних сум відповідно дорівнюють

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{p-1} m_{ijk}\,\Delta x_i \Delta y_j\,\Delta z_k = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{p-1} M_{ijk}\Delta x_i \Delta y_j\,\Delta z_k =$$
$$= \iiint\limits_{(T)} f(x, y, z)\,dxdydz,$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} F(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j = \iint\limits_{(R)} F(x, y)\,dxdy, \qquad (5)$$

де $(R)$ — прямокутник, $(R):[a, b; c, d]$.

Перейшовши в нерівностях (4) до границі при $\lambda \to 0$, дістанемо таку рівність:

$$\iiint\limits_{(T)} f(x, y, z)\,dxdydz = \iint\limits_{(R)} F(x, y)\,dxdy. \qquad (6)$$

Підставивши значення $F(x, y)$ з рівності (3), матимемо формулу для обчислення потрійного інтеграла

$$\iiint\limits_{(T)} f(x, y, z)\,dxdydz = \int_a^b dx \int_a^b dy \int_l^k f(x, y, z)\,dz. \qquad (7)$$

❑ **Приклад**

**1.** Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{(T)} \frac{dxdydz}{(x+y+z)^3}$, якщо $(T)$ є кубом $(T): [1, 2; 1, 2; 1, 2]$.

Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо формулу (7):

$$\iiint\limits_{(T)} \frac{dxdydz}{(x+y+z)^3} = \int_1^2 dx \int_1^2 dy \int_1^2 \frac{dz}{(x+y+z)^3} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^2 dx \int_1^2 \left( \frac{1}{(x+y+2)^2} - \frac{1}{(x+y+1)^2} \right) dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^2 \left( -\left( \frac{1}{(x+y+2)} \right)\Bigg|_1^2 + \left( \frac{1}{x+y+1} \right)\Bigg|_1^2 \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^2 \left( \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+2} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left( 2\ln|x+3| - \ln|x+4| - \ln|x+2| \right)\Big|_1^2 = \frac{7}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 5.$$

**Випадок довільної області.** Нехай функція $f(x, y, z)$ задана і неперервна в довільній криволінійній області $(v) \subset \mathbf{R}_3$. Нехай область $(v)$ обмежена знизу поверхнею $z = f_1(x, y)$, зверху — поверхнею $z = f_2(x, y)$, а з боків — циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі $Oz$ (рис. 94), причому проекція області $(v)$ на площину $xOy$ є квадровною областю $(D)$.

Припустимо, що для будь-якої точки $(x, y) \in D$

$$f_1(x, y) \le f_2(x, y).$$



Помістимо область $(v)$ у деякий паралелепіпед $(T): [a, b; c, d; k, l]$ і введемо допоміжну функцію

$$F(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & \text{якщо } (x, y, z) \in (v); \\ 0, & \text{якщо } (x, y, z) \in (T) \setminus (v). \end{cases}$$

Можна довести, що функція $F(x, y, z)$ інтегровна в паралелепіпеді $(T)$ і

$$\iiint\limits_{(T)} F(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dxdydz. \qquad (8)$$

За допомогою міркувань, наведених на початку параграфа, дістанемо

$$\iiint\limits_{(T)} F(x, y, z)\,dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz, \qquad (9)$$

де $y = y_1(x)$ — рівняння кривої, що обмежує область $(D)$ знизу, а $y = y_2(x)$ — рівняння кривої, що обмежує область зверху.

Прирівнюючи праві частини в рівностях (8) і (9), маємо формулу для обчислення потрійного інтеграла у випадку, коли область $(v)$ є циліндричним тілом

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (10)$$

❑ **Приклад**

**2.** Обчислити масу однорідного тіла $\rho(x, y, z) \equiv 1$, обмеженого координатними площинами $xOy$ і $yOz$, параболоїдом $x^2 + y^2 = 6 - z$ і площинами $y = 4z$, $x = 1$ і $y = 2$ (рис. 95).

Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо формулу

$$m = \iiint\limits_{(v)} dxdydz.$$

У цьому випадку $(v)$ знизу обмежена площиною $z = \frac{1}{4}y$, а зверху — параболоїдом $z = 6 - x^2 - y^2$.

Проекція $(v)$ на площині $xOy$ є прямокутником, обмеженим координатними осями $Ox$ і $Oy$, прямими $x = 1$ і $y = 2$. Отже, використовуючи формулу (10), дістаємо

$$m = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_{\frac{1}{4}y}^{6-x^2-y^2} dz = \int_0^1 dx \int_0^2 \left( 6 - x^2 - y^2 - \frac{1}{4}y \right) dy = \int_0^1 \left( 6y - x^2 y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{8}y^2 \right)\Big|_0^2 dx =$$

$$= \int_0^1 \left( \frac{15}{2} - 2x^2 \right) dx = \left( \frac{15}{2}x - \frac{2}{3}x^3 \right)\Big|_0^1 = \frac{13}{3}.$$

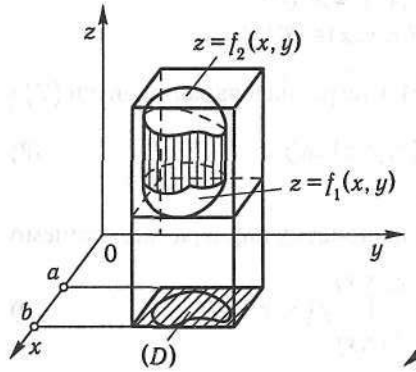


Рис. 94

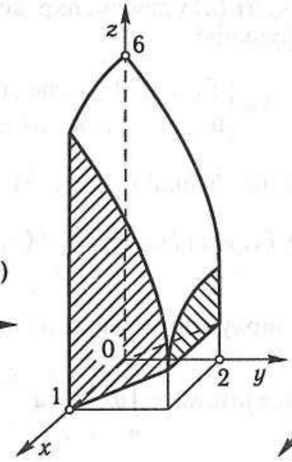


Рис. 95

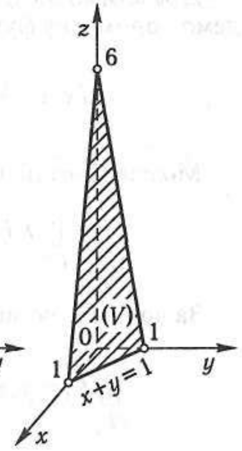


Рис. 96

Потрійний інтеграл застосовують також для обчислення об'ємів просторових тіл. Справді, поклавши у формулі (4) п. 3.14 $f(x, y, z) \equiv 1$, дістанемо

$$V = \iiint\limits_{(v)} dxdydz. \tag{11}$$

Ця формула виражає об'єм тіла ($v$).

❑ **Приклад**

**3.** Обчислити об'єм тіла, обмеженого координатними площинами і площиною $x + y + z = 1$.

Р о з в ' я з а н н я. Тіло, об'єм якого потрібно знайти, є тетраедром (рис. 96).

Проекцією тетраедра на площину $xOy$ є трикутник, обмежений координатними осями $x = 0$, $y = 0$ і прямою $x + y = 1$.

Отже, за формулою (11)

$$V = \iiint\limits_{(v)} dv = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy =$$

$$= \int_0^1 \left( y - xy - \frac{1}{2} y^2 \right)\Bigg|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left( 1 - x - x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2 \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left( \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} x^2 \right) dx = \left( \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Цей самий результат дістали б, якби обчислювали об'єм тетраедра (піраміди) за формулою

$$V = \frac{1}{3} Sh,$$

де $S$ — площа основи; $h$ — його висота.



## 3.16 ЗАМІНА ЗМІННИХ У ПОТРІЙНОМУ ІНТЕГРАЛІ

Для обчислення потрійних інтегралів іноді доводиться від декартових координат $x, y, z$ точки переходити до криволінійних координат $u$, $t$, $w$ цієї точки за формулами

$$x = \varphi(u, t, w);$$
$$y = \psi(u, t, w);$$
$$z = \mu(u, t, w). \tag{1}$$

При цьому припускають, що функції $\varphi(u, t, w)$, $\psi(u, t, w)$, $\mu(u, t, w)$ неперервні й мають неперервні частинні похідні першого порядку в області ($G$) задання цих функцій, а також те, що між областями ($v$) і ($G$) формули (1) встановлюють взаємно однозначну відповідність.

Тоді, як це робилося при заміні змінних у подвійному інтегралі, можна вивести формулу заміни змінних у потрійному інтегралі:

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\, dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{(G)} f(\varphi(u, t, w), \psi(u, t, w), \mu(u, t, w)) |I|\, dudtdw, \tag{2}$$

де $I$ — якобіан системи функцій (1):

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \mu}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \frac{\partial \psi}{\partial t} & \frac{\partial \mu}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial w} & \frac{\partial \psi}{\partial w} & \frac{\partial \mu}{\partial w} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

На практиці часто користуються циліндричними і сферичними координатами.

Формули, що встановлюють зв'язок між декартовими і циліндричними координатами точки $M$, такі:

$$x = \rho\cos\varphi, \ y = \rho\sin\varphi, \ z = z. \tag{4}$$

Знайдемо якобіан

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Отже, формула (2) заміни змінних у потрійному інтегралі при переході до циліндричних координат набирає вигляду

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_{(v)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz.$$

❑ **Приклади**

**1.** Вивести формулу для об'єму кругового циліндра, радіус якого $R$, а висота $H$.

Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо формулу

$$V = \iiint\limits_{(v)} dxdydz.$$

Перейшовши в цьому інтегралі до циліндричних координат, матимемо

$$V = \iiint\limits_{(v)} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho d\rho \int_0^H dz = \varphi\Big|_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho^2\Big|_0^R z\Big|_0^H = \pi R^2 H.$$

Дістали відому формулу з геометрії.

**2.** Обчислити масу $m$ однорідного тіла, $\rho(x, y, z) \equiv 1$, що вирізається з кулі $x^2 + y^2 + z^2 \le R$ циліндром $x^2 + y^2 \le Ry$ (рис. 97).

Р о з в ' я з а н н я. У першому октанті знаходиться $\frac{1}{4}$ тіла, масу якого потрібно знайти. Тому вся маса дорівнює

$$m = 4\iiint\limits_{(v)} dxdydz.$$

Перейдемо до циліндричних координат

$$m = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R\sin\varphi} \rho d\rho \int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} dz =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R\sin\varphi} \rho\sqrt{R^2 - \rho^2}\, d\rho = -\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(R^2 - \rho^2\right)^3}\Bigg|_0^{R\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3\left(1 - \cos^3\varphi\right)d\varphi = \frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \sin^2\varphi\right)d\sin\varphi\right) =$$

$$= \frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2} - \left(\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{2}{3}R^3\left(\pi - \frac{4}{3}\right).$$

Залежність між декартовими координатами $x, y, z$ точки і сферичними координатами $r, \varphi, \theta$ тієї самої точки виражається формулами (рис. 98):

$$x = r\cos\varphi\sin\theta; \quad y = r\sin\varphi\cos\theta; \quad z = r\cos\theta. \tag{5}$$



Якобіан системи функцій (5) дорівнює

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \end{vmatrix}.$$

Розвинемо цей детермінант за елементами третього стовпця. Тоді

$$I = r^2\cos^2\theta\sin\theta\begin{vmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} - r^2\sin^3\theta\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= -r^2\cos^2\theta\sin\theta - r^2\sin^3\theta = -r^2\sin\theta.$$

Отже, формула заміни змінних у потрійному інтегралі при переході до сферичних координат має вигляд

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{(v)} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)r^2\sin\theta\, dr d\varphi d\theta. \tag{6}$$

❑ **Приклади**

**3.** Вивести формулу для об'єму кулі радіуса $R$.

Р о з в ' я з а н н я. Куля — це тіло, симетрично розміщене у восьми октантах. Об'єм знаходимо за формулою

$$V = 8\iiint\limits_{(v_1)} dxdydz, \tag{7}$$

де $(v_1)$ — частина кулі, що міститься в першому октанті (рис. 99).

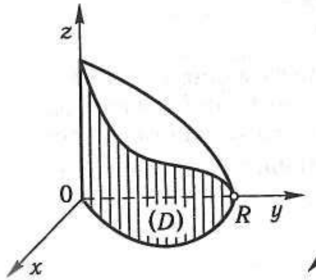


Рис. 97

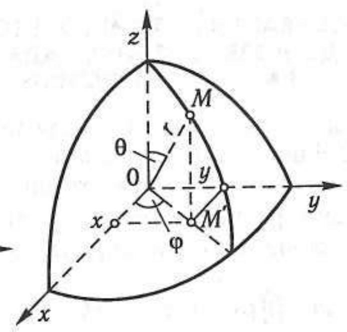


Рис. 98

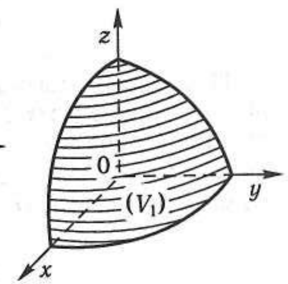


Рис. 99

Перейдемо в інтегралі (7) до сферичних координат

$$V=8\iiint\limits_{(v_1)} r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^R r^2 dr\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta =$$

$$=8\varphi\Big|_0^{\pi/2}\frac{1}{3}r^3\Big|_0^R\cos\theta\Big|_{\pi/2}^0 = 8\frac{\pi}{2}\frac{1}{3}R^3\cdot 1=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Дістали відому формулу з геометрії для об'єму кулі.

**4.** Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=a^3x,\quad a>0.$$

Р о з в ' я з а н н я. Із заданого рівняння випливає, що тіло симетрично розміщене в чотирьох октантах, де $x\geq 0$. Тому шуканий об'єм дорівнює

$$V=4\iiint\limits_{(v_1)} dxdydz, \tag{8}$$

де $(v_1)$ — тіло, розміщене в першому октанті.

Запишемо рівняння сфери у сферичних координатах. Для цього в рівняння сфери підставимо з формул (5) значення $x, y, z$. Тоді

$$r=a\sqrt[3]{\cos\varphi\sin\theta}.$$

Перейшовши в інтегралі (8) до сферичних координат, матимемо

$$V=4\iiint\limits_{(v_1)} r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta = 4\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{a\sqrt[3]{\cos\varphi\sin\theta}} r^2 dr =$$

$$=\frac{2}{3}a^3\sin\varphi\Big|_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos 2\theta)d\theta=\frac{2}{3}a^3\left(\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi a^3}{3}.$$

## 3.17 ЗАСТОСУВАННЯ ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З МЕХАНІКИ І ФІЗИКИ

Потрійний інтеграл застосовують під час розв'язування задач з механіки і фізики. Усі механічні величини, пов'язані з розподілом маси всередині просторового тіла $(v)$, виражаються потрійним інтегралом. Зокрема, якщо $\rho(x,y,z)$ — густина розподілу маси в довільній точці $(x,y,z)\in(v)$, то маса всього тіла $(v)$ обчислюють за формулою

$$m=\iiint\limits_{(v)}\rho(x,y,z)dxdydz. \tag{1}$$



Як і для плоских фігур, для просторових тіл можна вивести формули координат центра маси:

$$\overline{x}=\frac{\iiint\limits_{(v)} x\rho(x,y,z)dxdydz}{m};\quad \overline{y}=\frac{\iiint\limits_{(v)} y\rho(x,y,z)dxdydz}{m};$$

$$\overline{z}=\frac{\iiint\limits_{(v)} z\rho(x,y,z)dxdydz}{m}, \tag{2}$$

де $m$ — маса тіла $(v)$, що виражається формулою (1).

Формули для моментів інерції відносно координатних площин мають вигляд

$$I_{yz}=\iiint\limits_{(v)} x^2\rho(x,y,z)dxdydz;\quad I_{xz}=\iiint\limits_{(v)} y^2\rho(x,y,z)dxdydz;$$

$$I_{xy}=\iiint\limits_{(v)} z^2\rho(x,y,z)dxdydz. \tag{3}$$

Аналогічно можна вивести формули для моментів інерції тіла $(v)$ відносно координатних осей

$$I_x=\iiint\limits_{(v)}\left(y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)dxdydz;$$

$$I_y=\iiint\limits_{(v)}\left(x^2+z^2\right)\rho(x,y,z)dxdydz;$$

$$I_z=\iiint\limits_{(v)}\left(x^2+y^2\right)\rho(x,y,z)dxdydz. \tag{4}$$

❑ **Приклад**

**1.** Знайти центр маси однорідного тіла $\rho(x,y,z)\equiv 1$, обмеженого сферою $x^2+y^2+z^2=4$ і параболоїдом обертання $z=\frac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)$ (рис. 100).

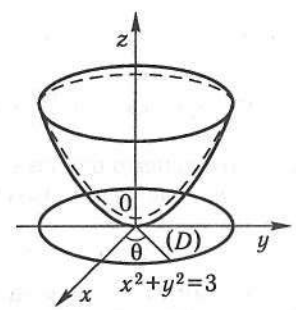

**Рис. 100**

Р о з в ' я з а н н я. Маса $m$ тіла $(v)$ чисельно дорівнює об'єму $V$:

$$V=\iiint\limits_{v} dxdydz.$$

Знайдемо проекцію лінії перетину сфери і параболоїда на площину $xOy$. Для цього в рівняння сфери підставимо значення $z^2=\frac{1}{9}\left(x^2+y^2\right)^2$.

Дістанемо

$$\left(x^2+y^2\right)^2+9\left(x^2+y^2\right)-36=0.$$

Звідси

$$x^2+y^2=3.$$

Отже, проекцією лінії перетину на площину $xOy$ є коло з центром у початку координат і радіусом $\sqrt{3}$.

Оскільки тіло $(v)$ симетрично розміщене в чотирьох октантах, то достатньо обчислити об'єм $v_1$ тієї частини, що знаходиться в першому октанті. Тоді шуканий об'єм дорівнюватиме

$$V=4\iiint\limits_{(v_1)} dxdydz.$$

Перейдемо до циліндричних координат. Маємо

$$V=4\iiint\limits_{(v_1)}\rho d\rho d\theta dz=4\int\limits_0^{\pi/2}d\theta\int\limits_0^{\sqrt{3}}\rho d\rho\int\limits_{\frac{1}{3}\rho^2}^{\sqrt{4-\rho^2}}dz=2\pi\int\limits_0^{\sqrt{3}}\rho\left(\sqrt{4-\rho^2}-\frac{1}{3}\rho^2\right)d\rho=$$

$$=2\pi\left(-\frac{1}{3}\left(4-\rho^2\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}-\left(\frac{1}{9}\rho^3\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}\right)=\frac{19}{6}\pi.$$

Оскільки розглядуване тіло розміщене симетрично відносно осі $Oz$, то центр маси лежить на цій осі. Отже, $\overline{x}=\overline{y}=0$. Знайдемо $\overline{z}$ за формулою

$$\overline{z}=\frac{\iiint\limits_{(v)} zdxdydz}{v}. \qquad (5)$$

Обчислимо інтеграл $\iiint\limits_{(v)} zdxdydz$, перейшовши до циліндричних координат:

$$\iiint\limits_{(v)} zdxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^{\sqrt{3}}\rho d\rho\int\limits_{\frac{1}{3}\rho^2}^{\sqrt{4-\rho^2}}zdz=2\pi\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{2}z^2\Bigg|_{\frac{1}{3}\rho^2}^{\sqrt{4-\rho^2}}\rho d\rho=$$

$$=\pi\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left(4-\rho^2-\frac{1}{9}\rho^4\right)\rho d\rho=\pi\left(2\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4-\frac{1}{54}\rho^6\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{13}{4}\pi.$$

Скориставшись формулою (5), знаходимо

$$\overline{z}=\frac{\frac{13}{4}\pi}{\frac{19}{6}\pi}=\frac{39}{38}.$$

Отже, точка $\left(0;0;\frac{39}{38}\right)$ є центром маси розглядуваного тіла.

Розглянемо ще одну задачу з фізики.

Нехай деяке тіло $(v)$ суцільно заповнене масою, густина якої є функцією точки:

$$\rho=\rho(x,y,z).$$

Нехай також поза цим тілом знаходиться матеріальна точка $A(\xi,\eta,\zeta)$ (рис. 101) з масою $m$.



Поставимо задачу про знаходження сили, з якою тіло $(v)$ притягує матеріальну точку $A$.

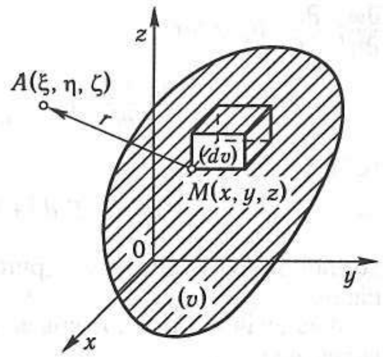


Рис. 101

Для цього візьмемо елемент об'єму тіла $(dv)$. Маса цього частинного тіла дорівнює $\rho(x,y,z)dv$, а сила, з якою це тіло притягує матеріальну точку $A$, за законом Ньютона дорівнює

$$F=\frac{\gamma m\rho(x,y,z)dv}{r^2},$$

де $\gamma$ — стала тяжіння; $r$ — відстань від точки $M$ до точки $A$:

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

Напрямок цієї сили збігається з напрямком вектора $\overline{MA}$.

Тоді проекції розглядуваної сили на координатні осі відповідно дорівнюють

$$dF_x=\frac{\gamma m(x-\xi)\rho(x,y,z)dv}{r^3};\ dF_y=\frac{\gamma m(y-\eta)\rho(x,y,z)dv}{r^3};$$

$$dF_z=\frac{\gamma m(y-\zeta)\rho(x,y,z)dv}{r^3}.$$

За означенням, проекції на координатні осі обчислюють за формулами

$$F_x=\iiint\limits_{(v)}\frac{\gamma m\rho(x,y,z)(x-\xi)}{r^3}dv;\ F_y=\iiint\limits_{(v)}\frac{\gamma m\rho(x,y,z)(x-\eta)}{r^3}dv;$$

$$F_z=\iiint\limits_{(v)}\frac{\gamma m\rho(x,y,z)(x-\zeta)}{r^3}dv. \qquad (6)$$

Потрійний інтеграл

$$w=\iiint\limits_{(v)}\frac{\gamma m\rho(x,y,z)}{r}dv \qquad (7)$$

у фізиці називають *ньютонівським потенціалом*. Можна довести, що потрійний інтеграл, будучи функцією від $\xi,\eta,\zeta$, має частинні похідні $\frac{\partial w}{\partial\xi}$,

$\frac{\partial w}{\partial \eta}$, $\frac{\partial w}{\partial \zeta}$, причому

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = F_x, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = F_y, \quad \frac{\partial w}{\partial \zeta} = F_z,$$

тобто вираз

$$F_x d\xi + F_x d\eta + F_z d\zeta$$

дорівнює диференціалу першого порядку від ньютонівського потенціалу.

Аналогічно до ньютонівського потенціалу означається *кулонівський потенціал*

$$U = \iiint\limits_{(v)} \frac{\gamma q_0 q(x, y, z)}{r} dv, \tag{8}$$

де $q_0$ — електричний заряд, розміщений в точці $A$; $q(x, y, z)$ — електричний заряд будь-якої точки $M(x, y, z) \in (v)$.

## 3.18 ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО — ГАУССА. ІНВАРІАНТНЕ ОЗНАЧЕННЯ ДИВЕРГЕНЦІЇ

Формула Остроградського — Гаусса[1] є аналогом формули Гріна. Формула Гріна зв'язує подвійний інтеграл, поширений на область $(D)$, з криволінійним інтегралом другого роду по замкненому контуру $C$, що обмежує цю область. Формула Остроградського — Гаусса встановлює залежність між потрійним інтегралом по просторовому тілу $(v)$ з поверхневим інтегралом другого роду по поверхні $(\Omega)$, що обмежує це тіло.

Нехай тіло $(v)$ зверху обмежене поверхнею $(\Omega_2)$, рівняння якої $z = f_2(x, y)$, знизу — поверхнею $(\Omega_1)$, рівняння якої $z = f_1(x, y)$, і з боків — циліндричною поверхнею $(\Omega_3)$, твірні якої паралельні осі $Oz$ (рис. 102).

Припустимо, що проекцією тіла $(v)$ на площину $xOy$ є квадровна область $(D)$.

Нехай в області $(V)$ задано деяку неперервну функцію $R(x, y, z)$, яка в цій області має неперервну частинну похідну $\frac{\partial R}{\partial z}$. Тоді існує потрійний інтеграл

$$I_1 = \iiint\limits_{(v)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dxdydz,$$

[1] *Гаусс К. Ф.* (1777—1855) — німецький математик.



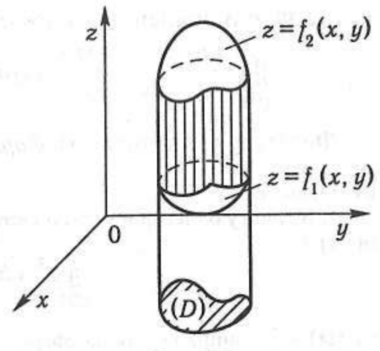


Рис. 102

або

$$I_1 = \iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz =$$

$$= \iint\limits_{(D)} R(x, y, f_2(x, y))dxdy -$$

$$- \iint\limits_{(D)} R(x, y, f_1(x, y))dxdy.$$

У правій частині цієї рівності маємо поверхневі інтеграли другого роду

$$\iint\limits_{(D)} R(x, y, f_2(x, y))dxdy = \iint\limits_{(\Omega_2)} R(x, y, z)dxdy$$

і

$$- \iint\limits_{(D)} R(x, y, f_1(x, y))dxdy = \iint\limits_{(\Omega_1)} R(x, y, z)dxdy,$$

причому перший інтеграл береться по верхній стороні поверхні $(\Omega_2)$, а другий — по нижній стороні. Отже, маємо таку рівність:

$$I_1 = \iint\limits_{(\Omega_2)} R(x, y, z)dxdy + \iint\limits_{(\Omega_1)} R(x, y, z)dxdy. \tag{1}$$

Якщо до правої частини рівності (1) додати поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_{(\Omega_2)} R(x, y, z)dxdy = 0,$$

то остаточно матимемо

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{(\Omega)} R(x, y, z)dxdy, \tag{2}$$

де в правій частині міститься поверхневий інтеграл другого роду, поширений на зовнішню сторону поверхні $(\Omega)$.

Аналогічно можна вивести формули

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint\limits_{(\Omega)} Pdydz; \tag{3}$$

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint\limits_{(\Omega)} Pdxdz. \tag{4}$$

Додавши почленно рівності (2) — (4), дістанемо

$$\iiint\limits_{(v)}\left(\frac{\partial R}{\partial z}+\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdydz = \iint\limits_{(\Omega)} Rdxdy + Pdydz + Qdzdx. \quad (5)$$

Формулу (5) називають *формулою Остроградського — Гаусса.*

❑ **Приклад**

**1.** Користуючись формулою Остроградського — Гаусса, обчислити поверхневий інтеграл

$$I = \iint\limits_{(\Omega)} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy,$$

де $(\Omega)$ — зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$P=x^3;\quad Q=y^3;\quad R=z^3.$$

Тому

$$\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2;\ \frac{\partial Q}{\partial y}=3y^2;\ \ \frac{\partial R}{\partial z}=3z^2.$$

Застосовуючи формулу (5), дістанемо

$$I = 3\iiint\limits_{(v)}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz.$$

Перейшовши в потрійному інтегралі до сферичних координат, матимемо

$$I = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\upsilon\int\limits_0^{R} r^4dr = 3\varphi\Big|_0^{2\pi}\cos\theta\Big|_\pi^0\frac{1}{5}r^5\Big|_0^R = \frac{12}{5}\pi R^5.$$

Якщо ввести до розгляду поверхневі інтеграли першого роду, то формулу (5) можна записати ще так:

$$\iiint\limits_{(v)}\left(\frac{\partial R}{\partial z}+\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdydz =$$

$$= \iint\limits_{(\Omega)}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\Omega, \quad (6)$$

де $\alpha, \beta, \gamma$ — кути, що утворює зовнішня нормаль до поверхні $(\Omega)$ з додатним напрямком координатних осей.

Припустимо, що $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ і $R(x, y, z)$ — проекції деякого вектора $\vec{a}=\vec{a}(x, y, z)$ на координатні осі:

$$\vec{a} = \vec{i}P + \vec{j}Q + \vec{k}R.$$

Скалярну величину

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{a}$$



називають *дивергенцією* векторного поля, заданого вектором $\vec{a}$. Отже, формула (6) набирає вигляду

$$\iiint\limits_{(v)}\operatorname{div}\vec{a}dxdydz = \iint\limits_{(\Omega)}\left(\vec{a}d\vec{\Omega}\right), \quad (7)$$

де

$$d\vec{\Omega} = \left(\vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma\right)d\Omega.$$

Формула (7) є векторним записом формули Остроградського — Гаусса і читається так: *інтеграл по області від дивергенції векторного поля дорівнює потоку цього поля через поверхню, що обмежує задану область.*

Формулу Остроградського — Гаусса можна також довести для більш загального виду областей $(v)$, а саме для таких, які можна розбити на скінченне число розглянутих областей.

За допомогою формули Остроградського — Гаусса можна дати інваріантне означення дивергенції (означення, яке не залежить від вибору системи координат) векторного поля. Для цього доведемо таку теорему.

**Т е о р е м а.** Нехай в області $(v)\subset \mathbf{R}_3$ визначено неперервно диференційовну вектор-функцію $\vec{a}=\vec{a}(x, y, z)$. Нехай точка $M_0(x_0, y_0, z_0)\in(v)$ і $(T)$ — область з кусково-гладкою поверхнею $(\Omega)$, яка обмежує $(T)$, і така, що

1) $M_0\in(T)$;
2) замкнена область $(T)\subset(v)$;
3) для області $(T)$ виконується формула Остроградського — Гаусса.

Нехай $\left(\Omega^+\right)$ — поверхня $(\Omega)$, зорієнтована за допомогою зовнішньої нормалі, а $\lambda(T)$ — діаметр області $(T)$. Тоді виконується рівність

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_0) = \lim_{\lambda(T)\to 0}\frac{\iint\limits_{(\Omega^+)}\left(\vec{a}d\overrightarrow{\Omega^+}\right)}{T}, \quad (8)$$

де $T$ — об'єм області (тіла) $(T)$.

Д о в е д е н н я. Скористаємося формулою (7):

$$\iiint\limits_{(v)}\operatorname{div}\vec{a}dxdydz = \iint\limits_{(\Omega^+)}\left(\vec{a}d\overrightarrow{\Omega^+}\right). \quad (9)$$

Застосуємо до потрійного інтеграла теорему про середнє значення

$$\operatorname{div}\vec{a}\left(\widetilde{M}\right)T = \iint\limits_{(\Omega^+)}\left(\vec{a}d\overrightarrow{\Omega^+}\right),$$

де $\widetilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})\in(T)$.

Звідси

$$\operatorname{div}\vec{a}\left(\widetilde{M}\right)=\frac{\iint\limits_{(\Omega^+)}\left(\vec{a}d\overline{\Omega^+}\right)}{T}. \tag{10}$$

Перейдемо в цій рівності до границі при $\lambda(T)\to 0$. Внаслідок того що вектор-функція $\vec{a}(M)$ неперервна в точці $M_0$,

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\operatorname{div}\vec{a}\left(\widetilde{M}\right)=\operatorname{div}\vec{a}(M_0). \tag{11}$$

Отже, дістали формулу (8).

Теорему доведено.

Оскільки в правій частині формули (8) величини, що містяться під знаком границі, не залежать від вибору системи координат, то й ліва частина (дивергенція в точці $M_0$) не залежить від вибору системи координат.

Нехай вектор-функція $\vec{a}=\vec{a}(M)$ задана і неперервно диференційовна в кубовній області $(v)$ з об'ємом $v$, обмеженій гладкою поверхнею $(\Omega)$. Нехай точка $M\in(v)$. Тоді відношення потоку векторного поля до об'єму області

$$\frac{\iint\limits_{(\Omega)}\vec{a}d\overline{\Omega}}{v}$$

можна розглядати як середню густину джерела (або стік), тобто як кількість рідини, що виникає (зникає) за одиницю часу в одиниці об'єму області $(v)$.

Границю середньої густини

$$\lim_{\lambda(v)\to 0}\frac{\iint\limits_{(\Omega)}\vec{a}d\vec{v}}{v}=\operatorname{div}\vec{a}(M),$$

де $\lambda(v)$ — діаметр області $(v)$, або $\operatorname{div}\vec{a}(M)$, природно назвати *густиною джерела* (стоку) в точці $M$.

У цьому й полягає фізичний зміст дивергенції векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$ у точці $M$, завдяки чому можна з'ясувати фізичний зміст дивергенції для різних векторних полів.

❑ **Приклад**

**2.** Нехай векторне поле задано вектором швидкості $\vec{a}$ нестисливої рідини, що рухається в деякій просторовій області $(v)\in\mathbf{R}_3$. Тоді, згідно з формулою (7), потрійний інтеграл

$$\iiint\limits_{(v)}\operatorname{div}\vec{a}dxdydz$$

є сумою потоків джерел, розміщених в області, а $\operatorname{div}\vec{a}$ — густина джерел, тобто їхня потужність, що припадає на одиницю об'єму.



Отже, якщо $\vec{a}$ — поле швидкостей нестисливої рідини, тобто вона не має ні стоків, ні джерел, то

$$\operatorname{div}\vec{a}=0.$$

Векторне поле, дивергенція якого в кожній точці області $(v)$ дорівнює нулю, називають *соленоїдним*, або *трубчастим*. Отже, розглянуте векторне поле є соленоїдним.

## 3.19 ФОРМУЛА СТОКСА. ІНВАРІАНТНЕ ОЗНАЧЕННЯ РОТОРА

Формула Стокса[1] встановлює зв'язок між поверхневими інтегралами другого роду і криволінійним інтегралом другого роду і є, таким чином, узагальненням формули Гріна.

Отже, нехай задано деяку гладку зорієнтовану поверхню $(\Omega)$, $z=f(x,y)$, обмежену зорієнтованим контуром $L$. Нехай також у деякій області $(G)$ тривимірного простору $\mathbf{R}_3$, що містить поверхню $(\Omega)((G)\supset(\Omega))$, визначено векторну функцію

$$\vec{a}=\vec{i}P(x,y,z)+\vec{j}Q(x,y,z)+\vec{k}R(x,y,z).$$

Припустимо, що проекції на координатні осі (функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ і $R(x,y,z)$) в області $(G)$ — неперервні й мають неперервні частинні похідні першого порядку.

Тоді виконується рівність

$$\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_{(\Omega)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+$$

$$+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx, \tag{1}$$

яку називають *формулою Стокса*. Виведемо її.

Розглянемо криволінійний інтеграл

$$I_1=\int\limits_L Pdx. \tag{2}$$

Оскільки крива $L$ лежить на поверхні $(\Omega)$, то $P(x,y,z)=P(x,y,f(x,y))$. Тому інтеграл (2) запишеться так:

$$I_1=\int\limits_L P(x,y,f(x,y))dx.$$

[1] *Стокс Дж. Г.* (1819—1903) — англійський математик і фізик.

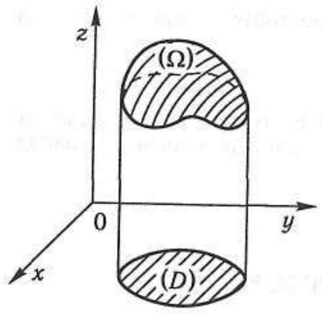

Рис. 103

Застосуємо до цього інтеграла формулу (3) п. 3.8. Дістанемо

$$I_1 = -\iint\limits_{(D)} \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \right) dxdy, \tag{3}$$

де $(D)$ — проекція області $(\Omega)$ на площину $xOy$ (рис. 103).

Із рівняння нормалі випливає, що напрямні косинуси одиничного вектора $\vec{n}$ нормалі до поверхні $(\Omega)$ задовольняють такі пропорції:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y} : (-1), \tag{4}$$

де $\alpha, \beta, \gamma$ — кути між одиничним вектором нормалі $\vec{n}$ і додатним напрямком координатних осей. З формули (4) дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Отже,

$$I_1 = -\iint\limits_{(D)} \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \right) dxdy. \tag{5}$$

Запишемо подвійний інтеграл (5) через поверхневий інтеграл першого роду. Матимемо

$$I_1 = -\iint\limits_{(\Omega)} \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\ \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \right) \cos\gamma\, d\Omega =$$

$$= -\iint\limits_{(\Omega)} \left( \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta \right) d\Omega.$$

Таким чином,

$$\int\limits_L P dx = -\iint\limits_{(\Omega)} \left( \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta \right) d\Omega. \tag{6}$$

Аналогічно

$$\int\limits_L Q dy = -\iint\limits_{(\Omega)} \left( \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha - \frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma \right) d\Omega, \tag{7}$$

$$\int\limits_L R dz = -\iint\limits_{(\Omega)} \left( \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta - \frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha \right) d\Omega. \tag{8}$$



Додаючи почленно формули (6), (7) і (8), матимемо

$$\int\limits_L \left( Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{(\Omega)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \right) \cos\beta\, d\Omega. \tag{9}$$

Перейшовши у формулі (9) від поверхневого інтеграла першого роду до поверхневого інтеграла другого роду, дістанемо формулу Стокса (1).

Формулу (9) також називають *формулою Стокса*.

Формулу Стокса (1) легко запам'ятати, звернувши увагу на те, що перший доданок під інтегралом в її правій частині збігається з виразом під знаком подвійного інтеграла у формулі Гріна. Решта доданків утворюється з першого циклічною перестановкою координат $x, y, z$ і функцій $P, Q, R$.

Із формули Стокса як окремий випадок випливає формула Гріна. Справді, якщо поверхня $(\Omega)$ є плоскою областю, що лежить у площині $xOy$, то подвійні інтеграли за $dx\,dz$, $dy\,dz$ дорівнюють нулю. Дістанемо формулу Гріна

$$\int\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_{(D)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) dxdy$$

$\left( \text{оскільки } z = 0, \text{ то } \int\limits_L Rdz = 0 \right)$.

❑ **Приклад**

**1.** Користуючись формулою Стокса, обчислити криволінійний інтеграл

$$I = \int\limits_L ydx + zdy + xdz, \quad \text{де } L \text{ — коло } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2; \\ x + y + z = 0, \end{cases}$$

рухаючись проти руху годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі $Ox$.

Розв'язання. Маємо

$$P = y, \quad Q = z, \quad R = x.$$

Тому

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 1; \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Отже,

$$\int\limits_L ydx + zdy + xdz = -\iint\limits_{(\Omega)} dydz + dzdx + dxdy =$$

$$= -\iint\limits_{(\Omega)} (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\, d\Omega.$$

За поверхню $(\Omega)$ візьмемо круг радіусом $r$, що лежить у площині $x+y+z=0$. Оскільки нормаль у цій площині утворює з віссю $Oz$ гострий кут, то напрямні косинуси обчислюють за формулами

$$\cos\alpha = \frac{-z'_x}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}};\quad \cos\beta = \frac{-z'_y}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}};\quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-z_x'^2+z_y'^2}}.$$

Знайшовши частинні похідні функції $z=-x-y$ і підставивши їх у попередні формули, дістанемо

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\sqrt{3}.$$

Отже,

$$I = -\iint\limits_{(\Omega)} \sqrt{3}d\Omega = -\sqrt{3}\pi r^2.$$

Формулу Стокса можна записати у векторній формі. Для цього введемо вектор

$$d\vec{r} = \vec{i}dx+\vec{j}dy+\vec{k}dz$$

і ротор векторного поля $\vec{a}$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Тоді формула Стокса набирає вигляду

$$\int\limits_L \vec{a}d\vec{r} = \iint\limits_{(\Omega)} \operatorname{rot}\vec{a}\vec{n}d\Omega. \qquad (10)$$

Криволінійний інтеграл у лівій частині рівності (10) називають *циркуляцією векторного поля $\vec{a}$ вздовж кривої $L$*. Якщо $\vec{a}$ є силовим полем, то роботу, виконану силою вздовж кривої $L$, обчислюють за заданим криволінійним інтегралом.

Отже, циркуляція силового поля вздовж кривої $L$ дорівнює роботі силового поля вздовж шляху $L$.

З формули (10) випливає, що циркуляція векторного поля $\vec{a}$ вздовж деякого замкненого контуру $L$ дорівнює потоку ротора заданого векторного поля через поверхню, обмежену контуром $L$.

Користуючись формулою Стокса, можна дати з точністю до знака інваріантне (що не залежить від вибору системи координат) означення ротора векторного поля.

**Теорема.** Нехай в області $(v)\subset \mathbf{R}_3$ визначено неперервну векторну функцію $\vec{a}=\vec{a}(x,y,z)$, яка має в цій області неперервні частинні похідні першого порядку. Нехай також: 1) точка $M_0(x_0,y_0,z_0)\in(v)$; 2) $\vec{v}$ — довільний фіксований одиничний вектор; 3) П — площина, перпендикулярна до вектора $\vec{v}$ і проходить через точку $M_0$; 4) $(S)$ — обмежена область у площині П із кусково-гладкою межею $\gamma$; 5) $\lambda(S)$ — діаметр області $(S)$; 6) напрямок на контурі $\gamma$ узгоджено з орієнтацією вектора $\vec{v}$; 7) $M_0\in(S)\subset(v)$.

Тоді

$$\operatorname{rot}_v \vec{a}(M_0) = \lim_{\lambda(S)\to 0}\frac{\int\limits_\gamma \vec{a}d\vec{r}}{S}, \qquad (11)$$

де $\operatorname{rot}_v \vec{a}(M_0)$ — проекція вектора $\operatorname{rot}\vec{a}(M_0)$ на вектор $\vec{v}$; $S$ — площа області $(S)$.

**Доведення.** Згідно з формулою Стокса (10), маємо таку рівність:

$$\int\limits_\gamma \vec{a}d\vec{r} = \iint\limits_{(S)} \operatorname{rot}_v \vec{a}dS. \qquad (12)$$

Застосуємо до подвійного інтеграла в правій частині останньої рівності теорему про середнє значення

$$\iint\limits_{(S)} \operatorname{rot}_v \vec{a}dD = \operatorname{rot}_v \vec{a}(M)S,$$

де точка $M\in(S)$.

Отже, на основі виразу (12) маємо таку рівність:

$$\operatorname{rot}_v \vec{a}(M) = \frac{\int\limits_\gamma \vec{a}d\vec{r}}{S}.$$

Перейшовши в цій рівності до границі при $\lambda(S)\to 0$, матимемо формулу (11).

Теорему доведено.

Оскільки величини, що знаходяться під знаком границі у формулі (11), не залежать від вибору системи координат, то й проекція вектора на довільно вибраний вектор $\vec{v}$ не залежить від системи координат. Тоді й ротор не залежить від вибору системи координат.

Проте якщо напрямок обходу на контурі $\gamma$ змінити на протилежний, то й криволінійний інтеграл $\int\limits_\gamma \vec{a}d\vec{r}$ змінить знак на протилежний. Тому формула (11) задає проекцію вектора, а отже, й вектор $\operatorname{rot}\vec{a}(M_0)$ в точці $M_0$ з точністю до знака.

❑ **Приклад**

**2.** Розглянемо ротор поля лінійних швидкостей при обертанні навколо деякої осі.

Нехай рідина як тверде тіло обертається навколо осі з одиничним напрямним вектором $\vec{l}$ і кутовою швидкістю $\omega$. Знайдемо ротор лінійної швидкості $\vec{v}$ такого потоку в точці $M$. Помістимо початок координат в деяку точку $O$ на осі обертання і припустимо, що $\overline{OM}=\vec{r}$ (рис. 104).

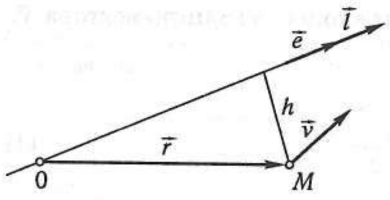


**Рис. 104**

Тоді лінійна швидкість в точці $M$ напрямлена перпендикулярно до площини, що містить вектори $\vec{r}$ і $\vec{l}$, і дорівнює

$$|\vec{v}| = h\omega.$$

Напрямок вектора $\vec{v}$ збігається з напрямком вектора $\left[\overline{\omega l} \cdot \vec{r}\right]$ — векторного добутку векторів $\overline{\omega l}$ і $\vec{r}$.

Позначимо напрямні косинуси вектора $\vec{l}$ через $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, а радіус-вектор точки $M$ — через

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z.$$

Тоді

$$\vec{v} = \left[\overline{\omega l}\,\vec{r}\right] = \omega\left[\vec{l}\,\vec{r}\right] = \omega\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{i}\,(z\omega\cos\beta - y\omega\cos\gamma) +$$

$$+\vec{j}\,(x\omega\cos\gamma - z\omega\cos\alpha) + \vec{k}\,(y\omega\cos\alpha - x\omega\cos\beta).$$

Уведемо позначення:

$$P(x, y, z) = z\omega\cos\beta - y\omega\cos\gamma;$$

$$Q(x, y, z) = x\omega\cos\gamma - z\omega\cos\alpha;$$

$$R(x, y, z) = y\omega\cos\alpha - x\omega\cos\beta.$$

Ротор векторного поля $\vec{v}(M)$

$$\operatorname{rot}\vec{v}(M) = \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$

$$= 2\omega\cos\alpha\vec{i} + 2\omega\cos\beta\vec{j} + 2\omega\cos\gamma\vec{k} = 2\omega\vec{l}.$$

Таким чином, напрямок ротора поля лінійних швидкостей в потоці рідини, що обертається навколо деякої осі $l$, збігається з напрямком цієї осі. Величина ротора дорівнює подвійній кутовій швидкості.

Отже, ротор поля лінійних швидкостей у потоці рідини характеризує миттєву кутову швидкість частинок рідини в точці $M(x, y, z)$.

# Елементи теорії функцій комплексної змінної

РОЗДІЛ

4

## 4.1 КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ДІЇ НАД НИМИ

У математиці операції поділяють на два види: *прямі й обернені*. Обернені операції приводять до появи нових чисел, іноді навіть нового класу функцій. Так, операція віднімання над натуральними числами, яка є оберненою до дії додавання, зумовлює введення від'ємних чисел і числа нуль. Обернена до операції множення операція ділення над цілими числами приводить до появи дробових чисел. Операція інтегрування, що є оберненою операцією до операції диференціювання, виводить з класу елементарних функцій.

Комплексні числа виникають при розв'язуванні алгебраїчних рівнянь. Ці задачі зумовлюють виконання операції добування кореня (вона є оберненою до операції піднесення до степеня) над дійсними числами. В результаті з'являються числа вигляду $b\sqrt{-1}$, де $b$ — дійсне число, або більш загального вигляду $a + b\sqrt{-1}$, де $a$ — дійсне число. Ввівши позначення

$$\sqrt{-1} = i,$$

дістанемо число

$$\alpha = a + ib, \tag{1}$$

або

$$\alpha = a + bi.$$

Числа вигляду (1), де $a, b$ — дійсні числа, називають *комплексними*. При цьому $a$ називають дійсною частиною комплексного числа, $bi$ — уявною частиною, $i$ — уявною одиницею, що задовольняє рівність

$$i^2 = -1,$$

$b$ — коефіцієнтом при уявній частині.

Усі комплексні числа утворюють множину комплексних чисел.

Якщо $b = 0$, то комплексне число $\alpha$ перетворюється на дійсне число $a$. Отже, множина дійсних чисел міститься у множині комплексних чисел. Якщо $b \neq 0$, то комплексне число (1) називають *уявним*. Якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, то комплексне число (1) називають *суто уявним*.

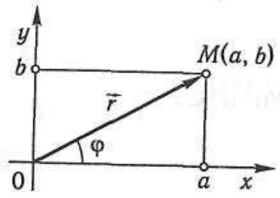


**Рис. 105**

Число $a$ називають, як уже зазначалося, *дійсною частиною комплексного числа* $\alpha$, а $b$ — *уявною частиною* і позначають

$$a = \mathrm{Re}\alpha, \quad ib = \mathrm{Im}\alpha$$

(Re, Im — перші дві букви від лат. *realis* — дійсний, *imaginarius* — уявний).

Як відомо, кожному дійсному числу $a$ на числовій осі відповідає одна точка, і, навпаки, кожній точці числової осі у множині дійсних чисел відповідає одне число.

Так само кожному комплексному числу $\alpha = a + ib$ на площині $xOy$ відповідає одна точка $M(a, b)$ з координатами $a$ і $b$, і кожній точці площини $xOy$ у множині комплексних чисел відповідає одне число.

Щоб знайти на площині $xOy$ точку, яка відповідає комплексному числу $\alpha = a + ib$, потрібно на осі $Ox$ знайти зображення числа $a$, а на осі $Oy$ — зображення числа $b$. З точок $a$ і $b$ поставити перпендикуляри. Точка $M(a, b)$ перетину цих перпендикулярів і є зображенням комплексного числа $a + ib$ (рис. 105). Точку $M(a, b)$ називають *зображенням комплексного числа* $a + ib$.

Число $a + ib$ називають *аффіксом* точки $M(a, b)$ (від лат. *affixus* — прикріплений до чого-небудь).

Площину $xOy$ (надалі позначатимемо $(Z)$), точки якої є зображенням множини комплексних чисел, називають *комплексною числовою*, або *комплексною, площиною*. При цьому вісь $Ox$ називають *дійсною віссю*, а вісь $Oy$ — *уявною віссю комплексної площини*.

Початок координат $O(0, 0)$, що відповідає числу 0, називають *нульовою точкою*.

Оскільки між множиною комплексних чисел і точками комплексної площини існує взаємно однозначна відповідність, то надалі замість слова «число» казатимемо «точка» і навпаки.

Комплексне число $\alpha = a + ib$ можна також зображати вектором, початок якого знаходиться в точці $O(0, 0)$, а кінець — в точці $M(a, b)$ (рис. 105).

Тоді $a$ і $b$ є проекціями цього вектора відповідно на дійсну та уявну вісь і

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi. \tag{2}$$

При цьому число $r$, що дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{OM}$, називають *модулем комплексного числа* $\alpha$ і позначають $r = |\alpha|$.

Кут $\varphi$, на який потрібно повернути навколо нульової точки додатну піввісь $Ox$ до злиття з вектором $\overrightarrow{OM}$, називають *аргументом* комплексного числа $a + ib$ і позначають $\varphi = \mathrm{Arg}\alpha$.

Кут при цьому вважають додатним, якщо обертання додатної частини осі $Ox$ навколо нульової точки здійснюється проти руху годинникової стрілки, і від'ємним, якщо це обертання відбувається за рухом годинникової стрілки.



Тоді з рівності (2) дістанемо

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{3}$$

З формули (3) випливає, що для кожного комплексного числа $\alpha$ його модуль визначається однозначно, причому $0 \le |\alpha| < +\infty$. Зазначимо, що тільки комплексне число нуль має модуль, який дорівнює нулю. Для решти комплексних чисел $|\alpha| > 0$. Нуль єдине комплексне число, аргумент якого не визначений (не має смислу). Решта комплексних чисел має аргумент, причому виконуються нерівності $-\infty < \mathrm{Arg}\,\alpha < +\infty$. Проте аргумент комплексного числа $\alpha = a + ib$ за числами $a$ і $b$ визначають неоднозначно. Якщо $\varphi_0$ — одне значення аргументу, то всі інші його значення задають виразом $\varphi_0 + 2k\pi$, де $k \ne 0$ — довільне ціле число.

Значення аргументу $\varphi$ комплексного числа $\alpha = a + ib$, що належить півінтервалу $\varphi \in (-\pi; \pi]$, називають *головним значенням аргументу* комплексного числа $\alpha$ і позначають $\arg\alpha$:

$$-\pi < \arg\alpha \le \pi.$$

Тоді, очевидно, виконується рівність

$$\mathrm{Arg}\,\alpha = \arg\alpha + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \tag{4}$$

❑ **Приклад**

**1.** Виразити головне значення аргументу комплексного числа $\alpha$ через значення $\mathrm{arctg}\dfrac{b}{a}$.

Р о з в ' я з а н н я. Розглянемо такі випадки.

I. $a > 0$. Точка $\alpha$ лежить у першій або четвертій чверті комплексної площини. Отже,

$$-\frac{\pi}{2} < \arg\alpha < \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

У цьому випадку $\mathrm{tg}(\arg\alpha) = \dfrac{b}{a}$, а

$$\arg\alpha = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}. \tag{6}$$

II. $a < 0, b \ge 0$. Точка $\alpha = a + ib$ лежить у другій чверті комплексної площини. Тому

$$\arg\alpha = \mathrm{arctg}\frac{b}{a} + \pi. \tag{7}$$

III. $a < 0, b \le 0$. Точка лежить у третій чверті комплексної площини. Отже,

$$\arg\alpha = \mathrm{arctg}\frac{b}{a} - \pi. \tag{8}$$

IV. $a = 0$. Тоді точка $\alpha = ib$ при $b > 0$ лежить на верхній півосі $Oy$ і

$$\arg\alpha = \frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

Якщо $b<0$, то точка $\alpha = ib$ лежить на нижній півосі $Oy$ і

$$\arg\alpha = -\frac{\pi}{2}. \qquad (10)$$

Формулами (6)—(10) користуються при знаходженні головного значення аргументу комплексного числа $\alpha$. Так, нехай $\alpha = -1-i$. Тут $a=-1<0$, $b=-1<0$. Отже, маємо випадок III. Тоді

$$\arg\alpha = \operatorname{arctg}\frac{-1}{-1} - \pi = \operatorname{arctg}1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi.$$

Нехай задане комплексне число $\alpha = a+ib$. Підставимо з рівності (2) значення $a$ і $b$. Дістанемо такий запис комплексного числа:

$$\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (11)$$

Вираз у правій частині рівності (11) називають *тригонометричною формою комплексного числа* $\alpha$. Форму запису комплексного числа $\alpha$ у вигляді $a+ib$ називають його *алгебраїчною формою*.

Комплексне число $a-ib$ називають *спряженим* до числа $a+ib$. У свою чергу, комплексне число $a+ib$ є спряженим до числа $a-ib$. Якщо $\alpha = a+ib$ — комплексне число, то спряжене число $a-ib$ позначають $\bar{\alpha} = a-ib$.

Комплексні числа $a+ib$ та $-a-ib$ називають *протилежними* або *симетричними*.

Два комплексні числа $\alpha_1 = a_1+ib_1, \alpha_2 = a_2+ib_2$ називають *рівними*, якщо рівні їхні дійсні та коефіцієнти при уявних частинах, тобто

$$a_1 = a_2, b_1 = b_2.$$

Звідси випливає, що комплексне число $a+ib$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його дійсна та коефіцієнти при уявній частині дорівнюють нулю: $a=0$; $b=0$.

Над комплексними числами виконують операції додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня.

*Сумою* двох комплексних чисел $\alpha_1 = a_1+ib_1$ і $\alpha_2 = a_2+ib_2$ називають комплексне число

$$\alpha = (a_1+a_2)+i(b_1+b_2) \qquad (12)$$

і записують $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$.

*Добутком* двох комплексних чисел $\alpha_1 = a_1+ib_1$ і $\alpha_2 = a_2+ib_2$ називають комплексне число

$$\alpha = (a_1a_2 - b_1b_2)+i(b_1a_2+b_2a_1) \qquad (13)$$

і записують

$$\alpha = \alpha_1\alpha_2.$$



❑ **Приклади**

**2.** Знайти суму й добуток комплексних чисел

$$\alpha_1 = 1+i \quad \text{і} \quad \alpha_2 = 2+3i.$$

Р о з в ' я з а н н я. За формулами (12) і (13) знаходимо

$$\alpha_1+\alpha_2 = (1+2)+(1+3)i = 3+4i;$$

$$\alpha_1\alpha_2 = (1\cdot2-1\cdot3)+i(1\cdot3+2\cdot1) = -1+5i.$$

**3.** Знайти суму й добуток двох спряжених комплексних чисел

$$\alpha = a+ib \quad \text{і} \quad \alpha = \bar{\alpha} = a-ib.$$

Р о з в ' я з а н н я. Користуючись формулами (12) і (13), знаходимо

$$\alpha+\bar{\alpha} = (a+a)+i(b-b) = 2a = 2\operatorname{Re}\alpha;$$

$$\alpha\bar{\alpha} = aa-b(-b)+i(a(-b)+ab) = a^2+b^2 = |\alpha|^2.$$

З останньої рівності дістанемо

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}}.$$

*Різницею* $\alpha_1-\alpha_2$ двох комплексних чисел називають комплексне число $\alpha$, що є розв'язком рівняння

$$\alpha_1 = \alpha+\alpha_2.$$

Можна довести, що існує єдиний розв'язок цього рівняння, який дорівнює комплексному числу

$$\alpha = (\alpha_1-\alpha_2)+i(b_1-b_2).$$

Отже,

$$\alpha_1-\alpha_2 = (\alpha_1-\alpha_2)+i(b_1-b_2).$$

❑ **Приклад**

**4.** Знайти різницю $\alpha_1-\alpha_2$ чисел $\alpha_1 = 1+i$, $\alpha_2 = 2+2i$.

Р о з в ' я з а н н я:

$$\alpha_1-\alpha_2 = 1+i-(2+2i) = -1-i.$$

*Часткою* $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ двох комплексних чисел $\alpha_1 = a_1+ib_1, \alpha_2 = a_2+ib_2 \neq 0$ називають число $\alpha$, що є розв'язком рівняння

$$\alpha_1 = \alpha\alpha_2. \qquad (14)$$

Доведемо, що цей розв'язок існує, єдиний і дорівнює комплексному числу

$$\alpha = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}. \qquad (15)$$

Нехай число

$$\alpha = a+ib. \qquad (16)$$

Підставляючи його у рівність (14), дістанемо

$$a_1 + ib_1 = (a+ib)(a_2+ib_2) = (aa_2 - bb_2) + i(ab_2 + ba_2).$$

Прирівнюючи дійсні частини та коефіцієнти при $i$, матимемо таку систему рівнянь відносно невідомих $a$ і $b$:

$$\begin{cases} aa_2 - bb_2 = a_1; \\ ab_2 + ba_2 = b_1. \end{cases} \tag{17}$$

Оскільки детермінант цієї системи $\Delta = a_2^2 + b_2^2 = |\alpha|^2$ відмінний від нуля, то знаходимо єдину систему чисел

$$a = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad b = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2},$$

що є розв'язком системи (17). Підставляючи знайдені числа у формулу (16), дістанемо число (15).

❑ **Приклад**

**5.** Знайти частку $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ чисел, $\alpha_1 = 1+2i, \alpha_2 = 1+i.$

Розв'язання:

$$\frac{1+2i}{1+i} = \frac{1\cdot1+2\cdot1}{1^2+1^2} + i\frac{2\cdot1-1\cdot1}{1^2+1^2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Операції додавання і множення кількох комплексних чисел виконують за тими самими правилами, що й двох чисел.

Можна довести, що для операцій додавання, множення, віднімання комплексних чисел виконуються такі властивості.

**1°.** $(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)$ — асоціативна (сполучна) властивість додавання;

**2°.** $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_1$ — комутативна (переставна) властивість додавання;

**3°.** $\alpha_1\alpha_2 = \alpha_2\alpha_1$ — комутативна (переставна) властивість множення;

**4°.** $(\alpha_1\alpha_2)\alpha_3 = \alpha_1(\alpha_2\alpha_3)$ — асоціативна (сполучна) властивість множення;

**5°.** $(\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_3 = \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$ — дистрибутивна (розподільна) властивість множення відносно додавання;

**6°.** $(\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_3 = \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3$ — дистрибутивна (розподільна) властивість множення відносно віднімання.

Доведемо, наприклад, властивість 5°. Нехай $\alpha_1 = a_1 + ib_1$, $\alpha_2 = a_2 + ib_2$, $\alpha_3 = a_3 + ib_3$. Тоді

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_3 = ((a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2))(a_3 + ib_3) =$$
$$= (a_1a_3 + a_2a_3 - b_1b_3 - b_2b_3) + i(a_1b_3 + a_2b_3 + b_1a_3 + b_2a_3). \tag{18}$$



Знайдемо

$$\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = (a_1 + ib_1)(a_3 + ib_3) + (a_2 + ib_2)(a_3 + ib_3) =$$
$$= (a_1a_3 + a_2a_3 - b_1b_3 - b_2b_3) + i(a_1b_3 + a_2b_3 + b_1a_3 + b_2a_3). \tag{19}$$

У рівностях (18) і (19) праві частини рівні. Отже, й ліві частини рівні.

Із формул для суми, добутку, різниці й частки двох комплексних чисел випливає, що дії над комплексними числами, записаними в алгебраїчній формі, виконуються за загальними алгебраїчними правилами раціональних операцій над буквеними виразами із заміною $i^2$ на $-1$.

Запишемо наведені операції для комплексних чисел у тригонометричній формі.

Нехай

$$\alpha_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1); \quad \alpha_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Тоді

$$\alpha_1 \pm \alpha_2 = (r_1\cos\varphi_1 \pm r_2\cos\varphi_2) + i(r_1\sin\varphi_1 \pm r_2\sin\varphi_2).$$

Звідси дістанемо таку рівність для модуля числа $\alpha_1 \pm \alpha_2$:

$$|\alpha_1 \pm \alpha_2| = \sqrt{(r_1\cos\varphi_1 \pm r_2\cos\varphi_2)^2 + (r_1\sin\varphi_1 \pm r_2\sin\varphi_2)^2} =$$
$$= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 \pm 2r_1r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Отже, для модуля суми маємо

$$|\alpha_1 + \alpha_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \le \sqrt{(r_1 + r_2)^2} = r_1 + r_2 = |\alpha_1| + |\alpha_2|, \tag{20}$$

тобто модуль суми двох комплексних чисел не більший за суму модулів цих чисел.

Аналогічно доводиться нерівність

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \ge \big||a_1| - |a_2|\big|, \tag{21}$$

тобто модуль різниці не менший за модуль різниці модулів зменшуваного і від'ємника.

Розглянемо дію множення

$$\alpha_1\alpha_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Звідси модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку модулів цих чисел

$$|\alpha_1\alpha_2| = |\alpha_1||\alpha_2|,$$

а аргумент добутку дорівнює сумі аргументів цих чисел

$$\operatorname{Arg}(\alpha_1\alpha_2) = \operatorname{Arg}\alpha_1 + \operatorname{Arg}\alpha_2. \tag{22}$$

Для добутку трьох комплексних чисел маємо

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = r_1r_2r_3\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)(\cos\varphi_3+i\sin\varphi_3)=$$
$$=r_1r_2r_3\left((\cos(\varphi_1+\varphi_2)\cos\varphi_3-\sin(\varphi_1+\varphi_2)\sin\varphi_3)+\right.$$
$$\left.+i(\cos(\varphi_1+\varphi_2)\sin\varphi_3+\sin(\varphi_1+\varphi_2)\cos\varphi_3)\right)=$$
$$=r_1r_2r_3\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)\right).$$

Тоді за методом індукції можна довести формулу

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = r_1r_2\ldots r_n\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)\right). \qquad (23)$$

Звідси дістанемо такі рівності:

$$|\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n| = |\alpha_1||\alpha_2|\ldots|\alpha_n|;$$
$$\operatorname{Arg}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n) = \operatorname{Arg}\alpha_1+\operatorname{Arg}\alpha_2+\ldots+\operatorname{Arg}\alpha_n,$$

тобто модуль добутку $n$ комплексних чисел дорівнює добутку $n$ модулів цих чисел; аргумент добутку $n$ комплексних чисел дорівнює сумі $n$ аргументів цих чисел.

Нехай у рівності (23) всі комплексні числа рівні між собою:

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Тоді дістанемо таку формулу:

$$\alpha^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (24)$$

Формулу (24) називають *формулою Муавра*[1].

Формула Муавра дає просте правило знаходження модуля й аргументу комплексного числа $\alpha^n$, що є $n$-м степенем числа $\alpha$:

$$|\alpha^n| = |\alpha|^n, \quad \operatorname{Arg}\alpha^n = n\operatorname{Arg}\alpha. \qquad (25)$$

Розглянемо операцію ділення двох комплексних чисел, записаних у тригонометричній формі:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}\left((\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right)=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right).$$

[1] *Муавр А.* (1667—1754) — англійський математик.



Отже,

$$\left|\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right|=\frac{|\alpha_1|}{|\alpha_2|}, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)=\operatorname{Arg}\alpha_1-\operatorname{Arg}\alpha_2,$$

тобто модуль частки дорівнює частці модулів діленого й дільника, а аргумент частки — різниці аргументів діленого й дільника.

❑ **Приклад**

5. Знайти модуль і аргумент частки $\frac{1+i}{1-i}$.

Розв'язання:

$$\left|\frac{1+i}{1-i}\right|=\frac{|1+i|}{|1-i|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1,$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)=\operatorname{Arg}(1+i)-\operatorname{Arg}(1-i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi-\left(-\frac{\pi}{4}+2m\pi\right)=\frac{\pi}{2}+2r\pi,$$

$$r=k-m=0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

Користуючись формулою Муавра, можна означити операцію добування кореня $n$-го степеня з комплексного числа $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, а саме: $\sqrt[n]{\alpha}$ називатимемо комплексне число $\sqrt[n]{\alpha}=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, $n$-й степінь якого дорівнює $\alpha$.

Отже, згідно з наведеним означенням, маємо таку рівність:

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

Прирівняємо дійсні й уявні частини:

$$r\cos\varphi=\rho^n\cos n\theta; \quad r\sin\varphi=\rho^n\sin n\theta. \qquad (26)$$

Піднісши обидві частини в кожній рівності (26) до квадрата і почленно додавши їх, дістанемо

$$\rho^{2n}=r^2, \qquad (27)$$

звідси $\rho^n=r$, або $\rho=\sqrt[n]{r}$.

Скоротивши рівності (26) на рівні величини $\rho^n=r$, матимемо

$$\cos\varphi=\cos n\theta; \quad \sin\varphi=\sin n\theta,$$

звідси

$$n\theta=\varphi+2k\pi,$$

або

$$\theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}, \quad k=0,1,\ldots,n-1. \qquad (28)$$

Отже, формула для добування кореня степеня $n$ з комплексного числа має вигляд

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

$$k=0,1,\dots,n-1. \tag{29}$$

Якщо $k=n,n+1,\dots,-1,-2,\dots$, то комплексні числа, що є значеннями кореня, повторюватимуться.

❑ **Приклад**
**6.** Обчислити

$$\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right).$$

Р о з в ' я з а н н я. Беручи $k=0,1,2,$ дістанемо такі три значення кореня:

$$\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right);\quad \sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{2}\left(-\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right).$$

## 4.2
## ФУНКЦІЯ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. ГРАНИЦЯ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ

Розглянемо в комплексній площині $xOy$ деяку множину $E$ точок $z=x+iy$. Множина $E$ може містити окремі точки (бути певною лінією), може бути областю або замкненою областю і навіть збігатися з усією комплексною площиною.

Нехай $E$ — множина комплексних чисел $z=x+iy$, що задовольняють рівняння

$$|z|=R,\quad R>0.$$

Підставляючи сюди значення $z$, матимемо таке рівняння:

$$x^2+y^2=R^2.$$

Отже, тут $E$ — множина всіх точок, що лежать на колі, центр якого знаходиться в початку координат, а радіус дорівнює $R$.

Нехай $E$ — множина точок $z$, які задовольняють нерівність

$$\operatorname{Re} z>0,\ \text{ або }\ x>0.$$

Отже, це всі точки комплексної площини, які знаходяться в першій і четвертій чвертях (права півплощина, крім осі $Oy$). У цьому випадку $E$ — відкрита область.



❑ **Приклад**
1. Нехай $E$ — множина точок, що задовольняють нерівність

$$|z-c|<R, \tag{1}$$

де $c=a+ib$ — стале комплексне число.

Підставляючи в нерівність (1) значення точок $z$ і $c$, дістанемо

$$(x-a)^2+(y-b)^2<R^2.$$

Тут $E$ — область, що є множиною всіх точок відкритого круга з центром у точці $C(a,b)$ і радіусом $R$.

Круг

$$|z-c|<\varepsilon$$

з центром у точці $c$ і радіусом $\varepsilon>0$ називають $\varepsilon$-околом точки $c$. Якщо число $\varepsilon$ досить мале, то окіл називають *малим*.

***Означення 1.*** Якщо кожному комплексному числу $z=x+iy\in E$ за певним правилом (законом) відповідає одне або кілька комплексних чисел $w=u+iv$ з деякої множини $G$, то кажуть, що на множині $E$ визначено функцію $w$, і пишуть

$$w=f(z). \tag{2}$$

Множину $E$ при цьому називають *областю визначення* або *областю існування функції, $z$ — незалежною змінною* або *аргументом, $w$ — залежною змінною* або *функцією, $G$ — множиною значень функції.*

Якщо кожному значенню $z\in E$ відповідає тільки одне значення $w\in G$, то функцію (2) називають *однозначною.* У протилежному випадку — *багатозначною.* Надалі розглядатимемо однозначні функції.

Наприклад, функції $w=|z|, w=\bar{z}, w=z^2$ — однозначні, областю існування яких є вся комплексна площина.

Задання комплексної функції (2) рівносильне заданню системи двох дійсних функцій двох аргументів:

$$\begin{cases} u=u(x,y);\\ v=v(x,y).\end{cases} \tag{3}$$

Так, у попередніх прикладах

$$\begin{cases} u(x,y)=x^2+y^2,\\ v(x,y)=0;\end{cases}\quad \begin{cases} u(x,y)=x,\\ v(x,y)=-y;\end{cases}\quad \begin{cases} u(x,y)=x^2-y^2\\ v(x,y)=2xy.\end{cases}$$

Оскільки при заданні функції комплексної змінної $w=f(z)$ фігурують чотири величини $x,y,u,v$, то не існує простого і зручного способу геометричного її зображення (це вимагало б чотиривимірного простору).

При геометричному зображенні функції $w=f(z)$ користуються двома комплексними площинами. Значення аргументу $z$ зображають

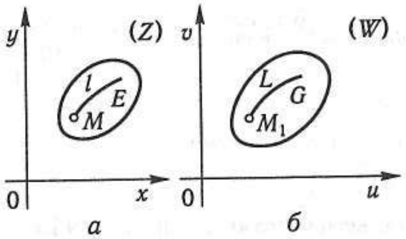


**Рис. 106**

точками комплексної площини $(Z)$ (рис. 106, *а*), а значення функції — точками другої комплексної площини $(W)$ (рис. 106, *б*).

При цьому кожній точці $z \in E$ у площині $(Z)$ відповідає точка $w \in G$, наприклад, точці $M \in E$ відповідає точка $M_1 \in G$, лінії $l$ на площині $(Z)$ відповідає лінія $L$ у площині $(W)$.

Тому однозначну комплексну функцію $w = f(z)$ можна розглядати як таку, що здійснює відображення (перетворення) множини точок $E$ комплексної площини $(Z)$ на множину точок $G$ комплексної площини $(W)$.

❑ **Приклад**

2. На яку лінію площини $(W)$ відобразиться коло $|z| = 1$ за допомогою функції $w = \sqrt{z+1}$?

Р о з в ' я з а н н я. Задану функцію запишемо у вигляді

$$w^2 - 1 = z.$$

Підставимо сюди значення $w = u + iv,\ z = x + iy$. Тоді

$$\left(u^2 - v^2 - 1\right) + i \cdot 2uv = x + iy.$$

Прирівнюючи дійсну й уявну частини, матимемо

$$\begin{cases} u^2 - v^2 - 1 = x; \\ 2uv = y. \end{cases}$$

Піднісши обидві частини цих рівностей до квадрата і скориставшись тим, що $x^2 + y^2 = 1$, дістанемо

$$\left(u^2 - v^2 - 1\right)^2 + 4u^2v^2 = 1. \tag{4}$$

Запишемо рівняння кривої (4) в полярних координатах, поклавши

$$u = \rho\cos\theta; \quad v = \rho\sin\theta.$$

Знаходимо

$$\rho^2 = 2\cos 2\theta. \tag{5}$$

Це рівняння лемніскати.

Отже, коло $|z| = 1$ у площині $(Z)$ за допомогою функції $w = \sqrt{z+1}$ відображається в лемніскату (4) в площині $(W)$.

Надалі розглядатимемо такі множини $E$, які є областями або замкненими областями.

Нехай функцію $w = f(z)$ визначено в усіх точках області $E$, крім, можливо, внутрішньої точки $z_0 \in E$.



***Означення 2.*** Комплексне число $c = a + ib$ називають границею функції $w = f(z)$ в точці $z_0 = x_0 + iy_0$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх $z \in E$, які задовольняють нерівність

$$0 < |z - z_0| < \delta, \tag{6}$$

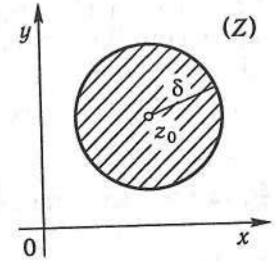


**Рис. 107**

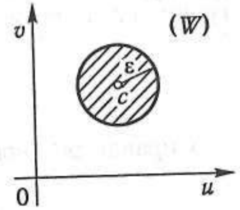


**Рис. 108**

виконується нерівність

$$|f(z) - c| < \varepsilon. \tag{7}$$

Якщо $c$ — границя функції $w = f(z)$ у точці $z_0$, то

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = c, \quad \text{або} \quad f(z) \to c\,(z \to z_0).$$

Якщо $c$ — границя функції $f(z)$ в точці $z_0$, то з геометричної точки зору це означає, що для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$ таке, що для всіх точок $z \in E,\ z \neq z_0$, які містяться в крузі $|z - z_0| < \delta$, точки $w = f(z)$ знаходяться в крузі $|w - c| < \varepsilon$ (рис. 107, 108).

❑ **Приклад**

3. Довести, що границя сталої функції $w = c$ дорівнює числу $c$ у будь-якій точці $z_0 \in E$.

Р о з в ' я з а н н я. Очевидно, для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ виконується нерівність $|f(z) - c| = 0 < \varepsilon$. Тому за число $\delta$ можна брати будь-яке дійсне додатне число.

**Т е о р е м а 1.** Для того щоб функція $w = f(z)$ в точці $z_0 \in E$ мала границю $c = a + ib$, необхідно й достатньо, щоб дійсні функції $u = u(x, y)$ і $v = v(x, y)$ у точці $(x_0, y_0)$ мали відповідно границі $a$ і $b$.

Д о в е д е н н я н е о б х і д н о с т і. Нехай функція $w = f(z)$ у точці $z_0 \in E$ має границю $c = a + ib$. Тоді з нерівностей

$$|x - x_0| \le |z - z_0| < \delta, \tag{8}$$

$$|y - y_0| \le |z - z_0| < \delta \tag{9}$$

випливають нерівності:

$$|u(x, y) - a| \le |f(z) - c| < \varepsilon, \tag{10}$$

$$|v(x, y) - b| \le |f(z) - c| < \varepsilon \tag{11}$$

нерівності (8) — (11) означають, що

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = a; \tag{12}$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = b. \tag{13}$$

Доведення достатності. Нехай функції $u(x, y), v(x, y)$ в точці $(x_0, y_0)$ мають границі (12), (13). Доведемо, що в точці $z_0 = x_0 + iy_0$ існує границя функції $w = f(z)$:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = c = a + ib.$$

Справді, для числа $\frac{\varepsilon}{2}$, де $\varepsilon > 0$, існує таке число $\delta_1 > 0$, що з нерівностей

$$|x - x_1| < \delta_1, \quad |y - y_0| < \delta_1 \quad x \neq x_0, \quad y \neq y_0, \tag{14}$$

випливає нерівність

$$|u(x, y) - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{15}$$

Аналогічно для цього самого числа $\frac{\varepsilon}{2}$ існує таке число $\delta_2 > 0$, що з нерівностей

$$|x - x_0| < \delta_2, \quad |y - y_0| < \delta_2 \quad x \neq x_0, \quad y \neq y_0, \tag{16}$$

випливає нерівність

$$|v(x, y) - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{17}$$

Позначимо $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тоді, згідно з нерівністю

$$|z - z_0| < \delta, \quad z \neq z_0,$$

маємо

$$|f(z) - c| \leq |u(x, y) - a| + |v(x, y) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорему доведено.

Користуючись теоремою 1, можна довести таку теорему.

**Теорема 2.** Якщо функції $f(z)$ і $\varphi(z)$ в точці $z_0$ мають границі, то функції $f(z) \pm \varphi(z)$ і $f(z)\varphi(z)$ мають у цій точці границі, причому

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) \pm \varphi(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) \pm \lim_{z \to z_0} \varphi(z),$$

$$\lim_{z \to z_0} (f(z)\varphi(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) \lim_{z \to z_0} \varphi(z).$$

Якщо, крім того, $\lim_{z \to z_0} \varphi(z) \neq 0$, то існує границя функції $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$, причому

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{\lim_{z \to z_0} f(z)}{\lim_{z \to z_0} \varphi(z)}.$$



❑ **Приклад**

4. Обчислити $\lim_{z \to i} \frac{z^3 - i^3}{z^2 - i^2}$.

Розв'язання. Тут безпосередньо застосувати попередню теорему не можна, оскільки $\lim_{z \to i} (z^2 - i^2) = 0$.

Проте оскільки за означенням границі $z \neq i$, то при $z \neq i$ вираз

$$\Psi(z) = \frac{z^3 - i^3}{z^2 - i^2}$$

можна записати так:

$$\Psi(z) = \frac{(z - i)(z^2 + zi + i^2)}{(z - i)(z + i)} = \frac{z^2 + zi + i^2}{z + i}.$$

Тут $\lim_{z \to i} (z + i) = 2i \neq 0$. Тому

$$\lim_{z \to i} \frac{z^3 - i^3}{z^2 - i^2} = \lim_{z \to i} \frac{z^2 + zi + i^2}{z + i} = \frac{3i^2}{2i} = \frac{3}{2} i.$$

При вивченні функцій комплексної змінної, як і функцій дійсної змінної, розглядають нескінченну границю.

***Означення 3.*** Функцію $w = f(z)$ в точці $z_0$ називають *нескінченно великою* і записують

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty,$$

якщо для будь-якого числа $M > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх $z \in E$, $z \neq z_0$, які задовольняють нерівність

$$|z - z_0| < \delta,$$

виконується нерівність

$$|f(z)| > M.$$

Наприклад, функція $w = \frac{1}{z}$ в точці $z_0 = 0$ є нескінченно великою. Справді, нерівність

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} > M$$

виконується для всіх точок $z$, які задовольняють нерівність

$$|z| < \frac{1}{M} = \delta.$$

Якщо $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, то можна довести, що $\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$.

Нехай функцію $w = f(z)$ визначено в усіх точках деякої області $E$.

***Означення 4.*** Функцію $w = f(z)$ називають *неперервною в точці* $z_0 \in E$, якщо існує границя $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, яка дорівнює значенню функції в цій точці,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{18}$$

Скориставшись означенням границі функції, означення неперервності можна сформулювати ще так: функцію $w = f(z)$ називають неперервною в точці $z_0$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх точок $z \in E$, які задовольняють нерівність

$$|z - z_0| < \delta,$$

виконується нерівність

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Очевидно, що функція $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в точці $z_0$ є неперервною тоді й тільки тоді, коли в точці $(x_0, y_0)$ є неперервними дійсні функції $u(x, y), y(x, y)$.

Так, функція $w = z = x - iy$ є неперервною в точці $(x, y)$.

Якщо функція $w = f(z)$ неперервна в усіх точках області $E$, то її називають *неперервною в цій області*.

Як і для функції дійсної змінної, для функції комплексної змінної справджується така теорема.

**Т е о р е м а 3.** Якщо функції $f(z)$ і $\varphi(z)$ неперервні в точці $z_0 \in E$, то в цій точці є неперервними функції

$$f(z) \pm \varphi(z) \quad \text{і} \quad f(z)\varphi(z).$$

Якщо, крім того, $\varphi(z_0) \neq 0$, то неперервною є також функція $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$.

З цієї теореми як наслідок випливає, що багаточлен

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n,$$

де $c_0, c_1, ..., c_n$ — комплексні числа, $n$ — натуральне число, що є функцією, неперервною в усій комплексній площині $(Z)$.

Дробово-раціональна функція

$$f(z) = \frac{c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n}{d_0 + d_1 z + \cdots + d_m z^m},$$

де $d_0, d_1, ..., d_m$ — комплексні числа; $m$ — натуральне число є функцією, неперервною в усіх точках площини $(Z)$, крім точок, де багаточлен, що є знаменником, дорівнює нулю.

***Означення 5.*** Функцію $w = f(z)$, визначену на множині $E$, називають *обмеженою на цій множині*, якщо існує число $M > 0$ таке, що для всіх $z \in E$ виконується нерівність

$$|f(z)| \leq M.$$



Наприклад, функція $w = z^2$, задана в крузі $|z| \leq R$, $R > 0$, є обмеженою.

Справді, тут $|f(z)| = |z^2| = |z|^2 \leq R^2$.

Отже, за число $M$ можна взяти $M = R^2$.

Функція $w = z^2$, задана в усій комплексній площині $(Z)$, не є обмеженою, оскільки

$$|f(z)| = |z|^2 = x^2 + y^2 \to +\infty,$$

наприклад, при $x = 0$, а $y \to \infty$.

## 4.3 ПОХІДНА. УМОВИ КОШІ — РІМАНА

Розглянемо похідну комплексної функції $w = f(z)$ та умови, за яких функція має похідну в точці.

Припустимо, що функцію $w = f(z)$ визначено в області $E$ комплексної площини $(Z)$. Візьмемо дві точки $z_0 \in E$ і $z_0 + \Delta z \in E$ $(z_0 = x_0 + iy_0$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y)$. Тоді комплексне число

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

називають *приростом функції* $w = f(z)$ в точці $z_0$.

***Означення 1.*** Границю відношення $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$, якщо вона існує, називають похідною функції $f(z)$ в точці $z_0$ і позначають

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0). \tag{1}$$

Якщо функція $w = f(z)$ в точці $z_0$ має скінченну похідну, то її в цій точці називають *диференційовною*. Функцію, диференційовну в кожній точці області $E$, називають *диференційовною в цій області*.

❑ **Приклади**

**1.** Довести, що похідна функції $w = C = \text{const}$ у будь-якій точці $z \in E$ дорівнює нулю.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$\Delta w = 0.$$

Тому

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} 0 = 0.$$

Отже, $f'(z) = 0$.

**2.** Довести, що похідна функції $w = z$ дорівнює одиниці.

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо приріст функції $\Delta w$ у довільній точці $z$:

$$\Delta w = (z + \Delta z) - z = \Delta z.$$

Тоді

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta z} = 1.$$

Отже,

$$f'(z) = 1.$$

3. Довести, що похідна функції $w=z^2$ дорівнює

$$f'(z)=2z.$$

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо

$$\Delta w=(z+\Delta z)^2-z^2=2z\Delta z+(\Delta z)^2.$$

Тоді

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=\lim_{\Delta z\to 0}2z+\lim_{\Delta z\to 0}\Delta z=2z.$$

4. Довести, що функція

$$w=\bar{z}=x-iy$$

не є диференційовною в будь-якій точці $z\in(Z)$.

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо

$$\Delta w=\Delta x-i\Delta y.$$

Тоді

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}.$$

Припустимо, що точка $\Delta z\to 0$ і знаходиться на дійсній осі. Тому $\Delta y=0$ і

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=1.$$

Отже, за такого способу прямування $\Delta z$ до нуля

$$\lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ (\Delta y=0)}}\frac{\Delta w}{\Delta z}=1.$$

Нехай точка $\Delta z\to 0$ і лежить на уявній осі. Тоді $\Delta x=0$ і

$$\lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ (\Delta x=0)}}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(-1)=-1.$$

Границя відношення $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z\to 0$ не існує.

Операцію знаходження похідної функції $w=f(z)$ називають *диференціюванням* цієї функції.

Можна довести, що для функції комплексної змінної правила диференціювання такі самі, як і для функції дійсної змінної. Так, якщо функції $f(z)$ і $\varphi(z)$ в точці $z$ мають похідні, то:

1) $\left(f(z)\pm\varphi(z)\right)'=f'(z)\pm\varphi'(z)$;
2) $\left(f(z)\varphi(z)\right)'=f'(z)\varphi(z)+f(z)\varphi'(z)$;
3) якщо, крім того, $\varphi(z)\neq 0$, то

$$\left(\frac{f(z)}{\varphi(z)}\right)'=\frac{\varphi(z)f'(z)-f(z)\varphi'(z)}{(\varphi(z))^2}.$$

Можна довести також, що коли функція $w=f(z)$ диференційовна в точці, то вона в цій точці неперервна.



Обернене твердження не справджується. Так, функція $w=\bar{z}$ — неперервна в довільній точці $z$, але не диференційовна.

**Т е о р е м а.** Нехай функція $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ така, що дійсні функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ в точці $(x,y)$ є диференційовними. Тоді для того щоб ця функція в точці $z=x+iy$ була диференційовною, необхідно й достатньо, щоб у точці $(x,y)$ виконувалися умови Коші—Рімана:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y},\quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}. \tag{2}$$

Д о в е д е н н я н е о б х і д н о с т і. Нехай функція $w=f(z)$ у точці $z=x+iy$ має похідну

$$f'(z)\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Оскільки похідна $f'(z)$, якщо вона існує, не залежить від того, яким способом $\Delta z\to 0$, то до цієї точки наближатимемося спочатку вздовж прямої $y=\text{const}$. Тоді $\Delta y=0$ і $\Delta z=\Delta x$, а

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}.$$

Тому

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\right)=$$

$$=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}. \tag{3}$$

Нехай тепер $\Delta z$ так прямує до нуля, що $x=\text{const}$. Тоді $\Delta z=i\Delta y$. Маємо

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+i\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i\Delta y};$$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}-i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \tag{4}$$

Прирівнюючи праві частини в рівностях (3) і (4), дістанемо

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}-i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}.$$

Прирівнюючи дійсні й уявні частини, матимемо рівності (2).

Д о в е д е н н я д о с т а т н о с т і. Нехай виконуються умови теореми. Оскільки $u(x,y)$ і $v(x,y)$ у точці $(x,y)$ є диференційовними, то їхні повні прирости в цій точці, згідно з теоремою Лагранжа про скінченний приріст, можна записати так:

$$\Delta u(x, y)=u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x, y)=\big(u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x, y+\Delta y)\big)+$$

$$+\big(u(x, y+\Delta y)-u(x, y)\big)=\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\beta_1\Delta y;$$

$$\Delta v(x, y)=v(x+\Delta x, y+\Delta y)-v(x, y)=\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v(x, y)}{\partial y}\Delta y+\alpha_2\Delta x+\beta_2\Delta y,$$

де $\alpha_k=\alpha_k(x, y, \Delta x, \Delta y)$ і $\beta_k(x, y, \Delta x, \Delta y)$ є функціями від $\Delta x$ та $\Delta y$, причому

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha_k=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta_k=0,\quad k=1, 2.$$

Тоді

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\Delta u(x, y)+i\Delta v(x, y)}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}+$$

$$+i\frac{\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v(x, y)}{\partial y}\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}+\frac{\alpha_1\Delta x+\beta_1\Delta y+i(\alpha_2\Delta x+\beta_2\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}. \tag{5}$$

Скориставшись умовами (2), замінимо $\frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$ на $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$, а $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ на $-\frac{\partial v(x, y)}{\partial (x)}$. Дістанемо

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}+\frac{(\alpha_1+i\alpha_2)\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}+\frac{(\beta_1+i\beta_2)\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}.$$

Оскільки

$$\left|\frac{(\alpha_1+i\alpha_2)\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}\right|=|\alpha_1+i\alpha_2|\frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\le|\alpha_1|+|\alpha_2|;$$

$$\left|\frac{(\beta_1+i\beta_2)\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}\right|\le|\beta_1+i\beta_2|\frac{|\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\le|\beta_1|+|\beta_2|,$$

то

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(\alpha_1+i\alpha_2)\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}=0,\quad \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(\beta_1+i\beta_2)\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=0.$$

Отже, існує границя

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}.$$



Таким чином, функція $f(z)$ в точці $z$ є диференційовною і похідна

$$f'(z)=\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}. \tag{6}$$

Теорему доведено.

Якщо в рівності (5) замінити $\frac{\partial u}{\partial x}$ на $\frac{\partial v}{\partial y}$, а $\frac{\partial v}{\partial x}$, на $-\frac{\partial u}{\partial y}$, то

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{7}$$

❑ **Приклади**

Знайти похідні функцій

**1.** $f(z)=z=x+iy$.

Розв'язання. $u(x, y)=x,\ v(x, y)=y$. Знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=1.$$

Отже, частинні похідні є функціями, неперервними в усій площині, причому виконуються умови Коші — Рімана (2). Тому задана функція диференційовна і має похідну

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=1.$$

**2.** $f(z)=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+i\cdot 2xy$.

Розв'язання. Маємо

$$u(x, y)=x^2-y^2,\quad v(x, y)=2xy.$$

Знаходимо частинні похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x;\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y;\ \frac{\partial v}{\partial x}=2y;\ \frac{\partial v}{\partial y}=2x.$$

Умови теореми виконуються. Задана функція диференційовна і має похідну

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=2x+2iy=2(x+iy)=2z.$$

**3.** $f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$.

Розв'язання.

$$u(x, y)=\frac{x}{x^2+y^2};\quad v(x, y)=-\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x^2+y^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Отже, частинні похідні функцій $u(x, y)$ та $v(x, y)$ неперервні в усіх точках площини $(Z)$, крім нульової точки, і виконуються умови Коші — Рімана. Тому існує похідна

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{2ixy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2-y^2-2ixy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=-\frac{\bar{z}^2}{\bar{z}^2z^2}=-\frac{1}{z^2}.$$

**4.** $f(z)=\bar{z}=x-iy$.
Розв'язання.

$$u(x, y)=x, \quad v(x, y)=-y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-1.$$

У цьому випадку умови Коші — Рімана не виконуються.

$$\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Отже, функція $w=\bar{z}$ не є диференційовною.

Сформулюємо кілька означень, що стосуються диференційовних функцій комплексного аргументу.

***Означення 2.*** Функцію $w=f(z)$ називають *голоморфною** в деякій області, якщо вона в цій області однозначна і в кожній її точці диференційовна.

***Означення 3.*** Однозначну функцію $w=f(z)$ називають *голоморфною* або *регулярною* («правильною») в точці $z$, якщо вона голоморфна в деякому околі цієї точки.

Функцію $w=f(z)$ називають *регулярною в області,* якщо вона регулярна в кожній точці цієї області.

***Означення 4.*** Функцію $f(z)$ називають *аналітичною в області D*, якщо вона в цій області має неперервну похідну $f'(z)$.

Наприклад, багаточлен

$$P(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots c_nz^n$$

є аналітичною функцією в усій комплексній площині, оскільки похідна

$$P(z)=c_1+2c_2z+\cdots nc_nz^{n-1}$$

є неперервною функцією в усій площині.

*Слово «голоморфна», або «ціловидна», походить від грец. ὅλοξ — цілий і μορφη — вид.



Припустимо, що функція $w=u(x, y)+iv(x, y)$ в деякій області $E$ диференційовна і, крім того, функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ в цій області мають неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Тоді, диференціюючи перше з рівнянь в (2) по $x$, а друге по $y$, дістанемо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}.$$

Оскільки мішані похідні рівні, то, додавши почленно попередні рівності, маємо рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \qquad (8)$$

Таке саме рівняння

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \qquad (9)$$

дістанемо й для функції $v=v(x, y)$.

Диференціальні рівняння (8) і (9) називають *диференціальними рівняннями Лапласа*[1].

Розв'язки цих рівнянь (функції, що їх задовольняють) називають *гармонічними функціями.*

Отже, дійсна й уявна частини регулярної в певній області функції $w=f(z)$ є гармонічними функціями.

Таким чином, докладно розглянуто питання про похідну $f'(z)$ функції $w=f(z)$. Цю похідну ще називають *похідною першого порядку*. Індуктивно, як і для функції дійсної змінної, можна означати похідні вищих порядків $f''(z), f'''(z), \dots, f^{(n)}(z)$.

Так, похідною другого порядку називають похідну похідної першого порядку

$$f''(z)=\left(f'(z)\right)'.$$

Аналогічно, як і для функції дійсної змінної, означають диференціали $dw, \ d^2w, \dots, \ d^nw$ за формулами

$$dw=f'(z)dz;$$
$$d^2w=f''(z)dz^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$d^nw=f^{(n)}(z)dz^n,$$

де

$$dz=dx+idy \ \ (dx=\Delta x, dy=\Delta y);$$
$$dz^2=(dx+idy)^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$d^n=(dx+idy)^n.$$

[1] *Лаплас П.* (1749—1827) — французький математик, фізик і астроном.

## 4.4 КОНФОРМНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ

З'ясуємо спочатку геометричний зміст модуля та аргументу похідної функції.

Розглянемо в деякій області $E \subset (Z)$ регулярну функцію $w = f(z)$, похідна якої $f'(z_0) \neq 0$, а $z_0$ — точка області $E$.

Як зазначалося в п. 4.1, однозначна функція $w = f(z)$ комплексної змінної здійснює відображення області $E$ площини $(Z)$ на деяку область $G$ площини $(W)$. Зокрема, точці $z_0 \in E$ відповідає точка $w_0 = f(z_0)$ у площині $(W)$. Кривій $C$, що проходить через точку $z_0$ у площині $(Z)$, відповідає крива $\Gamma$ (рис. 109, 110).

Нехай неперервну просту криву $C$ задано параметричними рівняннями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta.$$

Очевидно, що криву $C$ можна задати одним рівнянням

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad \alpha \le t \le \beta.$$

Тоді рівняння лінії $\Gamma$ у площині $(W)$ має вигляд

$$w = f(z(t)) = w(t), \quad \alpha \le t \le \beta.$$

Візьмемо на кривій $C$ довільну точку $z_0 + \Delta z$. Цій точці на кривій $\Gamma$ відповідає точка $w_0 + \Delta w$. Нехай точка $z_0 + \Delta z$ вздовж кривої $C$ наближається до точки $z_0$, $\Delta z \to 0$. Тоді точка $w_0 + \Delta w$ вздовж кривої $\Gamma$ наближається до точки $w_0$ (внаслідок неперервності функції при $\Delta z \to 0$ приріст функції $\Delta w \to 0$). Відношення $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ при цьому наближається до похідної, тобто

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0). \tag{1}$$

Запишемо комплексне число $f'(z_0)$ у тригонометричній формі

$$f'(z_0) = r(\cos\theta + i\sin\theta), \tag{2}$$

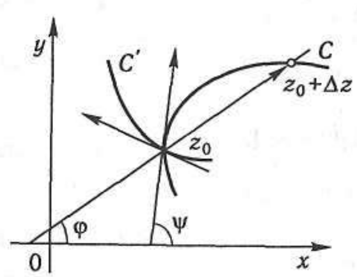


Рис. 109

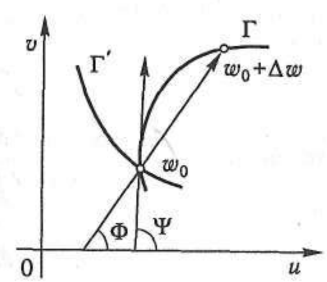


Рис. 110



де

$$r = |f'(z_0)|; \quad \theta = \operatorname{Arg} f'(z_0). \tag{3}$$

Тоді з рівності (1) випливає, що

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = r; \tag{4}$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \theta \tag{5}$$

(з точністю до кратного $2\pi$).

Останню рівність з точністю до кратного $2\pi$ можна записати ще так:

$$\lim_{\Delta z \to 0} (\arg \Delta w - \arg \Delta z) = \theta. \tag{6}$$

Рівність (6) з'ясуємо докладніше.

Очевидно, $\arg \Delta w$ є кутом $\Phi$, утвореним додатним напрямком осі $Ou$ і вектором $\Delta \vec{w}$ (див. рис. 110), а $\arg \Delta z$ — кутом $\varphi$, утвореним додатним напрямком осі $Ox$ і вектором $\Delta \vec{z}$. Отже,

$$\lim_{\Delta z \to 0} (\Phi - \varphi) = \theta. \tag{7}$$

Оскільки при $\Delta z \to 0$ напрямок вектора $\Delta \vec{z}$ прямує до напрямку дотичної, проведеної до кривої $C$ у точці $z_0$, а напрямок вектора $\Delta \vec{w}$ — до напрямку дотичної, проведеної до кривої $\Gamma$ в точці $w_0$, то за формулою (7)

$$\Psi - \psi = \theta, \tag{8}$$

де $\psi$ і $\Psi$ — відповідно кути, що утворюють дотичні до ліній $C$ і $\Gamma$ з осями $Ox$ і $Ou$.

Нехай напрямки осей $Ox$ і $Ou$ збігаються. З рівності (8) випливає, що аргумент похідної $f'(z_0)$, тобто кут $\theta$, дорівнює куту, на який повертається дотична, проведена до кривої $C$ у точці $z_0$ при відображенні, здійснюваному регулярною функцією $w = f(z)$.

Проведемо через точку $z_0$ у площині $(Z)$ іншу криву $C'$, дотична до якої в точці $z_0$ утворює з віссю $Ox$ кут $\psi'$. Тоді цій кривій у площині $(W)$ відповідатиме крива $\Gamma'$, що проходить через точку $w_0$.

Нехай дотична, проведена до кривої $\Gamma'$ у точці $w_0$, утворює з віссю $Ou$ кут $\Psi'$. Проте кут $\theta$ при цьому не змінюється

$$\Psi' - \psi' = \theta. \tag{9}$$

Отже, з рівностей (8) і (9) дістанемо важливу рівність

$$\Psi - \psi = \psi - \psi'. \tag{10}$$

З цієї рівності випливає, що лінії $\Gamma$ і $\Gamma'$ у площині $(W)$ перетинаються під тим самим кутом, що й лінії $C$ і $C'$ у площині $(Z)$.

Таким чином, відображення, здійснюване регулярно функцією $w = f(z)$ в усіх точках, де $f'(z) \neq 0$, має властивість збереження кутів як за величиною, так і за напрямком.

Розглянемо рівність (4). У цій рівності $|\Delta w|$ є відстанню між точками $w_0$ і $w_0 + \Delta w$, а $|\Delta z|$ — відстанню між точками $z_0$ і $z_0 + \Delta z$. Рівність (4) показує, що границя відношення нескінченно малої відстані між образами до нескінченної малої відстані між прообразами дорівнює модулю похідної $f'(z)$ і не залежить від напрямку кривих, що проходять через точку $z_0$.

Таким чином, модуль $|f'(z_0)|$ похідної $f'(z_0)$ виражає величину зміни лінійних розмірів у точці $z_0$ при перетворенні, що здійснюється регулярною функцією $w = f(z)$.

Очевидно, у випадку $|f'(z_0)| > 1$ відбувається *розтяг* довільно малої ділянки кривої $C$, у випадку $0 < |f'(z_0)| < 1$ — *стиск*, а у випадку $|f'(z_0)| = 1$ нескінченно мала ділянка кривої, що виходить з точки $z_0$, переходить також у нескінченно малу ділянку кривої, що виходить з точки $w_0$, і вони мають однакові довжини.

***Означення 1.*** Відображення (перетворення), за якого зберігаються кути (за величиною і напрямком) і сталість розтягів, називають *конформним відображенням першого роду*.

Таким чином, відображення, що здійснюється регулярно функцією $w = f(z)$ в усіх точках, де $f'(z) \neq 0$, є конформним відображенням першого роду.

***Означення 2.*** Відображення, за якого зберігаються кути за величиною, але їхній напрямок змінюється на протилежний і зберігається сталість розтягу, називають *конформним відображенням другого роду*.

Прикладом конформного відображення другого роду є відображення, що здійснюється функцією (нерегулярною) $w = \bar{z} = x - iy$.

Справді, тут кожна точка $z_0 = x_0 + iy_0$ переходить у точку $\bar{z} = x_0 - iy_0$, симетричну точці $z_0$ відносно осі $Ox$. Отже, будь-які два напрямки, що виходять із точки $z_0$ і утворюють між собою деякий кут $\theta$, перейдуть у два відповідні напрямки, симетричні відносно осі $Ox$ з першими, кут між якими дорівнює $\theta$ (рис. 111).

Розглянемо як приклад відображення, здійснюване лінійною функцією

$$w = az + b, \tag{11}$$

де $a$ і $b$ — довільні комплексні числа, причому $a \neq 0$. Знайдемо похідну

$$w' = a \neq 0.$$

Отже, відображення, здійснюване лінійною функцією (11), є конформним відображенням першого роду.

Крім того, оскільки $z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a}$, то відображення між площинами $(Z)$ і $(W)$ є й взаємно однозначним. Зокрема, нульовій точці $z = 0$ відповідає



точка $w = b$; нескінченно віддаленій точці $z = \infty$, тобто точці, для якої $|z| \to \infty$, відповідає нескінченно віддалена точка

$$w = \infty \left(|w| \to \infty\right).$$

Розглянемо окремі випадки перетворення (11).

I. Нехай $a = 1$. Тоді функція $w$ матиме вигляд

$$w = z + b. \tag{12}$$

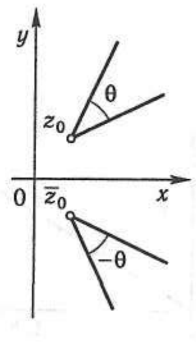


Рис. 111

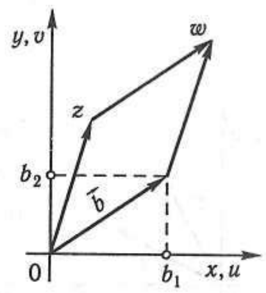


Рис. 112

Прирівняємо дійсні й уявні частини. Дістанемо

$$u = x + b_1; \quad v = y + b_2; \quad b = b_1 + ib_2. \tag{13}$$

З аналітичної геометрії відомо, що формули (13) задають паралельний перенос точки $(x, y)$ у точку $(x + b_1, y + b_2)$.

Отже, функція (12) кожну точку $z$ площини $(Z)$ переводить у напрямку вектора $\bar{b}$ у точку $w$ площини $(W)$ на відстань, що дорівнює $|b|$ (рис. 112). Тут для зручності точки $z$ і $w$ зображають точками однієї площини.

II. Нехай $b = 0$, тобто матимемо функцію

$$w = az, \tag{14}$$

де $a = \cos\alpha + i\sin\alpha$; $\alpha = \arg a$.

Прирівнюючи в (14) дійсні й уявні частини, дістанемо такі рівності:

$$u = x\cos\alpha - y\sin\alpha; \quad v = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \tag{15}$$

Формули (15) задають поворот вектора $\bar{z}$ на кут $\alpha$.

Отже, функція (14) здійснює таке перетворення площини $(Z)$, при якому точку $w$ дістаємо з точки $z$, повернувши вектор $\bar{z}$ навколо нульової точки на кут $\alpha$ (рис. 113).

III. Розглянемо функцію

$$w = kz, \tag{16}$$

де $k > 0$ — дійсне число.

Тоді

$$u = kx; \quad v = ky. \tag{17}$$

Звідси

$$|w| = k|z|, \quad \arg w = \arg z$$

$$(\arg k = 0). \tag{18}$$

Формули (18) показують, що точка $w$ лежить на прямій $Oz$ на відстані $k|z|$ від нульової точки (рис. 114).

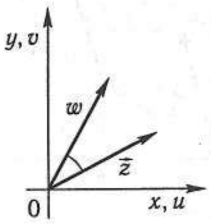


Рис. 113

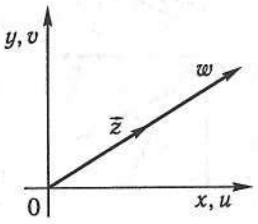


Рис. 114

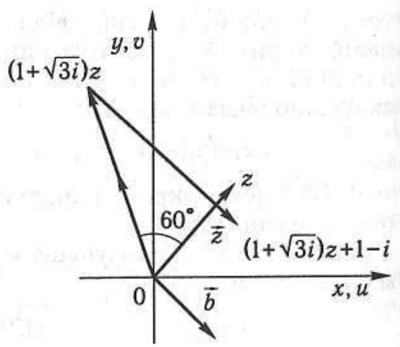


Рис. 115

Випадок, коли $k>1$, при $0<k<1$ точка лежатиме між нульовою точкою і точкою $z$, зображено на рис. 114.

Таке перетворення називають *перетворенням подібності* в нульовій точці з коефіцієнтом подібності $k$.

Таким чином, з випадків I—III випливає, що загальне перетворення

$$w = az + b, \quad a \neq 1, \quad b \neq 0$$

можна розглядати як суму трьох перетворень: повороту вектора $\vec{z}$ на кут $\varphi = \arg a$, «розтягу» («стиску») «в $|a|$ разів» і паралельного перенесення знайденої точки в напрямку вектора $\vec{b}$ на відстань, що дорівнює $|\vec{b}|$.

Наприклад, нехай

$$w = \left(1+\sqrt{3}i\right)z + 1 - i. \tag{19}$$

Тут $a = 1+\sqrt{3}i$; $b = 1-i$; $|a| = 2$, $\arg a = \frac{\pi}{3}$; $|b| = \sqrt{2}$; $\arg b = -\frac{\pi}{4}$.

Отже, щоб дістати точку $w$ при перетворенні (19), потрібно:

1) повернути навколо нульової точки вектор $\vec{z}$ на кут 60°;
2) утворений вектор видовжити вдвічі;
3) перенести останній вектор паралельно вектору $\vec{b}$ на довжину $\sqrt{2}$ (рис. 115).

## 4.5 ІНТЕГРАЛ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Уведемо поняття інтеграла функції комплексної змінної, яке за формою не відрізняється від означення криволінійного інтеграла.

Припустимо, що функцію $w = f(z)$ визначено на гладкій (кусково-гладкій) кривій $AB$ (рис. 116).



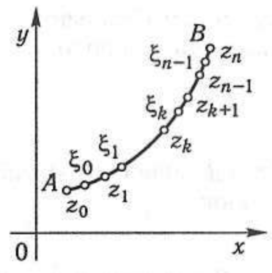


Рис. 116

Нагадаємо, що криву $AB$ називають *гладкою*, якщо вона в кожній точці має дотичну, що неперервно змінюється під час руху точки вздовж цієї кривої. Лінію, складену зі скінченної кількості таких кривих (дуг), називають *кусково-гладкою*.

Нехай криву $AB$ задано параметричним рівнянням

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad y \in [\alpha; \beta], \tag{1}$$

де дійсні функції $x(t)$ і $y(t)$ — неперервні й мають неперервні похідні першого порядку на відрізку $[\alpha; \beta]$.

Розіб'ємо відрізок $[\alpha; \beta]$ на $n$ довільних частин точками, тобто побудуємо $T$-розбиття відрізка $[\alpha; \beta]$:

$$(T): \alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots < t_n = \beta.$$

Цим точкам на кривій $AB$ відповідатимуть точки

$$z_0, z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_n.$$

На кожному частинному відрізку $[t_k; t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ виберемо довільно по одній точці $\tau_k \in [t_k; t_{k+1}]$, яким на кривій $AB$ відповідатимуть точки

$$\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_{n-1}.$$

Побудуємо суму

$$\sigma(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k, \tag{2}$$

де

$$\Delta z_k = z_{k+1} - z_k; \; z_{k+1} = x(t_{k+1}) + iy(t_{k+1}); \; z_k = x(t_k) + iy(t_k);$$
$$\xi_k = z(\tau_k) = x(\tau_k) + iy(\tau_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Суму (2) називають *інтегральною сумою* функції $w = f(z)$, побудованою для заданого $T$-розбиття відрізка $[\alpha; \beta]$ на частини і заданого вибору точок $\xi_k$.

Уведемо ще таке позначення

$$\lambda(T) = \max_{0 \le k \le n-1} \Delta t_k, \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k.$$

Оскільки комплексна функція $z(t)$ неперервна, то при $\lambda(T) \to 0$

$$\max_{0 \le k \le n-1} |\Delta z_k| \to 0.$$

***Означення.*** Число $I$ називають *границею інтегральної суми* (2) при $\lambda(T) \to 0$ і записують

$$I = \lim_{\lambda(T) \to 0} \sigma = \lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k,$$

якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що як тільки виконується нерівність $\lambda(T) < \delta$, то виконується й нерівність

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k - I \right| < \varepsilon \tag{4}$$

для довільного $T$-розбиття відрізка $[\alpha; \beta]$ на частини і довільного вибору точок

$$\xi_k \in [t_k; t_{k+1}], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Якщо існує границя інтегральної суми (2), то цю границю називають *інтегралом функції* $f(z)$ *за комплексною змінною* $z$ і пишуть

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz.$$

Отже, за означенням

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz. \tag{5}$$

Функцію при цьому називають *інтегровною по кривій* $AB$.

**Теорема.** Якщо комплексна функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ є неперервною на гладкій або кусково-гладкій кривій $AB$, то інтеграл цієї функції по заданій кривій існує і виконується рівність

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int_{\overset{\frown}{AB}} u(x, y)dy + v(x, y)dx, \tag{6}$$

де $\int_{\overset{\frown}{AB}} udx - vdy$, $\int_{\overset{\frown}{AB}} udy - vdx$ — криволінійні інтеграли по кривій $AB$.

Доведення. Позначимо координати точки $\xi_k$ через $\zeta_k, \eta_k$. Тоді

$$\zeta_k = x(\tau_k), \quad \eta_k = y(\tau_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Підставляючи в інтегральну суму (2) значення

$$f(\xi_k) = u(\zeta_k, \eta_k) + iv(\zeta_k, \eta_k) \quad \text{і} \quad \Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k,$$

дістанемо

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(u(\zeta_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\zeta_k, \eta_k)\Delta y_k\right) +$$

$$+ i\sum_{k=0}^{n-1}\left(u(\zeta_k, \eta_k)\Delta y_k + v(\zeta_k, \eta_k)\Delta x_k\right). \tag{7}$$

У правій частині рівності (7) маємо дві інтегральні суми, кожну з яких побудовано для дійсних функцій $u(x, y) - v(x, y)$ та $u(x, y) + v(x, y)$. Оскільки $f(z)$ є неперервною функцією на кривій $AB$, то на цій кривій є також



неперервними й зазначені дійсні функції. Внаслідок того що при $\lambda(T) \to 0$ і

$$\max_{0 \le k \le n-1} \Delta x_k \to 0,$$

$$\max_{0 \le k \le n-1} \Delta y_k \to 0,$$

інтегральні суми в правій частині рівності (7) при $\lambda(T) \to 0$ мають границі, які дорівнюють криволінійним інтегралам:

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1}\left(u(\zeta_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\zeta_k, \eta_k)\Delta y_k\right) = \int_{\overset{\frown}{AB}} udx - vdy;$$

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1}\left(u(\zeta_k, \eta_k)\Delta y_k + v(\zeta_k, \eta_k)\Delta x_k\right) = \int_{\overset{\frown}{AB}} udy + vdx.$$

Переходячи в рівності (7) до границі при $\lambda(T) \to 0$, дістанемо рівність (6). Теорему доведено.

Таким чином, інтеграл неперервної функції комплексної змінної по кривій $AB$ існує й обчислюється за формулою (6).

❑ **Приклади**

**1.** $\displaystyle\int_{z_0}^{z} dz = \int_{z_0}^{z} dx + idy = \int_{x_0}^{x} dx + i\int_{y_0}^{y} dy = x\Big|_{x_0}^{x} + iy\Big|_{y_0}^{y} =$

$$= (x - x_0) + i(y - y_0) = x + iy - (x_0 + iy_0) = z - z_0.$$

**2.** $\displaystyle\int_{z_0}^{z} zdz = \int_{z_0}^{z} (x + iy)(dx + idy) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} xdx - ydy + i\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} xdy + ydx =$

$$= \frac{1}{2}\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} d\left(x^2 - y^2\right) + i\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} d(xy) = \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right)\Big|_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} + ixy\Big|_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 + 2ixy - y^2 - \left(x_0^2 + 2ix_0y_0 - y_0^2\right)\right) = \frac{z^2 - z_0^2}{2}.$$

Сформулюємо найпростіші властивості криволінійного інтеграла за комплексною змінною. Розглядатимемо неперервні функції на гладкій кривій $AB$.

**1°.**
$$\int_{\overset{\frown}{BA}} f(z)dz = -\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz. \tag{8}$$

Запишемо інтегральну суму для інтеграла в лівій частині рівності (8) при $(T)$-розбитті відрізка $[\alpha; \beta]$ на частини:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(z_k - z_{k+1}) = -\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(z_{k+1} - z_k).$$

Перейшовши до границі при $\lambda(T) \to 0$, дістанемо рівність (8).

**2°.** Сталий множник $C$ можна виносити за знак інтеграла

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Cf(z)dz = C\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz. \tag{9}$$

Ця властивість випливає з таких рівностей:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Cf(z)dz = \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} Cf(\xi_k)\Delta z_k = C\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k = C\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz.$$

**3°.**

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} (f(z)\pm\varphi(z))dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz \pm \int_{\overset{\frown}{AB}} \varphi(z)dz. \tag{10}$$

Доведення цієї властивості аналогічне доведенню попередньої властивості.

**4°.** Якщо гладку криву $AB$ розбити на дві криві $AC$ і $CB$ точкою $C$, то

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = \int_{\overset{\frown}{AC}} f(z)dz + \int_{\overset{\frown}{CB}} f(z)dz. \tag{11}$$

Кожний інтеграл у рівності (11) існує, тому потрібно довести тільки саму рівність (11).

Нехай точці $C$ на кривій $AB$ відповідає значення параметра $t = t_p$. Оскільки інтеграл $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz$ не залежить від способу розбиття відрізка $[\alpha;\beta]$, то точку $t = t_p$ можна включити в $T$-розбиття цього відрізка:

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_p < t_{p+1} < \ldots < t_n.$$

Тоді інтегральну суму $\sigma(T)$ запишемо так:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k = \sum_{k=0}^{p-1} f(\xi_k)\Delta z_k + \sum_{k=p}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k.$$

Перейшовши до границі при $\lambda(T)\to 0$, дістанемо рівність (11).

Зауважимо, що цю властивість інтеграла можна узагальнити і на той випадок, коли криву $AB$ точками $C_1, C_2, \ldots, C_m$ розбито на $m$ кривих. У цьому випадку матимемо рівність

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = \int_{\overset{\frown}{AC_1}} f(z)dz + \int_{\overset{\frown}{C_1C_2}} f(z)dz + \ldots + \int_{\overset{\frown}{C_mB}} f(z)dz.$$

**5°.**

$$\left|\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz\right| \le \int_{\overset{\frown}{AB}} |f(z)|ds, \tag{12}$$

де $ds$ — диференціал дуги.



Ця властивість випливає з нерівності

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}|f(\xi_k)||\Delta z_k| \le \sum_{k=0}^{n-1}|f(\xi_k)|\Delta s_k,$$

де $\Delta s_k$ — довжина дуги, що відповідає хорді $\Delta z_k$.

**6°.** Нехай $M$ — найбільше значення $|f(z)|$ на кривій $AB$, тобто $|f(z)| \le M$, $l$ — довжина кривої $AB$. Тоді виконується нерівність

$$\left|\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz\right| \le Ml. \tag{13}$$

Справді, запишемо нерівність

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}|f(\xi_k)||\Delta z_k| \le M\sum_{k=0}^{n-1}|\Delta z_k|. \tag{14}$$

Сума в правій частині останньої нерівності є довжиною ламаної, вписаної в криву $AB$.

Тому, перейшовши до границі в нерівності (14) при $\lambda(T)\to 0$, дістанемо нерівність (13).

## 4.6
## ІНТЕГРАЛЬНА ТЕОРЕМА КОШІ. ФОРМУЛА КОШІ.

Вище було розглянуто інтеграл функції комплексної змінної, заданої на незамкненій кривій. Очевидно, що наведене означення інтеграла залишається тим самим і для замкненої кривої (контуру) $\Gamma$. Для замкненого контуру потрібно вказувати, за яким напрямком береться інтеграл: додатним чи від'ємним. Якщо не буде зазначено окремо, то вважатимемо, що інтеграл $\int_\Gamma f(z)dz$ по замкненому контуру $\Gamma$ береться в додатному напрямку, тобто проти руху годинникової стрілки.

Зазначимо, що інтеграл по замкненому контуру $\Gamma$ називають *контурним інтегралом* і позначають символом $\oint_\Gamma f(z)dz$.

Доведемо інтегральну теорему Коші, яка є основною теоремою теорії регулярних функцій.

**Теорема (Коші).** Якщо функція $w = f(z)$ є регулярною в однозв'язній області $E$ і кусково-гладкий контур $\Gamma \in E$, то інтеграл цієї функції по контуру $\Gamma$ дорівнює нулю:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Доведення. Припустимо, що $f'(z)$ неперервна в області $E$ (так зробив при доведенні й сам Коші).

Запишемо інтеграл

$$\int\limits_{L} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma} (u+iv)(dx+idy)$$

через дійсні криволінійні інтеграли:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma} u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\int\limits_{\Gamma} u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx.$$

Оскільки функція $f(z)$ в області $E$ диференційовна, то її дійсна й коефіцієнти при уявній частині задовольняють умови Коші — Рімана:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}. \tag{2}$$

За припущенням $f'(z)$ — неперервна, тому неперервними є й частинні похідні $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}$ в області $E$.

Отже, для дійсних криволінійних інтегралів по замкненому контуру

$$I_1 = \int\limits_{\Gamma} u\,dx - v\,dy,\quad I_2 = \int\limits_{\Gamma} u\,dy + v\,dx,$$

згідно з умовами (1) і (2), виконуються необхідні й достатні умови для того, щоб криволінійний інтеграл по замкненому контуру дорівнював нулю.

Нагадаємо, що криволінійний інтеграл $\int\limits_{\Gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ по замкненому контуру $\Gamma$ у випадку, коли $P(x,y)$, $Q(x,y)$ — неперервні й мають неперервні частинні похідні $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в однозв'язній області, що окутує контур $\Gamma$, дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли в цій області виконується рівність

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \tag{3}$$

Тоді, внаслідок рівності (1), виконується умова (3) для інтеграла $I_1$, а внаслідок рівності (2) — умова (3) для інтеграла $I_2$, тобто $I_1 = I_2 = 0$.

Отже, $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$.

Теорему доведено.

Зробимо кілька зауважень щодо теореми Коші.



**Зауваження**

**1.** Щоб спростити доведення інтегральної теореми Коші, було припущено, що функція $f(z)$ в області $E$ має неперервну похідну $f'(z)$. Теорема не вимагає неперервності похідної $f'(z)$, вона вимагає тільки існування похідної $f'(z)$ в однозв'язній області $E$.

**2.** Як наслідок з інтегральної теореми Коші випливає таке твердження: якщо функція $W = f(z)$ є регулярною в однозв'язній області $E$, то значення інтеграла

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz$$

не залежить від шляху інтегрування, а визначається тільки розміщенням початкової $A$ і кінцевої $B$ точок.

Доведення цього твердження таке саме, як і для дійсних криволінійних інтегралів.

**3.** У випадку багатозв'язної області інтегральна теорема Коші читається так: якщо функція $W = f(z)$ регулярна в замкненій багатозв'язній області, то інтеграл її по всьому контуру області дорівнює нулю.

Так, для випадку двозв'язної області (рис. 117), коли контур $\Gamma$ складається з двох контурів $\Gamma_2$ і $\Gamma_1$, інтеграл, як і у випадку однозв'язної області, матиме вигляд

$$\int\limits_{\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2} f(z)\,dz = 0.$$

Якщо в двозв'язній області зробити розріз $AB$, то дістанемо випадок однозв'язної області, обмеженої контуром

$$\Gamma_3 = ABCBAMFNA.$$

Отже, інтеграл по замкненому контуру $\Gamma_3$ функції $f(z)$ дорівнює нулю

$$\int\limits_{\Gamma_3} f(z)\,dz = 0. \tag{4}$$

Інтеграл у лівій частині рівності (4) можна записати як суму

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} + \oint\limits_{BCLB} + \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} + \oint\limits_{AMFNA} = 0. \tag{5}$$

Оскільки інтеграли $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}$ і $\int\limits_{\overset{\frown}{BA}}$ беруть у протилежних напрямках, то

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} + \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} = 0.$$

Отже, з рівності (5) дістанемо

$$\oint\limits_{BCLB} + \oint\limits_{AMNA} = 0,$$

або

$$\oint\limits_{AMNA} f(z)\,dz = \oint\limits_{BLCB} f(z)\,dz, \tag{6}$$

причому обидва інтеграли беруть в додатному напрямку — проти руху годинникової стрілки.

Рівність (6) можна читати ще так: інтеграл по зовнішньому контуру дорівнює інтегралу по внутрішньому контуру.

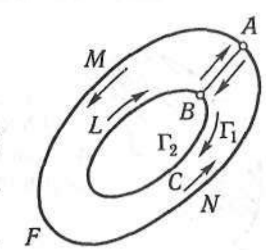


Рис. 117

Виведемо тепер формулу Коші. Для цього розглянемо однозв'язну область $E$, обмежену гладким контуром Г.

Нехай $f(z)$ — регулярна функція в замкненій області $\overline{E}$. Тоді виконується *формула Коші*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}, \tag{7}$$

де $z$ — будь-яка точка, що лежить усередині області $E$, а $\zeta$ — змінна точка контуру Г. Отже, формула Коші виражає значення регулярної функції в будь-якій точці $z$ всередині області через її значення на контурі області.

Щоб вивести формулу (7), розглянемо допоміжну функцію

$$\varphi(\zeta)=\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}. \tag{8}$$

Ця функція є регулярною в усіх точках області $\overline{E}$, крім точки $\zeta=z$. Опишемо навколо точки $z$ коло $\gamma$ з центром у цій точці і досить малим радіусом $\rho$ (рис. 118).

Функція, задана рівністю (8), є регулярною в двозв'язній області, обмеженій контурами Г і $\gamma$, до неї можна застосувати формулу (6):

$$\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta=\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{9}$$

Тоді

$$\lim_{\zeta\to z}\varphi(\zeta)=\lim_{\zeta\to z}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}=f'(z).$$

Якщо функцію $\varphi(\zeta)$ доозначити так, що $\varphi(z)=f'(z)$ при $\zeta=z$, то функція $\varphi(\zeta)$ стає неперервною в замкненій області $\overline{E}$. Тому для всіх точок області $\overline{E}$ виконується нерівність

$$|\varphi(z)|<M,$$

де $M>0$ — стале число.

Використовуючи нерівність (13) п. 4.5, дістанемо таку оцінку:

$$\left|\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta\right|<M\cdot 2\pi\rho. \tag{10}$$

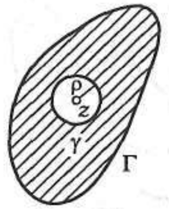

**Рис. 118**

Оскільки $\rho$ — довільне мале додатне число, а інтеграл у лівій частині, згідно з рівністю (9), не залежить від $\rho$, то з нерівності (10) випливає

$$\left|\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\xi\right|=0,$$



а отже, й

$$\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\xi=0. \tag{11}$$

Інтеграл, що міститься в лівій частині рівності (11), можна записати ще так:

$$\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-f(z)\int_{\gamma}\frac{d\zeta}{\zeta-z}=0. \tag{12}$$

Оскільки точка $\zeta$ лежить на колі з центром у точці $z$ й радіусом $\rho$, то комплексне число $\zeta-z$ можна записати у тригонометричній формі

$$\zeta-z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),\quad \text{де}\quad 0\le\varphi\le 2\pi.$$

Тоді

$$\int_{\gamma}\frac{d\zeta}{\zeta-z}=\int_{\gamma}\frac{\rho(-\sin\varphi+i\cos\varphi)d\varphi}{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=$$

$$=\int_{\gamma}(-\sin\varphi+i\cos\varphi)(\cos\varphi-i\sin\varphi)d\varphi=i\int_{\gamma}d\varphi=i\varphi\Big|_0^{2\pi}=2\pi i.$$

З рівності (12) дістанемо

$$\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-2\pi i f(z)=0,\quad \text{або}\quad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}.$$

Скориставшись рівністю (6), матимемо формулу Коші (7).

Права частина формули Коші

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{13}$$

називають *інтегралом Коші*.

В інтегралі Коші точка $z$ лежить всередині області $\overline{E}$, а $\zeta$ — на її контурі. Тому підінтегральна функція $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ є неперервною в усіх точках контуру Г. Можна довести, що функція $f(z)$ має похідну $f'(z)$ в точці, й

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta. \tag{14}$$

Справді, скориставшись формулою Коші, знайдемо

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i\Delta z}\left(\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z-\Delta z}d\zeta-\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)}.$$

Отже,
$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)}-\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right)=\frac{\Delta z}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)^2}.$$

Оцінимо за модулем цю рівність
$$\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}\right|=$$
$$=\frac{|\Delta z|}{2\pi}\left|\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)^2}\right|<\frac{M|\Delta z|}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{d\zeta}{|\zeta-z|^2|\zeta-z-\Delta z|}, \tag{15}$$
де $|f(\zeta)|<M$ (функція $f(\zeta)$ — неперервна на контурі $\Gamma$, тому вона за модулем обмежена).

Нехай $2d$, $d>0$, — відстань точки $z$ до контуру $\Gamma$, тобто нижня грань усіх можливих відстаней між точками лінії $\Gamma$ і точкою $z$.

Тоді виконуються нерівності $|\zeta-z|>r, |\zeta-z-\Delta z|>r$ за умови, що $|\Delta z|$ — досить мале число.

Отже, згідно з нерівністю (15), дістанемо нерівність
$$\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}\right|<\frac{|\Delta z|Ml}{2\pi d^3}, \tag{16}$$
де $l$ — довжина контуру $\Gamma$.

Оскільки права частина нерівності (16) при $|\Delta z|\to 0$ прямує до нуля, то й ліва частина при $\Delta z\to 0$ прямує до нуля. Маємо
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{dz}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2},$$
або, що те саме, формулу (14).

Методом індукції можна дістати формули для таких похідних. Ці формули утворюються формальним диференціюванням рівності (14) по $z$:
$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta,$$
$$f''(z)=\frac{2!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^3},$$
..................................
$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}. \tag{17}$$



Отже, дійшли висновку: якщо функція $f(z)$ є регулярною (має похідну) в однозв'язній області $E$, то вона в цій області має необмежену кількість похідних, які визначають за формулами (17).

Такої властивості функції дійсної змінної в загальному випадку не мають. З того, що функція $f(x)$ в точці $x$ має похідну $f'(x)$, не можна зробити висновку, що існує $f''(x)$.

Нехай функція $f(z)$ є регулярною в однозв'язній області $E$ і $n$ — натуральне число. За формулою Коші маємо
$$(f(z))^n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(f(\zeta))^n}{\zeta-z}d\xi, \tag{18}$$
де $\Gamma\subset E$.

Нехай $M=\max|f(\zeta)|$, коли $\zeta\in\Gamma$. З рівності (18) дістанемо нерівність
$$|f(z)|^n\le\frac{M^n l}{2\pi\delta}, \tag{19}$$
де $\delta$ — найменша відстань точки $z$ до контуру $\Gamma$; $l$ — довжина контуру $\Gamma$. Тоді
$$|f(z)|\le M\sqrt[n]{\frac{l}{2\pi\delta}}. \tag{20}$$

Перейшовши до границі при $n\to\infty$, матимемо
$$|f(z)|\le M. \tag{21}$$

Нерівність (21) виражає *принцип модуля:* якщо функція $f(z)$ регулярна в однозв'язній замкненій області $\overline{E}$, обмеженій гладким контуром $\Gamma$, то максимум модуля $|f(z)|$ досягається на контурі.

У подальшому користуватимемося нерівностями Коші
$$\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{Mn!}{\rho^n},\quad n=1,2,..., \tag{22}$$
де $\rho$ — радіус кола з центром у точці $z$.

Нерівності (22) випливають із формул (17). Справді,
$$\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{n!}{2\pi}\frac{M}{\rho^{n+1}}\int_{\Gamma}|d\zeta|=\frac{n!M}{2\pi\rho^{n+1}}2\pi\rho=\frac{n!M}{\rho^n}.$$

## 4.7 НЕСКІНЧЕННІ РЯДИ З КОМПЛЕКСНИМИ ЧЛЕНАМИ

**Границя послідовності комплексних чисел.** Нехай задано деяку послідовність комплексних чисел $z_n=x_n+iy_n$, $n=1,2,\ldots$.

***Означення.*** Комплексне число $c=a+ib$ називають скінченною границею послідовності $\{z_n\}$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує натуральне число $N=N(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n>N$ виконується нерівність $|z_n-c|<\varepsilon$.

У цьому випадку пишуть

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c \quad \text{або} \quad z_n \to c\,(n\to\infty),$$

а саму послідовність $\{z_n\}$ називають збіжною (збіжною до числа $c$). Якщо такого числа $c$ не існує, то послідовність $\{z_n\}$ називають розбіжною.

Легко можна довести критерій збіжності комплексної послідовності $\{z_n\}$. Сформулюємо його у вигляді такої теореми.

**Теорема.** Для того щоб комплексна послідовність $\{z_n\}$ збігалася до комплексного числа $c = a + bi$, необхідно й достатньо, щоб дійсні послідовності $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ збігалися відповідно до чисел $a$ і $b$.

Цю теорему приймемо без доведення.

**Числові ряди.** Нехай має деяку послідовність комплексних чисел $\{a_n = a_n + ib_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Складемо такий вираз:

$$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)+\cdots+(a_n+ib_n)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+ib_n). \tag{1}$$

Цей вираз називають *числовим комплексним рядом.* Число $a_1+ib_1$ називають *першим членом* ряду, $a_2+ib_2$ — *другим членом* і т. д., $a_n+ib_n$ — *загальним членом* ряду.

Побудуємо такі комплексні числа:

$$S_1 = a_1 + ib_1;$$

$$S_2 = (a_1+ib_1)+(a_2+ib_2);$$

..........................................

$$S_n = (a_1+ib_1)+\cdots+(a_n+ib_n). \tag{2}$$

Послідовність чисел $\{S_n\}$ називають *частковими сумами* ряду (1), зокрема, $S_n$ — *n*-ю *частковою сумою.*

***Означення 1.*** Ряд (1) називають *збіжним,* якщо існує скінченна границя послідовності його часткових сум $\{S_n\}$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} S_n = A + iB. \tag{3}$$

Число $A+iB$ називають *сумою ряду* (1) і записують

$$A+iB=(a_1+ib_1)+\ldots+(a_n+ib_n)+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+ib_k). \tag{4}$$

Якщо границя (3) не існує, то ряд (1) називають *розбіжним.* Утворимо два дійсні числові ряди:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}a_k; \tag{5}$$

$$b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}b_k. \tag{6}$$



**Теорема 1.** Для того щоб комплексний числовий ряд (1) збігався, необхідно й достатньо, щоб збігалися дійсні числові ряди (5) і (6).

Так, комплексний числовий ряд

$$(1+i)+\left(\frac{1}{2^2}+i\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+i\frac{1}{3!}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n^2}+i\frac{1}{n!}\right)+\ldots$$

збігається, оскільки збігаються дійсні ряди

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

(ряд типу Діріхле),

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

(збіжність останнього ряду доводять за ознакою Д'Аламбера).

***Означення 2.*** Комплексний числовий ряд (1) називають *абсолютно збіжним,* якщо збігається додатний ряд, утворений з модулів членів ряду (1), тобто

$$|a_1+ib_1|+|a_2+ib_2|+\ldots+|a_n+ib_n|+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}|a_n+ib_n|. \tag{7}$$

**Теорема 2.** Якщо ряд (1) є абсолютно збіжним, то він є й збіжним. Справедливість цієї теореми випливає з таких очевидних нерівностей:

$$|a_n|\le|a_n+ib_n|;\quad |b_n|\le|a_n+ib_n|.$$

Отже, дійсні ряди (5) і (6) — абсолютно збіжні, вони також і збіжні. Звідси заданий ряд із комплексними членами збігається.

**Функціональні ряди.** Нехай членами ряду є функції комплексної змінної

$$f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z). \tag{8}$$

Ряд (8) називають *функціональним комплексним рядом.*

Якщо функціональний ряд збігається в усіх точках множини $E$, то його називають збіжним на цій множині. Надалі під множиною розумітимемо область.

Очевидно, що функціональний ряд (8) збігається в області $E$ тоді і тільки тоді, коли в цій області збігаються два дійсні функціональні ряди:

$$u_1(x,y)+u_2(x,y)+\cdots+u_n(x,y)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y); \tag{9}$$

$$v_1(x,y)+v_2(x,y)+\cdots+v_n(x,y)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x,y), \tag{10}$$

де $u_n(x,y), v_n(x,y)$ — дійсна й уявна частини комплексної функції

$$f_n(z)=u_n(x,y)+iv_n(x,y),\quad n=1,2,\ldots.$$

Для функціональних комплексних рядів, як і для дійсних функціональних рядів, важливим є поняття рівномірної збіжності.

***Означення 3.*** Функціональний ряд (8) називають *рівномірно збіжним в області $E$*, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує таке натуральне число $N=N(\varepsilon)$, що залежить від $\varepsilon$ і не залежить від точок множини $E$ (те саме для всіх точок цієї множини), що для всіх $n>N$ виконується нерівність

$$|R_n(z)|<\varepsilon, \tag{11}$$

де $R_n(z)$ — *n*-й залишок ряду (8):

$$R_n(z)=S(z)-S_n(z),$$

$S(z)$ — сума, $S_n(z)$ — *n*-на частинна сума заданого ряду.

❑ **Приклад**

**1.** Функціональний ряд

$$z^2+\frac{z^2}{1+z^2}+\ldots+\frac{z^2}{(1+z^2)^{n-1}}+\ldots \tag{12}$$

за всіх дійсних значень $z=x\neq 0$ є збіжним, оскільки він утворює нескінченно спадну геометричну прогресію зі знаменником

$$0<\frac{1}{1+x^2}<1,\quad x\neq 0.$$

При $x=0$ ряд (12) є рядом з нулів. Отже, він збігається.

Проте ряд (12) не є рівномірно збіжним. Справді,

$$S(z)=\frac{z^2}{1-\left(\frac{1}{1+z^2}\right)}=1+z^2;$$

$$S_n=1+z^2-\frac{1}{(1+z^2)^{n-1}}.$$

Тоді

$$|R_n(z)|=|S(z)-S_n(z)|=\left|\frac{1}{(1+z^2)^{n-1}}\right|<\varepsilon. \tag{13}$$

Щоб нерівність (13) виконувалася, потрібно щоб

$$n>\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln(1+z^2)}+1.$$

Звідси випливає, що при $z=x\to 0$ число $n\to+\infty$.



***Означення 4.*** Функціональний ряд (8) називають *абсолютно збіжним в області $E$*, якщо збігається в цій області додатний ряд

$$|f_1(z)|+|f_2(z)|+\cdots+|f_n(z)|+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|. \tag{14}$$

Нехай в області $E$ члени ряду (14) задовольняють нерівність

$$|f(z)|<M_k,\quad k=1,2,\ldots, \tag{15}$$

де $M_k>0$ — дійсні числа. Тоді правильними є такі теореми.

**Теорема (Вейєрштрасса).** Якщо члени функціонального ряду (8) задовольняють в області $E$ нерівність (15) і ряд з додатними членами

$$M_1+M_2+\cdots+M_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}M_n \tag{16}$$

збігається, то функціональний ряд (8) в області $E$ збігається абсолютно й рівномірно.

**Теорема 3.** Якщо членами функціонального ряду (8) є функції, неперервні в однозв'язній замкненій області $\overline{E}$, що обмежена гладким контуром $\Gamma$, і ряд (8) в цій області рівномірно збігається, то сума $S(z)$ цього ряду є інтегровною по контуру $\Gamma$ і

$$\int_\Gamma S(z)dz=\int_\Gamma f_1(z)dz+\int_\Gamma f_2(z)dz+\ldots+\int_\Gamma f_n(z)dz+\ldots. \tag{17}$$

**Степеневі ряди.** Розглянемо окремий випадок функціонального ряду (8), а саме, ряд вигляду

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n, \tag{18}$$

де $c, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ — довільні сталі комплексні числа.

Ряд (18), або ряд більш загального вигляду

$$\alpha_0+\alpha_1(z-z_0)+\alpha_2(z-z_0)^2+\cdots+\alpha_n(z-z_0)^n+\cdots, \tag{19}$$

де $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ — сталі комплексні числа; $z_0$ — довільне фіксоване комплексне число, яке називають *степеневим*, а числа $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ і $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ — *коефіцієнтами* степеневого ряду.

Для степеневих рядів, як і для дійсних степеневих рядів, справджується теорема Абеля.

**Теорема 4 (Абеля).** Якщо степеневий ряд (18) збігається в деякій комплексній точці $z_0$, то він абсолютно й рівномірно збігається у будь-якому крузі з центром у нульовій точці та радіусом, меншим за $|z_0|$.

Користуючись цією теоремою, можна довести, що множиною точок, в яких степеневий ряд (18) збігається, є круг з центром у нульовій точці.

Цей круг називають *кругом збіжності* степеневого ряду (18), а його радіус $R, 0 \le R \le +\infty$, — *радіусом збіжності*. Для визначення цього радіуса на практиці часто користуються методом, що випливає з ознаки Д'Аламбера:

якщо існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = l \ne 0,$$

то

$$R = \frac{1}{l}, \quad \text{або} \quad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|;$$

якщо $l = 0$, то при будь-якому $z$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n}\right| = l|z| = 0 < 1.$$

Отже, за ознакою Д'Аламбера степеневий ряд (18) збігається абсолютно в усій комплексній площині $(Z)$. Тоді записують $R = +\infty$.

Якщо $l = +\infty$, то $R = 0$. Справді, при будь-якому $z \ne 0$ ряд (18) розбігається, тому цей ряд збігається лише в точці $z = 0$.

Якщо $R = 0$, то степеневий ряд (18) збігається тільки в нульовій точці $z = 0$. Якщо $R = +\infty$, то степеневий ряд збігається в усій комплексній площині.

❑ **Приклади**

**2.** Розглянемо степеневий ряд

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}. \tag{20}$$

Тут

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty.$$

Отже, заданий степеневий ряд за ознакою Д'Аламбера збігається в усій комплексній площині $(Z)$. Суму цього ряду позначають через $e^z$:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots. \tag{21}$$

**3.** Розглянемо степеневі ряди

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}z^{2z-2}}{(2n-2)!} + \ldots;$$

$$z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}z^{2z-1}}{(2n-1)!} + \ldots.$$



Можна довести, що ці ряди збігаються в усій комплексній площині $(Z)$. Суму першого ряду позначають через $\cos z$, а другого — через $\sin z$:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}z^{2z-2}}{(2n-2)!} + \ldots; \tag{22}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}z^{2z-1}}{(2n-1)!} + \ldots. \tag{23}$$

Користуючись рядами (21)—(23), виведемо формули Ейлера

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{24}$$

Для цього в ряд (21) підставимо замість $z$ число $iz$. Дістанемо

$$e^{iz} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}z^{2z-2}}{(2n-2)!} + \ldots\right) + $$
$$+ i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}z^{2z-1}}{(2n-1)!} + \ldots\right).$$

У перших дужках міститься ряд (22), а в других — (23). Тому маємо таку рівність:

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z. \tag{25}$$

Підставляючи в ряд (21) замість $z$ число $-iz$, дістанемо рівність

$$e^{-iz} = \cos z - i\sin z. \tag{26}$$

Додаючи й віднімаючи почленно рівності (25) і (26), матимемо формули (24).

Застосовуючи формулу (25), можна дістати експоненціальну (показникову) форму комплексного числа

$$\alpha = re^{i\varphi}, \tag{27}$$

де $r = |\alpha|$; $\varphi = \arg\alpha$.

Справді, з тригонометричної форми числа

$$\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

дістанемо

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}.$$

З формул Ейлера випливають такі рівності:

$$\cos(-z) = \cos z; \quad \sin(-z) = -\sin z.$$

Отже, функція $\cos z$ — парна, а функція $\sin z$ — непарна.

Як і для дійсних степеневих рядів, справджується така теорема.

**Теорема 5.** Сума $S(z)$ степеневого ряду є функцією, нескінченне число разів диференційовною всередині круга збіжності.

Відповідні похідні утворюються почленним диференціюванням заданого степеневого ряду

$$S'(z) = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + \ldots + nc_n z^{n-1} + \ldots;$$

$$S''(z)=2c_2+3\cdot 2c_3z+\ldots+n(n-1)c_nz^{n-2}+\ldots;$$

..................................................................

$$S^{(k)}(z)=k(k-1)(k-2)\ldots 1c_k+(k+1)k(k-1)\ldots 2c_{k+1}z+\ldots,$$

причому ці ряди мають той самий круг збіжності, що й ряд (18).

## 4.8 ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

**Показникова й тригонометричні функції.** Суми збіжних у всій комплексній площині $(Z)$ степеневих рядів (21)—(23) позначено відповідно через $e^z$, $\cos z$, $\sin z$ (див. п. 4.7). Таке позначення цілком природне, оскільки за дійсного значення $z=x$ ці ряди, як доведено в аналізі, збігаються до функцій $e^x$, $\cos x$, $\sin x$. Тому за аналогією функцію $e^z$ називають *показниковою*, а функції $\cos z$, $\sin z$ — *тригонометричними*.

Наведемо кілька властивостей цих функцій.

**1°.** Для будь-яких комплексних чисел $z_1$ і $z_2$ виконується рівність

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}. \qquad (1)$$

Оскільки $e^{z_1}$ і $e^{z_2}$ є сумами абсолютно збіжних рядів, то за теоремою Коші про множення абсолютно збіжних рядів маємо

$$e^{z_1}e^{z_2}=\left(1+\frac{z_1}{1!}+\frac{z_1^2}{2!}+\ldots+\frac{z_1^n}{n!}+\ldots\right)\left(1+\frac{z_2}{1!}+\frac{z_2^2}{2!}+\ldots+\frac{z_2^n}{n!}+\ldots\right)=$$

$$=1+\frac{z_1+z_2}{1!}+\frac{z_1^2+2z_1z_2+z_2^2}{2!}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{z_1^n+nz_1^{n-1}z_2+\ldots+nz_1z_2^{n-1}+z_2^n}{n!}+\ldots=e^{z_1+z_2}.$$

Властивість доведено.

**2°.** Для довільного комплексного числа $z$ виконується рівність

$$e^{-z}=\frac{1}{e^z}. \qquad (2)$$

Справді, згідно з властивістю 1°, маємо

$$e^{-z}e^z=e^{-z+z}=e^{\circ}=1.$$

Звідси дістанемо рівність 2.

**3°.** Для довільного комплексного числа $z$

$$e^z\neq 0.$$

Ця властивість випливає безпосередньо з властивості 2°.



**4°.** Для довільних комплексних чисел $z_1$ і $z_2$ виконується рівність

$$e^{z_1-z_2}=\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}.$$

Справді, згідно з властивостями 1° і 2°,

$$e^{z_1-z_2}=e^{(z_1+(-z_2))}=e^{z_1}e^{-z_2}=\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}.$$

**5°.** Для будь-якого комплексного числа $z$ виконується рівність

$$e^{z+2\pi i}=e^z,$$

тобто $e^z$ — періодична функція із суто уявним періодом $2\pi i$.

Справді,

$$e^{z+2\pi i}=e^ze^{2\pi i}=e^z(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=e^z.$$

**6°.** Для будь-яких комплексних чисел $z_1$ і $z_2$ виконуються рівності

$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2; \qquad (3)$$

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2. \qquad (4)$$

Щоб довести ці рівності, скористаємося рівністю

$$e^{i(z_1+z_2)}=e^{iz_1}e^{iz_2},$$

або

$$\cos(z_1+z_2)+i\sin(z_1+z_2)=(\cos z_1+i\sin z_1)(\cos z_2+i\sin z_2)=$$

$$=(\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2)+i(\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2). \qquad (5)$$

Підставимо в обидві частини рівності (5) замість $z_1$ і $z_2$ відповідно $-z_1$ і $-z_2$:

$$\cos(z_1+z_2)-i\sin(z_1+z_2)=(\cos z_1-i\sin z_1)(\cos z_2-i\sin z_2)=$$

$$=(\cos z_1\cos z_2+\sin z_1\sin z_2)-i(\cos z_1\sin z_2+\sin z_1\cos z_2). \qquad (6)$$

Додавши почленно рівності (5) і (6), дістанемо рівність (4). Віднявши почленно від рівності (5) рівність (6), дістанемо рівність (3).

Н а с л і д о к. Для будь-якого комплексного числа $z$ виконуються рівності

$$\sin 2z=2\sin z\cos z; \qquad (7)$$

$$\cos 2z=\cos^2 z-\sin^2 z; \qquad (8)$$

$$\cos^2 z+\sin^2 z=1. \qquad (9)$$

Щоб дістати рівності (7) і (8), достатньо у рівностях (3) і (4) покласти

$$z_1=z_2=z.$$

Щоб дістати рівність (9), достатньо у рівності (4) покласти

$$z_1 = z; \quad z_2 = -z.$$

**7°.** Функції $\cos z$ і $\sin z$ є періодичними з періодом $2\pi$:

$$\cos(z+2\pi) = \cos z; \quad \sin(z+2\pi) = \sin z.$$

Справді,

$$\cos(z+2\pi) = \cos z \cos 2\pi - \sin z \sin 2\pi = \cos z;$$

$$\sin(z+2\pi) = \sin z \cos 2\pi + \cos z \sin 2\pi = \sin z.$$

**8°.** Функції $e^z, \sin z, \cos z$ є необмеженими в комплексній площині $(Z)$. Необмеженість показникової функції випливає з того, що за дійсного значення $z (z = x)$

$$e^x \to +\infty, \text{ якщо } x \to +\infty.$$

Для доведення необмеженості функції $\cos z$ застосуємо формули Ейлера (див. (24), п. 4.7). Маємо

$$\cos iy = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2},$$

звідси

$$|\cos iy| = \cos iy \to +\infty \text{ при } y \to +\infty \text{ і при } y \to -\infty.$$

Необмеженість функції $\sin z$ у комплексній площині $(Z)$ випливає з того, що при $y > 0$

$$|\sin iy| = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \to +\infty, \text{ якщо } y \to +\infty,$$

а при $y < 0$

$$|\sin iy| = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2} \to +\infty, \text{ якщо } y \to -\infty.$$

**9°.** Рівність

$$\sin z = 0 \tag{10}$$

виконується тільки при $z = k\pi, k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$.

Справді, згідно з формулами Ейлера, рівність (10) рівносильна рівності

$$e^{iz} - e^{-iz} = 0,$$

або $e^{2iz} = 1$.

Поклавши $z = x + iy$, знаходимо $e^{-2y} e^{2ix} = 1$. Цю рівність можна записати ще так:

$$e^{-2y}(\cos 2x + i \sin 2x) = 1.$$

Звідси модуль комплексного числа в лівій частині дорівнює $e^{-2y}$, а його аргумент — $2x$. Тому маємо такі рівності:

$$e^{-2y} = 1; \quad 2x = 2k\pi.$$

Отже, $2y = 0$; $x = k\pi$; $z = x + iy = k\pi$; $k = 0; \pm 1; \pm 2 \ldots$.



**10°.** Рівність

$$\cos z = 0 \tag{11}$$

виконується тільки при $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Доведення цієї властивості аналогічне попередньому доведенню. Крім розглянутих властивостей функції $e^z$, $\cos z$ і $\sin z$ мають ще інші властивості, на яких тут не зупинятимемося.

Щодо тригонометричних функцій $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\sec z$, $\operatorname{cosec} z$ комплексної змінної $z$, то їх визначають за формулами:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}; \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}; \quad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z}.$$

Властивості цих функцій не розглядатимемо.

**Гіперболічні функції.** Розглянемо степеневі ряди

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots; \tag{12}$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots. \tag{13}$$

Можна довести, що ці ряди є абсолютно збіжними в усій комплексній площині $(Z)$, тобто вони мають суми. Суму ряду (12) називають *гіперболічним синусом* і позначають $\operatorname{sinhyp} z$ або $\operatorname{sh} z$, суму ряду (13) називають *гіперболічним косинусом* і позначають $\operatorname{coshyp} z$ або $\operatorname{ch} z$. У подальшому користуватимемося позначеннями $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$.

Гіперболічні функції $\operatorname{sh} z$ і $\operatorname{sh} z$ можна визначити за формулами

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \tag{14}$$

які є наслідками формул (12) і (13).

Використовуючи формули Ейлера, дістанемо такі рівності:

$$\sin iz = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = i \operatorname{sh} z; \quad \cos iz = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \operatorname{ch} z. \tag{15}$$

Формули (15) встановлюють зв'язок між тригонометричними і гіперболічними функціями. Це дає змогу будь-яке співвідношення між тригонометричними функціями $\sin z$ і $\cos z$ подати як відповідне співвідношення між гіперболічними функціями $\operatorname{sh} z$ і $\operatorname{ch} z$. Наприклад, з рівності

$$\sin^2 iz + \cos^2 iz = 1$$

після заміни $\sin iz$ і $\cos iz$ за формулами (15) дістанемо

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

Зі співвідношення

$$\cos 2iz = \cos^2 iz - \sin^2 iz$$

після відповідної заміни маємо

$$\operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z.$$

Взагалі, у такий спосіб з формул звичайної тригонометрії можна дістати формули гіперболічної тригонометрії.

**Логарифмічна функція.** Логарифмічною функцією називають функцію, обернену до показникової функції

$$w = e^z,$$

і позначають

$$z = \operatorname{Ln} w.$$

Областю існування (визначення) логарифмічної функції є множина значень, яких набуває показникова функція.

Згідно з властивістю 3°, показникова функція $w = e^z$ не дорівнює нулю для жодного комплексного числа $z$. Число нуль не належить області існування логарифмічної функції. Тому кажуть, що число нуль не має логарифма (логарифм нуля не існує). Надалі аргумент логарифмічної функції позначатимемо через $z$, а функцію — через $w$.

Тоді логарифмічну функцію запишемо у вигляді

$$w = \operatorname{Ln} z. \tag{16}$$

Отже, користуючись означенням логарифмічної функції і позначенням (16), дістаємо рівність

$$e^w = z, \quad z \neq 0, \tag{17}$$

або

$$e^{\operatorname{Ln} z} = z.$$

Щоб знайти $w$ за відомим $z$, потрібно розв'язати рівняння (17) відносно $w$.

Для цього запишемо $w$ і $z$ у вигляді

$$w = u + iv, \quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$r = |z| > 0, \quad -\pi < \varphi = \arg z = \pi.$$

Підставляючи значення $w$ і $z$ у співвідношення (17), дістанемо

$$e^u = r, \; v = \varphi + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Отже, згідно з (16),

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}|z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{18}$$

де $\operatorname{Ln}|z|$ є звичайним натуральним логарифмом додатного числа $|z|$.

Таким чином, логарифмічна функція $\operatorname{Ln}|z|$, як це випливає з формули (18), є нескінченно значною. Різні значення її відрізняються коефіцієнтом при $i$ на $2k\pi$.

Отже, логарифм будь-якого дійсного або комплексного числа, відмінного від нуля, має нескінченну множину значень, які знаходять за формулою (18). Серед цієї множини значень виокремлюють одне, яке дістають з формули (18) при $k = 0$. Це значення називають *головним значенням логарифма* і позначають

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z. \tag{19}$$

Тоді всі значення логарифма комплексного числа $z$ можна записати так:

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i, \; k = \pm 1, \; \pm 2, \ldots \tag{20}$$

Розглянемо знаходження логарифма дійсного числа.

Якщо $z = x > 0$ — дійсне додатне число, то $|z| = x, \arg z = 0$, і, отже, головне значення логарифма додатного числа дорівнює звичайному натуральному логарифму цього числа. Решта значень логарифма цього числа дорівнює

$$\ln x + 2k\pi i, \; k = \pm 1, \; \pm 2, \ldots.$$

Якщо $z = x < 0$ — дійсне від'ємне число, то $|z| = -x, \; \arg z = \pi$, і всі значення логарифма від'ємного числа виражають формулою

$$\operatorname{Ln} x = \ln(-x) + \pi i(2k+1), \; k = 0, \pm 1, \ldots.$$

Отже, всі значення логарифма від'ємного числа є уявними числами, зокрема і його головне значення $\operatorname{Ln}(-x) + \pi i$.

Наприклад,

$$\ln(-1) = \pi i, \quad \operatorname{Ln}(-1) = \pi i(2k+1),$$
$$\ln(-e) = 1 + \pi i, \quad \operatorname{Ln}(-e) = 1 + \pi i(2k+1),$$
$$k = \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Таким чином, висловлення з елементарної алгебри «від'ємні числа не мають логарифмів» слід замінити висловленням «від'ємні числа не мають дійсних логарифмів».

Слід зауважити, що всі значення логарифма уявного числа $z$ — уявні числа. Так,

$$\operatorname{Ln}(1-i) = \ln|1-i| + i(\arg(1-i) + 2k\pi) = \ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right),$$

$$\operatorname{Ln} i = \ln|i| + i(\arg i + 2k\pi) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

Наприкінці подамо формули, аналогічні формулам звичайних логарифмів (довести ці співвідношення пропонуємо самостійно).

Нехай маємо два комплексні числа $z_1 \neq 0$ і $z_2 \neq 0$. Тоді виконуються рівності

$$\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2;$$

$$\mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2.$$

**Обернені тригонометричні й обернені гіперболічні функції.** Оскільки тригонометричні й гіперболічні функції виражаються через показникову функцію, а логарифмічна функція є оберненою до показникової, то слід чекати, що функції, обернені до тригонометричних і гіперболічних функцій, певним чином виражаються через логарифмічну функцію. Як приклад розглянемо функцію $w = \mathrm{Arctg}\, z$, де під символом $\mathrm{Arctg}\, z$ розуміють сукупність розв'язків рівняння $\mathrm{tg}\, w = z$.

Оскільки $\mathrm{tg}\, w = \frac{\sin w}{\cos w}$, то, використовуючи формули Ейлера, дістанемо рівняння

$$\frac{1}{i}\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} = z.$$

Це рівняння можна записати у вигляді

$$e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz}, \quad \text{або} \quad 2iw = \ln\frac{1+iz}{1-iz}.$$

Звідси

$$w = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}.$$

Отже, для оберненої тригонометричної функції $\mathrm{Arctg}\, z$ маємо

$$\mathrm{Arctg}\, z = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}. \tag{21}$$

Аналогічно можна дістати такі формули для обернених тригонометричних функцій $\mathrm{Arcsin}\, z, \mathrm{Arccos}\, z$:

$$\mathrm{Arcsin}\, z = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right); \tag{22}$$

$$\mathrm{Arccos}\, z = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right). \tag{23}$$

Із формул (21)—(23) випливає, що обернені тригонометричні функції $\mathrm{Arctg}\, z$, $\mathrm{Arcsin}\, z$, $\mathrm{Arccos}\, z$ є нескінченнозначними, оскільки нескінченнозначною є логарифмічна функція, через яку виражаються ці функції. Знайдемо, наприклад, $\mathrm{Arcsin}\, 1$, користуючись формулою (22). Маємо

$$\mathrm{Arcsin}\, 1 = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\, i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$



Розглянемо функції, обернені до гіперболічних. Візьмемо, наприклад, функцію $w = \mathrm{Arcch}\, z$, яка є оберненою до функції $z = \mathrm{ch}\, w$. Використовуючи означення функції $\mathrm{ch}\, w$, дістанемо рівняння

$$z = \frac{e^{w} + e^{-w}}{2}.$$

Розв'язуючи його відносно $w$, знаходимо

$$w = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

Отже, для значень функції $\mathrm{Arcch}\, z$ дістанемо

$$\mathrm{Arcch}\, z = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right). \tag{24}$$

Аналогічно дістанемо

$$\mathrm{Arcsh}\, z = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right); \tag{25}$$

$$\mathrm{Arcth}\, z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z}. \tag{26}$$

**Загальна степенева й загальна показникова функції.** Загальну степеневу функцію $z^{\alpha}$, де $\alpha$ — довільне дійсне або комплексне число, а $z \neq 0$, визначають за допомогою рівності

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \mathrm{Ln}\, z}.$$

Таким чином, загальна степенева функція є нескінченнозначною, всі її значення знаходять за формулою

$$z^{\alpha} = e^{\alpha(\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi))}, \quad k = 0, \pm 1, \dots. \tag{27}$$

Не вдаватимемося до аналізу формули (27) за різних значень числа $\alpha$. Можна було б довести, наприклад, що коли $\alpha$ дійсне раціональне число $\frac{m}{n}$ (де цілі числа $m$ і $n$ не мають спільних дільників і $n > 1$), то $z^{\frac{m}{n}}$ має тільки $n$ різних значень, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Загальна показникова функція комплексної змінної $a^z$, $a \neq 0$, означається за формулою

$$a^z = e^{z \mathrm{Ln}\, a}. \tag{28}$$

Ця функція визначена у всій комплексній площині $(Z)$.

❑ **Приклад**

Знайти всі значення степеня $(1+i)^i$.

Р о з в ' я з а н н я. Цей степінь можна розглядати як значення загальної показникової функції $a^z$, де $a=1+i;\ z=i$. Тому, використавши формулу (28), дістанемо

$$(1+i)^i = e^{i\mathrm{Ln}(1+i)} = e^{i(\ln|1+i|+i(\arg 1+i)+2k\pi)} = e^{i\left(\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} = e^{i\ln\sqrt{2}-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)} =$$

$$= e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}\left(\cos\ln\sqrt{2}+i\sin\ln\sqrt{2}\right),\ k=0,\pm1,\ldots.$$

## 4.9

## РОЗВИНЕННЯ РЕГУЛЯРНОЇ ФУНКЦІЇ В СТЕПЕНЕВИЙ РЯД. РЯД ТЕЙЛОРА. РЯД ЛОРАНА

**Ряд Тейлора.** Нехай функція $w=f(z)$ є регулярною в крузі $|z-a|\le R$ з центром у точці $a$ і радіусом $R$.

**Т е о р е м а 1.** Якщо функція $w=f(z)$ є регулярною в крузі $|z-a|\le R$, то вона єдиним способом розвивається всередині цього круга в степеневий ряд, впорядкований за цілими додатними степенями $z-a$, а саме виконується рівність

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\ldots. \tag{1}$$

Ряд у правій частині рівності (1), як і у випадку дійсної функції, називають *рядом Тейлора,* побудованим для функції $f(z)$.

Якщо $a=0$, то цей ряд називають *рядом Маклорена.*

Д о в е д е н н я. Якщо для функції $f(z)$ виконуються умови теореми, то можна застосувати формулу Коші

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi, \tag{2}$$

де $\gamma$ — коло, $|z-a|=R$.

Запишемо дріб $\frac{1}{\xi-z}$ у вигляді

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-a)-(z-a)}=\frac{1}{(\xi-a)}\frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-a)^k}{(\xi-a)^{k+1}}. \tag{3}$$

Оскільки точка $z$ лежить усередині круга, то можна підібрати таке число $R_1>0,\ R_1<R$, що виконуються нерівності

$$|z-a|\le R_1<R. \tag{4}$$

Члени функціонального ряду (3) за модулем не більші ніж члени додатного ряду

$$\frac{1}{R}+\frac{R_1}{R^2}+\frac{R_1^2}{R^3}+\ldots+\frac{R_1^n}{R^{n+1}}+\ldots. \tag{5}$$



Ряд (5) є збіжним як геометричний ряд, в якому знаменник $q=\frac{R_1}{R}<1$. Отже, ряд (3) за теоремою Вейєрштрасса рівномірно збігається в крузі $|z-a|<R_1$.

Підставимо значення функції $\frac{1}{\xi-z}$ з рівності (3) у формулу Коші (2). Дістанемо

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\xi)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-a)^k}{(\zeta-a)^{k+1}}d\zeta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{k+1}}(z-a)^k. \tag{6}$$

Використовуючи формули (17), п. 4.6, знаходимо

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)d\xi}{(\zeta-a)^{k+1}}=f^{(k)}(a)\frac{1}{k!}, \tag{7}$$

а рівність (6) набирає вигляду

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k. \tag{8}$$

У правій частині цієї рівності маємо ряд Тейлора.

Доведемо, що розвинення (8) єдине. Нехай задану функцію можна розвинути ще в такий степеневий ряд:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k. \tag{9}$$

Припустимо, що $z=a$. Тоді $c_0=f(a)$.

Продиференціюємо ряд (9)

$$f'(z)=c_1+2c_2(z-a)+3c_3(z-a)^2+\ldots.$$

При $z=a$

$$c_1=\frac{f'(a)}{1!}$$

і т. д. Диференціюючи послідовно ряд (9) і підставляючи щоразу $z=a$, маємо

$$c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!},\quad k=0,1,2\ldots,$$

де $f^{(0)}(a)=f(a),\ 0!=1$.

Таким чином, розвинення (9) збігається з рядом Тейлора (8).

Теорему доведено.

**Ряд Лорана**[1].

***Означення.*** Ряд вигляду

$$c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+...+c_n(z-a)^n+...$$

$$...+c_{-1}(z-a)^{-1}+c_{-2}(z-a)^{-2}+...+c_{-m}(z-a)^{-m}+..., \tag{10}$$

що містить не тільки цілі додатні, а й цілі від'ємні степені $(z-a)$, називають *рядом Лорана.* Комплексні числа $c_0,\ c_1, ...,\ c_n, ...,\ c_{-1},\ c_{-2}, ...$ називають *коефіцієнтами ряду Лорана.*

Ряд Лорана (10) можна записати ще так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n+\sum_{m=1}^{\infty} c_{-m}(z-a)^{-m}. \tag{11}$$

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{12}$$

— звичайний степеневий ряд із цілими додатними степенями. Він збігається, як уже зазначалося, всередині круга $|z-a|<R$, а сума ряду є регулярною в цьому крузі.

Ряд (12) називають *правильною частиною ряду Лорана* (11).

Ряд із від'ємними степенями $z-a$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_{-m}(z-a)^{-m}, \tag{13}$$

називають *головною частиною ряду Лорана* (11).

Зробивши в ряду (13) заміну $\eta=\dfrac{1}{z-a}$, дістанемо степеневий ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_{-m}\eta^m \tag{14}$$

з додатними степенями $\eta$. Нехай ряд (14) збігається всередині круга $|\eta|<r$, де $0\le r\le\infty$. Тоді сума ряду (14) при $0<r<\infty$ (надалі розглядатимемо тільки такі ряди (13)) є регулярною всередині цього круга. Сума ряду (13) є регулярною в області $|z-a|>\dfrac{1}{r}=R_1$, тобто поза кругом із центром у точці $a$ і радіусом $R_1$.

Отже, якщо число $R_1<R$, то ряд Лорана (11) збігається всередині кільця (рис. 119)

$$R_1<|z-a|<R$$

і сума цього ряду є функцією, регулярною в цьому кільці. Ряд Лорана тоді можна почленно диференціювати й інтегрувати.

[1] *Лоран П.* (1813—1854) — французький математик.



Ряд Лорана записують ще так:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

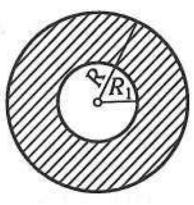

**Рис. 119**

**Т е о р е м а 2 (Лорана).** Якщо функція $w=f(z)$ є регулярною всередині кільця $R_1<|z-a|<R$, то функцію $f(z)$ у кожній точці $z$ цього кільця можна зобразити збіжним рядом Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

коефіцієнти $c_k$ якого визначають за формулами

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{l_0}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}d\zeta,\quad k=0,\pm1,\pm2,..., \tag{15}$$

де $l_0$ — коло $|z-a|=R_0$ з центром у точці $a$ і радіусом $R_0$, $R_1<R_0<R$.

Д о в е д е н н я. Без додаткових обмежень можна вважати, що функція $f(z)$ регулярна як на колі $l, |z-a|=R$, так і на колі $l_1$, $|z-a|=R_1$. У протилежному випадку можна підібрати числа $R_1'$ і $R'$ такі, що $R_1<R_1'\le|z-a|\le\le R'<R$, і, отже, на колах радіусів $R_1'$ і $R'$ функція $f(z)$ регулярна.

За формулою Коші маємо

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{l}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{l_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}. \tag{16}$$

Нехай точка $\zeta$ лежить на колі $l$. Тоді $\left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right|<1.$

Як і при доведенні теореми 1, дістанемо

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-a)^k}{(\zeta-a)^{k+1}}.$$

Отже,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{l}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k, \tag{17}$$

де

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{l}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}d\zeta,\quad k=0,1,2,.... \tag{18}$$

Якщо точка $\zeta$ лежить на колі $l_1$, то $\left|\dfrac{\zeta-a}{z-a}\right|<1.$

Дістанемо таке розвинення:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z-a)} = -\frac{1}{z-a}\frac{1}{1-\frac{\zeta - a}{z-a}} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^{k-1}}{(z-a)^k}.$$

Підставляючи значення $\frac{1}{\zeta - z}$ у другий інтеграл рівності (16), знаходимо

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{l_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - a}d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{l_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-k+1}}\frac{1}{(z-a)^k} = \sum_{k=1}^{\infty}c_{-k}(z-a)^{-k}, \tag{19}$$

де

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{-k+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{20}$$

Отже, підставляючи значення (17) і (19) у рівність (16), матимемо таке розвинення функції $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k + \sum_{k=1}^{\infty}c_{-k}(z-a)^{-k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m(z-a)^m. \tag{21}$$

Коефіцієнти $c_m$ визначають за формулами

$$c_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{m+1}}, \tag{22}$$

де $l_2$ — довільне коло, що лежить між колами $l_1$ і $l$ (формула (22) об'єднує формули (18) і (20).

Можна також довести, що розвинення (21) — єдине.

Теорему доведено.

❑ **Приклади**

**1.** Розвинути функцію $w = \operatorname{arctg} z$ (головне значення $\operatorname{Arctg} z$) у ряд Маклорена.

Розв'язання. Очевидно, що справедливою є рівність

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \cdots + (-1)^{n-1}z^{2n-2} + \cdots \tag{23}$$

для всіх точок $|z| \le r < 1$.

Ряд (23) у крузі $|z| \le r < 1$ рівномірно збігається. Тому можна почленно інтегрувати, наприклад, уздовж прямої, що сполучає нульову точку $O$ і точку $z$,

$$\int_0^z\frac{dz}{1+z^2} = \int_0^z dz - \int_0^z z^2dz + \ldots + (-1)^{n-1}\int_0^z z^{2n-2}dz + \ldots. \tag{24}$$



Як і у випадку дійсних функцій, можна довести, що

$$\int_0^z\frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arctg} z, \quad \int_0^z z^k dz = \frac{z^{k+1}}{k+1}, \quad k \ne -1.$$

Тоді з формули (24) дістанемо таке розвинення:

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1} + \ldots.$$

**2.** Розвинути в ряд Лорана функцію

$$w = \frac{1}{z(z-1)}. \tag{25}$$

Розв'язання

І. Нехай $0 < |z| < 1$. Тоді функцію можна записати так:

$$w = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} = -\frac{1}{z} - \left(1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots\right) = -\frac{1}{z} - \sum_{k=0}^{\infty}z^k. \tag{26}$$

Головна частина ряду Лорана містить один член: $-\frac{1}{z}(c_{-1} = -1, c_{-k} = 0,\ k = 2, 3, \ldots)$.

ІІ. Нехай $1 < |z| < \infty$. Тоді

$$w = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} =$$

$$= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{z^k}. \tag{27}$$

У розвиненні (27) правильна частина ряду Лорана дорівнює нулю, а головна частина є нескінченним рядом $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{z^k}$.

ІІІ. Нехай $0 < |z-1| < 1$. Запишемо функцію (25) у вигляді

$$w = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{1+z-1} = \frac{1}{z-1} - \left(1 - (z-1) + (z-1)^2 - \ldots + (-1)^{n-1}(z-1)^n + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{z-1} - 1 - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k.$$

Тут головна частина складається з одного члена

$$\frac{1}{z-1}(c_{-k} = 0,\ k = 2, 3, \ldots).$$

## 4.10
## ІЗОЛЬОВАНІ ОСОБЛИВІ ТОЧКИ

Нехай функція $w = f(z)$ є регулярною в точці $z = a$. Тоді ця функція є регулярною і в деякому її околі, наприклад у крузі $|z-a| < R$. У цьому випадку функцію $f(z)$ можна розвинути у степеневий ряд (ряд Тейлора), тобто $f(z)$ є сумою ряду

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + \ldots + a_n(z-a)^n + \ldots. \tag{1}$$

Точку $z = a$, в околі якої функція $f(z)$ розвивається в степеневий ряд за цілими додатними степенями $z - a$, називають *звичайною точкою функції* $f(z)$.

***Означення 1.*** Точку $z = a$ називають *нулем*, або *коренем, функції* $w = f(z)$, якщо $f(a) = 0$.

Отже, якщо $z = a$ — нуль функції $f(z)$, то в розвиненні (1) $a_0 = f(a) = 0$.

***Означення 2.*** Точку $z = a$ називають *m-кратним нулем*, або *m-кратним коренем, функції* $f(z)$, якщо

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a) = 0,$$

проте $f^{(m)}(a) \neq 0$.

Якщо $z = a \in m$-кратним нулем функції, то, згідно з формулою (1), цю функцію можна записати у вигляді

$$f(z) = (z-a)^m (a_m + a_{m+1}(z-a) + \ldots) = (z-a)\varphi(z), \tag{2}$$

де $\varphi(a) \neq 0$.

Можна було б довести, що нулі регулярної функції, відмінної від тотожного нуля, $f(z) \neq 0$, є ізольованими точками, тобто існує круг $|z-a| < R$, в якому крім нуля $z = a$ інших нулів немає.

***Означення 3.*** Точку $z = a$, в якій функція $w = f(z)$ не є регулярною, називають *особливою точкою функції* $f(z)$.

Якщо існує окіл особливої точки $z = a$, в якому, крім $z = a$, функція $f(z)$ є регулярною, то точку $z = a$ називають *ізольованою особливою точкою*.

Так, функція $w = \dfrac{1}{z-2}$ має одну ізольовану особливу точку $z = 2$. Функція $w = \dfrac{1}{z^2+1}$ має дві ізольовані особливі точки: $z_1 = -i$; $z_2 = i$.

Отже, нехай $z = a$ є ізольованою особливою точкою. Тоді існує круг, наприклад $|z-a| < R$, в якому функція $f(z)$ є регулярною, крім точки $z = a$. Якщо з цього круга виключити центр, то в області

$$0 < |z-a| < R \tag{3}$$



$f(z)$ є регулярною. За теоремою Лорана така функція в області (3) розвивається в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} (z-a)^{-m}. \tag{4}$$

***Означення 4.*** Ізольовану особливу точку $z = a$ називають:

1) *усувною*, якщо в ряді Лорана (4) всі коефіцієнти за від'ємних степенів $z - a$ дорівнюють нулю, тобто

$$a_{-1} = a_{-2} = \ldots = 0;$$

2) *полюсом порядку* $m \geq 1$, якщо в ряді Лорана коефіцієнт $a_{-m} \neq 0$, а всі наступні коефіцієнти $a_{-(m+1)}, a_{-(m+2)}, \ldots$ дорівнюють нулю;

3) *істотно особливою точкою*, якщо серед коефіцієнтів за від'ємних степенів $z - a$ є нескінченна кількість їх, відмінних від нуля.

❑ **Приклади**

**1.** Розглянемо функцію

$$w = \frac{1}{z(z-1)}. \tag{5}$$

Ця функція має дві ізольовані точки; $z_1 = 0; z_2 = 1$.

Було показано, що функція (5) в області $0 < |z| < 1$ розвивається в ряд Лорана

$$w = -\frac{1}{z} - \sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

Отже, ізольована особлива точка $z = 0$ є полюсом порядку $m = 1$ (простий полюс).

В області $0 < |z-1| < 1$ ряд Лорана для функції (5) має вигляд

$$w = \frac{1}{z-1} - 1 - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k.$$

Тут тільки один член з від'ємним степенем $z - 1$. Точка $z = 1$ є полюсом порядку $m = 1$.

**2.** Розглянемо функцію

$$w = e^{\frac{1}{z}}. \tag{6}$$

Особливою точкою для цієї функції є точка $z = 0$.

Підставляючи в ряд для $e^z$ значення $\frac{1}{z}$, дістанемо ряд

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + \ldots, \tag{7}$$

який збігається при всіх $z \neq 0$.

Ряд Лорана (7) містить нескінченну кількість членів із від'ємними степенями $z$.

Отже, ізольована особлива точка $z = 0$ для функції (6) і є істотно особливою точкою.

**3.** Нехай маємо функцію

$$w=\frac{\sin z}{z}. \tag{8}$$

Особливою точкою для функції (8) є точка $z=0$. Підставляючи у функцію (8) замість $\sin z$ ряд (23), п. 4.7, дістанемо степеневий ряд

$$1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-...+\frac{(-1)^{n-1}z^{2z-2}}{(2n-1)!}+..., \tag{9}$$

який не містить від'ємних степенів $z$. Отже, особлива точка $z=0$ для функції (8) є усувною.

З'ясовується, що функція $w=f(z)$ в околі ізольованої особливої точки поводить себе по-різному залежно від того, яка це точка: усувна, полюс чи істотно особлива. Характер цієї поведінки визначають такі теореми.

**Теорема 1.** Якщо ізольована особлива точка $z=a$ є усувною, то функція $f(z)$ при $z\to a$ має скінченну границю.

Доведення. Нехай $z=a$ є усувною точкою. Тоді $f(z)$ в кільці $0<|z-a|<R$ розвивається в степеневий ряд $f(z)=a_0+a_1(z-a)+...+a_n(z-a)^n+...$

Оскільки сума степеневого ряду всередині круга збіжності є неперервною функцією, то існує границя

$$\lim_{z\to a} f(z)=a_0. \tag{10}$$

Теорему доведено.

Отже, у випадку усувної особливої точки функцію $f(z)$ можна так довизначити в точці $z=a$, поклавши $f(a)=a_0$, що функція $f(z)$ буде регулярною в усьому крузі $|z-a|<R$.

Оскільки $f(z)$ у точці $z=a$ має границю, то ця функція в деякому околі точки $z=a$ обмежена за модулем, тобто

$$|f(z)|<M\left(z\in E: 0<|z-a|<R_1<R\right).$$

Наступні теореми встановлюють зв'язок між нулем і полюсом.

**Теорема 2.** Якщо точка $z=a$ є $m$-кратним нулем для функції $f(z)$, то та сама точка для функції $\Psi(z)=\frac{1}{f(z)}$ є полюсом порядку $m$.

Доведення. Нехай $z=a$ є $m$-кратним нулем для функції $f(z)$. Тоді виконується рівність

$$f(z)=(z-a)^m\varphi(z),$$

де $\varphi(a)\neq 0$ і $\varphi(z)$ є регулярною в крузі $|z-a|<R$. Отже, функцію $\Psi(z)$ можна записати так:

$$\Psi(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\frac{1}{\varphi(z)}. \tag{11}$$



Функція $\frac{1}{\varphi(z)}$ є регулярною в крузі $|z-a|<R$, вона розвивається в степеневий ряд у цьому крузі за додатними степенями $z-a$. Таким чином, для функції (11) дістанемо ряд Лорана

$$\Psi(z)=b_0(z-a)^{-m}+b_1(z-a)^{-m+1}+...+b_m+b_{m+1}(z-a)+...,$$

де $b_0\neq 0$.

Звідси випливає, що точка $z=a$ є полюсом порядку $m$ для функції (11).

Теорему доведено.

**Теорема 3.** Якщо точка $z=a$ для функції $f(z)$ є полюсом порядку $m$, то та сама точка функції $\Psi(z)=\frac{1}{f(z)}$ буде $m$-кратним нулем, якщо під $\Psi(a)$ розуміти $\lim\limits_{z\to a}\Psi(z)$.

Доведення. Згідно з умовою цієї теореми, функція розвивається в ряд Лорана

$$f(z)=a_{-m}(z-a)^{-m}+a_{-m+1}(z-a)^{-m+1}+...+a_{-1}(z-a)^{-1}+a_0+,$$
$$+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+..., \tag{12}$$

де $a_{-m}\neq 0$.

Розглянемо функцію

$$\varphi(z)=f(z)(z-a)^m=a_{-m}+a_{-m+1}(z-a)+...+a_{-1}(z-a)^{m-1}+$$
$$+a_0(z-a)^m+a_1(z-a)^{m+1}+.... \tag{13}$$

Ряд у правій частині (13) не містить членів із від'ємними степенями $z-a$. Отже, для функції $\varphi(z)$ ізольована особлива точка $z=a$ є усувною. Нехай

$$\varphi(a)=\lim_{z\to a}\varphi(z)=a_{-m}\neq 0.$$

У цьому випадку функція $\varphi(z)$ у точці $z=a$ буде регулярною. Таким чином, $\frac{1}{\varphi(z)}$ розвивається в степеневий ряд

$$\frac{1}{\varphi(z)}=c_0+c_1(z-a)+...+c_n(z-a)^n+...,$$

де $c_0\neq 0$.

Тоді для функції $f(z)$ дістанемо ряд

$$\frac{1}{f(z)}=(z-a)^m\left(c_0+c_1(z-a)+...+c_n(z-a)^n+...\right).$$

Звідси випливає, що ізольована особлива точка є $m$-кратним нулем функції $\frac{1}{f(z)}$.

Теорему доведено.

**Теорема 4.** Якщо ізольована особлива точка $z=a$ є полюсом порядку $m$ для функції $f(z)$, то $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$.

**Доведення.** Оскільки для функції $f(x)$ точка $z=a$ є полюсом порядку $m$, то для функції $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ ця точка є $m$-кратним нулем. Тому

$$\lim_{z\to a}\varphi(z)=0. \tag{14}$$

Із рівності (14) випливає, що для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$ таке, що для всіх $z$ із круга $|z-a|<\delta<R$ виконується нерівність

$$|\varphi(z)|<\varepsilon,\quad \frac{1}{|\varphi(z)|}=|f(z)|>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Остання нерівність означає, що

$$\lim_{z\to a} f(z)=\infty.$$

Теорему доведено.

Поведінку функції $f(z)$ поблизу істотно особливої точки $z=a$ характеризує така теорема.

**Теорема 5.** Якщо ізольована особлива точка $z=a$ є істотно особливою для функції $f(z)$, то в цій точці не існує ні скінченної, ні нескінченної границі.

Цю теорему приймемо без доведення.

❑ **Приклад**

4. Розглянемо функцію

$$w=e^{\frac{1}{z}},\quad z=x+iy.$$

Для цієї функції точка $z=0$ є ізольованою істотно особливою.

Знайдемо $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$ за умови, що $y=0$, а $x>0$:

$$\lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}=\lim_{\substack{x\to 0+0\\ y=0}} e^{\frac{1}{x}}=+\infty.$$

Знайдемо $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$ за умови, що $y=0$, а $x<0$:

$$\lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}=\lim_{\substack{x\to 0(x<0)\\ y=0}} e^{\frac{1}{x}}=0.$$

Отже, розглядувана функція границі в точці $z=0$ не має.



Було розглянуто ізольовані особливі точки регулярної функції і поведінку функції поблизу (в околі) цих точок. При цьому брали точку, що знаходиться на скінченній відстані від нульової точки.

Проте іноді доводиться розглядати поведінку регулярної функції в околі нескінченно віддаленої точки $z=\infty$. При цьому *околом нескінченно віддаленої точки* називають множину точок $z$, які задовольняють нерівність $|z|>R$. На площині $(Z)$ — це всі точки, що лежать ззовні круга з центром у нульовій точці й радіусом $R$.

Нескінченно віддалену точку $z=\infty$ називають *ізольованою особливою точкою функції* $f(z)$, якщо існує окіл цієї точки, в якому $f(z)$ є однозначною і регулярною.

Зробимо заміну $z'=\dfrac{1}{z}$. Тоді функція $\varphi(z')=f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ є однозначною і регулярною в області $0<|z'|<\dfrac{1}{R}$.

Якщо $z'$ — усувна, полюс або істотно особлива точка для функції $\varphi(z')$, то нескінченно віддалену точку $z=\infty$ називають відповідно *усувною, полюсом*, або *істотною особливою, точкою* функції $f(z)$.

Оскільки функція $\varphi(z')$ однозначна і регулярна в кільці $0<|z'|<\dfrac{1}{R}$, то вона в ньому розвивається в ряд Лорана

$$\varphi(z')=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z')^k. \tag{15}$$

При цьому можуть бути такі випадки.

I. Точка $z'=0$ є усувною. Тоді ряд (15) містить тільки додатні степені $z'$.

Отже, відповідний ряд Лорана для функції $f(z)$ в околі усувної точки $z=\infty$ містить тільки від'ємні степені $z$:

$$f(z)=c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\ldots. \tag{16}$$

Якщо $c_0=c_1=\ldots=c_{m-1}=0, c_m\neq 0$, то кажуть, що точка $z=\infty$ є $m$-кратним нулем або $m$-кратним коренем функції $f(z)$.

Так, для функції $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ точка $z=\infty$ є двократним нулем.

II. Точка $z'=0$ для функції $\varphi(z')$ є полюсом порядку $m$. Тоді в ряду (15) міститься скінченне число $m$ членів із від'ємними степенями $z'$. Отже, якщо точка $z=\infty$ є для функції $f(z)$ полюсом порядку $m$, то ряд Лорана функції $f(z)$ в околі точки $z=\infty$ містить скінченну кількість членів із додатними степенями $z$:

$$f(z)=c_{-m}z^m+c_{-m+1}z^{m+1}+\ldots+c_{-1}z+c_0+\frac{c_1}{z}+\ldots. \tag{17}$$

III. Точка $z'=0$ для функції $\varphi(z')$ є істотно особливою. Ряд (15) містить нескінченну кількість членів із від'ємними степенями $z'$. Отже, відповідний ряд Лорана для функції $f(z)$ в околі точки містить нескінченну кількість членів із додатними степенями $z$:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k+\sum_{k=1}^{\infty} A_{-k} z^{-k}. \tag{18}$$

Так, для функції

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots$$

точка $z=\infty$ є істотно особливою.

Наприкінці зауважимо, що теореми, які характеризують поведінку регулярної функції поблизу скінченної ізольованої точки, справджуються і для нескінченно віддаленої точки.

## 4.11 ЗАЛИШОК ФУНКЦІЇ. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ДОПОМОГОЮ КОНТУРНОГО ІНТЕГРУВАННЯ В КОМПЛЕКСНІЙ ОБЛАСТІ

*Інтегральним залишком* однозначної регулярної функції $f(z)$ з ізольованою особливою точкою $z=a$ називають коефіцієнт $c_{-1}$ при $\frac{1}{z-a}$ в ряду Лорана цієї функції.

Надалі інтегральний залишок називатимемо *залишком* і позначатимемо символом $R_a f(z)$.

Залишок можна обчислювати за формулою (22) п. 4.8, при $m=-1$:

$$R_a f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\zeta)d\zeta, \tag{1}$$

де $\Gamma$ — коло $|z-a|=R_1<R$.

Із формули (1) випливає, що коли $a$ є усувною особливою точкою, то залишок функції відносно цієї точки дорівнює нулю. Якщо ізольована особлива точка $z=a$ є полюсом, то залишок функції можна знайти простіше, не застосовуючи формулу (1).

Справді, нехай особлива точка $z=a$ є простим полюсом. Тоді функція $f(z)$ розвивається в ряд Лорана

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-a}+\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k. \tag{2}$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на $z-a$. Дістанемо

$$f(z)(z-a)=c_{-1}+\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^{k+1}.$$

Перейшовши в цій рівності до границі при $z\to a$, матимемо формулу для залишку

$$c_{-1}=\lim_{z\to a} f((z)(z-a)). \tag{3}$$



❑ **Приклад**

1. Нехай задано функцію $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$.

Ця функція має дві ізольовані особливі точки $z=\pm i$, причому обидві точки — прості полюси (нулі знаменника прості). Тому залишок функції відносно точки $z=i$ дорівнює

$$c_{-1}=\lim_{x\to i}\left(\frac{1}{z^2+1}(z-i)\right)=\lim_{z\to i}\frac{z-i}{(z-i)(z+i)}=\lim_{z\to i}\frac{1}{z+i}=\frac{1}{2i}.$$

Розглянемо випадок, коли функція $f(z)$ є часткою від ділення двох функцій

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\Psi(z)}.$$

Нехай $a$ — простий полюс для функції $f(z)$ і $\varphi(a)\neq 0$, $\Psi(a)=0$, $\Psi'(a)\neq 0$.

Скориставшись формулою (3), дістанемо

$$\lim_{z\to a}\left(\frac{\varphi(z)}{\Psi(z)}(z-a)\right)=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\frac{\Psi(z)-\Psi(a)}{z-a}}=\frac{\varphi(a)}{\Psi'(a)},$$

тобто для залишку отримаємо таку формулу:

$$R_a f(z)=\frac{\varphi(a)}{\Psi'(a)}. \tag{4}$$

Так,

$$R_i\frac{z^3-i}{z^2+i}=\frac{-2i}{2i}=-1.$$

Розглянемо випадок, коли ізольована особлива точка $z=a$ є полюсом порядку $m\geq 2$ для функції $f(z)$. Тоді функція $f(z)$ розвивається в ряд Лорана

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}+\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^{m+k}. \tag{5}$$

Помножимо обидві частини рівності (5) на $(z-a)^m$. Матимемо

$$f(z)(z-a)^m=$$

$$=c_{-m}+c_{-m+1}(z-a)+\ldots+c_{-1}(z-a)^{m-1}+\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^{m+k}.$$

Продиференціювавши обидві частини цієї рівності $m-1$ разів, матимемо таку рівність:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(f(z)(z-a)^m\right)=(m-1)!c_{-1}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(m+k)(m+k-1)\cdots(k+1)c_k(z-a)^{k+1}.$$

Перейшовши до границі при $z\to a$, дістанемо формулу для залишку

$$R_0 f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(f(z)(z-a)^m\right). \quad (6)$$

❑ **Приклад**

**2.** Для функції $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-1)^2}$ точка $z=1$ є полюсом порядку $m=2$. Отже, за формулою (6)

$$R_1 f(z)=\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z+1}{(z-1)^2}(z-1)^2\right)=\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}(z+1)=\lim_{z\to1}1=1.$$

Якщо $z=a$ є ізольованою істотно особливою точкою, то залишок функції відносно цієї точки знаходять за загальною формулою (1).

**Теорема.** Якщо функція $f(z)$ є регулярною в області $E$, крім скінченного числа ізольованих особливих точок $a_k$, $k=1,\ldots,n$, що знаходяться в області, обмеженій контуром $\Gamma\subset E$, то інтеграл цієї функції по гладкому контуру $\Gamma$ дорівнює добутку $2\pi i$ на суму залишків в усіх цих особливих точках, тобто

$$\int_\Gamma f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}R_{a_k}f(z). \quad (7)$$

*Доведення.* Припустимо, що всередині $\Gamma$ є дві особливі точки: $a_1$ і $a_2$ (рис. 120).

Навколо точок $a_1$ і $a_2$ опишемо кола $\gamma_1$ і $\gamma_2$ із центрами в цих точках так, щоб ці кола знаходилися всередині $\Gamma$ і щоб одне з них лежало зовні другого. Тоді за інтегральною теоремою Коші маємо рівність

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(z)dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} f(z)dz. \quad (8)$$

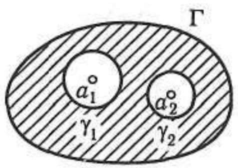

**Рис. 120**

У правій частині цієї рівності, згідно з формулою (1), кожний із доданків є залишком функції $f(z)$ відносно точок $a_1$ і $a_2$, тобто

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz=R_{a_1}f(z)+R_{a_2}f(z).$$



Помноживши обидві частини останньої рівності на $2\pi i$, дістанемо рівність (7).

Теорему доведено.

❑ **Приклад**

**3.** Обчислити інтеграл $\int_\Gamma \dfrac{dz}{1+z^2}$, де $\Gamma$ — коло $|z|=2$.

*Розв'язання.* Підінтегральна функція

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}$$

всередині кола $|z|=2$ має дві особливі точки $a_1=i, a_2=-i$ (прості полюси). Знайдемо залишки функції відносно цих точок, скориставшись, наприклад, формулою (4):

$$R_i f(z)=\frac{1}{2i};\quad R_{-i}f(z)=-\frac{1}{2i}.$$

За формулою (7) маємо

$$\int_\Gamma\frac{dz}{1+z^2}=2\pi i\left(\frac{1}{2i}-\frac{1}{2i}\right)=0.$$

Залишки часто застосовують при розв'язуванні теоретичних і практичних задач. Розглянемо одну з таких задач, а саме обчислення визначених інтегралів.

Припустимо, що функція $f(z)$ задовольняє умови:

1) $f(z)$ є регулярною у верхній півплощині, включаючи і дійсну вісь, крім скінченного числа точок $a_k$, $k=1,2,\ldots,n$, що лежать зверху від дійсної осі;

2) нескінченно віддалена точка $z=\infty$ є нулем функції $f(z)$ кратності, не нижче двох.

Тоді виконується рівність

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}R_{a_k}f(z). \quad (9)$$

Не зупиняючись на виведенні формули (9), проілюструємо застосування її на прикладах.

❑ **Приклади**

**4.** Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}$.

*Розв'язання.* Функція

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}$$

є регулярною у верхній півплощині, крім точки $z=i$. Тому

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\pi i R_i f(z)=2\pi i\frac{1}{2i}=\pi.$$

**5.** Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n},\ n\geq 1.$

Розв'язання. Функція $\frac{1}{\left(1+z^2\right)^n}$ у верхній півплощині має одну особливу точку $z=i$, причому ця точка є полюсом порядку $n$. Знайдемо залишок цієї функції відносно точки $i$ за формулою (6):

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{(z-i)^n}{(z-i)^n(z+i)^n}\right)=\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z+i)^{-n}=$$

$$=\frac{-n(-n-1)\ldots(-n-n-2)}{(z+i)^{2n-1}},$$

$$R_i f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to i}\frac{-n(-n-1)\ldots(-2n+2)}{(z+i)^{2n-1}}=\frac{-n(-n-1)\ldots(-2n+2)}{(n-1)!2^{2n-1}i^{2n-1}}=$$

$$=\frac{2n(n+1)\ldots(2n-2)i}{2^{2n}(n-1)!}.$$

Таким чином,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n}=2\pi i\left(-\frac{2n(n+1)\ldots(2n-2)i}{2^{2n}(n-1)!}\right)=$$

$$=\frac{4\pi n(n+1)\ldots(2n-2)}{2^{2n}(n-1)!}=\frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}\cdot\frac{\pi}{2^{2n-2}}.$$

**6.** Обчислити інтеграл

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\frac{3}{5}\cos x}.$$

Розв'язання. Застосуємо підстановку $z=e^{ix}$. Тоді

$$dx=\frac{dz}{iz},\ \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}=\frac{1+z^2}{2z}.$$

Отже, інтеграл у комплексній області запишеться так:

$$I=-i\int_\Gamma\frac{dz}{z\left(1+\frac{3}{10}\frac{1+z^2}{z}\right)}=-\frac{10i}{3}\int_\Gamma\frac{dz}{z^2+\frac{10}{3}z+1},$$

де $\Gamma$ — одиничне коло $|z|=1$,



Підінтегральна функція всередині одиничного кола має простий полюс $z=-\frac{1}{3}i$;

$$R_{-\frac{1}{3}i}f(z)=\lim_{z\to-\frac{1}{3}i}\frac{z+\frac{1}{3}}{\left(z+\frac{1}{3}\right)(z+3)}=\frac{3}{8}.$$

Застосувавши формулу (7), дістанемо

$$I=2\pi i R_{-\frac{1}{3}i}f(z)\left(-\frac{10i}{3}\right)=-2\pi i\frac{3}{8}\frac{10i}{3}=\frac{5}{2}\pi.$$

**Теорема 2.** Нехай дробово-раціональна функція

$$f(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n}{a_0z^m+a_1z^{m-1}+\ldots+a_m}$$

**не має полюсів на дійсній осі, причому степінь багаточлена $Q_m$ принаймні на дві одиниці перевищує степінь багаточлена $P_n$. Тоді виконується рівність**

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_k R_{a_k}f(z),\tag{10}$$

**де знак $\sum_k$ означає суму залишків функції $f(z)$ відносно особливих точок, що лежать у верхній півплощині.**

❑ **Приклад**

**7.** Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}$.

Розв'язання. Функція $f(z)=\frac{1}{1+z^4}$ задовольняє умови попередньої теореми. У верхній півплощині вона має два прості полюси: $a_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ і $a_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$. Знайдемо залишки цієї функції відносно заданих особливих точок.

Скориставшись формулою (4), дістанемо

$$Ra_1 f(z)=\left(\frac{1}{4z^3}\right)_{z=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}=\frac{1}{2\sqrt{2}(i-1)};$$

$$Ra_2 f(z)=\left(\frac{1}{4z^3}\right)_{z=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)}=\frac{1}{2\sqrt{2}(i+1)}.$$

Отже,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}=2\pi i\left(\frac{1}{2\sqrt{2}(i-1)}+\frac{1}{2\sqrt{2}(i+1)}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

# Звичайні диференціальні рівняння

РОЗДІЛ 5

## 5.1 ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВОДЯТЬ ДО ПОНЯТТЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розділ «Диференціальні рівняння» в курсі математичного аналізу посідає одне з основних місць. Це пояснюється тим, що диференціальні рівняння широко застосовують у природознавстві й на практиці, а також під час дослідження теоретичних питань.

Найпростіший тип диференціальних рівнянь було розглянуто в розділі «Невизначений інтеграл», коли зі співвідношення

$$\frac{dy}{dx}=f(x), \tag{1}$$

де $f(x)$ — відома функція, потрібно було знайти невідому функцію $y=y(x)$.

Далі дамо загальне означення диференціального рівняння, а зараз тільки зазначимо, що співвідношення, яке містить невідому функцію під знаком похідної або під знаком диференціала, називають *диференціальним рівнянням.*

Отже, співвідношення (1) є найпростішим типом диференціального рівняння. Як було доведено, шукані функції (розв'язки рівняння (1)) виражають через невизначений інтеграл

$$y=\int f(x)dx+C, \tag{2}$$

де $C$ — довільна стала.

Отже, диференціальне рівняння (1) має нескінченну множину розв'язків. Надаючи $C$ довільного дійсного значення, щоразу з рівності (2) діставатимемо функцію, яка є розв'язком рівняння (1). При цьому розв'язок (2), тобто розв'язок, що містить довільну сталу $C$, називають *загальним розв'язком рівняння* (1), а розв'язок, що утворюється із загального при окремому значенні $C\in(-\infty;+\infty)$, — *частинним.*

Зазначимо, якщо $f(x)$ неперервна функція на деякому проміжку $\langle a;b\rangle$, то розв'язок рівняння (1) можна записати у вигляді

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)dx+C, \tag{3}$$

де $x_0$ — довільна точка проміжку $\langle a;b\rangle$. Підставивши у рівність (3) значення $x=x_0$, матимемо $C=y(x_0)$.



Якщо позначити $y(x_0)=y_0$, то розв'язок диференціального рівняння (1) можна записати у вигляді

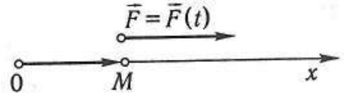


Рис. 121

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x)dx. \tag{4}$$

Звідси випливає, що частинний розв'язок диференціального рівняння (1) цілком визначається, якщо задати певне (початкове) значення $y_0$ функції $y(x)$, тобто значення, якому вона має дорівнювати за деякого початкового значення $x_0$ незалежної змінної.

Числа $x_0$ і $y_0$ називають *початковими даними,* а рівність $y(x_0)=y_0$ — *початковою умовою.*

Розглянемо приклад із механіки.

Нехай матеріальна точка $M$, маса якої $m$, рухається прямолінійно під дією сили $\overline{F}=\overline{F}(t)$, напрямок дії якої збігається з напрямком руху точки $M$ (рис. 121), а значення її дорівнює $F(t)$. Потрібно знайти закон, за яким відбувається рух точки.

Позначимо через $x=x(t)$ шлях, який точка пройде від початку руху, коли вона займала положення $O$, за час $t$. Щоб розв'язати задачу, потрібно знайти залежність шляху $x$ від часу $t$, тобто функцію $x(t)$.

Скориставшись механічним змістом похідної другого порядку $\frac{d^2x}{dt^2}$ і другим законом Ньютона, дістанемо співвідношення

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F(t). \tag{5}$$

Це співвідношення містить невідому функцію під знаком другої похідної.

Найвищий порядок похідної, що входить у диференціальне рівняння, називають *порядком диференціального рівняння.*

Отже, диференціальне рівняння (1) є диференціальним рівнянням першого порядку, а рівняння (5) — диференціальним рівнянням другого порядку.

Знаходження невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння, називають *розв'язанням,* або *інтегруванням, рівняння.*

Проінтегруємо (розв'яжемо) рівняння (5). Для цього запишемо його у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)=\frac{1}{m}F(t).$$

Оскільки $\frac{dx(t)}{dt}$ — миттєва швидкість $v(t)$, тобто

$$\frac{dx(t)}{dt}=v(t),$$

то

$$\frac{dv(t)}{dt}=\frac{1}{m}F(t).$$

Звідси

$$v(t)=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}F(t)dt+C_1, \qquad (6)$$

де $C_1$ — стала інтегрування.

Підставляючи в рівність (6) значення $v(t)$, маємо диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}F(t)dt+C_1.$$

Проінтегруємо це рівняння

$$x(t)=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{t}F(t)dt\right)dt+C_1(t-t_0)+C_2, \qquad (7)$$

де $C_2$ — довільна стала.

Таким чином, шукану функцію $x(t)$ визначають з диференціального рівняння (5) неоднозначно, вона залежить від двох сталих $C_1$ і $C_2$. Надаючи цим сталим довільних дійсних значень, щоразу діставатимемо функцію, яка є розв'язком диференціального рівняння (5).

Зазначимо, що сталим $C_1$ і $C_2$ можна надати певного змісту.

Справді, підставимо у співвідношення (6) замість $t$ значення $t_0$. Тоді

$$C_1=v(t_0)=v_0.$$

Отже, $C_1$ є значенням швидкості в момент часу $t=t_0$.

Підставивши його в розв'язок (7), знайдемо

$$C_2=x(t_0)=x_0,$$

тобто $C_2$ — шлях, пройдений точкою за час $t=t_0$.

У таких позначеннях формула (7) набирає вигляду

$$x(t)=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{t}F(t)dt\right)dt+v_0(t-t_0)+x_0.$$



Поклавши $t_0=0$, матимемо

$$x(t)=\frac{1}{m}\int_{0}^{t}\left(\int_{0}^{t}F(t)dt\right)dt+v_0t+x_0, \qquad (8)$$

де $v_0$ — початкова швидкість, а $x_0$ — початкове положення точки.

Отже, щоб із рівності (8) дістати конкретну функцію $x=x(t)$ (закон руху), що описує певний рух, потрібно мати числові значення початкового положення точки $x_0$ і початкової швидкості $v_0$.

Числа $t_0, x_0$ і $v_0$ називають *початковими даними,* а рівності $x(t_0)=x_0$, $v(t_0)=v_0$ — *початковими умовами.*

Таким чином, якщо та чи та задача зводиться до розв'язання диференціального рівняння, то, крім цього рівняння, потрібно мати ще початкові умови. Для диференціального рівняння першого порядку має бути одна така умова, для диференціального рівняння другого порядку — дві і т. д., для диференціального рівняння $n$-го порядку — $n$ початкових умов.

❑ **Приклади**

**1.** Нехай матеріальна точка $M$, маса якої $m$, рухається (падає) в середовищі без опору вздовж вертикальної прямої під дією сили земного тяжіння. Нехай у початковий момент часу, $t=0$, задана точка знаходиться над поверхнею Землі на висоті $h_0$ і має початкову швидкість $v_0=0$. Знайти залежність висоти $h$ падіння точки від часу $t$.

Розв'язання. Візьмемо за вісь $Ox$ вертикальну пряму, вздовж якої рухається точка $M$.

Початок цієї прямої (точку $O$) помістимо на поверхні Землі, а додатний напрямок вважатимемо напрямленим уверх (рис. 122).

Тоді сила земного тяжіння, будучи сталою і напрямленою вниз, дорівнює $mg$, де $g$ — прискорення вільного падіння, яке поблизу поверхні Землі наближено дорівнює $g\approx 9{,}81$ м/с$^2$.

Поклавши у формулі (8)

$$x(t)=h(t)=h,\ F(t)=-mg,\ x_0=h_0,\ v_0=0,$$

матимемо

$$h=\frac{1}{m}\int_{0}^{t}\left(\int_{0}^{t}-mgdt\right)dt+h_0=-g\int_{0}^{t}tdt+h_0=-\frac{gt^2}{2}+h_0.$$

Дістали відому формулу з фізики.

**2.** Швидкість розщеплення радію пропорційна до його кількості у заданий момент часу. Знайти закон, який виражає зміну кількості радію з плином часу $t$, якщо відомо, що через 1600 років залишиться його рівно половина від цієї кількості.

Розв'язання. Позначимо через $x$ кількість радію у певний момент часу $t$ ($t$ — відлічується в роках). Отже, для розв'язання цієї задачі потрібно знайти залежність між $x$ і $t$, тобто виразити $x$ як функцію від $t$, $x=x(t)$.

Згідно з умовою задачі, швидкість $\frac{dx}{dt}$ розщеплення прямо пропорційна до

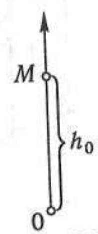

Рис. 122



13 5-374

наявної кількості радію. Тому

$$\frac{dx(t)}{dt} = kx(t), \qquad (9)$$

де $k$ — коефіцієнт пропорційності.

Отже, маємо диференціальне рівняння першого порядку, причому, на відміну від попередніх прикладів, у рівняння, крім похідної невідомої функції, входить і сама функція.

Розв'яжемо це рівняння. Запишемо його у вигляді

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = kdt, \quad \text{або} \quad d(\ln x(t)) = d(kt).$$

Якщо диференціали функцій рівні, то самі функції відрізняються на сталу величину, запишемо її $\ln|C|$. Тоді

$$\ln x(t) = kt + \ln|C|,$$

або

$$x(t) = Ce^{kt}. \qquad (10)$$

Формула (10) виражає залежність величини кількості радію від часу $t$. Проте в цю формулу входить стала інтегрування $C$. Щоб визначити її, скористаємося початковою умовою: позначимо через $x_0$ кількість радію при $t = 0$. Отже, $x(0) = x_0$ і є початковою умовою.

Підставивши в рівність (10) значення $t = 0$ і $x(0) = x_0$, знайдемо

$$x(t) = x_0 e^{kt}.$$

Коефіцієнт пропорційності $k$ визначимо з умови, що при $t = 1600$

$$\frac{x(t)}{x_0} = \frac{1}{2},$$

тобто

$$e^{k \cdot 1600} = \frac{1}{2}, \quad \text{або} \quad 1600k = \ln\frac{1}{2}.$$

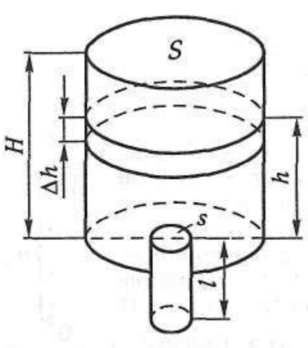

**Рис. 123**

Звідси $k = \dfrac{\ln\frac{1}{2}}{1600}$.

Остаточно маємо

$$x(t) = x_0 e^{\ln\frac{1}{2}\frac{t}{1600}},$$

або

$$x(t) = x_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}.$$

Задачу розв'язано.

**3.** Нехай вода витікає через отвір у дні циліндричної посудини (рис. 123). Встановити, за яким законом знижується рівень води в посудині упродовж часу, якщо відомо, що швидкість $v$ витікання води з посудини залежить від висоти $h$ рідини, що знаходиться над отвором, таким чином:

$$v = 0{,}6\sqrt{2gh},$$

де $g$ — прискорення вільного падіння.

Р о з в ' я з а н н я. Введемо позначення: $H$ — висота циліндричної посудини; $S$ — площа її основи; $h$ — висота стовпця рідини над отвором у момент часу $t$; $s$ — площа отвору.

Розглянемо проміжок часу $\Delta t$, упродовж якого вода виливається через отвір. За час $\Delta t$ вода в посудині знизиться з висоти $h$ до висоти $h + \Delta h$, $\Delta h < 0$. За цей час із посудини витече об'єм рідини — $S\Delta h$. Таким самим буде об'єм струменя води, що витікає за цей час з отвору. Він дорівнює добутку $sl$, де $l$ — довжина шляху, що проходить частинка рідини за час $\Delta t$. Позначимо через $v_c$ середню швидкість, з якою рухається частинка рідини, проходячи через отвір. Тоді

$$l = v_c \Delta t.$$

Згідно з умовою задачі, $v_c$ можна записати так:

$$v_c = 0{,}6\sqrt{2g(h + \theta\Delta h)}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Тоді, прирівнюючи обидва об'єми рідини, отримаємо

$$-S\Delta h = 0{,}6\sqrt{2g(h + \theta\Delta h)}\Delta ts,$$

звідси

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -k\sqrt{h + \theta\Delta h}, \quad k = 0{,}6\frac{s}{S}\sqrt{2g}.$$

Перейшовши до границі при $\Delta t \to 0$, матимемо таке диференціальне рівняння:

$$\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}. \qquad (11)$$

Диференціальне рівняння (11) розв'яжемо тим самим способом, що й рівняння (9). Дістанемо

$$2\sqrt{h(t)} = -kt + C,$$

де $C$ — довільна стала. Для її знаходження скористаємося початковою умовою: $h(0) = H$ при $t = 0$.

Отже, $C = 2\sqrt{H}$. Тоді

$$t = \frac{2\left(\sqrt{H} - \sqrt{h(t)}\right)}{k}.$$

Поклавши, зокрема, $h(t) = 0$, матимемо, що вся рідина витече з посудини за час $t = \dfrac{2\sqrt{H}}{k}$.

**4.** Знайти криві, в яких відрізок дотичної, що знаходиться між координатними осями, поділяється в точці дотику навпіл.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай шукана крива $L$ має вигляд, зображений на рис. 124. Візьмемо на кривій $L$ довільну точку $M(x, y)$, і в цій точці проведемо дотичну $AB$. Згідно з умовою задачі, відрізок $CB = x$. Тому з прямокутного трикутника $MBC$

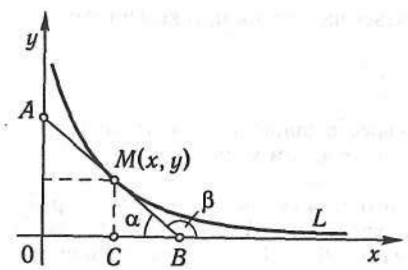


Рис. 124

маємо

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(180^\circ - \beta\right) = -\operatorname{tg}\beta.$$

Оскільки $\operatorname{tg}\beta = y'$, дістанемо диференціальне рівняння

$$y' = -\frac{y}{x}. \qquad (12)$$

Це рівняння можна записати так:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \text{ або } d(\ln y) = d(-\ln x).$$

Тоді

$$\ln y = -\ln x + \ln|C|, \quad C \neq 0.$$

Звідси $y = \frac{C}{x}$.

Отже, шуканими кривими є сім'я гіпербол, що залежить від одного параметра $C$.

Щоб дістати окрему гіперболу, потрібно задати, як і в попередніх прикладах, початкову умову. Такою початковою умовою має бути точка $(x_0, y_0)$, через яку проходить шукана крива. Так, якщо в умову задачі додати, що крива проходить ще через точку $(1, 2)$, то, підставивши в загальний розв'язок координати цієї точки, знайдемо

$$C = 2.$$

Отже,

$$y = \frac{2}{x}$$

і є та крива, що задовольняє умову задачі й проходить через точку $(1, 2)$.

**Задача про диференціальне рівняння сім'ї кривих.** Розглянемо задачу про складання диференціального рівняння для заданої сім'ї кривих.

Кожному диференціальному рівнянню першого порядку відповідає деяка сім'я кривих (загальний розв'язок). Іноді не можна знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в явному вигляді $y = \varphi(x, C)$, але можна записати його в неявному вигляді, тобто

$$\Phi(x, y, C) = 0. \qquad (13)$$

Тоді співвідношення (13) називають *загальним інтегралом* диференціального рівняння.

Нехай маємо довільну сім'ю кривих, наприклад (13), яка залежить від одного параметра $C$ так, що кожній кривій відповідає певне значення цього параметра.

Поставимо задачу: скласти диференціальне рівняння, для якого сім'я кривих (13) була б загальним інтегралом.

Припустимо, що функція $\Phi(x, y, C)$ диференційовна в певній області тривимірного простору $\mathbf{R}_3$, а співвідношення (13) визначає $y$ як неявну



функцію від $x$ і $C$:

$$y = \varphi(x, C).$$

При цьому $\varphi(x, C)$, у свою чергу, — диференційовна функція.

Диференціюючи (13) по $x$, маємо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (14)$$

Якщо співвідношення (14) не містить сталої $C$, то воно є шуканим диференціальним рівнянням сім'ї кривих (13).

Якщо в рівняння (14) входить стала $C$, то потрібно скласти систему рівнянь

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0; \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = 0. \end{cases} \qquad (15)$$

Виключивши із системи рівнянь (15) параметр $C$, знайдемо

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \qquad (16)$$

Це рівняння і є шуканим диференціальним рівнянням сім'ї кривих (13).

❑ **Приклади**

**5.** Знайти диференціальне рівняння сім'ї прямих

$$y = Cx, \quad C \neq 0. \qquad (17)$$

Р о з в' я з а н н я. Диференціюємо (17) по $x$:

$$y' = C.$$

Підставивши у (17) значення $C = y' = \frac{dy}{dx}$, дістанемо шукане диференціальне рівняння

$$y = y'x, \text{ або } y' = \frac{y}{x}.$$

**6.** Знайти диференціальне рівняння сім'ї кіл

$$(x-c)^2 + y^2 - c^2 = 0. \qquad (18)$$

Р о з в' я з а н н я. Диференціюємо по $x$ ліву й праву частини рівності (18):

$$x - c + yy' = 0.$$

Звідси $c = x + yy'$. Підставивши значення $c$ у рівняння (18), матимемо

$$y^2 - x^2 - 2xyy' = 0.$$

Якщо сім'ю кривих задано рівнянням вигляду

$$\Phi(x, y, C_1, C_2), \qquad (19)$$

тобто залежить від двох параметрів $C_1$ і $C_2$, то рівняння (19) потрібно двічі продиференціювати по $x$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0;$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

Із системи рівнянь

$$\begin{cases}\Phi(x,y,c)=0;\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}=0;\\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\dfrac{d^2y}{dx^2}=0\end{cases} \tag{20}$$

виключимо параметри $C_1$ і $C_2$. Матимемо диференціальне рівняння

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0, \tag{21}$$

яке є шуканим диференціальним рівнянням сім'ї кривих (19).

❑ **Приклад**
**7.** Знайти диференціальне рівняння сім'ї еліпсів

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

(тут $a$ і $b$ розглядають як параметри).

Розв'язання. Складаємо систему рівнянь (20):

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0;\\ \dfrac{x}{a^2}+\dfrac{yy'}{b^2}=0;\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}+\dfrac{yy''}{b^2}=0.\end{cases}$$

Виключивши з цієї системи рівнянь параметри $a$ і $b$, дістанемо диференціальне рівняння

$$yy'-x\left(y'^2+yy''\right)=0,$$

яке є шуканим диференціальним рівнянням сім'ї еліпсів.

Наприкінці зазначимо, що розв'язання розглянутих найпростіших задач із механіки, фізики, геометрії зводяться до диференціальних рівнянь. Внаслідок цього діставали нескладні диференціальні рівняння, які легко розв'язувалися. Зрозуміло, що складніші задачі приводять до складніших диференціальних рівнянь, які не завжди можна розв'язати.



Так, розв'язуючи задачу з механіки, розглядали випадок, коли сила $\vec{F}$ залежить тільки від часу $t$, тобто $\vec{F}=\vec{F}(t)$. Проте сила $\vec{F}$, що діє на рухому точку, залежить від часу $t$, зміщення $x$ і швидкості $\frac{dx}{di}$. Тоді диференціальне рівняння (5) має вигляд

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F\left(t,x,\frac{dx}{dt}\right),$$

яке в загальному випадку не інтегрується точно. У таких випадках застосовують різні наближені методи, зокрема чисельні методи з використанням ЕОМ.

Розв'язання геометричної задачі про знаходження кривої, яка в кожній своїй точці має сталу кривину $k=\text{const}$, зводиться до інтегрування диференціального рівняння другого порядку

$$\frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}=k.$$

Це диференціальне рівняння хоча й розв'язується точно, але значно складніше, ніж, наприклад, рівняння (12).

## 5.2 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ. ЗАДАЧА КОШІ, ТЕОРЕМА ПРО ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ

Розглянемо диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані відносно похідної.

***Означення 1.*** *Диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної,* називають співвідношення виду

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), \tag{1}$$

де $f(x,y)$ — задана й неперервна в деякій області двовимірного простору $\mathbf{R}_2$ функція двох змінних $x$ і $y$.

У диференціальне рівняння (1) невідома функція $y=y(x)$, а також аргумент $x$ можуть явно і не входити.

На відміну від рівняння (1), розглядають диференціальні рівняння першого порядку, *не розв'язані відносно похідної*

$$F(x,y,y')=0, \tag{2}$$

де $F(x,y,y')$ — задана функція трьох змінних $x, y, y'$, які змінюються в деякій області тривимірного простору $\mathbf{R}_3$.

Диференціальні рівняння (2) вивчатимемо в п. 5.8.

Припустимо, що функція $f(x,y)$ визначена й неперервна в деякій області $D\subset\mathbf{R}_2$.

Область $D$ називають *областю визначення* диференціального рівняння (1).

Якщо $f(x, y)$ в околі точки $(x_0, y_0) \in D$ є необмеженою,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \infty,$$

то розглядають диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \qquad (3)$$

Множину цих точок, а також точки, де функція $f(x, y)$ не визначена, але може бути доозначена за неперервністю (існує границя функції в цих точках), приєднують до області визначення диференціального рівняння (1).

Рівняння (3) ще називають *перевернутим диференціальним рівнянням.* Його доцільно розглядати також і тоді, коли воно легше розв'язується, ніж диференціальне рівняння (1).

Диференціальне рівняння (1) можна записати ще так:

$$dy - f(x, y)dx = 0.$$

Помноживши обидві частини цього рівняння на деяку функцію $N(x, y) \neq \neq 0$, дістанемо таке диференціальне рівняння:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \qquad (4)$$

Функції $M(x, y), N(x, y)$ називають *коефіцієнтами* диференціального рівняння (4).

Отже, диференціальне рівняння (1) можна записати у вигляді (4), і, навпаки, диференціальне рівняння (4) можна записати у вигляді (1), де

$$f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}.$$

***Означення 2.*** *Розв'язком* диференціального рівняння (1) на проміжку $\langle a; b\rangle$ ($a$ і $b$ можуть бути й невластивими числами, відповідно $-\infty$ і $+\infty$) називають будь-яку функцію $y = \varphi(x)$, що задовольняє такі умови:

1) $\varphi(x)$ має на проміжку $\langle a; b\rangle$ неперервну похідну й при $x \in \langle a; b\rangle$ не виходить з області визначення $D$;

2) для будь-якого $x \in \langle a; b\rangle$ виконується рівність (тотожність)

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Якщо функція $y = \varphi(x)$ є розв'язком диференціального рівняння (1), то кажуть, що вона його задовольняє.

Зауважимо, що коли проміжок $\langle a; b\rangle$ є відрізком або піввідрізком, то під похідною $\varphi'(x)$ у кінцевих точках розуміють односторонню похідну. Це стосується також односторонньої неперервності.



❑ **Приклад**

**1.** Довести, що розв'язком диференціального рівняння

$$y' = x + y \qquad (5)$$

в інтервалі $(-\infty; \infty)$ є функція $y = e^x - x - 1$.

Р о з в ' я з а н н я. Перевіряємо виконання умов означення.

1) Областю визначення диференціального рівняння (5) є всі точки площини $xOy$. Тому функція $y = e^x - x - 1$ — графік при $x \in (-\infty; +\infty)$ не виходить з області визначення і має неперервну похідну

$$y' = e^x - 1.$$

2) При будь-якому $x \in (-\infty; +\infty)$ виконується рівність

$$y' = \left(e^x - x - 1\right)' = x + \left(e^x - x - 1\right).$$

Як уже зазначалося, процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називають *інтегруванням його.*

Щоб не плутати операцію інтегрування диференціального рівняння з операцією знаходження невизначеного інтеграла, останню називають *квадратурою.*

Якщо під час інтегрування диференціального рівняння приходять до квадратури, то кажуть, що диференціальне рівняння інтегрується в квадратурах. Це означає, що розв'язок диференціального рівняння виражено через квадратуру (невизначений інтеграл).

Зауважимо, що до розв'язків диференціального рівняння (1) приєднують також і розв'язки диференціального рівняння (3).

Іноді розв'язок диференціального рівняння (1) не можна записати в явному вигляді. Тоді його записують у неявному вигляді:

$$\Psi(x, y) = 0. \qquad (6)$$

При цьому співвідношення (6) називають *розв'язком* диференціального рівняння (1) в неявному вигляді, якщо: 1) воно визначає $y$ як неявну функцію від $x$, $y = \varphi(x)$; 2) функція $y = \varphi(x)$ є розв'язком диференціального рівняння (1), тобто рівність

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} f(x, y) = 0$$

з урахуванням рівності (6) має виконуватися тотожно.

❑ **Приклад**

**2.** Довести, що рівняння

$$2x^2 + y^2 - 3 = 0 \qquad (7)$$

задає в неявному вигляді розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 + y^2 - 2x - 3}{2x^2 + y^2 + y - 3}. \qquad (8)$$

Р о з в ' я з а н н я. Справді, функція

$$\Psi(x, y) = 2x^2 + y^2 - 3$$

в околі, наприклад, точки $(1, 1)$ задовольняє умови теореми існування неявної функції (п. 2.13). Тут

$$\Psi(1,1) = 0, \ \Psi'_y(1,1) = 2 \neq 0.$$

Тому рівняння (7) задає $y$ як неявну функцію $y = \varphi(x)$.
Крім того, згідно з рівнянням (7),

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} f(x, y) = 4x + 2y\frac{2x^2 + y^2 - 2x - 3}{2x^2 + y^2 + y - 3} \equiv 0.$$

Розв'язок диференціального рівняння (1) можна також записати у параметричній формі

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

де $t \in \langle\alpha; \beta\rangle$, якщо при цьому виконується тотожність

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} \equiv f(x(t), y(t)) \quad (t \in \langle\alpha; \beta\rangle, x'(t) \neq 0).$$

❑ **Приклад**
**3.** Довести, що диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

має розв'язок, заданий параметрично

$$x = \cos t, \quad y = \sin t,$$

у кожному інтервалі, де $t \neq k\pi$, $k$ — ціле число.
Р о з в ' я з а н н я. З одного боку, маємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\mathrm{ctg}\, t,$$

а з іншого —

$$-\frac{x}{y} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\mathrm{ctg}\, t.$$

Зазначалося (див. п. 5.1), що коли диференціальне рівняння першого порядку має розв'язок, то цих розв'язків є нескінченна множина. Так, диференціальне рівняння (5) має загальний розв'язок

$$y = Ce^x - x - 1, \tag{9}$$

де $C$ — довільна стала. Надаючи $C$ довільного дійсного значення, щоразу діставатимемо розв'язок диференціального рівняння (5), тобто матимемо нескінченну множину розв'язків.

Проте на практиці часто доводиться знаходити не всі розв'язки, тобто не загальний розв'язок диференціального рівняння, а розв'язок, що задовольняє певні додаткові умови. Однією з таких задач є задача Коші. Для



диференціального рівняння (1) задача Коші формулюється так: серед усіх розв'язків диференціального рівняння (1) знайти такий розв'язок $y = y(x)$, який при заданому значенні незалежної змінної $x = x_0$ дорівнює заданому значенню $y_0$, тобто щоб виконувалася рівність

$$y(x_0) = y_0. \tag{10}$$

При цьому числа $x_0$ і $y_0$ називають *початковими даними*, а умову (10) — *початковою умовою*.

❑ **Приклад**
**4.** З усіх розв'язків диференціального рівняння $y' = x + y$ знайти розв'язок, що задовольняє початкову умову

$$y(0) = 1. \tag{11}$$

Р о з в ' я з а н н я. Усі розв'язки заданого диференціального рівняння задаються формулою (9). Отже, й розв'язок, який відповідає початковим даним $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, якщо він існує, також задається формулою (9). Тому, підставляючи у розв'язок (9) початкові дані, матимемо рівність

$$1 = C - 1.$$

Звідси $C = 2$. Розв'язком задачі Коші $y' = x + y$, $y(0) = 1$ є функція

$$y = 2e^x - x - 1.$$

Задача Коші, або задача з початковою умовою для диференціального рівняння (1), не завжди є розв'язною. Може бути так, що не існує жодної функції $y = y(x)$, яка б на заданому проміжку $\langle a; b\rangle$ задовольняла диференціальне рівняння (1) і початкову умову (10). У цьому випадку кажуть, що задача Коші не має розв'язку. Може бути й так, що існує не одна функція (не один розв'язок), а кілька, які задовольняють і диференціальне рівняння (1), і початкову умову (10). У цьому випадку кажуть, що задача Коші має не єдиний розв'язок.

**Т е о р е м а Коші про існування та єдиність розв'язку.** Нехай для диференціального рівняння (1) виконуються такі умови:

1) функція $f(x, y)$ є неперервною в замкненому прямокутнику $R: [x_0 - a; x_0 + a; y_0 - b; y_0 + b]$, де $a$ і $b$ — деякі додатні числа. Тоді, внаслідок того що $f(x, y)$ неперервна в замкненій області, $f(x, y)$ у цій області є обмеженою, тобто існує число $M > 0$ таке, що для всіх точок $(x, y) \in \mathbf{R}$ виконується нерівність

$$|f(x, y)| \leq M; \tag{12}$$

2) функція $f(x, y)$ за змінною $y$ у прямокутнику $R$ задовольняє умову Ліпшиця[1]

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \tag{13}$$

де $L$ — стала (стала Ліпшиця), а $(x, y_1)$ і $(x, y_2)$ — довільні точки з прямокутника $R$.

[1] *Ліпшиц Р.* (1832—1903) — німецький математик.

Тоді на відрізку $[x_0-h; x_0+h]$, де $h=\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, існує єдиний розв'язок $y=y(x)$ диференціального рівняння (1), який при $x\in[x_0-h; x_0+h]$ не виходить із прямокутника $R$ і який при $x=x_0$ дорівнює $y_0$, тобто

$$y(x_0)=y_0. \tag{14}$$

Д о в е д е н н я. Застосуємо метод Пікара[1]. Складемо інтегральне рівняння

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{15}$$

Рівняння, в якому невідома функція міститься під знаком інтеграла, називають *інтегральним*. Можна показати, що коли рівняння (15) має неперервний розв'язок $y=y(x)$ (неперервну функцію, що задовольняє це рівняння) на відрізку $[x_0-h; x_0+h]$, то цей розв'язок є розв'язком також і диференціального рівняння (1) та задовольняє початкову умову (2).

Справді, диференціюючи ліву й праву частини тотожності (15) по $x$, маємо

$$y'(x)\equiv f(x, y(x)).$$

Отже, функція $y(x)$ задовольняє диференціальне рівняння (1). Підставивши в рівняння (15) значення $x=x_0$, дістанемо $y(x_0)=y_0$, тобто функція $y=y(x)$ задовольняє й початкову умову (2).

Справедливим є також обернене твердження: якщо функція $y=y(x)$ на відрізку $[x_0-h; x_0+h]$ є розв'язком диференціального рівняння (1) і $y(x_0)=y_0$, то функція $y=y(x)$ на цьому відрізку є розв'язком інтегрального рівняння (5).

Справді, якщо $y(x)$ є розв'язком рівняння (1), то при $x\in[x_0-h; x_0+h]$ виконується тотожність

$$y'(x)\equiv f(x, y(x)) \tag{16}$$

і рівність

$$y(x_0)=y_0. \tag{17}$$

Проінтегрувавши обидві частини тотожності (16) у межах від $x_0$ до $x$ і врахувавши рівність (17), матимемо

$$\int_{x_0}^{x} y'(t)dt=\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt,$$

[1] *Пікар Е.* (1857—1941) — французький математик.



або

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt,$$

що й потрібно було довести.

Отже, інтегральне рівняння (15) еквівалентне диференціальному рівнянню (1) з початковою умовою (2). Тому надалі доводитимемо існування та єдиність розв'язку для інтегрального рівняння (15).

З цією метою застосовуватимемо метод послідовних наближень, запропонований Пікаром, а саме: будуємо послідовність функцій $y_0(x)$, $y_1(x), \ldots, y_n(x), \ldots$, де $x\in[x_0-h; x_0+h]$:

$$\begin{aligned} &y_0(x)=y_0;\\ &y_1(x)=y_0(x)+\int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt;\\ &y_2(x)=y_0(x)+\int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &y_n(x)=y_0(x)+\int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{18}$$

Відносно цих функцій можна стверджувати, що при $x\in[x_0-h; x_0+h]$ вони неперервні. Справді, за умовою теореми функція $f(x, y(x))$ у прямокутнику $R$ неперервна. Тому інтеграл $\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$, будучи функцією верхньої змінної межі, є функцією неперервною.

Кожна функція $y_k(x), k=0,1,\ldots,n,\ldots$ визначена при $x\in[x_0-h; x_0+h]$ і не виходить за межі прямокутника $R$. Справді,

$$|y_1(x)-y_0(x)|=\left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt\right|\le$$

$$\le\left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_0(t))|dt\right|\le M|x-x_0|\le Mh\le b.$$

Отже, функція $y_1(x)$ не виходить за межі прямокутника $R$ (функція $y_0(x)\equiv y_0$ знаходиться у центрі прямокутника $R$).

Знаходимо далі:

$$|y_2(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(t,y_1(t))dt\right|\le\left|\int_{x_0}^{x}|f(t,y_1(t))|dt\right|\le$$

$$\le M|x-x_0|\le Mh\le b;$$

..........................................................................

$$|y_n(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(t,y_{n-1}(t))dt\right|\le\left|\int_{x_0}^{x}|f(t,y_{n-1}(t))|dt\right|\le$$

$$\le M|x-x_0|\le Mh\le b,$$

..........................................................................

За методом математичної індукції дістанемо доводжуване твердження. Кожна з функцій $y_k(x), k=0,1,...,n,...$ задовольняє початкову умову $y_k(x_0)=y_0$. Це випливає безпосередньо з формул (18).

Доведемо, що послідовність наближень (функцій (18) збігається рівномірно для всіх $x\in[x_0-h;x_0+h]$, або для всіх $x$, що задовольняють нерівність $|x-x_0|\le h$. Розглянемо функціональний ряд

$$y_0+(y_1(x)-y_0)+(y_2(x)-y_1(x))+...+(y_n(x)-y_{n-1}(x))+.... \qquad (19)$$

Легко бачити, що $k$-та часткова сума ряду (19) збігається з $k$-м наближенням послідовності функцій (18).

Тому з рівномірної збіжності ряду (19) випливає рівномірна збіжність послідовності наближень (18). Знайдемо оцінку за модулем кожного члена ряду (19), починаючи з другого. Маємо

$$|y_1(x)-y_0|\le M|x-x_0|;$$

$$|y_2(x)-y_1(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}\{f(t,y_1(t))-f(t,y_0)\}dt\right|\le$$

$$\le\left|\int_{x_0}^{x}|f(t,y_1(t))-f(t,y_0)|dt\right|.$$

Застосувавши до $|f(t,y_1(t))-f(t,y_0)|$ умову Ліпшіца і врахувавши оцінку попереднього члена ряду, дістанемо

$$|y_2(x)-y_1(x)|\le L\int_{x_0}^{x}|y_1(t)-y_0|dt\le LM\int_{x_0}^{x}|t-x_0|dt=LM\frac{|x-x_0|^2}{2}.$$



Аналогічно дістанемо оцінки наступних членів ряду:

$$|y_3(x)-y_2(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}\{f(t,y_2(t))-f(t,y_1(t))\}dt\right|\le$$

$$\le\left|\int_{x_0}^{x}|f(t,y_2(t))-f(t,y_1(t))|dt\right|\le$$

$$\le L\int_{x_0}^{x}|y_2(t)-y_1(t)|dt\le L^2M\int_{x_0}^{x}\frac{|t-x_0|^2}{2}dt=\frac{L^2M}{3!}|x-x_0|^3.$$

Застосувавши метод математичної індукції, можна довести справедливість такої оцінки

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\le\frac{L^{n-1}M}{n!}|x-x_0|^n. \qquad (20)$$

Оскільки $x$ належить відрізку $|x-x_0|\le h$, то

$$|y_1(x)-y_0|\le Mh;$$

$$|y_2(x)-y_1(x)|\le ML\frac{h^2}{2!};$$

$$|y_3(x)-y_2(x)|\le ML^2\frac{h^3}{3!},...$$

..........................................

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\le ML^{n-1}\frac{h^n}{n!},....$$

Отже, члени функціонального ряду (19) менші за модулем, ніж відповідні члени додатного числового ряду

$$y_0+Mh+\frac{MLh^2}{2!}+\frac{ML^2h^3}{3!}+...+\frac{ML^{n-1}h^n}{n!}+.... \qquad (21)$$

Застосувавши до останнього ряду ознаку Д'Аламбера, матимемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ML^{n-1}h^n(n-1)!}{ML^{n-2}h^{n-1}n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{Lh}{n}=0<1.$$

Таким чином, числовий ряд (21) збігається. Тому функціональний ряд (19) за ознакою Вейєрштрасса рівномірно збігається на відрізку $[x_0-h;x_0+h]$.

Нехай

$$\lim_{n\to\infty}y_n(x)=Y(x).$$

Тоді, згідно з доведеним, $Y(x)$ є неперервною функцією на відрізку $[x_0-h;x_0+h]$.

Доведемо, що $Y(x)$ задовольняє початкову умову $Y(x_0)=y_0$ і не виходить за межі прямокутника $R$.

Справді,

$$Y(x_0)=\lim_{n\to\infty} y_n(x_0)=\lim_{n\to\infty} y_0=y_0.$$

Перейшовши при $n\to\infty$ до границі в нерівності $|y_n(x)-y_0|\le b$, дістанемо $|Y(x)-y_0|\le b$.

Доведемо, що $Y(x)$ є розв'язком рівняння (15).

Оскільки послідовність функцій $y_n(x)$ рівномірно збігається до $Y(x)$ на відрізку $[x_0-h;x_0+h]$, то для будь-якого числа $\varepsilon>0$ знайдеться натуральне число $N=N(\varepsilon)$ таке, що при $n>N$ і всіх $x\in[x_0-h;x_0+h]$ виконується нерівність

$$|y_n(x)-Y(x)|<\varepsilon.$$

Тому, використавши умову Ліпшиця, матимемо

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(t,y_n(t))dt-\int_{x_0}^{x} f(t,Y(t))dt\right|\le\left|\int_{x_0}^{x}|f(t,y_n(t))-f(t,Y(t))|dt\right|\le$$

$$\le\left|\int_{x_0}^{x} L|y_n(t)-Y(t)|dt\right|<L\varepsilon|x-x_0|\le L\varepsilon h\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(t,y_n(t))dt=\int_{x_0}^{x} f(t,Y(t))dt$$

для всіх $x\in[x_0-h;x_0+h]$.

Перейшовши при $n\to\infty$ до границі у співвідношенні

$$y_n(x)=y_0(x)+\int_{x_0}^{x} f(t,y_{n-1}(t))dt,$$

дістанемо

$$Y(x)=y_0(x)+\int_{x_0}^{x} f(t,Y(t))dt.$$

Цим самим доведено, що функція $y=Y(x)$ на відрізку $[x_0-h;x_0+h]$ є розв'язком інтегрального рівняння (15), а отже, і розв'язком диференціального рівняння (1), що задовольняє початкову умову (14).

Доведемо, що розв'язок $y=Y(x)$ єдиний. Нехай на відрізку $[x_0-h;x_0+h]$, крім розв'язку $Y(x)$, існує ще інший розв'язок $\varphi(x)$ і такий, що $\varphi(x_0)=y_0$.



Розглянемо досить малий відрізок $[x_0;x_0+\eta]$, $\eta\le h$, на якому $\varphi(x)\not\equiv Y(x)$. Оскільки функція $\theta(x)=|\varphi(x)-Y(x)|\not\equiv 0$ і є неперервною на відрізку $[x_0;x_0+\eta]$, то $\theta(x)$ досягає в деякій точці $x_1$, $x_0<x_1\le x_0+\eta$, свого найбільшого значення $M'>0$. Тоді

$$m=|\varphi(x_1)-Y(x_1)|=\left|\int_{x_0}^{x_1} f(t,\varphi(t))dt-\int_{x_0}^{x_1} f(t,Y(t))dt\right|\le$$

$$\le\left|\int_{x_0}^{x_1}|f(t,\varphi(t))-f(t,Y(t))|dt\right|\le L\int_{x_0}^{x_1}|\varphi(t)-Y(t)|dt.$$

Виконавши інтегрування на всьому відрізку $[x_0;x_0+\eta]$, матимемо

$$m\le L\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon}|\varphi(t)-Y(t)|dt<LM'\eta.$$

Звідси дістанемо, що $1<L\eta$, що є неможливим, оскільки число $\eta$ може бути як завгодно малим. Зайшли у суперечність. Тому на відрізку $[x_0;x_0+\eta]$

$$\varphi(t)\equiv Y(t).$$

Аналогічно можна довести, що на відрізку $[x_0-\eta;x_0]$ ці функції також збігаються.

Теорему доведено.

Зазначимо, що перевіряти безпосередньо умову Ліпшиця дуже складно. Тому користуються достатньою ознакою, яку сформулюємо у вигляді теореми.

**Теорема.** Якщо функція $f(x,y)$ у прямокутнику $R$ має обмежену частинну похідну по $y$,

$$|f'_y(x,y)|\le A, \tag{22}$$

де $A$ — додатне число, то умова Ліпшиця для такої функції виконується.

Доведення. Різницю $f(x,y_1)-f(x,y_2)$ можна розглядати як частинний приріст функції $f(x,y)$ по $y$. Застосувавши до цієї різниці теорему Лагранжа про скінченний приріст, матимемо

$$f(x,y_1)-f(x,y_2)=f'_y(x,y_1+\theta(y_1-y_2))(y_1-y_2),$$

де $0<\theta<1$.

Згідно з нерівністю (22),

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le A|y_1-y_2|.$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що обернена теорема не справджується. Так, функція $f(x,y)=|y|$ задовольняє умову Ліпшица

$$\big||y_1|-|y_2|\big| \le |y_1-y_2|.$$

Тут стала Ліпшица $L=1$, але ця функція в точках, де $y=0$, навіть не має похідної.

Розглянемо питання про загальний і частинний розв'язки диференціального рівняння (1).

Як уже зазначалося, в результаті інтегрування диференціального рівняння (1) дістанемо всі розв'язки у вигляді загального розв'язку

$$y=\varphi(x,C). \tag{23}$$

Якщо для диференціального рівняння (1) є довільні початкові дані $x_0$ і $y_0$, то за теоремою Коші із загального розв'язку можна отримати єдиний розв'язок, що задовольняє задану початкову умову. При цьому потрібно знайти значення $C$, що відповідає початковим даним.

Отже, співвідношення (23) має допускати розв'язання відносно $C$, і знайдене значення $C$ має гарантувати єдиність розв'язку задачі Коші. Враховуючи це, можна дати таке означення загального розв'язку диференціального рівняння (1).

***Означення 3.*** Нехай область $D \subset \mathbf{R}_2$ є тією областю, в кожній точці якої диференціальне рівняння (1) має єдиний розв'язок. Тоді функцію (23), що визначена в деякій області змінних $x, C$ і має в цій області неперервну похідну по $x$, називають *загальним розв'язком* диференціального рівняння (1), якщо:

1) співвідношення (23) допускає розв'язання відносно $C$, тобто

$$C=\Psi(x,y);$$

2) для всіх значень $x$ і $y$ з області $D$ формула $C=\Psi(x,y)$ дає таке значення $C$, включаючи $\pm\infty$, при якому функція (23) є розв'язком диференціального рівняння (1).

Якщо відомо загальний розв'язок диференціального рівняння (1), то, маючи початкові дані з області $D$, можна знайти відповідний цим початковим даним розв'язок задачі Коші.

***Означення 4.*** Розв'язок диференціального рівняння (1), в кожній точці якого виконується умова єдиності, називають *частинним*.

З означення загального розв'язку випливає, що всі розв'язки, які утворюються із загального при конкретному значенні сталої $C$, включаючи $\pm\infty$, є частинними розв'язками.

Зауважимо, що загальним розв'язком (23) є сім'я кривих, залежних від параметра $C$. Цю сім'ю називають *інтегральною сім'єю кривих*.

Частинним розв'язком є окрема крива із сім'ї інтегральних кривих. Цю криву називають *інтегральною кривою диференціального рівняння* (1).



Отже, якщо задача Коші для диференціального рівняння (1) в області $D$ має єдиний розв'язок, то через кожну точку області $D$ проходить тільки одна інтегральна крива цього диференціального рівняння.

❑ **Приклади**

**5.** Довести, що через кожну точку області

$$D:\{|x|\le a;\ |y|\le b\} \tag{24}$$

проходить тільки одна інтегральна крива диференціального рівняння

$$y'=x^2+y^2. \tag{25}$$

Р о з в ' я з а н н я. Перевіряємо виконання умови теореми Коші.

1) Функція $f(x,y)=x^2+y^2$ в області (24) неперервна. Отже, перша умова теореми виконується.

2) Функція $f(x,y)$ має частинну похідну по $y$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y,$$

яка обмежена,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=2|y|\le 2b.$$

Друга умова теореми Коші виконується. Тому через кожну точку області (24) проходить одна інтегральна крива диференціального рівняння (25).

**6.** Знайти область існування та єдиності розв'язків диференціального рівняння

$$y'=y\sin x+e^x. \tag{26}$$

Р о з в ' я з а н н я. Права частина диференціального рівняння

$$f(x,y)=y\sin x+e^x$$

є функцією, неперервною в усій площині $xOy$. Знаходимо

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\sin x.$$

Отже, частинною похідною $\frac{\partial f}{\partial y}$ є функція, обмежена в усій площині $xOy$.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=|\sin x|\le 1.$$

Тому через кожну точку площини $xOy$ проходить одна інтегральна крива диференціального рівняння (26).

**7.** Знайти область єдиності розв'язку диференціального рівняння

$$y'=\sqrt{y}. \tag{27}$$

Р о з в ' я з а н н я. Права частина $f(x,y)=\sqrt{y}$ визначена й неперервна в тих точках площини $xOy$, де $y\ge 0$.

Частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$ стає необмеженою при $y=0$, тобто в точках осі $Ox$. Тому в точках осі $Ox$ може порушуватися єдиність. Можна довести, що функція

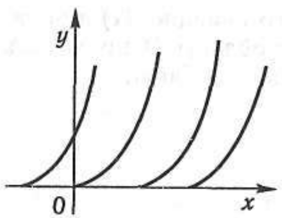


**Рис. 125**

$$y=\frac{(x+c)^2}{4},\quad x\ge c,\qquad (28)$$

є загальним розв'язком диференціального рівняння (27). Безпосередньо підстановкою впевнюємося, що розв'язком диференціального рівняння (27) є також функція

$$y\equiv 0.\qquad (29)$$

Отже, через кожну точку осі $Ox$ проходить принаймні дві інтегральні криві: інтегральна крива із сім'ї кривих (28) і сама вісь $Ox$ (рис. 125).

У точках осі $Ox$ порушується умова єдиності. У решті точок верхньої півплощини диференціальне рівняння (27) має єдиний розв'язок.

Розв'язок диференціального рівняння, в кожній точці якого порушується умова єдиності, називають *особливим розв'язком.*

Таким чином, розв'язок $y\equiv 0$ є особливим розв'язком диференціального рівняння (27).

❑ **Приклад**

**8.** Знайти друге наближення до розв'язку диференціального рівняння

$$y'=x^2+y^2\qquad (30)$$

з початковою умовою $y(0)=1$.

Р о з в ' я з а н н я. Використаємо формули (18), поклавши в них $n=0,1,2$.

Тоді нульовим наближенням $y_0(x)$ є стала функція $y_0(x)=1$. Будуємо перше наближення

$$y_1(x)=y_0(x)+\int_0^x f(t,y_0(t))\,dt=1+\int_0^x\left(1+t^2\right)dt=1+\left(t+\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^x=1+x+\frac{x^3}{3}.$$

Знаходимо друге наближення

$$y_2(x)=y_0(x)+\int_0^x f(t,y_1(t))\,dt=1+\int_0^x\left(t^2+\left(1+t+\frac{t^3}{3}\right)^2\right)dt=$$

$$=1+\left(\frac{1}{3}t^3+t+\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{63}t^7+t^2+\frac{1}{6}t^4+\frac{2}{15}t^5\right)\Big|_0^x=$$

$$=1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4+\frac{2}{15}x^5+\frac{1}{63}x^7.$$

## 5.3 ПОЛЕ НАПРЯМКІВ. ІЗОКЛІНИ. ЛАМАНІ ЕЙЛЕРА

Диференціальному рівнянню

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)\qquad (1)$$

можна дати таке геометричне тлумачення.

Нехай $D\subset\mathbf{R}_2$ є областю визначення диференціального рівняння (1). Візьмемо довільну точку $(x_0,y_0)\in D$ і підставимо її в праву частину цього



рівняння. Матимемо відповідне значення похідної

$$\frac{dy}{dx}=f(x_0,y_0).\qquad (2)$$

Отже, точці $(x_0,y_0)\in D$ диференціальне рівняння (1) ставить у відповідність певне значення, а саме — значення (2) похідної. Якщо через точку $(x_0,y_0)$ проходить інтегральна крива диференціального рівняння (1), то $\frac{dy}{dx}$, як відомо, дорівнює $\operatorname{tg}\alpha_0$, де $\alpha_0$ — кут, утворений дотичною, проведеною до інтегральної кривої в точці $(x_0,y_0)$, з додатним напрямком осі $Ox$, тобто

$$\alpha_0=\operatorname{arctg}\frac{dy}{dx}=\operatorname{arctg}f(x_0,y_0).\qquad (3)$$

Таким чином, диференціальне рівняння (1) ставить точці $(x_0,y_0)\in D$ у відповідність певний напрямок (кут), що визначається формулою (3).

Тоді точці $(x_1,y_1)\in D$ диференціальне рівняння (1) ставить у відповідність напрямок

$$\alpha_1=\operatorname{arctg}f(x_1,y_1)$$

і т. д. Кожній точці $(x,y)\in D$ диференціальне рівняння (1) ставить у відповідність напрямок

$$\alpha=\operatorname{arctg}f(x,y).\qquad (3')$$

Тому диференціальне рівняння (1) можна геометрично інтерпретувати як таке, що задає в області $D$ поле напрямків. На рис. 126 це поле зображено стрілками. Напрямок кожної стрілки визначають за формулою (3′).

Як уже зазначалося, розв'язком диференціального рівняння (1) є крива, яку називають *інтегральною.*

Отже, інтегральна крива, що проходить через точку $(x,y)\in D$, відрізняється від усіх інших кривих, які проходять через цю точку, тим, що напрямок дотичної в цій точці до інтегральної кривої збігається з напрямком поля, що його задає диференціальне рівняння.

Тому геометрично задачу інтегрування диференціального рівняння можна сформулювати так: знайти такі криві, дотичні до яких в кожній точці збігаються з напрямком поля в цій точці. На рисунку криву потрібно проводити так, щоб стрілки визначали в кожній точці напрямок дотичної до цієї кривої.

Знаючи поле напрямків, задане диференціальним рівнянням, можна будувати криві, що

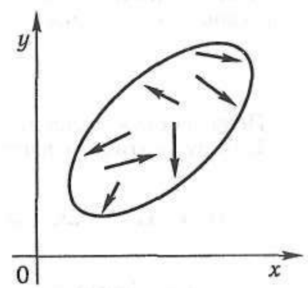


**Рис. 126**

нагадують інтегральні криві цього диференціального рівняння. Щоб побудувати поле напрямків, користуються *методом ізоклін.*

***Означення.*** *Ізокліною* називається крива на площині $xOy$, у кожній точці якої поле має той самий напрямок.

Таким чином, усі інтегральні криві, які перетинають цю ізокліну, в точках перетину нахилені до осі $Ox$ під одним і тим самим кутом. Звідси походить і назва «ізокліна» — лінія однакового напрямку.

Маючи диференціальне рівняння, можна написати рівняння ізокліни. Так, для диференціального рівняння (1) рівняння ізоклін має вигляд

$$f(x, y) = a, \tag{4}$$

де $a$ — довільний параметр. Надаючи $a$ різних значень, щоразу діставатимемо на площині $xOy$ рівняння ізокліни. При цьому напрямок поля кожної ізокліни визначається формулою

$$\alpha = \operatorname{arctg} a. \tag{5}$$

❑ **Приклади**

**1.** Побудувати за допомогою ізоклін поле напрямків, яке задає диференціальне рівняння

$$y' = x^2 + y^2. \tag{6}$$

Р о з в ' я з а н н я. Складаємо рівняння сім'ї ізоклін

$$x^2 + y^2 = a.$$

Отже, ізоклінами тут є кола з центром у початку координат і радіусом $\sqrt{a}$. Якщо $a = 0$, то матимемо точку (0, 0), напрямок поля в якій, згідно з формулою (5), дорівнює нулю (напрямок стрілки збігається з додатним напрямком осі $Ox$). При $a = 1$ дістанемо ізокліну

$$x^2 + y^2 = 1,$$

у кожній точці якої напрямок поля дорівнює $\frac{\pi}{4}$. При $a = \frac{1}{2}$ маємо

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

тобто коло з центром у початку координат і радіусом $\frac{1}{\sqrt{2}}$. У кожній точці цього кола напрямок поля дорівнює

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Поле напрямків, задане диференціальним рівнянням (6), зображено на рис. 127.

**2.** Побудувати поле напрямків, задане диференціальним рівнянням

$$y' = x. \tag{7}$$

Р о з в ' я з а н н я. Складаємо рівняння сім'ї ізоклін

$$x = a.$$

Отже, ізоклінами диференціального рівняння (7) є прямі, паралельні осі $Oy$ (рис. 128).



Поклавши $a = 0$, дістанемо ізокліну $x = 0$, тобто вісь $Oy$, в кожній точці якої напрямок поля паралельний осі $Ox$. При $a = 1$ матимемо пряму $x = 1$, напрямок поля в кожній точці якої дорівнює $\frac{\pi}{4}$. При $a = 2$ матимемо ізокліну $x = 2$, напрямок поля в кожній точці цієї прямої дорівнює $\alpha = \operatorname{arctg} 2$. При $a = -1$ дістанемо ізокліну $x = -1$, напрямок поля в кожній точці дорівнює $-\frac{\pi}{4}$ і т. д.

Якщо задати яку-небудь точку (початкову умову), наприклад $(0, 1)$, то можна побудувати наближено інтегральну криву, що проходить через точку. Для цього потрібно криву проводити так, щоб в точках її перетину з ізоклінами напрямок дотичної збігався з напрямком поля. Інтегральна крива в цьому випадку нагадує параболу. Це не випадково, оскільки загальним розв'язком диференціального рівняння (7) є сім'я парабол

$$y = \frac{x^2}{2} + C.$$

Тоді, скориставшись початковою умовою $y(0) = 1$, знаходимо параболу

$$y = \frac{x^2}{2} + 1,$$

що проходить через точку $(0, 1)$.

**3.** Побудувати поле напрямків і знайти інтегральні криві диференціального рівняння

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Р о з в ' я з а н н я. Функцію $f(x, y) = \frac{y}{x}$ у точці $(0; 0)$ не визначено. Тому диференціальне рівняння (8) в цій точці поля не задає. Для точок $x = 0$ і $y \neq 0$ розглядатимемо перевернуте диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}. \tag{9}$$

Ізоклінами диференціального рівняння (8) є півпрямі $y = ax$, що виходять із початку координат. Тому напрямок поля в кожній точці $(x, y)$, відмінній від точки (0, 0), збігається з напрямком прямої, що проходить через цю точку і початок ординат (рис. 129).

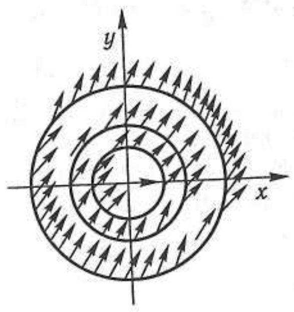


Рис. 127

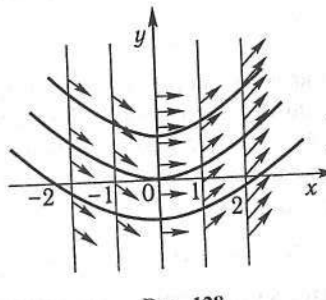


Рис. 128

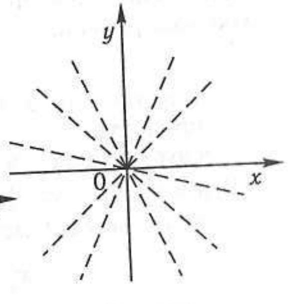


Рис. 129

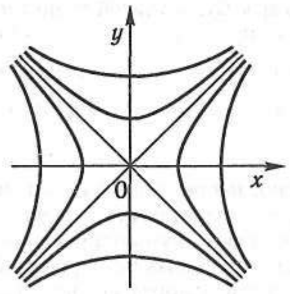


Рис. 130

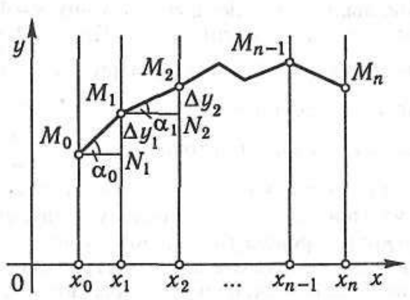


Рис. 131

Диференціальне рівняння (8) можна записати ще й так:

$$d(\ln y) = d(\ln x).$$

Звідси $y = Cx, x \neq 0$, тобто загальним розв'язком диференціального рівняння (8) є сім'я півпрямих, що виходить з початку координат.

До знайдених інтегральних кривих потрібно приєднати розв'язки диференціального рівняння (9), відмінні від розв'язків рівняння (8).

У цьому випадку це півпрямі $x = 0 (y \neq 0)$, тобто верхня і нижня частини осі $Oy$.

**4.** Побудувати за допомогою ізоклін поле напрямків для диференціального рівняння

$$y' = x^2 - y^2. \tag{10}$$

Р о з в ' я з а н н я. Ізоклінами диференціального рівняння (10) при $a \neq 0$ є гіперболи

$$x^2 - y^2 = a. \tag{11}$$

Побудуємо ряд ізоклін (рис. 130), взявши параметр $a = 0, \ \pm 1, \ \pm 2$.

При $a = 0$ ізоклінами є прямі $y = x$ і $y = -x$, напрямок поля в кожній точці яких паралельний осі $Ox$.

При $a = 1$ ізокліною є гіпербола $x^2 - y^2 = 1$, в кожній точці якої поле напрямлено під кутом $\frac{\pi}{4}$, і т. д.

Розглянемо ще один наближений метод знаходження інтегральних кривих диференціального рівняння (1), а саме — метод Ейлера.

Нехай потрібно знайти розв'язок диференціального рівняння (1) з початковою умовою

$$y(x_0) = y_0. \tag{12}$$

Припустимо, що права частина рівняння (1) задовольняє умови теореми Коші про існування та єдиність розв'язку. Тоді на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$, $h > 0$, існує єдиний розв'язок $y = y(x)$, що задовольняє початкову умову (12).

Візьмемо відрізок $[x_0; x_0 + h]$ і розіб'ємо його на $n$ частин (не обов'язково рівних між собою) точками

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = x_0 + h.$$

Через точки поділу проведемо прямі, паралельні осі $Oy$ (рис. 131).



Із точки $M_0(x_0, y_0)$ проведемо відрізок прямої, нахиленої до осі $Ox$ під кутом, що дорівнює напрямку поля в точці $M_0(x_0, y_0)$, до перетину з прямою $x = x_1$. У результаті дістанемо точку $M_1(x_1, y_1)$ з ординатою $y_1 = y_0 + \Delta y_1$.

Із прямокутного трикутника $M_0M_1N_1$ знайдемо

$$\Delta y_1 = \operatorname{tg}\alpha_0 (x_1 - x_0) = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0).$$

Отже, ординатою точки $M_1(x_1, y_1)$ є

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0).$$

Із точки $M_1(x_1, y_1)$ проведемо відрізок прямої, нахиленої до осі $Ox$ під кутом, що дорівнює напрямку поля в цій точці, до перетину з прямою $x = x_2$, матимемо $M_2(x_2, y_2)$. Міркуючи аналогічно, знаходимо ординату точки $M_2$:

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$$

і т. д. За методом індукції можна довести, що ордината точки $M_n(x_n, y_n)$ дорівнює

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}). \tag{13}$$

Внаслідок такої побудови дістанемо ламану, яку називають *ламаною Ейлера,* а метод її побудови — *методом Ейлера.*

Кожна ламана Ейлера дає уявлення про розміщення на площині інтегральної кривої, що проходить через точку.

Вважатимемо, що за зменшення довжин сторін ламана Ейлера наближається до інтегральної кривої, якщо остання існує. В теорії диференціальних рівнянь доведено, що при виконанні умов теореми Коші можна вибрати таку послідовність ламаних Ейлера, яка наближається до інтегральної кривої.

Процес побудови ламаної Ейлера розглянуто тільки в один бік — вправо від точки $M_0$. Аналогічно будується ламана Ейлера вліво від точки $M_0$.

На практиці, як правило, відрізок $[x_0; x_0 + h]$ розбивають на рівні частини так, що довжина кожного частинного відрізка $[x_k; x_{k+1}]$ дорівнює $\frac{h}{n}$.

Тоді формула (13) набирає вигляду

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}; y_{n-1})\frac{h}{n}. \tag{14}$$

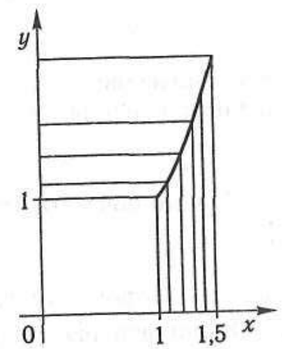


Рис. 132

❑ **Приклад**

**5.** Методом Ейлера побудувати наближено інтегральну криву диференціального рівняння $y' = x + y$, що проходить через точку (1, 1), на проміжку $x = 1$ і $x = 1{,}5$, та обчислити наближено $y$ при $x = 1{,}5$.

Р о з в ' я з а н н я. Розіб'ємо відрізок $[1;1,5]$, наприклад, на п'ять рівних частин. Довжина кожного частинного відрізка дорівнює

$$\frac{0,5}{5}=0,1,$$

а кожна точка $x_k$, $k=0,1,2,3,4,5$, збігається з точками $x_0=1$; $x_1=1,1$; $x_2=1,2$; $x_3=1,3$; $x_4=1,4$; $x_5=1,5$.

Скориставшись формулою (14) і вважаючи, що

$$f(x,y)=x+y,$$

складаємо таблицю:

| $k$ | $x_k$ | $y_k$ | $f(x_k,y_k)\frac{h}{n}$ | $y_k+1$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0,2 | 0,2 |
| 1 | 1,1 | 1,2 | 0,23 | 1,43 |
| 2 | 1,2 | 1,43 | 0,263 | 1,693 |
| 3 | 1,3 | 1,693 | 0,2993 | 1,9923 |
| 4 | 1,4 | 1,9923 | 0,33923 | 2,33153 |
| 5 | 1,5 | 2,33153 | | |

Побудувавши на площині $xOy$ точки (1; 1); (1,1; 1,2); (1,2; 1,43); (1,3; 1,693); (1,4; 1,9923); (1,5; 2,33153) і сполучивши їх відрізками прямої, матимемо ламану Ейлера (рис. 132), яку беремо за наближений вигляд шуканої інтегральної кривої. При цьому $y(1,5)=2,33153$.

## 5.4 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ

Розглянемо окремі типи диференціальних рівнянь, що інтегруються в квадратурах.

**1.** Нехай маємо диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx}=f(x), \tag{1}$$

яке явно не містить шуканої функції $y$. Як уже зазначалося, таке диференціальне рівняння має загальний розв'язок

$$y=\int f(x)dx+C. \tag{2}$$

Задамо початкову умову

$$y(x_0)=y_0, \tag{3}$$

де $x_0$ — будь-яка точка відрізка $[a;b]$.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то для диференціального рівняння (1) виконуються умови теореми Коші. Отже, через кожну точку області $D$

$$D:\{a\le x\le b; -\infty<y<+\infty\}$$

проходить одна і тільки одна інтегральна крива, або задача Коші для диференціального рівняння (1) з довільною початковою умовою (3) має єдиний розв'язок, який запишемо так:

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x)dx. \tag{4}$$

❑ **Приклад**

**1.** Розв'язати диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx}=\sin^2 x. \tag{5}$$

Р о з в ' я з а н н я. Функція $f(x)$ неперервна в усіх точка інтервалу $(-\infty;+\infty)$. Тому диференціальне рівняння (5) з початковою умовою (3) має єдиний розв'язок

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}\sin^2 xdx=y_0+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}(1-\cos 2x)\,dx=y_0+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{x_0}^{x}=$$

$$=y_0+\frac{1}{2}(x-\sin 2x)-\frac{1}{2}\left(x_0-\frac{1}{2}\sin 2x_0\right).$$

Зокрема, якщо $x_0=0$, то

$$y=y_0+\frac{1}{2}(x-\sin 2x).$$

**2.** Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx}=f(y), \tag{6}$$

що не містить явно незалежної змінної $x$.

Припустимо, що функція $f(y)$ неперервна на відрізку $[c;d]$ і при $y\in[c;d]$

$$f(y)\ne 0.$$

Тоді рівняння (6) набирає вигляду

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(y)} \tag{7}$$

і можна розглядати $x$ як функцію $y$. На основі розглянутого випадку диференціальне рівняння (7) має загальний розв'язок

$$x=\int\frac{dy}{f(y)}+C. \tag{8}$$

Введемо початкові дані $x_0, y_0$, де $-\infty < x_0 < +\infty$; $c \le y_0 \le d$.
Розв'язок (8) можна записати так:

$$x = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)}. \qquad (9)$$

Згідно з рівнянням (7), $\frac{dx}{dy} \ne 0$. Тому функція (9)

$$x - x_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)}$$

є монотонною на відрізку $[c; d]$. Отже, вона має обернену функцію

$$y = \varphi(x - x_0, y_0),$$

яка задовольняє задане диференціальне рівняння (6).

Розглянемо випадок, коли неперервна функція $f(y)$ за окремих значень $y$ дорівнює нулю

$$f(y) = 0. \qquad (10)$$

Нехай $y = \overline{y}_0$ є коренем цього рівняння. Розглядаючи $y \equiv \overline{y}_0$ як функцію від $x$, безпосередньою підстановкою впевнюємося, що функція $y \equiv \overline{y}_0$ є розв'язком диференціального рівняння (6). Таким чином, крім розв'язку (9), диференціальне рівняння (6) має ще розв'язки вигляду

$$y \equiv \overline{y}_0,$$

де $\overline{y}_0$ — корінь рівняння (10). Геометрично ці розв'язки інтерпретуються як прямі, паралельні осі $Ox$. Якщо через точки цих прямих проходить тільки одна інтегральна крива — пряма $y = \overline{y}_0$, то це частинні розв'язки заданого диференціального рівняння. Якщо через кожну точку $(x_0; \overline{y}_0)$ цих прямих проходить не менше двох інтегральних кривих, то розв'язки вигляду $y = \overline{y}_0$ є особливими.

❑ **Приклади**

**2.** Розв'язати диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = e^y.$$

Р о з в ' я з а н н я. Тут $f(y) = e^y \ne 0$. Тому скористаємося формулою (9):

$$x = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{e^y} = x_0 - e^{-y} + e^{-y_0}.$$



Звідси знаходимо розв'язок заданого диференціального рівняння

$$y = \ln \frac{1}{x_0 + e^{-y_0} - x}.$$

**3.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y}.$$

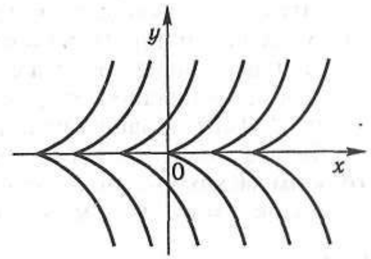


**Рис. 133**

Чи має це рівняння особливий розв'язок?

Р о з в ' я з а н н я. Нехай $y \ne 0$. За формулою (8) маємо

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} + C = \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} + C.$$

Звідси знаходимо загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = \pm \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(x - C)^3}. \qquad (11)$$

На площині $xOy$ це сім'я парабол (рис. 133).

Проте права частина рівняння $f(y) = \sqrt[3]{y}$ при $y = 0$ дорівнює нулю. Тому, крім розв'язків (11), розв'язком буде також функція $y \equiv 0$.

Згідно з рис. 133, через кожну точку осі $Ox$ проходять дві інтегральні криві: одна — із сім'ї (11), інша — вісь $Ox$. Тому розв'язок $y \equiv 0$ є особливим.

**3.** Нехай задано диференціальне рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = \psi(x)\varphi(y), \qquad (12)$$

де функції $\psi(x)$ і $\varphi(y)$ — неперервні відповідно на відрізках $[a; b]$ і $[c; d]$. Тоді для всіх $y \in [c; d]$, при яких $\varphi(y) \ne 0$, диференціальне рівняння (12) можна записати так:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = \psi(x)dx. \qquad (13)$$

Диференціальне рівняння, в якому коефіцієнт при $dx$ є функцією, залежною тільки від $x$, а коефіцієнт при $dy$ є функцією, залежною тільки від $y$, називають *диференціальним рівнянням із відокремленими змінними*.

Отже, (13) є диференціальним рівнянням із відокремленими змінними.

Шуканою функцією (розв'язком) є функція від $x$:

$$y = y(x).$$

Оскільки в рівнянні (13) містяться тотожно рівні диференціали, то їхні невизначені інтеграли відрізняються між собою на сталу величину:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int \psi(x)dx + C. \qquad (14)$$

Задачу інтегрування диференціального рівняння (12) зводять таким чином до квадратур. При цьому вважають, що задачу інтегрування диференціального рівняння розв'язано.

Здобуте співвідношення пов'язує функцію $y$, незалежну змінну $x$ та сталу $C$. Таке співвідношення називають *загальним інтегралом*.

Якщо функція $\varphi(y)$ за деяких значень $y = y_0$ дорівнює нулю, $\varphi(y_0) = 0$, то, крім загального інтеграла (14), диференціальне рівняння (12) має ще розв'язок $y = y_0$, який може входити в (14).

❑ **Приклад**
**4.** Знайти розв'язки диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = x(y-1). \tag{15}$$

Р о з в ' я з а н н я. При $y \neq 1$ задане рівняння допускає відокремлення змінних

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int x dx + \ln|C|.$$

Знайшовши інтеграли, маємо

$$\ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + \ln|C|.$$

Після потенціювання маємо

$$y = 1 + Ce^{\frac{x^2}{2}}. \tag{16}$$

Дістали загальний розв'язок диференціального рівняння (15). Функція

$$\varphi(y) = y - 1$$

при $y = 1$ дорівнює нулю. Отже, $y \equiv 1$ є також розв'язком диференціального рівняння (15). Проте цей розв'язок можна дістати із загального розв'язку (16) при $C = 0$. Тому він є частинним розв'язком.

**4.** Рівняння (12) є окремим випадком диференціального рівняння

$$M(x)N(y)dx + \Phi(x)Q(y)dy = 0. \tag{17}$$

Рівняння (17) називають *диференціальним рівнянням, яке допускає відокремлення змінних*.

Для відокремлення змінних у диференціальному рівнянні (17) досить обидві його частини помножити на функцію $\frac{1}{N(y)\Phi(x)}$ (припускаємо, що $N(y) \neq 0$ і $\Phi(x) \neq 0$). В результаті матимемо диференціальне рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{M(x)}{\Phi(x)}dx + \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0.$$



Після інтегрування дістанемо загальний інтеграл диференціального рівняння (17) у вигляді

$$\int \frac{M(x)}{\Phi(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = C. \tag{18}$$

Як і в попередньому випадку, потрібно окремо дослідити ті значення $x$ і $y$, за яких функції $\Phi(x)$ і $N(y)$ дорівнюють нулю, тобто розглянути корені рівнянь

$$\Phi(x) = 0, \quad N(y) = 0. \tag{19}$$

Корені цих рівнянь є також розв'язками диференціального рівняння (17).

❑ **Приклад**
**5.** Розв'язати диференціальне рівняння

$$x\left(y^2-1\right)dx + y\left(x^2-1\right)dy = 0. \tag{20}$$

Р о з в ' я з а н н я. Помножимо обидві частини цього рівняння на функцію $\frac{1}{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)}$. Дістанемо диференціальне рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{x}{x^2-1}dx + \frac{y}{y^2-1}dy = 0.$$

Загальний інтеграл, згідно з формулою (18), має вигляд

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx + \int \frac{y}{y^2-1}dy = C.$$

Знайшовши інтеграли, дістанемо

$$\ln\left|x^2-1\right| + \ln\left|y^2-1\right| = \ln|C|$$

(для зручності сталу інтегрування запишемо у вигляді $\ln|C|$).

Після потенціювання остаточно маємо такий загальний інтеграл:

$$\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right) = C.$$

Знайдемо корені рівнянь

$$x^2 - 1 = 0, \quad y^2 - 1 = 0.$$

Маємо $x = \pm 1$; $y = \pm 1$.

Отже, прямі $x = \pm 1$ і $y = \pm 1$ є інтегральними кривими диференціального рівняння (20). Ці розв'язки знаходяться із загального інтеграла при $C = 0$. Тому виписувати їх не слід. Вони є частинними розв'язками заданого диференціального рівняння.

## 5.5 ОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

***Означення.*** Диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1}$$

називають *однорідним*, якщо функція $f(x,y)$ задовольняє умову

$$f(tx,ty)=f(x,y), \tag{2}$$

де $t$ — будь-яке число, відмінне від нуля.

Функцію $f(x,y)$, що задовольняє умову (2), називають *однорідною функцією нульового виміру*. Тому диференціальне рівняння називають *однорідним*, якщо правою частиною його є однорідна функція нульового виміру.

Розглядають також однорідні функції виміру $n$. Це функції, для яких виконується умова

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y).$$

При $n=0$ маємо функцію нульового виміру.

Однорідні диференціальні рівняння зводяться до диференціальних рівнянь з відокремленими змінними підстановкою

$$y=ux, \tag{3}$$

де $u$ — невідома функція $x$:

$$u=u(x).$$

Припустимо, що функція (3) є розв'язком диференціального рівняння (1). Тоді в області визначення диференціального рівняння (1) виконується рівність

$$x\frac{du}{dx}+u=f(x,ux). \tag{4}$$

Проте за умовою (2) функцію $f(x,ux)$ можна записати так:

$$f(x,ux)=f(tx,tux).$$

Нехай $t=\frac{1}{x}, x\neq 0$. Маємо

$$f(x,ux)=f(1,u),$$

тобто $f(1,u)$ — функція від однієї змінної $u$:

$$f(1,u)=\psi(u).$$

Диференціальне рівняння (4) набирає вигляду

$$x\frac{du}{dx}=\psi(u)-u,$$

або в диференціальній формі

$$xdu=(\psi(u)-u)dx. \tag{5}$$



Диференціальне рівняння (5) допускає відокремлення змінних. Справді, якщо

$$\psi(u)-u\neq 0, \tag{6}$$

то рівняння (5) можна записати так:

$$\frac{du}{\psi(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Звідси

$$\int\frac{du}{\psi(u)-u}=\ln|x|+C. \tag{7}$$

Підставивши значення $u=\frac{y}{x}$, дістанемо загальний інтеграл диференціального рівняння (1).

Загальний інтеграл (7) знайшли за виконання умови (6).

Нехай умова (6) не виконується. Тоді матимемо такі випадки.

I. Умова (6) не виконується тотожно

$$\psi(u)-u\equiv 0, \text{ або } \psi(u)\equiv u=\frac{y}{x}.$$

Тоді диференціальне рівняння (1) набирає вигляду

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.$$

Загальним розв'язком цього рівняння є сім'я півпрямих $y=Cx,\ x\neq 0$, до яких потрібно приєднати півпрямі $x=0,\ y\neq 0$.

II. Умова (6) порушується за окремих значень, наприклад при $u=u_0$. Тоді, крім загального інтеграла (7), диференціальне рівняння (1) має ще розв'язок

$$u=u_0, \text{ або } y=u_0x,$$

тобто інтегральною кривою є пряма, що проходить через початок координат.

❑ **Приклади**

Розв'язати диференціальні рівняння

**1.**

$$y'=\frac{x+y}{x-y}. \tag{8}$$

Р о з в ' я з а н н я. Правою частиною цього рівняння є однорідна функція нульового виміру

$$f(tx,ty)=\frac{tx+ty}{tx-ty}=\frac{x+y}{x-y}=f(x,y).$$

Диференціальне рівняння (8) — однорідне. Застосовуємо підстановку $y=ux$. Маємо

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{1+u}{1-u},$$

або

$$x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{1-u}. \tag{9}$$

Легко бачити, що умова (6) виконується для всіх $u \neq 1$. Проте точки, в яких $u = \frac{y}{x} = 1$, $y = x$ не входять в область визначення диференціального рівняння.

Отже, відокремлюючи змінні в рівняння (9), дістанемо таке диференціальне рівняння:

$$\frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи його, маємо

$$\int \frac{1-u}{1+u^2}du = \int \frac{dx}{x} + C = \ln|x| + C;$$

$$\int \frac{1-u}{1+u^2}du = \int \frac{du}{1+u^2} - \int \frac{udu}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right).$$

Дістанемо такий загальний інтеграл диференціального рівняння (8):

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = \ln|x| + \ln|C|.$$

**2.**

$$x\frac{dy}{dx} = y\ln\frac{y}{x}. \tag{10}$$

Р о з в ' я з а н н я. Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}.$$

Це однорідне диференціальне рівняння. Зробивши підстановку $y = ux$, матимемо

$$x\frac{du}{dx} + u = u\ln u,$$

або

$$x\frac{du}{dx} = u\left(\ln u - 1\right).$$

Відокремлюючи змінні, дістанемо

$$\frac{du}{u\left(\ln u - 1\right)} = \frac{dx}{x}.$$

Після інтегрування знаходимо

$$\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln|C|.$$

Звідси загальний розв'язок

$$y = xe^{Cx+1}. \tag{11}$$

Відокремлюючи змінні, припустимо, що

$$u\left(\ln u - 1\right) \neq 0.$$

Нехай

$$u\left(\ln u - 1\right) = 0.$$

Тоді

$$u = 0,\ u = e.$$



Кореню $u = 0$ відповідає $y = 0$. Це значення, згідно з рівнянням (10), не належить області визначення заданого рівняння.

Кореню $u = e$ відповідає розв'язок $y = ex$.

Проте цей розв'язок міститься в загальному розв'язку (11), його можна дістати із загального розв'язку при $C = 0$.

Отже, всі розв'язки диференціального рівняння (10) виражають формулою (11).

До однорідного диференціального рівняння можна звести диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right), \tag{12}$$

в якому $a, b, c, a_1, b_1, c_1$ — дійсні числа, причому $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$, а $f$ — довільна неперервна функція в розглядуваній області.

Введемо нові змінні $\xi$ і $\eta$:

$$x = \xi + h,\quad y = \eta + k, \tag{13}$$

де $h$ і $k$ невідомі числа. Підставляючи в диференціальне рівняння (12) значення (13) та $\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}$, дістанемо диференціальне рівняння

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta + ah + bk + c}{a_1\xi + b_1\eta + a_1h + b_1k + c_1}\right).$$

Нехай

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0; \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Система алгебраїчних рівнянь (14) має єдиний розв'язок. Дістанемо однорідне диференціальне рівняння

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}\right) \tag{15}$$

відносно змінних $\eta$ і $\xi$.

Проінтегрувавши рівняння (15) викладеним вище методом, знайдемо його загальний інтеграл:

$$\Phi(\xi, \eta, C) = 0.$$

Підставивши значення $\xi = x - h$, $\eta = y - k$ ($h$ і $k$ знаходять із системи рівнянь (14)), дістанемо загальний інтеграл диференціального рівняння (12).

❑ **Приклад**

**3.** Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 7x + 7}{3x - 7y - 3}. \tag{16}$$

Розв'язання. Тут $\frac{a}{a_1}=-\frac{7}{3}$; $\frac{b}{b_1}=-\frac{3}{7}$. Отже,

$$\frac{a}{a_1}\neq\frac{b}{b_1}.$$

Складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases}-7h+3k+7=0;\\ 3h-7k-3=0,\end{cases}$$

звідси $h=1, k=0$.

Застосувавши підстановку

$$x=\xi+1,\quad y=\eta, \tag{17}$$

дістанемо диференціальне рівняння

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{3\eta-7\xi}{3\xi-7\eta}.$$

Нехай $\eta=u\xi$. Тоді

$$\xi\frac{du}{d\xi}+u=\frac{3u-7}{3-7u},$$

або

$$\xi\frac{du}{d\xi}=\frac{7\left(u^2-1\right)}{3-7u}.$$

Відокремлюючи в цьому рівнянні змінні, дістанемо диференціальне рівняння

$$\frac{3-7u}{7\left(u^2-1\right)}du=\frac{d\xi}{\xi}.$$

Інтегруючи обидві частини, матимемо

$$\int\frac{3-7u}{7\left(u^2-1\right)}du=\int\frac{d\xi}{\xi}+\ln|C|,$$

або

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|u^2-1\right|=\ln|\xi|+\ln|C|.$$

Після потенціювання дістанемо загальний інтеграл

$$\left(\frac{\eta-\xi}{\eta+\xi}\right)^{3/7}=C\left(\eta^2-\xi^2\right).$$

Підставивши значення $\eta$ і $\xi$ за формулами (17), матимемо загальний інтеграл диференціального рівняння (16)

$$\left(\frac{y-x+1}{y+x-1}\right)^{3/7}=C\left(y^2-(x-1)^2\right).$$

Зазначимо, що коли умова $\frac{a}{a_1}\neq\frac{b}{b_1}$ не виконується, тобто

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\lambda, \tag{18}$$



то слід застосувати підстановку

$$a_1x+b_1y=z. \tag{19}$$

У цьому випадку від рівняння (12) прийдемо до диференціального рівняння, яке допускає відокремлення змінних.

Справді, за формулою (19) маємо

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b_1}\frac{dz}{dx}-\frac{a_1}{b_1},$$

а за формулою (18)

$$a=a_1\lambda;\quad b=b_1\lambda.$$

Тоді

$$\frac{1}{b_1}\frac{dz}{dx}=\frac{a_1}{b_1}+f\left(\frac{\lambda z+c}{z+c_1}\right).$$

Це рівняння допускає відокремлення змінних

$$\frac{dz}{b_1\left(\frac{a_1}{b_1}+f\left(\frac{\lambda z+c}{z+c_1}\right)\right)}=dx.$$

Знайшовши загальний інтеграл

$$\int\frac{dz}{b_1\left(\frac{a_1}{b_1}+f\left(\frac{\lambda z+c}{z+c_1}\right)\right)}=x+C.$$

і підставивши сюди значення $z$ із формули (19), дістанемо загальний інтеграл рівняння (12).

## 5.6 ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

*Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку* називають диференціальне рівняння, в яке шукана функція $y$ та її похідна першого порядку $\frac{dy}{dx}$ входять лінійно (у першому степені). Таке рівняння має вигляд

$$A(x)\frac{dy}{dx}+B(x)y=C(x), \tag{1}$$

де $A(x), B(x), C(x)$ — неперервні функції на деякому проміжку $\langle a;b\rangle$, причому вважають, що для будь-якого $x\in\langle a;b\rangle$

$$A(x)\neq 0.$$

Таке припущення дає змогу записати лінійне рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x), \tag{2}$$

де

$$P(x)=\frac{B(x)}{A(x)},\quad Q(x)=\frac{C(x)}{A(x)}.$$

Легко довести, що в будь-якому прямокутнику

$$R:[a_1 \le x \le b_1; -k \le y \le k],$$

де $a_1 > a; b_1 < b; k$ — довільне додатне число, для рівняння (2) виконуються умови теореми Коші про існування та єдиність розв'язку.

Справді, права частина

$$f(x,y)=Q(x)-P(x)y$$

є неперервною функцією в прямокутнику $R$. Частинна похідна

$$\frac{df}{dy}=-P(x)$$

є обмеженою в прямокутнику $R$, тому виконується умова Ліпшіца.

Отже, через кожну точку $(x_0, y_0)$ смуги

$$-a < x < b,\quad -\infty < y < +\infty$$

проходить одна інтегральна крива диференціального рівняння (2). Зокрема, якщо $P(x)$ і $Q(x)$ — неперервні функції в інтервалі $(-\infty; +\infty)$, то через кожну точку площини $xOy$ проходить одна і тільки одна інтегральна крива цього рівняння. У цьому випадку диференціальне рівняння (2) особливих розв'язків не має.

**Однорідне диференціальне рівняння.** Розглянемо випадок, коли в диференціальному рівнянні (2) права частина $Q(x)\equiv 0$ в розглядуваному проміжку $\langle a; b\rangle$.

Диференціальне рівняння набирає вигляду

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0. \tag{3}$$

Це рівняння називають *лінійним однорідним диференціальним рівнянням*. Воно допускає відокремлювання змінних. Справді, при $y \ne 0$ його можна записати так:

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx.$$

Звідси знаходимо загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння (3):

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}, \tag{4}$$

де $C$ — довільна стала.



Зауважимо, що загальний розв'язок (4) дістали, припустивши, що $y \ne 0$. Безпосередньою підстановкою впевнюємося, що функція $y \equiv 0$ є розв'язком рівняння (3). Проте цей розв'язок утворюється із загального розв'язку (4) при $C=0$. Тому розв'язок $y \equiv 0$ є частинним розв'язком диференціального рівняння (3). Інакше кажучи, всі розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння (3) задаються формулою (4).

❑ **Приклад**

**1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння**

$$\frac{dy}{dx}+\sin xy=0.$$

Р о з в ' я з а н н я. Згідно з формулою (4), загальним розв'язком заданого рівняння є функція

$$y=Ce^{-\int \sin x dx}=Ce^{\cos x}.$$

**Неоднорідне диференціальне рівняння.** Якщо в диференціальному рівнянні (2) функція $Q(x)\not\equiv 0$ в розглядуваному проміжку $\langle a; b\rangle$, то таке диференціальне рівняння називають *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням*.

Загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння знаходять *методом варіації довільної сталої* (цей метод запропонував Лагранж). Розглянемо його суть.

Розв'язок диференціального рівняння (2) шукатимемо у вигляді (4), тобто

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}, \tag{5}$$

припустивши, що $C$ не стала, а невідома функція від $x$

$$C=C(x).$$

Підставляючи функцію (5) у диференціальне рівняння (2), матимемо

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int P(x)dx}-CP(x)e^{-\int P(x)dx}+P(x)Ce^{-\int P(x)dx}=Q(x),$$

або

$$\frac{dC}{dx}=Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

Тоді $C$ знаходять із диференціального рівняння квадратурою

$$C=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_1, \tag{6}$$

де $C_1$ — довільна стала.

Підставляючи з рівності (6) значення $C$ у формулу (5), знаходимо загальний розв'язок диференціального рівняння (2) у вигляді

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx \tag{7}$$

(у формулі (7) замість $C_1$ взяли $C$).

Аналізуючи загальний розв'язок (7), бачимо, що перший доданок є загальним розв'язком однорідного рівняння (3), а другий — частинним розв'язком (він утворюється з розв'язку (7) при $C = 0$) неоднорідного рівняння (2). Тому можна зробити такий висновок: загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння складається із загального розв'язку відповідного однорідного та частинного розв'язку неоднорідного диференціальних рівнянь.

❑ **Приклади**

**2.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} - y = 2x - x^2. \tag{8}$$

Р о з в ' я з а н н я. Знайдемо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} - y = 0. \tag{9}$$

Відокремимо змінні

$$\frac{dy}{y} = dx.$$

Звідси

$$\int\frac{dy}{y} = \int dx + \ln|C|,$$

або

$$\ln|y| = x + \ln|C|.$$

Після потенціювання матимемо загальний розв'язок диференціального рівняння (9):

$$y = Ce^x. \tag{10}$$

Для знаходження загального розв'язку рівняння (8) застосуємо метод варіації довільної сталої. Припустимо, що у формулі (10) $C = C(x)$. Підставимо функцію (10) у диференціальне рівняння (8)

$$\frac{dC}{dx}e^x + Ce^x - Ce^x = 2x - x^2.$$

Дістанемо таке диференціальне рівняння:

$$\frac{dC}{dx} = \left(2x - x^2\right)e^{-x}.$$



Отже,

$$C = \int\left(2x - x^2\right)e^{-x}dx + C_1.$$

Інтеграл знаходитимемо частинами

$$u = 2x - x^2, \quad dv = e^{-x}dx;$$

$$du = (2 - 2x)dx, \quad v = -e^{-x};$$

$$\int\left(2x - x^2\right)e^{-x}dx = -\left(2x - x^2\right)e^{-x} + 2\int(1 - x)e^{-x}dx =$$

$$= -\left(2x - x^2\right)e^{-x} - 2(1 - x)e^{-x} - 2\int e^{-x}dx =$$

$$= 2e^{-x}\left(1 - \left(2x - x^2\right) - 2(1 - x)\right).$$

Отже,

$$C = 2e^{-x}\left(x^2 - 1\right) + C_1.$$

Підставивши знайдене значення $C$ у формулу (10), знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння (8)

$$y = Ce^x + 2\left(x^2 - 1\right).$$

**3.** Знайти закон зміни струму в колі з опором $R$ та самоіндукцією $L$, якщо початкова сила струму є $I_0$, а електрорушійна сила змінюється за законом $E = E_0 \sin\omega t$, де $E_0$ — стале число.

Р о з в ' я з а н н я. У фізиці встановлюється така залежність між силою струму $I$, електрорушійною силою $E$, опором $R$ і самоіндукцією $L$:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}, \tag{11}$$

де $R$ і $L$ — сталі.

Це рівняння є неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням відносно $I$. Знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0.$$

Таким розв'язком є функція

$$I = Ce^{-\frac{R}{L}t}. \tag{12}$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (11) можна було б, як і в попередньому прикладі, знаходити методом варіації довільної сталої. Проте це можна зробити простіше, скориставшись тим, що загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння є сумою загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Загальний розв'язок однорідного рівняння знайдено, він задається формулою (12). Частинний розв'язок рівняння (1) шукатимемо у вигляді

$$y = A\sin\omega t + B\cos\omega t, \tag{13}$$

де $A$ і $B$ — невідомі числа. Підставимо значення $y$ з (13) у рівняння (11). Матимемо таку тотожність:

$$A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t + \frac{R}{L}(A\sin\omega t + B\cos\omega t) \equiv \frac{E_0}{L}\sin\omega t.$$

Прирівняємо в цій тотожності окремо коефіцієнти при $\sin\omega t$ і коефіцієнти при $\cos\omega t$. Дістанемо відносно $A$ і $B$ алгебраїчну систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{R}{L}A - B\omega = \frac{E_0}{L}; \\ A\omega + \frac{R}{L}B = 0, \end{cases}$$

розв'язуючи яку знаходимо

$$A = \frac{E_0 R}{R^2 + \omega^2 L^2}; \quad B = -\frac{E_0 L\omega}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Тоді частинний розв'язок

$$y = \frac{E_0 R}{R^2 + \omega^2 L^2}\sin\omega t - \frac{E_0 L\omega}{R^2 + \omega^2 L^2}\cos\omega t.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (11) має вигляд

$$I = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0 R}{R^2 + \omega^2 L^2}\sin\omega t - \frac{E_0 L\omega}{R^2 + \omega^2 L^2}\cos\omega t. \tag{14}$$

Проте в задачі дано й початкову умову, а саме: сила струму $I$ при $t = 0$ дорівнює $I_0$, тобто

$$I(0) = I_0.$$

Підставивши в рівняння (14) значення $t = 0$ і $I = I_0$, матимемо

$$I_0 = C - \frac{E_0 L\omega}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Звідси знаходимо сталу інтегрування

$$C = I_0 + \frac{E_0 L\omega}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Остаточно

$$I = \left(I_0 + \frac{E_0 L\omega}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0 L\omega}{R^2 + \omega^2 L^2}\sin\omega t - \frac{E_0 L\omega}{R^2 + \omega^2 L^2}\cos\omega t.$$

**Рівняння Бернуллі.** До лінійного диференціального рівняння можна звести рівняння, яке називають *рівняння Бернуллі*[1]:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n. \tag{15}$$

У рівнянні (15) функції $P(x)$ і $Q(x)$ неперервні на проміжку $\langle a; b\rangle$, а $n$ — деяке стале число.

Якщо $n = 0$, то рівняння (15) є неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням. Якщо $n = 1$, то рівняння допускає відокремлення змінних.

[1] Це рівняння запропонував у 1695 р. відомий швейцарський математик *Якоб Бернуллі* (1654—1705), а через два роки його молодший брат *Йоганн Бернуллі* (1667—1748) вивів метод розв'язання цього рівняння.



Надалі припускатимемо, що $n \neq 0; 1$ і $y \neq 0$.

Помноживши обидві частини рівняння (15) на $y^{-n}$, дістанемо таке диференціальне рівняння:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x). \tag{16}$$

Введемо нову функцію $z$, поклавши

$$z = y^{1-n}. \tag{17}$$

Звідси

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}. \tag{18}$$

Помноживши обидві частини рівняння (16) на число $(1 - n)$, матимемо рівняння:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x). \tag{19}$$

Це неоднорідне лінійне диференціальне рівняння відносно функції $z$. Визначивши з нього функцію $z$, з (17) знайдемо шукану функцію $y$:

$$y = z^{\frac{1}{1-n}}.$$

❑ **Приклад**

**4.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^4\left(1 - x^2\right), \tag{20}$$

який задовольняє початкову умову

$$y(1) = 1. \tag{21}$$

Р о з в ' я з а н н я. Диференціальне рівняння (20) є рівнянням Бернуллі ($n = 4$). Поділивши обидві частини цього рівняння на $y^{-4}$ і застосувавши підстановку

$$z = y^{-3}, \tag{22}$$

дістанемо диференціальне рівняння

$$\frac{dz}{dx} - \frac{3z}{x} = -3\left(1 - x^2\right). \tag{23}$$

Знайдемо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння

$$\frac{dz}{dx} - \frac{3z}{x} = 0.$$

Відокремимо змінні

$$\frac{dz}{z} = 3\frac{dx}{x}.$$

Звідси

$$\ln|z| = 3\ln|x| + \ln|C|,$$

або

$$z = Cx^3. \tag{24}$$

Розв'язок диференціального рівняння (23) знайдемо методом варіації довільної сталої. Для цього в рівності (24) вважатимемо $C$ невідомою функцією, $C = C(x)$. Тоді

$$\frac{dC}{dx}x^3 + 3Cx^2 - 3Cx^2 = -3\left(1-x^2\right),$$

або

$$\frac{dC}{dx} = \frac{3}{x} - \frac{3}{x^3}.$$

Отже,

$$C = \int\left(\frac{3}{x} - \frac{3}{x^3}\right)dx = 3\ln|x| + \frac{3}{2x^2} + C_1,$$

тобто загальний розв'язок диференціального рівняння (23) задається формулою

$$z = Cx^3 + 3x^3\ln|x| + \frac{3}{2}x.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (20), згідно з формулою (22):

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{Cx^3 + 3x^3\ln|x| + \frac{3}{2}x}}. \tag{25}$$

Скористаємося початковою умовою (21). Вважатимемо, що в рівності (25) $x=1$ і $y=1$. Тоді

$$1 = \frac{1}{\sqrt[3]{C + \frac{3}{2}}},$$

звідси

$$C = -\frac{1}{2}.$$

Отже, шуканий розв'язок

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2}x^3 + 3x^3\ln|x| + \frac{3}{2}x}}.$$

## 5.7 РІВНЯННЯ В ПОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛАХ. ІНТЕГРУВАЛЬНИЙ МНОЖНИК

Рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

називають *диференціальним рівнянням у повних диференціалах,* якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u = u(x, y)$, тобто

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du(x, y) = 0.$$



Знайдемо загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах

$$u(x, y) = C.$$

Так, диференціальне рівняння

$$ydx + xdy = 0 \tag{2}$$

запишемо у вигляді

$$d(xy) = 0.$$

Ліва частина рівняння (2) є повним диференціалом функції $u(x, y) = xy$. Тому диференціальне рівняння (2) є рівнянням у повних диференціалах, і його загальний інтеграл дорівнює

$$xy = C.$$

Можна вивести ознаку, за якою встановлюють, чи є це диференціальне рівняння рівнянням у повних диференціалах, чи ні.

**Теорема.** Нехай у рівнянні (1) коефіцієнти $M(x, y)$, $N(x, y)$ є неперервними функціями, які мають неперервні частинні похідні $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ в однозв'язній області $D \subset \mathbf{R}_2$. Для того щоб диференціальне рівняння (1) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно й достатньо, щоб в області $D$ виконувалася умова

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{3}$$

Доведення цієї теореми розглянуто в п. 3.9 (див. доведення теореми 3).

❑ **Приклади**

Знайти загальні інтеграли диференціальних рівнянь

**1.**

$$\left(x^2 - 4xy - 2y^2\right)dx + \left(y^2 - 4xy - 2x^2\right)dy = 0. \tag{4}$$

Розв'язання.

$$M(x, y) = x^2 - 4xy - 2y^2;$$

$$N(x, y) = y^2 - 4xy - 2x^2.$$

Тоді

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -4x - 4y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -4y - 4x.$$

Отже,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Рівняння (4) є рівнянням у повних диференціалах. Визначимо функцію $u(x, y)$ за формулою

$$u(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y)=\int\left(x^2-4xy-2y^2\right)dx+$$

$$+\varphi(y)=\frac{x^3}{3}-2x^2y-2y^2x+\varphi(y).$$

Знайдемо

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2x^2-4xy+\varphi'(y).$$

Для функції $\varphi(y)$ маємо диференціальне рівняння

$$-2x^2-4xy+\varphi'(y)=y^2-4xy-2x^2,$$

або

$$\varphi'(y)=y^2.$$

Звідси

$$\varphi(y)=\frac{y^3}{3}.$$

Шукана функція $u(x, y)$ має вигляд

$$u(x,y)=\frac{x^3}{3}-2x^2y-2y^2x+\frac{y^3}{3},$$

а загальний інтеграл рівняння (4) є

$$\frac{x^3}{3}-2x^2y-2y^2x+\frac{y^3}{3}=C. \tag{5}$$

2. $\frac{2x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{2y+x}{x^2+y^2}dy=0.$

Розв'язання.

$$M(x,y)=\frac{2x-y}{x^2+y^2};\ N(x,y)=\frac{2y+x}{x^2+y^2}.$$

Знаходимо частинні похідні

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{-\left(x^2+y^2\right)-(2x-y)2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=-\frac{x^2+4xy-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{x^2+y^2-(2y+x)2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=-\frac{x^2+4xy-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Отже, умова (3) виконується

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Шукану функцію $u(x, y)$ визначають за формулою

$$u=\int M(x,y)dx+\varphi(y)=\int\frac{2x-y}{x^2+y^2}dx+\varphi(y)=\ln\left(x^2+y^2\right)-\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\varphi(y).$$



Знайдемо частинну похідну від функції $u$ по $y$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2}+\varphi'(y)=\frac{2y+x}{x^2+y^2}+\varphi'(y).$$

Прирівнявши цю похідну до $N(x, y)$, матимемо

$$\varphi'(y)=0,\ \text{ або }\ \varphi(y)=C_1.$$

Тоді

$$u=\ln\left(x^2+y^2\right)-\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+C_1.$$

Загальний інтеграл рівняння (5) має вигляд

$$\ln\left(x^2+y^2\right)-\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=C_2\,(C_2=C-C_1).$$

Іноді диференціальне рівняння першого порядку, яке не є рівнянням у повних диференціалах (не виконується умова (3)), можна звести за допомогою множення його на деяку функцію $\mu=\mu(x, y)$ до рівняння у повних диференціалах.

Так, рівняння

$$ydx-xdy=0 \tag{6}$$

не є рівнянням у повних диференціалах. Тут

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1,\ \frac{\partial N}{\partial x}=-1.$$

Отже,

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Якщо обидві частини рівняння (6) помножити на функцію $\mu=\frac{1}{y^2}$, то дістанемо диференціальне рівняння

$$\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy=0$$

у повних диференціалах. Справді,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{y^2},\ \frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}.$$

***Означення.*** Функцію $\mu=\mu(x, y)$, після множення на яку обох частин диференціального рівняння останнє зводиться до диференціального рівняння в повних диференціалах, називають *інтегрувальним множником*.

Отже, для диференціального рівняння (6) функція $\mu=\frac{1}{y^2}$ є інтегрувальним множником.

У теорії диференціальних рівнянь доведено, що для будь-якого диференціального рівняння (1) з неперервними коефіцієнтами існує інтегрувальний множник. Задача про знаходження його зводиться до інтегрування диференціального рівняння в частинних похідних. Ця задача є значно складнішою, ніж інтегрування звичайних диференціальних рівнянь.

Проте може статися так, що інтегрувальний множник є функцією тільки однієї змінної $x$ або $y$. Тоді знаходження такого інтегрувального множника спрощується. У цьому випадку можна вивести навіть формулу для інтегрувального множника. Справді, нехай $\mu=\mu(x)$. Помножимо обидві частини рівняння (1) на $\mu(x)$:

$$\mu(x)M(x,y)dx+\mu(x)N(x,y)dy=0. \tag{7}$$

Щоб рівняння (7) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно й достатньо, щоб виконувалася умова

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x)M(x,y))=\frac{\partial}{\partial x}(\mu(x)N(x,y)),$$

або

$$\mu(x)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{d\mu(x)}{dx}N(x,y)+\mu(x)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Тоді для функції $\mu(x)$ матимемо таке диференціальне рівняння:

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)}=\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)\frac{dx}{N(x,y)} \tag{8}$$

(за умови, що $N(x,y)\neq 0$).

Якщо в правій частині рівняння (8)

$$\varphi(x)=\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)\frac{1}{N(x,y)} \tag{9}$$

є функцією тільки від $x$, то

$$\mu(x)=e^{\int\varphi(x)dx} \tag{10}$$

(вважаємо, що стала інтегрування дорівнює 1).

Отже, умова (9) є необхідною для того, щоб рівняння (1) мало інтегрувальний множник, який залежить тільки від $x$.

Доведемо, що умова (9) є достатньою. Справді, диференціальне рівняння (8) можна записати у вигляді

$$\frac{d\mu(x)}{dx}=\mu(x)\varphi(x).$$

Підставивши сюди значення $\mu(x)$, дістанемо

$$e^{\int\varphi(x)dx}\varphi(x)\equiv e^{\int\varphi(x)dx}\varphi(x).$$



Ця тотожність доводить, що функція (10) є розв'язком диференціального рівняння (8).

Формула (10) справедлива за умови, що інтегрувальний множник залежить тільки від $x$.

Аналогічну формулу можна вивести для інтегрувального множника, якщо останній залежить тільки від $y$. Ця формула має вигляд

$$\mu=e^{\int\psi(y)dy},\quad \psi(y)=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}. \tag{11}$$

❑ **Приклади**

Знайти загальні інтеграли диференціальних рівнянь

**3.**

$$\left(2xy^2-y\right)dx+\left(y^2+x+y\right)dy=0. \tag{12}$$

Р о з в ' я з а н н я.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4xy-1,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=1.$$

Отже,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\neq\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Тоді

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=-\frac{4xy-1-1}{2xy^2-y}=-\frac{2(2xy-1)}{y(2xy-1)}=-\frac{2}{y}=\psi(y).$$

Скориставшись формулою (11), матимемо

$$\mu(x)=e^{\int\psi(y)dy}=e^{-2\int\frac{dy}{y}}=e^{-2\ln y}=e^{\ln\frac{1}{y^2}}=\frac{1}{y^2}.$$

Помноживши обидві частини заданого рівняння на функцію (інтегрувальний множник) $\mu(y)=\frac{1}{y^2}$, дістанемо рівняння

$$\left(2x-\frac{1}{y}\right)dx+\left(1+\frac{x}{y^2}+\frac{1}{y}\right)dy=0. \tag{13}$$

Це рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Справді,

$$M(x,y)=2x-\frac{1}{y};\quad N(x,y)=1+\frac{x}{y^2}+\frac{1}{y}.$$

Тоді

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{1}{y^2};\quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{y^2}.$$

Отже,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\equiv\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Знайдемо загальний інтеграл рівняння (13). Для цього визначимо функцію $u(x, y)$ так:

$$u(x, y)=\int M(x, y)dx+\varphi(y)=\int\left(2x-\frac{1}{y}\right)dx+\varphi(y)=x^2-\frac{x}{y}+\varphi(y).$$

Знайдемо частинну похідну функції $u(x, y)$:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}=\frac{x}{y^2}+\varphi'(y).$$

Прирівняємо $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ і $N(x, y)$:

$$\frac{x}{y^2}+\varphi'(y)=1+\frac{x}{y^2}+\frac{1}{y}.$$

Звідси

$$\varphi'(y)=1+\frac{1}{y}.$$

Інтегруючи це рівняння, знаходимо

$$\varphi(y)=\int\left(1+\frac{1}{y}\right)dy=y+\ln|y|+C.$$

Тоді функція $u(x, y)$ має вигляд

$$u(x, y)=x^2-\frac{x}{y}+y+\ln|y|+C_1.$$

Отже, шуканий інтеграл рівняння (13) зображується так:

$$x^2-\frac{x}{y}+y+\ln|y|=C.$$

4.
$$\left(1+\frac{5y^2}{x^2}\right)dx=\frac{2y}{x}dy. \tag{14}$$

Р о з в ' я з а н н я.

$$M(x, y)=\frac{1+5y^2}{x^2},\quad N(x, y)=-\frac{2y}{x}.$$

Тоді

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y}=\frac{10y}{x^2};\quad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}=\frac{2y}{x^2}.$$

Отже,

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y}\neq\frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

Скористаємося формулою (10), знайдемо функцію

$$\varphi(x)=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\frac{1}{N}=\left(\frac{10y}{x^2}-\frac{2y}{x^2}\right)\left(-\frac{x}{2y}\right)=-\frac{4}{x}.$$



Інтегрувальний множник має вигляд

$$\mu(x)=e^{\int\varphi(x)dx}=e^{-4\int\frac{dx}{x}}=e^{-4\ln|x|}=e^{\ln\frac{1}{x^4}}=\frac{1}{x^4}.$$

Помноживши обидві частини рівняння (14) на $\mu(x)=\frac{1}{x^4}$, матимемо

$$\left(\frac{1}{x^4}+\frac{5y^2}{x^6}\right)dx-\frac{2y}{x^5}dy=0. \tag{15}$$

У рівнянні (15)

$$M(x, y)=\frac{1}{x^4}+\frac{5y^2}{x^6},\quad N(x, y)=-\frac{2y}{x^5}.$$

Тоді

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y}=\frac{10y}{x^6},\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{10y}{x^6},$$

тобто диференціальне рівняння (15) є рівнянням у повних диференціалах. Загальний інтеграл рівняння (15) знаходиться так само, як і для рівняння (13).

## 5.8 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ Й ОЗНАЧЕННЯ. ТЕОРЕМА ПРО ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ

Раніше розглядалися диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані відносно похідної, тобто рівняння вигляду

$$y'=f(x, y). \tag{1}$$

Вони є окремим випадком більш загального диференціального рівняння

$$F(x, y, y')=0, \tag{2}$$

де через $F(x, y, y')$ позначено функцію трьох змінних $x,\ y,\ y'=\frac{dy}{dx}$.

Диференціальне рівняння (2) називають *диференціальним рівнянням першого порядку, не розв'язаним відносно похідної.*

*Розв'язком* диференціального рівняння (2) на деякому проміжку $\langle a; b\rangle$, як і у випадку рівняння (1), називають будь-яку функцію $y=y(x)$, яка визначена і неперервно диференційовна на цьому проміжку і перетворює рівняння (2) на тотожність

$$F(x, y(x), y'(x))\equiv 0,\quad x\in\langle a; b\rangle.$$

При цьому кажуть, що функція $y=y(x)$ задовольняє рівняння (2).

Процес знаходження розв'язків рівняння (2), як і рівняння, розв'язаного відносно похідної, називають *інтегруванням* цього рівняння.

Якщо диференціальне рівняння, розв'язане відносно похідної, інтегрувалося в явному вигляді тільки в найпростіших випадках, то диференціальні рівняння, не розв'язані відносно похідної, інтегруються ще рідше. Тому розв'язки таких рівнянь часто зображують у неявному вигляді або навіть у параметричній формі. При цьому під розв'язком рівняння (2) в неявному вигляді, як і для рівняння (1), розуміють розв'язок, заданий рівнянням

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{3}$$

яке визначає $y$ як неявну функцію від $x$, $y = y(x)$, що є розв'язком рівняння (2).

Так, диференціальне рівняння

$$y^5 y' + x^5 = 0 \tag{4}$$

має розв'язок, визначений в інтервалі $(-1;1)$ і заданий в неявному вигляді

$$y^6 + x^6 - 1 = 0. \tag{5}$$

Справді, візьмемо точку $M_0(0;1)$. У цій точці функція

$$\Phi(x, y) = y^6 + x^6 - 1$$

дорівнює нулю, $\Phi(0;1) = 0$, тоді як

$$\Phi'_y(0;1) \neq 0.$$

Функція $\Phi(x, y)$ та її частинні похідні $\Phi'_x(x, y)$ і $\Phi'_y(x, y)$ є функціями, неперервними в будь-якому околі точки $M_0(0;1)$.

Отже, існує окіл точки $x_0 = 0$, в якому рівняння (5) визначає неперервно диференційовну функцію $y = y(x)$, причому $y(0) = 1$. У цьому випадку окіл точки $x_0 = 0$ можна знайти, розв'язавши рівняння (5) відносно $y$:

$$y = \sqrt[6]{1 - x^6}. \tag{6}$$

Звідси випливає, що функція $y$ в інтервалі $(-1;1)$ неперервна і має неперервну похідну.

Безпосередньо підстановкою впевнюємося, що функція (6) є розв'язком диференціального рівняння (4).

Функцію, задану параметрично

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in \langle \alpha; \beta \rangle,$$



називають *розв'язком* диференціального рівняння (2) на проміжку $\langle \alpha; \beta \rangle$, якщо для всіх $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$ виконується тотожність

$$F\left( x(t), y(t), \frac{y'(t)}{x'(t)} \right) \equiv 0,$$

причому $x'(t) \neq 0$ при $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$.

Так, диференціальне рівняння

$$y\sqrt{1 + y'^2} - 1 = 0$$

має розв'язок

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \neq k\pi, \quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots,$$

в кожному з інтервалів $(k\pi; (k+1)\pi)$.

Таким чином, як і для диференціального рівняння (1), для диференціального рівняння (2) розв'язок може бути зображений в одному з трьох виглядів:

$$y = y(x); \quad \Phi(x, y) = 0; \quad x = x(t); \quad y = y(t).$$

Кожному з цих випадків, як відомо, відповідає крива на площині $xOy$, яку називають *інтегральною кривою диференціального рівняння* (2).

Припустимо, що рівняння (2) в кожній точці $(x, y)$ деякої області площини $xOy$ визначає одне або кілька значень $y$. Тоді, провівши в кожній точці $(x, y)$ цієї області стрілки (вектори), напрямок яких відносно осі $Ox$ визначається відповідним значенням $y'$, дістанемо деяке поле напрямків.

Отже, з геометричної точки зору інтегрування диференціального рівняння (2), як і рівняння (1), зводиться до знаходження серед усіх можливих кривих на площині $xOy$ такої кривої, дотична до якої в кожній її точці мала б напрямок поля в цій точці, заданий диференціальним рівнянням (2).

❑ **Приклади**

**1.** Диференціальне рівняння

$$y'^2 - 1 = 0 \tag{7}$$

в кожній точці $(x, y)$ площини $xOy$ задає два значення $y' = \pm 1$. Отже, через кожну таку точку можуть проходити дві інтегральні криві рівняння (7), дотичні до яких утворюють з додатним напрямком осі $Ox$ відповідно кути $\frac{\pi}{4}$ і $\frac{3\pi}{4}$. Інтегральними кривими в цьому випадку є дві ортогональні (перпендикулярні) сім'ї прямих $y = x + C$ і $y = -x + C$, де $C$ — довільна стала (рис. 134).

**2.** Розглянемо диференціальне рівняння

$$y'^2 + (x + y)y' + xy = 0. \tag{8}$$

Розв'язуючи це рівняння відносно $y'$, матимемо два диференціальні рівняння, розв'язані відносно похідної:

$$y' = -x, \quad y' = -y. \tag{9}$$

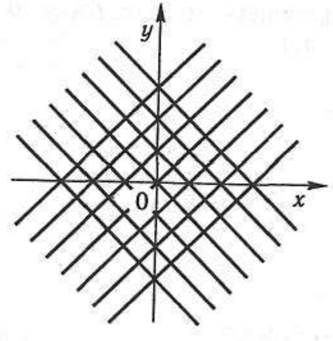


Рис. 134

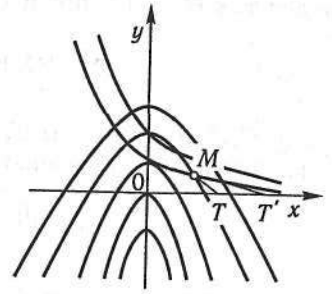


Рис. 135

Інтегруючи рівняння (9), дістанемо

$$y=-\frac{x^2}{2}+C,\quad y=Ce^{-x}, \tag{10}$$

де $C$ — довільна стала.

Отже, через кожну точку $(x, y)$ площини $xOy$ проходять дві інтегральні криві із сім'ї кривих (10). При цьому інтегральна крива із сім'ї $y=-\frac{x^2}{2}+C$ має ту властивість, що в кожній її точці кутовий коефіцієнт дотичної $MT$ дорівнює абсцисі цієї точки, взятої з протилежним знаком, а для інтегральної кривої із сім'ї $y=Ce^{-x}$ кутовий коефіцієнт дотичної $MT'$ у кожній її точці дорівнює ординаті точки, взятої з протилежним знаком (рис. 135).

Розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння (2): знайти розв'язок диференціального рівняння (2), який при $x=x_0$ набуває значення $y_0$.

Геометрично ця задача зводиться до такої: серед інтегральних кривих рівняння (2) потрібно виокремити криву, що проходить через точку $(x_0, y_0)$.

Припустимо, що рівняння (2) може бути розв'язаним відносно похідної. Тоді в деякому околі точки $(x_0, y_0)$ матимемо для $y'$ у загальному випадку кілька дійсних значень:

$$y'=f_k(x, y),\quad k=1, 2, \dots, m. \tag{11}$$

При цьому, якщо кожна з функцій $f_k(x, y)$ задовольняє теорему існування та єдиності розв'язку, то через точку $(x_0, y_0)$ пройде $m$ інтегральних кривих рівняння (2). Якщо кожна інтегральна крива має нахил дотичної, який не збігається з нахилом дотичних інших інтегральних кривих, то кажуть, що задача Коші має *єдиний розв'язок*.

Розглянемо такі поняття, як загальний, частинний і особливий розв'язки диференціального рівняння (2).

Припустимо, що рівняння (2) в околі точки $(x_0, y_0)$ може бути розв'язане відносно похідної, тобто розпадається на сукупність рівнянь (11).



Нехай кожне з цих рівнянь має загальний розв'язок

$$y=\varphi_k(x, C),\quad k=1, 2, \dots, m, \tag{12}$$

або загальний інтеграл

$$\psi_k(x, y, C)=0,\quad k=1, 2, \dots, m, \tag{13}$$

де $C$ — довільна стала.

Тоді сукупність загальних розв'язків (12), або сукупність загальних інтегралів (13), називають *загальним інтегралом рівняння* (2).

❑ **Приклад**

**3. Знайти загальний інтеграл рівняння**

$$y'^3-x^2y'=0. \tag{14}$$

Р о з в ' я з а н н я. Розв'язуючи це рівняння відносно $y'$, дістанемо три диференціальні рівняння

$$y'=0,\quad y'=x,\quad y'=-x,$$

які мають відповідно загальні розв'язки:

$$y=C,\quad y=\frac{x^2}{2}+C,\quad y=-\frac{x^2}{2}+C. \tag{15}$$

Сукупність загальних розв'язків (15) і є загальним інтегралом диференціального рівняння (14), який являє собою накладання сім'ї інтегральних кривих (15) (рис. 136).

Зазначимо, що розв'язок задачі Коші в цьому випадку в кожній точці площини $xOy$, що не лежить на осі $Oy$, — єдиний. Справді, в кожній точці $(x_0, y_0)$, $x_0 \neq 0$, маємо три різні напрямки поля: $y_0=0$, $y_0=x_0$, $y_0=-x_0$. Через цю точку проходить три інтегральні криві

$$y=y_0;\quad y=\frac{x^2-x_0^2}{2}+y_0;\quad y=\frac{x_0^2-x^2}{2}+y_0. \tag{16}$$

Щодо точок, які лежать на осі $Oy$, то хоч і проходять через кожну її точку три інтегральні криві із сім'ї (15), проте в цих точках задача Коші має не єдиний розв'язок. У цьому випадку не маємо накладання полів, оскільки в точках осі напрямок полів збігається.

Розв'язок $y=y(x)$ диференціального рівняння (2) називають *частинним розв'язком* цього рівняння, якщо в кожній його точці задача Коші має єдиний розв'язок.

Так, у розглянутому прикладі функції (16) є частинними розв'язками рівняння (14).

*Особливим розв'язком* диференціального рівняння (2) називають розв'язок цього рівняння, через кожну точку якого проходить не менше двох інтегральних кривих, які мають однаковий напрямок дотичної.

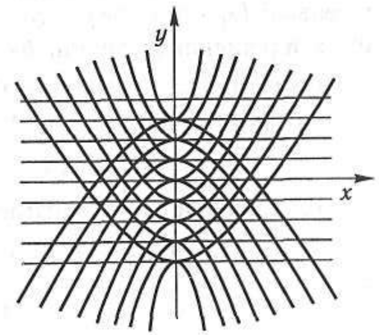


Рис. 136

Зауважимо, оскільки для рівняння (14) вісь $Oy$ не є інтегральною кривою цього рівняння, а в решті точок площини задача Коші має єдиний розв'язок, то рівняння (14) не має особливих розв'язків.

**Теорема.** Нехай у рівнянні (2) функція $F(x, y, y')$ задовольняє такі умови:

а) в деякому замкненому околі точки $(x_0, y_0, y_0')$, де $y_0'$ — один із дійсних коренів рівняння

$$F(x_0, y_0, y') = 0, \tag{17}$$

функція $F(x, y, y')$ неперервна разом із частинними похідними першого порядку;

б) частинна похідна

$$F_{y'}(x_0, y_0, y_0') \neq 0.$$

Тоді в інтервалі $(x_0 - h; x_0 + h)$, де $h > 0$ — досить мале число, існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння (2), який задовольняє умову $y(x_0) = y_0$ і для якого

$$y'(x_0) = y_0'.$$

*Доведення.* Легко бачити, що функція $F(x, y, y')$ задовольняє відносно $y'$ умови теореми про існування неявної функції двох змінних. Тому рівняння (2) в деякому замкненому околі точки $(x_0, y_0, z_0)$ визначає $y'$ як однозначну функцію

$$y' = f(x, y), \tag{18}$$

де $f(x, y)$ — неперервна функція, яка має неперервні частинні похідні першого порядку в деякій замкненій області і така, що

$$f(x_0, y_0) = y_0'.$$

Отже, функція $f(x, y)$ неперервна в $\overline{D}$ і в цій області задовольняє умову Ліпшіца. Тоді права частина диференціального рівняння (18) задовольняє умови теореми Коші про існування і єдиність розв'язку. Тому в інтервалі $(x_0 - h; x_0 + h)$ існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння (18), а отже, й рівняння (2) такий, що $y(x_0) = y_0$.

Доведемо, що $y'(x_0) = y_0'$. Оскільки $y(x)$ — розв'язок рівняння (18), то в інтервалі $(x_0 - h; x_0 + h)$ виконується тотожність

$$y'(x) \equiv f(x, y(x)).$$

Підставивши $x = x_0$, матимемо

$$y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0) = y_0',$$

тобто

$$y'(x_0) = y_0'.$$

Теорему доведено.



## 5.9

## НАЙПРОСТІШІ ТИПИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНИХ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ. РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА І КЛЕРО

Розглянемо найпростіші типи диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної, для яких можна вказати способи знаходження розв'язків.

**1.** До таких рівнянь насамперед належать рівняння вигляду

$$a_0(x, y)(y')^n + a_1(x, y)(y')^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x, y)y' + a_{n(x, y)} = 0, \tag{1}$$

де $a_i(x, y), i = 0, 1, \ldots, n,$ — функції, неперервні в деякій області $D$ площини $xOy$. Рівняння вигляду (1) називають *диференціальним рівнянням першого порядку степеня n.*

Припустимо, що в області $D$ функція $a_0(x, y) \neq 0$. Тоді, згідно з основною теоремою алгебри, рівняння (1) визначає $n$ значень для $y'$. Відкидаючи уявні значення, матимемо $m, m \leq n,$ диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної:

$$y_k' = f_k(x, y), \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{2}$$

Кожне з цих рівнянь задає в деякій області $D_1$ площини $xOy$ своє поле напрямків. Якщо функції $f_k(x, y)$ в області $D_1$ задовольняють умови теореми Коші, то через кожну точку області $D_1$ проходить $m$ інтегральних кривих диференціального рівняння (1). Щоб знайти їх, потрібно проінтегрувати кожне рівняння (2). Сукупність здобутих таким чином загальних розв'язків

$$y_k = \varphi_k(x, C),$$

або загальних інтегралів

$$\Phi_k(x, y, C) = 0, k = 1, 2, \ldots, m,$$

де $C$ — довільна стала, і дає загальний інтеграл рівняння (1).

Так, розглянуте в попередньому пункті диференціальне рівняння (14) є диференціальним рівнянням вигляду (1), яке має загальний інтеграл вигляду (15).

❑ **Приклад**

**1.** Нехай маємо диференціальне рівняння

$$xy'^2 - 2yy' - x = 0. \tag{3}$$

Припустивши, що $x \neq 0$, з рівняння (3) знаходимо два диференціальні рівняння

$$y' = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1}, \tag{4}$$

що є однорідними диференціальними рівняннями. Розв'язуючи їх відомим методом, дістанемо загальний інтеграл рівняння (3) у вигляді

$$y=\frac{1}{2}Cx^2-\frac{1}{2C}, \quad y=-\frac{1}{2}Cx^2-\frac{1}{2C},$$

де $C$ — довільна стала.

**2.** Нехай функція $F(x, y, y')$ у рівнянні

$$F(x, y, y')=0$$

залежить тільки від $y'$, тобто задане диференціальне рівняння набирає вигляду

$$F(y')=0. \tag{5}$$

Нехай рівняння (5) має деяке (скінченне або нескінченне) число дійсних коренів

$$y'=k_i, i=1, 2, ..., \tag{6}$$

де $k_i = \text{const}$, які не заповнюють суцільно деякий інтервал.

Із рівняння (6) знаходимо

$$y=k_i x+C, \text{ або } k_i=\frac{y-C}{x}.$$

Отже, диференціальне рівняння (5) має загальний інтеграл виду

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right)=0. \tag{7}$$

❑ **Приклад**
**2.** Диференціальне рівняння

$$y'^4-4y'^2+1=0$$

має загальний інтеграл виду

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^4-4\left(\frac{y-C}{x}\right)^2+1=0.$$

Зазначимо, що коли корені (6) заповнюють суцільно деякий інтервал, то диференціальне рівняння (5) може мати розв'язки, відмінні від рівняння (7).

❑ **Приклад**
**3.** Нехай маємо рівняння

$$y'+|y'|=0$$

з коренями $y'=k$, де $-\infty<k\le 0$, які суцільно заповнюють піввідрізок $(-\infty; 0]$. Тоді, крім інтегральних кривих

$$y=kx+C, \quad -\infty<k\le 0, \tag{8}$$

розв'язком цього рівняння є також функція

$$y=-x^n, \ 0\le x<+\infty,$$

яка при $n>1$ не належить до сім'ї інтегральних кривих (8).



**3.** Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$F(x, y')=0, \tag{9}$$

яке явно не містить $y$.

Якщо це рівняння можна розв'язати відносно $y'$, то матимемо диференціальне рівняння

$$y'=f_k(x), k=1, 2, ..., \tag{10}$$

де $f_k(x)$ за припущенням — дійсні неперервні функції на деякому проміжку. Інтегруючи рівняння (10), знаходимо відповідно їхні загальні розв'язки:

$$y=\int f_k(x)dx+C, k=1, 2, .... \tag{11}$$

Сукупність цих загальних розв'язків дає загальний інтеграл диференціального рівняння (9).

Припустимо, що рівняння (9) не можна розв'язати відносно $y'$, проте його можна розв'язати відносно $x$:

$$x=\varphi(y'), \tag{12}$$

де $\varphi(y')$ — диференційовна функція в деякій області зміни $y'$. Тоді для інтегрування рівняння (9) застосуємо такий спосіб.

Позначимо $y'=p$. З рівняння (12) маємо

$$x=\varphi(p). \tag{13}$$

Виразимо шукану функцію $y$ через $p$. Для цього скористаємося тотожністю

$$dy=y'dx.$$

Підставляючи сюди значення

$$dx=\varphi'(p)dp,$$

матимемо

$$dy=p\varphi'(p)dp,$$

звідси

$$y=\int p\varphi'(p)dp+C.$$

Таким чином, загальний розв'язок диференціального рівняння (9) зображується в параметричному вигляді

$$x=\varphi(p), \quad y=\int p\varphi'(p)dp+C. \tag{14}$$

Якщо із системи рівнянь (14) можна виключити параметр $p$, то матимемо загальний розв'язок $y=\Psi(x, C)$, або загальний інтеграл $\Phi(x, y, C)=0$ рівняння (9).

Слід зазначити, що не завжди зручно за параметр $p$ вибирати $y'$. Іноді зручніше брати деяку функцію $p=\omega(y')$.

Припустимо, що диференціальне рівняння (9) не може бути розв'язаним ні відносно $y'$, ні відносно $x$. Його можна записати в параметричній формі

$$x=\varphi(t),\quad y'=\psi(t),\quad t\in\langle\alpha;\beta\rangle, \tag{15}$$

тоді при $t\in\langle\alpha;\beta\rangle$ виконується тотожність

$$F(\varphi(t),\psi(t))\equiv 0. \tag{16}$$

З рівностей (15) знаходимо

$$dy=y'dx=\psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Загальний інтеграл рівняння (9) записуємо в параметричній формі

$$x=\varphi(t),\quad y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C. \tag{17}$$

❑ **Приклади**

Розв'язати диференціальні рівняння:

**4.** $y'\sin y'-x=0$,

Розв'язання. Задане рівняння можна розв'язати відносно $x$:

$$x=y'\sin y'.$$

Поклавши $y'=p$ і скориставшись формулами (14), матимемо

$$x=p\sin p,\quad y=\left(p^2-1\right)\sin p+p\cos p+C.$$

**5.** $x-ay'-b\sqrt{1+y'^2}=0$.

Розв'язання. Введемо позначення:

$$y'=\operatorname{tg}p;\quad p=\operatorname{arctg}y'.$$

Тоді

$$x=a\operatorname{tg}p+b\sec p,$$

$$y=\frac{a}{3}\operatorname{tg}^3p-\frac{b\sin p}{\cos^2 p}+\frac{b}{2}\ln\left|\frac{p}{2}+\frac{\pi}{4}\right|+C.$$

**6.** $x^3y'-(1-y')^3=0$.

Розв'язання. Нехай $y'=1-tx$. Тоді

$$x=\frac{1-t^3}{t}.$$

Отже, це диференціальне рівняння допускає параметричне зображення

$$x=\frac{1-t^3}{t};\quad y'=t^3.$$

Згідно з рівностями (17), загальний інтеграл цього рівняння має вигляд

$$x=\frac{1-t^3}{t};$$

$$y=-\frac{2}{5}t^5-\frac{1}{2}t^2+C,$$

де $C$ — довільна стала.



**4.** Нехай диференціальне рівняння (4) має вигляд

$$F(y,y')=0. \tag{18}$$

Воно явно не містить $x$.

Для диференціального рівняння (18) можливі ті самі випадки, що й для рівняння (9). Зокрема, рівняння (18) може бути розв'язаним відносно $y'$:

$$y'=f_k(y),\quad k=1,2,\ldots. \tag{19}$$

Припустимо, що $f_k(y)\neq 0, k=1,2,\ldots$. Із рівняння (19) знаходимо

$$x=\int\frac{dy}{f_k(y)}+C,\quad k=1,2,\ldots. \tag{20}$$

Зрозуміло, що в цьому випадку розв'язками рівняння (19) є також $y=b_m$, $m=1,2,\ldots$, де $b_m$ — корені рівняння $f_k(y)=0$. Ці розв'язки можуть не міститися в загальному інтегралі (20) і можуть виявитися особливими розв'язками рівняння (18).

Якщо рівняння (18) можна зобразити у вигляді

$$y=\varphi(y'), \tag{21}$$

то, ввівши позначення $y'=p$ і використавши тотожність $dy=y'dx$, дістанемо

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{dy}{p}.$$

Припустимо, що $p\neq 0$. Тоді загальний інтеграл рівняння (18) зображується в параметричній формі

$$y=\varphi(p),\quad x=\int\frac{\varphi'(p)}{p}dp+C. \tag{22}$$

Зазначимо, покладаючи $p\neq 0$, можна загубити розв'язки $y=\alpha_i$, де $\alpha_i$ — дійсні корені рівняння $F(y,0)=0$. Тому цей випадок слід розглядати окремо. Якщо рівняння $F(y,0)=0$ має дійсні корені $y=\alpha_i$, які будуть, безперечно, розв'язками рівняння (18) і не міститимуться в загальному інтегралі (22), то вони можуть бути особливими розв'язками рівняння (18).

❑ **Приклад**

**7.** Знайти криві, що мають таку властивість: довжина кривої, яка відлічується від деякої початкової точки, чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої цією кривою, ординатами в точках $x_0$ і $x$ та відрізком $[x_0;x]$ осі $Ox$.

Розв'язання. Відомо, що довжина кривої

$$s=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Площа криволінійної трапеції

$$P=\int_{x_0}^{x}|y|dx.$$

Згідно з умовою задачі, маємо

$$\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+y'^2}dx=\int_{x_0}^{x}|y|dx,$$

або

$$y=\pm\sqrt{1+y'^2}. \tag{23}$$

Розв'язуючи рівняння за наведеним вище методом, знаходимо рівняння шуканих кривих:

$$y=\frac{e^{C\pm x}+e^{-(C\pm x)}}{2},$$

де $C$ — стала інтегрування.

Поряд із кривими розв'язками рівняння (23) є також прямі $y=\pm 1$, в кожній точці яких порушується умова єдиності. Отже, розв'язки $y=\pm 1$ є особливими розв'язками диференціальних рівнянь (23).

**5. Рівняння Лагранжа.** Розглянемо диференціальне рівняння

$$y=x\varphi(y')+\psi(y'), \tag{24}$$

яке є окремим випадком рівняння (2). Тут $F(x, y, y')=x\varphi(y')+\psi(y')-y$. Рівняння (24) називають *рівнянням Лагранжа.* Покажемо, що це рівняння може бути проінтегроване. Позначимо $y'=p$. Тоді рівняння (24) запишемо у вигляді

$$y=x\varphi(p)+\psi(p). \tag{25}$$

Припустивши, що функції $\varphi(p)$ і $\psi(p)$ диференційовні, з рівняння (25) в результаті диференціювання лівої і правої частин по $x$ матимемо диференціальне рівняння відносно $p'$:

$$p=\varphi(p)+\left(x\varphi'(p)+\psi'(p)\right)p'. \tag{26}$$

Нехай

$$p-\varphi(p)\neq 0. \tag{27}$$

Диференціальне рівняння (26) можна записати ще так:

$$\frac{dx}{dp}+x\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}. \tag{28}$$

Дістали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку, в якому шуканою функцією є $x$.

Інтегруючи рівняння (28) відомими методами (див. п. 5.6), знаходимо

$$x=A(p)C+B(p),$$

де $A(p)$ і $B(p)$ — відомі функції $p$, а $C$ — довільна стала.



Отже, загальний розв'язок рівняння Лагранжа зображується параметрично:

$$x=A(p)C+B(p),\quad y=A_1(p)C+B_1(p). \tag{29}$$

Розглянемо випадок, коли умова (27) порушується, тобто коли

$$p-\varphi(p)=0 \tag{30}$$

за деяких значень $p=p_i$, $i=1, 2, \ldots, m$ (випадок, коли $p-\varphi(p)\equiv 0$, розглянемо нижче).

Якщо виконується рівність (30), то рівняння Лагранжа матиме ще розв'язки вигляду

$$y=xp_i+\psi(p_i),\quad i=1, 2, \ldots, m. \tag{31}$$

Оскільки розв'язки (31) не містять сталої інтегрування, то вони можуть бути особливими розв'язками рівняння Лагранжа.

❑ **Приклад**
**8.** Знайти розв'язки диференціального рівняння

$$xy'^2-2yy'+4x=0.$$

Р о з в ' я з а н н я. Це рівняння Лагранжа. Запишемо його так:

$$y=x\left(\frac{y'}{2}+\frac{2}{y'}\right).$$

Отже, $\varphi(y')=\frac{y'}{2}+\frac{2}{y'}, \psi(y')\equiv 0.$

Застосовуючи підстановку $y'=p$, матимемо

$$y=\frac{px}{2}+\frac{2x}{p}. \tag{32}$$

Диференціюючи обидві частини рівності (32) по $x$, дістанемо

$$p=\frac{p}{2}+\frac{x}{2}p'+\frac{2}{p}-\frac{2x}{p^2}p'.$$

Звідси

$$\frac{4-p^2}{2p}dx-\frac{\left(4-p^2\right)x}{2p^2}dp=0. \tag{33}$$

Нехай $4-p^2\neq 0$. Тоді рівняння (33) набирає вигляду

$$\frac{dx}{x}-\frac{dp}{p}=0.$$

Знайдемо загальний розв'язок у параметричній формі

$$x=Cp;$$

$$y=\frac{px}{2}+\frac{2x}{p}.$$

Тут легко вилучити параметр $p$. Маємо загальний розв'язок

$$y=\frac{x^2}{2C}+2C.$$

Дослідимо випадок

$$4-p^2=0, \text{ або } p=\pm 2.$$

Тоді дістанемо розв'язки

$$y=\pm 2x, \tag{34}$$

що не містяться в загальному розв'язку.

Отже, розв'язки (34) є особливі.

**6. Рівняння Клеро[1].** Рівняння

$$y=xy'+\varphi(y') \tag{35}$$

називають *рівнянням Клеро*. Можна показати, що рівняння Клеро є окремим випадком рівняння Лагранжа, а саме тим випадком, коли

$$\varphi(y')\equiv y',$$

або

$$\varphi(p)-p\equiv 0. \tag{36}$$

Рівняння Клеро розв'язуватимемо тим самим методом, що й рівняння Лагранжа. Запишемо його у вигляді

$$y=xp+\psi(p),$$

де $p=y'$.

Диференціюючи обидві частини по $x$, дістанемо рівність

$$\frac{dp}{dx}(x+\psi'(p))=0.$$

Звідси

$$\frac{dp}{dx}=0, \quad x+\psi'(p)=0. \tag{37}$$

Перша з рівностей (37) доводить, що $p=C=\text{const}$. Отже, загальний розв'язок рівняння Клеро має вигляд

$$y=xC+\psi(C), \tag{38}$$

де $C$ — довільна стала. Таким чином, щоб дістати загальний розв'язок рівняння Клеро, потрібно в це рівняння замість $y'$ поставити $C$.

Розглянемо друге рівняння (37). Нехай його можна розв'язати відносно $p$, для чого достатньо, щоб функція $\psi''(p)\neq 0$ була неперервною. Розв'язавши його відносно $p$, матимемо

$$p=\omega(x).$$

[1] *Клеро А. К.* (1713—1765) — французький математик і астроном.



Отже,

$$y=x\omega(x)+\psi(\omega(x)). \tag{39}$$

Покажемо, що функція (39) є розв'язком рівняння Клеро.

Справді, згідно з другим рівнянням (27), знаходимо

$$y'=\omega(x).$$

Тоді

$$xy'+\psi(y')=x\omega(x)+\psi(\omega(x))=y,$$

що й доводить твердження.

Покажемо, що розв'язок (39) не можна дістати із загального розв'язку за будь-якого сталого значення $C$. Для цього зазначимо, що загальним розв'язком (38) є сім'я прямих, залежних від одного параметра $C$. Припустимо, що розв'язок (39) належить до цієї сім'ї. Тоді $x\omega(x)+\psi(\omega(x))$ є лінійною функцією, тобто

$$x\omega(x)+\psi(\omega(x))\equiv ax+b.$$

Продиференціювавши тотожність, дістанемо

$$a=\omega(x).$$

Ця рівність суперечить рівнянню, яке визначає $\omega(x)$.

Таким чином, розв'язок (39) не міститься в загальному розв'язку (38). У наступному параграфі покажемо, що розв'язок (39) є особливим розв'язком рівняння Клеро.

Отже, рівняння Клеро завжди має особливий розв'язок.

❑ **Приклад**

**9.** Розв'язати диференціальне рівняння

$$y=xy'-y'^2. \tag{40}$$

Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо підстановку $y'=p$. Тоді

$$y=xp-p^2. \tag{41}$$

Диференціюємо обидві частини цієї рівності по $x$:

$$p=p+x\frac{dp}{dx}-2p\frac{dp}{dx},$$

або

$$\frac{dp}{dx}(x-2p)=0.$$

З цього рівняння знаходимо, що

$$\frac{dp}{dx}=0, \quad x-2p=0. \tag{42}$$

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння (40) має вигляд

$$y=Cx-C^2.$$

Із другого рівняння (42) маємо

$$p=\frac{x}{2}.$$

Підставивши це значення $p$ у рівність (41), матимемо особливий розв'язок диференціального рівняння (40), а саме:

$$y=\frac{x^2}{4}.$$

## 5.10 ОСОБЛИВІ РОЗВ'ЯЗКИ. ОБВІДНА СІМ'Ї КРИВИХ

Як уже зазначалося, диференціальні рівняння першого порядку можуть мати особливі розв'язки — розв'язки, в кожній точці яких порушується властивість єдиності.

Виокремимо клас диференціальних рівнянь, для яких можна вивчити питання:

1) чи має це диференціальне рівняння особливий розв'язок;
2) якщо рівняння має особливий розв'язок, то як його знайти.

I. Поставлені питання найпростіше розв'язуються для диференціальних рівнянь, розв'язаних відносно похідної.

Справді, нехай маємо рівняння

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y). \tag{1}$$

Припустимо, що функція $f(x,y)$ у розглядуваній замкненій області $D$ площини $xOy$ неперервна. Тоді якщо $f(x,y)$ в цій області має обмежену похідну по $y$

$$\left|f_y'(x,y)\right|\le M<+\infty,$$

то через кожну точку області $D$, за теоремою Коші, пройде тільки одна інтегральна крива диференціального рівняння (1).

Отже, в цьому випадку рівняння (1) особливих розв'язків не має. Наприклад, якщо в диференціальному рівнянні

$$\frac{dy}{dx}=a_0(x)y^n+a_1(x)y^{n-1}+\ldots+a_{n-1}(x)y+a_n(x)$$

коефіцієнти $a_i(x)$, $i=0,1,\ldots,n$ є функціями, неперервними на відрізку $[a;b]$, то це рівняння в будь-якому замкненому прямокутнику $R:[a;b;c;d]$ особливих розв'язків не має.

Звідси, зокрема, випливає, що лінійне диференціальне рівняння

$$y'+p(x)y=Q(x)$$

з неперервними коефіцієнтами особливих розв'язків не має.



Таким чином, особливі розв'язки рівняння (1) можуть проходити тільки через ті точки, в яких не виконуються умови теореми Коші. Зокрема, якщо $f(x,y)$ в околі точки $(x_0,y_0)$, неперервна, що припускатимемо в цьому пункті, то особливі розв'язки можуть проходити лише через ті точки області $D$, в яких не виконується умова Ліпшіца. Умова Ліпшіца, напевне, виконується, якщо $f(x,y)$ має в області $D$ обмежену частинну похідну по $y$. Тому особливі розв'язки рівняння (1) можуть проходити тільки через ті точки області $D$, в околі яких $f_y'(x,y)$ стає необмеженою.

Отже, умова

$$\left|f_y'(x,y)\right|>M \tag{2}$$

при $x\to x_0$, $y\to y_0$, де $M$ — будь-яке, як завгодно велике додатне число, є необхідною умовою того, щоб через точку $(x_0,y_0)$ проходив особливий розв'язок диференціального рівняння (1).

Звідси дістанемо таке правило знаходження особливого розв'язку рівняння (1) з неперервною правою частиною.

1. Потрібно знайти множину точок області $D$, в яких виконується умова (2). Нехай ця множина точок є кривою, заданою рівнянням $\varphi(x,y)=0$.

2. Безпосередньо підстановкою в рівняння перевірити, чи буде знайдена множина точок розв'язком диференціального рівняння (1).

3. Перевірити, чи порушується властивість єдиності в кожній точці здобутих таким способом розв'язків.

Якщо всі три умови виконуються, то вони, разом взяті, є достатніми для того, щоб крива $\varphi(x,y)=0$ була особливим розв'язком диференціального рівняння (1).

❑ **Приклади**

Знайти особливі розв'язки диференціальних рівнянь:

**1.**

$$\frac{dy}{dx}=xe^y.$$

Р о з в ' я з а н н я. $f(x,y)=xe^y$ є функцією, неперервною в будь-якій замкненій області $D$ площини $xOy$, і $f_y'(x,y)=xe^y$ є обмеженою в $D$.

Отже, задане диференціальне рівняння особливих розв'язків не має.

**2.**

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{y}. \tag{3}$$

Р о з в ' я з а н н я. $f(x,y)=\sqrt{y}$ є функцією, неперервною в будь-якій замкненій області верхньої півплощини, тобто де $y\ge 0$.

Проте $f_y'(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$ стає необмеженою при $y\to 0$ і $y>0$. Тому лінія $y=0$ може бути особливим розв'язком диференціального рівняння (3).

Легко бачити, що функція $y \equiv 0$ є розв'язком рівняння (3). Отже, друга умова виконується.

Рівняння (3) допускає відокремлення змінних:

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx.$$

Тому, проінтегрувавши останнє рівняння, знаходимо загальний розв'язок диференціального рівняння (3):

$$y = \left(\frac{x+C}{2}\right)^2, \quad x \geq -C, \tag{4}$$

де $C$ — стала інтегрування.

Зрозуміло, що через кожну точку осі $Ox$ (розв'язку $y = 0$) проходять дві інтегральні криві рівняння (3), а саме лінія $y = 0$ і крива із сім'ї (4) (рис. 137). Отже, $y \equiv 0$ є особливим розв'язком рівняння (3).

**3.**

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} + 1.$$

Розв'язання. Частинна похідна $f'_y(x, y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ необмежена при $y \to 0$. Проте $y \equiv 0$ не є розв'язком цього диференціального рівняння, оскільки в останніх точках верхньої півплощини $(y > 0)$ права частина $f(x, y) = \sqrt{y} + 1$ задовольняє умови теореми Коші, то рівняння особливих розв'язків не має.

**4.**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{x}. \tag{5}$$

Розв'язання. У цьому рівнянні права частина

$$f(x, y) = \frac{y \ln y}{x}$$

є функцією, яка неперервна в будь-якій замкненій області, де $x \neq 0$ $\left(\text{при } y = 0 \text{ покладемо } f(x, 0) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y \ln y}{x} = 0\right)$. Знаходимо

$$f'_y(x, y) = \frac{\ln y + 1}{x},$$

звідси

$$\lim_{y \to 0} f'_y(x, y) = -\infty.$$

Отже, множина точок $y = 0$ (вісь $Ox$) може бути особливим розв'язком рівняння (5).

Легко бачити, що $y \equiv 0$ є розв'язком цього рівняння. Перевіримо, чи порушується властивість єдиності.

Знайдемо загальний розв'язок рівняння (5):

$$y = e^{Cx}. \tag{6}$$

Розв'язок $y = 0$ можна дістати із загального розв'язку (6) при $C = -\infty$. Тому через кожну точку осі $Ox$ (крім точки $x = 0$) проходить тільки одна інтегральна крива $y = 0$. Особливих розв'язків рівняння (5) не має.



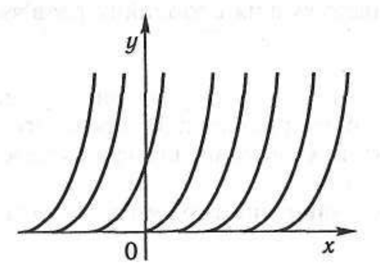


Рис. 137

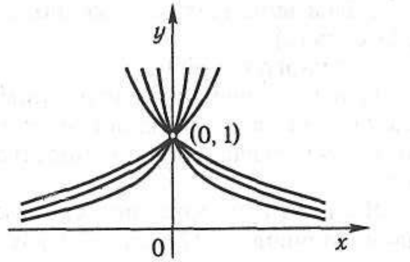


Рис. 138

Інтегральні криві рівняння (5) розміщені на площині $xOy$ так, як зображено на рис. 138.

Зауважимо, що в точці $x = 0$ осі $Oy$ праву частину диференціального рівняння (5) не визначено. Проте, підставляючи $x = 0$ у загальний розв'язок (6), матимемо

$$y = e^{C0} = 1.$$

Ця рівність виконується за будь-якого значення $C$. Отже, всі інтегральні криві, крім інтегральної кривої $y = 0$, $x \neq 0$, прилягають до точки $(0; 1)$.

II. Розглянемо питання про існування особливих розв'язків для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно похідної

$$F(x, y, y') = 0. \tag{7}$$

Якщо функція $F(x, y, y')$ в деякій області тривимірного простору задовольняє умови теореми п. 5.8, то у відповідній області площини $xOy$ через кожну точку $(x_0, y_0)$ за заданим напрямком проходить тільки одна інтегральна крива рівняння (7).

Отже, особливі розв'язки рівняння (7) можуть проходити тільки через ті точки, в яких порушуються умови зазначеної теореми. Зокрема, якщо $F(x, y, y')$ неперервна і має неперервні частинні похідні першого порядку, то особливі розв'язки слід шукати серед тих точок, координати яких задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0; \\ F'_p(x, y, p) = 0, \quad p = \dfrac{dy}{dx}. \end{cases} \tag{8}$$

Якщо система рівнянь (8) розв'язна, тобто існують значення $(x, y)$, які задовольняють два рівняння (8), то, виключаючи з них параметр $p$, дістанемо в загальному випадку деяку множину точок

$$\varphi(x, y) = 0,$$

яка може бути особливим розв'язком диференціального рівняння (7). Таку множину точок $\varphi(x, y) = 0$ називають *дискримінантною кривою рівняння* (7).

Отже, дискримінантні криві рівняння (7), якщо вони існують, можуть бути особливими розв'язками цього рівняння.

Звідси випливає один із способів знаходження особливих розв'язків рівняння (7).

Для цього потрібно:

1) знайти дискримінантні криві рівняння; 2) перевірити, чи є дискримінантні криві інтегральними кривими цього рівняння; 3) перевірити, чи порушується властивість єдиності в кожній із точок цих інтегральних кривих.

Якщо ці три умови виконуються, то знайдений розв'язок диференціального рівняння (7) є особливим.

❑ **Приклад**

**5.** Розглянемо рівняння

$$y - xy' + e^{y'} = 0. \tag{9}$$

Складемо рівняння для дискримінантної кривої

$$\begin{cases} y - xp + e^p = 0; \\ -x + e^p = 0. \end{cases}$$

Знайдемо дискримінантну криву

$$y = x \ln x - x. \tag{10}$$

Безпосередньо підстановкою впевнюємося, що крива (10) є розв'язком рівняння (9). Оскільки рівняння (9) є рівнянням Клеро, то його загальним розв'язком є сім'я прямих

$$y = Cx - e^C. \tag{11}$$

Тоді бачимо (рис. 139), що через кожну точку кривої (10) проходять дві інтегральні криві: крива (10) і пряма із сім'ї (11). Розв'язок (10) є особливим розв'язком рівняння (9).

Запропонований спосіб знаходження особливого розв'язку вимагає перевірки, чи є дискримінантна крива інтегральною кривою цього диференціального рівняння. Однак цієї перевірки можна і не робити, а скористатися наступною теоремою, яку приймемо без доведення.

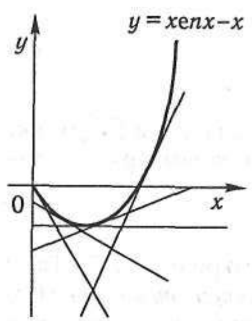


Рис. 139

**Т е о р е м а.** Якщо $F(x, y, p)$, де $p = \frac{dy}{dx}$, в області $\Omega$ неперервна разом із частинними похідними першого порядку і в цій області

$$F'_y(x, y, p) \neq 0, \tag{12}$$

то для того, щоб дискримінантна крива рівняння (7) була розв'язком цього рівняння, необхідно й достатньо, щоб із рівнянням (7) виконувалася рівність

$$F'_x(x, y, p) + pF'_y(x, y, p) = 0. \tag{13}$$



❑ **Приклад**

**6.** Знайти особливий розв'язок диференціального рівняння

$$y'^2 - y = 0.$$

Р о з в ' я з а н н я. Визначимо дискримінантну криву заданого рівняння. Складемо систему рівнянь (8):

$$\begin{cases} p^2 - y = 0; \\ 2p = 0. \end{cases}$$

Отже, дискримінантною кривою є лінія

$$y = 0.$$

Перевіримо умову (13):

$$F'_x(x, y, p) + pF'_y(x, y, p) = 0 + 0 \cdot (-1) = 0.$$

Таким чином, $y = 0$ є розв'язком цього рівняння. Оскільки загальним розв'язком є сім'я парабол $y = \frac{1}{4}(x + C)^2$, то $y \equiv 0$ є особливим розв'язком.

Крім розглянутого способу знаходження особливого розв'язку диференціального рівняння (7), існує інший, в основі якого лежить поняття обвідної однопараметричної сім'ї кривих.

Нехай маємо однопараметричну сім'ю кривих

$$\Phi(x, y, c) = 0, \tag{14}$$

де $c$ — параметр, який набуває значень, наприклад, із деякого проміжку $\langle c_1; c_2 \rangle$.

Криву $l$ називають *обвідною сім'ї кривих* (14), якщо в кожній своїй точці вона має спільну дотичну з окремою кривою із цієї сім'ї (рис. 140).

Припустимо, що сім'я кривих (14) є загальним інтегралом диференціального рівняння (7). Якщо ця сім'я кривих має обвідну, то остання є особливим розв'язком рівняння (7).

Справді, візьмемо довільну точку $M(x, y)$ на обвідній. У цій точці, яка одночасно лежить і на одній з інтегральних кривих, напрямок дотичної до обвідної збігається з напрямком поля, заданого диференціальним рівнянням (7). Отже, крива $l$ є розв'язком цього диференціального рівняння. Оскільки через кожну точку кривої $l$ проходять дві інтегральні криві — крива $l$ і одна з кривих сім'ї (14), то $l$ є особливим розв'язком рівняння (7).

Зазначимо, що не кожна однопараметрична сім'я кривих має обвідну. Так, сім'я прямих $y = cx$, сім'я концентричних кіл $x^2 + y^2 - c^2 = 0$ обвідної не мають, тоді як сім'я парабол $y = (x + c)^2$ має обвідну $y = 0$ (рис. 141).

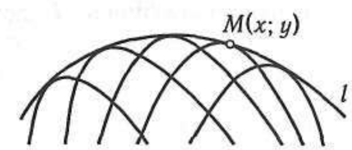


Рис. 140

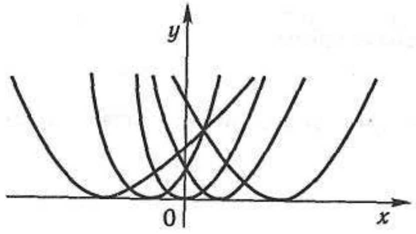


Рис. 141

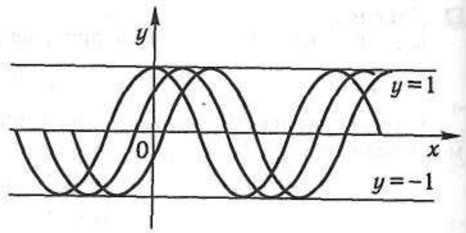


Рис. 142

Сім'я синусоїд $y=\sin(x+c)$ має дві обвідні $y=1$ і $y=-1$ (рис. 142).

Виведемо необхідні умови існування обвідної. Нехай сім'я кривих (14) має обвідну, рівняння якої запишемо в параметричній формі

$$x=x(t), \quad y=y(t), \tag{15}$$

де $x(t), y(t)$ — диференційовні функції на деякому проміжку $\langle\alpha;\beta\rangle$.

Оскільки обвідна за різних $t$ дотикається до різних кривих із сім'ї (14), то величину $c$ у (14) можна розглядати як функцію $t$, тобто

$$c=c(t).$$

Припустимо, що $c'(t)\neq 0$, якщо $t\in\langle\alpha;\beta\rangle$. У протилежному випадку обвідна в кожній своїй точці дотикається до тієї самої кривої із сім'ї (14), а отже, вона зливається з цією кривою.

Підставивши значення (15) у рівняння (14), дістанемо таку тотожність:

$$\Phi(x(t), y(t), c(t))\equiv 0.$$

Нехай $\Phi(x,y,c)$ має неперервні частинні похідні першого порядку. Тоді

$$\Phi'_x x'(t)+\Phi'_y y'(t)+\Phi'_c c'(t)=0. \tag{16}$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт $k$ дотичної до кривої із сім'ї (14) за умови, що $\Phi'_y\neq 0$:

$$k=-\frac{\Phi'_x}{\Phi'_y}.$$

Кутовий коефіцієнт $k_1$ дотичної до обвідної дорівнює

$$k_1=\frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Проте $k=k_1$. Тому

$$\Phi'_x x'(t)+\Phi'_y y'(t)=0.$$



Із рівняння (16) маємо

$$\Phi'_c(x,y,c)=0.$$

Отже, якщо сім'я кривих (14) має обвідну і в кожній точці кривих з цієї сім'ї $\Phi'_y(x,y,c)\neq 0$ або $\Phi'_x(x,y,c)\neq 0$, то координати обвідної одночасно задовольняють рівняння

$$\begin{cases}\Phi(x(t),y(t),c(t))=0;\\ \Phi'_c(x(t),y(t),c(t))=0.\end{cases} \tag{17}$$

Таким чином, умови (17) є необхідними умовами того, щоб крива (15) була обвідною сім'ї кривих (14).

Криву, координати кожної точки якої задовольняють систему рівнянь (17), називають *дискримінантною кривою сім'ї кривих* (14).

Доведемо, що умови (17) у випадку, коли в кожній точці кривої (15) одночасно $\Phi'_y$ і $\Phi'_x$ не дорівнюють нулю і є достатніми для того, щоб ця крива була обвідною для сім'ї кривих (14).

Справді, нехай

$$\Phi'_y(x(t),y(t),c(t))\neq 0.$$

Диференціюючи першу тотожність системи (17) по $t$, матимемо $\Phi'_x x'(t)+$ $+\Phi'_y y'(t)+\Phi'_c c'(t)=0$. Звідси, згідно з другим рівнянням (17),

$$\Phi'_x x'(t)+\Phi'_y y'(t)=0.$$

Отже,

$$\frac{y'(t)}{x'(t)}=-\frac{\Phi'_x}{\Phi'_y}.$$

Ця рівність і доводить твердження.

Таким чином, для знаходження обвідної однопараметричної сім'ї кривих дістали правило:

1) із системи рівнянь (17) за допомогою виключення параметра $c$ потрібно знайти дискримінантну криву цієї сім'ї;

2) із здобутої у такий спосіб дискримінантної кривої слід усунути точки, де $\Phi'_x$ і $\Phi'_y$ одночасно дорівнюють нулю.

Та частина дискримінантної кривої, що залишилася, і є обвідною цієї сім'ї кривих.

❑ **Приклади**

**7.** Знайти особливий розв'язок диференціального рівняння Клеро

$$y=xy'+\psi(y'). \tag{18}$$

Р о з в ' я з а н н я. Загальним розв'язком цього рівняння є сім'я прямих

$$y=Cx+\psi(C), \tag{19}$$

де $C$ — довільна стала.

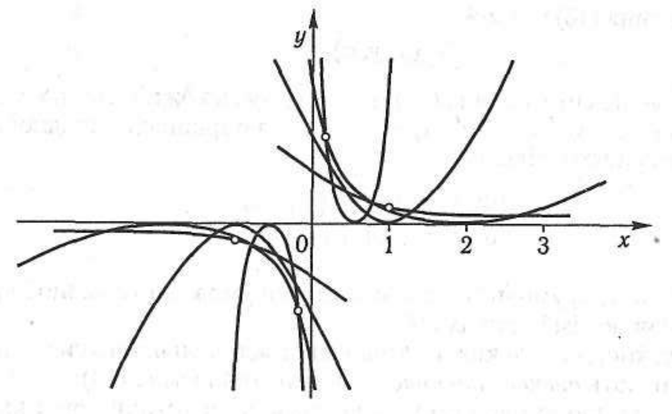


**Рис. 143**

Побудувавши для рівняння (18) систему рівнянь (17), матимемо

$$\begin{cases} y-Cx-\psi(C)=0; \\ x+\psi'(C)=0. \end{cases} \tag{20}$$

Припустимо, що з другого рівняння можна виразити $C$ через $x$:

$$C=\omega(x).$$

Підставимо це значення в перше рівняння системи (20). Тоді

$$y=x\omega(x)+\psi(\omega(x)). \tag{21}$$

Оскільки $\Phi'_y=1\neq 0$, то дискримінантна крива (20) є обвідною сім'ї прямих (19).

Отже, розв'язок (21) є особливим розв'язком диференціального рівняння Клеро (18).

Було доведено (див. п. 5.9), що (21) є розв'язком рівняння Клеро. Тут доведено, що цей розв'язок є особливим і, крім того, він є обвідною загального розв'язку сім'ї прямих (19).

**8.** Нехай загальний розв'язок деякого диференціального рівняння має вигляд

$$y-C^3x^2+2C^2x-C=0.$$

Знайти особливий розв'язок.

Р о з в ' я з а н н я. Складемо систему рівнянь для дискримінантної кривої

$$\begin{cases} y-C^3x^2+2C^2x-C=0; \\ 4Cx-3C^2x^2-1=0. \end{cases}$$

Звідси дістанемо дві дискримінантні криві

$$y=0;\quad y=\frac{4}{27x}. \tag{22}$$

Оскільки $\Phi'_y=1$, то вздовж кривих (22) $\Phi'_y\neq 0$. Тому дискримінантні криві є особливими розв'язками диференціального рівняння (рис. 143).



## 5.11 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ Й ПОНЯТТЯ

Розглянемо диференціальні рівняння вищих порядків — рівняння, що містять похідні вищих порядків. При цьому порядок найвищої похідної називають *порядком диференціального рівняння*. Зокрема, диференціальним рівнянням $n$-го порядку називають співвідношення вигляду

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right)=0, \tag{1}$$

де $x$ — незалежна змінна; $y=y(x)$ — шукана функція; $y', \dots, y^{(n)}$ — відповідні похідні функції $y$. У рівняння (1) величини $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ можуть і не входити, але обов'язково має входити похідна $n$-го порядку.

Припустимо, що рівняння (1) може бути розв'язане відносно старшої похідної $y^{(n)}$:

$$y^{(n)}=f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right). \tag{2}$$

Рівняння (2) називають *диференціальним рівнянням* $n$-го *порядку, розв'язаним відносно похідної* $n$-*го порядку*. Надалі вивчатимемо диференціальні рівняння вигляду (2).

Будь-яку неперервну і $n$ разів диференційовну на проміжку $\langle a;b\rangle$ ($a$ і $b$ можуть бути й невластивими числами, відповідно $-\infty$ і $+\infty$) функцію $y=\varphi(x)$ називають *розв'язком диференціального рівняння* (2) на цьому проміжку, якщо вона це рівняння перетворює на тотожність

$$\varphi^{(n)}(x)\equiv f\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)\right),$$

яка виконується для будь-якого $x\in\langle a;b\rangle$.

Спосіб знаходження розв'язку диференціального рівняння (2) називають *інтегруванням* цього рівняння.

Так, диференціальне рівняння другого порядку

$$y''=y \tag{3}$$

має в інтервалі $(-\infty;+\infty)$ розв'язок $y=e^x$, оскільки задана функція на цьому інтервалі неперервна, двічі (й навіть нескінченне число разів) диференційовна і справджується тотожність

$$\left(e^x\right)''\equiv e^x.$$

Диференціальне рівняння

$$y'''=\frac{105}{8}\sqrt{x} \tag{4}$$

на піввідрізку $[0;+\infty)$ має розв'язок

$$y=\sqrt{x^7}. \tag{5}$$

У цьому можна впевнитися безпосередньо підстановкою.

Якщо диференціальне рівняння (2) має на проміжку розв'язок $y=\varphi(x)$, то цих розв'язків є нескінченна множина. Всі ці розв'язки можна записати у вигляді

$$y=\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n), \tag{6}$$

де $C_1, C_2, ..., C_n$ — довільні сталі.

Розв'язок (6), який містить $n$ довільних сталих, називають *загальним розв'язком диференціального рівняння* (2).

Розв'язок, який можна дістати із загального розв'язку (5) за окремих числових значень сталих $C_1, C_2, ..., C_n$, називають *частинним розв'язком диференціального рівняння* (2).

Так, диференціальне рівняння (3) в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ має загальний розв'язок

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}, \tag{7}$$

де $C_1$ і $C_2$ — довільні сталі. Доведемо, що функція (7) є розв'язком диференціального рівняння (3). Для цього знайдемо другу похідну цієї функції

$$y'=C_1e^x-C_2e^{-x};$$

$$y''=C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

Отже, $y''\equiv y$. Оскільки розв'язок (7) містить дві довільні сталі, то він є загальним розв'язком.

Розглянутий раніше розв'язок $y=e^x$ є частинним розв'язком диференціального рівняння (3), оскільки він утворюється із загального розв'язку (7) при $C_1=1$ і $C_2=0$.

Диференціальне рівняння (4) має загальний розв'язок

$$y=\sqrt{x^7}+C_1x^2+C_2x+C_3, \tag{8}$$

де $C_1, C_2, C_3$ — довільні сталі. Справді, знайдемо третю похідну функції (8)

$$y'=\frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}+2C_1x+C_2;$$

$$y''=\frac{35}{4}x^{\frac{3}{2}}+2C_1;$$

$$y'''=\frac{105}{8}x^{\frac{1}{2}}.$$

Підставляючи значення $y'''$ у рівнянні (4), дістанемо тотожність

$$\frac{105}{8}x^{\frac{1}{2}}\equiv\frac{105}{8}x^{\frac{1}{2}},$$

яка справджується для будь-якого $x\in[0; +\infty)$.



Оскільки розв'язок (8) містить три довільні сталі $C_1$, $C_2$ і $C_3$, то він є загальним розв'язком диференціального рівняння (4).

Розв'язок (5) є частинним розв'язком диференціального рівняння (4), оскільки він утворюється із загального розв'язку (8) при $C_1=C_2=C_3=0$.

Із геометричної точки зору загальним розв'язком диференціального рівняння (2) є сім'я кривих, залежних від $n$ параметрів $C_1, C_2, ..., C_n$, а частинний розв'язок — окремою кривою цієї сім'ї. Такі криві називають *інтегральними кривими диференціального рівняння* (2).

Для диференціального рівняння $n$-го порядку вигляду (2), як і для диференціального рівняння першого порядку, розглядається задача Коші (задача з початковими умовами), а саме: серед усіх розв'язків рівняння (2) потрібно знайти той розв'язок $y=y(x)$, який при $x=x_0$ ($x_0$ — довільна точка проміжку $\langle a; b\rangle$) задовольняє умови:

$$y(x_0)=y_0;\quad y'(x_0)=y_0', ..., y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, \tag{9}$$

де $y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ — довільні наперед задані дійсні числа.

Числа $y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ називають *початковими даними розв'язку* $y=y(x)$, а число $x_0$ — *початковим значенням незалежної змінної* $x$. Сукупність чисел $x_0$, $y_0$, $y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ називають *початковими даними рівняння* (2), а умови (9) — *початковими умовами диференціального рівняння* (2).

Так, для диференціального рівняння другого порядку

$$y''=f(x, y, y') \tag{10}$$

задача Коші полягає в знаходженні розв'язку $y=y(x)$ цього рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0'. \tag{11}$$

❑ **Приклад**

**1.** Знайти розв'язок $y=y(x)$ диференціального рівняння (3), який задовольняє початкові умови

$$y(0)=1;\quad y'(0)=0. \tag{12}$$

Розв'язання. Усі розв'язки рівняння (3) задаються загальним розв'язком (7). Отже, шуканий розв'язок, якщо він існує, також знаходиться в загальному. Тому виконуються рівності:

$$\left(C_1e^x+C_2e^{-x}\right)_{x=0}=1;$$

$$\left(C_1e^x+C_2e^{-x}\right)'_{x=0}=0,$$

або

$$\begin{cases}C_1+C_2=1;\\ C_1-C_2=0.\end{cases}$$

Звідси

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2}.$$

Функція

$$y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$$

є шуканим розв'язком, який задовольняє диференціальне рівняння (3) і початкові умови (12).

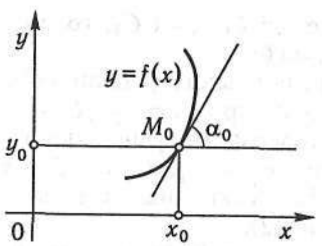

Рис. 144

Для диференціального рівняння другого порядку (10) задача Коші має такий геометричний зміст: серед усіх інтегральних кривих рівняння (10) виокремити (знайти) ту інтегральну криву, яка проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ і має в цій точці заданий напрямок дотичної, тобто $\operatorname{tg}\alpha_0 = y_0'$ (рис. 144).

Для механічного трактування задачі Коші розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{13}$$

яке описує рух точки вздовж прямої під дією сили $f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$.

Задача Коші для диференціального рівняння (13) полягає в тому, що з усіх рухів (розв'язки диференціального рівняння (13) називають у механіці рухами), які визначаються рівнянням (13), знайти рух $x = x(t)$, який задовольняє початкові умови:

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = v_0, \tag{14}$$

тобто знайти такий рух, в якому рухома точка в заданий момент часу $t_0$ знаходилася б у положенні $x_0$ і мала б задану початкову швидкість $v_0$.

Як і для диференціального рівняння першого порядку, так і для диференціального рівняння $n$-го порядку природним є питання: які умови має задовольняти права частина рівняння (2), щоб задача Коші для цього рівняння мала розв'язок і до того ж єдиний?

Теорема про існування та єдність розв'язку задачі Коші.

**Теорема.** Нехай праву частину $f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ в рівнянні (2) визначено в деякій замкненій області $\overline{\Omega} n+1$-вимірного простору $\mathbf{R}_{n+1}$ і нехай виконуються умови:

1) $f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ в області $\overline{\Omega}$ є неперервною за сукупністю своїх аргументів.

Тоді функція в цій області обмежена, тобто існує таке число $M > 0$, що

$$\left|f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)\right| \le M; \tag{15}$$



2) функція $f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ в області $\overline{\Omega}$ за змінними $y, y', ..., y^{(n-1)}$ задовольняє умову Ліпшиця

$$\left|f\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}\right) - f\left(x, y_2, y_2', ..., y_2^{(n-1)}\right)\right| \le$$
$$\le L\left(|y_1 - y_2| + |y_1' - y_2'| + ... + \left|y_1^{(n-1)} - y_2^{(n-1)}\right|\right), \tag{16}$$

де $L > 0$ — стала (стала Ліпшиця), а $\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}\right), \left(x, y_2, y_2', ..., y_2^{(n-1)}\right)$ — дві довільні точки з області $\overline{\Omega}$.

Тоді диференціальне рівняння (2) на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$, де

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{\max\left(M, |y'|, ..., \left|y^{(n-1)}\right|\right)}\right\}, \tag{17}$$

має єдиний розв'язок

$$y = y(x), \tag{18}$$

який задовольняє початкові умови (9).

Приймаючи цю теорему без доведення, зауважимо, що умова Ліпшиця (16) виконується, якщо права частина в рівнянні (2) має в області $\overline{\Omega}$ обмежені частинні похідні першого порядку по $y, y', ..., y^{(n-1)}$, тобто

$$\left|\frac{\partial f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)}{\partial y^{(k)}}\right| \le A, \; k = 0, 1, ..., n-1, \tag{19}$$

де $\frac{\partial f}{\partial y^{(0)}} = \frac{\partial f}{\partial y}$, $A > 0$ — стала.

Доведемо останнє твердження для диференціального рівняння другого порядку (10). Розглянемо модуль різниці

$$|f(x, y_1, y_1') - f(x, y_2, y_2')| =$$
$$= |(f(x, y_1, y_1') - f(x, y_2, y_1')) + (f(x, y_2, y_1') - f(x, y_2, y_2'))|.$$

До кожної різниці, що міститься в круглих дужках, застосуємо теорему Лагранжа про скінченний приріст. Маємо

$$|f(x, y_1, y_1') - f(x, y_2, y_1')| = |f_y'(x, y_1 + \theta(y_2 - y_1), y_1')(y_2 - y_1) +$$
$$+ f_{y'}'(x, y_2, y_1' + \theta_2(y_2' - y_1'))(y_2' - y_1')| \le |f_y'(x_1, y_1 + \theta_1(y_2 - y_1), y_1')||y_2 - y_1| +$$
$$+ |f_{y'}'(x, y_2, y_1' + \theta_2(y_2' - y_1'))||y_2' - y_1'| \le A(|y_1 - y_2| + |y_1' - y_2'|),$$

$0 < \theta_1, \theta_2 < 1$, що й треба було довести.

Ознакою (19) переважно користуються при розгляді того чи іншого диференціального рівняння.

Так, розглянемо диференціальне рівняння $n$-го порядку

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+...+p_n(x)y=Q(x), \tag{20}$$

де $p_i(x), i=1,2,...,n, Q(x)$ — неперервні функції на деякому відрізку $[a;b]$.

Рівняння (20), тобто рівняння, що містить шукану функцію $y$ і похідні її у першому степені й не містить добутків їх, називають *лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку*.

Легко бачити, що в будь-якому замкненому паралелепіпеді $T$ $n$-вимірного простору $\mathbf{R}_n$ виконуються умови теореми існування та єдиності.

Справді, тут функція

$$f\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right)=Q(x)-p_n(x)y-p_{n-1}(x)y'-...-p_1(x)y^{(n-1)}$$

є неперервною в паралелепіпеді $T$ і частинні похідні

$$\frac{df}{dy^i}=-p_{n-i}(x), \quad i=0,1,...,n-1,$$

є обмеженими функціями.

Слід звернути увагу на те, що єдиність розв'язку задачі Коші, на відміну від диференціального рівняння першого порядку, для рівняння порядку $n$ не означає, що через задану точку $(x_0,y_0)$ проходить тільки одна інтегральна крива заданого рівняння. Так, для диференціального рівняння другого порядку (10) єдиність розв'язку задачі Коші з початковими умовами (11) означає, що через точку $(x_0,y_0)$ проходить одна і тільки одна інтегральна крива рівняння (10), дотична до якої в цій точці утворює з додатним напрямком осі $Ox$ кут $\alpha_0$ такий, що $\operatorname{tg}\alpha_0=y_0'$. Проте через цю точку можуть проходити й інші інтегральні криві, але з іншим нахилом дотичної.

## 5.12 ОКРЕМІ КЛАСИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЩО ІНТЕГРУЮТЬСЯ В КВАДРАТУРАХ АБО ДОПУСКАЮТЬ ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ

Диференціальні рівняння $n$-го порядку інтегруються в квадратурах дуже рідко. Розглянемо ті класи (типи) диференціальних рівнянь вищих порядків, які можуть бути проінтегровані в квадратурах або порядок яких можна знизити. Це такі рівняння.

**1. Диференціальне рівняння вигляду**

$$y^{(n)}=f(x), \tag{1}$$

**де функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$.**

Диференціальне рівняння (1) інтегрується в квадратурах.



Справді, запишемо його у вигляді

$$\frac{d}{dx}\left(y^{(n-1)}\right)=f(x),$$

або

$$d\left(y^{(n-1)}\right)=f(x)dx.$$

Тоді

$$y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1, \tag{2}$$

де $C_1$ — стала інтегрування.

Отже, диференціальне рівняння (1) $n$-го порядку звели до диференціального рівняння (2) $(n-1)$-го порядку.

Рівняння (2) запишемо у вигляді

$$dy^{(n-2)}=\left(\int f(x)dx\right)dx+C_1dx,$$

звідси після інтегрування обох частин знайдемо

$$y^{(n-2)}=\int\left(\int f(x)dx\right)dx+C_1x+C_2, \tag{3}$$

де $C_2$ — стала інтегрування.

Якщо $n>2$, то від диференціального рівняння (3) $(n-2)$-го порядку переходимо до диференціального рівняння

$$y^{(n-3)}=\int\left(\int\left(\int f(x)dx\right)dx\right)dx+\frac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3, \tag{4}$$

де $C_3$ — стала інтегрування, і т. д. Через $n$ кроків дістанемо функцію

$$y=\underbrace{\int\int...\int}_{n\text{ разів}}f(x)dxdx...dx+\frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2}+...+C_{n-1}x+C_n, \tag{5}$$

яка і є загальним розв'язком диференціального рівняння (1).

❑ **Приклади**

**1.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y^{\text{IV}}=\sin 2x. \tag{6}$$

Р о з в ' я з а н н я. Запишемо рівняння (6) у вигляді

$$d(y''')=\sin 2xdx,$$

звідси

$$y'''=\int\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\cos 2x+C_1.$$

Отже, маємо диференціальне рівняння третього порядку

$$y''' = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1.$$

Запишемо його у вигляді

$$d(y'') = -\frac{1}{2}\cos 2x dx + C_1 dx.$$

Тоді

$$y'' = -\frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \int C_1 dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2.$$

Це диференціальне рівняння запишемо так:

$$d(y') = -\frac{1}{4}\sin 2x dx + C_1 x dx + C_2 dx.$$

Звідси

$$y' = \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3.$$

Отже,

$$y = \frac{1}{16}\sin 2x + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4.$$

**2.** Знайти розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння

$$y''' = \frac{6}{x^3}, \qquad (7)$$

який задовольняє початкові умови

$$y(1) = 2, \quad y'(1) = y''(1) = 1. \qquad (8)$$

Р о з в ' я з а н н я. Знайдемо спочатку загальний розв'язок диференціального рівняння (7). Для цього запишемо рівняння у вигляді

$$dy'' = \frac{6}{x^3}dx,$$

звідси

$$y'' = \int \frac{6}{x^3}dx + C_1 = -\frac{3}{x^2} + C_1. \qquad (9)$$

Тоді

$$dy' = \left(-\frac{3}{x^2} + C_1\right)dx,$$

або

$$y' = \int -\frac{3}{x^2}dx + \int C_1 dx + C_2 = \frac{3}{x} + C_1 x + C_2. \qquad (10)$$

Отже,

$$y = 3\ln|x| + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3. \qquad (11)$$

Функція (11) і є загальним розв'язком рівняння (7).



Скористаємося початковими умовами (8). Для цього у співвідношення (9), (10) і (11) підставимо $x = 1$. За умовами (8) маємо такі рівності:

$$\begin{cases} -3 + C_1 = 1; \\ 3 + C_1 + C_2 = 1; \\ \frac{1}{2}C_1 + C_2 + C_3 = 2. \end{cases}$$

Звідси $C_1 = 4$, $C_2 = -6$, $C_3 = 6$. Шуканий розв'язок має вигляд

$$y = 3\ln|x| + 2x^3 - 6x + 6.$$

## 2. Диференціальне рівняння *n*-го порядку

$$F\left(x, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (12)$$

Якщо задане рівняння допускає розв'язання відносно $y^{(n)}$, то маємо перший випадок.

Отже, нехай рівняння (12) розв'язане відносно $x$:

$$x = \varphi\left(y^{(n)}\right). \qquad (13)$$

Введемо позначення $y^{(n)} = t$. Тоді рівняння (13) набирає вигляду

$$x = \varphi(t). \qquad (14)$$

Скористаємося тотожністю

$$d\left(y^{(n-1)}\right) = y^{(n)}dx.$$

Підставляючи значення $y^{(n)} = t$ і $dx = \varphi'(t)dt$, матимемо

$$d\left(y^{(n-1)}\right) = t\varphi'(t)dt,$$

або

$$y^{(n-1)} = \int t\varphi'(t)dt + C_1, \qquad (15)$$

де $C_1$ — стала інтегрування.

Інтегруючи диференціальне рівняння (15) і наступні тим самим методом, що й рівняння (1), знаходимо розв'язок диференціального рівняння (12) у параметричній формі

$$x = \varphi(t), \quad y = \varphi(t, C_1, \ldots, C_n). \qquad (16)$$

❑ **Приклад**

**3.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''^3 - 2y'' - x = 0. \qquad (17)$$

Розв'язання. Це рівняння допускає розв'язання відносно $x$:

$$x = y''^3 - 2y''.$$

Уведемо підстановку $y'' = t$. Тоді

$$x = t^3 - 2t.$$

Скористаємося співвідношенням (15):

$$y' = \int t\left(3t^2 - 2\right)dt + C_1 = \int\left(3t^3 - 2t\right)dt + C_1 = \frac{3}{4}t^4 - t^2 + C_1.$$

Дістанемо

$$y = \frac{9}{28}t^7 - \frac{3}{5}t^5 + C_1\left(t^3 + t^2\right) - \frac{1}{4}t^6 + \frac{1}{2}t^4 + C_2,$$

де $C_1, C_2$ — довільні сталі.

Може статися, що диференціальне рівняння (12) не допускає розв'язання ні відносно $y^{(n)}$, ні відносно $x$. Однак його можна зобразити у параметричній формі

$$x = \varphi(t),$$

$$y^{(n)} = \psi(t), \quad t \in \langle\alpha; \beta\rangle, \tag{18}$$

де функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ такі, що при $t \in \langle\alpha; \beta\rangle$ виконується тотожність

$$F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0.$$

Скористаємося рівністю

$$d\left(y^{(n-1)}\right) = y^{(n)}dx.$$

Тоді

$$y^{(n-1)} = \int y^{(n)}dx + C_1 = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1.$$

Маємо попередній випадок. Загальний розв'язок зображується у параметричній формі вигляду (16).

**3. Диференціальні рівняння, які допускають зниження порядку.**

Нехай маємо диференціальне рівняння

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \quad 1 \le k < n, \tag{19}$$

яке не містить шуканої функції $y$ та її перших $k-1$ похідних.

Уведемо нову невідому функцію

$$z = y^{(k)}. \tag{20}$$



Диференціальне рівняння (19) $n$-го порядку переходить у диференціальне рівняння $(n-k)$-го порядку

$$F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0. \tag{21}$$

Отже, порядок диференціального рівняння знизився на $k$ одиниць.

Припустимо, що рівняння (21) проінтегровано, тобто маємо його загальний розв'язок

$$z = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}\right), \tag{22}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}$ — довільні сталі.

Загальний розв'язок (22) називають *проміжним інтегралом диференціального рівняння* (19).

Знаючи проміжний інтеграл, можна знайти загальний розв'язок рівняння (19). Підставляючи в рівність (22) значення $z = y^{(k)}$, дістанемо таке диференціальне рівняння:

$$y^{(k)} = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}\right). \tag{23}$$

Диференціальне рівняння (23) є рівнянням вигляду (1). Отже, воно інтегрується в квадратурах, його загальний розв'язок

$$y = \int\int\ldots\int \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}\right)dxdx\ldots dx +$$

$$+\frac{C_{n-k+1}}{(k-1)!}x^{k-1} + \frac{C_{n-k+2}}{(k-2)!}x^{k-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

❑ **Приклад**

**4.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$2xy'' = y'. \tag{24}$$

Розв'язання. Застосовуємо підстановку $z = y'$. Тоді рівняння (24) набирає вигляду

$$2xz' = z.$$

Дістали рівняння першого порядку, яке допускає відокремлення змінних

$$\frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\frac{dx}{x}.$$

Звідси

$$\ln|z| = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln|C_1|,$$

або

$$z = C_1\sqrt{x}. \tag{25}$$

де $C_1$ — стала інтегрування.

Підставивши у рівність (25) значення $z = y'$, матимемо диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = C_1\sqrt{x},$$

загальний розв'язок якого

$$y = \int C_1\sqrt{x}\,dx + C_2 = \frac{2}{3}C_1 x^{\frac{3}{2}} + C_2. \tag{26}$$

Функція (26) і є загальним розв'язком диференціального рівняння (24).

### 4. Диференціальне рівняння

$$F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0, \tag{27}$$

**яке допускає розв'язання відносно**

$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}\right). \tag{28}$$

Застосуємо підстановку

$$y^{(n-1)} = z. \tag{29}$$

Тоді рівняння (28) відносно функції $z$ перетворюється на диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dz}{dx} = f(z),$$

яке при $f(z) \neq 0$ допускає відокремлення змінних

$$\frac{dz}{f(z)} = dx.$$

Звідси

$$\int \frac{dz}{f(z)} = x + C_1. \tag{30}$$

Припустимо, що зі співвідношення (30) можна знайти

$$z = \varphi(x, C_1).$$

Підставивши значення $z = y^{(n-1)}$, матимемо диференціальне рівняння

$$y^{(n-1)} = \varphi(x, C_1)$$

типу (1).

❑ **Приклад**

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - a\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0. \tag{31}$$



Р о з в ' я з а н н я. Це рівняння вигляду (27). Ввівши підстановку $y' = z$, рівняння (31) запишемо у вигляді

$$\frac{dz}{dx} = a\left(1 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Відокремивши змінні, матимемо

$$\frac{dz}{\left(1 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = a\,dx.$$

Звідси

$$\int \frac{dz}{\left(1 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = ax + C_1.$$

Інтеграл у лівій частині є інтегралом від біномного диференціала. Тут $p = -\frac{3}{2}$, $n = 2$, $m = 0$. Використовуємо третю підстановку

$$1 + z^2 = z^2 t^2.$$

Тоді інтеграл набирає вигляду

$$\int \frac{dz}{\left(1 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} = \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}.$$

Отже,

$$\frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} = ax + C_1,$$

звідси

$$z = \frac{ax + C_1}{\sqrt{1 - (ax + C_1)^2}}$$

(тут взяли тільки одне значення для $z$).

Підставивши значення $z = y'$, матимемо

$$y' = \frac{ax + C_1}{\sqrt{1 - (ax + C_1)^2}}.$$

Інтегруючи це рівняння, знаходимо загальний розв'язок диференціального рівняння (31):

$$y = \int \frac{ax + C_1}{\sqrt{1 - (ax + C_1)^2}}\,dx + C_2 = -\frac{1}{a}\sqrt{1 - (ax + C_1)^2} + C_2.$$

### 5. Диференціальне рівняння

$$F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0, \tag{32}$$

**яке можна розв'язати відносно старшої похідної**

$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-2)}\right). \tag{33}$$

Застосовуємо підстановку $y^{(n-2)} = z$. Тоді рівняння (33) набирає вигляду

$$z'' = f(z). \tag{34}$$

Помноживши обидві частини цього рівняння на $2z'dx$, матимемо рівняння

$$d\left(z'^2\right)=2f(z)dz.$$

Звідси

$$z'^2=\int 2f(z)dz+C_1,$$

або

$$z'=\sqrt{\int 2f(z)dz+C_1}, \qquad (35)$$

де $C_1$ — стала інтегрування.

Диференціальне рівняння (35) допускає відокремлення змінних

$$\frac{dz}{\sqrt{\int 2f(z)dz+C_1}}=dx.$$

Отже,

$$\int\frac{dz}{\sqrt{\int 2f(z)dz+C_1}}=x+C_2, \qquad (36)$$

де $C_2$ — стала інтегрування.

Припустимо, що зі співвідношення (36) можна знайти

$$z=\varphi(x, C_1, C_2).$$

Підставивши значення $z=y^{(n-2)}$, дістанемо диференціальне рівняння $(n-2)$-го порядку

$$y^{(n-2)}=\varphi(x, C_1, C_2)$$

типу 1.

**6. Диференціальне рівняння**

$$F\left(y, y', ..., y^{(n)}\right)=0, \qquad (37)$$

**яке не містить незалежної змінної $x$.**

Таке рівняння допускає зниження порядку на одиницю. Справді, введемо підстановку $y'=z$. Тоді

$$y''=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dy}z. \qquad (38)$$

Отже, похідна другого порядку $y''=\frac{d^2y}{dx^2}$ виражається через нову невідому функцію $z$ та її похідну першого порядку $\frac{dz}{dy}$.

Знайдемо

$$y'''=\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy}z\right)z=\frac{d^2z}{dy^2}z^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 z$$

і т. д.



За методом індукції можна довести, що порядок усіх наступних похідних також знижується на одиницю.

Таким чином, від диференціального рівняння (37) $n$-го порядку перейдемо до диференціального рівняння

$$\Phi\left(y, z, z', ..., z^{(n-1)}\right)=0$$

$(n-1)$-го порядку.

❑ **Приклад**

**6.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$2yy''-y'^2=1.$$

Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо підстановку $y'=z$. Скориставшись виразом (38), задане рівняння запишемо так:

$$2yz\frac{dz}{dy}=1+z^2.$$

Це рівняння першого порядку, воно допускає відокремлення змінних

$$\frac{2zdz}{1+z^2}=\frac{dy}{y}.$$

Звідси

$$\ln\left(1+z^2\right)=\ln|y|+\ln|C_1|,$$

або

$$1+z^2=C_1y.$$

Підставивши значення $z$, матимемо

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{C_1y-1},$$

або

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1y-1}}=dx.$$

Проінтегрувавши обидві частини, знайдемо

$$\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1y-1}=x+C_2,$$

або

$$y=\frac{1}{C_1}+\frac{C_1}{4}(x+C_2)^2,$$

де $C_1$ і $C_2$ — сталі інтегрування.

## 5.13
## ОДНОРІДНІ ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Як уже зазначалося, основною задачею в теорії диференціальних рівнянь є знаходження їх загального розв'язку. Ця задача найґрунтовніше вивчена для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами, тобто рівнянь вигляду

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = Q(x), \tag{1}$$

де $a_1, a_2$ — сталі дійсні числа, а $Q(x)$ — неперервна функція на деякому проміжку $\langle a; b \rangle$. Для таких рівнянь, як буде показано нижче, можна всі розв'язки знайти в квадратурах, а в деяких випадках — навіть виразити ці розв'язки через елементарні функції.

Розглянемо спочатку випадок, коли в рівнянні (1)

$$Q(x) \equiv 0.$$

Тоді рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{2}$$

називають *однорідним диференціальним рівнянням другого порядку.*

Знаходитимемо розв'язок диференціального рівняння (2) методом Ейлера, а саме у вигляді

$$y = e^{\lambda x}, \tag{3}$$

де $\lambda$ — деяке невизначене стале число (дійсне чи комплексне). Знайшовши похідні

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

і підставивши їх разом із функцією (3) у ліву частину диференціального рівняння (2)

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y \tag{4}$$

($L(y)$ ще називають *лінійним диференціальним оператором*), матимемо

$$L\left(e^{\lambda x}\right) = e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2\right). \tag{5}$$

Звідси випливає, що функція (3) є розв'язком диференціального рівняння (2) тоді і тільки тоді, коли у виразі (5) багаточлен

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 \tag{6}$$

дорівнює нулю, тобто

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \tag{7}$$

Багаточлен (6) називають *характеристичним багаточленом диференціального рівняння* (2), а рівняння (7) — *характеристичним рівнянням диференціального рівняння* (2).

Характеристичне рівняння (7) є квадратним рівнянням відносно невідомого числа $\lambda$, корені цього рівняння визначають за формулою

$$\lambda_{1,1} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}. \tag{8}$$

Числа $\lambda_1$ і $\lambda_2$ називають *характеристичними числами.*



Тоді, як відомо, відносно коренів $\lambda_1$ і $\lambda_2$ можуть бути такі три випадки:

I. $\lambda_1$ і $\lambda_2$ — дійсні й різні числа

$$\lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Це буде тоді і тільки тоді, коли дискримінант

$$\frac{a_1^2}{4} - a_2 > 0. \tag{9}$$

Диференціальне рівняння (2) має два різні розв'язки:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}. \tag{10}$$

Побудуємо таку функцію:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{11}$$

де $C_1$ і $C_2$ — довільні сталі числа.

**Теорема 1.** Якщо для диференціального рівняння (2) виконується умова (9), то функція (11), де $\lambda_1$ і $\lambda_2$ — корені характеристичного рівняння (7), є загальним розв'язком однорідного диференціального рівняння (2).

*Доведення.* Доведемо спочатку, що функція (11) є розв'язком диференціального рівняння (2). Для цього підставимо її в ліву частину рівняння (2). Маємо

$$L(y) = C_1 e^{\lambda_1 x}\left(\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2\right) + C_2 e^{\lambda_2 x}\left(\lambda_2^2 + a_1\lambda_2 + a_2\right).$$

Оскільки $\lambda_1$ і $\lambda_2$ — корені характеристичного рівняння (7), то

$$\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2 = 0, \quad \lambda_2^2 + a_2\lambda_2 + a_2 = 0.$$

Тому

$$L(y) = L\left(C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}\right) = 0.$$

Отже, функція (11) в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ є розв'язком диференціального рівняння (2).

Доведемо тепер, що функція (11) є загальним розв'язком рівняння (2). Для цього слід показати, що з розв'язку (11) можна дістати частинний розв'язок цього рівняння, який задовольняє будь-які наперед задані початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \tag{12}$$

де $x_0$ — точка, $x_0 \in (-\infty; +\infty)$, а $y_0$ і $y_0'$ — довільні дійсні числа.

Знайдемо похідну функції (11):

$$y' = C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{13}$$

Підставивши у функції (11) і (13) значення $x = x_0$ і скориставшись початковими умовами (12), матимемо відносно $C_1$ і $C_2$ таку алгебраїчну систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x_0} + C_2 e^{\lambda_2 x_0} = y_0; \\ C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x_0} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x_0} = y_0'. \end{cases} \tag{14}$$

Детермінант цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x_0} & e^{\lambda_2 x_0} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x_0} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x_0} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)x_0}(\lambda_2 - \lambda_1). \tag{15}$$

Оскільки $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $\Delta \neq 0$.

Отже, система рівнянь (14) має єдиний розв'язок

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & e^{\lambda_2 x_0} \\ y_0' & \lambda_2 e^{\lambda_2 x_0} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(y_0\lambda_2 - y_0')e^{\lambda_2 x_0}}{e^{(\lambda_1+\lambda_2)x_0}(\lambda_2-\lambda_1)} = \frac{y_0\lambda_2 - y_0'}{e^{\lambda_1 x_0}(\lambda_2-\lambda_1)},$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x_0} & y_0 \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x_0} & y_0' \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{e^{\lambda_1 x_0}(y_0' - \lambda_1 y_0)}{e^{(\lambda_1+\lambda_2)x_0}(\lambda_2-\lambda_1)} = \frac{y_0' - \lambda_1 y_0}{e^{\lambda_2 x_0}(\lambda_2-\lambda_1)}. \tag{16}$$

Таким чином, розв'язок

$$y = \frac{y_0\lambda_2 - y_0'}{\lambda_2-\lambda_1} e^{\lambda_1(x-x_0)} + \frac{y_0' - \lambda_1 y_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2(x-x_0)}, \tag{17}$$

що утворюється з розв'язку (11), де $C_1$ і $C_2$ визначають за формулами (16), і є тим розв'язком диференціального рівняння (2), що задовольняє довільні початкові умови (12).

Теорему доведено.

❑ **Приклад**

1. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 2y' - 8y = 0, \tag{18}$$

який задовольняє початкові умови

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = 0. \tag{19}$$

Р о з в ' я з а н н я. Складаємо характеристичне рівняння (7) для диференціального рівняння (18). Для цього в рівнянні (18) порядок похідної замінюємо відповідним степенем $\lambda$. Маємо

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0.$$

Корені цього рівняння (характеристичні числа) дорівнюють

$$\lambda_1 = 4; \quad \lambda_2 = -2.$$

Отже, маємо випадок I. Тому загальний розв'язок рівняння (18) набирає вигляду

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}.$$



Для знаходження частинного розв'язку скористаємося формулою (17), підставивши в неї

$$x_0 = 0; \quad y_0 = 1; \quad y_0' = 0.$$

Дістанемо

$$y = \frac{1}{3}e^{4x} + \frac{2}{3}e^{-2x}.$$

II. Числа $\lambda_1$ і $\lambda_2$ — комплексні. Цей випадок матимемо тоді і тільки тоді, коли дискримінант

$$\frac{a_1^2}{4} - a_2 < 0. \tag{20}$$

При цьому

$$\lambda_1 = -\frac{a_1}{2} + i\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}},$$

$$\lambda_2 = -\frac{a_1}{2} + i\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}},$$

$$i = \sqrt{-1}.$$

Введемо позначення

$$\alpha = -\frac{a_1}{2}, \quad \beta = \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}. \tag{21}$$

Тоді

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta.$$

Отже, корені характеристичного рівняння (7) у випадку II є комплексно спряженими числами.

Підставимо значення $\lambda_1$ і $\lambda_2$ у формулу (3). Дістанемо такі комплексні розв'язки диференціального рівняння (2):

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}; \quad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}. \tag{22}$$

Розглянемо перший із цих розв'язків

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}.$$

Використавши формулу Ейлера, його можна записати ще так:

$$y = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x). \tag{23}$$

Позначимо дійсну частину в рівності (23) через

$$y_1 = y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x, \tag{24}$$

а коефіцієнт при уявній частині — через

$$y_2 = y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{25}$$

**Л е м а.** Функції $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ є розв'язками диференціального рівняння (2).

Д о в е д е н н я. Доведемо, наприклад, що функція

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

є розв'язком рівняння (2). Для цього знаходимо похідні

$$y_1' = \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - e^{\alpha x}\beta\sin\beta x;$$

$$y_1'' = \alpha^2 e^{\alpha x}\cos\beta x - 2\alpha\beta e^{\alpha x}\sin\beta x - e^{\alpha x}\beta^2\cos\beta x.$$

Підставивши значення функції $y_1$ та її похідних $y_1'$ і $y_1''$ у ліву частину рівняння (2), матимемо

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = e^{\alpha x}\left(\left(\alpha^2 - \beta^2 + a_1\alpha + a_2\right)\cos\beta x - \beta\left(2\alpha + a_1\right)\sin\beta x\right).$$

Числа, що містяться в круглих дужках останнього виразу, дорівнюють нулю. Справді, згідно з позначеннями (21),

$$\alpha^2 - \beta^2 + a_1\alpha + a_2 = \frac{a_1^2}{4} - a_2 + \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{2} + a_2 = 0,$$

$$-\beta\left(2\alpha + a_1\right) = -\beta\left(-a_1 + a_1\right) = 0.$$

Отже,

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0.$$

Аналогічно можна довести, що функція

$$y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

є розв'язком диференціального рівняння (2).

Лему доведено.

Із доведеної леми випливає, що характеристичне число $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ породжує два дійсні розв'язки (24) і (25) диференціального рівняння (2).

Щодо характеристичного числа $\lambda_2 = \lambda - i\beta$, то воно нових розв'язків не дає.

**Т е о р е м а 2.** *Якщо для диференціального рівняння* (2) *виконується умова* (20), *то функція*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x, \tag{26}$$

*де* $C_1$ *і* $C_2$ *— довільні сталі величини, а числа* $\alpha$ *і* $\beta$ *визначають за співвідношеннями* (21), *є загальним розв'язком диференціального рівняння* (2).

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 1.

Загальний розв'язок (26) можна записати в іншому вигляді. Для цього введемо такі позначення:

$$C_1 = A\sin\varphi;\quad C_2 = A\cos\varphi, \tag{27}$$

де $A$ і $\varphi$ — сталі числа.



Тоді

$$y = Ae^{\alpha x}\sin\left(\beta x + \varphi\right). \tag{28}$$

Це і є загальний розв'язок у випадку комплексних характеристичних чисел.

❑ **Приклади**

**2.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + a^2 y = 0,\quad a > 0. \tag{29}$$

Р о з в ' я з а н н я. Складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + a^2 = 0,$$

звідси $\lambda_1 = ia, \lambda_2 = -ia$. Отже, $\alpha = 0, \beta = a$. Тому за формулою (28) загальний розв'язок диференціального рівняння (29) має вигляд

$$y = A\sin\left(ax + \varphi\right).$$

**3.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 4y' + 29y = 0, \tag{30}$$

який задовольняє початкові умови

$$y(0) = 1,\quad y'(0) = 7. \tag{31}$$

Р о з в ' я з а н н я. Складаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 4\lambda + 29 = 0.$$

Коренями цього рівняння є числа $\lambda_1 = 2 + 5i,\ \lambda_2 = 2 - 5i$. Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (30) має вигляд

$$y = e^{2x}\left(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x\right). \tag{32}$$

Скориставшись початковими умовами (31), знаходимо

$$y' = 2e^{2x}\left(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x\right) + e^{2x}\left(-5C_1\sin 5x + 5C_2\cos 5x\right).$$

Для сталих $C_1$ і $C_2$ маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 = 1; \\ 2C_1 + 5C_2 = 7. \end{cases}$$

Звідси $C_1 = C_2 = 1$. Отже, шуканий розв'язок має вигляд

$$y = e^{2x}\left(\cos 5x + \sin 5x\right).$$

III. Числа $\lambda_1$ і $\lambda_2$ рівні: $\lambda_1 = \lambda_2$. Цей випадок матимемо тоді і тільки тоді, коли дискримінант

$$\frac{a_1^2}{4} - a_2 = 0. \tag{33}$$

Дістанемо одне характеристичне число

$$\lambda = -\frac{a_1}{2}. \tag{34}$$

Отже, диференціальне рівняння (2) має розв'язок

$$y_1 = e^{\lambda x} = e^{-\frac{a_1}{2}x}. \qquad (35)$$

Доведемо, що в розглядуваному випадку розв'язком диференціального рівняння (2) є також функція

$$y_2 = xe^{-\frac{a_1}{2}x}. \qquad (36)$$

Справді, знайшовши похідні функції (36)

$$y_2' = e^{-\frac{a_1}{2}x}\left(1 - x\frac{a_1}{2}\right);$$

$$y_2'' = -a_1 e^{-\frac{a_1}{2}x} + x\frac{a_1^2}{4}e^{-\frac{a_1}{4}x}$$

та врахувавши умову (33), матимемо

$$y_2'' + a_1 y_2' + a y_2 = e^{-\frac{a_1}{2}x}\left(-a_1 + \frac{a_1^2}{4}x + a_1 - \frac{a_1^2}{2}x + \frac{a_1^2}{4}x\right) \equiv 0.$$

**Теорема 3.** Якщо для диференціального рівняння (2) виконується умова (33), то загальним розв'язком цього рівняння є функція

$$y = e^{-\frac{a_1}{2}x}(C_1 + C_2 x), \qquad (37)$$

де $C_1$ і $C_2$ — довільні сталі величини.

Доведення цієї теореми не наводимо.

❑ **Приклад**

4. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 6y' + 9y = 0, \qquad (38)$$

який задовольняє початкові умови

$$y(0) = 1;\ y'(0) = -1. \qquad (39)$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок. Для цього складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0. \qquad (40)$$

Це рівняння можна записати і так:

$$(\lambda + 3)^2 = 0.$$

Звідси $\lambda = -3$.

Отже, характеристичне рівняння (40) має два рівні корені. Тому загальний розв'язок диференціального рівняння (38) запишемо у вигляді (37)

$$y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x). \qquad (41)$$



Скористаємося початковими умовами (39). Знайдемо похідну функції (41)

$$y' = -3e^{-3x}(C_1 + C_2 x) + C_2 e^{-3x}.$$

Для визначення сталих $C_1$ і $C_2$ дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 = 1; \\ -3C_1 + C_2 = -1, \end{cases}$$

звідси $C_1 = 1, C_2 = 2$. Розв'язок диференціального рівняння (38), який задовольняє початкові умови (39), має вигляд

$$y = e^{-3x}(1 + 2x).$$

## 5.14

## НЕОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглянемо неоднорідні лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = Q(x), \qquad (1)$$

де $a_1, a_2$ — сталі дійсні числа, а $Q(x) \not\equiv 0$ — функція, неперервна на деякому проміжку $\langle a; b\rangle$.

У п. 5.13 було з'ясовано структуру загального розв'язку однорідного диференціального рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \qquad (2)$$

а також доведено (теореми 1—3), що загальний розв'язок рівняння (2) зображується у вигляді

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad (3)$$

де $C_1, C_2$ — довільні сталі, а функції $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ залежно від випадків I—III визначають відповідно за формулами (10), (24), (25), (35), (36).

З'ясуємо структуру загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння (1). Для цього доведемо таку теорему.

**Теорема.** Нехай функція $v = v(x)$ є розв'язком неоднорідного диференціального рівняння (1), а функція

$$u(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad (4)$$

є загальним розв'язком відповідного однорідного диференціального рівняння (2). Тоді функція

$$y(x) = u(x) + v(x) \qquad (5)$$

є загальним розв'язком неоднорідного диференціального рівняння (1).

Доведення. Доведемо спочатку, що функція (5) є розв'язком диференціального рівняння (1). Для цього задану функцію підставимо в ліву частину рівняння (1). Маємо

$$y''+a_1y'+a_2y=(u(x)+v(x))''+a_1(u(x)+v(x))'+a_2(u(x)+v(x))=$$
$$=u''(x)+a_1u'(x)+a_2u(x)+v''(x)+a_1v'(x)+a_2v(x). \qquad (6)$$

За умовою цієї теореми, функція $u(x)$ є загальним розв'язком рівняння (2), а $v(x)$ є розв'язком рівняння (1), тобто виконуються тотожності

$$u''(x)+a_1u'(x)+a_2u(x)\equiv 0;$$
$$v''(x)+a_1v'(x)+a_2v(x)\equiv Q(x).$$

Згідно з рівністю (6), виконується тотожність

$$(u(x)+v(x))''+a_1(u(x)+v(x))'+a_2(u(x)+v(x))\equiv Q(x).$$

Отже, функція (5) є розв'язком неоднорідного диференціального рівняння (1).

Доведемо, що розв'язок (5) є загальним розв'язком рівняння (1). Для цього доведемо, що в розв'язку (5) можна за рахунок вибору значень сталих $C_1$ і $C_2$ дістати розв'язок рівняння (1), який задовольняє довільні наперед задані початкові умови

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y_0'. \qquad (7)$$

Скориставшись умовами (7), матимемо алгебраїчну систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)+v(x_0)=y_0; \\ C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)+v'(x_0)=y_0', \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)=y_0-v(x_0); \\ C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)=y_0'-v'(x_0). \end{cases} \qquad (8)$$

Отже, відносно сталих $C_1$ і $C_2$ маємо неоднорідну алгебраїчну систему рівнянь, детермінант якої

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}. \qquad (9)$$

У випадку I, п. 5.13, було доведено, що $\Delta\neq 0$. Доведемо, що й у випадках II і III детермінант $\Delta$ також не дорівнює нулю.

Випадок II

$$\Delta=\begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x-\beta e^{\alpha x}\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x+\beta e^{\alpha x}\cos\beta x \end{vmatrix}=$$
$$=e^{2\alpha x}\left(\alpha\cos\beta x\sin\beta x+\beta\cos^2\beta x-\alpha\cos\beta x\sin\beta x+\beta\sin^2\beta x\right)=\beta e^{2\alpha x}\neq 0.$$



Випадок III

$$\Delta=\begin{vmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & e^{\lambda x}+x\lambda e^{\lambda x} \end{vmatrix}=e^{2\lambda x}(1+x\lambda-x\lambda)=e^{2\lambda x}\neq 0.$$

Таким чином, у кожному з випадків I—III детермінант $\Delta\neq 0$. Тому система алгебраїчних рівнянь (8) має відносно $C_1$ і $C_2$ єдиний розв'язок. Розв'язавши цю систему і підставивши знайдені значення $C_1$ і $C_2$ у формулу (5), матимемо розв'язок диференціального рівняння (1), який задовольняє початкові умови (7).

Теорему доведено.

Із цієї теореми випливає, що для знаходження загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння (1) потрібно знайти загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння (2) і до цього розв'язку додати один будь-який розв'язок $v=v(x)$ неоднорідного рівняння (1).

Зауважимо, що розв'язок $v=v(x)$ є частинним розв'язком рівняння (1), оскільки він утворюється із загального розв'язку (5) при $C_1=C_2=0$.

Так, нехай маємо диференціальне рівняння

$$y''-y=x. \qquad (10)$$

Тут загальним розв'язком однорідного рівняння

$$y''-y=0$$

є функція

$$u=C_1e^{x}+C_2e^{-x}.$$

Таким чином, функція $v=-x$ є розв'язком рівняння (10). Тому загальним розв'язком рівняння (10) є функція

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}-x.$$

**Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа).** У п. 5.13 було розглянуто спосіб знаходження загального розв'язку однорідного диференціального рівняння (2). Для знаходження частинного розв'язку неоднорідного диференціального рівняння (1) користуються способом варіації довільних сталих. Викладемо суть цього способу.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1) шукатимемо в такому самому вигляді, що й однорідного рівняння (2), замінивши довільні сталі $C_1$ і $C_2$ на деякі невідомі функції $C_1=C_1(x)$, $C_2=C_2(x)$, тобто

$$y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x). \qquad (11)$$

Підберемо функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ так, щоб функція (11) була загальним розв'язком рівняння (1). Для цього знайдемо похідну

$$y'=C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)+C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x). \qquad (12)$$

На функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ накладемо умову

$$C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0. \tag{13}$$

Тоді з рівності (12) випливає, що

$$y'=C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x). \tag{14}$$

Звідси

$$y''=C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x). \tag{15}$$

Підставивши функцію (11) та її похідні (14) і (15) у рівняння (1), матимемо

$$C_1(x)\left(y_1''(x)+a_1y'(x)+a_2y_1(x)\right)+C_2(x)\left(y_2''(x)+a_1y_2'(x)+\right.$$
$$\left.+a_2y_2(x)\right)+C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=Q(x). \tag{16}$$

Оскільки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є розв'язками однорідного диференціального рівняння (2), то вирази в круглих дужках співвідношення (16) тотожно дорівнюють нулю.

Отже, дістанемо таке співвідношення:

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=Q(x). \tag{17}$$

Об'єднуючи рівності (13) і (17), матимемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases}C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0;\\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=Q(x).\end{cases} \tag{18}$$

У цій системі невідомими є похідні $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ функцій $C_1(x)$, $C_2(x)$.

Детермінантом цієї системи є детермінант $\Delta$, що визначається за формулою (9) $(x=x_0)$. Як вже було показано, $\Delta\neq 0$ при будь-якому $x_0\in$ $\in(-\infty;+\infty)$. Тому система (18) має єдиний розв'язок

$$C_1'(x)=\varphi(x);\quad C_2'(x)=\psi(x), \tag{19}$$

де функції

$$\varphi(x)=\frac{-y_2(x)Q(x)}{\Delta(x)};\quad \psi(x)=\frac{y_1(x)Q(x)}{\Delta(x)} \tag{20}$$

є неперервними в інтервалі $(-\infty;+\infty)$.

Із формул (19) знаходимо

$$C_1(x)=\int\varphi(x)dx+C_1;\quad C_2(x)=\int\psi(x)dx+C_2, \tag{21}$$

де $C_1$ і $C_2$ — сталі інтегрування.

Підставляючи значення цих функцій у формулу (11), знайдемо загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (1) у вигляді

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y_1(x)\int\varphi(x)dx+y_2(x)\int\psi(x)dx. \tag{22}$$



Із рівностей (22) випливає, що функція

$$v(x)=y_1(x)\int\varphi(x)dx+y_2(x)\int\psi(x)dx \tag{23}$$

і є частинним розв'язком неоднорідного диференціального рівняння (1), який утворюється із загального розв'язку (22) при $C_1=C_2=0$.

❑ ***Приклад***

**1.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''+y=\mathrm{tg}^2\,x. \tag{24}$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y''+y=0. \tag{25}$$

Для цього складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2+1=0,$$

коренями якого є числа $\lambda_{1,2}=\pm i$. Отже, загальний розв'язок рівняння (25) має вигляд

$$u=C_1\cos x+C_2\sin x. \tag{26}$$

Для знаходження частинного розв'язку скористаємося формулою (23). У цьому випадку

$$y_1(x)=\cos x;\quad y_2(x)=\sin x;$$

$$\varphi(x)=\frac{-\sin x\,\mathrm{tg}^2\,x}{\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ \cos x & -\sin x\end{vmatrix}}=\frac{-\sin x\,\mathrm{tg}^2\,x}{-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}=\sin x\,\mathrm{tg}^2\,x;$$

$$\psi(x)=\frac{\cos x\,\mathrm{tg}^2\,x}{-1}=-\cos x\,\mathrm{tg}^2\,x.$$

Тоді

$$v(x)=\cos x\int\sin x\,\mathrm{tg}^2\,xdx-\sin x\int\cos x\,\mathrm{tg}^2\,xdx=$$

$$=1+\frac{1}{3}\cos^4 x-\sin^2 x-\sin x\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Отже, загальним розв'язком диференціального рівняння (24) є функція

$$y=u(x)+v(x)=$$

$$=C_1\cos x+C_2\sin x+1+\frac{1}{3}\cos^4 x-\sin^2 x-\sin x\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

**Метод невизначених коефіцієнтів.** Як було доведено, для неоднорідного диференціального рівняння (1) з будь-якою неперервною правою частиною $Q(x)$ загальний розв'язок знаходиться (за методом Лагранжа) в квадратурах. Проте з'ясовується, що для окремих видів функції $Q(x)$ частинний розв'язок рівняння (1) можна знайти без квадратур. Отже, додаючи цей розв'язок до загального розв'язку відповідного однорідного рівняння, матимемо без квадратур загальний розв'язок і неоднорідного рівняння (1).

Розглянемо ці випадки.

Випадок 1. Нехай права частина в рівнянні (1) має вигляд

$$Q(x)=P_n(x)e^{rx}, \tag{27}$$

де $P_n(x)$ — багаточлен степеня $n$

$$P_n(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n,$$

а $r$ — будь-яке дійсне число.

При цьому можуть бути такі випадки.

I. Число $r$ не є коренем характеристичного рівняння відповідного однорідного диференціального рівняння (2), тобто

$$r^2+a_1r+a_2\neq 0. \tag{28}$$

Тоді диференціальне рівняння (1) має частинний розв'язок вигляду

$$v(x)=\Phi_n(x)e^{rx},$$

де $\Phi_n(x)$ — багаточлен степеня $n$.

$$\Phi_n(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n \tag{29}$$

з невизначеними коефіцієнтами $c_0, c_1, ..., c_n$. Щоб визначити ці коефіцієнти, потрібно функцію (29) підставити в рівняння (1) і в утвореній тотожності прирівняти коефіцієнти при однакових степенях $x$. Унаслідок цього матимемо систему $n$ рівнянь, з якої однозначно визначають згадані коефіцієнти.

❑ **Приклад**

**2.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''-y=x^3e^{2x}. \tag{30}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$\lambda^2-1=0$$

має корені $\lambda_{1,2}=\pm 1$. Отже, число $r=2$ не є коренем характеристичного рівняння.

Частинний розв'язок диференціального рівняння (30) шукаємо у такому вигляді:

$$v(x)=\left(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3\right)e^{2x}. \tag{31}$$

Знайдемо похідні

$$v'(x)=\left(c_1+2c_2x+3c_3x^2\right)e^{2x}+2\left(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3\right)e^{2x};$$

$$v''(x)=(2c_2+6c_3x)e^{2x}+4\left(c_1+2c_2x+3c_3x^2\right)e^{2x}+4\left(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3\right)e^{2x}.$$



Підставляючи функцію $v(x)$ та її похідну $v''(x)$ у рівняння (30), матимемо таку тотожність:

$$2c_2+6c_3x+4\left(c_1+2c_2x+3c_3x^2\right)+4\left(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3\right)-\left(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3\right)=x^3.$$

Прирівнюючи в цій тотожності коефіцієнти при однакових степенях $x$, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{array}{ll} x^3: & \left\{\begin{array}{l} 3c_3=1; \\ 12c_3+3c_2=0; \\ 6c_3+8c_2+3c_1=0; \\ 2c_2+4c_1+3c_0=0. \end{array}\right. \\ x^2: & \\ x^1: & \\ x^0: & \end{array}$$

Звідси

$$c_3=\frac{1}{3};\quad c_2=-\frac{4}{3};\quad c_1=\frac{26}{9};\quad c_0=-\frac{80}{27}.$$

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд

$$v(x)=\left(-\frac{80}{27}+\frac{26}{9}x-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)e^{2x}.$$

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (30)

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\left(-\frac{80}{27}+\frac{26}{9}x-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)e^{2x}.$$

II. Число $r$ є коренем характеристичного рівняння. При цьому якщо $r$ є простим (першої кратності) коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок диференціального рівняння (1) слід шукати у вигляді

$$v(x)=x\left(c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n\right)e^{rx}. \tag{32}$$

Якщо $r$ є коренем характеристичного рівняння другої кратності, то розв'язок знаходитимемо у вигляді

$$v(x)=x^2\left(c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n\right)e^{rx}. \tag{33}$$

❑ **Приклади**

**3.** Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y''-y=xe^x.$$

Розв'язання. Тут число $r=1$ є коренем характеристичного рівняння кратності 1. Тому частинний розв'язок шукаємо в такому вигляді:

$$v(x)=x(c_0+c_1x)e^x=\left(c_0x+c_1x^2\right)e^x.$$

Знайдемо похідні

$$v'(x)=(c_0+2c_1x)e^x+\left(c_0x+c_1x^2\right)e^x,$$

$$v''(x)=2c_1e^x+2(c_0+2c_1x)e^x+\left(c_0x+c_1x^2\right)e^x.$$

Підставляючи функцію $v(x)$ та її похідну $v''(x)$ у рівняння, матимемо таку тотожність:

$$2c_1 + 2(c_0 + 2c_1x) + \left(c_0x + c_1x^2\right) - \left(c_0x + c_1x^2\right) \equiv x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях $x$, дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{matrix} x^1: \\ x^0: \end{matrix} \begin{cases} 4c_1 = 1; \\ c_1 + c_0 = 0. \end{cases}$$

Звідси $c_1 = \frac{1}{4}$; $c_0 = -\frac{1}{4}$.

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд

$$v(x) = \frac{1}{4}x(x-1)e^x.$$

**4.** Знайти частинний і загальний розв'язки диференціального рівняння

$$y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}. \tag{34}$$

Р о з в ' я з а н н я. У цьому випадку число $r = -2$ є коренем другої кратності характеристичного рівняння

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0.$$

Тому розв'язок шукаємо у вигляді

$$v(x) = x^2(c_0 + c_1x)e^{-2x} = \left(c_0x^2 + c_1x^3\right)e^{-2x}.$$

Знайдемо похідні

$$v'(x) = \left(2c_0x + 3c_1x^2\right)e^{-2x} - 2\left(c_0x^2 + c_1x^3\right)e^{-2x},$$

$$v''(x) = (2c_0 + 6c_1x)e^{-2x} - 4\left(2c_0x + 3c_1x^2\right)e^{-2x} + 4\left(c_0x^2 + c_1x^3\right)e^{-2x}.$$

Підставляючи $v(x), v'(x), v''(x)$ у рівняння (34), матимемо тотожність

$$(2c_0 + 6c_1x) - 4\left(2c_0x + 3c_1x^2\right) + 4\left(c_0x^2 + c_1x^3\right) +$$
$$+ 4\left(2c_0x + 3c_1x^2\right) - 8\left(c_0x^2 + c_1x^3\right) + 4\left(c_0x^2 + c_1x^3\right) \equiv x,$$

або

$$c_0 + 3c_1x = x,$$

звідси $c_0 = 0, c_1 = \frac{1}{3}$. Отже, шуканий розв'язок має вигляд

$$v(x) = \frac{1}{3}x^3e^{-2x}.$$

Загальним розв'язком рівняння (34) є функція

$$y = \left(c_1 + c_2x + \frac{1}{3}x^3\right)e^{-2x}.$$

В и п а д о к 2. Нехай права частина в рівнянні (1) має вигляд

$$Q(x) = e^{ax}\left(Q_1(x)\cos bx + Q_2(x)\sin bx\right), \tag{35}$$



де $Q_1(x), Q_2(x)$ — багаточлени, степінь яких дорівнює або менший за деяке число $m \geq 0$, причому хоча б один із них має степінь $m$:

$$Q_1(x) = b_0^{(1)} + b_1^{(1)}x + \ldots + b_m^{(1)}x^m;$$

$$Q_2(x) = b_0^{(2)} + b_1^{(2)}x + \ldots + b_m^{(2)}x^m,$$

а $a, b \neq 0$ — дійсні числа. Зауважимо, що $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$ можуть бути і сталими числами, а одне із них навіть нулем.

Тоді можуть бути такі випадки.

I. Число $a + bi, i = \sqrt{-1}$, не є коренем характеристичного рівняння. Розв'язок диференціального рівняння (1) слід шукати у вигляді правої частини

$$v(x) = e^{ax}\left(P_1(x)\cos bx + P_2(x)\sin bx\right), \tag{36}$$

де $P_1(x)$ і $P_2(x)$ — багаточлени степеня $m$ з невизначеними коефіцієнтами.

II. Число $a + bi$ є коренем характеристичного рівняння. Тоді розв'язок диференціального рівняння (1) має такий вигляд:

$$v(x) = xe^{ax}\left(P_1(x)\cos bx + P_2(x)\sin bx\right). \tag{37}$$

Зауважимо, що число $a + bi$ може бути тільки простим коренем характеристичного рівняння.

❑ **Приклади**

**5.** Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 9y = e^{3x}x\cos x. \tag{38}$$

Р о з в ' я з а н н я. Число $a + bi = 3 + i$ не є коренем характеристичного рівняння

$$\lambda^2 - 9 = 0.$$

Коренями цього рівняння є числа $\lambda_{1,2} = \pm 3$.

Частинний розв'язок диференціального рівняння (38) шукаємо у вигляді

$$v(x) = e^{3x}\left((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right),$$

де $A, B, C, D$ — невідомі коефіцієнти.

Знайдемо похідні

$$v'(x) = 3e^{3x}\left((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right) +$$
$$+ e^{3x}\left(A\cos x + C\sin x - (Ax + B)\sin x + (Cx + D)\cos x\right);$$

$$v''(x) = 9e^{3x}\left((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right) +$$
$$+ 6e^{3x}\left(A\cos x + C\sin x - (Ax + B)\sin x + (Cx + D)\cos x\right) +$$
$$+ e^{3x}\left(-2A\sin x + 2C\cos x - (Ax + B)\cos x - (Cx + D)\sin x\right).$$

Підставимо $v(x)$ і $v''(x)$ у рівняння (38). Матимемо таку тотожність:

$$9\left((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right) + 6\left(A\cos x + C\sin x - (Ax + B)\sin x + (Cx + D)\cos x\right) -$$
$$- 2A\sin x + 2C\cos x - (Ax + B)\cos x - (Cx + D)\sin x - 9(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x = x\cos x.$$

Прирівнюючи в цій тотожності члени при $\cos x$ і $\sin x$, матимемо такі рівності:

$$\begin{cases} 6A+6(Cx+D)+2C-(Ax+B)=x; \\ 6C-6(Ax+B)-2A-(Cx+D)=0. \end{cases} \quad (39)$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях $x$, матимемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6C-A=1; \\ 6A+6D+2C-B=0; \\ -6A-C=0; \\ 6C-6B-2A-D=0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо

$$A=-\frac{1}{37};\ \ C=\frac{6}{37};\ \ D=\frac{2}{1369};\ \ B=\frac{234}{1369}.$$

Тоді шуканий розв'язок дорівнює

$$v(x)=e^{3x}\left(\left(-\frac{1}{37}x+\frac{234}{1369}\right)\cos x+\left(\frac{6}{37}x+\frac{2}{1369}\right)\sin x\right). \quad (40)$$

**6.** Знайти частинний і загальний розв'язки диференціального рівняння

$$y''+y=\sin x. \quad (41)$$

*Розв'язання.* Число $a+bi=0+1i=i$ є коренем характеристичного рівняння

$$\lambda^2+1=0.$$

Тому розв'язок слід шукати у вигляді

$$v(x)=x(A\sin x+B\cos x).$$

Знаходимо похідні

$$v'(x)=A\sin x+B\cos x+x(A\cos x-B\sin x);$$

$$v''(x)=A\cos x-B\sin x+A\cos x-B\sin x+x(-A\sin x-B\cos x).$$

Підставивши $v(x)$ і $v''(x)$ у рівняння (41), матимемо таку тотожність:

$$2A\cos x-2B\sin x-x(A\sin x+B\cos x)+x(A\sin x+B\cos x)=\sin x.$$

Прирівнюючи члени при $\sin x$ і $\cos x$, дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2A=0; \\ -2B=1, \end{cases}$$

звідси $A=0, B=-\frac{1}{2}$. Отже, частинним розв'язком диференціального рівняння (41) є функція

$$v(x)=-\frac{1}{2}x\cos x.$$

Загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x.$$



## 5.15 ВІЛЬНІ ТА ВИМУШЕНІ ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ

Застосуємо теорію, наведену в пп. 5.13 і 5.14, до задач, пов'язаних із коливними явищами.

Нехай матеріальна точка $M$, маса якої $m$, рухається вздовж прямої $Ox$ у деякому середовищі. Припустимо, що на цю точку діють такі сили: сила $f_1=-bx$, що притягує точку до початку координат, сила опору середовища $f_2=-a\frac{dx}{dt}$, зовнішня сила $f_3=f(t)$, напрямок якої збігається з напрямком осі $Ox$.

Задача полягає в тому, щоб знайти закон $x=x(t)$, за яким рухається точка.

Застосуємо закон Ньютона. За цим законом дістанемо таке диференціальне рівняння другого порядку:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-a\frac{dx}{dt}-bx+f(t). \quad (1)$$

Запишемо його у вигляді

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2h\frac{dx}{dt}+k^2x=F(t), \quad (2)$$

де

$$2h=\frac{a}{m};\ \ k^2=\frac{b}{m};\ \ F(t)=\frac{f(t)}{m}. \quad (3)$$

Рівняння (2) — це неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

**Вільні гармонічні коливання.** Припустимо, що зовнішня сила $F(t)=0$. Тоді рівняння (2) вироджується в однорідне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2h\frac{dx}{dt}+k^2x=0. \quad (4)$$

Диференціальне рівняння (4) називають *рівнянням вільних коливань*.

Для знаходження загального розв'язку рівняння (4) складаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2+2h\lambda+k^2=0. \quad (5)$$

Коренями цього рівняння є числа

$$\lambda_{1,2}=-h\pm\sqrt{h^2-k^2}. \quad (6)$$

При цьому можуть бути такі два випадки.

Випадок 1. Точка $M$ рухається в середовищі без опору. Тоді число $h=0$ і корені (6) мають вигляд

$$\lambda_{1,2}=\pm ik,\ \ i=\sqrt{-1}.$$

У цьому випадку загальний розв'язок диференціального рівняння (4) запишемо так:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

або

$$x = A \sin(kt + \varphi), \tag{7}$$

де

$$C_1 = A \sin\varphi; \quad C_2 = A \cos\varphi. \tag{8}$$

Рух, що здійснюється за законом (7), називають *суто гармонічними коливаннями.* При цьому число $T = \frac{2\pi}{k}$ називають *періодом,* $k$ — *частотою,* $A$ — *амплітудою* і $\varphi$ — *початковою фазою коливання.* Частоту $k$ називають ще *частотою власних коливань.*

Щоб знайти амплітуду $A$ і початкову фазу $\varphi$, потрібно задати початкові умови

$$x\big|_{t=0} = x_0; \quad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = x_0'. \tag{9}$$

Підставляючи ці значення у функцію (7) та її похідну

$$x'(t) = Ak \cos(kt + \varphi), \tag{10}$$

матимемо для знаходження $A$ і $\varphi$ таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} A \sin\varphi = x_0; \\ Ak \cos\varphi = x_0. \end{cases} \tag{11}$$

Звідси

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0'^2}{k^2}}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{kx_0}{x_0'}. \tag{12}$$

Отже, у випадку суто гармонічних коливань з початковими умовами (9) закон руху задається формулою

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0'^2}{k^2}} \sin\left(kt + \operatorname{arctg}\frac{kx_0}{x_0'}\right). \tag{13}$$

Зауважимо, що до формули (13) приводить також задача про коливання математичного маятника.

Справді, нехай математичний маятник, довжина якого $l$ і вага $P = mg$, виведено з вертикального положення на деякий кут $\psi$ (рис. 145).

Припустимо, що коливання маятника відбувається в середовищі без опору. Маятник коливається під дією сили $\bar{f}$

$$f = mg \sin\psi. \tag{14}$$



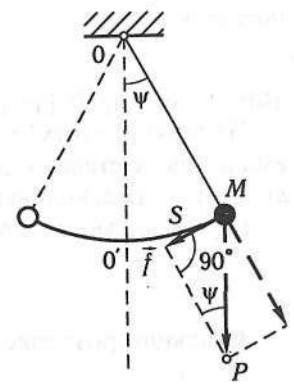


Рис. 145

Нехай за час $t$ точка $M$ пройшла по дузі кола з центром в точці $O$ і радіусом $l$ шлях $S$. Тоді

$$S = l\psi. \tag{15}$$

Згідно з формулами (14) і (15), диференціальне рівняння, що описує рух цього маятника, має вигляд

$$lm\frac{d^2\psi}{dt^2} + mg\sin\psi = 0. \tag{16}$$

Нехай величина кута $\psi$ досить мала. Тоді $\sin\psi \approx \psi$. Отже, рівняння (16) набирає вигляду

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + k^2\psi = 0, \tag{17}$$

де $k^2 = \frac{g}{l}$.

Таким чином, за зроблених припущень коливання маятника відбувається за законом

$$\psi = A \sin(kt + \varphi), \tag{18}$$

де

$$k = \sqrt{\frac{g}{l}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}};$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{x'^2 l}{g}}; \quad \psi = \operatorname{arctg}\frac{x_0}{x_0'}\sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{19}$$

В и п а д о к 2. Нехай рух точки $M$ відбувається в середовищі з опором, тобто $h \neq 0$. Тоді можуть бути такі три випадки.

I. Число $h^2 - k^2 > 0$. Загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$x = C_1 e^{\left(-h + \sqrt{h^2 - k^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-h - \sqrt{h^2 - k^2}\right)t}, \tag{20}$$

а рух у цьому випадку називають *аперіодичним.*

Із формули (20) випливає, що при $t \to +\infty$ будь-який розв'язок наближається до нульового розв'язку $x \equiv 0$.

II. Число $h^2 - k^2 < 0$. Тоді корені (6) є комплексними

$$\lambda_{1,2} = -h \pm i\sqrt{k^2 - h^2},$$

а загальний розв'язок рівняння (4) можна записати так:

$$x = Ae^{-ht} \sin\left(\sqrt{k^2 - h^2}\, t + \varphi\right). \tag{21}$$

У цьому випадку рух називають *затухаючим гармонічним коливанням із періодом*

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}},$$

частотою

$$\omega = \sqrt{k^2 - h^2},$$

амплітудою $Ae^{-ht}$ і початковою фазою $\varphi$.

На відміну від суто гармонічних коливань у затухаючих коливаннях амплітуда не стала, а дорівнює $Ae^{-ht}$, і при $t \to +\infty$ вона наближається до нуля, а отже, коливання затухають.

III. Число $h^2 - k^2 = 0$. При цьому характеристичні числа рівні:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -h.$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння (4) є функція

$$x = e^{-ht}(c_1 + c_2 t). \tag{22}$$

Рух, що відповідає розв'язку (22), називають, як і у випадку I, аперіодичним. Кожний розв'язок $x = x(t)$ рівняння (4) при $t \to +\infty$ прямує до нуля.

**Вимушені гармонічні коливання.** Нехай зовнішня сила $f(t) \neq 0$. Тоді рух точки описуватимемо неоднорідним диференціальним рівнянням (2). Зокрема, якщо рух відбувається в середовищі без опору, то рівняння змушених коливань набирає вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = F(t). \tag{23}$$

Загальний розв'язок цього рівняння можна знайти за методом варіації довільних сталих.

Проте на практиці зовнішня сила $F(t)$ часто є синусоїдальною

$$F(t) = H\sin\omega t, \tag{24}$$

де $H$ називають *амплітудою*, а $\omega$ — *частотою* зовнішньої сили.

Загальний розв'язок рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = H\sin\omega t \tag{25}$$

можна знайти без квадратур, додавши до загального розв'язку

$$A\sin(kt + \varphi)$$

однорідного рівняння частинний розв'язок $v = v(t)$ неоднорідного рівняння. Розв'язок $v = v(t)$ можна знайти за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього окремо розглядатимемо два випадки.

*Нерезонансний випадок.* Частота зовнішньої сили не дорівнює частоті власних коливань, тобто

$$\omega \neq k.$$



Тоді частинний розв'язок рівняння (25) шукатимемо у вигляді

$$v = B\sin\omega t + C\cos\omega t. \tag{26}$$

Звідси

$$v' = B\omega\cos\omega t - C\omega\sin\omega t;$$

$$v'' = -B\omega^2\sin\omega t - C\omega^2\cos\omega t. \tag{27}$$

Підставляючи $v$ і $v''$ у рівняння (25), дістанемо таку тотожність:

$$-B\omega^2\sin\omega t - C\omega^2\cos\omega t + k^2(B\sin\omega t + C\cos\omega t) = H\sin\omega t.$$

Прирівнюючи у цій тотожності коефіцієнти при $\sin\omega t$ і $\cos\omega t$, для знаходження невідомих чисел $B$ і $C$ матимемо таку систему рівнянь:

$$B\left(k^2 - \omega^2\right) = H; \quad C\left(k^2 - \omega^2\right) = 0.$$

Звідси

$$B = \frac{H}{k^2 - \omega^2}; \quad C = 0.$$

Тоді

$$v = \frac{H}{k^2 - \omega^2}\sin\omega t$$

і загальний розв'язок має вигляд

$$x = A\sin(kt + \varphi) + \frac{H}{k^2 - \omega^2}\sin\omega t. \tag{28}$$

*Резонансний випадок.* Нехай частота зовнішньої сили $\omega$ збігається з частотою власних коливань $k$, тобто

$$\omega = k.$$

У цьому випадку число $a + bi = i\omega = ik$ є коренем характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок рівняння (25) слід шукати у вигляді

$$v = t(B\sin\omega t + C\cos\omega t). \tag{29}$$

Тоді

$$v' = B\sin\omega t + C\cos\omega t + t\omega(B\cos\omega t - C\sin\omega t);$$

$$v'' = B\omega\cos\omega t - C\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t - C\omega\sin\omega t - t\omega^2(B\sin\omega t + C\cos\omega t).$$

Підставивши $v$ і $v''$ у рівняння (25), матимемо тотожність

$$2B\omega\cos\omega t - 2C\omega\sin\omega t - t\omega^2(B\sin\omega t + C\cos\omega t) +$$
$$+ t\omega^2(B\sin\omega t + C\cos\omega t) = H\sin\omega t.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin\omega t$ і $\cos\omega t$, дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} -2C\omega = H; \\ 2B\omega = 0. \end{cases}$$

Звідси $C = -\frac{H}{2\omega}$; $B = 0$. Отже,

$$v = -\frac{Ht}{2\omega}\cos\omega t$$

і загальний розв'язок рівняння (25) у резонансному випадку матиме вигляд

$$x = A\sin(kt+\varphi) - \frac{Ht}{2\omega}\cos\omega t. \tag{30}$$

Із формули (30) випливає, що у випадку $\omega = k$ матимемо коливання з необмеженою зростаючою амплітудою $\frac{Ht}{2\omega}$.

Цей випадок у фізиці називають *резонансом між власними коливаннями матеріальної точки і зовнішньою силою.*

Аналогічно можна побудувати загальні розв'язки рівняння (2), що описує рух точки в середовищі з опором.

## 5.16 ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

У підрозділах 5.13 і 5.14 викладено методи знаходження загального й частинного розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Проте ці методи можна застосовувати також і до лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків зі сталими коефіцієнтами.

Не розглядаючи докладно теорію, з'ясуємо (переважно на прикладах) застосування викладених методів до розв'язування рівнянь названого вигляду. Отже, нехай маємо диференціальне рівняння *n*-го порядку

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n+1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = Q(x), \tag{1}$$

де $a_i, i = 0, 1, \ldots, n,$ — сталі дійсні числа, а $Q(x)$ — неперервна функція на деякому проміжку $\langle a; b\rangle$.

**Однорідні рівняння.** Якщо функція $Q(x)$ у рівнянні (1) тотожно дорівнює нулю, $Q(x) \equiv 0$, то рівняння

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n+1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0 \tag{2}$$

називають *лінійним однорідним диференціальним рівнянням n*-го порядку.



Як і для однорідного диференціального рівняння другого порядку, шукатимемо розв'язок рівняння (2) за методом Ейлера, а саме у вигляді

$$y = e^{\lambda x}, \tag{3}$$

де $\lambda$ — невідоме дійсне чи комплексне число.

Підставляючи цю функцію у ліву частину рівняння (2), матимемо

$$\left(e^{\lambda x}\right)^{(n)} + a_1\left(e^{\lambda x}\right)^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\left(e^{\lambda x}\right)' + a_n e^{\lambda x} =$$
$$= e^{\lambda x}\left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n\right).$$

Звідси випливає, що функція (3) є розв'язком рівняння (2) тоді і тільки тоді, коли $\lambda$ є коренем алгебраїчного рівняння

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{4}$$

Алгебраїчне рівняння (4) називають *характеристичним рівнянням однорідного диференціального рівняння* (2).

Як відомо з алгебри, рівняння степеня $n$ має $n$ коренів. Позначимо ці корені через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Тоді можуть бути такі три випадки.

I. Усі корені $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — дійсні та різні числа. За формулою (3) диференціальне рівняння (2) має $n$ дійсних розв'язків вигляду

$$y_1 = e^{\lambda_1 x};\ y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots, y_n = e^{\lambda_n x}.$$

Можна довести (див. теорему 1, п. 5.13), що функція

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_ne^{\lambda_n},\tag{5}$$

де $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — довільні сталі дійсні числа, є загальним розв'язком диференціального рівняння (2).

❑ **Приклад**

**1.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''' - y' = 0. \tag{6}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^3 - \lambda = \lambda\left(\lambda^2 - 1\right) = 0, \tag{7}$$

коренями якого є числа

$$\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 1;\ \lambda_3 = -1.$$

Отже, всі корені характеристичного рівняння (7) є дійсними і різними. Тому загальним розв'язком диференціального рівняння (6) є функція

$$y = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x} + c_3e^{\lambda_3 x} = c_1 + c_2e^{x} + c_3e^{-x}. \tag{8}$$

II. Корені характеристичного рівняння (2) — різні числа, але серед них є комплексні корені. Нехай, наприклад, $\lambda = \lambda_k$ є комплексним коренем

$$\lambda_k = a_k + ib_k, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Тоді серед коренів $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ є корінь, комплексно спряжений з $\lambda_k$. Нехай таким коренем є

$$\lambda_{k+1} = a_k - ib_k.$$

Таким чином, розв'язками диференціального рівняння (2) є комплексні функції:

$$y_k = e^{(a_k+ib_k)x};\ y_{k+1} = e^{(a_k-ib_k)x}. \tag{9}$$

Візьмемо функцію

$$y_k = e^{(a_k+ib_k)}x.$$

Ця комплексна функція породжує два дійсні розв'язки

$$y_k^{(1)} = e^{a_k x}\cos b_k x,\ y_k^{(2)} = e^{a_k x}\sin b_k x. \tag{10}$$

Друга функція (9) нових дійсних розв'язків не породжує.

Отже, якщо диференціальне рівняння (2) має $2p\,(1 \le p < n)$ комплексних коренів, то цим кореням відповідає $2p$ дійсних розв'язків вигляду (10).

❑ **Приклад**

**2.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''' + y' = 0. \tag{11}$$

Р о з в ' я з а н н я. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^3 + \lambda = \lambda\left(\lambda^2 + 1\right) = 0, \tag{12}$$

коренями якого є числа

$$\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = i;\ \lambda_3 = -i.$$

Тому загальний розв'язок диференціального рівняння (11) запишемо у вигляді

$$y = c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x.$$

III. Серед коренів характеристичного рівняння є кратні (рівні) корені. Нехай, наприклад, корінь $\lambda = \lambda_r$ є коренем характеристичного рівняння кратності $m$. Тоді, якщо корінь $\lambda = \lambda_r$ дійсний, то йому відповідає $m$ частинних розв'язків диференціального рівняння (2) вигляду

$$y_1 = e^{\lambda_r x},\quad y_2 = xe^{\lambda_r x}, ..., y_m = x^{m-1}e^{\lambda_r x}. \tag{13}$$

Якщо $\lambda = \lambda_r$ комплексний корінь $\lambda_r = a_r + ib_r$, то йому відповідає $2m$ дійсних розв'язків рівняння (2) вигляду

$$y_1 = e^{a_r x}\cos b_r x;$$



$$y_2 = xe^{a_r x}\cos b_r x, ..., y_m = x^{m-1}e^{a_r x}\cos b_r x; \tag{14}$$

$$y_{m+1} = e^{a_r x}\sin b_r x;$$

$$y_{m+2} = xe^{a_r x}\sin b_r x, ..., y_{2m} = x^{m-1}e^{a_r x}\sin b_r x.$$

❑ **Приклади**

**3.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y^{\text{IV}} - y'' = 0. \tag{15}$$

Р о з в ' я з а н н я. Складаємо характеристичне рівняння,

$$\lambda^4 - \lambda^2 = \lambda^2\left(\lambda^2 - 1\right) = 0.$$

коренями якого є дійсні числа

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = -1.$$

Отже, число $0$ є коренем другої кратності $(m = 2)$.

Тоді загальним розв'язком диференціального рівняння (15) є функція

$$y = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2xe^{\lambda_2 x} + c_3e^{\lambda_3 x} + c_4e^{\lambda_4 x} = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4e^{-x},$$

де $c_1, c_2, c_3, c_4$ — довільні сталі числа.

**4.** Знайти частинний і загальний розв'язки диференціального рівняння

$$y^{\text{IV}} - 2y'' + y = 0. \tag{16}$$

Р о з в ' я з а н н я. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^2 + 1\right)^2 = 0.$$

Звідси

$$\lambda_1 = \lambda_2 = i,\ \lambda_3 = \lambda_4 = -i.$$

Корені комплексно спряжені й кратні, кратність яких $m = 2$.

Тоді частинними розв'язками рівняння (16) є функції

$$y_1 = \cos x;\ y_2 = x\cos x;\ y_3 = \sin x;\ y_4 = x\sin x.$$

Загальний розв'язок рівняння (16) запишемо у вигляді

$$y = (c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)\sin x.$$

**Неоднорідні рівняння.** Нехай у диференціальному рівнянні (1) функція $Q(x) \not\equiv 0$ на розглядуваному проміжку. Таке рівняння називають *неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Як і у випадку диференціального рівняння другого порядку, можна було б довести, що загальним розв'язком неоднорідного рівняння (1) є функція

$$y = u(x) + v(x), \tag{17}$$

де $u(x)$ — загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння (2), а $v(x)$ — частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1).

Побудову загального розв'язку однорідного рівняння (2) вже з'ясовано. Для знаходження частинного розв'язку $v(x)$ застосовують *метод варіації довільних сталих* (*метод Лагранжа*).

Нехай

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) \tag{18}$$

— загальний розв'язок однорідного рівняння (2). Тоді розв'язок неоднорідного рівняння (1) також шукають у вигляді (18), припускаючи, що величини $c_1,\ c_2, \ldots,\ c_n$ — функції від $x$, тобто

$$c_1 = c_1(x),\quad c_2 = c_2(x), \ldots, c_n = c_n(x). \tag{19}$$

Для невідомих функцій (19) побудуємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) + \cdots + c_n'(x) y_n(x) = 0; \\ c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) + \cdots + c_n'(x) y_n'(x) = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1'(x) y_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x) y_2^{(n-2)}(x) + \cdots + c_n'(x) y_n^{(n-2)}(x) = 0; \\ c_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x) y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = Q(x), \end{cases} \tag{20}$$

розв'язуючи яку, маємо

$$c_i' = \Psi_i(x).$$

Звідси

$$c_i(x) = \int \Psi_i(x)dx + c_i, i = 1, 2, \ldots, n, \tag{21}$$

де $c_i$ — стала інтегрування.

Підставляючи значення $c_i(x)$ у рівність (18), знаходимо загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (1).

❑ **Приклад**
**5.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y''' - y' = \frac{e^x}{1+e^x}, \tag{22}$$

який задовольняє початкові умови

$$y(0) = 1,\quad y'(0) = 0,\quad y''(0) = 0. \tag{23}$$

Р о з в ' я з а н н я. Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y''' - y' = 0$$

має вигляд

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}. \tag{24}$$

Шукатимемо загальний розв'язок неоднорідного рівняння (22) у вигляді (24), припускаючи, що $c_1,\ c_2,\ c_3$ є функціями від $x$.



Тоді система рівнянь (20) набирає вигляду

$$\begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x) e^x + c_3'(x) e^{-x} = 0; \\ c_1'(x) 0 + c_2'(x) e^x - c_3'(x) e^{-x} = 0; \\ c_1'(x) 0 + c_2'(x) e^x + c_3'(x) e^{-x} = \dfrac{e^x}{1+e^x}. \end{cases}$$

Звідси

$$c_2'(x) = \frac{1}{2\left(1+e^x\right)};$$

$$c_3'(x) = \frac{e^{2x}}{2\left(1+e^x\right)};$$

$$c_1'(x) = -\frac{e^x}{1+e^x}. \tag{25}$$

Інтегруючи диференціальні рівняння (25), маємо

$$c_1(x) = -\ln\left(1+e^x\right) + c_1;$$

$$c_2(x) = \frac{1}{2}\ln\left(1+e^x\right) - \frac{1}{2}x + c_2;$$

$$c_3(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}\ln\left(1+e^x\right) + c_3. \tag{26}$$

Підставляючи значення функцій (26) у розв'язок (24), дістанемо загальний розв'язок диференціального рівняння (22):

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - \ln\left(1+e^x\right) + \frac{e^x}{2}\ln\left(1+e^x\right) + \frac{xe^x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{e^{-x}}{2}\ln\left(1+e^x\right). \tag{27}$$

Скориставшись початковими умовами (23) для знаходження $c_1,\ c_2$ і $c_3$, матимемо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = \dfrac{1}{2} + \ln 2; \\ c_2 - c_3 = \dfrac{1}{4} - \ln 2; \\ c_2 + c_3 = \dfrac{1}{4}, \end{cases}$$

звідси

$$c_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2;\quad c_3 = \frac{1}{2}\ln 2;\quad c_1 = \frac{1}{4} + \ln 2.$$

Підставивши ці значення у загальний розв'язок (27), матимемо шуканий розв'язок

$$y = \frac{3}{4} + \ln 2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\right)e^x + \frac{1}{2}\ln 2 e^{-x} - \ln\left(1+e^x\right) + \frac{1}{4}e^x \ln\left(1+e^x\right) - \frac{1}{2}e^{-x}\ln\left(1+e^x\right).$$

Якщо права частина диференціального рівняння (1) має вигляд

$$Q(x) = e^{rx} P(x), \tag{28}$$

або

$$Q(x) = e^{rx} \left( P_1(x) \cos bx + P_2(x) \sin bx \right), \tag{29}$$

де $P(x), P_1(x), P_2(x)$ — багаточлени певного степеня, а $r, a, b$ — дійсні числа, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1) знаходять методом невизначених коефіцієнтів. Зокрема, якщо числа $r$ і $a+bi$ не є коренями характеристичного рівняння, то розв'язок $v(x)$ записують у вигляді правої частини. Якщо число $r$ (відповідно число $a+ib$) є коренем характеристичного рівняння (4) кратності $m$, то розв'язок $v(x)$ у випадку (28) слід шукати у вигляді

$$v(x) = e^{rx} x^m \Phi(x), \tag{30}$$

де $\Phi(x)$ — багаточлен того самого степеня, що й $P(x)$, і у випадку (29)

$$v(x) = e^{ax} x^m \left( \Phi_1(x) \cos bx + \Phi_2(x) \sin bx \right), \tag{31}$$

де $\Phi_1(x), \Phi_2(x)$ — багаточлени, степені яких збігаються з найбільшим степенем багаточленів $P_1(x)$ і $P_2(x)$.

❑ **Приклад**

**5.** Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' - 4y' = x^2. \tag{32}$$

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо спочатку загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y''' - 4y' = 0. \tag{33}$$

Для цього складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - 4\lambda = \lambda\left(\lambda^2 - 4\right) = 0, \tag{34}$$

коренями якого є

$$\lambda_1 = 0; \ \ \lambda_2 = 2; \ \ \lambda_3 = -2.$$

Отже, загальним розв'язком рівняння (33) є функція

$$u = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}. \tag{35}$$

Частинний розв'язок рівняння (32) шукатимемо методом невизначених коефіцієнтів. Легко бачити, що $r = 0$ є простим $(m = 1)$ коренем характеристичного рівняння (34). Тому розв'язок записуємо так:

$$v(x) = x\left(Ax^2 + Bx + C\right) = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Знайдемо похідні:

$$v'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C;$$
$$v''(x) = 6Ax + 2B;$$
$$v'''(x) = 6A.$$



Підставляючи функцію $v(x)$ і похідні $v'(x)$, $v''(x)$ у рівняння (32), дістанемо тотожність

$$6A - 12Ax^2 - 8Bx - 4C = x^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $x$, матимемо систему рівнянь

$$\begin{cases} -12A = 1; \\ 8B = 0; \\ 6A - 4C = 0, \end{cases}$$

звідси

$$A = -\frac{1}{12}; \ \ B = 0; \ \ C = -\frac{1}{8}.$$

Отже, частинним розв'язком диференціального рівняння (32) є функція

$$v(x) = -\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{8}x.$$

Додавши цей розв'язок до розв'язку (35), матимемо загальний розв'язок

$$y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x} - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{8}x.$$

# Список рекомендованої літератури


1. *Будак Б. М., Фомин С. Ф.* Кратные интегралы и ряды. — М.: Наука, 1965. — 214 с.
2. *Давидов О. М.* Курс математичного аналізу: В 3 ч. — К.: Вища шк., 1990—1992. — Ч. I—III.
3. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ: В 2 т. — М.: Высш. шк., 1970. — Т. 1—2.
4. *Шкіль М. І., Лейфура В. М., Самусенко П. Ф.* Диференціальні рівняння. — К.: Техніка, 2003. — 366 с.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. — М.: Наука, 1969. — Т. 1—3.

# Предметний покажчик

# Зміст

Навчальне видання

*Шкіль Микола Іванович*

# Математичний аналіз

У двох частинах

Частина 2

3-тє видання, перероблене і доповнене

*Видано за рахунок державних коштів.*
*Продаж заборонено*



Оправа і титул художника *І. Г. Хорошого*
Художній редактор *Г. С. Муратова*
Технічний редактор *А. І. Омоховська*
Коректори: *Л. М. Байбородіна, Н. Г. Потаніна, В. В. Биченок*
Комп'ютерна верстка *Н. П. Довлетукаєвої*

Підп. до друку 29.08.2005. Формат 60 × 84/16. Папір офс. № 1.
Гарнітура Times New Roman. Офс. друк. Ум. друк. арк. 29,76.
Обл.-вид. арк. 30,00. Тираж 5000 пр. Вид. № 10572. Зам. № 5–374

Видавництво «Вища школа», вул. Гоголівська, 7г, м. Київ, 01054

Свідоцтво про внесення до Держ. реєстру
від 04.02.2000 серія ДК № 268

Надруковано з плівок, виготовлених у видавництві «Вища школа»,
у ВАТ «Білоцерківська книжкова фабрика»,
вул. Л. Курбаса, 4, м. Біла Церква, 09117

Свідоцтво про внесення до Держ. реєстру
від 14.08.2001 серія ДК № 567

«ВИЩА ШКОЛА»