Б.Й. ПТАШНИК
В.С. ІЛЬКІВ
І.Я. КМІТЬ
В.М. ПОЛІЩУК

НЕЛОКАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

НАУКОВА ДУМКА

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ
МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ ІМ. Я.С. ПІДСТРИГАЧА

Б.Й. Пташник
В.С. Ільків
І.Я. Кміть
В.М. Поліщук

НЕЛОКАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

За загальною редакцією
д-ра фіз.-мат. наук Б.Й. Пташника

ПРОЕКТ
«НАУКОВА КНИГА»

КИЇВ НАУКОВА ДУМКА 2002

УДК 517.946+517.956+511.2

НЕЛОКАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Досліджено коректність крайових задач з нелокальними (у тому числі періодичними) умовами за виділеною змінною та певними умовами за іншими координатами для широких класів лінійних та квазілінійних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними (гіперболічних, параболічних, безтипних) скінченного порядку, а також лінійних рівнянь нескінченного порядку та диференціально-операторних рівнянь. Встановлено умови однозначної розв'язності задач. Побудовано формули для розв'язків у вигляді рядів за системами ортогональних функцій. Проведено аналіз оцінок знизу малих знаменників, який ґрунтується на сучасних методах метричної теорії чисел. Для квазілінійних гіперболічних рівнянь і систем першого порядку за допомогою методу характеристик виділено регулярні випадки задач, в яких відсутня проблема малих знаменників.

Для науковців, аспірантів і студентів старших курсів, які спеціалізуються в галузі диференціальних рівнянь, математичної фізики, метричної теорії чисел.

Затверджено до друку вченою радою
Інституту прикладних проблем механіки
і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
(протокол № 4 від 12.04.2001 р.)

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук *П.І. Каленюк*,
д-р фіз.-мат. наук *С.П. Лавренюк*

Редакція фізико-математичної та технічної літератури

Редактор *Т.С. Мельник*

П $\frac{2004030000 - 046}{2002}$

ISBN 966-00-0095-2

Зміст

Передмова 6

Основні позначення 9

Розділ І. **Допоміжні відомості** 11

§ 1. Функціональні простори 11

§ 2. Диференціальні рівняння 13

2.1. Крайові задачі (13). 2.2. Принципи нерухомих точок (16).

§ 3. Метрична теорія чисел 17

Розділ II. **Періодичні задачі для лінійних гіперболічних рівнянь і систем рівнянь** 21

§ 4. Рівняння зі сталими коефіцієнтами 21

4.1. Рівняння, однорідні за порядком диференціювання (21). 4.2. Рівняння з молодшими членами (28).

§ 5. Рівняння зі змінними коефіцієнтами 35

§ 6. Системи рівнянь із сталими коефіцієнтами 39

6.1. Системи рівнянь, однорідні за порядком диференціювання (39). 6.2. Системи рівнянь з молодшими членами (45).

Розділ III. **Задачі з нелокальними умовами для диференціальних рівнянь і систем рівнянь з частинними похідними** 49

§ 7. Гіперболічні рівняння 49

7.1. Рівняння з факторизованим оператором зі змінними за t коефіцієнтами (50). 7.2. Рівняння зі змінними за x коефіцієнтами (55). 7.3. Слабконелінійні гіперболічні рівняння (62). 7.4. Задача з інтегральними умовами для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами (74).

§ 8. Системи гіперболічних рівнянь 88

8.1. Лінійні системи зі сталими коефіцієнтами (88). 8.2. Системи лінійних рівнянь, збурені нелінійним інтегро-диференціальним оператором (95).

§ 9. Параболічні рівняння і системи 98

9.1. Параболічні за Шиловим рівняння зі сталими коефіцієнтами (98). 9.2. Параболічні за Петровським рівняння зі змінними за x коефіцієнтами (107). 9.3. Системи параболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами (113).

§ 10. Рівняння, не розв'язані відносно старшої похідної 119

10.1. Факторизований оператор зі сталими коефіцієнтами (119). 10.2. Рівняння зі сталими коефіцієнтами з еліптичним оператором при старшій похідній за часом (130). 10.3. Рівняння зі змінними за x коефіцієнтами (140).

§ 11. Безтипні рівняння зі сталими коефіцієнтами 148

11.1. Однорідні за порядком диференціювання рівняння (148). 11.2. Рівняння з молодшими членами (154). 11.3. Рівняння з правою частиною (158).

§ 12. Безтипні рівняння зі змінними за x коефіцієнтами . . . 168

12.1. Лінійні рівняння (169). 12.2. Слабконелінійне інтегро-диференціальне рівняння (175).

§ 13. Лінійні безтипні системи рівнянь із частинними похідними 180

13.1. Системи рівнянь із сталими коефіцієнтами (181). 13.2. Системи нормальних анізотропних рівнянь (193). 13.3. Системи рівнянь зі змінними за x коефіцієнтами (206).

§ 14. Нелокальні багатоточкові задачі для безтипних рівнянь 214

14.1. Розв'язність у просторах Соболєва (214). 14.2. Дослідження області існування розв'язку (219). 14.3. Рівняння з коефіцієнтами, що належать алгебричному многовиду (225).

Розділ IV. **Нелокальні задачі для рівнянь нескінченного порядку та диференціально-операторних рівнянь** 230

§ 15. Рівняння з псевдодиференціальними операторами 230

15.1. Випадок циліндричної області (231). 15.2. Випадок необмеженої області (243).

§ 16. Рівняння нескінченного порядку в декартовому добутку відрізка і тора 249

§ 17. Задача з формальними початковими умовами для рівняння із псевдодиференціальними коефіцієнтами 263

§ 18. Диференціальні рівняння з операторними коефіцієнтами, що мають спільне спектральне зображення 275

§ 19. Дослідження нелокальних задач методом мінімізації в соболєвських просторах 282

Розділ V. **Нелокальні задачі для гіперболічних систем рівнянь першого порядку** 295

§ 20. Коректна постановка задач із використанням методу характеристик 295

§ 21. Майже лінійні гіперболічні системи 304

21.1. Нелокальні умови за часовою змінною (304). 21.2. Нелокальні умови за часовою та просторовою змінними (318).

§ 22. Квазілінійні гіперболічні системи 332

22.1. Локальна та глобальна розв'язність у криволінійній напівсмузі (332). 22.2. Локальна розв'язність у криволінійному куті (342).

§ 23. Задача для квазілінійного рівняння з нелокальними умовами за часовою та просторовою змінними 346

Огляд літератури 362

Список літератури 382

Предметний покажчик 413

Передмова

Останнім часом дослідженню нелокальних крайових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними приділяється велика увага. Це зумовлено багатьма причинами: побудовою загальної теорії крайових задач, необхідністю використання нелокальних умов при описуванні всіх коректних задач для конкретного оператора, а також тим, що багато задач практики моделюється крайовими задачами для рівнянь із частинними похідними з нелокальними (в тому числі періодичними) умовами (теорія фізики плазми, вологопереносу, коливання різних систем, поширення електромагнітних хвиль у прямокутних хвилеводах, зворотні задачі для рівняння теплопровідності тощо).

За останні 40 років нелокальні задачі для рівнянь із частинними похідними вивчали в різних аспектах багато вчених (О.О. Дезін, А.М. Нахушев, В.М. Борок, М.Й. Юрчук, В.К. Романко, А.В. Біцадзе, О.А. Самарський, О.Л. Скубачевський, М.І. Матійчук та ін.), виділяючи переважно випадки коректно поставлених задач.

Однак задачі з нелокальними умовами взагалі є умовно коректними, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників. Саме таким задачам у монографії приділена головна увага. Одне з центральних місць тут займають оцінки знизу малих знаменників, які базуються на метричному підході: оцінки знаменників, що мають часто складну нелінійну структуру, встановлюються не для всіх, а для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, які складені з коефіцієнтів задачі чи параметрів області.

Монографія складається з п'яти розділів, які розбиті на 23 параграфи. Нумерація формул, теорем, лем у межах одного параграфа одинарна, а при посиланні на інші параграфи – подвійна, наприклад, теорема 3.7 – це теорема 7 з параграфа 3.

Перший розділ має допоміжний характер. У ньому наведені означення функціональних просторів, а також відомості з теорії звичайних диференціальних рівнянь, функціонального аналізу та метричної теорії діофантових наближень, які використовуються в книзі.

Другий розділ присвячений вивченню задач з періодичними умовами за часовою змінною для лінійних гіперболічних рівнянь і систем рівнянь довільного скінченного порядку зі сталими та змінними за часом коефіцієнтами.

У третьому розділі вивчаються задачі з нелокальними (двоточковими, багатоточковими та інтегральними) умовами для широких

класів рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними. Тут розглядаються лінійні та слабконелінійні гіперболічні рівняння і системи диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь, параболічні за Шиловим і за Петровським рівняння та системи рівнянь зі сталими і змінними коефіцієнтами, рівняння, не розв'язані відносно старшої похідної за часом, безтипні рівняння та системи рівнянь із сталими і змінними коефіцієнтами, рівняння зі сталими коефіцієнтами, що належать деякому алгебричному многовиду.

Четвертий розділ містить дослідження нелокальних крайових задач для рівнянь із псевдодиференціальними коефіцієнтами, рівнянь нескінченного порядку, диференціально-операторних рівнянь. У цьому розділі розглядається також задача з формальними початковими умовами, що узагальнюють нелокальні та деякі інші умови, та досліджується коректність нелокальної двоточкової задачі за допомогою методу мінімізації в соболєвських просторах.

У п'ятому розділі вивчаються методом характеристик нелокальні задачі для квазілінійних гіперболічних рівнянь і систем першого порядку з двома незалежними змінними. Розглядаються класичні та узагальнені розв'язки, досліджуються питання локальної та глобальної розв'язності. Метод характеристик дав можливість вказати умови, за яких проблема малих знаменників відсутня, тобто виділити регулярні випадки задач.

В кінці монографії наведено короткий огляд літературних джерел із розглядуваних питань, які, однак, не претендують на повноту. Тому автори приносять свої вибачення всім авторам, чиї праці, які стосуються розглядуваної тематики, не згадані в цій книзі.

Особливістю даної книги, яка відрізняє її від аналогічних видань, є те, що в ній не тільки аксіоматично накладаються умови на малі знаменники, які забезпечують існування розв'язку задачі, але й доводяться теореми метричного характеру про оцінки знизу малих знаменників, з яких випливає однозначна розв'язність задач для майже всіх векторів, компоненти яких виражаються через параметри області, коефіцієнти рівнянь і коефіцієнти граничних умов. Систематичному викладу вказаної концепції автори завдячують багаторічній науковій співпраці зі школою з теорії чисел, започаткованою В.Г. Спринджуком, яку тепер очолює В.І. Берник (м. Мінськ, Білорусь).

Основні результати, викладені в монографії, отримані авторами впродовж останніх 15–20 років. Вони систематично доповідались на міжнародних конференціях і семінарах. Частина з них входила в спецкурси, які читались у Львівському національному університеті ім. Івана Франка та Прикарпатському університеті ім. Василя Стефаника.

У розробці наукових питань книги та підготовці їх до друку брали участь П.І. Штабалюк (п. 8.4), Н.М. Задорожна (§ 10), Л.І. Комарницька (§ 11), Т.П. Гой (§ 13, п. 14.3), яким автори висловлюють щиру подяку.

Основні позначення

$\mathbb{C}$ – множина всіх комплексних чисел
$\mathbb{N}$ – множина всіх цілих додатних чисел
$\mathbb{Z}$ – множина всіх цілих чисел
$\mathbb{Z}_+$ – множина всіх цілих невід'ємних чисел
$\mathbb{Q}$ – множина всіх раціональних чисел
$\mathbb{R}$ – множина всіх дійсних чисел
$\mathbb{R}_+$ – множина всіх невід'ємних дійсних чисел
$\mathbb{R}^p$ – p-вимірний дійсний евклідів простір
$\mathbb{R}^p_+$ – множина точок $\mathbb{R}^p$ з невід'ємними координатами
$\mathbb{Z}^p$ – множина точок $\mathbb{R}^p$ з цілими координатами
$\mathbb{Z}^p_+$ – множина точок $\mathbb{R}^p$ з цілими невід'ємними координатами
$\mathbb{N}^p$ – множина точок $\mathbb{R}^p$ з цілими додатними координатами
$\{y \in Y : P(y)\}$ – підмножина елементів Y з властивістю $P(y)$
$[a,b]$ – сегмент $\{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$
(a,b) – інтервал $\{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$
$[a,b)$, $(a,b]$ – напівсегменти
$x = (x_1,\dots,x_p)$, $\widehat{x} = (x_0,x_1,\dots,x_p)$ – довільні точки з просторів $\mathbb{R}^p$ та $\mathbb{R}^{p+1}$ відповідно
$(t,x) = (t,x_1,\dots,x_p)$, де $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^p$

$$dx = dx_1\dots dx_p; \quad d\widehat{x} = dx_0dx_1\dots dx_p; \quad \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right)$$

$s = (s_1,\dots,s_p) \in \mathbb{Z}^p_+$; $\quad |s| = |s_1| + \dots + |s_p|$
$\widehat{s} = (s_0,s_1,\dots,s_p) \in \mathbb{Z}^{p+1}_+$; $\quad |\widehat{s}| = |s_0| + |s_1| + \dots + |s_p|$
$k = (k_1,\dots,k_p) \in \mathbb{Z}^p$; $\quad |k| = |k_1| + \dots + |k_p|$
$\widehat{k} = (k_0,k_1,\dots,k_p) \in \mathbb{Z}^{p+1}$; $\quad |\widehat{k}| = |k_0| + |k_1| + \dots + |k_p|$
$(k,x) = k_1x_1 + \dots + k_ps_p$; $\quad (\widehat{k},\widehat{x}) = k_0x_0 + k_1x_1 + \dots + k_ps_p$
$\|k\| = \sqrt{k_1^2 + \dots + k_p^2}$; $\quad \|\widehat{k}\| = \sqrt{k_0^2 + k_1^2 + \dots + k_p^2}$
$\omega = (\omega_1,\dots,\omega_p) \in \mathbb{R}^p_+ \setminus \{0\}$; $\quad \widehat{\omega} = (\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_p) \in \mathbb{R}^{p+1}_+ \setminus \{0\}$

$$\|k\|_\omega = \sqrt{(2\pi k_1/\omega_1)^2 + \dots + (2\pi k_p/\omega_p)^2}$$

$$\|\widehat{k}\|_{\widehat{\omega}} = \sqrt{(2\pi k_0/\omega_0)^2 + (2\pi k_1/\omega_1)^2 + \dots + (2\pi k_p/\omega_p)^2}$$

$\Pi^p = \{x \in \mathbb{R}^p_+ : 0 \leq x_r \leq \pi, \ r = 1,\dots,p\}$
$Q^p = [0,T] \times \Pi^p$
$B^p = [0,T] \times \mathbb{R}^p$
Ω^p_ω – p-вимірний тор, утворений шляхом ототожнення протилежних граней паралелепіпеда $\{x \in \mathbb{R}^p : 0 \leq x_r \leq \omega_r, \ r = 1,\dots,p\}$
$\Omega^p_{2\pi}$ – тор Ω^p_ω при $\omega_r = 2\pi$, $r = 1,\dots,p$

$\Omega_{\widehat{\omega}}^{p+1}$ – $(p+1)$-вимірний тор, одержаний при ототожненні протилежних граней паралелепіпеда $\{\widehat{x} \in \mathbb{R}^{p+1} :\ 0 \leq x_r \leq \omega_r,\ r = 0, 1, \ldots, p\}$
$D^p = [0, T] \times \Omega_{2\pi}^p$
$G \subset \mathbb{R}^p$ – обмежена однозв'язна область
$Q = (0, T) \times G$
$K_T = \{(t, \tau) \in \mathbb{R}_+^2 :\ 0 \leq t \leq T,\ 0 \leq \tau \leq T\}$
mes M, $|M|$ – міра множини M

δ_{jr} – символ Кронекера: $\delta_{jr} = \begin{cases} 1, & j = r, \\ 0, & j \neq r \end{cases}$

$\operatorname{sgn} z = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0, & z = 0, \quad z \in \mathbb{R} \\ -1, & z < 0, \end{cases}$

$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$; $\quad A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$
$[a]$ – ціла частина числа $a \in \mathbb{R}$
$:=$ – дорівнює за означенням

Розділ I

Допоміжні відомості

§ 1. Функціональні простори

Наведемо означення деяких функціональних просторів, що використовуються в книзі.

$L_{2,loc}(G)$ – множина вимірних в G функцій, модулі квадратів яких інтегровні в будь-якій внутрішній підобласті G' області G.

$H_{loc}^k(G)$ – множина функцій із $L_{2,loc}(G)$, всі узагальнені похідні яких до порядку k, $k \geq 1$, включно належать $L_{2,loc}(G)$.

$H^k(G)$ – підмножина $H_{loc}^k(G)$, елементи якої разом із своїми узагальненими похідними до порядку k включно належать $L_2(G)$.

$H_q(\Omega_{\widehat{\omega}}^{p+1})$, $q \in \mathbb{Z}$, – гільбертів простір комплекснозначних функцій $v(\widehat{x})$, періодичних за всіма змінними $x_0, x_1, \ldots, x_p$ з вектором періодів $\widehat{\omega}$:

$$v(\widehat{x}) = \sum_{|\widehat{k}| \geq 0} v_{\widehat{k}} \exp\left(i \sum_{r=0}^{p} \frac{2\pi}{\omega_r} k_r x_r\right),$$

зі скалярним добутком, що індукує норму

$$\|v\|_{H_q(\Omega_{\widehat{\omega}}^{p+1})}^2 = \omega_0 \omega_1 \cdots \omega_p \sum_{|\widehat{k}| \geq 0} [1 + \|\widehat{k}\|_{\widehat{\omega}}^2]^q |v_{\widehat{k}}|^2. \tag{1}$$

Якщо функції v не залежать від x_0, то відповідний гільбертів простір періодичних функцій $v(x_1, \ldots, x_p)$ з вектором періодів ω будемо позначати $H_q(\Omega_\omega^p)$; при цьому

$$\|v\|_{H_q(\Omega_\omega^p)}^2 = \omega_1 \cdots \omega_p \sum_{|k| \geq 0} [1 + \|k\|_\omega^2]^q |v_k|^2. \tag{2}$$

$H_q(\Omega_{2\pi}^p)$ – простір $H_q(\Omega_\omega^p)$ при $\omega_1 = \cdots = \omega_p = 2\pi$.

$\overline{H}_{\bar{q}}(\Omega_{\widehat{\omega}}^{p+1})$ $(\bar{q} = (q_1, \ldots, q_m),\ \bar{q} \in \mathbb{Z}^{m+1})$ – гільбертів простір вектор-функцій $y(\widehat{x}) = (y_1(\widehat{x}), \ldots, y_m(\widehat{x}))$ таких, що $y_j(\widehat{x}) \in H_{q_j}(\Omega_{\widehat{\omega}}^{p+1})$, $q_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \ldots, m$;

$$\|y\|^2_{\overline{H}_{\bar{q}}(\Omega_{\widehat{\omega}}^{p+1})} = \sum_{j=1}^{m} \|y_j\|^2_{H_{q_j}(\Omega_{\widehat{\omega}}^{p+1})}. \tag{3}$$

$\overline{H}_q(\Omega_{\widehat{\omega}}^{p+1})$ – простір $\overline{H}_{\bar{q}}(\Omega_{\widehat{\omega}}^{p+1})$ при $q_1 = \cdots = q_p = q$.

$\overline{H}_q(\Omega_\omega^p)$ – гільбертів простір вектор-функцій $y(x) = (y_1, \ldots, y_m)$, де $y_j \equiv y_j(x) \in H_q(\Omega_\omega^p)$, $j = 1, \ldots, m$; норма в просторі $\overline{H}_q(\Omega_\omega^p)$ визначається подібно до норми в $\overline{H}_q(\Omega_{\widehat{\omega}}^{p+1})$.

$H_q^n(D^p)$, $q \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, – гільбертів простір функцій $u(t,x)$ таких, що функція $\partial^r u(t,x)/\partial t^r$, $r = 0, 1, \ldots, n$, для кожного $t \in [0,T]$ належить простору $H_{q-r}(\Omega_{2\pi}^p)$ та є неперервною за t в нормі $H_{q-r}(\Omega_{2\pi}^p)$;

$$\|u\|^2_{H_q^n(D^p)} = \int_0^T \sum_{r=0}^{n} \left\| \frac{\partial^r u}{\partial t^r} \right\|^2_{H_{q-r}(\Omega_{2\pi}^p)} dt. \tag{4}$$

$\overline{H}_q^{\bar{n}}(D^p)$, $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_m)$, $q \in \mathbb{Z}$, – гільбертів простір вектор-функцій $u(t,x) = (u_1(t,x), \ldots, u_m(t,x))$, де $u_j(t,x) \in H_q^{n_j}(D^p)$, $j = 1, \ldots, m$;

$$\|u\|^2_{\overline{H}_q^{\bar{n}}(D^p)} = \sum_{j=1}^{m} \int_0^T \sum_{l=0}^{n_j} \left\| \frac{\partial^l u_j}{\partial t^l} \right\|^2_{H_{q-l}(\Omega_{2\pi}^p)} dt = \sum_{j=1}^{m} \|u_j\|^2_{H_q^{n_j}(D^p)}. \tag{5}$$

$C^r(P)$ – банахів простір функцій $v(x) \equiv v(x_1, \ldots, x_q)$, неперервних із усіма похідними до порядку r включно в компактній області $P \in \mathbb{R}^p$, з нормою

$$\|v\|_{C^r(P)} = \sum_{|s| \le r} \max_{x \in P} \left| \frac{\partial^{|s|} v(x)}{\partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_q^{s_q}} \right|. \tag{6}$$

$C^{(q,r)}(\overline{Q})$ – банахів простір функцій $u(t,x)$ з нормою

$$\|u\|_{C^{q,r}(\overline{Q})} = \sum_{\substack{|s| \le r \\ s_0 \le q}} \max_{(t,x) \in \overline{Q}} \left| \frac{\partial^{|\widehat{s}|} u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}} \right|. \tag{7}$$

Відповідні банахові простори вектор-функцій позначимо $\overline{C}^r(P)$, $\overline{C}^{(q,r)}(\overline{Q})$.

$C^n([0,T], H_q(\Omega_{2\pi}^p))$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $q \in \mathbb{Z}$, – банахів простір функцій $u(t,x)$ таких, що для кожного $t \in [0,T]$ функції $\partial^r u(t,x)/\partial t^r$, $r = 0, 1, \ldots, n$, належать простору $H_q(\Omega_{2\pi}^p)$ та є неперервними за t в нормі $H_q(\Omega_{2\pi}^p)$;

$$\|v\|_{C^n([0,T], H_q(\Omega_{2\pi}^p))} = \sum_{r=0}^{n} \max_{0 \le t \le T} \left\| \frac{\partial^r u}{\partial t^r} \right\|_{H_q(\Omega_{2\pi}^p)}. \tag{8}$$

$C^{j,\nu}$ – клас визначених в області G функцій, j-і похідні яких задовольняють в G умову Гельдера з показником ν, $0 < \nu < 1$.

$A^{j,\nu}$ – клас замкнених областей, для яких функції, що задають у локальних координатах рівняння межових поверхонь цих областей, належать класу $C^{j,\nu}$.

$C_{\mathcal{B}}^q(\mathbb{R}^p)$ – простір q раз неперервно диференційовних за всіма змінними функцій $v(x_1, \ldots, x_p)$, майже періодичних за Бором.

$C_{\mathcal{B}}^q(B^p)$ – простір q раз неперервно диференційовних за сукупністю змінних функцій $u(t,x)$, які за змінними $x_1, \ldots, x_p$ є майже періодичними за Бором.

Із теореми Соболєва про вкладення просторів [170] випливає, що

$$H_{n+1+[(p+1)/2]}(\Omega_{\widehat{\omega}}^{p+1}) \subset C^n(\Omega_{\widehat{\omega}}^{p+1}), \tag{9}$$

$$H^n_{m+1+[p/2]}(D^p) \subset C^{(n,m)}(D^p). \tag{10}$$

§ 2. Диференціальні рівняння

2.1. Крайові задачі

2.1.1. Задача Коші для нормальної системи рівнянь першого порядку. Розглянемо задачу

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Теорема 1 ([61, с.18]). *Нехай функція $f(x,y)$:*

а) є неперервною за змінними x, y в області $R = \{(x,y) : |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\}$, де a і b – відомі додатні константи (очевидно, що тоді існує константа $M > 0 : |f| \le M$ в R);

б) в області R задовольняє умову Ліпшиця за змінною y з константою L.

Тоді на інтервалі $I = \{|x - x_0| \le h\}$, де $h = \min\{a, b/M\}$, існує єдиний класичний розв'язок задачі (1), (2).

Зазначимо, що задача (1), (2) рівносильна інтегральному рівнянню

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi, \tag{3}$$

якщо функція $f(x, y)$ є неперервною в області R.

Розглянемо постановку задачі Коші в ширшому розумінні. Нехай $f(x, y)$ – дійсна (не обов'язково неперервна) функція, визначена в деякій області $G \subset \mathbb{R}^2$. Задача полягає в тому, щоб знайти дійсний інтервал I та абсолютно неперервну, визначену на I фукцію $\varphi(x)$, яка задовольняє рівняння (1) для всіх $x \in I$ (за винятком множини точок лебегової міри нуль) та умову (2), і $(x, \varphi(x)) \in G$, $x \in I$. Наступні теореми Каратеодорі дають умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі.

Теорема 2 ([61, с.194]). *Нехай в кожному прямокутнику $\overline{R} \subset G$,*

$$\overline{R} = \{a \le x \le b,\ |y - \theta| \le r\ (r > 0)\}$$

$f(x, y)$ є вимірною функцією x при фіксованому y і неперервною функцією y при кожному фіксованому x. Нехай, крім цього, існує така сумовна функція $M(x)$, задана на $[a, b]$, що $|f(x, y)| \le \le M(x)$. Тоді через кожну точку $(x_0, y_0) \in G$ проходить хоча б один розв'язок інтегрального рівняння (3), який і при $x > x_0$, і при $x < x_0$ підходить до межі G, або проходить від однієї межі до другої.

Теорема 3 ([61, с.198]). *Нехай виконуються умови теореми 2 і, крім цього, функція $f(x, y)$ задовольняє умову Ліпшиця в такій формі: для всіх точок (x, y) із деякого околу точки (x_0, y_0) існує така сумовна функція $N(x)$, що*

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, y)| \le N(x)|\bar{y} - y|.$$

Тоді в деякому околі точки x_0 існує єдиний розв'язок рівняння (3).

2.1.2. Двоточкова задача для рівнянь високих порядків. Розглянемо лінійну крайову задачу [175]

$$l(y) \equiv y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = f(x), \tag{4}$$

$$U_\nu(y) = 0, \qquad \nu = 1, \dots, n, \tag{5}$$

де функції $P_1(x), \dots, P_n(x)$, $f(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$, а

$$U_\nu(y) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha_j^\nu y^{(j)}(a) + \beta_j^\nu y^{(j)}(b)), \quad \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C}.$$

Означення 1. Функцією Гріна задачі (4), (5) називається функція $G(x, \xi)$, яка визначена в квадраті $K = \{a \le x,\ \xi \le b\}$ і задовольняє такі умови:

1) у квадраті K функція $G(x, \xi)$ є неперервною і має неперервні похідні за змінною x до порядку $(n-2)$ включно;

2) для довільного $\xi \in (a, b)$ функція $G(x, \xi)$ має неперервні похідні $(n-1)$-го та n-го порядків за змінною x в кожному з інтервалів $[a, \xi)$ і $(\xi, b]$, причому похідна порядку $(n-1)$ має при $x = \xi$ стрибок, що дорівнює одиниці:

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi + 0, \xi) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi - 0, \xi) = 1;$$

3) в кожному з інтервалів $[a, \xi)$ і $(\xi, b]$ функція $G(x, \xi)$ як функція змінної x є розв'язком для однорідного рівняння

$$l(y) = 0; \tag{4'}$$

4) $G(x, \xi)$ як функція змінної x задовольняє умови (5).

Позначимо через $y_1(x), \dots, y_n(x)$ фундаментальну систему розв'язків рівняння (4').

Теорема 4. *Якщо $\Delta \equiv \det \|U_j(y_r)\|_{j,r=1}^n \ne 0$, то існує єдина функція Гріна $G(x, \xi)$ задачі (4'), (5), за допомогою якої розв'язок задачі (4), (5) зображується формулою*

$$y(x) = \int\limits_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

У квадраті K (за винятком сторін $\xi = a$, $\xi = b$) функція $G(x, \xi)$ визначається формулою

$$G(x, \xi) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} g(x, \xi) & y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ U_1(g) & U_1(y_1) & \cdots & U_1(y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_n(g) & U_n(y_1) & \cdots & U_n(y_n) \end{vmatrix}, \tag{6}$$

$$g(x, \xi) = \frac{\operatorname{sgn}(x - \xi)}{2W(\xi)} \begin{vmatrix} y_1(\xi) & \cdots & y_n(\xi) \\ y_1'(\xi) & \cdots & y_n'(\xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)}(\xi) & \cdots & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ y_1(x) & \cdots & y_n(x) \end{vmatrix}, \tag{7}$$

де $W(\xi)$ – вронскіан системи функцій $y_1(\xi), \cdots, y_n(\xi)$.

2.1.3. Багатоточкова задача. Для рівняння (4) з неперервними на відрізку $[a,b]$ коефіцієнтами розглянемо задачу про знаходження розв'язку, що проходить через n заданих точок з координатами $(x_1,A_1),\dots,(x_n,A_n)$, тобто розв'язку, що задовольняє умови

$$y(x_i)=A_i,\quad i=1,\dots,n. \tag{8}$$

Нехай $L_j=\max\limits_{a\le x\le b}|P_j(x)|$, $j=1,\dots,n$, а h_0 – додатний корінь рівняння

$$L_n\frac{h^n}{n!}+L_{n-1}\frac{h^{n-1}}{n-1!}+\dots+L_1\frac{h}{1!}-1=0.$$

Теорема 5 (Валле-Пуссен, [238]). *Для довільних точок $(x_1,A_1),\ \dots,(x_n,A_n)$ таких, що $a\le x_1<x_2<\dots<x_n\le b$, $x_n-x_1=h\le h_0$, існує один і лише один розв'язок задачі (4), (8).*

2.2. Принципи нерухомих точок

2.2.1. Принцип Каччопполі–Банаха. Нехай Ω – замкнена множина у повному метричному просторі X з метрикою $\rho(x,y)$, а відображення P переводить Ω саму в себе.

Означення 2. Відображення P називається оператором стиску, якщо існує число $\alpha<1$ таке, що

$$\rho(P(x),P(x'))\le\alpha\rho(x,x') \tag{9}$$

для всіх $x,\ x'\in\Omega$.

Теорема 6 ([99, с.605]). *Якщо P є оператором стиску, то в Ω існує єдиний розв'язок x^* рівняння $x=P(x)$. При цьому x^* можна отримати як границю послідовності $\{x_n\}$, де*

$$x_{n+1}=P(x_n),\quad n=0,1,2,\dots,$$

а x_0 – довільний елемент із Ω. Швидкість збіжності послідовності $\{x_n\}$ до розв'язку x^* визначається нерівністю

$$\rho(x_n,x^*)\le\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0).$$

Поряд з простором X розглянемо ще один метричний простір Y та замкнену підмножину $Y_0\subset Y$. Припустимо, що кожному $y\in Y_0$ відповідає оператор P_y, що відображає $\Omega\subset X$ саму в себе.

Теорема 7 ([99, с.608]). *Якщо при кожному $y\in Y_0$ відображення P_y задовольняє умову (9) з α, що не залежить від y, і якщо в точці $y_0\in Y_0$ відображення P_y є неперервним за y, то при $y=y_0$ розв'язок рівняння $x=P_y(x)$ неперервно залежить від y.*

2.2.2. Принцип Шаудера. Нехай X – повний метричний простір.

Теорема 8 ([99, с.620]). *Неперервне відображення P, що переводить замкнену випуклу множину $\Omega\subset X$ в компактну множину $\Delta\subset\Omega$, має нерухому точку.*

§ 3. Метрична теорія чисел

Наведемо ряд результатів метричної теорії діофантових наближень, які використовуються при дослідженні оцінок малих знаменників, що виникають у розглядуваних задачах.

Лема 1 (Бореля–Кантеллі, [245]). *Нехай A_q, $q=1,2,\dots$, – послідовність вимірних множин із $\mathbb{R}^n$, причому*

$$\sum_{q=1}^{\infty}\operatorname{mes}A_q<\infty.$$

Тоді міра Лебега множини точок із $\mathbb{R}^n$, що потрапляють у нескінченну кількість множин A_q, дорівнює нулю.

Теорема 1 ([266]). *Нехай $f(x)$ – додатна неперервна функція додатного аргумента x, причому $xf(x)$ – функція незростаюча. Тоді нерівність*

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{f(q)}{q} \tag{1}$$

має для майже всіх α нескінченну множину розв'язків у цілих числах p і q, $q>0$, якщо при деякому $c>0$ інтеграл

$$\int_c^{\infty}f(x)dx \tag{2}$$

розбігається; навпаки, нерівність (1) має для майже всіх α не більше, ніж скінченну кількість розв'язків у цілих числах p і q, $q>0$, якщо інтеграл (2) збігається.

Теорема 2 ([46]). *Нехай m, n – додатні цілі числа, $f(x)$ – додатна неперервна функція, визначена при $x>c$, $x^{n-1}f^m(x)$ – монотонно спадна функція , причому*

$$x^nf^m(x)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Тоді для майже всіх точок $\omega=(\omega_{jr})$, $j=1,\dots,m$, $r=1,\dots,n$, mn-вимірного евклідового простору система нерівностей

$$|\omega_{j1}a_1+\dots+\omega_{jn}a_n-b_j|<f(a),\quad a=\max_{1\le r\le n}|a_r|,\quad j=1,\dots,m, \tag{3}$$

має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$, якщо інтеграл

$$\int\limits_c^\infty x^{n-1} f^m(x)dx \qquad (4)$$

є розбіжним; навпаки, система нерівностей (3) має для майже всіх ω не більше, ніж скінченну кількість розв'язків у цілих числах $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$, якщо інтеграл (4) збігається.

Нехай $\mathcal{B}_{m,d}$ – клас многочленів степеня $d \geq 2$ від $m \geq 1$ змінних з дійсними коефіцієнтами без вільного члена:

$$\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\substack{r_1+\ldots+r_m \leq d, \\ (r_1,\ldots,r_m)\neq 0}} a_{r_1,\ldots,r_m} x_1^{r_1} \cdots x_m^{r_m}.$$

На множині $\mathcal{B}_{m,d}$ вводиться міра, яка визначається як міра Лебега в просторі $\mathbb{R}^\gamma$ коефіцієнтів $a_{r_1,\ldots,r_m}$ цих многочленів, де γ – число розв'язків у цілих числах $r_1 \geq 0, \ldots, r_m \geq 0$ нерівності $r_1 + \ldots + r_m \leq d$, $(r_1, \ldots, r_m) \neq (0)$.

Теорема 3 ([245]). *Нехай $m \geq 1$, $d \geq 2$ – натуральні числа, $\lambda(q_1, \ldots, q_m)$ – невід'ємна дійсна функція, визначена на цілих точках $\mathbb{R}^m$, яка набуває значень, що не перевищують 1. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега) многочленів $\mathcal{P} \in \mathcal{B}_{m,d}$ існує нескінченна кількість розв'язків нерівності*

$$\{\mathcal{P}(q_1, \ldots, q_m)\} \leq \lambda(q_1, \ldots, q_m)$$

в цілих числах $q_1, \ldots, q_m$, якщо ряд $\sum\limits_{q_1,\ldots,q_m} \lambda(q_1, \ldots, q_m)$ є розбіжним, і лише скінченна кількість розв'язків, якщо цей ряд збігається ($\{a\}$ – дробова частина числа a: $\{a\} = a - [a]$).

Теорема 4 ([15]). *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, $a_0 \neq 0$, нерівності*

$$\left|\sum_{r=0}^{n-1} a_r (i\lambda_q(k)\|k\|)^r\right| \geq M|k|^{-(p+\varepsilon)}, \quad q = 1, \ldots, n, \qquad (5)$$

де величини $\lambda_q(k) \in \mathbb{R}$, $q = 1, \ldots, n$, обмежені зверху рівномірно за $k \in \mathbb{Z}^p$, виконуються для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K(a)$.

Доведення. Позначимо через A множину тих векторів a із деякого n-вимірного паралелепіпеда $P_n = [\alpha_0, \beta_0] \times P_{n-1}$, для яких нерівність

$$\left|\sum_{r=0}^{n-1} a_r (i\lambda_q(k)\|k\|)^r\right| < |k|^{-(p+\varepsilon)}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \qquad (6)$$

має нескінченну кількість розв'язків $k \in \mathbb{Z}^p$.

Зафіксуємо вектор k і коефіцієнти $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Тоді для множини $A_k(a_1, \ldots, a_{n-1})$ тих $a_0 \in [\alpha_0, \beta_0]$, для яких справджується нерівність (6), виконується оцінка

$$\operatorname{mes} A_k(a_1, \ldots, a_{n-1}) < 2|k|^{-(p+\epsilon)}. \qquad (7)$$

Інтегруючи (7) по паралелепіпеду P_{n-1}, отримуємо, що для міри множини $A(k)$ тих векторів $a \in P_n$, для яких виконується нерівність (6) при фіксованому k, справджується оцінка

$$\operatorname{mes} A(k) < 2C|k|^{-(p+\epsilon)},$$

де C – об'єм паралелепіпеда P_{n-1}. Оскільки ряд $\sum\limits_{|k|>0} 2C|k|^{-(p+\epsilon)}$ є збіжним, то з леми 1 випливає, що $\operatorname{mes} A = 0$, тобто для майже всіх $a \in P_n$ нерівність (5) виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів k. Доведення теореми випливає з того, що простір $\mathbb{R}^n$ можна покрити зліченним числом паралелепіпедів P_n. ∎

Розглянемо поліном

$$\mathcal{P}(\lambda) \equiv \sum_{|\widehat{s}|=n} A_{\widehat{s}} \lambda^{s_0} \prod_{r=1}^{p} \left(\frac{k_r}{\|k\|}\right)^{s_r}$$

з дійсними сталими коефіцієнтами $A_{\widehat{s}}$, $A_{n,0,\ldots,0} \neq 0$, і припустимо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{0\}$ він має лише дійсні і різні корені $\lambda_l(k)$, $l = 1, \ldots, n$. Легко бачити, що $\lambda_l(k)$, $l = 1, \ldots, n$, є обмеженими зверху рівномірно за $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{0\}$. Позначимо через $y = (y_1, \ldots, y_\gamma)$ вектор, складений з усіх коефіцієнтів $A_{\widehat{s}}$ полінома $\mathcal{P}(\lambda)$, де γ – кількість розв'язків $s = (s_0, s_1 \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^{p+1}$ рівняння $|\widehat{s}| = n$.

Теорема 5 ([15]). *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\gamma$) векторів y при $|k| > K(y)$ виконуються нерівності*

$$\prod_{\substack{l=1, \\ \lambda\neq q}}^{n} |\lambda_q(k) - \lambda_l(k)| \geq C|k|^{-p(n-1)/2-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1; \quad q = 1, \ldots, n,$$

де C – додатна стала, що не залежить від k.

Лема 2 ([205]). *Нехай $\Phi(k) \equiv \Phi(k_1, \ldots, k_p)$ – обмежена послідовність дійсних чисел. Тоді нерівність*

$$\left|\Phi(k) - \frac{la}{\|k\|^\sigma}\right| < \frac{1}{|k|^{p+\sigma+\varepsilon}}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \ \sigma > 0,$$

для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $a > 0$ має не більше, ніж скінченне число розв'язків у цілих числах $k_1, \ldots, k_p, l$, $l \neq 0$, $|k| \neq 0$.

Лема 3 ([201]). *Нехай $\Phi(k) \equiv \Phi(k_1, \ldots, k_p)$ - обмежена послідовність дійсних чисел. Тоді нерівність*

$$\left|\Phi(k) - \frac{k_0}{\omega_0 \|k\|_\omega}\right| < \frac{1}{|k|^{p+1+\varepsilon}}, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{p+1}$) векторів $\widehat{\omega} = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_p)$ має не більше, ніж скінченне число розв'язків у цілих числах $k_0, k_1, \ldots, k_p$, $k_0 \neq 0$, $|k| \neq 0$.

Лема 4 ([15]). *Нехай функція $f(x)$ є $(n+1)$ раз неперервно диференційовна на відрізку $[a,b]$ і нехай для всіх $x \in [a,b]$ виконується нерівність*

$$|f^{(n)}(x)| \geq C_1 > 0.$$

Тоді міра Лебега множини тих $x \in [a,b]$, для яких

$$|f(x)| < \varepsilon < C_1,$$

не перевищує $C_2 \sqrt[n]{\varepsilon / C_1}$, де $C_2 = C_2(n)$.

Лема 5 ([87]). *Нехай $f(y) \equiv f(y_1, \ldots, y_l)$ - дійсна функція, неперервна і досить гладка в обмеженій однозв'язній області $G \subset \subset \mathbb{R}^l$, і нехай похідні*

$$\frac{\partial^{|s|} f(y)}{\partial y_1^{s_1} \ldots \partial y_l^{s_l}}, \quad |s| \leq q,$$

як функції однієї змінної y_m, $1 \leq m \leq l$ (при решті фіксованих змінних), мають в області G скінченну кількість нулів. Якщо в G

$$\left|\frac{\partial^q f(y)}{\partial y_1^{q_1} \ldots \partial y_l^{q_l}}\right| \geq \delta > 0, \quad q = \sum_{j=1}^{l} q_j, \quad q \geq 1, \quad q_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \ldots, l,$$

то міра Лебега в $\mathbb{R}^l$ множини тих $y \in G$, для яких $|f(y)| < \varepsilon$, не перевищує величину $C_q(G) \sqrt[q]{\varepsilon / \delta}$.

Розділ II

Періодичні задачі для лінійних гіперболічних рівнянь і систем рівнянь

Досліджується коректна розв'язність задач з періодичними крайовими умовами для лінійних рівнянь із сталими та змінними коефіцієнтами, а також для систем рівнянь із сталими коефіцієнтами, гіперболічних за Петровським та гіперболічних за Гордінгом.

Встановлено умови класичної коректності розглядуваних задач для майже всіх векторів, складених із коефіцієнтів рівнянь та параметрів областей.

§ 4. Рівняння зі сталими коефіцієнтами

Розглядаються строго та нестрого гіперболічні рівняння, однорідні за порядком диференціювання та з молодшими членами, випадки однієї та багатьох просторових змінних.

4.1. Рівняння, однорідні за порядком диференціювання

4.1.1. Випадок однієї просторової змінної. В області Q^1 розглянемо задачу [202]

$$L[u] \equiv \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{\partial^{2n} u(t,x)}{\partial t^{2(n-j)} \partial x^{2j}} = f(t,x), \tag{1}$$

$$M_r[u] \equiv \left.\frac{\partial^r u}{\partial t^r}\right|_{t=0} - \left.\frac{\partial^r u}{\partial t^r}\right|_{t=T} = 0, \quad r = 0, 1, \ldots, 2n-1, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^{2l}u}{\partial x^{2l}}\Big|_{x=0} = \frac{\partial^{2l}u}{\partial x^{2l}}\Big|_{x=\pi} = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{3}$$

де $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, функція $f(t, x)$ неперервна за аргументом t, достатньо гладка за змінною x і при $x = 0$ та $x = \pi$ перетворюється в нуль разом з усіма похідними парного порядку. Припустимо, що оператор L строго гіперболічний, тобто що всі корені λ рівняння

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^{2(n-j)} = 0 \tag{4}$$

є дійсними та різними і $a_0 \neq 0$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $a_0 = 1$.

Розв'язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx, \tag{5}$$

кожен член якого задовольняє умови (3). При цьому кожна з функцій $u_k(t)$ буде розв'язком задачі

$$L_k[u_k] \equiv \sum_{j=0}^{n} a_j (ik)^{2j} \frac{d^{2(n-j)}u_k(t)}{dt^{2(n-j)}} = f_k(t), \tag{6}$$

$$\frac{d^r u_k(t)}{dt^r}\Big|_{t=0} = \frac{d^r u_k(t)}{dt^r}\Big|_{t=T}, \quad r = 0, 1, \ldots, 2n-1, \tag{7}$$

де $f_k(t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t, x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, \ldots$

Однорідне рівняння

$$L_k[u_k] \equiv \sum_{j=0}^{n} a_j (ik)^{2j} \frac{d^{2(n-j)}u_k(t)}{dt^{2(n-j)}} = 0 \tag{6'}$$

має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$u_{kj}(t) = \exp ik\lambda_j t, \quad u_{k,n+j}(t) = \exp(-ik\lambda_j t), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

де λ_j, $j = 1, \ldots, n$, – додатні корені рівняння (4). Тому розв'язок задачі (6′), (7) зображується формулою

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^{n} [C_{kj} \exp ik\lambda_j t + C_{k,n+j} \exp(-ik\lambda_j t)], \tag{9}$$

де коефіцієнти C_{kj}, $j = 1, \ldots, 2n$, визначаються з системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} [C_{kj}(1 - \exp ik\lambda_j T) + (-1)^r C_{k,n+j}(1 - \exp(-ik\lambda_j T))] \times$$
$$\times (ik\lambda_j)^r = 0, \quad r = 0, \ldots, 2n-1, \tag{10}$$

детермінант $\Delta(k)$ якої має вигляд

$$\Delta(k) = (-1)^{n(n+1)/2} 2^n (ik)^{n(2n-1)} \prod_{1 \le l < r \le n} (\lambda_r^2 - \lambda_l^2)^2 \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \exp(-ik\lambda_j T)(1 - \exp ik\lambda_j T)^2. \tag{11}$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі (1)–(3) з простору $C^{2n}(Q^1)$ необхідно і достатньо, щоб усі числа $\lambda_j T/2\pi$, $j = 1, \ldots, n$, були ірраціональними.*

Доведення. Необхідність. Якщо хоча б одне число $\lambda_\nu T/2\pi$, $1 \le \nu \le n$, є раціональним, тобто $\lambda_\nu T/2\pi = p/q$, то існують нетривіальні розв'язки задачі з умовами (2), (3) для однорідного рівняння

$$L[u] \equiv \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{\partial^{2n} u(t, x)}{\partial t^{2(n-j)} \partial x^{2j}} = 0, \tag{1'}$$

які зображуються у вигляді

$$u(t, x) = \exp(i\, 2\pi mpt/T) \sin mqx, \quad m \in \mathbb{Z}\backslash 0.$$

Достатність. Припустимо, що існують два розв'язки $u_1(t, x)$ та $u_2(t, x)$ задачі (1)–(3) з простору $C^{2n}(Q^1)$. Тоді функція $v(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x)$ буде розв'язком однорідної задачі (1′), (2), (3). Продовжимо функцію $v(t, x)$ непарним періодичним способом в область B^1. Тоді $v \in C^{2n}(B^1)$ і разом з функціями $L[v]$ та $M_r[v]$, $r = 0, 1, \ldots, 2n-1$, розвивається в ряди Фур'є вигляду (5). При цьому ряди для функцій $L[v]$ та $M_r[v]$, $r = 0, 1, \ldots, 2n-1$, тотожні з рядами, одержаними внаслідок формального застосування операторів L та M_r, $r = 0, 1, \ldots, 2n-1$, до ряду для функції $v(t, x)$. З рівностей Парсеваля для $L[v]$ і $M_r[v]$, випливає, що кожний із коефіцієнтів $v_k(t)$ функції $v(t, x)$ є розв'язком задачі (6′), (7). Якщо всі числа $\lambda_j T/2\pi$, $j = 1, \ldots, n$, ірраціональні, то визначник $\Delta(k)$ системи (10) для всіх $k \in \mathbb{N}$ не дорівнює нулю. Тоді задача (6′), (7) має лише тривіальні розв'язки для всіх $k \in \mathbb{N}$, тобто $v_k(t) \equiv 0$, $k \in \mathbb{N}$. З рівності Парсеваля для $v(t, x)$ випливає, що $v(t, x) \equiv 0$, тобто $u_1(t, x) \equiv u_2(t, x)$. Теорему доведено. ∎

При дослідженні існування розв'язку задачі (1)–(3) будемо вважати, що всі числа $\lambda_j T/2\pi$, $j = 1, \ldots, n$, є ірраціональними. Тоді для кожного натурального k існує єдина функція Гріна $G_k(t, \tau)$ задачі (6′), (7), за допомогою якої розв'язок неоднорідної задачі (6), (7) записується у вигляді

$$u_k(t) = \int\limits_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau. \tag{12}$$

При цьому розв'язок задачі (1)–(3) формально зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau \sin kx. \tag{13}$$

У квадраті K_T, крім сторін $\tau = 0$ і $\tau = T$, функція $G_k(t,\tau)$ визначається формулою

$$G_k(t,\tau) = g_k(t,\tau) + \sum_{r=0}^{2n-1} \sum_{l=1}^{n} \frac{(-1)^r V_{r+1}[g_k(t,\tau)]}{2(ik)^r \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n} (\lambda_j^2 - \lambda_l^2)} \times$$

$$\times \frac{S^{(+l)}_{2n-1-r} \exp(ik\lambda_l t) + S^{(-l)}_{2n-1-r} \exp\big(ik\lambda_l (T-t)\big)}{\lambda_l (1 - \exp ik\lambda_l T)}, \tag{14}$$

де

$$g_k(t,\tau) = \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{4(ik)^{2n-1}} \sum_{r=1}^{n} \frac{\exp\big(-ik\lambda_r(t-\tau)\big) - \exp\big(ik\lambda_r(t-\tau)\big)}{\lambda_r \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{n} (\lambda_r^2 - \lambda_j^2)}, \tag{15}$$

$$V_{r+1}[g_k(t,\tau)] = \frac{1}{4}(ik)^{r+1-2n} \sum_{l=1}^{n} \lambda_l^{r+1} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n} (\lambda_l^2 - \lambda_j^2)^{-1} \times$$

$$\times \big\{ \exp(-ik\lambda_l \tau) + \exp\big(ik\lambda_l(T-\tau)\big) +$$
$$+ (-1)^{r+1} \big[\exp(ik\lambda_l\tau) + \exp\big(-ik\lambda_l(T-\tau)\big)\big] \big\}, \tag{16}$$

$S_m^{(+l)}$ та $S_m^{(-l)}$ – суми всіх можливих добутків чисел $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{l-1}, \lambda_{l+1}, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, \dots, -\lambda_n\}$ та $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, \dots, -\lambda_{l-1}, -\lambda_{l+1}, \dots, -\lambda_n\}$ відповідно, взятих у кількості m. На сторонах $\tau = 0$ ($\tau = T$) квадрата K_T функцію $G_k(t,\tau)$ доозначуємо за неперервністю справа (зліва).

На основі формул (12), (14)–(16) одержуємо оцінки

$$|u_k^{(\varkappa)}(t)| \le C k^{\varkappa+1-2n} \max_{0\le t\le T} |f_k(t)| \Big(1 + \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{|1 - \exp(ik\lambda_l T)|}\Big), \tag{17}$$

де $\varkappa = 0, 1, \dots, n$, C – додатна константа, яка не залежить від k. Зауважимо, що

$$|1 - \exp(ik\lambda_l T)| > k \Big| \frac{\lambda_l T}{2\pi} - \frac{m_l}{k} \Big|, \quad l = 1, \dots, n, \tag{18}$$

де $m_l \in \mathbb{Z}_+$ таке, що $|k\lambda_l T/2\pi - m_l| < 1/2$. Тому питання про збіжність ряду (13) пов'язане з наближенням ірраціональних чисел $\lambda_l T/2\pi$, $l = 1, \dots, n$, раціональними.

Зауваження 1. Якщо функція $f(t,x)$ стосовно змінної x є тригонометричним многочленом вигляду $f(t,x) = \sum\limits_{k=-N}^{N} f_k(t) \sin kx$, то в припущенні, що всі числа $\lambda_j T/2\pi$, $j = 1, \dots, n$, ірраціональні, задача (1)–(3) завжди має розв'язок.

У загальному випадку справедлива така теорема.

Теорема 2. *Нехай усі числа $\lambda_l T/2\pi$, $j = 1, \dots, n$, є ірраціональними. Якщо для деякої сталої $M > 0$ і деякого $\gamma \in \mathbb{N}$ нерівності*

$$\Big| \frac{\lambda_l T}{2\pi} - \frac{m}{k} \Big| \ge M k^{-\gamma-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad l = 1, \dots, n, \tag{19}$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) пар натуральних чисел k і m, а $f \in C^{(0,\gamma+2)}(Q^1)$ і разом з парними похідними за змінною x до порядку $2\big[(\gamma+1)/2\big]$ включно перетворюється в нуль при $x = 0$ та $x = \pi$, то існує розв'язок задачі (1)–(3) з простору $C^{2n}(Q^1)$, який неперервно залежить від $f(t,x)$.

Д о в е д е н н я. Якщо $f(t,x)$ задовольняє умови теореми, то коефіцієнти $f_k(t)$ розвинення її в ряд Фур'є за системою функцій $\{\sin kx,\ k \in \mathbb{N}\}$ задовольняють оцінки

$$\max_{0\le t\le T} |f_k(t)| \le M_1 k^{-\gamma-2} \|f\|_{C^{(0,\gamma+2)}(Q^1)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тоді на основі формули (5) та оцінок (17)–(19) приходимо до нерівності

$$\|u\|_{C^{2n}(Q^1)} \le M_2 \|f\|_{C^{(0,\gamma+2)}(Q^1)},$$

з якої випливає доведення теореми. ∎

Зауваження 2. З теореми 3.1 випливає, що нерівності (19) при $\gamma \ge 2$ справджуються для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $\lambda_j T/2\pi$, $j = 1, \dots, n$.

4.1.2. Випадок багатьох просторових змінних. Викладені вище результати перенесено на випадок нестрого гіперболічного рівняння з багатьма просторовими змінними [199].

В області Q^p для рівняння

$$\sum_{|\widehat{s}|=n} a_{\widehat{s}} \frac{\partial^{2n} u(t,x)}{\partial t^{2s_0} \partial x_1^{2s_1} \dots \partial x_p^{2s_p}} = f(t,x) \tag{20}$$

розглядається задача з умовами (2) та умовами

$$\frac{\partial^{2l} u(t,x)}{\partial x_j^{2l}}\bigg|_{x_j=0, x_j=\pi} = 0, \quad l = 0,1,\dots,n-1, \ j = 1,\dots,p, \tag{21}$$

де $a_{\widehat{s}} \in \mathbb{R}$, $a_{n,0,\dots,0} \neq 0$.

Припустимо, що рівняння (20) нестрого гіперболічне і що для всіх $k \in \mathbb{N}^p$ корені рівняння

$$Q(\lambda^2, k) \equiv \sum_{|\widehat{s}|=n} a_{\widehat{s}} \lambda^{2s_0} \Big(\frac{k_1}{\|k\|}\Big)^{2s_1} \cdots \Big(\frac{k_p}{\|k\|}\Big)^{2s_p} = 0 \tag{22}$$

не дорівнюють нулю. Нехай $\lambda_1(k), \dots, \lambda_m(k)$, $m < n$, – різні додатні корені рівняння кратностей $n_1, \dots, n_m$ відповідно, $n_1 + \dots + n_m = n$. Зауважимо, що $\lambda_j(k)$, $j = 1,\dots,m$, рівномірно обмежені для всіх $k \in \mathbb{N}^p$.

Розв'язок задачі (20), (2), (21) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_p=1}^{\infty} u_k(t) \sin k_1 x_1 \dots \sin k_p x_p. \tag{23}$$

Теорема 3. *Для єдиності розв'язку задачі (20), (2), (21) у просторі $C^{2n}(Q^p)$ необхідно і достатньо, щоб жодне з рівнянь*

$$\lambda_j^2(k)(k_1^2 + \dots + k_p^2) - (2\pi/T)^2 w^2 = 0, \quad j = 1,\dots,m, \tag{24}$$

не мало нетривіальних розв'язків у цілих числах $k_1, \dots, k_p, w$.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови єдиності розв'язку задачі (20), (2), (21) і нехай існують такі додатні сталі M_1, M_2, M_3 і натуральні числа γ_1, γ_2, γ_3, що нерівності*

$$\Big|\lambda_j(k) - \frac{2\pi}{T}\frac{w}{\|k\|}\Big| \geq M_1 |k|^{-\gamma_1-\varepsilon}, \ j = 1,\dots,m, \tag{25}$$

$$|\lambda_j^{n_j}(k)| \geq M_2 |k|^{-\gamma_2-\varepsilon}, \ j = 1,\dots,m, \tag{26}$$

$$\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq r}}^{m} |\lambda_\nu^2(k) - \lambda_r^2(k)|^{n_\nu} \geq M_3 |k|^{-\gamma_3-\varepsilon}, r = 1,\dots,m, \tag{27}$$

де $0 < \varepsilon < 1/(n+2)$, справджуються для всіх (крім скінченного числа) векторів $(k,w) \in \mathbb{N}^{p+1}$ та векторів $k \in \mathbb{N}^p$ відповідно. Тоді,

якщо f належить $C^{(0,N)}(Q^p)$, $N = \gamma_1 \max_{1\le j\le m}\{n_j\} + \gamma_2 + \gamma_3 + p + 1$, і задовольняє умови

$$\frac{\partial^{2r} f}{\partial x_j^{2r}}\bigg|_{x_j=0, x_j=\pi} = 0, \quad j = 1,\dots,p, \ r = 0,1,\dots,[(N-1)/2],$$

то існує розв'язок задачі (20), (2), (21) в просторі $C^{2n}(Q^p)$.

Доведення теорем 3 та 4 проводяться аналогічно до доведень теорем 1 та 2.

Вияснимо можливість виконання оцінок (25)–(27).

Теорема 5. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега) чисел π/T нерівності (25) при $\gamma_1 \geq p+1$ справджуються для всіх $k \in \mathbb{N}^p$, $|k| > K(\pi/T)$.*

Д о в е д е н н я. Твердження теореми випливає з леми 3.2. ∎

Позначимо через $\bar{y}^{(1)} = (y_1^{(1)}, \dots, y_{\theta_1}^{(1)})$ та $\bar{y}^{(2)} = (y_1^{(2)}, \dots, y_{\theta_2}^{(2)})$ вектори, складені з коефіцієнтів $a_{0,s}$ та $a_{\widehat{s}}$ відповідно, де θ_1 – кількість невід'ємних цілочислових розв'язків $s = (s_1, \dots, s_p)$ рівняння $|s| = n$, а θ_2 – кількість невід'ємних цілочислових розв'язків $\widehat{s} = (s_0, s_1, \dots, s_p)$ рівняння $|\widehat{s}| = n$.

Теорема 6. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{\theta_1}$) векторів $\bar{y}^{(1)}$ нерівності (26) виконуються при $\gamma_2 \geq p$ для всіх $k \in \mathbb{N}^p$, $|k| > K(\bar{y}^{(1)})$.*

Д о в е д е н н я. Оскільки $\lambda_j(k) \neq 0$, $j = 1,\dots,m$, то вільний член $F(k, a_{0,s})$ рівняння (22) не дорівнює нулю. При цьому

$$F(k, a_{0,s}) = \sum_{|s|=n} a_{0,s}(k_1\|k\|^{-1})^{2s_1} \cdots (k_p\|k\|^{-1})^{2s_p} \equiv$$

$$\equiv a_{0,n,\dots,0}(k_1\|k\|^{-1})^{2n} + F_1(k, a_{0,s}), \tag{28}$$

де $F_1(k, a_{0,s})$ не містить $a_{0,n,\dots,0}$ і $|F(k, a_{0,s})| \leq c\lambda_j^{n_j}(k)$, $j = 1,\dots,m$, де c – додатна стала, що не залежить від k.

Для доведення теореми досить показати, що міра множини тих векторів $\bar{y}^{(1)}$, для яких нерівність

$$|F(k, a_{0,s})| < |k|^{-p-\varepsilon}, \ 0 < \varepsilon < 1, \tag{29}$$

має нескінченну множину розв'язків у цілих додатних числах $k_1, \dots, k_p$, дорівнює нулю.

Для цього скористаємося схемою доведення теореми 3.4.

Позначимо через A множину тих векторів $\bar{y}^{(1)}$, що належать деякому θ_1-вимірному паралелепіпеду $P_{\theta_1} = [\alpha_0, \beta_0] \times P_{\theta_1-1} \subset \mathbb{R}^{\theta_1}$, для яких нерівність (29) справджується для нескінченного числа векторів $k \in \mathbb{N}^p$. Зафіксуємо вектор k і всі компоненти $a_{0,s}$,

$|s| = n$, $s \neq (n, 0, \ldots, 0)$. Нехай $k_1 = \max\limits_{1 \le r \le p} k_r$ і $y_1 = a_{0,n,0,\ldots,0}$, що, звичайно, не обмежує загальності. Тоді для міри множини $A_k(a)$ тих $a_{0,n,0,\ldots,0} \in [\alpha_0, \beta_0]$, для яких виконується нерівність (29), справедлива оцінка

$$\operatorname{mes} A_k(a) < 2p^n |k|^{-p-\varepsilon}. \qquad (30)$$

Інтегруючи оцінку (30) по паралелепіпеду $P_{\theta_1 - 1}$, одержуємо, що міра множини $A(k)$ тих векторів $y_1 \in P_{\theta_1}$, для яких виконується нерівність (29) при фіксованому k, задовольняє нерівність

$$\operatorname{mes} A(k) < 2Vp^n |k|^{-p-\varepsilon},$$

де V – об'єм паралелепіпеда $P_{\theta_1 - 1}$. Оскільки ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^p} 2Vp^n |k|^{-p-\varepsilon}$$

є збіжним, то з леми 3.1 випливає, що $\operatorname{mes} A = 0$. Враховуючи, що простір $\mathbb{R}^{\theta_1}$ можна покрити зліченною кількістю паралелепіпедів P_{θ_1}, отримуємо доведення теореми. ∎

Припустимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}^p$ усі корені λ рівняння (22) є простими. Тоді справедливе таке твердження.

Теорема 7. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{\theta_2}$) векторів $\vec{y}^{(2)}$ при $\gamma_3 \ge p(n-1)/2$ нерівності (27), де $m = n$, $n_\nu = 1$, виконуються для всіх $k \in \mathbb{N}^p$, $|k| > K(\vec{y}^{(2)})$.*

Доведення. Позначимо $\mu(k) = \lambda^2(k)$. Тоді (див. (22))

$$Q(\lambda^2, k) \equiv Q(\mu, k) = \sum_{|\vec{s}|=n} a_{\vec{s}} \mu^{s_0} \prod_{r=1}^{p} \left(k_r \|k\|^{-1}\right)^{2s_r} = 0. \qquad (31)$$

Для многочлена $Q(\mu, k)$ справедливою є теорема 3.5. Звідси і з того, що $\mu_j(k) = \lambda_j^2(k)$, $j = 1, \ldots, n$, де $\mu_j(k)$ – корені многочлена (31), а $\lambda_j(k)$ – корені рівняння (22), випливає доведення теореми. ∎

4.2. Рівняння з молодшими членами

4.2.1. Строго гіперболічне рівняння. Нехай в області Q^p задано рівняння [204]

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_j^2 \Delta + c_j^2 \right) u(t, x) = f(t, x), \qquad (32)$$

де a_j, $c_j \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, $j = 1, \ldots, n$, $a_j \neq a_r$ при $j \neq r$; $\Delta \equiv \sum\limits_{r=1}^{p} \partial^2 / \partial x_r^2$; функція $f(t, x)$ неперервна за змінною t і достатньо гладка за x. Для

рівняння (32) розглянемо крайову задачу з умовами (2) та умовами

$$\left. \frac{\partial^{2l} u}{\partial n_\Gamma^{2l}} \right|_\Gamma = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1, \qquad (33)$$

де n_Γ – нормаль до границі Γ області Π_p.

Дослідження задачі проводиться за схемою п. 4.1. При цьому одержані такі результати.

Теорема 8. *Для єдиності розв'язку задачі (32), (2), (33) у просторі $C^{2n}(Q^p)$ необхідно і достатньо, щоб жодне з рівнянь*

$$a_j^2 (k_1^2 + \cdots + k_p^2) - (2\pi/T)^2 w^2 + c_j^2 = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

не мало нетривіальних розв'язків у цілих числах $k_1, \ldots, k_p, w$.

Теорема 9. *Нехай виконуються умови теореми 8 і нехай існують стала $M > 0$ і число $\gamma \in \mathbb{N}$, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $(k, w) \in \mathbb{N}^{p+1}$ справджуються нерівності*

$$\left| \sqrt{a_j^2 + c_j^2 / \|k\|^2} - \frac{w}{\|k\|} \frac{2\pi}{T} \right| \ge M |k|^{-\gamma-\varepsilon}, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad (34)$$

де $0 < \varepsilon < 1$. Якщо $f \in C^{(0,\gamma+p)}(Q^p)$ і на границі Γ обертається в нуль разом з усіма похідними парного порядку, то задача (32), (2), (33) має розв'язок, що належить простору $C^{2n}(Q^p)$.

Теорема 10. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега) чисел π/T при $\gamma \ge p - 1$ нерівності (34) справджуються для всіх $k \in \mathbb{N}^p$, $|k| > K(\pi/T)$.*

Доведення. Оскільки кожна послідовність

$$a_j^2 + c_j^2 \|k\|^{-2}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

є обмеженою, то на підставі леми 3.2 отримуємо доведення теореми. ∎

4.2.2. Нестрого гіперболічне рівняння. Розглянемо в області D^p задачу [194, 200]

$$L[u] \equiv \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{r=1}^{p} \lambda_{rj} \frac{\partial}{\partial x_r} - b_j \right)^{n_j} u(t, x) = f(t, x), \qquad (35)$$

$$M_r[u] \equiv \left. \frac{\partial^{r-1} u(t, x)}{\partial t^{r-1}} \right|_{t=0} - \left. \frac{\partial^{r-1} u(t, x)}{\partial t^{r-1}} \right|_{t=T} = 0, \quad r = 1, \ldots, n, \qquad (36)$$

де λ_{rj}, $b_j \in \mathbb{R}$, $r = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, m$, $n_1 + \cdots + n_m = n$. Вважатимемо, що для довільного $k \in \mathbb{Z}^p$ виконуються умови

$$\left(\sum_{r=1}^{p} (\lambda_{rj} - \lambda_{r\nu}) k_\nu \right)^2 + (b_j - b_\nu)^2 \neq 0, \quad j, \nu = 1, \ldots, m, \ j \neq \nu. \qquad (37)$$

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} u_k(t) \exp i(k,x). \tag{38}$$

Тоді кожна з функцій $u_k(t)$ буде розв'язком задачі

$$\prod_{j=1}^{m} \left(\frac{d}{dt} - (i\sum_{r=1}^{p} \lambda_{rj}k_r + b_j)\right)^{n_j} u_k(t) = f_k(t), \tag{39}$$

$$M_{k,r}[u_k] \equiv u_k^{(r-1)}(0) - u_k^{(r-1)}(T) = 0, \ r = 1,\ldots,n, \tag{40}$$

де $f_k(t)$ – коефіцієнти Фур'є функції $f(t,x)$.

Зауваження 3. Легко бачити, що якщо $b_j \neq 0$, $j = 1,\ldots,m$, то для вектора $k = 0$ задача (39), (40) має єдиний розв'язок $u_0(t)$. Якщо ж деякі з чисел b_j, $j = 1,\ldots,m$, дорівнюють нулю, то розв'язок вказаної задачі існує тоді і тільки тоді, коли

$$\int_{D^p} f(t,x)\,dxdt = 0, \tag{41}$$

і визначається з точністю до адитивної сталої.

Для кожного цілочислового вектора $k \neq 0$ однорідне рівняння

$$\prod_{j=1}^{m} \left(\frac{d}{dt} - (i\sum_{r=1}^{p} \lambda_{rj}k_r + b_j)\right)^{n_j} u_k(t) = 0 \tag{39'}$$

має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$u_{k,jl}(t) = t^{l-1} \exp\left((i\sum_{r=1}^{p} \lambda_{rj}k_r + b_j)t\right), \ l = 1,\ldots,n_j, j = 1,\ldots,m, \tag{42}$$

а розв'язок задачі (39′), (40) зображується у вигляді

$$\tilde{u}_k(t) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{n_j} C_{k,jl} u_{k,jl}(t). \tag{43}$$

Коефіцієнти $C_{k,jl}$ визначаються з системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{n_j} C_{k,jl} M_{k,r}[u_{k,jl}(t)] = 0, \ r = 1,\ldots,n, \tag{44}$$

детермінант $\Delta(k)$ якої має вигляд

$$\Delta(k) = \prod_{j=1}^{m} \left\{ \left(1 - \exp(iT\sum_{r=1}^{p} \lambda_{rj}k_r + b_jT)T\right)^{n_j} \prod_{l=2}^{n_j}(l-1)! \right\} \times$$

$$\times \prod_{1\leq\nu<\sigma\leq m} \left(i\sum_{r=1}^{p}(\lambda_{r\sigma} - \lambda_{r\nu})k_r + (b_\sigma - b_\nu)\right)^{n_\sigma n_\nu}. \tag{45}$$

Отже, для кожного вектора $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{0\}$ розв'язок задачі (39), (40) є єдиним тоді і тільки тоді, коли $\Delta(k) \neq 0$.

Теорема 11. *Якщо в рівнянні (35) всі числа b_j, $j = 1,\ldots,m$, не дорівнюють нулю, то задача (35), (36) не може мати двох різних розв'язків із простору $H_n^n(D^p)$.*

Д о в е д е н н я. Припустимо, що існують два розв'язки $u_1(t,x)$ та $u_2(t,x)$ задачі (35), (36) з простору $H_n^n(D^p)$. Тоді функція $U(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$ також належить простору $H_n^n(D^p)$ і майже всюди задовольняє однорідне рівняння

$$L[u] = 0 \tag{35'}$$

та умови (36). З рівностей Парсеваля для функцій $L[U(t,x)]$, $M_r[U(t,x)]$, $r = 1,\ldots,n$, випливає, що кожний із коефіцієнтів Фур'є $U_k(t)$ функції $U(t,x)$ є розв'язком відповідної задачі (39′), (40). Далі, якщо всі числа b_j, $j = 1,\ldots,m$, не дорівнюють нулю, то $\Delta(k) \neq 0$ для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{0\}$. Це випливає з умови (37) та оцінок

$$\left|1 - \exp(i\sum_{r=1}^{p} \lambda_{rj}k_r + b_j)T\right| \geq |1 - \exp b_jT| > 0, \ j = 1,\ldots,m. \tag{46}$$

Звідси, враховуючи зауваження 3, одержуємо, що $U_k(t) \equiv 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$. Отже, $\|u_1 - u_2\|_{H_n^n(D^p)} = 0$. Теорему доведено. ■

Теорема 12. *Нехай деякі з чисел b_j, $j = 1,\ldots,m$, дорівнюють нулю: $b_r = 0$, $r = q_1,\ldots,q_l$, $1 \leq q_1,\ldots,q_l \leq m$. Для того щоб два розв'язки задачі (35), (36) з простору $H_n^n(D^p)$ відрізнялися лише на адитивну сталу, необхідно і достатньо, щоб рівняння*

$$\sum_{r=1}^{p} \lambda_{rj}k_r - \frac{2\pi}{T}w = 0, \ j = q_1,\ldots,q_l, \tag{47}$$

не мали нетривіальних розв'язків у цілих числах $k_1,\ldots,k_p,w$.

Д о в е д е н н я. Якщо яке-небудь із рівнянь (47) має нетривіальний розв'язок у цілих числах $k_1^0,\ldots,k_p^0,w^0$, то $\Delta(k^0) = 0$. Тоді задача (39′), (40) при $k = k^0$ має нетривіальні розв'язки

$$\tilde{u}_{k^0}(t) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{n_j} C_{k^0,jl}\, t^{l-1} \exp\left((i\sum_{r=1}^{p} \lambda_{rj}k_r^0 + b_j)t\right),$$

де $C_{k^0,jl}$, $l = 1,\dots,n_j$, $j = 1,\dots,m$, – розв'язок системи (43) при $k = k^0$, а функції

$$u_0(t,x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n_j} C_{k^0,jl}\, t^{l-1} \exp\Big(\big(i\sum_{r=1}^{p}\lambda_{rj}k_r^0 + b_j\big)t + i(k^0,x)\Big),$$

є розв'язками задачі (35′), (36).

Доведення достатності проводиться аналогічно доведенню теореми 11. При цьому враховується, що за умов теореми 12 розв'язком задачі (39′), (40) при $k = 0$ є довільна стала і $\Delta(k) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$, якщо жодне з рівнянь (47) не має нетривіальних розв'язків у цілих числах $k_1,\dots,k_p,w$. ∎

Зауваження 4. За умов теореми 12 задача (35), (36) не може мати двох різних розв'язків із $H_n^n(D^p)$, які задовольняють рівність

$$\int_{D^p} u(t,x)\,dx dt = 0. \tag{48}$$

Дослідимо питання про існування розв'язку задачі (35), (36).

Припустимо, що $\Delta(k) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$. Тоді для кожного такого k існує функція Гріна $G_k(t,\tau)$ задачі (39′), (40), за допомогою якої розв'язок задачі (39), (40) визначається формулою вигляду (12). При цьому формальний розв'язок задачі (35), (36) зображується рядом

$$u(t,x) = u_0(t) + \sum_{|k|>0} \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau \exp i(k,x). \tag{49}$$

У квадраті K_T, крім сторін $\tau = 0$ і $\tau = T$, функція Гріна $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$, визначається формулою

$$G_k(t,\tau) = g_k(t,\tau) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n_j}\sum_{\nu=0}^{n_j-l}\sum_{\sigma=0}^{n-l-\nu}\sum_{\xi=1}^{\nu} Z_j^{\sigma(m-1)} \times$$
$$\times \frac{t^{l-1}\, T^{\nu}\, \tau^{n_j-l-\nu-\sigma} \exp\big((i\sum_{r=1}^{p}\lambda_{rj}k_r + b_j)(t-\tau)\big)}{\nu!\,(n_j-l-\nu-\sigma)!\,\big(1-\exp(iT\sum_{r=1}^{p}\lambda_{rj}k_r + b_jT)\big)^{\xi}} \times$$
$$\times \frac{(-1)^{n_j+\dots+n_m+l+\sigma(j-1)} \exp\big(\xi(i\sum_{r=1}^{p}\lambda_{rj}k_r + b_j)T\big)}{\prod_{\substack{\varkappa=1\\ \varkappa\neq j}}^{m} \big(i\sum_{r=1}^{p}(\lambda_{r\varkappa}-\lambda_{rj})k_r + (b_\varkappa - b_j)\big)^{n_\varkappa+\sigma}} \times$$

$$\times C_{1,j\nu}^{\xi}\left\{1 + C_{2,j\nu}^{\xi}\frac{1+\exp\big((i\sum_{r=1}^{p}\lambda_{rj}k_r + b_j)T\big)}{1-\exp\big((i\sum_{r=1}^{p}\lambda_{rj}k_r + b_j)T\big)}\right\}, \tag{50}$$

де

$$g_k(t,\tau) = \frac{\mathrm{sgn}(t-\tau)}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{n_j-1}\sum_{\sigma=0}^{n_j-\nu-1}\frac{t^{\nu}\,\tau^{n_j-\nu-\sigma-1}}{\nu!\,(n_j-\nu-\sigma-1)!} \times$$
$$\times \frac{(-1)^{n+\nu+1} \exp\big((i\sum_{r=1}^{p}\lambda_{rj}k_r + b_j)(t-\tau)\big)}{\prod_{\substack{\varkappa=1\\ \varkappa\neq j}}^{m} \big(i\sum_{r=1}^{p}(\lambda_{r\varkappa}-\lambda_{rj})k_r + (b_\varkappa - b_j)\big)^{\sigma+n_\varkappa}}, \tag{51}$$

Z_j^h – алгебрична сума всіх можливих добутків виразів $(b_\varkappa - b_j) + i\sum_{r=1}^{p}(\lambda_{r\varkappa}-\lambda_{rj})k_r$, $\varkappa, j = 1,\dots,m$, $\varkappa \neq j$, узятих по h співмножників у кожному добутку; $C_{1,j\nu}^{\xi}$, $C_{2,j\nu}^{\xi}$, $\xi = 1,\dots,\nu$, $\nu = 0,1,\dots,n_j - l$, $l = 1,\dots,n_j$, $j = 1,\dots,m$, – дійсні сталі, що залежать лише від $m, n_1,\dots,n_m$.

Для значень $\tau = 0$, $\tau = T$ функція Гріна $G_k(t,\tau)$ довизначається за неперервністю справа і зліва, відповідно.

Із формул (12), (50) та (51) одержуємо оцінки

$$\int_0^T \left|\frac{d^l u_k(t)}{dt^l}\right|^2 dt \leq |k|^{2l+2(m-2)(\bar{n}-1)} \int_0^T |f_k(t)|^2\, dt \sum_{j=1}^{m} C_j \times$$
$$\times \frac{\big|1-\exp\big(i\sum_{r=1}^{p}\lambda_{rj}k_r + b_j\big)T\big|^{-2n_j}}{\prod_{\substack{\varkappa=1\\ \varkappa\neq j}}^{m} \big|i\sum_{r=1}^{p}(\lambda_{r\varkappa}-\lambda_{rj})k_r + (b_\varkappa - b_j)\big|^{2(n_j+n_\varkappa-1)}},\quad l = 0,1,\dots,n, \tag{52}$$

де додатні сталі C_j, $j = 1,\dots,m$, не залежать від k.

Позначимо $\bar{n} = \max\limits_{1\leq r\leq m}\{n_r\}$.

Теорема 13. *Нехай у рівнянні (35) всі числа b_j, $j = 1,\dots,m$, попарно різні і не дорівнюють нулю. Якщо $f \in H_N^0(D^p)$, де $N = q + (m-2)(\bar{n}-1)$, $q \geq n$, то існує розв'язок задачі (35), (36) з простору $H_q^n(D^p)$, $q \geq n$, який неперервно залежить від функції $f(t,x)$.*

Доведення. Із формул (49) та оцінок (52), (46), враховуючи, що

$$\left|i\sum_{r=1}^{p}(\lambda_{r\varkappa}-\lambda_{rj})k_r+(b_\varkappa-b_j)\right|\geq|b_\varkappa-b_j|>0,\ \varkappa\neq j, \qquad (53)$$

одержуємо

$$||u||_{H_q^n(D^p)}\leq C||f||_{H_N^0(D^p)},$$

де стала $C>0$ залежить лише від n, T та b_j, $j=1,\ldots,m$. Звідси випливає твердження теореми. ∎

Якщо $b_{l_0}=0$, $b_{l_1}=b_{l_2}$ для деяких l_0,l_1,l_2, $1\leq l_0,l_1,l_2\leq m$, то величини $\left|1-\exp(iT\sum\limits_{r=1}^{p}\lambda_{rl_0}k_r)\right|$, $\left|\sum\limits_{r=1}^{p}(\lambda_{rl_1}-\lambda_{rl_2})k_r\right|$, будучи відмінними від нуля, можуть ставати як завгодно малими для нескінченної множини векторів $k\in\mathbb{Z}^p$. У цих випадках існування розв'язку задачі (35), (36) пов'язане з проблемою малих знаменників.

Теорема 14. *Нехай задача (35), (36) має єдиний розв'язок і нехай усі числа b_j, $j=1,\ldots,m$, попарно різні, а $b_{l_0}=0$ для деякого l_0, $1\leq l_0\leq m$, і нехай для всіх (крім скінченного числа) векторів $(k,w)\in\mathbb{Z}^{p+1}$, $|k|\neq0$, виконується нерівність*

$$\left|\sum_{r=1}^{p}\lambda_{rl_0}k_r-\frac{2\pi}{T}w\right|\geq M|k|^{-\gamma-\delta}, \qquad (54)$$

де M – додатна стала, $\gamma\in\mathbb{N}$, $0<\delta<1/n_{l_0}$. Якщо функція f належить $H_N^0(D^p)$, де $N=q+\gamma n_{l_0}+(m-2)(\bar{n}-1)+1$, $q\geq n$, і задовольняє умову (41), то існує розв'язок задачі (35), (36) з простору $H_q^n(D^p)$, який, за умови (48), неперервно залежить від функції $f(t,x)$.

Доведення. Враховуючи зауваження 3, 4, оцінки (46), (52), (53) та оцінку

$$\left|1-\exp iT\sum_{r=1}^{p}\lambda_{rl_0}k_r\right|>\frac{T}{2\pi}\left|\sum_{r=1}^{p}\lambda_{rl_0}k_r-\frac{2\pi}{T}d_k\right|,$$

де d_k – ціле число, що задовольняє нерівність

$$\left|\frac{T}{2\pi}\sum_{r=1}^{p}\lambda_{rl_0}k_r-d_k\right|\leq\frac{1}{2},$$

доведення теореми проводимо за схемою доведення теореми 13. ∎

За тією ж схемою доведено таке твердження.

Теорема 15. *Нехай виконані умови єдиності розв'язку задачі (35), (36) і нехай усі числа b_j, $j=1,\ldots,m$, не дорівнюють нулю, при цьому $b_{l_1}=b_{l_2}$, $l_1\neq l_2$; $l_1,l_2=\sigma_1,\ldots,\sigma_\varkappa$, $1\leq\sigma_1,\ldots,\sigma_\varkappa\leq m$, і нехай для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ справедливі нерівності*

$$\left|\sum_{r=1}^{p}(\lambda_{rl_1}-\lambda_{rl_2})k_r\right|\geq M|k|^{-\gamma-\delta},\quad l_1,l_2=\sigma_1,\ldots,\sigma_\varkappa,\ l_1\neq l_2, \qquad (55)$$

де M – додатна стала, $\gamma\in\mathbb{N}$, $0<\delta<1/((\varkappa-1)(2n-1))$. Якщо функція f належить $H_N^0(D^p)$, де $N=q+1+(m-2)(\bar{n}-1)+$ $+\gamma(\varkappa-1)(2\bar{n}-1)$, $q\geq n$, і задовольняє умову (41), то існує розв'язок задачі (35), (36) з простору $H_q^n(D^p)$. За умови (48) цей розв'язок неперервно залежить від $f(t,x)$.

Зауваження 5. Для довільних чисел b_j, $j=1,\ldots,m$, питання про існування розв'язку задачі (35), (36) вирішується поєднанням теорем 14 і 15.

Для оцінок (35) та (36) справедливі твердження, які випливають із теореми 3.2.

Теорема 16. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^p$) векторів $\Lambda=(T\lambda_{1l_0}/2\pi,\ldots,T\lambda_{pl_0}/2\pi)$ нерівність (54) при $\gamma\geq p$ виконується для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$, $|k|>K(\Lambda)$.*

Теорема 17. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^p$) векторів $\Lambda_{l_1,l_2}=(\lambda_{1l_1}-\lambda_{1l_2},\ldots,\lambda_{pl_1}-\lambda_{pl_2})$, $1\leq l_1,l_2\leq m$, $l_1\neq l_2$, нерівності (55) справедливі при $\gamma\geq p$ для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$, $|k|>$ $>K(\Lambda_{l_1,l_2})$.*

У випадку, коли $p=1$, $n_j=1$, $j=1,\ldots,n$, задача (35), (36) досліджена в праці [203].

§ 5. Рівняння зі змінними коефіцієнтами

У даному параграфі результати п. 4.2.2 перенесені на випадок, коли λ_{rj} і b_j у рівнянні (4.35) є функціями змінної t [195].

Розглянемо в області D^p задачу з умовами (4.36) для рівняння

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\sum_{r=1}^{p}\lambda_{rj}(t)\frac{\partial}{\partial x_r}-b_j(t)\right)^{n_j}u(t,x)=f(t,x), \qquad (1)$$

де $n_1+\cdots+n_m = n$; $\lambda_{rj}(t)$, $b_j(t)$ – дійсні достатньо гладкі на відрізку $[0,T]$ функції, що задовольняють умови

$$\sum_{r=1}^{p} \left(\lambda_{rj}(t) - \lambda_{rl}(t)\right)^2 + \left(b_j(t) - b_l(t)\right)^2 \not\equiv 0, \quad j,l = 1,\ldots,m,\ j \neq l,$$

$$\lambda_{rj}^{(\nu)}(0) = \lambda_{rj}^{(\nu)}(T), \quad \nu = 0,1,\ldots,n_1+\cdots+n_j-1,$$

$$b_j^{(l)}(0) = b_j^{(l)}(T), \quad l = 0,1,\ldots,n.$$

Розв'язок задачі (1), (4.36) шукаємо у вигляді ряду (4.38); тоді кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком відповідної задачі з умовами (4.40) для рівняння

$$\prod_{j=1}^{m} \left\{ \frac{d}{dt} - \left(i\sum_{r=1}^{p} k_r\lambda_{rj}(t) + b_j(t) \right) \right\}^{n_j} u_k(t) = f_k(t), \tag{2}$$

де $f_k(t)$ – коефіцієнти Фур'є функції $f(t,x)$.

Введемо такі позначення:

$$\Psi_j(t) = \exp \int_0^t \left(i\sum_{r=1}^{p} k_r\lambda_{rj}(y) + b_j(y) \right) dy, \quad j = 1,\ldots,m, \tag{3}$$

$$\gamma_{qj} = n_q + n_{q-1} + \cdots + n_{m-j+2},\ q = m-j+2,\ldots,m,\ j = 2,\ldots,m. \tag{4}$$

Однорідне рівняння

$$\prod_{j=1}^{m} \left\{ \frac{d}{dt} - \left(i\sum_{r=1}^{p} k_r\lambda_{rj}(t) + b_j(t) \right) \right\}^{n_j} u_k(t) = 0 \tag{2'}$$

для довільного $k \in \mathbb{Z}^p$ має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$\begin{cases} u_{k,1\nu}(t) = t^{\nu-1}\Psi_m(t), \quad \nu = 1,\ldots,n_m, \\ u_{k,2\nu}(t) = \Psi_m(t) \int\limits_0^t \int\limits_0^{t_{n_m}} \cdots \int\limits_0^{t_2} t_1^{\nu-1} B_{m-1}(t_1)dt_1 \cdots dt_{n_m}, \\ \qquad\qquad \nu = 1,\ldots,n_{m-1}, \\ u_{k,j\nu}(t) = \Psi_m(t) \int\limits_0^t \int\limits_0^{t_{\gamma_{mj}}} \cdots \int\limits_0^{t_{2+\gamma_{m-1,j}}} B_{m-1}(t_{1+\gamma_{m-1,j}}) \times \\ \quad \times \int\limits_0^{t_{\gamma_{m-1,j}}} \cdots \int\limits_0^{t_{2+\gamma_{m-j+2,j}}} B_{m-j+2}(t_{1+\gamma_{m-j+2,j}}) \times \\ \quad \times \int\limits_0^{t_{1+\gamma_{m-j+2,j}}} \cdots \int\limits_0^{t_2} t_1^{\nu-1} B_{m-j+1}(t_1)\, dt_1 \ldots dt_{\gamma_{m,j}}, \\ \qquad\qquad \nu = 1,2,\ldots,n_{m-j+1},\ j = 3,\ldots,m, \end{cases} \tag{5}$$

де

$$B_l(t) = \Psi_l(t)/\Psi_{l+1}(t), \quad l = 1,\ldots,m-1. \tag{6}$$

Для характеристичного визначника $\Delta(k)$ задачі (2), (4.40) отримуємо формулу

$$\Delta(k) = \prod_{j=1}^{m} 1!\ 2! \cdots (n_j-1)!\ \left(1 - \Psi_j(T)\right)^{n_j}. \tag{7}$$

Зауваження 1. Для $k = 0$ задача (2), (4.40) має єдиний розв'язок, коли $\int_0^T b_j(t)\ dt \neq 0$, $j = 1,\ldots,m$; якщо ж для деяких j_0, $1 \leq j_0 \leq m$, справджується рівняння $\int_0^T b_{j_0}(t)\ dt = 0$, то розв'язок цієї задачі існує тоді і тільки тоді, коли

$$\int\limits_{D^p} \tilde{u}_0(t) f(t,x)\ dtdx = 0, \tag{8}$$

де $\tilde{u}_0(t)$ – розв'язок відповідної однорідної спряженої задачі. У цьому випадку розв'язок $u_0(t)$ задачі (2), (4.40) визначається з точністю до доданка $C\bar{u}_0(t)$, де C – довільна стала, а $\bar{u}_0(t)$ – нетривіальний розв'язок задачі (2′), (4.40), який належить лінійному одновимірному многовиду.

На основі зауваження 1 отримуємо три теореми, доведення яких аналогічні доведенням теорем 4.11, 4.12 та 4.13 відповідно.

Теорема 1. *Якщо $\int_0^T b_j(t)\ dt \neq 0$, $j = 1,\ldots,m$, то задача (1), (4.36) не може мати двох різних розв'язків у просторі $H_n^n(D^p)$.*

Теорема 2. *Якщо виконуються рівності*

$$\int_0^T b_j(t)\ dt = 0, \quad j = l_1,\ldots,l_\nu,\ 1 \leq l_1,\ldots,l_\nu \leq m, \tag{9}$$

то для єдиності розв'язку задачі (1), (4.36) у просторі $H_n^n(D^p)$ з точністю до доданка $C\bar{u}_0(t)$ (див. зауваження 1) необхідно і достатньо, щоб рівняння

$$\sum_{r=1}^{p} k_r \int_0^T \lambda_{rj}(t)\ dt - 2\pi w = 0, \quad j = l_1,\ldots,l_\nu,\quad 1 \leq l_1,\ldots,l_\nu \leq m, \tag{10}$$

не мали нетривіальних розв'язків у цілих числах $k_1,\ldots,k_p,w$.

Теорема 3. *Нехай $\int_0^T b_j(t)\ dt \neq 0$, $j = 1,\ldots,m$. Якщо f належить $H_q^0(D^p)$, $q \geq n$, то існує розв'язок задачі (1), (4.36) з простору $H_q^n(D^p)$, який неперервно залежить від $f(t,x)$.*

Для задачі (1), (4.36) справедливе зауваження, аналогічне зауваженню 4.4.

Припустимо тепер, що виконані умови (9) і що рівняння (10) не мають нетривіальних розв'язків у цілих числах $k_1, \dots, k_p, w$. Тоді для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ існує функція Гріна $G_k(t,\tau)$ задачі (2′), (4.40), яка в квадраті K_T (крім сторін $\tau = 0$ і $\tau = T$) визначається формулою

$$G_k(t,\tau) = g_k(t,\tau) - \frac{1}{2}\Big(\sum_{j,l=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_{m-j+1}} \sum_{\xi=1}^{n_{m-l+1}} u_{k,j\nu}(t)\, W_{l\xi}(k,\tau) \times$$

$$\times\, \Phi_{j\nu}^{l\xi}(k) \Big) \prod_{\sigma=1}^{m} \Big(\prod_{\varkappa=1}^{n_\sigma - 1} \varkappa! \Big)^{-2} (\Psi_\sigma(\tau))^{-n_\sigma} (1 - \Psi_\sigma(T))^{-n_\sigma}, \quad (11)$$

де

$$g_k(t,\tau) = \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_{m-j+1}} u_{k,j\nu}(t)\, W_{j\nu}(k,\tau) \times$$

$$\times \prod_{\sigma=1}^{m} \Big(\prod_{\varkappa=1}^{n_\sigma - 1} \varkappa! \Big)^{-1} (\Psi_\sigma(\tau))^{-n_\sigma}; \quad (12)$$

$W_{j\nu}(k,\tau)$ – алгебричне доповнення елемента $u_{k,j\nu}^{(n-1)}(\tau)$ у визначнику Вронського системи функцій (5); $\Phi_{j\nu}^{l\xi}(k)$, $\xi = 1, \dots, n_{m-l+1}$, $\nu = 1, \dots, n_{m-j+1}$, $l, j = 1, \dots, m$, — визначник, одержаний шляхом заміни $\operatorname{col}\{u_{k,j\nu}^{(r)}(0) - u_{k,j\nu}^{(r)}(T),\ r = 0, 1, \dots, n-1\}$ на $\operatorname{col}\{u_{k,l\xi}^{(r)}(0) + u_{k,l\xi}^{(r)}(T),\ r = 0, 1, \dots, n-1\}$ у визначнику

$$\Delta(k) \equiv \det \left\| u_{k,j\nu}^{(r)}(0) - u_{k,j\nu}^{(r)}(T) \right\|_{\substack{r = 0,1,\dots,n-1 \\ \nu = 1,\dots,n_{m-j+1}, j = 1,\dots,m}}.$$

Із формул (4.12), (11), (12) одержуємо

$$\int_0^T \left| \frac{d^l u_k(t)}{dt^l} \right| dt \le \frac{C|k|^{2l} \int_0^T |f_k(t)|^2\, dt}{\prod_{j=1}^{m} |1 - \Psi_j(T)|^{2n_j}}, \quad l = 0, 1, \dots, n, \quad (13)$$

де додатна стала C не залежить від k.

На основі оцінок (13) отримуємо таку теорему, доведення якої аналогічне доведенню теореми 4.13.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови (9) і нехай існують сталі $M > 0$ і $\gamma \in \mathbb{N}$ такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $(k, w) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ виконуються нерівності*

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^T \sum_{r=1}^{p} k_r \lambda_{rj}(t) - w \right| \ge M|k|^{-\gamma-\delta}, \quad j = l_1, \dots, l_\nu, \quad (14)$$

де $0 < \delta < 1/(n_{l_1} + \dots + n_{l_\nu})$. Якщо функція f задовольняє умови (6) і належить простору $H_N^0(D^p)$, де $N = q + 1 + \gamma(n_{l_1} + \dots + n_{l_\nu})$, $q \ge n$, то існує розв'язок задачі (1), (4.36) з простору $H_q^n(D^p)$; якщо цей розв'язок задовольняє умову (4.48), то він неперервно залежить від $f(t,x)$.

Для нерівностей (14) справедливе таке твердження, яке випливає з теореми 3.2.

Теорема 5. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^p$) векторів $\Lambda_\sigma = \{(2\pi)^{-1} \int_0^T \lambda_{rl_\sigma}(t)\, dt,\ r = 1, \dots, p\}$, $\sigma = 1, \dots, \nu$, нерівності (14) виконуються при $\gamma \ge p$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K(\Lambda_\sigma)$.*

§ 6. Системи рівнянь із сталими коефіцієнтами

Досліджено існування та єдиність періодичних за всіма змінними розв'язків систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами, гіперболічних за Петровським [201] та гіперболічних за Гордінгом [198].

6.1. Системи рівнянь, однорідні за порядком диференціювання

В області $\Omega_{\widehat{\omega}}^{p+1}$ розглянемо задачу про відшукання періодичного за всіма змінними з вектором періодів $\widehat{\omega} = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_p)$ розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$L[u] \equiv \sum_{|\widehat{s}|=n} A_{\widehat{s}} \frac{\partial^n u(\widehat{x})}{\partial x_0^{s_0} \partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} = F(\widehat{x}), \quad (1)$$

де $u(\widehat{x})$ та $F(\widehat{x})$ – m-вимірні вектори; $A_{\widehat{s}}$ – $m \times m$-матриці зі сталими дійсними елементами. Припустимо, що система (1) є x_0-гіперболічною, тобто що для довільного дійсного вектора $\xi \ne 0$ рівняння

$$\det\Big\{ \sum_{|\widehat{s}|=n} A_{\widehat{s}} \lambda^{s_0} \xi_1^{s_1} \dots \xi_p^{s_p} \Big\} = 0 \quad (2)$$

має лише дійсні корені $\lambda_r(\xi)$, $r = 1, \dots, mn$, і що $\det A_{n,0,\dots,0} \ne 0$.

Розв'язок системи (1) шукаємо в просторі $\overline{H}_q(\Omega^{p+1}_{\widehat{\omega}})$, $q \geq n$, у вигляді векторного ряду

$$u(\widehat{x}) = \sum_{|\widehat{k}|\geq 0} u_{\widehat{k}} \exp\left(i\sum_{r=0}^{p} k_r \frac{2\pi}{\omega_r} x_r\right). \tag{3}$$

Для визначення сталих векторів $u_{\widehat{k}}$ одержуємо систему алгебричних рівнянь

$$M(\widehat{k})u_{\widehat{k}} \equiv \sum_{|\widehat{s}|=0} A_{\widehat{s}} \prod_{r=0}^{p}\left(ik_r\frac{2\pi}{\omega_r}\right)^{s_r} u_{\widehat{k}} = F_{\widehat{k}}, \tag{4}$$

де $F_{\widehat{k}}$ – коефіцієнти розвинення вектор-функції $F(\widehat{x})$ в ряд вигляду (3). Для кожного $\widehat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1} \setminus \{0\}$ визначник $\Delta(\widehat{k};\widehat{\omega})$ системи (4) обчислюється за формулою

$$\Delta(\widehat{k};\widehat{\omega}) = i^{mn} \det A_{n,0,\ldots,0} \prod_{j=1}^{mn}\left(k_0\frac{2\pi}{\omega_0} - \lambda_j(k)||k||_\omega\right), \tag{5}$$

де $\lambda_j(k)$, $j = 1,\ldots,mn$, – корені рівняння (2) при $\xi_r = 2\pi k_r/\omega_r||k||_\omega$, $r = 1,\ldots,p$. Надалі вважатимемо, що для кожного вектора $\widehat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1} \setminus \{0\}$ виконується така умова: $\lambda_j(k) \neq 0$, $j = 1,\ldots,mn$.

Поряд із системами (1) та (4) будемо розглядати відповідні їм однорідні системи рівнянь

$$L[u(\widehat{x})] = 0, \tag{1'}$$

$$M(\widehat{k})[u_{\widehat{k}}] = 0. \tag{4'}$$

Очевидно, що розв'язок розглядуваної задачі визначається неоднозначно, бо довільний сталий вектор $u_0 = (u_{10},\ldots,u_{m0})$ є розв'язком системи рівнянь (1′).

Теорема 1. *Для того щоб $\widehat{\omega}$-періодичні розв'язки системи (1) з простору $\overline{H}_n(\Omega^{p+1}_{\widehat{\omega}})$ відрізнялися між собою лише сталими доданками, необхідно і достатньо, щоб жодне з рівнянь*

$$\lambda_j^2(k)\sum_{r=1}^{p}\left(\frac{k_r}{\omega_r}\right)^2 - \left(\frac{k_0}{\omega_0}\right)^2 = 0, \quad j = 1,\ldots,mn, \tag{6}$$

не мало нетривіальних розв'язків у цілих числах $k_0, k_1, \ldots, k_p$.

Доведення. Якщо яке-небудь із рівнянь (6) має нетривіальний розв'язок $\widehat{k}^0 = (k_0^0, k_1^0, \ldots, k_p^0) \in \mathbb{Z}^{p+1}$, то $\Delta(\widehat{k}^0;\widehat{\omega}) = 0$, а однорідна система рівнянь (1′) має розв'язки вигляду

$$u^0(\widehat{x}) = u_{(0)} + u_{\widehat{k}^0}\exp\left(i\sum_{r=0}^{p} k_r^0\frac{2\pi}{\omega_r}x_r\right),$$

де $u_{(0)}$ – довільний сталий вектор, а $u_{\widehat{k}^0}$ – розв'язок системи рівнянь (4′) при $\widehat{k} = \widehat{k}^0$.

Нехай існують два розв'язки $u^1(\widehat{x})$ та $u^2(\widehat{x})$ системи рівнянь (1) з простору $\overline{H}_n(\Omega^{p+1}_{\widehat{\omega}})$. Тоді вектор-функція $u(\widehat{x}) = u^1(\widehat{x}) - u^2(\widehat{x})$ є розв'язком системи (1′) і зображується рядом (3), де вектори $u_{\widehat{k}}$ визначаються з системи рівнянь (4′). При $\widehat{k} = 0$ розв'язком системи (4′) є довільний сталий вектор $u_{(0)}$. Якщо рівняння (6) не мають нетривіальних розв'язків у цілих числах $k_0, k_1, \ldots, k_p$, то для всіх $\widehat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1} \setminus \{0\}$ система (4′) не має нетривіальних розв'язків. Звідси випливає, що $u(\widehat{x}) = u_{(0)}$. Теорему доведено. ■

Зауваження 1. Якщо шуканий розв'язок підпорядкувати умові

$$\int_{\Omega^{p+1}_{\widehat{\omega}}} u(\widehat{x})\,d\widehat{x} = 0, \tag{7}$$

то за умов теореми 1 система рівнянь (1) не може мати двох різних розв'язків із простору $\overline{H}_n(\Omega^{p+1}_{\widehat{\omega}})$.

Розв'язок системи (1) з простору $\overline{H}_q(\Omega^{p+1}_{\widehat{\omega}})$, $q \geq n$, існує, якщо для всіх $\widehat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}$ система рівнянь (4) є розв'язною і якщо вектор-функція, зображувана рядом (3), належить простору $\overline{H}_q(\Omega^{p+1}_{\widehat{\omega}})$.

Зауваження 2. Для $k = 0$ розв'язок системи (4) існує тоді і тільки тоді, коли

$$F_{(0)} = \int_{\Omega^{p+1}_{\widehat{\omega}}} F(\widehat{x})\,d\widehat{x} = 0; \tag{8}$$

цим розв'язком є довільний сталий вектор $u_0 = (u_{10},\ldots,u_{m0})$.

Припустимо, що для всіх векторів $\widehat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1} \setminus \{0\}$ виконується умова $\Delta(\widehat{k};\widehat{\omega}) \neq 0$. Тоді для кожного $\widehat{k} \neq 0$ система (4) має єдиний розв'язок, який зображується формулою

$$u_{\varkappa,\widehat{k}} = \sum_{l=1}^{m}(-1)^{\varkappa+l}\frac{\Delta_{l,\varkappa}(\widehat{k};\widehat{\omega})}{\Delta(\widehat{k};\widehat{\omega})}F_{l,\widehat{k}}, \quad \varkappa = 1,\ldots,m, \ \widehat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1} \setminus \{0\}, \tag{9}$$

де

$$\Delta_{l,\varkappa}(\widehat{k};\widehat{\omega}) = i^{n(m-1)} \sum_{|\widehat{s}|=n(m-1)} \prod_{\sigma=1}^{p} \left(\frac{2\pi k_\sigma}{\omega_\sigma}\right)^{s_\sigma} b_{\widehat{s},l\varkappa}, \quad l,\varkappa = 1,\ldots,m;$$

$$b_{\widehat{s},l\varkappa} = \sum_{q=0}^{p} \sum_{\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq\varkappa}}^{m} \nu_q^{(j)}=s_q} \det \left\| a_{rj}^{\nu^{(j)}} \right\|_{\substack{r,j=1\\ r\neq l, j\neq\varkappa}}^{m}, \quad l,\varkappa = 1,\ldots,m, \ |\widehat{s}| = n;$$

$a_{rj}^{\nu^{(j)}}$, $r = 1,\ldots,m, r \neq l$, – елементи j-го стовпця будь-якої з матриць $A_{\widehat{s}}$, $|\widehat{s}| = n$; $\nu_q^{(j)}$ – q-а компонента вектора $\widehat{s}$, який відповідає цій матриці. Очевидно, що

$$\Delta_{l,\varkappa}(\widehat{k};\widehat{\omega}) < C|k|^{n(m-1)}, \ l,\varkappa = 1,\ldots,m, \tag{10}$$

де C – додатна стала, що не залежить від k.

Компоненти шуканого розв'язку $u(\widehat{x})$ формально зображуються рядами

$$u_\varkappa(\widehat{x}) = u_{\varkappa 0} + \sum_{|\widehat{k}|>0} \sum_{l=1}^{m} (-1)^{\varkappa+l} F_{l,\widehat{k}} \frac{\Delta_{l,\varkappa}(\widehat{k};\widehat{\omega})}{\Delta(\widehat{k};\widehat{\omega})} \exp\left(i \sum_{r=0}^{p} k_r \frac{2\pi}{\omega_r} x_r\right), \tag{11}$$
$$\varkappa = 1,\ldots,m.$$

Визначник (5), який не дорівнює нулю, може як завгодно близько наближатись до нуля для нескінченної множини векторів $\widehat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}$.

Теорема 2. *Нехай $\Delta(\widehat{k};\widehat{\omega}) \neq 0$ для всіх $\widehat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}$ і нехай існують сталі $M > 0$ і $\gamma \in \mathbb{N}$ такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $\widehat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}$ виконується нерівність*

$$|\Delta(\widehat{k};\widehat{\omega})| \geq M|k|^{-\gamma-\varepsilon}, \ 0 < \varepsilon < 1, \tag{12}$$

і нехай вектор-функція F задовольняє умову (8) та належить простору $\overline{H}_{q+1+n(m-1)+\gamma}(\Omega_{\widehat{\omega}}^{p+1})$, $q \geq n$. Тоді існує $\widehat{\omega}$-періодичний розв'язок системи (1) з простору $\overline{H}_q(\Omega_{\widehat{\omega}}^{p+1})$, який зображується рядом (11) і за умови (7) неперервно залежить від $F(\widehat{x})$.

Д о в е д е н н я. З формули (11), оцінок (10), (12) та умови (7) одержуємо, що

$$\|u\|^2_{\overline{H}_q(\Omega_{\widehat{\omega}}^{p+1})} \leq C_0 \|F\|^2_{\overline{H}_{q+1+n(m-1)+\gamma}(\Omega_{\widehat{\omega}}^{p+1})},$$

де $C_0 = C_0(m,n,p) > 0$, звідки й випливає доведення теореми. ■

Виясн имо умови виконання оцінки (12). Для визначника $\Delta(\widehat{k};\widehat{\omega})$ системи (4) справедливе таке зображення:

$$\Delta(\widehat{k};\widehat{\omega}) = i^{mn} \sum_{|r|=mn} B_r \prod_{\sigma=0}^{p} \left(\frac{2\pi k_\sigma}{\omega_\sigma}\right)^{r_\sigma}, \tag{13}$$

де $r = (r_0, r_1, \ldots, r_p)$; $|r| = r_0 + r_1 + \cdots + r_p$;

$$B_r = \sum_{\nu=0}^{p} \sum_{\sum\limits_{j=1}^{m} q_\nu^{(j)}=r_\nu} \det \left\| a_{lj}^{q^{(j)}} \right\|_{l,j=1}^{m}, \quad q^{(j)} = (q_0^{(j)}, q_1^{(j)}, \ldots, q_p^{(j)});$$

$\left\{ a_{lj}^{q^{(j)}} \right\}_{l=1}^{m}$ – j-й стовпчик будь-якої з матриць $A_{\widehat{s}}$, $|\widehat{s}| = n$; $q_\nu^{(j)}$ – ν-та компонента вектора $\widehat{s}$, що відповідає цій матриці; причому $B_{mn,0,\ldots,0} = \det A_{n,0,\ldots,0} \neq 0$.

Позначимо через $b = (b_1, \ldots, b_\alpha)$ вектор, складений з усіх коефіцієнтів $B_{r_0,r_1,\ldots,r_p} (2\pi/\omega_0)^{r_0} (2\pi/\omega_1)^{r_1} \cdots (2\pi/\omega_p)^{r_p}$ (відносно змінних $k_0, k_1, \ldots, k_p$), де α – кількість розв'язків із $\mathbb{Z}_+^{p+1}$ рівняння $r_0 + r_1 + \cdots + r_p = mn$.

Теорема 3. *Якщо $\gamma \geq mnp$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{p+1}$) векторів $\widehat{\omega} = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_p)$ нерівність (12) виконується для всіх $\widehat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}$ таких, що $k_0 \neq 0$, $|k| > K(\widehat{\omega})$.*

Д о в е д е н н я. Твердження теореми випливає з формули (5), леми 3.2 і з рівномірної обмеженості величин $\lambda_j(k)$, $j = 1, \ldots, mn$. ■

Теорема 4. *Нехай $mn \geq 2$. Якщо $\gamma \geq p$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\alpha$) векторів $b = (b_1, \ldots, b_\alpha)$ нерівність (12) виконується для всіх $\widehat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}$, $k_0 \neq 0$, $|k| > K(b)$.*

Д о в е д е н н я. Нехай $b_1 = B_{mn,0,\ldots,0} (2\pi/\omega_0)^{mn}$. Тоді

$$|\Delta(\widehat{k};\widehat{\omega})| \equiv |k_0|^{mn} \, |b_1 + J(\widehat{k}; b_2, \ldots, b_\alpha)|. \tag{14}$$

Для доведення теореми достатньо показати, що для майже всіх векторів b нерівність

$$|b_1 + J(\widehat{k}; b_2, \ldots, b_\alpha)| < |k_0|^{-mn} h^{-p-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{15}$$

де $h = \max\limits_{0\leq j\leq p} |k_j|$, має лише скінченну кількість розв'язків у цілих числах $k_0, k_1, \ldots, k_p$, $k_0 \neq 0$.

Позначимо через B множину тих векторів b, що належать α-вимірному паралелепіпеду $Q_\alpha = [\alpha_1, \beta_1] \times Q_{\alpha-1}$, для яких нерівність (15) справджується для нескінченної кількості векторів $\widehat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}$, $k_0 \neq 0$. Зафіксуємо вектор $\widehat{k}$ ($k_0 \neq 0$) і $b_2, \ldots, b_\alpha$. Тоді міра множини тих $b_1 \in [\alpha_1, \beta_1]$, для яких виконується нерівність (15), не перевищує $2|k_0|^{-mn}h^{-p-\varepsilon}$. Зафіксувавши h, позначимо через $Z_j(h)$, $j = 0, 1, \ldots, p$, сукупність векторів $\widehat{k}$ $(k_0 \neq 0)$, в яких $|k_j| = h$ і $|k_l| \leq h$, $l = 0, 1, \ldots, p$. Тоді для множини $B_j(h)$, $j = 1, \ldots, p$, тих $b_l \in [\alpha_1, \beta_1]$, для яких нерівність (15) виконується хоча б для одного вектора $\widehat{k} \in Z_j(h)$, отримуємо

$$\operatorname{mes} B_j(h) \leq C_1 \sum_{|k_0| \leq h} k_0^{-mn} \sum_{|k_1|, \ldots, |k_p| \leq h} h^{-p-\varepsilon} \leq C_2 h^{-1-\varepsilon}, \qquad (16)$$

оскільки число векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, що задовольняють умови $|k_j| = h$, $1 \leq j \leq p$, і $|k_l| \leq h$, $l = 1, \ldots, p$, дорівнює $(2h+1)^{p-1} \leq 3^{p-1}h^{p-1}$. Для випадку $k_0 = h$ аналогічно одержуємо

$$\operatorname{mes} B_0(h) \leq C_3 h^{-mn-\varepsilon}. \qquad (17)$$

Підсумовуючи оцінки (16), (17) за j $(j = 0, 1, \ldots, p)$ та інтегруючи по паралелепіпеду $Q_{\alpha-1}$, а потім підсумовуючи за h $(h \in \mathbb{N})$, одержуємо

$$\operatorname{mes} B \leq \sum_{h=1}^{\infty} \int_{Q_{\alpha-1}} \frac{C_4 db_2 \ldots db_\alpha}{h^{1+\varepsilon}} \leq \sum_{h=1}^{\infty} \frac{C_5(Q_{\alpha-1})}{h^{1+\varepsilon}}, \quad 0 < \varepsilon < 1. \qquad (18)$$

Твердження теореми випливає зі збіжності ряду (18) та леми 3.1. ■

Розглянемо тепер оцінку знизу виразу $|\Delta(\widehat{k}; \widehat{\omega})|$ для тих векторів $k \in \mathbb{Z}^{p+1}$, в яких $k_0 = 0$. Позначимо через $d = (d_1, \ldots, d_\theta)$ вектор, складений із коефіцієнтів $B_{0,r_1,\ldots,r_p}(2\pi/\omega_1)^{r_1} \cdots (2\pi/\omega_p)^{r_p}$, $r_1 + \ldots + r_p = mn$ (див. формулу (13)), де θ – кількість розв'язків із $\mathbb{Z}^p$ рівняння $r_1 + \ldots + r_p = mn$. Із (13) і теореми 3.3 випливає таке твердження.

Теорема 5. *Нехай $mn \leq 2$. Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\theta$) векторів $d = (d_1, \ldots, d_\theta)$ нерівність (12) виконується при $\gamma \geq p$ для всіх векторів $\widehat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}$ таких, що $k_0 = 0$, $|k| > K(d)$.*

Якщо $mn = 1$, то система (1) зводиться до одного рівняння першого порядку

$$\sum_{j=0}^{p} a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = F(\widehat{x}),$$

де a_j, $j = 1, \ldots, p$, – дійсні числа, $a_0 \neq 0$. У цьому випадку

$$\Delta(\widehat{k}; \widehat{\omega}) = a_0 \frac{2\pi}{\omega_0} k_0 + a_1 \frac{2\pi}{\omega_1} k_1 + \cdots + a_p \frac{2\pi}{\omega_p} k_p.$$

Із теореми 3.2 (див. також теорему 3.3) випливає така теорема.

Теорема 6. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^p$) векторів $\bar{\omega} = (b_0 a_1/\omega_1, \ldots, b_0 a_p/\omega_p)$, де $b_0 = -\omega_0/a_0$, нерівність*

$$\left| a_0 \frac{2\pi}{\omega_0} k_0 + a_1 \frac{2\pi}{\omega_1} k_1 + \cdots + a_p \frac{2\pi}{\omega_p} k_p \right| > |k|^{-p-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

виконується для всіх $\widehat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}$, $|\widehat{k}| > K(\bar{\omega})$.

6.2. Системи рівнянь з молодшими членами

Результати п. 6.1 узагальнимо на випадок системи диференціальних рівнянь із частинними похідними вигляду

$$\frac{\partial^{n_j} u_j}{\partial x_0^{n_j}} - \sum_{r=1}^{m} P_{jr}\Big(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_p}\Big) u_r = F_j(\widehat{x}), \; j = 1, \ldots, m, \quad (19)$$

де $n_1 + \cdots + n_m = n$, $\widehat{x} \in \Omega_{\widehat{\omega}}^{p+1}$, $P_{jr}(\lambda, \xi_1, \ldots, \xi_p)$ – поліноми зі сталими коефіцієнтами степеня не вище K за сукупністю змінних $\xi_1, \ldots, \xi_p$ та степеня не вище $n_r - 1$ за змінною λ. Припустимо, що система рівнянь (19) є гіперболічною за Гордінгом у напрямку вектора $(1, 0, \ldots, 0)$, тобто що корені $\lambda_j(\xi)$, $j = 1, \ldots, n$, рівняння

$$\det \|P_{jr}(\lambda, i\xi_1, \ldots, i\xi_p) - \lambda^{n_j}\delta_{jr}\|_{j,r=1}^{m} = 0 \qquad (20)$$

для довільного вектора $\xi \in \mathbb{C}^p$ задовольняють умови

$$\operatorname{Re} \lambda_j(\xi) \leq c_1|\xi| + c_2, \; j = 1, \ldots, n, \qquad (21)$$

а для довільного дійсного вектора $\xi = \eta \in \mathbb{R}^p$ – умови

$$\operatorname{Re} \lambda_j(\eta) \leq c, \; j = 1, \ldots, n, \qquad (22)$$

де c_1, c_2, c – деякі дійсні сталі.

Позначимо $\gamma_j = 2\pi i/\omega_j$, $j = 0, 1, \ldots, p$. Будемо шукати $\widehat{\omega}$-періодичні розв'язки системи рівнянь (19) із простору $\overline{H}_q(\Omega_{\widehat{\omega}}^{p+1})$, $\bar{q} = (q_1, \ldots, q_m)$, $q_j \geq K + n_j$, $j = 1, \ldots, m$, у вигляді векторного ряду (3). Тоді для визначення кожного сталого вектора $u_{\widehat{k}}$ одержуємо систему алгебричних рівнянь

$$(\gamma_0 k_0)^{n_j} u_{j\widehat{k}} = F_{j\widehat{k}} + \sum_{r=1}^{m} P_{jr}(\gamma_0 k_0, \gamma_1 k_1, \ldots, \gamma_p k_p) u_{r\widehat{k}}, \; j = 1, \ldots, m, \; (23)$$

де $F_{j\widehat{k}}$, $\widehat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}$, – коефіцієнти розвинення в ряд вигляду (3) функції $F_j(\widehat{x})$, $j = 1, \ldots, m$. Визначник системи (23) має вигляд

$$\Delta(\widehat{k}; \widehat{\omega}) \equiv \det \Big\| (\gamma_0 k_0)^{n_j}\delta_{jr} - P_{jr}(\gamma_0 k_0, \gamma_1 k_1, \ldots, \gamma_p k_p) \Big\|_{j,r=1}^{m}. \qquad (24)$$

Зауваження 3. При $\widehat{k} = 0$ система рівнянь (23) має єдиний розв'язок, коли

$$\Delta(0;\widehat{\omega}) \equiv \det \left\| P_{jr}(0,0,\ldots,0) \right\|_{j,r=1}^{m} \neq 0. \qquad (25)$$

У протилежному випадку відповідна однорідна система має $(m-\rho)$ лінійно незалежних розв'язків, де $\rho = \operatorname{rang} \left\| P_{jr}(0,0,\ldots,0) \right\|_{j,r=1}^{m}$, а розв'язок $u_{(0)}$ системи (23) існує тоді і тільки тоді, коли

$$\operatorname{rang} \left\| P_{jr}(0,0,\ldots,0) \right\|_{j,r=1}^{m} = $$

$$= \operatorname{rang} \left\| \begin{matrix} P_{11}(0,0,\ldots,0) & \ldots & P_{1m}(0,0,\ldots,0) & F_{1(0)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{m1}(0,0,\ldots,0) & \ldots & P_{mm}(0,0,\ldots,0) & F_{m(0)} \end{matrix} \right\|. \qquad (26)$$

Справедливе твердження, доведення якого аналогічне доведенню теореми 1.

Теорема 7. *Для того щоб два розв'язки системи рівнянь (19) з простору* $\overline{H}_{\tilde{q}}(\Omega^{p+1}_{\widehat{\omega}})$, $\tilde{q} = (K+n_1,\ldots,K+n_m)$, *відрізнялися лише адитивним сталим вектором, необхідно і достатньо, щоб рівняння*

$$\det \left\| (\gamma_0 k_0)^{n_j}\delta_{jr} - P_{jr}(\gamma_0 k_0, \gamma_1 k_1, \ldots, \gamma_p k_p) \right\|_{j,r=1}^{m} = 0 \qquad (27)$$

не мало нетривіальних розв'язків в цілих числах $k_0, k_1, \ldots, k_p$. *Якщо, крім цього, виконується умова (25), то має місце єдиність розв'язку розглядуваної задачі.*

Зауваження 4. Якщо $\Delta(0;\widehat{\omega}) = 0$, то за умови (7) та умов теореми 7 розглядувана задача не може мати двох різних розв'язків.

Надалі будемо припускати, що для всіх $\widehat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1} \setminus \{0\}$ виконується умова $\Delta(\widehat{k};\widehat{\omega}) \neq 0$. Тоді для кожного $\widehat{k} \neq 0$ система рівнянь (23) має єдиний розв'язок, який зображується формулами вигляду (9), де

$$\Delta_{l\varkappa}(\widehat{k};\widehat{\omega}) \equiv \det \left\| (\gamma_0 k_0)^{n_j}\delta_{jr} - P_{jr}(\gamma_0 k_0, \gamma_1 k_1, \ldots, \gamma_p k_p) \right\|_{\substack{j,r=1 \\ j\neq l, r\neq \varkappa}}^{m}. \qquad (28)$$

Очевидно, що

$$|\Delta_{l\varkappa}(\widehat{k};\widehat{\omega})| \leq C|\widehat{k}|^{K(m-1)+n-n_\varkappa}, \; l,\varkappa = 1,\ldots,m, \qquad (29)$$

де стала $C > 0$ не залежить від $\widehat{k}$.

Стосовно розв'язності розглядуваної задачі справедливі такі твердження.

Теорема 8. *Нехай* $\Delta(\widehat{k};\widehat{\omega}) \neq 0$ *для всіх* $\widehat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}$ *і нехай існують* $M > 0$ *і* $\gamma \in \mathbb{N}$ *такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів* $\widehat{k}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\widehat{k};\widehat{\omega})| \geq M|\widehat{k}|^{-\gamma-\varepsilon}, \; 0 < \varepsilon < 1. \qquad (30)$$

Якщо $F(\widehat{x}) \in \overline{H}_N(\Omega^{p+1}_{\widehat{\omega}})$, *де* $N = n + K(m-1) + \tilde{q} + \gamma + 1$, $\tilde{q} = \max\limits_{1\leq j\leq m}(q_j - n_j) \geq K$, *то існує розв'язок системи рівнянь (19) із простору* $\overline{H}_Q(\Omega^{p+1}_{\widehat{\omega}})$, $Q = (q_1,\ldots,q_m)$, $q_j \geq K + n_j$, $j = 1,\ldots,m$, *який неперервно залежить від вектор-функції* $F(\widehat{x})$.

Теорема 9. *Нехай* $\Delta(\widehat{k};\widehat{\omega}) \neq 0$, $\widehat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}\setminus\{0\}$, *а* $\Delta(0;\widehat{\omega}) = 0$, *і нехай справджується рівність (26). Тоді за умов теореми 8 існує розв'язок системи рівнянь (19) з простору* $\overline{H}_Q(\Omega^{p+1}_{\widehat{\omega}})$, $Q = (q_1,\ldots,q_m)$, $q_j \geq K + n_j$, $j = 1,\ldots,m$, *який за умови (7) неперервно залежить від* $F(\widehat{x})$.

Доведення теорем 8 та 9 аналогічні доведенню теореми 2.

Дослідимо оцінку (30). Для цього визначник $\Delta(\widehat{k};\widehat{\omega})$ зобразимо у вигляді

$$\Delta(\widehat{k};\widehat{\omega}) = \prod_{j=1}^{n} \left(ik_0\frac{2\pi}{\omega_0} - \lambda_j(k) \right), \qquad (31)$$

де $\lambda_j(k)$, $j = 1,\ldots,n$, – корені рівняння (20) при $\xi_r = 2\pi k_r/\omega_r$, $r = 1,\ldots,p$. Надалі будемо вважати, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ $\lambda_j(k) \neq 0$, $j = 1,\ldots,n$.

Теорема 10. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^{p+1}$*) векторів* $\widehat{\omega}$ *нерівність (30) виконується при* $\gamma \geq np$ *для всіх векторів* $\widehat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}$, *для яких* $k_0 \neq 0$, $|\widehat{k}| > K_1(\widehat{\omega})$.

Доведення. Очевидно, що

$$|\Delta(\widehat{k};\widehat{\omega})| \geq ||k||_{\omega}^{n} \prod_{j=1}^{n} \left| \frac{\operatorname{Im}\lambda_j(k)}{||k||_{\omega}} - \frac{2\pi}{\omega_0}\frac{k_0}{||k||_{\omega}} \right|.$$

Величини $\operatorname{Im} \lambda_j(k)/\|k\|_\omega$, $j = 1, \ldots, n$, є обмеженими зверху рівномірно за k (див. [34], с. 83). Тому доведення теореми випливає з леми 3.3. ∎

Позначимо через $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_q)$ вектор, складений з усіх коефіцієнтів полінома

$$\Delta((0, k); \widehat{\omega}) \equiv \det \left\| P_{jr}\left(0, ik_1 \frac{2\pi}{\omega_1}, \ldots, ik_p \frac{2\pi}{\omega_p}\right) \right\|_{j,r=1}^{m},$$

як полінома змінних $k_1, \ldots, k_p$.

Теорема 11. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^q$) векторів η при $\gamma \geq p$ нерівність (30) виконується для всіх $\widehat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}$ таких, що $k_0 = 0$ і $|k| > K_2(\eta)$.*

Д о в е д е н н я. Якщо виконується умова (25), то доведення теореми проводиться за схемою доведення теореми 3.4, а в протилежному випадку твердження теореми випливає з теореми 3.3. ∎

Розділ III

Задачі з нелокальними умовами для диференціальних рівнянь і систем рівнянь з частинними похідними

Досліджуються питання коректності та побудови розв'язків задач з нелокальними двоточковими та багатоточковими умовами, а також з інтегральними умовами за змінною t для гіперболічних, параболічних і безтипних рівнянь та систем рівнянь зі сталими і змінними коефіцієнтами. Крім лінійних, розглядаються слабконелінійні рівняння, а також системи рівнянь, збурені нелінійними інтегро-диференціальними доданками.

§ 7. Гіперболічні рівняння

Досліджено задачі з нелокальними (що узагальнюють умови періодичності) умовами за часовою координатою та різними варіантами крайових умов за просторовими змінними для лінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами та для слабконелінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами в головній частині, а також задачі з інтегральними умовами за часовою змінною для рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

7.1. Рівняння з факторизованим оператором зі змінними за t коефіцієнтами

Тут узагальнено результати §5 на випадок нелокальних крайових умов за змінною t [197]. В області D^p розглядаємо задачу

$$L[u] \equiv \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{r=1}^{p} \alpha_{rj}(t)\frac{\partial}{\partial x_r} - \beta_j(t)\right)^{n_j} u(t,x) = f(t,x), \tag{1}$$

$$M_l[u] \equiv \sum_{\substack{|\widehat{s}|\le n\\ s_0\le n-1}} A_{l\widehat{s}} \frac{\partial^{|\widehat{s}|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots x_p^{s_p}}\Big|_{t=0} -$$

$$-\mu \sum_{\substack{|\widehat{s}|\le n\\ s_0\le n-1}} A_{l\widehat{s}} \frac{\partial^{|\widehat{s}|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots x_p^{s_p}}\Big|_{t=T} = \varphi_l(x),\ l=1,\ldots,n, \tag{2}$$

де $n_1+\cdots+n_m = n$; $\alpha_{rj}(t)$, $\beta_j(t)$, $r=1,\ldots,p$, $j=1,\ldots,m$, – дійснозначні функції, які $n_1+\cdots+n_j-1$ та n разів відповідно неперервно диференційовні на відрізку $[0,T]$ і задовольняють умови

$$\alpha_{rj}^{(\nu)}(0) = \alpha_{rj}^{(\nu)}(T),$$

$$\nu = 0,1,\ldots,n_1+\cdots+n_j-1,\ j=1,\ldots,m,\ r=1,\ldots,p,$$

$$\beta_j^{(\nu)}(0) = \beta_j^{(\nu)}(T),\ \nu=0,1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m,$$

μ ($\mu\ne 0;1$) та $A_{l\widehat{s}}$, $l=1,\ldots,n$, $|\widehat{s}|\le n$, $s_0\le n-1$, – комплексні числа. Вважатимемо, що виділені множники в (1) є попарно різними.

Розв'язок задачі (1), (2) будемо шукати в просторі $H_q^n(D^p)$, $q\ge n$, припускаючи, що $f(t,x)\in H_{N_1}^0(D^p)$ і $\varphi_l(x)\in H_{N_2}(\Omega_{2\pi}^p)$, $l=1,\ldots,n$, де N_1 та N_2 – досить великі натуральні числа. Дослідження задачі (1), (2) проведемо за схемою, розглянутою в §5.

Розв'язок задачі (1). (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\ge 0} u_k(t)\exp(ik,x). \tag{3}$$

Тоді кожна з функцій $u_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, є розв'язком відповідного рівняння (5.2), який задовольняє умови

$$M_{k,l}[u_k] \equiv \sum_{\substack{|\widehat{s}|\le n\\ s_0\le n-1}} A_{l\widehat{s}}(ik_1)^{s_1}\ldots(ik_p)^{s_p}u_k^{(s_0)}(0) -$$

$$-\mu \sum_{\substack{|\widehat{s}|\le n\\ s_0\le n-1}} A_{l\widehat{s}}(ik_1)^{s_1}\ldots(ik_p)^{s_p}u_k^{(s_0)}(T) = \varphi_{lk},\ l=1,\ldots,n, \tag{4}$$

де φ_{lk}, $k\in\mathbb{Z}^p$, – коефіцієнти Фур'є функції $\varphi_l(x)$.

Однорідне рівняння (5.2′) має фундаментальну систему розв'язків (5.5), а розв'язок рівняння (5.2′), який задовольняє умови

$$M_{k,l}[u_k] = 0, \tag{4′}$$

зображується у вигляді

$$\widetilde{u}_k(t) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n_{m-j+1}} C_{k,j\nu}u_{k,j\nu}(t). \tag{5}$$

Коефіцієнти $C_{k,j\nu}$ визначаються з системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n_{m-j+1}} C_{k,j\nu}M_{k,l}[u_{k,j\nu}(t)] = 0,\quad l=1,\ldots,n,$$

детермінант $\Delta(k)$ якої має вигляд

$$\Delta(k) = A(k)\prod_{j=1}^{m} B_j\left(1-\mu\exp\int_0^T\left(i\sum_{r=1}^{p}k_r\alpha_{rj}(y)+\beta_j(y)\right)dy\right)^{n_j}, \tag{6}$$

де $B_j = 1!\,2!\cdots(n_j-1)!$;

$$A(k) \equiv \det\left\|\sum_{|s|\le n-\nu} A_{l;\nu s}(ik_1)^{s_1}\ldots(ik_p)^{s_p}\right\|_{\substack{l=1,\ldots,n\\ \nu=0,1,\ldots,n-1}}. \tag{7}$$

З формул (3), (5)–(7) та з теореми про єдиність розвинення в ряд Фур'є періодичної функції випливає таке твердження.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі (1), (2) в просторі $H_n^n(D^p)$ необхідно і достатньо, щоб рівняння*

$$1-\mu\exp\int_0^T\left(i\sum_{r=1}^{p}k_r\alpha_{rj}(t)+\beta_j(t)\right)dt = 0,\quad j=1,\ldots,m, \tag{8}$$

$$A(k) = 0 \tag{9}$$

не мали розв'язків у цілих числах $k_1,\ldots,k_p$.

Розв'язок задачі (5.2), (4) зображується у вигляді суми

$$u_k(t) = U_k(t) + V_k(t), \tag{10}$$

де $U_k(t)$ – розв'язок задачі (5.2), (4′), а $V_k(t)$ – розв'язок задачі (5.2′). (4). Надалі вважатимемо, що рівняння (8) та (9) не мають розв'язків у цілих числах $k_1,\ldots,k_p$. Тоді для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ існує єдина функція Гріна $G_k(t,\tau)$ задачі (5.2′), (4′), за допомогою якої розв'язок неоднорідної задачі зображується у вигляді

$$U_k(t)=\int\limits_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)\,d\tau. \tag{11}$$

Функція $G_k(t,\tau)$ у квадраті K_T, крім сторін $\tau=0$ і $\tau=T$, визначається формулами вигляду (5.11), (5.12), в яких вирази

$$1-\exp\int\limits_0^T\Big(i\sum_{r=1}^p k_r\alpha_{r\sigma}(y)+\beta_\sigma(y)\Big)\,dy$$

треба замінити на

$$1-\mu\exp\int\limits_0^T\Big(i\sum_{r=1}^p k_r\alpha_{r\sigma}(y)+\beta_\sigma(y)\Big)\,dy,$$

а під $\Phi^{l\xi}_{j\nu}$, $\xi=1,\dots,n_{m-l+1}$, $\nu=1,\dots,n_{m-j+1}$, $j,l=1,\dots,m$, треба розуміти визначник, одержаний з визначника

$$\det\Big\|u^{(r)}_{k,j\nu}(0)-\mu u^{(r)}_{k,j\nu}(T)\Big\|_{\substack{r=0,1,\dots,n-1\\ \nu=1,\dots,n_{m-j+1},j=1,\dots,m}}$$

шляхом заміни $\operatorname{col}\{u^{(r)}_{k,j\nu}(0)-\mu u^{(r)}_{k,j\nu}(T)\}_{r=0,1,\dots,n-1}$ на $\operatorname{col}\{u^{(r)}_{k,l\xi}(0)-$ $-\mu u^{(r)}_{k,l\xi}(T)\}_{r=0,1,\dots,n-1}$ при $\xi<\gamma_{ml}-\gamma_{mj}+\nu$, якщо $\xi>\gamma_{ml}-\gamma_{mj}+\nu$, то $\Phi^{l\xi}_{j\nu}=0$ (γ_{qj} визначені формулами (5.4)). При цьому справджуються оцінки

$$\Big|\frac{\partial^l}{\partial t^l}\int\limits_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)\,d\tau\Big|\le C_1|k|^l\int\limits_0^T|f_k(\tau)|\,d\tau\,\times$$
$$\times\prod_{j=1}^m\Big|1-\mu\exp\int\limits_0^T\Big(i\sum_{r=1}^p k_r\alpha_{rj}(y)+\beta_j(y)\Big)\,dy\Big|^{-n_j},\ l=0,1,\dots,n, \tag{12}$$

де стала $C_1>0$ не залежить від k.

Розв'язок задачі (5.2′), (4) визначається формулою

$$V_k(t)=\sum_{j=1}^m\sum_{l=1}^{n_{m-j+1}}\frac{u_{k,jl}(t)}{\Delta(k)}\sum_{\varkappa,\nu=1}^n(-1)^{\varkappa+\nu}\varphi_{k\varkappa}A_{\varkappa\nu}(k)\,\times$$
$$\times\det\Big\|u^{(r)}_{k,b\xi}(0)-\mu u^{(r)}_{k,b\xi}(T)\Big\|_{\substack{r=0,1,\dots,n-1,r\ne j-1\\ \xi=1,\dots,n_{m-b+1},b=1,\dots,m,h_b\ne h_j}}, \tag{13}$$

де $h_\sigma=\gamma_{q\sigma}+l$, $\sigma=1,\dots,m$, $l=1,\dots,n_{m-\sigma+1}$; $A_{\varkappa\nu}(k)$ – визначник, одержаний із визначника (7) шляхом викреслення $\varkappa$-го рядка і ν-го стовпця. На основі формул (13) і (6) одержуємо такі оцінки:

$$|V_k^{(r)}(t)|\le\frac{C_2|k|^{r+1+n(n+1)/2}\sum\limits_{\nu=1}^n|\varphi_{k\nu}|\big(A(k)\big)^{-1}}{\prod\limits_{j=1}^m\Big|1-\mu\exp\int\limits_0^T\Big(i\sum\limits_{r=1}^p k_r\alpha_{rj}(y)+\beta_j(y)\Big)\,dy\Big|^{n_j}}, \tag{14}$$
$$r=0,1,\dots,n,$$

де стала $C_2>0$ не залежить від k.

Розв'язок задачі (1), (2) формально зображується рядом

$$u(t,x)=\sum_{|k|\ge0}\big(U_k(t)+V_k(t)\big)\exp(ik,x), \tag{15}$$

який, взагалі, є розбіжним, оскільки знаменники у виразах для $U_k(t)$ та $V_k(t)$ можуть набувати як завгодно близьких до нуля значень для нескінченної множини векторів $k\in\mathbb{Z}^p$.

Теорема 2. *Нехай виконані умови єдиності розв'язку задачі (1), (2) і нехай існують додатні сталі M_1, M_2 та числа $\gamma_1,\gamma_2\in$ $\in\mathbb{N}$ такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ справджуються нерівності*

$$\Big|1-\mu\exp\int\limits_0^T\Big(i\sum_{r=1}^p k_r\alpha_{rj}(y)+\beta_j(y)\Big)dy\Big|\ge M_1|k|^{\gamma_1-\varepsilon/(2n)}, \tag{16}$$
$$j=1,\dots,m,$$

$$|A(k)|\ge M_2|k|^{\gamma_2-\varepsilon/2},\quad 0<\varepsilon<1. \tag{17}$$

Якщо $f(t,x)\in H^0_{q+n\gamma_1+1}(D^p)$, $\varphi_l(x)\in H_{q+n(n+1)/2+n\gamma_1+\gamma_2}(\Omega^p_{2\pi})$, $l=$ $=1,\dots,n$, то існує розв'язок задачі (1), (2) з простору $H^n_q(D^p)$, $q\ge n$, який неперервно залежить від функцій $f(t,x)$ та $\varphi_l(x)$, $l=1,\dots,n$.

Д о в е д е н н я. На основі формул (11), (13), (15) та оцінок (12), (14), (16), (17) одержуємо

$$\|u)\|^2_{H^n_q(D^p)}\le C_3\|f\|^2_{H^0_{N_1}(D^p)}+C_4\sum_{j=1}^n\|\varphi_l\|_{H_{N_2}(\Omega^p_{2\pi})}. \tag{18}$$

де $N_1=q+n\gamma_1+1$, $N_2=q+n(n+1)/2+n\gamma_1+\gamma_2$, а C_3 та C_4 – додатні сталі, що залежать від n, m, T. З нерівності (18) випливає доведення теореми. ■

Дослідимо умови виконання оцінок (16) та (17). Введемо позначення

$$a_{rj} = \int_0^T \alpha_{rj}(y)\,dy, \; b_j = \int_0^T \beta_j(y)\,dy, \; r = 1,\ldots,p, \; j = 1,\ldots,m.$$

Легко показати, що

$$\Big|1 - \mu \exp\Big(i\sum_{r=1}^p k_r a_{rj} + b_j\Big)\Big| \ge \Big|\frac{1}{\pi}\Big(\psi + \sum_{r=1}^p k_r a_{rj}\Big) - d_j(k)\Big| |\mu| \exp b_j,$$
$$j = 1,\ldots,m,$$

де $\psi = \operatorname{arctg}(\operatorname{Im}\mu/\operatorname{Re}\mu)$, а $d_j(k) \in \mathbb{Z}$ задовольняє нерівність

$$\Big|\frac{1}{\pi}\Big(\psi + \sum_{r=1}^p k_r a_{rj}\Big) - d_j(k)\Big| \le \frac{1}{2}.$$

З одержаних нерівностей та з теореми 3.2 випливає таке твердження.

Теорема 3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{p+1}$) векторів $a_j = (\psi, a_{rj};\ r = 1,\ldots,p)$, $j = 1,\ldots,m$, нерівності (16) виконуються при $\gamma_1 \ge p+1$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.*

Визначник (7) є поліномом степеня $n(n+1)/2$ щодо змінних $k_1,\ldots,k_p$; його можна подати у вигляді

$$A(k) = \sum_{|r|\le n(n+1)/2} B_r i^{|r|} k_1^{r_1}\cdots k_p^{r_p},$$

де

$$B_r = \sum_{\sum_{\nu=0}^{n-1} s_j^{(\nu)} = r_j,\, j=1,\ldots,p} \det\|A_{l,\nu s(\nu)}\|_{\substack{l=1,\ldots,n\\ \nu=0,1,\ldots,n-1}},$$

$s^{(\nu)} = (s_1^{(\nu)},\ldots,s_p^{(\nu)})$ – мультиіндекс такий, що $|s^{(\nu)}| \le n-\nu$.

Позначимо через $\beta^{(1)} = (\beta_1^{(1)},\ldots,\beta_h^{(1)})$ і $\beta^{(2)} = (\beta_1^{(2)},\ldots,\beta_h^{(2)})$ вектори, компоненти яких є дійсними та уявними частинами відповідно коефіцієнтів $i^{|r|}B_r$; h – число цих коефіцієнтів, тобто кількість розв'язків із $\mathbb{Z}_+^p$ нерівності $r_1+\cdots+r_p \le n(n+1)/2$.

Теорема 4. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^h$) векторів $\beta^{(1)}$ і для всіх $\beta^{(2)}$ (або для майже всіх векторів $\beta^{(2)}$ і для всіх $\beta^{(1)}$) оцінка (17) справджується при $\gamma_2 \ge p$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.*

Д о в е д е н н я. Якщо $B_0 \ne 0$, то доведення теореми проводимо за схемою доведення теореми 3.4. Якщо ж $B_0 = 0$, то доведення випливає з теореми 3.3. ∎

7.2. Рівняння зі змінними за x коефіцієнтами

В області Q розглядаємо задачу [38]

$$Pu \equiv \sum_{j=0}^n a_j\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^{2j} L^{n-j}u(t,x) = f(t,x), \tag{19}$$

$$M_l u \equiv \sum_{\substack{j+2s\le 2n\\ j<2n}} b_{ljs}(-L)^s\Big(\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}\Big|_{t=0} - \mu\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}\Big|_{t=T}\Big) = \varphi_l(x), \tag{20}$$
$$l = 1,\ldots,2n,$$

$$L^r u(t,x)|_{\partial G} = 0, \quad r = 0,1,\ldots,n-1, \tag{21}$$

де $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0,1,\ldots,n$, $a_n \ne 0$, $a_0 \ne 0$, $b_{ljs} \in \mathbb{C}$, $l = 1,\ldots,2n$, $j+2s \le 2n$, $j < 2n$, $\mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, L – диференціальний оператор, еліптичний в області $G \subset \mathbb{R}^p$, з дійснозначними достатньо гладкими в G коефіцієнтами $p_{ij}(x)$, $i,j = 1,\ldots,p$, та $q(x) \ge 0$. Оператор L має вигляд

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(p_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\Big) - q(x).$$

Припустимо, що в області Q рівняння (20) є строго гіперболічним за Петровським; тоді всі η-корені рівняння

$$\sum_{j=0}^n a_j\eta^{2j} = 0 \tag{22}$$

є дійсні та різні.

Нехай $G \in A^{2n,\nu}$, $p_{ij}(x) \in C^{2n-1,\nu}$, $i,j = 1,\ldots,p$, $q(x) \in C^{2n-2,\nu}$; тоді задача на власні значення

$$LX(x) = -\lambda X(x), \qquad X(x)|_{\partial G} = 0 \tag{23}$$

має повну ортогональну (вважатимемо, що вона є ортонормована) в просторі $L_2(G)$ систему класичних власних функцій $\{X_k(x),\ k \in \mathbb{N}\}$, а відповідні їм власні числа λ_k, $k \in \mathbb{N}$, множину яких позначимо через Λ, є різні та додатні; при цьому $X_k(x) \in C^{2n}(\overline{G})$, $k \in \mathbb{N}$, і справедливі такі оцінки [70, 170]:

$$c_0 k^{2/p} \le \lambda_k \le c_1 k^{2/p}, \quad 0 < c_0 \le c_1,\ k \in \mathbb{N}, \tag{24}$$

$$\max_{x\in\bar{G}}\left|\frac{\partial^{|s|}X_k(x)}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}\right|\le c_2\lambda_k^{p/4+|s|/2},\ c_2=c_2(|s|),\ |s|=0,1,\ldots,2n. \quad (25)$$

Якщо $f(t,x)\in C([0,T],L_2(G))$, $\varphi_l(x)\in L_2(G)$, $l=1,\ldots,2n$, то справедливі розвинення

$$f(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)X_k(x),\quad \varphi_l(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{lk}X_k(x),\ l=1,\ldots,2n, \quad (26)$$

де

$$f_k(t)=\int_G f(t,x)X_k(x)\,dx,\quad \varphi_{lk}=\int_G \varphi_l(x)X_k(x)\,dx,\ l=1,\ldots,2n. \quad (27)$$

Розв'язок задачі (19)–(21) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)X_k(x). \quad (28)$$

Якщо ряд (28) і ряди, отримані з нього почленним диференціюванням за змінними $x_1,\ldots,x_p$ до порядку $2n$ включно, є рівномірно збіжними в області $\bar{Q}$, то функція $u(t,x)$, визначена формулою (28), задовольняє крайові умови (21). Підставивши ряди (26) і (28) у рівняння (19) та умови (20), бачимо, що кожна з функцій $u_k(t)$, $k\in\mathbb{N}$, є розв'язком такої задачі:

$$\sum_{j=0}^{n}a_j(-\lambda_k)^{n-j}u_k^{(2j)}(t)=f_k(t), \quad (29)$$

$$\sum_{\substack{j+2s\le 2n\\ j<2n}}b_{ljs}\lambda_k^s\big(u_k^{(j)}(0)-\mu u_k^{(j)}(T)\big)=\varphi_{lk},\quad l=1,\ldots,2n. \quad (30)$$

Цей розв'язок зображується у вигляді суми

$$u_k(t)=U_k(t)+V_k(t), \quad (31)$$

де $U_k(t)$ – розв'язок рівняння (29), що задовольняє однорідні умови

$$\sum_{\substack{j+2s\le 2n\\ j<2n}}b_{ljs}\lambda_k^s\big(u_k^{(j)}(0)-\mu u_k^{(j)}(T)\big)=0,\quad l=1,\ldots,2n, \quad (30')$$

а $V_k(t)$ – розв'язок задачі з умовами (30) для однорідного рівняння

$$\sum_{j=0}^{n}a_j(-\lambda_k)^{n-j}u_k^{(2j)}(t)=0. \quad (29')$$

Позначимо η_q, $q=1,\ldots,n$, – додатні корені рівняння (22),

$$\sigma_q=\eta_q,\quad \sigma_{n+q}=-\eta_q,\quad q=1,\ldots,n.$$

Для кожного $\lambda_k\in\Lambda$ рівняння (29′) має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$u_{kq}(t)=\exp\big(i\sqrt{\lambda_k}\sigma_q t\big),\quad q=1,\ldots,2n, \quad (32)$$

а розв'язок задачі (29′), (30) зображується у вигляді

$$V_k(t)=\sum_{q=1}^{2n}c_{kq}\exp\big(i\sqrt{\lambda_k}\sigma_q t\big). \quad (33)$$

Коефіцієнти c_{kq}, $q=1,\ldots,2n$, у формулі (33) визначаються із системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{q=1}^{2n}\sum_{\substack{j+2s\le 2n\\ j<2n}}(-1)^{j/2}c_{kq}b_{ljs}\lambda_k^{s+j/2}\sigma_q^j\times$$

$$\times\big(1-\mu\exp\big(i\sqrt{\lambda_k}\sigma_q T\big)\big)=\varphi_{lk},\quad l=1,\ldots,2n, \quad (34)$$

визначник $\Delta(\lambda_k)$ якої обчислюємо за формулою

$$\Delta(\lambda_k)=(-1)^{3n^2/2}2^n\lambda_k^{n(2n-1)/2}D(\lambda_k)\prod_{1\le l<m\le n}\big(\sigma_m^2-\sigma_l^2\big)^2\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}\sigma_j\prod_{q=1}^{2n}\Big(1-\mu\exp\big(i\sqrt{\lambda_k}\sigma_q T\big)\Big), \quad (35)$$

де

$$D(\lambda_k)=\det\left\|\sum_{s=0}^{[(2n+1-j)/2]}b_{l,j-1,s}\lambda_k^s\right\|_{l,j=1}^{2n}.$$

При дослідженні питання про єдиність розв'язку задачі (19)–(21) розглядатимемо також відповідну однорідну задачу

$$Pu=0, \quad (19')$$

$$M_l u=0,\qquad l=1,\ldots,2n, \quad (20')$$

з умовами (21) за просторовими змінними. Задача (19)–(21) не може мати двох різних розв'язків тоді і тільки тоді, коли задача (19′), (20′), (21) має лише тривіальний розв'язок [175].

Теорема 5. *Для єдиності розв'язку задачі (19)–(21) у просторі $C^{2n}(\bar{Q})$ необхідно і досить, щоб для всіх $\lambda_k\in\Lambda$ виконувались умови*

$$1-\mu\exp\big(i\sqrt{\lambda_k}\sigma_q T\big)\ne 0,\quad q=1,\ldots,2n, \quad (36)$$

$$D(\lambda_k)\ne 0. \quad (37)$$

Доведення. Необхідність. Припустимо, що для деякого $\lambda_{\hat{k}}$ хоча б одна з умов (36), (37) не виконується. Тоді $\Delta(\lambda_{\hat{k}})=0$ та існують нетривіальні розв'язки $u_{\hat{k}}(t)$ задачі (29′), (30′) , які зображуються формулами вигляду (33), де коефіцієнти $c_{\hat{k},q}$, $q = 1, ..., 2n$, визначаються з однорідної системи рівнянь, що відповідає системі (34) при $\lambda_k = \lambda_{\hat{k}}$. Тому задача (19′), (20′), (21) має нетривіальні розв'язки вигляду

$$u(t,x) = u_{\hat{k}}(t) X_{\hat{k}}(x),$$

а розв'язок задачі (19)–(21), якщо він існує, не буде єдиним.

Достатність. Припустимо, що існують два розв'язки $u_1(t,x)$ і $u_2(t,x)$ задачі (19)–(21) з простору $C^{2n}(\bar{Q})$. Тоді функція

$$u(t,x) = u_2(t,x) - u_1(t,x)$$

є розв'язком задачі (19′), (20′), (21) з простору $C^{2n}(\bar{Q})$ і разом з функціями Pu і $M_l u$, $l = 1, ..., 2n$, розвивається в ряд Фур'є вигляду (28) за системою функцій $\{X_k(x),\ k \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, що ряди Фур'є для функцій Pu і $M_l u$, $l = 1, ..., 2n$, є такі ж, як ряди, одержані формальним застосуванням операторів P і M_l, $l = 1, ..., 2n$, до ряду (28). Із рівностей Парсеваля для функцій Pu і $M_l u$, $l = 1, ..., 2n$, випливає, що кожний з коефіцієнтів Фур'є $u_k(t)$ функції $u(t,x)$ є розв'язком задачі (29′), (30′). Якщо для всіх $\lambda_k \in \Lambda$ виконуються умови (36) та (37), то $\Delta(\lambda_k) \neq 0$ і всі коефіцієнти Фур'є $u_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, тотожно дорівнюють нулю. Тоді з рівності Парсеваля для функції $u(t,x)$ випливає, що $u(t,x) \equiv 0$, тобто $u_1(t,x) \equiv u_2(t,x)$. Теорему доведено. ∎

Зауваження 1. Якщо $|\mu| \neq 1$, то кожна з нерівностей (36) справджується для всіх $\lambda_k \in \Lambda$; це випливає з оцінок

$$\left|1 - \mu \exp\left(i\sqrt{\lambda_k}\sigma_j T\right)\right| \geq \big|1 - |\mu|\big|, \quad j = 1, ..., 2n. \tag{38}$$

Зауваження 2. Якщо $|\mu| = 1$, то

$$\left|1 - \mu \exp\left(i\sqrt{\lambda_k}\sigma_j T\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{1}{2}(\arg\mu + \sqrt{\lambda_k}\eta_j T)\right)\right|, \tag{39}$$

в цьому випадку для виконання нерівностей (36) необхідно і достатньо, щоб

$$\forall \lambda_k \in \Lambda,\ \forall m \in \mathbb{Z} \qquad \arg\mu + \sqrt{\lambda_k}\sigma_q T \neq 2\pi m,\ j = 1, ..., n.$$

Розглянемо питання про існування розв'язку задачі (19)–(21). Надалі вважатимемо, що для всіх $\lambda_k \in \Lambda$ виконуються умови (36) і (37). Тоді для кожного $\lambda_k \in \Lambda$:

1) система рівнянь (34) має єдиний розв'язок, який зображується формулами

$$c_{kq} = \sum_{l=1}^{2n} \frac{\Delta_{lq}(\lambda_k)}{\Delta(\lambda_k)} \varphi_{lk}, \quad q = 1, ..., 2n,$$

де $\Delta_{lq}(\lambda_k)$– алгебричне доповнення у визначнику $\Delta(\lambda_k)$ елемента, що стоїть на перетині l-го рядка і q-го стовпця;

2) існує єдина функція Гріна $G_k(t,\tau)$ задачі (29′), (30′).

У квадраті K_T, крім сторін $\tau = 0$ і $\tau = T$, функції $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{N}$, визначаються формулами [175]

$$G_k(t,\tau) = \frac{(-\lambda_k)^{-n+1/2}}{4} \sum_{q=1}^{2n} \prod_{\substack{1 \leq r \leq n \\ r \neq q,\, r \neq q-n}} \frac{\exp\left(i\sqrt{\lambda_k}\sigma_q(t-\tau)\right)}{\sigma_q(\sigma_q^2 - \sigma_r^2)} \times$$

$$\times \left(\operatorname{sgn}(t-\tau) + \frac{1 + \mu\exp\left(i\sqrt{\lambda_k}\sigma_q T\right)}{1 - \mu\exp\left(i\sqrt{\lambda_k}\sigma_q T\right)}\right), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{40}$$

На сторонах $\tau = 0$ і $\tau = T$ квадрата K_T кожна з функцій $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{N}$, довизначується за неперервністю справа і зліва, відповідно.

Для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ розв'язки задач (29), (30′) і (29′), (30) виражаються формулами

$$U_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau, \tag{41}$$

$$V_k(t) = 2^{-1} \sum_{q=1}^{2n} \sum_{l=1}^{2n} \sum_{r=1}^{2n} D_{lr}(\lambda_k) S^l_{2n-q} (-\lambda_k)^{(1-r)/2} \times$$

$$\times \left(\sigma_q\left(1 - \mu\exp(i\sqrt{\lambda_k}\sigma_q T)\right) D(\lambda_k)\right)^{-1} \exp\left(i\sqrt{\lambda_k}\sigma_q t\right)\varphi_{lk}, \tag{42}$$

де $D_{lr}(\lambda_k)$ – визначник, отриманий з визначника $D(\lambda_k)$ викреслюванням l-го рядка і r-го стовпця; S^α_β – сума всіх можливих добутків чисел σ_q, $q = 1, ..., 2n$, $q \neq \alpha$, взятих у кількості β ($S^\alpha_0 \equiv 1$).

На основі формул (28) і (31) розв'язок задачі (19)–(21) формально зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(U_k(t) + V_k(t)\right) X_k(x). \tag{43}$$

У загальному випадку ряд (43) є розбіжним, бо відмінні від нуля вирази

$$1 - \mu\exp\left(i\sqrt{\lambda_k}\sigma_q T\right),\ q = 1, ..., 2n,$$

що входять знаменниками у формули (40) і (42), можуть бути як завгодно малими за модулем для нескінченної множини значень $\lambda_k \in \Lambda$. Тому питання про існування розв'язку задачі (19)–(21), взагалі, пов'язане з проблемою малих знаменників.

Якщо

$$\varphi_l(x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_{lk} X_k(x),\ l = 1, \dots, 2n, \quad f(t,x) = \sum_{k=1}^{N} f_k(t) X_k(x),\ N < \infty,$$

то за умов (36), (37) завжди існує єдиний розв'язок задачі (19)–(21). У загальному випадку справедливі такі твердження.

Теорема 6. *Нехай для всіх $\lambda_k \in \Lambda$ справджується умова (37) і нехай $|\mu| \neq 1$. Якщо функції $f(t,x)$ та $\varphi_l(x)$, $l = 1, \dots, 2n$, задовольняють умови*

$$f \in C^{(0,h_0)}(\overline{Q}), \quad L^{r_0} f(t,x)|_{\partial G} = 0,\ r_0 = 0, 1, \dots, [h_0/2], \tag{44}$$

$$\varphi_l \in C^{h_l}(\overline{G}), \quad L^{r_l}\varphi_l(x)|_{\partial G} = 0,\ r_l = 0, 1, \dots, [h_l/2],\ l = 1, \dots, 2n, \tag{45}$$

де $h_0 = [3p/2] + 2$, $h_l = [3p/2] + l + 1$, $l = 1, \dots, 2n$, то для довільних чисел T, a_j, $j = 0, 1, \dots, n$, b_{ljs}, $l = 1, \dots, 2n$, $j + 2s \leq 2n$, $j < 2n$, існує єдиний розв'язок задачі (19)–(21), який належить до простору $C^{2n}(\overline{Q})$ і неперервно залежить від функцій $f(t,x)$ і $\varphi_l(x)$, $l = 1, \dots, 2n$.

Д о в е д е н н я. Для визначника $D(\lambda_k)$ та його мінорів справедливі такі оцінки:

$$|D(\lambda_k)| \geq c_3 \lambda_k^{n^2}, \tag{46}$$

$$|D_{rl}(\lambda_k)| \leq c_4 \lambda_k^{n^2 - [(2n+1-l)/2]}, \quad r, l = 1, \dots, 2n. \tag{47}$$

Із формул (40)–(42) та оцінок (46), (47) одержуємо

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left| U_k^{(q)}(t) \right| \leq c_5 \sum_{j=1}^{2n} \frac{\lambda_k^{(1-2n+q)/2}}{\left|1 - \mu \exp\left(i\sqrt{\lambda_k}\sigma_j T\right)\right|} \int_0^T |f_k(t)| dt, \tag{48}$$

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left| V_k^{(q)}(t) \right| \leq c_6 \sum_{l=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} \frac{\lambda_k^{q/2 - [(2n+1-l)/2]} |\varphi_{lk}|}{\left|1 - \mu \exp\left(i\sqrt{\lambda_k}\sigma_j T\right)\right|}, \tag{49}$$

де $q = 0, 1, \dots, 2n$, сталі c_5 і c_6 не залежать від λ_k. Якщо функції $f(t,x)$ і $\varphi_l(x), l = 1, \dots, 2n$, задовольняють умови (44), (45), то з формул (27) випливає, що

$$\max_{0 \leq t \leq T} |f_k(t)| \leq c_7 \lambda_k^{-h_0/2} \|f\|_{C^{(0,h_0)}(\overline{Q})}, \tag{50}$$

$$|\varphi_{lk}| \leq c_8 \lambda_k^{-h_l/2} \|\varphi_l\|_{C^{h_l}(\overline{G})}, \quad l = 1, \dots, 2n. \tag{51}$$

На основі формули (43) та оцінок (24), (25), (38), (48)–(51) одержуємо таку оцінку для норми розв'язку розглядуваної задачі:

$$\|u\|_{C^{2n}(\overline{Q})} \leq c_9 \|f\|_{C^{(0,h_0)}(\overline{Q})} \sum_{k=1}^{\infty} k^{1/2 + (1-h_0)/p} +$$

$$+ c_{10} \sum_{l=1}^{2n} \|\varphi_l\|_{C^{h_l}(\overline{G})} \sum_{k=1}^{\infty} k^{1/2 + (1-h_l)/p},$$

де c_9, c_{10} – додатні сталі, що не залежать від k. Зі збіжності рядів у правій частині останньої нерівності випливає доведення теореми. ■

Теорема 7. *Нехай $|\mu| = 1$, для всіх $\lambda_k \in \Lambda$ справджуються умови (36), (37) і нехай існують додатні сталі M та γ такі, що для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k \in \Lambda$ виконуються нерівності*

$$\left|1 - \mu \exp\left(i\sqrt{\lambda_k}\sigma_j T\right)\right| \geq M \lambda_k^{-\gamma}, \quad j = 1, \dots, 2n. \tag{52}$$

Якщо функції $f(t,x)$ і $\varphi_l(x)$, $l = 1, \dots, 2n$, задовольняють умови (44), (45), де $h_0 = [3p/2] + 2(\gamma + 1)$, $h_l = [3p/2] + 2\gamma + l + 1$, $l = 1, \dots, 2n$, то для довільних b_{ljs}, $l = 1, \dots, 2n$, $j + 2s \leq 2n$, $j < 2n$, існує єдиний розв'язок задачі (19)–(21) з простору $C^{2n}(\overline{Q})$, який неперервно залежить від функцій $f(t,x)$ і $\varphi_l(x)$, $l = 1, \dots, 2n$.

Д о в е д е н н я. На основі формул (41)–(43) та оцінок (24), (25), (46)–(52), використовуючи схему доведення теореми 6, отримуємо нерівність

$$\|u\|_{C^{2n}(\overline{Q})} \leq c_{11} \|f\|_{C^{(0,h_0)}(\overline{Q})} + c_{12} \sum_{l=1}^{2n} \|\varphi_l\|_{C^{h_l}(\overline{G})},$$

з якої випливає доведення теореми. ■

Вияснимо, наскільки "багата" множина задач (19)–(21), для яких виконуються нерівності (52). Скористаємося таким твердженням, доведення якого проводиться за схемою доведення леми 3.2 із врахуванням оцінок (24).

Лема 1. *Нехай $\Phi(\lambda_k)$ – обмежена послідовність дійсних чисел. Тоді нерівність*

$$\left|\Phi(\lambda_k) - \frac{Td}{\lambda_k^h}\right| < \frac{1}{\lambda_k^{p/2+h+\delta}}, \quad 0 < \delta < 1,\ h, p \in \mathbb{N},\ \lambda_k \in \Lambda, \tag{53}$$

для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ справджується для всіх (крім скінченного числа) пар (λ_k, d) : $\lambda_k \in \Lambda$, $d \in \mathbb{Z}$.

Теорема 8. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ та довільних фіксованих μ, $|\mu| = 1$, і a_j, $j = 0, 1, \dots, n$, нерівності (52) виконуються при $\gamma > p/2$ для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k \in \Lambda$.*

Доведення. На основі рівності (39), використовуючи елементарну нерівність

$$\forall x \in [0, \pi/2] \qquad \sin x \geq 2x/\pi,$$

одержуємо, що при $|\mu| = 1$ справджуються оцінки

$$\left|1 - \mu \exp\left(i\sqrt{\lambda_k}\sigma_j T\right)\right| \geq 2T\sqrt{\lambda_k}\left|\frac{\arg\mu + \sigma_j\sqrt{\lambda_k}T}{\pi\sqrt{\lambda_k}T} - \frac{d_j(\lambda_k)}{\sqrt{\lambda_k}T}\right|, \tag{54}$$

де $j = 1, ..., 2n$, $d_j(\lambda_k)$ – ціле число, для якого

$$\left|\frac{\arg\mu + \sigma_j\sqrt{\lambda_k}T}{\pi} - d_j(\lambda_k)\right| \leq 1/2.$$

Із (54) на основі леми 1 випливає, що для всіх (крім скінченного числа) $\lambda_k \in \Lambda$ і для майже всіх чисел $T > 0$ справджуються оцінки

$$\left|1 - \mu \exp\left(i\sqrt{\lambda_k}\sigma_j T\right)\right| \geq 2T\lambda_k^{-p/2-\delta}, \quad j = 1, ..., 2n, \ \delta > 0.$$

Теорему доведено. ∎

7.3. Слабконелінійні гіперболічні рівняння

7.3.1. Рівняння з однорідною за порядком диференціювання лінійною частиною. В області D^1 розглядаємо задачу [39, 40]

$$Pu \equiv \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^j \partial x^{n-j}} = \varepsilon f\left(t, x, u(t,x)\right), \tag{55}$$

$$\left.\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}\right|_{t=0} - \mu \left.\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}\right|_{t=T} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{56}$$

де $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $a_n = 1$, $\varepsilon, \mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq 0; 1$. Рівняння

$$Pu = 0 \tag{55'}$$

є строго гіперболічним за Петровськнм; функція $f(t, x, z)$ визначена, неперервна за всіма змінними і досить гладка за x і z в області

$$B = \{(t, x, z) : (t, x) \in D^1, |z| \leq r < \infty\}.$$

Вигляд області D^1 накладає умови 2π-періодичності за змінною x на функції $u(t, x)$ і $f(t, x, u(t, x))$.

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} u_k(t) \exp(ikx). \tag{57}$$

Підставивши ряд (57) у рівняння (55) та умови (56), для визначення коефіцієнтів $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, одержуємо таку крайову задачу для

нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j (ik)^{n-j} u_k^{(j)}(t) = \varepsilon f_k\left(t, \{u_m(t)\}\right), \quad k, m \in \mathbb{Z}, \tag{58}$$

$$M_j u_k \equiv u_k^{(j)}(0) - \mu u_k^{(j)}(T) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \ k \in \mathbb{Z}, \tag{59}$$

де

$$f_k\left(t, \{u_m(t)\}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\Big(t, x, \sum_{|m|\geq 0} u_m(t)\exp(imx)\Big)\frac{dx}{\exp(ikx)}. \tag{60}$$

Покажемо, що задача (55), (56) еквівалентна деякому нелінійному інтегральному рівнянню.

Для кожного $k \in \mathbb{Z}$ розглянемо задачу з умовами (59) для лінійного рівняння

$$\sum_{j=0}^{n} a_j (ik)^{n-j} u_k^{(j)}(t) = 0. \tag{58'}$$

Згідно з припущенням про строгу гіперболічність рівняння (55′) корені рівняння

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j = 0,$$

які позначимо λ_j, $j = 1, \ldots, n$, є дійсними та різними. Тому рівняння (58′) має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$u_{kj}(t) = \begin{cases} \exp(i\lambda_j kt), & k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \\ t^{j-1}, & k = 0, \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, n,$$

а характеристичний визначник $\Delta(k)$ задачі (58′), (59) обчислюється за формулою

$$\Delta(k) = \begin{cases} (ik)^{n(n-1)/2} \prod\limits_{1\leq p<q\leq n} (\lambda_q - \lambda_p) \prod\limits_{j=1}^{n} \left(1 - \mu\exp(i\lambda_j kT)\right), \\ (1-\mu)^n 1!\,2!\ldots(n-1)!, \quad k = 0, \quad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}. \end{cases} \tag{61}$$

Зауваження 3. З формули (61) випливає, що визначник $\Delta(k)$ не дорівнює нулю для всіх $k \in \mathbb{Z}$ тоді і тільки тоді, коли виконується хоча б одна з умов:

1) $|\mu| \neq 1$;
2) $\forall q \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \qquad \lambda_j kT + \arg\mu \neq 2\pi q, \quad j = 1, \ldots, n.$

Надалі вважатимемо, що $\Delta(k) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Тоді задача (55′), (56) не може мати двох різних розв'язків (див. [205]), і для кожного $k \in \mathbb{Z}$ існує єдина функція Гріна $G_k(t,\tau)$ задачі (58′), (59). У квадраті K_T, крім сторін $\tau = 0$ і $\tau = T$, функції $G_k(t,\tau), k \in \mathbb{Z}$, визначаються формулами

$$G_k(t,\tau) = 2^{-1}(ik)^{1-n} \sum_{j=1}^{n} \exp\Big(i\lambda_j k(t-\tau)\Big) \prod_{\substack{q=1 \\ q\neq j}}^{n} (\lambda_j - \lambda_q)^{-1} \times \times \Big(\operatorname{sgn}(t-\tau) + \frac{1+\mu\exp(i\lambda_j kT)}{1-\mu\exp(i\lambda_j kT)}\Big), \ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \tag{62}$$

$$G_0(t,\tau) = (2(n-1)!)^{-1}\Big(\operatorname{sgn}(t-\tau)(t-\tau)^{n-1} + \frac{(1-\mu)^{-n}}{1!\cdots(n-2)!} \times \times \sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{j}(-1)^{n-j}t^{p-1}\Delta_{jp}\frac{\tau^{n-j}+\mu(\tau-T)^{n-j}}{(n-j)!}\Big), \tag{63}$$

де Δ_{jp}, $p = 1,\dots,j$, $j = 1,\dots,n$, – алгебричне доповнення у визначнику $\det \|M_{j-1}t^{p-1}\|_{j,p=1}^{n}$ елемента, що стоїть на перетині j-го рядка і p-го стовпця. На стороні $\tau = 0\,(\tau = T)$ квадрата K_T кожна з функцій $G_k(t,\tau), k \in \mathbb{Z}$, доозначується за неперервністю справа (зліва).

За допомогою системи функцій $G_k(t,\tau), k \in \mathbb{Z}$, задачу (58), (59) зводимо до еквівалентної їй нескінченної системи нелінійних інтегральних рівнянь

$$u_k(t) = \varepsilon \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau, u_m(\tau))\, d\tau, \quad k, m \in \mathbb{Z}. \tag{64}$$

Припустимо, що ряд

$$(2\pi)^{-1} \sum_{|k|\geq 0} G_k(t,\tau)\exp\left(ik(x-\xi)\right) \tag{65}$$

рівномірно збігається в області $D^1 \times D^1$, і позначимо через $K(t,x,\tau,\xi)$ його суму. Тоді задача (55), (56) еквівалентна такому нелінійному інтегральному рівнянню:

$$u(t,x) = \varepsilon \int_{D^1} K(t,x,\tau,\xi) f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\, d\tau d\xi. \tag{66}$$

Збіжність ряду (65) пов'язана взагалі з проблемою малих знаменників, бо відмінні від нуля вирази

$$1 - \mu\exp\left(i\lambda_j kT\right), \quad j = 1,\dots,n,$$

що входять знаменниками у формулу (62), можуть набувати як завгодно малих за модулем значень для нескінченного числа цілих k.

Зауважимо, що при $|\mu| \neq 1$ малі знаменники відсутні; це випливає зі справедливості таких оцінок:

$$\forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \quad |1 - \mu\exp(i\lambda_j kT)| \geq |1 - |\mu||, \quad j = 1,\dots,n.$$

Отже, із формул (62), (63) одержуємо такі оцінки:

$$\max_{0\leq t\leq T}\Big|\frac{\partial^q}{\partial t^q}\int_0^T G_k(t,\tau)d\tau\Big| \leq \leq \begin{cases} 2T|k|^{1-n+q}\sum_{j=1}^{n}\Lambda_j^{(q)}|1-\mu\exp(i\lambda_j kT)|^{-1} + \delta_{nq}, & |\mu| = 1, \\ (1+|\mu|)|1-|\mu||^{-1}T|k|^{1-n+q}\sum_{j=1}^{n}\Lambda_j^{(q)} + \delta_{nq}, & |\mu| \neq 1, \end{cases} \tag{67}$$

$$\max_{0\leq t\leq T}\Big|\frac{\partial^q}{\partial t^q}\int_0^T G_0(t,\tau)d\tau\Big| \leq c_0 T^{-q}, \tag{68}$$

де

$$k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \quad \Lambda_j^{(q)} = |\lambda_j|^q \prod_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{n} |\lambda_j - \lambda_m|^{-1}, \quad q = 0,1,\dots,n,$$

$$c_0 = T^{n-1}\Big(1 + |1+\mu|\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{j}\frac{M^{j-p}|1-\mu|^{p-j-1}}{2(p-1)!}\Big); M = \max\{1,|\mu|\}.$$

Якщо $|\mu| = 1$, то збіжність ряду (65) пов'язана з проблемою малих знаменників; однак покажемо, що в цьому випадку для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $\beta_j = \lambda_j T/(2\pi)$, $j = 1,\dots,n$, малі знаменники лише незначною мірою погіршують збіжність цього ряду.

Лема 2. *Якщо $|\mu| = 1$, то для майже кожного (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) числа $\beta = \lambda T/(2\pi)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ряд*

$$S = \sum_{|k|>0} |k|^{-q}|1-\mu\exp(i\lambda kT)|^{-1} \tag{69}$$

збігається, якщо $q > 1$.

Д о в е д е н н я. Для довільного дійсного λ і $|\mu| = 1$ справедлива оцінка (див. теорему 8)

$$|1-\mu\exp(i\lambda kT)| = 2\Big|\sin\Big(\pi\Big(\frac{\lambda kT + \arg\mu}{2\pi} - d(k)\Big)\Big)\Big| \geq \geq |\beta k + \arg\mu/(2\pi) - d(k)|, \tag{70}$$

де $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, а $d(k)$ – ціле число, для якого

$$|\beta k + \arg \mu/(2\pi) - d(k)| \le 1/2.$$

Враховуючи (69), (70), одержуємо

$$S < \sum_{|k|>0} |k|^{-q} |\beta k + \arg \mu/(2\pi) - d(k)|^{-1} = S_1 + S_2, \tag{71}$$

де

$$S_j = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-q} \left|\beta k - (-1)^j \left(\arg \mu/(2\pi) - d_j(k)\right)\right|^{-1}, \quad j = 1, 2, \tag{72}$$

$$d_1(k) \equiv d(k), \qquad d_2(k) \equiv d(-k).$$

Для доведення збіжності рядів (72) скористаємось ідеєю доведення леми 2 з [9]. Розглянемо ряд S_1 і побудуємо ряди $S_1^{(p)}$ такого ж вигляду, як і S_1:

$$S_1^{(p)} = \sum_{k_l^{(p)} \in \Omega_p} \left(k_l^{(p)}\right)^{-q} \left|\beta k_l^{(p)} + \arg \mu/(2\pi) - d(k_l^{(p)})\right|^{-1}, \ p \in \mathbb{N}, \tag{73}$$

де $\Omega_p \subseteq \mathbb{N}$ - множина тих $k_l^{(p)}$, $l = 1, 2, \ldots$, $k_{l+1}^{(p)} > k_l^{(p)}$, для яких справджується нерівність

$$2^{-p-1} < \left|\beta k_l^{(p)} + \arg \mu/(2\pi) - d(k_l^{(p)})\right| \le 2^{-p}, \quad p \in \mathbb{N}. \tag{74}$$

Очевидно, що

$$S_1 = \sum_{p=1}^{\infty} S_1^{(p)},$$

а тому для доведення збіжності ряду S_1 досить показати, що

$$\sum_{p=1}^{\infty} S_1^{(p)} < \infty.$$

З оцінок (74) знаходимо, що

$$\left|\beta(k_{l+1}^{(p)} - k_l^{(p)}) - \left(d(k_{l+1}^{(p)}) - d(k_l^{(p)})\right)\right| \le 2^{-p}, \quad p \in \mathbb{N}. \tag{75}$$

Згідно з теоремою 3.1 (див. також [9]), для майже кожного числа β існує стала $c_1 = c_1(\beta) > 0$ така, що нерівність

$$\begin{aligned} &\left|\beta(k_{l+1}^{(p)} - k_l^{(p)}) - \left(d(k_{l+1}^{(p)}) - d(k_l^{(p)})\right)\right| \ge \\ &\ge c_1 \left(k_{l+1}^{(p)} - k_l^{(p)}\right)^{-1-\delta}, \quad 0 < \delta < 1, \end{aligned} \tag{76}$$

справджується для кожного $k_l^{(p)} \in \Omega_p$.

З оцінок (75), (76) випливає, що для майже кожного числа β

$$m_p \equiv \min_{\Omega_p} \left(k_{l+1}^{(p)} - k_l^{(p)}\right) > (2^p c_1)^{1/(1+\delta)}, \quad p \in \mathbb{N}. \tag{77}$$

Очевидно, що для кожного $k_l^{(p)} \in \Omega_p$ справедлива оцінка

$$k_l^{(p)} \ge (l-1) m_p + k_l^{(p)}. \tag{78}$$

Із леми 3.2 одержуємо, що для майже кожного (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$)числа β існує стала $c_2 = c_2(\beta) > 0$, для якої нерівність

$$\left|\beta k_l^{(p)} + \arg \mu/(2\pi) - d(k_l^{(p)})\right| \ge c_2 \left(k_l^{(p)}\right)^{-1-\sigma}, \quad 0 < \sigma < 1, \tag{79}$$

справджується для всіх $k_l^{(p)} \in \Omega_p$. Тому з оцінок (74) і (79) маємо, що для майже всіх чисел β

$$k_l^{(p)} \ge (2^p c_2)^{1/(1+\sigma)}, \quad k_l^{(p)} \in \Omega_p. \tag{80}$$

Не обмежуючи загальності, покладемо в (80) $\sigma = \delta$. Тоді з оцінок (77), (78) і (80) отримуємо

$$\begin{aligned} k_l^{(p)} &\ge (l-1)\,(2^p c_1)^{1/(1+\delta)} + (2^p c_2)^{1/(1+\delta)} > \\ &> 2^{p/(1+\delta)} C l, \quad k_l^{(p)} \in \Omega_p, \end{aligned} \tag{81}$$

де

$$C = \left(\min\{c_1, c_2\}\right)^{1/(1+\delta)}.$$

На основі формули (73), враховуючи оцінки (74) і (81), одержуємо, що для майже кожного (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) числа β справедлива оцінка

$$S_1 = \sum_{p=1}^{\infty} S_1^{p} < 2C^{-q} \sum_{p=1}^{\infty} 2^{p(1+\delta-q)/(1+\delta)} \sum_{l=1}^{\infty} l^{-q} =$$

$$= 2^{(2+2\delta-q)/(1+\delta)} C^{-q} \left(1 - 2^{(1+\delta-q)/(1+\delta)}\right)^{-1} \sum_{l=1}^{\infty} l^{-q} < \infty.$$

Збіжність ряду S_2 доводиться аналогічно. Лему доведено. ∎

Із формул (62), (63) і леми 2 випливає, що для довільного $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$ і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $\beta_j = \lambda_j T/(2\pi)$, $j = 1, \ldots, n$, при $n \ge 3$ ряд (65) рівномірно збігається в області $D^1 \times D^1$.

Розглянемо тепер питання про існування розв'язку інтегрального рівняння (66) з простору $C^n(D^1)$. Введемо такі позначення:

$$f = \max_{0 \le j+s \le 4} \max_{B} \left|\frac{\partial^{j+s} f(t,x,z)}{\partial x^j \partial z^s}\right|;$$

$$\bar{S}(r) = \left\{ u \in C^n(D^1) : \|u\|_{C^n(D^1)} \le r < \infty \right\};$$

$$P_j = \sum_{|k|>0} |k|^{-2} \left|1 - \mu \exp(i\lambda_j kT)\right|^{-1}, \quad j = 1, \ldots, n;$$

$$E_l = \sum_{j=1}^{n} \Lambda_j^{(l)} P_j, \quad D_l = \sum_{j=1}^{n} \Lambda_j^{(l)}, \quad l = 0, 1, \ldots, n,$$

де $\Lambda_j^{(l)}$ – ті ж самі, що в оцінках (67);

$$\gamma = c_0 \left(1 - T^n\right)\left(1 - T^{-1}\right); \quad \varkappa_q = \sum_{|k|>0} |k|^{-q},\ q \ge 2, 3;$$

$$\Psi_1(y) = \{y^3[2T\Big(\sum_{l=0}^{n}(n+1-l)E_l + \varkappa_3\Big) + \gamma]\}f;$$

$$\Psi_2(y) = \left\{y^3\left(\frac{T(1+|\mu|)}{|1-|\mu||}\varkappa_2 \sum_{l=0}^{n}(n+1-l)D_l + \varkappa_3\right) + \gamma\right\} f.$$

Теорема 9. *Нехай $n \ge 3$, а функція $f(t, x, z)$ неперервна за t і має обмежені похідні за змінними x, z до четвертого порядку включно в області B. Тоді, якщо $|\mu| = 1$, то для майже кожного (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) числа $\beta_j = \lambda_j T/(2\pi)$, $j = 1, \ldots, n$, і для всіх $\varepsilon, |\varepsilon| < \varepsilon_1$, а якщо $|\mu| \ne 1$, то для довільних $T > 0$ та a_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, і для всіх ε, $|\varepsilon| < \varepsilon_2$, існує єдиний розв'язок рівняння (66), який належить замкненій кулі $\bar{S}(r) \subset C^n(D^1)$, де*

$$\varepsilon_1 = \min\left(\frac{r}{\Psi_1(1+r)}, \frac{1}{\Psi_1(2+r)}\right), \quad \varepsilon_2 = \min\left(\frac{r}{\Psi_2(1+r)}, \frac{1}{\Psi_2(2+r)}\right).$$

Д о в е д е н н я. Скористаємось принципом стискуючих відображень. Розглянемо випадок $|\mu| = 1$. Запишемо рівняння (66) у вигляді

$$u = Au,$$

де A – нелінійний інтегральний оператор

$$Au = \varepsilon \int_{D^1} K(t, x, \tau, \xi) f(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) d\tau d\xi, \tag{82}$$

визначений у кулі $\bar{S}(r)$. Покажемо, що оператор A переводить кулю $\bar{S}(r)$ в себе. Якщо функція $u(t, x)$, яка зображується рядом вигляду (57), належить кулі $\bar{S}(r)$, то на підставі формули (60) одержуємо

$$\max_{0 \le t \le T} |f_k(t, \{u_m(t)\})| \le |k|^{-\alpha} \max_{D^1} \left|\frac{\partial^\alpha f(t, x, u(t, x))}{\partial x^\alpha}\right|, \tag{83}$$
$$\alpha = 0, 1, 2, 3.$$

Користуючись правилом диференціювання складної функції, знаходимо, що

$$\max_{D^1} \left|\frac{\partial^\alpha f(t, x, u(t, x))}{\partial x^\alpha}\right| \le f\left(1 + \|u\|_{C^n(D^1)}\right)^\alpha \le (1 + r)^\alpha f, \tag{84}$$
$$\alpha = 0, 1, 2, 3.$$

Тепер, використовуючи оцінки (67), (68), (83) та (84), з формули (82) знаходимо

$$\|Au\|_{C^n(D^1)} \le \frac{|\varepsilon|}{2\pi} \sum_{|k|\ge 0} \sum_{j+s\le n} \max_{D^1} \left|\frac{\partial^{j+s}}{\partial t^j \partial x^s} \int_0^T G_k(t, \tau) \times\right.$$
$$\left.\times \int_0^{2\pi} f(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) \exp(ik(x - \xi))\, d\tau d\xi\right| \le |\varepsilon| \times$$
$$\times \sum_{|k|\ge 0} \sum_{j+s\le n} \max_{D^1} \left|\frac{\partial^{j+s}}{\partial t^j \partial x^s} \int_0^T G_k(t, \tau) f_k(\tau, \{u_m(\tau)\})\, d\tau \exp(ikx)\right| \le$$
$$\le 2T(1 + r)^3 |\varepsilon| f \sum_{j+s\le n} \sum_{|k|>0} \sum_{l=1}^{n} \Lambda_j^{(l)} |k|^{-2} |1 - \mu \exp(i\lambda_l kT)|^{-1} +$$
$$+ |\varepsilon|(1 + r)^3 f \sum_{|k|>0} |k|^{-3} + f c_0 \sum_{q=0}^{n} T^{-q} \le |\varepsilon| \Psi_1(1 + r) =$$
$$= f\left((1 + r)^3 \left(2T\Big(\sum_{l=0}^{n}(n + 1 - l)\Big)E_l + \omega_3\right) + \omega\right) < r. \tag{85}$$

Покажемо тепер, що оператор A є оператором стиску. Нехай функції $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$ належать кулі $\bar{S}(r)$. Позначимо

$$F(t, x) \equiv f(t, x, u_1(t, x)) - f(t, x, u_2(t, x)),$$
$$\hat{u}(t, x) \equiv \theta u_1(t, x) + (1 - \theta) u_2(t, x), \quad 0 \le \theta \le 1.$$

Із формули (82), враховуючи лему 2, оцінки (67), (68), (85) та формулу Лагранжа про скінченні прирости, одержуємо, що для майже кожного числа β_j, $j = 1, \ldots, n$, справджується оцінка

$$\|Au_2 - Au_1\|_{C^n(D^1)} \le$$
$$\le \frac{|\varepsilon|}{2\pi} \left\| \int_{D^1} \sum_{|k|\ge 0} G_k(t, \tau) F(\tau, \xi) \exp(ik(x - \xi)) d\tau d\xi \right\|_{C^n(D^1)} \le$$
$$\le f|\varepsilon|(2 + r)^3 \|u_2 - u_1\|_{C^n(D^1)} \times$$
$$\times \left(2T\Big(\sum_{l=0}^{n}(n + 1 - l)E_l + \varkappa_3\Big) + \gamma\right) = |\varepsilon| \Psi_1(2 + r) \|u_2 - u_1\|_{C^n(D^1)}.$$

Таким чином, якщо $|\mu| = 1$, а $|\varepsilon|\Psi_1(2+r) < 1$, то оператор A, визначений формулою (82), є оператором стиску для майже всіх (стосовно міри Лебега) чисел β_j, $j = 1,\dots,n$.

Згідно з теоремою 2.6 інтегральне рівняння (66), а отже, і задача (55), (56), має єдиний розв'язок. У випадку, коли $|\mu| \neq 1$, доведення теореми проводиться за тією ж схемою. Теорему доведено. ■

Зауваження 4. Розв'язок задачі (55), (56) можна шукати як границю послідовності $\{u_s(t,x)\}$, де $u_1(t,x)$ – довільна функція з кулі $\overline{S}(r)$, а

$$u_{s+1}(t,x) = Au_s(t,x),\ s \in \mathbb{N},$$

де A – інтегральний оператор, визначений формулою (66).

7.3.2. Рівняння з молодшими членами в лінійній частині. В області D^1 розглядаємо задачу [37]

$$P_1 u \equiv \prod_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial}{\partial t} - a_j\frac{\partial}{\partial x} - b_j\Big)u(t,x) = \varepsilon f\big(t,x,u(t,x)\big), \qquad (86)$$

$$\sum_{\substack{j+s\le n\\ j<n}} d_{ljs}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^s\Big(\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}\Big|_{t=0} - \mu\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}\Big|_{t=T}\Big) = 0, \qquad (87)$$

$$l = 1,\dots,n,$$

де $\varepsilon, \mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,\dots,n$, $d_{ljs} \in \mathbb{C}$, $l = 1,\dots,n$, $j+s \le n$, $j < n$, $b_j \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} b_j \neq \operatorname{Re} b_l$, $j,l = 1,\dots,n$, $j \neq l$; у рівнянні (86) деякі з чисел a_j можуть збігатися . Позначимо: n_j – кратність коефіцієнта a_j; $\omega = \max\limits_j\{n_j\}$.

Вигляд області D^1 накладає умови 2π-періодичності за змінною x на функції $u(t,x)$ і $f(t,x,u(t,x))$. Припустимо, що функція $f(t,x,z)$ визначена, неперервна за t і досить гладка за змінними x і z в області $B = \{(t,x,z) : (t,x) \in D^1,\ |z| \le r < \infty\}$.

Розглянемо спочатку лінійну задачу з умовами (87) для рівняння

$$P_1 u = 0. \qquad (86')$$

Її розв'язок зображується у вигляді ряду

$$u^0(t,x) = \sum_{|k|\ge 0} u_k^0(t)\exp(ikx).$$

Кожна з функцій $u_k^0(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, є розв'язком такої задачі:

$$\prod_{j=1}^{n}\Big(\frac{d}{dt} - \gamma_j(k)\Big)u_k(t) = 0, \qquad (88)$$

$$\sum_{\substack{j+s\le n\\ j<n}} d_{ljs}(ik)^s\big(u_k^{(j)}(0) - \mu u_k^{(j)}(T)\big) = 0, \quad l = 1,\dots,n, \qquad (89)$$

де

$$\gamma_j(k) = \operatorname{Re} b_j + i(a_j k + \operatorname{Im} b_j), \quad j = 1,\dots,n. \qquad (90)$$

Враховуючи (90), отримуємо такі оцінки:

$$\prod_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n}|\gamma_j(k) - \gamma_s(k)|^{-1} \le \begin{cases} CF_j^{1-n_j}|k|^{-n+n_j}, & k \neq 0,\\ F_j^{1-n}, & k = 0,\end{cases} \qquad (91)$$

$$j = 1,\dots,n,$$

де

$$F_j = \min_{\substack{s=1,\dots,n\\ s\neq j}}|b_j - b_s|,\ j = 1,\dots,n, \quad C = C(\operatorname{Im} b_j, a_j, n_j).$$

Рівняння (88) має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$u_{kj}(t) = \exp(\gamma_j(k)t), \quad j = 1,\dots,n, \qquad (92)$$

а характеристичний визначник $\Delta(k)$ задачі (88), (89) знаходиться за формулою

$$\Delta(k) = D(k)\prod_{j=1}^{n}\big(1 - \mu\exp(\gamma_j(k)T)\big)\prod_{1\le p<q\le n}\big(\gamma_q(k) - \gamma_p(k)\big), \qquad (93)$$

де

$$D(k) = \det\Big\|\sum_{s=0}^{n+1-j} d_{l,j-1,s}(ik)^s\Big\|_{l,j=1}^{n}.$$

Із формул (90), (93) випливає, що $\Delta(k) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad 1 - \mu\exp(\gamma_j(k)T) \neq 0,\ j = 1,\dots,n; \quad D(k) \neq 0. \qquad (94)$$

Позначимо через W оператор, породжений задачею (86′), (87). Надалі вважатимемо, що умови (94) справджуються. Тоді (див. п.7.3.1) існує обернений до W оператор W^{-1}, який визначається формулою

$$W^{-1}v = \frac{1}{2\pi}\sum_{|k|\ge 0}\int_0^T G_k(t,\tau)\Big(\int_0^{2\pi} v(\tau,\xi)\exp(-ik\xi)d\xi\Big)d\tau\exp(ikx),$$

де $v(t,x)$ – довільна 2π-періодична функція з простору $C^n(D^1)$, а $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}$, – функція Гріна відповідної задачі (88), (89). Припустимо, що ряд

$$(2\pi)^{-1}\sum_{|k|\geq 0} G_k(t,\tau)\exp\left(ik(x-\xi)\right) \tag{95}$$

рівномірно збігається в області $D^1\times D^1$ (його суму позначимо $K(t,x,\tau,\xi)$). Тоді

$$W^{-1}v=\int_{D^1} K(t,x,\tau,\xi)v(\tau,\xi)d\tau d\xi,$$

а задача (86), (87) еквівалентна нелінійному інтегральному рівнянню

$$u(t,x)=\varepsilon\int_{D^1} K(t,x,\tau,\xi)f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\tau d\xi. \tag{96}$$

У квадраті K_T, крім сторін $\tau=0$ і $\tau=T$, функції $G_k(t,\tau), k\in\mathbb{Z}$, визначаються формулами

$$\begin{gathered} G_k(t,\tau)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n}(\gamma_j(k)-\gamma_s(k))^{-1}\times \\ \times\exp\bigl(\gamma_j(k)(t-\tau)\bigr)\left(\operatorname{sgn}(t-\tau)+\frac{1+\mu\exp(\gamma_j(k)T)}{1-\mu\exp(\gamma_j(k)T)}\right),\ k\in\mathbb{Z}. \end{gathered} \tag{97}$$

На стороні $\tau=0,(\tau=T)$ квадрата K_T кожна з функцій $G_k(t,\tau)$, $k\in\mathbb{Z}$, довизначується за неперервністю справа (зліва).

Якщо

$$\ln|\mu|+\operatorname{Re}b_jT\neq 0,\quad j=1,\ldots,n, \tag{98}$$

то в ряді (95) малі знаменники відсутні, бо для всіх $k\in\mathbb{Z}$

$$|1-\mu\exp(\gamma_j(k)T)|\geq |1-|\mu|\exp(\operatorname{Re}b_jT)|\equiv C_j>0,\ j=1,\ldots,n. \tag{99}$$

Якщо ж для деякого j_0, $1\leq j_0\leq n$,

$$\ln|\mu|+\operatorname{Re}b_{j_0}T=0, \tag{100}$$

то збіжність ряду (95) пов'язана з проблемою малих знаменників. На основі формул (97), (94) та оцінок (99) одержимо

$$\max_{0\leq t\leq T}\left|\frac{\partial^q}{\partial t^q}\int_0^T G_k(t,\tau)d\tau\right|\leq$$

$$\leq\begin{cases} H_1(1+|k|)^l+\delta_{nq}, & \ln|\mu|+\operatorname{Re}b_jT\neq 0,\quad j=1,\ldots,n,\\ (1+|k|)^l\left(H_2+\dfrac{H_3}{|1-\exp(i(a_{j_0}k+\operatorname{Im}b_{j_0})T)|}\right)+\delta_{nq}, & \\ & \ln|\mu|+\operatorname{Re}b_{j_0}T=0, \end{cases} \tag{101}$$

де $q=0,1,\ldots,n$;

$$H_1=T\sum_{j=1}^{n}V(j)C_j^{-1}\bigl(1-|\mu|\exp(\operatorname{Re}b_jT)\bigr);$$

$$H_2=T\sum_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^{n}V(j)C_j^{-1}\left(1-|\mu|\exp(\operatorname{Re}b_jT)\right);\quad H_3=2TV(j_0);$$

$$V(q)=\alpha_q\exp\left(|\operatorname{Re}b_q|T\right)\prod_{\substack{s=1\\ s\neq q}}^{n}|\gamma_s(k)-\gamma_q(k)|^{-1},\quad q=1,\ldots,n;$$

$\alpha_q=\max\left(|b_q|^2,a_q^2,|a_q\operatorname{Im}b_q|\right)$, $q=1,\ldots,n$.

Для дослідження збіжності ряду (95) за умови (100) буде потрібне твердження, яке доводиться за схемою доведення леми 2.

Лема 3. *Нехай виконується умова (95). Тоді для майже кожного (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) числа a_{j_0}, $1\leq j_0\leq n$, ряд*

$$\sum_{|k|>0}\frac{1}{|k|^{n-\omega}\,|1-\mu\exp(i(a_{j_0}k+\operatorname{Im}b_{j_0})T)|}$$

збігається, якщо $n-\omega\geq 2$.

Розглянемо тепер питання про існування розв'язку в просторі $C^n(D^1)$ інтегрального рівняння (96). Справедлива така теорема.

Теорема 10. *Нехай $n-\omega\geq 2$, а функція $f(t,x,z)$ неперервна за t і має обмежені похідні за змінними x,z до порядку $\omega+3$ включно в області B. Якщо виконується умова (100), то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел a_{j_0} та для довільних фіксованих $\operatorname{Im}b_{j_0}$, a_j, b_j, $j\neq j_0$, і для всіх ε, $|\varepsilon|<\varepsilon_1<1$, а якщо виконуються нерівності (98), то для довільних $\operatorname{Im}b_j$, a_j, $j=1,\ldots,n$, і для всіх ε, $|\varepsilon|<\varepsilon_2$, існує єдиний розв'язок рівняння (96), який належить кулі $\overline{S}(r)$, де $\overline{S}(r)$ визначена в п. 7.3.1,*

$$\varepsilon_1=\min\left\{\frac{r}{\Phi_1(1+r)},\frac{1}{\Phi_1(2+r)}\right\},\ \varepsilon_2=\min\left\{\frac{r}{\Phi_2(1+r)},\frac{1}{\Phi_2(2+r)}\right\},$$

$$\begin{gathered}\Phi_1(y)=2^n fT\rho(n+2)(n+1)(1+|\mu|\exp(\sigma T))(1+y)^{\omega+3}\times\\ \times\left(1+\exp(\sigma T)\sum_{j=1}^{n}\alpha_jF_j^{1-n}\left(|\sin(\operatorname{Im}b_{j_0}T)|^{-1}+F_j^{n-n_j}\right)\right),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\Phi_2(y)=2^{n-1}\hat{f}T(n+2)(n+1)(1+|\mu|\exp(\sigma T))(1+y)^{\omega+2}\times\\ \times\left(2+\exp(\sigma T)\sum_{j=1}^{n}\alpha_jC_j^{-1}F_j^{1-n}(1+CF_j^{n-n_j})\right),\end{gathered}$$

$$\sigma = \max_{j=1,\ldots,n} |\mathrm{Re}\, b_j|, \quad \rho = \max_{\substack{j=1,\ldots,n,\\ j\neq j_0}} (1, C_j^{-1})$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо випадок, коли виконується умова (100). Покажемо, що оператор

$$Au = \varepsilon \int\limits_{D^1} K(t,x,\tau,\xi) f(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) d\tau d\xi, \tag{102}$$

визначений у кулі $\overline{S}(r)$, переводить цю кулю в себе. Використовуючи оцінки (91), (101) та оцінки (83), (84) (в яких $\alpha = 0,1,\ldots,\omega+2$), з (102) одержуємо

$$\|Au\|_{C^n(D^1)} \leq |\varepsilon| \Phi_1(1+r) < r.$$

Далі, використовуючи схему доведення теореми 9, одержуємо оцінку

$$\|Au_2 - Au_1\|_{C^n(D^1)} \leq |\varepsilon| \Phi_1(2+r) \|u_2 - u_1\|_{C^n(D^1)},$$

з якої випливає, що при $|\varepsilon|\Phi_1(2+r) < 1$ оператор A, визначений формулою (102), є оператором стиску для майже всіх (стосовно міри Лебега) чисел a_{j_0}.

Згідно з теоремою 2.6 інтегральне рівняння (96), а отже, і задача (86), (87), має єдиний розв'язок $u(t,x) \in \overline{S}(r)$. У випадку, коли виконуються нерівності (98), доведення теореми проводиться аналогічно. Теорему доведено. ■

Зауваження 5. Розв'язок задачі (86), (87) можна шукати як границю послідовності $\{u_s(t,x)\}$, де $u_1(t,x)$ – довільна функція з кулі $\overline{S}(r)$,

$$u_{s+1}(t,x) = Au_s(t,x), \; s \in \mathbb{N},$$

A – інтегральний оператор, визначений формулою (102).

7.4. Задача з інтегральними умовами для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

В області B^p розглянемо задачу

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \sum_{|s|=\alpha} a_s \frac{\partial^n u}{\partial t^{n-\alpha} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} = 0, \tag{103}$$

$$\int\limits_0^T u(t,x) t^j dt = \varphi_j(x), \quad j = 0,1,\ldots,n-1. \tag{104}$$

Рівняння (103) вважаємо строго гіперболічним за Петровським, тобто $a_0 = 1$ і характеристичне рівняння

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \sum_{|s|=\alpha} a_s \gamma^{n-\alpha} \eta_1^{s_1} \ldots \eta_p^{s_p} = 0 \tag{105}$$

має різні дійсні корені $\gamma_1(\eta), \ldots, \gamma_n(\eta)$ для всіх $\eta \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\}$. Нехай функції $\varphi_j(x)$, $j = 0,\ldots,n-1$, є майже періодичними зі спектром $\{\mu_k = (\mu_{k_1},\ldots,\mu_{k_p})\}_{k\in\mathbb{Z}^p} \equiv M_p$ і допускають розвинення в ряди Фур'є вигляду

$$\varphi_j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \varphi_{jk} \exp\,(i\mu_k, x), \quad \mu_{-k} = -\mu_k,$$

причому існують додатні константи d_1, d_2, σ такі, що

$$d_1\|k\|^\sigma \geq \|\mu_k\| \geq d_2\|k\|^\sigma, \tag{106}$$

де $\|\mu_k\|^2 = \mu_{k_1}^2 + \ldots + \mu_{k_p}^2$.

Майже періодичний за x зі спектром M_p розв'язок $u(t,x)$ задачі (103), (104) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp\,(i\mu_k, x), \tag{107}$$

коефіцієнти $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, якого визначаються як розв'язки задач

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \sum_{|s|=\alpha} a_s \prod_{r=1}^{p} (i\mu_{k_r})^{s_r} \frac{d^{n-\alpha} u_k(t)}{dt^{n-\alpha}} = 0, \tag{108}$$

$$\int\limits_0^T u_k(t) t^j dt = \varphi_{jk}, \quad j = 0,\ldots,n-1, \quad k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{0\}, \tag{109}$$

і

$$\frac{d^n u_0(t)}{dt^n} = 0, \tag{108'}$$

$$\int\limits_0^T u_0(t) t^j dt = \varphi_{j,(0)}. \tag{109'}$$

Задача (108′), (109′) має єдиний розв'язок $u_0(t)$, який є многочленом $(n-1)$-го степеня.

Загальний розв'язок рівняння (108) має вигляд

$$u_k(t) = \sum_{r=1}^{n} c_{rk} \exp\,(i\gamma_r(\mu_k) t), \tag{110}$$

де $\gamma_r(\mu_k) \equiv \gamma_{rk}$, $r = 1, \ldots, n$, – корені рівняння

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \sum_{|s|=\alpha} a_s \prod_{r=1}^{p} \mu_{k_r}^{s_r} \gamma^{n-\alpha} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{0\}.$$

Підставивши функцію (110) в умови (109), отримаємо таку систему лінійних алгебричних рівнянь для знаходження коефіцієнтів c_{rk}, $r = 1, \ldots, n$:

$$\sum_{r=1}^{n} c_{rk} \Big(\frac{\exp\,(i\gamma_{rk}T)T^j}{i\gamma_{rk}} - \frac{j \exp\,(i\gamma_{rk}T)T^{j-1}}{(i\gamma_{rk})^2} + \frac{j(j-1)T^{j-2}}{(i\gamma_{rk})^3} \times$$

$$\times \exp\,(i\gamma_{rk}T) + \ldots + \frac{j!(-1)^{j-1} \exp\,(i\gamma_{rk}T)T}{(i\gamma_{rk})^j} + \frac{(j+1)!}{(i\gamma_{rk})^{j+1}} \times$$

$$\times (-1)^j (\exp\,(i\gamma_{rk}T) - 1) \Big) = \varphi_{jk},\ j = 0, \ldots, n-1;\ 0! \equiv 0. \quad (111)$$

Головний визначник системи (111) має вигляд
$\Delta(\mu_k, n) =$

$$= \left| \begin{matrix} \dfrac{\exp(i\gamma_{1k}T) - 1}{i\gamma_{1k}} & \ldots \\ \dfrac{\exp(i\gamma_{1k}T)}{i\gamma_{1k}} - \dfrac{\exp(i\gamma_{1k}T) - 1}{(i\gamma_{1k})^2} & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \dfrac{\exp(i\gamma_{1k}T)}{i\gamma_{1k}} + \ldots + (-1)^{n+1}(n-1)!\dfrac{\exp(i\gamma_{1k}T) - 1}{(i\gamma_{1k})^n} & \ldots \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} \ldots & \dfrac{\exp(i\gamma_{nk}T)T - 1}{i\gamma_{nk}} \\ \ldots & \dfrac{\exp\,(i\gamma_{nk}T)T}{i\gamma_{nk}} - \dfrac{\exp\,(i\gamma_{nk}T) - 1}{(i\gamma_{nk})^2} \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \dfrac{\exp\,(i\gamma_{nk}T)T^{n-1}}{i\gamma_{nk}} + \ldots + (-1)^{n+1}(n-1)!\dfrac{\exp\,(i\gamma_{nk}T) - 1}{(i\gamma_{nk})^n} \end{matrix} \right| .$$

Справедливе твердження, яке доводиться за схемою доведення теореми 4.1.

Теорема 11. *Для того щоб задача (103), (104) мала не більше одного майже періодичного за x зі спектром M_p розв'язку у просторі $C^n_{\mathbb{B}}(B^p)$, необхідно і достатньо, щоб визначник $\Delta(\mu_k, n)$ не дорівнював нулю для всіх $\mu_k \in M_p \backslash \{0\}$.*

Вважаючи, що $\Delta(\mu_k, n) \neq 0$, з системи (111) знаходимо

$$c_{lk} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{l+j} \frac{\Delta_{lj}(\mu_k, n)}{\Delta(\mu_k, n)} \varphi_{jk}, \quad l = 1, \ldots, n,$$

де $\Delta_{lj}(\mu_k, n)$ – визначник, отриманий з $\Delta(\mu_k, n)$ викреслюванням l-го рядка і j-го стовпчика. Тоді на підставі формул (107), (110) отримуємо розв'язок $u(x, t)$ задачі (103), (104) у вигляді формального ряду
$u(x, t) = u_0(t) +$

$$+ \sum_{\|k\|>0} \sum_{l,j=1}^{n} (-1)^{j+l} \frac{\Delta_{lj}(\mu_k, n)}{\Delta(\mu_k, n)} \varphi_{jk} \exp\big(i(\gamma_l(\mu_k)t + (\mu_k, x))\big). \quad (112)$$

Визначник $\Delta(\mu_k, n)$, будучи відмінним від нуля, може прямувати до нуля для деякої підпослідовності векторів $\mu_k \in M_p$, що може перешкоджати збіжності ряду (112).

Теорема 12. *Нехай має місце єдиність розв'язку задачі (103), (104), нехай існують стала $C_1 > 0$ і $\gamma \in \mathbb{N}$ такі, що для всіх $\mu_k \in M_p \backslash \{0\}$ виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k, n)| > C_1 \|\mu_k\|^{-\gamma}, \quad (113)$$

і нехай $\varphi_j \in C^{\gamma+[p/\sigma]}_{\mathbb{B}}(\mathbb{R}^p)$, $j = 0, \ldots, n-1$. Тоді існує розв'язок $u \in C^n_{\mathbb{B}}(B^p)$ задачі (103), (104).

Доведення. Безпосередньою перевіркою встановлюємо належність ряду (112) до простору $C^n_{\mathbb{B}}(B^p)$. При цьому використовуємо (106) і очевидні нерівності

$$|\Delta_{jl}(\mu_k, n)| \leq C_2 \|\mu_k\|^{-1}, \quad C_2 > 0, \quad j, l = 1, \ldots, n. \ \blacksquare$$

Зауваження 6. Розв'язок задачі (103), (104), що зображується у вигляді ряду (112), природним чином продовжується на $\mathbb{R}^{p+1}$, а у випадку, коли $\varphi_{j0} = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, є майже періодичним також за змінною t.

Вияснимо, коли ж виконується нерівність (113). Позначимо
$\Delta_1(\mu_k, n) = \Delta(\mu_k, n) \prod_{r=1}^{n} (i\gamma_{rk})^n =$

$$= \left| \begin{matrix} (i\gamma_{1k})^{n-1} \exp\,(i\gamma_{1k}T) - (i\gamma_{1k})^{n-1} & \ldots \\ (i\gamma_{1k})^{n-1} T \exp\,(i\gamma_{1k}T) - (i\gamma_{1k})^{n-2} \exp\,(i\gamma_{1k}T) + (i\gamma_{1k})^{n-2} & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{(n-1)!}{(n-j)!} (i\gamma_{1k}T)^{n-j} \exp\,(i\gamma_{1k}T) + (-1)^n (n-1)! & \ldots \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} \ldots & (i\gamma_{nk})^{n-1} \exp\,(i\gamma_{nk}T) - (i\gamma_{nk})^{n-1} \\ \ldots & (i\gamma_{nk})^{n-1} T \exp\,(i\gamma_{nk}) - (i\gamma_{nk})^{n-2} \exp\,(i\gamma_{nk}T) + (i\gamma_{nk})^{n-2} \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{(n-1)!}{(n-j)!} (i\gamma_{nk}T)^{n-j} \exp\,(i\gamma_{nk}T) + (-1)^n (n-1)! \end{matrix} \right| .$$

Визначник $\Delta_1(\mu_k, n)$ можна записати у вигляді
$\Delta_1(\mu_k, n) = P_0(\gamma_k) +$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\Bigg(\sum_{\substack{l_1,\ldots,l_j\in\{1,\ldots,n\}\\ l_r\neq\lambda_s,\ r\neq s}} \exp\left(iT\sum_{s=1}^{j}\gamma_{l_s k}\right)\Bigg)P_{l_1,\ldots,l_j}(\gamma_k, T),$$

де $\gamma_k = (\gamma_{1k}, \ldots, \gamma_{nk})$,

$$P_0(\gamma_k) = \begin{vmatrix} -(i\gamma_{1k})^{n-1} & \ldots & -(i\gamma_{nk})^{n-1} \\ (i\gamma_{1k})^{n-2} & \ldots & (i\gamma_{nk})^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (-1)^{n+1}(n-1)! & \ldots & (-1)^{n+1}(n-1)! \end{vmatrix},$$

$P_{l_1,\ldots,l_j}(\gamma_k, T)$ – поліноми від $\gamma_{1k}, \ldots, \gamma_{nk}, T$, причому степінь полінома $P_{l_1,\ldots,l_j}(\gamma_k, T)$ відносно T дорівнює $(2n-j-1)j/2$, $j = 1, \ldots, n-1$. Побудуємо функції g_j, $j = 0, 1, \ldots, 2^n - 3$:

$$g_0(T) = \frac{d}{dT}\Delta_1(\mu_k, n),$$

$$g_1(T) = \frac{d^n}{dT^n}\left(\exp\left(-i\gamma_{1k}T\right)g_0(T)\right),$$

$$g_2(T) = \frac{d^n}{dT^n}\left(\exp\left(-i(\gamma_{2k} - \gamma_{1k})T\right)g_1(T)\right),$$

$$g_3(T) = \frac{d^n}{dT^n}\left(\exp\left(-i(\gamma_{3k} - \gamma_{2k})T\right)g_2(T)\right).$$

Далі продовжимо цей процес так: кожну наступну функцію g_{i+1} отримуємо з попередньої g_i винесенням за дужки однієї з експонент, що міститься в g_i, а функцію, що залишається в дужках, диференціюємо $(\alpha + 1)$ раз за змінною T, де α – степінь полінома за T, що був коефіцієнтом біля цієї експоненти. Таким чином, функція g_{i+1} містить доданків-експонент рівно на один менше, ніж g_i.

Безпосереднім підрахунком отримуємо

$$g_{2^n-4}(T) = Q_1(\gamma_k, T)\exp(i(\gamma_{3k} - \gamma_{2k})T) + Q_2(\gamma_k, T)\exp(i(\gamma_{3k} - \gamma_{1k})T),$$

де $Q_j(\gamma_k, T)$, $j = 1, 2$, – поліном степеня $(n-1)n/2$ за змінною T, $\exp(i(\gamma_{3k} - \gamma_{2k})T)$ – експонента, отримана після всіх перетворень з $\exp\Big(i\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{n-1}\gamma_{jk}T\Big)$ в $\Delta_1(\mu_k, n)$, $\exp(-i(\gamma_{3k} - \gamma_{1k})T)$ — відповідно з $\exp\Big(i\sum\limits_{j=2}^{n-1}\gamma_{jk}T\Big)$ в $\Delta_1(\mu_k, n)$;

$$g_{2^n-3}(T) = \frac{d^{(n^2-n+2)/2}}{dT^{(n^2-n+2)/2}}\Big(Q_1(\gamma_k, T) +$$

$$+ Q_2(\gamma_k, T)\exp(i(\gamma_{2k} - \gamma_{1k})T)\Big) = Q_3(\gamma_k, T)\exp(i(\gamma_{2k} - \gamma_{1k})T). \quad (114)$$

Позначимо $n_2 = \{2, 3, \ldots, n\}$. При цьому

$$Q_3(\gamma_k, T) = T^{n(n-1)/2}\prod_{j=1}^{n}(i\gamma_{jk})^{n-1}\sum_{r=2}^{n}\gamma_{rk} \times$$

$$\times\left(i\sum_{q=2}^{n}\gamma_{qk} - \gamma_{1k}\right)^n \prod_{(l_1,\ldots,l_{n-2})\in n_2}(i(\gamma_{l_1 k} + \ldots + \gamma_{l_{n-2}k}))^n \times$$

$$\times \prod_{(l_1,\ldots,l_{n-2})\in n_2}(i(\gamma_{l_1 k} + \ldots + \gamma_{l_{n-2}k} - \gamma_{1k}))^{2n-1} \times$$

$$\times \prod_{(l_1,\ldots,l_{n-3})\in n_2}(i(\gamma_{l_1 k} + \ldots + \gamma_{l_{n-3}k}))^{2n-1} \times$$

$$\times \prod_{(l_1,\ldots,l_{n-3})\in n_2}(i(\gamma_{l_1 k} + \ldots + \gamma_{l_{n-3}k} - \gamma_{1k}))^{3n-3} \times \ldots$$

$$\ldots \times \prod_{l\in n_2}(i(\gamma_{lk} - \gamma_{1k}))^{(n^2-n+2)/2} + Q_4(\gamma_k T),$$

де степінь полінома $Q_4(\gamma_k, T)$ за змінною T менший, ніж $n(n-1)/2$;

$$g_{2^n-2}(T) = \frac{d^{n(n-1)/2}}{dT^{n(n-1)/2}}Q_3(\gamma_k, T).$$

Зафіксуємо довільний інтервал $[t_1, t_2]$ зміни T. Припустимо, що при деякому $\alpha_n > 0$ нерівність

$$|g_{2^n-2}(\gamma_k, T)| \geq \|\mu_k\|^{-\alpha_n} \quad (115)$$

виконується для всіх (крім, можливо, скінченного числа) векторів $\mu_k \in M_p$.

Зафіксуємо вектор $\mu_k \in M_p$ такий, що виконується оцінка (115), і позначимо через $\{\bar{T}\}$ множину тих $T \in [t_1, t_2]$, для яких виконується умова $|Q_3(\gamma_k, T)| = |g_{2^n-3}(T)| \leq \|\mu_k\|^{-\alpha_n}\|k\|^{-(n(n-1)p/2-\varepsilon_{2^n-2}}$. Тоді згідно з лемою 3.5 матимемо

$$\operatorname{mes}\{\bar{T}\} \leq \|k\|^{-p-2\varepsilon_{2^n-2}/(n(n-1))}$$

або, іншими словами, існує підмножина $D_0 \subset [t_1, t_2]$ з мірою $\operatorname{mes} D_0 > > t_2 - t_1 - \|k\|^{-p-2\varepsilon_{2^n-2}/(n(n-1))}$ така, що для всіх $T \in D_0$ виконується нерівність

$$|g_{2^n-3}(T)| \leq \|\mu_k\|^{-\alpha_n}\|k\|^{-p-2\varepsilon_{3^n-2}/(n(n-1))}.$$

Згідно з останньою нерівністю множина $D_0 \subset [t_1, t_2]$ розбивається на підмножини A_{2^n-3}, B_{2^n-3} ($D_0 = A_{2^n-3} \cup B_{2^n-3}$) такі, що нерівності

$$|\mathrm{Re}\, g_{2^n-3}(T)| > \frac{1}{\sqrt{2}} \|\mu_k\|^{-\alpha_n} \|k\|^{-n(n-1)p/2-\varepsilon_{2^n-2}}, \quad T \in A_{2^n-3},$$

$$|\mathrm{Im}\, g_{2^n-3}(T)| > \frac{1}{\sqrt{2}} \|\mu_k\|^{-\alpha_n} \|k\|^{-n(n-1)p/2-\varepsilon_{2^n-2}}, \quad T \in B_{2^n-3},$$

виконуються при тих же $\mu_k \in M_p$, що і нерівності (115).

Враховуючи формулу (114), на кожному з інтервалів $A^j_{2^n-3}$ множини A_{2^n-3} згідно з лемою 3.5 отримуємо, що для множини $\{T^*_j\}$ тих $T \in A^j_{2^n-3}$, для яких справджується нерівність

$$|\mathrm{Re}\,(Q_1(\gamma_k, T) + Q_2(\gamma_k, T) \exp(i(\gamma_{2k} - \gamma_{1k})T))| \le$$
$$\le \|\mu_k\|^{-\alpha_n-(n^2-n+2)/2} \|k\|^{-(n^2-n+2)/2-n(n-1)p/2-\varepsilon_{2^n-3}},$$

виконується оцінка

$$\mathrm{mes}\,\{T^*_j\} \le C_{1,2^n-3} \|\mu_k\|^{-1} \|k\|^{-p-2\varepsilon_{2^n-3}/(n^2-n+2)+2\varepsilon_{2^n-2}/(n(n-1))}.$$

Оскільки множина D_0 складається не більше, ніж з $(n-1)n/2+2$ інтервалів, і

$$\mathrm{Re}\ (Q_1(\gamma_k, T) + Q_2(\gamma_k, T) \exp\ (-i(\gamma_{2k} - \gamma_{1k})T)) =$$
$$= \mathrm{Re}\ Q_1(\gamma_k, T) + \mathrm{Re}\ Q_2(\gamma_k, T) \cos\ ((\gamma_{2k} - \gamma_{1k})T) -$$
$$- \mathrm{Im}\ Q_2(\gamma_k, T) \sin\ ((\gamma_{2k} - \gamma_{1k})T),$$

то на основі теореми 2.5 можна показати, що кількість інтервалів $A^j_{2^n-3}$ оцінюється зверху величиною $C_{2,2^n-3}\|\mu_k\|$.

Таким чином, отримаємо оцінку
mes $\{T \in A_{2^n-3}$:

$$\left|Re\, \Big(Q_1(\gamma_k, T) + Q_2(\gamma_k, T) \exp(i(\gamma_{2k} - \gamma_{1k})T)\Big)\right| \le$$
$$\le \|\mu\|^{-p-2\varepsilon_{2^n-3}/(n^3-n+2)+2\varepsilon_{2^n-2}/(n(n-1))}\} \le$$
$$\le C_{1,2^n-3} C_{2,2^n-3} \|k\|^{-p-2\varepsilon_{2^n-3}/(n^2-n+2)+2\varepsilon_{2^n-2}/(n(n-1))}. \qquad (116)$$

Аналогічно на основі леми 3.5 на кожному з інтервалів $B^j_{2^n-3} \subset B_{2^n-3}$ маємо
mes $\{T \in B^j_{2^n-3}$:

$$|\mathrm{Im}\,(Q_2(\gamma_k, T) \exp(i(\gamma_{2k} - \gamma_{1k})T) + Q_1(\gamma_k, T))| \le$$
$$\le \|\mu_k\|^{-\alpha_n-(n^2-n+2)/2} \|k\|^{-(n^2-n+2)/2-(n(n-1)p/2-\varepsilon_{2^n-3}}\} \le$$
$$\le C_{3,2^n-3} \|\mu_k\|^{-1} \|k\|^{-p-2\varepsilon_{2^n-3}/(n^2-n+2)+2\varepsilon_{2^n-2}/(n(n-1))}.$$

Оскільки

$$\mathrm{Im}\,(Q_1(\gamma_k, T) + Q_2(\gamma_k, T) \exp(i(\gamma_{2k} - \gamma_{1k})T)) =$$
$$= \mathrm{Im}\, Q_1(\gamma_k, T) + \mathrm{Im}\, Q_2(\gamma_k, T) \cos((\gamma_{2k} - \gamma_{1k})T) +$$
$$+ \mathrm{Re}\, Q_2(\gamma_k, T) \sin((\gamma_{2k} - \gamma_{1k})T),$$

то на основі тієї ж теореми 2.5 кількість інтервалів $B^j_{2^n-3}$ можна оцінити зверху величиною $C_{4,2^n-3}\|\mu_k\|$ і тоді
mes $\{T \in B_{2^n-3}$:

$$|\mathrm{Im}\,(Q_2(\gamma_k, T) \exp(i(\gamma_{2k} - \gamma_{1k})T) + Q_1(\gamma_k, T))| \le$$
$$\le \|\mu_k\|^{-\alpha_n-(n^2-n+2)/2} \|k\|^{-(n^2-n+2)/2-n(n-1)p/2-\varepsilon_{2^n-3}}\} \le$$
$$\le C_{3,2^n-3} C_{4,2^n-3} \|k\|^{-p-2\varepsilon_{2^n-3}/(n^2-n+2)+2\varepsilon_{2^n-2}/(n(n-1))}. \qquad (117)$$

На основі нерівностей (116) і (117), враховуючи, що

$$|g_{2^n-4}(T)| = |Q_1(\gamma_k, T) + Q_2(\gamma_k, T) \exp(i(\gamma_{2k} - \gamma_{1k})T)|,$$

отримуємо оцінку

$$|g_{2^n-4}(T)| > \|\mu_k\|^{-\alpha_n-(n^2-n+2)/2} \|k\|^{-\frac{n^2-n+2}{2}p-n(n-1)p/2-\varepsilon_{2^n-3}} \qquad (118)$$

для всіх $T \in D_1 \subset [t_1, t_2]$, причому

$$\mathrm{mes}\ D_1 > t_2 - t_1 - (C_{1,2^n-3} C_{2,2^n-3} + C_{3,2^n-3} C_{4,2^n-3}) \times$$
$$\times \|k\|^{-p-2\varepsilon_{2^n-3}/(n^2-n+2)+2\varepsilon_{2^n-2}/(n(n-1))}.$$

Виходячи з оцінки (118), цілком аналогічними міркуваннями отримуємо, що для $y_{2^n-5}(T)$ справедлива оцінка

$$|g_{2^n-5}(T)| > \|\mu_k\|^{-\alpha_n-(n^2-n+2)/2} \|k\|^{-(n^2-n+2)p/2-n(n-1)p/2-\varepsilon_{2^n-4}}$$

для всіх $T \in D_2 \subset [t_1, t_2]$, причому

$$\mathrm{mes}\, D_2 > t_2 - t_1 -$$
$$-(C_{1,2^n-3} C_{2,2^n-3} + C_{3,2^n-3} C_{4,2^n-3}) \|k\|^{-p-2\varepsilon_{2^n-3}/(n^2-n+2)} -$$
$$-(C_{1,2^n-4} C_{2,2^n-4} + C_{3,2^n-4} C_{4,2^n-4}) \|k\|^{-p-2(\varepsilon_{2^n-4}-\varepsilon_{2^n-3})/(n^2-n+2)}.$$

Продовжуючи такий перехід від $g_{j+1}(T)$ до $g_j(T)$, $j = 2^n - 5, \ldots,$ і, нарешті, від $y_0(T)$ до $\Delta_1(\mu_k, n)$, отримуємо, що для всіх $T \in D \subset$ $\subset [t_1, t_2]$ справджується оцінка

$$|\Delta_1(\mu_k, n)| > \|\mu_k\|^{-\alpha_n-\beta_n} \|k\|^{-\beta_n-\varepsilon_0}, \qquad (119)$$

причому

$$\mathrm{mes}\, D > t_2 - t_1 - \sum_{j=0}^{2^n-3} (C_{1,j} C_{2,j} + C_{3,j} C_{4,j}) \|k\|^{-p-\delta_j},$$

де $\beta_n = \sum_{j=1}^{n-1} C_n^j \Big(\frac{2n-j-1}{2} j + 1\Big) p$; $C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$.

Додатні числа ε_j, $j = 0, 1, \ldots, 2^n-3$, виберемо так, щоб величини δ_j також були додатними. Тоді ряд

$$\sum_{\|k\|>0} \sum_{j=0}^{2^n-3} (C_{1,j} C_{2,j} + C_{3,j} C_{4,j}) \|k\|^{-p-\delta_j}$$

буде збіжним. Отже, виконуються умови леми 3.1. Звідси отримуємо, що нерівність (119) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T \in [t_1, t_2]$. А оскільки проміжок $[t_1, t_2]$ вибраний довільно, то нерівність (119) виконується для майже всіх $T > 0$.

Вияснимо тепер, коли ж виконується нерівність (115). Для цього функцію $g_{2^n-2}(\gamma_k, T)$ запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} g_{2^n-2}(\gamma_k, T) = (n(n-1)/2)! \ &\sum_{r=2}^{n} i\gamma_{rk} \Big(i\{\sum_{q=2}^{n} \gamma_{qk} - \gamma_{1k}\}\Big)^n \times \\ &\times \prod_{j=1}^{n} (i\gamma_{jk})^{n-1} \prod_{(l_1,\ldots,l_{n-2})\in n_2} (i(\gamma_{l_1 k} + \ldots + \gamma_{l_{n-2} k}))^n \times \\ &\times \prod_{(l_1,\ldots,l_{n-2})\in n_2} (i(\gamma_{l_1 k} + \ldots + \gamma_{l_{n-2} k} - \gamma_{1k}))^{2n-1} \times \\ &\times \prod_{(l_1,\ldots,l_{n-3})\in n_2} (i(\gamma_{l_1 k} + \ldots + \gamma_{l_{n-3} k}))^{2n-1} \times \\ &\times \prod_{(l_1,\ldots,l_{n-3})\in n_2} (i(\gamma_{l_1 k} + \ldots + \gamma_{l_{n-3} k} - \gamma_{1k}))^{3n-3} \times \\ &\times \prod_{(l_1,\ldots,l_{n-4})\in n_2} (i(\gamma_{l_1 k} + \ldots + \gamma_{l_{n-4} k}))^{3n-3} \times \\ &\times \prod_{(l_1,\ldots,l_{n-4})\in n_2} (i(\gamma_{l_1 k} + \ldots + \gamma_{l_{n-4} k} - \gamma_{1,k}))^{4n-6} \times \ldots \\ &\ldots \times \prod_{l\in n_2} (i\gamma_{lk})^{(n^2-n)/2} \prod_{l\in n_2} (i(\gamma_{lk} - \gamma_{1k}))^{(n^2-n+2)/2}. \end{aligned}$$

Оцінимо спочатку групу співмножників

$$\Gamma_{r,1} = \prod_{(l_1,\ldots,l_{n-r})\in n_2} (i(\gamma_{l_1 k} + \ldots + \gamma_{l_{n-r} k}))^{n(n+r-2)(r-1)/2}.$$

Позначимо через $K_{r,1}$ поліном степеня C_{n-1}^{r-1} від γ_k вигляду

$$K_{r,1} = \prod_{(l_1,\ldots,l_{n-r})\in n_2} (i(\gamma_{l_1 k} + \ldots + \gamma_{l_{n-r} k})).$$

Домножимо $K_{r,1}$ на добуток всіх можливих сум $i(\gamma_{l_1 k} + \ldots + \gamma_{l_{n-r} k})$, де індекси $l_1, \ldots, l_{n-r}$ не збігаються та один із них l_j дорівнює 1. В результаті отримуємо поліном степеня C_n^r від γ_k

$$M_{r,1} = i^{C_n^r} \prod_{(l_1,\ldots,l_{n-r})\in\{1,\ldots,n\}} (\gamma_{l_1 k} + \ldots + \gamma_{l_{n-r} k}),$$

симетричний відносно величин $\gamma_{l_1 k}, \ldots, \gamma_{l_n k}$. Враховуючи те, що числа $\gamma_{l_1 k}, \ldots, \gamma_{l_n k}$ є коренями рівняння (105), отримуємо, що $M_{r,1}$ є поліномом від величин $\sum_{|s|=\alpha} a_s \prod_{r=1}^{p} (\mu_{k_r})^{s_r}$, $\alpha = 1, \ldots, n$. Доданки полінома $i^{-C_n^r} M_{r,1}$ мають вигляд

$$\beta \prod_{\alpha=1}^{n} \Big(\sum_{|s|=\alpha} a_s \prod_{r=1}^{p} (\mu_{k_r})^{s_r} \Big)^{\nu_\alpha},$$

де β – деяка константа, $\nu_\alpha \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha = 1, \ldots, n$, і $\sum_{\alpha=1}^{n} \alpha\nu_\alpha = C_n^r$.

Не обмежуючи загальності, припускаємо, що

$$|\mu_{k_1}| = \max\{|\mu_{k_j}|, \ \ j = 1, \ldots, p\}.$$

Знайдемо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\nu_1 + \ldots \nu_n} (i^{-C_n^r} M_{r,1})}{\partial a_{(1,0,\ldots,0)}^{\nu_1} \ldots \partial a_{(n,0,\ldots,0)}^{\nu_n}} &= \beta \prod_{j=1}^{n} \nu_j! \prod_{\alpha=1}^{n} \mu_{k_1}^{\alpha\nu_\alpha} = \\ &= \beta \prod_{j=1}^{n} \nu_j! \mu_{k_1}^{C_n^r} \geq \frac{\beta}{p^{C_n^r}} \prod_{j=1}^{n} \nu_j! \|\mu_k\|^{C_n^r}. \end{aligned}$$

Застосовуючи тепер лему 3.5, отримуємо

$$\begin{aligned} \text{mes}\, \{(a_{(1,0,\ldots,0)}, \ldots, a_{(n,0,\ldots,0)}) : |M_{r,1}| \leq \|\mu_k\|^{C_n^r} \|k\|^{-p(\nu_1+\cdots+\nu_n)-\varepsilon}\} \leq \\ \leq \text{const}\, \|k\|^{-p-\varepsilon/(\nu_1+\cdots+\nu_n)}, \quad \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

де $(a_{(1,0,\ldots,0)}, \ldots, a_{(n,0,\ldots,0)}) \in A_1 \subset \mathbb{R}^n$, A_1 – деякий паралелепіпед.

Інтегруючи цю оцінку в деякому паралелепіпеді A_2 змінних $a_{(s_1,\ldots,s_p)}$, $|s| = 1, \ldots, n$, $s_1 \neq |s|$, отримуємо

$$\begin{aligned} \text{mes}\, \{a_s \in A : \ |M_{r,1}| \leq \|\mu_k\|^{C_n^r} \|k\|^{-p(\nu_1+\cdots+\nu_n)-\varepsilon}\} \leq \\ \leq \text{const}\, \|k\|^{-p-\varepsilon/(\nu_1+\cdots+\nu_n)}. \end{aligned}$$

Тут паралепіпеди A_1 і A_2 вибрані таким чином, що $A = A_1 \times A_2$ належить області A^*, яка визначає строго гіперболічні рівняння.

Враховуючи збіжність ряду $\sum_{\|k\|>0} \|k\|^{-p-\varepsilon/(\nu_1+\cdots+\nu_n)}$ і застосовуючи лему 3.1 отримуємо, що для майже всіх (за Лебегом) векторів $a_s \in A$ нерівність

$$|M_{r,1}| > \|\mu_k\|^{C_n^r} \|k\|^{-p(\nu_1+\cdots+\nu_n)-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \tag{120}$$

виконується для всіх, крім, можливо, скінченного числа, векторів $\mu_k \in M_p$. Оскільки $\sum_{\alpha=1}^{n} \alpha\nu_\alpha = C_n^r$, то $\max_{\nu_1,\ldots,\nu_n} \sum_{\alpha=1}^{n} \nu_\alpha \leq C_n^r$ і, отже, з нерівності (120) випливає така нерівність:

$$|M_{r,1}| > \|\mu_k\|^{C_n^r} \|k\|^{-pC_n^r - \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

Враховуючи, що $|\gamma_{jk}| \le \mathrm{const}\ \|\mu_k\|$, $j = 1, \ldots, p$, легко отримуємо оцінку полінома $K_{r,1}$, а саме: для майже всіх (за Лебегом) $a_s \in A$ нерівність

$$|K_{r,1}| > \|\mu_k\|^{C_{n-1}^{r-1}} \|k\|^{-pC_n^r - \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів $\mu_k \in M_p$. Оскільки $K_{r,1}^{(2n-r+2)(r-1)/2} = \Gamma_{r,1}$, то з останньої оцінки випливає, що для майже всіх $a_\alpha \in A$ при всіх (крім скінченної кількості) $\mu_k \in M_p$ виконується нерівність

$$|\Gamma_{r,1}| > \|\mu_k\|^{\left(C_{n-1}^{r-1} - \frac{p}{\sigma} C_n^r\right) \frac{2n-r+2}{2}(r-1) - \delta}, \quad \delta > 0. \tag{121}$$

Оцінимо тепер групу співмножників

$$\Gamma_{r,2} = \prod_{(l_1,\ldots,l_{n-r}) \in n_2} (i(\gamma_{l_1 k} + \ldots + \gamma_{l_{n-r} k} - \gamma_{1k}))^{(2n-r+2)r/2}.$$

Позначимо

$$K_{r,2} = \prod_{(l_1,\ldots,l_{n-r}) \in n_2} (i(\gamma_{l_1 k} + \ldots + \gamma_{l_{n-r} k} - \gamma_{1k})).$$

Поряд із поліномом $K_{r,2}$, який має C_{n-1}^{r-1} співмножників, розглянемо поліном

$$M_{r,2} = \prod_{j=1}^{n} \prod_{\substack{(l_1,\ldots,l_{n-r}) \in n_2 \\ l_\alpha \ne j}} (i(\gamma_{l_1 k} + \ldots + \gamma_{l_{n-r} k} - \gamma_{jk})),$$

що має nC_{n-1}^{r-1} співмножників.

Очевидно, що поліном $M_{r,2}$ є симетричним відносно своїх змінних $\gamma_{l_1,k}, \ldots, \gamma_{l_{n-r},k}$, а отже, його можна зобразити у вигляді полінома від величин $\sum\limits_{|s|=\alpha} a_s \prod\limits_{r=1}^{p} (i\mu_{k_r})^{s_r}$.

Аналогічними міркуваннями (як для $\Gamma_{r,1}$) одержуємо таке твердження: для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів $a_\alpha \in A$ нерівність

$$|\Gamma_{r,2}| > \|\mu_k\|^{\left(C_{n-1}^{r-1} - \frac{pn}{\sigma} C_{n-1}^{r-1}\right) \frac{r}{2}(2n-r+2) - \varepsilon} \tag{122}$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) $\mu_k \in M_p$.

Так само отримуємо оцінки і для інших співмножників, а саме: для майже всіх $a_s \in A$ нерівності

$$\left| \sum_{j=2}^{n} \gamma_{j,k} \right| > \|\mu_k\|^{(1-pn/\sigma) - \varepsilon}, \tag{123}$$

$$\left| \sum_{j=2}^{n} (\gamma_{j,k} - \gamma_{1,k}) \right|^n > \|\mu_k\|^{(1-pn/\sigma) - \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \tag{124}$$

виконуються для всіх (крім скінченного числа) $\mu_k \in M_p$.

Очевидно, що всі викладки, проведені для $\Delta_1(\mu_k, n)$, аналогічно проводяться і для $\Delta(\mu_k, n)$, тобто, якщо при деякому показнику α_{1n} нерівність

$$\left| g_{2^n-2}(\gamma_k, T) \prod_{r=1}^{p} (i\gamma_{jk})^{-n} \right| > \|\mu_k\|^{-\alpha_{1n}} \tag{125}$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів $\mu_k \in M_p$, то для майже всіх T (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) нерівність

$$|\Delta(\mu_k, T)| > \|\mu_k\|^{-\alpha_{1n} - \beta_n} \|k\|^{-\beta_n - \varepsilon_0}, \quad \varepsilon_0 > 0, \tag{126}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) $\mu_k \in M_p$; тут β_n – те саме, що й у формулі (119).

З нерівності

$$\left| \prod_{r=1}^{p} (i\gamma_{jk})^n \right| \le \mathrm{const}\ \|\mu_k\|^{n^2}$$

і оцінок (121)–(124) отримуємо, що при

$$\alpha_{1n} > \sum_{r=2}^{n-1} \left\{ \left(\frac{p}{\sigma} C_n^r - C_{n-1}^{r-1} \right) \frac{2n-r+2}{2}(r-1) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{pn}{\sigma} C_{n-1}^{r-1} - C_{n-1}^{r-1} \right) \frac{2n-r+2}{2} r \right\} + \frac{pn(n+1)}{\sigma} + n^2 - n - 1$$

оцінка (125) виконується для майже всіх $a_s \in A$, а отже, і для всіх $a_s \in A^*$, оскільки A^* можна покрити зчисленною кількістю паралелепіпедів. З урахуванням оцінок (126) та (106), отримуємо таку теорему.

Теорема 13. *При* $\gamma > \sum\limits_{j=1}^{n-1} C_n^j p \frac{1+\sigma}{\sigma} \left(\frac{2n-j-1}{2} j + 1 \right) +$

$$+ \sum_{r=2}^{n-1} \left(\left(\frac{p}{\sigma} C_n^r - C_{n-1}^{r-1} \right) \frac{2n-r+2}{2}(r-1) + \left(\frac{pn}{\sigma} - 1 \right) C_{n-1}^{r-1} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{(2n-r+1)r}{2} \right) + \frac{pn(n+1)}{\sigma} + n^2 - n - 1$$

оцінка (113) виконується для майже всіх векторів $\{T, a_s\} \in\,]0, \infty[\times A^*$, $|s| = \alpha$, $\alpha = 1, \ldots, p$.

У випадку однієї просторової змінної оцінка для показника γ покращується. Знайдемо її. При $p = 1$, очевидно, $\gamma_{rk} = \gamma_r \mu_k$, $\gamma_r \in \mathbb{R}$, $r = 1, \ldots, n$. Тоді визначник $\Delta_1(\mu_k, n)$ можна записати у вигляді

$$\Delta_1(\mu_k, n) =$$

$$= \begin{vmatrix} (i\gamma_1\mu_k)^{n-1}\exp\,(i\gamma_1\mu_k T) - (i\gamma_1\mu_k)^{n-1} & \dots & (i\gamma_n\mu_k)^{n-1}\exp\,(i\gamma_n\mu_k T) - (i\gamma_n\mu_k)^{n-1} \\ (i\gamma_1\mu_k)^{n-1}T\exp\,(i\gamma_1\mu_k) + (i\gamma_1\mu_k)^{n-2}(1-\exp\,(i\gamma_1\mu_k T)) & \dots & (i\gamma_n\mu_k)^{n-1}T\exp\,(i\gamma_n\mu_k) + (i\gamma_n\mu_k)^{n-2}(1-\exp\,(i\gamma_n\mu_k T)) \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\frac{(n-1)!}{(n-j)!}(i\gamma_1\mu_k T)^{n-j}\exp\,(i\gamma_1\mu_k T) + (-1)^n(n-1)! & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\frac{(n-1)!}{(n-j)!}(i\gamma_n\mu_k T)^{n-j}\exp\,(i\gamma_n\mu_k T) + (-1)^n(n-1)! \end{vmatrix}.$$

Побудуємо функції

$$G_1(\mu_k, n) = \exp(-i\gamma_n\mu_k)\mu_k^{-n}\frac{\partial^n\Delta_1(\mu_k, n)}{\partial\gamma_n^n},$$

$$G_2(\mu_k, n) = \mu_k^{-(n-1)}\frac{\partial^{n-1}G_1(\mu_k, n)}{\partial\gamma_n^{n-1}}.$$

Припустимо, що для функції $G_2(\mu_k, n)$, яка дорівнює $\Delta_1(\mu_k, n-1)\times$ $\times(iT)^{2n-1}(i\mu_k)^{n-1}$, виконується оцінка

$$|G_2(\mu_k, n)| > |\mu_k|^{-\zeta_{n-1}+n-1}|k|^{-(n-1)^2-\delta}, \quad \delta > 0, \tag{127}$$

для всіх (крім, можливо, скінченного числа) значень $\mu_k \in M_1$. Зафіксуємо таке μ_k, що виконується нерівність (127). Тоді, внаслідок леми 3.5 міра тих $\gamma_n \in [L_n, Q_n]$, для яких

$$G_1(\mu_k, n) \leq |\mu_k|^{-\zeta_{n-1}+2(n-1)}|k|^{-(n-1)^2-(n-1)-\delta_1}, \tag{128}$$

не перевищує $D_1|k|^{-1-(\delta_1-\delta)/(n-1)}$, або, іншими словами, множина K^* тих $\gamma_n \in [L_n, Q_n]$, для яких виконується нерівність, протилежна нерівності (128), має міру, що оцінюється знизу величиною

$$\mathrm{mes}\, K^* > Q_n - L_n - D_1|k|^{-1-\delta_2},$$

де $\delta_2 = (\delta_1 - \delta)/(n-1)$. Множину K^* зобразимо у вигляді $K^* =$ $= A\bigcup B$, де підмножини A та B такі, що

$$\forall\gamma_n \in A \quad \left|\mathrm{Re}\,\frac{\partial^n\Delta_1(\mu_k, n)}{\partial\gamma_n^n}\right| > \frac{1}{\sqrt{2}}|\mu_k|^{-\zeta_{n-1}+3n-2}|k|^{-n(n-1)-\delta_1}, \tag{129}$$

$$\forall\gamma_n \in B \quad \left|\mathrm{Im}\,\frac{\partial^n\Delta_1(\mu_k, n)}{\partial\gamma_n^n}\right| > \frac{1}{\sqrt{2}}|\mu_k|^{-\zeta_{n-1}+3n-2}|k|^{-n(n-1)-\delta_1}. \tag{130}$$

На кожному з інтервалів підмножини A, застосовуючи лему 3.5, отримуємо, що міра тих γ_n, для яких виконується нерівність

$$|\mathrm{Re}\,\Delta_1(\mu_k, n)| \leq |\mu_k|^{-\zeta_{n-1}+2(n-1)}|k|^{-(n-1)^2-2n+1-\delta_2}, \tag{131}$$

не перевищує $D_2|\mu_k|^{-1}|k|^{-1-(\delta_2-\delta_1)/n}$, $D_2 > 0$. Оскільки число інтервалів, де виконується нерівність (129), не більше, ніж $D_3|\mu_k|$, $D_3 > 0$, то загальна міра тих $\gamma_n \in A$, для яких виконується нерівність (131), не більша, ніж $D_2D_3|k|^{-1-\varepsilon_2}$, $\varepsilon_2 = (\delta_2 - \delta_1)/n)$. Аналогічно для підмножини B, враховуючи (130), отримуємо, що міра тих γ_n, для яких виконується нерівність

$$|\mathrm{Im}\,\Delta_1(\mu_k, n)| \leq |\mu_k|^{-\zeta_{n-1}+2(n-1)}|k|^{-n^2-\delta_2}, \tag{132}$$

не перевищує $D_4|k|^{-1-\varepsilon_2}$.

Отже, враховуючи оцінки (128), (131), (132), знаходимо, що

$$\mathrm{mes}\,\{\gamma_n \in [L_n, Q_n] : \ |\Delta_1(\mu_k, n)| \leq |\mu_k|^{-\zeta_{n-1}+n-1}|k|^{-n^2-\delta_2}\} \leq$$
$$\leq D_1|k|^{-1-\varepsilon_1} + (D_2D_3 + D_4)|k|^{-1-\varepsilon_2}.$$

Інтегруючи останню оцінку за змінними $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ в паралелепіпеді $\prod\limits_{j=1}^{n-1}[L_j, Q_j]$, отримуємо аналогічну оцінку

$$\mathrm{mes}\,\{\gamma \in P_n : \ |\Delta_1(\mu_k, n)| \leq |\mu_k|^{-\zeta_{n-1}+2(n-1)}|k|^{-n^2-\delta_2}\} \leq$$
$$\leq D_5(|k|^{-1-\varepsilon_1} + |k|^{-1-\varepsilon_2}),$$

де $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $P_n = \prod\limits_{j=1}^{n}[L_j, Q_j] \subset \mathbb{R}^n$.

Виберемо тепер $\delta_1 = 2\delta$, $\delta_2 = 2\delta_1$. Тоді ряд $\sum\limits_{|k|>0} D_5(|k|^{-1-\varepsilon_1}+$ $+|k|^{-1-\varepsilon_2})$ буде збіжним. Застосовуючи лему 3.1 та враховуючи, що простір $\mathbb{R}^n$ можна покрити зчисленною множиною паралелепіпедів P_n, отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ виконується оцінка

$$|\Delta_1(\mu_k, n)| > |k|^{-n^2-\varepsilon}|\mu_k|^{-\zeta_n}, \quad \zeta_n = \zeta_{n-1} - 2(n-1) \tag{133}$$

для всіх (крім скінченного числа) $\mu_k \in M_1$. Оскільки при $n = 1$ для майже всіх $\gamma \in \mathbb{R}$ нерівність

$$|\exp\,(i\mu_k\gamma T) - 1| > |k|^{-1-\varepsilon}$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) $\mu_k \in M_p$, тобто $\zeta_1 = 0$, знаходимо, що $\zeta_n = -n^2 + n$.

Враховуючи, що $\Delta(\mu_k, n) = \Delta_1(\mu_k, n)/\prod_{j=1}^{n}(i\gamma_i\mu_k)^n$, та оцінки (106) і (133), отримуємо таку теорему.

Теорема 14. *Для майже всіх векторів* $(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in\mathbb{R}^n$ *нерівність*

$$|\Delta(\mu_k, n)| > |\mu_k|^{-n-\frac{n^2}{\sigma}-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0,$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) $\mu_k \in M_1$.

§ 8. Системи гіперболічних рівнянь

Встановлено умови існування та єдиності розв'язків нелокальних крайових задач (п. 8.1) для лінійних гіперболічних за Гордінгом систем рівнянь із сталими коефіцієнтами, які розглянуті в §6. Результати перенесено (п. 8.2) на випадок таких же систем, збурених нелінійним інтегро-диференціальним оператором [208].

8.1. Лінійні системи зі сталими коефіцієнтами

В області D^p розглядаємо задачу [196]

$$\frac{\partial^{n_j} u_j(t,x)}{\partial t^{n_j}} - \sum_{r=1}^{m} P_{jr}\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)u_r(t,x) = F_j(t,x),\ j=1,\ldots,m, \quad (1)$$

$$\sum_{\substack{|s|\le K\\ s_0\le n_j-1}} b^{(l)}_{j\hat{s}}\frac{\partial^{|\hat{s}|}u_j(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots x_p^{s_p}}\Big|_{t=0} - \mu \sum_{\substack{|s|\le K\\ s_0\le n_j-1}} b^{(l)}_{j\hat{s}}\frac{\partial^{|\hat{s}|}u_j(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots x_p^{s_p}}\Big|_{t=T} =$$

$$= f_{jl}(x), \quad l=1,\ldots,n_j, j=1,\ldots,m, \quad (2)$$

де $P_{jr}(\lambda,\xi_1,\ldots,\xi_p)$ – многочлен із сталими коефіцієнтами, степінь якого за сукупністю змінних $\xi_1,\ldots,\xi_p$ не перевищує K, а за змінною λ – не перевищує n_j-1; $K \ge \max\limits_{1\le j\le m}\{n_j\}$, $n_1+\ldots+n_m = n$; $b^{(l)}_{j\hat{s}}$, $\mu\in\mathbb{C}$, $\mu\ne 0;1$. Вважається, що система (1) гіперболічна за Гордінгом (див. п. 6.2).

Будемо розглядати розв'язки задачі (1), (2) з простору $\overline{H}_q^{\bar n}(D^p)$, $\bar n = (n_1,\ldots,n_m)$, $q\ge K$, припускаючи, що $F_j\in H^0_{N_1}(D^p)$ та $f_{jl}\in H_{N_2}(\Omega^p_{2\pi})$, $l=1,\ldots,n_j$, $j=1,\ldots,m$, де N_1 і N_2 – досить великі натуральні числа.

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді векторного ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\ge 0} u_k(t)\exp i(k,x), \quad (3)$$

де $u(t,x) = \mathrm{col}\{u_1(t,x),\ldots,u_m(t,x)\}$, $u_k(t) = \mathrm{col}\{u_{k1}(t),\ldots,u_{km}(t)\}$. Тоді вектор-функція $u_k(t)$ буде розв'язком відповідної задачі

$$\frac{d^{n_j}u_{kj}(t)}{dt^{n_j}} - \sum_{r=1}^{m} P_{jr}\Big(\frac{d}{dt}, ik\Big)u_{kr}(t) = F_{kj}(t),\ j=1,\ldots,m, \quad (4)$$

$$M_{k,jl}[u_{kj}] \equiv \sum_{\substack{|\hat{s}|\le K\\ s_0\le n_j-1}} b^{(l)}_{j\hat{s}}(ik_1)^{s_1}\cdots(ik_p)^{s_p}\Big(u_{kj}^{(s_0)}(0) - \mu u_{kj}^{(s_0)}(T)\Big) =$$

$$= f_{k,jl},\ l=1,\ldots,n_j, j=1,\ldots,m, \quad (5)$$

де $F_{kj}(t)$ і $f_{k,jl}$ – коефіцієнти розвинення функцій $F_j(t,x)$ і $f_{jl}(x)$, $l = 1,\ldots,n_j$, $j=1,\ldots,m$, в ряди Фур'є.

Припустимо, що для всіх векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ корені $\lambda_j(k)$, $j = 1,\ldots,n$, рівняння (6.20), де $\xi_r = k_r$, $r=1,\ldots,p$, є попарно різними і не дорівнюють нулю. Тоді однорідна система рівнянь

$$\frac{d^{n_j}u_{kj}(t)}{dt^{n_j}} - \sum_{r=1}^{m} P_{jr}\Big(\frac{d}{dt}, ik\Big)u_{kr}(t) = 0,\ j=1,\ldots,m, \quad (4')$$

має таку фундаментальну матрицю розв'язків:

$$Y = \|Y_{r\nu}\|_{\substack{r=1,\ldots,m\\ \nu=1,\ldots,n}},\ Y_{r\nu} = \varphi_r(\lambda_\nu)\exp\lambda_\nu t, \quad (6)$$

де

$$\varphi_m(\lambda) = \det\|P_{jl}(\lambda, ik) - \lambda^{n_j}\delta_{jl}\|_{j,l=1}^{m-1} = \sum_{\nu=0}^{n-n_m} A_{m,\nu}(k)\lambda^{n-n_m-\nu}, \quad (7)$$

$$\varphi_r(\lambda) = D_r(\lambda) \equiv \sum_{\nu=0}^{n-n_r-1} A_{r,\nu}(k)\lambda^{n-n_r-1-\nu},\ r=1,\ldots,m-1. \quad (8)$$

Тут

$$D_r(\lambda) = \det\begin{Vmatrix} P_{11}(\lambda,ik)-\lambda^{n_1} & \ldots & P_{1,r-1}(\lambda,ik) & P_{1,m}(\lambda,ik) & P_{1,r+1}(\lambda,ik) & \ldots & P_{1,m-1}(\lambda,ik) \\ \ldots & \ldots\ \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots\ \ldots & \\ P_{m-1,1}(\lambda,ik) & \ldots & P_{m-1,r-1}(\lambda,ik) & P_{m-1,m}(\lambda,ik) & P_{m-1,r+1}(\lambda,ik) & \ldots & P_{m-1,m-1}(\lambda,ik)-\lambda^{n_{m-1}} \end{Vmatrix}.$$

Для системи рівнянь (4′) задача з умовами

$$M_{k,jl}[u_{kj}] = 0, \quad l=1,\ldots,n_j, j=1,\ldots,m, \quad (5')$$

має нетривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли визначник $\Delta(k)$ матриці $\|M_{k,jl}[Y_{j\nu}]\|_{\substack{l=1,\ldots,n,\,j=1,\ldots,m\\ \nu=1,\ldots,n}}$ дорівнює нулю. Цей визначник обчислюється за формулою

$$\Delta(k) =$$
$$= \prod_{j=1}^{n}\left(1-\mu\exp\left(\lambda_j(k)T\right)\right)\prod_{1\le r<l\le n}[\lambda_l(k)-\lambda_r(k)]\prod_{\nu=1}^{m}\beta_\nu(k)B(k), \quad (9)$$

де

$$\beta_\nu(k)=\det\left\|\sum_{|s|\le K} b^{(l)}_{\nu,s_0,s}\prod_{r=1}^{p}(ik_r)^{s_r}\right\|_{\substack{l=1,\ldots,n_\nu\\ s_0=0,1,\ldots,n_\nu-1}}, \ \nu=1,\ldots,m; \quad (10)$$

$$B(k)=\left|\begin{array}{l}
\underbrace{0\ldots0}_{n_1-1}\,A_{1,q_1}\,\ldots\ldots\ldots\,A_{1,1}\,A_{1,0}\,0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{1,q_1}\,\ldots\ldots\ldots\,A_{1,1}\,A_{1,0}\,\underbrace{0\ldots0}_{n_1}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\underbrace{0\ldots0}_{n_{m-1}-1}\,A_{m-1,q_{m-1}}\,\ldots\,A_{m-1,1}\,A_{m-1,0}\,0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{m-1,q_{m-1}}\,\ldots\ldots\,A_{m-1,1}\,A_{m-1,0}\,\underbrace{0\ldots0}_{n_{m-1}}\\
\underbrace{0\ldots0}_{n_m-1}\,A_{m,q_m}\,\ldots\ldots\,A_{m,2}\,A_{m,1}\,A_{m,0}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{m,q_m}\,\ldots\ldots\,A_{m,2}\,A_{m,1}\,A_{m,0}\,\underbrace{0\ldots0}_{n_m-1}
\end{array}\right|; \quad (11)$$

$q_r=n-n_r-1$, $r=1,\ldots,m-1$; $q_m=n-n_m$.

Вирази $\lambda_l(k)-\lambda_r(k)$, $r,l=1,\ldots,n$, $r\ne l$, не дорівнюють нулю для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$, бо $\lambda_j(k)$, $j=1,\ldots,n$, є попарно різними. Визначник $B(k)$ також не обертається в нуль, бо він входить множником у вираз вронскіана фундаментальної системи розв'язків (6). Справедлива теорема, яка доводиться за схемою доведення теореми 4.1.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\overline{H}^n_K(D^p)$ необхідно і достатньо, щоб рівняння*

$$1-\mu\exp\left(\lambda_j(k)T\right)=0, \ j=1,\ldots,n, \quad (12)$$

$$\beta_\nu(k)=0, \ \nu=1,\ldots,m, \quad (13)$$

не мали розв'язків у цілих числах $k_1,\ldots,k_p$. •

Розв'язок задачі (4), (5) можна зобразити у вигляді суми

$$u_k(t)=U_k(t)+V_k(t),$$

де $U_k(t)$ – розв'язок задачі (4), (5'); $V_k(t)$ – розв'язок задачі (4'), (5). Припустимо, що має місце єдиність розв'язку задачі (1), (2). Тоді компоненти векторів $U_k(t)$ та $V_k(t)$ визначаються за формулами

$$U_{kj}(t)=\int_0^T\sum_{r=1}^{m}G_{k,jr}(t,\tau)F_{kr}(\tau)\,d\tau, \ j=1,\ldots,m, \quad (14)$$

$$V_{kj}(t)=\sum_{l,\nu=1}^{n}\sum_{\delta=1}^{m}\sum_{\varkappa,\sigma=1}^{n_\delta}(-1)^{l-1}\exp\left(\lambda_l(k)t\right)\ (\beta_\delta(k))_{\sigma\varkappa}\times$$
$$\times\frac{\varphi_j(\lambda_l(k))f_{k,\delta\sigma}B_{h_{\delta\varkappa}\nu}(k)S^l_{n-\nu}}{(1-\mu\exp\lambda_l(k)T)\beta_\delta(k)B(k)\prod\limits_{\substack{a=1\\a\ne l}}^{n}(\lambda_l(k)-\lambda_a(k))}, \ j=1,\ldots,m, \quad (15)$$

де $G_{k,jr}(t,\tau)$ – елементи матриці Гріна задачі (4'), (5'), які в квадраті K_T (крім сторін $\tau=0$, $\tau=T$) визначаються формулами

$$G_{k,jr}(t,\tau)=\frac{1}{2B(k)}\sum_{l,\nu=1}^{n}\frac{B_{n_r\nu}(k)S^l_{n-\nu}}{\exp\left(\lambda_l(k)\tau\right)\prod\limits_{\substack{a=1\\a\ne l}}^{n}(\lambda_a(k)-\lambda_l(k))}\times$$
$$\times\Big\{(-1)^{h_{r+1,1}}\operatorname{sgn}(t-\tau)\ \varphi_j(\lambda_l(k))\ \exp\left(\lambda_l(k)t\right)+$$
$$+\sum_{\zeta,\rho=1}^{n}\sum_{\delta=1}^{m}\sum_{\varkappa,\sigma,s_0=1}^{n_\delta}(-1)^{h_{\delta\sigma}+h_{\zeta+1,1}}\lambda_l^{s_0-1}(k)\ \varphi_\delta(\lambda_l(k))\ \varphi_j(\lambda_\zeta(k))\times$$
$$\times\frac{\exp\left(\lambda_\zeta(k)t\right)}{\beta_\delta(k)B(k)}\sum_{|s|\le K}b^\sigma_{\delta,s_0-1,s}(ik_1)^{s_1}\ldots(ik_p)^{s_p}\times$$
$$\times\frac{(\beta_\delta(k))_{\sigma\varkappa}B_{h_{\delta\varkappa}\rho}(k)S^\sigma_{n-\rho}\left(1+\mu\exp\left(\lambda_l(k)T\right)\right)}{\prod\limits_{\substack{a=1\\a\ne\zeta}}^{n}(\lambda_a(k)-\lambda_\zeta(k))\left(1-\mu\exp\left(\lambda_l(k)T\right)\right)}\Big\}, \ j,r=1,\ldots,m, \quad (16)$$

де $h_{j\nu}=n_1+\cdots+n_{j-1}+\nu$; $B_{lr}(k)$, $\left(\beta_\nu(k)\right)_{lr}$ – визначники, які одержуються при викресленні l-го рядка та r-го стовпця у визначниках $B(k)$ та $\beta_\nu(k)$ відповідно; S^γ_j – сума всіх можливих добутків по j елементів сукупності $\{\lambda_r(k),\ \ r=1,\ldots,n,\ r\ne\gamma\}$. Тоді компоненти розв'язку задачі (1), (2) формально зображуються рядами

$$u_j(t,x) = \sum_{|k|\ge 0} \Big(U_{kj}(t) + V_{kj}(t)\Big) \exp i(k,x), \ j = 1,\dots,m. \tag{17}$$

Вирази $\left|1 - \mu \exp \lambda_j(k)T\right|$, $\prod\limits_{r=1, r\ne l}^{n} \left|\lambda_r(k) - \lambda_l(k)\right|$, $\left|B(k)\right|$, $\left|\beta_\nu(k)\right|$, будучи відмінними від нуля, можуть ставати як завгодно малими для нескінченної множини векторів $k \in \mathbb{Z}^p$; тому збіжність рядів (17) пов'язана з проблемою малих знаменників.

Із формул (14)–(16) випливають оцінки

$$|V_{kj}^{(\nu)}(t)| \le C_1 \sum_{l=1}^{n} \sum_{\delta=1}^{m} \sum_{\sigma=1}^{n_\delta} |k|^{\nu+2(n-1)-n_j+\left(n(m-1)+n_\delta-1\right)K} |f_{k,\delta\sigma}| \times$$

$$\times \left\{ |B(k)|\ |1 - \mu \exp \lambda_l(k)T| \prod_{\substack{\varkappa=1\\ \varkappa\ne l}}^{n} |\lambda_l(k) - \lambda_\varkappa(k)|\ |\beta_\delta(k)| \right\}^{-1}, \tag{18}$$

$$\nu = 0,1,\dots,n_j, j = 1,\dots,m,$$

$$|U_{kj}^{(\nu)}(t)| \le \frac{C_2|k|^{\nu+\zeta}}{|B(k)|^2} \sum_{l,\sigma=1}^{n} \sum_{r,\delta=1}^{m} \int_0^T |F_k(t)|\, dt \Big\{ |\beta_\delta(k)| \times$$

$$\times |1-\mu \exp \lambda_\sigma(k)T| \prod_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\ne l}}^{n} |\lambda_\alpha(k)-\lambda_l(k)| \prod_{\substack{\varkappa=1\\ \varkappa\ne \sigma}}^{n} |\lambda_\varkappa(k)-\lambda_\sigma(k)| \Big\}^{-1}, \tag{19}$$

$$\nu = 0,1,\dots,n_j, j = 1,\dots,m,$$

де $\zeta = 4(n-1) + 2n(m-1)K + K \max\limits_{1\le\varkappa\le m} n_\varkappa - 2 \min\limits_{1\le r\le m} n_r$, а додатні сталі C_1, C_2 не залежать від k.

На основі формул (3), (14)–(17) та оцінок (18), (19) отримуємо твердження, яке доводиться за схемою доведення теореми 7.2.

Теорема 2. *Нехай має місце єдиність розв'язку задачі (1), (2) і нехай існують додатні сталі M_1, M_2, M_3, M_4 і числа γ_1, γ_2, γ_3, $\gamma_4 \in \mathbb{N}$ такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконуються нерівності*

$$|1 - \mu \exp \lambda_j(k)T| \ge M_1 |k|^{-\gamma_1-\varepsilon/4}, \ j = 1,\dots,n, \tag{20}$$

$$\prod_{\substack{r=1\\ r\ne j}}^{n} |\lambda_r(k) - \lambda_j(k)| \ge M_2 |k|^{-\gamma_2-\varepsilon/8}, \ j = 1,\dots,n, \tag{21}$$

$$|B(k)| \ge M_3 |k|^{-\gamma_3-\varepsilon/8}, \tag{22}$$

$$|\beta_\nu(k)| \ge M_4 |k|^{-\gamma_4-\varepsilon/4}, \ \nu = 1,\dots,m, \tag{23}$$

де $0 < \varepsilon < 1$. Якщо $F \in \overline{H}_{N_0}^{(0)}(D^p)$, $f_{jr} \in H_{N_j}(\Omega_{2\pi}^p)$, то існує розв'язок задачі (1), (2) з простору $\overline{H}_q^{\bar{n}}(D^p)$, $q \ge K$, який неперервно залежить від вектор-функцій $F(t,x)$, $f(x)$, де $r = 1,\dots,n_j$, $j = 1,\dots,m$, $F(t,x) = (F_1(t,x),\dots,F_m(t,x))$, $N_0 = q + 4n + 2n(m-1)K + K \max\limits_{1\le\nu\le m} n_\nu - 2 \min\limits_{1\le r\le m} n_r + \gamma_1 + \gamma_4 + 2(\gamma_2+\gamma_3) - 3$, $N_j = q + 2n + n(m-1)K + K(n_j - 1) - \min\limits_{1\le r\le m} n_r + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - 1$, $j = 1,\dots,m$.

Дослідимо можливість виконання оцінок (20)–(23).

Теорема 3. *Нехай існує така стала $\alpha > 0$, не залежна від k, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ справджуються нерівності*

$$\mathrm{Re}\, \lambda_j(k) \ge -\alpha \ln |k|, \quad j = 1,\dots,n. \tag{24}$$

Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^2$) векторів $(\psi/\pi, T/\pi)$, де $\psi = \mathrm{arctg}(\mathrm{Im}\,\mu/\mathrm{Re}\,\mu)$, нерівності (20) виконуються при $\gamma_1 \ge p + \alpha T$ для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K(\psi/\pi, T/\pi)$.

Д о в е д е н н я. Легко бачити, що

$$|1 - \mu \exp \lambda_j(k)T| \ge |\mu| \exp\left(T \mathrm{Re}\, \lambda_j(k)\right) |\sin(\psi + T\, \mathrm{Im}\, \lambda_j(k))| \ge$$

$$\ge |\mu|\, |k|^{-\alpha T} \left| \frac{\psi + T\ \mathrm{Im}\, \lambda_j(k)}{\pi} - d(k) \right|,$$

де $d(k)$ належить $\mathbb{Z}$ і задовольняє нерівність

$$\left| \frac{\psi + T\ \mathrm{Im}\, \lambda_j(k)}{\pi} - d(k) \right| \le \frac{1}{2}.$$

Далі доведення проводиться аналогічно до доведення теореми 3.4. ∎

Позначимо через $A = (A_1,\dots,A_q)$ вектор, компонентами якого є коефіцієнти рівняння (6.20), де q – кількість усіх коефіцієнтів.

Справедлива теорема, яка доводиться за схемою доведення теореми 4.7.

Теорема 4. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^q$) векторів A при $\gamma_2 \ge (p + n - 4)n/2 + 1$ оцінки (21) виконуються для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K(A)$.*

Розглянемо нерівність (22). Безпосереднім підрахунком переконуємося в тому, що визначник (11) є поліномом з комплексними коефіцієнтами степеня $K^* = K(m-1)(n - m/2)$ щодо змінних $k_1,\dots,k_p$

$$B(k) = \sum_{|s|\le K^*} (b_s^{(1)} + i b_s^{(2)}) k_1^{s_1} \dots k_p^{s_p} = B_1(k) + i B_2(k).$$

Позначимо через $b^{(1)}$ і $b^{(2)}$ вектори розміру h з компонентами $b_s^{(1)}$ і $b_s^{(2)}$, $|s| \leq K^*$, відповідно, де h – кількість розв'язків із $\mathbb{Z}_+^p$ нерівності $s_1 + \dots + s_p \leq K^*$.

Теорема 5. *Якщо $\gamma_3 \geq p$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^h$) векторів $b^{(1)}$ і для довільних фіксованих $b^{(2)}$ (або для майже всіх векторів $b^{(2)}$ і для довільних фіксованих $b^{(1)}$) оцінка (22) справджується для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.*

Доведення. Використовуємо той факт, що

$$|B(k)| \geq \max\{|B_1(k)|, |B_2(k)|\} > 0, \ k \in \mathbb{Z}^p,$$

і далі проводимо доведення за схемою доведення теорем 3.3 та 3.4. ■

Переходячи до нерівностей (23), зауважимо (див. формули (10)), що визначники $\beta_\nu(k)$, $\nu = 1, \dots, m$, зображуються в такому вигляді:

$$\beta_\nu(k) = \sum_{|r| \leq n_\nu K} a_{\nu r} k_1^{r_1} \dots k_p^{r_p}, \ \nu = 1, \dots, m,$$

де

$$a_{\nu r} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{\sum_{l=1}^{n_\nu} s_j^{(l)} = r_j} \det \|b^{(l)}_{\nu, \sigma s^{(l)}}\|_{\substack{l=1,\dots,n_\nu \\ \sigma=0,1,\dots,n_\nu-1}}, \nu = 1, \dots, m, |r| \leq n_\nu K,$$

$b^{(l)}_{\nu, \sigma s^{(l)}}$, $\sigma = 0, 1, \dots, n_\nu - 1$, – елементи l-го стовпця визначника $\beta_\nu(k)$, узяті з однаковими мультиіндексами $s = s^{(l)}$.

Позначимо через $A_\nu^{(1)}$ і $A_\nu^{(2)}$ вектори розміру z_ν з компонентами $\mathrm{Re}\, a_{\nu r}$ та $\mathrm{Im}\, a_{\nu r}$, $|r| \leq n_\nu K$, відповідно, де z_ν – кількість розв'язків із $\mathbb{Z}_+^p$ нерівності $r_1 + \dots + r_p \leq n_\nu K$.

Теорема 6. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{z_\nu}$) векторів $A_\nu^{(1)}$ і для довільних фіксованих $A_\nu^{(2)}$ (або для майже всіх векторів $A_\nu^{(2)}$ і для довільних фіксованих $A_\nu^{(1)}$) при $\gamma_4 \geq p$ оцінки (23) виконуються для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.*

Доведення. Очевидно, що

$$|\beta_\nu(k)| \geq \max\left\{\left|\mathrm{Re} \sum_{|r| \leq n_\nu K} a_{\nu r} k_1^{s_1} \dots k_p^{s_p}\right|, \left|\mathrm{Im} \sum_{|r| \leq n_\nu K} a_{\nu r} k_1^{s_1} \dots k_p^{s_p}\right|\right\},$$

де $\nu = 1, \dots, m$. Далі доведення проводиться за схемою доведення теореми 3.4 з використанням теореми 3.3 (якщо многочлени $\mathrm{Re}\, \beta_\nu(k)$ чи $\mathrm{Im}\, \beta_\nu(k)$ не містять вільних членів). ■

8.2. Системи лінійних рівнянь, збурені нелінійним інтегро-диференціальним оператором

В області D^p для системи рівнянь

$$\frac{\partial^{n_j} u_j(t,x)}{\partial t^{n_j}} - \sum_{r=1}^{m} P_{jr}\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) u_r(t,x) = F_j(t,x) +$$

$$+\alpha \int_{\Omega_{2\pi}^p} \sum_{r=1}^{m} K_{jr}(t,x,y) V_r(t,y,\bar{u})\, dy, \quad j = 1, \dots, m, \tag{25}$$

де $\bar{u} = \left\{\partial^{|\widehat{s}|} u_j(t,y)/(\partial t^{s_0} \partial y_1^{s_1} \dots \partial y_p^{s_p}); |s| \leq K, s_0 \leq n_j, j = 1, \dots, m\right\}$, шукаємо розв'язок, що задовольняє нелокальні умови

$$M_{jr}[u(t,x)] \equiv \sum_{\substack{|s| \leq K \\ s_0 \leq n_j - 1}} b_{j\widehat{s}}^{(r)} \frac{\partial^{|\widehat{s}|} u_j(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \dots x_p^{s_p}}\Big|_{t=0} -$$

$$-\mu \sum_{\substack{|s| \leq K \\ s_0 \leq n_j - 1}} b_{j\widehat{s}}^{(r)} \frac{\partial^{|\widehat{s}|} u_j(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \dots x_p^{s_p}}\Big|_{t=T} = 0, \tag{26}$$

$$r = 1, \dots, n_j, j = 1, \dots, m,$$

де $b_{j\widehat{s}}^{(r)}$, $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq 0; 1$. Зауважимо, що при $\alpha = 0$ система (25) збігається із системою рівнянь (1).

Будемо шукати розв'язок задачі (25), (26) з банахового простору $\overline{C}^{(\bar{n},K)}(D^p)$, $\bar{n} = (n_1, \dots, n_m)$, вектор-функцій $u(t,x) = (u_1(t,x), \dots, u_m(t,x))$, які в області D^p є K разів неперервно диференційовні за сукупністю змінних x, а за змінною t компонента $u_j(t,x)$ є n_j разів неперервно диференційовна, $j = 1, \dots, m$. Норма в просторі $\overline{C}^{(\bar{n},K)}(D^p)$ визначається формулою

$$\|u\|_{\overline{C}^{(\bar{n},K)}(D^p)} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{|s| \leq K \\ s_0 \leq n_j}} \max_{D^p} \left|\frac{\partial^{|\widehat{s}|} u_j(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \dots x_p^{s_p}}\right|. \tag{27}$$

Розв'язок $u^0 \in \overline{H}_q^{\bar{n}}(D^p)$ незбуреної задачі (25), (26) (при $\alpha = 0$) знайдений в п. 8.1; якщо $q = K + [p/2] + 1$, то $u^0 \in \overline{C}^{(\bar{n},K)}(D^p)$.

Розглянемо задачу (25), (26) при $\alpha \neq 0$. Припустимо, що функції $K_{jr}(t,x,y)$ і $V_r(t,y,\bar{u})$ визначені і неперервні відповідно в областях $D_1 = D^p \times \Omega_{2\pi}^p$ та $D_2 = \{(t,x,\bar{u}) : (t,x) \in D^p, \bar{u} \in U\}$, де $U \equiv$

$\equiv \left\{\|u-u^0\|_{\overline{C}^{(\bar{n},K)}(D^p)} \le M_0\right\} \subset \overline{C}^{(\bar{n},K)}(D^p)$, $u^0 \equiv u^0(t,x)$ – розв'язок незбуреної задачі.

Задача (25), (26) еквівалентна системі інтегро-диференціальних рівнянь

$$u_j(t,x) = u_j^0(t,x) + \alpha \int\limits_{D^p} \sum_{l,r=1}^{m} \sum_{|k|\ge 0} G_{k,jl}(t,\tau) K_{k,lr}(\tau,y) \exp(ik,x) V_r(\tau,y,\bar u)\, dy d\tau, \quad (28)$$

$$j = 1,\dots,m,$$

де $K_{k,lr}(\tau,y)$ – коефіцієнти Фур'є функції $K_{lr}(\tau,x,y)$, $l,r=1,\dots,m$; $G_{k,jl}(t,\tau)$ – елементи матриці Гріна задачі (4′), (5′), які визначені формулами (16).

Теорема 7. *Нехай функції $V_r(t,y,\bar u)$, $r=1,\dots,m$, в області D_2 є обмеженими константою $\widetilde{M}$:*

$$|V_r(t,y,\bar u)| \le \widetilde{M}, \quad (t,y,\bar u) \in D_2, \quad r = 1,\dots,m, \quad (29)$$

і задовольняють умову Ліпшиця зі сталою L щодо всіх компонент вектора $\bar u$:

$$|V_r(t,y,\bar u^1) - V_r(t,y,\bar u^2)| \le \le L \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{|s|\le K\\ s_0 \le n_j}} \left| \frac{\partial^{|\hat s|} u_j^1(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \dots x_p^{s_p}} - \frac{\partial^{|\hat s|} u_j^2(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \dots x_p^{s_p}} \right|. \quad (30)$$

Нехай функції $K_{jr}(t,y)$, $j,r=1,\dots,m$, такі, що виконуються нерівності

$$|K_{k,jr}(t,y)| \le C_3 |k|^{-\psi}, \ k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}, \ (t,y) \in D^p \ j,r = 1,\dots,m, \quad (31)$$

де $\psi = 4n + p + 2n(m-1)K + K(\max\limits_{1\le\nu\le m}\{n_\nu\}+1) - \min\limits_{1\le\chi\le m}\{n_\chi\} + \gamma_1 + \gamma_4 + 2(\gamma_2+\gamma_3) - 2$. Нехай, крім того, виконуються умови теореми 2 при $q \ge K + [p/2] + 1$. Тоді для всіх $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$, де

$$\alpha_0 < \min\left\{\frac{M_0}{\widetilde{M} z}, \frac{1}{Lz}\right\}, \quad (32)$$

$$z = C_2 C_3 m^2 n T (2\pi)^p (3+2p)^p Y, \quad (33)$$

C_2, C_3 – сталі з оцінок (19) та (31), Y – кількість розв'язків із $\mathbb{Z}_+^p$ нерівності $s_1 + \dots + s_p \le K$, існує єдиний розв'язок задачі (25), (26), який належить замкненій кулі $U \subset \overline{C}^{(\bar n,K)}(D^p)$ і неперервно залежить від вектор-функції $F(t,x)$.

Доведення. Запишемо систему рівнянь (28) у вигляді операторного рівняння

$$u(t,x) = Au(t,x).$$

На основі оцінок (29)–(31) та (19) одержуємо, що

$$\|Au - u^0\|_{\overline{C}^{(\bar n,K)}(D^p)} \le |\alpha| \widetilde{M} z, \quad (34)$$

$$\|Au^1 - Au^2\|_{\overline{C}^{(\bar n,K)}(D^p)} \le |\alpha| Lz \|u^1 - u^2\|_{\overline{C}^{(\bar n,K)}(D^p)}. \quad (35)$$

З нерівностей (32), (34), (35) випливає, що оператор A відображає кулю U в себе і є оператором стиску. Тоді з теореми 2.6 випливає, що існує єдиний розв'язок $\bar u(t,x) \in U \subset \overline{C}^{(\bar n,K)}(D^p)$ системи інтегральних рівнянь (28), а отже, і задачі (25), (26). На основі теореми 2 і теореми 2.7 одержуємо, що цей розв'язок неперервно залежить від функції $F_j(t,x)$, $j=1,\dots,m$. ■

Якщо не вимагати єдиності шуканого розв'язку, то можна послабити обмеження на параметр α та функції $V_r(t,y,\bar u)$, $r=1,\dots,m$, за яких існує розв'язок розглядуваної задачі.

Теорема 8. *Нехай виконуються умови теореми 2 при $q \ge K + [p/2] + 1$ і нехай функції $V_r(t,y,\bar u)$ та $K_{jr}(t,y)$, $r=1,\dots,m$, такі, що справджуються нерівності (29) і (31). Тоді для всіх $\alpha \in [-\alpha^*, \alpha^*]$, де*

$$\alpha^* \le M_0/(\widetilde{M} z), \quad (36)$$

а число z визначено формулою (33), існує принаймі один розв'язок задачі (25), (26), який належить кулі $U \subset \overline{C}^{(\bar n,K)}(D^p)$.

Доведення. Згідно з принципом Шаудера (теорема 2.8), для доведення теореми достатньо показати, що оператор A є неперервним і переводить замкнену опуклу множину U в її компактну частину.

Неперервність оператора A та опуклість множини U очевидні. З нерівностей (34) та (36) випливає, що $AU \subset U$. Залишається довести компактність множини AU, тобто показати, що AU – множина рівномірно обмежених та одностайно неперервних функцій.

Рівномірна обмеженість множини функцій AU випливає з того, що $AU \subset U$, а U – обмежена множина.

Одностайна неперервність множини функцій AU випливає з рівностей (28) і неперервності за змінними t та x функцій $G_{k,jl}(t,\tau)$, $j,l=1,\dots,m$, і $\exp(ik,x)$ відповідно. ■

§ 9. Параболічні рівняння і системи

Даний параграф присвячений дослідженню розв'язності крайової задачі з нелокальними двоточковими умовами за часовою змінною для параболічних за Шиловим рівнянь і систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами [67, 68] та для рівнянь зі змінними за x коефіцієнтами, гіперболічних за Петровським [69, 206].

9.1. Параболічні за Шиловим рівняння зі сталими коефіцієнтами

В області D^p розглянемо задачу

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)u \equiv \frac{\partial^n}{\partial t^n}u + \sum_{\substack{|s|\le q\\ s_0<n}} a_{s_0,s}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^{s_0}\frac{\partial^{|s|}u}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}} = f(t,x), \quad (1)$$

$$M_r^T\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)u \equiv \sum_{\substack{|s|\le q\\ s_0<n}} b^r_{s_0,s}\frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}}\Big(\frac{\partial^{s_0}u}{\partial t^{s_0}}\Big|_{t=0} - \mu\frac{\partial^{s_0}u}{\partial t^{s_0}}\Big|_{t=T}\Big) =$$

$$= \varphi_r(x), \quad r = 1,\dots,n, \quad (2)$$

де $a_{s_0,s} \in \mathbb{R}$, $b^r_{s_0,s} \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$; $q, n \in \mathbb{N}$, $q > n$; вважаємо, що рівняння (1) параболічне за Шиловим, тобто для довільного $\eta \in \mathbb{R}^p$ корені $\lambda_j(\eta)$, $j = 1,\dots,n$, характеристичного рівняння

$$L(\lambda, i\eta) = 0 \quad (3)$$

задовольняють нерівність

$$\max_{1\le j\le n}\operatorname{Re}\lambda_j(\eta) \le -C_1|\eta|^h + C_2, \quad C_1, C_2, h > 0. \quad (4)$$

Вигляд області D^p накладає умови 2π-періодичності за змінними $x_1,\dots,x_p$ на функції $\varphi_r(x)$, $r = 1,\dots,n$, $f(t,x)$ та $u(t,x)$. Нехай

$$\varphi_r(x) = \sum_{|k|\ge 0}\varphi_{rk}\exp(ik,x), \quad r = 1,\dots,n,$$

$$\varphi_{rk} = \frac{1}{(2\pi)^p}\int_{\Omega_{2\pi}}\varphi_r(x)\exp(-ik,x)\,dx, \quad r = 1,\dots,n,$$

$$f(t,x) = \sum_{|k|\ge 0} f_k(t)\exp(ik,x),$$

$$f_k(t) = \frac{1}{(2\pi)^p}\int_{\Omega_{2\pi}} f(t,x)\exp(-ik,x)\,dx.$$

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\ge 0} u_k(t)\exp(ik,x), \quad (5)$$

де кожна з функцій $u_k(t)$ визначається як розв'язок задачі

$$L\Big(\frac{d}{dt}, ik\Big)u_k(t) = f_k(t), \quad (6)$$

$$M_r^T(ik)u_k(t) = \varphi_{rk}, \quad r = 1,\dots,n. \quad (7)$$

Введемо в розгляд однорідну задачу

$$L\Big(\frac{d}{dt}, ik\Big)u_k(t) = 0, \quad (6')$$

$$M_r^T(ik)u_k(t) = 0, \quad r = 1,\dots,n, \quad (7')$$

і зауважимо, що розв'язок задачі (6), (7) можна зобразити у вигляді суми

$$u_k(t) = w_k(t) + v_k(t), \quad (8)$$

де $w_k(t)$ – розв'язок задачі (6′), (7); $v_k(t)$ – розв'язок задачі (6), (7′).

Припустимо спочатку, що для кожного вектора $\eta = k \in \mathbb{Z}^p$ корені $\lambda_j(k)$, $j = 1,\dots,n$, рівняння (3) є простими. Тоді рівняння (6′) має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$w_{kl}(t) = \exp(\lambda_l(k)t), \quad l = 1,\dots,n,$$

а розв'язок задачі (6′), (7) зображується формулою

$$w_k(t) = \sum_{l=1}^{n} c_l(k)\exp(\lambda_l(k)t). \quad (9)$$

При цьому коефіцієнти $c_l \equiv c_l(k)$, $l = 1,\dots,n$, визначаються із системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{|s|\le q\\ s_0<n}}\psi(s,k)b^r_{s_0,s}\lambda_l^{s_0}(1-\mu\exp(\lambda_l(k)T))c_l = f_{rk}, \quad r = 1,\dots,n, \quad (10)$$

де $\lambda_l \equiv \lambda_l(k)$, $\psi(s,k) = i^{|s|}k_1^{s_1}\dots k_p^{s_p}$.

Визначник системи (10) обчислюється за формулою

$$\Delta(k) = B(k)\prod_{s=1}^{n}(1-\mu\exp(\lambda_s(k)T))\prod_{1\le i<j\le n}(\lambda_j(k)-\lambda_i(k)), \quad (11)$$

$$B(k) = \det\Big\|\sum_{|s|\le q} b^i_{s_0-1,s}\psi(s,k)\Big\|_{i,s_0=1}^{n}. \quad (12)$$

Знайдемо алгебричні доповнення $\Delta_{m,l}(k)$, $m, l = 1, \ldots, n$, елементів визначника $\Delta(k)$:

$$\Delta_{m,l}(k) = (-1)^{m+1} \prod_{s=1, s\neq l}^{n} (1 - \mu \exp(\lambda_s(k)T)) \sum_{r=1}^{n} B_{m,r}(k) \times$$
$$\times S_{n-r}^{l}(k) \prod_{1\leq\beta<\alpha\leq n, \alpha,\beta\neq l} (\lambda_\alpha(k) - \lambda_\beta(k)), \quad (13)$$

де $S_{n-r}^{l}(k)$ – сума всіх можливих добутків чисел $\lambda_i(k)$, $i = 1, \ldots, n$, $i \neq l$, взятих у кількості $n - r$; $B_{m,r}(k)$ – визначник, який одержуємо з $B(k)$ шляхом викреслювання m-го рядка та r-го стовпця.

Із (11) і теореми про єдиність розвинення періодичної функції в ряд Фур'є випливає твердження, яке доводиться за схемою доведення теореми 4.1.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі (1), (2) в просторі $C^{(n,q)}(D^p)$ необхідно і достатньо, щоб рівняння*

$$1 - \mu \exp(\lambda_s(k)T) = 0, \; s = 1, \ldots, n, \quad B(k) = 0 \quad (14)$$

не мали розв'язків у цілих числах $k_1, \ldots, k_p$.

Зауваження 1. Вираз $1 - \mu \exp(\lambda_s(k)T)$ не дорівнює нулю для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ тоді і тільки тоді, коли виконується хоча б одна з умов:

а) $\ln|\mu| + \operatorname{Re} \lambda_s(k)T \neq 0$, $\quad k \in \mathbb{Z}^p$;
б) $\arg\mu + \operatorname{Im} \lambda_s(k)T + 2\pi m \neq 0$, $\quad k \in \mathbb{Z}^p$, $m \in \mathbb{Z}$.

Проаналізуємо умову а). Вона буде виконуватися, зокрема, для множини тих векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, які задовольняють нерівність

$$\operatorname{Re} \lambda_s(k)T \leq (-C_1|k|^h + C_2)T < -\ln|\mu|,$$

або

$$|k|^h > C_1^{-1}(C_2 + T^{-1}\ln|\mu|).$$

Звідси легко бачити, що умова а) виконується для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, коли $0 < |\mu| < \exp(-C_2T)$, і для тих векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, для яких $|k| > K_1$, $K_1 = (C_1^{-1}(C_2 + T^{-1}\ln|\mu|))^{1/h}$, коли $|\mu| \geq \exp(-C_2T)$.

Дослідимо умови існування розв'язку задачі (1), (2) у припущенні, що має місце його єдиність. У цьому випадку для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ існує розв'язок задачі (6′), (7), який на основі формул (9), (11)–(13) записується у вигляді

$$w_k(t) = \sum_{l,m,r=1}^{n} (-1)^{n-m} B_{m,r}(k) \; \varphi_{mk} \; S_{n-r}^{l}(k) \; \exp(\lambda_j t) \times$$

$$\times \Big\{ B(k) \; (1 - \mu \exp(\lambda_l(k)T)) \prod_{\alpha=1, \alpha\neq l}^{n} (\lambda_l - \lambda_\alpha) \Big\}^{-1}, \quad (15)$$

а також існує функція Гріна $G_k(t,\tau)$ задачі (6′), (7′), за допомогою якої (див. п. 2.1.2) розв'язок задачі (6), (7′) визначається за формулою

$$v_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau. \quad (16)$$

У квадраті K_T, крім сторін $\tau = 0$, $\tau = T$, функція $G_k(t,\tau)$ знаходиться у вигляді

$$G_k(t,\tau) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\exp(\lambda_j(t-\tau))}{\prod\limits_{\beta=1, \beta\neq j}^{n} (\lambda_j - \lambda_\beta)} \Big(\operatorname{sgn}(t-\tau) + \frac{1 + \mu \exp(\lambda_j T)}{1 - \mu \exp(\lambda_j T)} \Big). \quad (17)$$

На основі формул (5), (8), (15)–(17) одержуємо формальне зображення розв'язку задачі (1), (2) у вигляді ряду, який, взагалі, є розбіжним, бо величини $|B(k)|$, $|\lambda_j(k) - \lambda_\beta(k)|$, будучи відмінними від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченного числа векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Тому питання про існування розв'язку задачі (1), (2) пов'язане з проблемою малих знаменників.

Оцінимо знизу величини $|1 - \mu \exp(\lambda_j(k)T)|$, $j = 1, \ldots, n$. На основі (4) маємо

$$|1 - \mu \exp(\lambda_j(k)T)| \geq |1 - |\mu| \exp(\operatorname{Re} \lambda_j(k)T)| \geq$$
$$\geq |1 - |\mu| \exp((-C_1|k|^h + C_2)T)|. \quad (18)$$

Із (18) випливає, що при $|k| > K_2$, де

$$K_2 = \left(C_1^{-1}[C_2 + T^{-1}\ln|\mu| - T^{-1}\ln(1-a)]\right)^{1/h}, \quad (19)$$

виконуються оцінки

$$|1 - \mu \exp(\lambda_j(k)T)| \geq a, \quad j = 1, \ldots, n, \; 0 < a < 1. \quad (20)$$

Враховуючи структуру рівняння (3), отримуємо

$$|\lambda_j(k)| \leq \varkappa |k|^q, \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}, \; \varkappa > 0. \quad (21)$$

Для дослідження розв'язності задачі (1), (2) введемо такі функціональні простори: A_s^β, $s > 0$, $\beta > 0$, – простір 2π-періодичних за всіма аргументами функцій $\varphi(x) = \sum\limits_{|k|\geq 0} \varphi_k \exp(ik, x)$, для яких скінченна норма $||\varphi||_{s,\beta} = \sum\limits_{|k|\geq 0} |\varphi_k| \exp(s|k|^\beta)$ (аналогічні простори при $\beta = 1$ розглядаються в [225]); $C^n([0,T], A_s^\beta)$ – простір функцій

$v(t,x)$ таких, що для кожного $t \in [0,T]$ $\partial^j v/\partial t^j \in A_s^\beta$, $j = 0,1,\dots,n$, і неперервна за t в нормі A_s^β, $j = 0,1,\dots,n$,

$$||v||_{C^n([0,T],A_s^\beta)} = \sum_{p=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial^p v}{\partial t^p} \right\|_{s,\beta}.$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови єдиності розв'язку задачі (1), (2) і нехай існують додатні сталі θ_1, θ_2, C_3, C_4 такі, що для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K_3$, справджуються нерівності*

$$\prod_{\alpha=1,\alpha\neq l}^{n} |\lambda_l(k) - \lambda_\alpha(k)| \geq C_3|k|^{-\theta_1}, \quad l = 1,\dots,n, \tag{22}$$

$$|B(k)| \geq C_4|k|^{-\theta_2}. \tag{23}$$

Якщо $\varphi_m \in C^\gamma(\Omega_{2\pi})$, $\gamma > q(3n-1) + p + \theta_1 + \theta_2$, $m = 1,\dots,n$, $f \in C([0,T], A_s^q)$, $s > \varkappa T$, то в просторі $C^{(n,q)}(D^p)$ існує розв'язок задачі (1), (2), який неперервно залежить від функцій $f(t,x)$ і $\varphi_m(x)$, $m = 1,\dots,n$.

Д о в е д е н н я. Якщо $\varphi_m \in C^\gamma(\Omega_{2\pi})$, то для коефіцієнтів Фур'є φ_{mk} виконуються оцінки

$$|\varphi_{mk}| \leq C_5 ||\varphi_m||_{C^\gamma(\Omega_{2\pi})} |k|^{-\gamma}, \quad m = 1,\dots,n, \ k \in \mathbb{Z}^p \setminus 0, \tag{24}$$

де стала C_5 не залежить від k. На основі формул (5), (8)–(16), (17), оцінок (4), (20)–(24) та нерівностей

$$|B_{m,r}(k)| \leq C_6|k|^{q(n-1)}, \ k \in \mathbb{Z}^p \setminus 0,$$

$$|1 + \mu \exp(\lambda_i(k)T)| \leq 1 + |\mu| \exp(C_2 T), \ i = 1,\dots,n,$$

одержуємо

$$||u||_{C^{(n,q)}(D^p)} \leq C_7 \Big(\sum_{k\leq K} \Big(\sum_{m=1}^{n} |\varphi_{mk}| + \max_{t\in[0,T]} |f_k(t)| \Big) +$$

$$+ \sum_{k>K} \Big(\sum_{m=1}^{n} |\varphi_{mk}| \, |k|^\eta + \max_{t\in[0,T]} |f_k(t)| \, |k|^{\eta_1} \exp(\varkappa |k|^q T) \Big) \Big) \leq$$

$$\leq C_8 \Big(\sum_{m=1}^{n} ||\varphi_m||_{C^\gamma(\Omega_{2\pi})} + \max_{t\in[0,T]} |f_k(t)| \exp(s|k|^q) \Big) =$$

$$= C_8 \Big(\sum_{m=1}^{n} ||\varphi_m||_{C^\gamma(\Omega_{2\pi})} + ||f||_{C([0,T],A_s^q)} \Big),$$

де $\eta = q(3n-1) + \theta_1 + \theta_2$, $\eta_1 = \theta_1 + q(n+1)$, $K = \max\{K_2, K_3\}$, $s > \varkappa T$. Теорему доведено. ∎

Зауваження 2. Якщо $\varphi_m \in A_s^q$, $s > \varkappa T$, $m = 1,\dots,n$, то при виконанні всіх інших умов теореми 2 розв'язок задачі (1), (2) належить простору $C^n([0,T], A_\varepsilon^q)$, $0 < \varepsilon < s - \varkappa T$.

Проаналізуємо можливість виконання нерівностей (22), (23). Запишемо визначник (12) у вигляді

$$B(k) \equiv \sum_{|r|\leq qn} i^{|r|} B_r k_1^{r_1} \dots k_p^{r_p}.$$

Нехай $\beta^{(1)} = (\beta_1^{(1)},\dots,\beta_h^{(1)})$, $\beta^{(2)} = (\beta_1^{(2)},\dots,\beta_h^{(2)})$ – вектори, складені відповідно з дійсних і уявних частин коефіцієнтів $i^{|r|}B_r$, де h – кількість розв'язків із $\mathbb{Z}^p$ нерівності $|r| \leq qn$, зокрема $\beta_1^{(1)} = \operatorname{Re} B_0$, $\beta_1^{(2)} = \operatorname{Im} B_0$.

Теорема 3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^h$) векторів $\beta^{(1)}$ та для довільних фіксованих $\beta^{(2)}$ (або для довільних фіксованих $\beta^{(1)}$ та майже всіх $\beta^{(2)}$) нерівність (23) виконується при $\theta_2 > p$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.*

Д о в е д е н н я. Оскільки $|B(k)| \geq \max\{|\operatorname{Re} B(k)|, |\operatorname{Im} B(k)|\}$, то досить довести, наприклад, виконання нерівності $|\operatorname{Re} B(k)| \geq C_4|k|^{-\theta_2}$.

Позначимо через D множину тих векторів $\beta^{(1)}$, які належать деякому h-вимірному паралелепіпеду $P_h = [\alpha_1, \beta_1] \times P_{h-1}$, для яких нерівність

$$|\operatorname{Re} B(k)| < |k|^{-\theta_2} \tag{25}$$

має нескінченне число розв'язків $k = (k_1,\dots,k_p) \in \mathbb{Z}^p$. Зафіксуємо k і $\beta_j^{(1)}$, $j = 2,3,\dots,h$. Тоді для $D_k(\beta_2^{(1)},\dots,\beta_h^{(1)})$ – множини тих $\beta_1^{(1)} \in [\alpha_1, \beta_1]$, для яких виконується нерівність (25), справджується оцінка

$$|D_k(\beta_2^{(1)},\dots,\beta_h^{(1)})| < 2|k|^{-\theta_2}, \tag{26}$$

де $|M|$ – міра множини M. Інтегруючи (26) по паралелепіпеду P_{h-1}, одержуємо, що для міри множини $D(k)$ тих векторів $\beta^{(1)} \in P_h$, для яких виконується нерівність (25) при фіксованому k, справджується оцінка $|D_k| < 2C|k|^{-\theta_2}$, де C – об'єм P_{h-1}. Оскільки ряд $\sum_{|k|\geq 0} |D_k|$ збігається при $\theta_2 > p$, то на основі леми 3.1 одержуємо, що $|D| = 0$. Отже, для майже всіх векторів $\beta^{(1)} \in P_h$ виконується нерівність, протилежна до (25) для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. З того, що простір $\mathbb{R}^h$ можна покрити зліченною кількістю паралелепіпедів P_h, випливає твердження теореми. ∎

Позначимо через $y = (y_1,\dots,y_\gamma)$ вектор, складений з коефіцієнтів рівняння (1), де γ – число всіх коефіцієнтів.

Теорема 4. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\gamma$) векторів y у нерівності (22) виконуються при $\theta_1 > (n-1)(p + q(n-3))/2$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.*

Д о в е д е н н я. Для дискримінанта $W(L)$ полінома

$$L(\lambda, ik) \equiv \lambda^n + \sum_{\substack{|s|\le q\\ s_0<n}} a_{s_0,s} i^{|s|} k_1^{s_1} \ldots k_p^{s_p} \lambda^{s_0} \equiv \lambda^n + \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p A_p(ik, a_{s_0,s})$$

справедливі два таких зображення:

$$W(L) = \prod_{1\le l<q\le n} (\lambda_q(k) - \lambda_l(k))^2, \tag{27}$$

$$W(L) = (-1)^{n(n-1)/2} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & A_{n-1} & A_{n-2} & \ldots & A_1 & A_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & A_{n-1} & \ldots & A_2 & A_1 & A_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & A_1 & A_0 \\ n & (n-1)A_{n-1} & \ldots & \ldots & A_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & n & \ldots & \ldots & 2A_2 & A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 2A_2 & A_1 \end{vmatrix}, \tag{28}$$

де $A_p \equiv A_p(ik, a_{s_0,s})$, $p = 0, 1, \ldots, n-1$.

Доведемо, що для майже всіх векторів y, які належать деякому паралелепіпеду $P_\gamma = [\alpha_0, \beta_0] \times P_{\gamma-1} \subset \mathbb{R}^\gamma$, справджується оцінка

$$|W(L)| \ge |k|^{-\theta_1}, \quad \theta_1 = (p-q)(n-1) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \tag{29}$$

при досить великих $|k|$. Позначимо через Y множину тих векторів y, для яких протилежна нерівність

$$|W(L)| < |k|^{-s_1} \tag{30}$$

виконується для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, а через Y_k – множину векторів y, для яких нерівність (30) правильна при фіксованому $k \in \mathbb{Z}^p$. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $|k_1| = \max\limits_{1\le i\le p} |k_i|$, $\alpha = a_{0,q,0,\ldots,0}$. Враховуючи, що (див. формулу (28))

$$W(L) = (-1)^{n(n-1)/2} n^n A_0^{n-1} + A,$$

де A містить степені A_0, менші за $n-1$, і те, що A_0 лінійно залежить від α, знайдемо

$$\left| \frac{\partial^{n-1} W(L)}{\partial \alpha^{n-1}} \right| = n^n (n-1)!\, |k_1|^{q(n-1)}.$$

Згідно з лемою 3.4 одержуємо, що для міри множини Y_k^1 тих значень $\alpha \in [\alpha_0, \beta_0]$, які задовольняють (30) (коли решта коефіцієнтів

рівняння (1) фіксована), справджується оцінка

$$|Y_k^1| \le C_9 |k|^{-q-\theta_1/(n-1)}.$$

Інтегруючи останню оцінку по паралелепіпеду $P_{\gamma-1}$, отримуємо

$$|Y_k| \le C_{10} |k|^{-q-\theta_1/(n-1)}.$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{|k|\ge 0} |Y_k|$ збігається, то згідно з лемою 3.1 міра множини Y дорівнює нулеві. Отже, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\gamma$) векторів y виконується нерівність (29) для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Враховуючи (27), одержуємо оцінку

$$\prod_{1\le l<q\le n} |\lambda_q(k) - \lambda_l(k)| \ge C_{11} |k|^{(q-p)(n-1)/2-\varepsilon/2}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{31}$$

яка справедлива для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. З рівності

$$\prod_{\alpha=1,\alpha\ne l} |\lambda_l - \lambda_\alpha| = \prod_{1\le l<q\le n} |\lambda_q - \lambda_l| \Big(\prod_{\substack{1\le l<q\le n\\ \alpha\ne l,\beta\ne l}} |\lambda_\alpha - \lambda_\beta| \Big)^{-1} \tag{32}$$

та оцінок (21), (31) випливає твердження теореми. ■

Якщо для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ рівняння (3) (при $\eta = k$) має корені $\lambda_j(k)$, $j = 1, \ldots, m$, $m < n$, з кратностями n_j відповідно, $n_1 + \ldots + n_m = n$, то рівняння (6′) має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$w_{k,j,l}(t) = t^{l-1} \exp(\lambda_j(k) t), \quad l = 1, \ldots, n_j, \ j = 1, \ldots, m. \tag{33}$$

У цьому випадку для визначника $\widetilde{\Delta}(k)$ задачі (6), (7) отримуємо

$$\widetilde{\Delta}(k) = \prod_{j=1}^m (1 - \mu \exp(\lambda_j T))^{n_j} B(k) \prod_{r=1}^{n_j-1} r! \prod_{1\le q<l\le m} (\lambda_l - \lambda_q)^{n_l n_q}. \tag{34}$$

Знайдемо алгебричні доповнення $\widetilde{\Delta}_{p,h_{jl}}(k)$, $p = 1, \ldots, n$, $h_{jl} = n_1 + \cdots + n_{j-1} + l$, $l = 1, \ldots, n_j$, $j = 1, \ldots, m$, елементів визначника $\widetilde{\Delta}(k)$:

$$\widetilde{\Delta}_{p,h_{jl}}(k) = (-1)^{p+h_{jl}} \prod_{s=1,s\ne j}^m \Big(\prod_{r=1}^{n_s-1} r!\, (1 - \mu \exp(\lambda_s T))^{n_s} \times$$

$$\times (\lambda_j - \lambda_s)^{(n_j-1)(n_s-1)+l-1} \Big) \prod_{r=1,r\ne l}^{n_s-1} r!\, (1 - \mu e^{\lambda_j T})^{n_j-1} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^n B_{p,i}(k)\, S_{n-i}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \prod_{\substack{1\le\beta<\alpha\le m\\ \alpha\ne j,\beta\ne j}} (\lambda_\alpha - \lambda_\beta)^{n_\alpha n_\beta}, \tag{35}$$

де $S_{n-l}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ – сума всіх можливих добутків чисел $\lambda_r(k)$, $r = 1, \ldots, m$, взятих у кількості $n - l$.

Єдиність розв'язку задачі (6′), (7) має місце тоді і тільки тоді, коли $\widetilde{\Delta}(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Тому теорема єдиності розв'язку задачі (1), (2) у досліджуваному випадку формулюється і доводиться подібно до теореми 1.

Надалі вважатимемо, що $\widetilde{\Delta}(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}^p$. При цьому для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ існує розв'язок задачі (6′), (7), який за допомогою формул (33)–(35) зображується у вигляді

$$w_k(t) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{n_j} \sum_{p,r=1}^{n} (-1)^{h_{jl}+m-p+j} B_{p,r}(k)\ \varphi_{pk}\ S_{n-r}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \times$$

$$\times \Big((1-\mu \exp(\lambda_j T)) B(k) \prod_{s=1, s\neq j}^{m} (\lambda_j - \lambda_s)^{n_j+n_s-1} \Big)^{-1} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} e^{\lambda_j t}, \quad (36)$$

а також існує єдина функція Гріна $G_k(t, \tau)$ задачі (6′), (7′), за допомогою якої розв'язок задачі (6), (7′) визначається за формулою (16). Для розглядуваного випадку в квадраті K_T, крім сторін $\tau = 0$ і $\tau = T$, функція $G_k(t, \tau)$ визначається формулою

$$G_k(t, \tau) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{n_j} (-1)^{n+h_{jl}+m-j} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \exp(\lambda_j (t-\tau)) \times$$

$$\times \Big(\prod_{s=1, s\neq j}^{m} (\lambda_j - \lambda_s)^{n_j+n_s-1} \Big)^{-1} \Big(\operatorname{sgn}(t-\tau) + \frac{1+\mu \exp(\lambda_j T)}{1-\mu \exp(\lambda_j T)} \Big). \quad (37)$$

На основі формул (5), (8), (16), (36), (37) отримуємо твердження, доведення якого аналогічне доведенню теореми 2.

Теорема 5. *Нехай має місце єдиність розв'язку задачі (1), (2) і нехай існують додатні сталі θ_3, C_{12} такі, що для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K_4$, виконується нерівність (23) і*

$$\prod_{s=1, s\neq j}^{m} |\lambda_j - \lambda_s|^{n_j+n_s-1} \geq C_{12} |k|^{-\theta_3}, \quad l = 1, \ldots, n_j,\ j = 1, \ldots, m.$$

Якщо $\varphi_m \in C^{\gamma_1}(\Omega_{2\pi}^p)$, $\gamma_1 > q(3n-1) + p + \theta_2 + \theta_3$, $m = 1, \ldots, n$, $f \in C([0, T], A_s^q)$, $s > \varkappa T$, то в просторі $C^{(n,q)}(D^p)$ існує розв'язок задачі (1), (2), який неперервно залежить від функцій $f(t, x)$ і $\varphi_m(x)$, $m = 1, \ldots, n$.

9.2. Параболічні за Петровським рівняння зі змінними за x коефіцієнтами

В області Q^p розглядаємо задачу

$$W\Big(\frac{\partial}{\partial t}, L_1, \ldots, L_p\Big) u \equiv$$

$$\equiv \sum_{b\alpha_0+|\alpha|=bn} A_{\alpha_0,\alpha} \Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^{\alpha_0} L_1^{\alpha_1} \cdots L_p^{\alpha_p} u(t, x) = 0, \quad (38)$$

$$M_j\Big(\frac{\partial}{\partial t}, L_1, \ldots, L_p\Big) u \equiv \sum_{b\alpha_0+|\alpha|\leq bn, \alpha_0<n} d_{\alpha_0,\alpha}^j L_1^{\alpha_1} \cdots L_p^{\alpha_p} \times$$

$$\times \Big(\frac{\partial^{\alpha_0} u}{\partial t^{\alpha_0}}\Big|_{t=0} - \nu \frac{\partial^{\alpha_0} u}{\partial t^{\alpha_0}}\Big|_{t=T} \Big) = \varphi_j(x),\ j = 1, \ldots, n, \quad (39)$$

$$L_r^m u|_{x_r=0} = L_r^m u|_{x_r=\pi} = 0, \quad r = 1, \ldots, p,\ m = 0, 1, \ldots, bn-1, \quad (40)$$

де $L_r \equiv -\partial/\partial x_r (a_r(x_r) \partial/\partial x_r) + q_r(x_r)$; $a_r \in C^{2bn-1}[0, \pi]$, $q_r \in C^{2bn-2}[0, \pi]$ – дійснозначні функції; $a_r(x_r) > 0$, $q_r(x_r) > 0$, $r = 1, \ldots, p$, $A_{\alpha_0,\alpha} \in \mathbb{R}$, $A_{n,0} = 1$, $\nu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $d_{\alpha_0,\alpha}^j \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{N}$.

Припустимо, що рівняння (38) рівномірно параболічне за Петровським в області Q^p, тобто що ξ-корені рівняння

$$\sum_{b\alpha_0+|\alpha|=bn} A_{\alpha_0,\alpha} \prod_{r=1}^{p} (a_r(x_r))^{\alpha_r} \eta_r^{2\alpha_r} \xi^{\alpha_0} = 0 \quad (41)$$

для довільного $\eta \in \mathbb{R}^p$ і для довільного $x \in \Pi^p$ задовольняють нерівності

$$\operatorname{Re} \xi_s(\eta) \leq -\delta |\eta|^{2b}, \quad \delta > 0,\ s = 1, \ldots, n. \quad (42)$$

Позначимо через $\{X_{k_r}(x_r)\}$ і $U = \{\lambda_{k_r}\}$, $k_r \in \mathbb{N}$, ортонормовану систему власних функцій та множину власних значень задачі

$$L_r X(x_r) = \lambda X(x_r),\ X(0) = X(\pi) = 0,\ r = 1, \ldots, p. \quad (43)$$

Відомо, що власні функції задачі (43) утворюють ортогональну систему, яка є повною в просторі $L_2[0, \pi]$; при цьому для всіх $k_r \in \mathbb{N}$ виконуються оцінки

$$\widetilde{C}_0 k_r^2 \leq \lambda_{k_r} \leq \widetilde{C}_1 k_r^2,\ r = 1, \ldots, p, \quad (44)$$

$$|X_{k_r}^{(j)}(x_r)| \leq p_j \lambda_{k_r}^{j/2},\ j = 0, 1, \ldots, 2bn,\ r = 1, \ldots, p, \quad (45)$$

де $\widetilde{C}_0$, $\widetilde{C}_1$, p_j, $j = 0, 1, \ldots, 2bn$, – додатні константи. Очевидно, що функції $X_k(x) \equiv X_{k_1}(x_1) \ldots X_{k_p}(x_p)$, $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{N}^p$, які утворюють повну ортонормовану систему в просторі $L_2(\Pi^p)$, є власними функціями задачі

$$Lu \equiv L_1 \dots L_p u = \Lambda u, \quad u|_{\partial\Pi^p} = 0,$$

що відповідають власним значенням $\Lambda_k = \lambda_{k_1} \dots \lambda_{k_p}$.

Розв'язок задачі (38)–(40) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^p} u_k(t) X_{k_1}(x_1) \dots X_{k_p}(x_p). \tag{46}$$

Якщо ряд (46) є рівномірно збіжним разом з усіма похідними за просторовими змінними до порядку $2(bn-1)$ включно, то функція $u(t,x)$ задовольняє умови (40); щоб функція (46) задовольняла рівняння (38) та умови (39), кожна з функцій $u_k(t)$ має бути розв'язком такої задачі:

$$\begin{aligned} W\Big(\frac{d}{dt}, \lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_p}\Big) u_k(t) &= 0, \\ M_j\Big(\frac{d}{dt}, \lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_p}\Big) u_k(t) &= \varphi_{jk}, \ j = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{47}$$

де $\varphi_{jk} = \int\limits_{\Pi^p} \varphi_j(x) X_k(x)\, dx$.

Припустимо, що для довільного $\lambda_k = (\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_p}) \in U^p$ всі корені $\mu_j(\lambda_k) \equiv \mu_j$, $j = 1, \dots, n$, рівняння

$$W(\mu, \lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_p}) = 0 \tag{48}$$

є простими; тоді розв'язок задачі (47) має вигляд

$$u_k(t) = \sum_{s=1}^{n} c_s(\lambda_k) \exp(\mu_s(\lambda_k) t), \tag{49}$$

де коефіцієнти $c_s(\lambda_k) \equiv c_s$ визначаються із системи рівнянь

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{\substack{b\alpha_0 + |\alpha| \le bn \\ \alpha_0 < n}} d^j_{\alpha_0,\alpha} \lambda_{k_1}^{\alpha_1} \dots \lambda_{k_p}^{\alpha_p} \mu_s^{\alpha_0} (1 - \nu \exp(\mu_s T)) c_s = \varphi_{jk}, \tag{50}$$

$$j = 1, \dots, n.$$

Визначник $\Delta(\lambda_k)$ системи (50) обчислюється за формулою

$$\Delta(\lambda_k) = D(\lambda_k) \prod_{s=1}^{n} (1 - \nu \exp(\mu_s T)) \prod_{1 \le i < j \le n} (\mu_j - \mu_i), \tag{51}$$

де

$$D(\lambda_k) = \det \Bigg\| \sum_{b(\alpha_0 - 1) + |\alpha| \le bn} d^j_{\alpha_0 - 1,\alpha} \lambda_{k_1}^{\alpha_1} \dots \lambda_{k_p}^{\alpha_p} \Bigg\|_{j,\alpha_0 = 1}^{n}. \tag{52}$$

Теорема 6. *Для єдиності розв'язку задачі (38)–(40) в просторі $C^{(n,2bn)}(Q^p)$ необхідно і достатньо, щоб для всіх векторів $\lambda_k \in U^p$ виконувалися умови*

$$1 - \nu \exp(\mu_s(\lambda_k) T) \ne 0, \ s = 1, \dots, n, \ \text{і} \ D(\lambda_k) \ne 0. \tag{53}$$

Доведення. Необхідність. Нехай хоча б одна з умов (53) не виконується для деякого вектора $\lambda_{\bar{k}} = (\lambda_{\bar{k}_1}, \dots, \lambda_{\bar{k}_p})$. Тоді однорідна задача, яка відповідає задачі (38)–(40), має нетривіальні розв'язки вигляду

$$\bar{u}(t,x) = u_{\bar{k}}(t) X_{\bar{k}_1}(x_1) \dots X_{\bar{k}_p}(x_p),$$

де $u_{\bar{k}}(t)$ – розв'язок однорідної задачі, яка відповідає задачі (47) при $\lambda_k = \lambda_{\bar{k}}$. Тому розв'язок задачі (38)–(40), якщо він існує, не буде єдиним.

Достатність. Припустимо, що існують два розв'язки u_1 і u_2 задачі (38)–(40) з простору $C^{(n,2bn)}(Q^p)$. Тоді функція $u = u_1 - u_2 \in C^{(n,2bn)}(Q^p)$ буде розв'язком однорідної задачі, яка відповідає задачі (38)–(40) і разом з функціями Wu і $M_j u$, $j = 1, \dots, n$, розвивається в ряд Фур'є вигляду (46) за системою функцій $\{X_k(x)\}$; при цьому ряди для функцій Wu і $M_j u$, $j = 1, \dots, n$, збігаються з рядами, які одержані формальним застосуванням операторів $W(\partial/\partial t, L_1, \dots, L_p)$ і $M_j(\partial/\partial t, L_1, \dots, L_p)$, $j = 1, \dots, n$, до ряду для функції $u(t,x)$. З рівностей Парсеваля для функцій Wu і $M_j u$, $j = 1, \dots, n$, випливає, що кожний з коефіцієнтів Фур'є $u_k(t)$ функції $u(t,x)$ є розв'язком однорідної задачі, яка відповідає задачі (47). Якщо виконуються умови (53), то $\Delta(\lambda_k) \ne 0$ для всіх векторів λ_k і всі коефіцієнти $u_k(t)$ тотожно дорівнюють нулю. Тоді з рівностей Парсеваля для функції $u(t,x)$ випливає, що $u(t,x) \equiv 0$, тобто $u_1(t,x) \equiv u_2(t,x)$. Теорему доведено. ∎

Зауваження 3. Якщо $|\nu| \ge 1$, то перші n умов (53) виконуються для всіх векторів $\lambda_k \in U^p$; коли ж $|\nu| < 1$, то ці умови виконуються для таких $\lambda_k \in U^p$, що $\sum\limits_{r=1}^{p} \lambda_{k_r}^b > (\delta a_0 T)^{-1} |\ln|\nu||$, де $a_0 = \big(\max\limits_{1 \le r \le p} \{\max\limits_{0 \le x_r \le \pi} a_r(x_r)\}\big)^{-b}$.

Зауваження 4. Якщо в рівнянні (38) $q_r(x_r) \ge 0$ і для кожного r, $r = 1, \dots, p$, число нуль є власним значенням задачі (43), то вектору $\lambda_{k^0} = (0, \dots, 0)$, $k^0 \in \mathbb{N}^p$, відповідатиме такий розв'язок задачі (47)

$$u_{k^0}(t) = \sum_{s=1}^{n} c_s(\lambda_{k^0}) t^{s-1}, \tag{54}$$

де коефіцієнти $c_s(\lambda_{k^0})$ визначаються із системи лінійних алгебричних рівнянь, яку одержуємо після підстановки розв'язку (54) у крайові умови задачі (47) при $\lambda_k = \lambda_{k^0}$. У розглядуваному випадку для єдиності розв'язку задачі (38)–(40) необхідно і достатньо, щоб для всіх $\lambda_k \in U^p \setminus \{0\}$ виконувалися умови (53) та умова

$$\det \left\| (s-1)!\Big(d^j_{s-1,0}(1-\nu) - \nu \sum_{\alpha_0=0}^{s-2} d^j_{\alpha_0,0} \frac{T^{s-1-\alpha_0}}{(s-1-\alpha_0)!}\Big) \right\|^n_{s,j=1} \neq 0.$$

Нехай має місце єдиність розв'язку задачі (38)–(40). Тоді для кожного вектора $\lambda_k \in U^p$ система рівнянь (50) теж має єдиний розв'язок, який визначається за формулами Крамера, а розв'язок задачі (38)–(40) на основі формул (46), (49)–(52) зображується формально у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k_1,\dots,k_p=1}^{\infty} \sum_{j,m,r=1}^{n} (-1)^{n-m} X_{k_1}(x_1)\dots X_{k_p}(x_p) \times$$
$$\times \frac{D_{m,r}(\lambda_k)\varphi_{m,k} S^j_{n-r}(\lambda_k)\exp(\mu_j t)}{(1-\nu\exp(\mu_j T)) \prod\limits_{s=1, s\neq j}^{n} (\mu_j - \mu_s) D(\lambda_k)}, \tag{55}$$

де $D_{m,r}(\lambda_k)$ – визначник, який одержуємо з $D(\lambda_k)$ викреслюванням m-го рядка і r-го стовпця; $S^j_{n-r}(\lambda_k)$ – сума всіх можливих добутків елементів $\mu_s(\lambda_k)$, $s = 1,\dots,n$, $s \neq j$, взятих у кількості $n-r$.

Ряд (55) взагалі є розбіжним, бо величини $|\mu_j(\lambda_k) - \mu_s(\lambda_k)|$ і $|D(\lambda_k)|$, будучи відмінними від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченного числа векторів λ_k. Тому питання про існування розв'язку задачі пов'язане з проблемою малих знаменників.

Враховуючи структуру рівнянь (41) та (48), а також оцінки (42), знаходимо

$$|\mu_j(\lambda_k)| \leq \varkappa |\lambda_k|^b, \quad j = 1,\dots,n, \quad \varkappa > 0, \tag{56}$$

$$\operatorname{Re}\mu_j(\lambda_k) \leq -\delta a_0 \sum_{r=1}^{p} \lambda^b_{k_r}, \quad j = 1,\dots,n, \tag{57}$$

де $|\lambda_k| = \lambda_{k_1} + \dots + \lambda_{k_p}$.

Оцінимо знизу вирази $\left|1-\nu\exp(\mu_s(\lambda_k)T)\right|$, $s = 1,\dots,n$, використовуючи нерівності (57). Очевидно, що

$$\left|1-\nu\exp(\mu_s T)\right| \geq$$
$$\geq \left|1-|\nu|\exp(\operatorname{Re}\mu_s T)\right| \geq \left|1-|\nu|\ \exp\Big(-\delta a_0 T \sum_{r=1}^{p} \lambda^b_{k_r}\Big)\right|. \tag{58}$$

Знайдемо множину тих векторів $\lambda_k \in U^p$, для яких виконується оцінка

$$|\nu|\ \exp\Big(-\delta a_0 T \sum_{r=1}^{p} \lambda^b_{k_r}\Big) \leq 1-a, \quad 0 < a < 1. \tag{59}$$

Очевидно, що нерівність (59) справджується для тих $\lambda_k \in U^p$, які задовольняють умову

$$\sum_{r=1}^{p} \lambda^b_{k_r} \geq (\delta a_0 T)^{-1} \ln(|\nu|/(1-a)). \tag{60}$$

Із оцінок (58), (59) випливає

$$\left|1-\nu\exp(\mu_s(\lambda_k)T)\right| \geq a, \ 0 < a < 1, s = 1,\dots,n. \tag{61}$$

На основі (60) одержуємо, що нерівності (61) справджуються для всіх $\lambda_k \in U^p$, коли $|\nu| \leq 1-a$, і принаймні для тих $\lambda_k \in U^p$, в яких $|k| > K_1$, коли $|\nu| > 1-a$, де

$$K_1 = \big(\widetilde{C}^b_0 \delta a_0 T\big)^{-1} \ln\big(|\nu|/(1-a)\big). \tag{62}$$

Теорема 7. *Нехай має місце єдиність розв'язку задачі (38)–(40) і нехай існують додатні сталі s_1, s_2, C_1, C_2 такі, що для всіх векторів $\lambda_k \in U^p$, $|k| > K_2$, виконуються нерівності*

$$\prod_{s=1, s\neq j}^{n} |\mu_j(\lambda_k) - \mu_s(\lambda_k)| \geq C_1 |\lambda_k|^{-s_1}, \quad j = 1,\dots,n, \tag{63}$$

$$|D(\lambda_k)| \geq C_2 |\lambda_k|^{-s_2}. \tag{64}$$

Якщо функції φ_j належать $C^q(\Pi^p)$, $j = 1,\dots,n$, $q > b(n^2+7n-4) + p + 2(s_1+s_2)$, і задовольняють умови вигляду (40), де $m = 0,1,\dots,[q/2]$, то в просторі $C^{(n,2bn)}(Q^p)$ існує розв'язок задачі (38)–(40), який неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$, $j = 1,\dots,n$.

Доведення. За умов теореми для коефіцієнтів Фур'є φ_{jk} функції $\varphi_j(x)$ справджуються оцінки

$$|\varphi_{jk}| \leq C_3 |\lambda_k|^{-q/2} \|\varphi\|_{C^q(\Pi^p)}, \quad j = 1,\dots,n, \ \lambda_k \in U^p \setminus \{0\}, \tag{65}$$

де стала C_3 не залежить від λ_k. З допомогою формули (55), оцінок (45), (56), (57), (61)–(65) та нерівностей

$$\Lambda_k \geq \widetilde{C}^p_0 |\lambda_k|/(p\widetilde{C}_1), \quad |D_{m,r}(\lambda_k)| \leq C_4 |\lambda_k|^{b(n(n-1)/2+r-1)}, \tag{66}$$

де $\lambda_k \in U^p \setminus \{0\}$, $m, r = 1,\dots,n$, одержуємо

$$\|u\|_{C^{(n,2bn)}(Q^p)} \leq C_5 \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{|k|\leq K} |\varphi_{jk}| + \sum_{|k|>K} |\lambda_k|^n |\varphi_{jk}| \Big) \leq$$

$$\leq C_6 \sum_{j=1}^{n} ||\varphi_j||_{C^q(\Pi^p)},$$

де $K = \max\{K_1, K_2\}$, $\eta = b(n^2+7n-4)/2 + s_1 + s_2$. Теорему доведено. ∎

Проаналізуємо можливість виконання нерівностей (63), (64). Запишемо визначник (52) у вигляді

$$D(\lambda_k) \equiv \sum_{|r|\leq bn(n+1)/2} D_r \lambda_{k_1}^{r_1} \cdots \lambda_{k_p}^{r_p}.$$

Позначимо через $\beta^{(1)} = (\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_h^{(1)})$, $\beta^{(2)} = (\beta_1^{(2)}, \dots, \beta_h^{(2)})$ вектори, складені відповідно з дійсних і уявних частин коефіцієнтів D_r, де h – кількість розв'язків із $\mathbb{Z}_+^p$ нерівності $|r| \leq bn(n+1)/2$, зокрема $\beta_1^{(1)} = \operatorname{Re} D_0$, $\beta_1^{(2)} = \operatorname{Im} D_0$, а через $y = (y_1, \dots, y_\gamma)$ вектор, складений з коефіцієнтів $A_{\alpha_0,\alpha}$ рівняння (38), де γ – число всіх коефіцієнтів.

Справедливі твердження, які доводяться за схемами доведень теорем 3 і 4 відповідно.

Теорема 8. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів $\beta^{(1)}$ та для довільних фіксованих $\beta^{(2)}$ (або для довільних фіксованих $\beta^{(1)}$ та майже всіх $\beta^{(2)}$) нерівність (64) виконується при $s_2 > p/2$ для всіх (крім скінченного числа) векторів λ_k.*

Теорема 9. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів y нерівності (63) виконуються при $s_1 > (n-1)(p/4 - b)$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $\lambda_k \in U^p$.*

Викладені вище результати досліджень перенесені на випадок крайової задачі для неоднорідного рівняння

$$W\Big(\frac{\partial}{\partial t}, L_1, \dots, L_p\Big) u(t,x) = f(t,x), \tag{67}$$

з однорідними умовами (39), (40), де $\varphi_j(x) \equiv 0$, $j = 1, \dots, n$.

За умов (53) для всіх $\lambda_k \in U^p$ існує єдина функція Гріна $G_{\lambda_k}(t,\tau)$ задачі (47), яка в квадраті K_T, крім сторін $\tau = 0$, $\tau = T$, визначається формулою

$$G_{\lambda_k}(t,\tau) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \frac{\exp\{\mu_l(t-\tau)\}}{\prod\limits_{s=1, s\neq l}^{n} (\mu_l - \mu_s)} \Big(\operatorname{sgn}(t-\tau) + \frac{1+\nu\exp(\mu_l T)}{1-\nu\exp(\mu_l T)} \Big),$$

а розв'язок задачі (67), (39), (40), де $\varphi_j(x) \equiv 0$, $j = 1, \dots, n$, записується формально рядом

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^p} \int_0^T G_{\lambda_k}(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau X_{k_1}(x_1) \dots X_{k_p}(x_p).$$

При дослідженні розв'язності задачі введені такі функціональні простори:

$$B_s^\beta = \Big\{ \varphi \in L_2(\Pi^p) : \varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^p} \varphi_k X_{k_1}(x_1) \dots X_{k_p}(x_p),$$
$$||\varphi||_{s,\beta} = \sum_{k\in\mathbb{N}^p} |\varphi_k| \exp(s\Lambda_k^\beta) < \infty \Big\}, \quad s > 0, \beta > 0;$$

$C^n([0,T], B_s^\beta)$ – простір таких функцій v, що для кожного $t \in [0,T]$ $\partial^j v/\partial t^j \in B_s^\beta$, $j = 0, 1, \dots, n$, і неперервна за t в нормі B_s^β, $j = 0, 1, \dots, n$.

Встановлено таке твердження.

Теорема 10. *Якщо має місце єдиність розв'язку задачі (38)–(40) і якщо для всіх (крім скінченного числа) векторів $\lambda_k \in U^p$ виконується умова (63) і $f \in C([0,T], B_s^b)$, $s > \varkappa(p\widetilde{C}_1/\widetilde{C}_0^p)^b T$, то в просторі $C^{(n,2bn)}(Q^p)$ існує розв'язок задачі (67), (39), (40), де $\varphi_j(x) \equiv 0$, $j = 1, \dots, n$, який неперервно залежить від функції $f(t,x)$.*

Зауваження 5. За умов теореми 10 розв'язок розглядуваної задачі належить простору $C([0,T], B_\varepsilon^b)$, $0 < \varepsilon < s - \varkappa(p\widetilde{C}_1/\widetilde{C}_0^p)^b T$.

Зауваження 6. Легко показати, що $B_s^\beta \subset U(A)$, $s > 0$, $\beta > 1$, де $U(A)$ – простір аналітичних векторів оператора A, породженого диференціальним виразом Lu та умовою $u|_{\partial\Pi^p} = 0$ [42].

9.3. Системи параболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

В області D^p розглянемо задачу

$$L_j\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) u \equiv \Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^{n_j} u_j + \sum_{r=1}^{m} P_{jr}\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) u_r = 0, \tag{68}$$
$$j = 1, \dots, m,$$

$$M_{jl}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big) u_j \equiv \sum_{\substack{|s|\leq q \\ s_0 < n_j}} b_{j\hat{s}}^l \frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} \Big(\frac{\partial^{s_0} u_j}{\partial t^{s_0}}\Big|_{t=0} - \mu \frac{\partial^{s_0} u_j}{\partial t^{s_0}}\Big|_{t=T} \Big) =$$

$$= f_{j,l}(x), \quad l = 1,\ldots,n_j,\ j = 1,\ldots,m, \tag{69}$$

де $P_{jr}(\lambda,\xi)$ – поліном з дійсними коефіцієнтами, степінь якого за сукупністю змінних $\xi_1,\ldots,\xi_p$ не перевищує числа q, а за змінною λ – не перевищує $n_j - 1$, $q \geq \max\{n_j\}$, $b^l_{j\hat{s}} \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n_1 + \ldots + n_m = n$.

Припустимо, що система рівнянь (68) параболічна за Шиловим, тобто що для довільного дійсного вектора η корені $\lambda_i(\eta)$, $i = 1,\ldots,n$, рівняння

$$\det P(\lambda,\eta) \equiv \det \|P_{jr}(\lambda, i\eta_1,\ldots,i\eta_p) + \lambda^{n_j}\delta_{jr}\|^m_{j,r=1} = 0 \tag{70}$$

задовольняють нерівність (4).

Розв'язок задачі (68), (69) шукаємо у вигляді векторного ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} u_k(t)\exp(ik,x),$$

де $u(t,x) = \mathrm{col}(u_1(t,x),\ldots,u_m(t,x))$, а вектор-функція $u_k(t) = \mathrm{col}(u_{k1}(t),\ldots,u_{km}(t))$ є розв'язком відповідної задачі

$$L_j\Big(\frac{d}{dt}, ik\Big)u_k(t) = 0,\ j = 1,\ldots,m, \tag{71}$$

$$M_{j,l}(ik)u_{kj}(t) = f_{k,j,l}, \quad l = 1,\ldots,n_j,\ j = 1,\ldots,m, \tag{72}$$

де $f_{k,j,l}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, – коефіцієнти Фур'є функції $f_{j,l}(x)$.

Припустимо, що для всіх $\eta = k \in \mathbb{Z}^p$ корені $\lambda_j(k) \equiv \lambda_j$, $j = 1,\ldots,n$, рівняння (70) попарно різні і не дорівнюють нулю. Тоді система диференціальних рівнянь (71) має таку фундаментальну матрицю розв'язків:

$$Y_k(t) = \Big\|Y_{r\nu}\Big\|_{\substack{r=1,\ldots,m\\ \nu=1,\ldots,n}}, \quad Y_{r\nu} = \gamma_r(\lambda_\nu)\exp(\lambda_\nu t). \tag{73}$$

Коефіцієнти $\gamma_r(\lambda_\nu)$, $r = 1,\ldots,m$, визначаються із системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{r=1}^{m} (P_{jr}(\lambda_\nu, ik) + \lambda_\nu^{n_j}\delta_{jr})\gamma_r = 0, \quad j = 1,\ldots,m, \tag{74}$$

визначником якої є $\det P(\lambda_\nu, k)$. Оскільки всі корені $\lambda_\nu(k)$, $\nu = 1,\ldots,n$, є простими, то $\mathrm{rang}\, P(\lambda_\nu(k)) = m - 1$, $\nu = 1,\ldots,n$, тобто один із мінорів $(m-1)$-го порядку визначника $\det P(\lambda_\nu, k)$ не дорівнює нулю. Не обмежуючи загальності, припустимо, що $\det \|P_{jr}(\lambda_\nu, ik) + \lambda_\nu^{n_j}\delta_{jr}\|^{m-1}_{j,r=1} \equiv D_m(\lambda_\nu) \neq 0$. Тоді

$$\gamma_m(\lambda_\nu) = D_m(\lambda_\nu) \equiv \sum_{l=0}^{n-n_m} A_{m,l}(k)\lambda_\nu^{n-n_m-l},$$

$$\gamma_r(\lambda_\nu) = D_r(\lambda_\nu) \equiv \sum_{l=0}^{n-n_r-1} A_{r,l}(k)\lambda_\nu^{n-n_m-l-1},\ r = 1,\ldots,m-1,$$

де

$$D_r(\lambda_\nu) = \det\left\|\begin{matrix} P_{11}(\lambda_\nu,ik)+\lambda_\nu^{n_1} & \ldots & P_{1,r-1}(\lambda_\nu,ik) & P_{1,m}(\lambda_\nu,ik) & P_{1,r+1}(\lambda_\nu,ik) & \ldots & P_{1,m-1}(\lambda_\nu,ik) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{m-1,1}(\lambda_\nu,ik) & \ldots & P_{m-1,r-1}(\lambda_\nu,ik) & P_{m-1,m}(\lambda_\nu,ik) & P_{m-1,r+1}(\lambda_\nu,ik) & \ldots & P_{m-1,m-1}(\lambda_\nu,ik)+\lambda_\nu^{n_{m-1}} \end{matrix}\right\|.$$

Однорідна крайова задача, яка відповідає задачі (71), (72), має нетривіальні розв'язки тоді і тільки тоді, коли визначник $\Delta(k)$ матриці $\|M_{j,l}(Y_{j\nu})\|_{\substack{l=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m\\ \nu=1,\ldots,n}}$ дорівнює нулеві. Провівши відповідні обчислення, одержимо

$$M_{j,l}(Y_{j\nu}) = \sum_{\substack{|s|\leq q\\ s_0<n_j}} b^l_{j\hat{s}}\psi(s,k)\lambda_\nu^{s_0} \sum_{r=0}^{n-n_j-1} A_{j,r}(k)\lambda_\nu^{n-n_j-r-1} \times$$
$$\times(1-\mu\exp(\lambda_\nu(k)T)), \quad j = 1,\ldots,m-1;\ \nu = 1,\ldots,n;\ l = 1,\ldots,n_j,$$

$$M_{m,l}(Y_{m\nu}) = \sum_{\substack{|s|\leq q\\ s_0<n_m}} b^l_{m\hat{s}}\psi(s,k)\lambda_\nu^{s_0} \sum_{r=0}^{n-n_m} A_{m,r}(k)\lambda_\nu^{n-n_m-r} \times$$
$$\times(1-\mu\exp(\lambda_\nu(k)T)), \quad \nu = 1,\ldots,n, \quad l = 1,\ldots,n_m.$$

Тоді

$$\Delta(k) = B(k)\prod_{s=1}^{n}(1-\mu\exp(\lambda_s T))\prod_{1\leq\gamma<\alpha\leq n}(\lambda_\alpha-\lambda_\gamma)\prod_{\nu=1}^{m}\beta_\nu(k), \tag{75}$$

$$\beta_\nu(k) \equiv \det\Big\|\sum_{|s|\leq q} b^l_{\nu\hat{s}}\psi(s,k)\Big\|_{\substack{l=1,\ldots,n_\nu\\ s_0=0,1,\ldots,n_\nu-1}}, \quad \nu = 1,\ldots,m, \tag{76}$$

$$
B(k)=\begin{vmatrix}
\underbrace{0\ldots0}_{n_1-1}\,A_{1,q_1}\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_{1,1}\,A_{1,0}\,0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{1,q_1}\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_{1,1}\,A_{1,0}\,\underbrace{0\ldots0}_{n_1}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\underbrace{0\ldots0}_{n_{m-1}-1}\,A_{m-1,q_{m-1}}\,\ldots\,A_{m-1,1}\,A_{m-1,0}\,0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{m-1,q_{m-1}}\,\ldots\ldots A_{m-1,1}\,A_{m-1,0}\,\underbrace{0\ldots0}_{n_{m-1}}\\
\underbrace{0\ldots0}_{n_m-1}\,A_{m,q_m}\,\ldots\ldots\ldots A_{m,2}\,A_{m,1}\,A_{m,0}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{m,q_m}\,\ldots\ldots\ldots A_{m,2}\,A_{m,1}\,A_{m,0}\,\underbrace{0\ldots0}_{n_m-1}
\end{vmatrix},
$$

де $q_r=n-n_r-1$, $r=1,\ldots,m-1$, $q_m=n-n_m$.

Зауваження 7. Для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ визначник $B(k)$ не дорівнює нулю, бо він входить співмножником у вираз для вронскіана $W(k)$ фундаментальної системи розв'язків (73), який має вигляд

$$
W(k)=(-1)^{\omega}B(k)\prod_{1\le\gamma<\alpha\le n}(\lambda_\alpha(k)-\lambda_\gamma(k))\exp\Big(t\sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha(k)\Big),
$$

де $\omega=\dfrac{1}{2}\Big(\sum\limits_{r=1}^{m-2}(n_{r+1}-n_{r+2})(n_{r+1}+n_{r+2}-1)+\sum\limits_{r=1}^{m}n_r(n_r-1)+$ $+(m-1)(n_m-1)n_m\Big)$.

Позначимо через $\overline{C}^{(\bar n,q)}(D^p)$ банахів простір вектор-функцій $u(t,x)=(u_1(t,x),\ldots,u_m(t,x))$ з нормою

$$
\|u\|_{\overline{C}^{(\bar n,q)}(D^p)}=\sum_{j=1}^{m}\|u_j\|_{C^{(n_j,q)}(D^p)}.
$$

Справедливе твердження, яке доводиться за схемою доведення теореми 1.

Теорема 11. *Для єдиності розв'язку задачі (68), (69) у просторі $\overline{C}^{(\bar n,q)}(D^p)$ необхідно і достатньо, щоб рівняння*

$$
1-\mu\exp(\lambda_s(k)T)=0,\quad \beta_\delta(k)=0,\quad \sigma,\delta=1,\ldots,n,
$$

не мали розв'язків у цілих числах $k_1,\ldots,k_p$.

Знайдемо алгебричні доповнення елементів визначника $\Delta(k)$:

$$
\Delta_{h_{\delta\sigma},l}(k)=(-1)^{h_{\delta\sigma}+l}\prod_{s=1,s\ne l}^{n}(1-\mu\exp(\lambda_s(k)T))\times
$$

$$
\times\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\delta=1}^{m}\sum_{\chi=1}^{n_\delta}\sum_{j=1,j\ne\delta}^{m}\beta_j(\beta_\delta(k))_{\sigma,\chi}B_{h_{\delta\chi},\nu}(k)S^{l}_{n-\nu}(k)\times
$$

$$
\times\prod_{\substack{1\le\gamma<\alpha\le n\\ \alpha,\gamma\ne l}}(\lambda_\alpha(k)-\lambda_\gamma(k)),\tag{77}
$$

де $h_{\delta\sigma}=n_1+\cdots+n_{\delta-1}+\sigma$, $B_{l,r}(k)$, $(\beta_\delta(k))_{l,r}$ – визначники, які одержуємо з визначників $B(k)$, $\beta_\delta(k)$ шляхом викреслювання l-го рядка і r-го стовпця; $S^l_{n-\nu}(k)$ – сума всіх можливих добутків елементів $\lambda_j(k)$, $j=1,\ldots,n$, $j\ne l$, взятих у кількості $n-\nu$.

Дослідимо питання про існування розв'язку задачі (68), (69) у припущенні, що він єдиний. Для довільного $k\in\mathbb{Z}^p$ існує розв'язок задачі (71), (72), який на основі формул (73)–(77) визначається у вигляді

$$
u_{kj}(t)=\sum_{l,\nu=1}^{n}\sum_{\delta=1}^{m}\sum_{\chi,\sigma=1}^{n_\delta}(-1)^{n-h_{\delta\sigma}}\frac{f_{k,\delta,\sigma}\exp(\lambda_l t)}{1-\mu\exp(\lambda_l T)}\times
$$

$$
\times\frac{\gamma_j(\lambda_l)B_{h_{\delta\chi},\nu}(k)\;S^l_{n-\nu}(k)\;(\beta_\delta(k))_{\sigma,\chi}}{\beta_\delta(k)B(k)\prod\limits_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\ne l}}^{n}(\lambda_l(k)-\lambda_\alpha(k))},\quad j=1,\ldots,m.\tag{78}
$$

Компоненти розв'язку задачі (68), (69) формально зображуються рядами

$$
u_j(t,x)=\sum_{|k|\ge0}u_{kj}(t)\exp(ik,x),\ \ j=1,\ldots,m,\tag{79}
$$

які, взагалі, є розбіжними, бо вирази $|\lambda_l(k)-\lambda_\alpha(k)|$, $|B(k)|$, $|\beta_\delta(k)|$, будучи відмінними від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченного числа векторів $k\in\mathbb{Z}^p$. Тому питання про існування розв'язку задачі пов'язане з проблемою малих знаменників.

Легко бачити, що для довільного $a\in(0,1)$ при $|k|>K_1$, де $K_1=(C_2+\ln(|\mu|/(1-a))/T)^{1/n}/C_1$, виконуються оцінки

$$
|1-\mu\exp(\lambda_l(k)T)|\ge a,\ \ l=1,\ldots,n.\tag{80}
$$

Із структури рівняння (70) випливає, що

$$
|\lambda_j(k)|\le\varkappa|k|^q,\ \ \varkappa>0, k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}, j=1,\ldots,n.
$$

Теорема 12. *Нехай має місце єдиність розв'язку задачі (68), (69) і нехай існують додатні сталі s_1, s_2, s_3, C_3, C_4, C_5 такі, що для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K_2$, виконуються нерівності*

$$\prod_{\alpha=1,\alpha\neq l}^{n} |\lambda_l(k) - \lambda_\alpha(k)| \geq C_3|k|^{-s_1}, \; l = 1,\ldots,n, \tag{81}$$

$$|B(k)| \geq C_4|k|^{-s_2}, \tag{82}$$

$$|\beta_\nu(k)| \geq C_5|k|^{-s_3}, \; \nu = 1,\ldots,m. \tag{83}$$

Якщо $f_{\delta,\sigma} \in C^\gamma(\Omega_{2\pi})$, $\gamma > q(2n + m(2n - m - 1)/2) + p + s_1 + s_2 + s_3$, $\delta = 1,\ldots,m$, $\sigma = 1,\ldots,n_\delta$, то в просторі $\overline{C}^{(n,q)}(D^p)$ існує розв'язок задачі (68), (69), який неперервно залежить від $f_{\delta,\sigma}(x)$, $\delta = 1,\ldots,m$, $\sigma = 1,\ldots,n_\delta$.

Д о в е д е н н я. Зауважимо, що при $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ виконуються оцінки

$$|B_{h_{\delta\chi},\nu}(k)| \leq C_6|k|^{q(m-1)(n-1-m/2)}, \tag{84}$$

$$|(\beta_\delta(k))_{\sigma,\chi}| \leq C_7|k|^{q(n_\delta-1)}, \; \delta = 1,\ldots,m. \tag{85}$$

Із формул (78), (79) та оцінок (24), (80)–(85) одержуємо

$$||u||_{\overline{C}^{(n,q)}(D^p)} \leq C_8\sum_{\delta=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n_\delta}\Big(\sum_{|k|\leq K}|f_{k,\delta,\sigma}| + \sum_{|k|>K}|k|^\eta|f_{k,\delta,\sigma}|\Big) \leq$$

$$\leq C_9\sum_{\delta=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n_\delta}||f_{\delta,\sigma}||_{C^\gamma(\Omega_{2\pi})},$$

де $K = \max\{K_1, K_2\}$, $\eta = q(2n + m(2n - m - 1)/2) + s_1 + s_2 + s_3$. Теорему доведено. ■

Дослідимо, коли виконуються оцінки (81)–(83). Позначимо через $y = (y_1,\ldots,y_\gamma)$ вектор, складений з коефіцієнтів рівняння (70), де γ – число всіх коефіцієнтів.

Справедлива теорема, яку доведено за схемою доведення теореми 4.

Теорема 13. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\gamma$) векторів y нерівності (81) виконуються при $s_1 > (n-1)(p - q + q(n-2))/2$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.*

Розглянемо нерівність (82). Запишемо визначник $B(k)$ у вигляді

$$B(k) = \sum_{|s|\leq q(m-1)(n-m/2)} B_s k_1^{s_1}\ldots k_p^{s_p}$$

і позначимо через $b^{(1)} = (b_1^{(1)},\ldots,b_h^{(1)})$, $b^{(2)} = (b_1^{(2)},\ldots,b_h^{(2)})$ вектори, складені відповідно з дійсних і уявних частин коефіцієнтів B_s, де h – кількість розв'язків із $\mathbb{Z}_+^p$ нерівності $|s| \leq q(m-1)(n-m/2)$. Зокрема, $b_1^{(1)} = \operatorname{Re} B_0$, $b_1^{(2)} = \operatorname{Im} B_0$.

Теорема 14. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^h$) векторів $b^{(1)}$ і для довільних фіксованих векторів $b^{(2)}$ (або для довільних фіксованих $b^{(1)}$ та майже всіх $b^{(2)}$) нерівність (82) виконується при $s_2 > p$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.*

Переходячи до нерівностей (83), відзначимо, що значення визначників $\beta_\nu(k)$, $\nu = 1,\ldots,m$ (див. (76)), зображуються у вигляді

$$\beta_\nu(k) = \sum_{|s|\leq qn_\nu} a_{\nu s}k_1^{s_1}\ldots k_p^{s_p}, \quad \nu = 1,\ldots,m.$$

Позначимо через $A_\nu^{(1)}$ і $A_\nu^{(2)}$ вектори з компонентами $\operatorname{Re} a_{\nu s}$ і $\operatorname{Im} a_{\nu s}$, $|s| \leq qn_\nu$, відповідно, а через z_ν – число розв'язків із $\mathbb{Z}_+^p$ нерівності $|s| \leq qn_\nu$.

Теорема 15. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{z_\nu}$) векторів $A_\nu^{(1)}$ і для довільних фіксованих $A_\nu^{(2)}$ (або для майже всіх векторів $A_\nu^{(2)}$ і для довільних фіксованих $A_\nu^{(1)}$) оцінки (83) виконуються при $s_3 > p$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.*

Доведення теорем 14 і 15 проводяться за схемою доведення теореми 3 із врахуванням того, що $|B(k)| \geq \max\{|\operatorname{Re} B(k)|, |\operatorname{Im} B(k)|\}$ і $|\beta_\nu(k)| \geq \max\{|\operatorname{Re}\beta_\nu(k)|, |\operatorname{Im}\beta_\nu(k)|\}$, $\nu = 1,\ldots,m$.

§ 10. Рівняння, не розв'язані відносно старшої похідної за часом

Досліджена розв'язність нелокальної задачі для лінійного оператора зі сталими коефіцієнтами, що є добутком операторів другого порядку за t, результати перенесено на випадок, коли цей оператор збурено нелінійним інтегро-диференціальним доданком. Розглянуто також рівняння довільного порядку зі сталими коефіцієнтами з еліптичним оператором при старшій похідній за часом та рівняння з коефіцієнтами, що залежать від просторових змінних.

10.1. Факторизований оператор зі сталими коефіцієнтами

В області $D = \{(t,x,y) : 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \omega\}$ розглянемо задачу [125]

$$V[u] \equiv \prod_{j=1}^{n}\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta - a_j^2) + b_j^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big]u(t,x,y) = f(t,x,y) +$$

$$+\,\varepsilon\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\omega K(t,x,y,\xi,\eta)F(t,\xi,\eta,\bar u(t,\xi,\eta))d\xi d\eta, \tag{1}$$

$$V_r[u]\equiv\sum_{s_0=0}^{2n-1}\sum_{|s|\le n}A^s_{s_0,r}\frac{\partial^{2|s|}}{\partial x^{2s_1}\partial y^{2s_2}}\Big(\frac{\partial^{s_0}u}{\partial t^{s_0}}\Big|_{t=0}-\mu\frac{\partial^{s_0}u}{\partial t^{s_0}}\Big|_{t=T}\Big)=0, \tag{2}$$

$$r=1,\dots,2n,$$

$$\frac{\partial^{2q}u}{\partial x^{2q}}\Big|_{x=0,x=\pi}=0,\quad \frac{\partial^{2q}u}{\partial y^{2q}}\Big|_{y=0,y=\omega}=0,\quad q=0,\dots,n-1, \tag{3}$$

де a_j, b_j, $A^s_{s_0,r}$, $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\mu\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, $s=(s_1,s_2)$;

$$\bar u(t,\xi,\eta)=\Big\{\frac{\partial^{s_0+2|s|}u}{\partial t^{s_0}\partial\xi^{2s_1}\partial\eta^{2s_2}}:s_0\le 2n,|s|\le n\Big\};$$

функція $K(t,x,y,\xi,\eta)$ визначена в області $D_1=\{(t,x,y,\xi,\eta):(t,x,y)\in D, 0\le\xi\le\pi, 0\le\eta\le\omega\}$, неперервна за змінними t, ξ, η і достатньо гладка за x, y; функція $F(t,\xi,\eta,\bar u)$визначена і неперервна за t, ξ, η, $\bar u$ в області $D_2=\{(t,\xi,\eta,\bar u):(t,\xi,\eta)\in\in D, u(t,\xi,\eta)\in\bar S(u^0(t,x,y),r)\}$, де $\bar S(u^0(t,x,y),r)=\{u\in C^{(2n,2n)}(D):\|u-u_0\|_{C^{(2n,2n)}(D)}\le r\}$, u^0 – розв'язок задачі (1)–(3) при $\varepsilon=0$, причому $|F(t,\xi,\eta,\bar u)|\le M$ і справджує умову Ліпшиця відносно $\bar u$:

$$|F(t,\xi,\eta,\bar u_1)-F(t,\xi,\eta,\bar u_2)|\le L\sum_{\substack{s_0\le 2n\\|s|\le n}}\Big|\frac{\partial^{s_0+2|s|}u_1}{\partial t^{s_0}\partial\xi^{2s_1}\partial\eta^{2s_2}}-\frac{\partial^{s_0+2|s|}u_2}{\partial t^{s_0}\partial\xi^{2s_1}\partial\eta^{2s_2}}\Big|.$$

Розглянемо спочатку незбурену задачу, коли $\varepsilon=0$. Нехай функція $f(t,x,y)$ зображується рядом

$$f(t,x,y)=\sum_{k=1}^\infty\sum_{p=1}^\infty f_{kp}(t)\,\sin kx\,\sin\frac{\pi p}{\omega}y, \tag{4}$$

де

$$f_{kp}(t)=\frac{4}{\pi\omega}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\omega f(t,x,y)\,\sin kx\,\sin\frac{\pi p}{\omega}y\;\,dxdy.$$

Розв'язок задачі з $C^{(2n,2n)}(D)$ шукаємо у вигляді ряду

$$u^0(t,x,y)=\sum_{k=1}^\infty\sum_{p=1}^\infty u^0_{kp}(t)\,\sin kx\,\sin\frac{\pi p}{\omega}y, \tag{5}$$

який, у випадку збіжності, задовольняє умови (3). Для визначення кожної з функцій $u^0_{kp}(t)$ отримуємо таку крайову задачу:

$$\prod_{j=1}^n\Big[-\Big(k^2+\frac{\pi^2p^2}{\omega^2}+a_j^2\Big)\frac{d^2}{dt^2}-b_j^2k^2\Big]u^0_{kp}(t)=f_{kp}(t), \tag{6}$$

$$\sum_{s_0=0}^{2n-1}\sum_{|s|\le n}(-1)^{|s|}A^s_{s_0,r}k^{2s_1}\Big(\frac{\pi p}{\omega}\Big)^{2s_2}\times$$

$$\times\Big(\frac{d^{s_0}u^0_{kp}(t)}{dt^{s_0}}\Big|_{t=0}-\mu\frac{d^{s_0}u^0_{kp}(t)}{dt^{s_0}}\Big|_{t=T}\Big)=0,\quad r=1,\dots,2n. \tag{7}$$

Введемо такі позначення: $\lambda_j=i\nu_j(k,p)$, $\lambda_{n+j}=-i\nu_j(k,p)$, $B_{s_0,r}(k,p)=\sum\limits_{|s|\le n}(-1)^{|s|}A^s_{s_0,r}k^{2s_1}(\pi p\omega)^{2s_2}$, $s_0=0,\dots,2n-1$, $r==1,\dots,2n$, $\nu_j(k,p)=\dfrac{b_j\omega k}{\sqrt{\omega^2k^2+\pi^2p^2+a_j^2\omega^2}}$, $j=1,\dots,n$.

Для простоти викладок припустимо, що для довільних $(k,p)\in\mathbb{N}^2$ $\nu_j(k,p)$, $j=1,\dots,n$, попарно різні. Розв'язок однорідного рівняння

$$\prod_{j=1}^n\Big(\frac{d^2}{dt^2}+\nu_j^2(k,p)\Big)u^0_{kp}(t)=0, \tag{8}$$

який задовольняє умови (7), визначається формулою

$$u^0_{kp}(t)=\sum_{j=1}^{2n}C_j\exp i\lambda_jt,$$

де сталі C_j, $j=1,\dots,n$, знаходимо із системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{2n}C_j\sum_{s_0=0}^{2n-1}B_{s_0,r}\lambda_j^{s_0}(1-\mu\exp{(\lambda_jT)})=0,\ r=1,\dots,2n, \tag{9}$$

визначник $\Delta(k,p)$ якої має вигляд

$$\Delta(k,p)=B(k,p)\prod_{s_0=0}^{2n-1}(1-\mu\exp{(\lambda_jT)})\prod_{2n\ge j>k\ge 1}(\lambda_j-\lambda_k),$$

де

$$B(k,p)=\det\|B_{s_0,r}\|_{\substack{s_0=0,\dots,2n-1\\r=1,\dots,2n}}.$$

При $\varepsilon=0$ задача (1)–(3) не може мати двох різних розв'язків тоді і тільки тоді, коли рівняння

$$V[u]=0 \tag{1'}$$

має лише тривіальний розв'язок, який задовольняє умови (2), (3).

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі (1)-(3) при $\varepsilon = 0$ в просторі $C^{2n,2n}(D)$ необхідно і достатньо, щоб рівняння*

$$B(k,p) = 0, \tag{10}$$

$$\prod_{j=1}^{2n} \left(1 - \mu \exp(\lambda_j T)\right) = \prod_{j=1}^{n} \left(\mu^2 - 2\mu \cos\left(\nu_j(k,p)T\right) + 1\right) = 0 \tag{11}$$

не мали розв'язків у натуральних числах k, p.

Доведення. Необхідність. Якщо хоча б одне з рівнянь (10), (11) має розв'язок $(k_0, p_0) \in \mathbb{N}^2$, то $\Delta(k_0, p_0) = 0$ і однорідна задача (1′), (2), (3) має нетривіальні розв'язки вигляду

$$u^0_{kp}(t) = \sum_{j=1}^{n} \left(C_{0,j} e^{i\nu_j(k_0,p_0)t} + C_{0,n+j} e^{-i\nu_j(k_0,p_0)t}\right) \sin k_0 x \sin \frac{\pi p_0}{\omega} y,$$

де $C_{0,1}, \ldots, C_{0,2n}$ – розв'язок системи рівнянь (9) при $k = k_0$, $p = p_0$. Тому розв'язок задачі (1)-(3) при $\varepsilon = 0$ (якщо він існує) не буде єдиним.

Достатність. Припустимо, що існують два розв'язки u^0_1 та u^0_2 розглядуваної задачі з простору $C^{2n,2n}(D)$. Тоді функція $\widetilde{u}^0 = u^0_1 - u^0_2 \in C^{2n,2n}(D)$ є розв'язком однорідної задачі (1′), (2), (3) і до неї можна застосувати оператори V і V_r, $r = 1, \ldots, 2n$. З рівностей Парсеваля випливає, що кожний із коефіцієнтів Фур'є $\widetilde{u}^0_{kp}(t)$ функції $\widetilde{u}^0(t,x,y)$ є розв'язком однорідної задачі (8), (7), і за умов (10), (11) отримуємо, що $\widetilde{u}^0_{kp}(t) \equiv 0$, $(k,p) \in \mathbb{N}^2$. Тому $u^0_1(t,x,y) = u^0_2(t,x,y)$. Теорему доведено. ∎

Зауваження 1. Якщо $\operatorname{Im} \dfrac{\mu^2+1}{2\mu} \neq 0$ або $\left|\operatorname{Re} \dfrac{\mu^2+1}{2\mu}\right| > 1$, то рівняння (11) не має розв'язків у натуральних числах k, p. В інших випадках рівняння (11) не має розв'язків у натуральних числах k, p тоді і тільки тоді, коли жодне з рівнянь

$$\frac{b_j \omega T k}{\sqrt{\omega^2 k^2 + \pi^2 p^2 + a_j^2 \omega^2}} = \pm\arccos\alpha + 2\pi m, \quad j = 1, \ldots, n,$$

де $\alpha = \operatorname{Re}\mu$, не має розв'язків (k,p,m), $(k,p) \in \mathbb{N}^2$, $m \in \mathbb{Z}$.

Розглянемо питання про існування розв'язку незбуреної задачі (1)-(3). Припустимо, що рівняння (10), (11) не мають розв'язків у натуральних числах k, p. Тоді для кожного вектора (k,p) існує єдина

функція Гріна $G_{kp}(t,\tau)$ задачі (8), (7), за допомогою якої розв'язок задачі (6), (7) зображується у вигляді

$$u^0_{kp}(t) = \int_0^T G_{kp}(t,\tau) f_{kp}(\tau) d\tau. \tag{12}$$

У квадраті K_T, за винятком сторін $\tau = 0$ і $\tau = T$, кожна з функцій $G_{kp}(t,\tau)$ визначається формулою

$$G_{kp}(t,\tau) = g_{kp}(t,\tau) + \frac{1}{2(2n-1)B(k,p)} \sum_{m,\alpha,r,l=1}^{2n} \sum_{s_0=0}^{2n-1} B_{s_0,m} \times$$
$$\times (-1)^m B_{m,r}(k,p)\, \lambda_\alpha^{s_0} \left(1 + \mu \exp(\lambda_\alpha T)\right) \left(1 - \mu \exp(\lambda_l T)\right)^{-1} \times$$
$$\times S_{2n-r}[\lambda_l] \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq\alpha}}^{2n} (\lambda_j - \lambda_\alpha)^{-1}, \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq l}}^{2n} (\lambda_j - \lambda_l)^{-1}, \tag{13}$$

де $B_{m,r}(k,p)$ – визначник, отриманий з визначника $B(k,p)$ викреслюванням m-го рядка і r-го стовпця; $S_{2n-r}[\lambda_l]$ – сума всіх можливих добутків чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-1}, \lambda_{l+1}, \ldots, \lambda_{2n}$, взятих у кількості $2n - r$, $S_0[\lambda_l] \equiv 1$, $l = 1, \ldots, 2n$;

$$g_{kp}(t,\tau) = -\frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2} \sum_{\alpha=1}^{2n} \exp\left(\lambda_\alpha(t-\tau)\right) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq\alpha}}^{2n} (\lambda_j - \lambda_\alpha)^{-1}.$$

На сторонах $\tau = 0$ і $\tau = T$ квадрата K_T функції $G_{kp}(t,\tau)$ доозначуються за неперервністю відповідно справа і зліва.

Розв'язок задачі (1)-(3) при $\varepsilon = 0$ формально зображується у вигляді ряду

$$u^0(t,x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \left(\int_0^T G_{kp}(t,\tau) f_{kp}(\tau) d\tau\right) \sin kx \ \sin \frac{\pi p}{\omega} y, \tag{14}$$

який, взагалі, є розбіжним, бо величини $\left|1 - \mu \exp(\lambda_l T)\right|$, $|B(k,p)|$, $\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq\alpha}}^{2n} |\lambda_j - \lambda_\alpha|$, будучи відмінними від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної множини векторів (k,p). Тому питання існування розв'язку розглядуваної задачі пов'язане з проблемою малих знаменників.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови єдиності розв'язку незбуреної задачі (1)-(3), нехай існують додатні сталі C_i, γ_i, $i =$*

$= 1, 2, 3$, *такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів* $(k,p) \in \mathbb{N}^2$ *справджуються нерівності*

$$|B(k,p)| \geq C_1(k+p)^{-\gamma_1}, \tag{15}$$

$$\left|1 - \mu \exp(\lambda_l T)\right| \geq C_2(k+p)^{-\gamma_2},\ l = 1, \ldots, 2n, \tag{16}$$

$$\prod_{j=1, j\neq\alpha}^{2n} |\lambda_j - \lambda_\alpha| \geq C_3(k+p)^{-\gamma_3},\ \alpha = 1, \ldots, 2n, \tag{17}$$

і нехай функція $f \in C^{(0,m)}(D)$, $m > \gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_3 + 4n^2 + 2n + 2$, *задовольняє умови*

$$\frac{\partial^{2j} f}{\partial x^{2j}}\Big|_{x=0, x=\pi} = \frac{\partial^{2j} f}{\partial y^{2j}}\Big|_{y=0, y=\omega} = 0,\ j = 0, 1, \ldots, \left[\frac{m-1}{2}\right].$$

Тоді при $\varepsilon = 0$ *існує розв'язок задачі (1)–(3), який належить простору* $C^{(2n,2n)}(D)$ *і неперервно залежить від* $f(t,x,y)$.

Д о в е д е н н я. Якщо функція $f(t,x,y)$ задовольняє умови теореми, то

$$\max_{0\leq t\leq T} |f_{kp}(t)| \leq \frac{M_1}{(k+p)^m} \|f(t,x,y)\|_{C^{(0,m)}(D)}. \tag{18}$$

З формул (12), (13) випливають такі оцінки:

$$\left|\frac{d^\varkappa u^0_{kp}(t)}{dt^\varkappa}\right| \leq M_2 \max_{0\leq t\leq T} |f_{kp}(t)| \sum_{\alpha=1}^{2n} \prod_{j=1, j\neq\alpha}^{2n} |\lambda_j - \lambda_\alpha|^{-1} \times$$
$$\times \left(1 + \frac{(k+p)^{4n^2}}{|B(k,p)|} \sum_{l=1}^{2n} |1 - \mu \exp(\lambda_l T)|^{-1} \prod_{j=1, j\neq l}^{2n} |\lambda_j - \lambda_l|^{-1}\right), \tag{19}$$

де $\varkappa = 0, 1, \ldots, 2n$, $M_2 = M_2(T,n)$. Тоді на основі формул (13), (14) і оцінок (15)–(19) отримуємо

$$\|u^0\|_{C^{(2n,2n)}(D)} \leq M_3 \|f\|_{C^{(0,m)}(D)}, \tag{20}$$

де M_3 – додатна стала, яка не залежить від k, p. Із (20) випливає твердження теореми. ∎

З'ясуємо, коли виконуються оцінки (15)–(17).

Визначник $B(k,p)$ є поліномом від змінних k, p степеня, не вищого, ніж $4n^2$, а саме

$$B(k,p) = \sum_{|r|\leq 4n^2} B_r k^{r_1} p^{r_2}, \tag{21}$$

де кожний з коефіцієнтів B_r є сумою добутків, складених з коефіцієнтів $A^s_{s_0,r}$ в умовах (2). Позначимо через β число всіх коефіцієнтів у (21), тобто число всіх розв'язків із $\mathbb{Z}^2_+$ нерівності $r_1 + r_2 \leq 4n^2$.

Теорема 3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^\beta$*) векторів* $\{B_r : |r| \leq 4n^2\}$ *нерівність (15) виконується при* $\gamma_1 > 2$ *для всіх (крім скінченного числа) векторів* $(k,p) \in \mathbb{N}^2$.

Д о в е д е н н я. Розрізняємо два випадки: вільний член полінома (21) $B_{0,0} \neq 0$ і $B_{0,0} = 0$. У першому випадку доведення аналогічне доведенню теореми 3.4, у другому – доведення випливає з теореми 3.3. ∎

Розглянемо нерівності (16). Оцінюючи спочатку ліві частини перших n із цих нерівностей ($1 \leq j \leq n$), одержуємо

$$\left|1 - \mu \exp \lambda_j T\right| = \left|1 - \exp(\ln \mu + \lambda_j T)\right| = \left|1 - \exp(\ln|\mu| + i\phi + \lambda_j T)\right| =$$
$$= \left|1 - |\mu| \cos(\phi + \nu_j(k,p)T) - i|\mu| \sin(\phi + \nu_j(k,p)T)\right|, \quad j = 1, \ldots, n,$$

де $\phi = \arg \mu$. Якщо $|\mu| \neq 1$, то

$$\left|1 - \mu \exp(\lambda_j T)\right| \geq \left|1 - |\mu|\right| > 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Якщо $|\mu| = 1$, то враховуючи нерівність $\sin x \geq 2x/\pi$ ($0 \leq x \leq \pi/2$), отримуємо

$$\left|1 - \mu \exp(\lambda_j T)\right| > \left|\sin(\phi + \nu_j(k,p)T)\right| =$$
$$= \left|\sin\left(\phi + \nu_j(k,p)T - m_{kp}\pi\right)\right| > 2\left|(\phi + \nu_j(k,p)T)/\pi - m_{kp}\right| =$$
$$= \frac{2T}{\pi}\sqrt{k^2+p^2}\left|\frac{\phi/T + \nu_j(k,p)}{\sqrt{k^2+p^2}} - \frac{m_{kp}\pi/T}{\sqrt{k^2+p^2}}\right| \geq$$
$$\geq \frac{2T(k+p)}{\pi\sqrt{2}}\left|\frac{\phi/T + \nu_j(k,p)}{\sqrt{k^2+p^2}} - \frac{m_{kp}\pi/T}{\sqrt{k^2+p^2}}\right|, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{22}$$

де $m_{kp} \in \mathbb{Z}$ задовольняє нерівність

$$\left|\frac{\phi + \nu_j(k,p)T}{\pi} - m_{kp}\right| < \frac{1}{2}.$$

Аналогічні оцінки отримуємо для випадків, коли $n + 1 \leq j \leq 2n$. Із отриманих оцінок і леми 3.2 випливає таке твердження.

Теорема 4. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* π/T *нерівність (16) виконується при* $\gamma_2 > 2$ *для всіх (крім скінченного числа) векторів* $(k,p) \in \mathbb{N}^2$.

При дослідженні нерівностей (17) використовуємо лему, яка доводиться за схемою доведення теореми 3.

Лема 1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі* $\mathbb{R}^3$*) векторів* $z = (A, B, C)$ *нерівність*

$$|Ak^2 + Bp^2 + C| \geq K(k+p)^{-2-\delta}, \quad 0 < \delta < 1,\ K > 0,$$

виконується при $\gamma_2 > 2$ *для всіх (крім скінченного числа) векторів* $(k,p) \in \mathbb{N}^2$.

Теорема 5. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{3n(n-1)/2}$) векторів $g = \{g_{j\sigma} : j, \sigma = 1, \ldots, n,\ j \neq \sigma\}$, де $g_{j,\sigma} = ((b_j^2 - b_\sigma^2)\omega^2, (b_j^2 - b_\sigma^2)\pi, (b_j^2 a_\sigma^2 - a_j^2 b_\sigma^2)\omega^2)$, нерівності (17) виконуються при $\gamma_3 > 4n - 1$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $(k, p) \in \mathbb{N}^2$.*

Д о в е д е н н я. Ліві частини нерівностей (17) мають вигляд

$$\prod_{j=1, j\neq\alpha}^{2n} |\lambda_j - \lambda_\alpha| = 2|\nu_\sigma(k,p)| \prod_{j=1, j\neq\sigma}^{n} |\nu_j^2(k,p) - \nu_\sigma^2(k,p)|,$$

де $\alpha = 3$ або $\alpha = n+3$, $\sigma = 1, \ldots, n$.

Зауважимо, що $|\nu_\sigma(k,p)| \leq \dfrac{|b_\sigma|\omega}{C_\sigma(k+p)}$, де $C_\sigma = \max\{\omega, \pi, a_\sigma\omega\}$; тоді

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\sigma}}^{n} |\nu_j^2(k,p) - \nu_\sigma^2(k,p)| =$$

$$= \prod_{\substack{j=1\\ j\neq\sigma}}^{n} \left| \frac{\omega^2 k^2((b_j^2 - b_\sigma^2)\omega^2 k^2 + (b_j^2 - b_\sigma^2)\pi^2 p^2 + (b_j^2 a_\sigma^2 - a_j^2 b_\sigma^2)\omega^2)}{(\omega^2 k^2 + \pi^2 p^2 + a_j^2\omega^2)(\omega^2 k^2 + \pi^2 p^2 + a_\sigma^2 \omega^2)} \right| \geq$$

$$\geq \frac{\omega^2}{C_\sigma^2 (k+p)^2} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq\sigma}}^{n} \frac{|(b_j^2 - b_\sigma^2)\omega^2 k^2 + (b_j^2 - b_\sigma^2)\pi^2 p^2 + (b_j^2 a_\sigma^2 - a_j^2 b_\sigma^2)\omega^2|}{|\omega^2 k^2 + \pi^2 p^2 + a_j^2 \omega^2|} \geq$$

$$\geq \omega^2 K^{n-1} (k+p)^{-(4+\delta)(n-1)-2} (C_1 \cdots C_n)^{-2}, \quad \sigma = 1, \ldots, n,$$

причому останні оцінки виконуються для майже всіх векторів g, що випливає з леми 1. Покладаючи $\delta < 1/(n-1)$, з наведених оцінок отримуємо доведення теореми. ∎

Розглянемо збурену задачу (1)–(3). При $\varepsilon \neq 0$ розв'язок задачі шукаємо у вигляді ряду

$$u(t, x, y) = \sum_{k,p=1}^{\infty} u_{kp}(t)\ \sin kx\ \sin \frac{\pi p}{\omega} y,$$

де функції $u_{kp}(t)$, $k, p \in \mathbb{N}$, визначаються як розв'язки крайової задачі для нескінченної системи інтегро-диференціальних рівнянь

$$\left.\begin{aligned} &\prod_{j=1}^{n} \left[-(k^2 + \pi^2 p^2 \omega^2 + a_j^2) \frac{d^2}{dt^2} - b_j^2 k^2 \right] u_{kp}(t) = f_{kp}(t) + \\ &\qquad + \varepsilon \int_0^\pi \int_0^\omega K_{kp}(t, \xi, \eta) F(t, \xi, \eta, \bar{u})\, d\xi d\eta, \\ &\sum_{s_0=0}^{2n-1} B_{s_0, r}(k,p) (u_{kp}^{(s_0)}(0) - \mu u_{kp}^{(s_0)}(T)) = 0,\ r = 1, \ldots, 2n, \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

в якій $K_{kp}(t, \xi, \eta) = \dfrac{4}{\pi\omega} \displaystyle\int_0^\pi \int_0^\omega K(t, x, y, \xi, \eta) \sin kx \sin \frac{\pi p}{\omega} y\, dx dy$, а вирази $B_{s_0 r}(k, p)$ означені вище.

Задача (23) еквівалентна системі інтегро-диференціальних рівнянь

$$u_{kp} = \int_0^T G_{kp}(t, \tau) f_{kp}(\tau) d\tau + \varepsilon \int_D G_{kp}(t, \tau) K_{kp}(\tau, \xi, \eta) F(\tau, \xi, \eta, \bar{u})\, d\xi d\eta d\tau,$$

де $G_{kp}(t, \tau)$ – функція Гріна задачі (8), (7). Тому для визначення розв'язку $u(t, x, y)$ задачі (1)–(3) отримуємо рівняння

$$u(t, x, y) = u^0(t, x, y) + \varepsilon \sum_{k,p=1}^{\infty} \sin kx \sin \frac{\pi p}{\omega} y \times$$
$$\times \int_D G_{kp}(t, \tau) K_{kp}(\tau, \xi, \eta) F(\tau, \xi, \eta, \bar{u})\, d\xi d\eta d\tau.$$

Припускаючи, що в області $D \times D$ ряд

$$\sum_{k,p=1}^{\infty} G_{kp}(t, \tau) K_{kp}(\tau, \xi, \eta) \qquad (24)$$

рівномірно збігається до деякої функції $Q(t, x, y, \tau, \xi, \eta)$, отримуємо, що задача (1)–(3) еквівалентна інтегро-диференціальному рівнянню

$$u(t, x, y) = u^0(t, x, y) + \varepsilon \int_D Q(t, x, y, \tau, \xi, \eta) F(\tau, \xi, \eta, \bar{u})\, d\xi d\eta d\tau. \qquad (25)$$

Теорема 6. *Нехай виконуються умови теореми 2 і нехай функція $K(t, x, y, \xi, \eta)$ в області D_1 неперервна за t, ξ, η і m раз неперервно диференційовна за x, y, $m > \gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_3 + 4n^2 + 2n + 2$, а функція $F(t, \xi, \eta, \jmath u)$ задовольняє умови, вказані при постановці задачі (1)–(3). Тоді для всіх $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3), який належить замкнутій кулі $\bar{S}(u^0(t, x, y), r) \subset C^{(2n,2n)}(D)$ і неперервно залежить від $f(t, x, y)$, де $\varepsilon_0 < \min\{r/BM, 1/BL\}$, $B = \pi\omega M_3 M_4 / M_1$, M_1, M_3 – константи з оцінок (18) і (20) відповідно, а M_4 – константа з нерівності*

$$\max_{(t,\xi,\eta)\in D} |K_{kp}(t, \xi, \eta)| \leq M_4 (k+p)^{-m}, \quad k, p \in \mathbb{N}. \qquad (26)$$

Д о в е д е н н я. Якщо функція $K(t, x, y, \xi, \eta)$ задовольняє умови теореми, то справджуються оцінки (26), з яких та з обмеженості функції $F(t, \xi, \eta, \jmath u)$ випливає рівномірна збіжність ряду (24).

При доведенні теореми використовуємо принцип стискуючих відображень. Запишемо рівняння (25) у вигляді

$$u(t,x,y) = P_{u^0}[u(t,x,y)], \quad u^0 = u^0(t,x,y),$$

де P_v – визначений у кулі $\bar S(u^0(t,x,y),r)$ інтегро-диференціальний оператор, такий, що

$$P_v[u(t,x,y)] \equiv$$
$$\equiv v(t,x,y) + \varepsilon \int_D Q(t,x,y,\tau,\xi,\eta)F(\tau,\xi,\eta,\bar u)\,d\xi d\eta d\tau. \qquad (27)$$

Позначимо через Y сукупність функцій $v \in C^{(2n,2n)}(D)$, для яких

$$\|v - u^0\|_{C^{(2n,2n)}(D)} \le \alpha = r - |\varepsilon|BM.$$

При кожному $v \in Y$ оператор P_v переводить кулю $\bar S(u^0(t,x,y),r)$ в себе. Дійсно, враховуючи (13), (15)–(17), (26), на основі формули (27) отримуємо

$$\|P_v[u] - u^0\|_{C^{(2n,2n)}(D)} \le |\varepsilon|\ \|v - u^0\|_{C^{(2n,2n)}(D)} \times$$
$$\times \Big\| \int_D Q(\cdot,\cdot,\cdot,\tau,\xi,\eta)F(\cdot,\xi,\eta,\bar u)\,d\xi d\eta d\tau \Big\|_{C^{(2n,2n)}(D)} \le \alpha + |\varepsilon|BM.$$

Покажемо, що коли $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, то P_v – оператор стиску. Нехай $u_1, u_2 \in \bar S(u^0(t,x,y),r)$, $v \in Y$. Тоді, враховуючи умови, накладені на функцію F, отримуємо

$$\|P_v(u_1) - P_v(u_2)\|_{C^{(2n,2n)}(D)} \le |\varepsilon| L \|u_1 - u_2\|_{C^{(2n,2n)}(D)} \times$$
$$\times \Big\| \int_D Q(\cdot,\cdot,\cdot,\tau,\xi,\eta)\,d\xi d\eta d\tau \Big\|_{C^{(2n,2n)}(D)} \le |\varepsilon| LB \|u_1 - u_2\|_{C^{(2n,2n)}(D)}.$$

Неперервність оператора P_v за v очевидна. Згідно з теоремами 2.6 і 2.7 рівняння (25), а значить, і задача (1)–(3), має єдиний розв'язок, що неперервно залежить від $f(t,x,y)$. Теорему доведено. ■

Застосуємо до рівняння (25) принцип Шаудера, на основі якого зможемо довести існування розв'язку задачі (1)–(3), не вимагаючи від функції $F(t,\xi,\eta,\bar u)$ виконання умови Ліпшиця.

Теорема 7. *Нехай виконуються всі умови теореми 6, крім умови Ліпшиця, накладеної на функцію F. Тоді для всіх $\varepsilon \in [-\varepsilon^*,\varepsilon^*]$, де $\varepsilon^* = r/BM$, існує розв'язок задачі (1)–(3), який належить кулі $\bar S(u^0(t,x,y),r)$.*

Д о в е д е н н я. Покладемо $P = P_{u^0}$. Для кожного $\varepsilon \in [-\varepsilon^*,\varepsilon^*]$ оператор переводить опуклу замкнену множину $\Omega = \bar S(u^0(t,x,y),r)$ в себе (див. доведення теореми 6).

Покажемо, що P – неперервний оператор. Нехай при $m \to \infty$ $\|u_m - u^0\|_{C^{(2n,2n)}(D)} \to 0$, $u_m \in \Omega$, $z_m = P(u_m)$, $m = 1,2,\dots$, $z^0 = P(u^0)$. З неперервності функції $F(t,\xi,\eta,\bar u)$ в D_2 випливає, що для довільного $\varepsilon_1 > 0$ при достатньо великих значеннях m, $m \ge m_0(\varepsilon_1)$, виконується нерівність $|F(t,\xi,\eta,\bar u_m) - F(t,\xi,\eta,\bar u^0)| \le \varepsilon_1$. Тому при $m \ge m_0(\varepsilon_1)$ $\|z_m - z_0\|_{C^{(2n,2n)}(D)} \le |\varepsilon| B\varepsilon_1$, звідки випливає, що

$$\|P(u_m) - P(u^0)\|_{C^{(2n,2n)}(D)} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Встановимо відносну компактність множини $P(\Omega)$. Для цього потрібно показати, що функції кожної з множин

$$W_1 = \Big\{ \frac{\partial^{4n} z}{\partial t^{2n}\partial x^{2n}} \ :\ z \in P(\Omega) \Big\}, W_2 = \Big\{ \frac{\partial^{4n} z}{\partial t^{2n}\partial y^{2n}} \ :\ z \in P(\Omega) \Big\},$$

$$W_3 = \Big\{ \frac{\partial^{4n} z}{\partial t^{2n}\partial x^{2(n-l)}\partial y^{2l}} \ :\ 1 \le l \le n-1,\ z \in P(\Omega) \Big\}$$

рівномірно обмежені та одностайно неперервні. Перше випливає з того, що $P(\Omega) \subset \Omega$. Покажемо одностайну неперервність функцій множини W_1. Їх можна записати у вигляді

$$\frac{\partial^{4n} z(t,x,y)}{\partial t^{2n}\partial x^{2n}} = \frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}} \Big(\frac{\partial^{2n} u^0(t,x,y)}{\partial x^{2n}} + (-1)^n \varepsilon \int_D \sum_{k,p=1}^{\infty} G_{kp}(y,\tau) \times$$
$$\times K_{kp}(t,\xi,\eta) k^{2n} \sin kx \sin \frac{\pi p}{\omega} y\, F(t,\xi,\eta,\bar u)\, d\xi d\eta d\tau \Big).$$

Ряд

$$\sum_{k,p=1}^{\infty} \frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}} \int_0^T \Big(\int_0^{\pi}\int_0^{\omega} G_{kp}(t,\tau) K_{kp}(\tau,\xi,\eta) k^{2n} \sin kx \sin \frac{\pi p}{\omega} y \times$$
$$\times F(\tau,\xi,\eta,\bar u)\, d\xi d\eta \Big) d\tau$$

із врахуванням оцінок (15)–(17), (26) і формули (13) мажорується збіжним числовим рядом

$$M_5 \sum_{k,p=1}^{\infty} \frac{1}{(k+p)^{m_1}}, \quad m_1 = m - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + 4n^2 + 2n) > 2,$$

і тому абсолютно і рівномірно збігається в $D \times D$ до деякої неперервної функції $\Phi(t,x,y,\tau,\xi,\eta)$. Тоді для довільної функції $z \in P(\Omega)$ отримуємо

$$\Big| \frac{\partial^{4n} z(t,x,y)}{\partial t^{2n}\partial x^{2n}} - \frac{\partial^{4n} z(t',x',y')}{\partial t^{2n}\partial x^{2n}} \Big| \le \Big| \frac{\partial^{4n} u^0(t,x,y)}{\partial t^{2n}\partial x^{2n}} - \frac{\partial^{4n} u^0(t',x',y')}{\partial t^{2n}\partial x^{2n}} \Big| +$$
$$+ \varepsilon\, |\Phi(t,x,y,\tau,\xi,\eta) - \Phi(t',x',y',\tau,\xi,\eta)|.$$

З останньої нерівності випливає одностайна неперервність функцій множини W_1. Аналогічно доводиться одностайна неперервність функцій множин W_2, W_3. З теореми 2.8 випливає розв'язність рівняння (25), а значить, і розв'язність задачі (1)–(3). ■

10.2. Рівняння зі сталими коефіцієнтами з еліптичним оператором при старшій похідній за часом

В області $\mathcal{D}^p$ розглядаємо задачу

$$M[u] \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u + \\ +\sum_{\beta=0}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\beta \left(\sum_{|s|\le 2l} a_\beta^s \frac{\partial^{|s|}u}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}}\right) = f(t,x), \tag{28}$$

$$M_r[u] \equiv \sum_{\beta=0}^{n-1}\sum_{|s|\le 2l} A_{\beta,r}^s \frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}}\left(\frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta}\bigg|_{t=0} - \mu\frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta}\bigg|_{t=T}\right) = 0, \tag{29}$$
$$r = 1,\dots,n,$$

де $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \sum_{|s|=2l} b^s \frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}}$ – еліптичний оператор; $\mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$; $b^s, a_\beta^s, A_{\beta,r}^s \in \mathbb{R}$, $a_{n-1}^0 \ne 0$.

Вигляд області D^p накладає умови періодичності за змінними $x_1,\dots,x_p$ на функції $u(t,x)$, $f(t,x)$.

Розв'язок задачі шукаємо в просторі $C^n([0,T],H_q(\Omega^p))$, $q\in\mathbb{Z}$. Якщо $q \ge [p/2]+2l+1$, то згідно з теоремою Соболєва про вкладення просторів він буде класичним. Зобразимо розв'язок задачі (28), (29) у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\ge 0} u_k(t)\exp(ik,x).$$

Тоді кожна функція $u_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, буде розв'язком задачі

$$(-1)^l\sum_{|s|=2l} b^s k_1^{s_1}\dots k_p^{s_p} u_k^{(n)}(t) + \\ +\sum_{\beta=0}^{n-1}\left(\sum_{|s|\le 2l} a_\beta^s (ik_1)^{s_1}\dots(ik_p)^{s_p}\right)u_k^{(\beta)}(t) = f_k(t), \tag{30}$$

$$\sum_{\beta=0}^{n-1}\sum_{|s|\le 2l} A_{\beta,r}^s (ik_1)^{s_1}\dots(ik_p)^{s_p}\left(u_k^{(\beta)}(0) - \mu u_k^{(\beta)}(T)\right) = 0, \tag{31}$$
$$r = 1,\dots,n,$$

де

$$f_k(t) = (2\pi)^{-p}\int_{\Omega^p} f(t,x)\exp(-ik,x)dx.$$

Зауваження 2. Для $k=0$ задача (30)–(31) набуде вигляду

$$\sum_{\beta=0}^{n-1} a_\beta^0 \frac{d^\beta u_0(t)}{dt^\beta} = f_0(t) \qquad (0^0 \equiv 1), \tag{32}$$

$$\sum_{\beta=0}^{n-1} A_{\beta,r}^0\left(u_0^{(\beta)}(0) - \mu u_0^{(\beta)}(T)\right) = 0,\ r = 1,\dots,n. \tag{33}$$

Загальний розв'язок рівняння (32) має вигляд

$$u_0(t) = \sum_{j=1}^{q}\sum_{\varkappa_j=0}^{n_j-1} C_{j,\varkappa_j} t^{\varkappa_j}\exp(\lambda_j t) + F(t),$$

де λ_j, $j=1,\dots,q$, – корені рівняння $\sum_{\beta=0}^{n-1} a_\beta^{(0)}\lambda^\beta = 0$ кратностей n_j, відповідно; $\sum_{j=1}^{q} n_j = n-1$, $F(t) = \int_0^T g_0(t,\tau)f_0(\tau)d\tau$, $g_0(t,\tau) = \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2}\sum_{j=1}^{q}\sum_{\nu=0}^{n_j-1}\sum_{\sigma=0}^{n_j-\nu-1}(-1)^{n+\nu+\sigma}\, t^\nu\, \tau^{n_j-\nu-\sigma-1}\exp(\lambda_j(t-\tau))\times$ $\times Z_j^{\sigma(q-2)}\left(\nu!(n_j-\nu-\sigma-1)!\prod_{\substack{\varkappa=1\\ \varkappa\ne j}}^{q}(\lambda_\varkappa-\lambda_j)^{n_\varkappa+\sigma}\right)^{-1}$, Z_j^h – сума всіх можливих добутків по h величин $(\lambda_\varkappa - \lambda_j)$, $\varkappa = 1,\dots,q$, $\varkappa\ne j$, причому допускається повторюваність співмножників. Підставивши $u_0(t)$ в умови (33), отримаємо для визначення невідомих констант $C_{j,\varkappa_j}$ перевизначену систему алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{q}\sum_{\varkappa_j=0}^{n_j-1} C_{j,\varkappa_j}\varphi_{j,\varkappa_j}^r = \psi_r,\quad r=1,\dots,n, \tag{34}$$

де

$$\varphi_{j,\varkappa_j}^r = \sum_{\beta=0}^{n-1} A_{\beta,r}^0\Big(A_\beta^{\varkappa_j}\lambda_j^{\beta-\varkappa_j}\left[1-\mu\exp(\lambda_j T)\right] - \\ -\mu\sum_{\varkappa_j=0}^{n_j-1} C_{\varkappa_j}^\nu A_\beta^{\varkappa_j-\nu}\lambda_j^{\nu+\beta-\varkappa_j}T^\nu\exp(\lambda_j T)\Big),$$

$$\psi_r = -\sum_{\beta=0}^{n-1} A_{\beta,r}^0\left(F^{(\beta)}(0) - \mu F^{(\beta)}(T)\right).$$

Нехай $\tilde{A}_\alpha = \|\theta_\gamma^r\|_{\substack{r=1,\dots,n;r\neq\alpha\\ \gamma=1,\dots,n-1}}$, $\alpha = 1,\dots,n$, де $\theta_\gamma^r \equiv \varphi_{j,\varkappa_j}^r$, $j = 1,\dots,q$, $\varkappa_j = 0,1,\dots,n_j-1$, $\gamma = \sum\limits_{\alpha=1}^{j-1} n_\alpha + \varkappa_j + 1$, $\hat{A}$ – розширена матриця системи (34). Легко бачити, що задача (32), (33) не може мати двох різних розв'язків тоді і тільки тоді, коли існує таке α, $1 \le \alpha \le n$, що

$$\det\ \tilde{A}_\alpha \neq 0. \tag{35}$$

Розв'язок задачі (32), (33) існує, якщо виконується умова

$$\det\ \hat{A} = 0. \tag{36}$$

З еліптичності оператора $L(\partial/\partial x)$ випливає, що для будь-якого $k \in \mathbb{Z}^p\setminus\{0\}$

$$L(k) \equiv \sum_{|s|=2l} b^s k_1^{s_1}\dots k_p^{s_p} \neq 0, \tag{37}$$

тому характеристичне рівняння

$$P(\lambda) \equiv (-1)^l L(k)\lambda^n + \sum_{\beta=0}^{n-1}\Big(\sum_{|s|\le 2l} a_\beta^s (ik_1)^{s_1}\dots(ik_p)^{s_p}\Big)\lambda^\beta = 0, \tag{38}$$

яке відповідає рівнянню (30), має n комплексних коренів $\lambda_j(k)$, $j = 1,\dots,n$. Для простоти викладу припустимо, що для всіх цілочислових векторів $k \neq 0$ корені $\lambda_j(k)$, $j = 1,\dots,n$, попарно різні і не дорівнюють нулю.

Для довільного вектора $\xi \in \mathbb{R}^p\setminus\{0\}$ поліном $L(\xi)$ однорідний. Тому з того, що в цього полінома немає на сфері $\|\xi\| = 1$ нулів, випливає, що

$$L(\xi) \ge C_0\|\xi\|^{2l} \ge p^{-l}|\xi|^{2l}, \quad C_0 = \inf_{\|\xi\|=1}|L(\xi)| > 0. \tag{39}$$

На основі (37), (39) отримуємо оцінки

$$|\lambda_j(k)| \le C, \quad j = 1,\dots,n, \quad k \in \mathbb{Z}^p\setminus\{0\},$$

де стала C не залежить від k.

Для кожного вектора $k \neq 0$ однорідне рівняння

$$(-1)^l L(k)u_k^{(n)}(t) + \sum_{\beta=0}^{n-1}\Big(\sum_{|s|\le 2l} a_\beta^s (ik_1)^{s_1}\dots(ik_p)^{s_p}\Big)u_k^{(\beta)}(t) = 0 \tag{40}$$

має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$u_{kj}(t) = \exp\,(\lambda_j(k)\ t), \quad j = 1,\dots,n.$$

Розв'язок задачі (40), (31) має вигляд

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^n C_{kj}\exp\,(\lambda_j(k)\ t),$$

де коефіцієнти C_{kj}, $j = 1,\dots,n$, визначаються із системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^n C_{kj}\sum_{\beta=0}^{n-1}\sum_{|s|\le 2l} A_{\beta,r}^s\lambda_j^\beta(k)\prod_{q=1}^p (ik_q)^{s_q}\big(1-\mu\exp\,(\lambda_j(k)T)\big) = 0, \tag{41}$$
$$r = 1,\dots,n,$$

визначник якої має вигляд

$$\Delta(k) = A(k)\prod_{j=1}^n\big(1-\mu\exp\,(\lambda_j(k)T)\big)\prod_{n\ge i>j\ge 1}(\lambda_i(k)-\lambda_j(k)),$$

$$A(k) = \det\Big\|\sum_{|s|\le 2l} A_{\beta,r}^s (ik_1)^{s_1}\dots(ik_p)^{s_p}\Big\|_{\substack{r=1,\dots,n\\ \beta=0,1,\dots,n-1}}$$

Задача (28), (29) не може мати двох різних розв'язків тоді і тільки тоді, коли рівняння

$$M[u] = 0 \tag{42}$$

має лише тривіальний розв'язок, який задовольняє умови (29).

Теорема 8. *Для єдиності розв'язку задачі (28), (29) у просторі $C^n([0,T], H_{2l}(\Omega^p))$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова (35) та умови*

$$A(k) \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p\setminus\{0\}, \tag{43}$$

$$1-\mu\exp\,(\lambda_j(k)T) \neq 0, \quad j = 1,\dots,n,\ k \in \mathbb{Z}^p\setminus\{0\}. \tag{44}$$

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Якщо при деякому $k = k_0 \neq 0$ $A(k_0) = 0$ або існує j_0, $1 \le j_0 \le n$, таке, що $1-\mu\exp(\lambda_{j_0}(k_0)T) = 0$, то задача (42), (29) має нетривіальні розв'язки вигляду

$$u^0(t,x) = \sum_{j=1}^q C_{k_0,j}\exp\,\big(\lambda_j(k_0)t + (ik_0,x)\big),$$

де $(C_{k_0,1},\dots,C_{k_0,n})$ – нетривіальний розв'язок системи рівнянь (41) при $k = k_0$. Аналогічно, якщо при $k = 0$ для довільного α, $1 \le \alpha \le n$, $\det\tilde{A}_\alpha = 0$, то відповідна до (32), (33) однорідна задача має нетривіальні розв'язки вигляду

$$u_0^0(t) = \sum_{j=1}^q\sum_{\varkappa=1}^{n_j-1} C_{0,j,\varkappa_j}t^{\varkappa_j}\exp(\lambda_j t), \quad \sum_{j=1}^q n_j = n-1,$$

де $(C_{0,1},\dots,C_{0,n-1})$ – нетривіальний розв'язок однорідної системи рівнянь, яка відповідає системі (34). Тому розв'язок задачі (28), (29) (якщо він існує) не буде єдиним.

Д о с т а т н і с т ь. Припустимо, що існують два розв'язки u_1 та u_2 задачі (28), (29) з простору $C^n([0,T],H_{2l}(\Omega^p))$. Тоді функція $u_1 - u_2 = \tilde u \in C^n([0,T],H_{2l}(\Omega^p))$ є розв'язком однорідної задачі (42), (29) і до неї можна застосувати оператори M і M_r. З рівностей Парсеваля для функцій $M[\tilde u]$ і $M_r[\tilde u]$, $r=1,\dots,n$, випливає, що кожний із коефіцієнтів Фур'є $\tilde u_k(t)$, $k\neq 0$, функції $\tilde u(t,x)$ є розв'язком однорідної задачі (40), (31), а $\tilde u_0(t)$ – розв'язком відповідної до (32), (33) однорідної задачі, і внаслідок умов (35), (43), (44) отримуємо, що $\tilde u_k(t)\equiv 0$, $k\in\mathbb{Z}^p$. А тому $u_1(t,x)\equiv u_2(t,x)$. Теорему доведено. ∎

Зауваження 3. Нехай $\mu = x_0 + iy_0$, $\lambda_j(k) = a_j(k) + ib_j(k)$, $j=1,\dots,n$, $\varphi = \arg\mu$. Оскільки

$$1-\mu\exp(\lambda_j(k)T) =$$
$$= 1-\exp\left(a_j(k)T\right)\left(x_0\cos\left(b_j(k)T\right) - y_0\sin\left(b_j(k)T\right)\right) -$$
$$-i\exp\left(a_j(k)T\right)\left(y_0\cos\left(b_j(k)T\right) + x_0\sin\left(b_j(k)T\right)\right) =$$
$$= 1-|\mu|\exp\left(a_j(k)T\right)\cos\left(b_j(k)T+\varphi\right) -$$
$$-i\,|\mu|\exp\left(a_j(k)T\right)\ \sin\left(b_j(k)T+\varphi\right),$$

то умови (44) справджуються тоді і тільки тоді, коли для кожного j, $j=1,\dots,n$, виконується хоча б одна з умов

$$\ln|\mu| + a_j(k)T \neq 0,\quad k\in\mathbb{Z}^p\backslash\{0\}, \tag{45}$$

$$b_j(k)T + \varphi + 2\pi d \neq 0,\quad d\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}^p\backslash\{0\}. \tag{46}$$

Так, у випадку, коли всі корені рівняння (38) є чисто уявними, умови (44) виконуються для всіх комплексних μ, крім значень $\mu_j = \exp(-ib_j(k)T)$, $j=1,\dots,n$, які знаходяться на одиничному колі $|\mu|=1$.

Якщо ж усі корені $\lambda_j(k)$ дійсні, то умови (44) не виконуються для дійсних додатних значень $\mu_j = \exp(-a_j(k)T)$, $a_j(k)>0$, $j=1,\dots,n$, які розміщені на інтервалі $(\exp(-CT),1)$, де $C = \max\limits_{1\le j\le n}|\lambda_j(k)|$.

Розглянемо питання про існування розв'язку задачі (28), (29) із простору $C^n([0,T],H_q(\Omega^p))$. Припустимо, що розв'язок цієї задачі єдиний. Тоді для кожного вектора $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}$ існує функція Гріна $G_k(t,\tau)$ задачі (40), (31), за допомогою якої розв'язок задачі (30)–(31) зображується у вигляді

$$u_k(t) = \int\limits_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau. \tag{47}$$

У квадраті K_T, крім сторін $\tau=0$, $\tau=T$, функції $G_k(t,\tau)$ визначаються формулами

$$G_k(t,\tau) = g_k(t,\tau) +$$
$$+\frac{1}{2(n-1)A(k)}\sum_{m,\alpha,r,\sigma=1}^{n}\sum_{\beta=0}^{n-1}\sum_{|s|\le 2l}(-1)^{m+r}\prod_{q-1}^{p}(ik_q)^{s_q}\times$$
$$\times A^s_{\beta,m}\ \lambda^\beta_\alpha(k)\ A_{m,r}(k)\ S_{n-r}[\lambda_\sigma(k)]\ \exp(\lambda_\sigma(k)t-\lambda_\alpha(k)\tau)\times$$
$$\times\frac{1+\mu\exp\lambda_\alpha(k)T}{1-\mu\exp\lambda_\sigma(k)T}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha}}^{n}(\lambda_j(k)-\lambda_\alpha(k))^{-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}(\lambda_j(k)-\lambda_l(k))^{-1}, \tag{48}$$

де $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}$, $A(k)_{m,r}$ – визначник, отриманий з визначника $A(k)$ викреслюванням m-го рядка та r-го стовпця; $S_{n-r}[\lambda_\sigma(k)]$ – сума всіх можливих добутків коренів $\lambda_1(k),\dots,\lambda_{\sigma-1}(k),\lambda_{\sigma+1}(k),\dots,\lambda_\sigma(k)$, взятих у кількості $n-r$, $S_0[\lambda_\sigma(k)]\equiv 1$;

$$g_k(t,\tau) = \frac{(-1)^{n-1}\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}e^{\lambda_\alpha(k)(t-\tau)}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha}}^{n}(\lambda_j(k)-\lambda_\alpha(k))^{-1}.$$

На стороні $\tau=0$ ($\tau=T$) квадрата K_T функції $G_k(t,\tau)$ довизначаються за неперервністю справа (зліва).

Теорема 9. *Нехай задача (28), (29) має єдиний розв'язок, нехай виконується умова (36) і нехай існують додатні сталі M_j і γ_j, $j=1,2,3$, такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ і довільного фіксованого ε, $0<\varepsilon<1$, виконуються нерівності*

$$\left|1-\mu\exp(\lambda_\sigma(k)T)\right| \ge M_1|k|^{-\gamma_1-\varepsilon/4},\quad \gamma=1,\dots,n, \tag{49}$$

$$\prod_{j=1,j\neq\alpha}^{n}(\lambda_j(k)-\lambda_\alpha(k)) \ge M_2|k|^{-\gamma_2-\varepsilon/4},\quad \alpha=1,\dots,n, \tag{50}$$

$$|A(k)| \ge M_2|k|^{-\gamma_3-\varepsilon/4}. \tag{51}$$

Якщо $f\in C^n([0,T],H_\psi(\Omega^p))$, $\psi = q+2nl+\gamma_1+2\gamma_2+\gamma_3+1$, то існує розв'язок задачі (28), (29) із простору $C^n([0,T],H_q(\Omega^p))$, який неперервно залежить від функції $f(x,t)$.

Д о в е д е н н я. Розв'язок задачі (28), (29) формально зображується рядом

$$u(x,t) = u_0(t) + \sum_{|k|>0}\int\limits_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)\,d\tau\exp(ik,x). \tag{52}$$

З формул (47), (48) для $m = 0, 1, \ldots, n$ випливають оцінки

$$\left|\frac{d^m u_k(t)}{dt^m}\right| \leq M_0 \max_{0\leq t\leq T} |f_k(t)| \sum_{\alpha=1}^{n} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha}}^{n} |\lambda_j(k) - \lambda_\alpha(k)|^{-1} \times$$

$$\times\left(1 + \frac{|k|^{2nl}}{|A(k)|} \sum_{\sigma=1}^{n} |1 - \mu\exp(\lambda_\sigma(k)T|^{-1} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq\sigma}}^{n} |\lambda_j(k) - \lambda_\sigma(k)|^{-1}\right), \quad (53)$$

в яких стала $M_0 > 0$ не залежить від k.

На основі (47), (52), (53) отримуємо, що

$$\|u\|_{C^n([0,T],H_q(\Omega^p))} \leq M\|f\|_{C^n([0,T],H_\psi(\Omega^p))}, \quad (54)$$

де $M = M(M_0, T, n, p) > 0$. З нерівності (54) випливає доведення теореми. ∎

Дослідимо можливість виконання нерівностей (49)–(51). Позначимо через $g = (g_1, \ldots, g_\delta)$ вектор, компонентами якого є коефіцієнти a_0^s рівняння (28), δ – число цих коефіцієнтів, тобто кількість розв'язків $s \in \mathbb{Z}_+^p$ нерівності $|s| \leq 2l$.

Теорема 10. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{2+\delta}$) векторів $(\ln|\mu|, T, g)$ або для майже всіх векторів $(\varphi/\pi, T/\pi, g)$, де $\varphi = \arg\mu$, нерівності (49) при $\gamma_1 \geq p + 2l$ виконуються для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K$, $K = K(\varphi, T, \ln|\mu|, a_0^s)$.*

Доведення. 1. Припустимо, що виконується умова (45). Враховуючи, що $|a| \geq |\mathrm{Re}\, a|$ для довільних $a \in \mathbb{C}$, отримуємо

$$\left|1 - \mu\exp(\lambda_\sigma(k)T)\right| = \left|1 - |\mu|\exp(a_\sigma(k)T)\cos\,(\varphi + b_\sigma(k)T - \right.$$

$$\left.-i\,|\mu|\exp(a_\sigma(k)T)\sin\,(\varphi + b_\sigma(k)T)\right| \geq C_1\left|\ln|\mu| + a_\sigma(k)T\right|.$$

Використавши схему доведення теореми 3.4, покажемо, що у випадку $\ln|\mu| \neq 0$ для майже всіх векторів $(\ln|\mu|, T) \in \mathbb{R}^2$ виконується нерівність

$$\left|\ln|\mu| + a_\sigma(k)T\right| \geq |k|^{-p-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad (55)$$

для всіх векторів k, $|k| > K_1(\ln|\mu|, T)$. Позначимо через A множину тих векторів $(\ln|\mu|, T)$, що належать деякому прямокутнику $\Pi_2 = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2]$, для яких нерівність

$$\left|\ln|\mu| + a_\sigma(k)T\right| < |k|^{-p-\varepsilon} \quad (56)$$

має нескінченну множину розв'язків $k \in \mathbb{Z}^p$. Зафіксуємо k і T. Тоді для $A_k(T)$ – множини тих значень $\ln|\mu|$ з відрізка $[\alpha_1, \beta_1]$, для яких виконується нерівність (56), справедлива оцінка

$$\mathrm{mes}\, A_k(T) < 2|k|^{-p-\varepsilon}.$$

Інтегруючи цю оцінку за змінною T на відрізку $[\alpha_2, \beta_2]$, отримуємо, що міра множини A_k тих векторів $(\ln|\mu|, T) \in \Pi_2$, для яких виконується нерівність (56) при фіксованому k, задовольняє нерівність

$$\mathrm{mes}\, A_k(T) < 2(\beta_2 - \alpha_2)|k|^{-p-\varepsilon}.$$

Оскільки ряд $\sum_{|k|>0} |k|^{-p-\varepsilon}$ збіжний, то з леми 3.1 випливає, що $\mathrm{mes}\, A = 0$, тобто для майже всіх векторів $(\ln|\mu|, T) \in \Pi_2$ виконується нерівність (55) для всіх (крім скінченного числа) векторів k. Враховуючи те, що площину можна покрити зліченним числом прямокутників Π_2, отримуємо доведення теореми для випадку $\ln|\mu| \neq 0$.

Якщо $\ln|\mu| = 0$, то $\left|1 - \mu\exp(\lambda_\sigma(k)T)\right| \geq C_1 T|a_\sigma(k)T|$. Покажемо, що для майже всіх векторів $g \in \mathbb{R}^\delta$ виконується нерівність

$$|\lambda_\sigma(k)| \geq |k|^{-p-2l-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad (57)$$

для всіх k, $|k| > K_2(g)$. Оскільки $\lambda_\sigma(k) \neq 0$, $\sigma = 1, \ldots, n$, то вільний член P_0 полінома $P(\lambda)$ (див. (38)) не дорівнює нулю. Враховуючи, що

$$|L(k)| \leq C_2|k|^{2l}, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \quad (58)$$

і що всі корені рівняння (38) рівномірно обмежені зверху за k, на основі теореми Вієта отримуємо оцінку

$$\max\{|\mathrm{Re}\, P_0|, |\mathrm{Im}\, P_0|\} \leq |P_0| \leq C_3|\lambda(k)||k|^{2l},$$

де $\lambda(k)$ – будь-який із коренів рівняння (38). Для встановлення оцінки (57) досить показати, що міра множини тих векторів $g \in \mathbb{R}^\delta$, для яких нерівність

$$\max\{|\mathrm{Re}\, P_0|, |\mathrm{Im}\, P_0|\} < |k|^{-p-\varepsilon}$$

має нескінченну множину розв'язків у цілих числах $k_1, \ldots, k_p$ ($k \neq 0$), дорівнює нулю. Якщо $a_0^0 \neq 0$, то доведення останнього твердження проводимо за схемою доведення теореми 3.4; якщо ж $a_0^0 = 0$, то доведення випливає з теореми 3.3.

Оскільки для майже всіх векторів g виконується нерівність (57), то для майже всіх векторів g виконується нерівність

$$|a_\sigma(k)| \geq C_4|k|^{-p-2l-\varepsilon}. \quad (59)$$

Отже, ми довели, що за умови (45) нерівність (49) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2+\delta}$) векторів $(\ln|\mu|, T, g)$ при $\sigma_1 \geq p + 2l$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > \max(K_1, K_2)$.

2. Розглянемо тепер випадок, коли виконується умова (46). Враховуючи, що $|a| \geq |\mathrm{Im}\, a|$ для довільного $a \in \mathbb{C}$ і що $\sin\, x \geq 2x/\pi$ для

всіх значень $x \in [0, \pi/2]$, отримуємо оцінку

$$\begin{aligned}\left|1 - \mu \exp(\lambda_\sigma(k)T)\right| \ge |\mu| \exp(a_\sigma(k)T)\left|\sin\left(\varphi + b_\sigma(k)T\right)\right| \ge \\ \ge 2\,\left|(\varphi + b_\sigma(k)T)/\pi - m_k\right| \exp(-CT),\end{aligned}$$

де $m_k \in \mathbb{Z}$ задовольняє нерівність

$$\left|\frac{\varphi + b_\sigma(k)T}{\pi} - m_k\right| \le \frac{1}{2}.$$

Якщо $\varphi \ne 0$ або π, то далі доведення проводиться аналогічно доведенню оцінки (55). Якщо $\varphi = 0$ чи π, то доведення аналогічне доведенню оцінки (59). Теорему доведено. ■

Розглянемо нерівність (51). Визначник $A(k)$ є поліномом степеня $2nl$ відносно змінних $k_1, \dots, k_p$, який можна зобразити у вигляді

$$\begin{aligned}A(k) &= \sum_{|r| \le 2nl} B_r i^{|r|} k_1^{r_1} \cdots k_p^{r_p} = \\ &= \sum_{j=0}^{nl} \sum_{|r|=2j} a_r k_1^{r_1} \cdots k_p^{r_p} + i \sum_{j=0}^{nl} \sum_{|r|=2j-1} b_r k_1^{r_1} \cdots k_p^{r_p},\end{aligned} \tag{60}$$

де $a_r = (-1)^j B_r$, $|r| = 2j$, $j = 0, \dots, nl$; $b_r = (-1)^{j+1} B_r$, $|r| = 2j - 1$, $j = 1, \dots, nl$. Позначимо через $a \in \mathbb{R}^{\varkappa}$ і $b \in \mathbb{R}^{\Theta}$ вектори, складені відповідно з коефіцієнтів a_r і b_r полінома (60).

Теорема 11. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{\varkappa}$) векторів a і для довільних фіксованих векторів b (або для майже всіх b і для довільних фіксованих a) нерівність (51) виконується при $\gamma_3 \ge p$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.*

Д о в е д е н н я. Зауважимо, що

$$|A(k)| \ge \max\{|\mathrm{Re}\, A(k)|, |\mathrm{Im}\, A(k)|\} > 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p.$$

Якщо вільний член полінома $\mathrm{Re}\, A(k)$ не дорівнює нулю, то доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 3.4. В протилежному випадку доведення випливає з теореми 3.3. ■

Розглянемо питання про можливість виконання нерівностей (50). Позначимо через h вектор з компонентами $h_j = a_0^{\chi_j}$, де $\chi_j = (\underbrace{0, \dots, 0}_{j}, 2l, 0, \dots, 0)$, $j = 1, \dots, p$, а через y – вектор, складений з решти коефіцієнтів рівняння (28).

Для дискримінанта $D(Q)$ полінома

$$\begin{aligned}Q(\lambda) &\equiv (-1)^l P(\lambda)/L(k) = \\ &= \lambda^n + \sum_{\beta=0}^{n-1} \frac{(-1)^l}{L(k)} \sum_{|s| \le 2l} a_\beta^s (ik_1)^{s_1} \cdots (ik_p)^{s_p} \lambda^\beta = \lambda^n + \sum_{\beta=0}^{n-1} Q_\beta(k) \lambda^\beta\end{aligned}$$

справедливі такі два зображення [132]:

$$D(Q) = \prod_{n \ge i > j \ge 1} (\lambda_i(k) - \lambda_j(k))^2, \tag{61}$$

$$D(Q) = (-1)^{(n-1)n/2} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & Q_{n-1} & Q_{n-2} & \dots & Q_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & Q_{n-1} & \dots & Q_1 & Q_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & Q_0 \\ n & (n-1)Q_{n-1} & \dots & Q_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & \dots & 2Q_2 & Q_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & Q_1 \end{vmatrix}. \tag{62}$$

Використавши схему доведення теореми 3.5, покажемо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^p$) векторів h, які належать деякому паралелепіпеду, виконується нерівність

$$|\mathrm{Re}\, D(Q)| \ge C_1 |k|^{-p(n-1)-\varepsilon} \tag{63}$$

при досить великих $|k|$. Позначимо через W множину тих векторів h, для яких протилежна нерівність

$$|\mathrm{Re}\, D(Q)| < C_1 |k|^{-p(n-1)-\varepsilon} \tag{64}$$

має нескінченне число розв'язків $k \in \mathbb{Z}^p$, а через W_k – множину векторів h, для яких нерівність (64) справедлива при фіксованому k. Не обмежуючи загальності, припустимо, що $|k_1| = \max\limits_{1 \le \alpha \le p} |k_\alpha|$ і $h_1 \ne 0$. Із (62) видно, що $D(Q) = \pm n^n Q_0^{n-1}(k) + F(k)$, а $\mathrm{Re}\, D(Q) = \pm n^n \left(\mathrm{Re}\, Q_0(k)\right)^{n-1} + F_1(k)$, де

$$\sum_{j=0}^{l} \sum_{|s|=2j} \mathrm{Re}\, Q_0(k) = \frac{(-1)^{l-j}}{L(k)} a_0^s k_1^{s_1} \dots k_1^{s_p},$$

а $F_1(k)$ містить степені $\mathrm{Re}\, Q_0(k)$, менші, ніж $n-1$. Враховуючи оцінку (58) і те, що $\mathrm{Re}\, Q_0(k)$ лінійно залежить від h_1, отримуємо

$$\left|\frac{\partial^{n-1}}{\partial h_1^{n-1}} \mathrm{Re}\, Q(k)\right| \ge \frac{n^n (n-1)!}{C_2^{n-1}} \left(\frac{|k_1|}{|k|}\right)^{2l(n-1)} \ge C_3, \quad C_3 = \frac{n^n (n-1)!}{(C_2 p^{2l})^{n-1}}.$$

На основі леми 3.4 дістаємо, що міра множини $W_k(h_1)$ тих значень $h_1 \in [\alpha, \beta]$, які задовольняють нерівність (64) (при фіксованих $h_2, \dots, h_p$), має оцінку

$$|W_k(h_1)| \le C_4(n) \left(C_3\, |k|^{p(n-1)+\varepsilon}\right)^{-1/(n-1)}.$$

Інтегруючи цю оцінку за змінними $h_2, \ldots, h_p$ в паралелепіпеді Π_{p-1}, отримуємо

$$|W_k| \leq C_5(n,p)|k|^{-p-\varepsilon/(n-1)}.$$

Ряд $\sum\limits_{|k|>0} |W_k|$ збігається, тому за лемою 3.1 $\operatorname{mes} W = 0$. Оскільки весь простір $\mathbb{R}^p$ можна покрити зліченним числом паралелепіпедів Π_p, то, враховуючи (61), (63) і те, що $|D(Q)| \geq |\operatorname{Re} D(Q)|$, отримуємо, що нерівності (50) при $\gamma_2 \geq (n-1)p/2$ виконуються для майже всіх векторів $h \in \mathbb{R}^p$ і всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Отже, ми довели таке твердження.

Теорема 12. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^p$) векторів h і для довільного фіксованого вектора у нерівності (50) виконуються при $\gamma_2 \geq (n-1)p/2$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ таких, що $|k| > K(h)$.*

Зауваження 4. Отримані результати перенесено на випадок, коли корені рівняння (38) кратні.

10.3. Рівняння зі змінними за x коефіцієнтами

Розглянемо в області $Q^1 = [0,T] \times \Pi^1$, $\Pi^1 = [0,\pi]$, задачу [124]

$$R[u] \equiv \frac{\partial^n}{\partial t^n} L_1^l u + \sum_{\beta=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{l} a_{\beta s} \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} L_1^s u = f(t,x), \tag{65}$$

$$R_r[u] \equiv \sum_{\beta=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{l} A^r_{\beta s} L_1^s \Big(\frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta}\Big|_{t=0} - \mu \frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta}\Big|_{t=T}\Big) = 0,\ r = 1,\ldots,n, \tag{66}$$

$$L_1^j u\big|_{x=0} = L_1^j u\big|_{x=\pi} = 0, \quad j = 0,1,\ldots,l-1, \tag{67}$$

де $a_{\beta s}$, $A^r_{\beta s} \in \mathbb{R}$, $a_{0l} \neq 0$, $L_1 \equiv -\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(p(x)\dfrac{\partial}{\partial x}\Big) + q(x)$, $L_1^0 u \equiv u$, $L_1^i u \equiv L_1(L_1^{i-1}u)$, функції $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ – достатньо гладкі на $[0,\pi]$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \geq 2$, $l \in \mathbb{N}$.

Розв'язок задачі шукатимемо в просторі $\mathbb{C}^{(n,2l)}(Q^1)$ у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \tag{68}$$

де $X_k(x)$ – нормовані власні функції задачі Штурма–Ліувілля

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}(p(x)X'(x)) + q(x) = \lambda X(x), \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases} \tag{69}$$

Очевидно, що функція (68) задовольняє умови (67).

Зауважимо, що згідно з лемою п. 21.4 [29] $\lambda = 0$ не є власним значенням оператора L_1.

Відомо [190], що всі власні значення λ_k задачі (69) дійсні, різні і невід'ємні, а власні функції $\{X_k(x)\}$ утворюють ортогональну систему, яка є повною в просторі $L_2[0,\pi]$, причому справджуються оцінки

$$d_1 k^2 \leq \lambda_k \leq d_1 k^2, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{70}$$

$$\max_{0\leq x\leq\pi} |X_k^{(j)}(x)| \leq \bar{C}_j k^j, \quad j = 0,1,\ldots,2l,\ k \in \mathbb{N}, \tag{71}$$

де d_1, d_2, $\bar{C}_j$ – додатні сталі.

Кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, визначається як розв'язок задачі

$$\lambda_k^l u_k^{(n)}(t) + \sum_{\beta=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{l} a_{\beta s}\lambda_k^s u_k^{(\beta)}(t) = f_k(t), \tag{72}$$

$$\sum_{\beta=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{l} A^r_{\beta s}\lambda_k^s \big(u_k^{(\beta)}(0) - \mu u_k^{(\beta)}(T)\big) = 0, \quad r = 1,\ldots,n, \tag{73}$$

де

$$f_k(t) = \int_0^\pi f(t,x)X_k(x)\,dx.$$

Припустимо, що корені $\nu_j(\lambda_k)$, $j = 1,\ldots,n$, характеристичного рівняння

$$P(\nu) \equiv \nu^n + \sum_{\beta=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{l} a_{\beta s}\lambda_k^{s-l}\nu^\beta = 0,$$

що відповідає рівнянню (72), мають кратність, яка дорівнює одиниці, і не дорівнюють нулю. Очевидно, що $|\nu_j(\lambda_k)| \leq C$, $j = 1,\ldots,n$, де стала C не залежить від λ_k.

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ розв'язок однорідного рівняння

$$\lambda_k^l u_k^{(n)}(t) + \sum_{\beta=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{l} a_{\beta s}\lambda_k^s u_k^{(\beta)}(t) = 0, \tag{74}$$

який задовольняє умови (73), має вигляд

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^{n} C_{kj}\exp(\nu_j(\lambda_k)t),$$

де сталі C_{kj}, $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, n$, визначаємо із системи алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} C_{kj} \sum_{\beta=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{l} A_{\beta s}^{r} \lambda_k^s \nu_j^\beta(\lambda_k)\big(1 - \mu \exp(\nu_j(\lambda_k)T)\big) = 0, \ r = 1, \ldots, n,$$

визначник якої $\Delta(\lambda_k)$ обчислюється за формулою

$$\Delta(\lambda_k) = A(\lambda_k) \prod_{j=1}^{n} \big(1 - \mu \exp(\nu_j(\lambda_k)T)\big) \prod_{n \geq i > j \geq 1} \big(\nu_i(\lambda_k) - \nu_j(\lambda_k)\big),$$

$$A(\lambda_k) = \det \left\| \sum_{s=0}^{l} A_{\beta s}^{r} \lambda_k^s \right\|_{\substack{r=1,\ldots,n \\ \beta=0,\ldots,n-1}} .$$

Теорема 13. *Для єдиності розв'язку задачі (65)–(67) у просторі $C^{(n,2l)}(Q^1)$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови*

$$\Delta(\lambda_k) \neq 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{75}$$

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Якщо $\Delta(\lambda_{k_0}) = 0$ для деякого λ_{k_0}, то однорідна задача, що відповідає задачі (65)–(67), має нетривіальні розв'язки вигляду $\tilde{u}(t,x) = u_{k_0}(t) X_{k_0}(x)$, де $u_{k_0}(t)$ – розв'язок однорідної задачі (74), (73) при $\lambda_k = \lambda_{k_0}$. Тому розв'язок задачі (65)–(67), якщо він існує, не буде єдиним.

Д о с т а т н і с т ь. Припустимо, що існують два розв'язки u_1 та u_2 задачі (65)–(67) з простору $C^{(n,2l)}(Q^1)$. Тоді функція $u = u_1 - u_2 \in C^{(n,2l)}(Q^1)$ буде розв'язком відповідної до (65)–(67) однорідної задачі і її разом з функціями $R[u]$ та $R_r[u]$, $r = 1, \ldots, n$, можна розвинути в ряд Фур'є вигляду (68) за системою функцій $\{X_k(x)\}$; при цьому ряди для функцій $R[u]$, $R_r[u]$, $r = 1, \ldots, n$, збігаються з рядами, отриманими формальним застосуванням операторів R, R_r, $r = 1, \ldots, n$, до ряду для функції $u(t,x)$. З рівностей Парсеваля для функцій $R[u]$ та $R_r[u]$, $r = 1, \ldots, n$, випливає, що кожний з коефіцієнтів Фур'є $u_k(t)$ функції $u(t,x)$ є розв'язком однорідної задачі, що відповідає задачі (65)–(67). Якщо $\Delta(\lambda_k) \neq 0$ для всіх λ_k, то всі коефіцієнти $u_k(t)$ тотожно дорівнюють нулю. Тоді з рівності Парсеваля для функції $u(t,x)$ випливає, що $u(t,x) \equiv 0$, тобто $u_1(t,x) \equiv u_2(t,x)$. Теорему доведено. ∎

Розглянемо питання про існування розв'язку задачі (65)–(67) із простору $C^{(n,2l)}(Q^1)$. Нехай умови (75) виконуються. Тоді для кожного $k \in \mathbb{N}$ існує функція Гріна $G_k(t,\tau)$ задачі (74), (73), за

допомогою якої розв'язок задачі (72), (73) зображується у вигляді

$$u_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau. \tag{76}$$

У квадраті K_T, за винятком сторін $\tau = 0$ і $\tau = T$, кожна з функцій $G_k(t,\tau)$ визначається формулою

$$G_k(t,\tau) = g_k(t,\tau) + \{2(n-1)A(\lambda_k)\}^{-1} \times$$

$$\times \sum_{r,\alpha,m,\gamma=1}^{n} \sum_{\beta=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{l} (-1)^{m+r} A_{\beta s}^{r} \lambda_k^s \nu_\alpha^\beta(\lambda_k) S_{n-m}[\nu_\gamma(\lambda_k)] \times$$

$$\times A_{r,m}(\lambda_k) \exp(\nu_\gamma(\lambda_k)t - \nu_\alpha(\lambda_k)\tau) \frac{(1 + \mu \exp(\nu_\alpha(\lambda_k)T))}{(1 - \mu \exp(\nu_\gamma(\lambda_k)T))} \times$$

$$\times \prod_{j=1, j\neq\alpha}^{n} (\nu_j(\lambda_k) - \nu_\alpha(\lambda_k))^{-1} \prod_{j=1, j\neq\gamma}^{n} (\nu_j(\lambda_k) - \nu_\gamma(\lambda_k))^{-1}, \tag{77}$$

де $A_{r,m}(\lambda_k)$ – визначник, отриманий з визначника $A(\lambda_k)$ викреслюванням m-го рядка і r-го стовпця; $S_{n-m}[\nu_\gamma(\lambda_k)]$ – сума всіх можливих добутків чисел $\nu_1(\lambda_k), \ldots, \nu_{\gamma-1}(\lambda_k), \nu_{\gamma+1}(\lambda_k), \ldots, \nu_n(\lambda_k)$, взятих у кількості $(n-m)$, $S_0[\nu_\gamma(\lambda_k)] \equiv 1$;

$$g_k(t,\tau) =$$

$$= \operatorname{sgn}(t-\tau) \frac{(-1)^{n-1}}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} \exp(\nu_\alpha(\lambda_k)(t-\tau)) \prod_{j=1, j\neq\alpha}^{n} (\nu_j(\lambda_k) - \nu_\alpha(\lambda_k))^{-1}.$$

На сторонах $\tau = 0$ і $\tau = T$ квадрата K_T функції $G_k(t,\tau)$ довизначуються за неперервністю відповідно справа і зліва.

Розв'язок задачі (65)–(67) формально зображується у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau \ X_k(x), \tag{78}$$

який, взагалі, є розбіжним, бо величини $\big|1 - \mu \exp(\nu_\gamma(\lambda_k)T)\big|$, $|A(\lambda_k)|$, $\prod\limits_{j=1, j\neq\alpha}^{n} \big|\nu_j(\lambda_k) - \nu_\alpha(\lambda_k)\big|$ можуть ставати як завгодно малими для нескінченної множини значень λ_k.

Теорема 14. *Нехай існують сталі $M_i > 0$, $\gamma_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, 3$, такі, що для всіх (крім скінченного числа) значень λ_k і довільного ε, $0 < \varepsilon < 1$, виконуються нерівності*

$$|A(\lambda_k)| \geq M_1 \lambda_k^{-\gamma_1/2 - \varepsilon/8}, \tag{79}$$

$$\left|1-\mu\exp(\nu_\gamma(\lambda_k)T)\right| \geq M_2\lambda_k^{-\gamma_2/2-\varepsilon/8}, \quad \gamma = 1,\ldots,n, \tag{80}$$

$$\prod_{j=1, j\neq\alpha}^{n} \left|\nu_j(\lambda_k)-\nu_\alpha(\lambda_k)\right|^{-1} \geq M_3\lambda_k^{-\gamma_3/2-\varepsilon/8}, \quad \alpha = 1,\ldots,n. \tag{81}$$

Якщо $p \in C^{2\psi-1}[0,\pi]$, $q \in C^{2\psi-2}[0,\pi]$, а функція f належить простору $C^{(0,2\psi)}(Q^1)$ і задовольняє умови

$$L_1^i f\big|_{x=0} = L_1^i f\big|_{x=\pi} = 0, \quad i = 0,\ldots,\psi-1,$$

де $2\psi \geq 2(l(n+1)+\gamma_3+1)+\gamma_1+\gamma_2$, то існує розв'язок задачі (65)–(67), який належить простору $C^{(n,2l)}(Q^1)$ і неперервно залежить від $f(t,x)$.

Д о в е д е н н я. Якщо функція $f(t,x)$ задовольняє умови теореми, то

$$f_k(t) = \frac{1}{\gamma_k^{\psi}}\int_0^{\pi} L_1^{\psi} f(t,x)X_k(x)dx, \quad k\in\mathbb{N},$$

звідки, враховуючи нерівність (71), отримуємо

$$\max_{0\leq t\leq T}|f_k(t)| \leq \frac{M_4}{\gamma_k^{\psi}}\,\|f\|_{C^{(0,2\psi)}(Q^1)}. \tag{82}$$

З формул (76), (77) маємо

$$\max_{0\leq t\leq T}\left|\frac{d^\xi u_k(t)}{dt^\xi}\right| \leq M_5\lambda_k^z \max_{0\leq t\leq T}|f_k(t)|, \quad \xi = 0,\ldots,n, \tag{83}$$

де $z = nl+(\gamma_1+\gamma_2+2\gamma_3+\xi)/2$. На основі оцінок (70), (71), (79)–(83) і формули (78) одержуємо

$$\|u(t,x)\|_{C^{(n,2l)}(Q^1)} \leq M_6\|f(t,x)\|_{C^{(0,2\psi)}(Q^1)},$$

де $M_6 = M_6(d_1,d_2,\bar{C}_j,M_1,M_2,M_3,M_4,M_5)$. З останньої нерівності випливає доведення теореми. ∎

З'ясуємо, коли виконуються оцінки (79)–(81).

Розглянемо нерівність (79). Визначник $A(\lambda_k)$, який є поліномом відносно λ_k степеня, не вищого nl, можна зобразити у вигляді

$$A(\lambda_k) = \sum_{j=0}^{nl} A_j\lambda_k^j, \tag{84}$$

де кожний із коефіцієнтів A_j є сумою добутків, складених з коефіцієнтів $A_{\beta s}^r$ в умовах (66).

Теорема 15. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{nl+1}$) векторів $(A_0,A_1,\ldots,A_{nl})$ нерівність (79) виконується при довільному $\gamma_1\in\mathbb{N}$ для всіх (крім скінченного числа) значень λ_k.*

Д о в е д е н н я. Будемо розрізняти два випадки: $A_0 \neq 0$ та $A_0 = A_1 = \ldots = A_p = 0$, $0\leq p\leq nl-1$, $A_{p+1}\neq 0$. У першому випадку доведення проводиться за схемою доведення теореми 3.4, а в другому – випливає з теореми 3.3. ∎

Позначимо через a вектор, компонентами якого є коефіцієнти a_{0s} рівняння (65), тобто $a = (a_{0,0},a_{0,1},\ldots,a_{0,l})$. Справедливе твердження, яке доводиться за схемою доведення теореми 10.

Теорема 16. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{l+3}$) векторів $(\ln|\mu|,T,a)$ або для майже всіх векторів $(\varphi/\pi,T/\pi,a)$, де $\varphi = \arg\,\mu$, нерівності (80) виконуються при $\gamma_2\geq 1+2l$ для всіх значень λ_k, $\lambda_k > K$, $K = K(\varphi,\ln|\mu|,T,a)$.*

Розглянемо нерівності (81). Для дискримінанта $D(P)$ характеристичного многочлена

$$P(\nu) \equiv \nu^n + \sum_{\beta=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{l} P_\beta(\lambda_k,a_{\beta s})\nu^\beta$$

справедливі такі два зображення [132]: через корені многочлена $P(\nu)$

$$D(P) = \prod_{n\geq i>j\geq 1}\left(\nu_i(\lambda_k)-\nu_j(\lambda_k)\right)^2 \tag{85}$$

та через його коефіцієнти (див. (62))

$$D(P) = \pm n^n P_0^{n-1} + F, \tag{86}$$

де P_0 лінійно залежить від коефіцієнтів $a_{0,s}$, а F містить степені P_0, менші, ніж $n-1$.

З формул (86) маємо

$$\left|\frac{\partial^{n-1}D(P)}{\partial a_{0,l}^{n-1}}\right| = n^n(n-1)! \geq 1. \tag{87}$$

З нерівності (87) і лем 3.4 та 3.1 випливає, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $a_{0,l}$ справедлива оцінка

$$|D(P)| \geq C_1 k^{-(n-1)-\varepsilon}, \quad 0<\varepsilon<1, \tag{88}$$

для всіх (крім скінченного числа) значень k.

З формул (85), оцінки (88) і нерівностей

$$\left|\nu_\alpha(\lambda_k)-\nu_\beta(\lambda_k)\right| \leq C_2, \quad \alpha,\beta = 1,\ldots,n,\ \alpha\neq\beta,$$

випливає таке твердження.

Теорема 17. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $a_{0,l}$ і для довільних фіксованих решти коефіцієнтів рівняння (65) нерівності (81) виконуються при $\gamma_3 \geq (n-1)/2$ для всіх (крім скінченного числа) значень λ_k.*

Наведені вище результати дослідження задачі (65)–(67) перенесено на випадок багатьох просторових змінних. В області $D = [0,T] \times G$, де G – область із $\mathbb{R}^p$ з досить гладкою границею ∂G, розглянемо задачу

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} L^l u + \sum_{\beta=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{l} a_{\beta s}\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} L^s u = f(t,x), \tag{89}$$

$$\sum_{\beta=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{l} A^r_{\beta s} L^s\left(\frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta}\Big|_{t=0} - \mu\frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta}\Big|_{t=T}\right) = 0,\ r = 1,\ldots,n, \tag{90}$$

$$L^i u\big|_{\partial G} = 0, \quad i = 0,\ldots,l-1, \tag{91}$$

де коефіцієнти $a_{\beta s}, A^r_{\beta s} \in \mathbb{R}$, $a_{0,l} \neq 0$, та параметр $\mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ – ті ж самі, що і в задачі (65)–(67); $L \equiv -\sum\limits_{i,j=1}^{p} \partial/\partial x_i(b_{ij}(x)\partial/\partial x_j) + b(x)$ – самоспряжений диференціальний оператор еліптичного типу, тобто $b_{ij}(x) = b_{ji}(x)$, $x \in G$, $\sum\limits_{i,j=1}^{p} b_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta\sum\limits_{i=1}^{p}\xi_i^2$, $(\xi_1,\ldots,\xi_p) \in \mathbb{R}^p$, $\theta = \mathrm{const} > 0$; відносно коефіцієнтів оператора L припустимо, що $b_{ij} \in C^{2q-1}(G)$, $b \in C^{2q-2}(G)$, $q \geq l$, і що $b(x) \geq 0$ всюди в області G; $L_1^0 u \equiv u$, $L_1^i u \equiv L_1(L_1^{i-1}u)$.

Відомо [70, 170], що за умов, накладених на коефіцієнти оператора L і область G, задача

$$\begin{cases} LX = \lambda X, \\ X|_{\partial G} = 0 \end{cases} \tag{92}$$

має повну ортонормовану систему власних функцій $\{X_k(x)\}$, $k \in \mathbb{N}$, в $L_2(G)$, а всі власні значення λ_k, $k \in \mathbb{N}$, є додатними числами; при цьому справедливі оцінки

$$\tilde{C}_0 k^{2/p} \leq \lambda_k \leq C_0 k^{2/p}, \quad k > k_0,\ 0 < \tilde{C}_0 < C_0, \tag{93}$$

$$|X_k^{(j)}| \leq C_1\lambda_k^{p/4+j/2}, \quad j = 0,1,\ldots,2l. \tag{94}$$

Нехай функція $f(t,x)$ зображується рядом

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)X_k(x), \tag{95}$$

де

$$f_k(t) = \int\limits_G f(t,x)X_k(x)\,dx.$$

Розв'язок задачі (89)–(91) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)X_k(x), \tag{96}$$

де $X_k(x)$ – власні функції задачі (92), і який, у випадку збіжності, задовольняє умови (91). Підставляючи ряди (95), (96) в рівняння (89) та умови (90), для визначення кожної з функцій $u_k(t)$ отримуємо задачу вигляду (72), (73), яку розв'язуємо аналогічно, як у випадку $p = 1$.

Теорема єдиності розв'язку задачі (89)–(91) формулюється і доводиться подібно до теореми 13.

Як і у випадку $p = 1$, якщо умова єдиності розв'язку задачі (89)–(91) виконана, то розв'язок розглядуваної задачі формально зображується у вигляді ряду (78), в якому λ_k і $X_k(x)$ – власні значення та власні функції задачі (92).

Теорема 18. *Нехай розв'язок задачі (89)–(91) єдиний і нехай виконуються нерівності вигляду (79)–(81). Якщо $b_{ij} \in C^{2\sigma-1}(G)$, $i,j = 1,\ldots,p$, $b \in C^{2\sigma-2}(G)$, а функція $f \in C^{0,2\sigma}(D)$ задовольняє умови*

$$L^i f\big|_{\partial G} = 0, \quad i = 0,\ldots,l-1,$$

де $2\sigma \geq \gamma_1+\gamma_2+2\gamma_3+2l(n+1)+p^2+2p$, то існує розв'язок задачі (89)–(91) з простору $C^{(n,2l)}(D)$, який неперервно залежить від функції $f(t,x)$.

Д о в е д е н н я. Враховуючи оцінки (93), (94), доведення проводимо за схемою доведення теореми 14. ∎

Метричні оцінки малих знаменників у розглядуваному випадку залежать від розмірності області G. Так, нерівність

$$|A(\lambda_k)| \geq M_1\lambda_k^{-\gamma_1/2-\varepsilon/8}, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

де $A(\lambda_k)$ зображується формулою (84), в якій λ_k – власні значення задачі (92), виконується при $\gamma_1 \geq p^2$ для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{nl+1}$) векторів $(A_0, A_1, \ldots, A_{nl})$ і для всіх (крім скінченного числа) значень λ_k.

§ 11. Безтипні рівняння зі сталими коефіцієнтами

У даному параграфі вивчаються крайові задачі з нелокальними двоточковими умовами для диференціальних рівнянь, однорідних за порядком диференціювання, з молодшими членами і з правими частинами.

11.1. Однорідні за порядком диференціювання рівняння

В області D^p розглянемо задачу [84]

$$Lu \equiv L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)u \equiv \sum_{|\widehat{s}|=n} a_{\widehat{s}} \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}} = 0, \tag{1}$$

$$B_l\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)u \equiv \sum_{|\widehat{s}|\le n-1} A^l_{\widehat{s}} \frac{\partial^{|\widehat{s}|} u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}\Big|_{t=0} -$$

$$- \mu \sum_{|\widehat{s}|\le n-1} A^l_{\widehat{s}} \frac{\partial^{|\widehat{s}|} u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}\Big|_{t=T} = \varphi_l(x),\ l=1,\ldots,n, \tag{2}$$

де $a_{\widehat{s}}$, $A^l_{\widehat{s}}$, μ – дійсні числа; $\mu \neq 0$, $a_{n,0,\ldots,0} = 1$.

Під роз'язком нелокальної двоточкової задачі (1), (2) будемо розуміти функцію $u \in H^n_q(D^p)$, $q \in \mathbb{Z}$, що задовольняє умови

$$\|Lu\|_{H^0_{q-n}(D^p)} = 0,\ \|B_l(\partial/\partial x)u - \varphi_l\|_{H_{q-n+1}(\Omega^p_{2\pi})} = 0, \quad l = 1,\ldots,n.$$

Будемо припускати, що характеристичне рівняння

$$L\Big(\lambda, \frac{k}{\|k\|}\Big) \equiv \sum_{|\widehat{s}|=n} a_{\widehat{s}}\lambda^{s_0}\Big(\frac{k_1}{\|k\|}\Big)^{s_1}\ldots\Big(\frac{k_p}{\|k\|}\Big)^{s_p} = 0 \tag{3}$$

для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p\setminus\{0\}$ має прості λ-корені, які позначатимемо через $\lambda_j(k)$, $j = 1,\ldots,n$.

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{\|k\|=0}^{\infty} u_k(t)e^{i(k,x)}; \tag{4}$$

тоді $u_k(t)$ є розв'язком задачі

$$L(d/dt, ik)u_k(t) = 0, \tag{5}$$

$$B_l(ik)u_k(t) = \varphi_{lk}, \quad l = 1,\ldots,n, \tag{6}$$

де φ_{lk}, $k \in \mathbb{Z}^p$ – коефіцієнти Фур'є функції $\varphi_l(x)$.

Очевидно, що питання єдиності розв'язку задачі (1), (2) в просторі $H^n_q(D^p)$ є еквівалентним питанню єдиності розв'язків задач (5), (6) для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$.

Загальний розв'язок рівняння (5) має вигляд

$$u_k(t) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} C_{kj}e^{i\|k\|\lambda_j(k)t}, & k \neq 0, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} C_{0j}t^{j-1}, & k = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Підставляючи функції (7) в умови (6), для визначення констант C_{kj}, $j = 1,\ldots,n$, при кожному $k \in \mathbb{Z}^p$ одержуємо систему лінійних алгебричних рівнянь, визначник якої

$$\Delta(k) = \det B(k) \times$$

$$\times \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{n}(1-\mu e^{i\|k\|\lambda_j(k)T}) \prod\limits_{n\ge\alpha>\beta\ge1} i\|k\|[\lambda_\alpha(k)-\lambda_\beta(k)], & k\neq0, \\ (1-\mu)^n \prod\limits_{j=1}^{n}(n-j)!, & k=0, \end{cases}$$

де $B(k) = \Big\| \sum\limits_{|s|\le n-j-1} A^l_{j,s}(ik_1)^{s_1}\ldots(ik_p)^{s_p}\Big\|_{l=1,\ldots,n,j=0,1,\ldots,n-1}$. Отже, для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ задача (5), (6) має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли $\Delta(k) \neq 0$.

Таким чином, справедливе таке твердження.

Теорема 1. *Нехай $\mu \neq 1$. Тоді для єдиності розв'язку задачі (1), (2) в просторі $H^n_q(D^p)$, $q \in \mathbb{Z}$, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови*

$$\det B(k) \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{8}$$

$$1 - \mu e^{i\|k\|\lambda_j(k)T} \neq 0, \quad j = 1,\ldots,n;\ k \in \mathbb{Z}^p\setminus\{0\}. \tag{9}$$

Зауваження 1. Якщо $\mu = 1$, то при умовах (8), (9) має місце єдиність розв'язку задачі (1), (2) з точністю до адитивної константи; при цьому для існування розв'язку задачі (1), (2) необхідно виконання умови

$$\int\limits_{\Omega^p_{2\pi}} \sum_{j=1}^{n} b_{nj}\varphi_j(x)\,dx = 0, \tag{10}$$

де $(b_{n1},\ldots,b_{nn})$ – n-й рядок матриці $(B(0))^{-1}$.

Розглянемо питання про існування розв'язку задачі (1), (2). Нехай виконані умови (8), (9). Тоді для кожного вектора $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$

існує єдиний розв'язок задачі (5), (6), який зображається формулою

$$
\begin{aligned}
u_k(t) \;=\; & \sum_{m,j,\alpha=1}^{n} (-1)^{n+\alpha} \frac{\beta_{\alpha m}}{\det B(k)} (i\|k\|)^{n-\alpha} \times \\
\times \; & \frac{e^{i\|k\|\lambda_j(k)t} S_{n-\alpha}[\lambda_j(k)]}{\left(1-\mu e^{i\|k\|\lambda_j(k)T}\right) \prod\limits_{l=1,l\neq j}^{n} i\|k\|[\lambda_j(k)-\lambda_l(k)]} \varphi_{mk}, \quad (11)
\end{aligned}
$$

де $\beta_{\alpha m}/\det B(k)$ – елементи матриці $(B(k))^{-1}$; $S_q[\lambda_j(k)]$ – сума всіх можливих добутків чисел $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_{j-1}(k), \lambda_{j+1}(k), \ldots, \lambda_n(k)$, узятих у кількості q штук, $S_0[\lambda_j(k)] = 1$. Із формули (11) маємо оцінки для функцій $u_k(t)$ на проміжку $0 \leq t \leq T$:

$$
\begin{aligned}
|u_k(t)| \leq C\|k\|^{(n-2)(n-1)/2} & \sum_{j,m=1}^{n} \frac{|\varphi_{mk}|}{|\det B(k)|} \times \\
\times \; & \frac{e^{-\|k\| \operatorname{Im} \lambda_j(k)t}}{\left|1-\mu e^{i\|k\|\lambda_j(k)T}\right| \prod\limits_{l=1,l\neq j}^{n} |\lambda_j(k)-\lambda_l(k)|}. \quad (12)
\end{aligned}
$$

При $k = 0$ розв'язком задачі (5), (6) є многочлен степеня $n-1$ (див. формулу (7)), який при $\mu \neq 1$ однозначно визначається для довільних функцій $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$, а при $\mu = 1$ – з точністю до довільної адитивної константи, для тих $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$, що задовольняють умову (10).

Теорема 2. *Нехай $\mu \neq 1$ і нехай для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконуються нерівності*

$$\left|1-\mu e^{i\|k\|\lambda_j(k)T}\right| \geq C_1|k|^{-s_1-\varepsilon}, \; j = 1, \ldots, n, \quad (13)$$

при

$$\frac{\ln|\mu| - \ln 2}{\|k\|T} \leq \operatorname{Im} \lambda_j(k) \leq \frac{\ln|\mu| + \ln 2}{\|k\|T}, \; j = 1, \ldots, n,$$

та нерівності

$$\prod_{l=1,l\neq j}^{n} |\lambda_j(k)-\lambda_l(k)| \geq C_2|k|^{-s_2-\varepsilon}, \quad (14)$$

$$|\det B(k)| \geq C_3|k|^{-s_3-\varepsilon}, \quad (15)$$

де $0 < \varepsilon < 1/3$; C_j, – додатні константи, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, 2, 3$. Якщо $\varphi_j \in H_\psi(\Omega_{2\pi}^p)$, $j = 1, \ldots, n$, де $\psi = q + (n-2)(n-1)/2 + s_1 + s_2 + s_3 + 1$, то існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) з простору $H_q^n(D^p)$, який неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$.

Д о в е д е н н я. На основі оцінок (12)–(15) одержуємо, що при

$$\frac{\ln|\mu| - \ln 2}{\|k\|T} \leq \operatorname{Im} \lambda_j(k) \leq \frac{\ln|\mu| + \ln 2}{\|k\|T}, \; j = 1, \ldots, n,$$

$$|u_k(t)| \leq C\|k\|^{(n-2)(n-1)/2+s_1+s_2+s_3+3\varepsilon} \sum_{m=1}^{n} |\varphi_{mk}|, \quad (16)$$

а при $\operatorname{Im} \lambda_j(k) < \dfrac{\ln|\mu| - \ln 2}{\|k\|T}$ або $\operatorname{Im} \lambda_j(k) > \dfrac{\ln|\mu| + \ln 2}{\|k\|T}$

$$|u_k(t)| \leq C\|k\|^{(n-2)(n-1)/2+s_2+s_3+2\varepsilon} \sum_{m=1}^{n} |\varphi_{mk}|. \quad (17)$$

Із формули (4) та оцінок (16) і (17) одержуємо нерівність

$$\|u\|^2_{H_q^n(D^p)} \leq C \sum_{m=1}^{n} \|\varphi_m\|^2_{H_\psi(\Omega_{2\pi}^p)},$$

з якої й випливає необхідне твердження. ∎

Зауваження 2. Якщо $\mu = 1$, виконуються всі умови теореми 2 (за винятком $\mu \neq 1$), а також умова (10), то розв'язок задачі (1), (2) існує та визначається з точністю до адитивної константи.

Дослідимо можливість виконання нерівностей (13)–(15), розглядаючи їхні ліві частини як функції змінних $a_{\widehat{s}}$, $A^l_{\widehat{s}}$, μ, T.

З теореми 3.5 випливає, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^p$) векторів $y = \{a_{\underbrace{0,\ldots,0}_{j},n,0,\ldots,0} \; : \; j = 1, \ldots, p\}$, усіх (за винятком скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ і $s_2 \geq (n-1)p/2$ виконується нерівність (14).

Визначник $\det B(k)$ є поліномом щодо змінних $k_1, \ldots, k_p$ степеня не вище $(n-1)n/2$, а саме

$$\det B(k) = \sum_{|r| \leq (n-1)n/2} B_r k_1^{r_1} \ldots k_p^{r_p}, \quad (18)$$

де кожний з коефіцієнтів B_r є сумою добутків, складених з коефіцієнтів $A^l_{\widehat{s}}$ умов (2). Позначимо через β число всіх коефіцієнтів B_r в (18), тобто число всіх розв'язків нерівності $r_1 + \cdots + r_p \leq (n-1)n/2$ із $\mathbb{Z}_+^p$.

Теорема 3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^\beta$) векторів $\{B_r : |r| \leq n(n-1)/2\}$, усіх (за винятком скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, а також $s_3 \geq p$ виконується нерівність (15).*

Д о в е д е н н я. Зауважимо, що

$$|\det B(k)| \geq |\operatorname{Re} \det B(k)| \geq \{|\operatorname{Re} \det B(k)|\},$$

де $\{a\}$ – дробова частина числа a. Будемо розрізняти два випадки: вільний член полінома (18) $B_{0,\ldots,0} \neq 0$ та $B_{0,\ldots,0} = 0$. У першому випадку доведення аналогічне доведенню теореми 3.4. У другому при $n = 2$ доведення випливає з теореми 3.2, а при $n \geq 3$ – з теореми 3.3. ■

Розглянемо нерівність (13). Оцінюючи ліву частину цієї нерівності, одержуємо

$$|1 - \mu e^{i\|k\|\lambda_j(k)T}| \geq |\mu| e^{-\|k\|T \operatorname{Im} \lambda_j(k)} |\sin(\|k\|T \operatorname{Re} \lambda_j(k))| \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} |\sin(\|k\|T \operatorname{Re} \lambda_j(k) - m_k\pi)| \geq \frac{\|k\|T}{\pi} \left| \operatorname{Re} \lambda_j(k) - \frac{m_k \pi}{\|k\|T} \right|, \quad (19)$$

де $m_k \in \mathbb{Z}$ задовольняє нерівність $\big| \|k\| T \operatorname{Re} \lambda_j(k)/\pi - m_k \big| \leq 1/2$.

Теорема 4. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}$) чисел T, усіх (за винятком скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, а також $s_1 \geq p$ виконується нерівність (13).*

Доведення теореми випливає з (19) і леми 3.2.

Приклад. Розглянемо в області D^2 задачу

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial x_1}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_2}\Big) u = 0,$$

$$\Big(\beta \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial t}\Big)\Big|_{t=0} - \mu \Big(\beta \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial t}\Big)\Big|_{t=T} = \varphi_1(x),$$

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial t}\Big)\Big|_{t=0} - \mu \Big(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial t}\Big)\Big|_{t=T} = \varphi_2(x),$$

де α, β – ірраціональні додатні числа; $\mu \neq 1$, $|\mu| = 1$ – комплексне число, $x = (x_1, x_2)$.

Формальний розв'язок цієї задачі визначається формулою

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \Big\{ \frac{k_2(1+i)\varphi_{1k} - (ik_2 + \beta k_1)\varphi_{2k}}{i(k_2 - \alpha k_1)(\beta k_1 - k_2)(1 - \mu e^{i\alpha k_1 T})} e^{i\alpha k_1 t} +$$

$$+ \frac{-(k_2 + i\alpha k_1)\varphi_{1k} + k_1(\beta + i\alpha)\varphi_{2k}}{i(k_2 - \alpha k_1)(\beta k_1 - k_2)(1 - \mu e^{ik_2 T})} e^{ik_2 t} \Big\} e^{i(k,x)}.$$

Множники, що містяться в знаменниках, дійсно малі, оскільки нерівності $|k_2 - \alpha k_1| < \|k\|^{-1}$, $|\beta k_1 - k_2| < \|k\|^{-1}$, $\big|1 - \mu e^{i\alpha k_1 T}\big| < |k_1|^{-1}$, $\big|1 - \mu e^{ik_2 T}\big| < |k_2|^{-1}$ для всіх розглядуваних α, β, μ, T виконуються нескінченне число разів. Проте вони оцінюються знизу величинами $C\|k\|^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, для майже всіх чисел α, β, μ, T. Отже, якщо

функції $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2$, достатньо гладкі, то існує розв'язок задачі з простору $H_q^n(D^2)$.

Зауваження 3. Результати даного пункту поширюються на випадок більш загальних нелокальних умов, а саме:

$$\sum_{|\widehat{s}| \leq n-1} A^l_{\widehat{s}} \frac{\partial^{q_{s_0} + s_1 + \ldots + s_p} u(t,x)}{\partial t^{q_{s_0}} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} \Big|_{t=0} -$$

$$-\mu \sum_{|\widehat{s}| \leq n-1} A^l_{\widehat{s}} \frac{\partial^{q_{s_0} + s_1 + \ldots + s_p} u(t,x)}{\partial t^{q_{s_0}} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} \Big|_{t=T} = \varphi_l(x), \; l = 1, \ldots, n, \quad (20)$$

де цілі числа q_j задовольняють нерівності $0 \leq q_1 < \ldots < q_n$, $q_n \geq n$.

Наступна лема дає можливість ефективно обчислювати визначники типу Вандермонда, що виникають при дослідженні задачі (1), (20).

Лема 1. *Нехай $y_1, \ldots, y_l$ – комплексні числа; тоді, позначаючи через S_m суму всіх можливих добутків чисел $y_1, \ldots, y_l$, узятих в кількості m штук, для кожного цілого числа $\alpha \geq l$ одержимо*

$$y_j^\alpha = \sum_{m=1}^{l} (-1)^{m+1} S_m y_j^{\alpha - m}, \; j = 1, \ldots, l. \quad (21)$$

Через $S_l(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$, де $0 \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_l$ і $\alpha_l \geq l$ – цілі числа, позначимо визначник матриці, утвореної з матриці

$$\begin{pmatrix} S_l & S_{l-1} & \ldots & S_1 & 1 & & & \\ & S_l & S_{l-1} & \ldots & S_1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & S_l & S_{l-1} & \ldots & S_1 & 1 \end{pmatrix}$$

розміру $(\alpha_l - l + 1) \times (\alpha_l + 1)$ викреслюванням стовпців з номерами $\alpha_1 + 1, \ldots, \alpha_l + 1$. Тоді справедлива рівність

$$\begin{vmatrix} y_1^{\alpha_1} & y_2^{\alpha_1} & \ldots & y_l^{\alpha_1} \\ y_1^{\alpha_2} & y_2^{\alpha_2} & \ldots & y_l^{\alpha_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{\alpha_l} & y_2^{\alpha_l} & \ldots & y_l^{\alpha_l} \end{vmatrix} = S_l(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_l \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{l-1} & y_2^{l-1} & \ldots & y_l^{l-1} \end{vmatrix}.$$

Лема доводиться безпосередніми підрахунками з допомогою підстановки (21) в ліву частину останньої рівності (див. 15.4).

Звідси для коефіцієнтів Фур'є розв'язку задачі (1), (20) одержимо формули

$$u_k(t) = \sum_{m,j,\alpha=1}^{n} \frac{\beta_{\alpha m}}{\det B(k)} \frac{S^j_{n-1}(q_1, \ldots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \ldots, q_n)}{S_n(q_1, \ldots, q_n)} \times$$

$$\times \frac{e^{i\|k\|\lambda_j t}\varphi_{mk}}{(i\|k\|)^{q_\alpha}\left(1-\mu e^{i\|k\|\lambda_j T}\right)\prod\limits_{\beta=1,\beta\neq 1}^{n}(\lambda_j-\lambda_\beta)},$$

де вирази $S_l(\alpha_1,\ldots,\alpha_l)$ визначені в лемі 1, причому в $S_n(q_1,\ldots,q_n)$ вважаємо, що $y_\beta=\lambda_\beta(k)$, $\beta=1,\ldots,n$; і $y_\beta=\lambda_\beta(k)$, $\beta=1,\ldots,j-1$, $y_\beta=\lambda_{\beta+1}(k)$, $\beta=j,\ldots,n-1$, у виразі $S^j_{n-1}(q_1,\ldots,q_{\alpha-1},q_{\alpha+1},\ldots,q_n)$.

Теорема 5. *Для єдиності (з точністю до полінома $n-1$-го степеня за змінною t) розв'язку задачі (1), (20) необхідно і достатньо, щоб виконувались умови теореми 1 і нерівність $S_n(q_1,\ldots,q_n)\neq$ $\neq 0$ для всіх $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}$.*

Теорема 6. *Нехай для всіх (за винятком скінченного числа) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ виконуються нерівності (13)–(15) і нерівність*

$$|S_n(q_1,\ldots,q_n)|\geq C_4\|k\|^{-s_4}. \tag{22}$$

Якщо $\varphi_l\in H_\psi(\Omega^p_{2\pi})$, де $\psi=q+(n-1)(n-2)/2-q_1+s_1+s_2+s_3+s_4+1$, і сумісна система n лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1}A^l_{\alpha,0,\ldots,0}\,\frac{d^\alpha P(t)}{dt^\alpha}\Big|_{t=0}-\mu\sum_{\alpha=0}^{n-1}A^l_{\alpha,0,\ldots,0}\frac{d^\alpha P(t)}{dt^\alpha}\Big|_{t=T}=\varphi_{l0}$$

щодо коефіцієнтів полінома ($n-1$-го степеня) $P(t)$, то існує розв'язок задачі (1), (20) з простору $H^n_q(D^p)$.

Теореми 5 і 6 доводяться аналогічно до теорем 1 і 2.

Враховуючи, що $S_n(q_1,\ldots,q_n)$ – поліном змінних $a_{\widehat{s}}$, $|\widehat{s}|=n$, і виконується нерівність

$$\left|\frac{\partial^w S_n(q_1,\ldots,q_n)}{\partial a_{\widehat{s}_1}\ldots\partial a_{\widehat{s}_w}}\right|\geq \mathrm{const}\,\|k\|^{-r},\ \ r=n(n-1)/2-\sum_{l=1}^{n}q_l,$$

де $w\leq q_n-n+1$, то згідно з лемами 3.5 та 3.1 одержимо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів $\{a_{\widehat{s}}:|\widehat{s}|=n\}$ виконується нерівність (22) при $s_4>pw+r$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$.

11.2. Рівняння з молодшими членами

Розглянемо в області D^p задачу [71]

$$A\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)u\equiv\sum_{|\widehat{s}|\leq n}A_{\widehat{s}}\frac{\partial^{|\widehat{s}|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}=0, \tag{23}$$

$$B\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(t,x)\Big|_{t=0}-C\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(t,x)\Big|_{t=T}=\varphi(x), \tag{24}$$

де

$$B\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)=\sum_{|\widehat{s}|\leq n-1}b_{\widehat{s}}\frac{\partial^{|\widehat{s}|}}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}};$$

$$C\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)=\sum_{|\widehat{s}|\leq n-1}c_{\widehat{s}}\frac{\partial^{|\widehat{s}|}}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}};$$

$b_{\widehat{s}}=\mathrm{col}\,(b^1_{\widehat{s}},\ldots,b^n_{\widehat{s}})$; $c_{\widehat{s}}=\mathrm{col}\,(c^1_{\widehat{s}},\ldots,c^n_{\widehat{s}})$; $\varphi(x)=\mathrm{col}\,(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))$; $A_{\widehat{s}}$, $b^j_{\widehat{s}}$, $c^j_{\widehat{s}}$ – комплексні числа.

Розв'язок задачі (23), (24) шукаємо у вигляді ряду (4). При цьому кожна з функцій $u_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, є розв'язком такої задачі:

$$A\Big(\frac{d}{dt},ik\Big)u_k(t)=0, \tag{25}$$

$$B\Big(\frac{d}{dt},ik\Big)u_k(t)\Big|_{t=0}-C\Big(\frac{d}{dt},ik\Big)u_k(t)\Big|_{t=T}=\varphi_k, \tag{26}$$

де φ_k – коефіцієнти Фур'є вектор-функції $\varphi(x)$.

Нехай $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_{q(k)}(k)$ – корені рівняння

$$A(\lambda,ik)=0 \tag{27}$$

кратностей $M_1(k),\ldots,M_{q(k)}(k)$ відповідно, $M_1(k)+\ldots+M_{q(k)}(k)=n$,

$$B^{(\alpha)}(\lambda_m(k),ik)=(d/d\lambda)^\alpha B(\lambda,ik)|_{\lambda=\lambda_m(k)},$$

$$C^{(\alpha)}(\lambda_m(k),ik)=(d/d\lambda)^\alpha C(\lambda,ik)|_{\lambda=\lambda_m(k)},$$

тоді справедливе твердження.

Теорема 7. *Для єдиності розв'язку задачі (23), (24) в просторі $H^n_q(D^p)$, $q\in\mathbb{Z}$, необхідно і достатньо, щоб для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ виконувалась умова*

$$\det\Delta(k)\ \equiv\ \det\Big\{B^{(\varkappa_m)}(\lambda_m(k),ik)-e^{\lambda_m(k)T}\sum_{\alpha=0}^{\varkappa_m}C^\alpha_{\varkappa_m}T^{\varkappa_m-\alpha}\times$$
$$\times\ \ C^{(\alpha)}(\lambda_m(k),ik)\Big\}\neq 0, \tag{28}$$

де $m=1,\ldots,q(k)$, $\varkappa_m=0,1,\ldots,M_m(k)-1$, C^b_a – біноміальні коефіцієнти.

Д о в е д е н н я. Для єдиності розв'язку задачі (23), (24) у просторі $H^n_q(D^p)$ необхідно і достатньо, щоб для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ задача (25), (26) мала тільки тривіальний розв'язок при $\varphi_k=0$.

Загальний розв'язок рівняння (25) має вигляд

$$u_k(t)=\sum_{m=1}^{q(k)}\sum_{\varkappa_m=0}^{M_m(k)-1}u_{k,m,\varkappa_m}t^{\varkappa_m}e^{\lambda_m(k)t}. \tag{29}$$

Підставляючи (29) в умови (26) (при $\varphi_k=0$), одержуємо однорідну систему лінійних алгебричних рівнянь щодо коефіцієнтів $u_{k,m,\varkappa_m}$, яка має єдиний (тривіальний) розв'язок тоді і тільки тоді, коли її матриця $\Delta(k)$ неособлива. Отже, умови (28) є необхідними і достатніми для того, щоб $\|u(t,x)\|_{H_q^n(D^p)}=0$, де $u(t,x)$ – розв'язок задачі (23), (24) при $\varphi(x)=0$. Теорему доведено. ■

Розглянемо питання про існування розв'язку задачі (23), (24). Нехай для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ виконується умова (28). Тоді для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ існує єдиний розв'язок задачі (25), (26), що зображається формулою

$$u_k(t)=\sum_{m=1}^{q(k)}\sum_{\varkappa_m=1}^{M_m(k)}\frac{\det\Delta_{m,\varkappa_m}(k)}{\det\Delta(k)}t^{\varkappa_m-1}e^{\lambda_m(k)t}, \tag{30}$$

де $\det\Delta_{m,\varkappa_m}(k)$ – матриця, яка одержана з матриці $\Delta(k)$ заміною стовпця з номером $\sum\limits_{\alpha=1}^{m-1}M_\alpha(k)+\varkappa_m$ на стовпець φ_k.

Зауважимо, що ряд (4), де функції $u_k(t)$ визначаються формулами (30), взагалі кажучи, розбігається, оскільки вираз $|\det\Delta(k)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної множини векторів $k\in\mathbb{Z}^p$. Крім того, вирази $\left|e^{\lambda_m(k)t}\right|$ можуть набувати нескінченно великих значень, якщо $\operatorname{Re}\lambda_m(k)$ не є рівномірно обмеженими зверху.

Припустимо, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in\in\mathbb{Z}^p$ виконуються нерівності

$$\operatorname{Re}\lambda_m(k)\le r_1\ln|k|,\ m=1,\dots,q(k), \tag{31}$$

або нерівності

$$\operatorname{Re}\lambda_m(k)\ge -r_1\ln|k|,\ m=1,\dots,q(k), \tag{32}$$

де r_1 – додатна константа. Тоді справедливе таке твердження.

Теорема 8. *Нехай існують такі дійсні числа r_2, r_3, $C_1>0$, $C_2>0$, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ виконується умова*

$$|\det\Delta(k)|>C_1|k|^{-r_2}, \tag{33}$$

коли справджуються нерівності (31), і умова

$$\left|\det\Delta(k)\exp\Big(-T\sum_{m=1}^{q(k)}M_m(k)\lambda_m(k)\Big)\right|>C_2|k|^{-r_3}, \tag{34}$$

коли справджуються нерівності (32). Якщо $\varphi_m\in H_\beta(\Omega_{2\pi}^p)$, $m=1,\dots,n$, де $\beta=q+(n-1)n+1+[r_1T\max\limits_k(M',M'')+\max(r_2,r_3)]$, $[Q]$ – ціла частина числа $Q\in\mathbb{R}$, $M'=\sum\limits_{\operatorname{Re}\lambda_m(k)>0}M_m(k)$, $M''=n-M'$, то, за виконання умов єдиності, розв'язок задачі (23), (24) з простору $H_q^n(D^p)$ існує і неперервно залежить від правої частини крайових умов $\varphi(x)$.

Д о в е д е н н я. На основі формул (4), (30), нерівностей (31)–(34) та оцінок $|\lambda_m(k)|=O(\|k\|)$, $m=1,\dots,q(k)$, і

$$|\det\Delta_{m,\varkappa_m}(k)|=O\Big(\exp\Big(T\sum_{\alpha=1,\alpha\ne m}^{q(k)}M_\alpha(k)\operatorname{Re}\lambda_\alpha(k)\Big)\times$$

$$\times\|k\|^{n(n-1)}\sum_{\alpha=1}^{n}|\varphi_{\alpha k}|\Big),\ m=1,\dots,q(k),\varkappa_m=1,\dots,M_m(k),$$

при $\|k\|\to\infty$, одержуємо таку оцінку норми шуканого розв'язку $u(t,x)$ задачі (23), (24):

$$\|u(t,x)\|_{H_q^n(D^p)}\le C_3\sum_{\alpha=1}^{n}\|\varphi_\alpha\|_{H_\beta(\Omega_{2\pi}^p)},\quad C_3>0,$$

звідки випливає твердження теореми. ■

Дослідимо (не втрачаючи загальності) можливість виконання нерівностей (33), (34) у випадку, коли для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ всі корені рівняння (27) прості, тобто коли для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ $q(k)=n$.

Нехай $a=(a_1,\dots,a_{p(2n-1)+2})$, де $a_j=\operatorname{Re}A_{\underbrace{0,\dots,0}_{j},n,0,\dots,0}$,

$$a_{np+1}=\operatorname{Re}b^n_{n-1,0,\dots,0},\qquad a_{p(2n-1)+2}=\operatorname{Re}c^n_{n-1,0,\dots,0},$$

$$a_{p+(n-1)(j-1)+q}=\operatorname{Re}b^q_{q-1,\underbrace{0,\dots,0}_{j},n-q,0,\dots,0},$$

$$a_{np+1+(n-1)(j-1)+q}=\operatorname{Re}c^q_{q-1,\underbrace{0,\dots,0}_{j},n-q,0,\dots,0},$$

і при $j=1,\dots,p$, $q=1,\dots,n-1$

$$\sigma_{1,j}=\partial^n/\partial a_{p+(n-1)(j-1)+1}\dots\partial a_{p+(n-1)j}\partial a_{np+1},$$
$$\sigma_{2,j}=\partial^n/\partial a_{np+(n-1)(j-1)+2}\dots\partial a_{np+(n-1)j+1}\partial a_{(2n-1)p+2}.$$

Тоді добуток $D(k) = \prod\limits_{n\geq\alpha>\beta\geq 1}[\lambda_\alpha(k)-\lambda_\beta(k)]^2$ є поліномом щодо змінних $a_1,\ldots,a_p$; причому для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$, $|k_j|\geq|k_\alpha|$, $\alpha = 1,\ldots,p$,

$$\left|\frac{\partial^{n-1}D(k)}{\partial a_j^{n-1}}\right| \geq |k|^{n(n-1)}. \tag{35}$$

Із нерівності (35) і лем 3.5 та 3.1 випливає, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^p$) векторів $(a_1,\ldots,a_p)$ справедлива оцінка

$$|D(k)|\geq C_5|k|^{(n-p)(n-1)-\varepsilon},\ 0<\varepsilon<1. \tag{36}$$

За умов (31) справедливі нерівності

$$|\sigma_{1,j}\det\Delta(k)|\geq C_6|k|^{n(n-1)/2}, \tag{37}$$

а за умов (32) – нерівності

$$|\sigma_{2,j}\det\Delta(k)|\geq C_7|k|^{n(n-1)/2}\exp\Big(T\sum_{m=1}^{n}\operatorname{Re}\lambda_m(k)\Big) \tag{38}$$

для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$, таких, що $|k_j|\geq|k_\alpha|$, $\alpha=1,\ldots,p$. На основі нерівностей (36)–(38) і лем 3.5 та 3.1 одержуємо твердження.

Теорема 9. *Для майже всіх (у сенсі міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{(2n-1)p+2}$) векторів a нерівності (33), (34) виконуються при $r_2, r_3\geq(3n-1)p/2-n(n-1)$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$.*

11.3. Рівняння з правою частиною

11.3.1. Побудова і дослідження розв'язку з використанням методу власних функцій. Розглядається задача знаходження в області D^p розв'язку рівняння [72]

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)u\equiv\sum_{|\hat{s}|\leq N,s_0\leq n}a_{\hat{s}}\frac{\partial^{|\hat{s}|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}=f(t,x), \tag{39}$$

який задовольняє умови

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big|_{t=0}-\mu\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big|_{t=T}=0,\ j=0,1,\ldots,n-1, \tag{40}$$

де $a_{|\hat{s}|}$, μ, $\mu\neq0$ – комплексні числа.

Розглянемо спочатку задачу на власні значення для оператора, породженого диференціальним виразом $L(\partial/\partial t,\partial/\partial x)$ і крайовими умовами (40). Маємо рівняння

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)u=\lambda u. \tag{41}$$

Розв'язком задачі на власні значення називаємо функцію $u\in H_q^r(D^p)$, $r\geq n$, $u\neq0$, яка задовольняє умови

$$\Big\|L\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)u-\lambda u\Big\|_{H^{r-n}_{q-N}(D^p)}=0,$$

$$\Big\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big|_{t=0}-\mu\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big|_{t=T}\Big\|_{H_{q-j}(\Omega^p_{2\pi})}=0,\ j=0,1,\ldots,n-1.$$

Через $R_{k,m}$, $(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}$, позначимо множину всіх розв'язків у цілих числах m^*, $k^*=(k_1^*,\ldots,k_p^*)$ рівняння

$$L(\tau(m^*),ik^*)=L(\tau(m),ik),$$

де $\tau(m)=-(\ln\mu)/T+i2\pi m/T$, $\ln\mu$ – головне значення логарифма.

Теорема 10. *1. Власні значення задачі (41), (40) – числа*

$$\lambda_{k,m}=L(\tau(m),ik),\ (k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}. \tag{42}$$

2. Власні функції, що відповідають власному значенню $\lambda_{k,m}$, суть

$$u_{k^*,m^*}=e^{\tau(m^*)t+ik^*x},\ (k^*,m^*)\in R_{k,m}. \tag{43}$$

3. Множина функцій $e^{\tau(m)t+i(k,x)}$, $(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}$, утворює базу Рісса в просторі $L_2(D^p)$.

Д о в е д е н н я. Д о с т а т н і с т ь тверджень 1 і 2 очевидна – перевіряється безпосередньою підстановкою.

Н е о б х і д н і с т ь. 1. Припустимо, що $\bar\lambda$ – власне значення задачі (40), (41), що не збігається з жодним із $\lambda_{k,m}$ (формула (42)), $\bar u$ – власна функція, що відповідає цьому значенню. Загальний розв'язок рівняння (41) при $\lambda=\bar\lambda$ зображається формулою

$$u(t,x)=\sum_{k\in Q}\sum_{j=1}^{q(k)}\sum_{\varkappa_j=0}^{M_j(k)-1}u_{k,j,\varkappa_j}t^{\varkappa_j}e^{y_j(k,\bar\lambda)t+i(k,x)}, \tag{44}$$

де $y_j(k,\bar\lambda)$, $j=1,\ldots,q(k)$, – корені рівняння

$$L(y,ik)=\bar\lambda \tag{45}$$

кратностей $M_j(k)$ відповідно; $Q=\{k\in\mathbb{Z}^p: n(k)\geq1\}$, $n(k)$ – степінь полінома $L(y,ik)$ за змінною y. Для визначення невідомих констант $u_{k,j,\varkappa_j}$ підставимо (44) в умови (40). Для кожного вектора $k\in Q$ одержимо систему n лінійних однорідних алгебричних рівнянь щодо $n(k)$ невідомих $u_{k,j,\varkappa_j}$, яка має тривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли ранг її матриці $\delta(k)$ дорівнює $n(k)$.

Ранг матриці $\delta(k)$ дорівнює $n(k)$ тоді і тільки тоді, коли

$$1-\mu e^{y_j(k,\bar\lambda)T}\neq0,\ j=1,\ldots,q(k), \tag{46}$$

оскільки кожний мінор порядку $n(k)$ матриці $\delta(k)$ є добутком

$$\prod_{j=1}^{q(k)} \left(1 - \mu e^{y_j(k,\bar{\lambda})T}\right)^{M_j(k)} \sigma(k),$$

де $\sigma(k) \neq 0$ хоча б для одного мінора.

Покажемо, що умови (46) виконуються для всіх $k \in Q$. Дійсно, припустивши, що $1 = \mu e^{y_\gamma(k^0,\bar{\lambda})T}$ для деякого вектора $k^0 \in Q$ і цілого γ, $1 \leq \gamma \leq q(k^0)$, одержимо, що існує ціле число m^0, таке, що $y_\gamma(k^0, \bar{\lambda}) = \tau(m^0)$. Оскільки $y_\gamma(k^0, \bar{\lambda})$ – корінь рівняння (45) при $k = k^0$, то $\bar{\lambda} = \lambda_{k^0,m^0} = L(\tau(m^0), ik^0)$, що суперечить припущенню щодо $\bar{\lambda}$.

Отже, для кожного $k \in Q$ константи $\bar{u}_{k,j,\varkappa_j}$, $j = 1, \ldots, q(k)$, $\varkappa_j = 0, 1, \ldots, M_j(k) - 1$, що відповідають розв'язку $\bar{u}(t, x)$, дорівнюють нулю; тоді згідно з формулою (44) $\bar{u}(t, x) = 0$, тобто $\bar{\lambda}$ не є власним значенням задачі (40), (41), що і треба було довести.

2. Нехай $\bar{\lambda} = \lambda_{k,m}$, тоді рівняння (45) при $k = k^*$ має корені $y_j(k^*, \lambda) = \tau(m_j)$, $j = 1, \ldots, l(k^*)$, $1 \leq l(k^*) \leq n(k^*)$, де $(k^*, m_j) \in R_{k,m}$, $j = 1, \ldots, l(k^*)$. Отже, стовпці матриці $\delta(k^*)$, що відповідають невідомим $u_{k^*,j,0}$, будуть нульовими. Таким чином, система алгебричних рівнянь для визначення констант $u_{k,j,\varkappa_j}$ з (44) у даному випадку зводиться до системи n лінійних однорідних алгебричних рівнянь щодо $n(k^*) - l(k^*)$ змінних $u_{k^*,j,\varkappa_j}$, $\varkappa_j \neq 0$, ранг якої дорівнює $n(k^*) - l(k^*)$. Ця система має лише тривіальний розв'язок. Тому довільний розв'язок задачі (40), (41) при $\lambda = \lambda_{k,m}$ зображається у вигляді

$$u = \sum_{(k^*,m_j)\in R_{k,m},\ j=1,\ldots,l(k^*)} C_{k^*,j}\, e^{\tau(m_j)t + ik^*x},$$

де $C_{k^*,j}$ – довільні константи.

Твердження 3 теореми випливає з того, що функції $e^{\tau(m)t+i(k,x)}$ відрізняються від періодичних функцій $e^{i2\pi mt/T+i(k,x)}$, що утворюють базу Рісса в $L_2(D^p)$, обмеженим (зверху і знизу) множником. Теорему доведено. ■

Зауваження 4. Якщо вектор $\bar{k} \in \mathbb{Z}^p$, такий, що $n(\bar{k}) = 0$, то власне значення $\lambda_{\bar{k},0}$ має нескінченну (зліченну) кратність; цьому власному значенню відповідає множина функцій $\left\{e^{\tau(m)t+i\bar{k}x} : m\in\mathbb{Z}\right\}$.

Повернемось до вихідної задачі (39), (40), розв'язок якої будемо шукати в гільбертовому просторі $H_{q,r}(D^p)$, $q, r \in \mathbb{R}$, функцій

$$h(t, x) = \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} h_{k,m} e^{\tau(m)t+i(k,x)} \tag{47}$$

зі скалярним добутком, який індукує норму

$$||h||^2_{H_{q,r}(D^p)} = (2\pi)^p T \sum_{j_1+j_2=n} \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} (1 + ||k||^2)^{q+j_1} \times$$
$$\times (1 + m^2)^{r+j_2} |h_{k,m}|^2 < \infty.$$

Теорема 11. *Для єдиності розв'язку задачі (39), (40) в просторі $H_{q,r}(D^p)$ необхідно і достатньо, щоб для всіх векторів $(k, m) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ виконувалася умова*

$$L(\tau(m), ik) \neq 0. \tag{48}$$

Доведення теореми випливає з того, що кожний член ряду (47) задовольняє умови (40).

Нехай виконуються умови (48), а функція f належить $H_{q_1,r_1}(D^p)$, причому

$$f(t, x) = \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} f_{k,m} e^{\tau(m)t+i(k,x)}.$$

Тоді розв'язок задачі (39), (40) формально зображається у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} \frac{f_{k,m}}{\lambda_{k,m}} e^{\tau(m)t+i(k,x)}. \tag{49}$$

Для доведення існування розв'язку задачі (39), (40) достатньо показати збіжність ряду (49) у нормі простору $H_{q,r}(D^p)$. Для цього необхідно оцінити знизу вирази $|\lambda_{k,m}|$, які, будучи відмінними від нуля, можуть як завгодно близько наближатися до нього.

Теорема 12. *Нехай виконуються умови єдиності розв'язку (48) та існують дійсні числа $C > 0$, α, β, такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $(k, m) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ виконується нерівність*

$$|\lambda_{k,m}| \geq C(1 + ||k||^2)^\alpha (1 + m^2)^\beta. \tag{50}$$

Якщо $f \in H_{q-2\alpha,r-2\beta}(D^p)$, то існує розв'язок задачі (39), (40) з простору $H_{q,r}(D^p)$, який зображається рядом (49) і неперервно залежить від функції $f(t, x)$.

Д о в е д е н н я. Дійсно, використовуючи формулу (49) і нерівність (50), одержуємо оцінку

$$||u||_{H_{q,r}(D^p)} \leq C_1 ||f||_{H_{q-2\alpha,r-2\beta}(D^p)},$$

з якої випливає сформульоване твердження. ■

Зауваження 5. Якщо для деякого вектора $(k, m) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ справедлива рівність $L(\tau(m), ik) = 0$, то для існування розв'язку задачі

(39), (40) необхідно, щоб $f_{k^*,m^*} = 0$, де $(k^*, m^*) \in R_{k,m}$. У цьому випадку розв'язок задачі (39), (40) визначається з точністю до лінійної оболонки розв'язків задачі (39), (40) (при $f(t,x) \equiv 0$).

Дослідимо можливість виконання оцінки (50). Позначимо через y число $\mathrm{Re}\, a_{0,\ldots,0}$ і будемо розглядати $\lambda_{k,m}$ як функцію аргумента y.

Теорема 13. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега) чисел y нерівність (50) виконується при $\alpha < -p/2$, $\beta < -1/2$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $(k,m) \in \mathbb{Z}^{p+1}$.*

Д о в е д е н н я. Позначимо через A множину тих чисел y, при яких виконується протилежна нерівність

$$|\lambda_{k,m}| < (1 + \|k\|^2)^\alpha (1 + m^2)^\beta \tag{51}$$

для нескінченної множини векторів $(k,m) \in \mathbb{Z}^{p+1}$, а через $A_{k,m}$ – множину чисел y, для яких нерівність (51) виконується при фіксованому векторі (k,m). Враховуючи, що $|d\lambda_{k,m}/dy| \geq 1$ на основі леми 3.4 одержуємо оцінку

$$\mathrm{mes}\, A_{k,m} < C_2(1 + \|k\|^2)^\alpha (1 + m^2)^\beta. \tag{52}$$

Із (52) випливає, що ряд $\sum\limits_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} \mathrm{mes}\, A_{k,m}$ збігається при $\alpha < -p/2$ і $\beta < -1/2$. Тоді за лемою 3.1 $\mathrm{mes}\, A = 0$, що і треба було довести. ■

Оцінку знизу для $|\lambda_{k,m}|$ можна покращити, розглядаючи $\lambda_{k,m}$ як функцію багатьох змінних. Нехай $b = (b_1, \ldots, b_l)$ – вектор, складений з дійсних частин коефіцієнтів рівняння (39), де l – число всіх коефіцієнтів цього рівняння.

Теорема 14. *Якщо виконуються умови $\|k\| \geq |m|$, $\alpha < (N-p)/2$, $\beta < -1/2$ або умови $\|k\| < |m|$, $\alpha < (N-n-p)/2$, $\beta < (n-1)/2$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^l$) векторів b справджується нерівність (50) для всіх (крім скінченного числа) векторів $(k,m) \in \mathbb{Z}^{p+1}$.*

Доведення базується на лемі 3.5 і проводиться за схемою доведення теореми 13.

Дослідимо виконання оцінки (50) відносно параметрів μ і T. Нехай рівняння (39) таке, що для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується нерівність

$$\Big| \sum_{|\widehat{s}| \leq N} a_{n,s}(ik_1)^{s_1} \ldots (ik_p)^{s_p} \Big| \geq C_3(1 + \|k\|^2)^{\alpha_1},$$

де $C_3 > 0$ – константа, що не залежить від k. Тоді справедливі теореми, доведення яких аналогічні доведенню теореми 13.

Теорема 15. *Якщо виконуються умови $\alpha < \alpha_1 - np/2$, $\beta < -n/2$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега) чисел $|\mu|$ справджується нерівність (50) для всіх (крім скінченного числа) векторів $(k,m) \in \mathbb{Z}^{p+1}$.*

Теорема 16. *Нехай $\mu \neq 1$ і виконуються нерівності $\alpha < \alpha_1 - np/2$, $\beta < 0$. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега) чисел T справджується нерівність (50) для всіх (крім скінченного числа) векторів $(k,m) \in \mathbb{Z}^{p+1}$.*

11.3.2. Зображення розв'язку задачі з допомогою функцій Гріна. В області D^p розглянемо задачу (39), (40), припустивши, що $N = n$, f – довільна функція з простору $H^0_{q_1}(D^p)$, а число $q_1 \in \mathbb{R}$ буде визначено нижче. Розв'язок шукатимемо в просторі $H^n_q(D^p)$, а значить, у вигляді

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t) e^{i(k,x)}, \tag{53}$$

коефіцієнти $u_k(t)$ при цьому визначаються як розв'язки нелокальних двоточкових задач

$$L\Big(\frac{d}{dt}, ik\Big) u_k(t) = f_k(t), \tag{54}$$

$$\frac{d^j u_k}{dt^j}\Big|_{t=0} - \mu \frac{d^j u_k}{dt^j}\Big|_{t=T} = 0, \ j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{55}$$

де $f_k(t)$ – коефіцієнти Фур'є функції $f(t,x)$.

Функції $u_k(t)$ зображаємо за допомогою функцій Гріна $G_k(t,\tau)$, що мають вигляд, поданий формулами (2.6) і (2.7).

Нехай $\lambda_j = \lambda_j(k)$, $j = 1, \ldots, n$, – корені рівняння $L(\lambda, ik) = 0$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Припускаємо, що всі вони різні, тобто для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ $\lambda_j(k) \neq \lambda_\alpha(k)$. Це обмеження не принципове (див. теорему 3.5).

Тоді формула (2.6) для задачі (54), (55) набуде вигляду

$$G_k(t,\tau) = g_k(t,\tau) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1 + \mu e^{\lambda_\alpha T}}{1 - \mu e^{\lambda_\alpha T}} \frac{e^{\lambda_\alpha(t-\tau)}}{\prod\limits_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{n} (\lambda_\alpha - \lambda_\beta)}, \tag{56}$$

де

$$g_k(t,\tau) = \frac{\mathrm{sgn}\,(t-\tau)}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{e^{\lambda_\alpha(t-\tau)}}{\prod\limits_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{n} (\lambda_\alpha - \lambda_\beta)}. \tag{57}$$

Функція Гріна $G_k(t,\tau)$ існує тоді і тільки тоді, коли для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ число $1 - \mu e^{\lambda_\alpha(k)T} \neq 0$, $\alpha = 1, \ldots, n$, або $L(\tau(m), ik) \neq 0$, де $\tau(m) =$

$= (-\ln\mu + i2\pi m)/T$. Припустимо, що останні умови виконуються; тоді

$$u_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau. \tag{58}$$

Для доведення існування розв'язку задачі (39), (40) достатньо оцінити зверху функції $\partial^j G_k(t,\tau)/\partial t^j$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Перепишемо формулу (56) у вигляді

$$G_k(t,\tau) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\exp[(\lambda_j T + \ln\mu - \operatorname{sgn}(t-\tau)(\lambda_j T + \ln\mu))/2]}{(1-\mu e^{\lambda_j T}) \prod\limits_{\beta=1,\beta\neq j}^{n} (\lambda_j - \lambda_\beta)}. \tag{59}$$

Із теорем 3.5 і 4 випливає, що для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів $\{a_{\widehat{s}}, \mu, T\}$ і для достатньо великих $\|k\|$ виконуються нерівності

$$\left|\frac{\partial^\alpha G_k(t,\tau)}{\partial t^\alpha}\right| \le \text{const}\, \|k\|^{\sigma+\alpha},$$

де $\sigma \ge (p(n+1) - 2(n-1))/2$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n-1$.

Тоді

$$\left|u_k^{(\alpha)}(t)\right| \le C\|k\|^{\sigma+\alpha}\left|\int_0^T f_k(t)\, dt\right|, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{60}$$

Із рівняння (39) та оцінок (60) одержимо

$$\left|u_k^{(n)}(t)\right| \le \text{const} \sum_{j=1}^{n-1} \|k\|^{n-j} \left|u_k^{(j)}(t)\right| + |f_k(t)| \le$$

$$\le \text{const}\, \|k\|^{\sigma+n}\left|\int_0^T f_k(t)\, dt\right| + |f_k(t)|\,. \tag{61}$$

Теорема 17. *Нехай існують функції Гріна $G_k(t,\tau)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ і $f \in H^0_{q+\sigma}(D^p)$, $\sigma > (p(n+1) - 2(n-1))/2$. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів $\{a_{\widehat{s}}, \mu, T : |\widehat{s}| \le n\}$ існує розв'язок задачі (39), (40) з простору $H^n_q(D^p)$, який неперервно залежить від функції $f(t,x)$.*

Д о в е д е н н я. Із (60), (61) випливає оцінка

$$\|u\|_{H^n_q(D^p)} \le \text{const}\, \|f\|_{H^0_{q+\sigma}(D^p)},$$

що і доводить теорему. ∎

Використаємо тепер функцію Гріна для знаходження розв'язку рівняння (39), що задовольняє умови

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right|_{t=0} - \mu_{j+1}\left.\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right|_{t=T} = 0, \; j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{62}$$

де μ_j – деякі комплексні числа.

Зробивши заміну

$$u(t,x) = v(t,x) + \sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha(x) e^{\beta_\alpha t}, \tag{63}$$

переходимо до відшукання нової невідомої функції $v(t,x)$, що задовольняє нелокальні умови

$$\left.\frac{\partial^j v}{\partial t^j}\right|_{t=0} - \mu\left.\frac{\partial^j v}{\partial t^j}\right|_{t=T} = 0, \; j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{64}$$

де μ – комплексне число. Відзначимо, що константи $\beta_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha = 1, \ldots, n$, вибираються таким чином, що визначник матриці

$$\Delta = \left(\beta_\alpha^{j-1}(1 - \mu_j e^{\beta_\alpha T})\right)_{\alpha, j = 1,\ldots,n}$$

не дорівнює нулю.

При цьому $A_\alpha(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} (\mu - \mu_j) \Delta_{\alpha j} v^{(j-1)}(T,x)$, де $\Delta_{\alpha j}$ – елементи матриці Δ^{-1}. Для визначення $v(t,x)$ одержуємо задачу (64),

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(t,x) = \psi(t,x), \tag{65}$$

де $\psi(t,x) = -\sum\limits_{j=1}^{n} L(\beta_\alpha, \partial/\partial x) A_\alpha(x) e^{\beta_\alpha t} + f(t,x)$.

Рівняння (65) є навантаженим, оскільки його права частина містить значення шуканого розв'язку і його похідних у точці $t = T$.

Розв'язок задачі (65), (64) шукаємо у вигляді ряду

$$v(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} v_k(t) e^{i(k,x)}. \tag{66}$$

Для визначення функцій $v_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, одержимо задачу

$$L\left(\frac{d}{dt}, ik\right) v_k(t) = \psi_k(t),$$

$$\left.\frac{d^j v_k}{dt^j}\right|_{t=0} - \mu\left.\frac{d^j v_k}{dt^j}\right|_{t=T} = 0, \; j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

де

$$
\begin{aligned}
\psi_k(t) &= -\sum_{j=1}^{n} L(\beta_\alpha, ik) A_{\alpha k} e^{\beta_\alpha t} + f_k(t); \\
A_{\alpha k} &= \sum_{j=1}^{n} (\mu - \mu_j) \Delta_{\alpha j} v_k^{(j-1)}(T);
\end{aligned}
\tag{67}
$$

$f_k(t)$ – коефіцієнти Фур'є функції $f(t,x)$. Із результатів попереднього пункту випливає рівність

$$
v_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau)\psi_k(\tau)\,d\tau, \tag{68}
$$

диференціюючи яку за змінною t, одержимо

$$
v_k^{(\gamma)}(t) = \int_0^T \frac{\partial^\gamma G_k(t,\tau)}{\partial t^\gamma}\psi_k(\tau)\,d\tau, \ \gamma = 1, \ldots, n-1. \tag{69}
$$

Система функціонально-диференціальних рівнянь (68), (69) при $t = T$ перетворюється в систему n лінійних алгебричних рівнянь щодо n невідомих $v_k^{(\gamma)}(T)$, $\gamma = 1, \ldots, n-1$:

$$
v_k^{(\gamma)}(T) = -\sum_{j,\alpha,s=1}^{n} (\mu - \mu_s)\Delta_{\alpha s} L(\beta_\alpha, ik) \frac{\lambda_j^\gamma (e^{\beta_\alpha T} - e^{\lambda_j T})}{(\beta_\alpha - \lambda_j)(1 - \mu e^{\lambda_j T})} \times
$$
$$
\times \frac{v_k^{(s-1)}(T)}{\prod\limits_{l=1, l\neq j}^{n} (\lambda_j - \lambda_l)} + \int_0^T \frac{\partial^\gamma G_k(t,\tau)}{\partial t^\gamma} f_k(\tau)\,d\tau, \ \gamma = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{70}
$$

Теорема 18. *Нехай для всякого $k \in \mathbb{Z}^p$ система (70) має розв'язок $v_k^{(\gamma)}(T)$, $\gamma = 0, 1, \ldots, n-1$, що задовольняє умови*

$$
|v_k^{(\gamma)}(T)| \leq \text{const}\, \|k\|^{\sigma_\gamma} \Big(\int_0^T |f_k(t)|^2\,dt \Big)^{1/2}, \tag{71}
$$

де σ_γ, $\gamma = 0, 1, \ldots, n-1$, – деякі дійсні числа. Тоді для довільної функції $f \in H^0_{q+\sigma+\theta}(D^p)$, де $\theta = \max\limits_{j=0,1,\ldots,n-1}(n + \sigma_j, 0)$, а число σ визначене в теоремі 17, і для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів $\{a_{\widehat{s}}, \mu, T : |\widehat{s}| \leq n\}$ задача (39), (40) має розв'язок $u \in$ $\in H^n_q(D^p)$.

Д о в е д е н н я. Із (67) випливає оцінка

$$
|\psi_k(t)| \leq \text{const} \sum_{j=1}^{n} \|k\|^n |v_k^{(j-1)}(T)| + |f_k(t)|;
$$

далі, використовуючи (71) і аналогічні нерівностям (60), (61) нерівності

$$
|v_k^{(\gamma)}(t)| \leq \text{const}\, \|k\|^{\sigma+j} \Big| \int_0^T \psi_k(t)\,dt \Big|, \ j = 0, 1, \ldots, n-1,
$$

$$
|v_k^{(n)}(t)| \leq \text{const}\, \|k\|^{\sigma+n} \Big| \int_0^T \psi_k(t)\,dt \Big| + |\psi_k(t)|,
$$

одержуємо оцінку

$$
\|u\|_{H^n_q(D^p)} \leq \text{const}\, \|f\|_{H^0_{q+\sigma+\theta}(D^p)}.
$$

Теорему доведено. ∎

І, нарешті, дослідимо нелокальну крайову задачу (39), (40), в якій рівняння (39) збурено нелінійним інтегро-диференціальним оператором.

В області D^p шукаємо розв'язок рівняння

$$
L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) u(t,x) = f(t,x) + \alpha \int_{\Omega^p_{2\pi}} K(t,x,y) V(t,y,\bar{u})\,dy, \tag{72}
$$

де $\bar{u} = \{\partial^{|\widehat{s}|} u / \partial t^{s_0} \partial y_1^{s_1} \ldots \partial y_p^{s_p}, \ |\widehat{s}| \leq n\}$, що задовольняє нелокальні умови (40).

Задача (72), (40) при $\alpha = 0$ вироджується в задачу (39), (40), розв'язність якої встановлена теоремою 17.

Розглянемо задачу (72), (40) при $\alpha \neq 0$. Припустимо, що функції $K(t,x,y)$ і $V(t,y,\bar{u})$ визначені і неперервні в областях $D_1 = D^p \times \Omega^p_{2\pi}$ і $D_2 = D^p \times U$, де $U = \big\{ \|u - u_0\|_{H^n_q(D^p)} \leq M_1 \big\}$ – куля радіуса M_1 в просторі $H^n_q(D^p)$, u^0 – розв'язок незбуреної задачі (39), (40).

Задача (72), (40) еквівалентна інтегро-диференціальному рівнянню

$$
u(t,x) = u^0(t,x) + \alpha \int_{D^p} \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} G_k(t,\tau) K_k(\tau,y) V(\tau,y,\bar{u})\,dy d\tau, \tag{73}
$$

де $K_k(\tau,y)$ – коефіцієнти Фур'є функції $K(\tau,x,y)$; $G_k(t,\tau)$ – функція Гріна задачі (54), (55), що визначається формулою (56).

Позначимо через A оператор з областю визначення $D(A) =$ $= H^n_q(D^p)$, який задається правою частиною рівняння (73).

Теорема 19. *Нехай функція $V(\tau,y,\bar{u})$ в області D_2 обмежена, тобто*

$$
|V(\tau,y,\bar{u})| \leq M_2, \tag{74}
$$

і задовольняє умову Ліпшиця щодо $\bar{u}$

$$|V(\tau, y, \bar{u}^1) - V(\tau, y, \bar{u}^2)| \le M_3 ||u^1 - u^2||_{H_q^n(D^p)}. \tag{75}$$

Нехай функція $K(t, x, y)$ *в кожній фіксованій точці* $(t, y) \in D^p$ *належить до простору* $H_\psi(\Omega_{2\pi}^p)$, $\psi > q + \sigma$. *Крім того, припускатимемо виконання умов теореми 17. Тоді для всіх* $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$, *де*

$$\alpha_0 < \min\left(\frac{M_1}{M_2 z}, \frac{1}{M_3 z}\right), \tag{76}$$

$$z = 2^{p-2n}\pi^p T(n+1)C^2 \int\limits_{D^p} ||K(\tau, \cdot, y)||_{H_\psi(\Omega_{2\pi}^p)}\, dy d\tau,$$

а C *– константа з оцінок (60), існує єдиний розв'язок задачі (72), (40), який належить замкнутій кулі* $U \subset H_q^n(D^p)$ *і неперервно залежить від функції* $f(t, x)$.

Д о в е д е н н я. Із оцінок (60), (74), (75) одержимо, що

$$||Au - u^0||_{H_q^n(D^p)} \le |\alpha| M_2 z,$$

$$||Au^1 - Au^2||_{H_q^n(D^p)} \le |\alpha| M_3 z ||u^1 - u^2||_{H_q^n(D^p)},$$

звідки, за умовою (76), одержимо, що оператор A відображає кулю U в себе і є оператором стиску. З принципу Каччопполі–Банаха (див. теорему 2.7) випливає, що існує єдина нерухома точка $\tilde{u}$ оператора A, неперервно залежна від u^0. Із неперервної залежності u^0 від f (теорема 17) одержуємо, що $\tilde{u}$ неперервно залежить від f. Теорему доведено. ■

Зауваження 6. Існування розв'язку (можливо не єдиного) задачі (72), (40) при більш слабких, ніж в теоремі 19, умовах можна одержати за допомогою принципу Шаудера (теорема 2.8).

§ 12. Безтипні рівняння зі змінними за x коефіцієнтами

Розглянемо безтипні лінійні рівняння довільного порядку із змінними за x коефіцієнтами, а також випадок, коли такі рівняння збурені нелінійним інтегро-диференціальним доданком [35].

12.1. Лінійні рівняння

В області Q розглядаємо задачу

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, -L\right) u \equiv \frac{\partial^n u(t, x)}{\partial t^n} + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{h} a_{js}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j (-L)^s u(t, x) = f(t, x), \tag{1}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{h} b_{ljs}(-L)^s \left(\frac{\partial^j u(t, x)}{\partial t^j}\Big|_{t=0} - \mu \frac{\partial^j u(t, x)}{\partial t^j}\Big|_{t=T}\right) = 0, \tag{2}$$

$$l = 1, \dots, n,$$

$$L^r u(t, x)|_{\partial G} = 0, \quad r = 0, 1, \dots, h-1, \tag{3}$$

де $a_{js}, b_{ljs} \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, $s = 0, 1, \dots, h$, $l = 1, \dots, n$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; L — диференціальний оператор зі змінними за $x_1, \dots, x_p$ коефіцієнтами, означений в п. 7.2, причому $p_{ij} \in C^{2h-1,\nu}$, $i, j = 1, \dots, p$, $q \in C^{2h-2,\nu}$, $\overline{G} \in A^{2h,\nu}$. На тип рівняння (1) обмежень не накладаємо.

Нехай $\Lambda = \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$ і $\{X_k(x), k \in \mathbb{N}\}$ – системи власних значень і власних (ортонормованих) функцій задачі (7.23), а $f \in C([0, T], L_2(G))$. Тоді

$$f(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k(x), \quad f_k(t) = \int\limits_G f(t, x) X_k(x)\, dx.$$

Розв'язок $u^0(t, x)$ задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді ряду

$$u^0(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0(t) X_k(x), \tag{4}$$

кожний член якого, очевидно, задовольняє крайові умови (3). Кожна з функцій $u_k^0(t)$, $k \in \mathbb{N}$, є розв'язком відповідної задачі

$$\frac{d^n u_k^0(t)}{dt^n} + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{h} a_{js}\lambda_k^s \frac{d^j u_k^0(t)}{dt^j} = f_k(t), \tag{5}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{h} b_{ljs}\lambda_k^s \left(\frac{d^j u_k^0(t)}{dt^j}\Big|_{t=0} - \mu \frac{d^j u_k^0(t)}{dt^j}\Big|_{t=T}\right) = 0, \quad l = 1, \dots, n. \tag{6}$$

Припустимо, що для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ всі корені $\eta_j(\lambda_k)$, $j = 1, \dots, n$, рівняння

$$P(\eta, \lambda_k) \equiv \eta^n + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{h} a_{js}\lambda_k^s \eta^j = 0 \tag{7}$$

попарно різні та не дорівнюють нулю (результати можна перенести також на випадок кратних коренів рівняння (7)). Тоді однорідне рівняння

$$\frac{d^n u_k^0(t)}{dt^n} + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{h} a_{js}\lambda_k^s \frac{d^j u_k^0(t)}{dt^j} = 0 \qquad (5')$$

має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$u_{kj}^0(t) = \exp(\eta_j(\lambda_k)t), \quad j = 1,\dots,n,$$

а характеристичний визначник $\Delta(\lambda_k)$ задачі (5′), (6) обчислюється за формулою

$$\Delta(\lambda_k) = D(\lambda_k)\prod_{j=1}^{n}(1-\mu\exp(\eta_j(\lambda_k)T)) \prod_{1\le m<l\le n}(\eta_l(\lambda_k)-\eta_m(\lambda_k)), \quad (8)$$

де

$$D(\lambda_k) = \det\left\|\sum_{s=0}^{h} b_{l+1,j,s}\lambda_k^s\right\|_{l,j=0}^{n-1}.$$

Теорема 1. *Для единості розв'язку задачі (1)-(3) у просторі $C^{(n,2h)}(Q)$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови*

$$\forall \lambda_k \in \Lambda \qquad 1-\mu\exp\left(\eta_j(\lambda_k)T\right) \neq 0,\ j = 1,\dots,n; \quad D(\lambda_k)\neq 0. \quad (9)$$

Доведення. Враховуючи формулу (8) та теорему про єдиність розвинення функції з простору $L_2(G)$ у ряд за повною в $L_2(G)$ системою ортогональних функцій, доведення проводимо за схемою доведення теореми 7.5. ■

Розглянемо питання про існування розв'язку задачі (1)–(3). Нехай справджуються умови (9). Тоді для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ існує єдина функція Гріна $G_k(t,\tau)$ задачі (5′), (6), за допомогою якої розв'язок задачі (5), (6) записується у вигляді

$$u_k^0(t) = \int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau. \qquad (10)$$

У квадраті K_T, крім сторін $\tau = 0$ і $\tau = T$, функції $G_k(t,\tau)$, $k\in\mathbb{N}$, визначаються формулами

$$G_k(t,\tau) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\exp\left(\eta_j(\lambda_k)(t-\tau)\right)\prod_{\substack{q=1\\ q\neq j}}^{n}(\eta_j(\lambda_k)-\eta_q(\lambda_k))^{-1}\times$$

$$\times\left(\operatorname{sgn}(t-\tau)+\frac{1+\mu\exp(\eta_j(\lambda_k)T)}{1-\mu\exp(\eta_j(\lambda_k)T)}\right), \quad k\in\mathbb{N}. \qquad (11)$$

На стороні $\tau = 0$ ($\tau = T$) квадрата K_T кожна з функцій $G_k(t,\tau)$, $k\in\mathbb{N}$, довизначається за неперервністю справа (зліва).

Розв'язок задачі (1)–(3) формально зображається рядом

$$u^0(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau X_k(x), \qquad (12)$$

збіжність якого взагалі пов'язана з проблемою малих знаменників, бо відмінні від нуля вирази

$$1-\mu\exp(\eta_j(\lambda_k)T), \quad \prod_{\substack{q=1\\ q\neq j}}^{n}\Big(\eta_j(\lambda_k)-\eta_q(\lambda_k)\Big), \quad j = 1,\dots,n,$$

що входять як знаменники у формули (11), можуть бути як завгодно малими за модулем для нескінченної множини значень $\lambda_k \in \Lambda$.

Зауважимо, що з рівняння (7) випливають такі оцінки:

$$|\eta_j(\lambda_k)| \le \alpha\lambda_k^h, \quad j = 1,\dots,n,\ \lambda_k\in\Lambda,\ \alpha>0. \qquad (13)$$

Введемо функціональні простори, які будемо використовувати при дослідженні розв'язності задачі (1)–(3):

$$\mathcal{B}_q^\omega = \Big\{\varphi\in L_2(G) : \varphi = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k X_k(x),$$

$$\|\varphi\|_{q,\omega} = \sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k|\exp(qk^\omega) < \infty\Big\}, \qquad q,\omega>0;$$

$C^n([0,T],\mathcal{B}_q^\omega)$ – простір функцій v, визначених в області Q, таких, що $\partial^j v/\partial t^j$, $j = 0,1,\dots,n$, для кожного $t\in[0,T]$ належить простору $\mathcal{B}_q^\omega$,

$$\|v\|_{C^n([0,T],\mathcal{B}_q^\omega)} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\max_{t\in[0,T]}|v_k^{(j)}(t)|\exp(qk^\omega),$$

де

$$v_k(t) = \int_G v(t,x)X_k(x)dx.$$

Якщо $f(t,x) = \sum_{k=1}^{N} f_k(t)X_k(x)$, $N<\infty$, то за умов (9) завжди існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3). У загальному випадку справедливе таке твердження.

Теорема 2. *Нехай справджуються умови (9), нехай існують додатні сталі $m_1, m_2, \gamma_1, \gamma_2$, такі, що для всіх (крім скінченного* *числа)* $\lambda_k \in \Lambda$ *виконуються нерівності*

$$\left|1 - \mu \exp(\eta_j(\lambda_k)T))\right| \geq \frac{m_1 \lambda_k^{-\gamma_1}}{\exp\left(|\mathrm{Re}\,\eta_j(\lambda_k)|T\right)}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{14}$$

$$\prod_{q=1, q\neq j}^{n} |\eta_j(\lambda_k) - \eta_q(\lambda_k)| \geq m_2 \lambda_k^{-\gamma_2}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{15}$$

і нехай $f \in C([0,T], \mathcal{B}_\beta^{2h/p})$, *де* $\beta > 3\alpha T c_1^h$, α, c_1 *– сталі з оцінок (13) та (7.24) відповідно. Тоді для довільних* $\mu \neq 0$ *і* b_{ljs}, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $s = 0, 1, \ldots, h$, $l = 1, \ldots, n$, *існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3) з простору* $C^{(n,2h)}(Q)$, *який неперервно залежить від функції* $f(t,x)$.

Доведення. З формул (11), (12) та оцінок (7.24), (7.25), (13)–(15) одержуємо таку оцінку для норми розв'язку (12) задачі (1)–(3):

$$\|u^0\|_{C^{(n,2h)}(Q)} = \sum_{q_0=0}^{n} \sum_{|q|\leq 2h} \max_{(t,x)\in Q} \left| \frac{\partial^{|q|}}{\partial t^{q_0} \partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_p^{q_p}} \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q_0=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left| \int_0^T \frac{\partial^{q_0} G_k(t,\tau)}{\partial t^{q_0}} f_k(\tau)\, d\tau \right| \times$$

$$\times \sum_{|q|\leq 2h} \max_{x\in G} \left| \frac{\partial^{|q|} X_k(x)}{\partial x^{|q|}} \right| \leq c_3 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k k^{\Psi} \exp(3\alpha T c_1^h k^{2h/p}), \tag{16}$$

де $\hat{f}_k = \max\limits_{t\in[0,T]} |f_k(t)|$, $\Psi = 1/2(h + \gamma_1 + \gamma_2 + hn)2/p$, $c_3 = \dfrac{c_2 T}{(m_1 m_2)} \times$
$\times c_1^{p/4+h} \left(\max\{1, |\mu|\}\, c_1^{\gamma_1+\gamma_2} n \sum\limits_{r=0}^{n} (\alpha c_1^h)^r + m_1 m_2 \right) \sum\limits_{j=0}^{2h-1} (p+j)!/(j+1)!$

Скориставшись елементарною нерівністю

$$d^{\sigma} \leq c_4 \exp(\rho d), \quad c_4 = c_4(\sigma) > 0, \tag{17}$$

яка при $0 < d \leq +\infty$ справедлива для довільних $\sigma \geq 0$ і $\rho > 0$, та поклавши в ній $\rho = \beta - 3\alpha T c_1^h$, з оцінки (16) одержимо

$$\|u^0\|_{C^{(n,2h)}(Q)} \leq c_3 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k k^{\frac{1}{2} + \frac{2}{p}(h(n+1)+\gamma_1+\gamma_2)} \exp(3\alpha T c_1^h k^{2h/p}) \leq$$

$$\leq c_3 c_4 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k \exp\left((\rho + 3\alpha T c_1^h) k^{2h/p} \right) = c_3 c_4 \|f\|_{C([0,T], \mathcal{B}_\beta^{2h/p})}. \tag{18}$$

З оцінки (18) випливає доведення теореми. ■

Зауваження 1. За умов теореми 2 розв'язок задачі (1)–(3) належить простору $C^n([0,T], \mathcal{B}_{\beta_1}^{2h/p})$, де $\beta_1 < \beta - 3\alpha T c_1^h$.

Проаналізуємо можливість виконання оцінок (14), (15).

Теорема 3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $T > 0$ *і для довільних фіксованих* μ, a_{js}, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $s = 0, 1, \ldots, h$, *нерівності (14) виконуються при* $\gamma_1 > p/2$ *для всіх (крім скінченного числа) значень* $\lambda_k \in \Lambda$.

Доведення. На основі нерівності $\sin x \geq 2x/\pi$, $0 \leq x \leq \pi/2$, одержуємо

$$\begin{aligned} \left|1 - \mu \exp(\eta_j(\lambda_k)T)\right| &\geq |\mu| \exp(\mathrm{Re}\,\eta_j(\lambda_k)T) \times \\ \times \left|\sin(\arg\mu + \mathrm{Im}\,\eta_j(\lambda_k)T)\right| &\geq 2|\mu| \exp(\mathrm{Re}\,\eta_j(\lambda_k)T) \times \\ \times \left|\pi^{-1}(\arg\mu + \mathrm{Im}\,\eta_j(\lambda_k)T) - d_j(\lambda_k)\right|&, \quad j = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{19}$$

де $d_j(\lambda_k)$ – ціле число, для якого

$$\left|\pi^{-1}(\arg\mu + \mathrm{Im}\,\eta_j(\lambda_k)T) - d_j(\lambda_k)\right| \leq 1/2.$$

З леми 3.2 та оцінок (13), (19) випливає, що для всіх (крім скінченного числа) $\lambda_k \in \Lambda$ і для майже всіх чисел T справджуються оцінки

$$\left|1 - \mu \exp(\eta_j(\lambda_k)T)\right| \geq |\mu| T^{-1} \lambda_k^h \exp(\mathrm{Re}\,\eta_j(\lambda_k)T) \times$$

$$\times \left| \frac{T\pi^{-1} \arg\mu + T^2 \pi^{-1} \mathrm{Im}\,\eta_j(\lambda_k)}{\lambda_k^h} - \frac{T d_j(\lambda_k)}{\lambda_k^h} \right| \geq$$

$$\geq |\mu| T^{-1} \lambda_k^{-p/2-\delta} \exp\left(-|\mathrm{Re}\,\eta_j(\lambda_k)|T\right), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Теорему доведено. ■

Позначимо через $w = (w_1, \ldots, w_\sigma)$, $\sigma = 2n(h+1)$, вектор, складений з дійсних та уявних частин коефіцієнтів a_{js}, $s = 0, 1, \ldots, h$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, рівняння (1).

Теорема 4. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^\sigma$*) векторів* w *при* $\gamma_2 > (n-1)(p/2 + h(n-3))/2$ *нерівності (15) виконуються для всіх (крім скінченного числа) значень* $\lambda_k \in \Lambda$.

Доведення. Для дискримінанта $W(P)$ многочлена $P(\eta, \lambda_k)$ справедливі такі два зображення:

$$W(P) = \prod_{1\leq i<j\leq n} \left(\eta_j(\lambda_k) - \eta_i(\lambda_k)\right)^2, \tag{20}$$

$$W(P) = (-1)^{(n-1)n/2} \begin{vmatrix} 1 & A_{n-1} & A_{n-2} & \cdots & \cdots & A_1 & A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & A_{n-1} & \cdots & \cdots & A_2 & A_1 & A_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & A_{n-2} & A_{n-3} & \cdots & A_0 \\ n & (n-1)A_{n-1} & (n-2)A_{n-2} & \cdots & \cdots & A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & (n-1)A_{n-1} & \cdots & \cdots & 2A_2 & A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & (n-1)A_{n-1} & (n-2)A_{n-2} & \cdots & A_1 \end{vmatrix}, \quad (21)$$

де $A_j = \sum\limits_{s=0}^{h} a_{js}\lambda_k^s$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Доведемо спочатку, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\sigma$) векторів w, які належать до деякого паралелепіпеда $\Pi_\sigma = [\alpha_0, \beta_0] \times \Pi_{\sigma-1} \subset \mathbb{R}^\sigma$, нерівність

$$|\mathrm{Re}\, W(P)| \geq \lambda_k^{\omega-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad (22)$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k \in \Lambda$, де $\omega = (n-1)(p/2 - h)$. Позначимо через Y множину тих векторів w, для яких протилежна до (22) нерівність

$$|\mathrm{Re}\, W(P)| < \lambda_k^{\omega-\varepsilon} \quad (23)$$

виконується для нескінченного числа $\lambda_k \in \Lambda$, а через Y_k – множину тих векторів w, для яких ця нерівність справедлива для фіксованого $\lambda_k \in \Lambda$.

Із формули (21) знаходимо, що $W(P) = \pm n^n A_0^{n-1} + F$, де F містить степені A_0, менші, ніж $n-1$; тому

$$\mathrm{Re}\, W(P) = \pm n^n (\mathrm{Re}\, A_0)^{n-1} + F_1,$$

де F_1 містить степені $\mathrm{Re}\, A_0$, не вищі, ніж $n-2$. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $\xi = \mathrm{Re}\, a_{0,h}$. Тоді

$$\mathrm{Re}\, W(P) = \pm n^n \xi^{n-1} \lambda_k^{h(n-1)},$$

де F_2 містить степені ξ, менші, ніж $n-1$, а тому

$$\left| \frac{\partial^{n-1} \mathrm{Re}\, W(P)}{\partial \xi^{n-1}} \right| = n^n (n-1)! \lambda_k^{h(n-1)}. \quad (24)$$

На основі (24) та леми 3.4 одержуємо, що міра множини Y_k' тих чисел $\xi \in [\alpha_0, \beta_0]$, які задовольняють нерівність (23) (коли решта коефіцієнтів a_{js} рівняння (1) фіксована) при фіксованому $\lambda_k \in \Lambda$, має таку оцінку:

$$\mathrm{mes}\, Y_k' \leq c_1(n) \lambda_k^{-(\omega/(n-1)+h)-\varepsilon/(n-1)}. \quad (25)$$

Інтегруючи оцінку (25) по паралелепіпеду $\Pi_{\sigma-1}$ та враховуючи оцінки (7.24), одержуємо

$$\mathrm{mes}\, Y_k \leq c_2(n, V) \lambda_k^{-\omega/(n-1)-h-\varepsilon/(n-1)} \leq$$

$$\leq c_3(n, h, V, c_1) k^{-2(\omega/(n-1)+h)/p - 2\varepsilon/(p(n-1))},$$

де V – об'єм паралелепіпеда $\Pi_{\sigma-1}$.

Оскільки ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{mes}\, Y_k$ збігається, то, згідно з лемою 3.1, $\mathrm{mes}\, Y = 0$. Отже, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\sigma$) векторів w нерівність (22) справджується для всіх (крім скінченного числа) $\lambda_k \in \Lambda$.

Оскільки $|W(P)| \geq |\mathrm{Re}\, W(P)|$, то з формули (20) одержуємо, що для всіх (крім скінченного числа) $\lambda_k \in \Lambda$ і для майже всіх векторів $w \in \mathbb{R}^\sigma$ справедлива оцінка

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} |\eta_j(\lambda_k) - \eta_i(\lambda_k)| \geq \lambda_k^{-(n-1)(p-2h)/4 - \varepsilon/2}, \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (26)$$

Із рівності $\prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} |\eta_j(\lambda_k) - \eta_i(\lambda_k)| \prod\limits_{\substack{1 \leq \alpha < \beta \leq n \\ \alpha \neq j; \beta \leq q}} |\eta_\alpha(\lambda_k) - \eta_\beta(\lambda_k)|^{-1} = \prod\limits_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^{n} |\eta_q(\lambda_k) - \eta_i(\lambda_k)|$ та оцінок (13), (26) знаходимо

$$\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^{n} |\eta_q(\lambda_k) - \eta_i(\lambda_k)| \geq \frac{c_4}{\lambda_k^{(n-1)(p/2+h(n-3))/2-\varepsilon/2}}, \quad j = 1, \ldots, n, \ c_4 > 0.$$

Теорему доведено. ■

12.2. Слабконелінійне інтегро-диференціальне рівняння

В області Q розглядаємо задачу з умовами (2), (3) для рівняння

$$P(\partial/\partial t, -L)u = f(t, x) + \varepsilon \int\limits_G K(t, x, y) F(t, y, \bar{u}(t, y))\, dy, \quad (27)$$

де оператор $P(\partial/\partial t, -L)$ визначений в (1), $\varepsilon \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$;

$$\bar{u}(t,x) = \left\{ \frac{\partial^{|\bar{q}|}u(t,x)}{\partial t^{q_0}\partial x_1^{q_1}\dots\partial x_p^{q_p}}, \quad q_0 \le n,\ |q| \le 2h \right\};$$

функція $F(t,y,\bar{u})$ визначена і неперервна за всіма змінними в області

$$Q_1 = \left\{(t,y,\bar{u}) : (t,y) \in Q,\ u(t,y) \in \bar{S}(u^0,r)\right\}$$

та задовольняє в ній умову Ліпшиця відносно $\bar{u}$:

$$|F(t,x,\bar{u}_2(t,x)) - F(t,x,\bar{u}_1(t,x))| \le$$

$$\le \theta \sum_{q_0\le n}\sum_{|q|\le 2h} \left| \frac{\partial^{|\bar{q}|}u_2(t,x)}{\partial t^{q_0}\partial x_1^{q_1}\dots\partial x_p^{q_p}} - \frac{\partial^{|\bar{q}|}u_1(t,x)}{\partial t^{q_0}\partial x_1^{q_1}\dots\partial x_p^{q_p}} \right|, \qquad (28)$$

де

$$\bar{S}(u^0,r) = \left\{u(t,x) \in C^{(n,2h)}(Q) : \|u - u^0\|_{C^{(n,2h)}(Q)} \le r\right\},$$

$u^0 \equiv u^0(t,x)$ – розв'язок незбуреної задачі (2), (3), (27) (коли $\varepsilon = 0$), тобто задачі (1)–(3), заданий формулою (12). Умови на функцію $K(t,x,y)$, яка визначена в області

$$Q_2 = \left\{(t,x,y) : (t,x) \in \bar{Q},\ y \in \bar{G}\right\},$$

будуть з'ясовані нижче.

Розв'язок задачі (2), (3), (27) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)X_k(x). \qquad (29)$$

Припустимо, що функція $K(t,x,y)$ як функція змінної x (при довільних фіксованих значеннях решти змінних) належить простору $L_2(G)$. Тоді сукупність коефіцієнтів $u_k(t), k \in \mathbb{N}$, у формулі (29) визначається як розв'язок такої крайової задачі для нескінченної системи інтегро-диференціальних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} &u_k^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{h} a_{js}\lambda_k^s u_k^{(j)}(t) = f_k(t) + \varepsilon\int_G K_k(t,y)F(t,y,\bar{u})\,dy,\\ &\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{h} b_{ljs}\lambda_k^s\left(u_k^{(j)}(0) - \mu u_k^{(j)}(T)\right) = 0, \quad l = 1,\dots,n, \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

де

$$K_k(t,y) = \int_G K(t,x,y)X_k(x)\,dx,$$

$$\bar{u}(t,y) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(q_0)}(t)\frac{\partial^{|q|}X_k(y)}{\partial y_1^{q_1}\dots\partial y_p^{q_p}}, \quad q_0 \le n,\ |q| \le 2h \right\}.$$

За допомогою функцій Гріна $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{N}$, визначених формулами (11), задачу (30) зводимо до еквівалентної їй системи інтегро-диференціальних рівнянь

$$u_k(t) = u_k^0(t) + \varepsilon\int_Q G_k(t,\tau)K_k(\tau,y)F(\tau,y,\bar{u}(\tau,y))\,dyd\tau,\ k \in \mathbb{N}. \quad (31)$$

Припустимо, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_k(t,\tau)K_k(\tau,y)X_k(x) \qquad (32)$$

рівномірно збігається в області $\bar{Q}\times\bar{Q}$; його суму позначимо через $\Phi(t,x,\tau,y)$. Тоді задача (2), (3), (27) еквівалентна такому інтегро-диференціальному рівнянню:

$$u(t,x) = u^0(t,x) + \varepsilon\int_Q \Phi(t,x,\tau,y)F(\tau,y,\bar{u}(\tau,y))\,dyd\tau. \qquad (33)$$

Позначимо через $C(\bar{Q},\mathcal{B}_q^{\omega})$ простір функцій $z(t,x,y)$, визначених і неперервних в області $\bar{Q}\times\bar{G}$, які для кожної точки $(t,y) \in \bar{Q}$ належать простору $\mathcal{B}_q^{\omega}$;

$$\|z\|_{C([0,T],\mathcal{B}_q^{\omega})} = \sum_{k=1}^{\infty}\max_{(t,y)\in Q}|z_k(t,y)|\exp(qk^{\omega}),$$

де

$$z_k(t,y) = \int_G z(t,x,y)X_k(x)\,dx.$$

Теорема 5. *Нехай виконані умови теореми 2 і нехай $K \in C(\bar{Q},\mathcal{B}_\beta^{2h/p})$, де $\beta > 3\alpha T c_1^h$, а функція $F(t,y,\bar{u})$ в області Q_1 неперервна і задовольняє умову (28). Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T та для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2n(h+1)}$) векторів w (див. п. 12.1) і для всіх ε, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, існує єдиний розв'язок задачі (2), (3), (27), який належить замкненій кулі $\bar{S}(u^0,r) \subset C^{(n,2h)}(Q)$ і неперервно залежить від функції $f(t,x)$, де*

$$\varepsilon_0 = \min\left(\frac{r}{EF}, \frac{1}{\theta E}\right),$$

$$E = c_2c_3\operatorname{mes}G\|K\|_{C(\bar{Q},\mathcal{B}_\beta^{2h/p})}, \quad F = \max_{Q_1}\left|F(t,x,\bar{u}(t,x))\right|,$$

а c_2, c_3, θ – сталі з нерівностей (7.25), (16), (28) відповідно.

Доведення. Запишемо рівняння (33) у вигляді

$$u(t,x) = I_{u^0} u(t,x),$$

де I_v – інтегро-диференціальний оператор

$$I_v u(t,x) \equiv v(t,x) + \varepsilon \int\limits_Q \Phi(t,x,\tau,y) F(\tau,y,\bar{u}(\tau,y))\, d\tau dy, \tag{34}$$

що діє в кулі $\overline{S}(u^0,r)$. Позначимо через V сукупність функцій $v \in C^{(n,2h)}(Q)$, для яких

$$\|v - u^0\|_{C^{(n,2h)}(Q)} \le r_0 = r - |\varepsilon| EF,$$

і покажемо, що для довільної функції $v \in V$ оператор I_v переводить кулю $\overline{S}(u^0,r)$ у себе. Дійсно, враховуючи формули (10), (33) та оцінки (7.24), (7.25), (13)–(15), (17), (28) одержуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T та для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2n(h+1)}$) векторів w справедлива оцінка

$$\|I_v u - u^0\|_{C^{(n,2h)}(\overline{Q})} \le \|v - u^0\|_{C^{(n,2h)}(\overline{Q})} +$$

$$+ |\varepsilon| \Big\| \int\limits_Q \sum_{k=1}^{\infty} G_k(\,\cdot\,,\tau) K_k(\tau,y) F(\tau,y,\bar{u}(\tau,y))\, d\tau dy X_k(\cdot) \Big\|_{C^{(n,2h)}(\overline{Q})} \le$$

$$\le r_0 + |\varepsilon| EF = r.$$

Покажемо тепер, що I_v – оператор стиску. Нехай u_1, $u_2 \in \overline{S}(u^0,r)$, $v \in V$. Тоді

$$\|I_v u_2 - I_v u_1\|_{C^{(n,2h)}(\overline{Q})} = |\varepsilon| \times$$

$$\times \Big\| \int\limits_Q \Phi(t,x,\tau,y)\big(F(\tau,y,\bar{u}_2(\tau,y)) - F(\tau,y,\bar{u}_1(\tau,y))\big)\, d\tau dy \Big\|_{C^{(n,2h)}(\overline{Q})} \le$$

$$\le |\varepsilon|\, \theta \, \|u_2 - u_1\|_{C^{(n,2h)}(\overline{Q})} \Big\| \int\limits_Q \Phi(t,x,\tau,y) d\tau dy \Big|_{C^{(n,2h)}(\overline{Q})} \le$$

$$\le |\varepsilon|\, \theta E \|u_2 - u_1\|_{C^{(n,2h)}(\overline{Q})}.$$

Очевидно, що оператор I_v є неперервним за v. З принципу Каччопполі–Банаха (див. теореми 2.6, 2.7) та теореми 2 випливає, що рівняння (33) має єдиний розв'язок, який неперервно залежить від функції $f(t,x)$.

З формул (11), теорем 3, 4 про виконання оцінок (14), (15) та умови теореми на функцію $K(t,x,y)$ випливає рівномірна збіжність ряду (22) в області $\overline{Q} \times \overline{Q}$ для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$)

чисел T і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2n(h+1)}$) векторів w. Теорему доведено. ∎

Зауваження 2. Розв'язок задачі (2), (3), (27) можна шукати як границю послідовності $u_q \equiv u_q(t,x)$, де $u_0 = u^0(t,x)$, $u_{q+1} = I_{u^0} u_q$, $q \in \mathbb{N}$; I_{u^0} – інтегральний оператор, визначений формулою (34).

Застосувавши до інтегро-диференціального рівняння (33) принцип Шаудера (див. теорему 2.8), можна довести існування (без вимоги єдиності) розв'язку задачі (2), (3), (27), не накладаючи умови Ліпшиця (28) на функцію $F(t,x,\bar{u}(t,x))$.

Теорема 6. *Нехай виконані умови теореми 5, крім умови (28). Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2n(h+1)}$) векторів w і для всіх ε, $|\varepsilon| < r/EF$, існує розв'язок задачі (2), (3), (27), який належить кулі $\overline{S}(u^0,r)$, де E і F – сталі з теореми 5.*

Доведення. Позначимо $I = I_{u^0}$. Для всіх ε, $|\varepsilon| < r/EF$, справедливе вкладення $I(\overline{S}(u^0,r)) \subset \overline{S}(u^0,r)$ (див. доведення теореми 5). Покажемо тепер, що I – неперервний у кулі $\overline{S}(u^0,r)$ оператор. Нехай

$$\|u_q - u_0\|_{C^{(n,2h)}(\overline{Q})} \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ u_q \in \overline{S}(u^0,r),\ q \in \mathbb{N}.$$

Із неперервності функції $F(t,x,\bar{u})$ в Q_1 випливає, що для довільного $\nu > 0$ при досить великих q, $q \ge q_0(\nu)$, виконується нерівність

$$\big|F(t,x,\bar{u}_q(t,x)) - F(t,x,\bar{u}_0(t,x))\big| < \nu_0 = \frac{\nu}{|\varepsilon| E}.$$

Отже, при $q \ge q_0(\nu)$ та $z_q = I u_q$ маємо $\|z_q - z_0\|_{C^{(n,2h)}(\overline{Q})} \le \nu$, і тому

$$\|I u_q - I u_0\|_{C^{(n,2h)}(\overline{Q})} \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Встановимо тепер відносну компактність множини $I(\overline{S}(u^0,r))$. Для цього потрібно показати, що функції кожної з множин

$$J_{\hat{q}} = \left\{ \frac{\partial^{|q|} z(t,x)}{\partial t^{q_0} \partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_p^{q_p}},\ z \in I(\overline{S}(u^0,r)) \right\}, \quad q_0 \le n,\ |q| \le 2h,$$

є рівномірно обмежені та одностайно неперервні. Перше випливає з того, що $I(\overline{S}(u^0,r)) \subset \overline{S}(u^0,r)$. Покажемо одностайну неперервність функцій на прикладі множини $J_{(0,2h,0,\ldots,0)}$. Кожну з функцій цієї множини можна подати у вигляді

$$\frac{\partial^{2h} z(t,x)}{\partial x_1^{2h}} = \frac{\partial^{2h} u^0(t,x)}{\partial x_1^{2h}} +$$

$$+\varepsilon\int\limits_{Q}\sum_{k=1}^{\infty}G_k(t,\tau)K_k(\tau,y)F(\tau,y,\bar{u}(\tau,y))\frac{\partial^{2h}X_k(x)}{\partial x_1^{2h}}\,dyd\tau.$$

На основі оцінок (7.24), (7.25), (13)–(15), (17), (28) та формули (11) отримуємо, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}G_k(t,\tau)K_k(\tau,y)\partial^{2h}X_k(x)/\partial x_1^{2h}$ для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T>0$ та для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2n(h+1)}$) векторів w мажорується збіжним числовим рядом

$$c_2c_3\max_{(t,y)\in\bar{Q}}\sum_{k=1}^{\infty}|K_k(\tau,y)|\exp(\beta k^{2h/p}),\quad \beta>2\alpha Tc_1^h,$$

і, отже, абсолютно та рівномірно збігається в області $\bar{Q}\times\bar{Q}$ до деякої неперервної функції $\Psi(t,x,\tau,y)$. Тоді для довільної функції $z\in I(\bar{S}(u^0,r))$ одержуємо

$$\left|\frac{\partial^{2h}z(t'',x'')}{\partial x_1^{2h}}-\frac{\partial^{2h}z(t',x')}{\partial x_1^{2h}}\right|\le$$

$$\le|\varepsilon|\left|\int\limits_{Q}\big(\Psi(t'',x'',\tau,y)-\Psi(t',x',\tau,y)\big)F\big(\tau,y,\bar{u}(\tau,y)\big)\,dyd\tau\right|\le$$

$$\le|\varepsilon|F\int\limits_{Q}\big|\Psi(t'',x'',\tau,y)-\Psi(t',x',\tau,y)\big|\,dyd\tau.$$

З останньої нерівності випливає одностайна неперервність функцій множини $J_{(0,2h,0,\ldots,0)}$. Аналогічно доводиться одностайна неперервність функцій всіх інших множин $J_{\hat{q}}$. Тоді з принципу Шаудера випливає розв'язність інтегро-диференціального рівняння (33), а отже, і задачі (2), (3), (27) для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T>0$ та для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2n(h+1)}$) векторів w. Теорему доведено. ■

§ 13. Лінійні безтипні системи рівнянь із частинними похідними

Вивчаються задачі з нелокальними умовами для системи диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами в п. 13.1 [88], для нормальних анізотропних систем – у п. 13.2 [83], для системи із змінними за x коефіцієнтами – у п. 13.3 [41].

13.1. Системи рівнянь із сталими коефіцієнтами

Розглянемо систему диференціальних рівнянь з частинними похідними і сталими комплексними коефіцієнтами:

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{i\partial x}\Big)u(t,x)\equiv\sum_{|\hat{s}|\le n}A_{\hat{s}}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^{s_0}\Big(\frac{\partial}{i\partial x}\Big)^{s}u=0,\tag{1}$$

де $A_{\hat{s}}$ – квадратні матриці розміру m; $A_{n,0,\ldots,0}=I_m$ – одинична матриця; $u=u(t,x)=\mathrm{col}\,(u_1(t,x),\ldots,u_m(t,x))$ – вектор розміру m; $n,m\ge1$; $(\partial/i\partial x)^s=(\partial/i\partial x_1)^{s_1}\ldots(\partial/i\partial x_p)^{s_p}$.

Шукаємо розв'язок $u\in\overline{H}_q^n(D^p)$ системи (1), що задовольняє нелокальні умови

$$\nu\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big|_{t=0}-\mu\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big|_{t=T}=\varphi_j(x),\ j=0,1,\ldots,n-1,\tag{2}$$

де ν, μ – комплексні числа, $|\nu|+|\mu|\ne0$, φ_j – задані вектор-функції з шкали просторів $\overline{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$.

Введемо псевдодиференціальні оператори (п.д.о.), які використовуються надалі (див. п. 15.1). Для цього розглянемо довільну послідовність комплексних чисел $F(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$. Вона породжує п.д.о. $F(\partial/i\partial x)$, що діє на функцію $\varphi(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\psi(k)e^{i(k,x)}$ за формулою

$$F\Big(\frac{\partial}{i\partial x}\Big)\varphi(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}F(k)\psi(k)e^{i(k,x)}.$$

Коефіцієнти $\psi(k)$ розвинення $\varphi(x)$ в ряд Фур'є породжують оператор $\psi(\partial/i\partial x)$. А тому кожній функції з $H_q(\Omega_{2\pi}^p)$ відповідає п.д.о. $\psi(\partial/i\partial x)$. При цьому $\varphi(x)=\psi(\partial/i\partial x)\delta(x)$, де $\delta(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}e^{i(k,x)}$ – дельта-функція Дірака [42]. Очевидно, що $\delta(x)\in H_q(\Omega_{2\pi}^p)$ при $q<-p/2$.

Аналогічно, послідовність функцій $F(t,k)$, $t\in[0,T]$, породжує оператор $F(t,\partial/i\partial x)$, функція $v(t,x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}V(t,k)e^{i(k,x)}\in\overline{H}_q^n(D^p)$, $q\in\mathbb{R}$ – оператор-функцію $V(t,\partial/i\partial x)$. При цьому $v(t,x)=V(t,\partial/i\partial x)\delta(x)$.

Нехай $y=(y_1,\ldots,y_p)$ – допоміжна дійсна змінна, оператор диференціювання за цією змінною $\partial/\partial y=(\partial/\partial y_1,\ldots,\partial/\partial y_p)$. Тоді справедливою є лема.

Лема 1. *Нехай $\varphi \in H_q(\Omega^p_{2\pi})$, $q \in \mathbb{R}$. Тоді для довільної функції $F(y)$, аналітичної в точках $y = k \in \mathbb{Z}^p$, справедлива рівність*

$$F\Big(\frac{\partial}{i\partial x}\Big)\varphi(x) = \varphi\Big(x + \frac{\partial}{i\partial y}\Big)F(y)\Big|_{y=0}. \qquad (3)$$

Доведення. Оскільки $e^{k\partial/\partial y}F(y) = F(y+k)$, де $k\,\partial/\partial y = k_1\partial/\partial y_1 + \dots + k_p\partial/\partial y_p$, то

$$F\Big(\frac{\partial}{i\partial x}\Big)\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\psi(k)e^{i(k,x)}F(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\psi(k)e^{i(k,x)}e^{k\partial/\partial y}F(y)\Big|_{y=0} =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\psi(k)e^{ik(x+\partial/i\partial y)}F(y)\Big|_{y=0} = \varphi\Big(x + \frac{\partial}{i\partial y}\Big)F(y)\Big|_{y=0}.$$

Лему доведено. ■

Очевидно, що $\varphi(x) = \delta(x + \partial/i\partial y)\psi(y)|_{y=0}$. З леми випливає, що $V(t,\partial/i\partial x)\varphi(x) = \varphi(x+\partial/i\partial y)V(t,y)|_{y=0}$, де $V(t,y)$ є аналітичною в точках $y = k \in \mathbb{Z}^p$, а $\varphi \in H_q(\Omega^p_{2\pi})$, $q \in \mathbb{R}$.

Задача (1), (2) еквівалентна задачі з нелокальними умовами для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку за часовою змінною

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = L\Big(\frac{\partial}{i\partial x}\Big)v(t,x), \qquad (4)$$

$$\nu v(0,x) - \mu v(T,x) = \varphi(x), \qquad (5)$$

де

$$v(t,x) = \mathrm{col}\Big(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{n-1}u}{\partial t^{n-1}}\Big) = \mathrm{col}\,(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}),$$

$$L\Big(\frac{\partial}{i\partial x}\Big) = \begin{pmatrix} 0 & I_{(n-1)m} \\ -L_n(\partial/i\partial x) & -L_{n-1}(\partial/i\partial x)\dots - L_1(\partial/i\partial x)\end{pmatrix},$$

$$L_j\Big(\frac{\partial}{i\partial x}\Big) = \sum_{|s|\le j} A_{n-j,s}\Big(\frac{\partial}{i\partial x}\Big)^s,\ j = 1,\dots,n,$$

$$\varphi(x) = \mathrm{col}\,(\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)).$$

Оскільки

$$v(t,x) \equiv V\Big(t, \frac{\partial}{i\partial x}\Big)\delta(x) \equiv$$

$$\equiv \mathrm{col}\Big(V_0\Big(\frac{\partial}{i\partial x}\Big), V_1\Big(\frac{\partial}{i\partial x}\Big), \dots, V_{n-1}\Big(\frac{\partial}{i\partial x}\Big)\Big)\delta(x), \qquad (6)$$

$$\varphi(x) \equiv \psi\Big(\frac{\partial}{i\partial x}\Big)\delta(x) \equiv$$

$$\equiv \mathrm{col}\Big(\psi_0\Big(\frac{\partial}{i\partial x}\Big), \psi_1\Big(\frac{\partial}{i\partial x}\Big), \dots, \psi_{n-1}\Big(\frac{\partial}{i\partial x}\Big)\Big)\delta(x), \qquad (7)$$

то задача (4), (5) еквівалентна множині нелокальних крайових задач на проміжку $[0,T]$ для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{dV(t,k)}{dt} = L(k)V(t,k), \qquad (8)$$

$$\nu V(0,k) - \mu V(T,k) = \psi(k),\ k \in \mathbb{Z}^p. \qquad (9)$$

Для формулювання умов існування та єдності розв'язку задачі (8), (9) введемо позначення, що пов'язують матрицю $L(k)$, вектор $\psi(k)$ і константи ν, μ. Нехай $\lambda_j(k)$, $j = 1,\dots,\gamma(k)$, – корені характеристичного рівняння $\det(\lambda I_{nm} - L(k)) = 0$ кратностей $\alpha_j(k)$ відповідно, $\sum_{j=1}^{\gamma(k)}\alpha_j(k) = nm$, причому $\lambda_j(k)$ при $j = 1,\dots,\beta(k)$, $\beta(k) \ge 0$, задовольняють рівність $\nu = \mu e^{\lambda_j(k)T}$, а при $j > \beta(k)$ – нерівність $\nu \ne \mu e^{\lambda_j(k)T}$. Очевидно, що для деяких $q_j(k) \in \mathbb{Z}$ маємо $\lambda_j(k)T = \ln(\nu/\mu) + i2\pi q_j(k)$, $j = 1,\dots,\beta(k)$. Будемо вважати, що $q_1(k) > q_2(k) > \dots > q_{\beta(k)}(k)$.

Нехай $\gamma_j(k)$ кількість жорданових кліток

$$J_{js}(k) = \begin{pmatrix} \lambda_j(k) & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j(k)\end{pmatrix},$$

що відповідають кореню $\lambda_j(k)$ (з теорії елементарних дільників випливає [268], що $\gamma_j(k) \le m$). Нехай ці клітки впорядковані за індексом s так, що їх розмір $\alpha_{js}(k)$ не спадає, тобто $\alpha_{j1}(k) \le \alpha_{j2}(k) \le \dots \le \alpha_{j,\gamma_j(k)}(k)$; $\sum_{s=1}^{\gamma_j(k)}\alpha_{js}(k) = \alpha_j(k)$.

Нехай матриця $E_{js}(k)$ розміру $nm \times \alpha_{js}(k)$ побудована з власного $E_{js}(1,k)$ і приєднаних $E_{js}(2,k), \dots, E_{js}(\alpha_{js}(k),k)$ векторів, що відповідають жордановій клітці $J_{js}(k)$; $L(k)E_{js}(k) = E_{js}(k)J_{js}(k)$. Нехай також $E_j(k) = (E_{j1}(k), \dots, E_{j,\gamma_j(k)}(k))$ – матриця розміру $nm \times \alpha_j(k)$, $J_j(k) = \mathrm{diag}(J_{j1}(k), \dots, J_{j,\gamma_j(k)}(k))$ – квадратна матриця розміру $\alpha_j(k)$, $E(k) = (E_1(k), \dots, E_{\gamma(k)}(k))$, $J(k) = \mathrm{diag}(J_1(k), \dots, J_{\gamma(k)}(k))$.

У наведених позначеннях матриця $L(k)$ має таку форму Жордана:

$$L(k) = E(k)J(k)E^{-1}(k) = E(k)J(k)T^*k), \tag{10}$$

де $T(k) = (E^{-1}(k))^*$, а * позначає операцію ермітового спряження.

Розіб'ємо матрицю $T(k)$ на блоки відповідно до розбиття матриці $E(k)$, а саме: $T(k) = (T_1(k), \ldots, T_{\gamma(k)}(k))$, $T_j(k) = (T_{j1}(k), \ldots, T_{j,\gamma_j(k)}(k))$, $T_{js}(k) = (T_{js}(1,k), \ldots, T_{js}(\alpha_{js}(k), k))$.

Якщо матриця $L(k)$ має форму Жордана (10), то функція $f(L(k))$ визначається формулою [33]

$$f(L(k)) = E(k)f(J(k))T^*(k), \tag{11}$$

де $f(J(k)) = \operatorname{diag}(f(J_1(k)), \ldots, f(J_{\gamma(k)}(k)))$,

$$f(J_j(k)) = \operatorname{diag}(f(J_{j1}(k)), \ldots, f(J_{j,\gamma_j(k)}(k))),$$

$f(J_{js}(k))$ – матриця розміру $\alpha_{js}(k)$ з елементами

$$f_{ab}(J_{js}(k)) = \begin{cases} f^{(b-a)}(\lambda_j(k))/(b-a)! & \text{при} \quad 1 \le a \le b \le \alpha_{js}(k), \\ 0 & \text{при} \quad 1 \le b < a \le \alpha_{js}(k). \end{cases}$$

Отже, матриця $f(L(k))$ визначається за допомогою значень функції $f(\lambda)$ та її похідних до порядку $\alpha_{j1}(k) - 1$ в точках $\lambda = \lambda_j(k)$, $j = 1, \ldots, \gamma(k)$.

Введемо функції $f(t, \lambda)$ і $\widetilde{f}(t, \lambda)$, які в околі точки $\lambda_j(k)$ задаються формулами

$$f(t, \lambda) = \begin{cases} e^{\lambda t}/(\nu - \mu e^{\lambda T}) & \text{при} \quad \beta(k) < j \le \gamma(k), \\ 0 & \text{при} \quad 1 \le j \le \beta(k), \end{cases}$$

$$\widetilde{f}(t, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \beta(k) < j \le \gamma(k), \\ \exp(\lambda_j(k)t)(\lambda - \lambda_j(k))^{\alpha_{j1}(k)-1} & \text{при} \quad 1 \le j \le \beta(k). \end{cases}$$

Теорема 1. *Для існування розв'язку задачі (8), (9) необхідно і достатньо, щоб*

$$T^*_{js}(\alpha_{js}(k), k)\psi(k) = 0, \; j = 1, \ldots, \beta(k), \; s = 1, \ldots, \gamma_j(k). \tag{12}$$

При цьому розв'язок зображається формулою

$$\begin{aligned} V(t,k) &= f(t, L(k))\psi(k) - \sum_{j=1}^{\beta(k)} \sum_{s=1}^{\gamma_j(k)} E_{js}(k) e^{J_{js}(k)(t-T)} \times \\ &\times \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Phi^{-1}(\alpha_{js}(k)-1) & 0 \end{pmatrix} T^*(k)\psi(k); \end{aligned} \tag{13}$$

ядро задачі (8), (9) має розмірність $\sum\limits_{j=1}^{\beta(k)} \gamma_j(k)$, *його елементи мають вигляд*

$$\widetilde{V}(t,k) = \sum_{j=1}^{\beta(k)} e^{\lambda_j(k)t} \sum_{s=1}^{\gamma_j(k)} E_{js}(1,k)C_{js}(1,k), \tag{14}$$

де $C_{js}(1,k)$ – довільні сталі; $\Phi(\alpha)$ – квадратна матриця розміру α з елементами $\Phi_{ab}(\alpha) = 0$ при $1 \le b < a \le \alpha$, $\Phi_{ab}(\alpha) = T^{b-a+1}/(b-a+1)!$ при $1 \le a \le b \le \alpha$.

Д о в е д е н н я. Загальний розв'язок рівняння (8)

$$V(t,k) = e^{L(k)t}C(k) = E(k)e^{J(k)t}T^*(k)C(k),$$

де $C(k)$ – довільний вектор з констант, підставимо в умови (9). Одержимо систему для визначення $C(k)$:

$$E(k)\left(\nu - \mu e^{J(k)T}\right)T^*(k)C(k) = \psi(k)$$

або

$$\left(\nu - \mu e^{J(k)T}\right)T^*(k)C(k) = T^*(k)\psi(k).$$

Враховуючи блочну будову матриць $J(k)$, $T(k)$, маємо

$$\left(\nu - \mu e^{J_{js}(k)T}\right)T^*_{js}(k)C(k) = T^*_{js}(k)\psi(k), \; j > \beta(k), \; s = 1, \ldots, \gamma_j(k),$$

а при $\beta(k) > 0$ і $\alpha_{js}(k) > 1$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & -\mu e^{\lambda_j(k)T}\Phi(\alpha_{js}(k)-1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times T^*_{js}(k)C(k) = \\ &= T^*_{js}(k)\psi(k), \; j \le \beta(k), \; s = 1, \ldots, \gamma_j(k). \end{aligned}$$

Якщо ж $j \le \beta(k)$, $\alpha_{js}(k) = 1$, то $0 \cdot T^*_{js}(k)C(k) = T^*_{js}(k)\psi(k)$. Звідси одержимо

$$T^*_{js}(k)C(k) = \left(\nu - \mu e^{J_{js}(k)T}\right)^{-1} T^*_{js}(k)\psi(k), \quad j > \beta(k),$$

$$\begin{pmatrix} T^*_{js}(2,k) \\ \vdots \\ T^*_{js}(\alpha_{js}(k),k) \end{pmatrix} C(k) = -\Phi^{-1}(\alpha_{js}(k)-1) \begin{pmatrix} T^*_{js}(1,k) \\ \vdots \\ T^*_{js}(\alpha_{js}(k)-1,k) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \frac{1}{\mu} e^{\lambda_j(k)T}\psi(k), \quad j \le \beta(k), \quad \alpha_{js}(k) > 1,$$

$$T^*_{js}(1,k)C(k) = C_{js}(1,k), \quad j \le \beta(k), \quad s = 1, \ldots, \gamma_j(k),$$

$$T^*_{js}(\alpha_{js}(k),k)\psi(k) = 0, \quad j \le \beta(k), \quad s = 1, \ldots, \gamma_j(k).$$

Підставивши знайдені $T^*_{js}(k)C(k)$ у формулу загального розв'язку

$$V(t,k) = \sum_{j=1}^{\gamma(k)} \sum_{s=1}^{\gamma_j(k)} E_{js}(k)e^{J_{js}(k)t}T^*_{js}(k)C(k),$$

одержуємо формули (12)–(14), що і треба було довести. ■

Наслідок 1. *Щоб записати умови (12) у вигляді функції від матриці $L(k)$, необхідно і достатньо, щоб*

$$T^*_{js}(q,k)\psi(k) = 0, \ q = \alpha_{j1}(k), \dots, \alpha_{js}(k), \ j \le \beta(k), \ s = 1, \dots, \gamma_j(k);$$

у цьому випадку умови (12) матимуть вигляд

$$\tilde{\tilde{f}}(L(k))\psi(k) \equiv \tilde{f}(0, L(k))\psi(k) = 0. \tag{15}$$

Наслідок 2. *Щоб записати ядро (14) задачі (8), (9) у вигляді функції від матриці $L(k)$, необхідно і достатньо, щоб*

$$\alpha_{j1}(k) = \alpha_{j,\gamma_j(k)}(k), \quad j = 1, \dots, \beta(k);$$

тоді елементи ядра зображаються формулою

$$\tilde{V}(t,k) = \tilde{f}(t, L(k))C(k), \tag{16}$$

де $C(k)$ – довільний вектор.

Наслідок 3. *Щоб записати частинний розв'язок (13) задачі (8), (9) у вигляді функції від матриці $L(k)$, необхідно і достатньо, щоб*

$$\alpha_{j1}(k) = 1, \quad j = 1, \dots, \beta(k).$$

Цей розв'язок $V(t,k)$ зображається формулою

$$V(t,k) = f(t, L(k))\psi(k); \tag{17}$$

формули (12) і (14), згідно з наслідками 1 і 2, мають вигляд (15) і (16) відповідно.

Наслідок 4. *Розв'язок задачі (8), (9) існує, єдиний і визначений для всіх правих частин $\psi(k)$ в умовах (9) тоді і тільки тоді, коли алгебричне рівняння*

$$\det\left(\left(\ln\frac{\nu}{\mu} + i2\pi q\right)\frac{I_{nm}}{T} - L(k)\right) = 0 \tag{18}$$

не має q-коренів на множині цілих чисел, тобто, коли $\beta(k) = 0$; він зображається формулою (17), де $f(t,\lambda) \equiv e^{\lambda t}(\nu - \mu e^{\lambda T})^{-1}$.

Наслідки 1–4 випливають з доведення теореми 1.

Користуючись означенням (11) функції від матриці, перепишемо вирази (15)–(17):

$$E(k)\tilde{\tilde{f}}(J(k))T^*(k)\psi(k) \equiv E(k)\tilde{f}(0, J(k))T^*(k)\psi(k) = 0,$$
$$\tilde{V}(t,k) = E(k)\tilde{f}(t, J(k))T^*(k)C(k),$$
$$V(t,k) = E(k)f(t, J(k))T^*(k)\psi(k).$$

Покажемо, що добуток довільної функції $f(L(k))$ на деякий вектор $C(k)$ можна записати виключно за допомогою власних чисел $\lambda_j(k)$ матриці $L(k)$, не використовуючи при цьому її власних та приєднаних векторів. Нехай $N(k)$ – степінь мінімального многочлена $g(\lambda,k) = (\lambda - \sigma_1(k))^{N_1(k)} \dots (\lambda - \sigma_{\varkappa(k)}(k))^{N_{\varkappa(k)}(k)}$ вектора $C(k)$ щодо матриці $L(k)$ [33]. Очевидно, що множина коренів $\{\sigma_j(k)\}$ є підмножиною множини коренів $\{\lambda_j(k)\}$.

Для $j = 1, \dots, \varkappa(k)$, $s = 1, \dots, N_j(k)$, позначимо

$$(R(k))_{C(k)} = \left(C(k), L(k)C(k), \dots, L^{N(k)-1}(k)C(k)\right), \tag{19}$$

$$(W(k))_{C(k)} = \left((W_1(k))_{C(k)}, \dots, (W_{\varkappa(k)}(k))_{C(k)}\right), \tag{20}$$

$$(W_j(k))_{C(k)} = \left((W_{j1}(k))_{C(k)}, \dots, (W_{j,N_j(k)}(k))_{C(k)}\right), \tag{21}$$

$$(W_{js}(k))_{C(k)} = \frac{1}{(s-1)!}\left(\frac{d}{d\sigma}\right)^{s-1} \operatorname{col}(1, \sigma, \dots, \sigma^{N(k)-1})\Big|_{\sigma=\sigma_j(k)}, \tag{22}$$

$$(f(\lambda))_{C(k)} = \operatorname{col}\left((f(\sigma_1(k)))_{C(k)}, \dots, (f(\sigma_{\varkappa(k)}(k)))_{C(k)}\right), \tag{23}$$

$$(f(\sigma_j(k)))_{C(k)} = \operatorname{col}\left(f(\sigma_j(k)), f'(\sigma_j(k)), \dots, \frac{f^{(N_j(k)-1)}(\sigma_j(k))}{(N_j(k)-1)!}\right). \tag{24}$$

Матриця $(W(k))_{C(k)}$ – це матриця Вандермонда, що побудована за коренями полінома $g(\lambda,k)$, $(f(\lambda))_{C(k)}$ – вектор значень функції $f(\lambda)$ на коренях полінома $g(\lambda,k)$ [94].

Теорема 2. *Для добутку функції від оператора $L(k)$ і вектора $C(k)$ справедлива така формула:*

$$f(L(k))C(k) = (R(k))_{C(k)} (W(k))^{-T}_{C(k)} (f(\lambda))_{C(k)}, \tag{25}$$

де $(W(k))^{-T}_{C(k)} = \left((W(k))^{-1}_{C(k)}\right)^T = \left((W(k))^T_{C(k)}\right)^{-1}$.

Д о в е д е н н я. Нехай $e_{1,N(k)}, e_{2,N(k)}, \dots, e_{N(k),N(k)}$ – стовпці одиничної матриці розміру $N(k)$. Тоді за формулою (19) отримаємо

$$(R(k))_{C(k)} (W(k))^{-T}_{C(k)} (f(\lambda))_{C(k)} = \sum_{j=1}^{N(k)} e^T_{j,N(k)} \times$$

$$\times (W(k))^{-T}_{C(k)} (f(\lambda))_{C(k)} L^{j-1}(k)C(k).$$

Врахувавши (10), перетворимо праву частину останньої рівності до вигляду

$$E(k)\Big(\sum_{j=1}^{N(k)} e^T_{j,N(k)} (W(k))^{-T}_{C(k)} (f(\lambda))_{C(k)} J^{j-1}(k)\Big)T^*(k)C(k).$$

Використовуючи позначення (20)–(24), приходимо до рівності

$$E(k)f(J(k))T^*(k)C(k) = f(L(k))C(k).$$

Теорему доведено. ■

Наслідок 5. *Формула (25) справедлива, якщо в позначеннях (19)–(24) як многочлен $g(\lambda, k)$ використовувати довільний анулюючий многочлен вектора $C(k)$ щодо матриці $L(k)$, зокрема мінімальний чи характеристичний многочлен матриці $L(k)$ [33].*

Наслідок 6. *Нехай матриця $L(k)$ має мінімальний многочлен*

$$g(\lambda, k)=(\lambda - \lambda_1(k))^{\alpha_{11}(k)} \ldots (\lambda - \lambda_{\gamma(k)}(k))^{\alpha_{\gamma(k),1}(k)},$$

степінь якого $N(k) = \alpha_{11}(k) + \cdots + \alpha_{\gamma(k),1}(k)$,

$$W(k) = \big(W_1(k), \ldots, W_{\gamma(k)}(k)\big),$$

$$W_j(k) = \big(W_{j1}(k), \ldots, W_{j,\alpha_{j1}(k)}(k)\big), \quad j = 1, \ldots, \gamma(k),$$

$$W_{js}(k) = \frac{1}{(s-1)!}\Big(\frac{d}{d\lambda}\Big)^{s-1} \mathrm{col}(1, \lambda, \ldots, \lambda^{N(k)-1})\Big|_{\lambda=\lambda_j(k)},$$

$$f(\lambda(k)) = \mathrm{col}(f_1(\lambda(k)), \ldots, f_{\gamma(k)}(\lambda(k))),$$

$$f_j(\lambda(k)) = \mathrm{col}\Big(f(\lambda_j(k)), f'(\lambda_j(k)), \ldots, \frac{f^{\alpha_{j1}(k)-1}(\lambda_j(k))}{(\alpha_{j1}(k)-1)!}\Big).$$

Тоді $f(L(k))$ зображається формулою

$$f(L(k)) = \sum_{j=1}^{N(k)} e^T_{j,N(k)} W^{-T}(k) f(\lambda(k)) L^{j-1}(k). \tag{26}$$

За умов наслідку 4 розв'язок задачі (8), (9) записується у вигляді

$$V(t, k) = (R(k))_{\psi(k)} (W(k))^{-T}_{\psi(k)} (f(t, \lambda))_{\psi(k)}. \tag{27}$$

Якщо $\beta(k) = 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ (рівняння (18) не має розв'язку $(q, k) \in \mathbb{Z}^{p+1}$), то існує єдиний формальний розв'язок задачі (4), (5),

який згідно з (27) записується у вигляді

$$v(t, x)=\Big(R\Big(\frac{\partial}{i\partial x}\Big)\Big)_{\psi(\partial/i\partial x)}\Big(W\Big(\frac{\partial}{i\partial x}\Big)\Big)^{-T}_{\psi(\partial/i\partial x)}(f(t, \lambda))_{\psi(\partial/i\partial x)}\delta(x)= \\ = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} (R(k))_{\psi(k)} (W(k))^{-T}_{\psi(k)} (f(t, \lambda))_{\psi(k)} e^{i(k,x)}. \tag{28}$$

Поклавши у формулі (26) $f(\lambda) = f(t, \lambda) = (\nu e^{-\lambda t} - \mu e^{\lambda(T-t)})^{-1}$, одержимо для розв'язку задачі (4), (5) ще один вираз

$$v(t, x)=f\Big(t, L\Big(\frac{\partial}{i\partial x}\Big)\Big)\varphi(x)= \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} e^{L(k)t}\big(\nu-\mu e^{L(k)T}\big)^{-1}\psi(k)e^{i(k,x)} =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \sum_{j=1}^{N(k)} e^T_{j,N(k)} W^{-T}(k) f(t, \lambda(k)) L^{j-1}(k)\psi(k)e^{i(k,x)} =$$

$$= \sum_{s=1}^{nm} \widehat{\varphi}_s\Big(x+\frac{\partial}{i\partial y}\Big) \sum_{j=1}^{N(y)} e^T_{j,N(y)} W^{-T}(y) f(t, \lambda(y)) L^{j-1}(y) e_{s,np}\Big|_{y=0}, \tag{29}$$

який випливає з рівностей (3) і $\varphi(x) = \mathrm{col}\,(\widehat{\varphi}_1(x), \ldots, \widehat{\varphi}_{nm}(x))$.

Згідно з прийнятими позначеннями, формальний розв'язок $u(t, x)$ задачі (1), (2) утворюють m перших компонент розв'язку $v(t, x)$ задачі (4), (5). Розглядуваний розв'язок при виконанні умов єдиності зображається формулою (29).

Встановимо умови існування розв'язку задачі (1), (2) у просторі $H^n_n(D^p)$, тобто умови, за яких справедлива нерівність $\|u\|_{\overline{H}^n_n(D^p)} < \infty$. Оскільки

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = -L_n\Big(\frac{\partial}{i\partial x}\Big)u - L_{n-1}\Big(\frac{\partial}{i\partial x}\Big)\frac{\partial u}{\partial t} - \cdots - L_1\Big(\frac{\partial}{i\partial x}\Big)\frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}},$$

то

$$\Big\|\frac{\partial^n u}{\partial t^n}\Big\|^2_{\overline{H}_0(\Omega^p_{2\pi})} \le C_1\Big(\|u\|^2_{\overline{H}_n(\Omega^p_{2\pi})} + \\ + \Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|^2_{\overline{H}_{n-1}(\Omega^p_{2\pi})} + \cdots + \Big\|\frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}}\Big\|^2_{\overline{H}_1(\Omega^p_{2\pi})}\Big),$$

де C_1 – деяка константа. Отже,

$$\|u\|^2_{\overline{H}^n_n(D^p)} \le (C_1 + 1)\int_0^T \sum_{j=0}^{n-1} \Big\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big\|^2_{\overline{H}_{n-j}(\Omega^p_{2\pi})} dt =$$

$$=(C_1 + 1)\int_0^T \sum_{j=0}^{n-1} \|v_j\|^2_{\overline{H}_{n-j}(\Omega^p_{2\pi})} dt =$$

$$=(C_1+1)\int_0^T \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} |\tilde{k}^{n-j}V_j(t,k)|^2\,dt =$$

$$=(C_1+1)\int_0^T \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} |ZV(t,k)|^2\,dt, \tag{30}$$

де $\tilde{k}^2 = 1+\|k\|^2$, $Z=\operatorname{diag}(\tilde{k}^n I_m,\ldots,\tilde{k}^2 I_m,\tilde{k}I_m)$.

Нехай для довільного вектора $\hat{\xi}=(\xi,\xi_{p+1})=(\xi_1,\ldots,\xi_{p+1})\in \in\mathbb{R}^{p+1}$, $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_p)\in\mathbb{R}^p$, $L_j(\hat{\xi})=\sum\limits_{|s|\le j} A_{n-j,s}\xi^s\xi_{p+1}^{j-s_1-\ldots-s_p}$ – однорідний многочлен степеня j за змінними $\xi_1,\ldots,\xi_{p+1}$,

$$L(\hat{\xi})=\begin{pmatrix} 0 & I_{(n-1)m} \\ -L_n(\hat{\xi}) & -L_{n-1}(\hat{\xi})\ldots-L_1(\hat{\xi}) \end{pmatrix}.$$

Тоді $ZL(k)=L(k/\tilde{k},1/\tilde{k})Z\tilde{k}$.

Якщо $\lambda_j(\hat{\xi})$ – корінь рівняння $\det(\lambda I_{nm}-L(\hat{\xi}))=0$, то справджуються рівності $\lambda_j(k/\tilde{k},1/\tilde{k})=\lambda_j(k)/\tilde{k}$ і збігаються розміри та кількість жорданових кліток матриць $L(k)$ та $L(k/\tilde{k},1/\tilde{k})$, тобто

$$\alpha_{js}(k)=\alpha_{js}(k/\tilde{k},1/\tilde{k}),\ \gamma(k)=\gamma(k/\tilde{k},1/\tilde{k}),\ \gamma_j(k)=\gamma_j(k/\tilde{k},1/\tilde{k}).$$

Позначимо: $Z_\alpha(\tilde{k})=\operatorname{diag}(1,\tilde{k},\ldots,\tilde{k}^{\alpha-1})$,

$$\rho(t,k)=\operatorname{col}(\rho_1(t,k),\ldots,\rho_{\gamma(k)}(t,k)),\ \rho_j(t,k)=Z_{\alpha_{j1}(k)}(\tilde{k})f_j(t,\lambda(k)),$$

$$\rho(t,\hat{\xi})=\operatorname{col}(\rho_1(t,\hat{\xi}),\ldots,\rho_{\gamma(\hat{\xi})}(t,\hat{\xi})),\ \rho_j(t,\hat{\xi})=Z_{\alpha_{j1}(\hat{\xi})}(\xi_{p+1}^{-1})\times$$
$$\times f_j(t,\xi_{p+1}^{-1}\lambda(\hat{\xi})).$$

Матриця Вандермонда $W(\hat{\xi})$ будується аналогічно матриці $W(k)$. Очевидно, що $\rho(t,k/\tilde{k},1/\tilde{k})=\rho(t,k)$, а для матриці

$$Q(t,\hat{\xi})=\sum_{j=1}^{N(\hat{\xi})} e^T_{j,N(\hat{\xi})}W^{-T}(\hat{\xi})\frac{\rho(t,\hat{\xi})}{\|\rho(t,\hat{\xi})\|}L^{j-1}(\hat{\xi}),$$

де $\|\rho(t,\hat{\xi})\|^2$ – сума квадратів модулів компонент вектора $\rho(t,\hat{\xi})$, справедлива рівність

$$ZV(t,k)=Q(t,k/\tilde{k},1/\tilde{k})\|\rho(t,k/\tilde{k},1/\tilde{k})\|Z\psi(k).$$

Оскільки функція $\|Q(t,\hat{\xi})\|^2$, де $\|Q\|$ – норма матриці Q, задана і неперервна на компакті $K=\{(t,\hat{\xi}): t\in[0,T], |\hat{\xi}|=1, \xi_{p+1}\ge$

$\ge 0\}$, то за теоремою Вейєрштрасса $\max\limits_K\|Q(t,\hat{\xi})\|^2\le C_2$, де $C_2= = C_2(A_{\tilde{s}},\mu,\nu,T)$ – неперервна функція своїх аргументів; отже, для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ $\|Q(t,k/\tilde{k},1/\tilde{k})\|^2\le C_2$, а значить,

$$\|ZV(t,k)\|^2\le C_2\|\rho(t,k)\|^2|Z\psi(k)|^2=C_2\|\rho(t,k)\|^2\sum_{j=0}^{n-1}|\tilde{k}^{n-j}\psi_j(k)|^2.$$

При цьому нерівність (30) набуде вигляду

$$\|u\|^2_{H^n_n(D^p)}\le(C_1+1)C_2\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\int_0^T\|\rho(t,k)\|^2\,dt\sum_{j=0}^{n-1}|\tilde{k}^{n-j}\psi_j(k)|^2. \tag{31}$$

З означення вектора

$$\rho_r(t,k)=\operatorname{col}(\rho_{r,0}(t,k),\rho_{r,1}(t,k),\ldots,\rho_{r,\alpha_{r1}(k)-1}(t,k))$$

випливають рекурентні співвідношення:

$$\rho_{r,0}(t,k)=\frac{e^{\lambda_r(k)t}}{\nu-\mu e^{\lambda_r(k)T}},$$

$$\rho_{r,s}(t,k)=\frac{(\tilde{k}t)^s}{s!}\rho_{r,0}(t,k)+\mu\rho_{r,0}(T,k)\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{(\tilde{k}T)^\alpha}{\alpha!}\rho_{r,s-\alpha}(t,k).$$

Нехай $\theta=\theta(k)\ge 1$ – обмежує зверху числа $\rho_{r,0}(t,k)$, $r=1,\ldots,\gamma(k)$, $t\in[0,T]$, тобто $\sup\limits_{r,t}|\rho_{r,0}(t,k)|\le\theta$. Методом математичної індукції можна одержати оцінки зверху для решти компонент вектора $\rho_r(t,k)$, а саме оцінку $|\rho_{r,s}(t,k)|\le(2\chi\tilde{k})^s\theta^{s+1}$, де $\chi=(1+\mu)\sum\limits_{j=1}^{nm}T^j/(j!)$.

Якщо $\tilde{s}$ – максимальна кратність деякого кореня мінімального многочлена $g(\lambda,k)$ матриці $L(k)$, яка досягається для нескінченної кількості векторів k, то $\|\rho(t,k)\|\le C_3\tilde{k}^{\tilde{s}-1}\theta^{\tilde{s}}$, де C_3 – константа, що не залежить від t і k. З нерівності (31) маємо, що

$$\|u\|^2_{H^n_n(D^p)}\le(C_1+1)C_2C_3T\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\sum_{j=0}^{n-1}|\theta^{\tilde{s}}(k)\tilde{k}^{n-j+\tilde{s}-1}\psi_j(k)|^2. \tag{32}$$

Для знаходження величини $\theta(k)$ використаємо метричний підхід. Розглянемо пару комплексних чисел ν, μ в кулі $B^4\subset\mathbb{R}^4$ одиничного (що не зменшує загальності) радіуса.

Лема 2. *Для довільного $\varepsilon>0$ існує така множина $M\subset B^4$, що $\operatorname{mes}M\le\varepsilon$ і для всіх векторів $(\nu,\mu)\in B^4\setminus M$ та $k\in\mathbb{Z}^p$ виконується оцінка*

$$|\nu-\mu e^{\lambda_r(k)T}|\ge\sqrt{\frac{\varepsilon}{4nmC_4(\varepsilon_1)}}\max\left(1,e^{\operatorname{Re}\lambda_r(k)T}\right)\tilde{k}^{-(p+\varepsilon_1)/2}, \tag{33}$$

для довільних $\varepsilon_1 > 0$ *і* $r = 1, \ldots, \gamma(k)$, *де* $C_4(\varepsilon_1) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{-m-\varepsilon_1}$.

Доведення. Нехай $M_r(k)$ – множина тих векторів $(\nu, \mu) \in B^4$, для яких при даному $k \in \mathbb{Z}^p$ і r, $1 \leq r \leq \gamma(k)$, виконується обернена до (33) нерівність $\left|\nu - \mu e^{\lambda_r(k)T}\right| < d$. Тут буквою d позначена права частина нерівності (33).

Оскільки $\nu - \mu e^{\lambda_r(k)T} \equiv (Y_1 + iY_2)\eta$, де $\eta = \mathrm{col}(\mathrm{Re}\,\nu, \mathrm{Im}\,\nu, \mathrm{Re}\,\mu, \mathrm{Im}\,\mu)$,

$$\begin{aligned} Y_1 &= \left(1, 0, -\mathrm{Re}\left(e^{\lambda_r(k)T}\right), \mathrm{Im}\left(e^{\lambda_r(k)T}\right)\right), \\ Y_2 &= \left(0, 1, -\mathrm{Im}\left(e^{\lambda_r(k)T}\right), -\mathrm{Re}\left(e^{\lambda_r(k)T}\right)\right), \end{aligned}$$

то $M_r(k) \subset M_r'(k)$, де $M_r'(k)$ – множина векторів $(\nu, \mu) \in B^4$, для яких $|Y_j \eta| \leq d$, $j = 1, 2$.

Легко бачити, що множина $M_r'(k)$ – це множина точок $(\nu, \mu) \in B^4$, які знаходяться між чотирма гіперплощинами $Y_j \eta = \pm d$, $j = 1, 2$. Оскільки $Y_1^T Y_2 = 0$, $Y_1^T Y_1 = Y_2^T Y_2 = 1 + e^{2\mathrm{Re}\,\lambda_r(k)T}$, то ці пари гіперплощин перпендикулярні і міру множини $M_r'(k)$ можна оцінити таким чином:

$$\mathrm{mes}\, M_r'(k) \leq \frac{4d^2}{1 + e^{2\mathrm{Re}\,\lambda_r(k)T}} \leq \frac{\varepsilon \widetilde{k}^{-m-\varepsilon_1}}{nmC_4(\varepsilon_1)}.$$

Просумувавши за r і k, одержимо, що $\mathrm{mes}\, M \leq \varepsilon$. Лему доведено. ■

З нерівності (33) випливає, що

$$\theta(k) = 2\sqrt{\frac{nmC_4(\varepsilon_1)}{\varepsilon}}\, \widetilde{k}^{(p+\varepsilon_1)/2}.$$

Отже, згідно з оцінкою (32)

$$\|u\|^2_{\overline{H}^n_n(D^p)} \leq 2(C_1+1)C_2C_3T\sqrt{\frac{nmC_4(\varepsilon_1)}{\varepsilon}} \sum_{j=1}^{n-1} \widetilde{k}^{n-j+\widetilde{s}-1+p\widetilde{s}/2+\varepsilon_1\widetilde{s}/2} \times$$

$$\times |\psi_j(k)|^2 = C_5\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \sum_{j=1}^{n-1} \|\varphi_j(x)\|^2_{\overline{H}_{n-j+\widetilde{s}-1+p\widetilde{s}/2+\varepsilon_1\widetilde{s}/2}(\Omega^p_{2\pi})}.$$

Таким чином, справедлива така теорема.

Теорема 3. *Нехай* $\varphi_j \in \overline{H}_{l-j}(\Omega^p_{2\pi})$, $l > n + \widetilde{s} + p\widetilde{s}/2$, *тоді для всіх векторів* $(\nu, \mu) \in B^4 \setminus M$, *де* $\mathrm{mes}\, M \leq \varepsilon$, *існує єдиний розв'язок* $u(t, x)$ *задачі (1), (2) з простору* $\overline{H}^n_n(D^p)$, *що неперервно залежить від правої частини* $\varphi(x)$ *і зображається формулою (29). Для цього розв'язку справедлива оцінка*

$$\|u\|^2_{\overline{H}^n_n(D^p)} \leq C_5\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi_j\|^2_{\overline{H}_{l-j}(\Omega^p_{2\pi})},$$

де C_5 *– деяка константа.*

13.2. Системи нормальних анізотропних рівнянь

Вивчається нелокальна крайова задача для системи нормальних (за часовою змінною) анізотропних (за просторовими змінними) рівнянь із частинними похідними [83].

В області D^p розглянемо нормальну систему диференціальних рівнянь з частинними похідними і сталими коефіцієнтами

$$L\left(\partial/\partial t, D\right) u(t, x) \equiv \sum_{\substack{|\widehat{s}| \leq N \\ s_0 \leq n}} A_{\widehat{s}} D^s \left(\partial/\partial t\right)^{s_0} u = 0, \tag{34}$$

де $A_{\widehat{s}}$ – квадратні матриці розміру m з комплексними елементами, $u = u(t, x) = \mathrm{col}\big(u_1(t, x), \ldots, u_m(t, x)\big)$ – вектор розміру m; $N \geq n \geq 1$, $m \geq 1$, $D^s = D_1^{s_1} \ldots D_p^{s_p}$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$, $j = 1, \ldots, p$.

Максимальні порядки похідних за змінними x_j, що входять в систему (34), можуть бути довільними, не залежать один від одного та від n, тобто система анізотропна стосовно порядків похідних компонент u_j, $j = 1, \ldots, m$, вектор-функції u і є загальною нормальною (розв'язаною відносно старших похідних за часом $\partial^n u_j/\partial t^n$) системою зі сталими коефіцієнтами.

Запишемо оператор $L(\lambda, D)$ у вигляді полінома за змінною λ, а саме

$$L(\lambda, D) = L_0(D)\lambda^n + L_1(D)\lambda^{n-1} + \cdots + L_{n-1}(D)\lambda + L_n(D), \tag{35}$$

де $L_j(D) = \sum_{|s| \leq N-n+j} A_{n-j,s} D^s$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Оскільки система (34) нормальна, то $L_0(D) = I_m$, де I_m – одинична матриця.

Ставимо задачу знаходження розв'язку u системи (34), що задовольняє нелокальні крайові умови за часовою змінною t такого вигляду:

$$\nu \frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big|_{t=0} - \mu \frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big|_{t=T} = \varphi_j(x), \ j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{36}$$

де ν, μ – комплексні числа, $|\nu| \leq 1$, $|\mu| \leq 1$, $\nu\mu \neq 0$, $T > 0$, $\varphi_j(x)$ – задані вектор-функції розміру m.

Задача (34), (36) для ізотропної ($N = n$) системи (34) вивчалася в п. 13.1. За допомогою метричного підходу [205] встановлено умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі в шкалах соболєвських просторів H_q для всіх (за винятком деякої множини малої міри) векторів (ν, μ).

Будемо вивчати розв'язність анізотропної ($N \geq n$) задачі (34), (36) у згаданих вище просторах, тобто праві частини φ_j умов (36) та шукані розв'язки задачі (34), (36) розглядаємо у шкалі просторів H_q, $q \in \mathbb{R}$.

Згідно з формулою (35), задача (34), (36) еквівалентна задачі з нелокальними умовами для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку за часовою змінною

$$\partial v(t,x)/\partial t = L(D)v(t,x), \tag{37}$$

$$\nu v(0,x) - \mu v(T,x) = \varphi(x), \tag{38}$$

де $v(t,x) = \mathrm{col}(u, \partial u/\partial t, \ldots, \partial^{n-1}u/\partial t^{n-1}) = \mathrm{col}(v_0, v_1, \ldots, v_{nm-1})$, $\varphi(x) = \mathrm{col}(\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)) = \mathrm{col}(\varphi^0(x), \varphi^1(x), \ldots, \varphi^{nm-1}(x))$, причому матриця $L(D) = (L_{ij}(D))_{i,j=1,\ldots,nm}$ має такий вигляд:

$$L(D) = \begin{pmatrix} 0 & & I_{(n-1)m} & \\ -L_n(D) & -L_{n-1}(D) & \ldots & -L_1(D) \end{pmatrix}.$$

Нехай $l_\varphi(\lambda, D) = \lambda^{n(D)} + l_{\varphi 1}(D)\lambda^{n(D)-1} + \cdots + l_{\varphi n(D)}(D)$ – мінімальний многочлен (п.д.о.) вектора $\varphi(x)$ щодо матриці $L(D)$, тобто $l_\varphi(L(D), D)\varphi(x) = 0$, і $l_\varphi(\lambda, D) \equiv \prod_{j=1}^{\gamma_\varphi(D)} (\lambda - \lambda_j(D))^{\alpha_{\varphi j}(D)}$, де корені $\lambda_j(D)$ є також коренями (можливо більшої кратності) характеристичного многочлена $l(\lambda, D) \equiv \det(\lambda I_{nm} - L(D))$ системи (37), отже,

$$l(\lambda, D) \equiv \lambda^{nm} + l_1(D)\lambda^{nm-1} + \cdots + l_{nm}(D) = \prod_{j=1}^{\gamma(D)} (\lambda - \lambda_j(D))^{\alpha_j(D)}.$$

Нехай n_i – степінь многочлена $l_i(D) \equiv \sum_{|s| \leq n_i} a_{i,s}D^s$ щодо змінної D, n_{ij} – степінь елемента $L_{ij}(D)$ матриці $L(D)$. Вважаємо, що для $l_i(D) \equiv 0$ відповідне число $n_i = -\infty$, аналогічно для чисел n_{ij}. Позначимо через n_l приведений порядок системи (37) (матриці $L(D)$), а саме: $n_l = \max\limits_{n_i \geq 0} n_i/i \geq 0$; він характеризує ріст коренів $\lambda_j(k)$ характеристичного рівняння $l(\lambda, k) = 0$ при $\widetilde{k} \to \infty$, а саме $\lambda_j(k) = O(\widetilde{k}^{n_l})$.

Виберемо дійсні числа $d_1, \ldots, d_{nm-1}$ ($d_{nm} = 0$) так, щоб вираз $\max\limits_{n_{ij} \geq 0}(d_i - d_j + n_{ij})$ прийняв мінімальне значення, яке позначимо n_L. Якщо наборів $d_1, \ldots, d_{nm-1}$ таких чисел кілька, то вибираємо, наприклад, довільний з тих, в яких сума $d_1^2 + \cdots + d_{nm-1}^2$ мінімальна.

Числа $n_L, d_1, \ldots, d_{nm-1}$ характеризують ріст елементів $L_{ij}(D)$ матриці $L(D)$, а саме $L_{ij}(k) = O(\widetilde{k}^{n_L - d_i + d_j})$ при $\widetilde{k} \to \infty$, тобто п.д.о.-

матриця $ZL(D)Z^{-1}\widetilde{D}^{-n_L}$ є обмеженим оператором:

$$||ZL(D)Z^{-1}\widetilde{D}^{-n_L}|| \leq C_0, \tag{39}$$

де $Z = \mathrm{diag}(\widetilde{D}^{d_1}, \ldots, \widetilde{D}^{d_{nm}})$; $\widetilde{D}$ – п.д.о. породжений послідовністю $\widetilde{k}$; $C_0 > 0$ – деяка константа; $||\cdot||$ – евклідова норма. Із (39) випливає, що $n_l \leq n_L$. Для одного ($m = 1$) рівняння $n_l = n_L$ і $d_i = (n-i)n_l$, $i = 1, \ldots, n$.

Дослідимо задачу (37), (38). Необхідною і достатньою умовою єдиності розв'язку задачі (37), (38) є нерозв'язність у цілих числах $k_0, k_1, \ldots, k_p$ алгебричного рівняння (див. п. 13.1)

$$\det((\beta_1 + i\beta_2 k_0)I_{nm} - L(k)) = 0, \tag{40}$$

де $\beta_1 T = \ln(\nu/\mu)$, $\beta_2 T = 2\pi$, $i = \sqrt{-1}$. Умова (40) – це умова того, що число ν не належить точковому спектру оператора $\mu e^{L(D)T}$; його спектр є зліченною множиною з точками скупчення, розташування яких в комплексній площині може бути довільним.

Отже, для всякого числа ν із одиничного круга з вилученим точковим спектром оператора $\mu e^{L(D)T}$ задача (37), (38) має не більше одного розв'язку для всіх функцій $\varphi(x)$. Доведемо, що при вилученні точок спектра з деякими їхніми околами існує єдиний розв'язок задачі (37), (38), який має певну гладкість (належить простору із шкали просторів H_q).

Теорема 4. *Для існування розв'язку задачі (37), (38) в шкалі просторів H_q для довільного вектора φ, компоненти якого належать шкалі просторів H_q, необхідно, щоб для деяких сталих $K > 0$ і $L \in \mathbb{R}$ для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконувалась нерівність*

$$\left|\nu - \mu e^{\lambda_j(k)T}\right| \geq K\widetilde{k}^L, \ j = 1, \ldots, \gamma(k). \tag{41}$$

Доведення. Нехай $\widetilde{L} \in \mathbb{R}$ – довільне число і умова (41) не виконується, тобто для деякого $L < \min(0, \widetilde{L})$ справедлива протилежна нерівність

$$\left|\nu - \mu e^{\lambda_j(k)T}\right| < \frac{|\nu|}{2}\widetilde{k}^L < \frac{|\nu|}{2}$$

для деякого j, $1 \leq j \leq \gamma(k)$, і деякої нескінченної послідовності $\widetilde{\mathbb{Z}}^p$ векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Звідси випливає, що $\mathrm{Re}\,\lambda_j(k) \geq \ln|\nu/2\mu|/T$ і $e^{\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)t} \geq \widetilde{K} = \min(1, |\nu/2\mu|)$.

Якщо $E_j(k)$ – власний одиничний вектор матриці $L(k)$, який відповідає власному значенню $\lambda_j(k)$, то вектор-функція

$$\widetilde{v}(t,x) = \sum_{k \in \widetilde{\mathbb{Z}}^p} E_j(k) \frac{e^{\lambda_j(k)t + i(k,x)}}{\nu - \mu e^{\lambda_j(k)T}}$$

є розв'язком системи (37) і

$$\widetilde{\varphi}(x) \equiv \nu\widetilde{v}(0,x) - \mu\widetilde{v}(T,x) = \sum_{k\in\widetilde{\mathbb{Z}}^p} E_j(k)e^{i(k,x)}.$$

Компоненти вектора $\widetilde{\varphi}$ є елементами простору H_q при довільному $q < -p/2$, однак

$$\sum_{\alpha=0}^{nm-1} \|\widetilde{v}_\alpha\|^2_{H_{\widetilde{L}}} = \sum_{k\in\widetilde{\mathbb{Z}}^p} \widetilde{k}^{2\widetilde{L}} \frac{e^{\operatorname{Re}\lambda_j(k)t}}{\left|\nu - \mu e^{\lambda_j(k)T}\right|^2} \geq \left(\frac{2\widetilde{K}}{|\nu|}\right)^2 \sum_{k\in\widetilde{\mathbb{Z}}^p} \widetilde{k}^{2(\widetilde{L}-L)}.$$

Оскільки останній ряд розбігається, то для кожного $t \in [0,T]$ хоча б одна компонента $\widetilde{v}_\alpha \notin H_{\widetilde{L}}$. Теорему доведено. ■

Побудуємо розв'язок задачі (37), (38), використавши такі позначення: $R_\Lambda(f(\lambda))$ – розділена різниця порядку $s-1$ ($s \geq 1$) функції $f(\lambda)$ для набору комплексних чисел $\Lambda = \Big(\underbrace{\lambda_1,\ldots,\lambda_1}_{\alpha_1},\ldots,\underbrace{\lambda_\gamma,\ldots,\lambda_\gamma}_{\alpha_\gamma}\Big)$, $s = \alpha_1 + \cdots + \alpha_\gamma$, яку можна подати у вигляді

$$R_\Lambda(f(\lambda)) = \sum_{j=1}^{\gamma} \frac{1}{(\alpha_j-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{\alpha_j-1}\Big(f(\lambda)\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{\gamma}(\lambda-\lambda_i)^{-\alpha_i}\Big)\Big|_{\lambda=\lambda_j} =$$

$$= \prod_{j=1}^{\gamma}\frac{1}{(\alpha_j-1)!}\frac{\partial^{s-\gamma}}{\partial\lambda_1^{\alpha_1-1}\ldots\partial\lambda_\gamma^{\alpha_\gamma-1}}\Big(\sum_{j=1}^{\gamma} f(\lambda_j)\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{\gamma}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}\Big), \quad (42)$$

зокрема, при $\gamma = s$

$$R_\Lambda(f(\lambda)) = \sum_{j=1}^{s} f(\lambda_j)\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{s}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1},$$

при $\gamma = 1$ $R_\Lambda(f(\lambda)) = f^{(s-1)}(\lambda_1)/(s-1)!$ Формула (42) справедлива для функції $f(\lambda)$, аналітичної в точках $\lambda_1,\ldots,\lambda_\gamma$, а для функції $f(\lambda)$, яка аналітична в опуклій області, що містить точки $\lambda_1,\ldots,\lambda_\gamma$, справедлива така інтегральна формула:

$$R_\Lambda(f(\lambda)) = \int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{\gamma-2}} f^{(s-1)}\Big(\sum_{i=1}^{\gamma} t_{i-1}(\lambda_i-\lambda_{i-1})\Big)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{\gamma}\frac{(t_{j-1}-t_j)^{\alpha_j-1}}{(\alpha_j-1)!}dt_1\ldots dt_{\gamma-1} = \prod_{l=1}^{\gamma}\frac{1}{(\alpha_l-1)!}\frac{\partial^{\alpha_l-1}}{\partial\lambda_l^{\alpha_l-1}}\times$$

$$\times\int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{\gamma-2}} f^{(\gamma-1)}\Big(\sum_{i=1}^{\gamma} t_{i-1}(\lambda_i-\lambda_{i-1})\Big)\,dt_1\ldots dt_{\gamma-1}, \quad (43)$$

де $t_0 = 1$, $\lambda_0 = t_\gamma = 0$. Еквівалентність формул (42) і (43) випливає з їх еквівалентності при $\gamma = s$ [276].

Розділена різниця $R_\Lambda(f(\lambda))$ для многочлена $f(\lambda)$ степеня $s-1$ згідно з формулою (43) дорівнює старшому коефіцієнтові цього многочлена, а згідно з формулою (42) вона дорівнює нулю для $f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{\alpha_1}\ldots(\lambda-\lambda_\gamma)^{\alpha_\gamma}g(\lambda)$, де $g(\lambda)$ – аналітична в точках $\lambda_1,\ldots,\lambda_\gamma$ функція.

Розділені різниці різних порядків пов'язані між собою формулою [276]

$$R_\Lambda(f(\lambda)) = \frac{R_{\Lambda_2}(f(\lambda)) - R_{\Lambda_1}(f(\lambda))}{\lambda_{j_1}-\lambda_{j_2}}, \quad \lambda_{j_1}\neq\lambda_{j_2}, \quad (44)$$

де $\Lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_s)$; $\Lambda_2 = (\lambda_1,\ldots,\lambda_{j_2-1},\lambda_{j_2+1},\ldots,\lambda_s)$; $\Lambda_1 = (\lambda_1,\ldots,\lambda_{j_1-1},\lambda_{j_1+1},\ldots,\lambda_s)$. В лівій частині формули (44) – розділена різниця порядку $s-1$, а в правій – розділені різниці порядку $s-2$; набори комплексних чисел Λ_2 і Λ_1 утворені з набору Λ вилученням чисел λ_{j_2} і λ_{j_1} відповідно. Якщо в наборі Λ число $\overline{\lambda}$ зустрічається $\overline{\alpha}$ разів, то формула (42) дає $(\overline{\alpha}-1)R_\Lambda(f(\lambda)) = \partial R_{\overline{\Lambda}}(f(\lambda))/\partial\overline{\lambda}$, де в наборі $\overline{\Lambda}$ число $\overline{\lambda}$ зустрічається $\overline{\alpha}-1$ раз. Остання рівність і рівність (44) показують, що розділена різниця не залежить від впорядкування чисел λ_j в наборі Λ; ці рівності можна використати для побудови розділених різниць високих порядків.

Позначимо через

$$\Lambda(D) = \Big(\underbrace{\lambda_1(D),\ldots,\lambda_1(D)}_{\alpha_{\varphi 1}(D)},\ldots,\underbrace{\lambda_{\gamma_\varphi(D)}(D),\ldots,\lambda_{\gamma_\varphi(D)}(D)}_{\alpha_{\varphi\gamma_\varphi(D)}(D)}\Big)$$

набір $n(D)$ коренів многочлена $l_\varphi(\lambda,D)$.

Теорема 5. *Нехай виконується умова єдиності (40); тоді існує єдиний формальний розв'язок задачі (37), (38), що має такий вигляд:*

$$v(t,x) = \int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t}+(1-\tau)L(D),D\Big)\,d\tau R_{\Lambda(D)}\Big(\frac{e^{\lambda t}}{\nu-\mu e^{\lambda T}}\Big)\varphi(x)\equiv$$

$$\equiv\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t}+(1-\tau)L(k),k\Big)\,d\tau R_{\Lambda(k)}\Big(\frac{e^{\lambda t}}{\nu-\mu e^{\lambda T}}\Big)\widehat{\varphi}(k)e^{i(k,x)}, \quad (45)$$

де $\widehat{\varphi}(k)$ – коефіцієнти Фур'є вектор-функції $\varphi(x)$.

Д о в е д е н н я. Очевидно, що формулу (45) можна подати у вигляді розділеної різниці

$$v(t,x) = R_{\Lambda(D)}\Big(\int_0^1 l_\varphi^{(1)}(\tau\lambda + (1-\tau)L(D), D)\,d\tau \frac{e^{\lambda t}}{\nu - \mu e^{\lambda T}}\Big)\varphi(x),$$

а отже,

$$\nu v(0,x) - \mu v(T,x) = R_{\Lambda(D)}\Big(\int_0^1 l_\varphi^{(1)}(\tau\lambda + (1-\tau)L(D), D)\,d\tau\Big)\varphi(x).$$

Оскільки

$$l_\varphi^{(1)}(\tau\lambda + (1-\tau)L(D), D) = \sum_{j=0}^{n(D)-1} l_\varphi^{(j+1)}(L(D), D)(\lambda - L(D))^j \tau^j / j!,$$

то

$$\int_0^1 l_\varphi^{(1)}(\tau\lambda + (1-\tau)L(D), D)\,d\tau = \sum_{j=0}^{n(D)-1} l_\varphi^{(j+1)}(L(D), D)\frac{(\lambda - L(D))^j}{(j+1)!}$$

є многочленом за змінною λ степеня $n(D)-1$ з одиничним старшим коефіцієнтом, а отже, розділена різниця дорівнює одиничному п.д.о., що означає виконання умови (38).

Підставимо (45) в систему (37):

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} - L(D)v(t,x) = \Big(\frac{\partial}{\partial t} - L(D)\Big)\times$$

$$\times \sum_{j=0}^{n(D)-1} \frac{l_\varphi^{(j+1)}(L(D), D)}{(j+1)!}\Big(\frac{\partial}{\partial t} - L(D)\Big)^j R_{\Lambda(D)}\Big(\frac{e^{\lambda t}}{\nu - \mu e^{\lambda T}}\Big)\varphi(x) =$$

$$= \Big[l_\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial t}, D\Big) - l_\varphi(L(D), D)\Big] R_{\Lambda(D)}\Big(\frac{e^{\lambda t}}{\nu - \mu e^{\lambda T}}\Big)\varphi(x) =$$

$$= R_{\Lambda(D)}\Big(l_\varphi(\lambda, D)\frac{e^{\lambda t}}{\nu - \mu e^{\lambda T}}\Big)\varphi(x) - R_{\Lambda(D)}\Big(\frac{e^{\lambda t}}{\nu - \mu e^{\lambda T}}\Big) l_\varphi(L(D), D)\varphi(x).$$

Оскільки $\Lambda(D)$ – набір коренів многочлена $l_\varphi(\lambda, D)$, то розділена різниця $R_{\Lambda(D)}(l_\varphi(\lambda, D)e^{\lambda t}/(\nu - \mu e^{\lambda T})) = 0$, а також $l_\varphi(L(D), D)\varphi(x) = 0$ за означенням мінімального многочлена вектора $\varphi(x)$, тобто $\partial v/\partial t - L(D)v = 0$. Теорему доведено. ■

Встановимо належність одержаного розв'язку (45) до шкали просторів H_q. Для цього оцінимо вектор-функцію (45), яка містить малі знаменники $\nu - \mu e^{\lambda_j(k)T}$ та $\lambda_\alpha(k) - \lambda_\beta(k)$, $\alpha \neq \beta$, які можуть

бути нескінченно малими. При цьому $\lambda_\alpha(k) - \lambda_\beta(k)$ завжди відмінні від нуля, а $\nu - \mu e^{\lambda_j(k)T}$ можуть перетворюватися в нуль, якщо не виконуються умови єдиності. Отже, маємо розв'язати проблему малих знаменників, причому для знаменників $\nu - \mu e^{\lambda_j(k)T}$ насправді треба розв'язувати проблему нульових знаменників. Для оцінки нульових знаменників використовуємо метричний підхід, а оцінювання малих знаменників $\lambda_\alpha(k) - \lambda_\beta(k)$ проводимо разом із відповідними чисельниками розділених різниць (42).

Попередньо проаналізуємо властивості наборів $\Lambda(k)$ коренів мінімального многочлена $l_\varphi(\lambda, k)$. Позначимо через $\operatorname{diam}\Lambda$ максимальну віддаль між елементами множини Λ, тобто $\operatorname{diam}\Lambda = \max_{a,b\in\Lambda}|a-b|$.

Нехай $\lambda_j(\widehat{\xi}) = \lambda_j(\xi, \xi_{p+1})$, де $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p) \in \mathbb{R}^p$, $\xi_{p+1} \in \mathbb{R}$, $\xi_{p+1} \geq 0$, – корені рівняння

$$l(\lambda, \widehat{\xi}) = \lambda^{nm} + \sum_{j=1}^{nm} \sum_{|s|\leq n_j} a_{js}\xi^s \xi_{p+1}^{jn_l - |s|}\lambda^{nm-j} = \prod_{j=1}^{\gamma(\widehat{\xi})}(\lambda - \lambda_j(\widehat{\xi}))^{\alpha_j(\widehat{\xi})} = 0. \quad (46)$$

Очевидно, що $\lambda_j(k) = \widetilde{k}^{n_l}\lambda_j(k/\widetilde{k}, 1/\widetilde{k})$, $j = 1, \ldots, \gamma(k)$, і кількість та кратність коренів $\lambda_j(k)$ і $\lambda_j(k/\widetilde{k}, 1/\widetilde{k})$ збігаються. Виберемо число K_1 таким, щоб виконувались нерівності $n(k) \leq b$, $\min_{j=1,\ldots,\gamma(k)} \alpha_j(k) \geq$ $\geq b_1$, $\max_{j=1,\ldots,\gamma(k)} \alpha_j(k) \leq b_2$ при $\widetilde{k} > K_1$, де $b_1 = \varliminf_{\widetilde{k}\to\infty} \min_{j=1,\ldots,\gamma(k)} \alpha_j(k)$; $b_2 = \varlimsup_{\widetilde{k}\to\infty} \max_{j=1,\ldots,\gamma(k)} \alpha_j(k)$, $b = \varlimsup_{\widetilde{k}\to\infty} n(k)$.

Лема 3. *Нехай функція* $\operatorname{Res}(j;\widehat{\xi}) = \prod_{s=1}^{\gamma(\widehat{\xi})}\big(d^j l(\lambda_s(\widehat{\xi}), \widehat{\xi})/d\lambda^j\big)^{\alpha_s(\widehat{\xi})}$ – *результант поліномів (за змінною λ) $l(\lambda, \widehat{\xi})$ і $d^j l(\lambda, \widehat{\xi})/d\lambda^j$, $j = 1, \ldots, nm$, і нехай існують сталі $K_2 > K_1$, $C_1 > 0$ такі, що*

$$\big|\operatorname{Res}(N_j; k/\widetilde{k}, 1/\widetilde{k})\big| \geq C_1 \widetilde{k}^{\beta_j} \ \forall \widetilde{k} > K_2, \ j = 1, \ldots, h, \quad (47)$$

де $b_2 < N_1 < N_2 < \ldots < N_h < b$, $-pb_1/2 - n_l b_1 \leq \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_h \leq 0$, $1 \leq h \leq b - b_1$. Тоді для кожного $\widetilde{k} > K_2$ вірне твердження: у всякому наборі із $N_j + 1$-го кореня (враховуючи кратність) многочлена $l(\lambda, k)$ існує пара коренів $\lambda^*(k)$ і $\lambda^{**}(k)$, яка задовольняє нерівність

$$|\lambda^*(k) - \lambda^{**}(k)| \geq C_2 \widetilde{k}^{n_l + \beta_j / b_1} \geq C_2 \widetilde{k}^{-p/2}, \quad (48)$$

де C_2 – константа, яка не залежить від k, $j = 1, \ldots, h$.

Д о в е д е н н я. Оскільки корені $\lambda_j(\widehat{\xi})$ рівняння (46) обмежені зверху константою, що не залежить від $\widehat{\xi}$, то із формули

$$\frac{d^j l}{d\lambda^j}(\lambda_s(\widehat{\xi}),\widehat{\xi}) = \sum \prod_{i=1,i\neq s}^{\gamma(\widehat{\xi})} \frac{(\alpha_i(\widehat{\xi}))!}{(\alpha_i(\widehat{\xi})-p_i)!}(\lambda_s(\widehat{\xi})-\lambda_i(\widehat{\xi}))^{\alpha_i(\widehat{\xi})-p_i},$$

де сума поширюється на набори чисел $(p_1,\ldots,p_{s-1},p_{s+1},\ldots,p_{\gamma(\widehat{\xi})})$, для яких $p_\sigma \leq \alpha_\sigma(\widehat{\xi})$ та $\sum\limits_{\sigma=1,\sigma\neq s}^{\gamma(\widehat{\xi})} p_\sigma = j-\alpha_s(\widehat{\xi})$, отримуємо, що для кожного s, $1\leq s\leq\gamma(\widehat{\xi})$, існує хоча б один набір чисел $p_\sigma = p_\sigma^*$, $\sigma\neq s$, для якого виконуються нерівності

$$|\mathrm{Res}(N_j;\widehat{\xi})| \leq C_3'\left|\frac{d^{N_j}l}{d\lambda^{N_j}}(\lambda_s(\widehat{\xi}),\widehat{\xi})\right|^{\alpha_s(\widehat{\xi})} \leq$$

$$\leq C_3\prod_{i=1,i\neq s}^{\gamma(\widehat{\xi})}\left|\lambda_s(\widehat{\xi})-\lambda_i(\widehat{\xi})\right|^{(\alpha_i(\widehat{\xi})-p_i^*)\alpha_s(\widehat{\xi})}.$$

Отже, із нерівності (47) для кожного $s=1,\ldots,\gamma(k/\widetilde{k},1/\widetilde{k})$ при $\alpha_i(k/\widetilde{k},1/\widetilde{k}) > p_i^*$, $i\neq s$, $\widetilde{k}>K_2$, маємо $|\lambda_s(k/\widetilde{k},1/\widetilde{k})-\lambda_i(k/\widetilde{k},1/\widetilde{k})| \geq$ $\geq C_1\widetilde{k}^{\beta_j/b_1}$. Оскільки $\sum\limits_{i\neq s}(\alpha_i(k/\widetilde{k},1/\widetilde{k})-p_i^*) = \gamma(k/\widetilde{k},1/\widetilde{k})-N_j$ і $\lambda_s(k)=\widetilde{k}^{n_l}\lambda_s(k/\widetilde{k},1/\widetilde{k})$, то тільки в наборі із N_j коренів кожна пара може задовольняти нерівність, протилежну до (48). Лему доведено. ∎

Зафіксуємо числа ε і r, для яких $0<\sqrt{\varepsilon}<\ln 2/(2\varkappa T)$, $2r+p<0$, де $\varkappa \leq \left(4T\sqrt{2nm\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{2r}}\right)^{-1}$; позначимо через B одиничний круг в комплексній площині параметра ν і нехай при $|\nu_j(k)|<2$, де $\nu_j(k)=\mu e^{\lambda_j(k)T}$, множина $B_j(k)$, $j=1,\ldots,\gamma(k)$, позначає область

$$\left\{z\in B:\ e^{-\varkappa_1 T}\leq\left|\frac{z}{\nu_j(k)}\right|\leq e^{\varkappa_1 T},\ \left|\arg\frac{z}{\nu_j(k)}\right|\leq\varkappa_1 T,\ \varkappa_1=\sqrt{\varepsilon}\varkappa\widetilde{k}^r\right\}.$$

Ця область є частиною кільця і має таку міру: $\mathrm{mes}\,B_j(k) =$ $= 2\varkappa_1 T|\nu_j(k)|^2\mathrm{sh}(2\varkappa_1 T)$. Згідно з теоремою про середнє маємо оцінку $\mathrm{mes}\,B_j(k)\leq 16\varkappa_1^2T^2e^{2\varkappa_1 T}\leq 32\varkappa_1^2T^2$. Міра множини

$$B_\varepsilon=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^p}\ \bigcup_{|\nu_j(k)|<2}B_j(k)$$

не перевищує $32T^2nm\varepsilon\varkappa^2\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{2r}\leq\varepsilon$. Через $B_{j,1}(k)$, $B_{j,1}(k)\subset B_j(k)$, позначимо область

$$\left\{z\in B_j(k):\ e^{-\varkappa_1 T/2}\leq\left|\frac{z}{\nu_j(k)}\right|\leq e^{\varkappa_1 T/2},\ \left|\arg\frac{z}{\nu_j(k)}\right|\leq\frac{\varkappa_1 T}{2}\right\}.$$

Тоді відстань кожного числа $z_1\in B_{j,1}(k)$ до всякого числа $z_2\notin B_j(k)$ оцінюється знизу величиною

$$|z_1-z_2|\geq\min\left\{|\nu_j(k)|(e^{-\varkappa_1 T/2}-e^{-\varkappa_1 T}),|\nu_j(k)|e^{-\varkappa_1 T/2}\times\right.$$
$$\left.\times\sin(-\varkappa_1 T/2)\right\}\geq|\nu_j(k)|\min\left\{\frac{\varkappa_1 T}{2},\frac{\varkappa_1 T}{\pi}\right\}=|\nu_j(k)|\frac{\varkappa_1 T}{\pi}. \qquad (49)$$

Оцінки знизу для виразів, що містять знаменники $\nu-\mu e^{\lambda_j(k)T}$, встановлює така лема.

Лема 4. *Нехай $\nu\in B\setminus B_\varepsilon$, $\mu\in B$ і $\overline{\lambda}\in B_{j,2}(k)$, де $B_{j,2}(k)$ – квадрат з центром $\lambda_j(k)$ в комплексній площині змінної λ зі сторонами довжини $\varkappa_1/2$, паралельними до осей координат. Тоді функції*

$$\rho_s(\lambda,t)\equiv\frac{1}{s!}\frac{\partial^s}{\partial\lambda^s}\left(\frac{e^{\lambda t}}{\nu-\mu e^{\lambda T}}\right)$$

є аналітичними в області $B_{j,2}(k)$ і

$$|\rho_s(\overline{\lambda},t)|\leq e^{s(T+1)}\left(\theta/\sqrt{\varepsilon}\right)^{s+1},\quad s=0,1,2,\ldots, \qquad (50)$$

де $\theta=3\pi/(\varkappa T\min(|\nu|,|\mu|)\widetilde{k}^r)$, $t\in[0,T]$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо два можливі випадки: $|\nu_j(k)|<2$ і $|\nu_j(k)|\geq 2$. У першому випадку $\nu\notin B_j(k)$ і функція $\rho_0(\lambda,t)$ (а значить, і всі функції $\rho_s(\lambda,t)$) є аналітичною в області $B_{j,2}(k)$.

Встановимо оцінку (50) при $s=0$, тобто оцінку

$$|\rho_0(\overline{\lambda},t)|\leq\theta/\sqrt{\varepsilon}. \qquad (51)$$

Нехай $\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}\leq\ln|\nu/2\mu|/T$; тоді $|\mu e^{\overline{\lambda}T}|\leq|\nu|/2$, $|\nu-\mu e^{\overline{\lambda}T}|\geq|\nu|/2$ і $|e^{\overline{\lambda}t}|\leq e^{t\ln|\nu/2\mu|/T}=\max(1,|\nu/2\mu|)$. Звідси отримуємо, що

$$|\rho_0(\overline{\lambda},t)|\leq\max\left(\frac{2}{|\nu|},\frac{1}{|\mu|}\right). \qquad (52)$$

Нехай $\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}\geq\ln|2/\mu|/T$, тоді $|\mu e^{\overline{\lambda}T}|\geq 2$, $|\nu-\mu e^{\overline{\lambda}T}|\geq|\mu e^{\overline{\lambda}T}|/2$ і

$$|\rho_0(\overline{\lambda},t)|\leq\frac{2}{|\mu|}e^{\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}(t-T)}\leq\frac{2}{|\mu|}. \qquad (53)$$

Оскільки $\mu e^{\overline{\lambda}T} \in B_{j,1}(k)$ і $\nu \notin B_j(k)$, то із нерівності (49) випливає, що

$$|\nu - \mu e^{\overline{\lambda}T}| \geq |\nu_j(k)|\frac{\varkappa_1 T}{\pi} \geq \frac{\varkappa_1 T|\mu|}{\pi} e^{\operatorname{Re}\overline{\lambda}T - \varkappa_1 T/2} > \frac{\varkappa_1 T|\mu|}{2^{1/4}\pi} e^{\operatorname{Re}\overline{\lambda}T}.$$

Нехай $\ln|\nu/2\mu|/T < \operatorname{Re}\overline{\lambda} < \ln|2/\mu|/T$. Тоді

$$|\rho_0(\overline{\lambda}, t)| \leq \frac{2^{1/4}\pi e^{\operatorname{Re}\overline{\lambda}t}}{\varkappa_1 T|\mu| e^{\operatorname{Re}\overline{\lambda}T}} = \frac{2^{1/4}\pi}{\varkappa_1 T|\mu| e^{\operatorname{Re}\overline{\lambda}(T-t)}} < \frac{2^{1/4}\pi}{\varkappa_1 T|\mu|}\Big(\frac{2|\mu|}{|\nu|}\Big)^{(T-t)/T}$$

або

$$|\rho_0(\overline{\lambda}, t)| \leq \frac{2^{1/4}\pi}{\varkappa_1 T} \max\Big(\frac{2}{|\nu|}, \frac{1}{|\mu|}\Big). \tag{54}$$

В другому випадку $|\mu e^{\overline{\lambda}T}| \geq |\nu_j(k)| e^{-\varkappa_1 T/2} \geq 2^{3/4} > 3/2$ або $|\nu - \mu e^{\overline{\lambda}T}| > |\mu e^{\overline{\lambda}T}|/3$ і $\operatorname{Re}\overline{\lambda} > \ln(3/2)/T$, тобто $\rho_0(\overline{\lambda}, t)$ аналітична в області $B_{j,2}(k)$ і

$$|\rho_0(\overline{\lambda}, t)| \leq \frac{3}{|\mu|} e^{\operatorname{Re}\overline{\lambda}(t-T)} \leq \frac{3}{|\mu|}. \tag{55}$$

На основі нерівностей (52)–(55) отримаємо оцінку (51).

Далі використовуємо метод математичної індукції по s. Диференціюючи тотожність $(\nu - \mu e^{\overline{\lambda}T})\rho_0(\overline{\lambda}, t) \equiv e^{\overline{\lambda}t}$, отримуємо

$$\frac{t^s}{s!} e^{\overline{\lambda}t} \equiv (\nu - \mu e^{\overline{\lambda}T})\rho_s(\overline{\lambda}, t) - \mu e^{\overline{\lambda}T} \sum_{l=1}^{s} \frac{T^l}{l!}\rho_{s-l}(\overline{\lambda}, t).$$

Розділимо цю тотожність на $\nu - \mu e^{\overline{\lambda}T}$ і визначимо $\rho_s(\overline{\lambda}, t)$ через $\rho_0(\overline{\lambda}, t), \rho_1(\overline{\lambda}, t), \ldots, \rho_{s-1}(\overline{\lambda}, t)$:

$$\rho_s(\overline{\lambda}, t) = \frac{t^s}{s!}\rho_0(\overline{\lambda}, t) + \mu\rho_0(\overline{\lambda}, T) \sum_{l=1}^{s} \frac{T^l}{l!}\rho_{s-l}(\overline{\lambda}, t).$$

Використовуючи (51), припускаючи виконання оцінки (50) для $\rho_0(\overline{\lambda}, t), \rho_1(\overline{\lambda}, t), \ldots, \rho_{s-1}(\overline{\lambda}, t)$ і враховуючи, що для всіх $t \in [0, T]$

$$|\rho_l(\overline{\lambda}, t)| \leq e^{l(T+1)}\Big(\frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)^{(l+1)} \leq e^{(s-1)(T+1)}\Big(\frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)^{s}, \ l = 0, 1, \ldots, s-1,$$

маємо

$$|\rho_s(\overline{\lambda}, t)| \leq \Big(\frac{T^s}{s!} + |\mu| \sum_{l=1}^{s} \frac{T^l}{l!}\Big) e^{(s-1)(T+1)}\Big(\frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)^{s+1} \leq e^{s(T+1)}\Big(\frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)^{s+1},$$

що і треба було довести. ■

Оцінимо тепер розділені різниці різних порядків для наборів коренів многочлена $l_\varphi(\lambda, k)$.

Лема 5. *Нехай $\overline{\Lambda}(k)$ – деякий s-елементний набір коренів многочлена $l_\varphi(\lambda, k)$; тоді*

$$\Big\| \int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t} + (1-\tau)Z_k L(k) Z_k^{-1}, k\Big) d\tau R_{\overline{\Lambda}(k)}(\rho_0(\lambda, t)) \Big\| \leq$$
$$\leq C_4 \widetilde{k}^{n_L(n(k)-1)-sr}, \tag{56}$$

де $Z_k = \operatorname{diag}(\widetilde{k}^{d_1}, \ldots, \widetilde{k}^{d_{nm}})$, C_4 не залежить від k.

Д о в е д е н н я. Якщо $\operatorname{diam}\overline{\Lambda}(k) = |\overline{\lambda}_1(k) - \overline{\lambda}_2(k)| \geq \varkappa_1/2$, то, згідно з рівностями (44), функцію

$$\overline{U}(k) \equiv \int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t} + (1-\tau)Z_k L(k) Z_k^{-1}, k\Big) d\tau R_{\overline{\Lambda}(k)}(\rho_0(\lambda, t))$$

можна подати у вигляді $\overline{U}(k) = (\overline{\lambda}_1(k) - \overline{\lambda}_2(k))^{-1}(\overline{U}_2(k) - \overline{U}_1(k))$, де

$$\overline{U}_i(k) = \int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t} + (1-\tau)Z_k L(k) Z_k^{-1}, k\Big) d\tau R_{\overline{\Lambda}_i(k)}(\rho_0(\lambda, t)),$$

$\overline{\Lambda}_i(k)$ – набір, одержаний із $\overline{\Lambda}(k)$ вилученням кореня $\lambda_i(k)$ або зменшення його кратності на одиницю. Отже, $||\overline{U}(k)|| \leq 2||\overline{U}_1(k)||/\varkappa_1 + 2||\overline{U}_2(k)||/\varkappa_1$. Продовжуючи вилучати корені із наборів $\overline{\Lambda}_i(k)$, таких, що $\operatorname{diam}\overline{\Lambda}_i(k) \geq \varkappa_1/2$, одержимо оцінку

$$||\overline{U}(k)|| \leq \sum_{i,s^*} \Big(\frac{2}{\varkappa_1}\Big)^{\eta_{s^*}} ||\overline{U}_{i,s^*}(k)||, \tag{57}$$

де $\eta_{s^*} \in \mathbb{N}$, індекси i та s^* пробігають скінченні підмножини множини натуральних чисел,

$$\overline{U}_{i,s^*}(k) = \int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t} + (1-\tau)Z_k L(k) Z_k^{-1}, k\Big) d\tau R_{\overline{\Lambda}_{i,s^*}(k)}(\rho_0(\lambda, t)),$$

$\overline{\Lambda}_{i,s^*}(k)$ має $s - \eta_{s^*}$ елементів (з набору $\overline{\Lambda}(k)$) і $\operatorname{diam}\overline{\Lambda}_{i,s^*}(k) < \varkappa_1/2$. Очевидно, що вираз $\overline{U}_{i,s^*}(k)$ можна переписати у вигляді

$$\overline{U}_{i,s^*}(k) = \int_0^1 \sum_{\chi=1}^{n(k)} \frac{\tau^{\chi-1}}{(\chi-1)!} l_\varphi^{(\chi)}((1-\tau)Z_k L(k) Z_k^{-1}, k) d\tau \times$$
$$\times R_{\overline{\Lambda}_{i,s^*}(k)}(\lambda^{\chi-1}\rho_0(\lambda, t))$$

і він допускає оцінку

$$\|\overline{U}_{i,s^*}(k)\| \le C_5 \sum_{\chi=1}^{n(k)} \widetilde{k}^{n_L(n(k)-\chi)} |R_{\overline{\Lambda}_{i,s^*}(k)}(\lambda^{\chi-1}\rho_0(\lambda,t))|. \tag{58}$$

Використовуючи формулу (43), знаходимо оцінку зверху для розділеної різниці $|R_{\overline{\Lambda}_{i,s^*}(k)}(\lambda^{\chi-1}\rho_0(\lambda,t))|$, а саме

$$|R_{\overline{\Lambda}_{i,s^*}(k)}(\lambda^{\chi-1}\rho_0(\lambda,t))| \le C_6 \Big|\frac{\partial^{s-\eta_{s^*}-1}(\lambda^{\chi-1}\rho_0(\lambda,t))}{\partial\lambda^{s-\eta_{s^*}-1}}\Big|_{\lambda=\overline{\lambda}_{i,s^*}(k)} \le$$

$$\le C_7 \sum_{g=0}^{\max(s-\eta_{s^*},\chi)-1} \frac{1}{g!}\Big|\frac{\partial^g(\lambda^{\chi-1})}{\partial\lambda^g}\Big|_{\lambda=\overline{\lambda}_{i,s^*}(k)} \big|\rho_{s-\eta_{s^*}-g-1}(\overline{\lambda}_{i,s^*}(k),t)\big|,$$

де $\overline{\lambda}_{i,s^*}(k) \in B_{j,2}(k)$ при деякому j, $1 \le j \le n(k)$, або, використовуючи нерівність (50), маємо

$$|R_{\overline{\Lambda}_{i,s^*}(k)}(\lambda^{\chi-1}\rho_0(\lambda,t))| \le C_8 \sum_{g=0}^{\max(s-\eta_{s^*},\chi)-1} \widetilde{k}^{(\chi-g-1)n_l}\widetilde{k}^{-(s-\eta_{s^*}-g)r} \le$$

$$\le C_9\widetilde{k}^{(\chi-1)n_l-(s-\eta_{s^*})r}.$$

Підставивши останню оцінку в (58), отримаємо

$$\|\overline{U}_{i,s^*}(k)\| \le C_{10}\widetilde{k}^{(n(k)-1)n_L-(s-\eta_{s^*})r}.$$

Тоді з оцінки (57) випливає $\|\overline{U}(k)\| \le C_4\widetilde{k}^{n_L(n(k)-1)-sr}$, що і треба було довести. ∎

Доведемо тепер теорему існування розв'язку задачі (34), (35).

Теорема 6. *Нехай*

$$r < -p/2,\ \varkappa \le \Big(4T\sqrt{2nm\sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{2r}}\Big)^{-1},\ 2\varkappa T\sqrt{\varepsilon} < \ln 2,\ \varepsilon > 0.$$

Тоді, якщо $\nu \in B\setminus B_\varepsilon$ і $\varphi^j \in H_{q_j}$, то існує єдиний розв'язок u задачі (34), (35), такий, що при виконанні умов леми 3 справедливі включення $\partial^j u_s/\partial t^j \in H_{q_{sj}}$, $q_{sj} = d_{jm+s} - d$, для кожного $t \in [0,T]$, де $d = (b-1)n_L + (N_1-b)n_l + (N_h-b)b_h/b_1 + \sum_{g=1}^{h-1}(N_g - N_{g+1})\beta_g/b_1 - N_1 r + \max_{s=1,\dots,nm}(d_s - q_{s-1})$.

Д о в е д е н н я. Оскільки $\nu \in B\setminus B_\varepsilon$, то формальний розв'язок задачі (34), (35) існує і із формули (45) отримаємо

$$Zv(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t} + (1-\tau)Z_kL(k)Z_k^{-1},k\Big)d\tau \times$$

$$\times R_{\Lambda(k)}(\rho_0(\lambda,t))Z_k\widehat{\varphi}(k)e^{i(k,x)}. \tag{59}$$

Елементи набору $\Lambda(k)$ є коренями многочлена $l_\varphi(\lambda,k)$, а отже, і многочлена $l(\lambda,k)$. Згідно з лемою 3, при $\widetilde{k} > K_2$ кожен набір із більш ніж N_h коренів містить хоча б одну пару коренів, відстань між якими не менша ніж $C_2\widetilde{k}^{n_l+\beta_h/b_1}$, кожен набір із більш ніж N_{h-1} коренів містить хоча б одну пару коренів, відстань між якими не менша ніж $C_2\widetilde{k}^{n_l+\beta_{h-1}/b_1}$, і т.д., кожен набір із більш ніж N_1 коренів містить хоча б одну пару коренів, відстань між якими не менша ніж $C_2\widetilde{k}^{n_l+\beta_1/b_1}$. Використовуючи (44), звідси отримаємо нерівність

$$\|v_j(t,x)\|_{d_{j+1}} \le C_{11}\sum_{\widetilde{k}\le K_2}\Big(\sum_{i=0}^{nm-1}|\widehat{\varphi}^i(k)|^2\widetilde{k}^{2d_{i+1}}\Big)^{1/2} +$$

$$+ C_{12}\sum_{\widetilde{k}>K_2}\widetilde{k}^{(N_h-b)b_h/b_1+(N_1-b)n_l+\sum_{g=1}^{h-1}(N_g-N_{g+1})\beta_g/b_1} \times$$

$$\times \sum_j\Big\|\int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t}+(1-\tau)Z_kL(k)Z_k^{-1},k\Big)d\tau R_{\Lambda_j(k)}(\rho_0(\lambda,t))\Big\| \times$$

$$\times \Big(\sum_{i=0}^{nm-1}|\widehat{\varphi}^i(k)|^2\widetilde{k}^{2d_{i+1}}\Big)^{1/2},$$

де розділені різниці $R_{\Lambda_j(k)}(\rho_0(\lambda,t))$ мають порядок, не вищий ніж $N_1 - 1$ і їх кількість (для кожного $\widetilde{k} > K_2$) не більша ніж 2^{nm}. Тоді за лемою 5

$$\Big\|\int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t}+(1-\tau)Z_kL(k)Z_k^{-1},k\Big)d\tau R_{\Lambda_j(k)}(\rho_0(\lambda,t))\Big\| \le$$

$$\le C_4\widetilde{k}^{n_L(b-1)-N_1r},$$

тобто

$$\|v_j(t,x)\|_{d_{j+1}} \le C_{13}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^d\Big(\sum_{i=0}^{nm-1}|\widehat{\varphi}^i(k)|^2\widetilde{k}^{2q_i}\Big)^{1/2}.$$

Із останньої оцінки випливає нерівність

$$\left\|\frac{\partial^j u_s}{\partial t^j}\right\|_{q_{sj}} \le C_{14}\sum_{i=0}^{nm-1}\|\varphi^i\|_{q_i}$$

і доведення теореми. ■

13.3. Системи рівнянь зі змінними за x коефіцієнтами

В області Q розглянемо задачу

$$Pu(t,x)\equiv\sum_{j+2s\le n}A_{js}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^j(-L)^s u(t,x)=f(t,x), \qquad (60)$$

$$Mu(t,x)\equiv$$

$$\equiv\sum_{\substack{j+2s\le n\\ j<n}}B_{is}(-L)^s\Big(\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}\Big|_{t=0}-\mu\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}\Big|_{t=T}\Big)=\varphi(x), \qquad (61)$$

$$L^r u(t,x)|_{\partial G}=0,\quad r=0,1,\dots,[n/2]-1, \qquad (62)$$

де $f(t,x)=\mathrm{col}\,(f_1(t,x),\dots,f_m(t,x))$; $\varphi(x)=\mathrm{col}\,(\varphi_1(x),\dots,\varphi_{nm}(x))$; $u(t,x)=\mathrm{col}\,(u_1(t,x),\dots,u_m(t,x))$; $A_{js}=\|a_{js}^{qr}\|$ і $B_{js}=\|b_{js}^{qr}\|$ – матриці розмірів $(m\times m)$ і $(nm\times m)$ відповідно зі сталими комплексними елементами, $\det A_{n,0}\ne 0$, $\mu\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$; L – диференціальний оператор зі змінними за $x_1,\dots,x_p$ коефіцієнтами, означений в п. 7.2. Припустимо, що $\overline{G}\in\mathcal{A}^{2[n/2],\nu}$, $p_{ij}\in C^{2[n/2]-1,\nu}$, $i,j=1,\dots,p$, $q\in C^{2[n/2]-2,\nu}$. На тип системи рівнянь (60) обмежень не накладається.

Нехай $f\in\overline{C}([0,T],\overline{L}_2(G))$, $\varphi\in\overline{L}_2(G)$. Тоді справедливі розвинення

$$f(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)X_k(x),\quad f_k(t)=\mathrm{col}\,(f_{k1}(t),\dots,f_{km}(t)),$$

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t)X_k(x),\quad \varphi_k(t)=\mathrm{col}\,(\varphi_{k1},\dots,\varphi_{k,nm}),$$

де

$$f_{kj}(t)=\int_G f_j(t,x)X_k(x)dx,\quad j=1,\dots,m,$$

$$\varphi_{kj}=\int_G\varphi_j(t,x)X_k(x)dx,\quad j=1,\dots,nm,$$

$\{X_k(x),\ k\in\mathbb{N}\}$ - система власних функцій задачі (7.23), які відповідають системі власних значень $\Lambda=\{\lambda_k,\ k\in\mathbb{N}\}$.

Розв'язок задачі (60)–(62) шукаємо у вигляді векторного ряду

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)X_k(x), \qquad (63)$$

в якому кожна вектор-функція $u_k(t)$, $k\in\mathbb{N}$, є розв'язком такої задачі:

$$\sum_{j+2s\le n}A_{js}\lambda_k^s u_k^{(j)}(t)=f_k(t), \qquad (64)$$

$$\sum_{\substack{j+2s\le n\\ j<n}}B_{js}\lambda_k^s\big(u_k^{(j)}(0)-\mu u_k^{(j)}(T)\big)=\varphi_k. \qquad (65)$$

Розглянемо однорідну задачу, що відповідає задачі (64), (65):

$$\sum_{j+2s\le n}A_{js}\lambda_k^s u_k^{(j)}(t)=0, \qquad (64')$$

$$\sum_{\substack{j+2s\le n\\ j<n}}B_{is}\lambda_k^s\big(u_k^{(j)}(0)-\mu u_k^{(j)}(T)\big)=0. \qquad (65')$$

Припустимо, що для всіх $\lambda_k\in\Lambda$ корені $\eta_j\equiv\eta_j(\lambda_k)$, $j=1,\dots,p$, характеристичного рівняння

$$M(\eta,\lambda_k)\equiv\det\Big\|\sum_{j+2s\le n}A_{js}\lambda_k^s\eta^j\Big\|=0 \qquad (66)$$

прості і не дорівнюють нулю. Тоді для кожного числа η_q

$$\mathrm{rang}\Big\|\sum_{j+2s\le n}A_{js}\lambda_k^s\eta_q^j\Big\|=m-1,\quad q=1,\dots,nm,$$

а тому хоча б один з мінорів $(m-1)$-го порядку останньої матриці не дорівнює нулю (нехай це буде мінор одного із елементів рядка з номером $l=l(q)$). Однорідна система диференціальних рівнянь $(64')$ має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$Y_{kj}=\mathrm{col}\,(h_{l1}(\eta_j),\dots,h_{lm}(\eta_j))\exp(\eta_j t]),\quad j=1,\dots,nm, \qquad (67)$$

де $h_{lr}(\eta_q)$, $r=1,\dots,m$, – мінори елементів рядка з номером $l=l(q)$ матриці $\Big\|\sum_{j+2s\le n}A_{js}\lambda_k^s\eta_q^j\Big\|$, які обчислюються за формулами

$$h_{lr}(\eta_q(\lambda_k))=\sum_{\substack{j+2s\le n(m-1)\\ s<[n/2](m-1)}}\xi_{js}^{lr}\lambda_k^s\eta_q^j,\quad r=1,\dots,m,\ q=1,\dots,nm, \qquad (68)$$

$$\xi^{lr}_{q_0,q_1} = \sum_{\sum\limits_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq r}}^{m} \omega_i(\beta)=q_i;\, i=0;1} \det \left\| a^{\gamma\beta}_{\omega_0(\beta),\omega_1(\beta)} \right\|_{\substack{\gamma,\beta=1,\ldots,m\\ \gamma\neq l,\beta\neq r}} \tag{69}$$

$$r = 1, \ldots, m,$$

де $a^{\gamma\beta}_{\omega_0(\beta),\omega_1(\beta)}$, $\gamma = 1, \ldots, m$, – елементи β-госповпця матриці A_{js}, $j = \omega_0(\beta)$, $s = \omega_1(\beta)$.

Задача (64′), (65′) має нетривіальні розв'язки тоді і лише тоді, коли її характеристичний визначник $\Delta(\lambda_k)$ дорівнює нулю [175]. Визначник $\Delta(\lambda_k)$ обчислюється за формулою

$$\Delta(\lambda_k) = D(\lambda_k)E(\lambda_k)\times$$

$$\times \prod_{j=1}^{nm} (1 - \mu \exp(\eta_j(\lambda_k)T)) \prod_{1\leq q<r\leq m} (\eta_r(\lambda_k) - \eta_q(\lambda_k)), \tag{70}$$

$$D(\lambda_k) = \det \left\| \sum_{s\leq(n-j)/2} b^{qr}_{js}\lambda_k^s \right\|_{\substack{q=1,\ldots,nm\\ r=1,\ldots,m;\, j=0,1,\ldots,n-1}},$$

$$E(\lambda_k) = \left| \begin{array}{cccccc} E_0^1 & E_1^1 & \ldots & E_{n-2}^1 & E_{n-1}^1 & \ldots \\ 0 & E_0^1 & \ldots & E_{n-3}^1 & E_{n-2}^1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & E_0^1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ E_0^m & E_1^m & \ldots & E_{n-2}^m & E_{n-1}^m & \ldots \\ 0 & E_0^m & \ldots & E_{n-3}^m & E_{n-2}^m & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & E_0^m & \ldots \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{ccccc} \ldots & E^1_{n(m-1)} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & E^1_{n(m-1)-1} & E^1_{n(m-1)} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & E^1_{n(m-1)-n+1} & E^1_{n(m-1)-n+2} & \ldots & E^1_{n(m-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & E^m_{n(m-1)} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & E^m_{n(m-1)-1} & E^m_{n(m-1)} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & E^m_{n(m-1)-n+1} & E^m_{n(m-1)-n+2} & \ldots & E^m_{n(m-1)} \end{array} \right|, \tag{71}$$

$$E_j^r \equiv E_j^r(\lambda_k) = \sum_{d=0}^{[(n(m-1)-j)/2]} \xi^{1r}_{jd}\lambda_k^d, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1;\ r = 1, \ldots, m,$$

а ξ^{1r}_{jd} визначені формулами (69).

Зауваження 1. Визначник $E(\lambda_k)$ для всіх $\lambda_k \in \Lambda$ не дорівнює нулю, бо він входить співмножником у вираз для вронскіана

$$W(\lambda_k) = \det \left\| Y^{(q)}_{kj}(t) \right\|_{\substack{j=1,\ldots,nm\\ q=0,1,\ldots,n-1}},$$

який теж не дорівнює нулю;

$$W(\lambda_k) = E(\lambda_k) \prod_{j=1}^{nm} \exp(\eta_j(\lambda_k)t) \prod_{1\leq q<r\leq nm} (\eta_r(\lambda_k) - \eta_q(\lambda_k)).$$

При дослідженні питання про єдиність розв'язку задачі (60)–(62) розглядатимемо також відповідну однорідну задачу

$$Pu(t,x) = 0, \tag{60′}$$

$$Mu(t,x) = 0 \tag{61′}$$

з умовами (62).

Теорема 7. *Для єдиності розв'язку задачі (60)–(62) у просторі $\overline{C}^n(\overline{Q})$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови*

$$\forall\lambda_k \in \Lambda \qquad 1 - \mu \exp(\eta_j(\lambda_k)T) \neq 0, \quad j = 1, \ldots, nm; \tag{72}$$

$$\forall\lambda_k \in \Lambda \qquad D(\lambda_k) \neq 0. \tag{73}$$

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Припустимо, що для деякого $\lambda_{\tilde{k}} \in \Lambda$ умова (73) або хоча б одна з умов (72) не виконується. Тоді $\Delta(\lambda_{\tilde{k}}) = 0$ і існують нетривіальні розв'язки $u_{\tilde{k}}(t)$ задачі (64′), (65′). Тому однорідна задача (60′), (61′), (62) має нетривіальні розв'язки вигляду

$$u(t,x) = u_{\tilde{k}}(t)X_{\tilde{k}}(x),$$

а розв'язок задачі (60)–(62), якщо він існує, єдиним не буде.

Д о с т а т н і с т ь. Припустимо, що існують два розв'язки u_1 і u_2 задачі (60)–(62) з простору $\overline{C}^n(\overline{Q})$. Тоді вектор-функція

$$u = (u_2 - u_1) \in \overline{C}^n(\overline{Q})$$

є розв'язком задачі (60′), (61′), (62) і разом з функціями $Pu(t,x)$ і $Mu(t,x)$, розвивається у векторний ряд Фур'є вигляду (63) за системою функцій $\{X_k(x),\ k \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, що ряди Фур'є для вектор-функцій $Pu(t,x)$ і $Mu(t,x)$ збігаються з рядами, одержаними формальним застосуванням операторів P і M до векторного ряду (63). Із рівностей Парсеваля для вектор-функцій $Pu(t,x)$ і $Mu(t,x)$ випливає, що кожний з коефіцієнтів Фур'є $u_k(t)$ вектор-функції $u(t,x)$ є розв'язком задачі (64′), (65′). Якщо виконуються умови (72), (73), то $\Delta(\lambda_{\tilde{k}}) \neq 0$ і всі коефіцієнти Фур'є $u_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, тотожно дорівнюють нулю. Тоді з рівності Парсеваля для вектор-функції $u(x,t)$ випливає, що $u(x,t) \equiv 0$, тобто $u_1(t,x) \equiv u_2(t,x)$.

Теорему доведено. ■

Розглянемо питання про існування розв'язку задачі (60)–(62). Нехай виконуються умови (72) та (73). Тоді для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ існує єдиний розв'язок задачі (64), (65), який зображується у вигляді

$$u_k(t) = U_k(t) + V_k(t), \tag{74}$$

де $U_k(t) = \operatorname{col}(U_{k1}(t), \ldots, U_{km}(t))$ і $V_k(t) = (V_{k1}(t), \ldots, V_{km}(t))$ – розв'язки задач (64′), (65) і (64), (65′) відповідно. Компоненти вектор-функцій $U_k(t)$ і $V_k(t)$ визначаються формулами

$$U_{kj}(t) = \sum_{q,l,\alpha,p=1}^{nm} (-1)^{q-1} h_j(\eta_q(\lambda_k))\, D_{lq}(\lambda_k) E_{p\alpha}(\lambda_k) \times$$
$$\times \Big(E(\lambda_k) D(\lambda_k)\,(1-\mu\exp(\eta_q(\lambda_k)T)) \prod_{i=1,i\neq q}^{nm} (\eta_q(\lambda_k)-\eta_i(\lambda_k))\Big)^{-1} \times$$
$$\times S^q_{nm-\alpha}\varphi_{kl}\exp(\eta_q(\lambda_k)t), \quad j=1,\ldots,m, \tag{75}$$

$$V_{kj} = \int_0^T \sum_{r=1}^m G_{k,jr}(t,\tau) f_{kr}(\tau)d\tau, \quad j=1,\ldots,m, \tag{76}$$

де $D_{ij}(\lambda_k)$ і $E_{ij}(\lambda_k)$ є визначниками, які отримані з визначників $D(\lambda_k)$ і $E(\lambda_k)$ викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця; S^q_γ – сума всіх можливих добутків елементів $\eta_j(\lambda_k)$, $j=1,\ldots,nm$, $j\neq q$, взятих по γ у кожному добутку; $G_{k,jr}(t,\tau)$ – елементи матриці Гріна задачі (64′), (65′), які в квадраті K_T, крім сторін $\tau=0$ і $\tau=T$, визначаються формулами

$$G_{k,jr}(t,\tau) = (2D(\lambda_k))^{-1}\sum_{q,\alpha=1}^{nm} D_{r\alpha}(\lambda_k) \prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq q}}^{nm} (\eta_\beta(\lambda_k)-\eta_q(\lambda_k))^{-1} \times$$
$$\times S^q_{nm-\alpha}\Big((-1)^{n(q-1)+1}\operatorname{sgn}(t-\tau) h_j(\eta_q(\lambda_k))\exp(\eta_q(\lambda_k)(t-\tau)) +$$
$$+\sum_{l,i,p=1}^{nm}\sum_{s_0+2s_1\leq n}(-1)^{(n-1)p+1} b_s^{ip}\lambda_k^{s_1}\eta_q^{s_0}(\lambda_k) S^l_{nm-l} h_p(\eta_q(\lambda_k)) \times$$
$$\times h_j(\eta_l(\lambda_k))\exp(\eta_q(\lambda_k)t)\frac{D_{lp}(\lambda_k)E_{pi}(\lambda_k)\Big(1+\mu\exp(\eta_l(\lambda_k)T)\Big)}{D(\lambda_k)E(\lambda_k)\Big(1-\mu\exp(\eta_l(\lambda_k)T)\Big)} \times$$

$$\times \prod_{\alpha=1,\alpha\neq l}^{nm} (\eta_\alpha(\lambda_k)-\eta_q(\lambda_l))^{-1}\Big), \quad j,r=1,\ldots,m. \tag{77}$$

На стороні $\tau=0$ ($\tau=T$) квадрата K_T кожна з функцій $G_{k,jr}$, $j,r=1,\ldots,m$, довизначується за неперервністю справа (зліва).

Розв'язок задачі (60)–(62) формально зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^\infty (U_k(t)+V_k(t))X_k(x), \tag{78}$$

де компоненти вектор-функцій $U_k(t)$ і $V_k(t)$ визначені формулами (75) і (76).

Зауважимо, що з рівняння (66) випливають такі асимптотичні при $k\to\infty$ оцінки:

$$|\eta_j(\lambda_k)| \leq \alpha\lambda_k^{1/2}, \quad j=1,\ldots,nm,\ \alpha>0. \tag{79}$$

Теорема 8. *Нехай справджуються умови (72), (73) і нехай існують сталі m_j, γ_j, $j=1,2$, такі, що для всіх (крім скінченного числа) $\lambda_k\in\Lambda$ виконуються нерівності*

$$|1-\mu\exp(\eta_j(\lambda_k)T)| \geq m_1\lambda_k^{-\gamma_1}\exp(-|\operatorname{Re}\eta_j(\lambda_k)|T), \quad j=1,\ldots,nm, \tag{80}$$

$$\prod_{\substack{q=1\\ q\neq j}}^{nm} |\eta_j(\lambda_k)-\eta_q(\lambda_k)| \geq m_2\lambda_k^{-\gamma_2}, \quad j=1,\ldots,nm. \tag{81}$$

Якщо $f_r\in C([0,T],\mathcal{B}_q^{1/2})$, $r=1,\ldots,m$, $\varphi_j\in\mathcal{B}_q^{1/2}$, $j=1,\ldots,nm$, де $q>\alpha T$, то в просторі $\overline{C}^n(\overline{Q})$ існує єдиний розв'язок задачі (60)–(62), який неперервно залежить від вектор-функцій $f(t,x)$ та $\varphi(x)$.

Д о в е д е н н я. З формул для $D(\lambda_k)$ і $E(\lambda_k)$ випливають такі нерівності:

$$|E(\lambda_k)| \geq c_3\lambda_k^{M_1}, \tag{82}$$
$$|D(\lambda_k)| \geq c_4\lambda_k^{M_2}, \tag{83}$$

де $M_1 = m[n/2][(n+1)/2]$; $M_2 = n\sum_{j=1}^{m-1}[n(m-j)/2]$.

Із формул (75)–(78) та оцінок (7.25), (79)–(83) одержуємо таку оцінку для норми розв'язку задачі (60)–(62):

$\|u\|_{\overline{C}^n(\overline{Q})} \leq$

$$\leq c_5\sum_{k=1}^\infty\Big(\sum_{j=1}^{nm}|\varphi_{kj}|\lambda_k^{\sigma_1} + \sum_{r=1}^m \max_{t\in[0,T]}|f_{kr}(t)|\lambda_k^{\sigma_2}\Big)\exp(\alpha T\sqrt{\lambda_k}), \tag{84}$$

де $\sigma_1 = \chi - (n+3)/2$, $\sigma_2 = \chi + p/4$, $\chi = nm + m[n/2][(n+1)/2] - [n/2] - [n(m-1)/2] + n\sum\limits_{j=1}^{m-1}[n(m-j)/2] + \gamma_1 + \gamma_2$. Використовуючи нерівність (12.17), знаходимо

$$\|u\|_{\overline{C}^n(\overline{Q})} \le c_6 \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{nm} |\varphi_{kj}| + \sum_{r=1}^{m} \max_{t\in[0,T]} |f_{kr}(t)| \Big) \exp\left(q\sqrt{\lambda_k}\right) =$$

$$= c_6 \sum_{j=1}^{nm} \left(\|\varphi_{kj}\|_{B_q^{1/2}} + \sum_{j=1}^{m} \|f_{kj}(t)\|_{C\left([0,T],B_q^{1/2}\right)} \right) < \infty.$$

Теорему доведено. ■

Проаналізуємо можливість виконання оцінок (80), (81). Справедливе твердження, яке доводиться за схемою доведення теореми 12.3.

Теорема 9. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ і для довільних фіксованих μ та a_{js}^{qr}, $j + 2s \le n$, $q, r = 1, \dots, m$, нерівності (80) виконуються при $\gamma_1 > p/2$ для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k \in \Lambda$.*

Позначимо через $Y \in \mathbb{R}^\sigma$ вектор, складений з дійсних та уявних частин коефіцієнтів a_{js}^{qr}, $j + 2s \le n$, $q, r = 1, \dots, m$, системи (60), де $\sigma = 2m^2(n + 1 + \sum\limits_{j=1}^{n}[j/2])$.

Теорема 10. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\sigma$) векторів Y при $\gamma_2 \ge (nm-1)(p - 2 - 2m[n/2] + nm)/4$ нерівності (81) виконуються для всіх (крім скінченного числа) $\lambda_k \in \Lambda$.*

Д о в е д е н н я. Запишемо многочлен $M(\nu, \lambda_k)$ у вигляді $M(\eta, \lambda_k) = \sum\limits_{j=0}^{nm} H_j(\lambda_k)\eta^j$, де $H_j \equiv H_j(\lambda_k)$ – многочлен відносно λ_k степеня не вище $[(nm-j)/2]$, коефіцієнти якого виражаються через елементи матриць A_{ij}, $j + 2s \le n$, $H_{nm} = \det A_{n,0}$.

Для дискримінанта $W(M)$ многочлена $M(\eta, \lambda_k)$ справедливі зображення

$$W(M) = H_{nm}^{2(nm-1)} \prod_{1\le i<j\le nm} (\eta_j(\lambda_k) - \eta_i(\lambda_k))^2, \tag{85}$$

$$W(M) = \frac{(-1)^{nm(nm-1)/2}}{H_{nm}} \begin{vmatrix} H_{nm} & H_{nm-1} & \dots & H_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_{nm} & \dots & H_1 & H_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & H_{nm-2} & H_{nm-3} & \dots & H_0 \\ nmH_{nm} & (nm-1)H_{nm-1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & nmH_{nm} & \dots & H_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (nm-1)H_{nm-1} & (nm-2)H_{nm-2} & \dots & H_1 \end{vmatrix}. \tag{86}$$

Використовуючи схему доведення теореми 6 із [15], знаходимо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\sigma$) векторів Y нерівність

$$|\mathrm{Re}\, W(M)| \ge \lambda_k^{-\nu-\varepsilon}, \quad \nu = (nm-1)p/2 - m[n/2],\ \varepsilon > 0, \tag{87}$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) $\lambda_k \in \Lambda$. Оскільки $|W(M)| \ge |\mathrm{Re}\, W(M)|$, то з формули (85) одержуємо, що для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k \in \Lambda$ і для майже всіх векторів $Y \in \mathbb{R}^\sigma$ справедлива оцінка

$$\prod_{1\le i<j\le nm} |\eta_j(\lambda_k) - \eta_i(\lambda_k)| \ge \lambda_k^{-(nm-1)(p-2m[n/2])/2-\varepsilon/2}. \tag{88}$$

З рівності

$$\prod_{\substack{q=1\\ q\ne j}}^{nm} |\eta_q(\lambda_k) - \eta_j(\lambda_k)| = \prod_{1\le i<j\le nm} |\eta_j(\lambda_k) - \eta_i(\lambda_k)| \prod_{\substack{1\le\alpha<\beta\le nm\\ \alpha\ne j,\,\beta\ne j}} |\eta_\alpha(\lambda_k) - \eta_\beta(\lambda_k)|^{-1}$$

та оцінок (79) випливає, що для майже всіх векторів $Y \in \mathbb{R}^\sigma$ нерівності

$$\prod_{q=1, q\ne j}^{nm} |\eta_q(\lambda_k) - \eta_j(\lambda_k)| \ge c_7 \lambda_k^{-(nm-1)(p-2+nm-2m[n/2])/4-\varepsilon/2},$$
$$j = 1, \dots, nm, \quad c_7 > 0,$$

справджуються для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k \in \Lambda$.

Теорему доведено. ■

§ 14. Нелокальні багатоточкові задачі для безтипних рівнянь

Розв'язність багатоточкових задач у просторах Соболєва доведено в п. 14.1 [75], продовження розв'язків за часовою змінною досліджується в п. 14.2 [80], рівняння з коефіцієнтами із алгебричного многовиду вивчається у п. 14.3 [77].

14.1. Розв'язність у просторах Соболєва

В області D^p розглядається задача

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)u \equiv \sum_{|\widehat{s}|\le n} a_{\widehat{s}} \frac{\partial^{|\widehat{s}|} u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} = 0, \tag{1}$$

$$B_m\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)u \equiv \sum_{j=1}^{M} \sum_{|\widehat{s}|\le N} b_{\widehat{s}}^{jm} \frac{\partial^{|\widehat{s}|} u}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}}\Big|_{t=t_j} = \varphi_m(x), m = 1, \dots, n, \tag{2}$$

де N, M – натуральні числа, причому $N \ge n-1$, $M \ge 2$; $a_{\widehat{s}}$ – дійсні числа, $b_{\widehat{s}}^{jm}$ – комплексні числа; $a_{n,0,\dots,0} = 1$, $0 = t_1 < \dots < t_M = T$.

Під розв'язком задачі (1), (2) будемо розуміти функцію $u \in H_q^{\max(N,n)}(D^p)$, для якої справджуються рівності

$$\|L(\partial/\partial t, \partial/\partial x)u\|_{H_{q-n}^{\max(N-n,0)}(D^p)} = 0,$$

$$\|B_m(\partial/\partial x)u - \varphi_m\|_{H_{q-N}(\Omega_{2\pi}^p)} = 0.$$

Для визначення коефіцієнтів $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, ряду

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t) e^{i(k,x)},$$

що дає формальний розв'язок задачі (1), (2), одержуємо задачу

$$L\Big(\frac{d}{dt}, ik\Big)u_k(t) = 0, \tag{3}$$

$$B_m(ik)u_k = \varphi_{mk}, \ m = 1, \dots, n, \tag{4}$$

де φ_{mk} – коефіцієнти розвинення функції $\varphi_m(x)$ у ряд Фур'є.

Нехай $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(k)$, $\operatorname{Re}\lambda_1(k) \ge \dots \ge \operatorname{Re}\lambda_n(k)$, – різні корені алгебричного рівняння

$$L(\lambda, ik) = \lambda^n + L_{n-1}(k)\lambda^{n-1} + \dots + L_1(k)\lambda + L_0(k) = 0, \tag{5}$$

що відповідає диференціальному рівнянню (3). Тоді розв'язок задачі (3), (4) зображається формулою

$$u_k(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{k\alpha} e^{\lambda_\alpha t}, \tag{6}$$

де числа $C_{k\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, n$, – розв'язок системи n лінійних алгебричних рівнянь, одержаної в результаті підстановки (6) в (4). Матриця цієї системи має вигляд

$$\delta_k = \Big(\sum_{j=1}^{M} \sum_{|\widehat{s}|\le N} b_{\widehat{s}}^{jm} \lambda_\alpha^{s_0} (ik_1)^{s_1} \dots (ik_p)^{s_p} e^{\lambda_\alpha t_j}\Big)_{m,\alpha=1,\dots,n}.$$

Нехай $\Delta_k = \det\delta_k$, $k \in \mathbb{Z}^p$; тоді для єдиності розв'язку задачі (1), (2) необхідно і достатньо, щоб

$$\Delta_k \ne 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^p. \tag{7}$$

Зауваження 1. Для майже всіх (стосовно міри Лебега) коефіцієнтів рівняння (1) і для всіх (крім скінченної множини) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ рівняння (5) мають прості корені (див. теорему 1).

Для доведення існування розв'язку задачі (1), (2) розглянемо спочатку частковий випадок умов (2), коли ненульовими коефіцієнтами будуть лише $b_{j-1,0,\dots,0}^{1j} = \nu_j$, $b_{j-1,0,\dots,0}^{Mj} = -\mu_j$, $j = 1, \dots, n$, тобто

$$\nu_j \frac{\partial^{j-1} u}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=0} - \mu_j \frac{\partial^{j-1} u}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=T} = \varphi_j(x), \ j = 1, \dots, n. \tag{8}$$

При цьому одержимо, що

$$u_k(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\Delta_\alpha(k)}{\Delta(k)} e^{\lambda_\alpha t}, \tag{9}$$

де $\Delta(k) = \det\delta(k)$, $\Delta_\alpha(k) = \det\delta_\alpha(k)$,

$$\delta(k) = \Big(\lambda_r^{s-1}(\nu_s - \mu_s e^{\lambda_r T})\Big)_{s,r=1,\dots,n},$$

$\delta_\alpha(k)$ – матриця, що одержується з матриці $\delta(k)$ за допомогою заміни її стовпця з номером α на стовпець $\operatorname{col}(\varphi_{1k}, \dots, \varphi_{nk})$.

Оцінимо зверху функції $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Враховуючи, що

$$|\lambda_\alpha(k)| \le A_1|k|, \quad \alpha = 1, \dots, n, \tag{10}$$

де $A_1 = A_1(a)$ (a – вектор, складений з коефіцієнтів рівняння (1)), для $\alpha = 1, \dots, n$ одержимо

$$|\Delta_\alpha(k)| \le \text{const} \prod_{j=1, j\ne\alpha}^{n} \max(1, e^{\operatorname{Re}\lambda_j T}) \sum_{j=1}^{n} |\varphi_{jk}|(A_1|k|)^{n(n-1)/2+1-j}. \tag{11}$$

Для оцінки знизу $\Delta(k)$ служить допоміжна теорема.

Теорема 1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^p$) векторів $(a_{0,n,0,\dots,0},\dots,a_{0,\dots,0,n})$, усіх (за винятком скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ виконуються нерівності*

$$|L_0(k)|\geq A_2|k|^{\varepsilon_2},\ \varepsilon_2<(n-p)/2,\ A_2=A_2(\varepsilon_2,a), \tag{12}$$

$$|W(k)|\geq A_3|k|^{\varepsilon_3},\ \varepsilon_3<(n-p)(n-1)/2,\ A_3=A_3(\varepsilon_3,a), \tag{13}$$

де $W(k)=\prod\limits_{n\geq\alpha>\beta\geq 1}(\lambda_\alpha-\lambda_\beta)$, *а* $L_0(k)$ *- вільний член рівняння (5).*

Нерівність (12) доводиться аналогічно до доведення нерівності (11.50), а нерівність (13) доведено в п. 11.2.

Розіб'ємо множину цілочислових векторів $\mathbb{Z}^p$ на класи:

$$\left.\begin{aligned}
Z_0 &= \Big\{k\in\mathbb{Z}^p:\operatorname{Re}\lambda_1(k)\leq\sum_{j=1}^{n-1}\Lambda_j(k)\Big\},\\
Z_\alpha &= \Big\{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\bigcup_{j=0}^{\alpha-1}Z_j:\operatorname{Re}\lambda_{\alpha+1}(k)\leq\sum_{j=\alpha+1}^{n-1}\Lambda_j(k)\Big\},\\
Z_{n-1} &= \Big\{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\bigcup_{j=0}^{n-2}Z_j:\operatorname{Re}\lambda_n(k)\leq 0\Big\},\\
Z_n &= \mathbb{Z}^p\setminus\bigcup_{j=0}^{n-1}Z_j,
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

де $\alpha=1,\dots,n-2$,

$$\Lambda_j(k)=\max\Big(0,\frac{n(2j+n-1)/2-\varepsilon_2\alpha-\varepsilon_3}{T}\ln|k|+\frac{\ln[2A_4(C_n^j-1)]}{T}\Big), \tag{15}$$

$A_4=A_4(j)=2^{n(n-1)/2}A_1^{n(2j+n-1)/2}A_2^{-j}A_3^{-1}$.

Оцінимо знизу деяку похідну від $\Delta(k)$, свою в кожному із введених класів (14).

Із нерівності (13) випливає, що для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів $(a_{0,n,0,\dots,0},\dots,a_{0,\dots,0,n})$ і для достатньо великих $|k|$, $k\in\mathbb{Z}^p$, виконуються нерівності

$$\left|\frac{\partial^n\Delta(k)}{\partial\operatorname{Re}\nu_1\dots\partial\operatorname{Re}\nu_n}\right|=\left|\det\left(\lambda_r^{s-1}\right)_{s,r=1,\dots,n}\right|=|W|\geq A_3|k|^{\varepsilon_3}, \tag{16}$$

якщо $k\in Z_0$, і

$$\left|\frac{\partial^n\Delta(k)}{\partial\operatorname{Re}\mu_1\dots\partial\operatorname{Re}\mu_n}\right|=\left|\det\left(\lambda_r^{s-1}e^{\lambda_r T}\right)_{s,r=1,\dots,n}\right|=$$

$$=\exp\Big(T\sum_{l=1}^n\operatorname{Re}\lambda_l\Big)|W|\geq A_3|k|^{\varepsilon_3}\exp\Big(T\sum_{l=1}^n\operatorname{Re}\lambda_l\Big), \tag{17}$$

якщо $k\in Z_n$.

Якщо ж $k\in Z_\alpha$, $\alpha=1,\dots,n-1$, то розглянемо величину

$$\sigma=\left|\frac{\partial^n\Delta(k)}{\partial\operatorname{Re}\mu_1\dots\partial\operatorname{Re}\mu_\alpha\partial\operatorname{Re}\nu_{\alpha+1}\dots\partial\operatorname{Re}\nu_n}\right|=$$

$$=\left|\det\begin{pmatrix}\left(\lambda_r e^{\lambda_r T}\right)_{s=1,\dots,\alpha,r=1,\dots,n}\\ \left(\lambda_r^{s-1}\right)_{s=\alpha+1,\dots,n,r=1,\dots,n}\end{pmatrix}\right|.$$

Використовуючи теорему Лапласа, розкладаємо визначник за першими α рядками:

$$\sigma=\left|\sum_{j,\tau}\xi_j\left|\det\left(\lambda_{j_r}^{s-1}e^{\lambda_{j_r}T}\right)_{\substack{s=1,\dots,\alpha,\\ r=1,\dots,\alpha}}\right|\cdot\left|\det\left(\lambda_{\tau_r}^{s-1}\right)_{\substack{s=\alpha+1,\dots,n,\\ r=1,\dots,n-\alpha}}\right|\right|=$$

$$=\left|\sum_{j,\tau}\xi_j\exp\Big(T\sum_{l=1}^{\alpha}\lambda_{j_l}\Big)\prod_{1\leq q<l\leq\alpha}(\lambda_{j_l}-\lambda_{j_q})\prod_{1\leq q<l\leq n-\alpha}(\lambda_{\tau_l}-\lambda_{\tau_q})\prod_{l=1}^{n-\alpha}\lambda_{\tau_l}^{\alpha}\right|,$$

де сумування проводиться за всіма можливими наборами векторів $j=(j_1,\dots,j_\alpha)$, $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_{n-\alpha})$ такими, що $(j_1,\dots,j_\alpha,\tau_1,\dots,\tau_{n-\alpha})$ – перестановка чисел $1,\dots,n$; $j_1\leq\dots\leq j_\alpha$, $\tau_1\leq\dots\leq\tau_{n-\alpha}$; $\xi_j=\pm1$, якщо число $\sum\limits_{l=1}^{\alpha}(j_l+1)$ є парним або непарним відповідно.

В сумі під знаком модуля виділимо головний член, а саме доданок, в якому $j=(1,\dots,\alpha)$. Тоді

$$\sigma=\left|\exp\Big(T\sum_{l=1}^{\alpha}\lambda_l\Big)\prod_{1\leq q<l\leq\alpha}(\lambda_l-\lambda_q)\prod_{\alpha+1\leq q<l\leq n}(\lambda_l-\lambda_q)\prod_{l=\alpha+1}^{n}\lambda_l^{\alpha}\right|\times$$

$$\times\left|1+\sum_{j,\tau}{}'\xi_j\frac{\exp(T\sum_{l=1}^{\alpha}\lambda_{j_l})\prod\limits_{1\leq q<l\leq\alpha}(\lambda_{j_l}-\lambda_{j_q})\prod\limits_{1\leq q<l\leq n-\alpha}(\lambda_{\tau_l}-\lambda_{\tau_q})\prod\limits_{l=1}^{n-\alpha}\lambda_{\tau_l}^{\alpha}}{\exp(T\sum_{l=1}^{\alpha}\lambda_l)\prod\limits_{1\leq q<l\leq\alpha}(\lambda_l-\lambda_q)\prod\limits_{\alpha+1\leq q<l\leq n}(\lambda_l-\lambda_q)\prod\limits_{l=\alpha+1}^{n}\lambda_l^{\alpha}}\right|.$$

Далі, враховуючи (12), (13), оцінюємо кожний доданок останньої суми зверху числом

$$\frac{2^{n(n-1)/2}(A_1|k|)^{n(2\alpha+n-1)/2}}{|W||L_0|^{\alpha}e^{T\Lambda_\alpha(k)}}\leq A_4|k|^{n(2\alpha+n-1)/2-\varepsilon_2\alpha-\varepsilon_3}e^{-T\Lambda_\alpha(k)}.$$

Ця нерівність виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів $(a_{0,n,0,\dots,0},\dots,a_{0,\dots,0,n})$ і достатньо великих $|k|$, $k\in\mathbb{Z}^p$.

Далі, враховуючи (15), одержимо, що

$$\sigma\geq|W||L_0|^{\alpha}2^{(\alpha-n)\alpha-1}(A_1|k|)^{-n\alpha}\exp\Big(T\sum_{l=1}^{\alpha}\operatorname{Re}\lambda_l\Big)\geq$$

$$\geq A_5|k|^{(\varepsilon_2-n)\alpha+\varepsilon_3}\exp(T\sum_{l=1}^{\alpha}\operatorname{Re}\lambda_l), \tag{18}$$

де $A_5 = 2^{\alpha(\alpha-n)-1}A_1^{-n\alpha}$.

Нехай Q – множина векторів $\gamma=(\operatorname{Re}\mu_1,\ldots,\operatorname{Re}\mu_n,\operatorname{Re}\nu_1,\ldots,\operatorname{Re}\nu_n)$ таких, що нерівність $|\Delta(k)| < q_k$ виконується для нескінченної множини векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Тоді, використовуючи леми 3.5 і 3.1, із (16)–(18) маємо, що $\operatorname{mes} Q = 0$ при

$$q_k \leq \operatorname{const}|k|^{\varepsilon_3-np}\begin{cases} 1, & k \in Z_0,\\ \exp(T\sum\limits_{l=1}^{n}\operatorname{Re}\lambda_l), & k \in Z_n,\\ |k|^{(\varepsilon_2-n)\alpha}\exp(T\sum\limits_{l=1}^{\alpha}\operatorname{Re}\lambda_l), & k\in Z_\alpha,\end{cases}$$

тобто для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів γ і для всіх (крім скінченної множини $V \subset \mathbb{Z}^p$) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується протилежна нерівність

$$|\Delta(k)| \geq q_k. \tag{19}$$

Зауваження 2. Оскільки множина V складається з розв'язків рівняння (7), то для розв'язності задачі необхідно накладати умови ортогональності на праві частини умов (2). Ці умови мають вигляд

$$\operatorname{rank}\delta_j(k) = \operatorname{rank}\delta(k),\ j = 1,\ldots,n,\ k \in V. \tag{20}$$

Із (9), (11), (19) одержуємо нерівності

$$|u_k^{(\beta)}(t)| \leq \operatorname{const}\sum_{j=1}^{n}|\varphi_{jk}|\cdot|k|^{\beta+(n-1)n/2+np+1+(n-\varepsilon_2)\alpha-\varepsilon_3-j}\times$$

$$\times\exp\left((n-\alpha)T\sum_{j=\alpha+1}^{n-1}\Lambda_j(k)\right) \leq \operatorname{const}\sum_{j=1}^{n}|\varphi_{jk}|\cdot|k|^{\beta+\theta_\alpha-j},$$

$$k \in Z_\alpha, \alpha = 0,1,\ldots,n-1,$$

$$|u_k^{(\beta)}(t)| \leq \operatorname{const}\sum_{j=1}^{n}|\varphi_{jk}|\cdot|k|^{\beta+\theta_n-j},\ k\in Z_n,$$

де $\theta_\alpha = n(n-\alpha-1)[2n^2+n(\alpha-\varepsilon_2-1)-\varepsilon_2\alpha-2\varepsilon_3]/2+(n-\varepsilon_2)\alpha+\theta_n$, $\theta_n = n(n-1)/2+np-\varepsilon_3+1$.

Позначимо через

$$\theta = \max_{j=0,1,\ldots,n}\theta_j, \tag{21}$$

тоді для будь-яких $\varphi_j \in H_{q+\theta-j}(\Omega_{2\pi}^p)$, $j = 1,\ldots,n$, справедлива нерівність

$$||u||^2_{H_q^n(D^p)} \leq \operatorname{const}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}(1+||k||^2)^{q+\theta-j}|\varphi_{jk}|^2 =$$

$$= \operatorname{const}\sum_{j=1}^{n}||\varphi_j||^2_{H_{q+\theta-j}(\Omega_{2\pi}^p)} < \infty.$$

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема 2. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{2n+p}$) векторів*

$$(a_{0,n,0,\ldots,0},\ldots,a_{0,\ldots,0,n},\operatorname{Re}\mu_1,\ldots,\operatorname{Re}\mu_n,\operatorname{Re}\nu_1,\ldots,\operatorname{Re}\nu_n),$$

усіх $\varphi_j \in H_{q+\theta-j}(\Omega_{2\pi}^p)$, $j = 1,\ldots,n$, що задовольняють умови (20), де θ визначається формулою (21), існує розв'язок задачі (1), (8) з простору $H_q^n(D^p)$. Цей розв'язок єдиний, якщо виконується умова (7), тобто $V = \emptyset$.

Аналогічно доводиться теорема про існування розв'язку задачі (1), (2). Справді, оцінка (19) виконується і для Δ_k (це випливає з того, що $\partial^n(\Delta(k)-\Delta_k)/\partial\operatorname{Re}\mu_1\ldots\partial\operatorname{Re}\mu_\alpha\partial\operatorname{Re}\nu_{\alpha+1}\ldots\partial\operatorname{Re}\nu_n = 0$), а замість нерівності (11) виконується нерівність

$$|\Delta_{k\alpha}| \leq \operatorname{const}\prod_{j=1,j\neq\alpha}^{n}\max\left(1,e^{\operatorname{Re}\lambda_j T}\right)|k|^{N(n-1)}\sum_{j=1}^{n}|\varphi_{jk}|.$$

У цьому випадку розв'язок існує ($u \in H_q^{\max(N,n)}(D^p)$) для всіх правих частин умов (2) $\varphi_j \in H_\psi(\Omega_{2\pi}^p)$ при $\psi \geq q+\theta-N-1$, що задовольняють, можливо, скінченне число умов ортогональності типу (20).

14.2. Дослідження області існування розв'язку

У даному пункті вивчається можливість продовження розв'язку задачі (1), (2) із області $D^p = D_T^p$ в область D_τ^p, де $\tau > T$, тобто досліджується розв'язність задачі (1), (2) в просторах $H_q^{\max(N,n)}(D_\tau^p)$.

У першій частині доводиться неможливість продовження розв'язку задачі (1), (2) для майже всіх векторів $\{a_{\hat{s}}, b_{\hat{s}}^{jm}\}$ при деяких умовах на корені характеристичного рівняння, у другій – при виконанні умови Адамара встановлюється гладкість правих частин, яка забезпечує існування шуканого продовження.

14.2.1. Умови непродовжуваності розв'язку. При довільних $\tau_1, T < < \tau_1 < \tau$, і $K \subset \mathbb{Z}^p$ для розв'язку задачі (1), (2) виконується оцінка

$$\|u\|^2_{H_q^{\max(N,n)}(D^p_\tau)} \geq \int_{\tau_1}^{\tau} \|u\|^2_{H_q(\Omega^p_{2\pi})}\,dt \geq \sum_{k\in K}\int_{\tau_1}^{\tau}(1+\|k\|^2)^q|u_k(t)|^2\,dt,$$

де $u_k(t)$ – розв'язок відповідної задачі (3), (4) для звичайного диференціального рівняння.

Очевидно, що $u_k(t)$ достатньо розглядати при $\tau_1 \leq t \leq \tau$ і $k \in K$, де τ_1 і K виберемо в ході дослідження. Надалі в цьому пункті вважаємо, що $\varphi_1 = \ldots = \varphi_{n-1} = 0$.

Тоді $u_k(t) = (-1)^n\Delta^{-1}\rho\varphi_{nk}$, де

$$\rho = \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\Delta_j e^{\lambda_j t} = \Delta_1 e^{\lambda_1 t}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\frac{\Delta_j}{\Delta_1}e^{(\lambda_j-\lambda_1)t},$$

$\Delta = \det\left(B_m(ik)e^{\lambda_j t}\right)_{m,j=1,\ldots,n}$, $\Delta_j = \det\left(B_m(ik)e^{\lambda_\alpha t}\right)_{\substack{m=1,\ldots,n-1\\ \alpha=1,\ldots,n,\alpha\neq j}}$, $\lambda_j = \lambda_j(k)$ – корені рівняння (5), що перенумеровані в порядку спадання їхніх дійсних частин, тобто $\operatorname{Re}\lambda_1 \geq \ldots \geq \operatorname{Re}\lambda_n$.

Припускається, що на множині K корені λ_j є простими, $\Delta \neq 0$ і $\Delta_1 \neq 0$.

Для отримання оцінки знизу величини $|u_k(t)|$ достатньо оцінити знизу $|\rho|$ і зверху $|\Delta|$. Будемо використовувати нерівності (10), (12), (13) при $\varepsilon_2 = (n-p-1)/2$ і $\varepsilon_3 = (n-p-1)(n-1)/2$.

Із нерівності (10) випливає, що

$$|\Delta| \leq A_6\prod_{j=1}^{n}\max\left(1, e^{\operatorname{Re}\lambda_j T}\right)|k|^{Nn}, \tag{22}$$

$$|\Delta_j| \leq A_7\prod_{l=1,l\neq j}^{n}\max\left(1, e^{\operatorname{Re}\lambda_l T}\right)|k|^{N(n-1)}. \tag{23}$$

Оцінимо знизу $|\Delta_1|$. Для цього розіб'ємо множину $\mathbb{Z}^p$ на n класів, які не перетинаються, а саме

$$\begin{cases} Z_0 = \{k \in \mathbb{Z}^p : \operatorname{Re}\lambda_2(k) \leq (n-2)\Lambda\},\\ Z_\alpha = \left\{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \bigcup\limits_{j=0}^{\alpha-1} Z_j : \operatorname{Re}\lambda_{\alpha+2}(k) \leq (n-\alpha-2)\Lambda\right\},\ \alpha = 1,\ldots,n-2,\\ Z_{n-1} = \mathbb{Z}^p \setminus \bigcup\limits_{j=0}^{n-2} Z_j, \end{cases}$$

де $\Lambda = \Lambda(k) = (\ln A_8 + (n-1)(n+p)\ln|k|)/T$, $A_8 = 2^{n(n+1)/2}A_1^{3n(n-1)/2} \times A_2A_3^{-1}\max(1, A_2^{2-n})$, і введемо оператори диференціювання $\varkappa$:

$$\varkappa_\alpha = \partial^{n-1}/\partial\mu_1\ldots\partial\mu_\alpha\partial\nu_{\alpha+1}\ldots\partial\nu_{n-1},\ \alpha = 1,\ldots,n-2,$$

$$\varkappa_0 = \partial^{n-1}/\partial\nu_1\ldots\partial\nu_{n-1},\ \varkappa_{n-1} = \partial^{n-1}/\partial\mu_1\ldots\partial\mu_{n-1},$$

де

$$\nu_j = \operatorname{Re} b^{1j}_{N-j+1,j-1,0,\ldots,0},\ \mu_j = \operatorname{Re} b^{Mj}_{N-j+1,j-1,0,\ldots,0},\ j = 1,\ldots,n-1,$$

і $|k_1| = \max(|k_1|,\ldots,|k_p|)$ в K. Тоді з нерівностей (10), (13) маємо, що при $k \in Z_0$

$$|\varkappa_0\Delta_1| \geq (2A_1)^{1-n}A_3|k|^{(n-1)(N-(p+1)/2)}, \tag{24}$$

при $k \in Z_{n-1}$

$$|\varkappa_{n-1}\Delta_1| \geq (2A_1)^{1-n}A_3|k|^{(n-1)(N-(p+1)/2)}\exp\left(T\sum_{j=2}^{n}\operatorname{Re}\lambda_j\right), \tag{25}$$

при $k \in Z_\alpha$

$$\begin{aligned}|\varkappa_{n-1}\Delta_1| \geq{}& 2^{2-2n}A_1^{1-n(n-1)}\min(1,A_2)^{n-2}A_3 \times\\ &\times |k|^{(n-1)(N-p-1-n/2)}\exp\left(T\sum_{l=2}^{\alpha+1}\operatorname{Re}\lambda_l\right).\end{aligned} \tag{26}$$

Об'єднавши нерівності (24)–(26), одержимо нерівність з мінімальною константою A_9:

$$|\varkappa_\alpha\Delta_1| \geq A_9|k|^{(n-1)(N-p-1-n/2)}\exp\left(T\sum_{l=2}^{\alpha+1}\operatorname{Re}\lambda_l\right),$$

де $\sum\limits_{l=2}^{\alpha+1}\operatorname{Re}\lambda_l = 0$ при $\alpha = 0$.

Тоді згідно з лемами 3.5 і 3.1 справедлива оцінка

$$|\Delta_1| \geq A_{10}|k|^{(n-1)(N-2p-1-n/2)}\exp\left(T\sum_{l=1}^{\alpha+1}\operatorname{Re}\lambda_l\right),\ k \in Z_\alpha, \tag{27}$$

для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{2n-2}$) векторів $(\nu_1,\ldots,\nu_{n-1},\mu_1,\ldots,\mu_{n-1})$.

Припустимо, що корінь $\lambda_1(k)$, $k \in K$, характеристичного рівняння (5) задовольняє умову

$$\operatorname{Re}\lambda_1 \geq \frac{\ln B_1 + (B_2 + \sigma - q)\ln|k|}{\tau_1 - T} + \max(\operatorname{Re}\lambda_2, 0), \tag{28}$$

де $B_1 = 2(n-1)A_7A_8^{n(n+\tau/T)}A_{10}^{-1}$; $B_2 = N + (n-1)^2(n+p)(n+\tau/T)$; σ – довільне дійсне число.

Тоді для $\tau_1 \le t \le \tau$ справедливі нерівності $\left|(\Delta_j/\Delta_1)e^{(\lambda_j-\lambda_1)t}\right| \le$ $\le 1/2(n-1)$, $j = 2,\dots,n$, з яких випливають нерівності $|\rho| \ge$ $\ge \Delta_1 e^{\mathrm{Re}\,\lambda_1 t}/2$ і $|u_k(t)|^2 = |\rho/\Delta|^2|\varphi_{nk}|^2 \ge A_{11}(1+\|k\|^2)^\sigma|\varphi_{nk}|^2$.

За допомогою оператора проектування Π_K на множину $K \subset \mathbb{Z}^p$ (який за визначенням елементові $\varphi = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\varphi_k e^{i(k,x)}$ ставить у відповідність елемент $\Pi_K\varphi = \sum\limits_{k\in K}\varphi_k e^{i(k,x)}$) останню нерівність трансформуємо в шукану

$$\|u\|^2_{H_q^{\max(N,n)}(D_\tau^p)} \ge (\tau-\tau_1)A_{11}\|\Pi_K\varphi_n\|^2_{H_\sigma(\Omega_{2\pi}^p)}.$$

Наведені міркування сформулюємо у вигляді теореми про неіснування продовження розв'язку в область D_τ^p, $\tau > T$.

Теорема 3. *Якщо $\Pi_K\varphi_n \notin H_\sigma(\Omega^p_{2\pi})$, при $k \in K$ виконуються умови (28), то для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{2n+p-2}$) векторів*

$$(\mathrm{Re}\,a_{0,n,0,\dots,0},\ \dots,\ \mathrm{Re}\,a_{0,\dots,0,n},\ \nu_1,\ \dots,\ \nu_{n-1},\ \mu_1,\ \dots,\ \mu_{n-1})$$

не існує розв'язку задачі (1), (2) в просторі $H_q^{\max(N,n)}(D^p_\tau)$.

Іншими словами, теорема стверджує, що за певних умов на вихідні дані задачі (1), (2) її розв'язок не може бути продовженим із простору $H_q^{\max(N,n)}(D_T^p)$ у простір $H_q^{\max(N,n)}(D_\tau^p)$, $\tau > T$.

Із теореми 3 випливає, що існує множина рівнянь (1), для яких в просторах $H_q^{\max(N,n)}(D_\tau^p)$, $\tau > T$, не існує розв'язків задачі (1), (2) при відповідному виборі (з $H_\sigma(\Omega^p_{2\pi})$, σ – довільне дійсне число) правих частин в умовах (2).

Однією з підмножин цієї множини є множина рівнянь (1), що описується нерівностями: $\mathrm{Re}\,\lambda_1(k) > 0$, $|\mathrm{Im}\,\lambda_j(k)| \le A_{12}|k|^\alpha + \mathrm{const}$, $j = 1,2$, де $k = (k_1,0,\dots,0) \in \mathbb{Z}^p$, $A_{12} > 0$ при $\alpha \le 1$ (причому $A_{12} < \min\left(|a_{0,n,0,\dots,0}|A_1^{1-n}, A_{13}2^{n(1-n)/2}(A_1)^{n(1-n)/2+1}\right)$ при $\alpha = 1$), A_{13} – модуль дискримінанта, який побудований для полінома $\lambda^n +$ $+\sum\limits_{j=1}^{n} a_{n-j,j,0,\dots,0}\lambda^{n-j}$.

Дійсно, нехай $k = (k_1,0,\dots,0)$. Тоді для досить великих $|k|$

$$|\lambda_1| = \frac{|L_0(k)|}{\prod_{j=2}^n|\lambda_j|} \ge \frac{A_{14}|k|^n}{(A_1|k|)^{n-1}} = \frac{A_{14}}{A_1^{n-1}}|k|,$$

де $A_{14} < |a_{0,n,0,\dots,0}|$. Звідси

$$\mathrm{Re}\,\lambda_1 > \begin{cases} \sqrt{|a_{0,n,0,\dots,0}|^2A_1^{2-2n} - A_{12}^2}\,|k| & \text{при} \quad \alpha = 1,\\ A_{14}A_1^{1-n}|k| & \text{при} \quad \alpha < 1. \end{cases} \qquad (29)$$

Далі

$$|\lambda_1 - \lambda_2| = \frac{|W(k)|}{\prod\limits_{j=3}^{n}|\lambda_j - \lambda_1| \prod\limits_{n\ge j>l\ge 2}|\lambda_j - \lambda_l|} \ge$$

$$\ge A_{15}|k|^{n(n-1)/2}(2A_1|k|)^{n(1-n)/2+1} = A_{15}(2A_1)^{n(1-n)/2+1}|k|,$$

де $A_{15} < A_{13}$; отже,

$$\mathrm{Re}\,(\lambda_1 - \lambda_2) > \begin{cases} \sqrt{A_{13}^2(2A_1)^{n(1-n)+2} - 4A_{12}^2}\,|k| & \text{при} \quad \alpha = 1,\\ A_{15}(2A_1)^{n(1-n)/2+1}|k| & \text{при} \quad \alpha < 1. \end{cases} \qquad (30)$$

Із (29), (30) випливає, що умови (28) виконуються нескінченне число разів для довільних q, σ, τ.

Наприклад, розв'язок задачі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta u = 0, \qquad \Delta = \sum_{j=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

$$u|_{t=0} - \mu u|_{t=T} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} - \mu\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=T} = \varphi$$

записується у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\left(\frac{e^{\|k\|t}}{1-\mu e^{\|k\|T}} - \frac{e^{-\|k\|t}}{1-\mu e^{-\|k\|T}}\right)\frac{\varphi_k}{2\|k\|}e^{i(k,x)},$$

причому, якщо $\varphi \in H_{q+p-1+\varepsilon}(\Omega^p_{2\pi})$, $\varepsilon > 0$, то $u \in H_q^2(D_T^p)$, проте, якщо $\varphi \in H_\psi(\Omega^p_{2\pi})$ і $\varphi \notin H_{\psi+\varepsilon}(\Omega^p_{2\pi})$, $\varepsilon > 0$, то $u \notin H_q^2(D_\tau^p)$, $\tau > T$, для довільного значення $q \in \mathbb{R}$.

14.2.2. Умови продовжуваності розв'язку. З теореми 3 випливає, що для довільних (але фіксованих) q, σ, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > T$, рівняння (1) з логарифмічним ростом величин $\mathrm{Re}\,(\lambda_1 - \lambda_2)$ і $\mathrm{Re}\,\lambda_1$ (що виділяються нерівністю (28)) не має розв'язків з простору $H_q^{\max(N,n)}(D_\tau^p)$, які задовольняють умови (2) при $\varphi_n \notin H_\sigma(\Omega^p_{2\pi})$.

Виявляється, що умови (28) близькі до необхідних, оскільки при таких же логарифмічних умовах обмеження росту дійсних частин коренів (умови Адамара [164]), справедлива обернена до теореми 3 теорема про можливість продовження розв'язків у простір $H_q^{\max(N,n)}(D_\tau^p)$, $\tau > T$. Сформулюємо і доведемо цю теорему.

Позначимо через ν_{lj}, $j = 1,\dots,p$, $l = 1,\dots,n$, – дійсну частину коефіцієнта $b^{1l}_{\underbrace{N-l+1,0,\dots,0}_{j},l-1,0,\dots,0}$.

Теорема 4. *Нехай існують такі сталі $\theta > 0$ і $C \in \mathbb{R}$, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ виконуються умови Адамара*

$$\operatorname{Re}\lambda_1(k) \le \theta \ln|k| + C, \tag{31}$$

і $\varphi_j \in H_{q+\sigma}(\Omega^p_{2\pi})$, $\sigma = \theta(\tau+(n-1)T) - N + np + (n-1)(p+1)/2$. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{(n+1)p}$) векторів $a = (\operatorname{Re}a_{0,n,0,\dots,0},\dots,\operatorname{Re}a_{0,\dots,0,n},\nu_{11},\dots,\nu_{np})$ існує розв'язок задачі (1), (2) з простору $H_q^{\max(N,n)}(D^p_\tau)$.

Д о в е д е н н я. Згідно з (13) для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^p$) векторів $(\operatorname{Re}a_{0,n,0,\dots,0},\dots,\operatorname{Re}a_{0,\dots,0,n})$ і при досить великих $\|k\|$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^n\Delta}{\partial\nu_{1j}\dots\partial\nu_{nj}}\right| &= \left|\det\left((ik_j)^{N-\alpha+1}\lambda_\beta^{\alpha-1}\right)_{\alpha,\beta=1,\dots,n}\right| = \\ &= |k_j|^{n(N-(n+1)/2)}|W(k)| \ge A_{16}\|k\|^{Nn-(n-1)(p+1)/2},\end{aligned}$$

де $|k_j| = \max(|k_1|,\dots,|k_p|)$, $j = 1,\dots,p$. Це дає змогу отримати оцінку

$$|\Delta| \ge A_{17}\|k\|^{(N-p)n-(n-1)(p+1)/2}. \tag{32}$$

Оцінка похідної $\partial^n\Delta/\partial\nu_{1j}\dots\partial\nu_{nj}$ знизу дозволяє записати формальний розв'язок задачі (1), (2) у такому вигляді:

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t)e^{i(k,x)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\Delta_{\alpha\beta}}{\Delta}\varphi_{\beta k}e^{\lambda_\alpha t+i(k,x)}, \tag{33}$$

де $\Delta_{\alpha\beta} = \left(B_m(ik)e^{\lambda_q t}\right)_{m,q=1,\dots,n;m\ne\beta,q\ne\alpha}$.

Очевидно, що

$$|\Delta_{\alpha\beta}| \le A_{18}\prod_{j=1,j\ne\alpha}^{n}\max\left(1,e^{\operatorname{Re}\lambda_j T}\right)\|k\|^{N(n-1)}.$$

Враховуючи нерівності (31), (32), а також останню оцінку, приходимо до нерівності

$$\left|\frac{d^j u_k(t)}{dt^j}\right| \le A_{19}(1+\|k\|^2)^{j+\sigma}\sum_{\alpha=1}^{n}|\varphi_{\alpha k}|^2,$$

яка виконується для всіх $t \in [0,T]$.

Остаточно отримуємо

$$\|u\|^2_{H_q^{\max(N,n)}(D^p_\tau)} \le A_{20}\sum_{\alpha=1}^{n}\|\varphi_\alpha\|^2_{H_{q+\sigma}(\Omega^p_{2\pi})},$$

де $A_{20} > 0$ – деяка константа, що не залежить від k. Теорему доведено. ■

14.3. Рівняння з коефіцієнтами, що належать алгебричному многовиду

В області D^p дослідимо багатоточкову нелокальну задачу (1), (2) для рівнянь (1), вектор коефіцієнтів яких $R = (R_1,\dots,R_\theta) = \{a_{\hat{s}} : |\hat{s}| \le \le n, \hat{s} \ne (n,0,\dots,0)\}$ належить деякому алгебричному многовиду, що задається рівністю

$$g(R) = \sum_{|\alpha|\le r}\beta_\alpha R^\alpha = 0, \tag{34}$$

де β_α – деякі комплексні числа, $B_j \equiv \beta_{\underbrace{0,\dots,0,r}_{j},0,\dots,0} \ne 0$, $j = 1,\dots,p$.

Як і в п. 14.1, розв'язок шукаємо в просторі $H_q^{\max(N,n)}(D^r)$.

При $\Delta\ne 0$ розв'язок задачі (1), (2) зображається формулою (33), з якої (враховуючи (10)) випливає оцінка

$$|u_k(t)| \le \text{const}\sum_{j=1}^{n}\frac{|\varphi_{jk}|}{|\Delta|}(A_1|k|)^{N(n-1)}\sum_{\alpha=1}^{n}\prod_{j=1,j\ne\alpha}^{n}(1+e^{\operatorname{Re}\lambda_j T})e^{\operatorname{Re}\lambda_\alpha t}. \tag{35}$$

Для доведення існування розв'язку задачі (1), (2) залишається оцінити знизу $|\Delta|$.

Доведемо спочатку, що оцінки, аналогічні оцінкам (12) і (13), мають місце і для випадку розглядуваної задачі.

Нехай $K_1 = \{k \in \mathbb{Z}^p : |k_1| = \max_{\alpha=1,\dots,p}|k_\alpha|\}$, $K_j = \{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \bigcup_{\beta=1}^{j-1} K_\beta : |k_j| = \max_{\alpha=1,\dots,p}|k_\alpha|\}$, $j=2,\dots,p-1$, $K_p = \mathbb{Z}^p \setminus \bigcup_{\beta=1}^{p-1} K_\beta$; $\bar\beta = \{\beta_\alpha : |\alpha| \le r\}$.

Теорема 5. *Для майже всіх чисел β_0 і для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконуються нерівності*

$$|L_0(k)| \ge A_{21}|k|^{n-\varepsilon_4},\ \varepsilon_4 > p/2,\ A_{21} = A_{21}(\varepsilon_4, R, \bar\beta), \tag{36}$$

$$|W(k)| \ge A_{22}|k|^{n(n-1)/2-\varepsilon_5},\ \varepsilon_5 > (n-1)p/2,\ A_{22} = A_{22}(\varepsilon_5, R, \bar\beta), \tag{37}$$

Д о в е д е н н я. Позначимо через $\operatorname{Res}_\lambda(\sigma_1,\sigma_2)$ результант [25] поліномів σ_1 і σ_2 за змінною λ. Тоді

$$W^2(k) = (-1)^{n(n-1)/2}\operatorname{Res}_\lambda\left(L(\lambda,ik), dL(\lambda,ik)/d\lambda\right),$$

як і $L_0(k)$, є поліномом за змінною R, що заданий на многовиді $g(R) = 0$. Проведемо оцінки цих поліномів знизу.

Для $k \in K_j$, $j = 1, \dots, p$, зобразимо функції $L_0(k)$ і $W^2(k)$ поліномами ξ_j і η_j змінної R_j. Тоді

$$\xi_j(R_j) = (ik_j)^n R_j + \cdots, \quad \eta_j(R_j) = (-1)^{3n(n-1)/2}(ik_j)^{n(n-1)} n^n R_j^{n-1} + \cdots,$$

де крапками позначені молодші члени щодо R_j, а $R_j = a_{\underbrace{0,\dots,0,n}_{j},0,\dots,0}$, $j = 1, \dots, p$.

Нехай β_0 належить деякій обмеженій множині $J \subset \mathbb{C}$. Розглянемо поліноми змінної β_0 з одиничними старшими коефіцієнтами

$$\widetilde{\xi}_j(\beta_0) = (ik_j)^{-nr} \operatorname{Res}_{R_j}(\xi_j, g),$$

$$\widetilde{\eta}_j(\beta_0) = (-1)^{3n(n-1)/2} n^{-nr} (ik_j)^{nr(1-n)} \operatorname{Res}_{R_j}(\eta_j, g).$$

Позначимо через $S_1(k)$ і $S_2(k)$ множини чисел $\beta_0 \in J$, таких, що відповідно

$$|\widetilde{\xi}_j| < |k|^{-\varepsilon_4}, \quad |\widetilde{\eta}_j| < |k|^{-2\varepsilon_5}. \tag{38}$$

Крім того, нехай S_1 і S_2 – множини чисел $\beta_0 \in J$, для яких нескінченне число разів виконуються відповідні нерівності (38).

Оскільки $\widetilde{\xi}_j = \beta_0 + \widehat{\xi}_j$ ($\widehat{\xi}_j$ не залежить від β_0), то $S_1(k)$ міститься в множині чисел β_0, що задовольняють нерівність $|\operatorname{Re}\beta_0 + \operatorname{Re}\widehat{\xi}_j| < |k|^{-\varepsilon_4}$ і нерівність $|\operatorname{Im}\beta_0 + \operatorname{Im}\widehat{\xi}_j| < |k|^{-\varepsilon_4}$. Міра цієї множини становить $4|k|^{-2\varepsilon_4}$. Отже, $\operatorname{mes} S_1(k) \le 4|k|^{-2\varepsilon_4}$.

Зафіксуємо $\operatorname{Im}\beta_0$. Тоді $|\partial^{n-1}\widetilde{\eta}_j/\partial(\operatorname{Re}\beta_0)^{n-1}| = (n-1)!$ Використовуючи лему 3.5 та інтегруючи в межах області J за змінною $\operatorname{Im}\beta_0$, одержимо $\operatorname{mes} S_2(k) \le \operatorname{const}|k|^{-2\varepsilon_5/(n-1)}$.

Оскільки ряди $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \operatorname{mes} S_1(k)$ і $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \operatorname{mes} S_2(k)$ збігаються, то з леми 3.1 випливає, що $\operatorname{mes} S_1 = \operatorname{mes} S_2 = 0$. А це означає (оскільки $1 \le j \le p$ і множина J – довільні), що для майже всіх β_0 і для всіх (за винятком скінченної множини) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконуються нерівності

$$|\widetilde{\xi}_j| \ge |k|^{-\varepsilon_4}, \quad |\widetilde{\eta}_j| \ge |k|^{-2\varepsilon_5}, \ k \in K_j. \tag{39}$$

Використовуючи розклади результантів на множники [25], маємо

$$\operatorname{Res}_{R_j}(\xi_j, g) = (-1)^r B_j \prod_{\sigma=1}^{r} \xi_j(y_\sigma), \ j = 1, \dots, p,$$

$$\operatorname{Res}_{R_j}(\eta_j, g) = (-1)^{r(n-1)} B_j^{n-1} \prod_{\sigma=1}^{r} \eta_j(y_\sigma), \ j = 1, \dots, p,$$

де y_σ – R_j-корені рівняння (34), і для довільного $\varkappa$, $1 \le \varkappa \le r$,

$$\xi_j(y_\varkappa) = (-1)^r (ik_j)^{nr} \widetilde{\xi}_j(\beta_0) B_j^{-1} \prod_{\sigma=1,\sigma\ne\varkappa}^{r} (\xi_j(y_\sigma))^{-1},$$

$$\eta_j(y_\varkappa) = (-1)^{(n-1)(3n+2)r/2} n^{nr} (ik_j)^{nr(n-1)} \widetilde{\eta}_j(\beta_0) B_j^{1-n} \prod_{\sigma=1,\sigma\ne\varkappa}^{r} (\eta_j(y_\sigma))^{-1}.$$

З того, що $|\xi_j(y_\sigma)|$ і $|\eta_j(y_\sigma)|$ ростуть не швидше $|k|^n$ і $|k|^{n(n-1)}$, та з нерівностей (39) випливає доведення теореми. ∎

Теорема 6. *Нехай функції $\varphi_m \in H_{q+\varkappa}(\Omega_{2\pi}^p)$, $\varkappa > (3n^3 - 5n^2 + 8n - 2)p/4 - N$, задовольняють умову (20). Тоді для майже всіх векторів (μ, ν, β_0) існує розв'язок задачі (1), (2) з простору $H_q^{\max(N,n)}(D^p)$, де $\mu = \{\mu_\alpha^j : j = 1, \dots, p; \alpha = 1, \dots, n\}$, $\nu = \{\nu_\alpha^j : j = 1, \dots, p; \alpha = 1, \dots, n\}$, $\nu_\alpha^j = \operatorname{Re} b^{1\alpha}_{\underbrace{\alpha-1,0,\dots,0}_{j},N-\alpha+1,0,\dots,0}$, $\mu_\alpha^j = \operatorname{Re} b^{M\alpha}_{\underbrace{\alpha-1,0,\dots,0}_{j},N-\alpha+1,0,\dots,0}$.*

Д о в е д е н н я. Розіб'ємо множину цілочислових векторів $\mathbb{Z}^p$ на класи Z_j згідно з (14), де

$$\Lambda_\alpha \equiv \Lambda_\alpha(k) = T^{-1} \ln\left(A_{23}|k|^{\alpha\varepsilon_4+\varepsilon_5}\right),$$

$A_{23} = 2^{(n+1)n/2} A_1^{(2\alpha+n-1)n/2} A_{21}^{-\alpha} A_{22}^{-1}$. Відзначимо, що $\Lambda_\alpha(k) > 0$ для великих $|k|$.

У кожній із множин Z_α, $\alpha = 0, \dots, n$, оцінимо знизу похідну від Δ. Нехай $k \in Z_\alpha \cap K_j$, $\alpha = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, p$. Тоді оцінюємо похідну

$$\sigma_\alpha \equiv \left| \frac{\partial^n \Delta}{\partial\mu_1^j \dots \partial\mu_\alpha^j \partial\nu_{\alpha+1}^j \dots \partial\nu_n^j} \right| \equiv \left| \det (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \right| |k_j|^{Nn-n(n-1)/2},$$

$$a_{ij} = \lambda_j^{i-1} e^{\lambda_j T}, \ i = 1, \dots, \alpha, \quad a_{ij} = \lambda_j^{i-1}, \ i = \alpha+1, \dots, n.$$

За теоремою Лапласа зобразимо визначник сумою добутків мінорів порядку α та їх алгебричних доповнень, тобто

$$\sigma_\alpha = |k_j|^{Nn-n(n-1)/2} \times$$
$$\times \left| \sum_{j,\tau} \xi_j \exp(T \sum_{l=1}^{\alpha} \lambda_{j_l}) \prod_{1\le q<l\le\alpha} (\lambda_{j_l} - \lambda_{j_q}) \prod_{1\le q<l\le n-\alpha} (\lambda_{\tau_l} - \lambda_{\tau_q}) \prod_{l=1}^{n-\alpha} \lambda_{\tau_l}^{\alpha} \right|,$$

де сумування проводиться за всіма можливими наборами векторів $j = (j_1, \dots, j_\alpha)$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{n-\alpha})$ таких, що $(j_1, \dots, j_\alpha, \tau_1, \dots, \tau_{n-\alpha})$ –

перестановка чисел $1, \ldots, n$ і $j_1 < \ldots < j_\alpha$, $\tau_1 < \ldots < \tau_{n-\alpha}$, $\xi_j = \pm 1$ залежно від парності чи непарності перестановки. В сумі виділимо доданок з індексом $j = (1, \ldots, \alpha)$ і позначимо його абсолютну величину через

$$\gamma = \Big|\exp(T\sum_{l=1}^{\alpha} \lambda_l) \prod_{1\le q<l\le\alpha} (\lambda_l - \lambda_q) \prod_{\alpha+1\le q<l\le n} (\lambda_l - \lambda_q) \prod_{l=\alpha+1}^{n} \lambda_l^{\alpha}\Big|.$$

З урахуванням цього позначення σ_α перепишеться у вигляді

$$\sigma_\alpha = \gamma |k_j|^{Nn-n(n-1)/2} \Big| 1 + \\ + \sum_{j,\tau}{}' \frac{\xi_j}{\gamma} \exp(T\sum_{l=1}^{\alpha} \lambda_{j_l}) \prod_{1\le q<l\le\alpha} (\lambda_{j_l} - \lambda_{j_q}) \prod_{1\le q<l\le n-\alpha} (\lambda_{\tau_l} - \lambda_{\tau_q}) \prod_{l=1}^{n-\alpha} \lambda_{\tau_l}^{\alpha}\Big|,$$

де $\sum'$ означає, що в сумі немає доданка з індексом $j = (1, \ldots, \alpha)$.

Далі, враховуючи (36), (37), (14), для великих $|k|$ кожний член останньої суми оцінюємо зверху числом

$$2^{n(n-1)/2}(A_1|k|)^{n(2\alpha+n-1)/2} \le A_{23} 2^{-n} |k|^{\alpha\varepsilon_4+\varepsilon_5} e^{-\Lambda_\alpha T} = 2^{-n},$$

звідки одержуємо

$$\sigma_\alpha \ge |k_j|^{Nn-n(n-1)/2} |\gamma|/2 \ge A_{24} |k|^{Nn-\varepsilon_5-\alpha\varepsilon_4} \exp(T\sum_{l=1}^{\alpha} \operatorname{Re}\lambda_l),$$

де $A_{24} = 2^{\alpha(\alpha-n)-1} p^{n(n-1)/2-Nn} A_1^{-n\alpha} A_{21}^{\alpha} A_{22}$. При цьому справедливі нерівності

$$\Big|\frac{\partial^n \Delta}{\partial\nu_1^j \ldots \partial\nu_n^j}\Big| \equiv |k_j|^{Nn-n(n-1)/2} |W(k)| \ge A_{22} p^{n(n-1)/2-Nn} |k|^{Nn-\varepsilon_5},$$

$$\begin{aligned} \Big|\frac{\partial^n \Delta}{\partial\mu_1^j \ldots \partial\mu_n^j}\Big| &\equiv |k_j|^{Nn-n(n-1)/2} |W(k)| \exp(T\sum_{l=1}^{\alpha} \operatorname{Re}\lambda_l) \ge \\ &\ge A_{22} p^{n(n-1)/2-Nn} |k|^{Nn-\varepsilon_5} \exp(T\sum_{l=1}^{\alpha} \operatorname{Re}\lambda_l) \end{aligned}$$

для всіх $k \in K_j$ з великим $|k|$.

Тоді з лем 3.5 і 3.1 маємо, що для майже всіх векторів (μ, ν, β_0) виконуються нерівності

$$|\Delta| \ge \mathrm{const} |k|^{Q(\alpha)} \exp\big(T\sum_{l=1}^{\alpha} \operatorname{Re}\lambda_l\big), \; k \in Z_\alpha, \; \alpha = 0, 1, \ldots, n, \qquad (40)$$

де $Q(\alpha) = (N-p)n - \varepsilon_5 + (n[\alpha/n] - \alpha)\varepsilon_4$.

Позначивши через Π_{Z_α} оператор проектування, що відповідає множині Z_α, з (35), (14), (40), (20) одержимо при $\alpha = 0, 1, \ldots, n$

оцінки

$$\|\Pi_{Z_\alpha} u\|^2_{H_q^{\max(N,n)}(D^p)} \le \mathrm{const} \sum_{j=1}^{n} \|\Pi_{Z_\alpha} \varphi_j\|^2_{H_{q+\varkappa_\alpha+\delta_\alpha}(\Omega_{2\pi}^p)},$$

де $\varkappa_\alpha = (n-\alpha)(n-\alpha-1)(\varepsilon_5 + \varepsilon_4(n+\alpha)/2) + (\alpha - n[\alpha/n])\varepsilon_4 + \varepsilon_5 + np - N$, $\delta_\alpha > 0$ – довільні числа. Звідси, враховуючи, що $\varepsilon_4 > p/2$, $\varepsilon_5 >$ $> (n-1)p/2$ і $\max_\alpha \inf_{\varepsilon_4,\varepsilon_5} \varkappa_\alpha = (3n^3 - 5n^2 + 8n - 2)p/4 - N$, випливає твердження теореми. ∎

Аналогічно досліджуються задачі (1), (2) на алгебричному многовиді, що задається рівностями $g_j(R) = 0$, $j = 1, \ldots, j_1$, $j_1 \ge 2$, де g_j – поліноми, або на многовиді $h_j(R') = 0$, де $R' = (R_1, \ldots, R_p)$, h_j, $j = 1, \ldots, j_2$, $j_2 \ge 1$ – поліноми, коефіцієнти яких є деякими функціями змінних $R'' = (R_{m+1}, \ldots, R_\theta)$.

Розділ IV

Нелокальні задачі для рівнянь нескінченного порядку та диференціально-операторних рівнянь

Досліджуються питання постановки, коректної розв'язності та побудови розв'язків (наближених розв'язків) задач з нелокальними умовами для рівнянь із псевдодиференціальними коефіцієнтами, рівнянь із частинними похідними нескінченного порядку, диференціально-операторних рівнянь. Також вивчаються задачі з формальними початковими умовами для диференціально-операторних рівнянь та задача знаходження розв'язків нелокальних задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними за допомогою методу мінімізації відповідних функціоналів у соболевських просторах.

§ 15. Рівняння з псевдодиференціальними операторами

Вивчаються постановка і розв'язність нелокальних багатоточкових задач для диференціальних рівнянь із псевдодиференціальними коефіцієнтами в просторах, що породжені коефіцієнтами диференціального рівняння, у циліндричній області (п. 15.1 [78]) і в безмежному шарі (п. 15.2 [86, 85]).

15.1. Випадок циліндричної області

Нехай H – простір, одержаний поповненням множини тригонометричних поліномів $u = \sum u_k e^{i(k,x)}$ з періодом 2π за всіма змінними $x_1, \ldots, x_p$ щодо норми $\|u\|^2 = (2\pi)^p \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} |u_k|^2$. Розглядатимемо лінійні псевдодиференціальні оператори (п.д.о.) зі сталими коефіцієнтами $F = F(D)$, $D = (D_1, \ldots, D_p)$, $D_j = \partial/i\partial x_j$, $j = 1, \ldots, p$, які ототожнюються з відповідними послідовностями комплексних чисел $\{F(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^p}$, за допомогою рівності $F\,e^{i(k,x)} = F(k)e^{i(k,x)}$. Далі в цьому пункті будемо розглядати тільки такі п.д.о.

Операції над п.д.о. визначаються таким чином: $F_1 = F_2$ еквівалентне $F_1(k) = F_2(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$; $F_1 \neq 0$ – $F_1(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}^p$; $F_1 + F_2$ – $F_1(k) + F_2(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$; аналогічно визначаються й інші арифметичні операції $(-, \times, /)$. При діленні припускаємо, що $F_2 \neq 0$. Операцію порівняння $F_1 > F_2$ визначаємо за допомогою нерівностей $|F_1(k)| > |F_2(k)|$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Аналогічно через $|F(k)|$ визначаються й інші нерівності.

Природно, що з нерівностей $F_1 \geq F_2$ і $F_2 \geq F_1$ не випливає рівність $F_1 = F_2$.

Очевидно, що розглядувані п.д.о. комутують щодо операцій додавання і множення.

Нехай H_F, $F \neq 0$, позначає простір, одержаний внаслідок поповнення множини тригонометричних поліномів за нормою $\|u\|_F = \|Fu\|$.

Позначимо через $C^l([0,T]; H_F)$ простір таких функцій u, що $\partial^j u/\partial t^j$, $j = 0, 1, \ldots, l$, для кожного t, $0 \leq t \leq T$, належить простору H_F і які неперервні за змінною t у цьому просторі. Норма в просторі $C^l([0,T]; H_F)$ задається формулою

$$\|u\|^2_{l,F} = \max_{t\in[0,T]} \left(\|u\|^2_F + \left\| \frac{\partial^l u}{\partial t^l} \right\|^2_F \right).$$

$\overline{H}_F$ – декартовий добуток кількох просторів H_F, тобто простір $\overline{H}_F$ складається з векторів $u = (u_1, \ldots, u_\beta)$, елементи яких $u_j \in H_F$. Норма в цьому просторі визначається формулою

$$|||u|||^2_F = \sum_{j=1}^{\beta} \|u\|^2_F.$$

Будемо використовувати оператори проектування $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\omega(D)$ на деяку множину $\omega \subset \mathbb{Z}^p$, що визначаються рівностями $\mathbf{P}_\omega(k) = 1$ для $k \in \omega$ та $\mathbf{P}_\omega(k) = 0$ для решти $k \in \mathbb{Z}^p$. Очевидно, що одиничний оператор $1 = \mathbf{P}_{\mathbb{Z}^p}(D)$, нульовий $0 = \mathbf{P}_\emptyset(D)$; $\mathbf{P} = \mathbf{P}^2$. Якщо $\mathbf{P}_1 =$

$= \mathbf{P}_{\omega_1}(D)$, $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_{\omega_2}(D)$, то $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_{\omega_1\cap\omega_2}(D)$; $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$; $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_{\omega_1\cup\omega_2}(D) + \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = 2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_1(1-\mathbf{P}_2) + \mathbf{P}_2(1-\mathbf{P}_1)$.

Розмірністю проектора $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\omega(D)$ називаємо число елементів множини ω. Оператор A будемо називати скінченновимірним, якщо існує такий скінченновимірний проектор $\mathbf{P}$, що $A = A\mathbf{P}$; у цьому випадку говоримо також, що A відповідає $\mathbf{P}$.

Позначимо через $\delta = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} e^{i(k,x)}$ дельта-функцію, а через E – фіксований допоміжний п.д.о., що визначається умовами $1 > E > 0$, $E\delta \in H$.

Вихідна для дослідження задача матиме вигляд

$$L\Big(\frac{d}{dt}, D\Big)u \equiv \frac{d^n u(t)}{dt^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} = 0, \tag{1}$$

$$M_j u = \varphi_j, \ j = 1, \dots, n, \tag{2}$$

де $M_j : C^{n_j}([0,T]; H_{F\cdot F_j}) \longrightarrow H_F$ – неперервні оператори; F – довільний п.д.о.; A_j, F_j – деякі (задані) п.д.о.

Будемо досліджувати множину збурених задач

$$L\Big(\frac{d}{dt}, D\Big)u + au = 0, \tag{3}$$

$$M_j{}' u \equiv M_j u + \nu_j \frac{d^{j-1}u}{dt^{j-1}}\Big|_{t=0} + \mu_j \frac{d^{j-1}u}{dt^{j-1}}\Big|_{t=T} = \varphi_j, \ j = 1, \dots, n, \tag{4}$$

які одержуються із задачі (1), (2) при фіксованих значеннях вектора параметрів $(\mu, \nu, a) \in G \subset \mathbb{R}^{2n+2}$, де $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{C}^n$.

Розв'язком задачі (3), (4) для кожної точки $(\mu, \nu, a) \in G$ в просторі $C^l([0,T]; H_F)$ називаємо таку функцію $u(t) = u(t, \mu, \nu, a)$ з цього простору, для якої існують п.д.о. Φ і $U(t) = (U_1(t), \dots, U_n(t))$, що задовольняють умови

$$u(t) = U(t)\varphi, \tag{5}$$

$$U(t) = \operatorname{argmin}\big\|(\operatorname{argmin}|||(MV(t) - 1)\varphi|||_\Phi^2)\varphi\big\|_{l,F}^2 \quad \forall\varphi \in \overline{H}_\Phi, \tag{6}$$

де $\varphi = \operatorname{col}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $M = \operatorname{col}(M_1', \dots, M_n')$, $\operatorname{argmin}_{u\in S} f(u)$ – множина таких елементів $u' \in S$, що $f(u') = \min_{u\in S} f(u)$; внутрішній мінімум в (6) шукається на множині всіх можливих розв'язків $V(t) = (V_1(t), \dots, V_n(t))$ операторного рівняння

$$L\Big(\frac{d}{dt}, D\Big)V(t, D) = (0, \dots, 0), \tag{7}$$

а зовнішній – на множині тих розв'язків $V(t)$, які забезпечують внутрішній мінімум.

Іншими словами, під розв'язком задачі (3), (4) розуміємо мінімальний за нормою в просторі $C^l([0,T]; H_F)$ розв'язок рівняння (3), який мінімізує нев'язку $Mv - \varphi$, а саме задовольняє умову $\min_v |||Mv - \varphi|||_\Phi^2 = |||Mu - \varphi|||_\Phi^2$ при деякому п.д.о. Φ. Із наведеного вище означення випливає, що п.д.о. Φ і $U(t)$ залежать від параметрів μ, ν, a. Далі доведемо, що в деякій підобласті області параметрів G, як завгодно близькій до неї за мірою, існує розв'язок задачі (3), (4) для Φ, що не залежить від μ, ν, a. Попередньо одержуємо формальний розв'язок задачі (3), (4) і доводимо його єдиність.

Побудуємо розв'язок задачі (3), (4), припускаючи, що він існує. Нехай $W(t, k)$ – фундаментальна система, що утворена розв'язками рівняння $L(d/dt, k)v + av = 0$. Тоді

$$V(t) = W(t)C \tag{8}$$

є загальним розв'язком рівняння (7), де C – квадратна матриця розміру n, елементами якої є довільні п.д.о.

Нехай $\omega_i = \{k \in \mathbb{Z}^p : \operatorname{rank} M(k)W(t,k) = i\}$, $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{\omega_i}(D)$. Тоді існують матричні унітарні п.д.о. Q і R, $Q^{-1} = Q^*$, $R^{-1} = R^*$, такі, що справедливий такий сингулярний розклад для матриці MW [31]:

$$MW = Q\Omega R,$$

де Ω – діагональна матриця п.д.о., пов'язана з введеними проекторами $\mathbf{P}_i$ таким чином:

$$[\mathbf{P}_0]\Omega = 0, [\mathbf{P}_n]\Omega = [\mathbf{P}_n]\Omega_n, [\mathbf{P}_i]\Omega = [\mathbf{P}_i]\begin{pmatrix}\Omega_i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \ i = 1, \dots, n-1.$$

Тут Ω_i, $i = 1, \dots, n$, – діагональні невироджені матриці п.д.о. розміру i, $[\mathbf{P}_i] = \operatorname{diag}(\mathbf{P}_i, \dots, \mathbf{P}_i)$ – матриця порядку n.

Очевидно, що $\sum_{j=0}^{n} \mathbf{P}_j = 1$, $\mathbf{P}_j\mathbf{P}_s = 0$ при $j \neq s$.

Використовуючи (8) і сингулярний розклад матриці MW, обчислюємо вираз у внутрішніх дужках умови (6):

$$\begin{aligned} MV - 1 \ &= \ \sum_{i=0}^{n}[\mathbf{P}_i]Q(\Omega RC - Q^*) = [\mathbf{P}_n](Q\Omega RC - 1) - [\mathbf{P}_0] + \\ &+ \ Q\sum_{i=1}^{n-1}\begin{pmatrix}\Omega_i R_i[\mathbf{P}_i]C - Q_i^*[\mathbf{P}_i]\\ -Q_i'^*[\mathbf{P}_i]\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

де R_i і Q_i – матриці п.д.о. розміру $i \times n$; R_i' і Q_i' – матриці п.д.о. розміру $(n-i) \times n$, що утворюють блочне розбиття матриць R і Q, тобто для кожного $i = 1, \ldots, n-1$

$$R = \begin{pmatrix} R_i \\ R_i' \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_i \\ Q_i' \end{pmatrix}.$$

Рівності для $MV - 1$ справедливі при довільних операторах $[\mathbf{P}_0]C$, $R_i'[\mathbf{P}_i]C$, які позначимо через C_0 і C_i. Обчислимо внутрішній мінімум в (6). Одержимо

$$\min_V |||(MV-1)\varphi|||_\Phi^2 = \min_C |||(MWC-1)\varphi|||_\Phi^2 =$$

$$= |||[\mathbf{P}_0]\varphi|||_\Phi^2 + \sum_{i=1}^{n-1} |||Q_i'^*[\mathbf{P}_i]\varphi|||_\Phi^2,$$

причому остання рівність виконується при

$$\Omega_i R_i[\mathbf{P}_i]C = Q_i^*[\mathbf{P}_i], \quad [\mathbf{P}_n]MWC = [\mathbf{P}_n].$$

Звідси одержуємо

$$R[\mathbf{P}_i]C = [\mathbf{P}_i]\begin{pmatrix} \Omega_i^{-1}Q_i^* \\ C_i \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{P}_n]C = [\mathbf{P}_n](MW)^{-1}.$$

Домноживши ліве рівняння на $R^{-1} = R^*$, маємо

$$[\mathbf{P}_i]C = [\mathbf{P}_i]R_i^*\Omega_i^{-1}Q_i^* + [\mathbf{P}_i]R_i'^*C_i,$$
$$[\mathbf{P}_n]C = [\mathbf{P}_n](MW)^{-1},$$

тобто значення $C_{\min}$, при якому досягається внутрішній мінімум в (6), визначається формулою

$$C_{\min} = C_0 + \sum_{i=1}^{n-1}[\mathbf{P}_i](R_i'^*C_i + R_i^*\Omega_i^{-1}Q_i^*) + [\mathbf{P}_n](MW)^{-1}. \tag{9}$$

Звідси одержуємо, що

$$V_{\min} = \operatorname{argmin}|||(MV-1)\varphi|||_\Phi^2 = WC_{\min}, \tag{10}$$

$$\|V_{\min}\|_{l,F}^2 = \|\mathbf{P}_0WC_0\varphi\|_{l,F}^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\|\mathbf{P}_iWR_i'^*C_i\varphi\|_{l,F}^2 + \right.$$

$$\left. + \|\mathbf{P}_iWR_i^*\Omega_i^{-1}Q_i^*\varphi\|_{l,F}^2\right) + \|\mathbf{P}_nW(MW)^{-1}\varphi\|_{l,F}^2. \tag{11}$$

Останній вираз досягає свого мінімуму при

$$\|\mathbf{P}_0WC_0\varphi\|_{l,F} = 0 \quad \text{і} \quad \|\mathbf{P}_iWR_i'^*C_i\varphi\|_{l,F} = 0.$$

Оскільки W – фундаментальна система, то $C_0\varphi = 0$ і $R_i'^*C_i\varphi = 0$. Оскільки φ – довільна, а матриця $R_i'^*$ повного рангу, то $C_0 = 0$, $C_i = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$. Звідси і з (10), (11) одержуємо, що

$$U(t) = \sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{P}_iWR_i^*\Omega_i^{-1}Q_i^* + \mathbf{P}_nW(MW)^{-1}. \tag{12}$$

Тому розв'язок задачі (3), (4) визначається однозначно за формулою (5), причому

$$\|u\|_{l,F}^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\|\mathbf{P}_iWR_i^*\Omega_i^{-1}Q_i^*\varphi\|_{l,F}^2 + \|\mathbf{P}_nW(MW)^{-1}\varphi\|_{l,F}^2.$$

Підсумуємо наведені міркування у вигляді теореми.

Теорема 1. *Якщо розв'язок задачі (3), (4) існує, то він єдиний і визначається формулами (5) і (12).*

Виникає питання існування розв'язку, тобто питання вибору п.д.о. Φ, для якого розв'язок належить $C^l([0,T];H_F)$, або, навпаки, вибору п.д.о. F за фіксованим п.д.о. Φ.

Для розв'язку задачі (3), (4) можна одержати оцінку

$$\|u\|_{l,F}^2 = \max_t\left(\|U(t)\varphi\|_F^2 + \left\|\frac{d^lU(t)}{dt^l}\varphi\right\|_F^2\right) \le 2|||\varphi|||_\Phi^2$$

при

$$\Phi = F\max_t\max_{i=1,\ldots,n}\left(U_i(t), \frac{d^lU_i(t)}{dt^l}\right)$$

або

$$F = \Phi\left(\max_t\max_{i=1,\ldots,n}\left(U_i(t), \frac{d^lU_i(t)}{dt^l}\right)\right)^{-1}.$$

Із останніх двох рівностей важко що-небудь сказати про гладкість розв'язку і правих частин, оскільки U_i складним чином залежать від вихідних операторів. Крім того, співвідношення між Φ і F залежать від точки області G, тобто для кожної задачі (3), (4) доводиться будувати свій простір.

Нижче покажемо, що будь-яка задача (3), (4) при $(\mu,\nu,a) \in G\backslash\widetilde{G}$, де міра $\widetilde{G}$ може бути зроблена як завгодно малою, має розв'язок в просторі $C^l([0,T];H_F)$, якщо $\varphi \in \overline{H}_{F\Phi_1}$ і Φ_1 поліноміально залежить від вихідних операторів A_i, F_i та допоміжного оператора E; Φ_1 залежить від області G, але не залежить від точок області G.

Виведемо деякі допоміжні оцінки. Нехай V_j, $j = 1, \ldots, 2n+2$, – розміри деякого паралелепіпеда, що містить область G, причому V_j, $j = 1, \ldots, n$, відповідає параметру ν_j, V_j, $j = n+1, \ldots, 2n$, – параметру μ_j; V_{2n+1}, V_{2n+2} відповідають параметрам a_1 і a_2, $V = V_1 \cdot \ldots \cdot V_{2n+2}$.

Будемо використовувати такі твердження.

Лема 1. *Нехай $q_1 \ge 0, \ldots, q_s \ge 0$ – цілі числа, Ω – область в $\mathbb{R}^s$, функція $f(b)$ комплекснозначна і неперервна в Ω і є поліномом степеня p_j за змінною b_j, причому $q_j > 0$, $p_j - q_j \ge 0$; нехай в* *області* $\Omega_1 \subset \Omega$

$$\left|\frac{\partial^{|q|} f}{\partial b_1^{q_1} \ldots \partial b_s^{q_s}}\right| \geq \sigma > 0, \ |q| = q_1 + \cdots + q_s$$

(σ не залежить від b). Позначимо через Ω_2 множину таких $b \in \Omega_1$, для яких $|f| < \sigma\sigma_1^{|q|}$. Тоді

$$\begin{aligned} \operatorname{mes}\Omega_2 &\leq 4\sqrt{2}|q|\theta^{1-q/|q|}\sigma_1\Big(\prod_{j=1}^{s}\frac{(p_j+1)!}{(p_j-q_j+1)!}\Big)^{1/|q|} \leq \\ &\leq 2\sqrt{2}|q|\theta^{1-q/|q|}\big(\max_{q_j>0}(2p_j - q_j)+3\big)\sigma_1, \end{aligned}$$

де $\theta^{1-q/|q|} = \prod_{j=1}^{s}\theta_j^{1-q_j/|q|}$, *$\theta_j$ – розміри паралелепіпеда, що містить область Ω.*

Доведення леми 1 аналогічне доведенню леми 3.5.

Використовуючи лему 1, доведемо таку лему.

Лема 2. *Нехай $f = f(b, D)$ – п.д.о., що залежить від параметрів $b \in \Omega \subset \mathbb{R}^s$, і нехай для $q_j > 0$ п.д.о. f є поліномом степеня p_j, $p_j \geq q_j$, від параметра b_j, в області $\Omega_1 \subset \Omega$,*

$$\left|\widetilde{\mathbf{P}}\frac{\partial^{|q|} f}{\partial b_1^{q_1} \ldots \partial b_s^{q_s}}\right| \geq \widetilde{\mathbf{P}}\sigma(D) > 0, \ |q| = q_1 + \cdots + q_s,$$

де $\widetilde{\mathbf{P}}$ – деякий проектор. Тоді для довільного проектора $\widetilde{\mathbf{Q}}$ в області $\Omega_1 \setminus \Omega_2$, $\operatorname{mes}\Omega_2 \leq 2\sqrt{2}\,|q|\,\|\widetilde{\mathbf{P}}\widetilde{\mathbf{Q}}E\delta\|^2\theta^{1-q/|q|}\big(\max_{q_j>0}(2p_j - q_j)+3\big)$, виконується оцінка $f\widetilde{\mathbf{P}}\widetilde{\mathbf{Q}} \geq \widetilde{\mathbf{P}}\widetilde{\mathbf{Q}}\sigma E^{2|q|} > 0$, де $E > 0$ – введений раніше допоміжний п.д.о.

Д о в е д е н н я. Нехай $\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}_{\widetilde{\omega}}(D)$, $\widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{P}_{\widetilde{\widetilde{\omega}}}(D)$, $\Omega_2(k) = \big\{b \in \Omega : |f(b,k)| < \big|\sigma(k)E(k)^{2|q|}\big|\big\}$. Оскільки

$$\left|\frac{\partial^{|q|} f(b,k)}{\partial b_1^{q_1} \ldots \partial b_s^{q_s}}\right| \geq |\sigma(k)| > 0, \ k \in \widetilde{\omega},$$

то на основі леми 1 маємо

$$\operatorname{mes}\Omega_2(k) \leq 2\sqrt{2}|q|\theta^{1-q/|q|}|E(k)|^2\big(\max_{q_j>0}(2p_j - q_j)+3\big).$$

Тоді нерівність $|f(b,k)| \geq \big|\sigma(k)E(k)^{2|q|}\big|$ виконується на множині $\Omega_1 \setminus \Omega_2(k)$, а нерівність $f\widetilde{\mathbf{P}}\widetilde{\mathbf{Q}} \geq \widetilde{\mathbf{P}}\widetilde{\mathbf{Q}}\sigma E^{2|q|}$ – на множині $\bigcap(\Omega_1 \setminus \Omega_2(k)) = \Omega_1 \setminus \Omega_2$, $\Omega_2 = \bigcup \Omega_2(k)$ (операції перетину і об'єднання множин беруться за векторами k з множини $\widetilde{\omega} \cup \widetilde{\widetilde{\omega}}$). Міра множини Ω_2 оцінюється за мірою множини $\Omega_2(k)$ нерівністю $\operatorname{mes}\Omega_2 \leq \sum_{k \in \widetilde{\omega} \cup \widetilde{\widetilde{\omega}}} \operatorname{mes}\Omega_2(k)$. Доведення завершено. ∎

Лема 3. *Нехай $b \in \Omega \subset \mathbb{R}^s$, $f = f(D)$ – п.д.о., $\operatorname{mes}\Omega_1 \leq \pi\theta_1 \cdot \ldots \cdot \theta_{s-2}\|\mathbf{P}E\delta\|^2$ (θ_j визначені в лемі 1). Тоді для довільного проектора $\mathbf{P}$ в області $\Omega \setminus \Omega_1$ виконується нерівність $(b_{s-1} + ib_s + f)\mathbf{P} \geq \mathbf{P}E$.*

Д о в е д е н н я. Нехай $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\omega(D)$, $\Omega_1(k) = \{b \in \Omega : |b_{s-1} + ib_s + f(k)| < |E(k)|\}$, $k \in \omega$; тоді $\operatorname{mes}\Omega_1(k) \leq \theta_1 \cdot \ldots \cdot \theta_{s-2}\operatorname{mes}\Omega_1'(k)$, де $\Omega_1'(k)$ – площа круга радіуса $|E(k)|$ з центром $f(k)$. Враховуючи це, $\operatorname{mes}\Omega_1'(k) = \pi|E(k)|^2$ і $\operatorname{mes}\Omega_1(k) \leq \pi\theta_1 \cdot \ldots \cdot \theta_{s-2}|E(k)|^2$. Отже, нерівність $(b_{s-1} + ib_s + f)\mathbf{P} \geq \mathbf{P}E$ виконується на множині $\Omega \setminus \Omega_1$, де $\Omega_1 = \bigcup_{k \in \omega} \Omega_1(k)$. Міра множини Ω_1 не перевищує величини

$$\pi\theta_1 \cdot \ldots \cdot \theta_{s-2}\sum_{k \in \omega}|E(k)|^2 = \pi\theta_1 \cdot \ldots \cdot \theta_{s-2}\|\mathbf{P}E\delta\|^2.$$

Лему доведено. ∎

Виведемо більш зручну оцінку для норми розв'язку задачі (3), (4) в підобласті області G. Для цього розглянемо спочатку ряд допоміжних нерівностей.

Нехай $\lambda(k)$ – корінь рівняння $L(\lambda, k) + a = 0$. Тоді

$$\lambda^n(k) = -\sum_{j=0}^{n-1} A_j(k)\lambda^j(k) - a.$$

Якщо $|\lambda(k)| \geq 1$, то $|\lambda(k)| \leq \sum_{j=0}^{n-1}|A_j(k)| + |a|$. Отже, $\lambda = \lambda(D) \leq A$, де $A = \max_{(\mu,\nu,a)\in G}\Big(1, \sum_{j=0}^{n-1}|A_j(k)| + |a|\Big)$. Позначимо через $\operatorname{Res}(D)$ дискримінант [25] многочлена $L(\lambda, D) + a$. Тоді $\operatorname{Res}(D)$ – поліном змінної a_1 степеня $n-1$, причому

$$\big|\partial^{n-1}\operatorname{Res}(D)/\partial a_1^{n-1}\big| = (n-1)!$$

На основі леми 2 одержуємо, що для довільного проектора $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P}\operatorname{Res}(D) \geq (n-1)!\,\mathbf{P}E^{2n-2} > 0 \tag{13}$$

в області $G \setminus \widetilde{G}$, де $\operatorname{mes}\widetilde{G} \leq 2\sqrt{2}(n-1)(n+2)VV_{2n+1}^{-1}\|\mathbf{P}E\delta\|^2$. На основі леми 3

$$|a + A_0| = |a_1 + ia_2 + A_0| \geq \mathbf{P}E \tag{14}$$

в області $G \setminus \tilde{\tilde{G}}$, де $\operatorname{mes} \tilde{\tilde{G}} \le \pi V V_{2n+1}^{-1} V_{2n+2}^{-1} \|\mathbf{P} E\delta\|^2$. Отже, в області $G \setminus (\tilde{G} \cup \tilde{\tilde{G}})$ виконуються одночасно нерівності (13), (14) і

$$\operatorname{mes} (\tilde{G} \cup \tilde{\tilde{G}}) \le 2\big(\sqrt{2}(n-1)(n+2)V_{2n+1}^{-1} + \pi V_{2n+1}^{-1} V_{2n+2}^{-1}\big) V \|\mathbf{P} E\delta\|^2. \quad (15)$$

Враховуючи нерівність (13) і зв'язок дискримінанта полінома з його коренями [25], одержуємо, що в області $G \setminus (\tilde{G} \cup \tilde{\tilde{G}})$ корені $\lambda_j = \lambda_j(D)$, $j = 1, \dots, n$, рівняння $\mathbf{P}(L(\lambda, D) + a) = 0$ є різними. А тому будемо вважати, що $\mathbf{P}W = \mathbf{P}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$. Надалі корені нумеруємо так, щоб $\operatorname{Re} \lambda_1(k) \ge \dots \ge \operatorname{Re} \lambda_n(k)$.

Оцінимо знизу величину $\det MW$. Для цього позначимо через $\mathbf{Q}_j$, $j = 0, 1, \dots, n$, проектори $\mathbf{P}_{Z_j}(D)$, де

$$\left.\begin{aligned} &Z_0 = \Big\{k \in \mathbb{Z}^p : \operatorname{Re} \lambda_1(k) \le \sum_{j=1}^{n-1} \Lambda_j(k)\Big\}, \quad Z_n = \mathbb{Z}^p \setminus \bigcup_{j=0}^{n-1} Z_j, \\ &Z_\alpha = \Big\{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \bigcup_{j=0}^{\alpha-1} Z_j : \operatorname{Re} \lambda_{\alpha+1}(k) \le \sum_{j=1}^{n-\alpha-1} \Lambda_j(k)\Big\}, \\ &Z_{n-1} = \Big\{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \bigcup_{j=0}^{n-2} Z_j : \operatorname{Re} \lambda_n(k) \le 0\Big\} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

(оператори $\Lambda_j = \Lambda_j(D) > 0$, $j = 1, \dots, n-1$, виберемо нижче). Очевидно, що $\sum\limits_{j=0}^{n} \mathbf{Q}_j = 1$, $\mathbf{Q}_j \mathbf{Q}_s = 0$ при $j \ne s$. Вираз

$$\mathbf{P} \det MW = \mathbf{P} \det \big(M_j e^{\lambda_\alpha t} + \nu_j \lambda_\alpha^{j-1} + \mu_j \lambda_\alpha^{j-1} e^{\lambda_\alpha T}\big)_{j,\alpha=1,\dots,n}$$

є поліномом першого степеня щодо змінних $\nu_1, \dots, \nu_n$, $\mu_1, \dots, \mu_n$.

Тоді, враховуючи (13), маємо, що в області $G \setminus (\tilde{G} \cup \tilde{\tilde{G}})$

$$\left|\mathbf{P}\mathbf{Q}_0 \frac{\partial^n \det MW}{\partial \nu_1 \dots \partial \nu_n}\right| = \mathbf{P}\mathbf{Q}_0 \left|\det \big(\lambda_\alpha^{j-1}\big)_{j,\alpha=1,\dots,n}\right| =$$
$$= \mathbf{P}\mathbf{Q}_0 |\operatorname{Res}(D)|^{1/2} \ge \sqrt{(n-1)!}\, \mathbf{P}\mathbf{Q}_0 E^{n-1} > 0.$$

Тому з леми 2 випливає

$$\mathbf{P}\mathbf{Q}_0 \det MW \ge \sqrt{(n-1)!}\, \mathbf{P}\mathbf{Q}_0 E^{n-1} \quad (17)$$

у вужчій області $G \setminus (\tilde{G} \cup \tilde{\tilde{G}} \cup G_0)$, де

$$\operatorname{mes} G_0 \le 8\sqrt{2} n (V_1 \dots V_n)^{-1/n} V \|\mathbf{P}\mathbf{Q}_0 E\delta\|^2. \quad (18)$$

Аналогічно для оператора $\mathbf{Q}_n$ одержимо

$$\left|\mathbf{P}\mathbf{Q}_0 \frac{\partial^n}{\partial \mu_1 \dots \partial \mu_n} \left(\frac{\det MW}{\exp(\sum\limits_{s=1}^{n} \lambda_s T)}\right)\right| = \mathbf{P}\mathbf{Q}_0 |\operatorname{Res}(D)|^{1/2} \ge$$

$$\ge \sqrt{(n-1)!}\, \mathbf{P}\mathbf{Q}_0 E^{n-1} > 0$$

в області $G \setminus (\tilde{G} \cup \tilde{\tilde{G}})$. Тому за лемою 2

$$\mathbf{P}\mathbf{Q}_n \det MW \exp\Big(-\sum_{s=1}^{n} \lambda_s T\Big) \ge \sqrt{(n-1)!}\, \mathbf{P}\mathbf{Q}_n E^{n-1} \quad (19)$$

в області $G \setminus (\tilde{G} \cup \tilde{\tilde{G}} \cup G_n)$, де

$$\operatorname{mes} G_n \le 8\sqrt{2} n (V_{n+1} \dots V_{2n})^{-1/n} V \|\mathbf{P}\mathbf{Q}_n E\delta\|^2. \quad (20)$$

Для решти операторів $\mathbf{Q}_j$, $j = 1, \dots, n-1$, оцінку визначника $\det MW$ розбиваємо на два етапи: на першому оцінюємо похідну

$$r_\alpha = \mathbf{P}\mathbf{Q}_\alpha \left|\frac{\partial^n}{\partial \mu_1 \dots \partial \mu_\alpha \partial \nu_{\alpha+1} \dots \partial \nu_n} \left(\frac{\det MW}{\exp(\sum\limits_{s=1}^{\alpha} \lambda_s T)}\right)\right|,$$

а на другому – визначник $\mathbf{P}\mathbf{Q}_\alpha \det MW$.

Похідну r_α можна записати у вигляді

$$r_\alpha = \mathbf{P}\mathbf{Q}_\alpha \left|\det \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix}\right|,$$

де

$$d_1 = \big(\lambda_s^{j-1}\big)_{j,s=1,\dots,\alpha}, \qquad d_2 = \big(\lambda_s^{j-1} e^{\lambda_s T}\big)_{\substack{j=1,\dots,\alpha \\ s=\alpha+1,\dots,n}},$$
$$d_3 = \big(\lambda_s^{j-1} e^{-\lambda_s T}\big)_{\substack{j=\alpha+1,\dots,n \\ s=1,\dots,\alpha}}, \quad d_4 = \big(\lambda_s^{j-1}\big)_{j,s=\alpha+1,\dots,n}.$$

Розкладемо визначник за першими α стрічками:

$$r_\alpha = \Big|\mathbf{P}\mathbf{Q}_\alpha \sum_{j,\tau} \xi_{j,\tau}\Big| = \Big|\mathbf{P}\mathbf{Q}_\alpha \xi \Big(1 + \sum_{j,\tau}{}' \xi^{-1} \xi_{j,\tau}\Big)\Big|,$$

де сумування ведеться за наборами $j = (j_1, \dots, j_\alpha)$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{n-\alpha})$ такими, що $j_1 < \dots < j_\alpha$, $\tau_1 < \dots < \tau_{n-\alpha}$ і $\{j_1, \dots, j_\alpha, \tau_1, \dots, \tau_{n-\alpha}\} = \{1, \dots, n\}$, $\xi = \xi_{(1,\dots,\alpha),(\alpha+1,\dots,n)}$. Крім того,

$$\begin{aligned} \xi_{j,\tau} \;&=\; (-1)^{\sum\limits_{s=1}^{\alpha}(s+j_s)} \exp\Big(\sum_{s=1}^{\alpha} (\lambda_{j_s} - \lambda_s) T\Big) \prod_{s=1}^{n-\alpha} \lambda_{\tau_s}^{\alpha} \times \\ &\times \prod_{\alpha \ge r > s \ge 1} (\lambda_{j_r} - \lambda_{j_s}) \prod_{n-\alpha \ge r > s \ge 1} (\lambda_{\tau_r} - \lambda_{\tau_s}). \end{aligned}$$

Вираз для $\xi_{j,\tau}$ із точністю до знаку можна переписати у вигляді

$$\xi_{j,\tau} = \exp\Big(\sum_{s=1}^{\alpha}(\lambda_{j_s} - \lambda_s)T\Big)\frac{\prod\limits_{n\ge r>s\ge 1}(\lambda_r - \lambda_s)\prod\limits_{s=1}^{n}\lambda_s^{\alpha}}{\prod\limits_{r=1}^{\alpha}\prod\limits_{s=1}^{n-\alpha}(\lambda_{j_r} - \lambda_{\tau_s})\prod\limits_{r=1}^{\alpha}\lambda_{j_r}^{\alpha}}.$$

При $j = (1,\dots,\alpha)$, $\tau = (\alpha+1,\dots,n)$ одержимо, що

$$\begin{aligned}\mathbf{PQ}_\alpha|\xi| &= \mathbf{PQ}_\alpha\frac{|\mathrm{Res}\,(D)|^{1/2}|A_0+a|^{\alpha}}{\prod\limits_{r=1}^{\alpha}\prod\limits_{s=\alpha+1}^{n}|\lambda_r-\lambda_s|\prod\limits_{r=1}^{\alpha}|\lambda_r|^{\alpha}} \ge \\ &\ge \mathbf{PQ}_\alpha\sqrt{(n-1)!}2^{(\alpha-n)\alpha}A^{-n\alpha}E^{\alpha+n-1}\end{aligned}$$

в області $G\setminus(\tilde G\cup\tilde{\tilde G})$. Оцінка зверху при довільних j і τ записується в такому виляді:

$$\mathbf{PQ}_\alpha|\xi_{j,\tau}| \le 2^{n(n-1)/2-\alpha(n-\alpha)}\mathbf{PQ}_\alpha A^{n(n-1)/2}e^{-\Lambda_\alpha T}.$$

Виберемо $e^{\Lambda_\alpha T}$ так, щоб останній вираз дорівнював $\mathbf{PQ}_\alpha 2^{-n}$. Тоді

$$e^{\Lambda_\alpha T} = \sqrt{\frac{2^{n(n+1)}}{(n-1)!}}A^{n(n-1)/2+n\alpha}E^{1-\alpha-n} > 1,\ \alpha = 1,\dots,n-1,$$

і

$$\sum_{j,\tau}{}'|\xi_{-1}\xi_{j,\tau}| = 2^{-n}\sum_{j,\tau}{}'\mathbf{PQ}_\alpha < \mathbf{PQ}_\alpha/2,$$

тобто

$$\mathbf{PQ}_\alpha\Big(1+\sum_{j,\tau}{}'\xi_{-1}\xi_{j,\tau}\Big) \ge \mathbf{PQ}_\alpha/2$$

і

$$r_\alpha \ge \mathbf{PQ}_\alpha\sqrt{(n-1)!}\,2^{(\alpha-n)\alpha-1}A^{-n\alpha}E^{\alpha+n-1} > 0$$

в області $G\setminus(\tilde G\cup\tilde{\tilde G})$. Перший етап завершений.

На другому етапі використовуємо лему 2. Тоді

$$\mathbf{PQ}_\alpha\det MWe^{-\sum\limits_{s=1}^{\alpha}\lambda_s T} \ge \mathbf{PQ}_\alpha\sqrt{(n-1)!}\,2^{(\alpha-n)\alpha-1}A^{-n\alpha}E^{3n+\alpha-1} \quad (21)$$

в області $G\setminus(\tilde G\cup\tilde{\tilde G}\cup G_\alpha)$, де

$$\mathrm{mes}\,G_\alpha \le 8\sqrt{2}n(V_{\alpha+1}\dots V_{n+\alpha})^{-1/n}V\|\mathbf{PQ}_\alpha E\delta\|^2. \quad (22)$$

Нехай $G_{n+1} = \bigcup\limits_{\alpha=0}^{n}G_\alpha\cup G\setminus(\tilde G\cup\tilde{\tilde G})$ і $V_{2n+3} = \min\limits_{\alpha=0,1,\dots,n}\prod\limits_{s=1}^{n}V_{s+\alpha}^{1/n}$; тоді з нерівностей (13), (14), (18), (20), (22) маємо, що в області

$G\setminus G_{n+1}$ виконуються нерівності (17), (19), (21), з яких випливає, що $\mathrm{rank}MW = n$, тобто $\mathbf{PP}_n = \mathbf{P}$ в області $G\setminus G_{n+1}$ або $\mathbf{PP}_i = 0$, $i = 0,1,\dots,n-1$. При цьому

$$\mathrm{mes}\,G_{n+1} \le \chi V\|\mathbf{P}E\delta\|^2, \quad (23)$$

$$\chi = \frac{\pi}{V_{2n+1}V_{2n+2}} + \frac{2\sqrt{2}(n-1)(n+2)}{V_{2n+1}} + \frac{8\sqrt{2}n}{V_{2n+3}}.$$

Теорема 2. *Нехай c_s – норма оператора M_s,*

$$B = \max_{s=1,\dots,n}\max_{(\nu,\mu,\alpha)\in G}\big(2c_sA^{n_s}|F_s| + (|\nu_s|+|\mu_s|)A^{s-1}\big)$$

і $1-\mathbf{P}$ – скінченновимірний оператор. Тоді в області $G\setminus G_{n+1}$ при $\varphi\in\overline{H}_\Phi$, $\Phi = FA^{l+n^4}B^{n-1}E^{-4n^2}$, існує розв'язок задачі (3), (4) із простору $C^l([0,T];H_F)$, причому

$$\|u\|_{l,F}^2 \le 2\Big(C_{\mathbf{P}} + \frac{n!}{\sqrt{(n-1)!}}2^{n^4}\Big)|||\varphi|||_\Phi^2.$$

Міра області G_{n+1} (23) може бути зроблена як завгодно малою.

Д о в е д е н н я. Нехай $\widetilde{MW} = \det MW\cdot(MW)^{-1}$; тоді

$$\widetilde{MW} = \Big((-1)^{i+j}\sum_{(j)}(-1)^{\sigma}\prod_{s=1,s\ne i}^{n}M_se^{\lambda_{j_s}t}\Big)_{j,i=1,\dots,n},$$

де сумування ведеться за всіма перестановками чисел $(1,\dots,j-1,j+1,\dots,n)$; $\sigma = 0$, якщо перестановка парна, і $\sigma = 1$, якщо перестановка непарна.

Із формули (12) отримуємо

$$\mathbf{P}U(t) = \mathbf{P}W(MW)^{-1} = \mathbf{P}(\det MW)^{-1}W\widetilde{MW}.$$

Далі

$$\begin{aligned}\mathbf{P}U_i(t) = (\det MW)^{-1}\mathbf{P}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\sum_{(j)}(-1)^{\sigma}\prod_{s=1,s\ne i}^{n}M_se^{\lambda_{j_s}t}e^{\lambda_j t} \le \\ \le \mathbf{P}(\det MW)^{-1}n!B^{n-1}\prod_{s=1}^{n}\max(1,e^{\lambda_sT}), \qquad i = 1,\dots,n.\end{aligned}$$

Використовуючи (16), (17), (19), (21) маємо для кожного з проекторів $\mathbf{Q}_j$ оцінки в області $G\setminus G_{n+1}$

$$\begin{aligned}\mathbf{PQ}_0U_i(t) &\le LQ_0\exp\Big(n\sum_{j=1}^{n-1}\Lambda_jT\Big), \\ \mathbf{PQ}_\alpha U_i(t) &\le LQ_\alpha 2^{(n-\alpha)\alpha-1}A^{n\alpha}E^{-\alpha}\exp\Big((n-\alpha)\sum_{j=1}^{n-\alpha-1}\Lambda_jT\Big),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\mathbf{Q}_{n-1}U_i(t) &\leq L\mathbf{Q}_{n-1}2^n A^{n(n-1)}E^{1-n},\\
\mathbf{P}\mathbf{Q}_n U_i(t) &\leq L\mathbf{Q}_n,\ L = \frac{n!}{\sqrt{(n-1)!}}\mathbf{P}B^{n-1}E^{1-3n}.
\end{aligned}
$$

Підставляючи в останні нерівності значення $e^{\Lambda_\alpha T}$, приходимо до нерівності

$$\mathbf{P}U_i(t) \leq \frac{n!}{\sqrt{(n-1)!}}2^{n^4}\mathbf{P}A^{n^4}B^{n-1}E^{-4n^3}.$$

Враховуючи, що

$$\mathbf{P}\max_{i=1,\dots,n}\max_t\left(U_i(t),\frac{d^l U_i(t)}{dt^l}\right) \leq \frac{n!}{\sqrt{(n-1)!}}2^{n^4}\mathbf{P}A^{l+n^4}B^{n-1}E^{-4n^3},$$

одержуємо

$$
\begin{aligned}
\|u\|^2_{l,F}. &\leq 2|||(1-\mathbf{P})\max_{i=1,\dots,n}\max_t\left(U_i(t),d^lU_i(t)/dt^l\right)\varphi|||^2_F +\\
&+ \frac{n!}{\sqrt{(n-1)!}}2^{n^4+1}|||\mathbf{P}\varphi|||^2_\Phi.
\end{aligned}
$$

Оскільки $1-\mathbf{P}$ – скінченновимірний оператор, то перший доданок оцінюється величиною $C_\mathbf{P}|||\varphi|||^2_\Phi$. Отже, в області $G\setminus G_{n+1}$

$$\|u\|^2_{l,F} \leq 2\left(C_\mathbf{P} + \frac{n!}{\sqrt{(n-1)!}}2^{n^4}\right)|||\varphi|||^2_\Phi.$$

Виберемо тепер оператори $E : 1 > E > 0$, $E\delta \in H$ і $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\omega(D)$ ($1-\mathbf{P}$ – скінченновимірний оператор). Покладемо $\omega = \left\{k \in \mathbb{Z}^p : |k|^2 \geq 1/\varepsilon_1, \varepsilon_1 > 0\right\}$ і замість E – оператор $\varepsilon_2 E$ (що не змінює простору Φ). Тоді $\operatorname{mes} G_{n+1}$ можна зробити як завгодно малою при $\varepsilon_1 \to 0$ і/або $\varepsilon_2 \to 0$. У цьому випадку $\operatorname{mes} G_{n+1} \leq \varepsilon_2\chi V \sum\limits_{\varepsilon_1|k|^2\geq 1} E^2(k)$ і $\|u\|^2_{l,F} \leq 2\left(C_{\varepsilon_1} + n!/\sqrt{(n-1)!}(2/\varepsilon_2)^{n^4}\right)|||\varphi|||^2_\Phi$.

Теорему доведено. ∎

Таким чином, задача (3), (4) розв'язна в підобласті параметрів, міра якої як завгодно близька до міри області G в просторах, які породжені операторами, що одержуються з операторів, що породжують простір правих частин умов (4), множенням на поліном від операторів, що входять у рівняння (3) і умови (4).

Звідси випливає, що якщо всі оператори задачі (3), (4) диференціальні, то вона розв'язна у відповідних шкалах просторів Соболева.

Зауваження 1. Аналогічні результати можна одержати, збурюючи рівняння (1) операторами вигляду $aA'_j d^j/dt^j$, $j = 0, 1, \dots, n$, і припускаючи при цьому існування операторів $(A'_j)^{-1}$ при $j = 1, \dots, n$ і A_n^{-1}.

15.2. Випадок необмеженої області

В області $Q = \{t, x : -\infty < a \leq t \leq b < +\infty, x \in \mathbb{R}^p_x\}$ розглянемо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right)u(t,x) \equiv \frac{\partial^n u}{\partial t^n} + \sum_{k=0}^{n-1}A_k(D)\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = f(t,x), \tag{24}$$

$$M_m(D)u \equiv \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{n_1}B^m_{jk}(D)\frac{\partial^k u(t_j,x)}{\partial t^k} = \varphi_m(x),\ m = 1,\dots,n, \tag{25}$$

де $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_q \leq b$, $D = (\partial/i\partial x_1, \dots, \partial/i\partial x_p)$, $A_k(D)$ і $B^m_{jk}(D)$ – п.д.о., $A_k(\xi)$ і $B^m_{jk}(\xi)$ – аналітичні функції в деякій області $\Omega \subset \mathbb{R}^p_\xi$. Ця задача, взагалі кажучи, є некоректною в розумінні Адамара. Її частинні випадки, коли $A_k(\xi)$ і $B^m_{jk}(\xi)$ – поліноми, вивчались при умовах періодичності за x в розділах II і III, де умови коректності розглядуваних задач сформульовані в термінах діофантових властивостей коефіцієнтів рівнянь і граничних умов.

У даному пункті використовуються результати роботи Ю.А. Дубінського [59] щодо техніки диференціальних операторів нескінченного порядку, яка дозволяє розглянути з нових позицій багато задач, у тому числі й задачі вигляду (24), (25).

Розв'язок задачі (24), (25) шукається в деяких просторах (основних і узагальнених) функцій, які введені, вивчені і використані до ряду задач для рівнянь з частинними похідними (задача Коші, задача в цілому просторі, крайові задачі) в праці [59]. В цих просторах задача (24), (25) має однозначну розв'язність.

Наведемо деякі відомості з [59], що використовуються нижче. Вкажемо опис простору $H^\infty(G)$ всіх основних функцій і дію на них п.д.о. $A(D)$ з аналітичним в області $G \subset \mathbb{R}^p_\xi$ символом $A(\xi)$ (в термінах перетворення Фур'є):

$H^\infty(G)$ – простір функцій $u \in L_2(\mathbb{R}^p_x)$, перетворення Фур'є яких $\tilde{u}(\xi)$ є фінітним в області G;

$$A(D)u(x) = (2\pi)^{-p}\int_G A(\xi)\tilde{u}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi,\ u \in H^\infty(G). \tag{26}$$

Нехай $[H^\infty(G)]^*$ – простір узагальнених функцій над $H^\infty(G)$ і $u \in [H^\infty(G)]^*$. Тоді для довільної функції $\varphi \in H^\infty(G)$

$$\langle A(D)u(x), \varphi(x)\rangle \stackrel{\text{def}}{\equiv} \langle u(x), A(-D)\varphi(x)\rangle. \tag{27}$$

Простір $H^\infty(G)$ є інваріантним відносно оператора $A(D)$, простір $[H^\infty(G)]^*$ – відносно оператора $A(-D)$. Позначимо $H^{+\infty}(G) = H^\infty(G)$, $H^{-\infty}(G) = [H^{+\infty}(-G)]^*$, де $-G = \{\xi : -\xi \in G\}$. В цих позначеннях для довільної аналітичної в області G функції $A(\xi)$ відображення $A(D) : H^{\pm\infty}(G) \longrightarrow H^{\pm\infty}(G)$ є неперервними і утворюють неформальну алгебру п.д.о., що ізоморфна алгебрі аналітичних в G функцій. Як звичайно, знакові $+$ відповідає знак $+$ і знакові $-$ відповідає знак $-$.

Довільний функціонал $u \in H^{-\infty}(G)$ зображається у вигляді

$$u(x) = A_0(D)u_0(x), \tag{28}$$

де $A_0(\xi)$ – аналітична в G функція і $u_0 \in L_2(\mathbb{R}^p)$ така, що $\operatorname{supp} \widetilde{u}_0(\xi) \subset G$.

Позначимо через $C^k\big([a,b], H^{\pm\infty}(G)\big)$ простір функцій u, які для кожного $t \in [a,b]$ є функціями з простору $H^{\pm\infty}(G)$ і неперервно залежать від t разом із похідними до порядку k.

Нехай в задачі (24), (25) $N = \max\{n, n_1\}$. Із результатів, наведених вище, випливає, що для довільної області $G \subset \Omega$ неперервними є відображення

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, D\Big) : C^N\big([a,b], H^{\pm\infty}(G)\big) \longrightarrow C^{N-n}\big([a,b], H^{\pm\infty}(G)\big),$$

$$M_m(D) : C^N\big([a,b], H^{\pm\infty}(G)\big) \longrightarrow H^{\pm\infty}(G),\ m = 1, \dots, n.$$

У даному пункті буде показано, що справедливе також обернене твердження.

В задачі (24), (25) покладемо формально $\xi \leftrightarrow D$, де $\xi \in \Omega \subset \mathbb{R}^p_\xi$. Для простоти викладу припустимо, що $\xi \in G_1 = \Omega \setminus \Gamma$, де $\Gamma = \{\xi \in \Omega : R_\lambda(L(\lambda,\xi), L'_\lambda(\lambda,\xi)) = 0\}$; тут $R_\lambda(\sigma_1, \sigma_2)$ – результант поліномів σ_1 і σ_2 за змінною λ [25]. Тоді в області G_1 корені $\lambda_\alpha(\xi)$, $\alpha = 1, \dots, n$, рівняння $L(\lambda, \xi) = 0$ суть аналітичні функції параметра ξ, а фундаментальний розв'язок $g(t,\tau,\xi)$ однорідного рівняння, що відповідає рівнянню

$$L\Big(\frac{d}{dt}, \xi\Big)u(t,\xi) = h(t), \tag{29}$$

зображається у вигляді [175]

$$g(t,\tau,\xi) = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t-\tau)\sum_{j=1}^{n}\frac{e^{\lambda_j(\xi)(t-\tau)}}{L'_\lambda(\lambda_j(\xi),\xi)}, \tag{30}$$

де $a \le t, \tau \le b$. При цьому частинний розв'язок рівняння (29) зображається формулою

$$u(t,\xi) = \int\limits_a^b g(t,\tau,\xi)h(\tau)\,d\tau. \tag{31}$$

Функція $g(t,\tau,\xi)$ у кожному з трикутників $a \le t \le \tau \le b$ і $a \le \tau \le \le t \le b$ має похідні всіх порядків за t і τ, які аналітичні за змінною ξ в області G_1, причому

$$\frac{\partial g(t,\tau,\xi)}{\partial t} = -\frac{\partial g(t,\tau,\xi)}{\partial \tau}. \tag{32}$$

Зауваження 2. Якщо у формулі (31) функція $h(t)$ $N-n$ разів неперервно диференційована, то $u(t,\xi)$ є N разів неперервно диференційованим по t розв'язком рівняння (29).

Дійсно, в силу (31), (32) похідні по t функції $u(t,\xi)$ зображаються у вигляді

$$u_t^{(m)}(t,\xi) = \sum_{\alpha=0}^{m-1}\big[g_t^{(\alpha)}(t,a,\xi)h^{(m-1-\alpha)}(a) - g_t^{(\alpha)}(t,b,\xi)h^{(m-1-\alpha)}(b)\big] + \\ + \int\limits_a^b g(t,\tau,\xi)h^{(m)}(\tau)\,d\tau, \quad m = 1, \dots, N-n,$$

де кожний доданок має неперервні похідні по t до порядку n включно. Отже, $u(t,\xi)$ є N разів неперервно диференційованою по t.

Розглянемо функцію

$$\Delta(\xi) = \det M(\xi) = \det\Big(M_m(\xi)e^{t\lambda_\alpha(\xi)}\Big)_{m,\alpha=1,\dots,n},$$

яка є аналітичною в області G_1, і позначимо $G_2 = G_1 \setminus \Gamma_1$, де $\Gamma_1 = \{\xi \in G_1 : \Delta(\xi) = 0\}$. Справедливе таке твердження.

Теорема 3. *Нехай функція $f \in C^{N-n}\big([a,b], H^{\pm\infty}(G_2)\big)$ і функції $\varphi_m \in H^{\pm\infty}(G_2)$, $m = 1, \dots, n$. Тоді існує єдиний розв'язок задачі (24), (25) із простору $C^N\big([a,b], H^{\pm\infty}(G_2)\big)$.*

Доведення. Функції $g(t,\tau,\xi)$ поставимо у відповідність п.д.о.-функцію $g(t,\tau,D)$, дія якого визначається формулою (26), де $G = G_2$. Враховуючи зауваження 2, легко бачити, що формула

$$v(t,x) = \int\limits_a^b g(t,\tau,D)f(\tau,x)\,d\tau \tag{33}$$

визначає розв'язок рівняння (24) із простору $C^N\big([a,b], H^{\pm\infty}(G_2)\big)$.

Розв'язок задачі (24), (25) будемо шукати у вигляді суми

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x), \tag{34}$$

де $v(t,x)$ визначена формулою (33). Тоді функція $w(t,x)$ повинна бути розв'язком задачі

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, D\Big) w(t,x) = 0, \tag{35}$$

$$M_m(D)w(t,x) = \varphi_m(x) - M_m(D)v(t,x), \ m = 1,\dots,n, \tag{36}$$

де праві частини умов (36) належать простору $H^{\pm\infty}(G_2)$.

Щоб розв'язати задачу (35), (36), розглянемо множину задач

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \xi\Big) w_j(t,\xi) = 0, \ M_m(\xi)w_j(t,\xi) = \delta_{jm}, \ j,m = 1,\dots,n, \tag{37}$$

де δ_{jm} – символ Кронекера; $\xi \in G_2$, $t \in [a,b]$.

Розв'язками задач (37) є функції

$$w_j(t,\xi) = (e^{t\lambda_1(\xi)},\dots,e^{t\lambda_n(\xi)})M^{-1}(\xi)\mathrm{col}(\delta_{j1},\dots,\delta_{jn}), \ j=1,\dots,n, \tag{38}$$

які для всіх $t \in [a,b]$ є аналітичними за ξ в області G_2 разом з усіма похідними $\partial^\gamma w_j(t,\xi)/\partial t^\gamma$, $\gamma = 1,2,\dots$

Кожній функції $w_j(t,\xi)$ поставимо у відповідність п.д.о. $w_j(t,D)$, який діє неперервно в просторі $H^{\pm\infty}(G_2)$. Враховуючи (26), безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що функція

$$w(t,x) = \sum_{m=1}^{n} w_m(t,x)\big[\varphi_m(x) - M_m(D)v(t,x)\big] \tag{39}$$

є розв'язком задачі (35), (36) із простору $C^N([a,b], H^{\pm\infty}(G_2))$. Формули (33), (34), (39) визначають розв'язок $u(t,x)$ задачі (24), (25), який належить простору $C^N([a,b], H^{\pm\infty}(G_2))$.

Доведемо єдиність цього розв'язку. Для цього відзначимо, що у випадку, коли розв'язок u належить простору $C^N([a,b], H^{+\infty}(G_2))$, його x-перетворення Фур'є $\widetilde{u}(t,\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^p$, є розв'язком такої задачі:

$$L\Big(\frac{d}{dt}, \xi\Big)\widetilde{u}(t,\xi) = \widetilde{f}(t,\xi), \tag{40}$$

$$M_m(\xi)\widetilde{u}(t,\xi) = \widetilde{\varphi}_m(\xi), \ m = 1,\dots,n. \tag{41}$$

За умов теореми задача (40), (41) має єдиний розв'язок для довільного $\xi \in G_2$. Якщо $\xi \in \mathbb{R}^p \setminus G_2$, то $\widetilde{u}(t,\xi) \equiv 0$. Звідси випливає єдиність розв'язку задачі (24), (25) в просторі $C^N([a,b], H^{+\infty}(G_2))$.

Якщо розв'язок задачі (24), (25) $u \in C^N([a,b], H^{-\infty}(G_2))$, то, згідно з формулою (28), маємо зображення $u(t,x) = A_0(t,D)u_0(t,x)$, де функції $\partial^s A_0(t,\xi)/\partial t^s$, $s = 0,1,\dots,N$, неперервні за $t \in [a,b]$ і аналітичні за ξ в області G_2, а функція $u_0 \in C^N([a,b], L_2(\mathbb{R}^p))$ і є такою, що її x-перетворення Фур'є для кожного $t \in [a,b]$ фінітне в G_2. Отже, для кожного $t \in [a,b]$ перетворення Фур'є $\widetilde{u}(t,\xi) = A_0(t,\xi)\widetilde{u}_0(t,\xi)$ є

звичайною функцією, локально інтегровною з квадратом в області G_2. Оскільки $\widetilde{u}(t,\xi)$ є розв'язком задачі (40), (41), то із сказаного вище випливає єдиність розв'язку задачі (24), (25) в просторі $C^N([a,b], H^{-\infty}(G_2))$. Теорему доведено. ■

У наведених нижче прикладах будуються явно відповідні області G_2.

Приклад 1. Розглянемо задачу (24), (25) з локальними n-точковими умовами, коли

$$M_m(D)u(t,x) = u(t_m,x), \ t_m = t_1 + (m-1)t_0, \ t_0 > 0, \ m = 1,\dots,n.$$

Характеристичний визначник задачі

$$\Delta(\xi) = \prod_{n \ge k > j \ge 1}\Big[e^{t_0\lambda_k(\xi)} - e^{t_0\lambda_j(\xi)}\Big]e^{-A_{n-1}(\xi)t_1}, \ \xi \in G_1,$$

дорівнює нулю тільки тоді, коли $e^{t_0\lambda_k(\xi)} = e^{t_0\lambda_j(\xi)}$, тобто коли ξ належить множині

$$\gamma_\alpha = \big\{\xi \in G_1 : R_\lambda\big(L(\lambda,\xi), L(\lambda + 2i\pi\alpha/t_0, \xi)\big) = 0\big\}, \ \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Остаточно одержимо $G_2 = G_1 \setminus \bigcup_{\alpha\in\mathbb{Z}} \gamma_\alpha$.

Приклад 2. Дослідимо для рівняння (24) задачу з умовами (25), де крайові оператори M_m, $m = 1,\dots,n$, записуються у вигляді $M_m(D)u(t,x) \equiv u_t^{(m-1)}(t_1,x) - u_t^{(m-1)}(t_2,x)$, $m = 1,\dots,n$. У цьому випадку визначник має вигляд

$$\Delta(\xi) = \prod_{n\ge k>l\ge 1}(\lambda_k(\xi) - \lambda_l(\xi))\prod_{j=1}^{n}\Big(e^{t_1\lambda_j(\xi)} - e^{t_2\lambda_j(\xi)}\Big).$$

Позначимо $\gamma_\alpha = \{\xi \in G_1 : L(2i\pi\alpha/(t_2 - t_1),\xi) = 0\}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$. Тоді $G_2 = G_1 \setminus \bigcup_{\alpha\in\mathbb{Z}} \gamma_\alpha$.

Приклад 3. Розглянемо більш загальні, ніж у прикладі 2, нелокальні умови, покладаючи

$$M_m(D)u(t,x) \equiv B_1(D)\frac{\partial^{\alpha_m}u(t_1,x)}{\partial t^{\alpha_m}} - B_2(D)\frac{\partial^{\alpha_m}u(t_2,x)}{\partial t^{\alpha_m}}, \ m = 1,\dots,n,$$

де $0 \le \alpha_1 < \dots < \alpha_n = n_1$, $n_1 \ge n-1$. Тоді

$$\Delta(\xi) = \prod_{j=1}^{n}\Big(B_1(\xi)e^{t_1\lambda_j(\xi)} - B_2(\xi)e^{t_2\lambda_j(\xi)}\Big)W(\alpha_1,\dots,\alpha_n),$$

де $W(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \det\big(\lambda_j^{\alpha_k}(\xi)\big)_{j,k=1,\dots,n}$.

Далі покажемо, що визначник $W(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ факторизується.

Введемо позначення $S_j(\xi) = (-1)^j A_{n-j}(\xi)$; $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ($0 \leq \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_n$, $\alpha_n \geq n$ – цілі числа) – визначник матриці, одержаний із матриці

$$\begin{pmatrix} S_n(\xi) & S_{n-1}(\xi) & \ldots & S_1(\xi) & 1 & & & \\ & S_n(\xi) & S_{n-1}(\xi) & \ldots & S_1(\xi) & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & & S_n(\xi) & S_{n-1}(\xi) & \ldots & S_1(\xi) & 1 \end{pmatrix}$$

розміру $(\alpha_n + 1) \times (\alpha_n - n + 1)$ викресленням стовпців із номерами $\alpha_1 + 1, \ldots, \alpha_n + 1$.

Легко бачити, що для довільного $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \geq n$, виконуються рівності

$$\lambda_k^\alpha(\xi) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} S_j(\xi) \lambda_j^{\alpha-j}(\xi), \ \xi \in G_1, \ k = 1, \ldots, n. \tag{42}$$

Лема 4. *Для визначника* $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *справедливе зображення*

$$W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) W(0, 1, \ldots, n-1). \tag{43}$$

Д о в е д е н н я. Використовуємо метод математичної індукції з параметром α_n. Якщо $\alpha_n = n$, то з означення $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і рівностей (42) безпосередньо випливає (43).

Нехай лема справедлива при $\alpha_n \leq \alpha - 1$ ($\alpha \geq n + 1$). Доведемо її справедливість при $\alpha_n = \alpha$. Позначаючи через $\eta(j)$ кількість чисел α_m, $m = 1, \ldots, n$, що задовольняють нерівність $\alpha_m > \alpha - j$, і розкриваючи $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ за останньою стрічкою, маємо

$$\varkappa \equiv F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) W(0, 1, \ldots, n-1) = \sum{}' (-1)^{j+1-\eta(j)} S_j(\xi) \times$$
$$\times F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1-\eta(j)}, \alpha - j, \alpha_{n-\eta(j)}), \ldots, \alpha_{n-1}) W(0, 1, \ldots, n-1),$$

де $\sum'$ означає сумування за $j = 1, \ldots, n$, $j \neq \alpha - \alpha_m$, $m = 1, \ldots, n-1$.

Далі, використовуючи припущення індукції і рівність (42), одержуємо

$$\sum{}' (-1)^{j+1-\eta(j)} S_j(\xi) W(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1-\eta(j)}, \alpha - j, \alpha_{n-\eta(j)}, \ldots, \alpha_{n-1}) =$$
$$= \sum{}' (-1)^{j+1} S_j(\xi) W(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha - j) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} S_j(\xi) W(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha - j) = W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \varkappa.$$

Лему доведено. ■

Оскільки $W(0, 1, \ldots, n-1) \neq 0$ в G_1, то $G_2 = \Big[(G_1 \setminus \gamma) \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \gamma_j\Big] \setminus \chi$, де $\gamma = \{\xi \in G_1 : B_1(\xi) = B_2(\xi) = 0\}$; γ_j, $j \in \mathbb{Z}$, – множина точок $\xi \in \{\theta \in G_1 : B_1(\theta) \neq 0, B_2(\theta) \neq 0\}$, що задовольняють рівняння $L((\ln B_1(\xi) - \ln B_2(\xi) + 2i\pi j)/(t_2 - t_1), \xi) = 0$; $\chi = \{\xi \in G_1 : F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0\}$.

Приклад 4. Розглянемо в області Q, де $a = 0$, $b = T$, задачу

$$L_1\Big(\frac{\partial}{\partial t}, D\Big) u \equiv \frac{\partial^{2n} u}{\partial t^{2n}} + \sum_{k=0}^{n-1} A_k(D) \frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} = f(t, x), \tag{44}$$

$$\frac{\partial^{2q} u}{\partial t^{2q}}\Big|_{t=0} = \frac{\partial^{2q} u}{\partial t^{2q}}\Big|_{t=T} = 0, \ q = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{45}$$

Тут оператори $A_k(D)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, ті самі, що і в рівнянні (24); $f \in C^0([0, T], H^{\pm\infty}(G_2))$.

Для цієї задачі визначник $\Delta(\xi)$ має вигляд

$$\Delta(\xi) = \prod_{n \geq p > r \geq 1} \left[\lambda_p^2(\xi) - \lambda_r^2(\xi)\right] \prod_{j=1}^{n} \left(e^{-\lambda_j(\xi)T} - e^{\lambda_j(\xi)T}\right),$$

де $\pm\lambda_l(\xi)$, $l = 1, \ldots, n$, – корені рівняння $L_1(\lambda, \xi) = 0$. Нехай $G_1 = \Omega \setminus \Gamma$, де $\Gamma = \{\xi \in \Omega : R_\lambda(L_1(\lambda, \xi), \partial L_1(\lambda, \xi)/\partial\lambda) = 0\}$. Позначимо $\gamma_\alpha = \{\xi \in G_1 : L_1(i\pi\alpha/T, \xi) = 0\}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$. Тоді $G_2 = = G_1 \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}} \gamma_\alpha$.

Для випадку задачі (44), (45), коли $p = 1$, а оператор $L_1(\partial/\partial t, D) \equiv L_2(\partial/\partial t, \partial/\partial x)$ є однорідним за порядком диференціювання і строго гіперболічним, область G_2 одержуємо вилученням із прямої $\mathbb{R}^1_\xi$ зліченної множини точок $\{\xi : \xi = \pi\alpha/(\lambda_l T), l = = 1, \ldots, n, \alpha \in \mathbb{Z}\}$, де λ_l, $l = 1, \ldots, n$, – додатні корені рівняння $L_2(\lambda, 1) = 0$.

Зауваження 3. Результати даного пункту переносяться на випадки систем рівнянь вигляду (24) [85] і рівняння (24) із змінними за t коефіцієнтами A_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

§ 16. Рівняння нескінченного порядку в декартовому добутку відрізка і тора

Побудовано та досліджено простори Соболєва нескінченного порядку і вивчено розв'язність нелокальної крайової задачі для диференціальних рівнянь із частинними похідними нескінченного порядку [76].

При розгляді диференціальних рівнянь нескінченного порядку природно виникають простори Соболєва нескінченного порядку. Уперше такі простори введені Ю.А. Дубінським [57, 59] при вивченні задачі Діріхле та задачі з періодичними умовами для нелінійних еліптичних рівнянь нескінченного порядку.

Наведемо деякі відомості про згадані простори [57].

Нехай $G \subset \mathbb{R}^p$ – область скінченної міри, границю якої позначимо через Γ; $C_0^\infty(G)$ – простір нескінченно диференційованих функцій $u(x)$, що задовольняють на Γ умови

$$D^\alpha u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{\alpha_p} u\Big|_\Gamma = 0, \ |\alpha| = 0, 1, \dots \tag{1}$$

Вважаємо, що функції $u(x) \in C_0^\infty(G)$ продовжені тотожно нулем зовні області G. Такі функції називаємо фінітними. Нехай $a_\alpha \geq 0$, $p_\alpha \geq 1$, $r_\alpha \geq 1$ – довільні числові послідовності (випадок $r_\alpha = +\infty$ також допускається). Розглянемо простір

$$\overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\} = \left\{u \in C_0^\infty(G) : \rho(u) = \sum_{|\alpha|=0}^\infty a_\alpha ||D^\alpha u||_{r_\alpha}^{p_\alpha} < \infty\right\},$$

де $||\cdot||_{r_\alpha}$ – норма в просторі Лебега $L_{r_\alpha}(G)$. Простір $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$ відповідає задачі Діріхле з умовами вигляду (1) для нелінійного еліптичного рівняння нескінченного порядку

$$\sum_{|\alpha|=0}^\infty (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, D^\gamma u) = h(x). \tag{2}$$

Якщо серед чисел a_α є нескінченно багато відмінних від нуля, то виникає питання про нетривіальність простору $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$.

Означення 1. Простір $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$ називається нетривіальним, якщо існує функція $u = u(x) \not\equiv 0$: $u \in C_0^\infty(G)$, $\rho(u) < \infty$.

Питання про нетривіальність просторів $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$ тісно пов'язане з класичною теорією квазіаналітичних класів Адамара. Введемо в розгляд послідовність M_N додатних чисел, визначаючи M_N $(N = 0, 1, \dots)$ як розв'язок рівняння

$$\sum_{|\alpha|=N} a_\alpha M_N^{p_\alpha} = 1. \tag{3}$$

При цьому покладаємо $M_N = +\infty$, якщо всі $a_\alpha = 0$ при $|\alpha| = N$. Очевидно, що співвідношення (3) однозначно визначають числа M_N.

Теорема 1. *Простір $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$ нетривіальний тоді і тільки тоді, коли послідовність $\{M_N\}$ визначає неквазіаналітичний клас функцій однієї дійсної змінної.*

При дослідженні періодичних розв'язків рівняння (2) виникають простори Соболєва нескінченного порядку на торі $\Omega_{2\pi}^p$. Нехай, як і раніше, $a_\alpha \geq 0$, $p_\alpha \geq 1$, $r_\alpha \geq 1$ – довільні послідовності. Розглянемо простір

$$W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\} = \left\{u \in C^\infty(\Omega_{2\pi}^p) : \rho(u) \equiv \sum_{|\alpha|=0}^\infty a_\alpha ||D^\alpha u||_{r_\alpha}^{p_\alpha} < \infty\right\}$$

нескінченно диференційованих функцій $u(x)$, періодичних з періодом 2π.

Як і в попередній задачі, виникає питання нетривіальності простору $W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$, тобто питання про існування хоча б однієї функції $u(x) \not\equiv \text{const}$, що має скінченний інтеграл $\rho(u)$. Цікавими є тільки ті простори $W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$, які є нескінченновимірними, тобто містять нескінченну множину лінійно незалежних функцій $u \in W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$.

Теорема 2. *Простір $W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$ є нетривіальним і нескінченновимірним тоді і тільки тоді, коли існує послідовність різних невід'ємних мультиіндексів $q_\nu = (q_{1\nu}, \dots, q_{p\nu})$, $\nu = 0, 1, \dots$, така, що*

$$\sum_{|\alpha|=0}^\infty a_\alpha q_\nu^{\alpha p_\alpha} (2\pi)^{pp_\alpha/r_\alpha} < \infty. \tag{4}$$

Наслідок 1. *Якщо послідовність $p_\alpha \geq 1$ обмежена, то простір $W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$ є нетривіальним тоді і тільки тоді, коли функція*

$$\varphi(z) \equiv \sum_{|\alpha|=0}^\infty a_\alpha z_1^{\alpha_1} \dots z_p^{\alpha_p} \tag{5}$$

є цілою функцією комплексної змінної $z = (z_1, \dots, z_p)$.

Зауваження 1. Умова (4) не виключає той випадок, коли простір $W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$ складається лише із функцій меншого числа змінних. Щоб вилучити цей вироджений випадок, достатньо вимагати, наприклад, щоб простір $W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$ був щільним в $L_2(\Omega_{2\pi}^p)$.

Твердження 1. *Для того щоб простір $W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$ був щільним в $L_2(\Omega_{2\pi}^p)$, необхідно і достатньо, щоб умова (4) виконувалась для послідовності q_ν, такої, що $\min\{q_{1\nu}, \dots, q_{p\nu}\} \to \infty$ при $\nu \to \infty$.*

Перейдемо до вивчення нелокальної крайової задачі для рівнянь з частинними похідними нескінченного порядку.

Розглянемо в області D^p таку задачу:

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)u \equiv \sum_{|\widehat{s}|=0}^{\infty} a_{\widehat{s}} \frac{\partial^{|\widehat{s}|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}} = f(t,x), \tag{6}$$

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}\Big|_{t=0} - \mu\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}\Big|_{t=T} = 0, \ \alpha = 0,1,\dots, \tag{7}$$

де $a_{\widehat{s}}$ і μ – комплексні числа.

Опишемо клас функцій, в якому є розв'язною задача (6), (7). Для цього в області D^p дослідимо задачу на власні значення скінченного порядку:

$$\sum_{|\widehat{s}|=0}^{n} a_{\widehat{s}} \frac{\partial^{|\widehat{s}|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}} = \lambda u(t,x), \tag{8}$$

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}\Big|_{t=0} - \mu\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}\Big|_{t=T} = 0, \ \alpha = 0,1,\dots,n-1, \tag{9}$$

що відповідає задачі (6), (7). Розв'язок задачі (8), (9) шукаємо в просторі функцій $H_n^n(D^p)$. Тоді власними функціями є

$$e^{\tau(m)t+i(k,x)}, \ \tau(m) = -\frac{\ln\mu}{T} + i\frac{2\pi m}{T}, \ (k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}$$

(див. теорему 11.10), де $\ln\mu$ розуміється як головне значення. Оскільки функції $e^{\tau(m)t}$ обмежені зверху та знизу для всіх $m\in\mathbb{Z}$ і $t\in[0,T]$, то власні функції задачі (8), (9) утворюють базу Рісса в $L_2(D^p)$.

Для задачі (6), (7) скінченного порядку природно розглядати простори Соболєва скінченного порядку $W^q(D^p)$, $q\in\mathbb{R}$, що є поповненням скінченних сум вигляду

$$u(t,x) = \sum_{(k,m)} u_{k,m}e^{\tau(m)t+i(k,x)}$$

за нормою

$$\|u(t,x)\|_q^2 = (2\pi)^pT\sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}}\big(1+m^2+\|k\|^2\big)^q|u_{k,m}|^2.$$

Для визначення відповідних просторів у випадку рівняння нескінченного порядку введемо позначення:

$$\Omega = \mathbb{Z}^{p+1}\setminus\Omega_0, \ \Omega_0 = \big\{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1} : L(\tau(m),ik) = 0\big\}, \tag{10}$$

$$\lambda_{k,m} = \begin{cases} 1 & , \ (k,m)\in\Omega_0, \\ |L(\tau(m),ik)| & , \ (k,m)\in\Omega. \end{cases} \tag{11}$$

Якщо для деякого вектора $(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}$ ряд $L(\tau(m),ik)$ розбіжний, то відповідне значення $\lambda_{k,m}=\infty$.

Простором Соболєва нескінченного порядку для задачі (6), (7) називаємо простір

$$W^\infty\{a_{\widehat{s}}\} = \Big\{u = \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} u_{k,m}e^{\tau(m)t+i(k,x)} : \\ \|u\|_\infty^2 = \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}}\lambda_{k,m}|u_{k,m}|^2 < \infty\Big\}.$$

Зауваження 2. Якщо $L(\tau(m),ik)$, $(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}$, – дійсні додатні числа, то норма $\|\cdot\|_\infty$ є енергетичною, тобто $\|u\|_\infty^2 = (Lu,u)_0$.

Розглянемо питання про нетривіальність просторів $W^\infty\{a_{\widehat{s}}\}$. Простір $W^\infty\{a_{\widehat{s}}\}$ називається нетривіальним, якщо він нескінченновимірний.

Теорема 3. *Простір $W^\infty\{a_{\widehat{s}}\}$ нетривіальний тоді і тільки тоді, коли існує послідовність векторів $(k_j,m_j)\in\mathbb{Z}^{p+1}$, $j=1,2,\dots$, така, що $\lambda_{k_j,m_j}<\infty$.*

Доведення. Достатність очевидна, тому що функції

$$u_j(t,x) = e^{\tau(m_j)t+ik_jx}, \ j=1,2,\dots,$$

належать простору $W^\infty\{a_{\widehat{s}}\}$, оскільки $\|u_j\|_\infty^2 = \lambda_{k_j,m_j}<\infty$.

Доведемо необхідність теореми. Нехай $W^\infty\{a_{\widehat{s}}\}$ – нетривіальний простір і для всіх векторів $(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}$, $\|k\|+|m|>N_1$, виконується рівність $\lambda_{k_j,m_j}=\infty$. Тоді для кожної функції

$$\sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} u_{k,m}e^{\tau(m)t+i(k,x)} = u\in W^\infty\{a_{\widehat{s}}\}$$

справедлива формула

$$\sum_{\|k\|+|m|\le N_1}\lambda_{k,m}|u_{k,m}|^2 + \sum_{\|k\|+|m|>N_1}\lambda_{k,m}|u_{k,m}|^2 = \|u\|_\infty^2<\infty.$$

Для виконання останньої нерівності необхідно, щоб $u_{k,m}=0$ при $\|k\|+|m|>N_1$, тобто щоб функція $u(t,x)$ мала вигляд

$$u(t,x) = \sum_{\|k\|+|m|\le N_1} u_{k,m}e^{\tau(m)t+i(k,x)}.$$

Оскільки $u\in W^\infty\{a_{\widehat{s}}\}$ – довільна функція, то простір $W^\infty\{a_{\widehat{s}}\}$ є скінченновимірним. Одержана суперечність доводить теорему. ∎

Щоб уникнути виродженого випадку, коли функції $u(t,x)$ залежать від меншого, ніж $p+1$ числа аргументів, будемо розглядати лише ті нетривіальні простори $W^\infty\{a_{\widehat{s}}\}$, які щільні в $W^0(D^p)$.

Теорема 4. *Простір $W^\infty\{a_{\hat s}\}$ щільний в $W^0(D^p)$ тоді і тільки тоді, коли для всіх векторів $(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}$ $\lambda_{k,m}<\infty$.*

Д о в е д е н н я. Д о с т а т н і с т ь. Нехай $\lambda_{k,m}<\infty$, $(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}$. Тоді функції

$$v_{k,m}(t,x)=e^{\tau(m)t+i(k,x)},\ (k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}, \tag{12}$$

належать простору $W^\infty\{a_{\hat s}\}$, оскільки $\|v_{k,m}(t,x)\|^2_\infty=\lambda_{k,m}<\infty$. Простір $W^\infty\{a_{\hat s}\}$ містить також всі лінійні комбінації функцій (12), множина яких щільна в $W^0(D^p)$.

Н е о б х і д н і с т ь. Припустимо протилежне, тобто що $\lambda_{\bar k,\bar m}=\infty$ для деякого вектора $(\bar k,\bar m)\in\mathbb{Z}^{p+1}$. Тоді функція $e^{\tau(\bar m)t+i\bar kx}\in W^0(D^p)$ не належить простору $W^\infty\{a_{\hat s}\}$ і

$$\left\|e^{\tau(\bar m)t+i\bar kx}-u(t,x)\right\|_0^2=\left\|e^{\tau(\bar m)t+i\bar kx}-\sum_{(k,m)\neq(\bar k,\bar m)}u_{k,m}e^{\tau(\bar m)t+i\bar kx}\right\|_0^2=$$

$$=(2\pi)^pT\Big(1+\sum_{(k,m)\neq(\bar k,\bar m)}|u_{k,m}|^2\Big)\geq(2\pi)^pT$$

для довільної функції $u\in W^\infty\{a_{\hat s}\}$. Із останньої нерівності випливає, що простір $W^\infty\{a_{\hat s}\}$ не щільний в $W^0(D^p)$. Теорему доведено. ∎

Зауваження 3. Умови нетривіальності просторів $W^0(D^p)$ аналогічні умовам нетривіальності просторів $W^\infty\{a_\alpha,p_\alpha\}(\Omega^p_{2\pi})$, проте умови щільності $W^\infty\{a_{\hat s}\}$ в $W^0(D^p)$ не випливають із умов, аналогічних умовам щільності $W^\infty\{a_\alpha,p_\alpha\}(\Omega^p_{2\pi})$ в $L_2(\Omega^p_{2\pi})$ (див. теорему 2 і твердження 1).

Наприклад, при $\mu=1$ для рівняння

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)u\equiv u+\sum_{\alpha=1}^\infty\Big(\frac{\partial^\alpha u}{\partial x_j^\alpha}-p\Big(\frac{T}{2\pi}\Big)^\alpha\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}\Big)$$

умови твердження 1 виконуються

$$\Big(\lambda_{k,k,\ldots,k}=1+\sum_{\alpha=1}^\infty i^{3\alpha}\Big(\sum_{j=1}^p(ik)^\alpha-p\Big(\frac{T}{2\pi}\Big)^\alpha\Big(i\frac{2\pi k}{T}\Big)^\alpha\Big)=1,\ k=0,1,\ldots\Big),$$

у той час як відповідний простір $W^\infty\{a_{\hat s}\}$ не щільний в $W^0(D^p)$. Це випливає з того, що

$$\lambda_{k+1,\ldots,k+1,k}=1+\sum_{\alpha=1}^\infty i^{3\alpha}\Big(\sum_{j=1}^p(i(k+1))^\alpha-p\Big(\frac{T}{2\pi}\Big)^\alpha\Big(i\frac{2\pi k}{T}\Big)^\alpha\Big)=$$

$$=1+\sum_{\alpha=1}^\infty p((k+1)^\alpha-k^\alpha)\geq1+m\sum_{\alpha=1}^\infty1=\infty,\ k=0,1,\ldots$$

Твердження 2. *Простір $W^\infty\{a_{\hat s}\}$ є щільним в $W^0(D^p)$, якщо функція комплексних змінних $z_0,z_1,\ldots,z_p$*

$$\varphi(\hat z)=\sum_{|\hat s|=0}^\infty a_{\hat s}z_0^{s_0}z_1^{s_1}\ldots z_p^{s_p}$$

належить класу цілих функцій.

Доведення випливає з теореми 4, оскільки $\lambda_{k,m}=1$ при $(k,m)\in\Omega_0$, і

$$\lambda_{k,m}=|\varphi(\tau(m),ik_1,\ldots,ik_p)|<\infty$$

при $(k,m)\in\Omega$.

Розглянемо простір, спряжений з простором $W^\infty\{a_{\hat s}\}$, а саме

$$W^{-\infty}\{a_{\hat s}\}=\Big\{f=\sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}}f_{k,m}e^{\tau(m)t+i(k,x)}:$$

$$\|f\|^2_{-\infty}=\sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}}\lambda^{-1}_{k,m}|f_{k,m}|^2<\infty\Big\}.$$

Очевидно, що $L(\partial/\partial t,\partial/\partial x):W^\infty\{a_{\hat s}\}\longrightarrow W^{-\infty}\{a_{\hat s}\}$.

Тут $W^{-\infty}\{a_{\hat s}\}$ – простір антилінійних неперервних функціоналів, що визначені на просторі функцій $W^\infty\{a_{\hat s}\}$. Значення функціоналу $f\in W^{-\infty}\{a_{\hat s}\}$ на функції $u\in W^\infty\{a_{\hat s}\}$ задається формулою

$$f(u)=(f,u)_0.$$

Встановимо співвідношення між введеними просторами $W^\infty\{a_{\hat s}\}$ і $W^{-\infty}\{a_{\hat s}\}$ та просторами $W^q(D^p)$, $q\in\mathbb{R}$.

Нехай $M\subset\mathbb{R}^\infty$ – множина нескінченновимірних векторів

$$A=\{\mathrm{Re}\,a_{\hat s},\mathrm{Im}\,a_{\hat s}:\ |\hat s|=0,1,\ldots\},$$

кожний з яких визначає щільний в $W^0(D^p)$ простір $W^\infty\{a_{\hat s}\}$, і нехай M_n ($M_n\subset\mathbb{R}^{2p+2}$) – проекція множини M на підпростір векторів

$$A_n=\{\mathrm{Re}\,a_{\hat s},\mathrm{Im}\,a_{\hat s}:\hat s=(\underbrace{0,\ldots,0}_{j},n,0,\ldots,0),\ j=0,1,\ldots,p\}.$$

Теорема 5. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{2p+2}$) векторів $A_n\in M_n$ справедливе включення*

$$W^\infty\{a_{\hat s}\}\subset W^\alpha(D^p,\ \alpha<(2n-p-1)/4, \tag{13}$$

причому $\|u\|_\alpha\leq C\|u\|_\infty$, де $C=C(\{a_{\hat s}\})>0$.

Д о в е д е н н я. Нехай $A_n = (\theta_1, \ldots, \theta_{2p+2}) \in M_n$; тоді

$$L(\tau(m), ik) = a_{n,0,\ldots,0}(\tau(m))^n + \sum_{j=1}^{p} a_{\underbrace{0,\ldots,0,n}_{j},0,\ldots,0}(ik_j)^n +$$

$$+L_2(m,k) = L_1(m,k) + L_2(m,k).$$

При цьому

$$\operatorname{Re} L_1(m,k) = \sum_{j=1}^{2p+2} \theta_j \varphi_j(k,m),$$

$$\operatorname{Im} L_1(m,k) = \sum_{j=1}^{2p+2} \theta_j \psi_j(k,m).$$

Оцінимо міру множини $W_{k,m}$ векторів $A_n \in M_n$, для яких при фіксованому $(k,m) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ виконується нерівність

$$|L(\tau(m), ik)| < (1 + ||k||^2 + m^2)^\alpha. \tag{14}$$

Очевидно, що $W_{k,m} \subset W'_{k,m}$, де $W'_{k,m}$ – множина векторів $A_n \in M_n$, для яких при фіксованому векторі (k,m) виконуються нерівності

$$|\operatorname{Re} L(\tau(m), ik)| < \left(1 + ||k||^2 + m^2\right)^\alpha$$

і

$$|\operatorname{Im} L(\tau(m), ik)| < (1 + ||k||^2 + m^2)^\alpha.$$

Легко бачити, що множина $W'_{k,m}$ – це множина точок $A_n \in M_n$, які містяться між гіперплощинами

$$\sum_{j=1}^{2p+2} \theta_j \varphi_j(k,m) = \operatorname{Re} L_2(m,k) \pm \left(1 + ||k||^2 + m^2\right)^\alpha$$

і

$$\sum_{j=1}^{2p+2} \theta_j \psi_j(k,m) = \operatorname{Im} L_2(m,k) \pm \left(1 + ||k||^2 + m^2\right)^\alpha.$$

Можна одержати таку оцінку:

$$\operatorname{mes} W'_{k,m} \le d^{2p} S,$$

де d – діаметр мінімальної кулі, що містить множину M_n, а число S визначається формулою

$$S = \frac{4\left(1 + ||k||^2 + m^2\right)^{2\alpha}}{\left[\sum_{j=1}^{2p+2} \varphi_j^2(k,m)\right]^{1/2} \left[\sum_{j=1}^{2p+2} \psi_j^2(k,m)\right]^{1/2} \sin\theta},$$

де θ – кут між гіперплощинами

$$\sum_{j=1}^{2p+2} \theta_j \varphi_j(k,m) = 0 \quad \text{і} \quad \sum_{j=1}^{2p+2} \theta_j \psi_j(k,m) = 0.$$

Легко показати, що

$$S \le \frac{4(p+1)\left(1 + ||k||^2 + m^2\right)^{2\alpha}}{\left(||k||^2 + m^2\right)^{2n}}.$$

Тоді

$$\sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} \operatorname{mes} W_{k,m} \le \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} \operatorname{mes} W'_{k,m} \le C \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} \left(1 + ||k||^2 + m^2\right)^{\alpha_1},$$

де $\alpha_1 = 2\alpha - n < -(p+1)/2$. . Із збіжності ряду

$$\sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} \left(1 + ||k||^2 + m^2\right)^{\alpha_1}$$

і леми 3.1 випливає, що міра множини векторів $A_n \in M_n$, для яких нескінченно часто виконується нерівність (14), дорівнює нулю. Отже, для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{2p+2}$) векторів $A_n \in M_n$ виконується протилежна нерівність

$$|L(\tau(m), ik)| \ge \left(1 + ||k||^2 + m^2\right)^\alpha$$

для всіх (за винятком скінченної кількості) векторів $(k,m) \in \mathbb{Z}^{p+1}$. Із останньої нерівності і з (11) випливає доведення теореми. ■

Наслідок 2. *$W^\alpha(D^p) \subset W^{-\infty}\{a_{\hat{s}}\}$ при $\alpha > -(2n-p-1)/4$ для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{2p+2}$) векторів $A_n \in M_n$.*

Зауваження 4. Для кожного $\alpha \in \mathbb{R}$ існує послідовність $\{a^\alpha_{\hat{s}},\ |\hat{s}| = 0, 1, \ldots\}$, така, що $W^\infty\{a^\alpha_{\hat{s}}\} \setminus W^\alpha(D^p) \ne \emptyset$.

Наведемо приклади "поганих" просторів $W^\infty\{a_{\hat{s}}\}$. Спочатку доведемо таку формулу:

$$F_\beta \equiv \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(-1)^\alpha (2^\beta)^\alpha}{\prod_{j=0}^{\alpha} \left(2^j - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2^\beta},\ \beta = 0, 1, \ldots \tag{15}$$

Д о в е д е н н я. Перевіримо справедливість формули при $\beta = 0$, тобто що

$$F_0 \equiv \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(-1)^\alpha}{\prod_{j=0}^{\alpha} \left(2^j - \frac{1}{2}\right)} = 1. \tag{16}$$

Спочатку доведемо, що для частинної суми F_0^r ряду виконується рівність

$$F_0^r \equiv \sum_{\alpha=0}^{r} \frac{(-1)^\alpha 2^{\alpha+1}}{\prod\limits_{j=0}^{\alpha}(2^{j+1}-1)} = 1 + \frac{(-1)^r}{\prod\limits_{j=0}^{r}(2^{j+1}-1)}, \quad r = 0, 1, \ldots \tag{17}$$

Дійсно, при $r = 0$ $F_0^0 = 2 = 1 + (-1)^0/(2^{0+1}-1)$. Припустимо, що (17) виконується для довільного числа $r \in \mathbb{N}$. Тоді

$$F_0^{r+1} = 1 + \frac{(-1)^r}{\prod\limits_{j=0}^{r}(2^{j+1}-1)} + \frac{(-1)^{r+1}2^{r+2}}{\prod\limits_{j=0}^{r+1}(2^{j+1}-1)} =$$

$$= 1 + \frac{(-1)^{r+1}(-2^{r+2}+1+2^{r+2})}{\prod\limits_{j=0}^{r+1}(2^{j+1}-1)} = 1 + \frac{(-1)^{r+1}}{\prod\limits_{j=0}^{r+1}(2^{j+1}-1)}.$$

Звідси за методом математичної індукції маємо правильність рівності (17) для довільного $r \in \mathbb{N}$ і, переходячи до границі при $r \to \infty$, одержуємо (16).

Припустимо тепер, що (15) виконується для довільного числа $\beta \in \mathbb{N}$. Тоді

$$F_{\beta+1} \equiv \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(-1)^\alpha (2^{\beta+1})^\alpha}{\prod\limits_{j=0}^{\alpha}(2^j-\frac{1}{2})} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(-1)^\alpha 2^{\beta\alpha}(2^\alpha - \frac{1}{2})}{\prod\limits_{j=0}^{\alpha}(2^j-\frac{1}{2})} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(-1)^\alpha (2^\beta)^\alpha}{\prod\limits_{j=0}^{\alpha}(2^j-\frac{1}{2})} = 1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{(-1)^\alpha (2^\beta)^\alpha}{\prod\limits_{j=0}^{\alpha-1}(2^j-\frac{1}{2})} + \frac{1}{2^{\beta+1}} =$$

$$= 1 - 2^\beta \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(-1)^\alpha (2^\beta)^\alpha}{\prod\limits_{j=0}^{\alpha}(2^j-\frac{1}{2})} + \frac{1}{2^{\beta+1}} = 1 - 2^\beta\frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{2^{\beta+1}} = \frac{1}{2^{\beta+1}}.$$

Рівність (15) доведено. ∎

Зауважимо, що аналогічно доводиться більш загальна рівність, а саме: для довільного комплексного числа σ ($|\sigma| > 1$)

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} (-\sigma^\beta)^\alpha \prod_{j=0}^{\alpha} (\sigma^j - \sigma^{-1})^{-1} = \sigma^{-\beta}, \quad \beta = 0, 1, \ldots \tag{18}$$

Очевидно, що рівність (15) – це рівність (18) при $\sigma = 2$.

Нехай тепер $\mu = 1$ і

$$a_{s_0,0,\ldots,0} = \left(\frac{iT}{2\pi}\right)^{s_0} \prod_{j=0}^{s_0} \left(2^j - \frac{1}{2}\right)^{-1}, \quad s_0 = 0, 1, \ldots, \tag{19}$$

решта $a_{\widehat{s}}$ – довільні. Тоді будь-яка функція

$$u(t,x) \equiv u(t) = \sum_{\beta=0}^{\infty} u_\beta \exp(i2\pi 2^\beta t/T)$$

із $W^0(D^p)$ належить простору $W^\infty\{a_{\widehat{s}}\}$, проте елемент з $W^\infty\{a_{\widehat{s}}\}$

$$v(t,x) \equiv v(t) = \sum_{\beta=0}^{\infty} 2^{\beta/2}(1+\beta)^{\varepsilon/2} \exp(i2\pi 2^\beta t/T)$$

при $\varepsilon < -1$ не належить простору $W^0(D^p)$.

Дійсно, враховуючи (15), маємо

$$\|u(t)\|_\infty^2 = \sum_{\beta=0}^{\infty}\left(\sum_{s_0=0}^{\infty}\left(\frac{iT}{2\pi}\right)^{s_0}\left(\frac{i2\pi 2^\beta}{T}\right)^{s_0}\prod_{j=0}^{s_0}(2^j-\frac{1}{2})^{-1}\right)|u_\beta|^2 =$$

$$= \sum_{\beta=0}^{\infty}\left(\sum_{s_0=0}^{\infty}\frac{(-1)^{s_0}(2^\beta)^{s_0}}{\prod\limits_{j=0}^{s_0}(2^j-\frac{1}{2})}\right)|u_\beta|^2 = \sum_{\beta=0}^{\infty}\frac{|u_\beta|^2}{2^\beta} \le \frac{\|u\|_0^2}{(2\pi)^m T}.$$

Аналогічно

$$\|v(t)\|_\infty^2 = \sum_{\beta=0}^{\infty}\frac{2^\beta(1+\beta)^\varepsilon}{2^\beta} = \sum_{\beta=0}^{\infty}(1+\beta)^\varepsilon < \infty.$$

Проте

$$\|v(t)\|_0^2 = (2\pi)^m T\sum_{\beta=0}^{\infty}2^\beta(1+\beta)^\varepsilon = \infty.$$

Зауваження 5. Коефіцієнти (19) розміщені в комплексній площині в точках перетину з осями координат деякої спіралі, що закручується проти годинникової стрілки до початку координат.

Використовуючи рівність (18), можна побудувати нескінченний набір просторів $W^\infty\{a_{\widehat{s}}\}$, що містять функції, які не належать простору $W^0(D^p)$.

Наприклад, нехай

$$a^\sigma_{s_0,0,\ldots,0} = \left(\frac{iT}{2\pi}\right)^{s_0}\prod_{j=0}^{s_0}\left(\sigma^j - \frac{1}{\sigma}\right)^{-1},$$

решта $a^{\sigma}_{\hat{s}}$ – довільні. Позначимо $a(l) = \left\{a^{2^l}_{s_0,0,\ldots,0}, a^{2^l}_{\hat{s}}\right\}$, $l = 1, 2, \ldots$ Тоді простір $W^{\infty}\{a(l)\}$ буде містити елементи вигляду $\sum\limits_{\beta=0}^{\infty} u_\beta \exp(i2\pi 2^{l\beta} t/T)$, які не належать $W^0(D^p)$; аналогічну властивість мають і простори $W^{\infty}\{\sum\limits_{l=1}^{r} C_l a(l)\}$, $r = 1, 2, \ldots$, C_l, $l = 1, \ldots, r$, – довільні сталі, з елементами $\sum\limits_{\beta=0}^{\infty} u_\beta \exp(i2\pi 2^{r\beta} t/T)$.

Ще “гірші” простори $W^{\infty}\{a_{\hat{s}}\}$ можна одержати такими двома способами:

1) використовувати формулу типу (15); наприклад

$$2\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\alpha}(2^{\alpha+1})}{\prod\limits_{j=0}^{\alpha+1}(2^j - \frac{1}{2})}(2^{\beta})^{\alpha} = \left(\frac{1}{2^{\beta}}\right)^2, \ \beta = 0, 1, \ldots ;$$

2) розрідити послідовність (19) нулями; наприклад, покласти

$$a_{s_0,0,\ldots,0} = \left(\frac{iT}{2\pi}\right)^{\alpha} \prod_{j=0}^{\alpha}\left(2^j - \frac{1}{2}\right)^{-1}$$

при $s_0 = 2\alpha$ і $a_{s_0,0,\ldots,0} = 0$ при $s_0 = 2\alpha + 1$, $\alpha = 0, 1, \ldots$ У цьому випадку елемент $\sum\limits_{\beta=0}^{\infty} 2^{\beta}(1+\beta)^{\varepsilon/2} \exp(i2\pi 2^{\beta} t/T)$, $\varepsilon < -1$, з $W^{\infty}\{a_{\hat{s}}\}$ не належить $W^l(D^p)$, $l > -1$.

Якщо ж

$$a_{s_0,0,\ldots,0} = \left(\frac{iT}{2\pi}\right)^{\alpha} \prod_{j=0}^{\alpha}\left(2^j - \frac{1}{2}\right)^{-1}$$

при $s_0 = r\alpha$ і $a_{s_0,0,\ldots,0} = 0$ при $s_0 = r\alpha + j$, $j = 1, \ldots, r-1$; $\alpha = 0, 1, \ldots$; $r \in \mathbb{N}$, то елемент $\sum\limits_{\beta=0}^{\infty} 2^{\beta r/2}(1+\beta)^{\varepsilon/2} \exp(i2\pi 2^{\beta} t/T)$, $\varepsilon < -1$, належить $W^{\infty}\{a_{\hat{s}}\}$ і не належить $W^l(D^p)$, $l > -r/2$.

Усі наведені вище побудови проводились на основі числа 2, проте аналогічні побудови можна пробробити на основі довільного натурального числа, більшого 2. Для цих побудов характерна поява лакунарних рядів, що зображають елементи відповідних просторів і рівняння нескінченного порядку.

Тепер позначимо $\mathbf{P} = I - \mathbf{P}_0$, де I – одиничний оператор, $\mathbf{P}_0$ – оператор проектування, який елементові

$$v = \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} v_{k,m} e^{\tau(m)t + i(k,x)}$$

ставить у відповідність елемент

$$\mathbf{P}_0 v = \sum_{(k,m)\in\Omega_0} v_{k,m} e^{\tau(m)t + i(k,x)}.$$

Функцію $u \in W^{\infty}\{a_{\hat{s}}\}$ будемо називати розв'язком задачі (6), (7), якщо для будь-якої функції $v \in W^{\infty}\{a_{\hat{s}}\}$ виконується рівність

$$\left(L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u, v\right)_0 = (f, v)_0.$$

Теорема 6. *Розв'язок задачі (6), (7) із простору $W^{\infty}\{a_{\hat{s}}\}$ існує тоді і тільки тоді, коли $f \in W^{-\infty}\{a_{\hat{s}}\}$, $\mathbf{P}_0 f = 0$ і*

$$||\mathbf{P}u||_{\infty} = ||f||_{-\infty}.$$

Цей розв'язок буде єдиним тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{P}_0 = 0$.

Д о в е д е н н я. Нехай $u(t, x)$ – розв'язок задачі (6), (7); тоді для кожної функції $v \in W^{\infty}\{a_{\hat{s}}\}$ одержуємо

$$(\mathbf{P}_0 f, v)_0 = \left(\mathbf{P}_0 L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u, v\right)_0 = (0, v)_0 = 0,$$

тобто $\mathbf{P}_0 f = 0$. Далі

$$||f||^2_{-\infty} = ||\mathbf{P}f||^2_{-\infty} = \left\|\mathbf{P}L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u\right\|^2_{-\infty} =$$

$$= \sum_{(k,m)\in\Omega} \lambda^{-1}_{k,m}|L(\tau(m), ik)|^2|u_{k,m}|^2 = \sum_{(k,m)\in\Omega} \lambda_{k,m}|u_{k,m}|^2 = ||\mathbf{P}u||^2_{\infty}.$$

Навпаки, якщо $f \in W^{-\infty}\{a_{\hat{s}}\}$ і $\mathbf{P}_0 f = 0$, то

$$||\mathbf{P}u||^2_{\infty} = \sum_{(k,m)\in\Omega} \lambda_{k,m}\left|\frac{f_{k,m}}{L(\tau(m), ik)}\right|^2 =$$

$$= \sum_{(k,m)\in\Omega} \lambda^{-1}_{k,m}|f_{k,m}|^2 = ||\mathbf{P}f||^2_{-\infty} = ||f||^2_{-\infty}.$$

Очевидно, що $\mathbf{P}_0 = 0$ тоді і тільки тоді, коли

$$L(\tau(m), ik) \neq 0 \ \forall\ (k,m) \in \mathbb{Z}^{p+1}. \tag{20}$$

Із умов (20) випливає єдиність розв'язку задачі (6), (7).

Теорему доведено. ■

Далі побудуємо оператор L^*, спряжений з оператором L (L – оператор, породжений задачею (6), (7)) у просторі $L_2(D^p)$.

Нехай $\tau^*(m) = \dfrac{\ln\bar{\mu}}{T} + i\dfrac{2\pi m}{T}$. Введемо простори

$$W^{\pm\infty}_{*}\{a_{\hat{s}}\} = \left\{v = \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} v_{k,m} e^{\tau^*(m)t + i(k,x)} :\right.$$

$$\|v\|^2_{\pm\infty,*} = \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} \lambda^{\pm 1}_{k,m}|v_{k,m}|^2 < \infty\Big\}.$$

Розглянемо оператор L^*, що породжений диференціальним виразом (21) і крайовими умовами (22):

$$L^*\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|\widehat{s}|=0}^{\infty}(-1)^{|\widehat{s}|}\bar{a}_{\widehat{s}}\frac{\partial^{|\widehat{s}|}}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}, \tag{21}$$

$$\bar{\mu}\frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha}\Big|_{t=0} - \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha}\Big|_{t=T} = 0,\ \alpha = 0,1,\ldots \tag{22}$$

Покажемо, що L^* – шуканий оператор. Очевидно, що він діє з простору $W^\infty_*\{a_{\widehat{s}}\}$ в простір $W^{-\infty}_*\{a_{\widehat{s}}\}$. Оскільки

$$\overline{L(\tau(m),ik)} = \sum_{|\widehat{s}|=0}^{\infty}\bar{a}_{\widehat{s}}\overline{\tau(m)}^{s_0}\overline{(ik_1)}^{s_1}\ldots\overline{(ik_p)}^{s_p} =$$

$$= \sum_{|\widehat{s}|=0}^{\infty}(-1)^{|\widehat{s}|}\bar{a}_{\widehat{s}}\tau^*(m)^{s_0}(ik_1)^{s_1}\ldots(ik_p)^{s_p} \quad = \quad L^*(\tau^*(m),ik),$$

то

$$(Lu,v)_{L_2(D^p)} = (u,L^*v)_{L_2(D^p)} \tag{23}$$

для всіх $u\in W^\infty\{a_{\widehat{s}}\}$, $v\in W^\infty_*\{a_{\widehat{s}}\}$. Дійсно, права і ліва частини в (23) існують тому, що

$$\int_{D^p} g_- g_+^*\,dD^p = (2\pi)^pT\sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} g_{-k,m}g^*_{+k,m} \le \text{const}\|g_-\|_{-\infty}\|g_+^*\|_{\infty,*},$$

$$\int_{D^p} g_+ g_-^*\,dD^p = (2\pi)^pT\sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} g_{+k,m}g^*_{-k,m} \le \text{const}\|g_+\|_{\infty}\|g_-^*\|_{-\infty,*},$$

і

$$(Lu,v)_{L_2(D^p)} = \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} L(\tau(m),ik)u_{k,m}\bar{v}_{k,m} =$$

$$= \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} u_{k,m}\overline{\overline{L(\tau(m),ik)}v_{k,m}} = \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} u_{k,m}\overline{L^*(\tau^*(m),ik)v_{k,m}} =$$

$$= (u,L^*v)_{L_2(D^p)}$$

для довільних елементів $g_\pm\in W^{\pm\infty}\{a_{\widehat{s}}\}$, $g^*_\pm\in W^{\pm\infty}_*\{a_{\widehat{s}}\}$.

Звідси розв'язок задачі (6), (7) можна визначити як елемент $u\in W^\infty\{a_{\widehat{s}}\}$, такий, що для всіх $v\in W^\infty_*\{a_{\widehat{s}}\}$ справедлива рівність

$$(Lu,v)_{L_2(D^p)} = (f,v)_{L_2(D^p)},$$

а необхідними умовами розв'язності задачі $Lu = f$ будуть такі умови: $(f,v)_{L_2(D^p)} = 0$, де v – розв'язки задачі $L^*v = 0$.

Зауваження 6. Результати даного параграфа можна узагальнити на випадок задачі з умовами (7) для рівнянь вигляду

$$Lu \equiv \sum_{|\widehat{s}|=0}^{\infty} a_{\widehat{s}}\frac{\partial^{s_0}}{\partial t^{s_0}}A_1^{s_1}\ldots A_p^{s_p}u(t) = f(t),$$

де A_j, $j=1,\ldots,p$, – лінійні оператори, що мають спільне спектральне зображення.

§ 17. Задача з формальними початковими умовами для рівняння із псевдодиференціальними коефіцієнтами

Вивчається задача з формальними початковими умовами для диференціально-операторних рівнянь, зокрема випадки задач із нелокальними і локальними умовами [81].

Розглядаємо функції змінних $x=(x_1,\ldots,x_p)$ і змінних x і t. Вважаємо, що x належить p-вимірному тору Ω_p, тобто функції 2π-періодичні за просторовими змінними x_j; змінна t належить деякому відрізку і функції неперервні за t. Отже, $\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\psi(k)e^{i(k,x)}$, де $\psi(k)\in\mathbb{C}$ – коефіцієнти Фур'є функції $\varphi(x)$, аналогічно $u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}U(t,k)e^{i(k,x)}$.

Через H позначимо простір узагальнених періодичних функцій [42], які будемо зображати рядами Фур'є $\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\psi(k)e^{i(k,x)}$, де $\{\psi(k)\}$ належить $\mathbb{C}^\infty$. Тут $\mathbb{C}^\infty$ позначає множину всіх послідовностей комплексних чисел. Відомо [42], що H – алгебра (щодо операції згортки) з одиницею, роль якої виконує δ-функція Дірака $\delta(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}e^{i(k,x)}$.

Через $C^l([\gamma_1,\gamma_2];H)$, $\gamma_1<\gamma_2$, $\gamma_1,\gamma_2\in\mathbb{R}$, позначимо простір функцій $u=u(t,x)$ таких, що похідні $(d/dt)^ju$, $j=0,1,\ldots,l$, для кожного $t\in[\gamma_1,\gamma_2]$ належать простору H і неперервні за t в цьому просторі [42, 205].

Далі будемо позначати через A^T матрицю, транспоновану до матриці A, через A^* – комплексно-спряжену матрицю, через A^H – транспоновану і комплексно-спряжену матрицю, $A^H = (A^T)^*$.

Лінійний псевдодиференціальний оператор (п.д.о.) зі сталими коефіцієнтами $F = F(D)$, $D = (D_1, \ldots, D_p)$, $D_j = \partial/(i\partial x_j)$, $j = 1, \ldots, p$, ототожнюється з послідовністю комплексних чисел $\{F(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^p}$, тобто з елементом множини $\mathbb{C}^\infty$, і, за означенням, $Fe^{i(k,x)} = F(k)e^{i(k,x)}$. Надалі будемо розглядати тільки такі п.д.о., позначаючи їх множину через $\mathcal{F}$. Операції над п.д.о. визначаються в п. 15.1.

Для кожної функції $\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \psi(k)e^{i(k,x)}$ справедлива рівність $\varphi(x) = \psi(D)\delta(x)$, що встановлює бієкцію між H і множиною введених п.д.о. $\mathcal{F}$ $(H = \mathcal{F}\delta(x))$, а також між H і $\mathbb{C}^\infty$.

Одиничний оператор позначаємо через I, нульовий – через 0. Вживаємо також проектори Π – це оператори, для яких $\Pi(k)$ дорівнюють нулю або одиниці згідно з деякою умовою чи правилом.

Розглянемо диференціальне рівняння n-го порядку

$$Lu \equiv L(\partial/\partial t, D)u = 0 \qquad (1)$$

і умови

$$l_j u|_{t=0} \equiv l_j(\partial/\partial t, D)u|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad j = 1, \ldots, n, \qquad (2)$$

де $L(\lambda, D)$ – поліном степеня n за змінною λ, тобто $L(\lambda, D) = \lambda^n + A_1(D)\lambda^{n-1} + \ldots + A_n(D)$, з коефіцієнтами $A_j(D) \in \mathcal{F}$, $j = 1, \ldots, n$; оператори умов $l_j(\lambda, D) \equiv (M_0(\lambda, D))^{j-1}P(\lambda, D)$, причому $M_0(\lambda, D) \in \mathcal{F}$, $P(\lambda, D) \in \mathcal{F}$ для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$ і гладкі (нескінченно диференційовані) за змінною λ, праві частини умов (2) φ_j належать простору H.

Будемо вивчати розв'язність задачі (1), (2) і встановимо умови існування та єдиності її розв'язку в просторі $C^n([\gamma_1, \gamma_2]; H)$.

Умови (2) названі початковими, оскільки значення функції $l_j u$ в лівій частині умов береться в точці $t = 0$. Оператори l_j з (2) породжують умови, які містять ряд відомих умов. Наведемо такі приклади, записавши вирази для операторів $M_0(\lambda, D)$ і $P(\lambda, D)$, що утворюють відповідні l_j.

В и п а д о к 1: $M_0(\lambda, D) = \lambda$, $P(\lambda, D) = e^{\lambda\tau}$. Одержимо оператори l_j, що відповідають умовам Коші (власне початковим) в точці τ:

$$(\partial/\partial t)^{j-1}u|_{t=\tau} = \varphi_j(x).$$

В и п а д о к 2: $M_0(\lambda, D) = \lambda$, $P(\lambda, D) = 1 - e^{\lambda T}$. Одержимо періодичні умови

$$(\partial/\partial t)^{j-1}u|_{t=0} - (\partial/\partial t)^{j-1}u|_{t=T} = 0, \quad \varphi_j(x) = 0.$$

В и п а д о к 3: $M_0(\lambda, D) = \lambda$, $P(\lambda, D) = 1 - \mu e^{\lambda T}$, $\mu \neq 0$. Одержимо нелокальні умови

$$(\partial/\partial t)^{j-1}u|_{t=0} - \mu(\partial/\partial t)^{j-1}u|_{t=T} = \varphi_j(x)$$

на відрізку $[0, T]$.

В и п а д о к 4: $M_0(\lambda, D) = e^{\lambda\Delta t}$, $P(\lambda, D) = e^{\lambda\tau}$. Маємо багатоточкові умови в точках $\tau, \tau + \Delta t, \ldots, \tau + (n-1)\Delta t$:

$$u|_{t=\tau+(j-1)\Delta t} = \varphi_j(x).$$

Отже, умови (2) можуть бути і періодичними, і нелокальними, і багатоточковими, а початковими є лише формально, тому називаємо їх формальними початковими умовами.

Нехай $\lambda_1(D), \ldots, \lambda_{p(D)}(D)$ – корені рівняння $L(\lambda, D) = 0$, так що

$$L(\lambda, D) = (\lambda - \lambda_1(D))^{k_1(D)} \ldots (\lambda - \lambda_{p(D)}(D))^{k_{p(D)}(D)}, \qquad (3)$$

де $k_1(D), \ldots, k_{p(D)}(D)$, $k_1(D) + \ldots + k_{p(D)}(D) = n$ – кратності відповідних коренів. Тоді в просторі $C^n([\gamma_1, \gamma_2]; H)$ загальний розв'язок $u = u(t, x)$ рівняння (1) має такий вигляд:

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^{p(D)} \sum_{\alpha=1}^{k_j(D)} t^{\alpha-1}e^{\lambda_j(D)t}C_{j\alpha}(x), \qquad (4)$$

де $C_{j\alpha} = C_{j\alpha}(x)$ – довільні функції з простору H. Формулу (4) перепишемо в диференціальному вигляді

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^{p(D)} \sum_{\alpha=1}^{k_j(D)} \left((\partial/\partial\lambda)^{\alpha-1}e^{\lambda t}\right)_{\lambda=\lambda_j(D)} C_{j\alpha}(x). \qquad (5)$$

Позначимо через

$$l = M(\partial/\partial t, D)P(\partial/\partial t, D), \quad M = (I, M_0, M_0^2, \ldots, M_0^{n-1})^T, \qquad (6)$$

вектор лівих частин умов (2). Тоді $M(\partial/\partial t, D)P(\partial/\partial t, D) = M_j P_j$ для $j = 1, \ldots, p(D)$, де M_j – матриця розміру $n \times k_j(D)$ такого вигляду:

$$M_j = \left(M(\partial/\partial t, D), \frac{\partial}{\partial M_0}M(\partial/\partial t, D), \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial M_0}\right)^{k_j(D)-1} M(\partial/\partial t, D)\right),$$

вектор $P_j = (P(\partial/\partial t, D), 0, \ldots, 0)^T$ має розмір $k_j(D)$.

Справедлива формула

$$d(M_j(\lambda,D)P_j(\lambda,D)e^{\lambda t})/d\lambda = M_j(\lambda,D)(F_j+tI)P_j(\lambda,D)e^{\lambda t}, \qquad (7)$$

де $F_j = F_j(d/d\lambda, D)$ – матричний оператор розміру $k_j(D)$ з елементами $d/d\lambda$ на головній діагоналі і елементами $N(\lambda,D) = dM_0(\lambda,D)/d\lambda$ на піддіагоналі; решта елементів матриці F_j – нульові оператори. Це випливає з рівностей

$$\frac{dM_jP_je^{\lambda t}}{d\lambda} = \frac{dM_j}{d\lambda}P_je^{\lambda t} + M_j\frac{dP_j}{d\lambda}e^{\lambda t} + M_jP_jte^{\lambda t},$$

$$\frac{dM_j}{d\lambda}P_j = \frac{dM_j}{dM_0}NP_j = \left(\frac{dM}{dM_0}, \frac{d^2M}{dM_0^2}, \dots, \frac{d^{k_j(D)-1}M}{dM_0^{k_j(D)-1}}, 0\right)NP_j.$$

Формула (7) справедлива і для вищих похідних за змінною λ, що дає можливість за допомогою формул (5), (6) отримати рівність

$$lu(t,x) = M(\partial/\partial t, D)\,P(\partial/\partial t, D)\,u(t,x) =$$
$$= \sum_{j=1}^{p(D)}\sum_{\alpha=1}^{k_j(D)}\left((\partial/\partial\lambda)^{\alpha-1}\left(M(\lambda,D)P(\lambda,D)e^{\lambda t}\right)\right)_{\lambda=\lambda_j(D)}C_{j\alpha}(x) =$$
$$= \sum_{j=1}^{p(D)}\sum_{\alpha=1}^{k_j(D)} M_j(\lambda_j(D),D)\left((F_j+tI)^{\alpha-1}P_j(\lambda,D)\right)_{\lambda=\lambda_j(D)}\times$$
$$\times e^{\lambda_j(D)t}C_{j\alpha}(x).$$

При $t=0$ маємо

$$lu(t,x)|_{t=0} = \sum_{j=1}^{p(D)} M_j(\lambda_j(D),D)\sum_{\alpha=1}^{k_j(D)} F_j^{\alpha-1}P_j(\lambda,D)|_{\lambda=\lambda_j(D)}C_{j\alpha}(x)$$

або

$$lu(t,x)|_{t=0} = \sum_{j=1}^{p(D)} M_j(\lambda_j(D),D)R^{-1}(k_j(D))R(k_j(D))V_jC_j(x), \qquad (8)$$

де

$$R(j) = \mathrm{diag}(0!, 1!, \dots, (j-1)!), \quad j = 1,\dots,n, \qquad (9)$$

$$V_j = \left(P_j(\lambda,D), F_jP_j(\lambda,D), \dots, F_j^{k_j(D)-1}P_j(\lambda,D)\right)_{\lambda=\lambda_j(D)}, \qquad (10)$$

$$C_j(x) = \mathrm{col}(C_{j1}(x), \dots, C_{j,k_j(D)}(x)), \quad j = 1,\dots,p(D). \qquad (11)$$

Матриця $V_j = V_j(D)$ є верхньою трикутною розміру $k_j(D)$ матрицею і має такий визначник:

$$\det V_j = \left(P(\lambda_j(D),D)\right)^{k_j(D)}\left(N(\lambda_j(D),D)\right)^{k_j(D)(k_j(D)-1)}. \qquad (12)$$

Якщо $k_j(k) = 1$, то в (12) $V_j(k) = P(\lambda_j(k), k)$.

Перепишемо формулу (8) у матричному вигляді

$$lu(t,x)|_{t=0} = W(D)V(D)C(x), \qquad (13)$$

де $W(D)$ – узагальнена матриця Вандермонда розміру n з твірними елементами $M_0(\lambda_j(D), D)$, $j = 1,\dots,p(D)$, кратностей $k_j(D)$:

$$W(D) = \big(M_1(\lambda_1(D),D)R^{-1}(k_1(D)), \dots,$$
$$M_{p(D)}(\lambda_{p(D)}(D),D)R^{-1}(k_{p(D)}(D))\big), \qquad (14)$$

матриця $V(D)$ – блочно-діагональна матриця розміру n:

$$V(D) = \mathrm{diag}\big(R(k_1(D))V_1, \dots, R(k_{p(D)}(D))V_{p(D)}\big), \qquad (15)$$

вектор довільних функцій $C(x)$ має розмір n:

$$C(x) = \mathrm{col}\big(C_1(x), \dots, C_{p(D)}(x)\big). \qquad (16)$$

Зауважимо, що коли всі корені $\lambda_j(D)$ полінома $L(\lambda, D)$ – прості, то права частина формули (13) має такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} I & \dots & I \\ M_0(\lambda_1(D),D) & \dots & M_0(\lambda_{p(D)}(D),D) \\ \dots & \dots & \dots \\ M_0^{n-1}(\lambda_1(D),D) & \dots & M_0^{n-1}(\lambda_{p(D)}(D),D) \end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} P(\lambda_1(D),D) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & P(\lambda_{p(D)}(D),D)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1(x) \\ \vdots \\ C_{p(D)}(x)\end{pmatrix}.$$

Підставивши загальний розв'язок (4) в умови (2), отримаємо, врахувавши (3), таке співвідношення для знаходження невідомих функцій:

$$W(D)V(D)C(x) = \varphi(x), \qquad (17)$$

де $\varphi(x) = \mathrm{col}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ – вектор-функція правих частин умов (2).

Теорема 1. *Для існування і єдиності розв'язку задачі (1), (2) при довільних правих частинах $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ умов (2) необхідно і достатньо, щоб існував обернений оператор до оператора $W(D)V(D)$, тобто щоб*

$$\det(W(D)V(D)) \neq 0. \qquad (18)$$

Доведення. Необхідність. Нехай умови (18) не виконуються, тобто для деякого проектора $\Pi \in \mathcal{F}$ оператор

$\det(W(D)V(D))\Pi = 0$. Однорідна задача (1), (2) (поряд з тривіальним) має розв'язок

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{p(D)} \sum_{\alpha=1}^{k_j(D)} t^{\alpha-1} e^{\lambda_j(D)t} \Pi C_{*j\alpha}(x) \not\equiv 0,$$

де $C_*(x) = \{C_{*j\alpha}(x)\}$ – розв'язок системи $W(D)V(D)C_*(x) = 0$, для якого $\Pi C_*(X) \neq 0$, тобто розв'язок задачі (1), (2), якщо він існує, не є єдиним.

Достатність. Якщо виконується умова (18), то для довільного вектора $\varphi(x)$ розв'язок рівняння (17) існує, єдиний і має такий вигляд: $C(x) = (W(D)V(D))^{-1}\varphi(x) = V^{-1}(D)W^{-1}(D)\varphi(x)$. Підставивши останній вираз в (4), отримаємо зображення розв'язку задачі (1), (2). Теорему доведено. ■

Переформулюємо умови теореми 1 в термінах вихідних операторів L, M_0 і P.

Теорема 2. *Для існування і єдиності розв'язку задачі (1), (2) при довільних правих частинах $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ умов (2) необхідно і достатньо, щоб:*

1) $|L(\lambda(D), D)| + |P(\lambda(D), D)| \neq 0$ для всіх $\lambda(D) \in \mathcal{F}$;

2) $|L(\lambda(D), D)| + |L'_\lambda(\lambda, D)|_{\lambda=\lambda(D)}| + |N(\lambda(D), D)| \neq 0$ для всіх $\lambda(D) \in \mathcal{F}$;

3) $|L(\lambda(D), D)| + |L(\mu(D), D)| + |M_0(\lambda(D), D) - M_0(\mu(D), D)| \neq 0$ для всіх $\lambda(D), \mu(D) \in \mathcal{F}$, таких, що $\lambda(D) \neq \mu(D)$.

Доведення. Необхідність. Нехай умови теореми 2 не виконуються, тобто для деякого проектора $\Pi \in \mathcal{F}$ і оператора $\lambda(D) \in \mathcal{F}$ $L(\lambda(D), D)\Pi = 0$ і $P(\lambda(D), D)\Pi = 0$. Тоді $\lambda(D) = \lambda_1(D)$ і $P(\lambda_1(D), D)\Pi = 0$. Визначник матриці $W(D)V(D)$ обчислюється за формулою $\det(W(D)V(D)) = \det W(D) \det V(D) = \det W(D) \prod_{j=1}^{p(D)} \prod_{l=0}^{k_j(D)-1} l! \det V_j$, тому з формули (12) випливає, що $\det V_1 \Pi = 0$ і $\det(W(D)V(D))\Pi = 0$. Аналогічно, коли для деякого проектора $\Pi \in \mathcal{F}$ і оператора $\lambda(D) \in \mathcal{F}$ $L(\lambda(D), D)\Pi = 0$, $L'_\lambda(\lambda, D)|_{\lambda=\lambda(D)}\Pi = 0$ і $N(\lambda(D), D)\Pi = 0$, то $N(\lambda_1(D), D)\Pi = 0$. Знову отримуємо $\det(W(D)V(D))\Pi = 0$. Третя можливість, коли не виконуються умови теореми 2, полягає в тому, що для деякого проектора $\Pi \in \mathcal{F}$ і операторів $\lambda(D)$, $\mu(D) \in \mathcal{F}$, $\lambda(D) \neq \mu(D)$), справедливі рівності $L(\lambda(D), D)\Pi = 0$, $L(\mu(D), D)\Pi = 0$, $M_0(\lambda(D), D)\Pi = M_0(\mu(D), D)\Pi$. Тепер можна вважати, що $\lambda(D) = \lambda_1(D)$, $\mu(D) = \lambda_2(D)$ і $M_0(\lambda_1(D), D)\Pi = M_0(\lambda_2(D), D)\Pi$. Оскільки твірні елементи матриці Вандермонда $W(D)\Pi$ збігаються, то $\det W(D)\Pi = 0$, а

отже, $\det(W(D)V(D))\Pi = 0$. В усіх трьох випадках не виконується умова теореми 1. Необхідність доведено.

Достатність. Якщо $\det(W(D)V(D)) \neq 0$, то $P(\lambda_j(D), D) \neq 0$, $j = 1, \ldots, p(D)$, $N(\lambda_j(D), D) \neq 0$, $j = 1, \ldots, p(D)$, $k_j(D) \geq 2$, та $M_0(\lambda_j(D), D) - M_0(\lambda_l(D), D) \neq 0$, $j = 1, \ldots, p(D)$, $j \neq l$, $p(D) \geq 2$. Останнє означає виконання умов теореми 2, що і треба було довести. ■

Теореми 1 і 2 проілюструємо для рівняння першого і другого порядку та для вказаних вище випадків умов (2).

Для $n = 1$ (рівняння (1) першого порядку) умова (2) має такий вигляд: $P(\partial/\partial t, D)u|_{t=0} = \varphi_1(x)$. Тоді умова $W(D)V(D) \equiv P(-A_1(D), D) \neq 0$ є умовою однозначної розв'язності задачі (1), (2). Для рівняння другого порядку ($n = 2$) умови (2) будуть такими: $P(\partial/\partial t, D)u|_{t=0} = \varphi_1(x)$, $M_0(\partial/\partial t, D)P(\partial/\partial t, D)u|_{t=0} = \varphi_2(x)$.

Введемо позначення: $\lambda = -A_1/2$, $\lambda_{1,2} = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - A_2}$, де $A_1 = A_1(D)$, $A_2 = A_2(D)$; $P = P(\lambda, D)$, $N = N(\lambda, D)$, $P' = P'_\lambda(\lambda, D)$, $M_0 = M_0(\lambda, D)$; $P_i = P(\lambda_i, D)$, $M_{0i} = M_0(\lambda_i, D)$, $i = 1, 2$. Тоді матриця $W(D)V(D)$ має вигляд

$$W(D)V(D) = \begin{pmatrix} I & I \\ M_{01} & M_{02} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \Pi + \begin{pmatrix} I & 0 \\ M_0 & I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P & P' \\ 0 & PN \end{pmatrix} (I - \Pi),$$

де Π – проектор, для якого $\Pi(k) = 1$ при $4A_2(k) \neq A_1^2(k)$ і $\Pi(k) = 0$, коли $4A_2(k) = A_1^2(k)$;

$$\det(W(D)V(D)) = (M_{02} - M_{01})P_1P_2\Pi + P^2N(I - \Pi).$$

Отже, для існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2) для рівняння другого порядку необхідно і достатньо, щоб $P_j \neq 0$, $j = 1, 2$, $M_{01}\Pi \neq M_{02}\Pi$, $N(I - \Pi) \neq 0$.

Задача Коші має єдиний розв'язок у просторі $C^n([\gamma_1, \gamma_2]; H)$, оскільки $P(\lambda, D) = e^{\lambda\tau} \neq 0$, $N(\lambda, D) = 1 \neq 0$, $M_0(\lambda, D) - M_0(\mu, D) = \lambda - \mu \neq 0$ для довільних $\lambda, \mu \in \mathcal{F}$, $\lambda \neq \mu$. У випадку 2 для періодичної задачі $P(\lambda, D) = 1 - e^{\lambda T} = 0$ при $\lambda = i2\pi p/T$, $p \in \mathbb{Z}$, $N(\lambda, D) = 1 \neq 0$, $M_0(\lambda, D) - M_0(\mu, D) = \lambda - \mu \neq 0$, тому умова існування та єдиності розв'язку матиме вигляд $L(i2\pi p/T, D) \neq 0$ для всіх $p \in \mathbb{Z}$. У випадку 3 нелокальних умов $P(\lambda, D) = 1 - \mu e^{\lambda T} = 0$ при $\lambda = i2\pi p/T - \ln\mu/T$, $p \in \mathbb{Z}$, $N(\lambda, D) = 1 \neq 0$, $M_0(\lambda, D) - M_0(\mu, D) = \lambda - \mu \neq 0$, тому умова буде $L(i2\pi p/T - \ln\mu/T, D) \neq 0$ для всіх $p \in \mathbb{Z}$. І у випадку 4 багатоточкових умов $P(\lambda, D) = e^{\lambda\tau} \neq 0$,

$N(\lambda, D) = \Delta t e^{\lambda \Delta t} \neq 0$, $M_0(\lambda, D) - M_0(\mu, D) = e^{\lambda\Delta t} - e^{\mu\Delta t} = 0$ при $\lambda = \mu + i2\pi p/\Delta t$, тому умова матиме вигляд $\mathrm{Res}_\lambda\bigl(L(\lambda, D), L(\lambda + i2\pi p/\Delta t, D)\bigr) \neq 0$ для всіх $p \in \mathbb{Z}$, де $\mathrm{Res}_\lambda(f(\lambda), g(\lambda))$ – результант [25, 86] поліномів f і g змінної λ.

Дослідимо розв'язність задачі (1), (2) у випадку невиконання умов теореми 1. Тоді матриця $W(D)V(D)$ – вироджена і для розв'язання системи (17) необхідно встановити ранг і розміщення рангових мінорів цієї матриці. Спочатку дослідимо матрицю V_j (10).

Теорема 3. *Нехай для похідних*

$$P^{(\alpha)}(\lambda, D) = (d/d\lambda)^\alpha P(\lambda, D), \quad N^{(\alpha)}(\lambda, D) = (d/d\lambda)^\alpha N(\lambda, D),$$

що входять у матрицю V_j, виконуються умови:

$$P^{(s)}(\lambda_j(D), D) = 0, s = 0, 1, \ldots, s_j(D) - 1, \quad P^{(s_j(D))}(\lambda_j(D), D) \neq 0, \tag{19}$$

$$N^{(l)}(\lambda_j(D), D) = 0, l = 0, 1, \ldots, l_j(D) - 1, \quad P^{(l_j(D))}(\lambda_j(D), D) \neq 0, \tag{20}$$

причому очевидно, що $0 \leq s_j(D) \leq k_j(D)$, $0 \leq l_j(D) \leq k_j(D) - 1$. Тоді $V_j = \begin{pmatrix} V_{j,1} \\ 0 \end{pmatrix}$ і $\mathrm{rank} V_j = \mathrm{rank} V_{j,1} = r_j(D)$, де матриця $V_{j,1}$ має $r_j(D)$ рядків і

$$r_j(D) = \left[\frac{k_j(D) - s_j(D) + l_j(D)}{l_j(D) + 1}\right] \tag{21}$$

(тут квадратними дужками позначено цілу частину дійсного числа); при цьому $k_j(D) - r_j(D)$ останніх рядків і $s_j(D)$ перших стовпців матриці V_j є нульовими, а перший ненульовий елемент β-го рядка, $\beta = 1, \ldots, r_j(D)$, міститься в стовпці з номером $\beta(l_j(D) + 1) - l_j(D) + s_j(D)$ і матиме вигляд (з точністю до натурального множника)

$$P^{(s_j(D))}(\lambda_j(D), D)\bigl(N^{(l_j(D))}(\lambda_j(D), D)\bigr)^{\beta - 1}.$$

Д о в е д е н н я. Позначимо елементи матриці, що стоїть у правій частині (10) через $\omega_{d,m}(\lambda, D)$, тобто

$$\bigl(P_j(\lambda, D), F_j P_j(\lambda, D), \ldots, F_j^{k_j(D)-1} P_j(\lambda, D)\bigr) = \\ = \bigl(\omega_{d,m}(\lambda, D)\bigr)_{d,m=1,\ldots,k_j(D)}. \tag{22}$$

Матриця $(\omega_{d,m}(\lambda, D))$ трикутна, а саме $\omega_{d,m} = 0$, $d > m$; перший її рядок має вигляд $\omega_{1,m}(\lambda, D) = P^{(m-1)}(\lambda, D)$, а головна діагональ $\omega_{d,d}(\lambda, D) = P(\lambda, D)(N(\lambda, D))^{d-1}$.

Доведемо тепер, що

$$\omega_{d,m} = \sum_{|\gamma(d)| = m - d} \Omega_{\gamma(d)}(d, m) P^{(\gamma_d)} N^{(\gamma_1)} \cdot \ldots \cdot N^{(\gamma_{d-1})}, \tag{23}$$

де $\Omega_{\gamma(d)}(d, m)$ – деякі натуральні числа; $\gamma(d) = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$, $|\gamma(d)| = \gamma_1 + \cdots + \gamma_d$, $\gamma_d \geq 0$, $\gamma_1 \geq \cdots \geq \gamma_{d-1} \geq 0$.

Справді, при $d = 1$

$$\omega_{1,m} = \sum_{\gamma_1 = m-1} \Omega_{\gamma_1}(1, m) P^{(\gamma_1)} = \Omega_{m-1}(1, m) P^{(m-1)},$$

при $d = m$

$$\omega_{d,d} = \sum_{|\gamma(d)| = 0} \Omega_{\gamma(d)}(d, m) P^{(\gamma_d)} N^{(\gamma_1)} \cdot \ldots \cdot N^{(\gamma_{d-1})} = \Omega_{0\ldots0}(d, d) P N^{d-1}.$$

Ці вирази збігаються з наведеними вище виразами для першого рядка і головної діагоналі при $\Omega_{m-1}(1, m) = \Omega_{0\ldots0}(d, d) = 1$. Нехай $d \neq 1$, $d \neq m$; тоді з (22) маємо, що $\omega_{d,m} = d\omega_{d,m-1}/d\lambda + N\omega_{d-1,m-1}$. Очевидно, що $\omega_{d,m}$ із (23) задовольняють останню рівність, тобто формулу (23) доведено.

За умов (19), (20) ненульовими в сумі (23) можуть бути лише доданки, для яких $\gamma_{d-1} \geq l_j(D)$, $\gamma_d \geq s_j(D)$, а отже, $\omega_{d,m}(\lambda_j(D), D) = 0$ при $m - d < s_j(D) + l_j(D)(d-1)$ або при $m < d(l_j(D)+1) + s_j(D) - l_j(D)$, а при $m = d(l_j(D) + 1) + s_j(D) - l_j(D)$ елемент $\omega_{d,m}$ визначається за формулою

$$\sum_{|\gamma(d)| = m - d} \Omega_{\gamma(d)}(d, m) P^{(\gamma_d)}(\lambda_j(D), D) N^{(\gamma_1)}(\lambda_j(D), D) \times \ldots \times \\ \times N^{(\gamma_{d-1})}(\lambda_j(D), D) = \Omega_{l_j(D), \ldots, l_j(D), s_j(D)}(d, m) P^{(s_j(D))}(\lambda_j(D), D) \times \\ \times \bigl(N^{(l_j(D))}(\lambda_j(D), D)\bigr)^{d-1} \neq 0.$$

Це означає, що в рядку з номером d перший ненульовий елемент стоїть у стовпці з номером $d(l_j(D) + 1) + s_j(D) - l_j(D)$. Оскільки кількість стовпців дорівнює $k_j(D)$, то для ненульового рядка з номером d справедлива нерівність $d(l_j(D) + 1) + s_j(D) - l_j(D) \leq k_j(D)$, з якої одержуємо $d \leq (k_j(D) - s_j(D) + l_j(D))/(l_j(D) + 1)$. Тому ранг матриці V_j має вигляд (21). Вона має таку будову: в першому рядку є $s_j(D)$ нулів, далі – ненульовий елемент $P^{(s_j(D))}(\lambda_j(D), D)$; в другому – $l_j(D) + 1 + s_j(D)$ нулів, далі – ненульовий елемент (з точністю до натурального множника) $P^{(s_j(D))}(\lambda_j(D), D) N^{(l_j(D))}(\lambda_j(D), D)$; в третьому – $2(l_j(D) + 1) + s_j(D)$ нулів, далі – ненульовий елемент $P^{(s_j(D))}(\lambda_j(D), D)\bigl(N^{(l_j(D))}(\lambda_j(D), D)\bigr)^2$ і т.д. до рядка з номером $r_j(D)$ включно. Останні $k_j(D) - r_j(D)$ рядків є нульовими. На закінчення доведення теореми наведемо, для прикладу, матрицю V_j

п'ятого порядку:

$$\begin{pmatrix} P & P' & P'' & P''' & P^{IV} \\ 0 & NP & N'P+2NP' & N''P+3N'P'+3NP'' & \xi_1 \\ 0 & 0 & N^2P & 3NN'P+3N^2P' & \xi_2 \\ 0 & 0 & 0 & N^3P & \xi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N^4P \end{pmatrix},$$

де $\xi_1 = N'''P + 4N''P' + 6N'P'' + 4NP'''$, $\xi_2 = 3(N')^2P + 4NN''P + 12NN'P' + 6N^2P''$, $\xi_3 = 6N^2N'P + 4N^2P'$. ■

Для подальшого дослідження матриці $W(D)V(D)$ введемо проектори Π_1, Π_2, Π_3 так, що $\Pi_1 = 1$, коли $\det(W(k)V(k)) \neq 0$ (тобто $\sum_{j=1}^{p(k)} r_j(k) = n$), $\Pi_3 = 1$, коли $V(k) = 0$ (тобто $\sum_{j=1}^{p(k)} r_j(k) = 0$), $\Pi_2 = 1$, коли $0 < \operatorname{rank}(W(k)V(k)) < n$ (тобто $0 < \sum_{j=1}^{p(k)} r_j(k) < n$). Очевидно, $\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = I$. Тоді існує оператор $(W(D)V(D))^{-1}\Pi_1 = V^{-1}(D)W^{-1}(D)\Pi_1$ і $W(D)V(D)\Pi_3 = 0$.

Виключимо з матриці $W(D)\Pi_2$ лінійно залежні стовпці і стовпці, що домножуються на нульові елементи матриць $V_j\Pi_2$. Для цього перенумеруємо корені таким чином: згрупуємо корені $\lambda_j(D)$, для яких $r_j(D) = 0$, в групу з номером $p_1(D)+1$, решту коренів згрупуємо в $p_1(D)$, $1 \le p_1(D) \le p(D)$, груп так, що для довільних коренів $\lambda_i(D)$ і $\lambda_j(D)$ з групи $M_0(\lambda_i(D), D)\Pi_2 = M_0(\lambda_j(D), D)\Pi_2$. Вважаємо, що в першу групу входять корені $\lambda_1(D), .., \lambda_{q_1(D)}(D)$, в другу – корені $\lambda_{q_1(D)+1}(D), .., \lambda_{q_2(D)}(D)$, в третю – корені $\lambda_{q_2(D)+1}(D), \ldots, \lambda_{q_3(D)}(D)$ і т.д. Всередині групи нумеруємо корені $\lambda_j(D)$ так, щоб ранги відповідних матриць V_j не зростали. Тоді матриця $W(D)V(D)\Pi_2$ має такий кістяковий [31] розклад

$$W(D)V(D)\Pi_2 = \widetilde{W}\widetilde{V}\Pi_2, \tag{24}$$

де

$$\widetilde{W} = (\widetilde{M}_1(D)R^{-1}(r_1(D)), \ldots, \widetilde{M}_{p_1(D)}(D)R^{-1}(r_{q_{p_1-1}+1}(D))), \tag{25}$$

$\widetilde{M}_1(D)$ – матриця розміру $n \times r_1(D)$, що утворена першими $r_1(D)$ стовпцями матриці $M_1(\lambda_1(D), D)$, $\widetilde{M}_2(D)$ – матриця розміру $n \times r_{q_1+1}(D)$, що утворена першими $r_{q_1+1}(D)$ стовпцями матриці $M_{q_1+1}(\lambda_{q_1+1}(D), D)$ і т.д.,

$$\widetilde{V} = (\operatorname{diag}(R(r_1(D))\widetilde{V}_1(D), \ldots, R(r_{q_{p_1-1}+1}(D))\widetilde{V}_{p_1}(D)), 0), \tag{26}$$

$$\widetilde{V}_{j+1}(D) = \left(V_{q_j+1,1}, \begin{pmatrix} V_{q_j+2,1} \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} V_{q_{j+1},1} \\ 0 \end{pmatrix}\right), \ j = 0, 1, \ldots, p_1 - 1, \tag{27}$$

причому $\widetilde{V}_j(D)$ – матриця розміру $r_{q_{j-1}+1}(D) \times \sum_{l=q_{j-1}+1}^{q_j} k_l(D)$ і рангу $r_{q_{j-1}+1}(D)$ (вважаємо в (25) і далі, що $q_0(D) = 0$).

З формул (25)–(27) випливає, що матриці $\widetilde{W}\Pi_2$ і $\widetilde{V}\Pi_2$ мають однакові ранги, які дорівнюють $\sum_{j=1}^{p_1(D)} r_{q_{j-1}+1}(D)$, і існують матриці $(\widetilde{W}^H\widetilde{W})^{-1}\Pi_2$ та $(\widetilde{V}\widetilde{V}^H)^{-1}\Pi_2$.

Розглянемо систему трьох рівнянь, яка еквівалентна рівнянню (17), а саме

$$W(D)V(D)\Pi_1C(x) = \Pi_1\varphi(x), \tag{28}$$

$$W(D)V(D)\Pi_2C(x) \equiv \widetilde{W}\widetilde{V}\Pi_2C(x) = \Pi_2\varphi(x), \tag{29}$$

$$W(D)V(D)\Pi_3C(x) \equiv 0 = \Pi_3\varphi(x). \tag{30}$$

Введемо ще один проектор $\Pi_W = \widetilde{W}(\widetilde{W}^H\widetilde{W})^{-1}\widetilde{W}^H\Pi_2$. Очевидно, що $(\Pi_2 - \Pi_W)$ – також проектор і $(\Pi_2 - \Pi_W)\widetilde{W} = 0$, $(\Pi_2 - \Pi_W)\Pi_W = 0$. Зобразимо функцію $\Pi_2\varphi(x)$ у вигляді суми $\Pi_2\varphi(x) = \Pi_W\varphi(x) + (\Pi_2 - \Pi_W)\varphi(x)$ і до отриманого з (29) рівняння $\widetilde{W}\widetilde{V}\Pi_2C(x) - \Pi_W\varphi(x) = (\Pi_2 - \Pi_W)\varphi(x)$ застосуємо оператор $\Pi_2 - \Pi_W$. Отримаємо, що функція $\varphi(x)$ повинна задовольняти умову

$$(\Pi_2 - \Pi_W)\varphi(x) = 0. \tag{31}$$

Враховуючи (31), запишемо (29) у такому вигляді:

$$\widetilde{W}\widetilde{V}(\Pi_2C(x) - \widetilde{V}^H(\widetilde{V}\widetilde{V}^H)^{-1}(\widetilde{W}^H\widetilde{W})^{-1}\widetilde{W}^H\Pi_2\varphi(x)) = 0. \tag{32}$$

Оскільки матриця $\widetilde{W}$ має повний стовпцевий ранг, то загальний розв'язок рівняння (32) запишеться у вигляді

$$\Pi_2C(x) = \widetilde{V}^H(\widetilde{V}\widetilde{V}^H)^{-1}(\widetilde{W}^H\widetilde{W})^{-1}\widetilde{W}^H\Pi_2\varphi(x) + \Pi_2v(x), \tag{33}$$

де $\Pi_2v(x)$ – загальний розв'язок рівняння $\widetilde{V}\Pi_2v(x) = 0$. Останнє рівняння згідно з формулами (26), (27) розкладається на рівняння

$$\widetilde{V}_j(D)\Pi_2v_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, p_1(D),$$

причому $v(x) = \operatorname{col}(v_1(x), \ldots, v_{p_1+1}(x))$ і розміри векторів $v_j(x)$ збігаються з відповідними розмірами матриць $\widetilde{V}_j(D)$.

Нехай матриця $\widetilde{V}_{j,1}(D)$, $j = 1, \ldots, p_1(D)$, утворена зі стовпців матриці $\widetilde{V}_j(D)$ з номерами

$$s_{q_{j-1}+1}(D) - l_{q_{j-1}+1}(D) + d(l_{q_{j-1}+1}(D) + 1), \quad d = 1, \ldots, r_{q_{j-1}+1}(D),$$

матриця $\widetilde{V}_{j,2}(D)$ утворена з матриці $\widetilde{V}_j(D)$ викреслюванням цих стовпців; аналогічно вектор $v_{j,1}(x)$ утворений з елементів вектора

$v_j(x)$ із вказаними номерами, а вектор $v_{j,2}(x)$ утворений їх викресленням (позначення s_j, l_j і r_j введені в теоремі 3).

Тоді розлядувані рівняння справджуються для всіх $v_{j,1}$ і $v_{j,2}$, які при $j = 1, \ldots, p_1(D)$ задовольняють умови

$$\Pi_2 v_{j,2}(x) \in H, \quad \Pi_2 v_{j,1}(x) = (\widetilde{V}_{j,1}(D))^{-1} \widetilde{V}_{j,2}(D) v_{j,2}(x). \tag{34}$$

Підсумуємо зроблене в цьому пункті у вигляді теореми.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови (19), (20). Для існування розв'язку в просторі $C^m([\gamma_1, \gamma_2]; H)$ задачі (1), (2) необхідно і достатньо, щоб вектор правих частин умов (2) задовольняв умови (30) і (31). Розв'язок зображається формулою (4), причому вектор $C(x)$, що складений за формулами (11) і (16), має вигляд $C(x) = \Pi_1 C(x) + \Pi_2 C(x) + \Pi_3 C(x)$, де $\Pi_1 C(x) = V^{-1}(D) W^{-1}(D) \Pi_1 \varphi(x)$; $\Pi_2 C(x)$ визначається формулою (33), в якій компоненти $\Pi_2 v_{j,2}(x)$ є довільними функціями з H, а компоненти $\Pi_2 v_{j,1}(x)$ даються формулою (34); $\Pi_3 C(x)$ – довільні функції з H.*

При $n = 1$ визначимо проектор Π_1 умовою $P(-A_1(D), D) \neq 0$, тобто $\Pi_1(k) = 1$ для тих k, при яких $P(-A_1(k), k) \neq 0$, і $\Pi_1(k) = 0$ для інших $k \in \mathbb{Z}^p$. Тоді для рівняння першого порядку розв'язок задачі (1), (2) існує при умові $(I - \Pi_1)\varphi_1(x) = 0$ і дається формулою

$$u(t,x) = e^{-A_1(D)t} \big(P^{-1}(-A_1(D), D) \Pi_1 \varphi_1(x) + (I - \Pi_1) v(x) \big),$$

де $v(x)$ – довільна функція з простору H.

При $n = 2$ визначимо проектори Π_{11}, Π_{211}–Π_{214}, Π_{31} умовою $A_2 \neq \lambda^2$, а проектори Π_{12}, Π_{221}, Π_{222}, Π_{32} – умовою $A_2 = \lambda^2$. Крім того, $M_{01} \neq M_{02}$ для Π_{11}, Π_{211}, Π_{212}, Π_{31}, а $M_{01} = M_{02}$ для Π_{213}, Π_{214}; для проектора Π_{11} виконуються умови $P_1 \neq 0$, $P_2 \neq 0$, для Π_{12} – $P \neq 0$, $N \neq 0$, для Π_{211} – $P_1 \neq 0$, $P_2 = 0$, для Π_{212} – $P_1 = 0$, $P_2 \neq 0$, для Π_{213} – $P_1 \neq 0$, для Π_{214} – $P_1 = 0$, $P_2 \neq 0$, для Π_{221} – $P \neq 0$, $N = 0$, для Π_{222} – $P = 0$, $P' \neq 0$, для Π_{31} – $P_1 = P_2 = 0$, для Π_{32} – $P = P' = 0$.

Тоді для рівняння другого порядку розв'язок задачі (1), (2) існує, якщо праві частини (2) задовольняють умови $(\Pi_{211} + \Pi_{212} + \Pi_{213} + \Pi_{214} + \Pi_{221} + \Pi_{222})\varphi_2 = (\Pi_{211} M_{01} + \Pi_{212} M_{02} + \Pi_{213} M_{01} + \Pi_{214} M_{02} + \Pi_{221} M_0 + \Pi_{222} M_0)\varphi_1$, $\Pi_{31}\varphi_1 = \Pi_{31}\varphi_2 = \Pi_{32}\varphi_1 = \Pi_{32}\varphi_2 = 0$ і має вигляд

$$u(t,x) = \frac{\Pi_{11}}{M_{02} - M_{01}} \Big(\frac{e^{\lambda_1 t}}{P_1} (M_{02}\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{e^{\lambda_2 t}}{P_2} (\varphi_2 - M_{01}\varphi_1) \Big) +$$
$$+ e^{\lambda_1 t} \Big(\Big(\frac{\Pi_{211}}{P_1} + \frac{\Pi_{213} P_1}{|P_1|^2 + |P_2|^2} \Big) \varphi_1 + \Big(\Pi_{212} - \frac{\Pi_{213} P_2}{P_1} + \Pi_{214} + \Pi_{31} \Big) v_1 \Big) +$$

$$+ e^{\lambda_2 t} \Big(\Big(\frac{\Pi_{212}}{P_2} + \frac{\Pi_{213} P_2}{|P_1|^2 + |P_2|^2} \Big) \varphi_1 + \Pi_{213} v_1 + (\Pi_{211} + \Pi_{31}) v_2 \Big) +$$
$$+ t e^{\lambda t} \Big(\frac{\Pi_{12}}{PN} (\varphi_2 - M_0 \varphi_1) + \Big(\frac{\Pi_{221} P'}{|P|^2 + |P'|^2} + \frac{\Pi_{222}}{P'} \Big) \varphi_1 + \Pi_{221} v_1 + \Pi_{32} v_2 \Big) +$$
$$+ e^{\lambda t} \Big(\frac{\Pi_{12}}{P} \varphi_1 + \frac{\Pi_{12} P'}{P^2 N} (\varphi_2 - M_0 \varphi_1) + \frac{\Pi_{221} P}{|P|^2 + |P'|^2} \varphi_1 +$$
$$+ \Big(\Pi_{222} + \Pi_{32} - \frac{\Pi_{221} P'}{P} \Big) v_1 \Big),$$

де v_1, v_2 – довільні функції з H.

§ 18. Диференціальні рівняння з операторними коефіцієнтами, що мають спільне спектральне зображення

Вивчається нелокальна задача для диференціально-операторних рівнянь у випадку існування спільного спектрального зображення операторів рівняння [73, 74].

Нехай X – сепарабельний гільбертів простір із скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$; $A_i : X \longrightarrow X$, $i = 1, \ldots, p$, – лінійні оператори, що мають спільне спектральне зображення, тобто існує повна ортонормована система елементів $x_k \in X$, $k \in \mathbb{N}$, таких, що виконуються рівності

$$A_i x_k = \alpha_{ik} x_k, \; i = 1, \ldots, p, \; k \in \mathbb{N},$$

для деяких комплексних чисел α_{ik}.

Надалі використовуємо також такі позначення:

$\alpha_k = (\alpha_{1k}, \ldots, \alpha_{pk})$, $|\alpha_k|^2 = |\alpha_{1k}|^2 + \ldots + |\alpha_{pk}|^2$, $\tau(m) = (2\pi i m - \ln \mu)/T$; X_q, $q \in \mathbb{R}$, – гільбертів простір елементів

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k, \; b_k = (x, x_k)$$

зі скалярним добутком, що індукує норму

$$\|x\|_q^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\alpha_k|^2)^q |b_k|^2;$$

простір X_q містить всі елементи $x \in \bigcap D\big(A_1^{q_1} \ldots A_p^{q_p}\big)$, де $D(B)$ – область визначення оператора B, а перетин вибирається за наборами чисел $q_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \dots, p$, таких, що $q_1 + \dots + q_p \le q$; X_q^r, $q \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, – гільбертів простір функцій

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) x_k,$$

таких, що похідна

$$\frac{d^j \varphi}{dt^j} : [0, T] \longrightarrow X_{q-j},\ j = 0, 1, \dots, r,$$

неперервна за t в нормі простору X_{q-j},

$$\|\varphi\|^2_{X_q^r} = \sum_{j=1}^{r} \int_0^T \left\| \frac{d^j \varphi(t)}{dt^j} \right\|^2_{q-j} dt;$$

$X_{q,r,\sigma}(\Omega)$, $q, r, \sigma \in \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{Z})$, – гільбертів простір функцій

$$u(t, \Omega) = \sum_{(k,m)\in\Omega} u_{k,m} x_k e^{\tau(m)t} \tag{1}$$

зі скалярним добутком, що індукує норму

$$\|u(t, \Omega)\|^2_{q,r,\sigma;\Omega} = T \sum_{j_1+j_2=n} \sum_{(k,m)\in\Omega} \left(1 + |\alpha_k|^2\right)^{q+j_1} \left(1 + m^2\right)^{r+j_2} \times$$
$$\times \left(1 + k^2\right)^{\sigma} |u_{k,m}|^2,$$

$$X_{q,r,\sigma}(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) = X_{q,r,\sigma};\, u(t, \mathbb{N} \times \mathbb{Z}) = u(t);\, \|\cdot\|_{q,r,\sigma;\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} = \|\cdot\|_{q,r,\sigma}.$$

Очевидно, що якщо $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ і $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, то

$$X_{q,r,\sigma}(\Omega) = X_{q,r,\sigma}(\Omega_1) \oplus X_{q,r,\sigma}(\Omega_2),$$

де $\oplus$ означає пряму суму; тоді для кожної функції $u(t, \Omega) \in X_{q,r,\sigma}(\Omega)$ маємо, що

$$u(t, \Omega) = u(t, \Omega_1) + u(t, \Omega_2),$$

де $u(t, \Omega_1) \in X_{q,r,\sigma}(\Omega_1)$, $u(t, \Omega_2) \in X_{q,r,\sigma}(\Omega_2)$.

Розглянемо задачу на власні значення:

$$L\left(\frac{d}{dt}, A\right) u \equiv \sum_{|\widehat{s}| \le N,\, s_0 \le n} a_{\widehat{s}} \frac{d^{s_0}}{dt^{s_0}} A_1^{s_1} \dots A_p^{s_p} u(t) = \lambda u(t), \tag{2}$$

$$u^{(j)}(0) - \mu u^{(j)}(T) = 0,\ j = 0, 1, \dots, n-1, \tag{3}$$

де $a_{\widehat{s}}$, μ, $\mu \ne 0$, – комплексні числа.

Функцію $u \in X_q^r$, $r \ge n$, яка задовольняє умови

$$\left\| L\left(\frac{d}{dt}, A\right) u - \lambda u \right\|_{X_{q-N}^{r-n}} = 0,$$

$$\left\| u^{(j)}(0) - \mu u^{(j)}(T) \right\|_{q-j} = 0,\ j = 0, 1, \dots, n-1,$$

називаємо розв'язком задачі (2), (3) із простору X_q^r.

Для фіксованого вектора $(k, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ позначимо через $R_{k,m}$ множину таких векторів $(k^*, m^*) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, для яких справедлива рівність

$$L(\tau(m^*), \alpha_{k^*}) = L(\tau(m), \alpha_k),$$

де $\tau(m) = -\ln \mu / T + i2\pi m / T$.

Тоді повний опис множини власних функцій і власних значень задачі (2), (3) забезпечує така теорема.

Теорема 1. *Власними значеннями задачі (2), (3) є числа*

$$\lambda_{k,m} = L(\tau(m), \alpha_k),\ (k, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \tag{4}$$

а власними функціями, що відповідають власному значенню $\lambda_{k,m}$, є функції

$$x_{k^*} e^{\tau(m^*)t},\ (k^*, m^*) \in R_{k,m}.$$

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 11.10.

Для рівняння

$$L\left(\frac{d}{dt}, A\right) u = f(t),\ t \in (0, T), \tag{5}$$

розглянемо задачу з нелокальними умовами (3), де $L(d/dt, A)$ – оператор з рівняння (2), а $f \in X_{q,r,\sigma}$ (q, r, σ – деякі дійсні числа), причому

$$f(t) = \sum_{(k,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} f_{k,m} x_k e^{\tau(m)t}. \tag{6}$$

Під розв'язком задачі (5), (3) розуміємо функцію $u \in X_{q,r,0}$, яка задовольняє умову

$$\left\| L\left(\frac{d}{dt}, A\right) u - f(t) \right\|_{q-N,r-n,0} = 0.$$

Розв'язок задачі (5), (3) шукаємо у вигляді ряду (1) за власними функціями задачі (2), (3), в якому $\Omega = \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. При цьому коефіцієнти $u_{k,m}$ визначаються рівностями

$$\lambda_{k,m} u_{k,m} = f_{k,m},\ (k, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \tag{7}$$

де $\lambda_{k,m}$ даються формулою (4).

Теорема 2. *Для існування розв'язку задачі (5), (3) необхідно, щоб виконувалась умова*

$$f(t, \omega) = 0, \tag{8}$$

де

$$\omega = \{(k,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} : \lambda_{k,m} = 0\}. \tag{9}$$

Доведення випливає з рівностей (7).

Припустимо, що виконується умова (8). Тоді, враховуючи (7), одержуємо формальний розв'язок задачі (5), (3) у вигляді ряду

$$u(t) = \sum_{(k,m)\in\Omega} \frac{f_{k,m}}{\lambda_{k,m}} x_k e^{\tau(m)t} + R(t), \tag{10}$$

де $\Omega = (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) \setminus \omega$, а $R(t)$ – лінійна оболонка множини функцій $\{x_k e^{\tau(m)t}, (k,m) \in \omega\}$. Із формули (10) випливає таке твердження.

Теорема 3. *Для единості розв'язку задачі (5), (3) необхідно і достатньо, щоб $\omega = \emptyset$.*

Розглянемо питання про існування розв'язку задачі (5), (3).

Теорема 4. *Нехай існують такі числа α, β, γ, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $(k,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ виконуються нерівності*

$$\left|\lambda_{k,m}\right| > \left(1+m^2\right)^{\alpha}\left(1+|\alpha_k|^2\right)^{\beta}\left(1+k^2\right)^{\gamma}. \tag{11}$$

Якщо $f(t) \in X_{q-2\beta,r-2\alpha,-2\gamma}$ і задовольняє умову (8), то існує єдиний (з точністю до лінійної оболонки $R(t)$) розв'язок задачі (5), (3) із простору $X_{q,r,0}$, який зображається рядом (10).

Д о в е д е н н я. На основі формули (10) і оцінок (11) одержуємо нерівність

$$\|u(t,\Omega)\|_{q,r,0;\Omega} \le C\|f\|_{q-2\beta,r-2\alpha,-2\gamma},$$

звідки випливає доведення теореми. ■

Зауваження 1. Якщо $\omega = \emptyset$, то за умов теореми 4 розв'язок задачі (5), (3) неперерно залежить від $f(t)$.

Дослідимо потужність множин коефіцієнтів рівняння (5), а також параметрів μ і T в умовах (3), для яких виконуються нерівності (11). Введемо такі позначення: l – кількість коефіцієнтів $a_{\widehat{s}}$ у рівнянні (5), G – скінченна область простору $\mathbb{R}^{2l}$,

$$a = \left(\operatorname{Re} a_{\widehat{s}}, \operatorname{Im} a_{\widehat{s}} \colon |\widehat{s}| \le N, s_0 \le n\right) = (\theta_1,\dots,\theta_{2l}) \in G,$$

$$\Omega_1 = \left\{(k,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z} : |\tau(m)| < |\alpha_k|\right\},\ \Omega_2 = (\mathbb{N}\times\mathbb{Z}) \setminus \Omega_1.$$

Теорема 5. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{2l}$) векторів a нерівність (11) виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів $(k,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$: при*

$$\alpha < -\frac{1}{4},\ \beta \le \frac{N}{2},\ \gamma < -\frac{1}{4},\ \text{якщо } (k,m) \in \Omega_1, \tag{12}$$

і при

$$\alpha < \frac{2n-1}{4},\ \beta \le \frac{N-n}{2},\ \gamma < -\frac{1}{4},\ \text{якщо } (k,m) \in \Omega_2. \tag{13}$$

Д о в е д е н н я. Запишемо ліву частину нерівності (11) у вигляді

$$\sum_{\substack{|\widehat{s}|\le N\\ s_0\le n}} a_{\widehat{s}}(\tau(m))^{s_0}\alpha_{1k}^{s_1}\dots\alpha_{pk}^{s_p} = \lambda_{k,m} = \operatorname{Re}\lambda_{k,m} + i\operatorname{Im}\lambda_{k,m}.$$

Оскільки $\lambda_{k,m}$ лінійно залежить від параметрів θ_j, то справедливі такі зображення:

$$\operatorname{Re}\lambda_{k,m} = \sum_{j=1}^{2l}\theta_j\varphi_j(k,m),\ \operatorname{Im}\lambda_{k,m} = \sum_{j=1}^{2l}\theta_j\psi_j(k,m).$$

Оцінимо міру множини $W_{k,m}$ векторів $a \in G$, для яких не виконується (11) при даному векторі (k,m). Очевидно, що $W_{k,m} \subset W'_{k,m}$, де $W'_{k,m}$ – множина векторів $a \in G$, для яких при даному векторі (k,m) виконуються обидві нерівності:

$$\left|\operatorname{Re}\lambda_{k,m}\right| < \left(1+m^2\right)^{\alpha}\left(1+|\alpha_k|^2\right)^{\beta}\left(1+k^2\right)^{\gamma},$$

$$\left|\operatorname{Im}\lambda_{k,m}\right| < \left(1+m^2\right)^{\alpha}\left(1+|\alpha_k|^2\right)^{\beta}\left(1+k^2\right)^{\gamma}.$$

Легко бачити, що $W'_{k,m}$ – це множина точок $a \in G$, що містяться між гіперплощинами

$$\sum_{j=1}^{2l}\theta_j\varphi_j(k,m) = \pm\left(1+m^2\right)^{\alpha}\left(1+|\alpha_k|^2\right)^{\beta}\left(1+k^2\right)^{\gamma},$$

$$\sum_{j=1}^{2l}\theta_j\psi_j(k,m) = \pm\left(1+m^2\right)^{\alpha}\left(1+|\alpha_k|^2\right)^{\beta}\left(1+k^2\right)^{\gamma}.$$

Тому справедлива оцінка

$$\operatorname{mes} W'_{k,m} \le D^{2l-2}S,$$

де D – зовнішній діаметр області G, а

$$S = \frac{4\left(1+m^2\right)^{2\alpha}\left(1+|\alpha_k|^2\right)^{2\beta}\left(1+k^2\right)^{2\gamma}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{2l}\varphi_j^2\sum_{j=1}^{2l}\psi_j^2}\,\sin\theta}.$$

Тут θ – кут між гіперплощинами

$$\sum_{j=1}^{2l}\theta_j\varphi_j(k,m) = 0 \ \text{ і } \ \sum_{j=1}^{2l}\theta_j\psi_j(k,m) = 0.$$

Легко показати, що $\theta = \pi/2$, оскільки $\sum_{j=1}^{2l} \varphi_j(k,m)\psi_j(k,m) = 0$, і

$$S \leq 4l \frac{(1+m^2)^{2\alpha}(1+|\alpha_k|^2)^{2\beta}(1+k^2)^{2\gamma}}{\max\limits_{|\widehat{s}|\leq N,\, s_0\leq n} \left|(\tau(m))^{s_0}\alpha_{1k}^{s_1}\dots\alpha_{pk}^{s_p}\right|^2}. \tag{14}$$

Враховуючи, що знаменник правої частини нерівності (14) не менший, ніж $|\alpha_k|^N$ при $(k,m) \in \Omega_1$, і не менший, ніж $|\tau(m)|^n|\alpha_k|^{N-n}$ при $(k,m) \in \Omega_2$, одержуємо, що

$$\sum_{(k,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} \operatorname{mes} W_{k,m} \leq \sum_{(k,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} \operatorname{mes} W'_{k,m} \leq$$
$$\leq \sum_{(k,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} (1+k^2)^{-1/2-\varepsilon_1}(1+m^2)^{-1/2-\varepsilon_2} < \infty,$$

де $\varepsilon_1 > 0$ і $\varepsilon_2 > 0$. Тоді згідно з лемою 3.1 міра множини тих векторів $a \in G$, для яких нескінченно часто не виконується нерівність (11), дорівнює нулю, що й треба було довести. ∎

Із теорем 4 і 5 випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Нехай функція $f(t)$ така, що $f(t,\omega) = 0$ і*

$$f(t,\Omega_i) \in X_{q-2\beta_i, r-2\alpha_i, -2\gamma_i, \Omega_i}, \quad i = 1, 2,$$

де числа α_1, β_1, γ_1 задовольняють умови (12), а числа α_2, β_2, γ_2 – умови (13). Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{2l}$) векторів a існує розв'язок задачі (5), (3) із простору $X_{q,r,0}$.

Теорема 5 дає оцінки (11) для знаменників $\lambda_{k,m}$ при довільному розташуванні спектра α_k оператора $A = (A_1,\dots,A_p)$. Проте для багатьох конкретних випадків розміщення спектра α_k теорему 5 можна уточнити.

Наприклад, нехай нескінченність буде єдиною точкою скупчення спектра α_k, $\alpha_k \neq 0$, і нехай

$$|\alpha_k| = O(k^{\beta_1}), \tag{15}$$

або

$$|\alpha_k| = O(\ln^{\beta_2} k). \tag{16}$$

Тоді справедлива така теорема.

Теорема 6. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{2l}$) векторів $a \in G$ нерівність (11) справедлива для всіх (крім скінченної множини) векторів $(k,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ у випадку виконання*

умови (15) при

$$\begin{array}{lll} \alpha < -1/4, & 2\beta_1\beta + \gamma < \beta_1 N - 1/2, & \text{якщо} \quad (k,m) \in \Omega_1, \\ \alpha < (2n-1)/4, & 2\beta_1\beta + \gamma < \beta_1(N-n) - 1/2, & \text{якщо} \quad (k,m) \in \Omega_2; \end{array}$$

а у випадку виконання умови (16) при

$$\begin{array}{ll} \alpha < -1/4,\ \beta < (N - 1/\beta_2)/2,\ \gamma \leq -1/2, & \text{якщо} \quad (k,m) \in \Omega_1, \\ \alpha<(2n-1)/4,\ \beta<(N-n-1/\beta_2)/2,\ \gamma\leq -1/2, & \text{якщо} \quad (k,m) \in \Omega_2. \end{array}$$

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 5.

Зауваження 2. Використовуючи ідеї доведення теорем 5 і 6, можна дослідити питання про існування розв'язків задачі (5), (3) у відповідних просторах (типу $X_{q,r,\sigma}$) і у випадку довільного числа точок скупчення спектра α_k.

Зауваження 3. Аналогічні результати для майже всіх (стосовно міри Лебега) чисел $\ln|\mu|$ (або T) можна одержати, розглядаючи $\lambda_{k,m}$ як функції змінної μ (відповідно T) при фіксованих T (або μ) і $a_{\widehat{s}}$, припускаючи, наприклад, виконання умови

$$\Big| \sum_{|\widehat{s}|\leq N-n} a_{n,\widehat{s}}\alpha_{1k}^{s_1}\dots\alpha_{pk}^{s_p} \Big| > C|\alpha_k|^{\beta_3}$$

для всіх $k \in \mathbb{N}$ (див. теореми 11.15 і 11.16).

Розглянемо тепер нелокальну задачу для системи диференціально-операторних рівнянь, а саме

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{|\widehat{s}|\leq N \\ s_0\leq n}} a_{\widehat{s}}^{ij} \frac{d^{s_0}}{dt^{s_0}} A_1^{s_1}\dots A_p^{s_p} u_j(t) = f_i(t), \ i = 1,\dots,m, \tag{17}$$

$$u_j^{(\alpha)}(0) - \mu u_j^{(\alpha)}(T) = 0, \ \alpha = 0,1,\dots,n-1, \ j = 1,\dots,m. \tag{18}$$

Розв'язність задачі (17), (18) дослідимо в просторах $\bar{X}_{q,l,\sigma}$ вектор-функцій $v(t) = (v_1(t),\dots,v_m(t))$ таких, що $v_j(t) \in X_{q,l,\sigma}$, і

$$\|v(t)\|_{\bar{X}_{q,l,\sigma}} = \sum_{j=1}^{m} \|v_j(t)\|_{q,l,\sigma}.$$

Тоді для визначення коефіцієнтів $u_{j,k,m}$ розвинення $u_j(t)$, $j = 1,\dots,m$, в ряд за власними функціями задачі (2), (3) одержимо систему p лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{\substack{|\widehat{s}|\leq N \\ s_0\leq n}} a_{\widehat{s}}^{ij} (\tau(r))^{s_0}\alpha_{1k}^{s_1}\dots\alpha_{pk}^{s_p} \Big) u_{j,k,r} = f_{i,k,r},\ i=1,\dots,m,\ (k,r)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}.$$

Позначимо через $\Delta(k,r)$ матрицю останньої системи і припустимо, що для всіх $(k,r)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ $\det\Delta(k,r)\neq 0$; тоді справедлива така теорема.

Теорема 7. *Якщо існують дійсні числа α, β, γ такі, що для всіх (крім скінченної множини) векторів $(k,r)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ елементи матриці $(\Delta(k,r))^{-1}$ задовольняють нерівності*

$$\left|\frac{\Delta_{ij}(k,r)}{\det\Delta(k,r)}\right|\le(1+r^2)^{\alpha}(1+|\alpha_k|^2)^{\beta}(1+k^2)^{\gamma},\ i,j=1,\ldots,m. \quad (19)$$

Якщо $f\in\bar{X}_{q-2\beta,l-2\alpha,-2\gamma}$, то існує єдиний розв'язок задачі (17), (18) з простору $\bar{X}_{q,l,0}$, який зображається рядом

$$u(t)=\sum_{(k,r)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}}\Delta^{-1}(k,r)f_{k,r}e^{\tau(r)t}x_k.$$

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 4.

Оскільки $|\Delta_{ij}(k,r)|\le\mathrm{const}(1+|\alpha_k|^2)^{N(p-1)/2}$ при $(k,r)\in\Omega_1$, $|\Delta_{ij}(k,r)|\le\mathrm{const}(1+r^2)^{n(p-1)/2}(1+|\alpha_k|^2)^{(N-n)(p-1)/2}$ при $(k,r)\in$ $\in\Omega_2$, то для одержання оцінок (19) достатньо мати оцінки знизу для виразів $\det\Delta(k,r)$, $(k,r)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$.

Теорема 8. *Нехай $|\alpha_k|\ge\mathrm{const}>0$; тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів*

$$(\mathrm{Re}\,a^{ij}_{\hat{s}},\mathrm{Im}\,a^{ij}_{\hat{s}};\ |\hat{s}|\le N,\ s_0\le n,\ i,j=1,\ldots,p)$$

при

$$\alpha<-m/2,\beta\le Nm/2,\gamma<-m/2,\ \text{якщо}\ (k,r)\in\Omega_1,$$

і при

$$\alpha<m(n-1)/2,\beta\le(N-n)m/2,\gamma<-m/2,\ \text{якщо}\ (k,r)\in\Omega_2,$$

виконується нерівність

$$|\det\Delta(k,r)|\ge(1+r^2)^{\alpha}(1+|\alpha_k|^2)^{\beta}(1+k^2)^{\gamma}$$

для всіх (крім скінченної множини) векторів $(k,r)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$.

Доведення теореми 8 випливає із лем 3.5 та 3.1 і теореми 5.

§ 19. Дослідження нелокальних задач методом мінімізації в соболєвських просторах

Вивчаються умови існування єдиності та неперервної залежності від правих частин наближеного розв'язку нелокальної двоточкової

крайової задачі для диференціальних рівнянь із частинними похідними за допомогою методу мінімізації відповідних функціоналів у просторах Соболєва періодичних функцій [82].

Існування та єдиність розв'язків нелокальних крайових задач для рівнянь із частинними похідними залежить від коефіцієнтів рівняння та параметрів крайових умов. Ці задачі, як правило, є некоректними в розумінні Адамара.

За допомогою метричного підходу можна довести існування та єдиність розв'язку таких задач для всіх (за винятком множини як завгодно малої міри) векторів, що складені з коефіцієнтів рівняння та параметрів крайових умов (див. [205] та попередні розділи). При цьому праві частини рівняння та крайових умов повинні задовольняти певні умови гладкості.

А отже, має значний інтерес вивчення нелокальних задач для будь-якого вектора, складеного з коефіцієнтів рівняння та параметрів крайових умов, без додаткових припущень щодо гладкості правих частин.

В даному параграфі досліджується двоточкова нелокальна задача при умові, що її розв'язок належить деякій кулі заданого соболєвського простору. Для побудови та вивчення розв'язку (псевдорозв'язку) цієї задачі застосовується метод мінімізації в соболєвських просторах. Цей метод є різновидом методу регуляризації Тихонова [172, 210].

Нехай H_q, $q\in\mathbb{R}$, – соболєвський простір періодичних за змінною $x=(x_1,\ldots,x_p)$, $p\in\mathbb{N}$, функцій $\varphi=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\hat{\varphi}(k)e^{i(k,x)}$ зі скалярним добутком вигляду

$$(\varphi_1,\varphi_2)_q=(2\pi)^p\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\tilde{k}^{2q}\hat{\varphi}_1(k)\overline{\hat{\varphi}_2(k)},$$

де $k=(k_1,\ldots,k_p)$; $(k,x)=k_1x_1+\cdots+k_px_p$, $\tilde{k}^2=1+k_1^2+\cdots+k_p^2$.

Простори H_q, $q\in\mathbb{R}$, утворюють шкалу, в якій розглядаємо праві частини нелокальних умов.

Нехай $T>0$ – довільне фіксоване число. Розв'язки $u(t,x)$ нелокальної задачі шукаємо в просторах H_q^n, $q\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, отриманих поповненням множини нескінченно диференційованих за змінною t скінченних сум $v(t,x)=\sum\limits_k\hat{v}(t,k)e^{i(k,x)}$ за нормою, породженою скалярним добутком [205]

$$(v_1,v_2)_{q,n}=\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{j=0}^n\left(\frac{\partial^j v_1}{\partial t^j},\frac{\partial^j v_2}{\partial t^j}\right)_{q-j}dt.$$

Простори H_q^n також утворюють шкалу за нижнім індексом.

Нехай $F(k)$ – комплекснозначна функція над $\mathbb{Z}^p$, вектор-оператор $D = (D_1, \ldots, D_p)$ має компоненти $D_j = -i(\partial/\partial x_j)$, $j = 1, \ldots, p$. Під $F(D)$ розумітимемо псевдодиференціальний оператор, який діє за правилом

$$F(D)\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} F(k)\hat{\varphi}(k)e^{i(k,x)},$$

де $\varphi(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \hat{\varphi}(k)e^{i(k,x)} \in H_q$, $q\in\mathbb{R}$.

Операції над псевдодиференціальними операторами $F(D)$ розуміємо як операції над $F(k)$ для $k \in \mathbb{Z}^p$. Також говоримо про певну властивість $F(D)$, якщо цю властивість мають відповідні $F(k)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$.

Функції $\widetilde{k}$ поставимо у відповідність оператор $\widetilde{D}$; очевидно, що $\|\varphi\|_q^2 = (\varphi, \varphi)_q = \left(\widetilde{D}^{2q}\varphi, \varphi\right)_0$ і

$$\|u\|_{q,n}^2 = (u, u)_{q,n} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \sum_{j=0}^{n} \left(\widetilde{D}^{2(q-j)}\frac{\partial^j u}{\partial t^j}, \frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right)_0 dt.$$

Нехай $q \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ – задані числа, u_0 – деяка функція з простору H_q^n. Розглянемо рівняння

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, D\Big)u \equiv \sum_{|s|\le n} a_s \frac{\partial^{s_0}}{\partial t^{s_0}} D_1^{s_1}\ldots D_p^{s_p} u = 0, \tag{1}$$

нелокальні крайові умови

$$l_j u \equiv \nu\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big|_{t=0} + \mu\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big|_{t=T} = \varphi_j(x),\ j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

де $s = (s_0, s_1, \ldots, s_p)$, $|s| = s_0 + s_1 + \cdots + s_p$, a_s, ν, $\mu \in \mathbb{C}$, $\varphi_j \in H_{q-j}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, та додаткову умову

$$\|u - u_0\|_{q,n}^2 \le \varepsilon. \tag{3}$$

Розв'язком задачі (1)–(3) називається функція $u^\varepsilon \in H_q^n$, яка є розв'язком рівняння (1), задовольняє умову (3) та мінімізує на множині розв'язків рівняння (1), що задовольняють умову (3), функціонал $l(u) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \left\|l_j u - \varphi_j\right\|_{q-j-1}^2$, тобто

$$l(u^\varepsilon) = \inf\left\{l(u)\Big| u \in H_q^n,\ L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, D\Big)u = 0,\ \|u - u_0\|_{q,n}^2 \le \varepsilon\right\}.$$

Нормальним розв'язком [210] задачі (1)–(3) називаємо її розв'язок з мінімальною в просторі H_q^n нормою і u_0-нормальним розв'язком

розв'язок задачі (1)–(3), для якого величина $\|u - u_0\|_{q,n}$ є мінімальною.

Окремий випадок задачі (1)–(3) при $u_0 = 0$ досліджувався в [79]. Зауважимо, що функція u_0 є апріорною інформацією про розв'язок задачі (1)–(3), число ε характеризує допустиме відхилення шуканого розв'язку u^ε від функції u_0, а число q означає гладкість розв'язку.

Дослідимо коректність задачі (1)–(3) та побудуємо (у випадку існування) її розв'язок.

Нехай $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_{p(k)}(k)$ – всі різні корені характеристичного рівняння $L(\lambda, k) = 0$ кратностей $n_1(k), \ldots, n_{p(k)}(k)$, тобто

$$L(\lambda, k) = \prod_{i=1}^{p(k)} \left(\lambda - \lambda_i(k)\right)^{n_i(k)},\ k \in \mathbb{Z}^p;$$

оператор $E(t, D)$ визначається вектор-функцією

$$E(t,k) = \big(e^{\lambda_1(k)t}, te^{\lambda_1(k)t}, \ldots, t^{n_1(k)-1}e^{\lambda_1(k)t}, e^{\lambda_2(k)t}, te^{\lambda_2(k)t}, \ldots,$$
$$t^{n_2(k)-1}e^{\lambda_2(k)t}, \ldots, e^{\lambda_{p(k)}(k)t}, te^{\lambda_{p(k)}(k)t}, \ldots, t^{n_{p(k)}(k)-1}e^{\lambda_{p(k)}(k)t}\big).$$

Тоді довільний розв'язок $u(t,x)$ рівняння (1) і його похідні зображаються такою формулою:

$$\partial^\alpha u(t,x)/\partial t^\alpha = E^{(\alpha)}(t, D)C(x),\ \alpha = 0, 1, \ldots, n, \tag{4}$$

де $C(x) = \mathrm{col}(C_1(x), \ldots, C_n(x))$, $C_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, – періодичні функції. Позначимо тепер через $l\{C\}$ нев'язку $l(u)$, а через $\mathcal{U}\{C\}$ квадрат норми $\|u - u_0\|_{q,n}^2$ для розв'язку (4). Тоді для цього розв'язку

$$l\{C\} = \left(B_1(D)C, C\right)_0 - 2\mathrm{Re}\left(b_1, C\right)_0 + l\{0\}, \tag{5}$$

$$\mathcal{U}\{C\} = \left(B_2(D)C, C\right)_0 - 2\mathrm{Re}\left(b_2, C\right)_0 + \mathcal{U}\{0\}, \tag{6}$$

де

$$B_1(D) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \widetilde{D}^{2(q-\alpha-1)} l_\alpha E^H(\cdot, D) l_\alpha E(\cdot, D);$$

$$B_2(D) = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} \widetilde{D}^{2(q-\alpha)} E^{(\alpha)H}(\tau, D)E^{(\alpha)}(\tau, D)\, d\tau;$$

$$b_1(x) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \widetilde{D}^{2(q-\alpha-1)} l_\alpha E^H(\cdot, D)\varphi_\alpha(x);$$

$$b_2(x) = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} \widetilde{D}^{2(q-\alpha)} E^{(\alpha)H}(\tau, D)\frac{\partial^\alpha u_0(\tau, x)}{\partial \tau^\alpha}\, d\tau;$$

Re означає дійсну частину; E^H означає ермітово-спряжену матрицю до матриці E ($E^H = \overline{E^T} = (\overline{E})^T$); $l\{0\} = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \|\varphi_j\|^2_{q-j-1}$; $\mathcal{U}\{0\} = \|u_0\|^2_{q,n}$; $l_\alpha E(\cdot, D) = \nu E^{(\alpha)}(0, D) + \mu E^{(\alpha)}(T, D)$.

Квадратні, розміром n, ермітові матриці $B_1(D)$ і $B_2(D)$ відповідно невід'ємно і додатно визначені, оскільки

$$(B_1(D)C, C)_0 = \sum_{j=0}^{n-1} \|l_j u\|^2_{q-j-1} \geq 0, \ (B_2(D)C, C)_0 = \|u\|^2_{q,n} \geq 0,$$

причому остання нерівність стає рівністю тільки при $u = 0$, тобто при $C = 0$. Для матриць $a(D)$ і $b(D)$ введемо відношення порядку $a(D) \geq b(D)$ та $a(D) > b(D)$, якщо матриця $a(D) - b(D)$ відповідно невід'ємно або додатно визначена.

Отже, розв'язок задачі (1)–(3) має вигляд

$$u^\varepsilon = E(t, D)C_\varepsilon(x),$$

де вектор-функція C_ε – розв'язок задачі

$$l\{C_\varepsilon\} = \inf\left\{l\{C\} \middle| E(t, D)C \in H^n_q, \ \mathcal{U}\{C\} \leq \varepsilon\right\}.$$

Ця задача є задачею мінімізації в соболевському просторі. Відомо, що вона опукла і при $\varepsilon > \varepsilon_0$, де ε_0 визначається нижче, задовольняє умову Слейтера [210]. Запишемо для задачі функцію Лагранжа $\mathcal{L}_\omega\{C\} = l\{C\} + \omega(\mathcal{U}\{C\} - \varepsilon)$, де $\omega \geq 0$ – множник Лагранжа, і знайдемо сідлову точку цієї функції [210]:

$$\mathcal{L}_\omega\{C\} = \big(B(\omega, D)C, C\big)_0 - 2\mathrm{Re}\,\big(b(\omega, \cdot), C\big)_0 + l\{0\} + \omega\big(\mathcal{U}\{0\} - \varepsilon\big). \quad (7)$$

Тут, згідно із рівностями (5) і (6),

$$B(\omega, D) = B_1(D) + \omega B_2(D), \ b(\omega, x) = b_1(x) + \omega b_2(x).$$

Умови, що визначають $C_\varepsilon(x)$, дає теорема Куна–Такера [210]. Вони мають такий вигляд: знайти таку вектор-функцію $C(x)$ і дійсне число $\omega \geq 0$, для яких

$$\mathcal{L}_\omega\{C\} \sim \min_C, \ E(t, D)C \in H^n_q, \ \omega \geq 0, \quad (8)$$

$$\omega(\mathcal{U}\{C\} - \varepsilon) = 0, \ \mathcal{U}\{C\} \leq \varepsilon. \quad (9)$$

Розв'яжемо задачу (8).

Лема 1. *Для $\omega > 0$ функція $\mathcal{L}_\omega\{C\}$ досягає мінімального значення*

$$\mathcal{L}_{\omega,\min} \leq \sum_{\alpha=0}^{n-1} \|\varphi_\alpha\|^2_{q-\alpha-1} + \omega\big(\|u_0\|^2_{q,n} - \varepsilon\big)$$

при

$$C(x) = C(\omega, x) = B^{-1}(\omega, D)b(\omega, x). \quad (10)$$

Д о в е д е н н я. Мінімізуємо функцію Лагранжа $\mathcal{L}_\omega\{C\}$, зобразивши її у вигляді $\mathcal{L}_\omega\{C\} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \widehat{\mathcal{L}}_{\omega k}\{\widehat{C}_k\} - \omega\varepsilon$, причому

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\omega k}\{\widehat{C}_k\} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \tilde{k}^{2(q-\alpha-1)} \|l_\alpha \widehat{u}(t, k) - \widehat{\varphi}_\alpha(k)\|^2 +$$

$$+ \omega \int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} \tilde{k}^{2(q-\alpha)} \|\widehat{u}^{(\alpha)}(t, k) - \widehat{u}_0^{(\alpha)}(t, k)\|^2 dt/T,$$

де $\widehat{u}(t, k) = E(t, k)\widehat{C}_k$; $\widehat{u}_0(t, k)$, $\widehat{\varphi}_\alpha(k)$, $\widehat{C}_k$ – коефіцієнти Фур'є вектор-функцій $u(t, x)$, $u_0(t, x)$, $\varphi_\alpha(x)$, $C(x)$ відповідно; $\|\cdot\|$ – евклідова норма векторів. Використовуючи для $\omega > 0$ формулу виділення повного квадрата

$$(BC, C)_0 - 2\mathrm{Re}\,(b, C)_0 = (B(C - B^{-1}b), C - B^{-1}b)_0 - (B^{-1}b, b)_0,$$

із формули (7) для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ маємо

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\omega k}\{\widehat{C}_k\} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \tilde{k}^{2(q-\alpha-1)} \big(\|l_\alpha(\widehat{u}(t, k) - \widehat{u}_\omega(t, k))\|^2 + \|\widehat{\varphi}_\alpha(k)\|^2 -$$

$$- \|l_\alpha u_\omega(t, k)\|^2\big) + \frac{\omega}{T} \int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} \tilde{k}^{2(q-\alpha)} \big(\|\widehat{u}^{(\alpha)}(t, k) - \widehat{u}_\omega^{(\alpha)}(t, k)\|^2 +$$

$$+ \|\widehat{u}_0^{(\alpha)}(t, k)\|^2 - \|\widehat{u}_\omega^{(\alpha)}(t, k)\|^2\big) dt,$$

де $\widehat{u}_\omega(t, k) = E(t, k)\widehat{C}(\omega, k)$,

$$u_\omega \equiv u_\omega(t, x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widehat{u}_\omega(t, k) e^{i(k,x)} = E(t, D)C(\omega, x). \quad (11)$$

Функція $\widehat{\mathcal{L}}_{\omega k}\{\widehat{C}_k\}$ досягає мінімального значення

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\omega k,\min} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \tilde{k}^{2(q-\alpha-1)} \big(\|\widehat{\varphi}_\alpha(k)\|^2 - \|l_\alpha u_\omega(t, k)\|^2\big) +$$

$$+ \frac{\omega}{T} \int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} \tilde{k}^{2(q-\alpha)} \big(\|\widehat{u}_0^{(\alpha)}(t, k)\|^2 - \|\widehat{u}_\omega^{(\alpha)}(t, k)\|^2\big) dt,$$

при $\widehat{u}(t, k) = \widehat{u}_\omega(t, k)$, тобто при $\widehat{C}_k = \widehat{C}(\omega, k)$, яке оцінюється зверху:

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\omega k,\min} \leq \sum_{\alpha=0}^{n-1} \tilde{k}^{2(q-\alpha-1)} \|\widehat{\varphi}_\alpha(k)\|^2 + \frac{\omega}{T} \int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} \tilde{k}^{2(q-\alpha)} \|\widehat{u}_0^{(\alpha)}(t, k)\|^2 dt.$$

Підсумуємо ці нерівності на множині $\mathbb{Z}^p$. Отримаємо, що функція $\mathcal{L}_\omega\{C\}$ має мінімальне значення $\mathcal{L}_{\omega,\min} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \|l_\alpha u_\omega - \varphi_\alpha\|^2_{q-\alpha-1} +$ $+ \omega\big(\|u_\omega - u_0\|^2_{q,n} - \varepsilon\big) \le \sum_{\alpha=0}^{n-1} \|\varphi_\alpha\|^2_{q-\alpha-1} + \omega\big(\|u_0\|^2_{q,n} - \varepsilon\big) < \infty$ при $u = u_\omega$, тобто при $C(x) = C(\omega, x)$.

Покажемо, що $u_\omega \in H^n_q$ і $l_j u_\omega \in H_{q-j-1}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Дійсно, оскільки

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} \widetilde{k}^{2(q-\alpha)} \|\widehat{u}^{(\alpha)}_\omega(t,k)\|^2 dt \le$$

$$\le \frac{2}{T}\int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} \widetilde{k}^{2(q-\alpha)} \big(\|\widehat{u}^{(\alpha)}_\omega(t,k) - \widehat{u}^{(\alpha)}_0(t,k)\|^2 + \|\widehat{u}_0(t,k)\|^2\big) dt \le$$

$$\le \frac{2}{\omega}\widehat{\mathcal{L}}_{\omega k,\min} + \frac{2}{T}\int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} \widetilde{k}^{2(q-\alpha)} \|\widehat{u}^{(\alpha)}_0(t,k)\|^2) dt \le$$

$$\le \frac{2}{\omega}\sum_{\alpha=0}^{n-1} \widetilde{k}^{2(q-\alpha-1)} \|\widehat{\varphi}_\alpha(k)\|^2 + \frac{4}{T}\int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} \widetilde{k}^{2(q-\alpha)} \|\widehat{u}^{(\alpha)}_0(t,k)\|^2 dt,$$

то ряд $\|u_\omega\|^2_{q,n} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} \widetilde{k}^{2(q-\alpha)} \|\widehat{u}^{(\alpha)}_\omega(t,k)\|^2 dt/T$ мажорується сумою двох збіжних рядів

$$\frac{2}{\omega}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\sum_{\alpha=0}^{n-1} \widetilde{k}^{2(q-\alpha-1)} \|\widehat{\varphi}_\alpha(k)\|^2 = \frac{2}{\omega}\sum_{\alpha=0}^{n-1} \|\varphi_\alpha\|^2_{q-\alpha-1}$$

та

$$\frac{4}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} \widetilde{k}^{2(q-\alpha)} \|\widehat{u}^{(\alpha)}_0(t,k)\|^2 dt = 4\|u_0\|^2_{q,n}.$$

Отже, $u_\omega \in H^n_q$. Аналогічно

$$\widetilde{k}^{2(q-j-1)}\|l_j\widehat{u}_\omega(t,k)\|^2 \le 2\widetilde{k}^{2(q-j-1)}\big(\|l_j\widehat{u}_\omega(t,k) - \widehat{\varphi}_j(k)\|^2 +$$
$$+ \|\widehat{\varphi}_j(k)\|^2\big) \le 2\widehat{\mathcal{L}}_{\omega k,\min} + 2\widetilde{k}^{2(q-j-1)}\|\widehat{\varphi}_j(k)\|^2 \le$$
$$\le 4\sum_{\alpha=0}^{n-1} \widetilde{k}^{2(q-\alpha-1)} \|\widehat{\varphi}_\alpha(k)\|^2 + \frac{2\omega}{T}\int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} \widetilde{k}^{2(q-\alpha)} \|\widehat{u}^{(\alpha)}_0(t,k)\|^2 dt,$$

тобто ряд $\|l_j u_\omega\|^2_{q-j-1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2(q-j-1)}\|l_j\widehat{u}_\omega(t,k)\|^2$ мажорується сумою двох збіжних рядів

$$4\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\sum_{\alpha=0}^{n-1} \widetilde{k}^{2(q-\alpha-1)} \|\widehat{\varphi}_\alpha(k)\|^2 = 4\sum_{\alpha=0}^{n-1} \|\varphi_\alpha\|^2_{q-\alpha-1}$$

та

$$\frac{2\omega}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} \widetilde{k}^{2(q-\alpha)} \|\widehat{u}^{(\alpha)}_0(t,k)\|^2 dt = 2\omega\|u_0\|^2_{q,n},$$

а значить, $l_j u_\omega \in H_{q-j-1}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Лему доведено і задачу (8) розв'язано. ∎

Виберемо тепер множник Лагранжа $\omega \ge 0$ таким, щоб справджувалися умови (9). Для цього дослідимо поведінку функції $\mathcal{U}_\omega = \mathcal{U}\{C(\omega, x)\}$ на півосі $\omega > 0$.

Введемо позначення:

$$Z = \operatorname{diag}(\widetilde{D}^{q-1}, \widetilde{D}^{q-2}, \dots, \widetilde{D}^{q-n}),\ \psi_\alpha(x) = \widetilde{D}^{q-\alpha-1}(\varphi_\alpha(x) - l_\alpha P u_0),$$
$$\psi(x) = \operatorname{col}(\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_{n-1}(x)),$$
$$\varphi(x) = \operatorname{col}(\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)),$$
$$Pu = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} E(t,D)B_2^{-1}(D)E^{(\alpha)H}(\tau,D)\widetilde{D}^{2(q-\alpha)}\frac{\partial^\alpha u(\tau,x)}{\partial\tau^\alpha}\,d\tau,$$

$$f_\alpha(D) = \widetilde{D}^{q-\alpha-1} l_\alpha E(\cdot,D)B_2^{-1/2}(D),\ F(\omega,D) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} f^H_\alpha(D) f_\alpha(D) +$$
$$+ \omega I_n = F^H(D)F(D) + \omega I_n,\ F(D) = \operatorname{col}\big(f_0(D), f_1(D), \dots, f_{n-1}(D)\big).$$

Лема 2. *Функція $\mathcal{U}_\omega$ - невід'ємна на півосі $\omega > 0$, строго монотонно спадає (за винятком випадку $\psi_\alpha = 0$, $\alpha = 0, 1, \dots, n-1$, коли $\mathcal{U}_\omega$ не залежить від ω) і задовольняє нерівності $\varepsilon_0 \le \mathcal{U}_\omega \le \varepsilon_1$, де $\varepsilon_0 \ge 0$ і $\varepsilon_1 \le \infty$ визначаються рівностями*

$$\varepsilon_0 = \lim_{\omega\to+\infty} \mathcal{U}_\omega = \mathcal{U}_{+\infty} = \|(I-P)u_0\|^2_{q,n}, \tag{12}$$

$$\varepsilon_1 = \lim_{\omega\to+0} \mathcal{U}_\omega = \mathcal{U}_{+0} = \|g_0\|^2_{q,n} + \varepsilon_0, \tag{13}$$

причому

$$g_0 = E(t,D)B_2^{-1/2}(D)F^+(D)\psi(x), \tag{14}$$

$F^+(D)$ - псевдообернена матриця до матриці $F(D)$ [31, 210].

Доведення. Із формули (11) випливає, що для функції $g_\omega = u_\omega - Pu_0$ справедливе таке зображення:

$$g_\omega = E(t, D)B_2^{-1/2}(D)F^{-1}(\omega, D)F^H(D)\psi(x). \tag{15}$$

Оператор P є проектором в просторі H_q^n на підпростір розв'язків рівняння (1). Дійсно, $P^2 = P$ і Pu є розв'язком рівняння (1), а також P – самоспряжений оператор, оскільки

$$(u, Pv)_{q,n} = (Pu, v)_{q,n} = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \sum_{\alpha,\beta=0}^{n} \Big(E^{(\alpha)H}(t, D)\widetilde{D}^{2(q-\alpha)} \times$$
$$\times \frac{\partial^\alpha u(t,x)}{\partial t^\alpha}, B_2^{-1}(D)E^{(\beta)H}(\tau, D)\widetilde{D}^{2(q-\beta)}\frac{\partial^\beta v(\tau, x)}{\partial\tau^\beta}\Big)_0 \, dtd\tau.$$

Отже, оператор $I - P$ є проектором на ортогональне доповнення підпростору розв'язків рівняння (1), звідки маємо

$$U_\omega = \|u_\omega - u_0\|_{q,n}^2 = \|g_\omega\|_{q,n}^2 + \|(I-P)u_0\|_{q,n}^2 = \|g_\omega\|_{q,n}^2 + \varepsilon_0. \tag{16}$$

При $\varphi_\alpha(x) = l_\alpha Pu_0$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n-1$, тобто $\psi_\alpha = 0$, функція $g_\omega = 0$ для всіх $\omega > 0$ і $u_\omega = Pu_0$ та $U_\omega = \|(I-P)u_0\|_{q,n}^2 = \varepsilon_0$ не залежать від ω. В протилежному випадку ($\psi_\alpha \neq 0$) із (15) та нерівності $F^{-1}(\omega_2, D) < F^{-1}(\omega_1, D)$ при $\omega_2 > \omega_1$ випливає, що $\|g_{\omega_2}\|_{q,n}^2 < \|g_{\omega_1}\|_{q,n}^2$, або $U_{\omega_2} < U_{\omega_1}$. Монотонність функції U_ω доведено.

Функція $g_\omega \to 0$ при $\omega \to +\infty$, бо

$$\|g_\omega\|_{q,n}^2 < \omega^{-1}\sum_{\alpha=0}^{n-1}\|\varphi_\alpha - l_\alpha Pu_0\|_{q-\alpha-1}^2 \to 0$$

при $\omega \to +\infty$. Тепер із формули (16) отримуємо (12).

При $\omega \to +0$, за означенням псевдооберненого оператора [210], маємо

$$F^{-1}(\omega, D)F^H(D) \to F^+(D),$$

тобто $g_\omega \to g_0$, $u_\omega \to g_0 + Pu_0$, що дає формули (13), (14). При цьому $\|g_0\|_{q,n}$ може бути скінченною або нескінченною залежно від функцій $\varphi_\alpha(x)$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n-1$.

Лему доведено. ∎

Із лем 1 і 2 випливає, що не для всіх значень $\varepsilon > 0$ і $u_0 \in H_q^n$ справджуються умови (9), тобто не завжди існує розв'язок задачі (1)–(3). Ці дані повинні бути пов'язані між собою залежністю, що забезпечує виконання умови Слейтера. Зокрема, при фіксованій функції $u_0 \in H_q^n$ розв'язок задачі (1)–(3) існує, а u_0-нормальний розв'язок – єдиний, тільки якщо число ε вибрати не досить малим.

Для формулювання і доведення теореми існування та єдиності розв'язку задачі (1)–(3) запишемо формули

$$u^{\varepsilon_0} = Pu_0, \; u^\varepsilon = Pu_0 + g_{\omega_\varepsilon}, \; u^{\varepsilon_1} = Pu_0 + g_0, \tag{17}$$

$$\|u^{\varepsilon_0} - u_0\|_{q,n}^2 = \varepsilon_0, \|u^\varepsilon - u_0\|_{q,n}^2 = \varepsilon_0 + \|g_{\omega_\varepsilon}\|_{q,n}^2 = \varepsilon, \|u^{\varepsilon_1} - u_0\|_{q,n}^2 = \varepsilon_1, \tag{18}$$

$$l(u^\varepsilon) = \sum_{j=0}^{n-1}\Big(\|\varphi_j\|_{q-j-1}^2 - \|l_j u^+\|_{q-j-1}^2\Big) +$$
$$+\sum_{j=0}^{n-1}\begin{cases} \|l_j u_1\|_{q-j-1}^2, & \text{коли} \quad \varepsilon = \varepsilon_0, \\ \omega_\varepsilon^2\|l_j u_{1\varepsilon}\|_{q-j-1}^2, & \text{коли} \quad \varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_1, \\ 0, & \text{коли} \quad \varepsilon = \varepsilon_1, \end{cases} \tag{19}$$

$$u^+ = E(t, D)B_2^{-1/2}(D)F^+(D)Z\varphi(x),$$
$$u_1 = E(t, D)B_2^{-1/2}(D)\big(B_2^{-1/2}(D)b_2(x) - F^+(D)Z\varphi(x)\big),$$
$$u_{1\varepsilon} = E(t, D)B_2^{-1/2}(D)F^{-1}(\omega_\varepsilon, D)\big(B_2^{-1/2}(D)b_2(x) - F^+(D)Z\varphi(x)\big).$$

Теорема 1. *Якщо $\varepsilon < \varepsilon_0$, то задача (1)–(3) не має розв'язку.*

Якщо $\varepsilon_0 \le \varepsilon \le \varepsilon_1$, то розв'язок u^ε задачі (1)–(3) існує, єдиний і має вигляд (17), при цьому справедливі рівності (18), (19), де ω_ε – розв'язок алгебричного рівняння $U_\omega = \varepsilon$.

Якщо $\varepsilon > \varepsilon_1$, то задача (1)–(3) має розв'язки

$$u^\varepsilon = u^{\varepsilon_1} + v, \tag{20}$$

де v ($\|v\|_{q,n}^2 \le \varepsilon - \varepsilon_1$) – розв'язок однорідної задачі (1), (2), тобто задачі $L(\partial/\partial t, D)v = 0$, $l_\alpha v = 0$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n-1$. Серед розв'язків (20) існує єдиний u_0-нормальний розв'язок $u^\varepsilon = u^{\varepsilon_1}$, $\|u^\varepsilon - u_0\|_{q,n}^2 = \varepsilon_1$. Якщо оператор $F(D)$ має обернений, то розв'язок u^ε задачі (1)–(3) – єдиний, є розв'язком задачі (1), (2) і має вигляд

$$u^\varepsilon = E(t, D)B_2^{-1/2}(D)F^{-1}(D)Z\varphi(x), \; \|u^\varepsilon - u_0\|_{q,n}^2 = \varepsilon_1. \tag{21}$$

Зауваження 1. Розв'язки однорідної задачі (1), (2) мають вигляд

$$v = E(t, D)B_2^{-1/2}(D)\big(I - F^+(D)F(D)\big)q(x),$$

де $q(x)$ – довільні періодичні вектор-функції.

Доведення. Нехай $\varepsilon < \varepsilon_0 = \|(I-P)u_0\|_{q,n}^2$. Тоді жоден елемент із кулі $\|u - u_0\|_{q,n}^2 \le \varepsilon$ не є розв'язком рівняння (1), оскільки оператор P є проектором в просторі H_q^n на підпростір розв'язків рівняння (1) і розмір кулі $\sqrt{\varepsilon}$ – менший, ніж відстань $\|(I-P)u_0\|_{q,n}$ до цього простору елемента u_0. Задача (1)–(3) розв'язків не має.

Нехай $\varepsilon_0 \le \varepsilon \le \varepsilon_1$; тоді рівняння $\mathcal{U}_\omega = \varepsilon$ має згідно з лемою 2 єдиний розв'язок ω_ε, причому $\omega_\varepsilon = 0$ при $\varepsilon = \varepsilon_1$, $\omega_\varepsilon = +\infty$ при $\varepsilon = \varepsilon_0$; $0 < \omega_\varepsilon < +\infty$ при $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ і $u^\varepsilon = Pu_0 + g_{\omega_\varepsilon}$, де g_ω визначається формулою (15), $g_\omega \to 0$ при $\omega \to +\infty$, $g_\omega \to g_0$ при $\omega \to +0$. Звідси випливають формули (17).

Оскільки $u^\varepsilon - u_0 = g_{\omega_\varepsilon} + (P - I)u_0$ і доданки ортогональні в просторі H_q^n, то з формул (12), (13) отримаємо рівності (18). Безпосередньо перевіряється справедливість такої рівності:

$$\sum_{j=0}^{n-1} ||l_j u - \varphi_j||_{q-j-1}^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \left(||l_j(u-u^+)||_{q-j-1}^2 + ||\varphi_j||_{q-j-1}^2 - ||l_j u^+||_{q-j-1}^2 \right).$$

Підставимо в цю рівність функцію $u = u^\varepsilon$. Отримаємо формулу (19), оскільки $u^{\varepsilon_0} - u^+ = u_1$, $u^\varepsilon - u^+ = \omega_\varepsilon u_{1\varepsilon}$ і $l_j(u^{\varepsilon_1} - u^+) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Нехай тепер $\varepsilon > \varepsilon_1$; тоді рівняння $\mathcal{U}_\omega = \varepsilon$ не має розв'язку. Умови (9) виконуються тільки при $\omega = 0$, тобто треба розв'язати задачу мінімізації $l(u)$ в просторі H_q^n. Враховуючи, що

$$F(D)(I - F^+(D)F(D)) = (I - F(D)F^+(D))F(D) = 0,$$

отримуємо оцінку знизу функціонала

$$\begin{aligned} l\{C\} &= ||F(D)B_2^{1/2}(D)C(x) - Z\varphi(x)||_0^2 = ||F(D)B_2^{1/2}(D)(C(x) - \\ &- B_2^{-1/2}(D)F^+(D)Z\varphi(x)) + (F(D)F^+(D) - I)Z\varphi(x)||_0^2 = \\ &= ||F(D)B_2^{1/2}(D)(C(x) - B_2^{-1/2}(D)F^+(D)Z\varphi(x))||_0^2 + \\ &+ ||(F(D)F^+(D) - I)Z\varphi(x)||_0^2 \ge ||(F(D)F^+(D) - I)Z\varphi(x)||_0^2 \end{aligned}$$

та рівності

$$\mathrm{col}(l_0 v, l_1 v, \ldots, l_{n-1} v) = Z^{-1}F(D)(I - F^+(D)F(D))q(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{col}(l_0 g_0 + l_0 Pu_0, l_1 g_0 + l_1 Pu_0, \ldots, l_{n-1} g_0 + l_{n-1} Pu_0) = \\ &= Z^{-1}F(D)F^+(D)Z\varphi(x) + Z^{-1}(I - F(D)F^+(D))F(D)B_2^{-1/2}(D) \times \\ &\times \int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} E^{(\alpha)H}(\tau, D)\widetilde{D}^{2(q-\alpha)} \frac{\partial^\alpha u_0(\tau, x)}{T\partial\tau^\alpha}\, d\tau = Z^{-1}F(D)F^+(D)Z\varphi(x). \end{aligned}$$

Звідси маємо, що функції $u^\varepsilon = g_0 + Pu_0 + v$ мінімізують функціонал $l(u)$, оскільки $l(u^\varepsilon)$ досягає мінімального значення

$$\begin{aligned} l(u^\varepsilon) &= ||Z\big(\mathrm{col}(l_0 g_0 + l_0 Pu_0, l_1 g_0 + l_1 Pu_0, \ldots, l_{n-1} g_0 + l_{n-1} Pu_0) + \\ &+ \mathrm{col}(l_0 v, l_1 v, \ldots, l_{n-1} v)\big) - \varphi(x)||_0^2 = ||(F(D)F^+(D) - I)Z\varphi(x)||_0^2, \end{aligned}$$

і $||u^\varepsilon - u_0||_{q,n}^2 = ||u^{\varepsilon_1} - u_0 + v||_{q,n}^2 = \varepsilon_1 + ||v||_{q,n}^2$. При $v = 0$ норма $||u^\varepsilon - u_0||_{q,n}^2$ досягає єдиного мінімуму ε_1, а отже, $u = u^{\varepsilon_1}$ – єдиний u_0-нормальний розв'язок. При $||v||_{q,n}^2 \le \varepsilon - \varepsilon_1$ отримаємо, що $||u^\varepsilon - u_0||_{q,n}^2 \le \varepsilon$.

Якщо $\varepsilon \ge \varepsilon_1$ і існує обернена матриця $F^{-1}(D)$, то, очевидно, псевдообернена і обернена матриці до матриці $F(D)$ збігаються, а отже, функції v в (20) дорівнюють нулеві. Значить, розв'язок u^ε задачі (1)–(3) – єдиний, зображається формулою (21) і є звичайним розв'язком задачі (1), (2), оскільки $l(u^\varepsilon) = 0$.

Теорему доведено. ■

Таким чином, розв'язок задачі (1)–(3) в кулі радіуса $\sqrt{\varepsilon}$ простору H_q^n з центром u_0 існує і єдиний, якщо $\varepsilon_0 \le \varepsilon \le \varepsilon_1$; u_0-нормальний розв'язок існує і єдиний при $\varepsilon > \varepsilon_1$.

Дослідимо тепер неперервну залежність розв'язку u^ε від правих частин $\varphi_\alpha(x)$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n-1$, умов (2).

Теорема 2. *Нехай $\varepsilon \in (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$. Тоді розв'язок u^ε задачі (1)–(3) неперервно залежить від правих частин умов (2).*

Доведення. Нехай u^ε, u_*^ε – розв'язки задачі (1)–(3) з правими частинами $\varphi_\alpha(x)$ і $\varphi_{*\alpha}(x)$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n-1$, ω_ε і $\omega_{*\varepsilon}$ – відповідні множники Лагранжа, $\psi_{*\alpha}(x) = \widetilde{D}^{q-\alpha-1}(\varphi_{*\alpha}(x) - l_\alpha Pu_0)$. Нехай $g_{*\omega}$ визначається формулою (15), в якій функція $\psi_\alpha(x)$ замінена на функцію $\psi_{*\alpha}(x)$ і

$$v_\omega = g_\omega - g_{*\omega} = E(t, D)B_2^{-1/2}(D)F^{-1}(\omega, D)F^H(D)Z(\varphi(x) - \varphi_*(x)), \tag{22}$$

де

$$\varphi_*(x) = \mathrm{col}(\varphi_{*0}(x), \varphi_{*1}(x), \ldots, \varphi_{*n-1}(x)).$$

За тотожністю Гільберта для резольвент отримаємо

$$g_{*\omega} - g_{*\omega_*} = (\omega_* - \omega)g_{\omega,\omega_*}, \tag{23}$$

де

$$g_{\omega,\omega_*} = E(t, D)B_2^{-1/2}(D)F^{-1}(\omega, D)F^{-1}(\omega_*, D)F^H(D)\psi_*(x),$$

$$\psi_*(x) = \mathrm{col}(\psi_{*0}(x), \psi_{*1}(x), \ldots, \psi_{*n-1}(x)).$$

Справедливі [210] такі оцінки:

$$||v_\omega||_{q,n}^2 < \omega^{-1} \sum_{\alpha=0}^{n-1} ||\varphi_\alpha - \varphi_{*\alpha}||_{q-\alpha-1}^2, \quad ||g_{\omega,\omega_*}||_{q,n} < \omega^{-1}||g_{*\omega_*}||_{q,n}. \tag{24}$$

Нехай $\overline{\omega} = \omega_\varepsilon + \widetilde{\omega}$, $\underline{\omega} = \omega_\varepsilon - \widetilde{\omega}$, $\delta > 0$ – довільне достатньо мале число,

$$\widetilde{\omega} = \frac{\omega_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon - \varepsilon_0}} \frac{\delta}{2}; \tag{25}$$

тоді $\overline{\varepsilon} \equiv ||u_{\underline{\omega}} - u_0||^2_{q,n} > \varepsilon$ і $\underline{\varepsilon} \equiv ||u_{\overline{\omega}} - u_0||^2_{q,n} < \varepsilon$. Обчислимо норму

$$||u_{*\underline{\omega}} - u_0||^2_{q,n} = ||g_{*\underline{\omega}}||^2_{q,n} + \varepsilon_0 = ||g_{\underline{\omega}} - v_{\underline{\omega}}||^2_{q,n} + \varepsilon_0 \geq (||g_{\underline{\omega}}||_{q,n} -$$

$$-||v_{\underline{\omega}}||_{q,n})^2 + \varepsilon_0 > \left(\sqrt{\overline{\varepsilon}-\varepsilon_0} - (\underline{\omega}^{-1}\sum_{\alpha=0}^{n-1}||\varphi_\alpha - \varphi_{*\alpha}||^2_{q-\alpha-1})^{1/2}\right)^2 + \varepsilon_0$$

і норму

$$||u_{*\overline{\omega}} - u_0||^2_{q,n} = ||g_{*\overline{\omega}}||^2_{q,n} + \varepsilon_0 = (||g_{\overline{\omega}}||_{q,n} + ||v_{\overline{\omega}}||_{q,n})^2 + \varepsilon_0 <$$

$$< \left(\sqrt{\underline{\varepsilon} - \varepsilon_0} + (\overline{\omega}^{-1}\sum_{\alpha=0}^{n-1}||\varphi_\alpha - \varphi_{*\alpha}||^2_{q-\alpha-1})^{1/2}\right)^2 + \varepsilon_0.$$

Виберемо функції $\varphi_{*\alpha}(x)$ так, щоб виконувалась нерівність

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1}||\varphi_\alpha - \varphi_{*\alpha}||^2_{q-\alpha-1} \leq \min\left(\underline{\omega}(\sqrt{\overline{\varepsilon}-\varepsilon_0} - \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_0})^2,\right.$$

$$\left.\overline{\omega}(\sqrt{\varepsilon-\varepsilon_0} - \sqrt{\underline{\varepsilon} - \varepsilon_0})^2, \omega_\varepsilon\delta^2/4\right); \tag{26}$$

тоді $||u_{*\overline{\omega}} - u_0||^2_{q,n} < \varepsilon < ||u_{*\underline{\omega}} - u_0||^2_{q,n}$, а розв'язок u^ε_* при таких $\varphi_{*\alpha}$ існує, єдиний і $u^\varepsilon_* = u_{*\omega_{*\varepsilon}}$, де $\underline{\omega} < \omega_{*\varepsilon} < \overline{\omega}$, тобто $|\omega_{*\varepsilon} - \omega_\varepsilon| < \widetilde{\omega}$.

Використовуючи формули (16), (22)–(24), оцінюємо норму різниці розв'язків u^ε і u^ε_*:

$$||u^\varepsilon - u^\varepsilon_*||_{q,n} = ||g_{\omega_\varepsilon} - g_{*\omega_{*\varepsilon}}||_{q,n} \leq ||v_{\omega_\varepsilon}||_{q,n} + ||g_{*\omega_\varepsilon} - g_{*\omega_{*\varepsilon}}||_{q,n} <$$

$$< (\omega_\varepsilon^{-1}\sum_{\alpha=0}^{n-1}||\varphi_\alpha - \varphi_{*\alpha}||^2_{q-\alpha-1})^{1/2} + \omega_\varepsilon^{-1}|\omega_{*\varepsilon} - \omega_\varepsilon| \cdot ||g_{*\omega_{*\varepsilon}}||_{q,n} <$$

$$< (\omega_\varepsilon^{-1}\sum_{\alpha=0}^{n-1}||\varphi_\alpha - \varphi_{*\alpha}||^2_{q-\alpha-1})^{1/2} + \widetilde{\omega}\omega_\varepsilon^{-1}\sqrt{\varepsilon - \varepsilon_0}.$$

Враховуючи (25), (26), одержуємо

$$||u^\varepsilon - u^\varepsilon_*||_{q,n} < \sqrt{\omega_\varepsilon^{-1}\frac{\omega_\varepsilon\delta^2}{4}} + \frac{\omega_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon-\varepsilon_0}}\frac{\delta}{2}\omega_\varepsilon^{-1}\sqrt{\varepsilon-\varepsilon_0} = \delta.$$

Отже, для довільного числа $\delta > 0$ з того, що функції $\varphi_\alpha - \varphi_{*\alpha}$ задовольняють умову (26), випливає, що розв'язки u^ε і u^ε_* відповідних задач відрізняються між собою в просторі H^n_q не більше, ніж на δ, що і треба було довести. ∎

Розділ V

Нелокальні задачі для гіперболічних систем рівнянь першого порядку

Методом характеристик досліджуються нелокальні як за часовою, так і за просторовою змінними задачі для майже лінійних і квазілінійних гіперболічних рівнянь і систем першого порядку з двома незалежними змінними. Вивчаються класичні, класичні розривні та узагальнені розв'язки, а також питання локальної та глобальної розв'язності. Метод характеристик дозволив вказати умови, за яких проблема малих знаменників зникає.

§ 20. Коректна постановка задач із використанням методу характеристик

Аргументацією результатів подальших параграфів служитимуть такі приклади.

Приклад 1. В області $\Pi = \{(x,t)|0 < x < l, 0 < t < T\}$ розглянемо рівняння

$$u_t + u_x = Lu \tag{1}$$

з нелокальними умовами

$$u(x,0) = \alpha(x)u(x,T) + H(x), \tag{2}$$

$$u(0,t) = \beta(t)u(l,t) + h(t), \tag{3}$$

де $\alpha(x)$, $\beta(t)$, $H(x)$, $h(t)$ – відомі неперервно диференційовні функції; $\alpha(x) \neq 0$ для всіх $x \in [0, l]$; $\beta(t) \neq 0$ для всіх $t \in [0, T]$. Мова йтиме про існування та єдиність класичних розв'язків даної задачі. Умову погодження 0-го порядку між (2) і (3) запишемо у вигляді

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A}, \tag{4}$$

де A – матриця, складена з коефіцієнтів системи

$$\begin{aligned} u(0,0) - \alpha(0)u(0,T) &= H(0), \\ u(l,0) - \alpha(l)u(l,T) &= H(l), \\ u(0,0) - \beta(0)u(l,0) &= h(0), \\ u(0,T) - \beta(T)u(l,T) &= h(T) \end{aligned} \tag{5}$$

відносно $u(0,0), u(0,T), u(l,0), u(l,T)$; $\bar{A}$ – розширена матриця цієї системи. Крім того, вимагаємо, щоб

$$\det A = 0. \tag{6}$$

Неважко переконатись, що зі сукупності умов (4), (6) та умов відокремленості від нуля функцій $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ випливає, що

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 3.$$

Очевидно, що всі характеристики рівняння (1) є прямими вигляду $x - t = c$, де c – довільна константа. Уздовж кожної фіксованої характеристики функція $u(x, t)$ задовольняє рівняння

$$\frac{du}{dt} = Lu.$$

А це означає, що будь-який класичний розв'язок задачі (1)–(3) можна подати у вигляді

$$u(x,t) = \begin{cases} e^{Lx}\mu(t-x), & t \geq x, \\ e^{Lt}\varphi(x-t), & t < x, \end{cases} \tag{7}$$

де $\varphi(x) = u(x, 0)$ і $\mu(t) = u(0, t)$ – неперервно диференційовані функції, що задовольняють умови (2), (3), а також умови погодження 0-го та 1-го порядків:

$$\varphi(0) = \mu(0)$$

та

$$L\mu(0) - \mu'(0) = \varphi'(0).$$

Введемо поняття *траєкторії поширення розв'язку* (ТПР) задачі (1)–(3), що починається в довільній, але фіксованій точці межі області П. Вона складається з характеристик рівняння (1), на яких

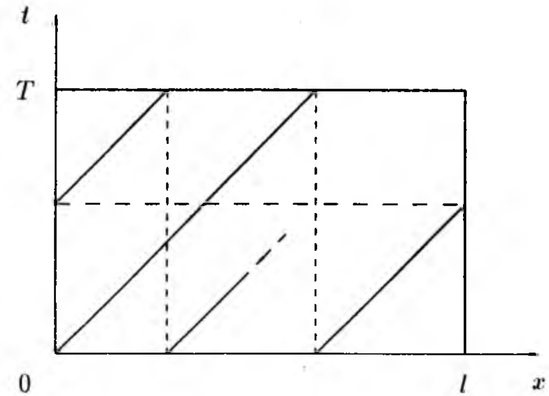

Рис. 1. Траєкторія поширення розв'язку з початком в (0,0)

розв'язок $u(x, t)$ визначається формулою (7); у точках на $\partial\Pi$, де відбувається стрибок з однієї характеристики на іншу, розв'язок $u(x, t)$ визначається згідно з умовами (2), (3) (рис.1). Зазначимо, що поняття ТПР використовуватиметься як основний засіб розгляду більшості задач, що вивчаються в даному розділі.

Розглянемо випадок задачі (1)–(3) за умови, що $l = T$. Підставляючи (7) у (2) і (3), отримуємо

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \beta(t)\alpha(T-t)e^{LT}\mu(t) + \beta(t)e^{Lt}H(T-t) + h(t), \\ \varphi(x) &= \alpha(x)\beta(T-x)e^{LT}\varphi(x) + \alpha(x)e^{Lx}h(T-x) + H(x). \end{aligned} \tag{8}$$

Ці співвідношення вказують на те, що:

— усі ТПР задачі (1)–(3) є замкненими;

— для однозначної розв'язності задачі (1)–(3) необхідно, щоб виконувалась умова

$$\alpha(x)\beta(T-x)e^{LT} \neq 1, \quad x \in [0, T]. \tag{9}$$

Умова (9) свідчить про те, що ті набори вихідних даних $\alpha(x)$, $\beta(t)$, L і T, які задовольняють рівність $\alpha(x)\beta(T-x)e^{LT} = 1$, не можуть використовуватись для коректної постановки задачі.

Враховуючи щойно отримані необхідні умови, бачимо, що формули (8) гарантують існування єдиної неперервної функції $u(x, t)$ на межі $t = 0$ і $x = 0$ області П і дають її в явному вигляді. Зазначимо, що точка (0,0) при цьому вимагає особливої уваги, тому що значення розв'язку в цій точці має відношення до взаємозв'язку значень $u(0,0), u(0,T), u(l,0)$ і $u(l,T)$. Цей взаємозв'язок фігурує в умовах (4) і (6), які, очевидно, є необхідними для того, щоб однозначно відновити значення шуканої функції $u(x,t)$ у всіх кутових точках і які вказують на те, що система (5) є сумісною, але не визначеною. Довизначимо систему (5), враховуючи те, що розв'язок задачі поширюється вздовж характеристик рівняння (1). Шляхом його побудови вздовж ТПР (з початком у точці (0,0)) за формулами (8) отримуємо значення $u(0,0)$. При цьому використовуються всі вихідні дані задачі (1)–(3). Отже, до системи рівнянь (5), яку повинна задовольняти функція u в кутових точках Π, долучається ще одна рівність вигляду $u(0,0) = C$. Тут C – відома константа, яка залежить від усіх вихідних даних задачі. Очевидно, що умови (4) і (6) є необхідні для того, щоб однозначно відновити значення функції $u(x,t)$ у всіх кутових точках. Так, беручи до уваги (9), з рівностей (8) відразу отримуємо

$$\mu(0) = \frac{\beta(0)H(T) + h(0)}{1 - \alpha(T)\beta(0)e^{LT}}, \quad \varphi(0) = \frac{\alpha(0)h(T) + H(0)}{1 - \alpha(0)\beta(T)e^{LT}}.$$

Опираючись на умови (4) і (6), а саме

$$\det A = \alpha(0)\beta(T) - \beta(0)\alpha(T) = 0,$$

$$\operatorname{rang} \bar{A} = 3 \Rightarrow \beta(0)H(T) + h(0) = \alpha(0)h(T) + H(0),$$

маємо, що значення $u(0,0) = \mu(0) = \varphi(0)$ відновлюється однозначно. Очевидно, що останнє твердження є справедливим і для $u(0,T)$, $u(l,0)$, $u(l,T)$.

Таким чином, визначивши однозначно функції $\varphi(x)$ і $\mu(t)$, значення яких збігаються в точці $(0,0)$, за формулою (7) отримуємо розв'язок вихідної задачі. При цьому, якщо мова йде про неперервно диференційовний розв'язок, то очевидною є необхідність умови погодження 1-го порядку: $L\mu(0) - \mu'(0) = \varphi'(0)$, оскільки будь-яке порушення гладкості розв'язку на межі області з необхідністю поширюється всередину області вздовж відповідних характеристик рівняння. Згідно з умовами гладкості, накладеними на вихідні дані α, β, h і H, функції $\mu(t)$ і $\varphi(x)$, що визначаються формулами (8), є неперервно диференційовними на $[0,T]$. Запишемо умову погодження 1-го порядку в термінах вихідних даних задачі (1)–(3):

$$e^{LT}[\beta(0)H(T) + h(0)][\beta'(0)\alpha(T) - \beta(0)\alpha'(T) + \beta(T)\alpha'(0) -$$
$$-\beta'(T)\alpha(0)] = [LH(0) - \alpha'(0)h(T) + \alpha(0)h'(T) + H'(0) -$$
$$-\beta'(0)H(T) - L\beta(0)H(T) + \beta(0)H'(0) - h'(0)][1 - \alpha(T)\beta(0)e^{LT}].$$

За цієї умови формула (7) дає класичний розв'язок задачі (1)–(3).

Зазначимо, що в загальнішому випадку, якщо $T/l \in \mathbb{Q}$, то всі ТПР є замкненими і наведені вище міркування залишаються в силі. Якщо ж $T/l \notin \mathbb{Q}$, то:

— всі ТПР є незамкненими (нескінченними);

— параметри задачі мають бути такими, що не допускають необмеженого зростання розв'язку вздовж ТПР. Враховуючи спосіб поширення значень функції $u(x,t)$ в $\bar{\Pi}$, отримуємо необхідну умову розв'язності задачі (аналог умови (9) для розглядуваного випадку):

$$\begin{gathered}
\beta((l-x) \bmod T)e^{LT([l/T]+1)} \prod_{k=1}^{[l/T]+1} \alpha((x+kT) \bmod l) \neq 1,\\
[T/l] = 0, \quad x \in [0, l-\tau_1];\\[2ex]
\beta((l-x) \bmod T)e^{LT[l/T]} \prod_{k=1}^{[l/T]} \alpha((x+kT) \bmod l) \neq 1,\\
[T/l] = 0, \quad x \in [l-\tau_1, l];\\[2ex]
\alpha((T-t) \bmod l)e^{Ll([T/l]+1)} \prod_{k=1}^{[T/l]+1} \beta((t+kl) \bmod T) \neq 1,\\
[l/T] = 0, \quad t \in [0, l-x_1];\\[2ex]
\alpha((T-t) \bmod l)e^{Ll([T/l]+1)} \prod_{k=1}^{[T/l]} \beta((t+kl) \bmod T) \neq 1,\\
[l/T] = 0, \quad t \in [l-x_1, l],
\end{gathered} \tag{10}$$

де (l,τ_1) та $(x_1,0)$ – перші сліди ТПР з початком у точці (l,T) на $\{l\} \times [0,T]$ і $[0,l] \times \{0\}$ відповідно. Під слідами ТПР будемо розуміти перетини ТПР з $\partial\Pi$.

Зазначимо, що умова (10) не є конструктивною. А тому для подальших міркувань вважатимемо, що замість (10) виконується одна з умов:

$$\begin{gathered}
\max_x\{|\alpha|^{[T/l]+1-\operatorname{sgn}[T/l]}, |\alpha|^{[T/l]+1}\} \max_t\{|\beta|^{[l/T]+1-\operatorname{sgn}[l/T]}, |\beta|^{[l/T]+1}\} \times\\
\times e^{LT([T/l]+[l/T]+1)} < 1
\end{gathered} \tag{11}$$

або

$$\begin{gathered}
\min_x\{|\alpha|^{[T/l]+1-\operatorname{sgn}[T/l]}, |\alpha|^{[T/l]+1}\} \min_t\{|\beta|^{[l/T]+1-\operatorname{sgn}[l/T]}, |\beta|^{[l/T]+1}\} \times\\
\times e^{LT([T/l]+[l/T]+1)} > 1.
\end{gathered} \tag{12}$$

Умови (11) і (12), очевидно, носять лише достатній характер.

Знову зосередимо увагу на кутових точках області П. Очевидно, що для класичної розв'язності задачі (1)–(3) у цьому випадку теж необхідно вимагати виконання умови (4). Покажемо, що, крім того, необхідною є також умова (6). Зауважимо, що множина слідів ТПР з початком у довільній точці $(x,t) \in \partial\Pi$, є всюди щільною на $\partial\Pi$ (намотування раціонального періоду на коло ірраціональної довжини). Нехай для визначеності виконується умова (11). Розглянемо ТПР, яка починається в точці (l,T) і стартує з деяким значенням $u_0 = u(l,T)$ невідомої функції u. Послідовність слідів цієї ТПР на $[0,l] \times \{T\}$ позначимо x_n (нумерація йде в порядку появи слідів на $[0,l] \times \{T\}$). Тоді

$$u_n = u(x_n,T) = f_n u_0 + g_n, \tag{13}$$

де f_n і g_n – константи, залежні від x_n, α, β, L, T. Оскільки послідовність $\{x_n\}$ є всюди щільною на $[0,l] \times \{T\}$, то існує така підпослідовність $\{x_{n_k}\}$, що $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = l$. Згідно з (11) послідовності $\{f_{n_k}\}$ і $\{g_{n_k}\}$ є обмеженими. Виділимо з них збіжні підпослідовності і розглянемо їх лише для тих індексів, які є однаковими в обох підпослідовностях. Щоб не нагромаджувати індексів, будемо вважати, що виділеними підпослідовностями є $\{f_{n_k}\}$ і $\{g_{n_k}\}$. Тоді послідовність $\{u_{n_k}\}$, задана формулою (13), є збіжною. Нехай $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = \tilde{u}_0$. Очевидно, що константа $\tilde{u}_0$ є апроксимаційною границею функції $\psi(x) = u(x,T)$ при $x \to l$ по множині $\{x_{n_k}\}$. З існування апроксимаційної границі, взагалі кажучи, не випливає існування звичайної границі. Але протилежне твердження справедливе, при цьому звичайна та апроксимаційна границі збігаються. Щоб скористатись останнім фактом, покажемо, що функція $\psi(x)$, яка будується за вихідними даними задачі, є неперервною на $[0,l]$. Достатньо буде показати неперервність функції $\psi(x)$ на відрізку $[l-T,l]$. Без втрати загальності розглянемо випадок, коли $1 < l/T < 2$. Тоді функція $\psi(x)$ на $[l-T,l]$ має задовольняти такі співвідношення:

$$\begin{gathered}
\psi(x) = e^{LT}\alpha(l-T+x)\beta(T-x)\psi(l-T+x) + \\
+e^{LT}\beta(T-x)H(l-T+x) + e^{Lx}h(T-x), \qquad x \in [l-T,T]; \\
\psi(x) = e^{2LT}\alpha(x-T)\alpha(l-2T+x)\beta(2T-x)\psi(l-2T+x) + \\
+e^{2LT}\alpha(x-T)\beta(2T-x)H(l-2T+x) + \\
+e^{Lx}\alpha(x-T)h(2T-x) + e^{LT}H(x-T), \qquad x \in [T,l].
\end{gathered} \tag{14}$$

Розглянемо відображення $\psi = A\psi$, задане формулами (14), на множині K неперервних на $[l-T,l]$ функцій, що задовольняють

умову

$$\psi(l) = e^{LT}\alpha(l-T)\psi(l-T) + e^{LT}H(l-T). \tag{15}$$

Неважко переконатись, що K є замкнутою підмножиною простору $C[l-T,l]$, а відображення A, задане формулами (14), переводить K у себе. Справді, якщо $\psi(x) \in K$, то, очевидно, $A\psi$ є неперервною на кожному з відрізків $[l-T,T]$ і $[T,l]$ зокрема. Для доведення неперервності $A\psi$ у точці $x = T$ розглядаємо обидві рівності з (14) при $x = T$ і беремо до уваги умови (4), (6), (15). Про те, що $A\psi$ задовольняє (15), переконуємось безпосередньою підстановкою (14) у (15). Оскільки K є замкнутою підмножиною повного метричного простору $C[l-T,l]$ і виконується (11), то в K існує єдина функція $\psi(x)$, яка є розв'язком рівняння $\psi = A\psi$ і може бути знайдена методом послідовних наближень.

Отже, існує звичайна границя функції $\psi(x)$ при $x \to l$: $\lim\limits_{x\to l}\psi(x) = u_0$, яка збігається з апроксимаційною границею $\tilde{u}_0$. Очевидно, що єдине значення, яке може набувати функція $u(x,t)$ у точці (l,T), визначається за допомогою (13):

$$u_0 = \frac{\lim\limits_{k\to\infty} g_{n_k}}{1 - \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}}$$

(знаменник не дорівнює нулю внаслідок (11)). Тоді ТПР з початком у точці (l,T) зі значенням u_0, залишає на $[l-T,l] \times \{T\}$ сліди, в яких значення невідомої функції $u(x,t)$ збігаються з відповідними значеннями функції $\psi(x)$. Крім того, замикання множини значень функції $u(x,t)$, що відповідає всюди щільній множині слідів розглядуваної траєкторії на $\partial\Pi$, дає неперервну функцію на $\partial\Pi$, яка на $[l-T,l] \times \{T\}$ збігається з $\psi(x)$. У протилежному випадку, якщо в замиканні отримуємо розривну функцію, то внаслідок того, що розриви поширюються вздовж характеристик рівняння (1), отримуємо суперечність з тим, що $\psi(x)$ є неперервною. Таким чином, функція $u(x,t)$, задана формулою (7), визначатиме єдиний неперервний розв'язок задачі (1)–(3). Єдиність розв'язку забезпечується його побудовою, а саме необхідністю поширення значень невідомої функції уздовж ТПР.

Підсумовуючи, бачимо, що необхідними умовами розв'язності задачі (1)–(3) є умови (4) і (6). Крім того, значення функції $u(x,t)$ на будь-якій частині межі області П можна визначити лише при одночасному залученні нелокальних крайових умов (2), (3) і диференціального рівняння (1).

Приклад 2. Розглянемо задачу Коші

$$\begin{cases} u_t + u_x = f(x, t, u), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \end{cases} \tag{16}$$

де $\varphi(x)$ – довільна неперервно диференційовна та обмежена на $\mathbb{R}$ функція. Якщо мова йде про глобальний (у часі) класичний розв'язок задачі (16), то в загальному випадку від функції $f(x, t, u)$ вимагається не більше ніж майже лінійне зростання за змінною u. Як тільки f допускає більше ніж лінійне зростання за змінною u, про розв'язок задачі (16) часто доводиться говорити лише локально в часі. Для прикладу, якщо $f(x, t, u) = u^2$, то класичний розв'язок розглядуваної задачі задається формулою

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - t)}{1 - t\varphi(x - t)}. \tag{17}$$

Очевидно, якщо $\varphi > 0$, то функція u, задана формулою (17), для будь-яких $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ є неперервно диференційовною при $T < \left(\sup_x \varphi(x)\right)^{-1}$ і терпить розрив 2-го роду при $T \geq \left(\sup_x \varphi(x)\right)^{-1}$.

У даному розділі будемо припускати, що праві частини розглядуваних диференціальних рівнянь задовольняють умову Ліпшиця за змінною u, тобто допускають не більше ніж майже лінійне зростання.

Приклад 3. Розглянемо задачу Коші для квазілінійного диференціального рівняння

$$u_t + uu_x = 0, \tag{18}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{19}$$

де $\varphi(x)$ – неперервно диференційовна та обмежена на $\mathbb{R}$ функція. Усі характеристики (18) визначаються рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t),$$

причому на кожній фіксованій характеристиці рівняння (18) записується у вигляді

$$\frac{du}{dt} = 0.$$

А це означає, що вздовж будь-якої характеристики функція $u(x, t)$ набуває сталого значення. Тому рівняння характеристики, що проходить через точку $(0, \alpha)$, задається формулою

$$x = \alpha + \varphi(\alpha)t,$$

а функція $u(x, t)$ дорівнює $\varphi(\alpha)$ на цій характеристиці.

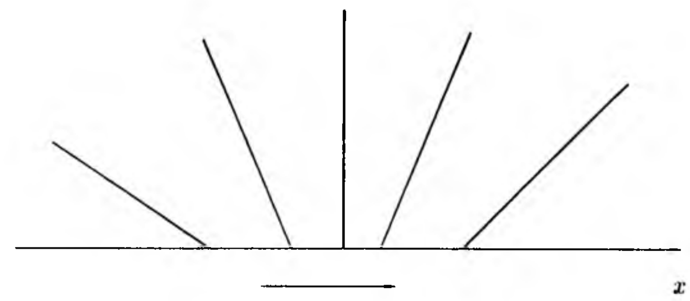

Рис. 2. Характеристики рівняння (18)

Розглянемо дві характеристики

$$x = \alpha_1 + \varphi(\alpha_1)t, \qquad x = \alpha_2 + \varphi(\alpha_2)t,$$

що проходять через точки $(0, \alpha_1)$ і $(0, \alpha_2)$ відповідно. Нехай $\alpha_1 < \alpha_2$.

Очевидно, якщо функція $\varphi(x)$ не є монотонно неспадною, то за скінченний проміжок часу ці характеристики перетнуться і в точці перетину розв'язок визначатиметься неоднозначно. Неважко переконатись, що умова монотонного неспадання функції $\varphi(x)$ є необхідною і достатньою для існування єдиного глобального класичного розв'язку задачі (18), (19). При цьому маємо рисунок, складений з характеристик рівняння (18) (рис. 2). Стрілка вказує на характер монотонності функції $\varphi(x)$.

Міркуючи так само, в області $(0, \infty) \times (0, \infty)$ у випадку мішаної задачі для рівняння (18) з умовою (19) та умовою

$$u(0, t) = \mu(t), \tag{20}$$

де $\varphi(x)$ і $\mu(t)$ – додатні неперервно диференційовні та обмежені на $[0, \infty)$ функції, отримуємо, що необхідними і достатніми умовами існування єдиного глобального класичного розв'язку задачі (18)–(20) є такі: $\varphi(x)$ – монотонно неспадна на $[0, +\infty)$ функція; $\mu(t)$ – монотонно незростаюча на $[0, +\infty)$ функція. Умови додатності функцій $\varphi(x)$ і $\mu(t)$ є умовами коректної постановки задачі (18)–(20). У випадку, коли хоча б одна з них не виконується, задача стає перевизначеною (одна з умов (19) або (20) стає зайвою).

§ 21. Майже лінійні гіперболічні системи

21.1. Нелокальні умови за часовою змінною

В області $\Pi = \{(x,t): 0 < x < l, 0 < t < T\}$ розглядається система диференціальних рівнянь

$$u_{it} - \lambda_i(x,t)u_{ix} = f_i(x,t,u), \quad i = 1,\dots,n, \tag{1}$$

з умовами

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_i(x)u_i(x,0) + \beta_i(x)u_i(x,T) + \\ &+\sum_{j\in I_1}\int_0^T h_{ij}(x,t)u_j(x,t)\,dt = \gamma_i(x), \quad i\in I_1, \\ &\alpha_i(x)u_i(x,0) + \beta_i(x)u_i(x,T) + \\ &+\sum_{j\in I_2}\int_0^T h_{ij}(x,t)u_j(x,t)\,dt = \gamma_i(x), \quad i\in I_2, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

і

$$\begin{aligned} u_i(0,t) &= \mu_i(t), \quad i\in I_1, \\ u_i(l,t) &= \nu_i(t), \quad i\in I_2, \end{aligned} \tag{3}$$

де $I_1 \cup I_2 = \{1,\dots,n\}$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Нехай усі $\lambda_i(x,t)$ дійсні (що забезпечує гіперболічність системи (1)) і занумеровані в порядку зростання їх величин, тобто

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_k < 0 < \lambda_{k+1} \le \lambda_{k+2} \le \ldots \le \lambda_n, \quad 0 \le k \le n.$$

Накладаються також такі умови гладкості: функції λ_i, f_i, α_i, β_i, γ_i, h_{ij}, де $i,j = 1,\dots,n$, неперервні за всіма аргументами, а також неперервно диференційовні за змінною x; f_i, $i = 1,\dots,n$, мають неперервні перші похідні за змінною u; μ_i, $i \in I_1$, та ν_j, $j \in I_2$, неперервно диференційовні. Відомо (теорема 2.1), що за цих умов кожна із задач Коші

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\lambda_i(\xi(\tau),\tau), \qquad \xi(t) = x, \tag{4}$$

де $(x,t) \in \bar{\Pi}$, має єдиний розв'язок для будь-якого $i \in \{1,\dots,n\}$. Позначимо розв'язки задач (4) через $\omega_i(\tau;x,t)$. Зазначимо, що вони є характеристиками системи (1), а також є строго монотонними за τ функціями. Таким чином, через кожну точку $(x,t) \in \Pi$ проходить

n дійсних характеристик системи (1), які можуть бути продовжені до перетину з межею Π.

Нехай

$$I_i^k = I_i \cap \{1,\dots,k\}, \quad I_i^{k+1} = I_i \cap \{k+1,\dots,n\}.$$

Позначимо через $t_i(x,t)$ найменше, якщо $i \in M_1 = I_1^k \cup I_2^{k+1}$, і найбільше, якщо $i \in M_2 = \{1,\dots,n\} \setminus M_1$, значення τ, при якому характеристика $\omega_i(\tau;x,t)$ досягає межі Π.

Введемо поняття i-ї траєкторії поширення розв'язку задачі (1)–(3), яке допоможе звести дану задачу до системи інтегро-операторних рівнянь Вольтерра 1-го роду. Припустимо, що існує класичний розв'язок задачі (1)–(3), який набуває значення u_0 у деякій точці $(x_0,t_0) \in \bar{\Pi}$. Розглянемо характеристику $\omega_i(t;x_0,t_0)$, продовжену до перетину з $\partial\Pi$ у напрямку спадання часової змінної, якщо $i \in M_2$, і в напрямку зростання часової змінної, якщо $i \in M_1$. Значення функції u_i уздовж характеристики $\omega_i(t;x_0,t_0)$ визначаються за допомогою i-го рівняння системи (1). Якщо перетин побудованої характеристики відбувся з однією з основ прямокутника Π, то i-а умова з (2) визначає значення u_i у протилежній до точки перетину точці прямокутника. Остання точка, у свою чергу, визначає нову i-у характеристику і значення u_i на ній за допомогою i-го рівняння системи (1). Даний процес побудови характеристик є скінченним і продовжується до перетину черговою характеристикою однієї з бічних сторін Π, на якій значення функції u_i визначається згідно з (3). Очевидно, що отримане в процесі побудови послідовності характеристик значення функції u_i у точці перетину з бічною стороною Π повинно збігатися з відповідним значенням із (3).

Означення 1. Послідовність характеристик, побудована вище, називається i-ю траєкторією поширення розв'язку задачі (1)–(3) (i-ю ТПР). Перетини i-ї ТПР з $\partial\Pi$ називаються слідами i-ї ТПР.

Методом характеристик зведемо задачу (1)–(3) до еквівалентної їй системи інтегро-операторних рівнянь. Для цього припустимо, що

$$\alpha_i(x) \ne 0, \quad i \in M_1; \qquad \beta_i(x) \ne 0, \quad i \in M_2, \tag{5}$$

і введемо допоміжні функції

$$\varphi_i(x) = u_i(x,0), \quad i \in M_1; \qquad \varphi_i(x) = u_i(x,T), \quad i \in M_2;$$

$$\bar{\alpha}_i(x) = \frac{\alpha_i(x)}{\beta_i(x)}; \quad \tilde{\beta}_i(x) = \frac{\beta_i(x)}{\alpha_i(x)}; \quad \bar{\gamma}_i(x) = \frac{\gamma_i(x)}{\beta_i(x)}; \tag{6}$$

$$\tilde{\gamma}_i(x) = \frac{\gamma_i(x)}{\alpha_i(x)}; \quad \bar{h}_{ij}(x,t) = \frac{h_{ij}(x,t)}{\beta_i(x)}; \quad \tilde{h}_{ij}(x,t) = \frac{h_{ij}(x,t)}{\alpha_i(x)}.$$

Позначимо через Π_{0i}, Π_{li}, $\Pi_{\varphi i}$ множини точок $(x,t) \in \Pi$, для яких відповідно

$$0 < t_i(x,t) < T, \quad \omega_i(t_i(x,t);x,t) = 0;$$
$$0 < t_i(x,t) < T, \quad \omega_i(t_i(x,t);x,t) = l;$$
$$t_i(x,t) = 0 \ \ (i \in M_1), \quad t_i(x,t) = T \ \ (i \in M_2).$$

Інтегруючи кожне з рівнянь системи (1) уздовж відповідної йому i-ї ТПР, отримуємо, що для $i = 1,\dots,n$

$$u_i(x,t) = (R_iu)(x,t) + \int\limits_{t_i(x,t)}^{t} f_i(\omega_i(\tau;x,t),\tau,u(\omega_i(\tau;x,t),\tau))\,d\tau, \tag{7}$$

де

$$(R_iu)(x,t) = \begin{cases} \varphi_i(\omega_i(0;x,t)), & (x,t) \in \Pi_{\varphi i}, \\ \mu_i(t_i(x,t)), & (x,t) \in \Pi_{0i}, \\ \nu_i(t_i(x,t)), & (x,t) \in \Pi_{li}; \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_i(x) &= \tilde{\gamma}_i(x) - \sum_{j\in I_1} \int\limits_0^T \tilde{h}_{ij}(x,t)u_j(x,t)\,dt - \tilde{\beta}_i(x)(R_iu)(x,T), \\
&\qquad i \in I_1^k; \\
\varphi_i(x) &= \tilde{\gamma}_i(x) - \sum_{j\in I_2} \int\limits_0^T \tilde{h}_{ij}(x,t)u_j(x,t)\,dt - \tilde{\beta}_i(x)(R_iu)(x,T), \\
&\qquad i \in I_2^{k+1}; \\
\varphi_i(x) &= \bar{\gamma}_i(x) - \sum_{j\in I_1} \int\limits_0^T \bar{h}_{ij}(x,t)u_j(x,t)\,dt - \bar{\alpha}_i(x)(R_iu)(x,0), \\
&\qquad i \in I_1^{k+1}; \\
\varphi_i(x) &= \bar{\gamma}_i(x) - \sum_{j\in I_2} \int\limits_0^T \bar{h}_{ij}(x,t)u_j(x,t)\,dt - \bar{\alpha}_i(x)(R_iu)(x,0), \\
&\qquad i \in I_2^k.
\end{aligned} \tag{9}$$

Зворотний перехід від (7) до (1)–(3) здійснюється безпосередньою підстановкою (7) в (1)–(3). Отже, задача (1)–(3) звелась до еквівалентної їй системи інтегро-операторних рівнянь (7).

Введемо позначення:

$$N_i^1(x) = \omega_i(T;x,0), \ i \in M_1; \quad N_i^1(x) = \omega_i(0;x,T), \ i \in M_2;$$
$$N_i^{p_i}(0) = l, \ \ i \in I_1^k \cup I_1^{k+1}; \quad N_i^{p_i}(l) = 0, \ \ i \in I_2^k \cup I_2^{k+1};$$
$$N_i^p(x) = N_i^{p-1}(N_i^1(x)), \qquad 1 < p < p_i,$$

де $p_i - 1$ – число слідів на $[0,l] \times \{0\}$ i-ї ТПР, яка виходить з точки $(0,0)$, якщо $i \in I_1^k$, з точки $(0,T)$, якщо $i \in I_1^{k+1}$, з точки $(l,0)$, якщо $i \in I_2^{k+1}$, і з точки (l,T), якщо $i \in I_2^k$. Розглядуване число слідів є скінченним, що забезпечується нерівностями

$$p_i \le \left[\frac{l}{\int_0^T \Lambda_i(t)\,dt}\right] + 1, \qquad 0 < \Lambda_i(t) \le |\lambda_i|.$$

Тут $\Lambda_i(t)$ – фіксовані неперервні функції, існування яких випливає з умов, накладених на $\lambda_i(x,t)$.

Означення 2. Вектор-функція $u(x,t) = (u_1,\dots,u_n)$ називається кусково-гладким розв'язком задачі (1)–(3) в області Π, якщо вона неперервна в $\bar{\Pi}$ і якщо Π можна розбити на скінченну кількість підобластей, у кожній з яких $u(x,t)$ є класичним розв'язком задачі (1)–(3).

Очевидно, що кусково-гладкий розв'язок може мати скінченну кількість розривів 1-го роду похідних 1-го порядку. Розглядатимемо розв'язки, які можуть мати розриви на характеристиках, що виходять з точок $(N_i^{p_i}(0),0)$, $i \in I_1^k$; $(N_i^{p_i}(l),0)$, $i \in I_2^{k+1}$; $(N_i^{p_i}(0),T)$, $i \in I_1^{k+1}$; $(N_i^{p_i}(l),T)$, $i \in I_2^k$.

Введемо позначення:

$$h = \max_{i\in M_1, s\in M_2, j,x,t}\{|\tilde{h}_{ij}|, |\bar{h}_{sj}|\}, \quad \beta = \max_{i\in M_1, j\in M_2, x}\{|\tilde{\beta}_i|, |\bar{\alpha}_j|\},$$
$$\Lambda = \exp\{T \max_{i,x,t} |\lambda'_{ix}|\},$$
$$q_1 = Tn(h + L\beta) \sum_{p=0}^{\max\{p_k,p_{k+1}\}} \beta^p + TLn,$$
$$q_2 = nT\Lambda(h + \Lambda C) \sum_{p=0}^{\max\{p_k,p_{k+1}\}} \beta^p + nT\Lambda C.$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умова (5), усі припущення щодо гладкості функцій λ_i, f_i, α_i, β_i, γ_i, h_{ij}, μ_i, ν_i, а також умови:*

1) умова Ліпшиця функцій f_i за змінною u:

$$|f_i(x,t,u^{(1)}) - f_i(x,t,u^{(2)})| \le L\sum_{j=1}^{n} |u_j^{(1)} - u_j^{(2)}|, \quad i=1,\dots,n,$$

де L – деяка константа, що не залежить від x, t, u;

2) $|f'_{iu}| \le C$, $\quad i=1,\dots,n$, $\quad \forall (x,t)\in\bar{\Pi}$, $\quad \forall u: |u|<\infty$;

3) $q_i < 1$, $\quad i=1,2$;

4) умова погодження 0-го порядку:

$$\alpha_i(0)\mu_i(0) + \beta_i(0)\mu_i(T) + \sum_{j\in I_1}\int_0^T h_{ij}(0,t)\mu_j(t)\,dt = \gamma_i(0), \quad i\in I_1,$$

$$\alpha_i(l)\nu_i(0) + \beta_i(l)\nu_i(T) + \sum_{j\in I_2}\int_0^T h_{ij}(l,t)\nu_j(t)\,dt = \gamma_i(l), \quad i\in I_2.$$

Тоді задача (1)–(3) в області Π *має єдиний кусково-гладкий розв'язок.*

Д о в е д е н н я. Використовується принцип стискуючих відображень. Нехай

$$v_i(x,t) = (R_i u)(x,t) + \int_{t_i(x,t)}^{t} f_i(\omega_i(\tau;x,t),\tau,u)\,d\tau, \quad i=1,\dots,n. \quad (10)$$

Визначимо функції $\varphi_i(x)$, $i=1,\dots,n$, що входять у (10), через $\mu_i(t)$, $i\in I_1$, та $\nu_j(t)$, $j\in I_2$. Використовуючи (5), (7), (8), (10), отримуємо

$$\varphi_i(x) = S_i^p \Big[\tilde{\gamma}_i(x) - \sum_{j\in I_1}\int_0^T \tilde{h}_{ij}(x,t)u_j(x,t)\,dt - \tilde{\beta}_i(x)\mu_i(t_i(x,T)) -$$

$$-\tilde{\beta}_i(x)\int_{t_i(x,T)}^{T} f_i(\omega_i(t;x,T),t,u)\,dt\Big],$$

$$N_i^p(0) < x < N_i^{p+1}(0),\ p=0,\dots,p_i-1,\ i\in I_1^k;$$

$$\varphi_i(x) = S_i^p \Big[\tilde{\gamma}_i(x) - \sum_{j\in I_2}\int_0^T \tilde{h}_{ij}(x,t)u_j(x,t)\,dt - \tilde{\beta}_i(x)\nu_i(t_i(x,T)) -$$

$$-\tilde{\beta}_i(x)\int_{t_i(x,T)}^{T} f_i(\omega_i(t;x,T),t,u)\,dt\Big],$$

$$N_i^p(l) < x < N_i^{p+1}(l),\ p=0,\dots,p_i-1,\ i\in I_2^{k+1};$$

$$\varphi_i(x) = S_i^p \Big[\bar{\gamma}_i(x) - \sum_{j\in I_1}\int_0^T \bar{h}_{ij}(x,t)u_j(x,t)\,dt - \bar{\alpha}_i(x)\mu_i(t_i(x,0)) -$$

$$-\bar{\alpha}_i(x)\int_{t_i(x,0)}^{T} f_i(\omega_i(t;x,0),t,u)\,dt\Big],$$

$$N_i^p(0) < x < N_i^{p+1}(0),\ p=0,\dots,p_i-1,\ i\in I_1^{k+1};$$

$$\varphi_i(x) = S_i^p \Big[\bar{\gamma}_i(x) - \sum_{j\in I_2}\int_0^T \bar{h}_{ij}(x,t)u_j(x,t)\,dt - \bar{\alpha}_i(x)\nu_i(t_i(x,0)) -$$

$$-\bar{\alpha}_i(x)\int_{t_i(x,0)}^{T} f_i(\omega_i(t;x,0),t,u)\,dt\Big],$$

$$N_i^p(l) < x < N_i^{p+1}(l),\ p=0,\dots,p_i-1,\ i\in I_2^{k},$$

(11)

де

$$S_i^0 P_i(x) = P_i(x), \quad i=1,\dots,n;$$

$$S_i^1 P_i(x) = \tilde{\gamma}_i(x) - \sum_{j\in I_1}\int_0^T \tilde{h}_{ij}(x,t)u_j(x,t)\,dt - \tilde{\beta}_i(x)P_i(\omega_i(0;x,T)) -$$

$$-\tilde{\beta}_i(x)\int_0^T f_i(\omega_i(t;x,T),t,u)\,dt, \quad i\in I_1^k;$$

$$S_i^1 P_i(x) = \tilde{\gamma}_i(x) - \sum_{j\in I_2}\int_0^T \tilde{h}_{ij}(x,t)u_j(x,t)\,dt - \tilde{\beta}_i(x)P_i(\omega_i(0;x,T)) -$$

$$-\bar{\beta}_i(x)\int\limits_0^T f_i(\omega_i(t;x,T),t,u)\,dt, \quad i\in I_2^{k+1};$$

$$S_i^1 P_i(x) = \bar{\gamma}_i(x) - \sum_{j\in I_1}\int\limits_0^T \bar{h}_{ij}(x,t)u_j(x,t)\,dt - \bar{\alpha}_i(x)P_i(\omega_i(T;x,0)) -$$

$$-\bar{\alpha}_i(x)\int\limits_0^T f_i(\omega_i(t;x,0),t,u)\,dt, \quad i\in I_1^{k+1};$$

$$S_i^1 P_i(x) = \bar{\gamma}_i(x) - \sum_{j\in I_2}\int\limits_0^T \bar{h}_{ij}(x,t)u_j(x,t)\,dt - \bar{\alpha}_i(x)P_i(\omega_i(T;x,0)) -$$

$$-\bar{\alpha}_i(x)\int\limits_0^T f_i(\omega_i(t;x,0),t,u)\,dt, \quad i\in I_2^{k};$$

$$S_i^p P_i(x) = S_i^1(S_i^{p-1}P_i(x)), \quad i=1,\dots,n.$$

Розглянемо простір $C(\bar{\Pi})$ з метрикою

$$\rho(v^{(1)},v^{(2)}) = \max_{i,x,t}|v_i^{(1)} - v_i^{(2)}|. \tag{12}$$

Очевидно, що за умови 4) теореми 1 відображення (10) з урахуванням (11) (кожній функції $u(x,t)$ ставиться у відповідність функція $v(x,t)$ за формулами (10), (11)) переводить повний простір $C(\bar{\Pi})$ в себе. Залишається показати, що це відображення є стискуючим. Для цього використовуються очевидні оцінки:

при $p=0$

$$\rho(v^{(1)},v^{(2)}) \le Tn\,[h+L\beta+L]\,\rho(u^{(1)},u^{(2)});$$

при $p=1$

$$\rho(v^{(1)},v^{(2)}) \le Tn\,[(h+L\beta)(1+\beta)+L]\,\rho(u^{(1)},u^{(2)})$$

і т.д.; при $p=\max\limits_i\{p_i\}$

$$\rho(v^{(1)},v^{(2)}) \le q_1\rho(u^{(1)},u^{(2)}).$$

Оскільки $q_1<1$, то відображення, задане формулами (10), (11), є стискуючим. А отже, задовольняються всі умови принципу стискуючих відображень, що доводить існування єдиного неперервного розв'язку вихідної задачі, який можна знайти методом послідовних наближень. Під неперервним розв'язком задачі при цьому розуміємо неперервний розв'язок системи інтегро-операторних рівнянь (7).

Для доведення існування кусково-гладкого розв'язку продиференціюємо (10) формально за змінною x:

$$\begin{aligned} v_{ix}(x,t) = {} & (R_i'u)(x,t) - \frac{\partial t_i(x,t)}{\partial x} f_i(\omega_i(t_i(x,t);x,t),t_i(x,t),u) + \\ & + \int\limits_{t_i(x,t)}^{t} \frac{\partial\omega_i(\tau;x,t)}{\partial x}\Big[\frac{\partial f_i(\omega_i(\tau;x,t),\tau,u)}{\partial\omega_i} + \\ & + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i(\omega_i(\tau;x,t),\tau,u)}{\partial u_j}\frac{\partial u_j(\omega_i(\tau;x,t),\tau)}{\partial\omega_i}\Big]\,d\tau, \quad i=1,\dots,n, \end{aligned} \tag{13}$$

де

$$(R_i'u)(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_i(\omega_i(0;x,t))}{\partial\omega_i}\dfrac{\partial\omega_i(0;x,t)}{\partial x}, & (x,t)\in\Pi_{\varphi i}, \\ \dfrac{\partial\mu_i(t_i(x,t))}{\partial t_i}\dfrac{\partial t_i(x,t)}{\partial x}, & (x,t)\in\Pi_{0i}, \\ \dfrac{\partial\nu_i(t_i(x,t))}{\partial t_i}\dfrac{\partial t_i(x,t)}{\partial x}, & (x,t)\in\Pi_{li}, \end{cases}$$

$$\frac{\partial\omega_i(\tau;x,t)}{\partial x} = \exp\Big\{\int\limits_\tau^t \lambda_{i\xi}'(\omega_i(\sigma;x,t),\sigma)\,d\sigma\Big\};$$

$$\frac{\partial t_i(x,t)}{\partial x} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } t_i(x,t)=0, \ i=1,\dots,n, \\ \dfrac{1}{\lambda_i(l,t_i(x,t))}\exp\Big\{\displaystyle\int\limits_{t_i(x,t)}^{t}\lambda_{i\xi}(\omega_i(\sigma;x,t),\sigma)\,d\sigma\Big\}, \\ \quad \text{якщо } t_i(x,t)>0, \ i=1,\dots,k, \\ \dfrac{1}{\lambda_i(0,t_i(x,t))}\exp\Big\{\displaystyle\int\limits_{t_i(x,t)}^{t}\lambda_{i\xi}(\omega_i(\sigma;x,t),\sigma)\,d\sigma\Big\}, \\ \quad \text{якщо } t_i(x,t)>0, \ i=k+1,\dots,n; \end{cases}$$

$$\varphi_i'(x) = S_{ix}^p\Big[\ \bar{\gamma}_i(x) - \sum_{j\in I_1}\int\limits_0^T \bar{h}_{ij}(x,t)u_j(x,t)\,dt - \bar{\beta}_i(x)\mu_i(t_i(x,T)) -$$

$$-\bar{\beta}_i(x)\int\limits_{t_i(x,T)}^{T} f_i(\omega_i(t;x,T);t,u)\,dt\Big];$$

$$N_i^p(0) < x < N_i^{p+1}(0), \quad p=0,\dots,p_i-1, \quad i\in I_1^k.$$

Тут $S^0_{ix}P_i(x) = P'_i(x)$,

$$S^p_{ix}P_i(x) = \tilde\gamma'_i(x) - \sum_{j\in I_1}\int_0^T \left[\frac{\partial \tilde h_{ij}(x,t)}{\partial x}u_j(x,t) + \tilde h_{ij}(x,t)\frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x}\right]dt -$$
$$-\tilde\beta'_i(x)S^{p-1}_i P_i(\omega_i(0;x,T)) - \tilde\beta_i(x)S^{p-1}_{ix}P_i(\omega_i(0;x,T)) -$$
$$-\tilde\beta'_i(x)\int_0^T f_i(\omega_i(t;x,T),t,u)\,dt -$$
$$-\tilde\beta_i(x)\int_0^T \frac{\partial\omega_i(t;x,T)}{\partial x}\left[\frac{\partial f_i(\omega_i(t;x,T),t,u)}{\partial\omega_i} + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\omega_i(t;x,T),t,u)}{\partial u_j}\frac{\partial u_j(\omega_i(t;x,T),t)}{\partial\omega_i}\right]dt.$$

Аналогічно знаходяться похідні функцій $\varphi_i(x)$ для $i \in \{1,\dots,n\}\setminus I^k_1$.

Розглянемо простір $\tilde C(\bar\Pi)$ неперервних майже скрізь в $\bar\Pi$ функцій $v(x,t) = (v_1,\dots,v_n)$, які можуть мати скінченну кількість розривів 1-го роду на i-х ТПР, $i = 1,\dots,n$, що виходять із кутових точок області $\bar\Pi$ і попадають в Π. Неважко переконатись, що $\tilde C(\bar\Pi)$ з метрикою (12) є повним простором. Покажемо, що відображення, задане формулами (13) (кожній функції u_x ставиться у відповідність функція v_x), переводить $\tilde C(\Pi)$ в себе і є стискуючим. З формул (13) випливає, що функція $v_{ix}(x,t)$ може мати розриви на слідах i-х ТПР, що виходять із кутових точок області Π, а саме: в точках $(N^p_i(0),0)$, якщо $i \in I^k_1$; $(N^p_i(l),0)$, якщо $i \in I^{k+1}_2$; $(N^p_i(0),T)$, якщо $i \in I^{k+1}_1$; $(N^p_i(l),T)$, якщо $i \in I^k_2$. Оскільки розриви поширюються вздовж характеристик, то функція $v_{ix}(x,t)$ матиме розриви на відповідних характеристиках, що виходять із цих точок і попадають в Π. Крім того, під інтегралами в правих частинах рівностей (13) стоять похідні функцій u_i, $i = 1,\dots,n$, за змінною x. А тому функція v_{ix}, $i = 1,\dots,n$, може мати розриви на характеристиках j-го рівняння системи (13), що виходять із точок $(N^p_j(0),0)$, $j \in I^k_1$; $(N^p_j(l),0)$, $j \in I^{k+1}_2$; $(N^p_j(0),T)$, $j \in I^{k+1}_1$; $(N^p_j(l),T)$, $j \in I^k_2$, і попадають в Π. Таким чином, область Π розбивається на скінченну кількість підобластей, у кожній з яких функція $v_x(x,t) = (v_{1x},\dots,v_{nx})$ є неперервною. Для випадку двох гіперболічних рівнянь ($n = 2$) таких, що $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 2$, $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{2\}$, описане розбиття матиме вигляд, зображений на рис. 3. Отже, v_x належатиме простору $\tilde C(\bar\Pi)$. Крім того, розглядуване відображення є стискуючим,

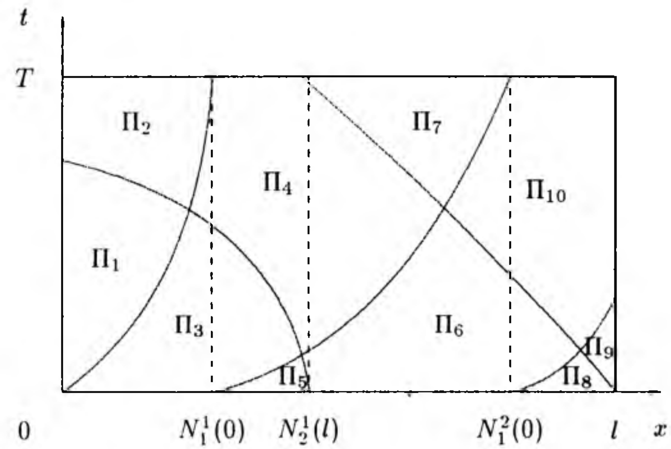

Рис. 3. Області неперервності функції $v_x(x,t)$

що випливає з оцінок: при $p = 0$

$$\rho(v^{(1)}_x, v^{(2)}_x) \le nT\Lambda(h + C + \beta\Lambda C)\rho(u^{(1)}_x, u^{(2)}_x),$$

при $p = 1$

$$\rho(v^{(1)}_x, v^{(2)}_x) \le nT\Lambda(h + \beta h + C + \beta\Lambda C + \beta^2\Lambda C)\rho(u^{(1)}_x, u^{(2)}_x)$$

і т.д. При $p = \max_i\{p_i\}$

$$\rho(v^{(1)}_x, v^{(2)}_x) \le q_2\rho(u^{(1)}_x, u^{(2)}_x).$$

Оцінки проведені з урахуванням існування неперервного розв'язку задачі (1)–(3). Очевидно, що останній є обмеженим на компакті $\bar\Pi$. Знаходячись в умовах принципу стискуючих відображень ($q_2 < 1$ за припущенням теореми), робимо висновок про існування єдиного розв'язку u_x, який належить простору $\tilde C(\bar\Pi)$ і який можна знайти методом послідовних наближень. Еквівалентність задач (1)–(3) і (7) дає можливість стверджувати, що розглядувана функція $u(x,t)$ має кусково-неперервну похідну по t, характер і множина точок розриву якої збігаються з відповідними властивостями $u_x(x,t)$.

Таким чином, доведено існування єдиного кусково-гладкого розв'язку вихідної задачі. ■

Зауваження 1. У випадку, коли або $I_1 = \{1,\dots,n\}$, або $I_2 = \{1,\dots,n\}$, або всі $h_{ij} \equiv 0$ в $\bar\Pi$, або ж в умовах (2) замість фредгольмівських членів стоять спеціального вигляду вольтеррівські, можна легко довести існування єдиного класичного розв'язку задачі (1)–(3). Як випливає з доведення теореми, для цього досить додатково припустити, що виконується умова погодження 1-го порядку. Запишемо її для випадку, коли всі $h_{ij} \equiv 0$ в $\bar{\Pi}$ та $I_1 = \{1, \dots, k\}$:

$$\alpha_i'(0)\mu_i(0) + \beta_i'(0)\mu_i(T) + \frac{\alpha_i(0)}{\lambda_i(0,0)}\left[\mu_i'(0) - f_i(0,0,\bar{\mu}(0))\right] + $$
$$+ \frac{\beta_i(0)}{\lambda_i(0,T)}\left[\mu_i'(T) - f_i(0,T,\bar{\mu}(T))\right] = \gamma_i'(0), \quad i \in I_1,$$
$$\alpha_i'(l)\nu_i(0) + \beta_i'(l)\nu_i(T) + \frac{\alpha_i(l)}{\lambda_i(l,0)}\left[\nu_i'(0) - f_i(l,0,\bar{\nu}(0))\right] + $$
$$+ \frac{\beta_i(l)}{\lambda_i(l,T)}\left[\nu_i'(T) - f_i(l,T,\bar{\nu}(T))\right] = \gamma_i'(l), \quad i \in I_2, \tag{14}$$

де

$$\bar{\mu}(t) = (\mu_1(t), \dots, \mu_k(t), u_{k+1}(0,t), \dots, u_n(0,t)),$$
$$\bar{\nu}(t) = (u_1(l,t), \dots, u_k(l,t), \nu_{k+1}(t), \dots, \nu_n(t)).$$

Зауваження 2. Зазначимо, що виконання умови 3 теореми 1 можна забезпечити, вибравши достатньо мале T. Це випливає з вигляду q_i, а також із того, що

$$\lim_{T\to 0} Tp_i \le \lim_{T\to 0} \frac{Tl}{-\int\limits_0^T \lambda_k(x(t),t)\,dt} + 1 =$$
$$= \lim_{T\to 0} \frac{l}{-\lambda_k(x(T),T)} + 1 = 1 - \frac{l}{\lambda_k(0,0)}, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$\lim_{T\to 0} Tp_i \le \frac{l}{\lambda_{k+1}(l,0)} + 1, \quad i = k+1, \dots, n.$$

Розглянемо тепер задачу (1)–(3) у випадку, коли всі $h_{ij} \equiv 0$ в $\bar{\Pi}$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1, 2, 4 теореми 1, умови (5), (14) і всі припущення щодо гладкості функцій λ_i, f_i, α_i, β_i, γ_i, μ_i, ν_i. Тоді в області* Π *існує класичний розв'язок задачі (1)–(3).*

Д о в е д е н н я. Виключно для простоти викладу припускатимемо, що $I_1 = \{1, \dots, k\}$. Розглянемо систему (1) як x-гіперболічну. Для цього перепишемо її у вигляді

$$u_{ix} - \frac{1}{\lambda_i(x,t)} u_{it} = \tilde{f}_i(x,t,u), \quad i = 1, \dots, n, \tag{15}$$

де $\tilde{f}_i(x,t,u) = -f_i(x,t,u)/\lambda_i(x,t)$. Характеристиками системи (15) є розв'язки задач Коші

$$\frac{d\tau}{d\xi} = -\frac{1}{\lambda_i(\xi, \tau(\xi))}, \quad \tau(x) = t, \quad i = 1, \dots, n.$$

Позначимо їх $\tau = \tilde{\omega}_i(\xi; x, t)$, $i = 1, \dots, n$. Нехай $x_i(x,t)$ – це найменше, якщо $i \in \{1, \dots, k\}$, і найбільше, якщо $i \in \{k+1, \dots, n\}$, значення ξ, при якому характеристика $\tilde{\omega}_i(\xi; x, t)$ досягає межі Π. Позначимо також через $\Pi_{\varphi i}$, Π_{0i} і Π_{li} множини точок, для яких відповідно $0 < x_i(x,t) < l$; $x_i(x,t) = 0$; $x_i(x,t) = l$.

Розіб'ємо задачу (1)–(3) на дві пов'язані між собою задачі

$$\begin{aligned} u_{ix} - \frac{1}{\lambda_i(x,t)} u_{it} &= \tilde{f}_i(x,t,u), \ i = 1, \dots, k, \\ \alpha_i(x)u_i(x,0) + \beta_i(x)u_i(x,T) &= \gamma_i(x), \qquad i = 1, \dots, k, \\ u_i(0,t) &= \mu_i(t), \qquad i = 1, \dots, k, \end{aligned} \tag{16}$$

і

$$\begin{aligned} u_{ix} - \frac{1}{\lambda_i(x,t)} u_{it} &= \tilde{f}_i(x,t,u), \ i = k+1, \dots, n, \\ \alpha_i(x)u_i(x,0) + \beta_i(x)u_i(x,T) &= \gamma_i(x), \qquad i = k+1, \dots, n, \\ u_i(l,t) &= \nu_i(t), \qquad i = k+1, \dots, n. \end{aligned} \tag{17}$$

Розглядаючи (16) відносно невідомих $u_1, \dots, u_k$, методом характеристик зведемо її до еквівалентної системи інтегро-операторних рівнянь

$$u_i(x,t) = (R_i u)(x,t) + \int\limits_{x_i(x,t)}^{x} \tilde{f}_i(\xi, \tilde{\omega}_i(\xi; x,t), u)\,d\xi, \quad i = 1, \dots, k, \tag{18}$$

де

$$(R_i u)(x,t) = \begin{cases} \varphi_i(x_i(x,t)) & (x,t) \in \Pi_{\varphi i}, \\ \mu_i(\tilde{\omega}_i(0; x,t)) & (x,t) \in \Pi_{0i}; \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = S_i^p \Big[\tilde{\gamma}_i(x) - \tilde{\beta}_i(x)\mu_i(\tilde{\omega}_i(0; x, T)) -$$
$$- \tilde{\beta}_i(x) \int\limits_0^x \tilde{f}_i(\xi, \tilde{\omega}_i(\xi; x, T), u)\,d\xi\Big],$$
$$N_i^p(0) < x < N_i^{p+1}(0), \ p = 0, \dots, p_i - 1;$$

$$S_i^1 P_i(x) = \tilde{\gamma}_i(x) - \tilde{\beta}_i(x) P_i(x_i(x,T)) - \tilde{\beta}_i(x) \int\limits_{x_i(x,T)}^{x} \tilde{f}_i(\xi, \tilde{\omega}_i(\xi; x, T), u)\,d\xi.$$

Припустимо, що $u_{k+1},\dots,u_n$ – відомі неперервні функції. Покажемо рівномірну обмеженість функцій $u_1,\dots,u_k$, використовуючи метод послідовних наближень. Побудуємо послідовність наближень $\{u^{(r)}\}_{r=0}^{\infty}=\{(u_1^{(r)},\dots,u_k^{(r)})\}_{r=0}^{\infty}$ до розв'язку задачі (16), загальний член якої зображається формулою

$$u^{(r)}=u^{(0)}+(u^{(1)}-u^{(0)})+(u^{(2)}-u^{(1)})+\dots+(u^{(r)}-u^{(r-1)}).$$

Проведемо очевидні оцінки: при $p=0$

$$\max_{i=1,\dots,k}|u_i^{(0)}|\le\max_{x;i=1,\dots,k}\{1,|\tilde\beta_i|\}\max_{t,i}|\mu_i|+\max_{x;i=1,\dots,k}|\tilde\gamma_i|,$$

при $p=1$

$$\begin{aligned}\max_{i=1,\dots,k}|u_i^{(0)}|\ &\le\ \max\left\{1,\left(\max_{x;i=1,\dots,k}|\tilde\beta_i|\right)^2\right\}\max_{t,i}|\mu_i|+\\&+\left(1+\max_{x;i=1,\dots,k}|\tilde\beta_i|\right)\max_{x;i=1,\dots,k}|\tilde\gamma_i|\end{aligned}$$

і т.д. Остаточна оцінка для $|u_i^{(0)}|$

$$\max_{i=1,\dots,k}|u_i^{(0)}|\le B_1\max_{x;i=1,\dots,k}|\tilde\gamma_i|+B_2\max_{t,i}|\mu_i|, \tag{19}$$

де

$$B_1=\sum_{p=0}^{\max\{p_k,p_{k+1}\}+1}\left(\max_{x;i=1,\dots,k}|\tilde\beta_i|\right)^p,$$

$$B_2=\max\left\{1,\left(\max_{x;i=1,\dots,k}|\tilde\beta_i|\right)^{\max\{p_k,p_{k+1}\}+1}\right\}.$$

Аналогічно, при $p=0$

$$\max_{i=1,\dots,k}|u_i^{(1)}-u_i^{(0)}|\le xF\left(1+\max_{x;i=1,\dots,k}|\tilde\beta_i|\right),$$

при $p=1$

$$\max_{i=1,\dots,k}|u_i^{(1)}-u_i^{(0)}|\le xF\sum_{p=0}^{2}\left(\max_{x;i=1,\dots,k}|\tilde\beta_i|\right)^p$$

і т.д. Остаточно,

$$\max_{i=1,\dots,k}|u_i^{(1)}-u_i^{(0)}|\le xFB_1.$$

В отриманих нерівностях

$$F=\max_{i=1,\dots,k;u_l=u_l^{(0)},l=1,\dots,k}|\tilde f_i|.$$

Продовжуючи цей процес, встановлюємо оцінки

$$\max_{i=1,\dots,k}|u_i^{(2)}-u_i^{(1)}|\le\frac{x^2}{2!}nLF\Lambda B_1^2,$$

$$\max_{i=1,\dots,k}|u_i^{(3)}-u_i^{(2)}|\le\frac{x^3}{3!}n^2L^2F\Lambda^2B_1^3,$$

де $\Lambda=\max\limits_{x;t;i=1,\dots,k}\dfrac{1}{|\lambda_i|}$. На основі проведених вище оцінок отримуємо нерівність

$$\max_{i=1,\dots,k}|u_i^{(r)}|\le B_1\max_{x;i=1,\dots,k}|\tilde\gamma_i|+B_2\max_{t,i}|\mu_i|+\frac{F}{L}\exp\{nLl\Lambda B_1\}, \tag{20}$$

справедливу для всіх $r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. А це свідчить про рівномірну обмеженість розглядуваної послідовності. Завдяки умові 4 теореми 1 функції $u^{(r)}(x,t)$ неперервні. Як наслідок, гранична функція $u=$ $=(u_1,\dots,u_k)$ є неперервним розв'язком задачі (16).

Аналогічно розглянемо задачу (17) відносно невідомих $u_{k+1},\dots,u_n$. Еквівалентна їй система інтегро-операторних рівнянь матиме вигляд

$$u_i(x,t)=(R_iu)(x,t)+\int\limits_{x_i(x,t)}^{x}\tilde f_i(\xi,\tilde\omega_i(\xi;x,t),u)\,d\xi,\quad i=k+1,\dots,n, \tag{21}$$

де

$$(R_iu)(x,t)=\begin{cases}\varphi_i(x_i(x,t)) & (x,t)\in\Pi_{\varphi i},\\ \nu_i(\tilde\omega_i(l;x,t)) & (x,t)\in\Pi_{li};\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\varphi_i(x)=S_i^p\Big[&\tilde\gamma_i(x)-\tilde\beta_i(x)\nu_i(\tilde\omega_i(l;x,T))-\\&-\tilde\beta_i(x)\int\limits_{l}^{x}\tilde f_i(\xi,\tilde\omega_i(\xi;x,T),u)\,d\xi\Big],\end{aligned}$$

$$N_i^p(l)<x<N_i^{p+1}(l),\ p=0,\dots,p_i-1;$$

$$S_i^1P_i(x)=\tilde\gamma_i(x)-\tilde\beta_i(x)P_i(x_i(x,T))-\tilde\beta_i(x)\int\limits_{x_i(x,T)}^{x}\tilde f_i(\xi,\tilde\omega_i(\xi;x,T),u)\,d\xi.$$

Доведемо існування неперервного розв'язку системи (21), використовуючи метод послідовних наближень. Покажемо рівномірну обмеженість послідовності наближень до розв'язку системи (21), враховуючи, що $u_1,\dots,u_k$ знайдені при розв'язуванні задачі (16), виражаються через $u_{k+1},\dots,u_n$ і задовольняють оцінку (20). Отже, враховуючи на кожному кроці нерівності (20), маємо оцінки

$$
\begin{gathered}
\max_{i=k+1,\ldots,n} |u_i^{(0)}| \le B_3 \max_{x;i=k+1,\ldots,n} |\tilde{\gamma}_i| + B_4 \max_{t,i} |\nu_i|, \\
\max_{i=k+1,\ldots,n} |u_i^{(1)} - u_i^{(0)}| \le (l-x) F_1 B_3, \\
\max_{i=k+1,\ldots,n} |u_i^{(2)} - u_i^{(1)}| \le \frac{(l-x)^2}{2!} n^2 P F_1 B_3^2,
\end{gathered} \tag{22}
$$

і т.д., де

$$
B_2 = \max\left\{1, \left(\max_{x;i=k+1,\ldots,n} |\tilde{\beta}_i|\right)^{\max\{p_k,p_{k+1}\}+1}\right\},
$$

$$
B_3 = \sum_{p=0}^{\max\{p_k,p_{k+1}\}+1} \left(\max_{x;i=k+1,\ldots,n} |\tilde{\beta}_i|\right)^p,
$$

$$
F_1 = \max_{i=k+1,\ldots,n;\, u_l = u_l^{(0)},\, l=1,\ldots,n} |\tilde{f}_i|,
$$

$$
P = L \max_{x,t;i=k+1,\ldots,n} \frac{1}{|\lambda_i|} \exp\left\{ nLl \max_{x,t;i=1,\ldots,k} \frac{1}{|\lambda_i|} B_1 \right\}.
$$

У підсумку отримуємо апріорну оцінку розв'язку задачі (17):

$$
\begin{gathered}
\max_{i=k+1,\ldots,n} |u_i| = \max_{i=k+1,\ldots,n} \lim_{r\to\infty} |u_i^{(r)}| \le \\
\le B_3 \max_{x;i=k+1,\ldots,n} |\tilde{\gamma}_i| + B_4 \max_{t;i=k+1,\ldots,n} |\nu_i| + \frac{F_1}{P} \exp\{lPnB_1\}.
\end{gathered} \tag{23}
$$

Оцінок (19), (20), (22), (23) досить, щоб завершити доведення існування неперервного розв'язку задачі (1)–(3). Диференціюючи (18) і (21) формально за змінною x і застосовуючи до кожної з отриманих систем метод послідовних наближень (для першої задачі відносно $u_{1x}, \ldots, u_{kx}$, для другої – відносно $u_{k+1,x}, \ldots, u_{nx}$) так, як це робилось при доведенні існування неперервного розв'язку задачі (1)–(3), доводимо твердження про існування класичного розв'язку. При цьому необхідною є умова погодження 1-го порядку (14).

Теорему 2 доведено. ∎

21.2. Нелокальні умови за часовою та просторовою змінними

В області П розглянемо систему диференціальних рівнянь (1) з умовами

$$
\alpha_i(x) u_i(x,0) + \beta_i(x) u_i(x,T) = \gamma_i(x), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{24}
$$

$$
\sum_{j=1}^{n} b_{ij0}(t) u_j(0,t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij1}(t) u_j(l,t) = H_i(t), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{25}
$$

Нехай функції λ_i, f_i, α_i, β_i, γ_i, b_{ijs}, H_i, де $i,j = 1,\ldots,n$, $s = 0, 1$, неперервні за всіма своїми аргументами; $\lambda_i(x,t)$, $i = 1,\ldots,n$, задовольняють умову Ліпшиця за змінною x.

Для простоти викладу будемо вважати, що $I_1 = \{1,\ldots,k\}$. Введемо позначення:

$$
\mu_i(t) = u_i(0,t), \quad \nu_i(t) = u_i(l,t),
$$

$$
B(t) = \begin{pmatrix}
b_{110} & \ldots & b_{1k0} & b_{1,k+1,1} & \ldots & b_{1n1} \\
b_{210} & \ldots & b_{2k0} & b_{2,k+1,1} & \ldots & b_{2n1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
b_{n10} & \ldots & b_{nk0} & b_{n,k+1,1} & \ldots & b_{nn1}
\end{pmatrix},
$$

$$
b = \max_{t;\, i;\, r=k+1,\ldots,n;\, l=1,\ldots,k} \{|b_{ir0}(t)|, |b_{il,m+1}(t)|\},
$$

$$
d_1 = (m+1) n^2 b \max_t \frac{1}{|\det B|} \max_{t,\,i,\,j} |B_{ij}|, \quad d_2 = \max_{x,\,i} |\tilde{\beta}_i|, \tag{26}
$$

$$
d_3 = \sum_{p=0}^{\max\{p_k,\,p_{k+1}\}+1} d_2^p, \quad d_4 = \max\{d_2,\, d_2^{\max\{p_k,\,p_{k+1}\}+1}\},
$$

$$
d_5 = \max_{x,t,i} |\lambda_i| \max_{x,t,i} \frac{1}{|\lambda_i|},
$$

$$
q_3 = d_1 d_4, \quad q_4 = TLn \max\left\{1 + \frac{d_1 d_3}{1-q_1},\; d_3\left[1 + \frac{d_1 d_4}{1-q_1}\right]\right\},
$$

$$
q_5 = d_1 d_4 d_5, \quad q_6 = TLn\left[1 + \frac{d_1 d_3 d_5}{1-q_3}(1+d_3)\right],
$$

де $B_{ij}(t)$, $i,j = 1,\ldots,n$, – алгебричні доповнення до відповідних елементів матриці B. Позначимо через D матрицю, складену з коефіцієнтів системи

$$\begin{cases} \alpha_i(0)u_i(0,0) + \beta_i(0)u_i(0,T) = \gamma_i(0), & i = 1,\dots,n, \\ \alpha_i(l)u_i(l,0) + \beta_i(l)u_i(l,T) = \gamma_i(l), & i = 1,\dots,n, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij0}(0)u_j(0,0) + \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij1}(0)u_j(l,0) = H_i(0), & i = 1,\dots,n, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij0}(T)u_j(0,T) + \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij1}(T)u_j(l,T) = H_i(T), & i = 1,\dots,n \end{cases} \tag{27}$$

відносно невідомих $u_i(x_s, 0)$, $u_i(x_s, T)$, де $i = 1,\dots,n$, $s = 0,1$, а через $\bar{D}$ – розширену матрицю цієї системи.

Враховуючи введені позначення, зводимо задачу (1), (24), (25) до еквівалентної їй системи інтегро-операторних рівнянь (7), де оператори R_i діють за формулами (8), а функції $\varphi_i(x)$ визначаються формулами

$$\varphi_i(x) = \tilde{\gamma}_i(x) - \tilde{\beta}_i(x)(R_i u)(x,T), \quad i = 1,\dots,n. \tag{28}$$

Означення 3. Узагальненим розв'язком задачі (1), (24), (25) називається неперервний в $\bar{\Pi}$ розв'язок системи (7).

Теорема 3. *Нехай виконуються умови 1, 2 теореми 1, умова (5) і всі припущення щодо гладкості функцій λ_i, f_i, α_i, β_i, γ_i, b_{ijs}, H_i . Нехай, крім того:*

1) $q_i < 1$, $i = 3, 4$;

2) $\det B(t) \neq 0$ *для всіх* $t \in [0,T]$;

3) $\operatorname{rang} D = \operatorname{rang} \bar{D} = 3n$;

4) $\omega_1(T;0,0) \leq \omega_n(T;l,0)$.

Тоді в області Π *існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1), (24), (25).*

Зазначимо, що рівність $\operatorname{rang} D = \operatorname{rang} \bar{D}$ забезпечує сумісність умов (24) і (25), а тому вона є необхідною умовою існування узагальненого розв'язку задачі. Якщо ж $\operatorname{rang} D \neq \operatorname{rang} \bar{D}$, то матимемо розриви функції $u(x,t)$ щонайменше в кутових точках області Π. Умова 3 теореми 3 забезпечує умову погодження 0-го порядку між (24) і (25) ($4n$ значень функції $u(x,t) = (u_1,\dots,u_n)$ у кутових точках області визначаються $4n$ рівняннями системи (27) та n рівняннями системи (1)). Необхідність умови 3 теореми 3 для випадку $n = 1$ обгрунтована на прикладі 1, поданому в §20. Умова 4 вказує на те, що характеристики системи (1), які виходять із точок $(0,0)$, $(l,0)$ і проходять через область Π, не перетинаються між собою в її межах.

Ця умова не є необхідною і накладається виключно для спрощення технічних викладок.

Взявши до уваги умову 2, перепишемо (25) у вигляді

$$\begin{aligned} \mu_i(t) &= \frac{1}{\det B(t)} \sum_{j=1}^{k} b_{ji}(t)\tilde{H}_j(t), \quad i = 1,\dots,k, \\ \nu_i(t) &= \frac{1}{\det B(t)} \sum_{j=1}^{k} b_{ji}(t)\tilde{H}_j(t), \quad i = k+1,\dots,n, \end{aligned} \tag{29}$$

де

$$\tilde{H}_i(t) = H_i(t) - \sum_{j=k+1}^{n} b_{ij0}(t)u_j(0,t) - \sum_{j=1}^{k} b_{ij1}(t)u_j(l,t).$$

Згідно з умовою 4 маємо

$$\begin{aligned} \tilde{H}_i(t) = H_i(t) &- \\ - \sum_{j=k+1}^{n} b_{ij0}(t)\Big[\varphi_j(\omega_j(0;0,t)) + \int_0^t f_j(\omega_j(\tau;0,t),\tau,u)\,d\tau\Big] &- \\ - \sum_{j=1}^{k} b_{ij1}(t)\Big[\varphi_j(\omega_j(0;l,t)) + \int_0^t f_j(\omega_j(\tau;l,t),\tau,u)\,d\tau\Big]&. \end{aligned} \tag{30}$$

Введемо поняття i-ї ТПР даної задачі. Аргументацією для способу введення служитимуть такі міркування. Нехай $u_1,\dots,u_{i-1}$, $u_{i+1},\dots,u_n$ є відомими неперервно диференційовними функціями. Тоді задача (1), (24), (25), в якій умови (25) переписано у вигляді (29), стає нелокальною задачею для одного гіперболічного диференціального рівняння відносно функції $u_i(x,t)$. ТПР останньої задачі будується в спосіб, описаний у прикладі 1 з § 20.

Означення 4. i-ю ТПР задачі (1), (24), (25) називається ТПР задачі (1), (24), (29) за умови, що $u_1,\dots,u_{i-1},u_{i+1},\dots,u_n$ є відомими неперервно диференційовними функціями. Перетини i-ї ТПР з $\partial\Pi$ називаються слідами i-ї ТПР.

Д о в е д е н н я т е о р е м и 3. Доведення здійснюється за такою схемою.

1. У припущенні, що u_i, $i = 1,\dots,n$, є відомими неперервними в $\bar{\Pi}$ функціями, доводиться існування єдиного набору неперервних функцій μ_i, $i = 1,\dots,k$, та ν_j, $j = k+1,\dots,n$. При цьому використовується той факт, що значення функції u в Π поширюються вздовж ТПР. Одночасно встановлюються апріорні оцінки функцій μ_i та ν_j через функції u_i.

2. За допомогою отриманих апріорних оцінок доводиться існування єдиного узагальненого розв'язку в $\bar{\Pi}$.

Дотримуючись цієї схеми, запишемо спочатку систему рівнянь для знаходження $\mu_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$, та $\nu_j(t)$, $j = k+1, \ldots, n$. Використовуючи (7), (8), (28) і враховуючи введені позначення (26), функції $\varphi_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, перепишемо у вигляді

$$\begin{gathered}
\varphi_i(x) = S_i^p\Big[\tilde{\gamma}_i(x) - \tilde{\beta}_i(x)\mu_i(t_i(x,T)) - \\
-\tilde{\beta}_i(x)\int\limits_{t_i(x,T)}^{T} f_i(\omega_i(t;x,T),t,u)\,dt\Big], \\
N_i^p(0) < x < N_i^{p+1}(0), \quad p = 0,\ldots,p_i-1, \quad i = 1,\ldots,k; \\
\varphi_i(x) = S_i^p\Big[\tilde{\gamma}_i(x) - \tilde{\beta}_i(x)\nu_i(t_i(x,T)) - \\
-\tilde{\beta}_i(x)\int\limits_{t_i(x,T)}^{T} f_i(\omega_i(t;x,T),t,u)\,dt\Big], \\
N_i^p(l) < x < N_i^{p+1}(l), \quad p = 0,\ldots,p_i-1, \quad i = k+1,\ldots,n,
\end{gathered} \tag{31}$$

де

$$S_i^1 P_i(x) = \tilde{\gamma}_i(x) - \tilde{\beta}_i(x)P_i(\omega_i(0;x,T)) - \tilde{\beta}_i(x)\int\limits_0^T f_i(\omega_i(t;x,T),t,u)\,dt,$$

$$i = 1,\ldots,n.$$

Позначимо $\mu(t) = (\mu_1,\ldots,\mu_k,\nu_{k+1},\ldots,\nu_n)$, Q – оператор, що діє на функцію μ і задається правими частинами (29) з урахуванням (31), (30). Функції u_i, $i = 1,\ldots,n$, що входять у праві частини формул, будемо вважати відомими неперервними функціями в $\bar{\Pi}$.

Розглянемо відображення $\tilde{\mu} = Q\mu$ на просторі $C[0,T]$ з рівномірною метрикою. Покажемо, що дане відображення є неперервним і переводить повний простір $C[0,T]$ у себе. Необхідною умовою справедливості останнього твердження є умова 3 даної теореми. Справді, для того щоб функція $\tilde{\mu}$, яка визначається формулами (29) і (30), була неперервною, необхідно вимагати неперервності функцій $\varphi_i, i = 1,\ldots,n$, які зображуються формулами (31). Очевидно, що необхідними умовами для цього (див. доведення теореми 1) є

$$\begin{aligned}
&\alpha_i(0)\mu_i(0) + \beta_i(0)\mu_i(T) = \gamma_i(0), \quad i = 1,\ldots,k; \\
&\alpha_i(l)\nu_i(0) + \beta_i(l)\nu_i(T) = \gamma_i(l), \quad i = k+1,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{32}$$

Далі беремо до уваги, що функції $\mu_i(t)$ та $\nu_j(t)$ зображаються формулами (29). Розглядаючи (29) при $t = 0$ і $t = T$, отримуємо ще $2n$ умов, з якими мають узгоджуватись значення $\mu_i(0), \mu_i(T)$, $i = 1,\ldots,k$, та $\nu_i(0), \nu_i(T)$, $i = k+1,\ldots,n$. А це приводить до необхідності врахування всіх взаємозв'язків значень функції $u(x,t)$ у кутових точках області Π, які диктуються нелокальними умовами (24) і (25). Враховуючи це, отримуємо систему алгебричних рівнянь (27), умова розв'язності якої – $\operatorname{rang} D = \operatorname{rang} \bar{D}$, є необхідною для неперервності $\tilde{\mu}(t)$.

Проте виникає ще n рівнянь відносно значень функції $u(x,t)$ в кутових точках області Π. Детально цю ситуацію описано в прикладі 1 з §20 для одного диференціального рівняння. Подібна ситуація виникає і для даної задачі. Покажемо це. Розглянемо 1-у, 2-у,…,k-у ТПР, що починаються в точці (0,0), а також $k+1$-у,…,n-у ТПР, що починаються в точці $(l,0)$. Позначимо через τ_i^m m-й слід i-ї ТПР на межі $\{0\}\times[0,T]$, якщо $i \in \{k+1,\ldots,n\}$, і на межі $\{l\}\times[0,T]$, якщо $i \in \{1,\ldots,k\}$. Нумерація слідів іде в порядку їхньої появи на розглядуваній межі. Якщо для деякого $i \in \{1,\ldots,n\}$ існує таке натуральне m, для якого $\tau_i^m = 0$, то i-а ТПР є замкнутою, і до системи (27) долучається ще одне рівняння. На відміну від рівнянь, що входять у систему (27) і побудовані із залученням лише нелокальних умов (24) і (25), останнє записується з використанням i-го рівняння системи (1).

Розглянемо тепер випадок, коли для деякого $i \in \{1,\ldots,k\}$ $\tau_i^m \neq 0$ для всіх $m \in \mathbf{N}$. Це відповідає ситуації, коли i-а ТПР є незамкнутою. Покажемо, що й у цьому випадку для однозначного визначення функції $\mu_i(t)$ необхідно, щоб значення $\mu_i(0)$ диктувалось не лише нелокальними крайовими умовами (24) і (25) та диференціальними рівняннями системи (1), що породжують замкнуті траєкторії (без залучення i-го рівняння системи (1)), а й іншими умовами. У даній ситуації можливі два випадки:

1) множина слідів i-ї ТПР є всюди щільною на $\{0\}\times[0,T]$. Тоді рівняння для знаходження $\mu_i(0)$ отримуємо способом, описаним у прикладі 1 з §20;

2) множина слідів i-ї ТПР не є всюди щільною на $\{0\}\times[0,T]$. Очевидно, що тоді існує хоча б одна точка скупчення цієї множини. Нехай $d_1 = \lim\limits_{k\to\infty} \tau_i^{m_k}$. Якщо $d_1 = 0$ або $d_1 = T$, то при знаходженні рівняння для $\mu_i(0)$ приходимо до випадку 1. Інакше, отримуємо послідовність рівностей

$$\mu_i(\tau_i^{m_k}) = f_{m_k}^1\mu_i(0) + g_{m_k}^1, \quad k = 1,2,\ldots,$$

де $f^1_{m_k}$ і $g^1_{m_k}$ – константи, які залежать від τ_i^m, вихідних даних задачі та функцій $u_i(x,t), (x,t) \in \Pi$. Згідно з умовами гладкості, накладеними на вихідні дані задачі (1), (24), (25), отримуємо

$$\mu_i(d_1) = f^1\mu_i(0) + g^1, \tag{33}$$

де $f^1 = \lim\limits_{k\to\infty} f^1_{m_k}, g^1 = \lim\limits_{k\to\infty} g^1_{m_k}$. При цьому послідовність слідів $\{\tau_i^{m_k}\}$ насправді є монотонною, а границя цієї послідовності є односторонньою. У протилежному випадку характеристики i-го рівняння системи (1) перетиналися б у межах області П, що неможливо у зв'язку з тим, що u – розв'язок.

Завдяки неперервності функції $u(x,t)$ в П та необхідності того, що характеристики i-го рівняння системи (1) не повинні перетинатися в межах області П, отримуємо необхідну умову на траєкторію, що розглядається: вона має бути замкненою. Звідси ж відразу записуємо лінійне алгебричне рівняння для знаходження значення $\mu_i(d_1)$ через вихідні дані задачі та значення функції $u_i(x,t)$ всередині області П. Умова 1 даної теореми, а саме: $q_3 < 1$, забезпечує існування та єдиність розв'язку цього рівняння. Повертаючись до рівняння (33) і враховуючи те, що $f^1 \le q_3$, зразу отримуємо $\mu_i(0)$.

Отже, у будь-якому випадку отримуємо додаткову інформацію (у вигляді рівняння) про значення невідомої функції u_i у кутових точках області П, яка дається не лише нелокальними крайовими умовами, а й відповідним диференціальним рівнянням системи (1). Оскільки останнє стосується однаково всіх функцій u_i, $i = 1,\dots,n$, то система (1) визначає n додаткових рівнянь на значення функцій $u_i, i = 1,\dots,n$, у кутових точках області П. Отже, умова 3 даної теореми є необхідною для однозначної розв'язності задачі.

Повертаючись тепер до відображення Q, покажемо, що воно є стискуючим. Дійсно, при $p = 0$

$$\rho(\tilde\mu^{(1)},\tilde\mu^{(2)}) \le d_1 \max_{x,i}|\tilde\beta_i|\rho(\mu^{(1)},\mu^{(2)}),$$

при $p = 1$

$$\rho(\tilde\mu^{(1)},\tilde\mu^{(2)}) \le d_1 (\max_{x,i}|\tilde\beta_i|)^2\rho(\mu^{(1)},\mu^{(2)}),$$

і т.д. Для довільного допустимого p

$$\rho(\tilde\mu^{(1)},\tilde\mu^{(2)}) \le q_3\rho(\mu^{(1)},\mu^{(2)}),$$

де $q_3 < 1$ за припущенням теореми. При цьому справедлива оцінка

$$\max_{i=1,\dots,k;\, j=k+1,\dots,n}\{|\mu_i|,\ |\nu_j|\} \le$$
$$\le \frac{n}{1-q_3}\max_t \frac{1}{|\det B|}\max_{t,i,j}|B_{ij}|\big[\max_{t,i}|H_i| + n(m+1)bTd_3 \max_{x,t,u,i}|f_i|\big]. \tag{34}$$

Отже, рівняння $\mu = Q\mu$ має єдиний неперервний розв'язок, який можна знайти методом послідовних наближень. Виходячи з цього та враховуючи (31), отримуємо існування єдиного набору неперервних функцій $\varphi_i(x)$, $i = 1,\dots,n$. Доведемо тепер існування єдиного неперервного розв'язку задачі (1), (24), (25). Для цього розглянемо оператор θ, що діє на функцію $u(x,t)$ за правилом, яке задається правими частинами формул (7) з урахуванням (31), (34). На просторі $C(\bar\Pi)$ з рівномірною метрикою оператор θ є неперервним і переводить простір $C(\bar\Pi)$ у себе. Покажемо, що θ є стискуючим відображенням. Використовуючи на кожному кроці оцінку (34), отримуємо, що при $p = 0$

$$\rho(\tilde u^{(1)},\tilde u^{(2)}) \le TLn(1+d_2)\left(1 + \frac{d_1 d_3}{1-q_3}\right)\rho(u^{(1)},u^{(2)}),$$

при $p = 1$

$$\rho(\tilde u^{(1)},\tilde u^{(2)}) \le TLn(1+d_2+d_2^2)\left(1 + \frac{d_1 d_6}{1-q_3}\right)\rho(u^{(1)},u^{(2)})$$

і т. д. Остаточна оцінка

$$\rho(\tilde u^{(1)},\tilde u^{(2)}) \le q_4\rho(u^{(1)},u^{(2)})$$

доводить існування єдиного неперервного розв'язку задачі, який знаходиться методом послідовних наближень.

Теорему доведено. ■

Зауваження 3. Сформулюємо достатні умови існування та єдиності класичного розв'язку задачі (1), (24), (25). Теорема 3 дає умови існування єдиної неперервної вектор-функції $u(x,t)$ – розв'язку системи інтегро-операторних рівнянь (7), еквівалентної до розглядуваної задачі. Будемо вважати, що цей розв'язок знайдено. Очевидно, що тоді відомі функції $\mu_i(t)$, $i = 1,\dots,k$; $\nu_j(t)$, $j = k+1,\dots,n$, та $\varphi_i(x)$, $i = 1,\dots,n$, які виражаються через вихідні дані задачі.

Теорема 4. *Нехай функції λ_i, f_i, α_i, β_i, γ_i, де $i,j = 1,\dots,n$, $s = 0,1$, неперервні за всіма аргументами, а також неперервно диференційовні за змінною x; f_i, $i = 1,\dots,n$, мають неперервні перші похідні за змінною u; b_{ijs}, H_i, де $i,j = 1,\dots,n$, $s = 0,1$, – неперервно* *диференційовні. Нехай виконуються всі умови теореми 3, а також умови:*

1) $q_i < 1,\ i = 5, 6;$

2) $\mu'(0) - \lambda_i(0,0)\varphi'(0) = f_i(0,0,\varphi(0)), \quad i = 1,\dots,k;$

$\nu'(0) - \lambda_i(l,0)\varphi'(l) = f_i(l,0,\varphi(l)), \quad i = k+1,\dots,n.$

Тоді задача (1), (24), (25) в області Π *має єдиний класичний розв'язок.*

Зазначимо, що умова 2 теореми 4 є умовою погодження 1-го порядку між (24) і (25). Очевидно, що вона не є конструктивною (за винятком деяких окремих випадків задачі (1), (24), (25)), тому що для її перевірки потрібно мати функцію u в явному вигляді.

Доведення теореми проводиться за такою схемою. Спочатку система інтегро-операторних рівнянь (7) формально диференціюється за змінною x, а умови (29) – за змінною t. Використовуючи принцип стискуючих відображень, доводиться існування єдиного набору неперервних функцій $\mu_i'(t)$, $i = 1,\dots,k$, та $\nu_j'(t)$, $j = k+1,\dots,n$. При цьому використовується умова $q_5 < 1$ і припускається, що u_{ix}, $i = 1,\dots,n$, – відомі неперервні функції. Одночасно встановлюється оцінка

$$\max_{i=1,\dots,k,\, j=k+1,\dots,n}\{|\mu_i'|,\ |\nu_j'|\} \le \le \frac{1}{1-q_5}\Big[F + nCd_1T\max_{x,t,i}|\lambda_i|\max_{x,t,i}|u_{ix}|(1+d_3)\Big], \tag{35}$$

де F – деяка константа, що не залежить від u_{ix}. З урахуванням (35) та умови $q_6 < 1$ доводиться існування та єдиність неперервно диференційовного за змінною x розв'язку розглядуваної задачі. Оскільки функція $u(x,t)$ задовольняє (1), то вона має неперервну похідну і за змінною t.

Зауваження 4. Аналіз умови 1 теореми 3 приводить до висновку, що її виконання накладає певні обмеження на величини T, L, C, b, β_i. Зокрема, приклад 1, наведений у §20 даного розділу, значною мірою виправдовує цю умову. Зазначимо також, що клас задач, охоплюваних даною теоремою, може бути розширений за допомогою заміни умови 1 такою:

$$q_r = \max_{i,\,x}|\tilde\beta_i|(1 + F_r(\lambda_i,\ f_i,\ b_{ijs},\ H_i,\ T,\ n)) < 1, \quad r = 1, 2,$$

де F_r, $r = 1, 2$, – деякі додатні константи, що залежать від вихідних даних задачі. Виконання останніх нерівностей можна досягнути за рахунок вибору досить малих $\tilde\beta_i$. У доведенні теореми при цьому маємо такі зміни: спочатку доводимо існування і єдиність розв'язку $u(x,t)$ у припущенні, що $\mu(t)$ – відома неперервна функція, після чого

на основі встановлених апріорних оцінок доводимо існування єдиної неперервної функції $\mu(t)$.

Зауваження 5. Доведена теорема 4 дає можливість розглянути періодичну за часовою змінною задачу для системи (1), тобто задачу (1), (25),

$$u_i(x,t) = u_i(x,t+T), \quad i = 1,\dots,n, \tag{36}$$

в області $\Pi_1 = \{(x,t):\ 0 < x < l,\ -\infty < t < \infty\}$.

Теорема 5. *Нехай в області* Π_1 *виконуються умови теореми 3 при* $\tilde\beta_i = -1$, $i = 1,\dots,n$. *Нехай, крім того, функції* λ_i, b_{ijs}, H_i, f_i, *де* $i,j = 1,\dots,n$, $s = 0,1$, *є періодичними за змінною* t *з періодом* T. *Тоді задача (1), (25), (36) в області* Π_1 *має єдиний класичний розв'язок.*

При доведенні теореми на першому кроці в умові (36) покладемо $t = 0$. Маємо задачу (1), (24), (25) при $\tilde\beta(x) = -1$, $\gamma(x) = 0$ в області Π. Існування і єдиність розв'язку цієї задачі гарантується теоремою 3. Далі методом продовження по t із урахуванням періодичності вихідних даних задачі доводиться однозначна розв'язність задачі (1), (25), (36) у будь-якій точці розглядуваної області.

Зауваження 6. Розглянемо нелокальну задачу для системи (1) у більш загальній постановці, а саме задачу (1), (25),

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}(x)u_j(x,0) + \sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}(x)u_j(x,T) = \gamma_i(x), \quad i = 1,\dots,n, \tag{37}$$

з додатковими припущеннями

$$\det\beta(x) \ne 0, \quad x \in [0,l];$$

$$r_i(x) = \sum_{j=1}^{n}\beta_{ji}^1(x)\alpha_{ji}(x) \ne 0, \quad i = 1,\dots,n, \quad x \in [0,l],$$

де

$$\beta(x) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix},$$

β_{ji}^1, $i,j = 1,\dots,n$, – алгебраїчні доповнення до відповідних елементів матриці β. Це дозволяє переписати умови (37) у вигляді

$$u_i(x,0) + \frac{\det\beta(x)}{r_i(x)}u_i(x,T) = \frac{1}{r_i(x)}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ji}^1(x)\Big[\gamma_j(x) - \sum_{s=1,\,s\ne i}^{n}\alpha_{js}(x)\varphi_s(x)\Big],$$

який має структуру умов (24). Використовуючи схему доведення теореми 3, можна довести існування єдиного розв'язку даної задачі.

Не наводячи всіх умов розв'язності задачі (1), (25), (37), які аналогічні відповідним умовам розв'язності задачі (1), (24), (25), для порівняння запишемо такі умови:

$$q_3 = d_1 \max_{i,x}\left|\frac{\det\beta}{r_i}\right| + n^2 d_8 \max_{i,j,x}|\alpha_{ij}| \max_{i,x}\left|\frac{\beta_{ji}^1}{r_i}\right| < 1,$$

$$q_4 = \max\{q_4^1, q_4^2\} < 1,$$

де

$$q_4^1 = TLn + \frac{TLn}{1-q_3}\left[d_8 + d_1\max_{i,x}\left|\frac{\det\beta}{r_i}\right|\right],$$

$$q_4^2 = d_1(q_4^1 - TLn) + TLn,$$

$$d_8 = \sum_{p=1}^{\max\{p_k,p_{k+1}\}+1}\left(\max_{i,x}\left|\frac{\det\beta}{r_i}\right|\right)^p.$$

Очевидно, що ці умови є жорсткішими порівняно з відповідними умовами задачі (1), (24), (25). Це пов'язано зі способом задання нелокальних умов за часовою змінною, у кожну з яких входять значення всіх невідомих функцій у початковий та кінцевий моменти часу.

Зауваження 7. Результати даного параграфа можуть бути перенесені на випадок нелокальних задач для гіперболічних рівнянь та систем вищих порядків. Зокрема, в області П розглянемо диференціальне рівняння

$$u_{tt} - a^2(x,t)u_{xx} = f(x,t,u_x,u_t) \tag{38}$$

з умовами

$$\begin{aligned}&\omega_0(x)u(x,0) + \rho_0(x)u(x,T) = \gamma_0(x),\\ &\omega_1(x)u_t(x,0) + \rho_1(x)u_t(x,T) = \gamma_1(x)\end{aligned} \tag{39}$$

і

$$\begin{aligned}&u(0,t) = \mu(t),\\ &u(l,t) = \nu(t).\end{aligned} \tag{40}$$

Припускається, що функції a, f, ω_i, ρ_i, γ_i, μ, ν, де $i = 1,2$, є відомі та неперервні за всіма своїми аргументами; f, ω_1, ρ_1, γ_1 мають неперервні перші похідні за змінною x; ω_0, ρ_0, γ_0, μ, ν – двічі неперервно диференційовні функції. Нехай також $a(x,t) \neq 0$, $\rho_0(x) \neq -\omega_0(x)$, і виконується умова погодження 0-го порядку:

$$\begin{aligned}&\omega_0(0)\mu(0) + \rho_0(0)\mu(T) = \gamma_0(0),\\ &\omega_0(l)\nu(0) + \rho_0(l)\nu(T) = \gamma_0(l),\\ &\omega_1(0)\mu'(0) + \rho_1(0)\mu'(T) = \gamma_1(0),\\ &\omega_1(l)\nu'(0) + \rho_1(l)\nu'(T) = \gamma_1(l).\end{aligned} \tag{41}$$

Зведемо задачу (38)–(40) до нелокальної задачі для системи двох гіперболічних рівнянь 1-го порядку. Для цього введемо нові функції

$$u_1(x,t) = u_t + au_x,\ \ u_2(x,t) = u_t - au_x. \tag{42}$$

Враховуючи (39), отримуємо, що

$$u(x,t) = -\frac{\rho_0}{\rho_0+\omega_0}\int_0^T \frac{u_1+u_2}{2}\,dt + \int_0^t \frac{u_1+u_2}{2}\,d\tau + \frac{\gamma_0}{\rho_0+\omega_0},$$

якщо $\rho_0(x) \neq -\omega_0(x)$, і

$$u(x,t) = \mu(t) + \int_0^T \frac{u_1-u_2}{2a}\,d\xi,$$

якщо $\rho_0(x) \equiv -\omega_0(x)$. Задача (38)–(40) при цьому переписується у вигляді

$$\begin{aligned}&u_{1t} - a(x,t)u_{1x} = f_1(x,t,u_1,u_2),\\ &u_{2t} - a(x,t)u_{2x} = f_2(x,t,u_1,u_2);\end{aligned} \tag{43}$$

$$\frac{\omega_0(x)}{a(x,0)}(u_1(x,0) - u_2(x,0)) + \frac{\rho_0(x)}{a(x,T)}(u_1(x,T) - u_2(x,T)) =$$

$$= 2\gamma_0'(x) + \frac{\omega_0'(x)\rho_0(x) - \rho_0'(x)\omega_0(x)}{\rho_0(x)+\omega_0(x)}\int_0^T \frac{u_1+u_2}{2}\,dt,$$

$$\omega_1(x)(u_1(x,0) + u_2(x,0)) + \rho_1(x)(u_1(x,T) + u_2(x,T)) = 2\gamma_1(x); \tag{44}$$

$$\begin{aligned}u_1(0,t) + u_2(0,t) &= 2\mu'(t),\\ u_1(l,t) + u_2(l,t) &= 2\nu'(t),\end{aligned} \tag{45}$$

де

$$f_i(x,t,u_1,u_2) = f\Big(x,t,-\frac{\rho_0}{\rho_0+\omega_0}\int_0^T \frac{u_1+u_2}{2}\,dt +$$

$$+\int_0^t \frac{u_1+u_2}{2}\,d\tau, \frac{u_1-u_2}{2a}, \frac{u_1+u_2}{2}\Big) + (-1)^i(a_t - aa_x)\frac{u_1-u_2}{2a},\ \ i = 1,2.$$

Неважко переконатись, що задачі (43)–(45) і (38)–(40) є еквівалентними.

Аналогічні задачі отримуються, якщо замість умов (40) розглядати крайові умови 2-го або 3-го роду.

Якщо умови (39) замінити нелокальними умовами вигляду

$$\alpha_i(t)u(0,t)+\beta_i(t)u(l,t)+\sigma_i(t)u_x(0,t)+\delta_i(t)u_x(l,t)=h_i(t),\ i=1,2,$$

то заміна (42) переводить їх у рівності

$$\frac{\sigma_i(t)}{a(0,t)}(u_1(0,t)-u_2(0,t))+\frac{\delta_i(t)}{a(l,t)}(u_1(l,t)-u_2(l,t))=$$

$$=2h_i(t)+\frac{\alpha_i(t)\rho_0(0)}{\rho_0(0)+\omega_0(0)}\int\limits_0^T(u_1(0,t)+u_2(0,t))\,dt-$$

$$-\alpha_i(t)\int\limits_0^t(u_1(0,\tau)+u_2(0,\tau))\,d\tau+$$

$$+\frac{\beta_i(t)\rho_0(l)}{\rho_0(l)+\omega_0(l)}\int\limits_0^T(u_1(l,t)+u_2(l,t))\,dt-$$

$$-\beta_i(t)\int\limits_0^t(u_1(l,\tau)+u_2(l,\tau))\,d\tau.$$

Отже, кожна з описаних задач для гіперболічного рівняння 2-го порядку (38) зводиться до однієї з наведених вище нелокальних задач для гіперболічної системи 1-го порядку. Щоб не повторюватись, запишемо лише деякі умови розв'язності задачі (38), (39), (40):

$$q_1=\frac{1}{1-q}\max_x|r|<1,\ q_2=\frac{2}{1-q_1}\max_x\left|\frac{\rho_0\rho_1}{ra(x,T)}\right|<1,$$

$$q_3^1=\frac{T}{1-q_2}\left[\frac{1}{(1-q)(1-q_1)}\left(L+\max_x|s|\right)+L_1\right]+TL_1<1,$$

$$q_3^2=\frac{T}{(1-q)(1-q_1)}\left(L_1+\max_x|s|\right)+\frac{q_3^1-TL_1}{(1-q)(1-q_1)}+TL_1<1,$$

$$q_4=\max_x|r|\sum_{p=0}^{\max\{p_1,p_2\}}d_{10}^p<1,$$

$$q_5=\frac{d_{11}}{1-q_4}\max\{d_{10},d_{10}^{\max\{p_1,p_2\}+1}\}<1,$$

$$q_6^1=\frac{2d_9^2d_{11}T}{1-q_5}\left[C+\frac{d_9^3}{1-q_4}+\sum_{p=0}^{\max\{p_1,p_2\}+1}d_{10}^p(\max_x|s|+2CTd_9)\right]+$$

$$+2TCd_9<1,$$

$$q_6^2=\frac{d_9}{1-q_4}\Big[2Td_9\sum_{p=0}^{\max\{p_1,p_2\}+1}d_{10}^p(d_9\max_x|s|+C)+$$

$$+d_{11}(q_6^1-2TCd_9)\max\{d_2,d_2^{\max\{p_1,p_2\}+1}\}\Big]+2TCd_9<1,$$

$$\rho_0(x)\rho_1(x)\neq 0,\quad r_1(x)\neq 0\quad \text{для всіх } x\in[0,l],$$

де

$$q=2\max_x\left|\frac{\rho_0\rho_1}{ra(x,T)}\right|,$$

$$r(x)=\frac{1}{r_1(x)}\left(\frac{\omega_0(x)\rho_1(x)}{a(x,0)}-\frac{\omega_1(x)\rho_0(x)}{a(x,T)}\right),$$

$$r_1(x)=\frac{\omega_1(x)\rho_0(x)}{a(x,T)}+\frac{\omega_0(x)\rho_1(x)}{a(x,0)},$$

$$s(x)=\frac{\rho_1(x)}{r(x)}\frac{\omega_0'(x)\rho_0(x)-\rho_0'(x)\omega_0(x)}{\rho_0(x)+\omega_0(x)},$$

$$d_9=\exp\{T\max_{x,t}|a_x'|\},\ d_{10}=d_1q,\ d_{11}=d_1\max_{x,t}\frac{1}{|a|},$$

$$L_1=L\Big[T\max_x\left|\frac{\rho_0}{\rho_0+\omega_0}+1\right|+\max_{x,t}\frac{1}{|a|}+1\Big]+\max_{x,t}\left|\frac{a_t'}{a}-a_x'\right|,$$

L – константа, з якою функція f задовольняє умову Ліпшиця за змінними u, u_x, u_t; C – константа, що задовольняє нерівність

$$|f_{iu}|\leq C\ \forall(x,t)\in\overline{\Pi},\ \forall u:\max_{i,x,t}|u_i|<\infty.$$

Додаючи до цих припущень умови погодження 0-го та 1-го порядків (умова погодження 0-го порядку забезпечується виконанням (41)), отримуємо достатні умови існування єдиного класичного розв'язку задачі (38), (39), (40).

§ 22. Квазілінійні гіперболічні системи

22.1. Локальна та глобальна розв'язність у криволінійній напівсмузі

Нехай γ_s, $s = 0,\dots,m+1$, – криві, задані рівняннями $x = a_s(t)$, де $a_s \in C^1[0,T]$; $a_{s+1}(t) > a_s(t)$ для всіх $t \in [0,T]$. В області $\Omega^T = \{(x,t):\ a_0(t) < x < a_{m+1}(t),\ 0 < t < T\}$ розглянемо систему рівнянь

$$u_{it} + \lambda_i(x,t,u)u_{ix} = f_i(x,t,u), \qquad i = 1,\dots,n. \tag{1}$$

Будемо припускати, що всі функції $\lambda_i(x,t,u)$, $f_i(x,t,u)$ визначені в області $D^T_{M_0} = \Omega^T \times \{u:\ u \in \mathbb{R}^n,\ \|u\| = \max\limits_i |u_i| \le M_0\}$, вимірні та обмежені за модулем константами Λ і F відповідно, де M_0 – деяка додатна константа. Нехай для кожного фіксованого $i \in \{1,\dots,n\}$ та $s \in \{0,\dots,m+1\}$ значення

$$\operatorname{sgn}(\lambda_i(a_s(t),t,u) - a'_s(t))$$

не дорівнює нулю і не залежить від t, u. Нехай також існують невід'ємні, сумовні на $[0,T]$ функції $\Lambda_i(t)$ та $F_i(t)$, $i = 1,2$, такі, що при $(x_1,t,u^{(1)})$, $(x_2,t,u^{(2)}) \in D^T_{M_0}$ майже для всіх $t \in [0,T]$ виконуються нерівності

$$\begin{gathered}|\lambda_i(x_1,t,u^{(1)}) - \lambda_i(x_2,t,u^{(2)})| \le \\ \le \Lambda_1(t)|x_1 - x_2| + \Lambda_2(t)\|u^{(1)} - u^{(2)}\|, \quad i = 1,\dots,n; \\ |f_i(x_1,t,u^{(1)}) - f_i(x_2,t,u^{(2)})| \le \\ \le F_1(t)|x_1 - x_2| + F_2(t)\|u^{(1)} - u^{(2)}\|, \quad i = 1,\dots,n.\end{gathered} \tag{2}$$

Будемо вимагати, щоб $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n$ в області $D^T_{M_0}$, причому, якщо для деякого $i \in \{1,\cdots,n-1\}$ існує хоча б одна така точка $(x_0,t_0) \in \bar\Omega^T$, що $\lambda_i(x_0,t_0,u(x_0,t_0)) = \lambda_{i+1}(x_0,t_0,u(x_0,t_0))$, то $\lambda_i(x,t,u) \equiv \lambda_{i+1}(x,t,u)$ для всіх $(x,t,u) \in D^T_{M_0}$.

Позначимо через $A_0(L,T)$ метричний простір неперервних функцій $v:\ \Omega^T \to \mathbb{R}^n$ з рівномірною метрикою, які задовольняють умову Ліпшиця за змінними x,t з константою L. Якщо $(x,t,v) \in D^T_{M_0}$, то, у силу зроблених припущень, в області Ω^T існує єдиний узагальнений (за Каратеодорі) (теореми 2.2, 2.3) розв'язок $\omega_i(\tau;x,t,v)$ (характеристика i-го рівняння системи (1), що проходить через точку $(x,t) \in \Omega^T$) задачі

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(\xi,\tau,v(\xi,\tau)),\ \xi(t) = x,\ v \in A_0(L,T). \tag{3}$$

Позначимо через $t_i(x,t,v)$ найменше значення τ, при якому характеристика $\omega_i(\tau;x,t,v)$ досягає межі Ω^T (теорема 2.2).

Для системи (1) задамо початкові умови

$$u_i(x,0) = \varphi_i(x), \quad i = 1,\dots,n, \tag{4}$$

та нелокальні граничні умови

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=0}^{m+1} b_{ijs}(t)u_j(a_s(t),t) = h_i(t), \quad i = 1,\dots,N. \tag{5}$$

Тут функції φ_i, b_{ijs}, h_i є неперервними та ліпшицевими з константами Φ_1, B_1 і H_1 відповідно:

$$\begin{gathered}|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| \le \Phi_1|x_1 - x_2|, \quad i = 1,\dots,n; \\ |b_{ijs}(t_1) - b_{ijs}(t_2)| \le B_1|t_1 - t_2|, \quad i,j = 1,\dots,n, \quad s = 0,\dots,m+1; \\ |h_i(t_1) - h_i(t_2)| \le H_1|t_1 - t_2|, \quad i = 1,\dots,n.\end{gathered} \tag{6}$$

Нехай також має місце нерівність

$$\Phi = \max_{a_0(0)\le x\le a_{m+1}(0)} \|\varphi(x)\| < M_0\,.$$

Припустимо, що існують такі константи $\Lambda_0>0$ та $\varepsilon_0\in(0,\min\limits_t|(a_0(t)-$ $-a_{m+1}(t)|]$, що функції

$$\lambda_i(x,t,u) - a'_0(t),$$

де

$$i \in I_1 = \{i|\lambda_i(a_0(0),0,0) - a'_0(0) > 0\},\ a_0(t) \le x \le a_0(t) + \varepsilon_0\,,$$

та

$$-\lambda_i(x,t,u) + a'_{m+1}(t),$$

де

$$i \in I_2 = \{i| - \lambda_i(a_{m+1}(0),0,0) + a'_{m+1}(0) < 0\}\,, \quad a_{m+1}(t) - \varepsilon_0 \le x \le a_{m+1}(t)\,,$$

набувають значень, не менших за Λ_0.

Для кожного $i \in \{1,\dots,n\}$ позначимо через $\Omega^{Tv}_{\varphi_i}$, Ω^{Tv}_{0i}, $\Omega^{Tv}_{m+1,i}$ множини точок $(x,t) \in \bar\Omega$, для яких відповідно

$$\begin{gathered}t_i(x,t,v) = 0; \\ t_i(x,t,v) > 0,\ \omega_i(t_i(x,t,v);x,t,v) = a_0(t_i(x,t,v)); \\ t_i(x,t,v) > 0,\ \omega_i(t_i(x,t,v);x,t,v) = a_{m+1}(t_i(x,t,v))\,.\end{gathered}$$

Для подальших міркувань введемо позначення:

$$I = \{1,\cdots,n\};$$

$$\mu_i(t) = u_i(a_0(t), t), \quad i \in I_1;$$
$$\nu_i(t) = u_i(a_{m+1}(t), t), \quad i \in I_2;$$
$$p_1 = |I_1|; \quad p_2 = |I_2|;$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_{1i_10} & \cdots & b_{1,i_1+p_1,0} & b_{1i_2,m+1} & \cdots & b_{1,i_2+p_2,m+1} \\ b_{2i_10} & \cdots & b_{2,i_1+p_1,0} & b_{2i_2,m+1} & \cdots & b_{2,i_2+p_2,m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{Ni_10} & \cdots & b_{N,i_1+p_1,0} & b_{Ni_2,m+1} & \cdots & b_{N,i_2+p_2,m+1} \end{pmatrix},$$

де i_1 та i_2 – мінімальні елементи множин I_1 та I_2 відповідно. Припустимо також, що $p_1 + p_2 = N$ і

$$\det B(t) \neq 0, \quad t \in [0, T]. \tag{7}$$

Означення 1. Узагальненим розв'язком задачі (1), (4), (5) називається ліпшицевий розв'язок системи інтегро-операторних рівнянь

$$u_i(x,t) = (R_i u)(x,t) + \int\limits_{t_i(x,t,u)}^{t} f_i(\omega_i(\tau; x, t, u), \tau, u(\omega_i(\tau; x, t, u), \tau))\, d\tau,$$
$$i = 1, \dots, n, \tag{8}$$

де

$$(R_i u)(x,t) = \begin{cases} \varphi_i(\omega_i(0; x, t, u)), \ (x,t) \in \Omega^{Tu}_{\varphi_i}, \\ \mu_i(t_i(x,t,u)), \ (x,t) \in \Omega^{Tu}_{0i}, \\ \nu_i(t_i(x,t,u)), \ (x,t) \in \Omega^{Tu}_{m+1,i}; \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mu_i(t) = W_i(t), \quad i \in I_1; \\ &\nu_i(t) = W_i(t), \quad i \in I_2; \end{aligned}\right. \tag{9}$$

$$W_i(t) = \frac{1}{\det B(t)} \sum_{j=1}^{N} B_{ji}(t) \Big[h_j(t) - \sum_{l=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} b_{jls}(t) \widetilde{W}_l(a_s(t), t) -$$
$$- \sum_{l \in I \setminus I_1} b_{jl0}(t) \widetilde{W}_l(a_0(t), t) - \sum_{l \in I \setminus I_2} b_{j,l,m+1}(t) \widetilde{W}_l(a_{m+1}(t), t) \Big];$$

$$\widetilde{W}_l(x,t) = (R_l u)(x,t) + \int\limits_{t_l(x,t,u)}^{t} f_l(\omega_l(\tau; x, t, u), \tau, u)\, d\tau;$$

B_{ji}, $i, j = 1, \dots, N$, – алгебричні доповнення до відповідних елементів матриці B.

У просторі $A_0(L, T_1)$, де $T_1 \in (0, T]$, розглянемо кулю

$$A(L, T_1, M) = \Big\{ u \in A_0(L, T_1) : \max_{\Omega^{T_1}} \|u - \varphi\| \leq M \Big\},$$

де $0 < M \leq M_0 - \Phi$. Тоді, якщо $u \in A(L, T_1, M)$, то $\|u\| \leq M + \Phi \leq M_0$.

Теорема 1. *Нехай виконуються всі зроблені щодо задачі (1), (4), (5) припущення, а також виконується умова погодження 0-го порядку між (4) і (5):*

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{s=0}^{m+1} b_{ijs}(0) \varphi_j(a_s(0)) = h_i(0), \quad i = 1, \dots, N. \tag{10}$$

Тоді для довільної константи $M \in (0; M_0 - \Phi]$ можна вказати таке $T_1 \in (0; T]$, при якому в області Ω^{T_1} існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1), (4), (5), що належить до $A(L, T_1, M)$.

Доведення. Позначимо через S оператор, заданий формулами (8) і визначений на $A(L, T_1, M)$. Покажемо спочатку існування таких додатних констант L і T_1, при яких оператор S відображає кулю $A(L, T_1, M)$ повного метричного простору $A_0(L, T_1)$ в себе і є стискуючим. Очевидно, якщо $u \in A(L, T_1, M)$, то внаслідок умов гладкості, накладених на вихідні дані задачі, функція Su, задана формулами (8), є неперервною в Ω^{T_1}.

Доведемо спочатку ліпшицевість функцій $\mu_i(t)$, $i \in I_1$, та $\nu_j(t)$, $j \in I_2$, визначивши при цьому величину їх спільної константи Ліпшиця. Для цього, застосовуючи лему Гронуола до почленної різниці інтегральних рівнянь, якими визначаються характеристики $\omega_i(\tau; x_1, t, u)$ і $\omega_i(\tau; x_2, t, u)$, а також $\omega_i(\tau; x, t_1, u)$ і $\omega_i(\tau; x, t_2, u)$, отримуємо нерівності

$$\left.\begin{aligned} &|\omega_i(\tau; x_1, t, u) - \omega_i(\tau; x_2, t, u)| \leq E|x_1 - x_2|, \\ &|\omega_i(\tau; x, t_1, u) - \omega_i(\tau; x, t_2, u)| \leq \Lambda E|t_1 - t_2| \end{aligned}\right. \tag{11}$$

для довільних (x_1, t), (x_2, t), (x, t_1), $(x, t_2) \in \Omega^{T_1}$, де

$$E = \exp\Big[\int\limits_0^{T_1} (\Lambda_1(\tau) + L\Lambda_2(\tau))\, d\tau \Big].$$

Нехай значення T_1 таке, що характеристики

$$\omega_i(\tau; a_1(T_1), T_1, u(a_1(T_1), T_1)) \quad \text{та} \quad \omega_i(\tau; a_m(T_1), T_1, u(a_m(T_1), T_1))$$

перетинають пряму $t = 0$ у межах області $\bar{\Omega}^{T_1}$ для всіх $i \in \{1, \dots, n\}$ та $u \in A(L, T_1, M)$. Зазначимо також, що в силу ліпшицевості функцій $b_{ijs}(t)$ функції $B_{ji}(t)$ та $\det B(t)$ також задовольняють умову Ліпшиця. Спільну константу Ліпшиця цих функцій позначимо через B_2. Виходячи з цього, а також враховуючи (8), (10), отримуємо, що для будь-яких $t_1, t_2 \in [0, T_1]$ справедлива оцінка

$$\max_{i \in I_1, j \in I_2} \{ |\mu_i(t_1) - \mu_i(t_2)|, \ |\nu_j(t_1) - \nu_j(t_2)| \} \leq L_1(L)|t_1 - t_2|,$$

де

$$L_1(L) = N\Big[B_2 \max_t \frac{1}{|\det B|}\Big(1+\max_t \frac{1}{|\det B|}\Big) + B_3\Big]\times$$

$$\times\Big(\max_{i,t}|h_i| + n(m+2)bT_1F\Big) + NB_3\Big[H_1 + Nn(m+2)B_1(T_1F+\Phi)+$$

$$+Nn(m+2)b\Big[(Q_1 + LQ_2 + \Phi_1 E)\Big(\max_{i,t}|a_i'| + \Lambda\Big) + FT_1\Big]\Big],$$

$$b = \max_{\substack{i,j,t\\ s=1,\dots,m\\ r\in I\setminus I_1, l\in I\setminus I_2}} \{|b_{ijs}|, |b_{ir0}|, |b_{il,m+1}|\},$$

$$B_3 = \max_t \frac{1}{|\det B|}\max_{i,j,t}|B_{ji}|,$$

$$Q_1 = \int_0^{T_1} F_1(\tau)\,d\tau, \quad Q_2 = \int_0^{T_1} F_2(\tau)\,d\tau.$$

Нехай тепер $(x,t) \in \Omega^{T_1}$, $u \in A(L,T_1,M)$. Тоді, враховуючи умову погодження (10), маємо нерівність

$$\|(Su)(x,t) - \varphi(x)\| \le (L_1(L) + \Phi_1\Lambda + F)T_1.$$

Таким чином, якщо

$$(L_1(L) + \Phi_1\Lambda + F)T_1 \le M, \tag{12}$$

то $\|Su - \varphi\| \le M$.

Визначимо тепер величину константи Ліпшиця для функції Su. Для цього розглянемо довільні точки $(x_1,t),(x_2,t) \in \bar\Omega_{0i}^{T_1,u}$. Якщо $a_0(t) \le x \le a_0(t) + \varepsilon_0$, то згідно з припущеннями

$$\lambda_i(x,t,u) - a_0'(t) \ge \Lambda_0. \tag{13}$$

Вибираючи значення $T_1 > 0$ таким, щоб виконувалась нерівність

$$\Lambda T_1 \le \varepsilon_0, \tag{14}$$

забезпечуємо виконання (13) для всіх $(x,t,u) \in D_{M_0}^{T_1}$ таких, що $x \le a_0(t) + \Lambda T_1$. З того, що $(x,t) \in \bar\Omega_{0i}^{T_1,u}$, випливає, що $x \le a_0(t) + \Lambda t$. Враховуючи це, отримуємо, що нерівність (13) виконується в області $\bar\Omega_{0i}^{T_1,u} \times \{u \in R^n : \|u\| \le M_0\}$. Користуючись останнім фактом, геометричними міркуваннями та першою з оцінок (11), легко отримуємо, що існує константа $\widetilde\Lambda_0 : 0 < \widetilde\Lambda_0 \le \Lambda_0$, яка забезпечує виконання нерівностей

$$|t_i(x_1,t,u) - t_i(x_2,t,u)| \le$$

$$\le \frac{1}{\widetilde\Lambda_0}\max_{\tau\in[0,t]}|\omega_i(\tau;x_1,t,u) - \omega_i(\tau;x_2,t,u)| \le \frac{E}{\widetilde\Lambda_0}|x_1 - x_2|. \tag{15}$$

З (15) випливає, що

$$|(S_iu)(x_1,t) - (S_iu)(x_2,t)| \le$$

$$\le (\widetilde\Lambda_0^{-1}(L_1(L) + F) + Q_1 + LQ_2)E|x_1 - x_2|. \tag{16}$$

Міркуючи аналогічно, таку ж нерівність отримуємо в області $\Omega_{m+1,i}^{T_1,u}$. Очевидною є відповідна оцінка в $\Omega_{\varphi_i}^{T_1,u}$:

$$|(S_iu)(x_1,t) - (S_iu)(x_2,t)| \le (\Phi_1 + Q_1 + LQ_2)E|x_1 - x_2|. \tag{17}$$

Виберемо T_1 таким, щоб виконувалась умова

$$\Lambda T_1 \le \frac{1}{2}\min_{t\in[0,T]}|a_{m+1}(t) - a_0(t)|. \tag{18}$$

Очевидно, що тоді $\Omega_{0i}^{T_1,u} \cap \Omega_{m+1,i}^{T_1,u} = \emptyset$. А тому можна вважати, що порівнюються значення (S_iu) у двох точках, узятих в одній із областей $\bar\Omega_{\varphi_i}^{T_1,u}$, $\bar\Omega_{0i}^{T_1,u}$ або $\bar\Omega_{m+1,i}^{T_1,u}$; цього завжди можна досягти введенням проміжної точки. Із цих міркувань випливає, що функція $(Su)(x,t)$ задовольняє умову Ліпшиця за змінною x з константою

$$L^* = (Q_1 + LQ_2 + \max\{\Phi_1, \widetilde\Lambda_0^{-1}(L_1(L) + F)\})E. \tag{19}$$

Далі, використовуючи умову (14), маємо, що для будь-яких точок $(x,t_1),(x,t_2) \in \Omega^{T_1}$ $(t_1 < t_2)$ можна знайти або точку $(x_1,t_1) \in \Omega^{T_1}$ таку, що $x_1 = \omega_i(t_1;x,t_2,u)$, або точку $(x_1,t_2) \in \Omega^{T_1}$ таку, що $x = \omega_i(t_1;x_1,t_2,u)$. Зокрема, у першому випадку справедлива нерівність

$$|(S_iu)(x,t_1) - (S_iu)(x,t_2)| \le |(S_iu)(x,t_1) - (S_iu)(x_1,t_1)| + F|t_1 - t_2|.$$

Міркуючи аналогічно в другому випадку, приходимо до висновку, що константою Ліпшиця функції Su за змінною t може служити $F + \Lambda L^*$. Оскільки $Q_1 \to 0$, $Q_2 \to 0$, $E \to 1$ при $T_1 \to 0$, то виберемо

$$L \ge E\max\{\Phi_1, \widetilde\Lambda_0^{-1}(L_1^* + F), F + \Lambda\max\{\Phi_1, \widetilde\Lambda_0^{-1}(L_1^* + F)\}\}, \tag{20}$$

де

$$L_1^* = N\Big[B_2\max_t \frac{1}{|\det B|}\Big(\max_t \frac{1}{|\det B|} + 1\Big) + B_3\Big]\max_{i,t}|h_i| +$$

$$+NB_3\Big[H_1 + Nn(m+2)\Big(\Phi + b\Phi_1 E\Big(\max_{i,t}|a_i'| + \Lambda\Big)\Big)\Big].$$

Таким чином, нерівностей (12), (14), (18), (20) досить для того, щоб оператор S відображав кулю $A(L,T_1,M)$ у себе.

Залишилось показати, що оператор S при досить малому T_1 є стискуючим. Почнемо з оцінки різниці $\omega_i(\tau;x,t,u) - \omega_i(\tau;x,t,v)$, де $u, v \in A(L, T_1, M)$. Застосовуючи лему Гронуола до почленної різниці інтегральних рівнянь, якими задаються характеристики $\omega_i(\tau; x, t, u)$ і $\omega_i(\tau; x, t, v)$, та враховуючи (2), отримуємо нерівність

$$|\omega_i(\tau; x, t, u) - \omega_i(\tau; x, t, v)| \le EQ_3 \max \|u - v\|, \tag{21}$$

де

$$Q_3 = \int_0^{T_1} \Lambda_2(\tau)\, d\tau .$$

Звідси випливає, зокрема, що при $(x,t) \in \bar{\Omega}^{T_1,u}_{\varphi_i} \cap \bar{\Omega}^{T_1,v}_{\varphi_i}$

$$\begin{gathered} |(S_i u)(x,t) - (S_i v)(x,t)| \le \\ \le (\Phi_1 EQ_3 + EQ_1 Q_3 + LEQ_2 Q_3 + Q_2) \max_{\bar{\Omega}^{T_1}} \|u - v\| . \end{gathered} \tag{22}$$

Якщо $(x,t) \in \bar{\Omega}^{T_1,u}_{0i} \cap \bar{\Omega}^{T_1,v}_{0i}$, то, використовуючи схему для отримання (15), маємо

$$|t_i(x,t,u) - t_i(x,t,v)| \le \widetilde{\Lambda}_0^{-1} EQ_3 \max_{\bar{\Omega}^{T_1}} \|u - v\| . \tag{23}$$

Звідси

$$\begin{gathered} |(S_i u)(x,t) - (S_i v)(x,t)| \le (\widetilde{\Lambda}_0^{-1} E(L_1(L) + F)Q_3 + \\ + EQ_1 Q_3 + LEQ_2 Q_3 + Q_2) \max_{\bar{\Omega}^{T_1}} \|u - v\| . \end{gathered} \tag{24}$$

Така ж оцінка є справедливою й у випадку, коли $(x,t) \in \bar{\Omega}^{T_1,u}_{m+1,i} \cap \cap \bar{\Omega}^{T_1,v}_{m+1,i}$.

І, нарешті, розглянемо випадок, коли $(x,t) \in \bar{\Omega}^{T_1,u}_{\varphi_i} \cap \bar{\Omega}^{T_1,v}_{0i}$. При цьому $x \le a_0(t) + \Lambda t$. А це означає, що знову можна скористатись оцінкою (23). Внаслідок цього одержимо

$$t_i(x,t,v) \le \widetilde{\Lambda}_0^{-1} EQ_3 \max_{\bar{\Omega}^{T_1}} \|u - v\| .$$

Розглянемо тепер функцію $\omega_i(\tau; x, t, u) - a_0(\tau)$. Із оцінки (21) випливає нерівність

$$\omega_i(t_i(x,t,v); x, t, u) - a_0(t_i(x,t,v)) \le EQ_3 \max_{\bar{\Omega}^{T_1}} \|u - v\| \le 2MEQ_3 .$$

Отже, якщо $2MEQ_3 \le \varepsilon_0$, то функція $\omega_i(\tau; x, t, u) - a_0(\tau)$ при $0 \le \tau \le \le t_i(x,t,v)$ є зростаючою, оскільки $\omega_{i\tau}(\tau; x, t, u) - a_0'(\tau) = \lambda_i(\xi, \tau, u) - -a_0'(\tau) > 0$. Звідси

$$\omega_i(0; x, t, u) - a_0(0) \le$$

$$\le \omega_i(t_i(x,t,v); x, t, u) - a_0(t_i(x,t,v)) \le EQ_3 \max_{\bar{\Omega}^{T_1}} \|u - v\| .$$

У підсумку,

$$\begin{gathered} |(S_i u)(x,t) - (S_i v)(x,t)| \le \\ \le ((\Phi_1 + \widetilde{\Lambda}_0^{-1}(L_1(L) + F) + Q_1 + LQ_2)EQ_3 + Q_2) \max_{\bar{\Omega}^{T_1}} \|u - v\| . \end{gathered}$$

Таким чином, для того щоб оператор S був стискуючим, достатньо виконання нерівностей

$$\begin{gathered} 2MEQ_3 \le \varepsilon_0 , \\ (\Phi_1 + \widetilde{\Lambda}_0^{-1}(L_1(L) + F) + Q_1 + LQ_2)EQ_3 + Q_2 < 1 , \end{gathered} \tag{25}$$

що досягається за рахунок вибору досить малого значення T_1. Отже, знаходячись в умовах принципу стискуючих відображень, зразу отримуємо потрібне твердження: нерухома точка $u(x,t)$ оператора S є розв'язком системи рівнянь (8) і задовольняє умову Ліпшиця за змінною t. Доведення теореми 1 завершено. ∎

Далі мова йтиме про існування єдиного, глобального за змінною t розв'язку задачі (1), (4), (5). Усі припущення, зроблені щодо розглядуваної задачі, залишаються в силі. Крім цього, припускатимемо, що функції $\lambda_i(x,t,u)$ та $f_i(x,t,u)$, $i = 1, \ldots, n$, є неспадними за кожною із змінних $x, u_1, \cdots, u_n$ зокрема (при фіксованих усіх решти), а також $\Lambda < 1$.

Позначимо через $C_0(L,T)$ підпростір простору $A_0(L,T)$, складений із функцій $u \in A_0(L,T)$, які є неспадними за змінною x. Нехай $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $I_1 \cup I_2 = I$; звідси $n = N$ (у випадку, коли $a_0(t) = \mathrm{const}$, $a_{m+1}(t) = \mathrm{const}$, ця умова виконується автоматично за рахунок припущень щодо монотонності λ_i). Припустимо також, що

$$f_i(x,t,u) \ge 0, \quad i \in I_1; \quad f_i(x,t,u) \le 0, \quad i \in I_2; \tag{26}$$

функції $\varphi_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, неспадні на $[a_0(0), a_{m+1}(0)]$; $\mu_i(t)$, $i \in I_1$, незростаючі, а $\nu_j(t)$, $j \in I_2$, неспадні на $[0,T]$ за умови, що $u \in \in C_0(L,T)$. Функції μ_i та ν_j при цьому визначаються формулами (9).

І, нарешті, зробимо ще одне припущення щодо функцій f_i, а саме

$$|f_i(x,t,u)| \le M(t)\psi(\|u\|), \quad (\lambda, t, u) \in D^T_\infty = \Omega^T \times \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \ldots, n , \tag{27}$$

де $M(t)$ – деяка сумовна на $[0,T]$ функція; $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – деяка неперервна неспадна функція, для якої

$$\psi(0) = 0, \quad \int^{\infty} \frac{d\alpha}{\psi(\alpha)} = \infty .$$

Враховуючи умову (27), а також припускаючи, що

$$q = n^2 b(m+2)B_3 < 1 , \tag{28}$$

маємо, що для будь-якого узагальненого розв'язку u задачі (1), (4), (5) виконується нерівність

$$\|u\| \le \mu_1 + \frac{1}{1-q} \int_0^t M(\tau)\psi\Big(\max_{\substack{0\le x\le l\\ 0\le\theta\le\tau}} \|u(x,\theta)\|\Big)\, d\tau , \tag{29}$$

де

$$\mu_1 = \max\Big\{\Phi, \frac{nB_3}{1-q}\Big(\max_{i,t}|h_i| + n(m+2)b\Phi\Big)\Big\}.$$

На основі оцінки (29) можна стверджувати, що $\|u\|$ не перевищує деякої додатної константи μ, яка однозначно визначається рівнянням

$$\int_{\mu_1}^{\mu} \frac{d\alpha}{\psi(\alpha)} = \frac{1}{1-q}\int_0^T M(\tau)\, d\tau . \tag{30}$$

Теорема 2. *Нехай виконуються всі припущення теореми 1, умови монотонності, накладені на вихідні дані задачі (1), (4), (5), а також умови (26), (27) і (28). Нехай, крім того,* $F_1(t) = F_2(t) = = \Lambda_1(t) = \Lambda_2(t) = \mathrm{const} = Q_0$,

$$\widetilde{q} = \widetilde{\Lambda}_0^{-1} N^2 B_3 n(m+2)b\Big(\max_{i,t}|a_i'| + \Lambda\Big) < 1 .$$

Тоді в області Ω^T *існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1), (4), (5).*

Д о в е д е н н я. Оскільки (8) є системою інтегральних рівнянь Вольтерра 2-го роду, то єдиність доводиться стандартно: шляхом перенесення початку відліку часу в точку t^*, яка є нижньою границею множини точок t, для яких порушується єдиність. Сталість кроку t^* при цьому гарантується.

Покажемо спочатку, що звуження оператора S на кулю

$$C(L, T_1, M) = \{u \in C_0(L, T_1) : \|u(x,t) - \varphi(x)\| \le M\} , \quad T_1 \le T ,$$

відображає її в себе і є стискуючим. Те, що при $u \in C(L, T_1, M)$ функція $(Su)(x,t)$ не спадає за змінною x, випливає з того, що при сформульованих умовах монотонності кожний із доданків правої частини (8) є неспадним за змінною x. Вибираючи L і T_1 такими, щоб виконувались умови (12), (14), (18), (20), (25), і беручи до уваги доведення теореми 1, отримуємо потрібне твердження.

Будемо будувати розв'язок у всій області Ω^T методом продовження по t. Виберемо $M_0 > \mu$ і покладемо $M = M_0 - \mu$. Застосовуючи теорему 1, підбираємо L^1 і T_1 такими, що забезпечують існування єдиного узагальненого розв'язку в Ω^{T_1}. Далі, якщо $T_1 < T$, то, беручи значення $u(x, T_1)$ за початкове, знову застосовуємо теорему 1, не змінюючи констант M і M_0, але підбираючи нові константи L^2 і T_2. Процес продовжуємо до тих пір, поки не буде вичерпано всю область Ω^T. При цьому нерівності для визначення L^k і T_k набувають вигляду

$$\Lambda T_k \le \frac{1}{2}\min_t |a_0(t) - a_{m+1}(t)| , \quad \Lambda T_k \le \varepsilon_0 ,$$

$$(L_1(L^k) + L^{k-1}\Lambda + F)T_k \le M ,$$

$$L^k \ge L^{k-1} + F + \widetilde{\Lambda}_0^{-1}(1+\Lambda)(F + L_1^* - \widetilde{q}E\Phi_1) + 2 ,$$

$$2MQ_0T_k \exp((1+L^k)Q_0T_k) \le \varepsilon_0 ,$$

$$[L^{k-1} + \widetilde{\Lambda}_0^{-1}(L_1(L^k) + F) + Q_0T_k + L^kQ_0T_k]Q_0T_k + $$
$$+ \exp((1+L^k)Q_0T_k) + Q_0T_k < 1 ,$$

де $L^0 = \Phi_1$. З останньої нерівності випливає, що $Q_0T_k < 1$. Крім того, будемо вимагати, щоб $T_kQ_0L^k < 1$. У результаті $\exp((1+ +L^k)Q_0T_k) < 10$. Введемо позначення:

$$\gamma_1 = F + \widetilde{\Lambda}_0^{-1}(1+\Lambda)(F + L_1^* - \widetilde{q}E\Phi_1) + 2 ,$$

$$\gamma_2 = \min\Big\{\frac{1}{2\Lambda}\min_t |a_0(t) - a_{m+1}(t)|, \frac{\varepsilon_0}{\Lambda}, \frac{\varepsilon_0}{20MQ_0}, \frac{1}{Q_0},$$
$$\frac{1}{20Q_0[\gamma_1 + \widetilde{\Lambda}_0^{-1}(F + L_1(\gamma_1))]}, \frac{M}{2[F + L_1(\gamma_1)]}\Big\} ,$$

$$\gamma_3 = \min\Big\{\frac{M}{2(\Lambda + \widetilde{q})}, \frac{1}{20Q_0(2 + \widetilde{\Lambda}_0^{-1}\widetilde{q})}\Big\} ,$$

$$\gamma_4 = \max\Big\{0, \frac{\gamma_3}{\gamma_2} - \gamma_1 - \Phi_1\Big\} .$$

При $L_1 = \Phi_1$ на k-му кроці побудови розв'язку нас задовольнятиме константа Ліпшиця $L_k = L_{k-1} + \gamma_1 = \Phi_1 + k\gamma_1$ та проміжок часу

$$T_k = \frac{\gamma_3}{\gamma_4 + \Phi_1 + k\gamma_1} ,$$

які й забезпечують виконання умов теореми 1. Очевидно, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k = +\infty\,.$$

А це свідчить про те, що існування єдиного узагальненого розв'язку задачі (1), (4), (5) в умовах теореми 2 можна гарантувати для довільного проміжку часу T. Теорему 2 доведено. ■

22.2. Локальна розв'язність у криволінійному куті

На задані вище криві γ_s, $s = 0, 1, \ldots, m+1$, накладемо додаткові умови: $a_s(0) = 0$, $a_{s+1}(t) > a_s(t)$ для всіх $t > 0$. При цьому лінія задання початкових умов вироджується в точку $(0,0)$, а область Ω^T є криволінійним сектором у верхній півплощині площини xOt, обмеженим кривими γ_0, γ_{m+1} і прямою $t = T$.

В області Ω^T розглянемо задачу (1), (5). Умови, що накладаються на взаємне розташування характеристик системи (1) і кривих γ_s, $s = 0, 1, \ldots, m+1$, залишаються без змін. Нехай $r+1$ – це кількість характеристик системи (1), які виходять із точки $(0,0)$ і проходять через Ω^T, і нехай ці характеристики відповідають коефіцієнтам $\lambda_c, \lambda_{c+1}, \cdots, \lambda_{c+r}$ $(1 \le c \le n)$. Тоді $N = n + r + 1$. Матриця $B(t)$ у цьому випадку матиме вигляд

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_{110} & \cdots & b_{1,c+r,0} & b_{1,c,m+1} & \cdots & b_{1,n,m+1} \\ b_{210} & \cdots & b_{2,c+r,0} & b_{2,c,m+1} & \cdots & b_{2,n,m+1} \\ \cdots & & & & & \\ b_{N10} & \cdots & b_{N,c+r,0} & b_{N,c,m+1} & \cdots & b_{N,n,m+1} \end{pmatrix}.$$

Будемо припускати, що $B(t)$ задовольняє умову (7).

Означення 2. Узагальненим розв'язком задачі (1), (5) називається ліпшицевий розв'язок системи (8), де

$$\begin{gathered} (R_i u)(x,t) = \begin{cases} \mu_i(t_i(x,t,u)), & (x,t) \in \Omega^{T,u}_{oi}, \\ \nu_i(t_i(x,t,u)), & (x,t) \in \Omega^{T,u}_{m+1,i}; \end{cases} \\ \mu_i(t) = u_i(a_0(t),t) = W_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, c+r; \\ \nu_i(t) = u_i(a_{m+1}(t),t) = W_i(t), \quad i = c, c+1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{31}$$

Умову погодження 0-го порядку нелокальних крайових умов (5) у точці $(0,0)$ запишемо у вигляді

$$\operatorname{rang} C = \operatorname{rang} \bar{C} = n\,, \tag{32}$$

де

$$\bar{C} = \left(\begin{array}{cccc|c} \widetilde{b}_{11}(0) & \widetilde{b}_{12}(0) & \cdots & \widetilde{b}_{1n}(0) & h_1(0) \\ \widetilde{b}_{21}(0) & \widetilde{b}_{22}(0) & \cdots & \widetilde{b}_{2n}(0) & h_2(0) \\ \cdots & & & & \\ \widetilde{b}_{N1}(0) & \widetilde{b}_{N2}(0) & \cdots & \widetilde{b}_{Nn}(0) & h_N(0) \end{array}\right),$$

$$\widetilde{b}_{ij}(0) = \sum_{s=0}^{m+1} b_{ijs}(0)\,.$$

Очевидно, що при цьому $u_i(0,0)$, $i = 1, \ldots, n$, однозначно визначаються через $b_{ijs}(0)$ і $h_i(0)$, де $i, j = 1, \ldots, n$, $s = 0, 1, \ldots, m+1$. Константу M_0 вибираємо так, щоб $M_0 > \|u(0,0)\|$. Нехай, крім того,

$$q = Nn(m+2)B_3\bar{b} < 1\,, \tag{33}$$

$$|\lambda_i(x,t,u)| \le \Lambda\,, \ |f_i(x,t,u)| \le F\,, \ (x,t,u) \in D^T_{M_0}\,, \tag{34}$$

де

$$\bar{b} = \max_{\substack{i,j,t \\ s=1,\ldots,m;\ l=1,\ldots,c-r \\ k=c+r+1,\ldots,n}} \{|b_{ijs}|, |b_{ik0}|, |b_{il,m+1}|\}\,.$$

Теорема 3. *Нехай функції $\lambda_i(x,t,u)$ і $f_i(x,t,u)$ визначені та вимірні в області $D^T_{M_0}$, а також виконуються умови (2), (6), (7), (33), (34). Тоді для довільної константи $M \in (0; M_0 - \|u(0,0)\|)$ можна вказати таке $T_1 \in (0;T]$, для якого задача (1), (5) в області Ω^{T_1} має єдиний узагальнений розв'язок $u(x,t) \in A(L, T_1, M)$.*

Д о в е д е н н я. Доведення проводимо за схемою доведення теореми 1. Оператор S задається формулами (8) з урахуванням (31) і розглядається на $A(L, T_1, M)$. Покажемо, що існують такі константи L і T_1, при яких оператор S відображає кулю $A(L, T_1, M)$ повного метричного простору $A_0(L, T_1)$ в себе і є стискуючим.

Визначимо спочатку величину спільної константи Ліпшиця для функцій $\mu_i(t)$, $i = 1, \ldots, c+r$, та $\nu_j(t)$, $j = c, \ldots, n$. Враховуючи умови (33) і (34), легко отримуємо оцінку

$$\max_{i,j,t}\{|\mu_i|, |\nu_j|\} \le \frac{NB_3}{1-q}\Big[\max_{i,t}|h_i| + T_1 n(m+2)\bar{b}F\Big] = f\,. \tag{35}$$

З геометричних міркувань випливає, що для довільного $s \in \{0, 1, \ldots, m+1\}$

$$|x_1 - x_2| \le \max_t |a_s'(t)||t_1 - t_2|, \tag{36}$$

де $a_s(t_1) = x_2$, $a_s(t_2) = x_1$ або $a_s(t_1) = x_1$, $a_s(t_2) = x_2$. Для будь-яких точок $(a_s(t_1), t_1), (a_s(t_2), t_2) \in \partial\Omega^{T_1}$ завжди можна знайти точку $(a_s(t_1), t_2) \in \bar{\Omega}^{T_1}$ або $(a_s(t_2), t_1) \in \bar{\Omega}^{T_1}$. У протилежному випадку криві $a_s(t)$ не будуть функціями. Тоді, якщо $(a_s(t_2), t_1) \in \bar{\Omega}^{T_1}$, то, враховуючи (15) і (36), приходимо до нерівностей:

$$\begin{gathered}
|t_i(a_s(t_1), t_1, u) - t_i(a_s(t_2), t_2, u)| \le \\
\le |t_i(a_s(t_1), t_1, u) - t_i(a_s(t_2), t_1, u)| + \\
+ |t_i(a_s(t_2), t_1, u) - t_i(a_s(t_2), t_2, u)| \le \\
\le \widetilde{\Lambda}_0^{-1} E \max_{s,t} |a_s'||t_1 - t_2| + \widetilde{\Lambda}_0^{-1} \Lambda E |t_1 - t_2| = \\
= \widetilde{\Lambda}_0^{-1} E \Big(\max_{s,t} |a_s'| + \Lambda \Big) |t_1 - t_2|,
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
&\Bigg| \int\limits_{t_l(a_s(t_1), t_1, u)}^{t_1} f_l(\omega_l(\tau; a_s(t_1), t_1, u)\, d\tau - \\
&- \int\limits_{t_l(a_s(t_2), t_2, u)}^{t_2} f_l(\omega_l(\tau; a_s(t_2), t_2, u)\, d\tau \Bigg| \le \\
&\le \Bigg| \int\limits_{t_l(a_s(t_1), t_1, u)}^{t_1} f_l(\omega_l(\tau; a_s(t_1), t_1, u)\, d\tau - \\
&- \int\limits_{t_l(a_s(t_1), t_1, u)}^{t_2} f_l(\omega_l(\tau; a_s(t_1), t_1, u)\, d\tau \Bigg| + \\
&+ \Bigg| \int\limits_{t_l(a_s(t_1), t_1, u)}^{t_2} f_l(\omega_l(\tau; a_s(t_1), t_1, u)\, d\tau - \\
&- \int\limits_{t_l(a_s(t_1), t_1, u)}^{t_2} f_l(\omega_l(\tau; a_s(t_2), t_2, u)\, d\tau \Bigg| + \\
&+ \Bigg| \int\limits_{t_l(a_s(t_1), t_1, u)}^{t_2} f_l(\omega_l(\tau; a_s(t_2), t_2, u)\, d\tau - \\
&- \int\limits_{t_l(a_s(t_2), t_2, u)}^{t_2} f_l(\omega_l(\tau; a_s(t_2), t_2, u)\, d\tau \Bigg| \le \\
&\le \Big[F + T_1 F_1 E (1 + L) \Big(\max_{s,t} |a_s'| + \Lambda \Big) + \frac{FE}{\widetilde{\Lambda}_0} \Big(\max_{s,t} |a_s'| + \Lambda \Big) \Big] |t_1 - t_2|.
\end{aligned} \tag{37}$$

Оскільки мова йде про локальну розв'язність задачі, то для простоти будемо вважати, що

$$E \le 2. \tag{38}$$

На основі нерівностей (33)–(38) для будь-яких $t_1, t_2 \in [0, T_1]$ справедлива оцінка

$$\max_{i,j} \{ |\mu_i(t_1) - \mu_i(t_2)|, |\nu_j(t_1) - \nu_j(t_2)| \} \le L_1(L) |t_1 - t_2|,$$

де

$$\begin{gathered}
L_1(L) = B_2 N \Big(\max_{i,j,t} |B_{ij}| + \max_t \frac{1}{|\det B|} \Big) \times \\
\times \big[\max_{i,t} |h_i| + n(m+2)\bar{b}(f + T_1 F) \big] + \\
+ N B_3 [H_1 + n(m+2) B_1 (f + T_1 F)] + \\
+ N B_3 n(m+2)\bar{b} \big[2L\widetilde{\Lambda}_0 \big(\max_{s,t} |a_s'| + \Lambda \big) \big(1 + \max_t \{ |a_0'|, |a_{m+1}'| \} \big) + \\
+ F + 2 \big(\max_{s,t} |a_s'| + \Lambda \big) \big(T_1 F_1 (1 + L) + F \widetilde{\Lambda}_0 \big) \big].
\end{gathered} \tag{39}$$

Далі, міркуючи так, як і у випадку задачі (1), (4), (5), приходимо до висновку, що, вибравши досить мале T_1 і поклавши $\Phi_1 = 0$, спільною константою Ліпшиця функції Su за змінною x можна вибрати L^* (формула (19)), а за змінною y – константу $F + \Lambda L^*$. Константа $L_1(L)$ при цьому визначається формулою (39). Остаточно виберемо

$$L > \max \Big\{ \widetilde{\Lambda}_0^{-1} (L_1^* + F), F + \Lambda \widetilde{\Lambda}_0^{-1} (L_1^* + F) \Big\},$$

де

$$\begin{gathered}
L_1^* = B_2 N \Big(\max_{i,j,t} |B_{ij}| + \max_t \frac{1}{\det |B|} \Big) \max_{i,t} |h_i| + \\
+ N B_3 [H_1 + n(m+2) B_1 f].
\end{gathered}$$

Очевидно, що за досить малих T_1 і $\bar{b}$ вибрана константа слугуватиме константою Ліпшиця функції Su, а оператор S відображатиме кулю $A(L, T_1, M)$ у себе.

Умови стискання оператора S встановлюються аналогічно; враховується лише те, що область розгляду Ω^{T_1} розбивається тільки на два види підобластей: $\Omega_{oi}^{T_1,u}$ і $\Omega_{m+1,i}^{T_1,u}$. Зазначимо, що у випадку, коли $N = n$ (це відповідає ситуації, коли жодна характеристика, яка проходить через точку $(0,0)$, не потрапляє в область Ω^{T_1}), для кожного фіксованого $i \in \{1, \cdots, n\}$ і будь-яких функцій $u \in A(L, T_1, M)$ область Ω^{T_1} є областю лише одного з двох видів: $\Omega_{oi}^{T_1,u}$ або $\Omega_{m+1,i}^{T_1,u}$. У цих випадках для будь-яких $u, v \in A(L, T_1, M)$, $(x,t) \in \bar{\Omega}^{T_1}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ справедливою є оцінка (24), де $L_1(L)$ задається формулою (39). Якщо ж $N \neq n$, то розглянемо $(x,t) \in \Omega_{oi}^{T_1,v} \cap \Omega_{m+1,i}^{T_1,u}$, де $i \in \{c, c+1, \cdots, c+r\}$. Тоді, користуючись оцінкою (24) та умовою погодження (32), отримуємо

$$|(R_iu)(x,t) - (R_iv)(x,t)| \leq |(R_iu)(x,t) - \nu_i(0)| + |\mu_i(0) - (R_iv)(x,t)| \leq$$
$$\leq 2\widetilde{\Lambda}_0^{-1} E L_1(L) Q_3 \|u - v\|,$$
$$|(S_iu)(x,t) - (S_iv)(x,t)| \leq$$
$$\leq ((\widetilde{\Lambda}_0^{-1}(2L_1(L) + F) + Q_1 + LQ_2)EQ_3 + Q_2)\|u - v\|.$$

Остаточно маємо, що достатньою умовою стискання оператора S є нерівність

$$(\widetilde{\Lambda}_0^{-1}(2L_1(L) + F) + Q_1 + LQ_2)EQ_3 + Q_2 < 1.$$

Таким чином, при досить малих E_1 і $\bar{b}$, що визначається відповідними нерівностями, які виникають у ході доведення, існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1), (5). Теорему доведено. ■

§ 23. Задача для квазілінійного рівняння з нелокальними умовами за часовою та просторовою змінними

Даний параграф присвячено задачі, яка досліджувалась Р. Гринівом та І. Кміть у [324].

В області $\Pi = \{(x,t) \mid 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ розглядається некласична задача для квазілінійного гіперболічного рівняння першого порядку

$$u_t + \left(\frac{\lambda(t)}{p+1}|u|^p u\right)_x = Lu \tag{1}$$

з нелокальними граничними умовами

$$u(x,0) = \beta u(x,T), \qquad 0 < x < l, \tag{2}$$
$$u(0,t) = bu(l,t), \qquad 0 < t < T. \tag{3}$$

Тут $\lambda(t)$ – додатна неперервна функція на $[0,T]$; $\beta \neq 0$, $b \neq 0$, $p \neq -1, 0$ і L – дійсні константи. Рівняння вигляду (1) виникають, зокрема, у газовій динаміці [385], у той час як умови (2)–(3) є узагальненням періодичних граничних умов.

Нашою метою буде знаходження всіх глобальних розв'язків задачі (1)–(3). Зауважимо, що граничні умови є погодженими і допускають існування багатьох функцій, що їх задовольняють.

При $p = 0$ задача (1)–(3) стає лінійною, і методом розділення змінних легко встановлюється, що вона має ненульові розв'язки тоді і лише тоді, коли $\beta > 0$, $b > 0$, і

$$b^{\int_0^T \lambda(\tau)\,d\tau} (\beta e^{LT})^l = 1.$$

Якщо остання умова виконується, то всі розв'язки є класичними і утворюють одновимірний простір.

Відомо [366, 361], що класично поставлені задачі для нелінійних гіперболічних рівнянь часто породжують виникнення ударних хвиль, тобто стрибків функцій-розв'язків уздовж кусково-гладких кривих. Сингулярності можуть виникнути за скінченний проміжок часу навіть при гладких і малих початкових даних, що відповідає ситуації, коли характеристики однієї сім'ї перетинаються (деякі регулярні випадки вивчено в [336]). Інші труднощі можуть бути спричинені граничними умовами, заданими на всій межі розглядуваної області (коли задача стає некоректно поставленою [205]); ці труднощі існують навіть при розгляді задач у малих часових інтервалах і стосуються проблеми малих знаменників [294, 11, 9, 284].

Виявляється, однак, що для випадку задачі (1)–(3) ситуація суттєво відрізняється. А саме, всі ненульові глобальні розв'язки (якщо такі існують) є, при необхідності, класичними і знаходяться в явному вигляді.

Припустимо спочатку, що $u(x,t)$ є класичним розв'язком рівняння (1). Тоді характеристики рівняння (1) задовольняють звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(t)|u(x(t),t)|^p. \tag{4}$$

Розглянемо довільну фіксовану точку $(x_0, t_0) \in \overline{\Pi}$ і характеристику $x(t) = \omega(t; x_0, t_0)$, яка проходить через (x_0, t_0). Тоді функція $u(x(t), t)$ на цій характеристиці задовольняє рівняння

$$\frac{du(x(t),t)}{dt} = Lu(x(t),t),$$

а тому

$$u(x(t),t) = u(x_0,t_0)e^{L(t-t_0)}. \tag{5}$$

Підставляючи (5) у (4), знаходимо рівняння характеристики $\omega(t;x_0,t_0)$:

$$x(t) = x_0 + |u(x_0,t_0)|^p \int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)e^{Lp(\tau-t_0)}\,d\tau. \tag{6}$$

Дані міркування мотивують такі означення узагальненого розв'язку.

Означення 1. Функція $u(x,t)$ називається узагальненим розв'язком задачі (1)–(3), якщо вона є неперервною в $\bar{\Pi}$ і для довільної точки $(x_0,t_0) \in \bar{\Pi}$ визначається формулою (5) на характеристиці (6).

Зауваження 1. З формули (6) випливає, що кожна характеристика рівняння (1) визначається однозначно однією із своїх точок і значенням функції u в цій точці. Будь-які дві різні характеристики перетинаються не більше, як в одній точці. Якщо, крім того, u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3), то будь-які дві характеристики, побудовані за цим розв'язком, не перетинаються.

Припустимо, що існує узагальнений розв'язок u задачі (1)–(3) із значенням u_0 в деякій точці $(x_0,t_0) \in \bar{\Pi}$. За означенням значення функції u знаходяться за допомогою формули (5) на характеристиці

$$x_0(t) = x_0 + |u_0|^p \int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)e^{Lp(\tau-t_0)}\,d\tau.$$

Ця характеристика перетинає межу $\partial\Pi$ області Π у двох точках, а граничні умови (2) і/або (3) визначають значення функції u у протилежних точках $\partial\Pi$. Ці протилежні точки з відповідними значеннями функції u визначають дві нові характеристики і значення u на них згідно з (5) і (6). Цей процес може бути продовжено до нескінченності.

Іншими словами, $x_0(t)$ генерує послідовність характеристик $x_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$, в такий спосіб. Припустимо, що $x_k(t)$ вже побудована; якщо $x_k(t)$ перетинає сторону $t = T$ прямокутника Π, то покладаємо $x_{k+1}(0) = x_k(T)$ і $u(x_{k+1}(0),0) = \beta u(x_k(T),T)$. У протилежному випадку існує таке єдине значення $t_k \in [0,T]$, що $x_k(t_k) = l$, і покладаємо $x_{k+1}(t_k) = 0$, $u(x_{k+1}(t_k),t_k) = bu(x_k(t_k),t_k)$. Згідно із зауваженням 1, характеристика $x_{k+1}(t)$ визначається однозначно. Побудова $x_{k-1}(t)$ за даною $x_k(t)$ здійснюється аналогічно (див. рис. 4).

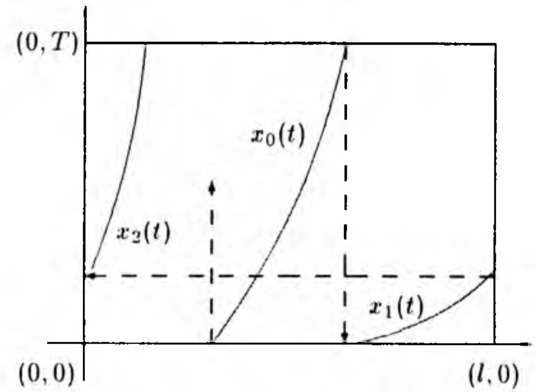

Рис. 4. Побудова ТПР

Означення 2. Послідовність характеристик $x_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$, побудована вище, називається траєкторією поширення розв'язку (ТПР).

Припустимо, що $x_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$, є ТПР, причому жодна з характеристик $x_0(t), x_1(t), \dots, x_k(t)$, $k > 0$, не перетинає сторону $x = l$ прямокутника Π, і покладемо $u_0 = u(x_0(0),0)$. За побудовою

$$x_m(0) = x_{m-1}(T) = x_{m-1}(0) + \left|u(x_{m-1}(0),0)\right|^p \int_0^T \lambda(\tau)e^{Lp\tau}\,d\tau$$

і

$$u(x_m(0),0) = \beta u(x_{m-1}(T),T) = \beta e^{LT} u(x_{m-1}(0),0)$$

для кожного $m \in \{1,\dots,k\}$. Звідси

$$\begin{gathered} x_k(t) = x_0(0) + |u_0|^p \sum_{m=0}^{k-1} \left(|\beta|^p e^{LpT}\right)^m \int_0^T \lambda(\tau)e^{Lp\tau}\,d\tau + \\ +|u_0|^p \left(|\beta|^p e^{LpT}\right)^k \int_0^t \lambda(\tau)e^{Lp\tau}\,d\tau \end{gathered} \tag{7}$$

і

$$u(x_k(t),t) = u_0 e^{Lt}\left(\beta e^{LT}\right)^k. \tag{8}$$

Аналогічно, якщо жодна з характеристик $x_0(t), x_{-1}(t), \dots, x_{-k}(t)$,

$k > 0$, не перетинає сторону $x = 0$ прямокутника Π, то

$$x_{-k}(t) = x_0(0) - |u_0|^p \sum_{m=1}^{k-1} \left(|\beta|^p e^{LpT}\right)^{-m} \int_0^T \lambda(\tau) e^{Lp\tau}\, d\tau - \\ -|u_0|^p \left(|\beta|^p e^{LpT}\right)^{-k} \int_t^T \lambda(\tau) e^{Lp\tau}\, d\tau, \tag{9}$$

$$u(x_k(t), t) = u_0 e^{Lt} \left(\beta e^{LT}\right)^{-k}. \tag{10}$$

Лема 1. *Будь-який нетривіальний узагальнений розв'язок задачі (1)–(3) не набуває нульових значень в* $\bar{\Pi}$.

Д о в е д е н н я. Доводимо від супротивного. Припустимо, що існує узагальнений розв'язок $u(x,t)$ і дві точки (x_0, t_0), $(\hat{x}, \hat{t}) \in \bar{\Pi}$ такі, що $u(x_0, t_0) \neq 0$ і $u(\hat{x}, \hat{t}) = 0$. Тоді за умовами (5) і (6) $\hat{x}(t) \equiv \hat{x}$ є характеристикою та $u(\hat{x}, t) \equiv 0$ для всіх $t \in [0, T]$. Прийдемо до суперечності, довівши, що існують різні характеристики, які побудовані за даним узагальненим розв'язком u і перетинають $\hat{x}(t)$ (див. зауваження 1).

Розглянемо спочатку випадок $|\beta|^p e^{LpT} \geq 1$. Зауважимо, що x_0 і $\hat{x}$ можуть бути вибрані такими, щоб $x_0 < \hat{x}$. Фактично, або $u(l, t) \equiv 0$ для всіх $t \in [0, T]$ і тоді покладаємо $\hat{x} = l$, або $u(0, t) \neq 0$ для всіх $t \in [0, T]$ і тоді покладаємо $x_0 = 0$. Крім того, можемо припустити, що $t_0 = \hat{t} = 0$.

Побудуємо ТПР з характеристикою $x_0(t)$, що проходить через точку $(x_0, 0)$ із значенням $u = u(x_0, 0)$. Якщо б жодна з характеристик $x_0(t), x_1(t), \ldots$ не перетинала $\hat{x}(t)$, то це означало б, що $x_k(t) < \hat{x}$ для всіх $k \geq 0$ і для всіх $t \in [0, T]$. Останнє неможливо згідно з формулою (7). Таким чином, для деякого $k \geq 0$ характеристика $x_k(t)$ перетинає $\hat{x}(t)$ і за формулою (8) функція u в точці перетину набуває ненульового значення.

Якщо $|\beta|^p e^{LpT} \leq 1$, то вибираємо $x_0 > \hat{x}$, $t_0 = T$. Розглядаємо ТПР $x_n(t)$, визначену вище, і доводимо, що деякі з характеристик $x_0(t), x_{-1}(t), \ldots$ перетинають $\hat{x}(t)$. Лему доведено. ∎

Наслідок 1. *Диференціальне рівняння (1) є строго гіперболічним і довільний узагальнений розв'язок зберігає свій знак в* $\bar{\Pi}$. *Оскільки* $-u$ *є узагальненим розв'язком одночасно з* u, *то далі розглядатимемо лише додатні розв'язки.*

Наслідок 2. *Необхідними умовами існування узагальнених розв'язків задачі (1)–(3) є* $b > 0$ *і* $\beta > 0$. *Відтепер будемо припускати, що вони виконуються.*

Продовжимо функцію λ, визначену на $[0, T]$, до додатної неперервної функції на всій прямій $\mathbb{R}$ у такий спосіб, щоб $\lambda(t) e^{Lpt}$ не була інтегровною на $\pm\infty$. Для подальших викладок зафіксуємо одне таке продовження. Зауважимо, що тоді кожна характеристика $x(t)$ і значення u на ній можуть бути визначені для всіх $t \in \mathbb{R}$ за допомогою формул (5) і (6).

Лема 2. *Припустимо, що* $\beta e^{LT} \neq 1$. *Нехай* x_0 *– фіксована точка відрізка* $[0, l]$, $x_1(t)$ *і* $x_2(t)$ *– дві характеристики (продовжені на всю пряму* $\mathbb{R}$*), які проходять через точки* (x_0, T) *і* $(x_0, 0)$ *із значеннями функції* u, *що дорівнюють* $u_1 > 0$ *і* $u_2 = \beta u_1$, *відповідно. Тоді* $x_1(t)$ *і* $x_2(t)$ *перетинаються лише в одній точці* (x^*, t^*), *де* t^* *задовольняє рівність (див. рис. 5)*

$$\int_0^{t^*} \lambda(\tau) e^{Lp\tau}\, d\tau = \frac{\int_0^T \lambda(\tau) e^{Lp\tau}\, d\tau}{1 - \beta^p e^{LpT}}. \tag{11}$$

Д о в е д е н н я. Значення t^* є розв'язком рівняння $x_1(t) = x_2(t)$ або рівняння

$$x_0 + u_1^p \int_T^t \lambda(\tau) e^{Lp(\tau - T)}\, d\tau = x_0 + \beta^p u_1^p \int_0^t \lambda(\tau) e^{Lp\tau}\, d\tau.$$

Звідси

$$(1 - \beta^p e^{LpT}) \int_0^{t^*} \lambda(\tau) e^{Lp\tau}\, d\tau = \int_0^T \lambda(\tau) e^{Lp\tau}\, d\tau,$$

що й завершує доведення. ∎

Лема 3. *Припустимо, що* $b \neq 1$. *Нехай* t_0 *– фіксована точка відрізка* $[0, T]$, $x_1(t)$ *і* $x_2(t)$ *– дві характеристики, які проходять через точки* $(0, t_0)$ *і* (l, t_0) *із значеннями функції* u, *що дорівнюють* $u_1 > 0$ *і* $u_2 = u_1/b$, *відповідно. Тоді* $x_1(t)$ *і* $x_2(t)$ *перетинаються лише в одній точці* (x_*, t_*), *де* $x_* = lb^p/(b^p - 1)$ *(див. рис. 5).*

Д о в е д е н н я. Рівняння $x_1(t) = x_2(t)$ має вигляд

$$u_1^p \int_{t_0}^t \lambda(\tau) e^{Lp(\tau - t_0)}\, d\tau = l + \left(\frac{u_1}{b}\right)^p \int_{t_0}^t \lambda(\tau) e^{Lp(\tau - t_0)}\, d\tau,$$

звідки

$$u_1^p \int_{t_0}^t \lambda(\tau) e^{Lp(\tau - t_0)}\, d\tau = lb^p/(b^p - 1). \tag{12}$$

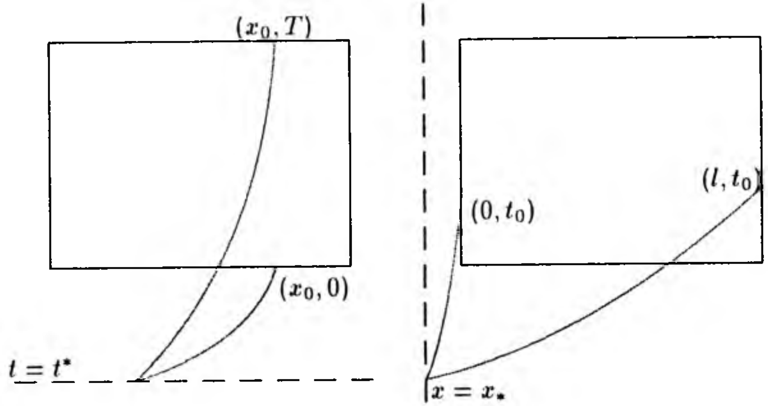

Рис. 5. Перетини продовжених характеристик

Рівняння (12), очевидно, має лише один розв'язок t_*, а тому

$$x_* = x_1(t_*) = u_1^p \int\limits_{t_0}^{t_*} \lambda(\tau) e^{Lp(\tau - t_0)}\, d\tau = lb^p/(b^p - 1).$$

Доведення завершено. ■

Припустимо, що $\beta e^{LT} \neq 1$ і $b \neq 1$. Позначимо через $x(t, u_0)$ характеристику рівняння (1), яка проходить через точку (x_*, t^*) із значенням $u = u_0 \in \mathbb{R}_+$ і визначимо функцію u_* рівністю

$$u_*(x(t, u_0), t) = u_0 e^{L(t - t^*)}$$

на кожній такій характеристиці (див. рис. 6). Іншими словами, значення $u_*(x, t)$ задовольняє рівняння

$$x + u_*^p(x, t) \int\limits_t^{t^*} \lambda(\tau) e^{Lp(\tau - t)}\, d\tau = x_*.$$

Звідси за лемами 2 і 3 маємо

$$u_*^p(x, t) = \left(\frac{lb^p}{b^p - 1} - x \right) e^{Lpt} \left[\frac{\int\limits_0^T \lambda(\tau) e^{Lp\tau}\, d\tau}{1 - \beta^p e^{LpT}} + \int\limits_t^0 \lambda(\tau) e^{Lp\tau}\, d\tau \right]^{-1}. \quad (13)$$

Зауважимо, що значення u_* визначене в $\bar{\Pi}$ тоді і лише тоді, коли $x_* < 0$, $t^* < 0$ або $x_* > l$, $t^* > T$, що вимагає виконання умови

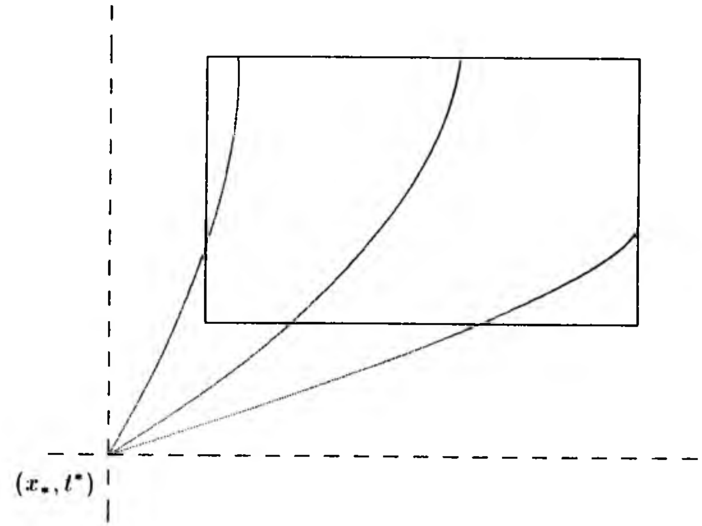

Рис. 6. Розв'язок $u_*(t)$

$(b - 1)(\beta e^{LT} - 1) < 0$. Остання нерівність є також необхідною для того, щоб права частина (13) була додатною. Зауважимо також, що (13) не залежить від вибору продовження λ за межами $[0, T]$.

Лема 4. *Припустимо, що $(\beta e^{LT} - 1)(b - 1) < 0$; тоді функція u_* є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3).*

Д о в е д е н н я. Функція u_* є неперервною в $\bar{\Pi}$ і за побудовою задовольняє співвідношення (5) на кожній характеристиці (6). Потрібно показати, що вона задовольняє граничні умови (2), (3).

Розглянемо довільне $x \in [0, l]$; необхідно довести, що $u_*(x, 0) = \beta u_*(x, T)$. Позначимо через $x_1(t)$ та $x_2(t)$ характеристики рівняння (1), що проходять через точки (x, T) і $(x, 0)$ із значеннями функції u у цих точках $u_*(x, T)$ і $\beta u_*(x, T)$, відповідно. За побудовою функції u_*, $x_1(t)$ проходить через точку (x_*, t^*). У той же час точка перетину $x_1(t)$ та $x_2(t)$ за лемою 2 лежить на прямій $t = t^*$. Тому $x_2(t)$ проходить через точку (x_*, t^*) також. Крім того, $x_2(t)$ збігається з характеристикою, проведеною через точку $(x, 0)$ із значенням $u = u_*(x, 0)$. Звідси випливає, що $u_*(x, 0) = \beta u_*(x, T)$.

Аналогічно доводимо, що функція u_* задовольняє граничну умову (3). Лему доведено. ■

Зауваження 2. Той факт, що u_* є розв'язком задачі (1)–(3), можна перевірити безпосередньою підстановкою формули (13) у дану задачу.

Зауваження 3. Функцію u_*, знайдену вище за допомогою геометричних міркувань, можна також знайти методом розділення змінних.

Підсумовуючи, маємо узагальнений розв'язок задачі (1)–(3) для випадку $(\beta e^{LT}-1)(b-1)<0$. Доведемо тепер, що він є єдиним нетривіальним розв'язком, і вивчимо питання існування узагальнених розв'язків у всіх інших випадках.

Лема 5. *Припустимо, що $(\beta e^{LT}-1)(b-1)<0$. Тоді задача (1)–(3) має єдиний нетривіальний узагальнений розв'язок, який визначається формулою (13).*

Доведення. Припустимо, що u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3). За означенням, рівність $u(x(t),t)= = u(x(t_0),t_0)e^{L(t-t_0)}$, $t,t_0\in[0,T]$, виконується на кожній характеристиці $x(t)$. Розглянемо продовження всіх характеристик для всіх дійсних t, побудованих за даним розв'язком u. Спосіб продовження описано вище. Якщо всі продовжені характеристики проходять через точку (x_*,t^*), то u збігається з u_* за побудовою.

Припустимо, що деяка продовжена характеристика $x_0(t)$ не проходить через (x_*,t^*). Для визначеності припустимо, що $x_*<0$ і $t^*<0$ (випадок $x_*>l$ і $t^*>T$ розглядається аналогічно). Це відповідає виконанню нерівностей $\beta^p e^{LpT}>1$ і $b^p<1$.

Оскільки $x_0(t^*)\ne x_*$, то маємо або $x_0(t^*)>x_*$, або $x_0(t^*)<x_*$.

Випадок 1: $x_0(t^*)>x_*$. Нехай $x_n(t)$, $n\in\mathbb{Z}$, є ТПР, породженою характеристикою $x_0(t)$. Покажемо, що існує таке число $n_0\in\mathbb{Z}_+$, що $y_*:=x_{-n_0}(t^*)\in[0,l]$ і $x_{-k}(t)\to y_*$, $u(x_{-k}(t),t)\to 0$, $t\in[0,T]$, при $k\to\infty$. Це означатиме, що $u(y_*,t)=0$, та суперечитиме лемі 1.

Для спрощення позначень покладемо $y_k(t)=x_{-k}(t)$, $k\in\mathbb{Z}$. За побудовою ТПР та лемами 2 і 3, характеристики $y_k(t)$ та $y_{k+1}(t)$ перетинаються на прямій $t=t^*$, якщо $y_k(0)>0$, і на прямій $x=x_*$, якщо $y_k(0)<0$. У першому випадку

$$y_k(t^*)=y_{k+1}(t^*),$$

у другому –

$$u(y_{k+1}(t),t)=b^{-1}u(y_k(t),t)$$

і

$$y_{k+1}(t^*)-x_*=b^{-p}\left(y_k(t^*)-x_*\right). \tag{14}$$

Припустимо тепер, що $y_k(t^*)<0$ для всіх $k\in\mathbb{Z}_+$. З огляду на (14) і нерівність $b^p<1$, єдино можливим випадком є той, в якому послідовність $(y_k(t^*))$ складається з нескінченної кількості різних чисел. Іншими словами, існує таке $k_0\in\mathbb{Z}_+$, що $y_k(t^*)=y_{k_0}(t^*)$ для всіх $k\ge k_0$. Останнє означає, що $y_k(t)$, $k\ge k_0$, не перетинають сторону $x=0$ прямокутника П, тобто що $y_k(0)\ge 0$ для всіх $k\ge k_0$. Тоді, беручи до уваги (9), отримуємо

$$y_{k+k_0}(0)=y_{k_0}(0)-\left|u(y_{k_0}(0),0)\right|^p\sum_{m=1}^{k}\left(\beta^p e^{LpT}\right)^{-m}\int_0^T\lambda(\tau)e^{Lp\tau}\,d\tau\to$$
$$\to y_{k_0}(0)-\left|u(y_{k_0}(0),0)\right|^p\frac{\int_0^T\lambda(\tau)e^{Lp\tau}\,d\tau}{\beta^p e^{LpT}-1}.$$

Користуючись лемою 2, доходимо висновку

$$\lim_{k\to\infty}y_{k+k_0}(0)=y_{k_0}(0)+\left|u(y_{k_0}(0),0)\right|^p\int_0^{t^*}\lambda(\tau)e^{Lp\tau}\,d\tau=y_{k_0}(t^*)<0,$$

який суперечить тому, що $y_{k_0+k}(0)\ge 0$ для всіх $k\in\mathbb{N}$.

Таким чином, існує $n_0\in\mathbb{Z}_+$ таке, що $y_*:=y_{n_0}(t^*)\in[0,l]$. Легко переконатись, що жодна з характеристик $y_n(t)$ при $n\ge n_0$ не перетинає сторону $x=0$ прямокутника П. Ще раз звертаючись до (9), (10) і (11), обчислюємо

$$\lim_{k\to\infty}y_k(t)=y_{n_0}(0)-\left|u(y_{n_0}(0),0)\right|^p\frac{\int_0^T\lambda(\tau)e^{Lp\tau}\,d\tau}{\beta^p e^{LpT}-1}=$$
$$=y_{n_0}(0)+\left|u(y_{n_0}(0),0)\right|^p\int_0^{t^*}\lambda(\tau)e^{Lp\tau}\,d\tau=y_{n_0}(t^*)=y_*$$

і

$$\lim_{k\to\infty}u(y_k(t),t)=0,$$

що суперечить рівності $u(y_*,t)=0$.

Випадок 2: $x_0(t^*)<x_*$. Нехай $x_n(t)$, $n\in\mathbb{Z}$, є ТПР, породженою характеристикою $x_0(t)$. Позначимо через t_n таке число, що $x_n(t_n)= =x_*$. Тоді послідовність (t_n) є незростаючою, а також існує таке $n_0\in\mathbb{Z}_-$, що $t_n=t_{n_0}\in[0,T]$ для всіх $n\le n_0$. Крім того, частини характеристик $x_n(t)$, що належать до П, нескінченно наближаються до прямої $t=t_{n_0}$, $x\in[0,l]$ і $u(x_n(t),t)\to\infty$ при $n\to-\infty$, що неможливо. Лему доведено. ■

Доведемо основний результат даного параграфа.

Теорема 1. *Припустимо, що $b > 0$, $\beta > 0$ і $\lambda(t)$ є додатною неперервною функцією на $[0, T]$.*

(i) Якщо $(b-1)(\beta e^{LT} - 1) < 0$, то задача (1)–(3) має єдиний нетривіальний узагальнений розв'язок, який визначається формулою (13) і є класичним.

(ii) Якщо $b = \beta e^{LT} = 1$, то всі нетривіальні узагальнені розв'язки задачі (1)–(3) є класичними і мають вигляд

$$u(x,t) = u_0 e^{Lt}, \tag{15}$$

де $u_0 = u(0,0) \in \mathbb{R}_+$.

(iii) У всіх інших випадках задача (1)–(3) має лише тривіальний розв'язок.

Д о в е д е н н я. Твердження (i) теореми випливає з лем 4 і 5.

Припустимо, що $b = 1$, а функція u є узагальненим розв'язком. Тоді періодичне продовження $\tilde{u}$ функції u, яке задається формулою $\tilde{u}(x + kl, t) = u(x,t)$ для $x \in [0,l]$, $t \in [0,T]$ і $k \in \mathbb{Z}$, є узагальненим розв'язком задачі (1)–(2) у смузі $S = \{(x,t) \mid x \in \mathbb{R}, 0 < t < T\}$.

Припустимо також, що $\beta e^{LT} = 1$. Якщо $u(x,0)$ є константою для всіх $x \in [0,l]$, то $u(x,t)$ визначається формулою (15). Покажемо, що останнє є єдино можливим у даному випадку. Припустимо протилежне. Нехай $u(x,0)$ не є константою; тоді за неперервністю існує така точка x_0, що $u_0 := u(x_0, 0)$ задовольняє умову

$$c := |u_0|^p \int_0^T \lambda(\tau) e^{Lp\tau}\, d\tau \notin l\mathbb{Q}.$$

Розглянемо ТПР $\tilde{x}_n(t)$ у смузі S для розв'язку $\tilde{u}$ з характеристикою $\tilde{x}_0(t)$, яка проходить через точку $(x_0, 0)$ із значенням $u = u_0$. З рівності $\beta e^{LT} = 1$ випливає, що $\tilde{x}_k(0) = x_0 + ck$ і $\tilde{u}(\tilde{x}_k(0), 0) = u_0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Зокрема, $u(x,0) = u_0$ для

$$x \in \{x_k(0) \pmod{l} \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

і, оскільки ця множина є всюди щільною на $[0,l]$, отримуємо $u(x,0) = u_0$ для всіх $x \in [0,l]$. Це суперечить припущенню і доводить твердження (ii) даної теореми.

Припустимо, що $b = 1$ і $\beta e^{LT} \neq 1$. Розглянемо довільну точку $x_0 \in [0,l]$, а також ТПР $\tilde{x}_n(t)$ у смузі S для розв'язку $\tilde{u}$ з характеристикою $\tilde{x}_0(t)$, яка проходить через точку $(x_0, 0)$ із значенням $u = u(x_0, 0)$. Якщо $\beta e^{LT} > 1$, то $\tilde{u}(\tilde{x}_n(t), t) \to \infty$ при $n \to \infty$; якщо $\beta e^{LT} < 1$, то $\tilde{u}(\tilde{x}_n(t), t) \to \infty$ при $n \to -\infty$. В обох випадках $\tilde{u}$ не може бути додатною в смузі S, що за конструкцією є недопустимим.

Остаточно, нехай $b \neq 1$, $\beta e^{LT} = 1$, u є узагальненим розв'язком. Розглянемо довільну ТПР $x_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$, у прямокутнику П. Легко бачити, що $u(x_n(t), t) \to \infty$ при $n \to \infty$, якщо $b > 1$, і $u(x_n(t), t) \to \infty$ при $n \to -\infty$, якщо $b < 1$. Обидва випадки суперечать тому, що u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3). Теорему доведено. ■

Зауваження 4. Розв'язки задачі (1)–(3), побудовані вище, є насправді аналітичними у випадку (i), якщо λ є аналітичною на $[0, T]$, та у випадку (ii) даної теореми.

Зауваження 5. Формула (13) дає розв'язок задачі (1)–(3) і для виродженого випадку $b = 0$ за умови $\beta^p e^{LpT} > 1$; це відповідає значенню $t^* = 0$ у лемі 2 і граничним умовам Діріхле $u(0,t) = 0$ замість (3). Аналогічно, $b = \infty$ відповідає значенню $t^* = l$ і граничним умовам Діріхле $u(l,t) = 0$; формула (13) при цьому набуває вигляду

$$u_*^p(x,t) = (l-x) e^{Lpt} \left[\frac{\int_0^T \lambda(\tau) e^{Lp\tau}\, d\tau}{1 - \beta^p e^{LpT}} + \int_t^0 \lambda(\tau) e^{Lp\tau}\, d\tau \right]^{-1}$$

і дає розв'язок, якщо $\beta^p e^{LpT} < 1$.

Надалі припускатимемо, що задача (1)–(3) має нетривіальний розв'язок u, і вивчатимемо деякі геометричні властивості ТПР, побудованих за цим розв'язком.

Нагадаємо, що ТПР $x_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$, є періодичною, якщо існує таке $d \in \mathbb{N}$ (період), що $x_{n+d}(t) = x_n(t)$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$.

Теорема 2. *Припустимо, що u є нетривіальним розв'язком задачі (1)–(3). Тоді ТПР, побудовані за цим розв'язком, є або всі періодичними, або всі неперіодичними. В останньому випадку кожна ТПР є щільною в П.*

Зауважимо, що для випадку $b = \beta e^{LT} = 1$ цю властивість ТПР насправді вивчено в доведенні теореми 1. Тому припустимо, що має місце випадок (i) теореми 1, де $u = u_*$. Будемо використовувати формулу

$$u_*^p(x, 0) = cx + d, \qquad c \neq 0. \tag{16}$$

Розглянемо випадок $b^p < 1$, $\beta^p e^{LpT} > 1$, який забезпечує нерівність $c > 0$; випадок $b^p > 1$, $\beta^p e^{LpT} < 1$, що відповідає $c < 0$, розглядається також.

Доведення теореми опиратиметься на таку конструкцію. Введемо гратку $\Gamma := (\mathbb{R}/l\mathbb{R}) \times (\mathbb{R}/T\mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^2$ з базовою областю П і

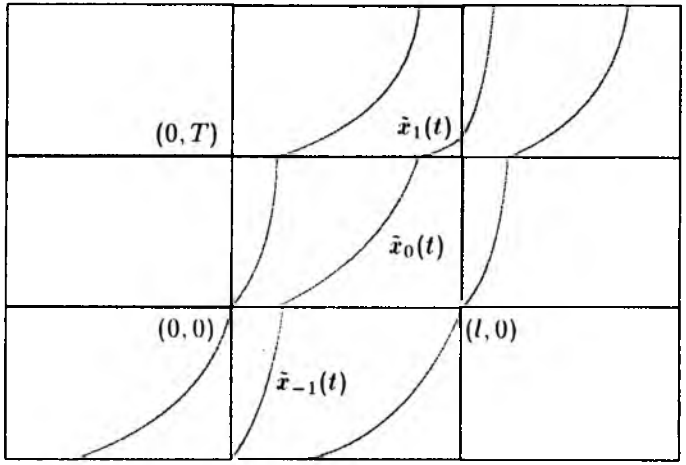

Рис. 7. Побудова РТПР

продовжимо розв'язок u_* на всю площину $\mathbb{R}^2$ за періодичністю. Для визначеності, робимо це продовження $\tilde{u}$ неперервним і таким, що

$$\tilde{u}(x+kl, t+mT) = u_*(x,t)$$

для всіх $(x,t) \in \bar{\Pi}$ і $k, m \in \mathbb{Z}$. Тепер довільна ТПР $x_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$, може бути розгорнута в $\mathbb{R}^2$ до форми неперервної траєкторії $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_n(t))$, $n \in \mathbb{Z}$. А саме, $\tilde{x}_0(t)$ збігається з $x_0(t)$ в $\bar{\Pi}$ і для $n = 1, 2, \dots$ частина $\tilde{x}_n(t)$ є паралельним зсувом $x_n(t)$ на вектор у гратці Г, що пересуває точку $x_n(0)$ у найвищу кінцеву точку $\tilde{x}_{n-1}(t)$. Для від'ємних n побудова є аналогічною (див. рис. 7). Будемо називати $\tilde{x}(t)$ розгорнутою траєкторією поширення розв'язку (РТПР).

Оскільки кожна РТПР складається лише з характеристик продовженого розв'язку $\tilde{u}$ у відповідних комірках гратки Г, то довільні дві різні РТПР не перетинаються. Зауважимо також, що значення $\tilde{u}$ множиться на β або b щоразу, як тільки $\tilde{x}(t)$ перетинає горизонтальні прямі $t = mT$, $m \in \mathbb{Z}$, або вертикальні прямі $x = kl$, $k \in \mathbb{Z}$, гратки Г, відповідно.

Лема 6. *Припустимо, що $x_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$, є періодичною ТПР для розв'язку u_*. Тоді всі ТПР для u_* є періодичними.*

Д о в е д е н н я. Припустимо спочатку, що $x_0(0) = 0$. Розглянемо РТПР $\tilde{x}$, побудовану для ТПР $x_n(t)$, а також її паралельний зсув $\tilde{x}'$ на вектор $(l, 0)$ (див. рис. 7). Позначимо через d період $x_n(t)$; тоді

$\tilde{x}_d(t)$ стартує в точці вигляду (kl, mT), де $k+m = d+1$. Легко бачити, що та частина $\tilde{x}$, яка знаходиться в смузі $\{(x,t) | x \in \mathbb{R}, 0 < t \le mT\}$, перетинає m горизонтальних і k вертикальних прямих гратки Г. Прямуючи за значеннями $\tilde{u}$ вздовж $\tilde{x}(t)$, приходимо до висновку, що

$$(\beta e^{LT})^m b^l = 1. \tag{17}$$

Візьмемо тепер іншу ТПР $y_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$, і розглянемо відповідну РТПР $\tilde{y}$. Оскільки $\tilde{y}$ не перетинає $\tilde{x}$ або $\tilde{x}'$, то вона залишається в області, обмеженою $\tilde{x}$ і $\tilde{x}'$, а частина $\tilde{y}$, яка знаходиться в смузі $\{(x,t) | x \in \mathbb{R}, 0 < t \le mT\}$, перетинає точно m горизонтальних і k вертикальних прямих гратки Г. Прямуючи за значеннями $\tilde{u}$ вздовж $\tilde{y}$, знаходимо

$$\tilde{u}(\tilde{y}(mT), mT) = (\beta e^{LT})^m b^k \tilde{u}(\tilde{y}(0), 0).$$

Отже,

$$\tilde{u}(\tilde{y}(mT), mT) = \tilde{u}(\tilde{y}(0), 0)$$

з огляду на (17). А це означає, що ТПР $y_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$, є періодичною.

Якщо ТПР $x_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$, не проходить через точку $(0,0)$, то спочатку доводимо, що всі РТПР, які є досить близькими до РТПР $\tilde{x}$, не проходять через жодну вершину гратки Г і, в результаті, перетинають точно m горизонтальних і k вертикальних прямих гратки Г, яка знаходиться в смузі $\{(x,t) | x \in \mathbb{R}, 0 < t \le mT\}$. Через це всі такі РТПР відповідають періодичним ТПР і за неперервністю це ж саме є справедливим і для РТПР, що перетинає вершину Г. Доведення завершено. ∎

Лема 7. *Нехай $\tilde{y}$ і $\tilde{z}$ — дві різні РТПР. Тоді*

$$\limsup_{m\to\infty} |\tilde{z}(mT) - \tilde{y}(mT)| > 0.$$

Д о в е д е н н я. Для визначеності припустимо, що $y_0 := \tilde{y}(0)$ і $z_0 := \tilde{z}(0)$ задовольняють умову $0 \le y_0 < z_0 \le L$. Якщо $\tilde{y}$ або $\tilde{z}$ проходять хоча б через дві вершини гратки Г, тоді за лемою 6 всі ТПР і РТПР є періодичними і дане твердження справедливе. Припустимо тепер, що жодна з $\tilde{y}$ і $\tilde{z}$ при $t \ge 0$ не проходить через вершину Г. Оскільки будь-які дві РТПР не перетинаються, то

$$0 < \tilde{z}(t) - \tilde{y}(t) < L$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$. Це означає, що для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$ інтервал $[\tilde{y}(mT), \tilde{z}(mT)]$ містить хоча б одну точку з $l\mathbb{Z}$. Позначимо через $\mathbb{M}$ множину всіх $m \in \mathbb{Z}_+$ таких, що частина прямої $t = mT$ між $\tilde{y}$ і $\tilde{z}$ не містить жодної вершини з Г.

Припустимо спочатку, що множина $\mathbb{M}$ нескінченна. Беручи до уваги (16), отримуємо рівність

$$\tilde{u}^p(\tilde{z}(mT), mT) - \tilde{u}^p(\tilde{y}(mT), mT) = c(\tilde{z}(mT) - \tilde{y}(mT))$$

для всіх $m \in \mathbb{M}$. Достатньо показати, що

$$\limsup_{m\in\mathbb{M}, m\to\infty} \left|\tilde{u}^p(\tilde{z}(mT), mT) - \tilde{u}^p(\tilde{y}(mT), mT)\right| > 0.$$

Розглянемо деяке $m \in \mathbb{M}$. За означенням множини $\mathbb{M}$, РТПР $\tilde{y}$ і $\tilde{z}$ перетинають ту саму кількість k вертикальних прямих гратки, яка знаходиться в смузі $\{(x,t)|x \in \mathbb{R}, 0 < t \le mT\}$, і в результаті маємо

$$\tilde{u}^p(\tilde{y}(mT), mT) = (\beta e^{LT})^{pm} b^{pk} u_*^p(y_0, 0),$$
$$\tilde{u}^p(\tilde{z}(mT), mT) = (\beta e^{LT})^{pm} b^{pk} u_*^p(z_0, 0).$$

З нерівності $\tilde{u}(\tilde{y}(mT), mT) \ge u_*(0,0)$ випливає, що

$$(\beta e^{LT})^{pm} b^{pk} \ge \frac{u_*^p(0,0)}{u_*^p(y_0,0)}$$

і

$$\tilde{u}^p(\tilde{z}(mT), mT) - \tilde{u}^p(\tilde{y}(mT), mT) \ge (u_*^p(z_0,0) - u_*^p(y_0,0))\frac{u_*^p(0,0)}{u_*^p(y_0,0)}.$$

Звідси отримуємо потрібне твердження.

Припустимо тепер, що $\mathbb{M}$ є скінченною. Візьмемо $m_0, m_1 \notin \mathbb{M}$, $m_1 > m_0$ і розглянемо $k_j \in \mathbb{N}$: $\tilde{y}(m_jT) < k_jl < \tilde{z}(m_jT)$, $j = 0, 1$. Зауважимо, що РТПР $\tilde{y}$ і $\tilde{z}$ перетинають ту саму кількість k вертикальних прямих гратки Γ, яка знаходиться в смузі $\{(x,t)|x \in \mathbb{R}, m_0T < t \le m_1T\}$, а отже,

$$\tilde{u}(\tilde{y}(m_1T), m_1T) = (\beta e^{LT})^{(m_1-m_0)} b^k \tilde{u}(\tilde{y}(m_0T), m_0T),$$
$$\tilde{u}(\tilde{z}(m_1T), m_1T) = (\beta e^{LT})^{(m_1-m_0)} b^k \tilde{u}(\tilde{z}(m_0T), m_0T).$$

Якщо $(\beta e^{LT})^{(m_1-m_0)} b^k = 1$, то РТПР $\tilde{y}$ і $\tilde{z}$ є періодичними, звідки випливає потрібне твердження. Якщо $(\beta e^{LT})^{(m_1-m_0)} b^k > 1$, то

$$\tilde{u}(\tilde{z}(m_1T), m_1T) > \tilde{u}(\tilde{z}(m_0T), m_0T),$$

звідки

$$\tilde{z}(m_1T) - \tilde{y}(m_1T) \ge \tilde{z}(m_1T) - k_1l \ge \tilde{z}(m_0T) - k_0l.$$

У випадку $(\beta e^{LT})^{(m_1-m_0)} b^k < 1$ маємо

$$\tilde{u}(\tilde{y}(m_1T), m_1T) < \tilde{u}(\tilde{y}(m_0T), m_0T),$$

$$\tilde{z}(m_1T) - \tilde{y}(m_1T) \ge k_1l - \tilde{y}(m_1T) \ge k_0l - \tilde{y}(m_0T).$$

Звідси

$$\limsup_{m\notin\mathbb{M}, m\to\infty} |\tilde{z}(mT) - \tilde{y}(mT)| > 0,$$

що й завершує доведення леми. ∎

Лема 8. *ТПР, яка не є всюди щільною в $\bar{\Pi}$, з необхідністю періодична.*

Д о в е д е н н я. Припустимо, що $x_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$, є ТПР, яка не є всюди щільною в Π, і позначимо через X об'єднання всіх характеристик $x_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$; тоді $\bar{\Pi} \setminus \bar{X} \ne \emptyset$. Через $\tilde{x}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, позначимо РТПР, що стартує з $x_n(t)$ в Π, а через $\widetilde{X}$ – об'єднання всіх $\tilde{x}_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Зауважимо, що для довільних $m, n \in \mathbb{Z}$ РТПР $\tilde{x}_m$ є паралельним зсувом $\tilde{x}_n$ на деякий вектор у гратці Γ; навпаки, паралельний зсув $\tilde{x}_n$ на деякий вектор у гратці Γ є деякою РТПР $\tilde{x}_m$.

Візьмемо довільний максимальний інтервал (y_0, z_0), що містить множину $(\bar{\Pi} \setminus \bar{X}) \cap \{(x,0) \mid 0 \le x \le l\}$. Розглянемо РТПР $\tilde{y}$ і $\tilde{z}$, які проходять через точки $(y_0, 0)$ і $(z_0, 0)$, відповідно. Ці РТПР $\tilde{y}$ і $\tilde{z}$, очевидно, належать границі області $\widetilde{X}$ і коридор між $\tilde{y}$ і $\tilde{z}$ не містить точок з $\widetilde{X}$. Крім цього, будь-який паралельний зсув $\tilde{y}$ чи $\tilde{z}$ на деякий вектор у Γ знову належить границі множини $\widetilde{X}$.

Покладемо $y_n := \tilde{y}(nT)$, $z_n := \tilde{z}(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$. Якщо

$$y_n = y_m \pmod l \qquad \text{або} \qquad z_n = z_m \pmod l$$

для деяких цілих m і n, то РТПР $\tilde{y}$ або $\tilde{z}$ періодична. Звідси ТПР $x_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$, періодична за лемою 6.

Припустимо, що всі числа y_n різні за модулем l. Якби існували такі $k, m, n \in \mathbb{Z}$, що $y_m + kl \in (y_n, z_n)$, то паралельний зсув $\tilde{y}$ на вектор $(kl, nT - mT) \in \Gamma$ лежав би в коридорі між $\tilde{y}$ і $\tilde{z}$. Звідси, коридор між $\tilde{y}$ і $\tilde{z}$ містив би точки з $\widetilde{X}$, що неможливо. Подібні міркування показують, що $z_m + kl \notin (y_n, z_n)$ для довільних $k, m, n \in \mathbb{Z}$. Це означає, що довільні два інтервали (y_n, z_n) і (y_m, z_m) не містять точок, які за модулем дорівнюють l, звідки $\sum_{n\in\mathbb{Z}} (z_n - y_n) \le l$. Останнє є неможливим за лемою 7. Таким чином, лему доведено. ∎

Твердження теореми 2 для розглядуваного випадку випливає з лем 6 і 8.

Огляд літератури

До розділу II

Багато задач математичної фізики, які описують коливання різних систем (наприклад, дослідження поздовжніх коливань стержнів та вібрації кораблів, розрахунки стійкості валів, що обертаються, опис електромагнітних хвиль у прямокутних хвилеводах та ін.) призводять до вивчення періодичних розв'язків нестаціонарних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Однак для диференціальних рівнянь гіперболічного та складеного типів періодична за часовою змінною крайова задача є, взагалі кажучи, некоректною, а існування її розв'язку пов'язане з проблемою малих знаменників. Труднощі, пов'язані з малими знаменниками, були, очевидно, однією з причин того, що періодичні крайові задачі для гіперболічних рівнянь (як лінійних, так і нелінійних) почали вивчатися порівняно недавно.

Першою серед праць у цьому напрямку була праця Н.А.Артем'єва [12], який в області $\{0 < t, x < 1\}$ досліджував задачу

$$z_{tt} - a^2 z_{xx} = \Psi(x,t) + \mu f(z)\,, \tag{18}$$

$$z(0,t) = z(1,t) = 0\,, \tag{19}$$

$$z(x,0) = z(x,1)\,, \quad z_t(x,0) = z_t(x,1)\,. \tag{20}$$

Доведено, що коли $a = (2m+1)/p$, $m, p \in \mathbb{Z}$, $p \neq 0$, тоді для достатньо малого $|\mu|$ за певних обмежень на функції $\Psi(x,t)$ і $f(z)$ задача має єдиний розв'язок у класі функцій, що зображаються рядами

$$z(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} z_{2k+1}(t)\sin(2k+1)\pi x\,.$$

При доведенні існування розв'язку задачі (18)–(20) використовувалась система функцій Гріна

$$\varphi_n(t,\tau) = \frac{\cos(a\pi n(|t-\tau| - 1/2))}{2a\pi n \sin(a\pi n/2)}\,, \quad 0 \leq t, \tau \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

При ірраціональному a кожна окрема функція $\varphi_n(t,\tau)$ зокрема є обмежена, але сукупність всіх $\varphi_n(t,\tau)$ – необмежена, оскільки $\sin(a\pi n/2)$ може набувати як завгодно малих значень для нескінченної множини натуральних n.

Зауважимо, що сукупність усіх функцій (21) буде обмеженою, якщо a – таке ірраціональне число, що для всіх цілих m і $n \neq 0$ та деякого $c > 0$ виконується нерівність

$$\left|a - \frac{m}{n}\right| > \frac{c}{n^2}\,. \tag{22}$$

Нерівність (22) справджується для тих ірраціональних чисел, що допускають розвинення в ланцюговий дріб з обмеженими елементами, зокрема, для квадратичних ірраціональностей (див. теорему 23 в [266]).

Для випадку $a = \sqrt{p/q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, це вперше відзначив Г.Т. Соколов у праці [242].

Узагальненням задачі (18)–(20), її різним варіантам при раціональних значеннях коефіцієнта a присвячені праці [101, 102, 168, 241, 243].

О. Вейвода [380] досліджував у півсмузі $\{t, x : t \geq 0, 0 \leq x \leq \pi\}$ ω-періодичні за змінною t розв'язки лінійного хвильового рівняння, а також слабконелінійного рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h(t,x) + \varepsilon f\Big(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon\Big), \tag{23}$$

де ε – малий параметр, з крайовими умовами (19) за змінною x. Для $\omega = 2\pi p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$, знайдено умови існування розв'язків розглядуваних задач, а у випадку $\omega = 2\pi\alpha$, де α – ірраціональне число, доведено існування та єдиність гладкого розв'язку лінійної задачі в припущенні, що α задовольняє умову

$$\left|\alpha - \frac{m}{k}\right| > \frac{C}{k^\gamma}$$

для всіх $k, m \in \mathbb{N}$ і деяких додатних C і γ; при цьому використовується явний вигляд розв'язку мішаної задачі для лінійного рівняння з довільно вибраними початковими даними $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ і досліджуються умови на функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$, за яких цей розв'язок є ω-періодичним за змінною t. Вказані дослідження були продовжені в праці [26], де розглянуто періоди вигляду $2\pi p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$, і показано, що завжди можна знайти деякий простір, в якому існує єдиний розв'язок розглядуваної задачі. У працях [368, 371] вивчалися періодичні розв'язки рівняння вигляду (23), ($h(t,x) \equiv 0$) з періодом ω, що залежить від малого параметра ε. До вказаних вище досліджень примикають праці [32, 45, 165, 166, 167, 189, 214, 267].

В працях [193, 358] встановлена однозначна розв'язність задачі

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \varepsilon f(t,x,u),$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \tag{24}$$
$$u(t+\omega, x) = u(t,x),$$

в смузі $\{0 \le x \le l; -\infty < t < \infty\}$ у припущенні, що $f(t,x,u)$ – достатньо гладка за всіма змінними і ω-періодична за змінною t, $\partial u/\partial x \le -\beta < 0$, ε – малий параметр. Розглянуто випадки $\omega = 2l/a$ і $\omega = 2lm/(an)$, де m і n – взаємно прості числа. Задача (24) та її узагальнення в різних аспектах вивчались також у працях [192, 340, 347, 348, 349].

Розв'язність та однозначна розв'язність задачі

$$u_{tt} - u_{xx} + f(t,x,u) = 0\,, \quad 0 < x < \pi;\ t \in R,$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0\,, \tag{25}$$
$$u(t+T,x) - u(t,x) = 0$$

для різних випадків нелінійності за u функції $f(t,x,u)$ та для різних періодів T досліджувались у працях [6, 89, 226, 251, 285, 287, 293, 296, 297, 305, 307, 308, 309, 315, 333, 335, 341, 344, 345, 346, 360, 373, 374, 375, 384, 386]; розглядались класичні, слабкі та наближені розв'язки.

Вивченню періодичних (за t) розв'язків багатовимірного квазілійного рівняння

$$u_{tt} - \Delta_x u + g(x,t,u_t) = f(x,t,u),$$

які обертаються в нуль на границі деякої обмеженої області зміни просторових координат $x_1, \ldots, x_n$, присвячені праці [302, 356, 357]; зокрема, в першій з них доведено розв'язність досліджуваної задачі в просторах Орліча за певних обмежень на функції $g(x,t,u_t) \equiv g(u_t)$ і $f(t,x,u) \equiv f(t,x)$. Аналогічні задачі для багатовимірних лінійних та квазілінійних хвильових рівнянь розглядались також у працях [185, 191, 365, 387], в останній з них областю зміни просторових координат є n-вимірна сфера.

Я. Гавлова [322] досліджувала періодичні розв'язки слабконелінійного телеграфного рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} + 2au_t + 2bu_x + cu = h(t,x) + \varepsilon f(t,u,u_t,u_x,\varepsilon), \tag{26}$$

де a, b, c – сталі; ε – малий параметр. Доведено, що при $a \ne 0$, $b^2 + c > 0$ існує єдиний ω-періодичний за змінною t розв'язок задачі (26), (19) в припущенні, що функції h і f є ω-періодичними за t. Доведення грунтується на вивченні поведінки обмежених розв'язків рівняння (26) при $t \to \infty$. Ці результати розвинені в праці [383] на випадки двох і трьох просторових змінних, а в [370] – на випадок довільного числа просторових змінних. Цікаві дослідження в цьому напрямку проведені також у працях [213, 317, 359].

Узагальнені та слабкі періодичні за t розв'язки, що задовольняють умови вигляду (19), вивчались для рівняння $u_{tt} - u_{xx} + \beta u_t - g(t,x,u) = h(t,x)$ у працях [311, 323, 330], для рівняння $\beta u_t + \gamma u_x + u_{tt} - u_{xx} + g(u) = f(t,x)$ – в [227], для рівняння $u_{tt} - u_{xx} + cu = f(t,x,u)$ – в [62, 66], а для рівняння $u_{tt} - u_{xx} + u_t + \beta(u_t) = f(t,x)$ – в [299].

Дослідження умов існування та єдиності періодичних за обома змінними розв'язків квазілінійних гіперболічних рівнянь вигляду

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y,u,u_x,u_y)$$

проводились у працях [252, 286, 303, 304]; близькими до них є праці [354, 382].

К. Турсунов [253, 254, 255] в області $D = [0,T] \times \Omega$, де Ω – обмежена однозв'язна область в R^n, для рівняння з нелінійною операторною правою частиною

$$u_{tt} + 2\alpha u_t - L(u) = f(u), \tag{27}$$

де α – відмінна від нуля стала, а

$$L(u) \equiv \sum_{j,r=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{jr}(x)\frac{\partial}{\partial x_r}\Big) - a(x),$$

розглянув задачу з умовами (20) за змінною t і граничною умовою

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{28}$$

Встановлено достатні умови існування та єдиності узагальненого і класичного розв'язків та розв'язку майже всюди задачі (27), (20), (28) у банаховому просторі функцій, які розвиваються в ряди Фур'є за власними функціями оператора L. Частинний випадок задачі (27), (20), (28), коли $\alpha = 0$, $n = 1$, розглядався в [13].

Дослідження умов існування та єдиності класичних періодичних за t розв'язків рівнянь пружних коливань балки

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = g(x,t) + \varepsilon f(t,x,u,u_t,u_x,u_{xx},\varepsilon)$$

з умовами $u(t,0) = u(t,l) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,l) = 0$ проводились у працях [100, 169, 244, 334]; задачі, близькі до цієї, розглядались в [264, 292, 313, 321].

М. Копачкова [331] встановила умови існування та єдиності 2π-періодичного за t класичного розв'язку лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$P_1\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\frac{\partial^{2p} u(t,x)}{\partial x^{2p}} + P_2\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)u(t,x) = f(t,x), \quad x \in [0,a],$$

який задовольняє умови

$$\frac{\partial^{2n}u(t,x)}{\partial x^{2n}}\Big|_{x=0} = \frac{\partial^{2n}u(t,x)}{\partial x^{2n}}\Big|_{x=a} = 0, \quad n = 0,1,\dots,p-1,$$

де $P_1(\eta)$ і $P_2(\eta)$ – многочлени, $P_1(i\xi) \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}$, у припущенні, що для всіх $k \in \mathbb{N}$ справджується нерівність

$$\left|\frac{P_2(ik)}{P_1(ik)}\right|^{1/2p} \min_{l\in\mathbb{Z}} |\arg\beta_j(k) - (l+1/2)\pi| \geq C|k|^{-\alpha}, \quad c,\alpha > 0,$$

де $\beta_j(k)$, $j = 1,\dots,2p$, – корені рівняння $\lambda^{2p} = -P_2(ik)/P_1(ik)$.

М.Х. Шхануков [281] за допомогою функції Рімана одержав достатні умови однозначної розв'язності періодичної крайової задачі для рівняння

$$u_{xxt} + d(x,t)u_t + \eta(x,t)u_{xx} + a(x,t)u_x + b(x,t)u = -g(x,t)\,,$$

яке моделює фільтрацію рідини в пористих середовищах.

В.С. Мокейчев [171] встановив умови нормальної розв'язності в просторі періодичних розподілів диференціального рівняння (без обмеження на тип)

$$\sum_{|m|\leq q} C_m(x)\frac{\partial^{|m|}u}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_n^{m_n}} = f(x),$$

де $C_m(x) \in L_\infty(\Omega_{2\pi}^n)$, $\Omega_{2\pi}^n = \{0 < x_j < 2\pi,\ j = 1,\dots,n\}$.

У працях [43, 122, 235, 288, 319, 326, 352, 355] вивчаються задачі з періодичними умовами за часовою змінною для лінійних та квазілінійних параболічних рівнянь, а в [54, 250, 269, 352] досліджуються періодичні розв'язки рівнянь відповідно еліптико-параболічного, складеного, мішаного та квазігіперболічного типів.

Задачі про існування періодичних розв'язків систем рівнянь першого порядку вивчались у працях [230, 232, 249, 275, 369], а другого та вищих порядків – у [63, 64, 314, 316, 362].

Ю.А. Дубінським [56, 57] досліджувались періодичні розв'язки нелінійних еліптичних та параболічних рівнянь нескінченного порядку; при цьому вводились та вивчались простори Соболева нескінченного порядку на торі.

Умови існування періодичних розв'язків деяких диференціально-операторних рівнянь встановлені в працях [55, 312, 343, 372, 381].

Обширну бібліографію з питань вивчення періодичних розв'язків диференціальних рівнянь можна знайти в монографіях [167, 205, 237, 256, 381].

До розділу III

Уперше на доцільність і необхідність використання нелокальних умов з точки зору загальної теорії крайових задач вказав О.О. Дезін [47, 50], який досліджував розв'язні розширення диференціальних операторів, породжених загальною диференціальною операцією зі сталими коефіцієнтами, та можливість опису цих розширень за допомогою крайових умов. Зокрема, в праці [47] для задачі

$$Lu \equiv \frac{du(t)}{dt} - Au(t) = f(t), \quad t \in (0,a), \tag{29}$$

$$\mu u(0) - u(a) = 0, \quad \mu \in \mathbb{C}, \tag{30}$$

де A – комутуючий з d/dt необмежений лінійний оператор зі щільною областю визначення, який діє в комплексному банаховому просторі H, доведено, що існує обмежений обернений оператор L^{-1}, якщо для всіх цілочислових векторів $s = (s_1,\dots,s_n)$ справедлива оцінка

$$|\mu - e^{aA(s)}| \geq \delta$$

при деякому $\delta > 0$.

Операторне рівняння другого порядку

$$Lu \equiv (D_t^2 + 2BD_t - A)u(t) = f(t), \quad t \in (0,b),$$

де A і B – комутуючі з D_t оператори, породжені диференціальними операціями зі сталими коефіцієнтами за змінною x на n-вимірному торі, розглянуто в праці [49]. Тут вивчена залежність характеру розв'язності рівняння від поведінки символів операцій і вигляду крайових умов.

Подальший розвиток ці дослідження набули в працях В.К. Романка [215]–[223], зокрема для диференціально-операторних рівнянь вищих порядків із сталими та змінними коефіцієнтами з нелокальними умовами

$$a_j\frac{d^{j-1}u}{dt^{j-1}}\Big|_{t=0} + b_j\frac{d^{j-1}u}{dt^{j-1}}\Big|_{t=1} = 0, \quad j = 1,\dots,m, \tag{31}$$

та умовами

$$u^{(p)}(0) = u^{(q)}(T) = 0,\ p = 0,1,\dots,\nu_1 - 1;\ q = 0,1,\dots,\nu_2 - 1, \tag{32}$$

$$\mu u^{(r)}(0) + u^{(s)}(T) = 0,\ r = \nu_1,\dots,n-\nu_2-1;\ s = \nu_2,\dots,n-\nu_1-1,$$

де ν_1, ν_2 – цілі числа, $0 \leq \nu_1, \nu_2 \leq n$; a_j, b_j, μ – комплексні параметри. Для задачі з умовами (31) у випадку рівняння

$$L_m u \equiv \frac{d^m u(t)}{dt^m} - Au(t) = f(t), \tag{33}$$

де A – диференціальний оператор зі сталими коефіцієнтами на торі $\Omega^n_{2\pi}$, доведено, що якщо існує таке $\delta > 0$, що точки спектра оператора A не містяться в δ-околах точок дискретного спектра оператора $L_0 \equiv d^m/dt^m$ при крайових умовах (31), то за деяких додаткових обмежень на спектри операторів A і L_0 та умови (31), існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (33), (31) для довільної правої частини $f(t)$ із гільбертового простору H.

Ці результати поширено на випадок рівнянь та систем рівнянь зі змінними коефіцієнтами [216, 224] в паралелепіпеді $[0,T] \times \prod_{q=1}^{n}[0,l_q]$, коли задані нелокальні умови вигляду (31) за кожною незалежною змінною.

Диференціально-операторне рівняння з малим параметром

$$\varepsilon\frac{du_\varepsilon(t)}{dt} - Au_\varepsilon(t) = f(t), \quad t \in (0,b),$$

де оператор A описано в (29), з нелокальною умовою

$$\mu u_\varepsilon(0) - u_\varepsilon(b) = 0$$

розглянув М. Юнусов [283]. За умов

$$|A(s)| \geq C > 0, \quad |\mu - e^{bA(s)/\varepsilon}| \geq \delta > 0$$

доведено теореми існування та єдиності розв'язку, який зображається у вигляді ряду за власними функціями оператора A; вивчена поведінка розв'язку при $\varepsilon \to 0$.

Задачі оптимального керування для рівняння (29) з умовами (30) розглянуті в працях [247, 248].

У праці [51] досліджено спектральні характеристики (власні функції, власні значення) нелокальних задач для рівняння

$$A_0\frac{du(t)}{dt} + A_1u(t) = f(t), \quad t \in (0,a),$$

в залежності від типу нерегулярності.

Крайова задача в циліндрі $\Omega \times [-T,T]$ для рівняння

$$D_tu(x,t) + A(x,t,D_x)u(x,t) = f(x,t)$$

з розривними при $t = 0$ коефіцієнтами вивчена в праці [222]. Показано, що залежно від характеру розміщення спектра оператора $A(x,t,D_x)$ для одержання однозначної розв'язності крайової задачі необхідно задавати як класичні умови спряження в точці $t = 0$, так і нелокальні триточкові крайові умови з числовими або спеціальними операторними коефіцієнтами. У працях [221, 223] показана необхідність застосування триточкових нелокальних умов для задачі спряження диференціально-операторних рівнянь першого і другого порядків.

У праці [217] для системи двох рівнянь

$$Lu(x,t) \equiv D_tu - AP(D_x)u = f(x,t),$$

де A – ненульова квадратна матриця, $P(D_x)$ – лінійний диференціальний оператор в кубі з комплексними коефіцієнтами, встановлено, що умови

$$\mu_j D^{l_j}_{x_j}u(x,t)\big|_{x_j=0} = D^{l_j}_{x_j}u(x,t)\big|_{x_j=b}, \quad l_j = 0,1,\ldots,r_j-1,$$
$$M_1u(x,0) + M_2u(x,T) = 0$$

визначають правильний оператор, а також знайдено клас систем рівнянь, для яких вказані вище граничні умови не приводять до правильного оператора.

У працях [186, 187] для рівнянь

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} = \sum_{l=0}^{2} C^{(1)}_{0l}(x)\frac{\partial^l u^{(1)}}{\partial x^l} + f^{(1)}(x,t), \quad t \in (0,T),$$
$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t^2} = \sum_{k+l=0,\,k\leq 1}^{2} C^{(2)}_{kl}(x)\frac{\partial^{l+k} u^{(2)}}{\partial t^k\partial x^l} + f^{(2)}(x,t), \quad t \in (0,T),$$

заданих на інтервалах (a_1,b_1) і (a_2,b_2), $a_1 = b_2$, розглядається задача з крайовими і початковими умовами

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{l=0}^{1}\left\{\alpha^{(i)}_{sl}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^l u^{(i)}}{\partial x^l}\bigg|_{x=a_i} + \beta^{(i)}_{sl}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^l u^{(i)}}{\partial x^l}\bigg|_{x=b_i}\right\} = \gamma_s,\ s = 1,2,3,4,$$
$$u^{(i)}(x,0) = \Phi^{(i)}_0(x), \quad x \in (a_i,b_i), \quad i = 1,2,$$
$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \Phi^{(2)}_1(x), \quad x \in (a_2,b_2),$$

де $\alpha^{(i)}_{sl}(z) = \sum_{k=0}^{i}\alpha^{(i)}_{slk}z^k$, $\beta^{(i)}_{sl}(z) = \sum_{k=0}^{i}\beta^{(i)}_{slk}z^k$, $i = 1,2$. За певних обмежень доведено існування та єдиність розв'язку цієї задачі.

Однозначна розв'язність нелокальної за обома змінними задачі для рівняння, що вироджується,

$$u_{xx} - \operatorname{sgn} x\ u_t = F(x,t),$$
$$\alpha(t)u(-1,t) + \beta(t)u(1,t) = \varphi_1(t), \quad -1 \leq t < 0,$$
$$\beta(t)u_x(-1,t) + \alpha(t)u_x(1,t) = \varphi_2(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$
$$\lambda_1(x)u(x,0) + u(x,1) = \psi_1(x), \quad -1 \leq x < 0,$$
$$u(x,0) + \lambda_2(x)u(x,1) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

доведена в [278] за допомогою принципу максимума.

Для рівнянь вигляду (29), де $u(t) = u(t,x)$, $f(t) = f(t,x)$ – скалярні функції, $t \in (0,a)$, $x \in \mathbb{R}^m$, у праці Г.Б. Савченко [229] досліджена задача з крайовими умовами

$$Bu(t,x)|_{t=0} = Cu(t,x)|_{t=a}, \tag{34}$$

де $A = A(-iD)$, $B = B(-iD)$, $C = C(-iD)$ – лінійні диференціальні оператори зі сталими коефіцієнтами. Доведено L_2-коректність даної задачі в припущенні, що для всіх $s \in \mathbb{R}^m$ справедлива оцінка

$$\left|\frac{B(s)}{C(s)} - e^{aA(s)}\right| \geq \delta > 0$$

і для довільної послідовності $s_k \in \mathbb{R}^m$, $\operatorname{Re} A(s_k) \to \infty$, виконується нерівність

$$\lim_{k\to\infty} \frac{B(s_k)}{|C(s_k)|\,|\operatorname{Re} A(s_k)|} < K < \infty, \quad K > 0.$$

У працях [18, 236] розглянуто нелокальні крайові задачі для рівнянь еліптичного і параболічного типів, які виникають у фізиці плазми. Нехай G – відкрита область n-вимірного евклідового простору $\mathbb{E}^n$, $n \geq 2$, ∂G – гладка границя області G, σ – частина ∂G і нехай T неперервно диференційоване відображення σ в деяку гладку поверхню T_σ, що лежить в G. Потрібно знайти двічі неперервно диференційовну в G функцію $u(x)$, $x \in E^n$, що є неперервною в $G \cup \partial G$ і задовольняє умови

$$\begin{gathered} Lu = 0, \quad x \in G,\ x = (x_1, \ldots, x_n), \\ u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial G \setminus \sigma,\ \varphi \in C(\partial G \setminus \sigma), \\ u(Tx) = u(x), \quad x \in \sigma,\ u \in C^{(2)}(G) \cap C(G \cup \partial G), \end{gathered} \tag{35}$$

де $L = \sum\limits_{i,j} a_{ij} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum\limits_i b_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$ – оператор еліптичного типу. Особливістю задачі (35) є те, що крайові умови ставляться в точках області G, де шукана функція повинна задовольняти рівняння. При вивченні нестаціонарних процесів аналогічна задача виникає для рівняння параболічного типу

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \quad x \in G,\ t > 0, \\ u(x,t) = \varphi(x,t), \quad x \in \partial G \setminus \sigma,\ t > 0, \\ u(Tx,t) = u(x,t), \quad x \in \sigma,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{gathered} \tag{36}$$

У працях [60, 97, 98] доведена єдиність та існування розв'язків задач (35) і (36). При цьому використовується строгий принцип максимума і точні оцінки Жіро.

Для рівняння теплопровідності $\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2$, $0 < x < 1$, $t > 0$, з початковою умовою $u(x,0) = u_0(x)$, $0 < x < 1$, цікавими є такі умови:

$$\begin{gathered} a_1 u_x(0,t) + b_1 u_x(1,t) + a_0 u(0,t) + b_0 u(1,t) = 0, \\ c_1 u_x(0,t) + d_1 u_x(1,t) + c_0 u(0,t) + d_0 u(1,t) = 0 \end{gathered} \tag{37}$$

або

$$\int\limits_0^1 u(x,t)\,dx = \mu(t), \quad u(0,t) = \nu(t). \tag{38}$$

Для одновимірного неоднорідного рівняння теплопровідності задачі з умовами (37) і (38) досліджені в працях [90, 91, 92]: доведено існування класичного розв'язку, одержано двосторонні апріорні оцінки [90], досліджено питання про можливість зображення розв'язку рядом за власними і приєднаними функціями [92], доведено єдиність і стійкість розв'язку [91, 92].

Для одновимірного рівняння теплопровідності в області $\{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ за допомогою принципу екстремуму доведено [104] єдиність, а методом інтегральних рівнянь встановлено існування розв'язку, що задовольняє умови

$$\begin{gathered} u(0,t) = \varphi_0(t), \quad u(l,t) = \varphi_l(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x,0) = \omega(x) u(x,T), \quad \omega(x) \in C(0,l), \quad 0 < \omega(x) < 1. \end{gathered} \tag{39}$$

Для багатовимірного рівняння теплопровідності в циліндрі аналогічні результати одержано в праці [279].

Задачу теплопровідності зі зворотнім часом розглянув П.Н. Вабіщевич у праці [24]. За допомогою нелокальних умов вигляду (39) проведено її регуляризацію, розв'язок побудовано на основі ітераційних методів.

Розв'язність нелокальних крайових задач для параболічних рівнянь вивчено зокрема в працях [65, 126, 140, 149, 211].

У працях [19, 21, 257, 258, 259, 260, 261] подано критерії коректності нелокальних крайових задач у смузі $\Pi(T) = \mathbb{R}^n \times [0,T]$ для диференціально-операторного рівняння вигляду

$$u_t = P(-iD_x)u. \tag{40}$$

Зокрема [257], задача для рівняння (40) з умовою

$$\int_0^T B(-iD_x)u(x,t)e^{-at}\,dt = u_0(x) \tag{41}$$

коректна в смузі $\Pi(T)$ у класі обмежених функцій тоді і лише тоді, коли

$$B(\sigma)\frac{e^{T(P(\sigma)-a)}-1}{P(\sigma)-a} \neq 0$$

для будь-якого $\sigma \in \mathbb{R}^n$. Крім того, для будь-якої задачі (40), (41) виконується лише одна із умов:

1) задача (40), (41) не є коректна в жодній смузі $\Pi(T)$;

2) задача (40), (41) коректна при всіх $T \in \mathbb{R}_+$, за винятком, можливо, зліченної множини;

3) задача (40), (41) коректна в смузі $\Pi(T)$ тоді і лише тоді, коли T належить обмеженій скінченно-зв'язній підмножині $\mathbb{R}_+$.

Вивчено [258] властивість T-стійкості задачі (40), (41), пов'язаної з її коректністю.

У випадку задачі для рівняння (40) з умовою

$$Au(x,0) - u(x,T) = u_0(x) \tag{42}$$

розглянуто питання про коректну постановку [19] і отримано критерій коректності в класі функцій степеневого зростання [259], який формулюється у вигляді виконання умови

$$\forall\sigma \in \mathbb{R}^n \quad A - e^{TP(\sigma)} \neq 0.$$

Для рівняння (40) при більш загальній (порівняно з (42)) нелокальній умові

$$A(-iD_x)u(x,0) - B(-iD_x)u(x,T) = u_0(x), \tag{43}$$

де оператори $A(-iD_x)$ і $B(-iD_x)$ є диференціальними операторами зі сталими коефіцієнтами, в праці [260] встановлено критерій коректності задачі, який полягає у виконанні таких умов:

$$A(\sigma) + B(\sigma)e^{TP(\sigma)} \neq 0, \quad \forall\sigma \in \mathbb{R}^n,$$
$$\inf\{\operatorname{Re} P(\sigma) : \sigma \in N[A]\} > -\infty,$$
$$\sup\{\operatorname{Re} P(\sigma) : \sigma \in N[B]\} < +\infty,$$

де $N[H] = \{\sigma \in \mathbb{R}^n : H(\sigma) = 0\}$.

У працях [137, 138, 139] досліджено питання про існування коректної двоточкової задачі для системи рівнянь

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T], \tag{44}$$

де матриця-функція $A(\sigma)$ належить до простору нескінченно диференційовних функцій степеневого зростання. Відомо [143], що для систем (44) може не існувати коректної локальної крайової задачі. У [139] показано, що для системи (44) завжди знайдуться крайові умови вигляду

$$B\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(x,0) + C\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(x,T) = \varphi(x), \tag{45}$$

такі, що задача (44), (45) коректно розв'язна в просторах Соболєва-Слободецького. При цьому подається конкретний вигляд операторів $B(\partial/\partial x)$ і $C(\partial/\partial x)$. Основні результати праць [137, 138] такі.

1. Нехай $A(\sigma)$, $B(\sigma)$ і $C(\sigma) \in C^\infty_{-\infty}$. Задача (44), (45) коректно розв'язна з простору $H = \bigcup_s H^s$ у простір $C^1([0,T];S)$, де $S = \bigcup_{s,l} H^s_l$, тоді і лише тоді, коли

$$Q(\sigma,t) = e^{tA(\sigma)}(B(\sigma) + C(\sigma)e^{TA(\sigma)})^{-1} \in C^\infty_{-\infty}.$$

2. Нехай $A(\sigma)$, $B(\sigma)$ і $C(\sigma) \in H^0_{-\infty}$. Задача (40), (41) коректно розв'язна з простору H у простір $C^1([0,T];H)$ тоді і лише тоді, коли $Q(\sigma,t) \in H^0_{-\infty}$.

3. Нехай $A(\sigma) \in C^\infty_{-\infty}$ і $A^*(\sigma)A(\sigma) = A(\sigma)A^*(\sigma)$, де $A^*(\sigma)$ – спряжена до $A(\sigma)$ матриця. Тоді існують такі $B(\sigma)$, $C(\sigma) \in C^\sigma_{-\sigma}$, що крайова задача (44), (45) коректно розв'язна з простору S у простір $C^1([0,T];S)$, а також коректно розв'язна з простору H^s_l у простір $C^1([0,T];H^{s-p}_l)$.

4. Для кожної матриці $A(\sigma) \in H^0_{-\infty}$ існують такі $B(\sigma)$, $C(\sigma) \in H^0_{-\infty}$, що крайова задача (44), (45) коректно розв'язна з простору H у простір $C^1([0,T];H)$, а також із простору H^s у простір $C^1([0,T];H^{s-p})$.

5. Нехай $A(\sigma)$ – поліноміальна матриця з простими власними значеннями. Тоді існують такі $B(\sigma)$, $C(\sigma) \in C^\infty_{-\infty}$, що задача (44), (45) коректно розв'язна з S в $C^1([0,T];S)$.

До розділу IV

У працях С.Г. Крейна і Г.І. Лаптєва [127, 128, 134] для рівняння

$$L_2u \equiv \frac{d^2u(t)}{dt^2} - Au(t) = f(t), \tag{46}$$

де A – замкнений лінійний оператор із всюди щільною в комплексному банаховому просторі E областю визначення, $u(t)$ і $f(t)$ – функції із значеннями в E, розглядається задача з крайовими умовами

$$\sum_{j=1}^{2}\left[\alpha_{rj}u^{(j-1)}(0)+\beta_{rj}u^{(j-1)}(T)\right]=f_r,\quad r=1,2, \tag{47}$$

де α_{rj}, β_{rj} – комплексні числа. В припущенні, що для довільного $\lambda \geq 0$ оператор $(A+\lambda I)^{-1}$ існує, визначений на всьому E і $\|(A+\lambda I)^{-1}\| \leq C(1+\lambda)^{-1}$, встановлені необхідні і достатні умови існування та єдиності узагальненого розв'язку задачі (46), (47), коли A – породжуючий оператор аналітичної півгрупи.

Аналогічні дослідження проведені С.П. Шипатським [277] для задачі (46), (47), коли A – лінійний необмежений оператор такий, що існує оператор $i\sqrt{A}$, який є породжуючим оператором сильно неперервної групи обмежених операторів.

Праці Ш.Дж. Мамедової [141, 142] присвячені вивченню задачі з крайовими умовами

$$\sum_{j=0}^{2n-1}\left[\alpha_{\nu j}u^{(j)}(0)+\beta_{\nu j}u^{(j)}(1)\right]=0,\quad \nu=1,\ldots,2n, \tag{48}$$

де $\alpha_{\nu j}$, $\beta_{\nu j}$ – комплексні числа, для рівняння

$$\left(\frac{d}{idt}\right)^{2n}u(t)+A^{2n}u(t)+\sum_{j=1}^{2n}B_j(t)\left(\frac{d}{idt}\right)^{2n-j}u(t)=f(t),\ t\in(0,1), \tag{49}$$

де $B_j(t)$, A^{-j}, $j=1,\ldots,2n$, – обмежені оператори в гільбертовому просторі. Доведено нормальну розв'язність і Ф-розв'язність досліджуваної задачі в припущенні, що виконуються нерівності

$$\sup_k \|\lambda_k^{(2n-j)/2n}A^j(\lambda_k E+A^{2n})^{-1}\|<\infty,$$

де λ_k – власні значення оператора, породженого виразом $(-id/dt)^n$ і крайовими умовами (48).

У теорії періодичних хвилеводів виникають задачі, які описуються диференціальними рівняннями в гільбертовому просторі H і нелокальними умовами [239]:

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dz}{dt}\right)+Q(t)z+f(t,z)=0,\quad 0<t<\omega, \tag{50}$$

$$z(\omega)=\rho z(0),\quad z'(\omega)=\rho z'(0),\quad |\rho|=1. \tag{51}$$

Припускається, що для кожного $t\in[0,\omega]$ оператор $p(t)$ обмежений і додатно визначений в H, $f(t,z)$ – обмежений потенціальний оператор, а оператор $Q(t)$ має, взагалі кажучи, залежну від t область

визначення. Доведено розв'язність задачі (50), (51), яка є еквівалентною існуванню стаціонарної точки деякого функціонала.

У праці [5] доводиться фредгольмовість оператора $Q: u\to Qu = \{Lu, L_1u, L_2u\}$, де оператори L, L_1, L_2 визначають нелокальну крайову задачу для еліптичного диференціально-операторного рівняння другого порядку

$$\begin{gathered}Lu\equiv u''(x)-Au(x)+(A_1u')(x)+(A_2u)(x)=f(x),\quad x\in(a,b),\\ L_1u\equiv u'(b)+B_1u(a)+B_2u(b)=f_1(x),\\ L_2u\equiv u'(a)+C_1u(a)+C_2u(b)=f_2(x).\end{gathered}$$

Крайова задача з умовами

$$Bu(t,x)|_{t=0}=Cu(t,x)|_{t=a} \tag{52}$$

для рівняння

$$Lu\equiv\frac{du(t)}{dt}-Au(t)=0,\quad t\in(0,a) \tag{53}$$

розглядається в [150] у гільбертовому просторі $L_2([0,1],H)$ для обмежених операторів $A_1=A+\lambda I$, B, C. У припущенні, що система власних векторів оператора A_1 утворює базу в H, сформульовані умови регулярності та нерегулярності крайових умов (52).

Праці В.І. Чесаліна та М.І. Юрчука [270, 273] присвячені дослідженню задачі з нелокальними крайовими умовами для абстрактних рівнянь Лява

$$\begin{gathered}\frac{d^2u}{dt^2}-A\left(u+\lambda\frac{d^2u}{dt^2}\right)=f,\quad \lambda\geq 0,\ t\in[0,T],\\ B_1(\mu)u^{r-1}(0)-B_2(\mu)u^{r-1}(T)=\varphi_r,\quad r=1,2,\end{gathered} \tag{54}$$

де A – самоспряжений і додатно визначений оператор, а $B_1(\mu)$ і $B_2(\mu)$ є лінійними неперервними операторами в гільбертовому просторі H; φ_1, $\varphi_2\in H$, f, u – функції зі значеннями в H. У припущенні, що для $j=1$ або $j=2$ виконується умова: на H існує обмежений оператор $B_j^{-1}(\mu)$, який переводить $D(A)$ в $D(A)$, і $\|B_j^{-1}(\mu)B_{3-j}(\mu)\|<e^{-cT}$, де $c>0$ – стала, що залежить від A, встановлена [273] однозначна розв'язність задачі (54). У праці [270] продовжено вивчення цієї задачі для частинного випадку, коли $B_1(\mu)\equiv 1$ і $B_2(\mu)=\mu$.

Задача з умовами

$$\left.\frac{d^ju}{dt^j}\right|_{t=0}-\mu_j\left.\frac{d^ju}{dt^j}\right|_{t=T}=\varphi_j,\quad j=0,1,\ldots,2m-1,$$

досліджена в праці В.І. Чесаліна [272] для диференціально-операторного рівняння

$$\prod_{r=1}^{m}\left(\frac{d^2}{dt^2}+A_r\right)u(t)=f(t), \quad t\in[0,T],$$

де оператори A_r, $r=1,\ldots,m$, – самоспряжені, додатно визначені і попарно комутують.

Розвитком праці [273] є результати праць [271, 274, 282], де досліджуються нелокальні задачі для важливих випадків диференціально-операторних рівнянь.

Спектральні властивості нелокальних задач для рівнянь з частинними похідними та диференціально-операторних рівнянь досліджувались в книзі П.І. Каленюка, Я.О. Баранецького, З.М. Нитребича [95], яка, крім того, містить огляд літератури з цього питання.

До розділу V

Інтерес до розгляду некласичних задач для гіперболічних рівнянь та систем зумовлений кількома причинами. Зокрема, якісно нові постановки задач з'являються при розв'язуванні сучасних прикладних проблем та описі реальних життєвих процесів [18, 53, 148, 181, 177, 179, 246, 364, 325, 295, 320, 306, 388, 298]; математичні моделі при цьому часто містять нелокальні (нерозділені чи інтегральні) граничні умови, а також умови, які задаються у внутрішніх точках даної області. Дослідження нелокальних задач для гіперболічних диференціальних рівнянь має також суто теоретичний характер [3, 4, 21, 22, 23, 50, 176, 180] і зумовлене, по-перше, неможливістю коректно поставити локальні задачі для багатьох рівнянь, по-друге, спробою описати всі коректно поставлені задачі для даного рівняння (системи).

Задачі з нелокальними умовами виникають у теорії періодичних хвилеводів, фізиці плазми, фізиці ядерних реакцій, математичній біології, демографічних дослідженнях, при довгостроковому прогнозуванні погоди тощо. Зокрема, математичними моделями динаміки біопопуляцій є крайові задачі для гіперболічних рівнянь першого порядку з нелокальними умовами за просторовими змінними. У демографічних дослідженнях [367] використовуються неперервні моделі динаміки популяцій:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial r}=\mu(r,t)\rho(r,t)+w(r,t), \quad r>0, t>0,$$

$$\rho(r,0)=\rho_0(r),$$

$$\rho(0,t)=\psi(t)=\beta(t)\int_{r_1}^{r_2}h(r,t)K(r,t)\rho(r,t)\,dr,$$

де $\rho(r,t)$ – густина розподілу за віком r у момент часу t; $w(r,t)$ – густина мігрантів; $\mu(r,t)$ – коефіцієнт смертності; $\psi(t)$, $\beta(t)$, $h(r,t)$, $K(r,t)$ – стандартні демографічні індекси.

Н.В.Степанова [246] з єдиної точки зору систематизувала відомі в літературі моделі динаміки популяцій біологічних об'єктів, які враховують функції розподілу останніх за віком і за розмірами.

Методиці постановки коректних граничних задач для гіперболічних рівнянь присвячено праці А.М.Нахушева [176, 180]. Для модельних рівнянь гіперболічного та мішаного типів [180] описано необхідні локальні та нелокальні умови, які повинні задовольнятись усіма розв'язками досліджуваного рівняння із заданого класу. Для навантажених рівнянь гіперболічного типу [181, 177, 179] розглянуто нелокальні задачі з інтегральними умовами вигляду

$$\int_0^1 u(x,t)\,dx=\mu(t).$$

Використано метод функції Рімана для зведення цих задач до навантажених рівнянь Вольтерра 2-го роду. Дається фізичне тлумачення таких задач.

С.А.Алдашев [3, 4] розглядає нелокальні задачі для гіперболічних рівнянь другого та вищих порядків. Спочатку автор встановлює властивості розв'язків даного рівняння, після чого на їх основі знаходить ряд нових (нелокальних) однозначно розв'язних крайових задач. Розвиваючи теорію крайових задач зі зміщенням (початок цієї теорії для двовимірного випадку закладений у працях Біцадзе і А.М.Нахушева) С.А.Алдашев також вивчає питання про знаходження регулярних класичних розв'язків задач для багатовимірного хвильового рівняння з нелокальними крайовими умовами, що містять інтегральні оператори.

Відзначимо роботи, пов'язані з вивченням класичних і некласичних задач для майже лінійних і квазілінійних гіперболічних систем. Найбільш загальні результати по вивченню мішаних задач для гіперболічних систем отримано, зокрема, у працях В. Е. Аболіні і О. Д. Мишкіса [1, 2], З. О. Мельника [155, 156, 157, 160, 159, 151, 153] (дослідження проводяться методом характеристик), А. І. Марковського [147, 146, 144, 145] (будуються регуляризатори розглядуваних задач) та Лі Та-Тзіна [336, 338].

Крайові задачі для квазілінійної гіперболічної системи діагонального вигляду досліджуються в працях [376, 379, 377, 378]. Доводяться теореми існування та єдиності узагальнених розв'язків аналогів багатоточкової задачі [376, 379], а також неперервної залежності цих розв'язків від початкових даних. Доведення базуються на методі характеристик і теоремі Банаха про нерухому точку. Аналогічні результати отримано для задач, які виникають у нелінійній оптиці [291, 290].

У праці [337] розглянуто квазілінійну систему вигляду

$$\sum_{j=1}^{n}\xi_{lj}(t,x,u)\Big(\frac{\partial u_j}{\partial t}+\lambda_l(t,x,u)\frac{\partial u_j}{\partial x}\Big)=\mu_l(t,x,u),\quad l=1,\dots,n.$$

Досліджено задачу з розділеними нелінійними граничними умовами в куті. Зазначено, що подібні задачі виникають у гідродинаміці. Встановлено необхідні та достатні умови локальної розв'язності, яких достатньо для практичного використання отриманих результатів.

О. Д. Мишкіс і А. М. Філімонов [173, 174] досліджували задачу Коші та мішану задачу з нелінійними граничними умовами для квазілінійної гіперболічної системи трикутного вигляду. За допомогою методу стискуючих відображень було встановлено локальні теореми існування та єдиності неперервних узагальнених розв'язків. Під неперервним узагальненим розв'язком задачі розуміється неперервна і ліпшицева за всіма аргументами вектор-функція u, яка задовольняє деяку систему інтегро-операторних рівнянь. За додаткових припущень щодо монотонності вихідних даних і порядку зростання правих частин системи за змінною u наведено достатні умови глобальної розв'язності [265].

У праці [14] вивчено задачу Коші для системи двох квазілінійних рівнянь. Отримано умови на вихідні дані, за яких регулярний розв'язок існує в цілому. Показано, що при невиконанні цих умов, навіть при монотонних початкових даних, задача може мати кусково-гладкий, але не регулярний розв'язок.

У [350] за певних припущень монотонності щодо вихідних даних доведено існування в цілому розв'язку системи рівнянь спеціального вигляду

$$v_t-u_x=0,\quad u_t+\Big(\frac{1}{v}\Big)_x=0.$$

Некласичні граничні задачі для гіперболічних рівнянь і систем як із гладкими, так і з розривними коефіцієнтами в різних областях площини xOt були розглянуті в [107, 109, 111, 112, 156, 157, 158, 160, 159, 151, 155, 152, 161, 153, 163]. Тут наголошено на тому, що метод характеристик дозволяє побудувати достатньо повну теорію лінійних і слабо нелінійних мішаних задач для загальних двовимірних гіперболічних систем. Зокрема, для таких систем досліджена задача з класичними умовами Коші за змінною t і нелокальними умовами за змінною x:

$$\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{i}\alpha_{ij}^{k}(t)\frac{\partial^{i}u(x_k,t)}{\partial t^{i-j}x^{j}}=h_k(t),\quad 0\le t\le T,\ k=1,2.$$

У припущенні, що вихідні дані мають достатню гладкість, а початкові та нелокальні крайові умови задовольняють необхідні $r+1$ умов погодження, доведено теорему існування та єдиності r разів рівномірно неперервно диференційованого розв'язку, який неперервно залежить від вихідних даних. Аналогічну задачу розглянуто для загального гіперболічного рівняння з розривними коефіцієнтами [157]. Випадок кратних характеристик вивчено в [158].

Праці [153, 152, 163] присвячені задачам з інтегральними обмеженнями. У [152] отримано результат розв'язності задачі для строго гіперболічного рівняння другого порядку з характеристичними коренями різних знаків. Поряд з умовами Коші задаються інтегральні умови

$$\int_{0}^{l}\alpha_i(\xi,t)u(\xi,t)\,d\xi=h_i(t),\quad 0\le t\le T,\ i=1,2.$$

Доводиться існування кусково-гладкого розв'язку. У [163] встановлено коректну розв'язність нелокальних задач для гіперболічних рівнянь довільного порядку та систем першого порядку. Область розгляду — криволінійний сектор, в який попадають характеристики рівняння або системи, що виходять із вершини сектора.

Задачі типу Стефана (коли границя області або деяка її частина входять у число невідомих функцій) для гіперболічних систем досліджено в працях З. О. Мельника [154, 161] і В. М. Кирилича [108, 110]. Крайові умови на невідомій границі при цьому задаються в нелокальному вигляді.

У [342] вивчається клас початково-граничних задач для гіперболічних систем із нелінійними нелокальними крайовими умовами. Цей клас включає різні проблеми, які виникають у динаміці популяцій. Будується теорія локального та глобального існування та єдиності розв'язків.

Багато праць присвячено вивченню некласичних задач для гіперболічних рівнянь другого порядку з двома незалежними змінними. У смузі $\Pi(T)$ вивчаються задачі вигляду [263]

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = P(-iD_x)u(x,t), \quad (x,t) \in \Pi(T), \tag{55}$$

$$A(-iD_x)\begin{pmatrix} u(x,0) \\ u_t(x,0) \end{pmatrix} + B(-iD_x)\begin{pmatrix} u(x,T) \\ u_t(x,T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{01}(x) \\ u_{02}(x) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{56}$$

де $P(\sigma)$ – довільний поліном зі сталими комплексними коефіцієнтами; $A(\sigma)$, $B(\sigma)$ – поліноміальні (2×2)-матриці з комплексними коефіцієнтами ($\sigma \in \mathbb{R}^n$), причому

$$\operatorname{rang}(A(\sigma), B(\sigma)) = 2 \ \text{ для всіх } \sigma \in \mathbb{R}^n.$$

Отримано критерій коректності задачі (55), (56) у просторах скінченногладких функцій і на його основі досліджено питання про квазірегулярність даної задачі. При цьому показано, що перехід від смуги ($n = 1$) до шару ($n > 1$) при сталих матрицях A і B не впливає на результат, а перехід до диференціальних матриць $A(-iD_x)$ і $B(-iD_x)$ вносить нову умову в критерій коректності.

Аналогічні до (55), (56) задачі розглянуто також у працях [127, 220]. У [127] вивчено задачу (55), (56), де $P(-iD_x)$ замінено замкнутим лінійним оператором P у банаховому просторі з оцінкою знизу на його резольвенту, а матриці A і B — сталі. Отримано необхідні та достатні умови коректності.

Теореми існування та єдиності розв'язків нелокальних задач для гіперболічних рівнянь другого порядку доведено також у [310, 301, 300]. В [300] за допомогою теореми Банаха про нерухому точку автор досліджує задачу з нерозділеними умовами за часовою змінною (аналог багатоточкової задачі) в області, що є квадратом. Виявляється, що отримані результати застосовні до теорії еластичності ефективніше, ніж відомі аналогічні результати, пов'язані з класичними початковими умовами.

Для диференціально-операторних рівнянь вигляду [220]

$$\frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m} - Pu(t) = f(t), \quad t \in [0,T],$$

де P – оператор у банаховому просторі, з граничними умовами вигляду (56) (матриці A і B – сталі) за умов, що подаються в спектральних термінах, доведено існування єдиного узагальненого розв'язку.

Т.І.Кігурадзе [105, 106, 329, 327, 328] вивчає нелокальні задачі для лінійної гіперболічної системи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = P_0(x,y)u + P_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + P_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + g(x,y). \tag{57}$$

Зокрема [105, 106], встановлено критерій однозначної розв'язності періодичних крайових задач вигляду (57)

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le a,$$
$$u(0,y) = \alpha u(a,y), \quad 0 \le y \le b.$$

Необхідною та достатньою умовою існування єдиного розв'язку (за певних умов гладкості на вихідні дані) є умова

$$\bar{I}_r = [a,b],$$

де

$$I_r = \{y \in [a,b] : 1 - \alpha \exp\left(\int_0^a P_2(s,y)\,ds\right) \ne 0\}.$$

У праці [329] для рівняння (57) розглядаються нелокальні задачі в прямокутнику, періодичні та майже періодичні задачі в смузі, досліджуються оптимальні (близькі до необхідних) умови, які гарантують існування та єдиність розв'язків цих задач, вивчаються питання стійкості (неперервної залежності) розв'язків щодо малих змін коефіцієнтів рівняння (57) і граничних умов.

Список літератури

1. *Аболиня В.Э., Мышкис А.Д.* О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости// Уч. зап. Латв. ун-та. – 1958. – **20**, вып. 3. – С. 87–104.
2. *Аболиня В.Э., Мышкис А.Д.* Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости// Мат. сб. – 1960. – **50**, № 4. – С. 423–442.
3. *Алдашев С.А.* Об одной нелокальной задаче и задаче Гурса для уравнения высшего порядка// Изв. АН Каз ССР. Сер. физ.-мат. – 1982. – № 3. – С. 51–54.
4. *Алдашев С.А.* О некоторых локальных и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения// Дифференц. уравнения. – 1983. – **19**, № 1. – С. 3–8.
5. *Алиев Б.А., Якубов С.Я.* Фредгольмовость краевой задачи с оператором в краевых условиях для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка// Школа по теории операторов в функциональных пространствах: Тез. докл. (4–11 июля 1982 г.). – Минск, 1982. – С. 214.
6. *Алымкулов К.В.* Отыскание периодических решений нелинейных гиперболических уравнений// Интегро-дифференц. уравнения и их приложения. – Фрунзе, 1978. – № 1. – С. 11–13.
7. *Антоневич А.Б., Данг Хан Хой.* О периодических решениях некоторых неоднородных эволюционных дифференциальных уравнений на римановых многообразиях// Дифференц. уравнения. – 1989. – **25**, № 10. – С. 1731–1736.
8. *Антыпко И.И.* О нелокальной краевой задаче в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1973. – 16 с.
9. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели. I. Об отображении окружности на себя// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1961. – **25**, № 1. – С. 21–86.
10. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели. II. Доказательство теоремы А.Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона// Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, № 5. – С. 13–40.
11. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике// Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, № 6(114). – С. 91–192.
12. *Артемьев Н.А.* Периодические решения одного класса уравнений в частных производных// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1937. – № 1. – С. 15–50.
13. *Асроров А.* Исследование периодического решения одномерной краевой задачи для гиперболического уравнения второго порядка с нелинейной операторной правой частью: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Баку, 1973. – 21с.
14. *Бахвалов Н.С.* О существовании в целом регулярного решения квазилинейной гиперболической системы// Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1970. – **10**, № 4. – С. 969–980.
15. *Берник В.И., Пташник Б.И., Салыга Б.О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами// Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637–645.
16. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1966. – 351 с.
17. *Бжихатлов Х.Г.* Об одной краевой задаче для смешанных параболо-гиперболических уравнений с характеристической линией изменения типа// Дифференц.уравнения. – 1977. – **13**, № 1. – С. 10–16.
18. *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач// Докл. АН СССР. – 1969. – **185**, № 4. – С. 793–740.
19. *Борок В.М.* Критерий абсолютной $\bar{c}$-устойчивости уравнений в частных производных// Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 3. – С. 438–444.
20. *Борок В.М., Антыпко И.И.* Критерий безусловной корректности краевой задачи в слое// Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – Харьков, 1976. – Вып. 26. – С. 3–9.
21. *Борок В.М., Кенне Э.* Классификация нелокальных краевых задач в узкой полосе// Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 4. – С. 338–346.

22. *Борок В.М., Кенне Э.* Классификация интегральных краевых задач в широкой полосе// Изв. вузов. Математика. – 1994. – **384**, № 5. – С. 3–12.

23. *Борок В.М., Фардигола Л.В.* Нелокальные корректные краевые задачи в слое// Матем. заметки. – 1990. – **48**, № 1. – С. 20–25.

24. *Вабищевич П.Н.* Нелокальная параболическая задача и обратная задача теплопроводности// Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 7. – С. 1193–1199.

25. *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра. – М.: Наука, 1979. – 624 с.

26. *Вейвода О., Штедры М.* Существование классических периодических решений волнового уравнения. Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений// Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 10. – С. 1733–1739.

27. *Віленць І.Л.* Класи єдиності розв'язку загальної крайової задачі в шарі для систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних// Доп. АН УРСР. – 1974. – Сер. А, № 3. – С. 195–197.

28. *Виленц И.Л.* О связи между единственностью решения нелокальной краевой задачи в слое для систем с переменными коэффициентами и параметрических систем// Изв. вузов. – 1981. – № 6. – С. 69–70.

29. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 512 с.

30. *Водахова В.А.* Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса// Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 2. – С. 280–285.

31. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

32. *Вульпе И.М.* Нахождение периодических решений нелинейных систем методом усреднения// Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 9. – С. 1558–1565.

33. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

34. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – Вып. 3. – 274 с.

35. *Гой Т.П.* Задача з нелокальними умовами для рівняння з частинними похідними, збуреного нелінійним інтегродиференціальним доданком// Мат. студії. Праці Львів. мат. т-ва. – 1997. – **8**, № 1. – С. 71–78.

36. *Гой Т.П.* Задача з нелокальними двоточковими умовами для слабо нелінійних нестрого гіперболічних рівнянь// Волинський мат. вісник. – 1997. – № 4. – С. 42–45.

37. *Гой Т.П.* Нелокальна крайова задача для слабко нелінійного гіперболічного рівняння// VI-а Міжнар. наук. конф. ім. М. Кравчука: Матеріали конф. (Київ, 15–17.05.1997). – К., 1997. – С. 108.

38. *Гой Т.П., Поліщук В.М., Пташник Б.Й.* Нелокальна двоточкова крайова задача для гіперболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами в циліндричній області// Математичні методи в науково-технічних дослідженнях. – К.: Ін-т мат. НАН України. – 1996. – С. 62–70.

39. *Гой Т.П., Пташник Б.Й.* Задача з нелокальними умовами для слабко нелінійного гіперболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами// Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – К.: Ин-т мат. НАН Украины. – 1996. – С. 74–76.

40. *Гой Т.П., Пташник Б.Й.* Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь// Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 2. – С. 186–195.

41. *Гой Т.П., Пташник Б.Й.* Нелокальні крайові задачі для систем лінійних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами// Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 11. – С. 1478–1487.

42. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 284 с.

43. *Горьков Ю.П.* О периодических решениях параболических уравнений// Дифференц. уравнения. – 1966. – **2**, № 7. – С. 943–952.

44. *Гребенников Е.А., Рябов Ю.А.* Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. – М.: Наука, 1978. – 128 с.

45. *Громяк М.И.* Построение периодических решений волновых дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка// Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 1. – С. 48–53.

46. *Грошев А.В.* Теорема о системе линейных форм// Докл. СССР. – 1938. – **19**, № 3. – С. 151–152.

47. *Дезин А.А.* Операторы с первой производной по "времени" и нелокальные граничные условия// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1967. – **31**, № 1. – С. 61–86.

48. *Дезин А.А.* К общей теории граничных задач // Мат. сборник (новая серия). – 1976. – **100(142)**, № 2. – С. 171–180.

49. *Дезин А.А.* Об операторных уравнениях второго порядка// Сибирск. мат. журн. – 1978. – **19**, № 5. – С. 1032–1042.
50. *Дезин А.А.* Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980. – 208 с.
51. *Дезин А.А.* О слабой и сильной иррегулярности// Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 10. – С. 1851–1858.
52. *Дезин А.А., Масленникова В.Н.* Неклассические граничные задачи// Дифференциальные уравнения с частными производными: Тр. симпозиума, посвященного 60-летию академика С.Л. Соболева. – М.: Наука, 1970. – С. 81–95.
53. *Динамическая теория биопопуляций*/ Под ред. Р.А. Полуэктова. – М.: Наука, 1974. – 455 с.
54. *Дубинский Ю.А.* Периодические решения эллиптико-параболических уравнений// Мат. сборник. – 1968. – **76 (118)**, № 4. – С. 620–633.
55. *Дубинский Ю.А.* О некоторых дифференциально-операторных уравнениях произвольного порядка// Мат. сборник. – 1973. – **90 (132)**, № 1. – С. 3–22.
56. *Дубинский Ю.А.* Пространства Соболева бесконечного порядка на торе и некоторые вопросы теории периодических решений дифференциальных уравнений// Докл. АН СССР. – 1975. – **222**, № 2. – С. 269–272.
57. *Дубинский Ю.А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения// Итоги науки и техники (ВИНИТИ). Сер. Современ. проблемы математики. – М., 1976. – Т. 9. – С. 5–130.
58. *Дубинский Ю.А.* Об одном методе решения дифференциальных уравнений с частными производными// Докл. АН СССР. – 1981. – **258**, № 4. – С. 780–784.
59. *Дубинский Ю.А.* Алгебра псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами и ее приложения к математической физике// Успехи мат. наук. – 1982. – **37**, вып.5(227). – С. 97–159.
60. *Дубровская А.П.* Исследование некоторых нелокальных граничных задач: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – К., 1977. – 15 с.
61. *Еругин Н.П., Штокало И.З.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Вища школа, 1974. – 472 с.
62. *Жестков С.В.* Итерационные методы решения периодических краевых задач для гиперболических уравнений в частных производных. – Минск, 1986. – 20 с. – (Препринт/ АН БССР. Ин-т физики: № 144).

63. *Жестков С.В.* О двоякопериодических решениях квазилинейных гиперболических систем в частных производных// Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 12. – С. 2164–2166.
64. *Жестков С.В.* О существовании ω-периодических решений квазилинейных волновых систем с n пространственными переменными// Весці Акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1994. – № 2. – С. 5–9.
65. *Житарашу Н.В., Эйдельман С.Д.* Параболические граничные задачи. – Кишинев: Штиинца, 1992. – 328 с.
66. *Забрейко П.П., Третьякова Л.Г.* Периодические решения квазилинейного телеграфного уравнения// Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 5. – С. 815–826.
67. *Задорожна Н.М.* Задача для систем параболічних рівнянь довільного порядку// Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 47. – С. 48–55.
68. *Задорожна Н.М., Мельник О.М., Пташник Б.Й.* Нелокальна крайова задача для параболічних рівнянь// Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 12. – С. 1621–1627.
69. *Задорожна Н.М., Пташник Б.Й.* Нелокальна крайова задача для параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами// Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 7. – С. 913–919.
70. *Ильин В.А., Шишмарев И.А.* Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**, № 6. – С. 883–896.
71. *Илькив В.С.* Нелокальная задача для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами// "Материалы 7-й конф. мол. ученых Ин-та прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР". – Львов, 1980. – С. 80–84. – Деп. в ВИНИТИ, № 1379–81.
72. *Илькив В.С.* Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами// Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 5. – С. 15–19.
73. *Илькив В.С.* Нелокальная задача для дифференциально-операторных уравнений. I// "Материалы 8-й конф. мол. ученых Ин-та прикл пробл. мех. и мат. АН УССР. Секц. мат. и мат. методов". – Львов, 1982. – С. 8–12. – Деп. в ВИНИТИ, № 3942–82.
74. *Илькив В.С.* Нелокальная задача для дифференциально-операторных уравнений. II// "Материалы 8-й конф. мол. ученых

Ин-та прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР. Секц. мат. и мат. методов". – Львов, 1982. – С. 13–18. – Деп. в ВИНИТИ, № 3942–82.

75. *Илькив В.С.* Многоточечная нелокальная задача для дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами// Материалы IX конф. мол. ученых Ин-та прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР, ч. II (Львов, 10–14 мая 1982 г.), Львов, 1983. – С. 64–72. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 10 января 1984 г., № 324–84 Деп).

76. *Илькив В.С.* Нелокальная краевая задача для уравнений в частных производных бесконечного порядка// Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 4. – С. 498–502.

77. *Илькив В.С.* Многоточечная нелокальная задача для уравнений с частными производными// Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 3. – С. 487–492.

78. *Илькив В.С.* Возмущения нелокальной задачи для дифференциальных уравнений с псевдодифференциальными коэффициентами// Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 11. – С. 1962–1971.

79. *Ількiв В.С.* Дослідження нелокальної крайової задачі для рівнянь з частинними похідними методом мінімізації в соболівських просторах// Сб. ст. 1-й Междунар. научно-практич. конференции "Математика и психология в педагогической системе "Технический университет": В 2-х частях. – Одесса: ЩГПУ, 1996. – Ч. 1. – С. 43–45.

80. *Ількiв В.С.* Продовження за часовою змінною розв'язку нелокальної багатоточкової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними і сталими коефіцієнтами// Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 4. – С. 78–82.

81. *Ількiв В.С.* Задача з формальними початковими умовами для диференціальних рівнянь зі сталими псевдодиференціальними коефіцієнтами// Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 7. – С. 877–888.

82. *Ількiв В.С.* Дослідження нелокальної крайової задачі для рівнянь з частинними похідними за допомогою методу мінімізації в соболєвських просторах// Мат. студії. – 1999. – **11**, № 2. – С. 167–176.

83. *Ількiв В.С.* Нелокальна крайова задача для нормальних анізотропних систем із частинними похідними і сталими коефіцієнтами// Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 54. – С. 96–107.

84. *Илькив В.С., Полищук В.Н.* Краевая задача с нелокальными условиями для дифференциальных операторов с постоянными действительными коэффициентами// Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування. – К., 1978. – С. 15–16.

85. *Илькив В.С., Полищук В.Н., Пташник Б.И.* Нелокальная краевая задача для систем псевдодифференциальных уравнений// Методы исследования дифф. и интегр. операторов. – К., 1989. – С. 75–79.

86. *Илькив В.С., Полищук В.Н., Пташник Б.И., Салыга Б.О.* Нелокальная многоточечная задача для псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами// Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 5. – С. 582–587.

87. *Илькив В.С., Пташник Б.И.* Задача с нелокальными краевыми условиями для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами// Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 6. – С. 1012–1023.

88. *Ількiв В.С., Пташник Б.Й.* Зображення та дослідження розв'язків нелокальної задачі для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними// Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 2. – С. 184–194.

89. *Иманалиев М., Алымкулов К.* Отыскание периодических решений нелинейных волновых уравнений// Сердика. Бълг. мат. списание. – 1980. – **6**, № 1. – С. 3–8.

90. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи в теории теплопроводности с нелокальными краевыми условиями// Дифференц. уравнения. – 1977. – **2**, № 2. – С. 294–304.

91. *Ионкин Н.И.* Об устойчивости одной краевой задачи теории теплопроводности с нелокальными краевыми условиями// Дифференц. уравнения. – 1979. – **13**, № 4. – С. 637–645.

92. *Ионкин Н.И., Моисеев Е.И.* О задаче для уравнения теплопроводности с двухточечным краевым условием// Дифференц. уравнения. – 1979. – **15**, № 7. – С. 1284–1295.

93. *Исамухамедов С.С., Орамов Ж.* О краевых задачах для уравнения смешанного типа второго рода с негладкой линией вырождения// Дифференц.уравнения. – 1982. – **18**, № 2. – С. 324–334.

94. *Казімірський П.С.* Розклад матричних многочленів на множники. – К.: Наук.думка, 1981. – 224 с.

95. *Каленюк П.И., Баранецкий Я.О., Нитребич З.Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – К.: Наук. думка, 1993. – 232 с.

96. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.

97. *Камынин Л.И.* О единственности решения краевой задачи с граничными условиями Самарского для параболических уравнений 2-го порядка// Журн. вычисл. математики и математ. физики. – 1976. – **13**, № 6. – С. 1480–1488.

98. *Камынин Л.И.* Единственность краевых задач для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка// Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 1. – С. 39–49.

99. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 742 с.

100. *Каримов Д.Х.* О периодических решениях нелинейных уравнений четвертого порядка// Докл. АН СССР. – 1945. – **49**, № 9. – С. 642–645.

101. *Карп В.Н.* О периодических решениях одного нелинейного уравнения гиперболического типа// Докл. АН УзССР. – 1953. – № 5. – С. 8–43.

102. *Карп В.Н.* О существовании и единственности периодического решения одного нелинейного уравнения гиперболического типа// Изв. вузов. Математика. – 1963. – № 5. – С. 43–50.

103. *Кенне Э.* Критерии корректной разрешимости нелокальной краевой задачи для уравнений теплопроводности и Шредингера. – Харьков: Харьков. ун-т, 1993. – 19 с. – Деп. в ГНТБ Украины, № 2112–Ук93.

104. *Керефов А.А.* Нелокальные краевые задачи для параболических уравнений// Дифференц. уравнения. – 1979. – **15**, № 1. – С. 74–78.

105. *Кигурадзе Т.И.* О периодических краевых задачах для линейных гиперболических уравнений. I// Дифференц. уравнения. – 1993. – **29**, № 2. – С. 281–297.

106. *Кигурадзе Т.И.* О периодических краевых задачах для линейных гиперболических уравнений. II// Дифференц. уравнения. – 1993. – **29**, № 4. – С. 637–645.

107. *Кирилич В.М.* Задача с интегральными ограничениями для общего двумерного гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами// Республ. конф. по нелин. уравн. мат. физики: Тез. докл. – Донецк, 1983. – С. 60.

108. *Кирилич В.М.* Задача типа Дарбу–Стефана для полулинейной гиперболической системы с нелокальными условиями// Нелинейн. гранич. задачи. – 1990. – № 2. – С. 48–51.

109. *Кирилич В.М.* Неклассическая задача с интегральными ограничениями для двумерной гиперболической системы первого порядка// Вестник Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. Вопросы мат. анализа и его приложение. – Львов, 1983. – Вып. 21. – С. 60–64.

110. *Кирилич В.М.* Нелокальная задача типа Стефана для гиперболической системы первого порядка// Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 1. – С. 121–124.

111. *Кирилич В.М.* Одна неклассическая граничная задача для двумерной гиперболической системы первого порядка с разрывными коэффициентами// Общая теория граничных задач. – К.: Наук. думка, 1983. – С. 267.

112. *Кирилич В.М., Мельник З.О.* Задача без начальных условий для общего двумерного гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами// Третий республ. симпоз. по дифференц. и интегральн. уравнениям: Тез. докл. – Одесса, 1982. – С. 110–111.

113. *Кирилич В.М., Мельник З.О.* Задача без начальных условий для общего двумерного гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами// III Респ. симпоз. по дифференц. и интегр. уравн.: Тез. докл. – Одесса, 1977. – С. 110–111.

114. *Кміть І.Я.* Аналог багатоточкової задачі для системи гіперболічних рівнянь першого порядку // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Питання теорії функцій та алгебри. – 1993. – Вип. 38. – С. 13–17.

115. *Кмить И.Я.* Нелокальные задачи для гиперболического уравнения второго порядка. Львов. ун-т, 1991. – Деп. в УкрНИИНТИ 07.06.91, № 842 – Ук 91. – 69 с.

116. *Кмить И.Я.* Нелокальные задачи для квазилинейніх гиперболических систем. Львов. ун-т, 1992. – Деп. в УкрНИИНТИ 14.07.92, № 1081 – Ук 92. – 26 с.

117. *Кмить И.Я.* Об одной задаче с нелокальными по времени условиями для системы уравнений гиперболического типа // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1994. – Вып. 37. – С. 21–24.

118. *Кмить И.Я.* О нелокальных задачах для гиперболических систем первого порядка. Львов. ун-т, 1991. – Деп. в УкрНИИНТИ 08.01.91, № 79 – Ук 91. – 54 с.

119. *Кміть І.Я.* Пояснення природи малих знаменників при вивченні некласичних задач для гіперболічних систем // Сб. ст. 1-й Междунар. научно-практич. конференции "Математика и психология в педагогической системе "Технический университет": В 2-х частях. – Одесса: ЩГПУ, 1996. – Ч. 1. – С. 56–57.

120. *Кміть І.Я.* Про одну нелокальну задачу для квазілінійної гіперболічної системи першого порядку з двома незалежними змінними // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 9. – С. 1307–1311.
121. *Кмить И.Я., Лавренюк С.П.* О нелокальных задачах для двумерных гиперболических систем // Успехи мат. наук. – 1991. – **46**, – № 6. – С. 149.
122. *Колесов Ю.С.* Периодические решения квазилинейных параболических уравнений второго порядка// Тр. Московск. мат. о-ва. – 1970. – **21**. – С. 103–134.
123. *Колмогоров А.Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе// Докл. АН СССР. – 1953. – **93**, № 5. – С. 763–766.
124. *Комарницька Л.І.* Нелокальна крайова задача для рівняння зі змінними коефіцієнтами, не розв'язаного відносно старшої похідної// Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1994. – Вип. 40. – С. 17–23.
125. *Комарницька Л.І., Пташник Б.Й.* Задача з нелокальними умовами для диференціального рівняння з частинними похідними, яке не розв'язане відносно старшої похідної по часу// Крацові задачі з різними виродженнями і особливостями. – Чернівці. – 1990. – С. 86–95.
126. *Корбут Л.І., Матійчук М.І.* Про зображення розв'язків нелокальних крайових задач для параболічних рівнянь// Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 7. – С. 947–957.
127. *Крейн С.Г., Лаптев Г.И.* Граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве// Дифференц. уравнения. – 1966. – **2**, № 3. – С. 382–390.
128. *Крейн С.Г., Лаптев Г.И.* Корректность граничных задач для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве// Дифференц. уравнения. – 1966. – **2**, № 7. – С. 919–926.
129. *Кудинцева И.Г.* Классы единственности и корректной разрешимости краевых задач в бесконечном цилиндре и слое: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1979. – 16 с.
130. *Кумыкова С.К.* Краевая задача со смещением для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения// Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 1. – С. 93–104.
131. *Кумыкова С.К.* Задача с нелокальными условиями на характеристиках для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения// Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 1. – С. 81–90.

132. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975. – 431 с.
133. *Ланин И.Н.* Краевая задача для одного нагруженного гиперболо-параболического уравнения третьего порядка// Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 1. – С. 97–106.
134. *Лаптев Г.И.* Граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве и их приложения: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Воронеж, 1964. – 8 с.
135. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). – М.: Наука, 1970. – 671 с.
136. *Линник Ю.В.* Эргодические свойства алгебраических полей. – Л.: Изд. Ленингр. ун-та, 1977. – 208 с.
137. *Макаров А.А.* Критерий корректной разрешимости краевой задачи в слое для системы линейных уравнений в свертках в топологических пространствах// Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебры. – К., 1978. – С. 178–180.
138. *Макаров А.А.* О необходимых и достаточных условиях корректной разрешимости краевой задачи в слое для систем дифференциальных уравнений в частных производных// Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 2. – С. 320–324.
139. *Макаров А.А.* Существование корректной двухточечной краевой задачи в слое для систем псевдодифференциальных уравнений// Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 1. – С. 144–150.
140. *Маловичко В.А.* О разрешимости нелокальных краевых задач для некоторых систем эволюционных дифференциальных уравнений// Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 2. – С. 211–216.
141. *Мамедова Ш.Дж.* Краевые задачи для эволюционных уравнений на конечном отрезке// Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-тех. и мат. наук. – 1974. – № 6. – С. 63–66.
142. *Мамедова Ш.Дж.* О краевых задачах для операторно-дифференциальных уравнений $2n$-го порядка// Ученые записки Азерб. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. – 1978. – № 2. – С. 82–85.
143. *Мамян А.Х.* Общие граничные задачи в слое// Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, № 2. – С. 292–296.
144. *Марковский А.И.* О регуляризаторах некоторых смешанных задач на плоскости// Мат. физика. – К.: Наук. думка, 1979. – Вып. 25. – С. 100–106.

145. *Марковский А.И.* Регуляризаторы смешанных задач для гиперболических систем на конечном интервале// Краевые задачи мат. физ. – К.: Наук. думка, 1979. – С. 124–138.

146. *Марковский А.И.* Регуляризаторы смешанных задач для гиперболических систем на плоскости// Докл. АН УССР. – 1973. – **А**, № 12. – С. 1083–1086.

147. *Марковский А.И.* Регуляризаторы смешанных задач для гиперболических систем на плоскости// Мат. физика. – К.: Наук. думка, 1974. – Вып. 16. – С. 124–132.

148. Математические модели в экологии. – Горький: Изд-во Горьковск. ун-та, 1980. – 166 с.

149. *Матійчук М.І.* Про нелокальну параболічну крайову задачу// Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 3. – С. 362–367.

150. *Маценис И.* О регулярности краевых условий// Дифференц. уравнения и их применение. – Ин-т математ. и кибернет. АН Литов. ССР, 1978. – С. 17–24.

151. *Мельник З.О.* Граничная задача без начальных условий для гиперболической системы второго порядка// Граничные задачи мат. физ. – К.: Наук. думка, 1981. – С. 81–82.

152. *Мельник З.О.* Задача с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений второго порядка// Общая теория граничных задач. – К.: Наук. думка, 1983. – С. 281–282.

153. *Мельник З.О.* Задача с интегральными ограничениями для общих двумерных гиперболических уравнений и систем// Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 2. – С. 246–253.

154. *Мельник З.О.* Задача с неизвестными границами для гиперболической системы первого порядка// Уравнения в частных производных и задачи со свободной границей. – К.: Наук. думка, 1983. – С. 77–79.

155. *Мельник З.О.* Об одной общей смешанной задаче// Докл. АН СССР. – 1964. – **157**, № 5. – С. 1039–1042.

156. *Мельник З.О.* Общие смешанные задачи для общих двумерных гиперболических систем// Дифференц. уравнения. – 1966. – **2**, № 7. – С. 958–966.

157. *Мельник З.О.* Об одном способе решения смешанной задачи для гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами// Дифференц. уравнения. – 1966. – **2**, № 4. – С. 560–570.

158. *Мельник З.О.* О гиперболических уравнениях с кратными характеристиками// Дифференц. уравнения. – 1974. – **10**, № 8. – С. 1530–1532.

159. *Мельник З.О.* Одна неклассическая граничная задача для гиперболической системы первого порядка с двумя независимыми переменными// Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 6. – С. 1096–1104.

160. *Мельник З.О.* Пример неклассической граничной задачи для уравнения колебаний струны// Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 5. – С. 671–674.

161. *Мельник З.О.* Смешанная задача с неизвестной границей для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка// Докл. АН УССР. – 1983. – **А**, № 8. – С. 13–15.

162. *Мельник З.О., Кирилич В.М.* Задача без начальных условий для двумерного гиперболического уравнения произвольного порядка// Успехи мат. наук. – 1982. – **37**, № 4. – С. 112.

163. *Мельник З.О., Кирилич В.М.* Задача без начальных условий с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений и систем на прямой// Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 6. – С. 722–727.

164. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1977. – 504 с.

165. *Митропольский Ю.А., Хома Г.П.* О периодических решениях волновых уравнений второго порядка// Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 8. – С. 1115–1121.

166. *Митропольский Ю.А., Хома Г.П.* Періодичні розв'язки квазілінійних гіперболічних рівнянь другого порядку// Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1370–1375.

167. *Митропольский Ю.А., Хома Г.П., Громяк М.И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – К.: Наук. думка, 1991. – 232 с.

168. *Митряков А.П.* О периодических решениях нелинейного уравнения гиперболического типа// Тр. Ин-та мат. и мех. АН УзССР. – 1949. – № 7. – С. 137–149.

169. *Митряков А.П.* О периодических решениях нелинейных уравнений в частных производных высшего порядка// Тр. Узб. ун-та. – 1956. – Вып.65. – С. 31–44.

170. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976. – 391 с.

171. *Мокейчев В.С.* Периодические решения дифференциальных уравнений с частными производными// Изв. вузов. Математика. – 1973. – № 3. – С. 77–87.

172. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1987. – 240 с.

173. *Мышкис А.Д., Филимонов А.М.* Непрерывные решения квазилинейных гиперболических систем с двумя независимыми переменными// Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 3. – С. 488–500.

174. *Мышкис А.Д., Филимонов А.М.* Непрерывные решения квазилинейных гиперболических систем с двумя независимыми переменными// Дифференц. уравнения и их ирименения: Материалы 2-й конф. (Руссе, 29 июня – 4 июля 1981). – Руссе, 1982. – Ч. II. – С. 524–529.

175. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.

176. *Нахушев А.М.* Методика постановки корректных задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка на плоскости// Дифференц. уравнения. – 1970. – **6**, № 1. – С. 192–195.

177. *Нахушев А.М.* Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги// Дифференц. уравнения. – 1979. – **15**, № 1. – С. 96–105.

178. *Нахушев А.М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложение к динамике почвенной влаги и грунтовых вод// Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 1. – С. 72–81.

179. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения// Дифференц. уравнения. – 1983. – **19**, № 1. – С. 86–94.

180. *Нахушев А.М.* К проблеме поиска необходимых краевых условий математической физики// Соврем. пробл. мат. физ.: Тр. всес. симп. (Тбилиси, 22–25 апреля 1987). – Тбилиси, 1987. – **1**. – С. 324–330.

181. *Нахушев А.М.* Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги// Доклады АН СССР. – 1978. – **242**, № 5. – С. 1008–1011.

182. *Нахушева Ф.Б.* Некоторые конструктивные свойства решений гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области// Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 2. – С. 334–340.

183. *Нахушева Я.Б.* О некоторых конструктивных свойствах решений вырождающегося гиперболического уравнения влагопереноса// Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1981. – № 5. – С.22–29.

184. *Оразов Н.* Задача со смещением для гиперболического уравнения с нехарактеристическим вырождением на части границы// Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 1. – С. 92–100.

185. *Орлов А.В.* О периодических решениях задачи Дирихле для нелинейного волнового уравнения// Геометр. вопр. теор. функций и множеств. – Калинин, 1987. – С. 88–98.

186. *Островский Е.А.* Формулы разложения для одной граничной задачи с комплексным параметром// Дифференц. уравнения. – 1967. – **3**, № 2. – С. 327–340.

187. *Островский Е.А.* Задача на сопряжение уравнений параболического и гиперболического типов, когда в граничные условия входят производные по времени// Дифференц. уравнения. – 1967. – **3**, № 6. – С. 965–979.

188. *Перельман М.А.* О корректных краевых задачах с распределенным краевым условием// Теория функций, функц. анализ и их приложения. – Харьков, 1978. – Вып. 30. – С. 112–120.

189. *Петрівський Я.Б.* Періодичні розв'язки квазілінійних гіперболічних інтегро-диференціальних рівнянь другого порядку// Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 11. – С. 1570–1571.

190. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.

191. *Писаренко В.Г.* Побудова деяких наближень розв'язків квазілінійних хвильових рівнянь асимптотичними методами// Доп. АН УРСР. – 1971. – **А**, № 5. – С. 418–422.

192. *Плотников П.И., Юнгерман Л.Н.* Периодические решения слабонелинейного волнового уравнения с иррациональным отношением периода к длине интервала// Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 9. – С. 1599–1607.

193. *Погореленко В.А.* О существовании периодического решения одномерного нелинейного волнового уравнения// Всесоюз. конф. по уравн. с част. производ., посвящ. 75-летию со дня рожд. И.Г. Петровского: Тр. конф. (Москва, 27–31 янв. 1976 г). – Москва, 1978. – С. 415–416.

194. *Полищук В.Н.* Периодическая краевая задача для линейных гиперболических уравнений// Мат. методы и физ.-мех. поля. – К.: Наук. думка, 1975. – Вып. 2. – С. 158–160.

195. *Полищук В.Н.* Периодическая краевая задача для гиперболических уравнений с переменными коэффициентами// Теорет. и прикл. вопросы алгебры и диф. уравнений. – К.: Наук. думка, 1976. – С. 60–65.

196. *Поліщук В.М.* Задача з нелокальними крайовими умовами для гіперболічних систем диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами// Доп. АН УРСР. – 1979. – **А**, № 3. – С. 171–175.

197. *Полищук В.Н.* Задача с нелокальными краевыми условиями для гиперболических уравнений с переменными коэффициентами// Приближен. и качеств. методы теории дифференц. и дифференц.-функционал. уравнений. – К.: Наук. думка. – 1979. – С. 54–65.

198. *Полищук В.Н.* Задача с периодическими краевыми условиями для систем дифференциальных уравнений, гиперболических по Гельфанду–Шилову// Пятая конф. мол. ученых ЛФМФ ИМ АН УССР: Материалы конф. – Львов, 1978. – С. 51–54. – Деп. в ВИНИТИ 25.05.1979, № 1846–79.

199. *Поліщук В.М., Пташник Б.Й.* Періодична крайова задача для гіперболічних рівнянь// Друга конф. мол. науковців Західного наук. центру АН УРСР: Матеріали конф. Секц. мат. наук. – Ужгород, 1975. – С. 55–59. – Деп. в ВИНИТИ 18.05.1976, № 1734–76.

200. *Полищук В.Н., Пташник Б.И.* О периодической краевой задаче для гиперболических операторов, распадающихся на линейные множители первого порядка с постоянными коэффициентами// Мат. методы и физ.-мех. поля. – К.: Наук. думка, 1976. – Вып. 3. – С. 6–12.

201. *Полищук В.Н., Пташник Б.И.* О периодической краевой задаче для системы гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1978. – **30**, № 3. – С. 326–333.

202. *Пташник Б.И.* Периодическая краевая задача для линейных гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами// К.: Наук. думка, 1972. – Вып. 12. – С. 117–121.

203. *Пташник Б.И.* Периодическая краевая задача для гиперболического оператора, распадающегося на линейные множители первого порядка// Докл. АН УССР. Сер. А. – 1973. – № 11. – С. 985–989.

204. *Пташник Б.Й.* Періодична крайова задача для поліхвильових операторів// Проекційно-ітератив. методи розв'язування диф. та інтегр. рівнянь. – К.: Наук. думка, 1974. – С. 147–154.

205. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

206. *Пташник Б.Й., Задорожна Н.М.* Нелокальна крайова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами// Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения.– К.: Ин-т мат. НАН Украины, 1994. – С. 164–166.

207. *Пташник Б.И., Полищук В.Н., Илькив В.С.* Задачи с нелокальными краевыми условиями для дифференциальных уравнений с частными производными// IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям: Тез. докл. (Киев, 30.08–6.09. 1981). – К., 1981. – С. 262–263.

208. *Пташник Б.И., Полищук В.Н., Илькив В.С.* Задачи с нелокальными краевыми условиями для дифференциальных уравнений с частными производными// IX Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям: Материалы конф. (Киев, 30.08–6.09. 1981). – К., 1984. - Т. 1. – С. 311–314.

209. *Пташник Б.И., Салыга Б.О.* Аналог многоточечной задачи для дифференциальных уравнений с частными производными с переменными коэффициентами //Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 6. – С. 728–734.

210. *Пытьев Ю.П.* Математические методы интерпретации эксперимента. – Высш. шк., 1989. – 351 с.

211. *Ратыни А.К.* О нелокальных краевых задачах для эллиптических и параболических уравнений. I// Краевые задачи. – Пермь: Перм. политехн. ин-т, 1990. – С. 127–131.

212. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 588 с.

213. *Роговченко С.П.* О периодических решениях линейного телеграфного уравнения, подверженного импульсному воздействию// Физ.-техн. прил. нелинейн. краев. задач. – К., 1987. – С. 119–124.

214. *Роговченко Ю.В.* Периодические решения одномерного линейного волнового уравнения, подверженного воздействию мгновенных импульсов// Некоторые вопр. теории асимптот. методов нелинейн. мех. – К., 1986. – С. 155–162.

215. *Романко В.К.* К теории операторов вида $\frac{d^m}{dt^m} - A$// Дифференц. уравнения. – 1967. – **3**, № 11. – С. 1957–1970.

216. *Романко В.К.* Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов// Дифференц. уравнения. – 1974. – **10**, № 1. – С. 117–131.

217. *Романко В.К.* Граничные задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений// Докл. АН СССР. – 1976. – **227**, № 4. – С. 812–816.

218. *Романко В.К.* О граничных задачах для дифференциально-операторных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной// Докл. АН СССР. – 1977. – **235**, № 5. – С. 1030–1033.
219. *Романко В.К.* Однозначная разрешимость граничных задач для некоторых дифференциально-операторных уравнений// Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 2. – С. 324–335.
220. *Романко В.К.* Разрешимость граничных задач для дифференциально-операторных уравнений высокого порядка// Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 6. – С. 1081–1092.
221. *Романко В.К.* О задачах сопряжения для некоторых уравнений в частных производных// Докл. АН СССР. – 1979. – **244**, № 4. – С. 831–836.
222. *Романко В.К.* Трехточечные граничные задачи для уравнений с разрывными коэффициентами// Дифференц. уравнения. – 1979. – **15**, № 3. – С. 479–492.
223. *Романко В.К.* Задача о сопряжении дифференциально-операторных уравнений// Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 1. – С. 124–134.
224. *Романко В.К.* Смешанные краевые задачи для одной системы уравнений// Докл. АН СССР. – 1986. – **286**, № 1. – С. 47–50.
225. *Романов В.Г.* О локальной разрешимости некоторых обратных задач для уравнений гиперболического типа// Дифференц. уравнения. – 1989. – **25**, № 2. – С. 275–283.
226. *Рудаков И.А.* Задача о свободных периодических колебаниях струны с монотонной нелинейностью// Успехи мат. наук. – 1985. – **241**, вып. 1 – С. 215–216.
227. *Рудаков И.А.* Периодическое решение нелинейного телеграфного уравнения// Весн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 1993. – № 4. – С. 3–6.
228. *Саак Э.М.* Фредгольмовость одного класса краевых задач// Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 3. – С. 507–515.
229. *Савченко Г.Б.* Оценки решений нелокальных краевых задач// Сб. тр. аспирантов мат. факультета Воронеж. ун-та. – Воронеж, 1972. – С. 44–48.
230. *Савченко Г.Б.* Об одной краевой задаче для системы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами// Дифференц. уравнения. – 1973. – **9**, № 3. – С. 527–532.
231. *Савченко Г.Б.* О корректности одной краевой задачи для систем линейных дифференциальных уравнений// Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 11. – С. 2082–2085.

232. *Савченко Г.Б.* $\mathcal{L}_2$-корректность нелокальных краевых задач в бесконечном слое для систем уравнений в частных производных: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1979. – 12 с.
233. *Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.* О некоторых краевых задачах для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области// Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 1. – С. 129–136.
234. *Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.* О двух нелокальных краевых задачах для вырождающегося гиперболического уравнения// Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 1. – С. 116–126.
235. *Салиев А.* Исследование периодического по времени обобщенного решения одномерной граничной задачи для одного класса параболических уравнений второго порядка с нелинейной операторной правой частью// Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1987. – № 4. – С. 41–47.
236. *Самарский А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений// Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 11. – С. 1925–1935.
237. *Самойленко А.М., Ткач Б.П.* Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1992. – 208 с.
238. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: ИЛ, 1953. – Т. 1. – 346 с.
239. *Смагина Т.И.* О разрешимости обобщенной периодической задачи// Школа по теории операторов в функциональных пространствах: Тез.докл. (4–11 июля 1982 г.). – Минск, 1982. – С. 180.
240. *Смирнов М.М.* Краевая задача со смещением для уравнения смешанно-составного типа 4-го порядка// Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, № 9. – С. 1678–1686.
241. *Соколов Г.Т.* О периодических решениях одного класса уравнений в частных производных// Докл. АН УзССР. – 1953. – № 12. – С. 3–7.
242. *Соколов Г.Т.* О периодических решениях волнового уравнения// Учен. записки Ферган. гос. пед. ин-та. Сер. мат. – 1965. – Вып.1. – С. 17–25.
243. *Соловьев П.В.* Некоторые замечания о периодических решениях нелинейных уравнений гиперболического типа// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1939. – № 2. – С. 149–164.

244. *Соловьев П.В.* О периодических решениях некоторых линейных уравнений четвертого порядка// Докл. АН СССР. – 1939. – **25**, № 9. – С. 729–732.

245. *Спринджук В.Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука, 1977. –143 с.

246. *Степанова Н.В.* Математические модели непрерывной культуры микроорганизмов, распределенных по возрастам и размерам// Матем. модели в экологии, Мат. сб. – Горький, 1980 – С. 95–113.

247. *Сущ В.* Управление в нелокальных граничных задачах// Дифференц. уравнения. – 1989. – **25**, № 1. – С. 145–153.

248. *Сущ В.* Нелокальні задачі з граничним керуванням// Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1991. – № 34. – С. 50–55.

249. *Тажимуратов И.* О существовании периодических решений систем уравнений в частных производных, когда фундаментальное уравнение имеет нулевые корни// Сб. по вопросам математики и механики. – Алма-Ата, 1971. – Вып. 3. – С. 140–144.

250. *Терехов А.Н.* О некоторых задачах для нелинейного уравнения составного типа. – Новосибирск, 1980. – 17 с. – (Препринт/ АН СССР, Ин-т мат. СО).

251. *Третьякова Л.Г.* К задаче о 2π-периодических решениях уравнения колебания струны// Вестн. Белорус. ун-та. – 1986. – Сер. 1, № 3. – С. 49–51.

252. *Тулегенова М.Б.* Существование единственного двупериодического решения нелинейного гиперболического уравнения// Уравнения с разрыв. коэффициентами и их прил. – Алма-Ата, 1985. – С. 139–145.

253. *Турсунов К.Н.* Исследование периодического (по времени) решения почти всюду многомерной краевой задачи для одного класса гиперболических уравнений второго порядка с нелинейной операторной правой частью// Вопр. вычисл. и прикл. математики. – Ташкент, 1976. – Вып. 40. – С. 37–47.

254. *Турсунов К.Н.* Исследование периодического (по времени) обобщенного решения многомерной краевой задачи для гиперболических уравнений второго порядка с нелинейной операторной правой частью// Краевые задачи для дифференц. уравн. и их приложения. – Ташкент: Фан, 1976. – С. 64–72.

255. *Турсунов К.Н.* Исследование периодического (по времени) классического решения многомерной краевой задачи для гиперболических уравнений второго порядка с нелинейной операторной правой частью// Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1977. – № 6. – С. 34–40.

256. *Умбетжанов Д.У.* Почти периодические решения эволюционных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1990. – 182 с.

257. *Фардигола Л.В.* Критерий корректности в слое краевой задачи с интегральным условием// Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1546–1551.

258. *Фардигола Л.В.* Свойства T-устойчивости интегральной краевой задачи в слое// Теория функций, функц. анализ и их приложения. – 1991. – № 55. – С. 78–80.

259. *Фардигола Л.В.* Нелокальная краевая задача в слое: влияние параметров на свойства решений// Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 12. – С. 2151–2161.

260. *Фардигола Л.В.* Корректные задачи в слое с дифференциальными операторами в краевом условии// Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 8. – С. 1083–1090.

261. *Фардигола Л.В.* Нелокальные краевые задачи с интегральным условием в слое// Соврем. методы в теории краев. задач: Тез. докл. мат. школы.(Воронеж 4–8 мая, 1992 г.). – Воронеж, 1992. – С. 110.

262. *Фардигола Л.В.* Влияние параметров на свойства решений интегральных краевых задач в слое// Изв.вузов. Математика. – 1993. – № 7. – С. 51–58.

263. *Фардигола Л.В.* Нелокальная краевая задача в слое для эволюционного уравнения второго порядка по временной переменной// Дифференц. уравнения. – 1995. – **31**, № 4. – С. 662–671.

264. *Филимонов А.М.* Периодические решения некоторых нелинейных уравнений с частными производными// Дифференц. уравнения. – 1976. – **12**, № 11. – С. 2076–2084.

265. *Филимонов А.М.* Достаточные условия глобальной разрешимости смешанной задачи для квазилинейных гиперболических систем с двумя независимыми переменными// М., 1980. – 17 с. – Деп. в ВИНИТИ 19.12.80, № 6–81 Деп.

266. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 112 с.

267. *Хома Г.П.* Нахождение периодических решений нелинейных систем первого порядка с распределенными параметрами// Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 6. – С. 779–786.

268. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.

269. *Цыбиков Б.Н.* О корректности периодической задачи для многомерного уравнения смешаного типа// Неклас. уравнения мат. физики. – Новосибирск, 1986. – С. 206–211.

270. *Чесалин В.И.* Задача с нелокальными граничными условиями для абстрактных уравнений Лява. – Минск, 1976. – 18 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 2913–76.

271. *Чесалин В.И.* Задача с нелокальными граничными условиями для дифференциально-операторных уравнений нечетного порядка// Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 3. – С. 468–476.

272. *Чесалин В.И.* Задача с нелокальными граничными условиями для некоторых абстрактных гиперболических уравнений// Дифференц. уравнения. – 1979. – **15**, № 11. – С. 2104–2106.

273. *Чесалин В.И., Юрчук Н.И.* Задача с граничными условиями для абстрактных уравнений Лява// Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1973. – № 6. – С. 30–35.

274. *Чесалин В.И., Юрчук Н.И.* Задача сопряжения абстрактных параболических и гиперболических уравнений с нелокальными условиями по t// Докл. АН БССР. – 1974. – **18**, № 3. – С. 197–200.

275. *Шакибалиев Р.Ш.* Теоремы существования периодических и условно-периодических решений нелинейных уравнений в частных производных, определяемых дифференциальным оператором В.Х. Харасахала: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Москва, 1974. – 14 с.

276. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.

277. *Шишатский С.П.* Некоторые нелокальные граничные задачи для дифференциального уравнения гиперболического типа в банаховом пространстве: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Новосибирск, 1970. – 10 с.

278. *Шополов Н.Н.* Гранична задача за смесено параболично уравнение с нелокалки гранични условия I, II// Годишн. ВУЗ. Прилож. мат. – 1980 (1981). – **16**, № 2. – С. 7–8 (С. 19–35).

279. *Шополов Н.Н.* Смешанная задача для уравнения теплопроводности с нелокальным граничным условием// Докл. Болг. АН. – 1981. – **34**, № 7. – С. 935–936.

280. *Штабалюк П.І.* Про майже періодичні розв'язки однієї задачі з нелокальними умовами// Вісник держ. ун-ту "Львівська політехніка": Диференц. рівняння та їх застосування. – 1995. – № 286. – С. 153–165.

281. *Шханукое М.Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах// Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 4. – С. 689–699.

282. *Энгельман У.* Задача с нелокальными граничными условиями для гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка// Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, № 9. – С. 1687–1693.

283. *Юнусов М.* Операторные уравнения с малым параметром и нелокальные граничные условия// Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 1. – С. 172–181.

284. *Abdul-Latif A., Diaz J.* Dirichlet, Neumann and mixed boundary value problems for the wave equation $u_{xx} - u_{tt} = 0$ for a rectangle// Appl. Anal. – 1971. – **1**, N 1. – P. 1–12.

285. *Arias M., Martinez-Amores P., Ortega R.* Doubly-periodic solutions of a forced semilinear wave equation// Proc. Amer. Math. Soc. – 1987. – **101**, N 3. – P. 503–508.

286. *Aziz A.K., Horak M.L.* Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations in the large// SIAM Journ. Math. Anal. – 1972. – **3**, N 1. – P. 176–182.

287. *Bahri A., Brezis H.* Periodic Solutions of a Nonlinear Wave Equations// Proc. Roy. Soc. Edinburg. – 1980. – Fect. A, 85. – P. 313–320.

288. *Bange D.W.* Periodic solutions of a quasilinear parabolic differential equation// Journ. Differ. Equat. – 1975. – **17**, N 1. – P. 61–72.

289. *Bartak Y., Vejvoda O.* Periodic solutions to linear partial differential equations of the first order// Czechosl. Math. Journ. – 1991. – **41**, N 2. – P. 185–202.

290. *Bassanini P.* Iterative methods for quasilinear hyperbolic systems in the first canonic form// Appl. anal. – 1981. – **12**, N 2. – P. 105–117.

291. *Bassanini P.* On a boundary value problem for a class of quasilinear systems in two independent variables// Atti semin. mat. e fis. Univ. Modena. – 1975 (1976). – **24**, N 2. – P. 343–372.

292. *Ben-Naoum A.K.* Solutions périodiques de l'équation $u_{tt} + u_{xxxx} = f(t, x, u, u_{xx})$: Thése. Doct. 3éme cycle. – Lille, Univ. Sci. et Techn. – 1983. – IV. – 52 p.

293. *Ben-Naoum A.K., Mawhin J.* The periodic-Dirichlet problem for some semilinear wave equations// Journ. Diff. Equat. – 1992. – **96**, N 2. – P. 340–354.

294. *Bourghin D.G., Duffin R.J.* The Dirichlet problem for the vibrating string equation// Bull. Amer. Math. Soc. – 1939. – **45**. – P. 851–858.

295. *Bouzinab A., Arino O.* On the existence and uniqueness for an age-dependent population model with nonlinear growth// Facta Univ., Ser. Math. Inf. – 1993. – **8**. – P. 55–68.

296. *Brezis H.* Periodic solutions of nonlinear vibrating strings and duality principles// Bull. Amer. Math. Soc.(New Series). – 1983. – **8**. – P. 409–426.

297. *Brezis H., Nirenberg L.* Forced vibrations for a Nonlinear Wave Equation// Comm. Pure Appl. Math. – 1978. – **31**. – P. 1–30.

298. *Busenberg S., Iannelli M.* Separable models in age-dependent population dynamics// J. Math. Biol. – 1985. – **22**. – P. 145–173.

299. *Buzzetti F.* Soluzioni periodiche dell'equazione della corda vibrante con termine dissipativo monotono crescente// Rend. Inst. Lombardo Acad. Sci. e lettere. – 1968. – **A102**, N 4. – P. 623–634.

300. *Byszewski L.* Theorem about existence and uniqueness of continuous solution of nonlocal problem for nonlinear hyperbolic equation// Appl. Anal. – 1991. – **40**, N 2/3. – P. 173–180.

301. *Byszewski L., Lakshmikantham V.* Monotone iterative technique for nonlocal hyperbolic differential problem// J. Math. Phys. Sci. – 1992. – **26**, N 4. – P. 345–359.

302. *Catte F.* Sur un probléme hyperbolique periodique portement non lineaire// C. r. Acad. Sci. – 1978. – **AB286**, N 22. – P. A1049–A1051.

303. *Cesari L.* Periodic solutions of partial differential equations// Качественные методы нелинейных колебаний: Тр. Междунар. симпозиума. – К., 1963. – V. 2. – С. 440–457.

304. *Cesari L.* Existence in the Large of Periodic Solutions of Hyperbolic Partial Differential Equations// Arch. Rational Mech. and Anal. – 1965. – **20**, N 3. – P. 170–190.

305. *Cesari L., Kannan R.* Periodic solutions of a wave equation with strong nonlinearity// Rend. Circ. mat. Palermo. – 1986. – **34**, Suppl. N 8. – P. 55–70.

306. *Chan W.L., Guo Bao Zhu.* On the semigroups of age-size dependent population dynamics with spatial diffusion// Mannuscr. Math. – 1989. – **66**, N 2. – P. 161–181.

307. *Chang K.C., Wu S.P., Li S.* Multiple Periodic Solutions for an Asymptotically Linear Wave Equation// Indiana Univ. Math. J. – 1982. – **31**, N 5. – P. 721–731.

308. *Chow Shui-Nee.* Periodic solutions of nonlinear autonomous hyperbolic equations// Lect. notes math. – 1980. – N 799. – P. 126–139.

309. *Coron J.M.* Periodic solutions of nonlinear wave equations without assumption of monotonicity// Math. Ann. – 1983. – **71**, N 5. – P. 780–785.

310. *Czlapinski T.* On existence and uniqueness of solution of nonlocal problems for hyperbolic differential-functional equations in two independent variables// Ann. Pol. Math. – 1997. – **67**, N 3. – P. 205–214.

311. *Drabek P., Lupo D.* On generalized periodic solutions of some nonlinear telegraph and beam equations// Czechosl. Math. Journ. – 1986. – **36**, N 3. – P. 434–449.

312. *Fečkan M.* Periodic solutions of sertain abstract wave equations// Proc. Amer. Math. Soc. – 1995. – **123**, N 2. – P. 465–470.

313. *Feireisl E.* On existence of infinitely many periodic solutions for an equation of a rectangular thin plate// Czechosl. Math. Journ. – 1987. – **37**, N 2. – P. 334–341.

314. *Feireisl E.* Small time-periodic solutions to a nonlinear equation of a vibrating string// Apl. mat. – 1987. – **32**, N 6. – P. 480–490.

315. *Feireisl E.* On existence of periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear-forcing term// Czechosl. Math. Journ. – 1988. – **38**, N 1. – P. 78–87.

316. *Felmer P.L., Manasevich R.F.* Periodic solutions of a coupled system of telegraph-wave equations// J. math. anal. and appl. – 1986. – **116**, N 1. – P. 10–21.

317. *Fučik S., Mawhin J.* Generalized periodic solutions of nonlinear telegraph equations// Nonlinear. Anal., Theory, Methods and Appl. – 1978. – **2**, N 5. – P. 609–617.

318. *Goy T.P., Ptashnyk B.Y.* The nonlocal boundary value problems for one class of partial differential systems// Асимптотичні та якісні методи в теорії нелінійних коливань: Тези доп. Міжнар. конф. – К., Ін-т мат. НАН України, 1997. – С. 68–69.

319. *Grindrod P., Rynne B.P.* Time-periodic solutions to semilinear parabolic equations// Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1986. – **A104**, N 3-4. – P. 329–342.

320. *Haimovici A.* A mathematical model of age-structured population dynamics, with density dependent diffusion// Biomathematics and related computational problems, Proc. Workshop, Naples and Anacapri/Italy 1987. – 1988. – P. 295–310.

321. *Hall W.S.* On the existence of periodic solutions for the equations $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (-1)^p \frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}} = \varepsilon f(t, x, u)$// Journ. Diff. Equat. – 1970. – **7**, N 3. – P. 509–526.
322. *Havlova J.* Periodic solutions of a nonlinear telegraph equations// Cas. péstov. mat. – 1965. – **90**, N 3. – P. 273–289.
323. *Hirano N., Kim W.S.* Periodic-Dirichlet boundary value problem for semi-linear dissipative hyperbolic equations// Journ. Math. Anal. and Appl. – 1990. – **148**, N 2. – P. 371–377.
324. *Hryniv R., Kmit I.* On a nonclassical problem for some nonlinear hyperbolic equation. 17 p. (2000). To appear in "Nonlinear analysis".
325. *Huyer W.* Semigroup formulation and approximation of a linear age-dependent population problem with spatial diffusion// Semigroup Forum. – 1994. – **49**, N 1, – P. 99–114.
326. *Kannan R., Nieto J.J.* Periodic solutions of semilinear partial differential equations of parabolic type// Ann. mat. pura ed appl. – 1987. – N 148. – P. 1–16.
327. *Kiguradze T.I.* On bounded in a strip solutions of the hyperbolic partial differential equations// Applicable analysis. – 1995. – **58**. – P. 199–214.
328. *Kiguradze T.I.* On periodic in the plane solutions of second order linear hyperbolic systems// Archivum mathematicum. – 1997. – **33**, N 4. – P. 253–272.
329. *Kiguradze T.I.* Some boundary value problems for systems of linear partial differential equation of hyperbolic type// Memoirs on differential equations and mathematical physics. – 1994. – **1**. – P. 1–144.
330. *Kim W.S.* Double-periodic boundary value problem for non-linear dissipative hyperbolic equations// Journ. Math. Anal. and Appl. – 1990. – **145**, N 1. – P. 1–16.
331. *Kopáčková M.* On periodic solutions of some equations of mathematical physics// Aplicate matemat. – 1973. – **18**, N 1. – P. 33–42.
332. *Kopáčková M., Vejvoda O.* Periodic solutions of an extensible beam// Cas. péstov. mat. – 1977. – **102**, N 4. – P. 356–363.
333. *Krejči P.* Hysteresis and periodic solutions of semilinear and quasilinear wave equations// Math. Z. – 1986. – **193**, N 2. – P. 247–264.
334. *Krylova N., Vejvoda O.* A linear and waekly nonlinear equation of a beam: the boundary-value problem for free extremities and its periodic solutions// Czechosl. Math. Journ. – 1971. – **21(96)**, N 4. – P. 535–566.

335. *Li S., Szulkin A.* Periodic solutions for a class of nonautonomous wave equations// Diff. and Integral Equat. – 1996. – **9**, N 6. – P. 1197–1212.
336. *Li Ta-tsien.* Global classical solutions for quasilinear hyperbolic systems. – John Wiley & Sons, 1994.
337. *Li Ta-tsien P., Yu Wen-Tsu.* Boundary value problems for the first order quasilinear hyperbolic systems and their applications// J. differ. equat. – 1981. – **41**, N 1. – P. 1–26.
338. *Li Ta-Tsien, Zhou Yi, Kong Dexing.* Global classical solutions for general quasilinear hyperbolic systems with decay initial data// Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. – 1997. – **28**, N 8. – P. 1299–1332.
339. *Lovicar V.* Periodic solutions on nonlinear abstract second order equations with dissipative terms// Cas. pestov. mat. – 1977. – **102**, N 4. – P. 364–369.
340. *Lovicarova H.* Periodic solutions of a weakly nonlinear wave equation in one dimention// Czechosl. Math. Journ. – 1969. – **19**, N 2. – P. 324–342.
341. *Lyashenko A.A.* On Dirichlet problem for nonlinear equation of the vibrating string. I // Journ. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ). – 1993. – **33**, N 2. – P. 543–570.
342. *Marcus M., Mizel V.* Semilinear hereditary hyperbolic systems with nonlocal boundary conditions// J. math. anal. and appl. – 1980. – **76**, N 2. – P. 440–475.
343. *Masuda K.* On the existence of periodic solutions of nonlinear differential equations// Journ. of Faculty of Sciences of the University of Tokyo. – 1966. – **12**, N 2. – P. 247–257.
344. *Mawhin J.* Periodic oscillations of some nonlinear wave systems// IX Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям: Материалы конф. (Киев, 30.08–6.09. 1981). – К., 1984. – Т. 1. – С. 47–53.
345. *Mawhin J., Ward J.* Nonuniform nonresonance conditions in the periodic-Dirichlet problem for semilinear wave equations with jumping nonlinearities// Journ. Nigerian Math. Soc. – 1984. – N 3. – P. 41–55.
346. *McKenna P.J.* On solutions of a nonlinear wave equation when the ratio of the period to the length of the interval is irrational// Proc. Amer. Math. Soc. – 1985. – **93**, N 1. – P. 59–64.
347. *Nakao M.* Periodic solutions of linear and nonlinear wave equations// Arch. Ration Mech. and Anal. – 1976. – **62**, N 1. – P. 87–98.

348. *Nakao M.* Periodic solution of the dissipative wave equations in a time-dependent domain// J. different. equat. – 1979. – **34**, N 3. – P. 393–404.
349. *Nakao M.* Periodic solution and decay for some nonlinear wave equations with sublinear dissipative terms// Nonlinear anal. theory, meth. and appl. – 1986. – **10**, N 6. – P. 587–602.
350. *Nishida T.* Global solution for an initial boudary value problem of a quasilinear hyperbolic system// Proc. Japan. acad. – 1968. – **44**, N 142. – P. 642–646.
351. *Nishiura Y.* Existence of periodic solutions of nonlinear hyperbolic system// Proc. Jap. acad. – 1977. – **A53**, N 6. – P. 190–194.
352. *Nkashama M.N., Willem M.* Time-periodic solutions of boundary value problems for nonlinear heat, telegraph and beam equations// Differ. Equat. Qualit Theory : 2nd Colloq. (Szeged, Aug. 27–31, 1984). – Amsterdam, 1987. – V. 2. – P. 809–846.
353. *Pešl J.* Periodic solutions of a weakly nonlinear wave equation in one dimension// Cas. péstov. mat. – 1973. – **98**, N 4. – P. 333–356.
354. *Poorkarimi H.* Asymptptically periodic solutions for some hyperbolic equations// Libert. math. – 1988. – **8**. – P. 117–122.
355. *Prodi G.* Problemi al contorno non lineari per equazioni di tipo parabolico non lineari in due variabiliti soluzioni periodiche// Rend. Seminar mat. Univ. Padova. – 1954. – **23**, N 1. – P. 25–85.
356. *Prodi G.* Soluzioni periodiche di equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico non lineari// Ann. mat. pura ed appl. – 1956. – **42**. – P.25–49.
357. *Prouse G.* Soluzioni periodiche dell'equazione delle onde non omogenea con termine dissipativo quadratico// Ricerch. mat. – **13**, N 2. – P. 261–280.
358. *Rabinowitz P.H.* Periodic solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations// Comm. Pure and Appl. Math. – 1967. – **20**, N 1. – P. 145–205.
359. *Rabinowitz P.H.* Peroidic solutions of non-linear hyperbolic partial differential equations. II// Ibid. – 1969. – **22**, N 1. – P. 15–39.
360. *Rabinowitz P.H.* Large amplitute time-periodic solutions of a semilinear wave equations// Ibid. – 1984. – **37**, N 2. – P. 189–206.
361. *Randall J. LeVeque.* Numerical methods for conservation laws, 2nd edition. Birkhäuser Verlag, Basel–Boston–Berlin (1992).
362. *Řehaček J.* On periodic solutions of a special type of the beam equation// Appl. math.– 1988. – **33**, N 1. – P. 33–40.

363. *Siegel C.L.* Iterations of analytic functions// Ann. of Math. – 1942. – **43**, N 4.
364. *Sinestrari E., Webb G.F.* Nonlinear hyperbolic systems with nonlocal conditions// J. math. anal. and appl. – 1987. – **121**, N 2. – P. 449–464.
365. *Smiley M.W.* Time periodic solutions of wave equations on $\mathbf{R}^1$ and $\mathbf{R}^3$// Math. meth. appl. sci. – 1988. – **10**, N 4. – P. 457–475.
366. *Smoller J.* Shock vawes and reaction-diffusion equations. – Springer, Berlin, 1983.
367. *Song J.* Some developments in mathematical demography and their application to the People's Republic of China// Theor. popul. biol. – 1982. – **22**, N 3. – P. 382–391.
368. *Štedry M.* Periodic solutions of a weakly nonlinear wave equation// Cas. pestov. mat. – 1977. – **102**, N 2. – P. 128–143.
369. *Štedry M.* Time-periodic solutions to a class of first order hyperbolic systems// An. sti. univ. Iasi, Sec. 1 a. – 1981. – **27**, N 2. – P. 339–352.
370. *Štedry M.* Small time-periodic solutions to fully nonlinear telegraph equations with several spartial variables// XIth Int. Conf. Nonlinear Oscill.; Proc. Conf.(Aug.17–23, 1987). – Budapest, 1987. – P. 723–725.
371. *Štedry M., Vejvoda O.* Periodic solutions to weakly non-linear autonomous wave equations// Czechosl. Math. Journ. – 1975. – **25**, N 4. – P. 536–555.
372. *Straškraba I., Vejvoda O.* Periodic solutions to abstract differential equations// Ibid. – 1973. – **23(98)**. – P. 635–669.
373. *Sugimura K.* Infinitely many periodic solutions of a forced wave equation with an exponential growth nonlinear term// Journ. Math. Anal. and Appl. – 1995. – **190**. – P. 517–545.
374. *Tanaka K.* Infinitely many periodic solutions for the equation: $u_{tt}-u_{xx}\pm|u|^{p-1}u = f(x,t)$. II// Trans. Amer. Math. Soc. – 1988. – **307**. – P. 615–645.
375. *Tarantello G.* Solutions with prescribed minimal period for nonlinear vibrating strings// Commun. part. differ. equat. – 1987. – **12**, N 9. – P. 1071–1094.
376. *Turo J.* A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems of hereditary partial differential equations// Atti semin. mat. e fis. Univ. Modena. – 1986. – **34**, N 1. – P. 13–34.
377. *Turo J.* Mixed problems for quasilinear hyperbolic systems// Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. – 1997. – **30**, N 4. – P. 2329–2340.

378. *Turo J.* Nonlocal problems for first order functional partial differential equations// Ann. Pol. Math. – 1999. – **72**, N 2. – P. 99–114.
379. *Turo J.* Nonlocal problems for first order quasilinear functional partial differential equations of first order// Publ. Mat., Barc. – 1997. – **41**, N 2. – P. 507–517.
380. *Vejvoda O.* Periodic solutions of a linear and weakly nonlinear wave equation in one dimension. I// Czechosl. Math. Journ. – 1964. – **14(89)**, N 3. – P. 341–382.
381. *Vejvoda O.* Partial differential equations: time periodic solutions. – USA: Sijthoff: Noordhoff, 1981. – XIII+358 p.
382. *Vidossich G.* Periodic solutions of hyperbolic equations using ordinary differential equations// Nonlinear anal. Theory, meth. and appl. – 1991. – **17**, N 8. – P. 703–710.
383. *Vitek V.* Periodic solutions of a weakly nonlinear hyperbolic equation in $\mathbf{R}^2$ and $\mathbf{R}^3$// Apl. math. – 1974. – **19**, N 4. – P. 232–245.
384. *Wang Z.* Multiple Periodic Solutions for a class of nonlinear nonautonomous Wave Equation// Acta Math. Sin. New Ser. – 1989. – **5**, N 3. – P. 197–213.
385. *Whitham G.B.* Linear and nonlinear waves. – New York–London–Sydney–Toronto: John Wiley & Sons, 1974.
386. *Willem M.* Subharmonic oscillations of a semilinear wave equation// Semin. math. pure et appl. Univ. cathol. Louvain. – 1983. – N 1. – P. II/1–II/16.
387. *Zhou Z.* The existence of periodic solutions of nonlinear wave equations of S^n// Commun. Part. Differ. Equat. – 1987. – **12**, N 8. – P.829–882.
388. *Zhu Guo Bao, Chan W.L.* A semigroup approach to age-dependent population dynamics with time delay// Ibid. - 1989. – **14**, N 6. – P. 809–832.

Предметний покажчик

Алгебричний многовид 214, 225, 229

База Рісса 159, 252

Власні вектори 183
Власні значення 107, 141, 146, 159, 169, 183, 277
Власні функції 107, 140, 146, 159, 169, 206, 252, 277
Вронскіан 90

Дельта-функція Дірака 181, 263
Дискримінант многочлена 104, 138, 173, 222, 237

Задача
– багатоточкова 16
– двоточкова 14
– Діріхле 250
– Коші 13
– на власні значення 158, 252, 276
– опукла 286
– Штурма–Ліувілля 140

Квазіаналітичні класи функцій 250
Кістяковий розклад матриці 272
Клітка жорданова 183, 190

Лакунарні ряди 260
Лема Бореля–Кантеллі 17

Малі знаменники 6, 7, 34, 92, 101, 110, 117, 123, 143, 152, 156, 161, 171, 198
Матриця
– Вандермонда 153, 187, 247, 267, 268
– Гріна 96
– псевдообернена 289
Метод
– мінімізації 283
– характеристик 305, 315
Метричні оцінки 18, 20
Метричний підхід 6, 191, 199, 235, 283
Многочлен
– анулюючий 188
– мінімальний вектора 187, 194
– однорідний 190
– характеристичний 188
Множник Лагранжа 286, 289

Нетривіальність простору 250, 253

Область існування розв'язку 219
Оператор
– еліптичний 130, 146
– інтегро-диференціальний 167
– проектування 231, 241, 260, 272, 290
– псевдодиференціальний 181, 194, 231, 243, 264, 284
– стиску 16, 128

Перетворення Фур'є 243
Приєднані вектори 183
Приведений порядок системи 194
Принцип
– Каччопполі–Банаха 16, 178
– Шаудера 17, 97, 128, 179
– стискуючих відображень 128
Принципи нерухомих точок 16
Продовження розв'язку 214, 219, 223
Простори
– банахові 12
– Бора 13
– гельдерові 13
– гільбертові 11
– Лебега 250
– нескінченного порядку 243, 253
– Соболєва 250, 252
Пряма сума 276
Псевдорозв'язок 284, 284

Рівняння
– безтипні 148, 168
– диференціально-операторні 275
– гіперболічні 21
– гіперболічні за Гордінгом 39, 45
– гіперболічні за Петровським 39
– еліптичні 250
– з молодшими членами 28, 154
– інтегро-диференціальні 167
– інтегро-диференціальне слабконелінійне 175
– навантажене 165
– не розв'язані відносно старшої похідної 119
– нескінченного порядку 250, 252
– нестрого гіперболічні 25, 29
– однорідні за порядком диференціювання 148, 249
– параболічні за Петровським 107
– параболічні за Шиловим 98
– строго гіперболічні 28
– факторизоване 36, 119
Результант многочленів 199, 225, 244, 247, 270
Розв'язок
– u_0-нормальний 284
– класичний 14, 314
– кусково-гладкий 307
– наближений 232, 283
– неперервний 310, 317
– нормальний 284
– періодичний 39
– узагальнений 334, 342, 348
– фундаментальний 244
Розділена різниця 196, 202

Сингулярний розклад матриці 233
Системи
– безтипні 180
– диференціально-операторні 281
– гіперболічні 21, 88
– гіперболічні за Гордінгом 88
– із молодшими членами 45
– інтегро-диференціальні 96, 126
– нормальні анізотропні 180, 193
– однорідні за порядком диференціювання 39
– параболічні за Шиловим 114
– функціонально-диференціальні 166
Сліди траєкторії поширення розв'язку 299, 305, 321
Спільне спектральне зображення операторів 275
Спряжений простір 255

Траєкторія поширення розв'язку (ТПР) 296, 305, 321, 349

– розгорнута (РТПР) 358

Теорема
– Валле-Пуссена 16
– Вейєрштрасса 191
– вкладення 255, 257
– Грошева 18
– Каратеодорі 14
– Куна–Такера 286
– Спринджука 18
– Хінчина 17
Тотожність Гільберта для резольвент 293

Умова
– Ліпшиця 14, 120, 128, 176
– погодження 0-го порядку 296, 308, 320, 328, 335, 343
– погодження 1-го порядку 298, 314
– Слейтера 286
Умови
– n-точкові 247
– Адамара 219, 223
– багатоточкові 265
– Коші 264
– нелокальні багатоточкові 214, 230
– періодичні 21
– початкові формальні 263, 265

Форма Жордана 184
Фундаментальна матриця розв'язків 89, 114
Фундаментальна система розв'язків 15, 22, 30, 207
Функція
– аналітична 182, 196, 243, 244
– від матриці 184, 186
– Гріна 15, 163
– Лагранжа 286
– монотонна 289
– основна 243
– узагальнена 243
– фінітна 250
– ціла 255

Характеристики
– рівняння 302, 332, 347
– системи рівнянь 304, 315

Щільність простору 251, 253

Ядро задачі 185

Наукове видання

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ
МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ ІМ. Я.С. ПІДСТРИГАЧА

ПТАШНИК Богдан Йосипович
ІЛЬКІВ Володимир Степанович
КМІТЬ Ірина Ярославівна
ПОЛІЩУК Валентина Миколаївна

НЕЛОКАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Київ, видавництво «Наукова думка»

ISBN 966-00-0095-2
9 789660 000957

Підп. до друку 16.10.2002. Формат 60x90/16.
Папір офс. № 1. Гарн. Таймс. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 26,0. Ум. фарбо-відб. 26,0.
Обл.-вид. арк. 21,20. Тираж 500 прим.
Зам. 2-280

Оригінал-макет підготовлено в Інституті
прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

Видавництво «Наукова думка»
Р.с. № 05417561 від 16.03.95
01601 Київ 1, вул. Терещенківська, 3

Віддруковано в друкарні
концерну «Ін Юре»
м. Київ, вул. Багговутівська, 17–21