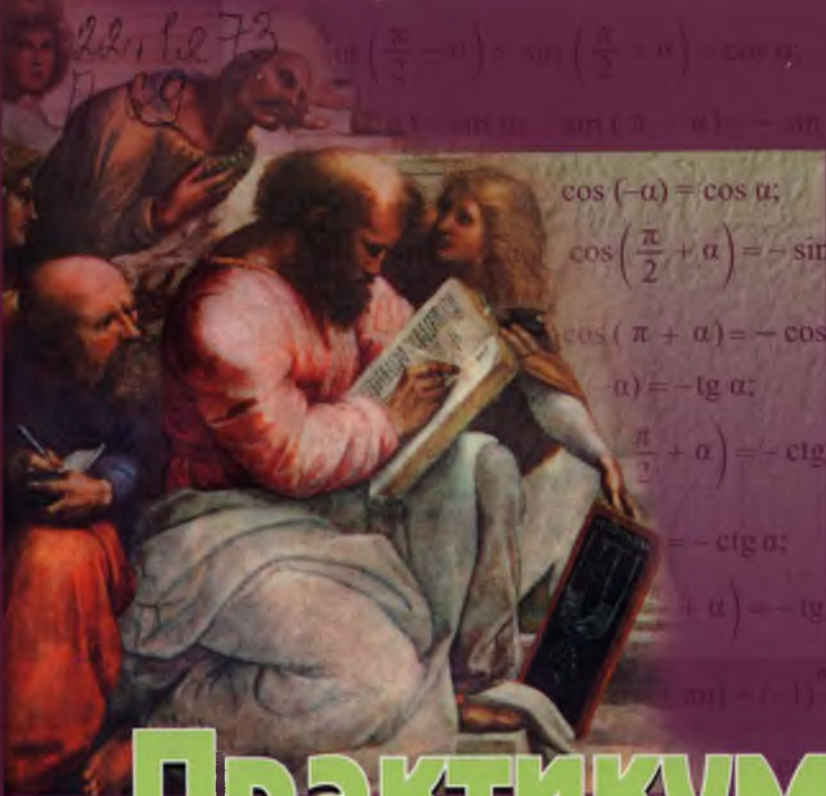


Практикум з вищої математики

1906–2006

До 100-річчя

• ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ •

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ВАДИМА ГЕТЬМАНА

Практикум з вищої математики

Навчальний посібник

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

1906 КНЕУ
КИЇВ 2006

ББК 22.1
П 69

Колектив авторів

Т. В. БЛУДОВА, І. Ф. ГРЕДЖУК, І. А. ДЖАЛЛАДОВА,
$\boxed{\text{А. Б. ВОЛОЩЕНКО}}$, О. І. ЛЮТИЙ, А. Л. ЛАПШИН,
В. П. ЛІСОВСЬКА, О. І. МАКАРЕНКО, В. М. МАКСИМЕНКО,
В. Г. ОВСІЄНКО, І. І. ПАХОМОВ, Т. П. СЕМЕНЧЕНКО

Гриф надано Міністерством освіти і науки України
Лист № 14/18.2-223 від 02.02.06

Практикум з вищої математики: Навч. посіб. / Т. В. Блудова, І. Ф. Греджук, І. А. Джалладова та ін. — К.: КНЕУ, 2006. — 404 с.
П 69
ISBN 966–574–830–0

У навчальному посібнику наведено завдання контрольних робіт 1 і 2 з усіх основних тем курсу (у 100 варіантах кожне), докладні розв'язання типових завдань, а також поради щодо виконання робіт. У додатку вміщено основні відомості з векторної алгебри та аналітичної геометрії.

Для студентів економічних спеціальностей заочної форми навчання.

ББК 22.1

ISBN 966–571–830–0

ШАНОВНІ СТУДЕНТИ-ЗАОЧНИКИ!

Бажаємо вам успіхів у вивченні курсу математики для економістів. Сподіваємось, що ви не тільки відкриєте для себе чудовий світ математики, а й зможете використовувати здобуті знання на практиці.

Радимо перед виконанням контрольних робіт ознайомитись із правилами їх виконання.

Усього найкращого!

Колектив авторів

ВСТУП

ПРАВИЛА ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

1. Методика вивчення курсу вищої математики студентами заочного факультету КНЕУ

Програма курсу вищої математики КНЕУ, затверджена Міністерством освіти і науки України, визначає той мінімум знань, який має опанувати студент.

Робота студента над навчальним матеріалом полягає у відвідуванні лекцій і практичних занять, вивченні теоретичного курсу за підручниками, розв'язуванні задач і виконанні контрольних завдань із подальшим захистом контрольних робіт, а також здачею письмових заліків та іспитів.

2. Вивчення теоретичного курсу

Спочатку студент прослуховує лекцію. Як доведено психологами, при цьому він залежно від рівня його базових знань опановує 20—40 % навчальної інформації. Згодом, працюючи вдома й готуючись до виконання контрольної роботи, студент має ознайомитися із завданням, з'ясувати його тему та ретельно опрацювати відповідний теоретичний і практичний матеріал. З цією метою можна скористатися конспектом лекцій, прикладами розв'язань типових задач, наведеними в частині II пропонованого посібника, а також джерелами зі списку літератури, який вміщено в його кінці.

3. Розв'язування задач

Розв'язування потрібно починати з опрацювання зразків уже розв'язаних задач, які подано в частині II цього посібника та у підручниках, і тільки після цього переходити до самостійного розв'язування прикладів та задач.

Розв'язування слід записувати докладно, без пропусків у робочому зошиті, а обчислення наводити по порядку; рекомендується відокремлювати допоміжні обчислення від основних.

4. Консультації

Перед іспитом або заліком викладач проводить консультації, подаючи студентам методичні вказівки та відповідаючи на всі їхні запитання щодо виконання контрольних робіт.

5. Запитання для самоперевірки

Після опрацювання теоретичного матеріалу і розв'язування задач потрібно дати відповіді на запитання для самоперевірки, подані в навчально-методичному посібнику.

6. Контрольні роботи

У процесі вивчення курсу вищої математики студент має виконати дві контрольні роботи, які охоплюють наведені далі розділи курсу.

Контрольна робота 1

1. Лінійна алгебра.
2. Аналітична геометрія.
3. Вступ до математичного аналізу.
4. Диференціальне числення.

Контрольна робота 2

5. Функції багатьох змінних.
6. Інтегральне числення.
7. Диференціальні рівняння.
8. Ряди.

Викладач добирає завдання контрольних робіт за варіантами. Задачі варіанта змінюються залежно від кодових даних студента за такою схемою:

НОМЕР ВАРІАНТА = ** (дві останні цифри студентського квитка або залікової книжки)

Викладач також може змінювати значення параметрів у завданнях. Тому остаточними завданнями контрольної роботи вважають ті, які узгодженні з викладачем на лекційних заняттях.

Подамо кілька зауважень щодо виконання контрольних робіт.

1. Рецензована робота дає змогу студентові з'ясувати наскільки глибоко він засвоїв відповідний розділ курсу; вказує на недоліки в роботі; допомагає сформулювати запитання для консультації з викладачем.

2. Контрольні завдання студент має виконувати самостійно, інакше він не матиме необхідних знань і буде непідготовленим до заліку та іспиту.

3. При виконанні й оформленні контрольної роботи потрібно додержувати таких правил:

а) у заголовку контрольної роботи має бути записано прізвище та ініціали студента, шифр, номер завдань і варіанта, що відповідає завданню;

б) контрольну роботу слід виконувати в зошиті синім або чорним чорнилом, залишаючи поля для зауважень рецензента;

в) розв'язання контрольних робіт слід розміщувати в порядку номерів, зазначених у завданнях; перед розв'язуванням задачі треба записувати повністю її умову;

г) розв'язання задач та пояснення до них необхідно викладати докладно, акуратно, без скорочень слів, супроводжувати, в разі потреби, посиланням на теорію.

Контрольні роботи, виконані неохайно, без проміжних обчислень або з порушеннями, наведених щойно правил, повертаються студентам для переробки. Також не зараховуються і повертаються контрольні роботи, виконані не за призначеним варіантом.

4. Отримавши прорецензовану роботу, студент має виправити в ній (незалежно від того, зараховано її чи ні) усі помилки та недоліки.

Якщо рецензент пропонує заново розв'язати ту чи іншу задачу контрольної роботи або докладніше подати розв'язання, то ці пропозиції потрібно врахувати терміново і знову подати роботу на повторне рецензування. Студент, який не подав викладачеві прорецензованих контрольних робіт, не допускається до здачі заліку або іспиту.

7. Лекції та практичні заняття

Лекції та практичні заняття проводяться під час чергових заїздів студентів і передусім мають на меті допомогти студентові в його самостійній роботі, яка є основною формою навчання па заочному факультеті.

8. Залік та іспит

Вивчивши курс вищої математики, студенти здають письмово один залік та один іспит.

На заліку та іспиті студенти мають продемонструвати знання означень, формул, теорем у межах курсу, вміння розв'язувати відповідні задачі. У процесі підготовки до іспиту рекомендується повторити матеріали за підручником та за конспектом лекцій.

ЧАСТИНА І

Завдання до контрольних робіт

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Задача 1.1. Обчислити визначник

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}$$

за даними табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Номер варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{34}	A_{41}	A_{42}	A_{43}	A_{44}
1	-3	-2	4	4	-4	3	-4	5	-1	-2	-4	1	2	-4	2	-5
2	-2	-5	1	5	-1	-1	4	1	2	5	-3	1	4	3	-2	-2
3	3	-2	-2	5	-4	1	-4	-5	3	-3	-3	-3	3	1	5	2
4	3	4	1	-4	-2	4	4	-5	2	1	1	3	-3	-1	4	2
5	-3	4	3	1	1	-1	-1	2	-4	4	1	2	-2	3	2	4
6	-4	-2	-1	-3	-1	-4	1	2	1	2	-5	-3	-5	-4	-2	3
7	3	-3	3	4	4	-2	2	3	3	5	1	-4	-4	1	5	1
8	1	1	4	-3	3	-4	5	-1	-4	1	2	-5	-3	-2	3	-1
9	1	3	-3	5	2	2	-1	-5	-5	-3	-1	-4	1	1	-1	-4
10	-5	-5	-3	5	-4	1	1	1	2	-5	1	-2	4	3	5	-2
11	-5	-2	-2	1	1	-5	4	5	-3	3	4	1	3	-2	-1	-4
12	-2	-1	1	2	3	3	1	-1	-5	5	-3	4	-2	2	1	-1
13	-1	1	3	4	-5	1	1	1	-5	-4	2	5	-4	3	-5	-2
14	-2	-3	-1	-2	-5	-5	5	-2	4	2	-1	2	3	1	-2	3
15	-4	5	-3	3	-3	1	-5	2	2	-4	-4	3	-5	3	1	4
16	-5	-3	-1	2	1	3	1	3	2	-3	-2	-4	-3	-1	2	-5

Продовження табл. 1.1

Номер варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{34}	A_{41}	A_{42}	A_{43}	A_{44}
17	-1	-3	4	-5	-1	-5	5	2	-5	1	-2	1	-3	1	3	-3
18	1	-4	-1	-1	5	-2	2	-2	4	-4	-2	-4	-2	3	2	-4
19	-5	-3	3	-4	3	-4	4	-2	3	-2	4	4	-1	1	-2	-2
20	-1	1	3	-1	1	4	-5	1	-1	-2	-3	-4	-4	3	-3	3
21	-3	1	1	1	2	4	-3	2	-2	5	3	-4	-2	5	-3	2
22	-3	-1	-2	2	1	-2	2	2	4	4	-4	1	2	3	5	-3
23	1	-5	1	-1	-4	-4	-1	5	4	5	5	4	-2	-5	-3	-3
24	-5	1	-1	3	5	4	-3	4	5	2	2	3	-2	1	-5	5
25	-3	1	-1	-4	4	-4	1	3	3	1	5	-2	3	3	5	1
26	-2	1	-2	1	3	1	1	4	1	4	-3	-5	-1	-2	4	2
27	3	-3	-1	1	-5	2	-1	2	5	1	5	4	-2	-3	-2	4
28	-4	1	1	-5	2	-3	5	1	-5	-5	4	-5	1	-1	1	3
29	-4	4	-3	1	3	4	3	5	1	-4	4	-5	3	-5	1	-3
30	-1	1	-5	-4	4	-1	3	-5	5	-5	4	1	-3	-5	-5	5
31	5	-2	-2	2	4	1	2	-3	5	5	4	-4	3	-3	5	1
32	5	5	1	-1	1	5	2	-4	-1	-2	1	-3	5	3	5	3
33	-2	2	4	3	-3	-2	4	-4	4	5	5	3	1	-2	3	4
34	-1	-5	-4	1	-4	-1	2	2	1	-5	5	-2	4	4	5	2
35	1	5	-3	3	-3	1	2	1	-5	3	-4	5	1	-3	-4	5
36	4	-1	-4	-4	3	-1	1	-1	5	-1	-5	2	5	5	-2	5
37	1	-2	-3	2	-5	2	-5	3	5	1	4	1	-4	1	1	-1
38	2	-4	1	-1	5	-3	-2	2	-1	-1	-2	1	-3	-3	-5	3
39	5	4	-4	5	-1	-2	-4	1	-1	-2	4	-3	-5	1	-5	5
40	-2	-3	-4	2	-2	1	1	-5	2	-2	-2	5	4	-2	3	1
41	1	2	-1	4	2	2	5	4	4	-4	4	5	1	1	5	3
42	-3	-4	1	-5	-3	2	-2	-4	5	1	3	4	-3	3	-5	2
43	1	-1	-5	-5	2	-1	-5	-5	5	4	-5	5	3	3	2	-1
44	-2	-5	-3	-2	2	3	4	5	3	-4	-1	-1	-1	3	-3	1
45	5	-2	-3	-1	-5	3	4	5	4	1	3	1	2	5	-3	4

Продовження табл. 1.1

Номер варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{34}	A_{41}	A_{42}	A_{43}	A_{44}
46	– 1	– 2	– 5	– 5	4	4	– 5	– 4	3	1	5	5	– 1	– 2	1	2
47	– 4	2	3	5	2	– 4	– 3	5	1	1	4	2	3	– 4	– 3	5
48	– 1	1	– 1	4	5	– 4	– 5	5	3	– 5	– 3	4	1	3	4	– 2
49	2	– 2	5	2	1	– 5	3	1	5	3	1	– 3	3	5	– 5	1
50	3	– 4	– 1	3	– 4	4	– 5	– 3	3	– 5	1	5	– 2	– 3	– 3	3
51	– 1	– 5	3	– 3	1	– 2	– 4	3	3	4	4	– 2	1	– 2	– 2	5
52	2	– 1	– 1	1	4	– 1	4	1	1	3	– 4	2	– 5	1	– 1	4
53	1	– 5	1	– 4	– 5	1	– 1	1	2	3	2	– 1	1	– 3	– 3	5
54	1	– 1	5	2	2	4	– 5	– 4	– 5	2	– 5	– 4	1	– 1	2	– 5
55	4	1	2	4	– 1	– 1	3	5	– 4	– 2	5	– 5	– 4	– 2	– 1	4
56	4	4	3	– 4	– 2	3	2	– 4	– 4	1	– 4	– 4	4	– 5	– 3	– 2
57	– 2	2	5	1	– 4	– 3	3	– 3	– 5	– 5	1	4	2	3	4	1
58	– 3	– 4	5	3	1	– 3	– 3	2	2	3	– 1	– 4	3	– 5	– 3	1
59	3	1	– 1	– 3	– 5	– 5	2	– 5	– 1	2	1	– 4	– 1	– 4	– 2	– 3
60	– 3	– 5	– 3	1	– 3	4	– 5	1	– 4	– 2	1	– 5	4	– 3	1	1
61	– 4	2	2	– 4	– 3	2	4	2	– 5	4	– 1	2	4	– 1	1	– 5
62	1	– 5	1	– 1	– 1	2	1	– 5	– 4	– 2	4	– 5	– 5	– 2	4	1
63	– 5	2	3	2	2	– 5	1	5	– 5	– 3	5	1	– 2	– 5	– 2	2
64	– 3	– 3	– 5	– 4	1	5	– 3	5	2	1	1	1	4	– 3	2	5
65	1	1	1	3	– 3	3	– 4	4	– 4	2	– 4	5	5	– 2	– 3	5
66	– 4	– 3	– 2	– 4	4	4	2	1	– 5	4	4	1	– 1	4	– 1	3
67	– 2	2	– 5	1	– 3	– 2	3	– 2	2	1	5	– 4	– 5	– 4	3	– 4
68	4	1	– 4	– 2	– 3	2	– 2	4	2	– 1	– 3	2	1	5	5	2
69	– 1	– 3	1	– 2	– 3	4	– 1	5	– 2	– 1	– 2	5	– 4	– 5	1	– 5
70	– 4	5	– 2	5	5	5	2	4	– 5	1	– 4	2	– 4	– 2	3	4
71	2	– 5	– 1	5	– 2	1	– 4	4	– 1	– 5	5	5	2	– 4	– 4	– 4
72	– 5	1	3	4	2	– 1	4	– 3	1	5	1	– 3	– 2	4	– 4	– 3

Закінчення табл. 1.1

Номер варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{34}	A_{41}	A_{42}	A_{43}	A_{44}
73	– 3	5	– 3	5	5	– 4	– 3	1	1	– 5	– 5	4	2	– 2	5	– 4
74	5	3	3	– 5	5	2	– 5	5	– 4	1	– 2	– 2	4	1	– 3	1
75	3	4	– 3	2	3	– 2	1	– 1	1	– 5	– 4	4	5	4	– 2	4
76	5	5	– 5	2	5	– 4	3	1	– 5	1	2	5	5	3	– 2	5
77	4	4	1	2	2	– 4	– 2	4	2	5	3	– 2	5	– 5	5	– 1
78	– 5	1	– 4	2	– 4	– 4	– 1	5	– 1	4	– 5	4	2	– 5	– 5	4
79	– 2	5	– 2	1	2	2	– 1	2	– 5	5	2	5	– 5	1	3	2
80	2	2	– 5	2	1	2	– 2	3	5	– 3	2	3	– 5	– 4	1	2
81	– 4	1	5	1	3	– 2	– 3	– 3	2	4	1	2	2	– 1	– 1	2
82	– 1	2	– 3	– 3	– 1	3	– 2	3	– 2	1	– 2	1	1	– 2	4	3
83	1	1	5	5	– 3	– 2	– 4	– 5	5	– 4	– 4	4	– 1	3	– 3	4
84	– 2	4	1	– 5	1	4	– 4	– 2	1	– 5	4	– 1	1	– 2	– 1	5
85	– 2	– 3	– 5	1	– 2	3	– 2	5	– 3	2	3	2	– 3	– 4	– 4	– 4
86	– 2	– 1	3	– 2	– 4	– 4	– 4	– 3	– 2	3	3	1	3	1	– 1	2
87	2	3	– 3	– 5	– 3	1	– 3	1	– 2	– 1	4	– 4	– 3	– 1	5	2
88	– 5	5	3	– 1	1	0	3	2	1	– 2	5	– 1	– 3	– 4	3	5
89	– 4	– 2	3	– 1	– 3	3	4	– 1	2	1	– 5	– 4	2	– 5	– 4	4
90	– 3	– 2	5	1	– 2	– 5	– 3	– 5	3	1	– 2	5	3	5	– 5	1
91	– 4	3	5	– 4	– 1	– 3	– 4	4	– 1	4	5	– 2	– 4	– 4	1	1
92	– 2	– 4	1	3	4	– 3	– 3	– 5	– 4	2	2	3	3	5	1	– 2
93	– 1	– 5	3	3	– 5	3	– 1	1	– 4	4	– 2	4	– 2	5	– 1	2
94	4	3	4	1	– 1	1	– 5	– 1	– 3	– 5	4	– 1	– 5	– 3	– 4	1
95	– 3	– 3	– 3	1	1	2	5	– 4	– 1	– 3	2	4	1	– 3	– 2	– 5
96	4	– 5	1	5	1	2	1	– 2	– 2	– 2	5	– 4	5	– 2	– 2	2
97	3	4	1	1	– 5	1	– 1	– 3	2	3	5	4	– 5	4	2	5
98	– 3	4	4	3	2	2	– 5	4	5	– 1	1	1	– 1	– 5	– 1	1
99	3	– 2	5	– 2	3	– 1	– 3	5	1	– 4	– 1	3	– 4	1	– 5	4
100	– 4	– 5	4	– 4	2	– 3	– 3	4	– 4	1	– 5	– 4	– 2	– 4	– 1	– 5

Задача 1.2. Знайти матриці, обернені до матриці

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{Vmatrix}$$

за даними табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Номер варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}
1	−3	4	−4	−2	−4	1	4	3	−1
2	−4	−4	−5	1	2	−2	2	−5	−5
3	5	4	5	1	1	−3	−1	2	1
4	3	1	−2	−2	3	5	−2	−2	−4
5	−4	−3	3	1	−3	1	3	−3	5
6	1	−1	4	3	−4	4	4	−2	−5
7	1	−3	2	1	−1	4	1	4	−3
8	1	−1	−4	2	−1	4	1	2	1
9	−2	3	1	3	5	−1	2	−4	−3
10	−4	−1	−3	1	2	1	2	−5	−4
11	3	−3	4	1	3	−2	3	4	2
12	3	1	5	5	−4	1	1	5	−2
13	1	1	−1	4	−4	−4	−3	5	4
14	−5	3	1	−3	−1	3	−2	1	−3
15	1	−5	−1	2	−5	−4	−1	−3	1
16	1	−5	5	−4	−5	−4	−2	−3	1
17	−3	1	3	2	−2	5	−5	1	−2
18	−5	1	4	1	1	5	−2	−5	−3
19	4	−2	−5	4	−1	−2	3	1	−1
20	2	1	5	3	−1	1	3	−5	4
21	1	4	3	1	−1	4	−1	−3	−5
22	1	1	−4	1	2	3	−5	5	−5

Продовження табл. 1.2

Номер варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}
23	2	−1	−5	−2	−2	5	1	−5	−2
24	2	3	3	−1	2	−3	2	1	−4
25	−3	−2	2	1	−5	−4	−3	2	−4
26	1	4	−3	3	3	−1	1	−5	2
27	1	2	−4	−4	−3	−3	3	−2	−1
28	1	−3	−1	4	4	−5	−1	−5	5
29	−5	3	3	1	−3	−3	−2	1	−5
30	−4	5	1	−1	−2	4	−1	2	−4
31	−4	2	−5	−2	−4	−3	3	1	1
32	1	−2	4	−4	3	4	4	−2	−1
33	−2	−1	−1	−2	1	1	−2	1	4
34	−3	−3	3	−1	−4	−3	−2	1	3
35	−3	−1	−3	1	2	2	1	4	−2
36	3	5	1	−4	−3	−3	−2	2	−1
37	1	2	4	−2	2	−4	−2	4	1
38	3	1	2	5	1	−1	−3	1	−4
39	−1	5	−2	5	1	−5	4	4	−3
40	4	−1	4	−5	3	−3	1	5	4
41	2	1	5	2	−3	−3	3	−5	−3
42	−1	1	3	−4	1	1	4	3	5
43	3	1	1	3	2	−2	5	−2	−5
44	1	1	−5	1	4	−1	1	−3	−2
45	2	−3	−5	5	1	2	3	1	−1
46	5	4	−2	−3	−2	4	5	1	−3
47	1	2	1	1	−3	−5	−5	5	−5
48	1	4	−4	1	3	4	−1	−3	−3
49	3	5	4	4	1	−5	3	−4	1
50	−5	−1	−4	1	−4	4	−4	−5	−1

Номер варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}
51	1	4	– 5	5	1	– 5	– 5	– 3	5
52	5	2	2	– 2	4	– 3	1	– 5	5
53	1	– 3	3	– 4	5	5	3	1	5
54	– 1	2	– 2	4	– 4	1	5	1	– 3
55	3	1	1	5	– 2	3	3	2	– 3
56	4	5	4	1	5	– 2	4	3	3
57	– 1	– 4	1	– 1	1	2	– 5	– 4	2
58	– 5	4	2	5	4	– 2	1	5	1
59	– 3	– 2	– 5	3	3	3	– 3	1	– 4
60	1	5	– 1	1	2	– 4	– 4	4	– 4
61	– 1	1	2	– 3	– 1	5	– 1	– 5	5
62	5	– 2	– 5	4	1	2	1	2	– 5
63	1	4	1	1	– 4	– 1	4	1	– 5
64	– 4	5	1	1	– 3	– 1	– 1	– 2	– 1
65	– 1	– 5	5	– 3	3	4	– 3	1	– 4
66	1	1	4	– 2	– 1	– 3	– 4	– 2	– 5
67	1	– 2	2	5	– 3	– 2	– 2	– 4	1
68	– 5	– 2	– 2	2	5	3	– 2	4	1
69	1	4	5	2	2	4	– 1	2	2
70	1	4	– 3	5	5	– 3	1	3	– 4
71	– 5	– 2	– 4	– 3	– 4	1	2	5	4
72	3	– 2	1	– 5	– 4	– 5	2	– 1	2
73	– 5	4	1	– 5	– 5	3	5	5	2
74	1	– 3	3	– 2	1	4	– 5	2	5
75	– 4	1	– 2	– 1	3	– 5	– 1	– 3	5
76	– 3	1	4	– 1	4	5	– 5	5	3
77	2	4	– 2	5	1	– 5	– 3	– 1	– 5
78	1	3	5	– 5	– 1	– 1	– 4	5	– 2

Номер варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}
79	2	2	2	– 2	3	– 4	1	5	– 3
80	1	1	– 3	– 2	3	5	4	– 4	– 2
81	– 3	5	5	– 1	1	3	4	– 5	5
82	1	4	2	1	– 2	– 2	3	3	5
83	4	1	1	– 5	5	– 3	3	1	3
84	– 5	3	3	1	– 4	– 4	1	1	4
85	– 3	– 5	– 3	3	6	– 3	– 5	– 2	1
86	– 1	– 3	– 4	1	1	3	3	– 2	3
87	4	– 2	1	– 2	– 2	2	1	5	– 1
88	4	4	3	4	1	– 4	– 2	1	1
89	1	5	1	– 1	1	– 4	1	– 5	– 5
90	– 1	3	1	1	2	– 3	1	– 1	– 3
91	3	5	4	– 3	2	– 5	– 1	2	1
92	2	1	– 5	– 5	– 1	1	– 4	2	4
93	2	– 1	– 4	4	3	– 2	– 1	5	1
94	– 4	4	4	– 2	1	3	– 1	4	– 4
95	3	– 4	– 4	2	1	4	– 4	– 4	– 5
96	– 2	2	– 4	– 3	5	1	– 2	1	3
97	– 5	4	4	– 5	1	– 3	1	3	– 5
98	– 4	1	1	5	– 3	2	3	– 3	3
99	– 4	– 3	3	3	2	1	– 5	– 5	– 1
100	– 5	– 5	1	– 5	– 1	– 4	2	2	1

Задача 1.3. Дослідити та розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + A_{14}x_4 = B_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + A_{24}x_4 = B_2 \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + A_{34}x_4 = B_3 \end{cases}$$

за даними табл. 1.3. Знайти загальний та базисний розв'язки.

Номер варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{34}	B_1	B_2	B_3
1	3	1	−3	6	1	−2	−1	2	4	6	−4	8	12	−3	30
2	4	12	3	−8	−1	−3	5	2	10	30	−4	−20	−1	6	−14
3	1	−1	−1	−2	2	−2	−2	2	9	−9	−9	0	1	8	27
4	−2	2	−2	4	5	−2	5	−10	−12	6	−12	24	−10	16	−42
5	−3	3	3	3	−2	2	−4	2	10	−10	2	−10	−15	−4	38
6	2	−2	−2	3	−1	1	1	2	−4	4	4	1	6	11	16
7	−1	−2	−1	2	5	2	5	−10	−13	−10	−13	26	−10	18	−66
8	1	1	5	−1	2	2	1	−2	1	1	−4	−1	18	0	−18
9	1	1	−2	−3	5	5	−10	2	−8	−8	16	−10	0	17	−34
10	−2	−4	4	4	−3	−1	6	6	2	−6	−4	−4	−8	−7	−2
11	−3	−6	2	−9	−1	−2	−3	−3	5	10	4	15	15	−6	−3
12	1	−1	3	−3	5	−5	15	−4	−11	11	−33	11	−7	−13	33
13	−4	−1	4	4	3	−2	−3	−3	2	−5	−2	−2	5	−12	−19
14	5	5	−1	15	1	1	−4	3	13	13	5	39	19	0	57
15	−4	−4	−12	−1	1	1	3	5	−9	−9	−27	−7	−10	12	−32
16	1	4	−1	1	1	1	−1	1	−2	−5	2	−2	0	3	−3
17	−3	−9	1	3	−2	−6	1	2	−2	−6	0	2	−5	−3	−4
18	4	−8	8	−2	5	−10	10	−4	2	−4	4	−4	−8	−7	2
19	1	1	2	3	−2	3	−4	−6	6	−4	12	18	−1	12	−26
20	−2	−4	5	2	4	8	2	−4	−6	−12	−9	6	16	−8	0
21	5	−5	5	1	5	−5	5	−2	20	−20	20	−5	9	−3	0
22	2	2	4	−4	−4	3	−8	8	−8	−1	−16	16	4	13	5
23	3	6	4	6	−1	−2	5	−2	7	14	22	14	0	−19	−38
24	2	2	−4	−4	−3	−3	6	−3	−8	−8	16	−2	−8	−15	−22
25	−2	−2	−6	−2	4	2	12	4	−10	−8	−30	−10	0	2	−2
26	−2	−4	−3	−6	−1	−2	−4	−3	0	0	−5	0	−13	−14	−15
27	−3	−9	6	1	5	15	−10	−2	−4	−12	8	1	−5	8	−7
28	−2	4	2	−2	−4	3	4	−4	−8	1	8	−8	−10	−10	−10
29	−3	−9	2	−9	5	15	−2	15	11	33	−6	33	−13	19	45

Номер варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{34}	B_1	B_2	B_3
30	−3	−6	−9	5	−4	−8	−12	−2	14	28	42	−6	−9	14	−10
31	−1	−3	−1	−2	5	4	5	10	8	2	8	16	10	−17	−14
32	3	3	−1	−3	1	1	4	−1	−5	−5	6	5	−4	3	11
33	−2	−6	−4	5	5	15	10	5	−14	−42	−28	0	−8	−15	14
34	−1	2	1	−1	−3	−3	3	−3	−6	3	6	−6	7	−6	15
35	1	3	−2	−1	1	3	3	−1	2	6	11	−2	6	1	−3
36	3	3	6	1	2	2	4	−2	15	15	30	−3	−8	−8	−48
37	1	1	−1	−1	2	−4	−2	−2	5	−7	−5	−5	−1	−8	−17
38	−4	−4	−4	−4	−1	−1	2	−1	−6	−6	−12	−6	−28	2	−60
39	−4	−8	−8	−2	3	6	6	5	5	10	10	13	−8	−1	−11
40	5	2	15	−10	−4	2	−12	8	−3	6	−9	6	−17	10	3
41	−4	−4	−4	−8	1	1	−1	2	−7	−7	−9	−14	8	−4	12
42	2	4	4	4	3	6	6	3	7	14	14	5	−6	0	6
43	4	−2	−12	−4	−3	−2	−9	3	2	−8	6	−2	4	−10	−12
44	−1	1	4	−1	3	−3	4	3	−4	4	−16	−4	7	11	−36
45	2	6	4	4	2	6	4	−3	8	24	16	−5	−8	13	31
46	−1	−3	−2	−2	3	−1	6	6	11	3	22	22	5	−5	−25
47	−2	2	2	−4	−1	1	4	−2	0	0	−6	0	−4	−11	18
48	−1	−1	−3	−3	−1	−1	−3	3	−2	−2	−6	12	−4	2	10
49	−1	2	−2	−2	1	3	2	2	0	5	0	0	3	2	5
50	−2	−2	−1	4	5	5	1	−10	9	9	3	−18	−2	8	12
51	3	−6	9	−1	3	−6	9	−2	3	−6	9	0	3	0	6
52	4	4	8	4	−1	−2	−2	−1	9	10	18	9	−4	4	−12
53	−4	−4	−2	4	5	5	−1	−5	14	14	0	−14	6	−11	−28
54	1	−2	−1	2	−4	8	4	−4	−1	2	1	2	5	−8	7
55	−1	−4	−1	−3	−2	−3	−2	−6	0	5	0	0	−14	−8	20
56	2	−4	2	4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	16	22
57	4	12	4	−2	5	15	5	5	[illegible]	[illegible]	18	13	−12	0	−12

Продовження табл. 1.3

Номер варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{34}	B_1	B_2	B_3
58	−1	−4	1	−3	1	−4	−1	3	−3	4	3	−9	−6	−2	−2
59	3	−3	−1	−3	5	−5	−2	−5	8	−8	−3	−8	7	12	19
60	5	10	5	5	−2	−4	−2	4	1	2	1	13	10	−16	−22
61	−3	2	6	−3	3	3	−6	3	12	7	−24	12	5	−15	−50
62	2	−2	−2	−2	−4	4	5	4	−8	8	9	8	−4	9	17
63	−1	2	2	1	4	−8	−8	1	−7	14	14	−3	5	−5	5
64	−4	2	−8	−12	4	1	8	12	0	−3	0	0	16	−10	−6
65	2	−4	−1	2	−2	4	4	−2	2	−4	−7	2	7	−16	25
66	3	9	−3	5	−2	−6	2	−2	7	21	−7	9	17	−10	37
67	4	−4	−4	12	3	3	−3	9	10	2	−10	30	−12	−3	−18
68	−4	−4	−3	−12	−3	−3	−4	−9	−6	−6	−1	−18	−8	−13	2
69	−3	−9	3	5	4	12	−4	4	−17	−51	17	7	14	24	−6
70	5	1	10	5	5	3	10	5	0	−2	0	0	−16	−18	2
71	−3	−6	5	−6	−2	−4	−4	−4	−7	−14	19	−14	6	−18	36
72	5	5	10	5	1	1	2	4	11	11	22	14	10	−4	16
73	5	4	10	5	3	3	6	3	18	15	36	18	11	9	42
74	5	15	3	5	−1	−3	−4	−1	17	51	17	17	24	−15	102
75	4	12	12	−2	−2	−6	−6	−4	−2	−6	−6	6	6	2	−8
76	−3	2	6	3	1	4	−2	−1	6	10	−12	−6	9	11	24
77	−1	−1	3	−1	4	4	2	4	−6	−6	−10	−6	12	−6	−12
78	−1	1	2	4	−4	4	8	4	2	−2	−4	4	−5	4	−14
79	2	2	−4	6	−3	5	6	−9	−10	6	20	−30	0	8	16
80	−2	4	−2	−4	−1	2	3	−2	3	−6	7	6	−4	−6	2
81	1	−2	3	2	−1	2	−3	2	−1	2	−3	10	−8	−4	−28
82	5	−4	15	15	3	−4	9	9	4	−8	12	12	18	14	24
83	2	−2	4	−4	−3	3	−3	6	−2	2	2	4	0	−6	−12
84	−4	8	−4	4	4	−8	4	−2	0	0	0	−2	12	−4	−8
85	2	−2	−4	6	−1	−4	2	−3	−1	6	2	−3	2	−11	9
86	−4	−12	3	−8	4	12	−1	8	−8	−24	8	−16	−2	−2	−8

Закінчення табл. 1.3

Номер варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{34}	B_1	B_2	B_3
87	3	−3	−3	2	−1	1	1	5	8	−8	−8	11	6	−19	−1
88	4	3	8	−8	−1	1	−2	2	−11	−3	−22	22	−5	−4	−2
89	5	−10	−4	15	2	−4	5	6	−9	18	−6	−27	7	16	−39
90	5	15	−5	2	−4	−12	4	−4	−2	−6	2	−8	−12	12	12
91	−2	−1	−2	2	4	4	4	−4	6	5	6	−6	5	−16	−21
92	−1	1	2	2	3	−3	3	−6	4	−4	1	−8	10	6	−4
93	5	10	−10	−2	−2	−4	4	3	11	22	−22	0	−13	3	−33
94	1	−2	3	−2	−4	−2	−12	8	−13	−4	−39	26	−7	8	31
95	−4	−8	1	8	4	8	4	−8	16	32	6	−32	−1	16	34
96	2	−2	2	3	5	−5	5	4	−8	8	−8	−5	12	23	−34
97	1	1	−1	−2	4	5	−4	−8	11	13	−11	−22	2	7	20
98	1	3	3	−1	−1	−3	−2	1	−2	−6	−5	2	−8	6	14
99	5	−5	10	−1	−2	2	−4	2	−9	9	−18	5	−19	14	47
100	5	−1	−5	15	1	3	1	−3	−8	10	8	−24	8	4	−4

Задача 1.4. Розв'язати системи рівнянь

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 = B_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 = B_2 \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_3 + A_{33}x_3 = B_3 \end{cases}$$

за даними табл. 1.4.

Таблиця 1.4

Номер варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	B_1	B_2	B_3
1	−3	−2	4	4	−4	3	−4	1	−1	−25	−20	3
2	−3	4	−2	5	−3	−5	4	−2	1	22	−8	−21
3	4	1	2	1	−3	1	4	3	−2	−19	−10	−1
4	5	4	2	−4	−3	1	−5	−1	−5	9	−7	−6
5	3	1	5	2	1	3	4	−1	−4	−6	−3	−15
6	−3	−1	1	1	1	−4	−5	1	−3	−13	4	−13

Номер варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	B_1	B_2	B_3
7	1	3	2	1	– 1	– 1	2	– 4	4	– 1	– 6	8
8	2	2	1	2	– 3	– 5	3	4	5	– 1	22	– 13
9	2	– 1	2	– 5	– 3	– 5	1	– 2	3	7	– 23	10
10	– 3	– 2	1	– 5	2	1	– 2	– 2	– 3	– 10	– 8	– 19
11	5	5	1	– 2	1	1	4	– 3	1	23	10	– 16
12	4	– 1	3	1	– 4	4	2	5	4	– 8	13	– 26
13	– 3	5	2	2	– 1	– 5	– 5	– 3	1	– 19	13	7
14	1	3	– 5	5	– 4	– 5	1	– 4	– 3	0	– 19	– 7
15	2	– 5	1	– 2	4	1	5	– 2	5	11	– 2	27
16	2	2	4	– 2	– 3	– 4	1	2	– 2	4	– 9	15
17	1	– 4	– 5	– 2	– 1	4	2	3	3	6	3	5
18	– 2	– 5	1	– 5	1	3	4	2	– 3	20	– 4	– 8
19	4	– 5	1	1	1	– 5	– 4	2	1	– 3	– 6	5
20	– 3	2	3	3	3	3	5	– 5	1	6	– 9	7
21	2	– 1	2	3	2	1	3	– 3	– 4	– 1	6	11
22	– 4	5	4	– 2	1	5	1	– 2	– 4	– 20	– 22	17
23	4	1	– 5	– 3	– 1	2	1	3	– 4	– 27	17	– 15
24	– 3	5	– 3	1	1	4	– 2	– 4	4	4	27	– 4
25	1	– 5	5	2	– 5	1	– 2	3	– 3	10	– 2	– 6
26	1	– 3	– 4	– 4	4	2	– 5	1	5	– 15	2	2
27	– 2	1	– 2	3	2	– 4	1	– 5	– 3	– 5	25	– 7
28	3	– 1	1	1	4	3	– 3	– 3	2	– 9	3	– 2
29	– 2	– 1	1	1	– 1	1	4	– 5	– 3	– 7	8	19
30	– 4	1	– 2	– 3	– 2	2	– 3	– 3	2	11	13	16
31	4	– 3	2	– 2	5	3	– 4	1	5	– 1	– 11	– 11
32	– 3	– 4	4	1	5	4	2	2	3	– 2	15	12
33	1	2	3	5	– 3	1	1	– 5	2	11	1	– 5
34	– 5	2	– 2	– 2	1	– 2	– 5	5	– 5	– 10	– 7	– 25
35	– 5	1	– 1	3	5	4	– 3	4	5	6	– 16	– 11

Номер варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	B_1	B_2	B_3
36	– 4	3	– 5	– 2	– 4	4	1	5	3	– 14	– 4	26
37	1	3	3	1	5	– 2	3	3	5	1	– 6	5
38	2	4	3	– 3	– 2	1	1	– 2	1	33	– 6	– 2
39	– 1	– 2	4	2	5	3	– 3	– 1	1	26	1	13
40	3	2	– 3	– 1	1	– 4	5	4	2	– 5	– 10	14
41	1	1	– 5	2	– 3	5	1	– 5	– 5	7	– 11	– 23
42	5	2	– 2	– 5	1	– 3	– 3	1	2	4	– 13	– 9
43	5	1	– 4	4	– 5	3	– 5	– 5	1	5	40	– 2
44	– 5	– 4	– 3	– 3	2	5	1	– 3	– 3	1	25	– 19
45	– 5	– 5	5	2	5	1	– 2	2	4	40	– 16	12
46	2	– 2	– 2	– 5	1	– 4	– 1	– 1	2	8	– 40	8
47	1	– 1	4	5	2	– 4	– 1	1	1	– 13	18	3
48	1	– 3	– 2	4	2	3	– 1	5	– 4	– 5	16	– 5
49	4	5	5	3	4	– 2	1	4	– 1	55	31	23
50	1	5	– 5	1	1	5	4	– 1	– 5	– 28	8	2
51	5	2	– 2	1	5	– 3	3	– 3	– 2	18	– 1	15
52	– 4	5	1	– 3	– 4	5	– 2	1	– 1	– 2	– 29	12
53	– 5	4	3	1	– 5	4	– 1	1	– 1	9	38	– 7
54	4	1	1	– 3	2	– 5	2	– 5	3	– 13	3	13
55	– 2	1	– 1	2	5	4	– 2	4	– 2	0	0	– 10
56	– 3	– 2	2	– 1	– 1	– 2	– 1	– 3	1	12	1	2
57	– 3	– 1	1	– 3	– 5	4	5	– 2	4	9	31	11
58	1	– 5	1	– 5	5	– 2	– 2	– 3	– 4	11	– 24	10
59	2	3	– 2	4	4	1	– 2	– 5	2	2	11	– 10
60	1	2	– 1	4	2	2	5	4	2	9	0	6
61	– 2	2	– 1	– 1	5	5	4	– 2	1	– 2	– 16	4
62	1	– 4	5	– 4	3	4	– 3	3	– 5	11	– 7	– 14
63	– 4	4	– 4	– 1	4	5	– 5	– 1	1	– 40	20	– 20

Номер варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	B_1	B_2	B_3
64	3	1	2	– 1	1	– 2	– 5	– 3	– 1	– 8	4	11
65	– 3	– 3	1	– 5	3	4	3	5	– 4	– 5	– 7	– 9
66	– 2	1	– 1	– 5	2	4	5	4	5	1	– 22	– 32
67	1	– 5	– 1	1	3	4	3	– 3	– 2	– 16	28	– 8
68	– 4	3	– 1	5	1	– 1	– 2	1	2	– 7	32	– 15
69	2	– 2	– 3	5	– 4	2	1	4	2	2	3	– 9
70	– 4	– 3	5	– 2	– 1	– 3	– 1	4	1	– 36	– 10	15
71	– 2	5	– 4	1	1	2	– 2	– 3	2	31	2	– 15
72	5	2	4	– 5	3	1	5	1	1	– 14	9	– 11
73	– 4	– 2	3	1	1	– 4	2	– 5	– 1	– 19	2	4
74	3	– 5	– 5	1	– 2	– 3	– 3	3	– 4	– 9	– 3	10
75	5	– 3	3	1	– 1	– 3	– 2	– 2	– 5	– 30	– 4	3
76	– 2	5	1	2	– 1	– 1	4	4	– 1	– 13	1	– 20
77	2	4	1	4	– 3	4	1	– 2	– 3	1	7	15
78	– 4	– 5	5	1	1	2	3	2	– 1	35	8	– 9
79	3	– 3	– 1	5	2	2	4	– 5	1	– 4	– 10	– 2
80	1	– 2	3	2	5	– 2	2	– 5	– 3	3	– 5	27
81	2	– 4	– 5	2	– 5	– 5	1	4	2	– 1	3	– 11
82	4	3	– 4	– 2	3	2	– 4	– 4	1	38	– 10	– 28
83	– 5	– 4	– 4	4	3	1	3	– 2	4	16	– 12	8
84	– 3	– 5	– 5	1	4	2	3	4	1	– 13	5	5
85	– 2	– 2	1	5	4	1	1	2	– 5	0	2	– 2
86	– 5	– 3	2	– 5	3	1	– 1	– 3	1	29	13	13
87	– 4	2	1	4	– 5	1	– 4	4	– 1	8	– 12	8
88	– 3	1	– 3	4	– 5	1	– 4	– 2	1	0	– 26	15
89	4	– 1	5	1	– 3	2	4	– 4	1	– 2	– 2	6
90	– 5	4	– 1	2	4	– 1	4	– 5	1	8	22	– 14
91	4	5	1	2	4	– 5	– 4	1	– 5	33	32	– 7

Номер варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	B_1	B_2	B_3
92	1	1	2	– 5	2	3	2	2	– 5	11	19	– 5
93	– 5	– 2	– 4	5	4	1	3	4	– 5	– 26	17	– 13
94	– 4	1	5	– 3	5	1	1	– 5	1	– 30	– 10	– 4
95	3	– 3	– 5	1	3	1	4	– 1	3	– 7	11	16
96	2	– 4	5	5	– 2	– 3	5	1	– 4	28	0	– 7
97	– 3	1	2	2	5	– 3	– 1	– 4	3	– 10	23	– 19
98	3	– 5	– 2	1	– 5	3	– 3	– 2	3	16	1	– 5
99	2	– 4	1	– 4	– 2	5	– 1	– 1	– 2	– 15	– 27	– 6
100	– 3	2	1	4	2	– 1	– 3	2	2	18	– 2	14

Задача 1.5. Розкласти вектор $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ за векторами базису $\overline{a}_1 = (A_{11}, A_{12}, A_{13})$, $\overline{a}_2 = (A_{21}, A_{22}, A_{23})$, $\overline{a}_3 = (A_{31}, A_{32}, A_{33})$.

Задачу розв'язати методом Жордана-Гаусса за даними табл. 1.5.

Таблиця 1.5

Номер варіанта	x_1	x_2	x_3	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}
1	– 25	– 20	3	– 3	4	– 4	– 2	– 4	1	4	3	– 1
2	22	– 8	– 21	– 3	5	4	4	– 3	– 2	– 2	– 5	1
3	– 19	– 10	– 1	4	1	4	1	– 3	3	2	1	– 2
4	9	– 7	– 6	5	– 4	– 5	4	– 3	– 1	2	1	– 5
5	– 6	– 3	– 15	3	2	4	1	1	– 1	5	3	– 4
6	– 13	4	– 13	– 3	1	– 5	– 1	1	1	1	– 4	– 3
7	– 1	– 6	8	1	1	2	3	– 1	– 4	2	– 1	4
8	– 1	22	– 13	2	2	3	2	– 3	4	1	– 5	5
9	7	– 23	10	2	– 5	1	– 1	– 3	– 2	2	– 5	3
10	– 10	– 8	– 19	– 3	– 5	– 2	– 2	2	– 2	1	1	– 3
11	23	10	– 16	5	– 2	4	5	1	– 3	1	1	1
12	– 8	13	– 26	4	1	2	– 1	– 4	5	3	4	4
13	– 19	13	7	– 3	2	– 5	5	– 1	– 3	2	– 5	1

Номер варіанта	x_1	x_2	x_3	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}
14	0	– 19	– 7	1	5	1	3	– 4	– 4	– 5	– 5	– 3
15	11	– 2	27	2	– 2	5	– 5	4	– 2	1	1	5
16	4	– 9	15	2	– 2	1	2	– 3	2	4	– 4	– 2
17	6	3	5	1	– 2	2	– 4	– 1	3	– 5	4	3
18	20	– 4	– 8	– 2	– 5	4	– 5	1	2	1	3	– 3
19	– 3	– 6	5	4	1	– 4	– 5	1	2	1	– 5	1
20	6	– 9	7	– 3	3	5	2	3	– 5	3	3	1
21	– 1	6	11	2	3	3	– 1	2	– 3	2	1	– 4
22	– 20	– 22	17	– 4	– 2	1	5	1	– 2	4	5	– 4
23	– 27	17	– 15	4	– 3	1	1	– 1	3	– 5	2	– 4
24	4	– 27	– 4	– 3	1	– 2	5	1	– 4	– 3	4	4
25	10	– 2	– 6	1	2	– 2	– 5	– 5	3	5	1	– 3
26	– 15	2	2	1	– 4	– 5	– 3	4	1	– 4	2	5
27	– 5	25	– 7	– 2	3	1	1	2	– 5	– 2	– 4	– 3
28	– 9	3	– 2	3	1	– 3	– 1	4	– 3	1	3	2
29	– 7	8	19	– 2	1	4	– 1	– 1	– 5	1	1	– 3
30	11	13	16	– 4	– 3	– 3	1	– 2	– 3	– 2	2	2
31	– 1	– 11	– 11	4	– 2	– 4	– 3	5	1	2	3	5
32	– 2	15	12	– 3	1	2	– 4	5	2	4	4	3
33	11	1	– 5	1	5	1	2	– 3	– 5	3	1	2
34	– 10	– 7	– 25	– 5	– 2	– 5	2	1	5	– 2	– 2	– 5
35	6	– 16	– 11	– 5	3	– 3	1	5	4	– 1	4	5
36	– 14	– 4	26	– 4	– 2	1	3	– 4	5	– 5	4	3
37	1	– 6	5	1	1	3	3	5	3	3	– 2	5
38	33	– 6	– 2	2	– 3	1	4	– 2	– 2	3	1	1
39	26	1	13	– 1	2	– 3	– 2	5	– 1	4	3	1
40	– 5	– 10	14	3	– 1	5	2	1	4	– 3	– 4	2
41	7	– 11	– 23	1	2	1	1	– 3	– 5	– 5	5	– 5
42	4	– 13	– 9	5	– 5	– 3	2	1	1	– 2	– 3	2

Номер варіанта	x_1	x_2	x_3	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}
43	5	40	– 2	5	4	– 5	1	– 5	– 5	– 4	3	1
44	1	25	– 19	– 5	– 3	1	– 4	2	– 3	– 3	5	– 3
45	40	– 16	12	– 5	2	– 2	– 5	5	2	5	1	4
46	8	– 40	8	2	– 5	– 1	– 2	1	– 1	– 2	– 4	2
47	– 13	18	3	1	5	– 1	– 1	2	1	4	– 4	1
48	– 5	16	– 5	1	4	– 1	– 3	2	5	– 2	3	– 4
49	55	31	23	4	3	1	5	4	4	5	– 2	– 1
50	– 28	8	2	1	1	4	5	1	– 1	– 5	5	– 5
51	18	– 1	15	5	1	3	2	5	– 3	– 2	– 3	– 2
52	– 2	– 29	12	– 4	– 3	2	5	– 4	1	1	5	– 1
53	9	38	– 7	– 5	1	– 1	4	– 5	1	3	4	– 1
54	– 13	3	13	4	– 3	2	1	2	– 5	1	– 5	3
55	0	0	– 10	– 2	2	– 2	1	5	4	– 1	4	– 2
56	12	1	2	– 3	– 1	– 1	– 2	– 1	– 3	2	– 2	1
57	9	31	11	– 3	– 3	5	– 1	– 5	– 2	1	4	4
58	11	– 24	10	1	– 5	– 2	– 5	5	– 3	1	– 2	– 4
59	2	11	– 10	2	4	– 2	3	4	– 5	– 2	1	2
60	9	0	6	1	4	5	2	2	4	– 1	2	2
61	– 2	– 16	4	– 2	– 1	4	2	5	– 2	– 1	5	1
62	11	– 7	– 14	1	– 4	– 3	– 4	3	3	5	4	– 5
63	– 40	20	– 20	– 4	– 1	– 5	4	4	– 1	– 4	5	1
64	– 8	4	11	3	– 1	– 5	1	1	– 3	2	– 2	– 1
65	– 5	– 7	– 9	– 3	– 5	3	– 3	3	5	1	4	– 4
66	1	– 22	– 32	– 2	– 5	5	1	2	4	– 1	4	5
67	– 16	28	– 8	1	1	3	– 5	3	– 3	– 1	4	– 2
68	– 7	32	– 15	– 4	5	– 2	3	1	1	– 1	– 1	2
69	2	3	– 9	2	5	1	– 2	– 4	4	– 3	2	2
70	– 36	– 10	15	– 4	– 2	– 1	– 3	– 1	4	5	– 3	1
71	31	2	– 15	– 2	1	– 2	5	1	– 3	– 4	2	2

Закінчення табл. 1.5

Номер варіанта	x_1	x_2	x_3	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}
72	– 14	9	– 11	5	– 5	5	2	3	1	4	1	1
73	– 19	2	4	– 4	1	2	– 2	1	– 5	3	– 4	– 1
74	– 9	– 3	10	3	1	– 3	– 5	– 2	3	– 5	– 3	– 4
75	– 30	– 4	3	5	1	– 2	– 3	– 1	– 2	3	– 3	– 5
76	– 13	1	– 20	– 2	2	4	5	– 1	4	1	– 1	– 1
77	1	7	15	2	4	1	4	– 3	– 2	1	4	– 3
78	35	8	– 9	– 4	1	3	– 5	1	2	5	2	– 1
79	– 4	– 10	– 2	3	5	4	– 3	2	– 5	– 1	2	1
80	3	– 5	27	1	2	2	– 2	5	– 5	3	– 2	– 3
81	– 1	3	– 11	2	2	1	– 4	– 5	4	– 5	– 5	2
82	38	– 10	– 28	4	– 2	– 4	3	3	– 4	– 4	2	1
83	16	– 12	8	– 5	4	3	– 4	3	– 2	– 4	1	4
84	– 13	5	5	– 3	1	3	– 5	4	4	– 5	2	1
85	0	2	– 2	– 2	5	1	– 2	4	2	1	1	– 5
86	29	13	13	– 5	– 5	– 1	– 3	3	– 3	2	1	1
87	8	– 12	8	– 4	4	– 4	2	– 5	4	1	1	– 1
88	0	– 26	15	– 3	4	– 4	1	– 5	– 2	– 3	1	1
89	– 2	– 2	6	4	1	4	– 1	– 3	– 4	5	2	1
90	8	22	– 14	– 5	2	4	4	4	– 5	– 1	– 1	1
91	33	32	– 7	4	2	– 4	5	4	1	1	– 5	– 5
92	11	19	– 5	1	– 5	2	1	2	2	2	3	– 5
93	– 26	17	– 13	– 5	5	3	– 2	4	4	– 4	1	– 5
94	– 30	– 10	– 4	– 4	– 3	1	1	5	– 5	5	1	1
95	– 7	11	16	3	1	4	– 3	3	– 1	– 5	1	3
96	28	0	– 7	2	5	5	– 4	– 2	1	5	– 3	– 4
97	– 10	23	– 19	– 3	2	– 1	1	5	– 4	2	– 3	3
98	16	1	– 5	3	1	– 3	– 5	– 5	– 2	– 2	3	3
99	– 15	– 27	– 6	2	– 4	– 1	– 4	– 2	– 1	1	5	– 2
100	18	– 2	14	– 3	4	– 3	2	2	2	1	– 1	2

Задача 1.6. Знайти власні числа і цілочислові власні вектори матриці

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{Vmatrix}$$

за даними табл. 1.6.

Таблиця 1.6

Номер варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}
1	2	1	1	1	4	1	1	1	2
2	2	1	1	1	2	1	1	1	4
3	3	1	1	1	5	1	1	1	3
4	3	1	1	1	3	1	1	1	5
5	4	1	1	1	6	1	1	1	4
6	4	1	1	1	4	1	1	1	6
7	5	1	1	1	7	1	1	1	5
8	5	1	1	1	5	1	1	1	7
9	6	1	1	1	8	1	1	1	6
10	6	1	1	1	6	1	1	1	8
11	7	1	1	1	9	1	1	1	7
12	7	1	1	1	7	1	1	1	9
13	8	1	1	1	10	1	1	1	8
14	8	1	1	1	8	1	1	1	10
15	9	1	1	1	11	1	1	1	9
16	9	1	1	1	9	1	1	1	11
17	10	1	1	1	12	1	1	1	10
18	10	1	1	1	10	1	1	1	12
19	11	1	1	1	13	1	1	1	11
20	11	1	1	1	11	1	1	1	13
21	12	1	1	1	14	1	1	1	12
22	12	1	1	1	12	1	1	1	14

Номер варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}
23	13	1	1	1	15	1	1	1	13
24	13	1	1	1	13	1	1	1	15
25	14	1	1	1	16	1	1	1	14
26	14	1	1	1	14	1	1	1	16
27	15	1	1	1	17	1	1	1	15
28	15	1	1	1	15	1	1	1	17
29	2	1	1	1	10	5	1	5	4
30	2	1	1	1	4	5	1	5	10
31	3	1	1	1	11	5	1	5	5
32	3	1	1	1	5	5	1	5	11
33	4	1	1	1	12	5	1	5	6
34	4	1	1	1	6	5	1	5	12
35	5	1	1	1	13	5	1	5	7
36	5	1	1	1	7	5	1	5	13
37	6	1	1	1	14	5	1	5	8
38	6	1	1	1	8	5	1	5	14
39	7	1	1	1	15	5	1	5	9
40	7	1	1	1	9	5	1	5	15
41	8	1	1	1	16	5	1	5	10
42	8	1	1	1	10	5	1	5	16
43	9	1	1	1	17	5	1	5	11
44	9	1	1	1	11	5	1	5	17
45	10	1	1	1	18	5	1	5	12
46	10	1	1	1	12	5	1	5	18
47	11	1	1	1	19	5	1	5	13
48	11	1	1	1	13	5	1	5	19
49	12	1	1	1	20	5	1	5	14
50	12	1	1	1	14	5	1	5	20

Номер варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}
51	13	1	1	1	21	5	1	5	15
52	13	1	1	1	15	5	1	5	21
53	14	1	1	1	22	5	1	5	16
54	14	1	1	1	16	5	1	5	22
55	15	1	1	1	23	5	1	5	17
56	15	1	1	1	17	5	1	5	23
57	2	1	1	1	20	13	1	13	10
58	2	1	1	1	10	13	1	13	20
59	3	1	1	1	21	13	1	13	11
60	3	1	1	1	11	13	1	13	21
61	4	1	1	1	22	13	1	13	12
62	4	1	1	1	12	13	1	13	22
63	5	1	1	1	23	13	1	13	13
64	5	1	1	1	13	13	1	13	23
65	6	1	1	1	24	13	1	13	14
66	6	1	1	1	14	13	1	13	24
67	7	1	1	1	25	13	1	13	15
68	7	1	1	1	15	13	1	13	25
69	8	1	1	1	26	13	1	13	16
70	8	1	1	1	16	13	1	13	26
71	9	1	1	1	27	13	1	13	17
72	9	1	1	1	17	13	1	13	27
73	10	1	1	1	28	13	1	13	18
74	10	1	1	1	18	13	1	13	28
75	11	1	1	1	29	13	1	13	19
76	11	1	1	1	19	13	1	13	29
77	12	1	1	1	30	13	1	13	20
78	12	1	1	1	20	13	1	13	30

Номер варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}
79	13	1	1	1	31	13	1	13	21
80	13	1	1	1	21	13	1	13	31
81	14	1	1	1	32	13	1	13	22
82	14	1	1	1	22	13	1	13	32
83	15	1	1	1	33	13	1	13	23
84	15	1	1	1	23	13	1	13	33
85	2	1	1	1	34	25	1	25	20
86	2	1	1	1	20	25	1	25	34
87	3	1	1	1	35	25	1	25	21
88	3	1	1	1	21	25	1	25	35
89	4	1	1	1	36	25	1	25	22
90	4	1	1	1	22	25	1	25	36
91	5	1	1	1	37	25	1	25	23
92	5	1	1	1	23	25	1	25	37
93	6	1	1	1	38	25	1	25	24
94	6	1	1	1	24	25	1	25	38
95	7	1	1	1	39	25	1	25	25
96	7	1	1	1	25	25	1	25	39
97	8	1	1	1	40	25	1	25	26
98	8	1	1	1	26	25	1	25	40
99	9	1	1	1	41	25	1	25	27
100	9	1	1	1	27	25	1	25	41

Задача 1.7. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

за даними табл. 1.7.

Таблиця 1.7

Номер варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
1	5	−5	−1	9	1	6	2	7	−4	3	−1	−2	3	6	−1	25
2	−3	3	−15	12	−1	2	−7	8	2	−1	8	−4	−1	−5	7	−20
3	3	−2	4	−11	2	2	−1	14	−3	3	−6	21	−3	3	5	−23
4	1	−5	13	−20	−2	4	−14	16	1	1	1	4	−2	0	−6	0
5	5	4	7	16	5	−7	−6	7	4	4	6	14	3	0	2	7
6	−2	1	−8	4	1	−1	5	−4	1	3	−3	12	3	5	−1	20
7	−4	−1	3	−17	−1	6	−7	16	2	−6	2	−8	5	7	−4	33
8	−1	−3	3	−12	−2	1	−8	4	−2	4	−14	16	0	−1	2	−4
9	2	−6	−7	1	4	5	0	22	0	7	5	9	−1	6	−5	14
10	0	3	−6	12	2	−5	16	−20	−3	0	−9	0	−3	5	−19	20
11	2	0	−5	11	−1	2	7	−6	−1	−1	5	−10	3	7	5	18
12	0	−1	2	−4	2	5	−4	20	2	2	2	8	−1	5	−13	20
13	−3	−4	5	−22	−2	−6	2	−20	−3	1	6	−13	0	5	3	7
14	−3	−5	1	−20	3	−5	19	−20	0	1	−2	4	0	1	−2	4
15	4	5	−7	29	−3	−1	−5	−6	−3	−2	−2	−11	−2	−4	−7	−7
16	−3	5	−19	20	−2	4	−14	16	1	3	−3	12	0	−5	10	−20
17	−1	−4	4	−15	−3	4	0	−1	1	2	−4	11	−2	1	2	−6
18	−2	3	−12	12	−3	4	−17	16	−3	3	−15	12	2	−1	8	−4
19	−5	3	−1	−8	−3	−7	4	−27	0	−3	−7	1	2	7	5	15
20	−2	3	−12	12	3	−3	15	−12	0	5	−10	20	2	5	−4	20
21	−5	−7	1	−30	−4	3	7	−13	2	3	−7	19	4	4	3	17
22	−1	1	−5	4	3	3	3	12	2	4	−2	16	1	1	1	4
23	3	5	−6	25	−4	−6	2	−26	−1	−3	−1	−8	5	−1	6	7
24	−1	−5	7	−20	0	−2	4	−8	1	0	3	0	−3	−1	−7	−4
25	0	−4	4	−12	−4	1	−6	−4	5	−4	3	4	−5	−6	−1	26
26	2	1	4	4	2	−5	16	−20	2	−2	10	−8	3	0	9	0
27	1	0	−3	6	0	−5	−1	−9	2	−3	4	−4	−1	−4	−7	−4
28	0	3	−6	12	0	−1	2	−4	0	1	−2	4	−1	1	−5	4

Номер варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
29	4	-7	1	-3	-5	1	-4	-9	0	-4	6	-14	-1	1	-2	1
30	1	-5	13	-20	3	4	1	16	1	-4	11	-16	2	0	6	0
31	-1	5	-6	13	-5	-4	0	-23	5	4	0	23	1	6	5	10
32	0	1	-2	4	0	-3	6	-12	2	4	-2	16	-3	2	-13	8
33	-2	-1	-5	-3	-1	0	-3	0	1	-4	0	-5	3	4	3	14
34	0	-1	2	-4	3	2	5	8	-2	1	-8	4	-2	0	-6	0
35	3	-7	0	-5	0	-6	-2	-10	4	-5	-5	7	-4	6	1	-1
36	3	-5	19	-20	0	2	-4	8	1	0	3	0	-1	2	-7	8
37	4	3	0	18	-2	2	5	-7	1	5	-5	18	0	-3	-7	1
38	2	2	2	8	2	-5	16	-20	3	1	7	4	0	1	-2	4
39	2	-5	4	-8	-3	1	-4	-3	2	5	-7	23	-2	6	0	6
40	2	-2	10	-8	-3	0	-9	0	1	1	1	4	-3	4	-17	16
41	-3	-3	2	-17	-3	1	-2	-5	0	0	-2	2	-3	0	5	-14
42	0	-4	8	-16	-2	-3	0	-12	-3	1	-11	4	0	-2	4	-8
43	-1	-6	-7	-8	-5	1	-1	-12	-1	0	-5	2	-5	3	6	-15
44	0	-3	6	-12	0	4	-8	16	2	1	4	4	0	-5	10	-20
45	-5	-6	-2	-25	3	0	0	9	0	-4	1	-9	5	4	0	23
46	0	2	-4	8	1	5	-7	20	-1	1	-5	4	3	-2	13	-8
47	-3	1	-7	0	-5	7	7	-8	1	-4	-3	-2	1	-7	1	-12
48	3	0	9	0	3	-2	13	-8	0	1	-2	4	-1	-4	5	-16
49	5	6	-5	32	5	0	6	9	-5	-7	6	-35	2	1	-7	15
50	-1	-2	1	-8	-2	5	-16	20	2	-1	8	-4	2	2	2	8
51	5	1	-6	23	-2	7	-5	13	0	-4	-4	-4	5	2	6	13
52	2	-3	12	-12	-2	-5	4	-20	-1	1	-5	4	-2	5	-16	20
53	-3	1	2	-9	0	7	4	10	0	-7	1	-15	-4	-4	0	-20
54	1	-1	5	-4	-1	-1	-1	-4	0	1	-2	4	0	1	-2	4
55	-1	1	5	-6	5	7	-3	32	-5	3	-5	-4	-3	-5	2	-21

Номер варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
56	-3	2	-13	8	1	0	3	0	-1	2	-7	8	-1	-2	1	-8
57	-4	-1	1	-15	-3	6	-3	6	5	7	-1	30	3	7	-4	27
58	-3	1	-11	4	-2	1	-8	4	0	2	-4	8	0	-5	10	-20
59	2	-1	4	0	2	6	2	16	4	3	6	12	-2	0	6	-12
60	-1	-5	7	-20	0	3	-6	12	3	-2	13	-8	2	1	4	4
61	-2	-2	-7	-3	3	-6	7	-10	-3	-6	3	-24	-5	-5	5	-30
62	-1	-4	5	-16	-2	-4	2	-16	1	2	-1	8	1	4	-5	16
63	-2	-4	0	-14	0	-5	7	-17	-5	2	-1	-10	-2	-6	-4	-14
64	-3	0	-9	0	2	-3	12	-12	2	-2	10	-8	-2	-5	4	-20
65	0	4	-4	12	-4	-5	-6	-16	-4	-6	5	-29	1	0	6	-3
66	-3	5	-19	20	-3	4	-17	16	1	2	-1	8	-1	-1	-1	-4
67	4	5	-7	29	3	-5	-5	4	4	-2	-2	10	1	1	0	5
68	-3	3	-15	12	0	3	-6	12	-1	4	-11	16	-3	-2	-5	-8
69	2	5	3	13	-1	-4	4	-15	-3	-6	6	-27	0	-3	2	-8
70	-2	2	-10	8	1	4	-5	16	-3	4	-17	16	2	-4	14	-16
71	2	7	4	16	4	-4	3	1	-5	-2	4	-23	-3	4	1	-2
72	-1	5	-13	20	1	-1	5	-4	3	1	7	4	0	-2	4	-8
73	-3	5	2	-1	4	-4	-2	6	2	-5	-7	3	-4	6	6	-6
74	0	4	-8	16	1	-2	7	-8	1	1	1	4	3	-4	17	-16
75	4	0	3	9	-1	-3	-2	-7	4	-2	5	3	1	7	5	12
76	1	3	-3	12	0	4	-8	16	0	5	-10	20	1	-3	9	-12
77	-5	0	2	-17	-4	-3	0	-18	3	-1	6	1	5	-2	2	9
78	-2	4	-14	16	3	5	-1	20	2	-5	16	-20	1	-4	11	-16
79	3	0	-6	15	-3	-3	-7	-8	-2	5	2	2	-4	4	-4	0
80	3	-5	19	-20	-1	-2	1	-8	2	2	2	8	-2	3	-12	12
81	-3	-2	-7	-6	0	-2	-7	3	-4	-1	0	-14	2	-5	3	-7
82	-1	-2	1	-8	-3	-4	-1	-16	1	-1	5	-4	3	4	1	16

Номер варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
83	−3	3	−1	−2	−1	−2	−4	−3	−3	5	−5	6	−5	−2	1	−20
84	3	3	3	12	2	−1	8	−4	1	3	−3	12	0	−3	6	−12
85	−1	3	5	−2	0	−1	−3	1	−2	0	2	−8	−4	3	−3	−3
86	2	2	2	8	2	1	4	4	−3	3	−15	12	3	−5	19	−20
87	−5	−7	0	−29	0	5	5	5	4	−4	−6	10	5	3	3	18
88	0	3	−6	12	3	4	1	16	2	2	2	8	−2	3	−12	12
89	−2	7	0	8	1	7	6	11	−3	−1	−3	−8	−2	−7	−3	−17
90	−3	−1	−7	−4	−3	−3	−3	−12	1	4	−5	16	−1	3	−9	12
91	−3	−5	−1	−18	0	−2	−1	−3	−1	5	1	6	−1	5	0	7
92	−2	4	−14	16	0	−2	4	−8	2	4	−2	16	1	−5	13	−20
93	−4	−3	1	−19	−1	−2	−5	−2	4	−3	−1	7	0	4	−4	12
94	3	−5	19	−20	−3	0	−9	0	−3	1	−11	4	−2	4	−14	16
95	−5	3	6	−15	−3	−4	2	−19	1	7	7	10	5	6	−4	31
96	3	3	3	12	−3	5	−19	20	2	2	2	8	0	−4	8	−16
97	2	4	4	10	3	3	7	8	5	6	1	26	1	5	4	9
98	2	−1	8	−4	3	4	1	16	1	4	−5	16	3	4	1	16
99	5	4	2	21	3	−2	3	2	3	5	2	17	4	3	−5	23
100	3	−1	11	−4	−1	−1	−1	−4	1	3	−3	12	−1	4	−11	16

Задача 1.8. Звести квадратичну форму $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$ до канонічного вигляду за даними табл. 1.8.

Таблиця 1.8

Номер варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{22}	a_{23}	a_{33}	Номер варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{22}	a_{23}	a_{33}
1	2	−1	3	3	−4	0	2	1	1	−3	3	−4	2
3	−3	−5	3	−4	5	−1	4	1	2	1	1	2	2
5	−1	−1	1	3	2	−3	6	3	3	6	−2	−2	1
7	−2	−2	2	1	3	−2	8	1	−5	0	1	1	1

Номер варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{22}	a_{23}	a_{33}	Номер варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{22}	a_{23}	a_{33}
9	−1	1	5	1	−1	−3	10	3	1	2	0	2	1
11	2	3	5	−3	−3	0	12	1	4	−1	2	−1	1
13	2	0	−6	1	1	2	14	2	5	2	0	4	2
15	1	−4	0	3	0	1	16	2	3	−2	2	−4	2
17	−1	5	−7	2	0	−3	18	−2	1	−5	3	3	−1
19	3	0	2	−2	3	1	20	1	−2	4	1	−4	1
21	1	2	−3	−2	−5	2	22	3	−2	0	2	−1	1
23	−2	−5	1	2	0	−2	24	−1	−5	0	2	1	−2
25	1	2	−6	−4	2	1	26	−2	−2	2	1	3	−2
27	1	0	−4	3	5	2	28	2	6	−1	0	−2	2
29	−1	1	5	1	−1	−3	30	3	1	2	0	2	1
31	1	4	−1	2	−1	1	32	2	0	−6	1	1	2
33	−1	1	−6	3	3	−2	34	1	−2	−7	3	1	2
35	2	−1	3	2	−5	0	36	1	1	−2	2	−4	2
37	1	3	3	2	−6	3	38	−3	−6	3	−3	6	−1
39	1	3	1	1	2	2	40	−3	−1	1	1	3	0
41	−2	1	5	1	−2	−2	42	−1	−1	1	2	2	−3
43	1	3	−5	−3	3	1	44	1	0	−3	3	6	2
45	−1	2	5	1	−2	−3	46	3	1	2	0	2	1
47	−2	−2	4	2	−5	−1	48	2	4	−4	0	4	1
49	−3	6	1	−2	3	−1	50	1	5	−1	1	−1	1
51	−2	0	5	−1	−1	−2	52	1	−3	−6	2	1	2
53	−1	1	1	−2	1	−3	54	2	−2	3	3	5	2
55	−2	−4	2	−2	5	−2	56	−2	2	−4	2	3	−1
57	1	−3	4	1	−4	1	58	1	3	−3	−2	−6	2
59	2	−2	−1	0	−3	0	60	2	−2	1	1	3	1
61	2	−3	1	−1	4	1	62	1	7	−1	−3	−3	1
63	−2	6	−1	2	−2	−1	64	1	−1	4	−3	−6	1

Закінчення табл. 1.8

Номер варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{22}	a_{23}	a_{33}	Номер варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{22}	a_{23}	a_{33}
65	2	1	5	0	– 1	1	66	1	– 7	2	2	– 7	2
67	1	– 1	– 6	– 2	0	2	68	2	– 1	2	2	2	1
69	2	– 2	2	– 1	4	1	70	1	5	– 1	– 3	– 3	1
71	– 1	– 2	4	2	– 4	– 2	72	1	– 1	4	– 4	– 5	1
73	1	1	– 5	2	4	1	74	– 3	3	2	3	4	– 1
75	1	1	– 3	3	– 4	2	76	3	3	4	4	6	0
77	– 1	– 2	– 3	– 3	5	– 3	78	– 3	– 3	– 6	2	2	– 1
79	1	3	– 5	5	– 6	3	80	– 4	– 2	2	3	5	0
81	4	2	4	0	3	1	82	– 4	12	4	– 4	5	– 1
83	2	– 10	1	5	0	2	84	– 4	6	3	4	11	– 1
85	1	2	– 4	5	– 8	3	86	1	4	5	4	– 14	4
87	2	– 7	5	– 3	– 14	2	88	– 2	2	9	2	– 4	– 2
89	– 1	– 1	2	5	6	– 4	90	2	3	– 3	– 1	– 8	2
91	4	2	3	0	4	1	92	3	3	– 7	– 4	11	2
93	4	– 8	– 3	4	– 7	1	94	1	– 3	– 10	5	4	2
95	3	– 2	4	3	4	1	96	2	2	13	0	– 1	1
97	3	6	– 13	– 6	5	1	98	4	0	3	– 4	7	1
99	3	– 2	2	3	7	1	100	2	2	– 7	3	10	2

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Задача 2.1. Дано координати вершин піраміди A_1 (x_1, y_1, z_1) A_2 (x_2, y_2, z_2) A_3 (x_3, y_3, z_3) A_4 (4, 0, 5). За даними табл. 2.1 знайти:

а) довжину ребра A_1A_2;

б) площу грані $A_1A_2A_3$;

в) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

г) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;

д) напрямні косинуси вектора A_1A_4.

Таблиця 2.1

Номер варіанта	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3
1	1	– 2	3	3	2	1	6	4	4
2	0	0	2	3	0	5	1	1	0
3	3	0	5	0	0	2	4	1	2
4	1	1	0	4	1	2	0	0	2
5	4	1	2	1	1	0	3	0	5
6	3	1	0	0	7	2	– 1	0	– 5
7	1	– 1	1	0	2	4	1	3	3
8	1	– 1	2	2	1	1	1	1	4
9	1	– 3	2	5	1	– 4	2	0	3
10	3	5	3	– 2	11	– 5	1	2	4

Задача 2.1-1. Дано довжини a, b, c ребер OA, OB, OC прямокутного паралелепіпеда. За даними табл. 2.1-1 знайти:

а) площу трикутника, утвореного діагоналями, які виходять з точки O, граней AOB і BOC;

б) проекцію вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{BC}$;

в) кут ABC;

г) довжину діагоналі паралелепіпеда;

д) об'єм піраміди $OABC$.

Таблиця 2.1-1

Номер варіанта	a	b	c
11	4	2	3
12	3	1	4
13	3	2	5
14	2	3	4
15	5	2	3
16	4	2	4
17	3	3	2
18	2	1	5
19	6	3	5
20	2	5	4

Задача 2.1-2. Дано три послідовні вершини паралелограма A, B, C. За даними табл. 2.1-2 знайти:

а) координати вершини D;
б) площу трикутника ABC;
в) довжину діагоналі AD;
г) кут ABC;
д) об'єм піраміди $OABC$.

Таблиця 2.1-2

Номер варіанта	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3
21	1	– 2	3	3	2	1	6	4	4
22	0	0	2	3	0	5	1	1	0
23	3	0	5	0	0	2	4	1	2
24	1	1	0	4	1	2	0	0	2
25	4	1	2	1	1	0	3	0	5
26	3	1	0	0	7	2	– 1	0	– 5
27	1	– 1	1	0	2	4	1	3	3
28	1	– 1	2	2	1	1	1	1	4
29	1	– 3	2	5	1	– 4	2	0	3
30	3	5	3	– 2	11	– 5	1	2	4

Задача 2.1-3. На векторах $\overline{m} = a \cdot \overline{i} + b \cdot \overline{j}$, $\overline{n} = c \cdot \overline{j} + d\overline{k}$, $\overline{p} = k\overline{j} + l\overline{k}$ побудовано паралелепіпед ($\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ — орти відповідної системи координат). За даними табл. 2.1-3 знайти:

а) об'єм паралелепіпеда;
б) площу грані, побудованої на векторах $\overline{m}$ і $\overline{n}$;
в) довжину діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{m}$ і $\overline{p}$;
г) кут між стороною $\overline{m}$ і діагоналлю грані, утвореної векторами $\overline{m}$ і $\overline{p}$.

Таблиця 2.1-3

Номер варіанта	a	b	c	d	k	l
31	1	2	3	– 1	– 2	– 4
32	2	1	2	3	– 1	– 2
33	3	2	1	2	3	– 1
34	4	3	2	1	2	– 3
35	5	4	3	2	1	– 2
36	6	5	4	3	2	– 1
37	7	6	5	4	3	– 2
38	8	7	6	5	4	– 3
39	9	8	7	6	5	– 4
40	0	1	2	3	– 1	– 2

Задача 2.1-4. Паралелограм побудовано на векторах $\overline{a} = m\overline{p} + n\overline{q}$ і $\overline{b} = s\overline{p} + r\overline{q}$, де $\overline{q}$ і $\overline{p}$ — одиничні орти, кут між якими $(\widehat{\overline{p}, \overline{q}}) = \dfrac{\pi}{3}$. За даними табл. 2.1-4 знайти:

а) довжини діагоналей;
б) кут між діагоналями.

Таблиця 2.1-4

Номер варіанта	m	n	s	r
41	1	2	– 2	1
42	2	3	– 3	2
43	3	4	4	3
44	– 1	2	– 2	3
45	– 2	3	1	2
46	1	2	– 3	2
47	– 2	3	2	1
48	2	3	1	3
49	– 2	3	3	2
50	0	1	2	3

Задача 2.1-5. Відомо, що вектори $\overline{AB} = m\bar{i} + n\bar{j}$, $\overline{BC} = p\bar{i} + q \cdot \bar{j}$ є сторонами деякого трикутника. Обчислити кути трикутника і довжину медіани AD, якщо $\bar{i}$ і $\bar{j}$ — орти відповідної системи координат.

Таблиця 2.1-5

Номер варіанта	m	n	p	q
51	2	3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{3}$
52	3	4	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{7}$
53	2	$5\sqrt{2}$	7	$\sqrt{5}$
54	5	$2\sqrt{3}$	1	6
55	6	$3\sqrt{2}$	7	$-\sqrt{5}$
56	$4\sqrt{2}$	– 2	6	0
57	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{7}$	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{7}$
58	3	– 4	$\sqrt{7}$	$3\sqrt{2}$
59	2	$-5\sqrt{2}$	7	$-\sqrt{5}$
60	2	– 3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{3}$

Задача 2.1-6. Знайти проекцію вектора $\bar{a} = b\bar{m} + s\bar{n}$ на вісь, яка має напрям $\bar{b} = p\bar{m} + q\bar{n}$, де $\bar{m}$ і $\bar{n}$ — одиничні вектори, кут між якими $(\widehat{\bar{m}, \bar{n}}) = 120°$.

Таблиця 2.1-6

Номер варіанта	b	s	p	q
61	10	2	5	– 12
62	2	5	4	3
63	3	5	15	8
64	4	7	– 8	6
65	– 3	2	10	24
66	3	– 3	– 4	3
67	3	5	16	– 12
68	– 3	8	– 3	4
69	3	7	12	– 5
70	5	– 4	20	– 15

Задача 2.1-7. Перевірити на компланарність вектори $\bar{p} = a_1\bar{i} + b_1\bar{j} + c_1\bar{k}$, $\bar{q} = a_2\bar{i} + b_2\bar{j} + c_2\bar{k}$, $\bar{r} = a_3\bar{i} + b_3\bar{j} + c_3\bar{k}$, де $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — орти відповідної системи координат. За даними табл. 2.1-7 обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{p}$ і $\bar{q}$.

Таблиця 2.1-7

Номер варіанта	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2	a_3	b_3	c_3
71	1	– 2	1	3	1	– 2	7	14	– 13
72	1	0	1	2	– 3	2	2	– 6	2
73	2	– 1	3	3	– 5	1	7	– 7	7
74	3	2	– 3	5	2	2	11	8	2
75	2	– 3	4	0	1	2	2	– 1	6
76	1	2	– 3	2	2	1	4	6	– 5
77	1	– 1	2	0	2	– 3	2	0	1
78	0	1	1	1	2	2	4	9	9
79	2	– 2	1	3	1	2	1	3	1
80	1	– 1	2	2	– 1	1	4	– 3	5

Задача 2.1-8. Дано вектор $\overline{p} = a\overline{i} + b\overline{j} + ck$, де $\overline{i}, \overline{j}, k$ — орти відповідної системи координат. За даними табл. 2.1–8 знайти:

а) довжину вектора $\overline{p}$;

б) напрямні косинуси вектора $\overline{p}$;

в) проекцію вектора $\overline{p}$ на вектор $\overline{q} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + 6k$.

Таблиця 2.1–8

Номер варіанта	a	b	c
81	2	3	6
82	3	6	– 2
83	6	– 3	2
84	5	2	1
85	4	3	– 2
86	2	1	– 3
87	3	3	4
88	– 2	5	1
89	3	3	– 2
90	4	2	– 3

Задача 2.1-9. Дано вектор $\overline{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$. За даними табл. 2.1-9 знайти:

а) довжину вектора;

б) одиничний вектор, паралельний вектору $\overline{a}$;

в) одиничний вектор, перпендикулярний до вектора $\overline{a}$ та до осі Ox;

г) проекцію вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b} = (2;\ 3;\ -6)$.

Таблиця 2.1-9

Номер варіанта	a_1	a_2	a_3
91	6	7	– 6
92	3	2	6
93	– 2	3	– 6
94	3	2	1
95	2	2	3
96	3	4	5
97	2	– 5	5
98	2	– 3	4
99	3	– 2	4
100	2	3	5

Задача 2.1-10. Координати точок A, B, C і D задано в табл. 2.1-10. Знайти:

1) розклад:

а) вектора $3\overline{AC} + 2\overline{AD}$ в базисі $(\overline{AB}, \overline{AC})$;

б) вектора $2\overline{AC} + 3\overline{CD}$ в базисі $(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})$;

2) центр мас трикутника ΔABC;

3) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, та кут між ними;

4) координати точки, яка поділяє відрізок DC у відношенні $\lambda = \frac{2}{3}$;

5) розклад векторів $\overline{AD}, \overline{BD}, \overline{CD}$ і $\overline{AD} + \overline{BD} + \overline{CD}$ в базисі $(\overline{AB}, \overline{AC})$;

6) проекцію вектора $\overline{AB}$ на вісь, яка утворює з осями Ox, Oy гострі кути $\alpha = 60^0, \beta = 120^0$, а з віссю Oz тупий кут λ;

7) проекцію вектора $\overline{AD} + \overline{AC}$ в напрямі вектора $\overline{DC}$;

8) проекцію вектора $\overline{AD} + \overline{DC}$ на координатні осі;

9) проекцію вектора $3\overline{AB} + \overline{BC}$ в напрямі вектора $\overline{AB} - \overline{DC} + \overline{BC}$;

10) канонічне і загальне рівняння прямої AD;

11) рівняння площини BDC;

12) кут між прямою AC і площиною ABD;

13) кут між прямими AB і AC;

14) рівняння бісектриси $\angle DAB$;

15) проекцію точки D на пряму AC;

16) нормаль площини ABD;

17) координати векторів: а) $(\overline{AB} \cdot \overline{BC})\overline{DC}$; б) $\overline{AB}(\overline{AC} \cdot \overline{DC})$; в) $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$; г) $(2\overline{AB} + \overline{AC}) \cdot \overline{DC}$;

18) об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AD}, \overline{BD}, \overline{CD}$;

19) об'єм тетраедра $ABCD$;

20) рівняння висоти, опущеної з точки D на площину ABC, і її довжину;

21) кут між площинами ABD і ABC;

22) площу проекції ΔABD на площину ABC;

23) відстань від точки A до прямої DC;

24) $(2\overline{AB} - \overline{CB}) \cdot (2\overline{BC} + \overline{BA})$; $\sqrt{\overline{AB}^2}$; $\sqrt{\overline{AC}^2}$;

25) модуль вектора $\overline{AB} + \overline{AC}$ і його напрямні косинуси;

26) рівняння площини, яка проходить через точку A і паралельна площині BCD;

27) умову компланарності векторів $\overline{AB}-\overline{BC}, \overline{AD}+\overline{AC}, \overline{AD}-\overline{AB}$.

Таблиця 2.1-10

Номер варіанта	A	B	C	D
1	(2, 4, 5)	(– 4, 4, – 4)	(5, 0, 3)	(1, 2, 0)
2	(4, 2, 9)	(– 2, 2, 0)	(7, – 2, 7)	(3, 0, 4)
3	(6, 3, 5)	(0, 3, – 4)	(9, – 1, 3)	(5, 1, 0)
4	(3, 5, 6)	(2, 5, 6)	(6, 11, 4)	(2, 3, 1)
5	(5, 9, 8)	(4, 7, 8)	(8, 13, 6)	(4, 5, 3)
6	(3, 8, 10)	(2, 6, 10)	(6, 12, 8)	(2, 4, 5)
7	(3, 8, 4)	(1, – 4, 7)	(4, 16, 5)	(0, 6, 2)
8	(9, 10, 9)	(7, – 2, 12)	(10, 18, 10)	(6, 8, 7)
9	(10, 11, 3)	(8, – 1, 6)	(11, 19, 4)	(7, 9, 1)
10	(5, 5, 11)	(– 1, 5, 2)	(8, 1, 9)	(4, 3, 6)
11	(2, 7, 7)	(– 4, 7, – 2)	(5, 3, 5)	(1, 5, 2)
12	(6, 2, 6)	(0, 2, – 3)	(9, – 2, 4)	(5, 0, 1)
13	(– 1, 5, 2)	(– 2, 3, 2)	(2, 9, 0)	(– 2, 1, – 3)
14	(2, 0, – 2)	(1, – 2, – 2)	(5, 4, – 4)	(1, – 4, – 7)
15	(4, 3, 5)	(3, 1, 5)	(7, 7, 3)	(3, – 1, 0)
16	(5, 7, 9)	(3, – 5, 12)	(6, 15, 10)	(2, 5, 7)
17	(– 4, 2, – 1)	(– 6, – 1, 2)	(– 3, 10, 0)	(– 7, 0, – 3)
18	(3, – 5, 7)	(1, –17, 10)	(4, 3, 8)	(0, – 7, 5)
19	(7, 4, 5)	(1, 4, – 4)	(10, 0, 3)	(6, 2, 0)
20	(3, 2, 10)	(– 3, 2, 1)	(6, – 2, 8)	(2, 0, 5)
21	(1, 3, 9)	(– 5, 3, 0)	(4, – 1, 7)	(0, 1, 4)
22	(– 5, 3, 5)	(– 6, 1, 5)	(– 2, 7, 3)	(– 6, – 7, 0)
23	(0, 4, 3)	(– 1, 2, 3)	(3, 8, 1)	(– 1, 0, – 2)
24	(– 4, 5, 2)	(– 5, 3, 2)	(– 1, 9, 0)	(– 5, 1, – 3)
25	(– 1, 4, 1)	(– 3, – 8, 4)	(0, 12, 2)	(– 4, 2, – 1)
26	(5, 3, 2)	(3, – 9, 5)	(6, 11, 3)	(2, 1, 0)

Задача 2.2. Дано координати A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_3, y_3) вершин трикутника ABC. За даними табл. 2.2 знайти:

а) довжину сторони BC;

б) рівняння сторони BC;

в) рівняння висоти, проведеної з точки A;

г) довжину висоти, проведеної з точки A;

д) рівняння бісектриси внутрішнього кута B;

е) площу трикутника;

є) кут B в радіанах з точністю до двох знаків.

Таблиця 2.2

Номер варіанта	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
1	7	1	– 5	– 4	– 9	– 1
2	9	3	– 3	– 2	– 7	1
3	13	– 6	1	– 1	5	2
4	10	– 5	– 2	0	2	3
5	6	1	– 6	– 4	– 10	– 1
6	– 1	5	11	0	17	8
7	– 4	7	8	2	14	10
8	– 7	2	5	– 3	11	5
9	– 9	8	3	3	9	11
10	2	5	– 10	0	– 14	3

Задача 2.2-1. Дано рівняння двох сторін AB: $ax + by + c = 0$ і AC: $mx + ny + p = 0$, а також точку перетину медіан M (s, q). За даними табл. 2.2-1 знайти:

а) рівняння третьої сторони;

б) відстань від точки B до прямої AC;

в) кут B в радіанах з точністю до двох знаків;

г) точку перетину висот трикутника.

Таблиця 2.2-1

Номер варіанта	a	b	c	m	n	p	s	q
11	5	– 8	10	1	– 10	– 2	4	2
12	7	– 5	12	1	– 17	– 8	3	3
13	7	– 3	4	1	9	8	3	1
14	1	– 1	–1	1	11	– 1	7	2
15	5	– 8	3	1	– 10	7	7	3
16	1	7	– 7	7	– 3	3	4	3
17	4	– 7	10	4	1	– 14	5	2
18	7	1	1	5	– 7	– 7	2	4
19	4	1	1	1	– 2	– 2	2	4
20	9	– 2	2	7	3	– 3	4	– 1

Задача 2.2-2. Дано координати двох вершин A (x_1, y_1) і B (x_2, y_2) трикутника ABC, а також точку M (x_3, y_3) перетину висот. За даними табл. 2.2-2 знайти:

а) рівняння сторін цього трикутника;
б) координати третьої його вершини;
в) тангенс кута A;
г) довжину висоти BD;
д) площу трикутника;
е) точку перетину медіан.

Таблиця 2.2-2

Номер варіанта	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
21	– 3	3	5	– 1	4	3
22	– 2	2	6	0	3	2
23	– 3	– 1	5	– 5	4	– 1
24	2	– 1	10	– 5	9	– 1
25	0	2	8	– 2	7	2
26	– 3	0	5	– 4	4	0
27	– 1	1	7	– 3	6	1
28	0	3	8	– 1	7	3
29	– 1	5	7	1	6	5
30	0	0	8	– 4	1	0

Задача 2.2-3. Дано рівняння однієї зі сторін квадрата $ax + by + c = 0$ і точку перетину діагоналей M (d, l). За даними табл. 2.2-3 знайти:

а) рівняння решти сторін і координати вершин;
б) довжину сторони квадрата;
в) найбільшу відстань від вершини квадрата до початку координат.

Таблиця 2.2-3

Номер варіанта	a	b	c	d	l
31	1	3	– 5	– 1	0
32	3	4	– 5	0	1
33	5	12	– 13	2	2
34	6	8	– 5	– 1	– 1
35	15	8	– 34	3	1
36	2	3	– 6	1	– 1
37	– 3	4	10	1	1
38	– 5	12	13	0	– 2
39	12	– 5	– 13	2	– 3
40	– 6	8	16	0	0

Задача 2.2-4. Відомо рівняння двох сторін паралелограма AB: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$; AD : $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Діагоналі паралелограма перетинаються в точці M (d, l). За даними табл. 2.2-4 знайти:

а) рівняння діагоналей;
б) довжини висот паралелограма;
в) кут BAD паралелограма;
г) площу паралелограма;
д) рівняння висоти, опущеної з точки A на діагональ BD.

Таблиця 2.2-4

Номер варіанта	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2	d	l
41	1	1	– 1	0	1	1	– 1	0
42	3	2	3	1	– 1	1	4	0
43	2	3	– 1	2	– 1	3	3	1
44	1	1	2	1	– 1	0	2	– 1
45	– 2	3	– 1	2	3	– 5	4	1
46	– 1	2	– 1	1	2	– 3	5	1
47	3	– 2	– 1	1	– 2	1	0	3
48	1	1	– 1	0	1	1	1	0
49	2	3	– 1	– 2	1	– 3	1	3
50	1	1	– 2	2	3	– 5	4	1

Задача 2.2-5. Дано рівняння прямої $ax + by + c = 0$ і точку $M(d, l)$. За даними табл. 2.2-5 знайти:

а) рівняння прямої, яка проходить через точку M перпендикулярно до даної прямої;

б) координати точки M_1, симетричної точці M, відносно даної прямої;

в) рівняння прямої, яка проходить через точку M під кутом 45° до даної прямої;

г) площу квадрата, сторона якого лежить на даній прямій і однією з вершин якого є точка M.

Таблиця 2.2-5

Номер варіанта	a	b	c	d	l
51	4	3	12	4	– 3
52	2	1	7	2	1
53	3	2	6	1	2
54	4	– 1	3	4	1
55	2	1	3	2	2
56	3	2	1	5	1
57	2	1	2	5	– 3
58	3	3	5	2	2
59	5	– 2	2	3	1
60	6	– 6	5	3	3

Задача 2.2-6. Пряма проходить через точку $M(a, b)$ і відтинає трикутник площею S. За даними табл. 2.2-6 знайти:

а) рівняння прямої (дослідити окремі випадки);

б) відстань від початку координат до прямої;

в) відстань між точками перетину даної прямої з осями координат;

г) рівняння прямої, яка проходить через початок координат перпендикулярно до шуканої.

Таблиця 2.2-6

Номер варіанта	a	b	S
61	– 3	– 2	1,5
62	3	2	6
63	1	4	2
64	2	3	4
65	– 2	3	1,5
66	– 3	2	6
67	– 1	– 4	2
68	1	– 5	1,25
69	3	5	16/3
70	– 1	4	1

Задача 2.2-7. Дано дві точки $A(a, b)$ і $B(c, d)$. За даними табл. 2.2-7 знайти:

а) точку перетину прямої AB з віссю Ox;

б) точку C на осі Ox, таку що площа трикутника ABC дорівнює S;

в) відстань від точки C до прямої AB;

г) рівняння висоти CD трикутника ABC;

д) кут ACB.

Таблиця 2.2-7

Номер варіанта	a	b	c	d	S
71	1	2	4	4	5
72	1	3	4	7	12,5
73	0	3	3	7	12,5
74	– 2	– 1	1	3	12,5

Продовження табл. 2.2-7

Номер варіанта	*a*	*b*	*c*	*d*	*S*
75	– 3	– 1	0	3	12,5
76	5	– 1	7	3	2
77	6	1	8	5	2
78	1	1	2	4	1,5
79	0	– 2	1	1	1,5
80	2	1	3	5	8,5

Задача 2.2-8. Дано точки $P(a, b)$; $Q(c, d)$; $R(l, f)$ — середини сторін трикутника. За даними табл. 2.2-8 знайти:

а) координати вершин трикутника;
б) точку перетину медіан трикутника;
в) площу трикутника;
г) відстань PD (від точки P до середньої лінії QR);
д) точку перетину висот трикутника.

Таблиця 2.2-8

Номер варіанта	*a*	*b*	*c*	*d*	*l*	*f*
81	3	– 2	1	6	– 4	2
82	5	0	3	8	– 2	4
83	4	– 1	2	7	– 3	3
84	2	– 2	0	6	– 5	2
85	3	– 2	1	6	– 4	2
86	0	– 2	– 2	6	– 7	2
87	4	0	2	8	– 3	4
88	6	1	4	9	– 1	5
89	1	– 1	– 1	5	– 6	1
90	1	2	5	1	3	– 2

Задача 2.2-9. Дано дві вершини $A(2; -3)$ і $B(5; 1)$ трикутника ABC, рівняння сторони BC: $ax + by + c = 0$ і медіану AM: $mx + ny + p = 0$. За даними табл. 2.2-9 знайти:

а) точку перетину медіан;
б) тангенс кута CBA;
в) рівняння сторони AC;
г) рівняння висоти CD, опущеної з вершини C на сторону AB;
д) довжину висоти CD;
е) площу трикутника ABC.

Таблиця 2.2-9

Номер варіанта	*a*	*b*	*c*	*m*	*n*	*p*
91	1	2	– 7	5	– 1	– 13
92	1	– 1	– 4	6	– 1	– 15
93	1	4	– 9	5	1	– 7
94	1	– 5	0	3	2	0
95	1	– 2	– 3	2	1	– 1
96	1	3	– 8	1	– 2	– 8
97	1	2	–7	3	– 5	– 21
98	3	1	– 16	1	– 4	– 14
99	1	1	– 6	2	– 5	– 19
100	2	3	– 13	1	– 3	– 11

Задача 2.2-10. Дано координати вершин $A(Ax, Ay)$ та $B(Bx, By)$ трикутника ABC, рівняння двох його висот $x - y + m = 0$ і $9x - y + n = 0$ та координати довільної точки $P(Px, Py)$. За даними табл. 2.2-10 знайти:

1) рівняння сторін трикутника ABC;
2) рівняння медіани CD та координати точки N перетину медіан;
3) рівняння прямих BL_1 та BL_2, які проходять через точку B під кутом 45° до медіани CD;
4) площу трикутника MPC, де M — точка перетину висот трикутника ABC.

Таблиця 2.2-10

Номер варіанта	A (Ax, Ay)	B (Bx, By)	P (Px, Py)	m	n
1	(– 2, 1)	(0, 7)	(– 2, 10)	3	7
2	(3, – 2)	(5, 4)	(5, 0)	– 5	– 41
3	(3, 0)	(5, 6)	(– 1, 2)	– 3	– 39
4	(– 4, 0)	(– 2, 6)	(– 8, – 6)	4	24
5	(1, 3)	(3, 9)	(0, 0)	2	– 18
6	(– 1, – 10)	(1, – 4)	(9, – 9)	– 9	– 13
7	(– 4, – 11)	(– 2, – 5)	(– 1, – 12)	– 7	13
8	(2, – 4)	(4, 2)	(11, – 3)	– 6	– 34
9	(– 1, 5)	(1, 11)	(0, 12)	6	2
10	(– 3, 5)	(– 1, 11)	(5, 13)	8	20
11	(– 4, 3)	(– 2, 9)	(– 2, 2)	7	27
12	(– 1, – 6)	(1, 0)	(10, 0)	– 5	– 9
13	(0, 0)	(2, 6)	(4, – 5)	0	– 12
14	(– 1, 2)	(1, 8)	(8, 12)	3	– 1
15	(– 5, – 7)	(– 3, – 1)	(– 6, – 10)	– 2	26
16	(– 3, 0)	(– 1, 6)	(– 1, – 6)	3	15
17	(– 3, – 7)	(– 1, – 1)	(– 7, 1)	– 4	8
18	(– 1, – 11)	(1, – 5)	(9, – 13)	– 10	– 14
19	(1, – 10)	(3, – 4)	(0, – 12)	– 11	– 31
20	(3, – 8)	(5, – 2)	(8, – 2)	– 11	– 47
21	(–2, –10)	(0, –4)	(1, –12)	– 8	– 4
22	(2, – 9)	(4, – 3)	(0, – 14)	– 11	– 39
23	(1, 4)	(3, 10)	(4, 8)	3	–17
24	(– 4, 6)	(– 2, 12)	(1, 1)	10	30
25	(2, – 5)	(4, 1)	(1, 4)	– 7	– 35
26	(2, –1)	(4, 5)	(6, 5)	–3	–31
27	(–2, –8)	(0, –2)	(9, –7)	–6	–2

Продовження табл. 2.2-10

Номер варіанта	A (Ax, Ay)	B (Bx, By)	P (Px, Py)	m	n
28	(3, 2)	(5, 8)	(7, –2)	–1	–37
29	(0, 1)	(2, 7)	(–3, 2)	1	–11
30	(– 4, 4)	(– 2, 10)	(6, 5)	8	28
31	(2, 3)	(4, 9)	(9, – 3)	1	– 27
32	(– 4, – 1)	(– 2, 5)	(– 5, – 8)	3	23
33	(– 3, – 2)	(– 1, 4)	(7, 2)	1	13
34	(3, – 3)	(5, 3)	(10, – 4)	– 6	– 42
35	(1, 0)	(3, 6)	(8, – 3)	– 1	– 21
36	(– 1, 3)	(1, 9)	(1, – 3)	4	0
37	(– 4, 5)	(– 2, 11)	(0, 4)	9	29
38	(2, – 6)	(4, 0)	(2, – 3)	– 8	– 36
39	(– 5, – 4)	(– 3, 2)	(7, – 7)	1	29
40	(– 3, – 1)	(– 1, 5)	(0, 2)	2	14
41	(– 5, – 7)	(– 3, – 1)	(4, – 2)	– 2	26
42	(1, – 6)	(3, 0)	(9, – 3)	– 7	– 27
43	(–2, – 7)	(0, – 1)	(9, – 6)	– 5	– 1
44	(0, – 4)	(2, 2)	(3, – 9)	– 4	– 16
45	(– 5, – 5)	(– 3, 1)	(1, – 10)	0	28
46	(– 2, 6)	(0, 12)	(2, 12)	8	12
47	(– 4, – 8)	(– 2, – 2)	(5, – 7)	– 4	16
48	(– 2, – 3)	(0, 3)	(9, 2)	– 1	3
49	(1, – 9)	(3, – 3)	(– 2, – 9)	– 10	– 30
50	(– 1, – 5)	(1, 1)	(6, – 10)	– 4	– 8
51	(– 3, – 9)	(– 1, – 3)	(3, – 8)	– 6	6
52	(2, 4)	(4, 10)	(7, 5)	2	– 26
53	(– 2, – 5)	(0, 1)	(11, – 4)	– 3	1
54	(1, 6)	(3, 12)	(8, 9)	5	– 15

Номер варіанта	*A* (*Ax*, *Ay*)	*B* (*Bx*, *By*)	*P* (*Px*, *Py*)	*m*	*n*
55	(– 3, 0)	(– 1, 6)	(0, 5)	3	15
56	(1, – 1)	(3, 5)	(– 3, 6)	– 2	– 22
57	(0, 2)	(2, 8)	(–3, 2)	2	– 10
58	(– 4, 0)	(– 2, 6)	(9, 3)	4	24
59	(2, 5)	(4, 11)	(– 2, 10)	3	– 25
60	(– 2, – 11)	(0, –5)	(4, – 5)	– 9	– 5
61	(– 3, 3)	(– 1, 9)	(– 6, – 2)	6	18
62	(2, 5)	(4, 11)	(– 2, 9)	3	– 25
63	(1, –10)	(3, – 4)	(11, – 13)	– 11	– 31
64	(– 2, – 9)	(0, – 3)	(4, – 14)	– 7	– 3
65	(2, – 1)	(4, 5)	(– 2, 7)	– 3	– 31
66	(– 5, – 7)	(– 3, – 1)	(8, – 7)	– 2	26
67	(0, – 3)	(2, 3)	(3, – 8)	– 3	– 15
68	(– 1, 0)	(1, 6)	(– 2, 0)	1	– 3
69	(3, 2)	(5, 8)	(14, 2)	– 1	– 37
70	(– 1, – 1)	(1, 5)	(1, 9)	0	– 4
71	(–2, 1)	(0, 7)	(0, 0)	3	7
72	(– 2, – 7)	(0, – 1)	(7, – 1)	– 5	– 1
73	(– 3, – 2)	(– 1, 4)	(9, – 1)	1	13
74	(0, – 4)	(2, 2)	(0, – 6)	– 4	– 16
75	(1, 1)	(3, 7)	(4, 5)	0	– 20
76	(0, – 7)	(2, – 1)	(10, – 8)	– 7	– 19
77	(– 1, – 10)	(1, – 4)	(10, – 10)	– 9	– 13
78	(– 5, – 10)	(–3, – 4)	(–4, –2)	– 5	23
79	(– 2, – 6)	(0, 0)	(10, – 5)	– 4	0
80	(0, – 8)	(2, – 2)	(11, –7)	– 8	– 20
81	(– 1, – 11)	(1, – 5)	(5, – 4)	– 10	– 14

Номер варіанта	*A* (*Ax*, *Ay*)	*B* (*Bx*, *By*)	*P* (*Px*, *Py*)	*m*	*n*
82	(– 3, – 9)	(– 1, – 3)	(– 2, 1)	– 6	6
83	(– 4, – 9)	(– 2, – 3)	(– 3, – 8)	– 5	15
84	(2, – 11)	(4, – 5)	(4, – 8)	– 13	– 41
85	(– 2, 4)	(0, 10)	(– 2, 14)	6	10
86	(– 2, 0)	(0, 6)	(– 2, 1)	2	6
87	(1, – 4)	(3, 2)	(13, – 4)	– 5	– 25
88	(– 3, 6)	(– 1, 12)	(10, 8)	9	21
89	(– 3, 4)	(– 1, 10)	(10, 13)	7	19
90	(2, – 7)	(4, – 1)	(6, – 6)	– 9	– 37
91	(1, –9)	(3, –3)	(11, –3)	–10	–30
92	(–4, –7)	(–2, –1)	(–6, –8)	–3	17
93	(0, –9)	(2, –3)	(7, –12)	–9	–21
94	(–5, – 4)	(– 3, 2)	(4, – 5)	1	29
95	(3, – 8)	(5, – 2)	(11, – 14)	– 11	– 47
96	(1, 4)	(3, 10)	(0, 5)	3	– 17
97	(– 1, – 3)	(1, 3)	(8, 0)	– 2	– 6
98	(– 4, – 9)	(– 2, – 3)	(– 1, – 8)	– 5	15
99	(– 1, – 8)	(1, – 2)	(10, – 3)	– 7	– 11
100	(1, 3)	(3, 9)	(– 2, – 2)	2	– 18
101	(– 3, – 6)	(– 1, 0)	(– 3, – 2)	–3	9
102	(3, 3)	(5, 9)	(4, 7)	0	– 36
103	(1, – 3)	(3, 3)	(– 2, – 2)	–4	– 24
104	(– 3, 6)	(– 1, 12)	(6, 7)	9	21
105	(3, – 5)	(5, 1)	(14, 2)	– 8	– 44
106	(0, – 4)	(2, 2)	(11, – 11)	– 4	– 16
107	(– 2, – 5)	(0, 1)	(2, – 10)	– 3	1
108	(– 4, – 2)	(– 2, 4)	(– 2, – 4)	2	22

Номер варіанта	$A\ (Ax, Ay)$	$B\ (Bx, By)$	$P\ (Px, Py)$	m	n
109	(2, 5)	(4, 11)	(10, 7)	3	– 25
110	(3, 2)	(5, 8)	(6, 8)	– 1	– 37
111	(– 1, 2)	(1, 8)	(– 5, 6)	3	– 1
112	(1, 5)	(3, 11)	(13, 4)	4	– 16
113	(– 1, 5)	(1, 11)	(– 3, 6)	6	2
114	(2, – 9)	(4, – 3)	(– 2, – 7)	– 11	– 39
115	(– 4, – 6)	(– 2, 0)	(– 6, – 1)	– 2	18
116	(– 1, – 1)	(1, 5)	(– 5, 7)	0	– 4
117	(2, – 3)	(4, 3)	(15, – 1)	– 5	– 33
118	(–2, – 6)	(0, 0)	(4, 2)	– 4	0
119	(0, 3)	(2, 9)	(3, 10)	3	– 9
120	(– 3, 3)	(– 1, 9)	(7, – 4)	6	18

Задача 2.3. Криву другого порядку задано рівнянням:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 .$$

За даними табл. 2.3 визначити тип цієї кривої, записати її канонічне рівняння і побудувати відповідний графік у старій системі координат.

Таблиця 2.3

Номер варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}	Номер варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}
1	1	– 2	3	– 1	0	1	51	0	1	3	1	– 3	5
2	3	– 1	3	2	2	– 4	52	21	$\frac{1}{2}$	– 10	0	0	0
3	5	12	– 1	2	– 2	– 1	53	1	– 2	4	5	– 10	25
4	0	– 3	0	0	1	3	54	1	2	4	– 3	– 3	0
5	– 5	– 2	1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	55	4	– 2	1	2	– 1	1

Номер варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}	Номер варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}
6	2	$\frac{5}{2}$	– 3	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	– 2	56	1	1	1	– 4	0	4
7	1	– 1	1	– 2	– 3	3	57	1	– 1	– 3	– 2	– 3	3
8	3	1	3	3	– 1	– 5	58	32	30	7	– 8	– 1	1
9	4	– 2	1	6	– 3	9	59	2	– 3	5	– 1	1	– 10
10	1	0	0	3	– 4	1	60	0	5	– 2	3	2	21
11	1	1	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6	61	1	$\frac{5}{2}$	– 14	0	0	0
12	7	2	2	– 20	– 16	5	62	1	$\frac{1}{2}$	1	– 1	– 2	– 12
13	1	– 1	1	$\frac{1}{2}$	– 1	3	63	1	– 2	3	1	– 1	0
14	1	– 1	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6	64	2	– 2	1	– 1	3	– 3
15	2	$-\frac{3}{2}$	– 1	$\frac{3}{2}$	1	0	65	0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	10
16	1	4	4	– 3	– 1	1	66	3	1	2	$\frac{3}{2}$	– 2	0
17	1	1	1	1	1	– 4	67	1	$-\frac{3}{2}$	1	0	1	1
18	8	0	– 3	1	$-\frac{5}{2}$	1	68	3	$\frac{7}{2}$	5	2	$\frac{5}{2}$	1
19	1	– 1	2	– 2	– 3	29	69	9	– 6	2	– 4	0	0
20	9	– 3	1	1	0	– 7	70	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
21	1	– 1	0	1	1	1	71	5	12	– 1	2	0	1

Номер варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}	Номер варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}
22	1	$\frac{1}{2}$	1	-1	2	-12	72	2	2	-3	-1	1	-2
23	9	-6	4	-8	1	0	73	3	1	3	3	-1	-5
24	1	-1	1	-2	-3	3	74	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	3
25	6	-2	9	-2	-16	-6	75	3	-1	3	2	2	-4
26	1	-1	-2	-2	-3	3	76	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
27	1	-1	1	1	-3	0	77	3	$\frac{7}{2}$	5	2	$\frac{5}{2}$	1
28	1	1	1	1	1	-4	78	2	$\frac{5}{2}$	-3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{25}{4}$	-2
29	9	-3	1	-3	1	0	79	1	-1	-3	-2	-3	3
30	1	0	1	-2	-3	0	80	1	1	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6
31	0	0	2	4	6	-3	81	2	$\frac{5}{2}$	-3	$\frac{3}{2}$	8	0
32	1	-2	4	1	-1	-1	82	1	3	9	0	9	0
33	5	6	0	-11	-6	-19	83	2	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{3}{2}$	18
34	3	5	7	2	1	1	84	1	$\frac{5}{4}$	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6
35	1	-1	2	-2	-3	3	85	0	$\frac{1}{2}$	-1	-1	$\frac{3}{2}$	-1

Номер варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}	Номер варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}
36	3	-3	5	-2	-3	10	86	3	$-\frac{7}{2}$	2	-2	3	-5
37	9	12	16	-20	15	0	87	1	2	0	-2	$-\frac{1}{2}$	4
38	1	-1	-2	-2	-3	$-\frac{13}{3}$	88	2	$\frac{5}{2}$	-3	$\frac{3}{2}$	8	-5
39	3	1	-1	4	5	14	89	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{3}{2}$	-3
40	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	10	90	6	$-\frac{1}{2}$	0	-1	2	0
41	3	-2	4	-1	-2	2	91	2	-2	5	-4	0	6
42	1	3	9	2	6	-5	92	1	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6
43	3	-1	3	2	2	-4	93	2	2	5	-4	0	6
44	5	2	8	-16	-28	80	94	1	-1	2	-2	-3	3
45	1	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	95	6	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	2
46	9	-2	6	3	-4	2	96	2	2	3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0
47	1	3	1	3	1	-1	97	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{3}{2}$	-3
48	5	$-\frac{3}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	1	-5	98	3	1	2	$\frac{3}{2}$	-2	0
49	2	-2	5	-8	0	3	99	1	-1	1	-2	-3	3
50	1	-1	2	-2	-3	3	100	3	$-\frac{7}{2}$	2	3	-2	-5

Задача 2.4. За даними табл. 2.4 знайти проекцію точки A (x_1, y_1, z_1) на площину $Ax + By + Cz + D = 0$.

Таблиця 2.4

Номер варіанта	x_1	y_1	z_1	A	B	C	D
1	4	– 3	1	1	2	– 1	– 3
2	0	– 2	3	2	– 1	4	2
3	2	2	– 1	2	3	– 1	1
4	– 1	2	2	– 1	2	2	1
5	– 2	– 3	1	3	2	– 2	3
6	1	0	– 2	4	1	2	– 3
7	– 3	1	0	1	– 2	3	4
8	1	2	4	2	– 1	0	3
9	4	2	– 3	1	– 4	3	2
10	3	1	1	3	– 1	2	1

Задача 2.4-1. Записати рівняння площини, яка проходить через точку A (x_1, y_1, z_1) та пряму $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$, скориставшись даними табл. 2.4-1.

Таблиця 2.4-1

Номер варіанта	x_1	y_1	z_1	x_0	y_0	z_0	m	n	p
11	2	0	1	– 1	2	0	– 1	3	2
12	3	1	– 2	4	– 3	0	5	2	1
13	– 1	2	4	3	1	– 1	4	– 1	2
14	0	– 2	2	1	– 2	– 1	3	2	– 1
15	1	2	0	4	– 2	1	2	– 1	1
16	3	4	2	– 2	3	2	1	– 2	3
17	– 1	0	3	– 1	0	1	2	2	1
18	0	– 5	4	– 3	3	1	3	– 2	3
19	2	2	1	4	2	0	2	4	1
20	– 4	1	– 2	0	2	– 2	– 1	4	2

Задача 2.4-2. Знайти проекцію прямої $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ на площину $Ax + By + Cz + D = 0$, скориставшись даними табл. 2.4-2.

Таблиця 2.4-2

Номер варіанта	x_0	y_0	z_0	m	n	p	A	B	C	D
21	0	4	– 1	4	3	– 2	1	– 1	3	8
22	1	– 1	3	3	2	– 1	2	– 4	3	6
23	2	0	– 2	– 2	3	1	1	0	– 2	10
24	4	3	1	1	– 2	3	– 3	2	1	2
25	– 2	1	0	2	– 1	3	– 4	3	1	8
26	3	2	– 1	3	1	2	5	– 3	0	6
27	– 1	3	2	– 1	4	4	– 2	1	3	7
28	– 2	– 1	4	– 2	– 1	5	3	– 2	4	4
29	0	– 3	2	4	2	1	0	– 3	5	10
30	– 4	3	1	– 5	3	1	3	2	1	5

Задача 2.4-3. Скориставшись даними табл. 2.4-3, провести через пряму $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ площину паралельно площині $Ax + By + Cz + D = 0$.

Таблиця 2.4-3

Номер варіанта	x_0	y_0	z_0	m	n	P	A	B	C	D
31	– 5	2	0	3	1	4	1	1	– 1	15
32	– 4	3	2	1	– 2	3	– 1	1	1	10
33	2	1	0	– 1	3	4	2	– 2	2	– 13
34	– 1	– 2	4	1	2	3	3	0	– 1	5
35	3	– 3	1	– 2	– 1	3	1	1	1	– 8
36	2	– 3	2	1	– 3	3	0	1	1	15
37	5	4	2	3	– 1	– 2	2	2	2	9
38	– 2	3	3	– 1	– 2	1	– 1	1	1	– 12
39	– 3	– 4	1	2	2	– 1	1	1	4	6
40	0	1	– 2	3	2	1	– 3	4	1	8

Задача 2.4-4. Знайти відстань від точки $A\ (x_1, y_1, z_1)$ до прямої $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, скориставшись даними табл. 2.4-4.

Таблиця 2.4-4

Номер варіанта	x_1	y_1	z_1	x_0	y_0	z_0	m	n	p
41	– 5	6	1	– 2	1	0	3	– 2	1
42	6	– 3	0	1	0	– 3	2	1	1
43	3	2	– 1	3	1	– 3	– 2	2	– 3
44	2	0	3	2	– 2	4	3	– 1	– 1
45	4	8	– 5	4	3	– 2	1	3	– 4
46	– 6	0	2	– 3	2	0	– 2	4	– 1
47	– 3	2	1	5	3	– 2	3	– 2	3
48	4	2	1	7	3	2	– 4	2	3
49	5	1	1	– 2	4	0	– 1	2	2
50	– 4	5	3	3	– 4	2	2	– 3	4

Задача 2.4-5. На прямій $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ знайти точку, найближчу до точки $A\ (x_1, y_1, z_1)$, скориставшись даними табл. 2.4-5.

Таблиця 2.4-5

Номер варіанта	x_0	y_0	z_0	m	n	p	x_1	y_1	z_1
51	2	– 2	1	3	– 1	2	4	0	6
52	3	– 2	0	– 1	2	4	– 5	2	1
53	– 1	0	4	– 2	4	3	2	2	0
54	1	– 3	– 1	1	3	2	0	– 6	5
55	5	1	– 2	4	6	1	3	2	1
56	– 4	– 3	2	3	– 2	1	0	– 5	7
57	– 2	6	1	2	1	– 3	4	3	– 2
58	3	3	1	– 4	2	– 1	5	6	– 8
59	5	6	0	5	– 1	– 1	3	0	7
60	– 3	4	2	– 3	1	– 4	– 8	2	1

Задача 2.4-6. Знайти точку, симетричну точці $A\ (x_1, y_1, z_1)$ відносно прямої $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, скориставшись даними табл. 2.4-6.

Таблиця 2.4-6

Номер варіанта	x_1	y_1	z_1	x_0	y_0	z_0	m	n	p
61	2	4	– 6	3	– 1	2	1	3	2
62	1	0	9	4	8	1	– 2	4	3
63	3	3	1	– 3	4	6	– 3	2	1
64	– 4	8	0	– 2	– 1	8	5	– 1	– 1
65	2	– 1	4	5	4	– 3	2	– 2	– 3
66	3	– 1	2	2	0	9	4	1	2
67	5	0	1	3	1	1	– 5	– 3	4
68	8	– 1	– 1	4	2	0	4	2	1
69	2	– 2	7	– 5	7	1	– 1	– 3	4
70	3	0	10	– 4	2	6	2	– 2	– 5

Задача 2.4-7. Знайти відстань між двома паралельними прямими $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$; $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$, скориставшись даними табл. 2.4-7.

Таблиця 2.4-7

Номер варіанта	x_0	y_0	z_0	x_1	y_1	z_1	m	n	p
71	5	– 4	1	0	2	– 2	– 3	5	1
72	3	– 1	0	4	3	– 1	2	– 1	– 4
73	2	1	– 1	3	– 2	1	– 1	2	1
74	– 2	6	– 5	2	– 1	5	4	–3	3
75	– 1	0	– 2	3	– 4	3	3	4	– 3
76	1	2	6	– 4	1	2	4	3	2
77	– 4	– 3	0	– 3	3	2	– 2	3	4
78	– 1	1	3	2	– 3	– 3	–1	1	– 5
79	6	4	– 1	– 5	0	– 4	1	2	3
80	5	– 1	2	0	7	6	5	– 1	5

Задача 2.4-8. Знайти найкоротшу відстань між двома прямими, які не перетинаються $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$; $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$, скориставшись даними табл. 2.4-8.

Таблиця 2.4-8

Номер варіанта	x_0	y_0	z_0	n_0	m_0	p_0	x_1	y_1	z_1	n_1	m_1	p_1
81	9	– 2	0	4	– 3	1	0	– 7	– 2	– 2	9	2
82	– 3	6	3	4	– 3	2	4	– 1	– 7	8	– 3	3
83	2	7	1	1	– 2	4	2	3	2	2	– 1	– 1
84	– 1	– 3	7	– 2	5	1	5	– 3	– 3	4	– 3	– 2
85	0	8	– 4	3	– 2	– 2	– 1	– 5	7	– 5	1	4
86	4	2	3	– 3	4	1	4	8	– 1	– 1	5	– 3
87	– 5	3	2	2	3	– 1	1	2	4	3	– 4	2
88	8	5	– 1	1	2	– 6	– 4	– 5	5	6	– 3	1
89	3	0	10	5	4	– 3	1	– 7	– 9	3	– 2	– 1
90	5	4	1	– 4	– 3	1	6	5	2	1	5	– 1
91	7	– 1	3	6	2	5	3	4	– 7	– 2	– 4	3
92	– 6	2	5	– 8	1	1	3	2	4	5	1	– 1
93	2	3	– 4	5	2	– 3	2	3	– 6	2	3	3
94	– 1	4	2	3	4	– 2	– 5	– 2	2	5	4	–1
95	0	5	7	– 3	– 5	1	2	7	4	7	– 2	1
96	8	– 3	0	– 6	4	– 1	4	4	– 7	– 4	2	5
97	– 4	2	– 2	3	2	– 1	2	– 3	2	– 3	6	1
98	3	– 8	1	2	– 2	5	– 3	3	3	1	– 4	2
99	– 2	6	3	– 1	3	4	– 6	5	9	1	1	– 8
100	1	– 7	4	2	– 4	3	4	– 6	– 5	2	3	– 4

Задача 3.

Дано координати вершин M (M_x, M_y, M_z), N (N_x, N_y, N_z), P (P_x, P_y, P_z) та S (S_x, S_y, S_z) піраміди $SMNPQ$, в основі якої лежить паралелограм $MNPQ$. За даними табл. 2.4-9 знайти:

1) площу грані MSN;
2) об'єм та висоту піраміди;

3) рівняння площини грані MSN;
4) проекцію точки Q на площину грані NSP;
5) проекцію точки M на бічне ребро SP;
6) рівняння площини, яка проходить через ребро основи PQ перпендикулярно до площини грані MSN;
7) рівняння площини, яка проходить через точку Q перпендикулярно до площин граней MSN, NSP.

Таблиця 2.4-9

Номер варіанта	M (M_x, M_y, M_z)	N (N_x, N_y, N_z)	P (P_x, P_y, P_z)	S (S_x, S_y, S_z)
1	(0, – 3, 0)	(4, – 1, – 4)	(– 4 , 0, 3)	(– 1, 13, 4)
2	(– 5, 2, – 6)	(– 5, 0, 0)	(6, 0, 2)	(– 13, 8, – 5)
3	(0, – 2, – 2)	(3, 3, – 2)	(6, 0, – 4)	(1, – 9, 11)
4	(0, – 3, – 2)	(– 3, 3, 1)	(0, – 4, 4)	(– 2, – 1, 6)
5	(1, – 4, – 2)	(– 1, 2, – 1)	(3, – 4, 5)	(8, – 7, 2)
6	(– 6, 2, 2)	(3, – 1, – 1)	(0, 4, 5)	(11, 3, – 1)
7	(– 4, 3, – 1)	(– 4, – 5, 1)	(– 6, – 6, 3)	(– 6, – 5, – 15)
8	(– 3, – 4, 5)	(– 1, – 5, – 3)	(2, 2, – 1)	(– 4, – 15, – 13)
9	(– 2, 1, 1)	(– 4, – 2, – 5)	(0, 4, – 3)	(12, 14, 5)
10	(1, – 1, – 3)	(0, 4, 0)	(– 2, – 2, – 6)	(14, – 2, – 14)
11	(– 4 , 3, 1)	(– 1, 5, 3)	(6, 3, 2)	(12, 14, 12)
12	(– 1, – 3, 5)	(– 1, 3, – 5)	(– 1, – 2, – 3)	(1, – 10, 11)
13	(– 4, 1, – 2)	(– 4, 4, 0)	(3, – 2, – 1)	(– 14, – 3, – 6)
14	(– 2, 0, 4)	(– 3, 0, 4)	(– 6, – 1, – 4)	(– 15, 6, 3)
15	(2, – 4, 2)	(0, – 2, 2)	(– 3, 1, 5)	(3, 14, – 9)
16	(– 6, – 5, – 2)	(– 2, 1, – 2)	(– 3, 2, 0)	(– 12, – 9, – 12)
17	(– 2, – 2, – 1)	(– 5, – 5, – 3)	(3, – 6, – 2)	(– 1, 2, 0)
18	(– 3, 1, 1)	(2, 0, 4)	(– 6, 4, – 3)	(0, 14, – 10)
19	(– 5, 4, 2)	(– 1, 4, 1)	(– 4, 2, 3)	(– 13, – 1, 0)
20	(– 5, – 1, 5)	(– 5, 4, 0)	(– 7, – 1, – 4)	(– 12, 14, 11)
21	(– 2, 2, – 1)	(– 3, – 2, 0)	(1, 2, 4)	(– 2, 13, 10)
22	(– 2, 2, – 1)	(2, – 1, – 2)	(5, 0, – 1)	(12, – 6, – 8)

Номер варіанта	$M (M_x, M_y, M_z)$	$N (N_x, N_y, N_z)$	$P (P_x, P_y, P_z)$	$S (S_x, S_y, S_z)$
23	(1, 0, 1)	(– 4, – 5, – 3)	(6, – 1, 2)	(13, 2, 6)
24	(3, – 3, – 5)	(1, – 3, – 1)	(– 1, 4, 4)	(9, – 8, 4)
25	(2, 1, – 2)	(3, 4, 4)	(– 1, – 3, 0)	(1, – 4, – 6)
26	(3, 1, – 4)	(2, – 3, – 4)	(3, – 5, – 5)	(3, – 4, – 9)
27	(1, 4, 3)	(– 4, – 4, – 5)	(3, 5, 4)	(1, 8, – 8)
28	(0, 3, 5)	(4, – 5, – 6)	(3, – 4, – 4)	(14, – 9, – 3)
29	(1, 1, 3)	(2, – 1, – 2)	(5, – 4, – 6)	(6, – 6, 4)
30	(– 1, – 1, – 6)	(2, – 5, – 3)	(4, – 1, – 3)	(14, – 14, 7)
31	(0, 3, – 6)	(0, 4, – 6)	(3, 3, –1)	(13, – 12, 14)
32	(2, – 1, – 3)	(3, – 2, 5)	(– 4, – 1, – 4)	(– 14, – 5, 4)
33	(1, – 3, 3)	(4, 2, – 2)	(3, 3, – 2)	(– 11, – 8, 11)
34	(– 3, – 2, – 3)	(1, 2, 0)	(– 2, 1, – 6)	(9, – 2, – 9)
35	(2, – 4, – 2)	(2, – 3, – 3)	(– 1, 1, – 2)	(– 12, – 6, 3)
36	(– 5, – 6, 0)	(1, 4, 4)	(– 3, – 6, 3)	(– 9, – 2, 7)
37	(3, 5, – 3)	(– 1, 4, – 1)	(– 6, – 3, 2)	(– 4, 1, – 1)
38	(– 6, 0, – 1)	(– 1, – 1, – 1)	(4, 1, 2)	(– 7, – 12, 5)
39	(5, 2, – 2)	(5, 1, – 6)	(3, – 2, 0)	(– 15, – 15, – 5)
40	(– 5, 3, 5)	(– 3, – 2, 1)	(– 4, 0, 3)	(12, 1, – 4)
41	(2, 1, 1)	(0, 3, 2)	(2, 4, 3)	(6, 12, 2)
42	(0, 3, 0)	(2, 2, 1)	(1, 4, 6)	(9, 3, 3)
43	(1, 3, 3)	(4, 4, 1)	(1, 1, 2)	(6, 6, 9)
44	(3, 2, 5)	(0, 2, 0)	(3, 0, 1)	(3, 5, 5)
45	(3, 3, 2)	(0, 1, 6)	(2, 0, 7)	(7, 6, 14)
46	(4, 2, 2)	(– 4, 2, – 2)	(– 1, 0, 6)	(– 2, 3, 7)
47	(– 1, – 2, 4)	(0 , 0, – 4)	(5, – 2, 1)	(6, – 6, 5)
48	(0, – 2, – 5)	(– 1, – 5, 2)	(– 1, – 3, 4)	(12, 5, 3)
49	(– 2, – 3, 4)	(– 5, – 4, 0)	(2, 4, 1)	(5, – 15, 3)
50	(3, – 3, 1)	(0, – 2, 1)	(– 5, – 6, 2)	(12, – 1, – 7)

Номер варіанта	$M (M_x, M_y, M_z)$	$N (N_x, N_y, N_z)$	$P (P_x, P_y, P_z)$	$S (S_x, S_y, S_z)$
51	(– 4, – 3, – 2)	(– 3, 0, – 3)	(1, 0, – 3)	(– 3, – 4, 13)
52	(4, 5, 5)	(3, 4, – 2)	(– 2, – 3, – 7)	(– 6, – 8, – 11)
53	(3, – 1, 1)	(1, – 2, – 1)	(– 4, 4, 2)	(– 8, 2, – 9)
54	(4, 1, 2)	(2, 2, – 4)	(– 7, – 6, 5)	(1, – 13, – 13)
55	(0, – 4, 3)	(0, 5, – 4)	(1, – 1, 1)	(2, 11, – 7)
56	(2, 1, – 1)	(– 4, 4, 4)	(– 3, 6, – 1)	(– 1, 12, – 7)
57	(– 1, – 2, 1)	(– 1, 4, 1)	(– 5, 4, – 4)	(– 5, – 2, 13)
58	(– 1, 1, – 3)	(– 4, 1, – 1)	(– 5, 4, – 7)	(– 7, 4, – 12)
59	(– 6, 0, – 1)	(0, – 2, 3)	(2, 0, 5)	(– 4, 5, 13)
60	(– 3, – 3, – 6)	(– 6, 3, 1)	(– 1, 0, – 4)	(– 12, – 3, – 10)
61	(– 6, – 6, – 5)	(– 3, 5, 2)	(– 1, – 3, – 3)	(3, – 7, – 8)
62	(0, – 2, 0)	(– 3, 0, – 5)	(– 5, – 1, – 4)	(– 2, – 2, 1)
63	(5, – 5, 0)	(1, 2, 3)	(– 3, – 5, – 3)	(10, – 5, – 15)
64	(– 6, 3, 3)	(4, – 3, 1)	(– 2, 5, – 5)	(– 11, 9, 4)
65	(– 4, 1, – 2)	(– 3, – 1, – 3)	(4, – 2, – 4)	(14, 5, – 15)
66	(4, – 5, – 3)	(3, – 2, 1)	(2, 5, 4)	(1, – 10, 3)
67	(5, 1, 1)	(3, 3, 3)	(5, – 6, 2)	(– 9, – 7, 13)
68	(4, – 5, 1)	(3, – 2, – 5)	(1, – 5, 1)	(11, 6, 11)
69	(2, 1, 4)	(5, 1, 0)	(– 5, – 6, 2)	(– 3, 2, 2)
70	(4, – 1, – 2)	(3, 0, – 4)	(2, – 3, – 2)	(– 3, – 11, – 4)
71	(– 4, 2, 3)	(– 2, 0, 3)	(– 2, 2, – 5)	(11, – 13, 1)
72	(– 3, 5, 3)	(– 4, 5, 1)	(– 4, 0, – 5)	(– 6, – 11, – 13)
73	(– 4, 0, 1)	(3, 1, 1)	(– 5, – 6, – 4)	(4, 2, – 2)
74	(– 2, 3, 4)	(3, 3, 2)	(5, 3, 3)	(– 5, – 11, 1)
75	(– 3, – 2, – 3)	(4, – 2, 0)	(0, – 4, – 3)	(– 13, – 5, – 15)
76	(5, – 3, 1)	(1, 2, 4)	(– 6, – 7, – 7)	(3, – 9, 11)
77	(3, – 5, 0)	(3, 4, 0)	(3, 0, 5)	(14, – 14, – 7)
78	(0, – 2, 2)	(1, 2, 0)	(– 3, – 1, – 5)	(– 10, 10, – 4)

Продовження табл. 2.4-9

Номер варіанта	M (M_x, M_y, M_z)	N (N_x, N_y, N_z)	P (P_x, P_y, P_z)	S (S_x, S_y, S_z)
79	(– 4, 5, 4)	(0, – 5, – 5)	(– 6, 4, 5)	(– 2, 0, – 11)
80	(– 6, – 5, 2)	(1, – 4, 0)	(0, – 3, – 5)	(– 5, – 5, 0)
81	(3, 3, – 3)	(0, 5, 5)	(– 6, 0, – 5)	(– 6, – 3, 11)
82	(3, 0, 4)	(3, – 1, 4)	(4, 1, 0)	(8, – 11, 11)
83	(– 5, – 2, 5)	(– 1, 3, 4)	(– 7, 4, –3)	(– 7, – 6, – 11)
82	(3, 0, 4)	(3, –1, 4)	(4, 1, 0)	(8, –11, 11)
83	(–5, –2, 5)	(– 1, 3, 4)	(– 7, 4, –3)	(– 7, – 6, – 11)
84	(1, –1, –1)	(1, 3, –5)	(3, 1, 1)	(7, 13, 13)
85	(– 1, 0, – 2)	(– 4, 1, – 2)	(1, – 5, – 7)	(– 2, 3, – 3)
86	(0, 5, – 1)	(– 4, 1, 4)	(– 4, 3, 5)	(0, – 6, – 6)
87	(– 2, 3, – 3)	(– 1, 0, 0)	(5, 3, 5)	(14, – 1, – 13)
88	(2, – 5, – 6)	(3, – 3, 3)	(2, – 5, 2)	(8, 0, 4)
89	(4, 4, – 1)	(0, 0, 3)	(2, – 3, 1)	(– 10, 5, 3)
90	(2, 3, – 5)	(2, 0, 3)	(3, – 1, 4)	(2, 7, – 5)
91	(– 4, – 5, – 3)	(1, – 5, 2)	(– 5, 4, – 1)	(– 12, – 7, – 7)
92	(–2, 5, – 4)	(– 2, 3, – 2)	(3, 1, 2)	(– 13, 8, 5)
93	(2, 4, – 4)	(4, – 4, – 5)	(– 3, 0, 1)	(11, – 14, 1)
94	(5, – 4, 2)	(5, 4, 2)	(1, 6, 6)	(– 7, – 1, – 7)
95	(3, – 4, – 6)	(– 3, 3, – 3)	(6, – 1, 1)	(– 3, 10, – 4)
96	(1, 1, – 4)	(2, 1, – 2)	(3, –2, – 2)	(9, – 7, – 1)
97	(–1, 1, – 3)	(2, 1, – 3)	(–6, 4, 6)	(11, –13, 0)
98	(– 4, – 6, 0)	(0, – 4, 0)	(4, –3, –4)	(14, 10, 6)
99	(– 3, 3, 2)	(–2, 0, 1)	(3, –6, 0)	(12, 7, –13)
100	(– 6, 2, 1)	(–3, – 4, – 3)	(4, 3, – 1)	(–5, –6, 1)
101	(– 3, 3, – 1)	(–4, 1, –4)	(–7, –3, – 5)	(7, 11, – 14)
102	(– 4, – 1, – 2)	(3, –4, – 1)	(3, – 1, 2)	(– 15, 10, 2)
103	(0, 2, 0)	(3, –3, 4)	(3, –7, – 6)	(5, –3, 7)
104	(– 1, 0, – 1)	(4, 0, – 6)	(– 2, 5, 2)	(– 2, 8, 0)

Закінчення табл. 2.4-9

Номер варіанта	M (M_x, M_y, M_z)	N (N_x, N_y, N_z)	P (P_x, P_y, P_z)	S (S_x, S_y, S_z)
105	(– 2, 0, – 3)	(1, – 4, 1)	(1, – 4, – 2)	(– 6, 4, – 15)
106	(– 6, – 1, 0)	(4, 4, – 5)	(– 3, – 2, – 3)	(0, 0, 11)
107	(0, – 2, –2)	(2, 1, 3)	(5, – 4, – 2)	(8, – 6, – 10)
108	(0, – 5, 0)	(– 5, – 4, – 1)	(4, – 5, 0)	(12, – 1, 7)
109	(0, – 2, 3)	(3, – 3, 1)	(– 4, 0, 3)	4, – 10, – 11)
110	(2, 1, – 2)	(2, – 5, 2)	(2, 5, – 1)	(– 13, 7, – 13)
111	(– 2, 5, – 4)	(0, 0, – 2)	(– 3, 2, – 4)	(– 13, 8, – 6)
112	(– 5, 0, 1)	(– 5, 3, – 2)	(– 1, – 6, – 4)	(– 11, 11, – 10)
113	(– 3, 3, – 5)	(– 4, – 5, – 1)	(– 3, – 1, –7)	(1, 10, – 6)
114	(1, 0, 0)	(0, – 1, – 5)	(– 1, 0, 5)	(– 9, 11, – 15)
115	(– 4, 2, 3)	(3, – 1, – 4)	(4, 2, – 2)	(– 8, 7, – 8)
116	(3, 1, 4)	(– 4, 3, 1)	(– 1, 1, 4)	(– 10, – 4, 9)
117	(4, – 2, 0)	(– 1, – 5, – 1)	(4, 6, – 5)	(– 2, – 2, – 8)
118	(– 3, 0, 5)	(– 2, – 2, 0)	(– 5, – 7, 3)	(7, 2, 3)
119	(3, 0, 4)	(1, – 3, – 1)	(– 6, 1, 6)	(– 1, 2, – 2)
120	(1, – 4, – 5)	(1, – 6, – 6)	(– 6, – 4, 1)	(5, 8, 6)

Задача 3. 1. За даними табл. 3.1 знайти границю:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{A_1x^4 + B_1x^3 + C_1x^2 + D_1x + F_1}{A_2x^4 + B_2x^3 + C_2x^2 + D_2x + F_2}.$$

Таблиця 3.1

Номер варіанта	x_0	A_1	B_1	C_1	D_1	F_1	A_2	B_2	C_2	D_2	F_2
1	∞	0	1	– 100	0	1	0	200	0	15	0
2	∞	5	1	0	3	– 1	2	0	3	1	1
3	∞	2	0	– 7	4	0	0	105	7	2	– 5
4	2	0	0	1	– 4	1	0	0	0	2	1
5	3	0	0	1	0	– 9	0	0	1	– 2	– 3
6	∞	1	4	0	3	5	7	0	0	– 1	– 1
7	∞	9	– 1	8	0	6	0	2	15	0	11
8	∞	0	21	10	0	– 17	25	0	7	– 8	– 3
9	∞	0	1	– 3	3	– 1	0	2	3	0	1
10	– 1	0	1	1	– 1	– 1	0	1	1	1	1
11	0,4	0	5	– 2	5	– 2	5	– 2	– 5	2	0
12	∞	100	10	17	0	– 1	20	– 3	4	– 1	– 1
13	∞	12	3	– 1	0	7	4	– 2	–17	0	3
14	– 1	0	0	1	– 1	– 2	0	1	0	0	1
15	∞	0	92	3	– 4	0	4	0	25	2	1
16	– 1	0	0	1	0	– 1	0	0	1	3	2
17	2	0	2	– 2	1	1	0	1	– 1	3	– 3
18	∞	2	3	– 1	0	1	1	7	4	5	2
19	∞	0	– 9	5	6	0	0	3	– 4	5	1
20	∞	27	2	3	– 1	– 1	9	– 2	4	6	9
21	∞	0	0	1	– 1	1	0	2	0	3	– 1
22	– 3	0	1	5	3	– 9	0	1	8	21	18

Продовження табл. 3.1

Номер варіанта	x_0	A_1	B_1	C_1	D_1	F_1	A_2	B_2	C_2	D_2	F_2
23	∞	8	0	2	3	7	4	1	– 1	12	9
24	∞	0	0	1	– 1	3	0	0	5	– 2	4
25	∞	0	2	0	7	9	0	1	2	– 10	12
26	∞	17	0	– 3	4	29	1	21	18	2	– 3
27	2	0	0	1	– 5	6	0	0	1	12	20
28	0	1	1	0	0	0	1	– 2	0	0	0
29	∞	10	0	2	7	1	5	3	2	0	1
30	1	0	0	– 1	2	– 1	0	1	– 1	– 1	1
31	∞	0	1	27	3	9	7	21	11	0	9
32	∞	5	2	3	9	6	1	2	4	8	1
33	∞	0	0	1	0	1	0	2	6	3	4
34	∞	8	2	4	1	3	0	4	2	8	1
35	∞	49	– 70	– 3	20	4	16	2	5	1	7
36	1	0	1	– 3	3	– 1	0	1	2	– 1	– 2
37	– 3	0	1	9	27	27	0	1	3	– 4	– 12
38	– 1	0	0	2	1	– 1	0	0	1	– 6	7
39	1	0	1	0	0	– 1	0	0	0	1	– 1
40	∞	0	6	0	– 2	1	0	1	0	– 2	5
41	∞	10	1	3	1	1	2	– 4	6	– 3	1
42	∞	0	7	2	3	6	0	4	9	8	5
43	∞	– 3	1	12	1	5	1	6	11	2	8
44	1	1	0	0	– 2	1	0	1	0	– 2	1
45	1	0	0	1	4	– 5	0	0	1	0	– 1
46	∞	7	2	– 3	– 6	3	1	– 2	4	5	7
47	2/3	0	0	9	– 12	4	0	27	0	0	– 8
48	– 2	0	1	1	– 4	– 4	0	0	0	2	4

Номер варіанта	x_0	A_1	B_1	C_1	D_1	F_1	A_2	B_2	C_2	D_2	F_2
49	2/5	0	5	− 2	5	− 2	5	− 2	− 5	2	0
50	∞	13	7	4	1	3	1	0	2	7	8
51	2	0	5	0	0	40	0	− 1	−3	4	12
52	∞	23	2	1	3	− 1	1	2	4	2	7
53	∞	17	3	1	0	1	2	1	4	5	7
54	∞	0	2	17	3	1	2	5	6	8	3
55	∞	21	0	1	3	7	0	8	7	9	6
56	1	1	− 1	3	− 2	− 1	0	0	1	5	− 6
57	− 5	1	7	10	1	5	0	0	1	− 1	− 30
58	∞	12	3	2	1	7	7	− 2	− 4	5	6
59	3	2	− 5	− 3	1	− 3	0	0	1	4	− 21
60	∞	17	− 21	3	2	7	1	− 3	− 1	5	4
61	∞	0	16	7	9	12	0	8	9	6	1
62	∞	5	2	21	3	1	2	3	9	6	8
63	− 1	0	1	0	− 8	7	0	0	1	6	− 7
64	2	0	3	− 4	− 5	2	0	0	2	− 1	− 6
65	∞	− 10	− 1	6	5	0	1	− 2	− 14	2	7
66	∞	25	− 3	4	7	1	5	− 4	5	− 1	1
67	∞	11	− 5	− 9	3	2	5	− 3	− 1	2	1
68	∞	12	7	3	2	7	4	5	− 3	− 8	6
69	∞	0	3	2	8	6	5	2	3	1	7
70	∞	51	20	− 17	3	10	0	7	21	3	− 10
71	5	2	− 10	− 1	6	5	0	1	− 2	− 14	− 5
72	− 4	0	2	9	3	− 4	0	7	33	18	− 8
73	1	0	3	− 4	3	− 2	0	0	2	5	− 7

Номер варіанта	x_0	A_1	B_1	C_1	D_1	F_1	A_2	B_2	C_2	D_2	F_2
74	− 3	2	7	3	1	3	0	0	1	10	21
75	∞	0	2	7	5	3	1	9	8	6	12
76	∞	27	3	2	6	9	0	8	6	12	3
77	∞	19	21	3	4	7	1	12	16	4	2
78	∞	53	27	11	20	0	0	19	1	0	3
79	∞	0	11	1	2	3	11	0	1	3	1
80	7	1	− 5	− 14	− 1	7	0	0	2	− 9	− 35
81	− 0,5	0	0	6	19	8	0	0	10	13	4
82	− 3	1	5	6	3	9	2	6	1	4	3
83	∞	2	5	3	1	4	1	2	0	1	2
84	∞	7	1	3	2	1	2	15	3	0	1
85	∞	12	4	1	5	7	4	3	0	9	10
86	∞	0	2	8	13	17	15	0	13	11	0
87	∞	19	11	5	3	1	0	19	2	11	0
88	∞	23	21	29	17	1	1	17	29	23	21
89	− 1/3	0	0	21	25	5	0	0	6	5	1
90	2	3	− 6	1	− 3	2	1	4	− 14	− 2	4
91	∞	29	13	2	7	1	10	3	4	0	1
92	∞	0	5	7	9	17	0	2	3	4	8
93	∞	12	4	5	6	0	4	6	3	5	7
94	− 1	2	3	1	− 3	− 3	3	3	− 1	0	1
95	2	2	− 4	3	8	4	0	0	7	− 13	− 2
96	∞	7	3	12	4	5	1	2	13	9	8
97	∞	0	16	17	0	1	0	8	11	14	5
98	∞	25	11	6	7	0	10	0	12	4	3
99	0,5	0	0	10	− 3	− 1	0	0	8	2	− 3
100	5	0	1	− 2	− 16	5	0	2	11	8	− 15

Задача 3.1-1. За даними табл. 3.1-1 знайти границю $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Таблиця 3.1-1

Номер варіанта	α	$f(x)$	$g(x)$
1	0	$\operatorname{tg} x - \sin x$	x^3
2	0	$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$	$4x$
3	0	$1-\cos x$	x^2
4	0	$\sqrt{1+x}-1$	x
5	0	$1+\sin x-\cos x$	$1-\sin x-\cos x$
6	0	$\sqrt[3]{1+x^2}-1$	x^2
7	0	$\operatorname{tg} x$	$\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}$
8	– 8	$\sqrt{1-x}-3$	$2+\sqrt[3]{x}$
9	0	$\operatorname{tg} x-\cos x+1$	x
10	0	$\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}$	x
11	0	$\sin^2 x$	$\sqrt{1+x\sin x}-\cos x$
12	9	$9-x$	$\sqrt{x}-3$
13	0	$\sin 3x$	$\sqrt{x+2}-\sqrt{2}$
14	– 4	$\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}$	x^2+2x-8
15	0	$1-\cos 3x$	x^2
16	2	x^3-2x^2-x+2	$\sqrt[3]{x^2-3}-\sqrt[3]{x-1}$
17	0	$\operatorname{tg} 3x-\sin 3x$	$27x^3$
18	0	$\sqrt{x^2+1}-1$	$\sqrt{x^2+4}-2$
19	2	x^2-4	$\sin(x-2)$
20	0,5	$\arcsin(1-2x)$	$4x^2-1$
21	π/2	$\sin x-\sin^2 x$	$\cos^2 x$

Продовження табл. 3.1-1

Номер варіанта	α	$f(x)$	$g(x)$
22	0	$1-\cos mx$	x^2
23	2	$\sin(x-2)$	x^2-4
24	– π/4	$\sin\alpha+\sin 5\alpha$	$\cos\alpha+\cos 5\alpha$
25	0	$1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x$	$x\sin x$
26	– 1	$\sqrt{x^2+3}+2x$	$x+1$
27	0	$\cos(x+3)-\cos(x-3)$	x
28	1	$\sqrt[3]{x}-1$	$\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}-3$
29	0	$\operatorname{tg} x-\sin x$	x^3
30	1	$\sqrt[4]{x}-1$	$\sqrt[3]{x}-1$
31	π/4	$\sqrt{2}-2\cos x$	$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$
32	0	x	$\sqrt[3]{8-x}-\sqrt[3]{8+x}$
33	0	$\operatorname{tg} x-\sin x$	$\sin^3 x$
34	0	$\sqrt{1+x+x^2}-1$	x
35	0	$\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x$	$\sin 2x-\sin x$
36	2	$\sqrt{x^2+5}-3$	x^3-8
37	2	$x^2-\sqrt[3]{x^2-3}+3$	$\sqrt[3]{x^2+2x}$
38	π/2	$1-\sin x$	$1+\cos 2x$
39	0	$\sqrt{2}\operatorname{tg} 6x$	$\sqrt{1-\cos 4x}$
40	0	$x-\sqrt[3]{x}$	$2\sqrt{x}+x$
41	0	$\sin\frac{x}{2}\cdot\sin 4x$	$2x^2$
42	4	$x-4$	$\sqrt{2x+1}-3$
43	2π	$\sin 2x-2\operatorname{tg} x$	$\cos x-1$

Номер варіанта	α	$f(x)$	$g(x)$
44	1	$\sin(x-1)$	$2-\sqrt{5-x^2}$
45	0	$2-\sqrt{x+4}$	$\sin 2x$
46	3	$\sqrt{x^2+7}-4$	x^2-5x+6
47	0	$\mathrm{tg}\, 3x-\sin 3x$	$27x^3$
48	0	$\sqrt{x^2+1}-1$	$\sqrt{x^2+4}-2$
49	2	x^3-2x^2-x+2	$\sqrt[3]{x^2-3}-\sqrt[3]{x-1}$
50	0	$1-\cos 2x$	$\sin 2x$
51	4	$x+\sqrt{x}-6$	$x-5\sqrt{x}+6$
52	0	$\sqrt{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}$	x^2+x+2x^3
53	1	$\sqrt[3]{x}-1$	$\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}-3$
54	0	$(x^2+3x-1)\,\mathrm{tg}x$	x^2+2x
55	1	$(x^2-4x+3)\sin(x-1)$	$(x-1)^2$
56	– 1	$\sqrt{2x+3}-1$	$\sqrt{5+x}-2$
57	0	$1-\sqrt{2x+1}$	$\sin x$
58	3	$\sqrt{x^3+9}-2x$	$x-3$
59	0	$\sin x-\mathrm{tg}\, x$	x^3
60	π	$\mathrm{tg}\, x$	$\sin 2x$
61	π/4	$\sin x-\cos x$	$\cos 2x$
62	0	x	$\sqrt{1+3x}-1$
63	a	$\sqrt{ax}-x$	$x-a$
64	1	$\sqrt[3]{x}-1$	$\sqrt{x}-1$
65	0	$\sqrt[3]{1+mx}-1$	x

Номер варіанта	α	$f(x)$	$g(x)$
66	0	$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$	x
67	π	$\sqrt{1-\mathrm{tg}x}-\sqrt{1+\mathrm{tg}x}$	$\sin 2x$
68	π	$\sqrt{1+\cos x}$	$\sin x$
69	7	$2-\sqrt{x-3}$	$x2-49$
70	π/4	$\sin 2x-\cos 2x-1$	$\cos x-\sin x$
71	0	$1-\cos 2x+\mathrm{tg}2x$	$x\sin x$
72	0	$\sqrt{1+x\sin x}-\cos x$	$\sin 2x$
73	π	$\cos\frac{x}{2}$	$x-\pi$
74	– 1	$\cos\pi(x+1)$	$\sqrt[3]{x}+1$
75	π/2	$\sqrt{1+\cos 2x}$	$\sqrt{\pi}-\sqrt{2x}$
76	4	$x-4$	$\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}$
77	– 1	$\sqrt{x+10}-\sqrt{8-x}$	$x+1$
78	0	$\sqrt{x^2+1}-1$	$\sqrt{x^2+16}-4$
79	β	$\sin 2x-\sin 2\beta$	$x-\beta$
80	π	$\sin 2x$	$\sqrt{1+\cos^2 x}-\sqrt{2}$
81	0	$\sqrt{2x+1}-1$	$\sqrt{3x+4}-2$
82	0	$\mathrm{tg}2x$	$\sin 5x$
83	β	$\cos 2x-\cos 2\beta$	$x-\beta$
84	0	$\sqrt[3]{1+x^2}-1$	$x2$
85	1	$\sin(1-x)$	$\sqrt{x}-1$
86	0	$1-\cos x$	$x\left(\sqrt{1+x}-1\right)$

Номер варіанта	α	$f(x)$	$g(x)$
87	0	x	$\sqrt[4]{1+2x}-1$
88	$\pi/4$	tg x	$x-\pi/4$
89	0	3sin$x$ + sin2x	sin2x – sin3x
90	0	sin2x – 2sin$x$	(cos2x – 2cos$x$)x2
91	0	1 – cos4x	(1 + cos4x)x2
92	1	$\sqrt[3]{5x+3}-2\sqrt[3]{x}$	$\sqrt{3x+1}-2$
93	0	$\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}$	$\sqrt[3]{x-1}+1$
94	0	x3	$1-\sqrt[3]{x^3+1}$
95	0	$\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}$	tg x
96	– 8	$2+\sqrt[3]{x}$	$\sqrt{1-x}-3$
97	2	$\sqrt[3]{x^2-3}-\sqrt[3]{x-1}$	x3 – 2x2 – x + 2
98	$\pi/2$	cos2x	sin x – sin2x
99	0	x sin x	1 – cos 2x + tg2x
100	0	sin 2x – sin x	tg 2x tg x

Задача 3.1-2. За даними табл. 3.1-2 знайти границю $\lim\limits_{x\to\beta}\varphi(x)^{\psi(x)}$.

Таблиця 3.1-2

Номер варіанта	β	$\varphi(x)$	$\psi(x)$
1	0	1 – 2x	1/x
2	∞	(x + 1)/x	x
3	∞	(x + 3)x	5x – 2
4	∞	(2x + 1)/(2x + 3)	x + 1
5	∞	(2x + 3)/(5x – 1)	x + 3

Номер варіанта	β	$\varphi(x)$	$\psi(x)$
6	∞	(x2 + 2)/(x2 + 1)	x2
7	∞	(5x2 + 1)/5x2	$\sqrt{x}$
8	∞	(x2 + 1)/(x2 – 1)	x2
9	∞	(2x + 7)/(x – 1)	x
10	∞	(3x – 4)/(3x + 2)	(x + 1)/3
11	∞	(x + 1)/(2x – 1)	x
12	∞	(2x + 1)/(x – 1)	x
13	0	1 + sin2x	1/sin x
14	∞	1 + 1/x2	x
15	0	2x + 1	5/x
16	$\pi/4$	tg x	$1/\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$
17	∞	(5x3 + x2 – 1)/(5x3 – x2 + 1)	x2
18	0	1 – 4x	(1 – x)/x
19	∞	(7x – 1)/(7x + 3)	5x
20	0	cos x	ctg2x
21	$\pi/4$	sin 2x	tg22x
22	0	1 + tg x	ctg x
23	0	1 + 2x	1/x
24	0	1 + 3 tg2x	ctg2x
25	∞	(2x – 1)/(2x + 1)	2x
26	0	1 + sin x	cosec x
27	∞	(x2 – 2x + 1)/(x2 – 4x + 2)	x
28	0	sin x	tg x
29	∞	1 + 3/x	x
30	0	x	x

Номер варіанта	β	φ (x)	ψ (x)
31	1	x	$1/(1 - x)$
32	0	$E\ 2x + x$	$1/x$
33	∞	$\sqrt{x^2 + 3x} - x$	1
34	0	$1 - \sin 2x$	$\mathrm{ctg} 2x$
35	∞	$(3x2 + 2x - 1)/(3x2 - 2x + 1)$	$6x$
36	∞	$(7x2 + 3)/x2$	$x4$
37	0	$1/\sin^2 x - 1/\left(4\sin^2 \frac{x}{2}\right)$	1
38	1	$(1 - x)\,\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}$	1
39	0	$\mathrm{ctg}\ 7x \cdot \sin 5x$	1
40	∞	$1 + 2x$	$1/x$
41	$\pi/4$	$\mathrm{tg}\ x$	$\mathrm{tg}\ 2x$
42	-2	$(\arcsin(x + 2))/(x^2 + 2x)$	1
43	2	$(2x - 3)/(x - 1)$	$1/(x - 2)$
44	∞	$(3x + 2)/(3x + 7)$	$1/x$
45	0	$1 - \mathrm{tg}\ x$	$\mathrm{cosec}\ x$
46	$-\infty$	$\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 4x}$	1
47	∞	$\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}$	1
48	$\pi/2$	$\cos x$	$\mathrm{ctg}\ x$
49	∞	$(2x - 3)/(2x + 1)$	$x - 7$
50	∞	$(4x2 - 2x + 1)/(4x2 - 3x - 1)$	$x + 3$
51	0	$(x - \mathrm{arctg}\ x) / x2$	1
52	1	$(\ln x) / (1 - x2)$	1
53	0	$(e\ 5x + x)$	$1 / x$

Номер варіанта	β	φ (x)	ψ (x)
54	∞	$(x2 + 1) / x2$	$x2$
55	∞	$(x2 - 1) / (x2 + 1)$	$x2$
56	$\pi/6$	$\sin 3x$	$\mathrm{tg}^2 3x$
57	0	$1 - \sin^2 x$	$1 / \sin x$
58	0	$(\ln x) / \mathrm{ctg}\ x$	1
59	0	$2x + 1$	$10 / 2x$
60	∞	$x\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$	1
61	∞	$(5x + 1) / (5x - 1)$	$x - 3$
62	0	$2x + 1$	$1 / (x^2 + x)$
63	0	$1 - \mathrm{tg}\ x$	$\mathrm{ctg}\ x$
64	0	$1 - 3\ \mathrm{tg}^2 x$	$\mathrm{ctg}^2 x$
65	∞	$(7x + 3) / (7x - 3)$	$10x$
66	0	$\sqrt[3]{x}\cos\frac{1}{x}$	1
67	0	$1/x - 2 / (xe^{x} + x)$	1
68	∞	$1 + 7x$	$1/x$
69	∞	$(x^2 + 4x - 1) / (x^2 - 3x + 2)$	$x(2 + x)$
70	π	$\sin^2 \frac{x}{2}$	$-\mathrm{ctg}\ x$
71	∞	$(2x^2 + 1) / (x^2 - 1)$	x^2
72	∞	$(4x^3 + 2x - 1) / (5x^3 - 2)$	$3x - 1$
73	∞	$x(\ln(3x + 4) - \ln 3x)$	1
74	∞	$(2x + 3)(\ln(x + 2) - \ln x)$	1
75	∞	$1 + 7 / (x^2 - 1)$	$x^2 - 1$
76	0	$1 - 2x^2$	$1 / x^2$
77	∞	$(x^2 - 3x - 1) / (x^2 + 3x + 1)$	$(x^2 + 3x + 1) / x$

Закінчення табл. 3.1-2

Номер варіанта	β	φ (x)	ψ (x)
78	π/8	$\sin 4x$	$1 / \cos 4x$
79	∞	$(x^3 - 2x^2 + 1) / (x^3 + 2x^2 - 1)$	$(x^3 + 2x^2 - 1) / x^2$
80	∞	$(4x - 1) / (4x + 7)$	$x - 10$
81	0	$1 - \sin x$	$\operatorname{cosec} x$
82	∞	$(5x^2 + 11) / (5x^2 + 2)$	$\sqrt{x}$
83	0	$1 - \sin^2 x$	$1/\sin x$
84	∞	$1/x$	$\operatorname{tg} x$
85	∞	$x\left(\pi / 4 - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}\right)$	1
86	π/2	$1 - \cos x$	$1/\sin 2x$
87	0	$1 - 3\operatorname{tg}^2 x$	$\operatorname{ctg}^2 x$
88	∞	$(5x + 7) / (5x - 7)$	$2x$
89	0	$e^x + x$	$1/x$
90	π/2	$2x \operatorname{tg} x - \pi/\cos x$	1
91	∞	$x - \sqrt{x^2 - x + 1}$	1
92	0	$\cos x$	$\operatorname{ctg}^2 x$
93	π/4	$\sin 2x$	$\operatorname{tg}^2 2x$
94	0	$1 - 9x$	$(1 - x) / x$
95	∞	$(x^2 - 2x - 1) / (x^2 + 2x - 1)$	$(x^2 + 2x - 1) / x$
96	0	$(\ln(1+x))\lvert x^2 - 1 \rvert x$	1
97	π/2	$\operatorname{tg} x$	$2x - \pi$
98	∞	$(3x - 4) / (3x + 2)$	$(x + 1) / 3$
99	∞	$x(e^{1/x} - 1)$	1
100	0	x	$\sin x$

Задача 3.2. За даними табл. 3.2 дослідити функцію $y = f(x)$ на неперервність. Знайти точки розриву, якщо вони існують. Дослідити їхній характер і побудувати схематично графік функції.

Таблиця 3.2

Номер варіанта	$f(x)$	Номер варіанта	$f(x)$	Номер варіанта	$f(x)$	Номер варіанта	$f(x)$
1	$5^{\frac{1}{x-4}}$	26	$\dfrac{x-2}{\lvert x-2 \rvert}$	51	$\begin{cases} \sin\dfrac{\pi}{2x}; x > 0 \\ 1; x = 0 \\ \cos\dfrac{\pi}{2x}; x < 0 \end{cases}$	76	$\dfrac{\ln(x+1)}{x}$
2	$\dfrac{x^2 + 2x}{x-1}$	27	$\begin{cases} 0{,}5x^2; \lvert x \rvert < 2 \\ 2{,}5; \lvert x \rvert = 2 \\ 3; \lvert x \rvert > 2 \end{cases}$	52	$\dfrac{1-x}{(x-2)^3}$	77	$\dfrac{1-\cos x}{x^2}$
3	$\dfrac{x-2}{x^2 - 2x + 1}$	28	$\dfrac{x^3 - x^2}{2\lvert x-1 \rvert}$	53	$\dfrac{(x-3)^2}{x^2}$	78	$\dfrac{x}{\ln x}$
4	$\dfrac{x^2}{x^2 - 1}$	29	$\operatorname{arctg}\dfrac{9}{x-9}$	54	$1 + 7^{\frac{1}{x-5}}$	79	$x + \dfrac{1}{x}$
5	$\lg\dfrac{10-x}{x+2}$	30	$\dfrac{x}{x+2}$	55	$\dfrac{(x-2)^2}{x^2 - 4}$	80	$\dfrac{x^2 - 3}{x-1}$
6	$\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$	31	$\begin{cases} 2; x = 0 \text{ та } x = \pm 2 \\ 4 - x^2; -2 \le x \le 2 \\ 4; \lvert x \rvert > 2 \end{cases}$	56	$\dfrac{x^2 + 2x}{x+2}$	81	$\dfrac{2-x}{x-3}$
7	$0{,}5^{\frac{2x^2 - 6x}{x-3}}$	32	$2 - \dfrac{\lvert x \rvert}{x}$	57	$\dfrac{1}{x^2 - 9}$	82	$3^{\operatorname{ctg} x}$

6*

Номер варіанта	$f(x)$	Номер варіанта	$f(x)$	Номер варіанта	$f(x)$	Номер варіанта	$f(x)$
8	$2^{\text{tg}^2 x}$	33	$\frac{x^3+x}{2\lvert x\rvert}$	58	$\frac{3x}{x^2+4x+4}$	83	$\cos\frac{1}{x}$
9	$\log_2\frac{x^2-4}{x-2}$	34	$\frac{4-x^2}{\lvert 4x-x^3\rvert}$	59	$\begin{cases}\frac{\lvert x+1\rvert(x-1)}{x+1}; \\ x\ne -1\end{cases}$	84	$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$
10	$\frac{x^2+5x-6}{x-1}$	35	$1-2^{\frac{1}{x}}$	60	$2^{\frac{1}{x+1}}$	85	$\frac{3}{1-x^2}$
11	$\frac{x}{\lvert x\rvert}\sin 2x$	36	$\begin{cases}\frac{\sin x}{x}; x\ne 0 \\ 2; x=0\end{cases}$	61	$\frac{1}{x-x^3}$	86	$\frac{(x-2)(x^2+5x-6)}{\lvert x-1\rvert}$
12	$\begin{cases}\sin\frac{\pi}{2x}; x\ne 0 \\ 1; x=0\end{cases}$	37	$\frac{x^2+1}{x}$	62	$\begin{cases}\frac{\lvert x-1\rvert x^2}{x-1}; x<1 \\ 0; x=1 \\ x; x>1\end{cases}$	87	$\frac{x^2-5x+6}{x-2}$
13	$\frac{1}{1-2^{\text{tg}x}}$	38	$x-\frac{1}{\sqrt{x}}$	63	$\frac{\text{tg}x}{x}$	88	$2^{\frac{1}{x^2-1}}$
14	$e^{\frac{1}{1+2^{1/x}}}$	39	$\frac{x-4}{2x+4}$	64	$\frac{x}{x^2-4}$	89	$\begin{cases}4^{\frac{1}{x}}; x\ge 1 \\ x-1; -1<x<1 \\ 1; x\le -1\end{cases}$
15	$e^{\frac{1}{x^2-4x+3}}$	40	$\frac{2}{\lvert x\rvert}-1$	65	$e^{\frac{1}{x-1}}$	90	$\frac{1}{3^{\text{ctg}x}-1}$
16	$8^{\frac{1}{x-2}}$	41	$\frac{1}{x^2}-x$	66	$\begin{cases}x^2+3; x\le 1 \\ x+1; x>1\end{cases}$	91	$\frac{(x-2)^2}{x-1}$
17	$\frac{x+1}{x-1}$	42	$\frac{x^2}{x^2-4}$	67	$\frac{3^{\frac{1}{x-1}}-1}{3^{\frac{1}{x-1}}+1}$	92	$\frac{1-x^2}{1-x}$

Номер варіанта	$f(x)$	Номер варіанта	$f(x)$	Номер варіанта	$f(x)$	Номер варіанта	$f(x)$
18	$(2^{\frac{1}{x}}+2)/(2^{\frac{1}{x}}-2)$	43	$\frac{x\lvert x-1\rvert}{\lvert x\rvert}$	68	$\frac{x^2+\lvert x\rvert+x}{x^2-\lvert x\rvert+3x}$	93	$\frac{3}{4-x^2}$
19	$\begin{cases}5^x; -1\le x\le 1 \\ x^2-4; 1<x<2 \\ 1; x\ge 2\end{cases}$	44	$\log_3\frac{x^2-9}{\lvert x\rvert-3}$	69	$\frac{x-1+\lvert x-1\rvert}{x^2-1}$	94	$\frac{1}{x^3}$
20	$\frac{x^2-4}{x-2}$	45	$4^{\frac{1}{x-2}}$	70	$\frac{x^2+2x}{x+1}$	95	$\frac{e^x}{x}$
21	$3^{\frac{\log_3(x-1)}{3}}$	46	$\log_2\frac{x-4}{x^2-16}$	71	$\frac{x^2}{\lvert x\rvert+1}$	96	$e^{\frac{1}{x}}$
22	$\frac{(2-x)(x^2-x-2)}{\lvert x+1\rvert}$	47	$\frac{x^2+5x-6}{x-1}$	72	$x^2+\frac{1}{x}$	97	$e^{\frac{2x}{1-x^2}}$
23	$\frac{1}{4x(x-1)}$	48	$x^2+\frac{1}{x}$	73	$\frac{1}{1+e^{1/x}}$	98	$e^{-\frac{1}{x^2}}$
24	$\frac{2}{1+2^{\text{tg}x}}$	49	$\frac{1}{1+2^{\text{ctg}x}}$	74	$\frac{(x-2)^2}{x+1}$	99	$2^{\text{tg}x}$
25	$2^{\frac{1}{x}}$	50	$\frac{x+2}{x^2-9}$	75	$2^{\text{ctg}x}$	100	$\text{arctg}\frac{1}{x}$

Задача 4. Крива другого порядку задана рівнянням:

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

За даними наведеними в табл. 4 визначити тип цієї кривої, записати її канонічне рівняння і побудувати.

Таблиця 4

Номер варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}	Номер варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}
1	1	– 2	3	– 1	0	1	51	0	1	3	1	– 3	5
2	3	– 1	3	2	2	– 4	52	21	1/2	– 10	0	0	0
3	5	12	– 1	2	– 2	– 1	53	1	– 2	4	5	– 10	25
4	0	– 3	0	0	1	3	54	1	2	4	– 3	– 3	0
5	– 5	– 2	1	5/2	– 1/2	0	55	4	– 2	1	2	– 1	1
6	2	5/2	–3	– 3/2	5/2	– 2	56	1	1	1	– 4	0	4
7	1	– 1	1	– 2	– 3	3	57	1	– 1	– 3	– 2	– 3	3
8	3	1	3	3	– 1	– 5	58	32	30	7	– 8	– 1	1
9	4	– 2	1	6	– 3	9	59	2	– 3	5	– 1	1	– 10
10	1	0	0	3	– 4	1	60	0	5	– 2	3	2	21
11	1	1	1	– 5/2	– 7/2	6	61	1	5/2	– 14	0	0	0
12	7	2	2	– 20	– 16	5	62	1	1/2	1	– 1	– 2	– 12
13	1	– 1	1	½	–1	3	63	1	– 2	3	1	– 1	0
14	1	– 1	1	– 5/2	– 7/2	6	64	2	– 2	1	– 1	3	– 3
15	2	– 3/2	– 1	3/2	1	0	65	0	– 1/2	1	– 5/2	7/2	10
16	1	4	4	– 3	– 1	1	66	3	1	2	3/2	– 2	0
17	1	1	1	1	1	– 4	67	1	– 3/2	1	0	1	1
18	8	0	– 3	1	– 5/2	1	68	3	7/2	5	2	5/2	1
19	1	– 1	2	– 2	– 3	29	69	9	– 6	2	– 4	0	0
20	9	– 3	1	1	0	– 7	70	1	0	0	– 1/2	½	0
21	1	– 1	0	1	1	1	71	5	12	– 1	2	0	1
22	1	1/2	1	– 1	2	– 12	72	2	2	– 3	– 1	1	– 2

Закінчення табл. 4

Номер варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}	Номер варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}
23	9	– 6	4	– 8	1	0	73	3	1	3	3	– 1	– 5
24	1	– 1	1	– 2	– 3	3	74	1	0	0	–1/2	– 1	3
25	6	– 2	9	– 2	–16	– 6	75	3	– 1	3	2	2	– 4
26	1	– 1	– 2	– 2	– 3	3	76	1	0	– 1/2	– 1/2	1/2	0
27	1	– 1	1	1	– 3	0	77	3	7/2	5	2	5/2	1
28	1	1	1	1	1	– 4	78	2	5/2	– 3	– 3/2	– 25/4	– 2
29	9	– 3	1	– 3	1	0	79	1	– 1	– 3	– 2	– 3	3
30	1	0	1	– 2	– 3	0	80	1	1	1	– 5/2	– 7/2	6
31	0	0	2	4	6	– 3	81	2	5/2	– 3	3/2	8	0
32	1	– 2	4	1	– 1	– 1	82	1	3	9	0	9	0
33	5	6	0	– 11	– 6	– 19	83	2	– 1/2	– 1	–15/2	– 3/2	18
34	3	5	7	2	1	1	84	1	5/4	1	– 5/2	– 7/2	6
35	1	– 1	2	– 2	– 3	3	85	0	1/2	– 1	– 1	3/2	– 1
36	3	– 3	5	– 2	– 3	10	86	3	– 7/2	2	– 2	3	– 5
37	9	12	16	–20	15	0	87	1	2	0	–2	–1/2	4
38	1	– 1	– 2	– 2	– 3	– 13/3	88	2	5/2	– 3	3/2	8	– 5
39	3	1	– 1	4	5	14	89	1	1/2	1	1	3/2	– 3
40	0	– 1/2	1	5/2	7/2	10	90	6	– 1/2	0	– 1	2	0
41	3	– 2	4	– 1	– 2	2	91	2	– 2	5	– 4	0	6
42	1	3	9	2	6	– 5	92	1	5/3	1	– 5/2	– 7/2	6
43	3	– 1	3	2	2	– 4	93	2	2	5	– 4	0	6
44	5	2	8	– 16	– 28	80	94	1	– 1	2	– 2	– 3	3
45	1	– 1/2	– 1	– 1/2	– 1/2	0	95	6	– 1/2	– 1	5/2	– 3/2	2
46	9	– 2	6	3	– 4	2	96	2	2	3	– 3/2	– 3/2	0
47	1	3	1	3	1	– 1	97	1	1/2	1	1	3/2	– 3
48	5	– 3/2	1	– 3/2	1	– 5	98	3	1	2	3/2	– 2	0
49	2	– 2	5	– 8	0	3	99	1	– 1	1	– 2	– 3	3
50	1	– 1	2	– 2	– 3	3	100	3	– 7/2	2	3	– 2	– 5

Задача 4.1. За даними табл. 4.1 знайти похідну y'_x функції $y = f(ax+b)\cdot\varphi(\psi(u))$.

Таблиця 4.1

Номер варіанта	$f(x)$	$\varphi(x)$	$\psi(x)$	$u(x)$	a	b
1	$\arccos\sqrt{x}$	$\sin x$	x	x^2	2	3
2	$\mathrm{tg}\, 2x$	$\sin x$	x^2	x	1	2
3	3^x	$\mathrm{tg}\, x$	x	$\sqrt{x}$	3	4
4	$\sin 5x$	x^2	x	x	2	3
5	7^x	$\arccos x$	x	$7x$	1	2
6	$\arcsin\sqrt[3]{x}$	$\mathrm{tg}\, x$	$3x$	x	2	1
7	x^3	$\arcsin x$	$\sqrt{x}$	$2x$	3	1
8	4^x	$\sin x$	$5x$	$6x$	2	1
9	$\mathrm{arctg}\, x$	$\sin x$	$2x$	$\sqrt{5x}$	2	1
10	$\arccos x$	$\mathrm{tg}\, x$	$3x$	$\sqrt{x}$	5	6
11	x^2	$\mathrm{tg}\, x$	$2x$	$\sin 2x$	3	2
12	x	x^2	$5x$	$\ln x$	2	1
13	x^{-5}	$\mathrm{tg}\, x$	$2x$	$\cos(7x+1)$	6	7
14	x^{-2}	x^2	$3x$	$\cos\sqrt{7x}$	2	3
15	x^{-3}	x^3	$\ln(3x+5)$	$\sqrt{x}$	2	1
16	x^7	x^{-1}	x^2	$\sin(7x+5)$	3	1
17	$\sin\sqrt{x}$	x^{-2}	x^5	$\mathrm{tg}\, 8x$	4	2
18	$\mathrm{arcctg}\sqrt{x}$	x^{-2}	x^4	$\mathrm{tg}\, 9x$	5	2
19	$\arcsin\sqrt{x}$	x^3	x^2	$\ln(3x+2)$	2	5
20	$(3+2x)^2$	$\mathrm{tg}\, x$	$7x$	$\sqrt{2x}$	4	1
21	$6x+5$	$\cos x$	$7x$	$\sqrt{7x}$	2	1
22	$\sqrt{2x+5}$	$\mathrm{arctg}\sqrt{x}$	x	$\sqrt{5x+1}$	2	3
23	x^{-5}	$\mathrm{arcctg}\sqrt{x}$	x^3	$3x+1$	5	6
24	x^{-6}	x^2	$\ln 8x$	$5x+1$	2	3
25	$\mathrm{arctg}\sqrt{2x}$	$\arcsin x$	x	$3x$	3	6
26	5^x	$\arccos x$	x^2	$7x+2$	1	2
27	x^{-5}	x^2	$\sin 2x$	$3x+2$	3	4
28	x^{-4}	x^3	$\cos 2x$	$\sqrt{3x+1}$	2	1
29	x^{-2}	x^5	$\sin 7x$	$\cos 2x$	3	4
30	3^x	x^2	$\cos 8x$	$\sqrt{3x}$	2	1
31	$\sin(3x+2)$	x^{-1}	$\cos 8x$	$\sqrt{5x+2}$	6	2
32	$\cos(4x+5)$	x^{-2}	$\sin 9x$	$\sqrt{x}$	6	3
33	$(2x)^x$	$\sin x$	$\sin x$	$\sqrt{x}$	2	1
34	$(\sqrt{x}+5)^3$	$\sqrt{2x+3}$	$x+4$	$2x+3$	3	4
35	$\sin x+\cos x$	x^5	$\cos 8x$	x	2	3
36	$\sin 7x$	$\sin 7x$	x	$\sqrt{2x+5}$	3	4
37	$(3x+2)^3$	$2x+5$	$7x+4$	$\mathrm{tg}\, 8x$	3	2
38	$\sqrt{4x+5}$	$\sqrt{7x+2}$	$\sin 8x$	$5x+3$	8	1
39	$(3x)^2$	$\mathrm{ctg}\, 9x$	$\ln 2x$	x^2	1	1
40	$3x^2+2$	x	$(6x)^2$	$3x$	2	3
41	$\cos 9x+1$	$\cos 9x$	$3x$	$\sqrt{5x+6}$	4	3
42	x^3+2	x^{-2}	$4x+1$	$\sin 8x$	3	7
43	$(4x+5)^{-6}$	$2x+3$	$8x+1$	$\mathrm{ctg}\, 9x$	3	4
44	$(3x+5)^2$	x^{-1}	$\sin x$	$\sin x$	3	1
45	$\arcsin x+\sqrt{x}$	x^{-2}	$3x+1$	$\sqrt{x}$	2	3
46	$4x^2+2$	x	$(8x)^2$	$7x$	4	3

Продовження табл. 4.1

Номер варіанта	$f(x)$	$\varphi(x)$	$\psi(x)$	$u(x)$	a	b
47	$(4x+1)^3$	x^5	$\mathrm{tg}\,x$	$3x+4$	2	1
48	$\left(\sqrt{x}+6\right)^7$	$\sqrt{3x+4}$	$2x+1$	$3x$	7	10
49	3^{2x+1}	$\arcsin x$	$\arcsin 8x$	$2x+5$	4	2
50	$\sqrt{x}+\sqrt{3x+2}$	x^{-5}	$\ln(3x+2)$	$\sqrt{x+1}$	2	1
51	$(4x+1)^2$	$\sin 7x$	$\mathrm{tg}\,9x$	$\sqrt{x}$	1	2
52	$\sin 9x+6$	$\sin 9x$	$\cos 9x$	$\sqrt{2x+1}$	3	2
53	$\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x$	x^{-3}	$\sin 8x$	$\sqrt{x}$	2	1
54	$\sin 7x+8$	$\sin 8x$	$\sqrt{3x+1}$	$2x+1$	3	4
55	x^3+5	x^{-3}	$\sin 8x$	$3x+1$	2	3
56	$\arccos x+\sqrt{x}$	x^{-1}	$3x+5$	$4x+2$	3	1
57	2^{7x}	x^{-2}	$\sin 8x$	$5x+3$	1	4
58	$\left(\sqrt{2x}+6\right)^{-3}$	$2x+7$	$4x+2$	$\sqrt{x}+3$	8	10
59	$(2x+1)^{-2}$	x^2	$\cos 4x$	$\sqrt{2x+1}$	2	3
60	$\mathrm{tg}\,9x+5$	$\mathrm{ctg}\,9x$	x^2	$(3x+2)^2$	4	1
61	$\sin\sqrt{x}$	x^{-6}	$\arcsin x$	$4x+3$	2	1
62	$\cos 5x+3$	$\cos 7x$	$\sqrt{2x+1}$	$3x+4$	3	2
63	$\mathrm{arctg}\,x+\sqrt{x}$	x^{-2}	$3x+1$	$\sqrt{x}$	3	2
64	$7^{\sin x}$	x^{-3}	$5x+7$	$\sqrt{2x+1}$	1	3
65	$(5x)^2$	$\mathrm{tg}\,x$	$\mathrm{ctg}\,x$	$3x+1$	3	1
66	$\cos 5x+6$	$\cos 3x$	$\sqrt{3x+1}$	$4x+1$	2	1
67	$\left(\sqrt{7x}+5\right)^{-4}$	$4x+5$	$2x+1$	$\sqrt{3x}$	8	9
68	$\sin 8x$	x^{-1}	$\sin x+\cos x$	$\sqrt{2x}$	3	1
69	$\sqrt{x}+\sin 8x$	x^5	$\mathrm{tg}\,x$	$\sqrt{x}$	2	3

Продовження табл. 4.1

Номер варіанта	$f(x)$	$\varphi(x)$	$\psi(x)$	$u(x)$	a	b
70	$\sqrt{x}+\sqrt{3x}$	x^2	$\ln x$	$4x+5$	2	1
71	$(x+5)^6$	$\mathrm{tg}\,2x$	$\ln x$	x^2	2	4
72	$5^{\cos 3x}$	x^3	$\sin 8x$	$5x+1$	3	1
73	$\mathrm{arctg}\,x+\sqrt{x}$	$2x+6$	$7x+3$	x^3	3	4
74	$\cos 5x+6$	$\sin 5x$	$\sqrt{2x+1}$	$3x+2$	3	1
75	$(8x)^2$	$3x+4$	$5x+6$	x	2	1
76	$\mathrm{arctg}\,\sqrt{x}+x^2$	x^3	$4x+1$	$\sqrt{x}$	3	4
77	$\mathrm{arcctg}\,\sqrt{x}$	x^3	$\arcsin\sqrt{x}$	$4x+1$	7	6
78	$(2x+3)^3$	$4x+1$	$\sin 8x$	$\sqrt{x}$	2	4
79	$\mathrm{arcctg}\,\sqrt{x}+x^5$	x^2	$\cos 9x$	$3x+1$	2	1
80	$\left(\sqrt{9x}+2\right)^4$	$5x+3$	$\sqrt{5x}$	x^2	7	10
81	$(3x)^2$	$\cos x$	$\cos x$	$\sqrt{x}$	3	2
82	$\sqrt{x}+\sqrt{2x+1}$	x^2	$\ln x$	$7x+5$	2	1
83	$\arcsin\sqrt{x}$	$\sin 7x$	$\mathrm{ctg}\,9x$	$\sqrt{x}$	2	3
84	$\mathrm{tg}3x+\sqrt{x}$	$\mathrm{tg}\,4x$	$\sqrt{2x+1}$	$7x+2$	10	1
85	$\arccos 3x$	x^3	$\arcsin\sqrt{x}$	$7x+3$	10	9
86	$\mathrm{tg}\,9x$	x^{-2}	$\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x$	$3x+2$	3	7
87	$\mathrm{ctg}^2(3x+5)$	x^{-1}	$\sin^2(7x+5)$	$x+3$	2	1
88	$4x^3+1$	x^{-5}	$\sin\sqrt{x}$	$2x+1$	2	1
89	$\mathrm{tg}\sqrt{x}+\sqrt{x}$	x^5	$7x+2$	$4x+3$	4	3
90	$(x+1)^3+\sqrt{2x+1}$	$4(2x+3)$	$\sin\sqrt{x}$	$\sin 8x$	2	1
91	$(3x)^2$	$\sin 9x$	x^{-1}	$3x$	1	4
92	$\mathrm{ctg}\,5x+\sqrt{2x}$	$\mathrm{tg}\,5x$	$\sqrt{3x+1}$	$2x$	7	1

Номер варіанта	$f(x)$	$\varphi(x)$	$\psi(x)$	$u(x)$	a	b
93	$\arccos 4x$	$2x+1$	$\mathrm{tg}\, x$	$2x$	5	4
94	$\mathrm{ctg}\, 9x$	x	$(3x)^x$	$2x$	1	1
95	$\sqrt{x}+\sqrt{7x+1}$	x^{-2}	$\sin 8x$	$3x+1$	2	1
96	$(5x+4)^6$	$\sin 8x$	$5+\sqrt{x}$	$3x$	4	2
97	$\left(\sqrt{2x}+5\right)^{-3}$	$3x+2$	$\ln 3x$	x^2	9	10
98	$\mathrm{ctg}\sqrt{x}+x$	x^5	$2x+3$	$3x+1$	3	4
99	$\arcsin\sqrt{x}$	x^3	$\arcsin\sqrt{x}$	$2x$	3	4
100	$(2x)^2$	$\mathrm{ctg}\, x$	x^3	$7x+2$	1	1

Задача 4.2. За даними табл. 4.2 дослідити функцію $y=\dfrac{x^2+ax+b}{cx+d}$ та побудувати її графік.

Таблиця 4.2

Номер варіанта	a	b	c	d	Номер варіанта	a	b	c	d
1	2	17	1	4	51	2	49	– 1	– 2
2	2	25	1	2	52	2	37	– 1	– 1
3	3	51	– 1	– 2	53	3	21	– 1	– 4
4	4	25	– 1	– 4	54	5	30	– 1	1
5	2	33	1	– 1	55	6	57	1	2
6	5	12	1	– 3	56	8	16	– 1	– 1
7	8	41	1	4	57	6	25	1	3
8	6	34	– 1	– 3	58	7	59	– 1	– 2
9	7	37	1	4	59	6	41	– 1	– 1
10	5	11	– 1	2	60	5	8	1	1
11	2	17	– 1	– 4	61	2	65	1	1
12	2	61	1	– 1	62	2	61	– 1	1

Номер варіанта	a	b	c	d	Номер варіанта	a	b	c	d
13	3	66	1	1	63	3	36	1	3
14	5	15	– 1	– 2	64	5	35	– 1	2
15	2	33	– 1	1	65	6	57	– 1	– 2
16	6	33	1	4	66	8	16	1	– 1
17	8	41	– 1	– 4	67	6	25	– 1	– 3
18	6	44	1	2	68	7	70	1	1
19	7	37	– 1	– 4	69	6	57	1	1
20	5	11	1	– 2	70	5	22	– 1	2
21	2	33	1	3	71	2	65	– 1	1
22	2	17	– 1	– 1	72	2	17	1	1
23	3	66	– 1	– 1	73	3	36	– 1	– 3
24	5	20	1	1	74	5	35	– 1	2
25	2	41	1	– 2	75	6	69	1	1
26	6	33	– 1	– 4	76	8	16	– 1	- 1
27	8	27	– 1	1	77	6	33	12	2
28	6	44	– 1	– 2	78	7	70	– 1	– 1
29	7	48	1	3	79	6	57	– 1	1
30	5	10	– 1	1	80	5	22	1	– 2
31	2	33	– 1	– 3	81	2	13	1	3
32	2	25	– 1	– 2	82	2	9	1	2
33	3	16	1	3	83	3	51	1	2
34	5	20	– 1	– 1	84	5	13	1	1
35	2	41	– 1	2	85	6	69	– 1	– 1
36	6	45	1	3	86	6	33	– 1	– 2
37	8	29	1	– 2	87	7	37	1	3
38	6	54	1	1	88	7	37	– 1	- 3
39	7	48	– 1	– 3	89	6	24	1	2

Номер варіанта	a	b	c	d	Номер варіанта	a	b	c	d
40	5	10	1	–1	90	5	19	–1	1
41	2	49	1	2	91	2	13	–1	–3
42	2	37	1	2	92	2	9	–1	–2
43	3	21	1	4	93	4	25	1	4
44	5	30	1	–1	94	5	13	–1	–1
45	6	45	–1	–3	95	6	34	1	3
46	8	29	–1	2	96	7	46	–1	–2
47	6	54	–1	–1	97	7	26	1	2
48	7	59	1	2	98	8	56	1	1
49	6	41	1	1	99	6	24	–1	–2
50	5	8	–1	–1	100	5	19	1	–1

Задача 4.3. За даними табл. 4.3 знайти гострий кут між дотичними до кривої $y = ax^2 + bx + c$, що проходять через точку $M_0(x_0; y_0)$.

Таблиця 4.3

Номер варіанта	a	b	c	x_0	y_0	Номер варіанта	a	b	c	x_0	y_0
1	1	2	1	2	–1	51	–1	–6	–9	2	1
2	1	6	9	–1	–1	52	–2	–16	–32	1	3
3	2	16	32	–2	–1	53	–1	–4	–4	1	2
4	1	4	4	4	–3	54	–3	6	–3	2	1
5	1	–8	16	–3	–2	55	–2	20	–50	4	1
6	–2	16	–32	–3	3	56	1	2	1	1	–2
7	–3	6	–3	3	4	57	–12	16	–32	–2	1
8	1	2	1	–3	–2	58	–3	6	–3	1	4
9	1	6	9	–2	–1	59	1	–12	36	–4	–1
10	–2	20	–50	–2	3	60	1	4	4	4	–1
11	–1	–6	–9	2	3	61	–2	–16	–32	2	1

Номер варіанта	a	b	c	x_0	y_0	Номер варіанта	a	b	c	x_0	y_0
12	2	16	32	–1	–1	62	–2	20	–50	3	6
13	1	4	4	3	–3	63	1	2	1	–2	–2
14	1	–8	16	–3	–1	64	1	–12	36	–5	–2
15	–2	16	–32	–2	4	65	1	–8	16	–2	–1
16	1	2	1	2	–2	66	1	18	81	–3	–3
17	–3	6	–3	3	3	67	1	6	9	–4	–1
18	–2	20	–50	–2	2	68	–1	–4	–4	1	3
19	–1	–6	–9	2	2	69	2	16	32	2	–1
20	–2	–16	–32	1	1	70	1	–8	16	–1	–3
21	1	4	4	4	–2	71	–2	20	–50	3	5
22	–3	6	–3	3	2	72	1	2	1	1	–3
23	–2	20	–50	4	5	73	–2	16	–32	–1	3
24	1	2	1	–3	–1	74	–1	–6	–9	1	3
25	1	6	9	–3	–1	75	–3	6	–3	1	3
26	2	16	32	4	–1	76	1	4	4	3	–1
27	1	–8	16	–2	–4	77	–2	–16	–32	2	2
28	–3	6	–3	2	4	78	1	–12	36	–4	3
29	–2	16	–32	–2	3	79	–2	20	–50	3	4
30	–2	20	–50	4	4	80	1	2	1	–1	–1
31	1	–12	36	–1	–1	81	1	6	9	–1	–2
32	1	2	1	2	–3	82	1	–8	16	–1	–2
33	–2	–16	–32	1	2	83	–2	16	–32	–1	2
34	1	6	9	–2	–4	84	–3	6	–3	1	2
35	–1	–4	–4	1	1	85	–1	–4	–4	2	1
36	1	–8	16	–2	–3	86	–2	–16	–32	2	3
37	–2	16	–32	–2	2	87	–20	20	–50	3	3
38	–3	6	–3	2	–3	88	1	2	1	–2	–1
39	–2	20	–50	4	3	89	1	–8	16	–1	–1

Номер варіанта	a	b	c	x_0	y_0	Номер варіанта	a	b	c	x_0	y_0
40	1	2	1	1	–1	90	–2	20	–50	3	2
41	2	16	32	3	–1	91	–3	6	–3	1	1
42	–3	6	–3	2	2	92	1	4	4	2	–1
43	1	–12	36	–2	–1	93	1	6	9	–1	–3
44	2	28	98	–5	–5	94	2	16	32	1	–1
45	1	4	4	5	–1	95	–2	20	–50	3	1
46	–2	20	–50	4	2	96	1	2	1	–1	–2
47	–2	28	–98	3	4	97	1	–12	36	–4	–4
48	1	2	1	–2	–3	98	–2	16	–32	–1	1
49	1	–8	16	–2	–2	99	–1	–4	–4	2	2
50	1	–12	36	–3	–1	100	–1	–6	–9	1	2

Задача 4.4. За даними табл. 4.1 знайти похідну y'_x функції у, заданої рівнянням $f\left(a\varphi(u(x))+b\psi(u(y))\right)=\varphi(x)$.

Задача 5.1. За даними табл. 5.1 знайти повний диференціал функції* $Z=\alpha\left(f(y)\right)^{g(x)}+\beta g(x)h^{\gamma}(u)+\gamma\dfrac{h(u)}{q(u^2)}+\nu\left[h(u)\right]^{q(u)}$ двох змінних x і y.

Таблиця 5.1

Номер варіанта	α	β	γ	ν	$f(y)$	$g(x)$	u	$h(u)$	$q(u)$
1	0	1	1	1	y^2+5	x^2+x	xy	$\mathrm{arctg}\, u$	$\sin u$
2	0	1	1	1	5^y+y	$\sin x^2$	$x+y$	$\mathrm{arctg}\, u$	$\cos^2 u$
3	1	0	2	1	y^7+y	$\mathrm{tg}\,(x+7)$	x^2y	$\mathrm{arctg}\, u$	$\sin^2 u$
4	0	1	2	2	$\sin y^2$	x^3+5x	x^2+y	$\mathrm{arctg}^2\, u$	$\sin^3 u$
5	1	1	1	1	y^5+15y	$\cos^3 x$	xy^2	$\mathrm{arctg}^2\, u$	$\sin u^3$
6	1	1	1	1	25^y	$\sin x^9$	$x+y+5$	$\mathrm{arctg}^2\, u$	$\arcsin u$
7	1	0	2	1	$15\sin y$	$\cos\,(x+10)$	x^2+y^2	$\mathrm{arcctg}\, u$	$\arcsin^3 u$
8	1	1	2	1	$8y$	$\sqrt[5]{x^3+8}$	x^2+y^2+9	$-\mathrm{arcctg}\, u$	$\arcsin^2 u$
9	0	1	3	2	$\mathrm{ctg}^2\, y$	$\ln\,(x^3+x)$	$x+\sin x$	$\arccos u$	$\sqrt[10]{u^2+\ln u}$
10	1	1	1	1	y^{11}	x^x	x^9+9y	$\arccos u$	$\lg\,(u+u^2)$
11	1	1	3	1	$\ln y$	5^x+6	$x+y$	$\arccos u^2$	$\ln u$
12	1	0	2	1	$\ln y$	$x+5$	xy	$\sin^2 u$	$\log_{14} u$
13	1	0	0	1	y^{y^2}	$5x^x$	$5x+y$	$\sin^2 u$	$\log^2_{17} u$
14	1	1	0	1	y^y	$3x+7$	x^3+y^3	$\sin u^5$	$\lg\,(7u^2+u)$
15	1	0	0	1	$y^{\ln y}$	$x+13^x$	x^3y	$\sqrt{\sin u}$	$\sqrt[4]{\lg(u+5)}$
16	1	0	0	1	y^{y^2}	14^x	x^2y^3	$\sqrt[3]{\cos u}$	$\log_{1/2}(u+5)$
17	1	1	0	1	$y^{10}+5^y$	$x+7$	x^2+y^3	$\cos^2 u$	$\log_3(u^2+5)$
18	1	0	1	1	11^y+7	x^x	$\lg(xy)$	$5\sin u$	$\cos^5\,(u+7)$
19	1	0	1	1	$\cos y$	$\mathrm{tg}\, x$	x^7y	$\sqrt{\sin u}$	$\sqrt[3]{\lg_3 u}$

* Параметри α, β, γ, ν може змінювати викладач.

Номер варіанта	α	β	γ	ν	$f(y)$	$g(x)$	u	$h(u)$	$q(u)$
20	1	0	0	1	y^y	x^2+8	xy	$\sqrt[7]{\operatorname{tg} u}$	$\log_5(u^2+8u)$
21	1	1	0	1	$\operatorname{tg} y$	$\operatorname{arctg}^2 x$	x^3y	$\arcsin u$	$\log_{11} u$
22	0	1	1	1	$\operatorname{ctg} y$	$\arcsin x^2$	xy^3	$\arccos u$	$\sqrt{u^2+7}$
23	1	0	1	1	$\operatorname{arctg} y$	x^3+17x	y^2+5x	$\sqrt{\operatorname{tg}(u+5)}$	$\cos^2(u+1)$
24	1	1	1	1	y^2	$-x+7$	xy	$\operatorname{arctg} u$	$\log_5 u$
25	1	1	0	0	25^y	x^3+9	$x^9\sin y$	$\cos u$	$\log_7 u$
26	0	1	1	1	y^4+17y	$x^{\sin x}$	xy^2	$\sin u$	$\cos u^2$
27	1	1	0	1	$5^y+\ln y$	$\cos x+x$	x^6+y^5	$\arcsin u^2$	$\sin u^2$
28	1	1	1	1	$\arcsin y$	$\cos 2x$	xy^2	$\arccos u$	$\cos u^3+u$
29	1	0	1	1	$\operatorname{tg}^2 y$	$\cos^2 x$	x^3y	$\operatorname{arctg} u$	$\ln u$
30	0	1	1	0	$\operatorname{tg} y$	$x+e^x$	e^{xy}	$\operatorname{arcctg} u$	$\ln(5^u+u)$
31	1	1	1	1	y^8+9^y	e^{x^2}	$\sin^2(xy)$	$\sqrt{u^2+u}$	$\ln^2 u$
32	2	2	2	3	y^α	5^{x^2}	$\cos^3(x^2y)$	$\sqrt[10]{u^7+5u}$	$\log_2 u$
33	2	0	2	1	y^γ	e^{x^α}	e^{x+y}	u^9+u^3	$\cos u+5$
34	1	0	3	2	2^y+5	e^{7x}	$x+y^2$	u^2+5	$\sin(u+7)$
35	1	0	1	1	$y^{15}+y$	$\cos x^2$	xy^4	$\sqrt[5]{\arcsin u}$	e^{u+u^2}
36	1	0	1	1	y^2+4	x^x	$xy+10$	$\arcsin u$	u^5
37	0	1	1	1	4^y	$x+\sin x$	$x+yx^2$	$\arccos u^2$	u^7
38	1	0	1	1	y^4+5	$\arcsin x$	10^xy	$\cos u$	7^u+5
39	1	1	0	1	14^y+y	$\cos x^2$	y^x+5x	$\arccos u^2$	5^u+u
40	1	1	1	0	$4^{y^2}+9$	$x^{\cos x}$	10^yx^2	$\sin u^3$	$5^u+\sin u$
41	1	1	1	1	$y^2+\sin y$	$\cos x+x$	x^4y	$\cos u^5$	5^u
42	0	1	1	1	$\sin y^2$	x^{x^2}	xy^5	$\cos u^7$	u^7+7
43	1	0	1	1	y^y	$\cos x$	xy^8	$\sin u^7$	17^u
44	1	1	1	1	y^{14}	$\sin x^2$	y^x	17^u	$\sin u^2$

Продовження табл. 5.1

Номер варіанта	α	β	γ	ν	$f(y)$	$g(x)$	u	$h(u)$	$q(u)$
45	1	0	1	1	14^y	$\cos x^3$	x^y	u^{17}	u^2+16
46	1	0	1	1	y^{12}	$x^{\sin x}$	xy	u^2	10^u
47	1	1	0	1	y^8	x^6+8	xy^2	u^3	e^{u^2}
48	1	0	1	1	8^y	7^x+4	$5xy$	u^8+9u	e^u
49	1	1	1	0	y^{y^2}	x^x	$5x^2y$	u^4+1	e^u
50	1	1	1	1	8^y	$5x$	xy^2	u^7	e^{u^2}
51	1	1	0	1	y^8	$5x^2$	xy	u^6	$\cos u$
52	1	0	1	1	$\cos y^2$	$\sin x^3$	x^6+8y	u^2	$e^{\cos u}$
53	1	1	0	1	y^8	$\cos x^4$	x^9+9^y	2^{u^2}	$\cos e^u$
54	1	0	1	1	y^3+4y	x^x	$\sin x+\sin y$	u^2	$\sqrt{u}$
55	1	1	1	0	y^2+4	$5x+3$	$(\sin x)\,y$	u^3	$\lg u$
56	1	1	1	0	$5y^3$	$x+16$	x^2y^2	u^3+5	$\lg(u+2)$
57	1	1	1	1	4^y+3	$(x^2+4)^3$	xy	$(u+8)^5$	$\sqrt{u}$
58	1	0	1	1	e^y	e^x	$xy+5$	$\ln u$	$\sqrt{u+5}$
59	0	1	1	1	e^{y^2}	x^2+5	$e^{xy}+3$	$\ln u$	$\sqrt[3]{u+1}$
60	0	1	0	1	y^y	e^{x^3}	xy^{10}	$\lg u$	$\sqrt[10]{u+2}$
61	0	1	1	0	e^{y^2}	$\sin(x^2+4)$	$\sin(xy)$	$(5u+8)^4$	$\ln u$
62	1	0	1	1	$\arcsin y$	$\arcsin x$	x^3+y^3	$(u^8+1)^2$	$\sqrt[4]{u^2+3}$
63	1	1	0	1	y^4+4	e^{x^8}	x^4+y^4	$\lg(u+1)$	$\sqrt[3]{u+8}$
64	1	0	1	1	$4y^3$	$(x+9)^3$	xy	$\sqrt{u^2+11}$	$\sqrt{u^4+7}$
65	1	0	1	1	$4(y+3)^3$	$(x+9)^4$	x^4y	$\sqrt[3]{u^3+5}$	$\lg u$
66	1	1	0	1	$8^{y^2}+y$	$(x^2+1)^2$	$xy+y$	$(u^2+8)^3$	$\ln u$
67	1	1	0	1	$4^{y^3}+y$	$(x^3+1)^2$	xy^2	$(u^8+9)^4$	$\ln(u+7)$

7*

Номер варіанта	α	β	γ	ν	$f(y)$	$g(x)$	u	$h(u)$	$q(u)$
68	1	1	1	0	y^y	x^2	xy	$\arcsin u^2$	$\lg(u+8)$
69	2	2	1	1	$2y^2+8$	$\sqrt{x+9}$	xy^2	$\arcsin^2 u$	$\sqrt{u}$
70	1	0	1	1	y^7+y^6	$\sqrt[3]{x^2+1}$	x^2y	u^3+5	$\sqrt[4]{u^3+5}$
71	2	2	1	0	7^{y^2}	$(6x+1)^2$	x^3y	u^2+5	$\lg(u+1)$
72	1	1	0	1	4^{y^2}	$\sqrt{x+1}$	$x^3(y^3+1)$	u^4+9	$\ln(5u^2+3)$
73	1	1	1	1	y^6+y^9	$\ln x$	$\sin(x^2y)$	$\cos u$	$\mathrm{tg}(u+1)$
74	1	1	1	1	$\sin y$	$\cos x$	x^2y^2	$\arcsin u$	$\cos(u+8)$
75	1	0	1	1	$\cos y^2$	x^2+x	$xy+5$	$\arccos u$	$\sin(u+9)$
76	1	1	0	1	$\mathrm{tg}\, y^3$	x^3+x^2	x^2y+4	$\arcsin u$	$\cos(u^2+10)$
77	1	1	1	0	$\mathrm{ctg}\, y$	x^2+x^4	$xy+10$	$\arcsin u^3$	$\cos(u^7+7)$
78	1	1	0	1	$\sin y^2$	$\sin x$	xy^3+4	$\arccos u$	$\cos(8u+3)$
79	1	1	1	0	y^{y^3}	$(\sin x)^x$	$xy+1$	$\arccos u$	$\cos^2 u$
80	1	1	0	1	$\ln y$	$e^{x^2}+x$	x^2y+4	$\ln u$	$\sqrt{\cos u}$
81	1	1	1	1	y^3+3^y	e^x+x^e	xe^y	$\ln^2 u$	$\sqrt[3]{\sin u}$
82	1	0	1	1	$\cos y^2$	e^{x^x}	xy^e	$\ln^{\pi} u$	$\sqrt[4]{\cos u+8}$
83	1	1	0	1	$\ln^3(y+8)$	e^{x^2+x}	$x^e y^{\pi}$	$\arccos(\pi u)$	$\sqrt[5]{\cos(u^2+8)}$
84	1	1	1	0	e^y+y^e	$x^{\sin x}$	xy^{π}	$\arcsin(\pi u)$	$\sqrt[3]{\sin(u+7)}$
85	1	1	1	1	e^{y^2}	x^x	yx^{π}	$\mathrm{arctg}\, u$	$\sin\sqrt[3]{u}$
86	1	0	1	1	e^y+y	$x+7^x$	$\pi^x y$	$\mathrm{arctg}\, u^2$	$\cos u^2$
87	1	1	0	1	y^e+y^2	x^7+5^x	$\pi^x y$	$\arcsin u$	$\sin u^3$
88	1	1	1	1	y^e+y^3	x^8+7^x	$e^x y$	$\arcsin(u+7)$	$\cos(u^2+u)$
89	1	0	1	1	e^y+8	$x^3+\cos x$	x^2y	$\arccos(u+1)$	$\mathrm{tg}(u^3+1)$
90	1	1	0	1	$\cos y$	$\cos 5^x$	$x(y+1)$	$\arccos^2 u$	$\mathrm{ctg}(u^5+6)$
91	0	1	1	1	$\sin y^2$	$\sin(x^2-7)$	$y(x^2+1)$	$\arccos u$	$\mathrm{ctg}(u+7)$

Номер варіанта	α	β	γ	ν	$f(y)$	$g(x)$	u	$h(u)$	$q(u)$
92	1	0	1	1	$\cos y$	e^x+7	xy^3	$\mathrm{arctg}\, u$	$\mathrm{ctg}^2(u+3)$
93	1	0	1	0	y^y	e^x+9x	x^3y	$\mathrm{arctg}^2 u$	$\mathrm{tg}^2(u+7)$
94	1	0	1	1	$\sin y$	e^{x^2}	$xy+5$	$\mathrm{arctg}\, u^2$	$\sqrt{\cos u}$
95	1	1	0	1	$\cos^2 y$	$e^{\sin x}$	x^2y+3	$\mathrm{tg}\, u^2$	$\sqrt{\sin u}$
96	1	1	1	1	$3\mathrm{tg}^2 y$	e^x+8	$xy+8$	$\mathrm{ctg}\, u^3+4$	$\sqrt{\cos u^2}$
97	1	1	0	1	y^3+y	$\cos x^2$	$xy+5$	$4u+5^u$	$\sqrt[3]{\sin u}$
98	1	0	1	1	$\cos y^2$	e^{x+7}	xy^2+7	u^7+9u	$\ln\sin u$
99	1	1	1	0	y^y+7	$(x+8)e$	$xy+\sin x$	u^5+u	$\cos(u^2+7)$
100	1	1	1	1	$y+5$	$(x+e)\pi$	$xy+5$	$u+\ln u$	$\cos(u+9)$

Задача 5.2. За даними табл. 5.2 знайти похідну за напрямом $\vec{s} = (\cos 45^\circ, \cos 60^\circ, \cos 60^\circ)$ і градієнт функції трьох змінних у точці $u = x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma} + a_{11}x^{\alpha} + a_{12}y^{\beta} + a_{22}z^{\gamma}$.

Таблиця 5.2

Номер варіанта	α	β	γ	a_{11}	a_{12}	a_{22}	x_0	y_0	z_0
1	1	1	1	2	2	2	– 1	– 1	– 1
2	2	1	1	3	3	3	– 1	– 1	0
3	3	1	1	4	4	4	– 1	0	1
4	4	1	1	1	1	2	– 1	– 1	0
5	5	1	1	2	2	3	– 1	1	1
6	1	1	2	4	3	2	– 2	1	– 1
7	2	2	2	3	– 3	3	– 1	1	1
8	2	3	4	1	2	3	– 10	– 9	– 5
9	1	2	3	– 7	– 8	– 9	– 4	– 5	1
10	3	2	4	2	– 10	5	6	5	1
11	4	5	6	3	– 2	– 7	1	1	1
12	9	10	15	16	– 3	– 4	– 1	1	1
13	3	2	2	– 5	6	7	1	– 1	1

Номер варіанта	α	β	γ	a_{11}	a_{12}	a_{22}	x_0	y_0	z_0
14	4	5	16	3	2	1	1	1	−1
15	9	4	3	−2	5	6	−1	1	1
16	4	5	6	−1	3	2	1	1	−1
17	1	2	3	−9	12	15	1	2	−3
18	2	3	4	−2	3	2	1	−2	−4
19	1	4	8	−9	−3	4	−2	1	3
20	1	2	3	4	−5	−6	1	1	3
21	2	1	4	5	−6	−2	1	−1	−2
22	4	3	6	3	−4	−2	1	−1	−1
23	5	6	7	4	−5	−6	1	1	1
24	2	7	8	−2	11	12	1	−1	1
25	4	3	2	−1	5	6	1	2	1
26	6	7	3	4	5	−6	1	−2	−1
27	3	8	9	−4	5	15	1	−1	3
28	2	3	6	−7	−9	18	1	1	2
29	4	5	3	20	11	−5	1	−1	−2
30	9	7	6	16	−2	−8	−1	−2	3
31	3	2	4	1	2	−3	−4	−2	−3
32	2	1	4	−2	−3	−4	1	1	−1
33	3	2	5	−1	3	2	1	2	3
34	4	5	3	−2	3	4	1	−2	−1
35	2	3	4	−3	2	2	−1	1	3
36	4	5	6	−3	2	1	4	1	3
37	2	3	4	2	−3	−4	1	−1	1
38	4	6	7	−9	8	3	2	1	−1
39	2	6	7	10	−12	−4	1	−1	5
40	3	2	1	2	−1	−3	1	−1	−2
41	5	7	8	2	−10	−5	1	−1	1
42	3	4	5	−2	−4	−6	1	−1	1

Номер варіанта	α	β	γ	a_{11}	a_{12}	a_{22}	x_0	y_0	z_0
43	4	5	6	−3	−5	−7	1	1	−1
44	3	4	7	6	7	9	1	−1	1
45	4	6	7	6	−7	−2	1	−2	−3
46	4	7	6	5	−4	−3	1	1	−1
47	3	2	1	4	−3	−2	1	−1	1
48	2	7	5	−4	−3	−3	1	1	−1
49	3	6	7	−4	2	−4	2	−1	1
50	4	5	−5	−3	2	8	1	−1	1
51	3	2	−1	2	−3	−4	1	1	−1
52	4	6	7	2	−2	−3	1	−1	2
53	3	8	9	−3	4	5	6	1	1
54	4	5	7	−8	−4	−3	1	−1	−1
55	3	2	9	−10	−12	−4	2	−3	4
56	2	6	8	−3	−4	5	3	1	2
57	3	4	5	−6	−2	−3	4	1	1
58	4	3	6	−7	−3	4	1	−1	1
59	3	5	8	1	2	−4	1	−2	3
60	7	8	5	2	4	5	−1	1	1
61	3	2	7	−8	9	10	1	−1	2
62	4	5	9	1	5	6	1	−4	3
63	5	4	6	−3	2	4	1	1	−1
64	14	10	5	−2	5	6	1	−1	1
65	4	3	2	2	4	7	1	1	−2
66	3	5	6	−5	−6	7	1	−1	−2
67	4	3	8	−4	6	−7	2	−3	−1
68	7	1	3	3	2	6	1	2	4
69	3	2	5	4	−5	−6	−1	−2	−1
70	8	6	9	3	4	−5	1	1	−1
71	9	8	6	−3	−4	4	1	−1	2

Закінчення табл. 5.2

Номер варіанта	α	β	γ	a_{11}	a_{12}	a_{22}	x_0	y_0	z_0
72	5	4	– 6	– 5	– 3	8	1	– 1	1
73	2	3	5	– 2	4	6	– 1	1	– 1
74	3	5	9	– 1	– 2	3	1	– 1	2
75	4	3	2	– 4	– 3	– 2	2	1	1
76	2	6	7	– 9	– 4	3	1	– 1	1
77	2	3	1	8	6	2	1	– 1	– 1
78	4	5	4	2	3	3	2	3	2
79	5	6	2	2	4	– 2	1	– 2	1
80	6	7	2	– 2	3	4	5	– 1	1
81	4	2	3	5	– 3	– 2	1	1	– 1
82	3	4	5	– 3	2	1	1	– 1	1
83	4	5	6	2	3	4	– 1	1	1
84	2	6	7	– 3	4	5	1	1	– 2
85	5	7	3	– 4	– 5	3	1	– 2	– 1
86	11	8	9	– 3	7	9	– 1	– 3	4
87	4	5	6	2	7	– 19	1	– 1	2
88	5	6	7	– 5	– 4	2	2	2	1
89	4	3	2	– 2	3	11	1	– 1	1
90	5	7	8	– 4	2	– 6	– 2	1	1
91	6	4	7	2	– 3	– 4	– 1	1	2
92	3	5	6	7	– 8	– 9	– 2	1	– 1
93	4	11	3	– 2	– 7	4	1	– 1	3
94	2	8	9	– 10	– 15	– 3	2	1	4
95	3	4	9	– 5	6	2	– 3	4	2
96	1	12	3	– 6	– 2	4	3	2	1
97	4	5	6	– 3	– 4	12	1	1	– 4
98	3	1	2	10	30	16	1	– 1	2
99	5	4	3	– 2	3	4	– 1	– 2	3
100	3	8	7	8	2	3	1	1	2

Задача 5.3. За даними табл. 5.3 знайти екстремум функції двох змінних $z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_3$.

Таблиця 5.3

Номер варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_1	a_2	a_3
1	2	1	3	4	– 5	– 6
2	3	4	8	– 3	– 2	– 1
3	4	2	3	1	2	2
4	– 7	3	– 5	1	– 1	8
5	– 9	– 4	– 3	– 1	– 2	3
6	9	– 3	5	4	2	1
7	10	5	3	1	5	6
8	8	4	4	– 5	6	7
9	– 12	7	– 6	– 3	– 2	– 7
10	6	1	20	– 1	– 1	4
11	4	3	20	5	6	7
12	5	4	18	– 5	– 6	– 7
13	3	2	9	1	2	3
14	4	5	7	4	5	6
15	108	9	5	– 4	3	2
16	95	6	8	– 3	12	17
17	35	15	16	– 4	– 13	12
18	41	16	13	7	9	11
19	39	25	40	11	– 12	– 13
20	– 5	– 6	– 21	14	– 3	– 2
21	– 7	– 5	– 17	9	4	8
22	– 11	6	12	3	7	– 9
23	21	40	104	– 85	– 35	40
24	19	20	28	13	– 3	– 4

Закінчення табл. 5.3

Номер варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_1	a_2	a_3
25	12	– 11	13	– 5	– 6	20
26	11	15	26	– 7	– 8	9
27	13	4	5	– 5	– 4	– 3
28	21	16	31	– 13	– 23	– 14
29	5	6	21	3	5	– 6
30	4	8	23	– 4	– 12	– 13
31	5	6	12	– 3	2	1
32	1	1/2	1	– 12	– 3	2
33	– 1	1/2	– 1	2	– 1	3
34	– 1	– 1/2	1	3	6	0
35	4	– 2	1	4	– 2	1
36	3	– 1	3	0,5	4	– 0,5
37	2	1	5	– 1	– 1	2
38	10	– 3	4	– 2	0,5	– 5
39	2	3	14	5	6	7
40	3	7	40	2	– 2	1
41	3	– 4	7	– 1	– 2	4
42	5	– 3	6	3	2	1
43	6	– 4	8	9	13	2
44	– 6	3	9	10	3	4
45	3	– 4	9	– 3	– 2	3
46	1	– 5	106	3	12	2
47	4	5	8	– 3	– 4	5
48	8	– 3	9	1	2	3
49	4	– 5	9	1	3	– 4
50	– 6	2	– 3	1	– 2	3

Задача 5.3-1. За даними табл. 5.3-1 знайти екстремум функції двох змінних $z = f(x; y)$ за умови $\varphi(x; y) = 0$.

Таблиця 5.3-1

Номер варіанта	$f(x; y)$	$\varphi(x; y)$
51	$x^2 + y^2$	$x + y - 2 \quad (x \ge 0, y \ge 0)$
52	xy	$x^2 + y^2 - 8$
53	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$	$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{4}$
54	$2\cos^2 x + 3\cos^2 y$	$y - x - \frac{\pi}{4}$
55	$5x + y$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 1$
56	$x^3 + y^3$	$x + y - 2 \quad (x \ge 0, y \ge 0)$
57	xy	$x^2 + y^2 - 18$
58	$5\cos^2 x + 15\cos^3 y$	$y - x - \pi/4$
59	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$	$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{9}$
60	$10x + y$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 1$
61	$\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y}$	$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{8}$
62	xy	$x + y - 1$
63	$x^2 + y^2$	$3x + 2y - 6$
64	$x^2 - y^2$	$2x - y - 3$
65	xy^2	$x + 2y - 1$
66	$\cos^2 x + \cos^2 y$	$x - y - \pi/4$
67	xy	$x/2 + y/3 - 1$
68	xy	$x/4 + y/6 - 1$
69	$x^2 + y^2$	$x/9 + y/10 - 1$
70	$x^2 + y^2$	$\frac{x}{10} + \frac{y}{12} - 1$
71	$x^2 - y^2$	$x/12 + y/13 - 1$

Закінчення табл. 5.3-1

Номер варіанта	$f(x; y)$	$\varphi(x; y)$
72	xy^2	$\frac{x}{16} + y/25 - 1$
73	$x^2 - y^2$	$x/9 + y/64 - 1$
74	xy^2	$x/3 + y/9 - 1$
75	$5 - 3x - 4y$	$x^2 + y^2 - 25$
76	$1 - 4x - 8y$	$x^2 - 8y^2 - 8$
77	$x^2 + xy + y^2$	$x^2 + y^2 - 1$
78	$2x^2 + 12xy + y^2$	$x^2 + 4y^2 - 25$
79	$x/10 + y/16$	$x^2 + y^2 - 9$
80	$1 + 1/x + 1/y$	$1/x^2 + 1/y^2 - 1/8$
81	$1 + 1/x + 1/y$	$1/x^2 + 1/y^2 - 1/16$
82	$\ln(xy)$	$x^3 + xy + y^3$
83	$x/4 + y/8$	$x^2 + y^2 - 16$
84	xy^2	$x + 3y - 2$
85	$x^2 - y^2$	$4x - y - 12$
86	$x + y$	$(x-1)^2 + (y+1)^2$
87	$x^2 - y^2$	$x^2 + y^2 - 2xy$
88	xy^2	$x - y$
89	xy	$x^4 + y^4$
90	$x^2 - y^2$	$(x-1)^3 + y^2$
91	$x^2 + xy + y^2$	$x^2 + y^2 - 1$
92	$6 - 5x - 4y$	$x^2 - y^2 - 9$
93	$x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$	$x - y + 5$
94	xy	$x + y - 10$
95	xy^2	$x + 10y - 1$
96	$\cos^2 x + \cos^2 y$	$x - y - \pi/2$
97	$x^2 - y^2$	$x/18 + y/19 - 2$
98	$1 + 1/x + 1/y$	$1/x^2 + 1/y^2 - 1/16$
99	$\ln(xy)$	$x^3 + 3xy + y^3$
100	$4x^2 + 12xy + y^2$	$x^2 + 9y^2 - 25$

Задача 5.4. За даними табл. 5.4 знайти та зобразити область визначення функції двох змінних

$$z = \alpha\sqrt{f(x;y)} + \frac{\beta}{g(x;y)} + \gamma \lg h(x;y) + \arcsin\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right).$$

Таблиця 5.4

Номер варіанта	α	β	γ	$f(x; y)$	$g(x; y)$	$h(x; y)$
1	1	2	– 3	$\alpha x^2 - \beta y^2 + \gamma$	$\alpha xy + \gamma$	1
2	0	1	– 1	$\alpha x^2 - \beta y^2 + \gamma$	$x^2 - \beta y^2 + \gamma$	$7x + y$
3	1	0	1	$\alpha x^2 + \alpha y^2 - \alpha^2$	αxy	$5x - 3$
4	1	1	0	$\alpha x^2 + y - \gamma$	$\beta x^2 + \beta y - \alpha$	$\alpha x - \beta$
5	1	1	1	$\alpha x - \beta y^2 - \alpha$	$\alpha x - \beta y + \alpha$	$x^2 + y^2 - 5$
6	0	1	1	$\alpha x + \beta y - \alpha$	$\beta y - \gamma$	$\beta x^2 - \beta$
7	1	0	1	$\alpha x^2 - \gamma$	$\alpha x^2 - \gamma y^2$	$\alpha x^2 - \beta y^2 - 5$
8	1	4	0	$\alpha x^2 - \beta$	$\alpha x^2 - \alpha y^2 - \alpha$	$\alpha x + \beta^2$
9	1	0	1	$\alpha x^2 - \gamma y^2 - \gamma$	$\alpha x - \gamma y - \alpha$	$\alpha x + \gamma$
10	0	1	4	$\beta y^2 - \gamma x + \gamma$	$\alpha - \gamma y$	$\beta x + \gamma^2$
11	3	4	5	$\alpha x^2 - \beta y^2 + \gamma$	$\beta xy + \alpha$	1
12	0	2	– 4	$\alpha x^2 - \beta y^2 + \gamma^2$	$\beta x^2 - \beta^2 y^2 + \gamma$	$6x + y$
13	2	1	– 3	$\alpha x^3 + \gamma$	$\alpha x^2 - \alpha y^2 + \gamma$	$8x + \beta y + \gamma$
14	0	1	1	$\alpha x^2 + \beta y^2 - \gamma$	$\beta x + y - \gamma$	$4x - \gamma + \beta y$
15	1	0	1	$\alpha x^2 - \beta y^2 - \gamma$	$\alpha x - \beta y - \alpha$	$\beta x - y^2 - \gamma$
16	0	1	2	$\alpha x^2 + \alpha y^2 - \gamma^2$	$\beta xy + \gamma$	$\alpha x^2 - \beta y + \alpha$
17	1	0	1	$\alpha x^2 - \beta - \gamma y$	$7\alpha^2 x^2 - 7\gamma^2 y^2$	$\alpha x^7 - \gamma$
18	2	1	– 1	$\alpha x^2 + \beta y^2 - \gamma^2$	$\alpha x - \beta y + \gamma$	$\alpha x^8 - \beta x^4 + \gamma$
19	1	0	2	$\beta x^2 - \gamma x - \gamma$	$\alpha x + \beta y - \gamma$	$5x^3 + 5y$
20	1	1	2	$\alpha x^2 - \gamma$	$\alpha x^2 - \beta y^2 - \gamma$	$x^4 + x^2$
21	1	1	3	$\alpha x + \beta y^2 - \gamma$	$\alpha x + \beta y - \gamma$	$x^4 + y^4 - 2x^2y^2$
22	0	1	2	$\gamma^2 x^2 + \beta^2 y^2 - \beta^2$	$\alpha x + \beta y - \gamma$	$6x - y^2$
23	1	1	0	$4 - x^2 - y^2$	$x^2 + y^2 - 9$	xy
24	1	0	1	$9 - x^2 - y^2$	xy	$x^2 + 4y^2 - 2x - 3$
25	1	1	1	$\alpha x - \gamma$	$x^2 + y^2 - 4$	$x^2 + y^2 - 9$

Закінчення табл. 5.4

Номер варіанта	α	β	γ	$f(x; y)$	$g(x; y)$	$h(x; y)$
26	1	1	1	$1-\lvert x\rvert-\lvert y\rvert$	$x-\beta y$	x^2+y^2-x
27	0	1	1	xy	$1-x-y^2$	$10^{\ln x \cdot \ln y}$
28	0	1	1	xy	$1-\beta x-\gamma y$	$\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}$
29	0	1	1	βxy	$(1-x-y)/xy$	x^2+y^2-x
30	0	1	1	$x+y$	$(1-x2-y2)/xy$	$(x^2+y^2-16)/(4-x^2-y^2)$
31	1	2	0	$9-4x^2-9y^2$	x^2+y^2-16	xy^2
32	1	0	1	$16-4x^2-16y^2$	x^2+y^2-25	$x^2-2x+9y^2-7$
33	1	0	2	$4-\lvert x\rvert-\lvert y\rvert$	$x-y$	x^2+y^2-15
34	1	1	1	$9-4x^2-9y^2$	$(1-x^2-y^2)/x$	$10^{\ln x}$
35	1	2	2	$\alpha-\beta^2x^2-\gamma^2y^2$	$\alpha-x-\beta y$	αxy
36	1	0	4	$\gamma^2-x^2-\alpha^2y^2$	$\alpha-\gamma x-\gamma y$	γx^2
37	1	2	3	$\beta x-\gamma y$	$\alpha^2x^2+\beta^2y^2-\gamma^2$	γxy
38	2	4	0	$9-x^2-y^2$	$\alpha x-\beta y+\gamma$	γ^2xy
39	4	0	2	$\alpha^2-\lvert x\rvert-\lvert y\rvert$	$x^2+y^2-\gamma^2$	$x^2+\gamma^2y^2-\gamma^2$
40	2	1	2	x^2+xy+y^2	$\alpha-x-\gamma y$	x^α
41	4	0	1	αx^2-y^2	$\alpha x-\gamma y-\alpha$	αx^α
42	2	1	2	$\alpha^2x^2+\beta x^2-\gamma^2$	$\alpha-\lvert x\rvert-\lvert y\rvert$	βx
43	2	1	2	$\alpha^2-\beta x^2+\gamma y^2$	$\alpha x-y-\gamma$	$5xy$
44	1	4	2	$\alpha+\beta x^2+\gamma^2y^2$	$\alpha x-y$	$\gamma x+y$
45	1	0	3	$\alpha x-\gamma^2y^2$	$\alpha x+y$	$\alpha x-\beta$
46	0	1	1	$\beta x^2-\gamma y$	$\beta x-\gamma$	$\alpha x^2-\beta$
47	0	0	1	$\gamma x+y$	$x-\gamma y$	$\dfrac{\lvert x\rvert-\lvert y\rvert}{x^2-y^2}$
48	1	1	0	$\alpha x-\beta y^2$	$\alpha x-\gamma y$	x
49	1	1	1	$\alpha^2-\beta x^2-\gamma y^2$	$\alpha x-\beta x-\gamma$	xy^α
50	1	0	1	$\beta x+\gamma-\alpha x^2$	xy	$\lvert x\rvert+y$

Задача 5.4-1. За даними табл. 5.4-1 скласти емпіричну формулу залежності y від x у вигляді $y=f(x)$.

Таблиця 5.4-1

Номер варіанта	$f(x)$	Експериментальні дані					
51	$ax+b$	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	15,2	15,4	16,4	17,0	17,5
52	$a+\dfrac{b}{x}$	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	20	19	18	15	19
53	ab^x	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	486,7	523,9	548,3	570,5	575,5
54	ax^2+bx+c	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	15,2	15,4	16,4	17,0	17,1
55	$ax+b$	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	154	158	168	170	171
56	ax^2+bx+c	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	105	114	120	125	113
57	$a+\dfrac{b}{x}$	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	97	100	95	84	81
58	$ax+b$	x_i	80,6	122	145,8	168,9	190
		y_i	209	581	854	1102	1189
59	$ax+b$	x_i	18,1	19,0	19,8	20,6	20,6
		y_i	78,2	79,0	80,7	78,6	79,5
60	$ax+b$	x_i	41,8	43,1	45,6	45,4	45,6
		y_i	120,7	127,4	135,2	135,0	135
61	$ax+b$	x_i	147,5	148,5	148,5	151,8	149,2
		y_i	460	452	462	465	442
62	$ax+b$	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	108,9	108,1	109,5	112	112,6
63	$a+\dfrac{b}{x}$	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	30	29	28	25	29

Номер варіанта	$f(x)$	Експериментальні дані					
64	$ax^2 + bx + c$	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	25,3	25,4	26,3	28,0	28,2
65	$ax + b$	x_i	18	19	19,5	20,3	20,4
		y_i	88,1	89,0	90,6	88,6	89,6
66	ab^x	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	586,7	623,8	648,4	670,6	675,4
67	$ax + b$	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	205	214	220	225	213
68	$ax + b$	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	95	104	120	123	113
69	$ax + b$	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	13,3	13,4	15,4	18,0	18,5
70	$a + \frac{b}{x}$	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	16	19	18	15	19
71	$ax + b$	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	107	107,1	108,2	109,3	114,5
72	$ax^2 + bx + c$	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	15,2	15,4	16,3	18,0	18,3
73	$ax + b$	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	97	100	101	103	114
74	ab^x	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	380,4	433,6	548,4	370,6	375,5
75	$ax + b$	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	105	114	103	108	114
76	ab^x	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	270,4	343,6	248,4	270,6	275,4
77	$ax + b$	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	97,1	97,0	98,2	99,7	104,7

Номер варіанта	$f(x)$	Експериментальні дані					
78	$ax + b$	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	13,2	13,4	14,3	16,0	16,3
79	$ax + b$	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	67,1	80	81	83	85,4
80	$ax^2 + bx + c$	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	1,22	3,12	4,11	2,12	3,13
81	ab^x	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	381,5	432,4	346,4	370,6	375,8
82	$ax + b$	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	21,2	22,4	26,3	28,0	28,3
83	$ax + b$	x_i	1	2	3	4	7
		y_i	33,2	40,1	31,5	44,9	53,2
84	$ax + b$	x_i	2	4	5	7	9
		y_i	41,2	44,2	46,8	48,1	49,7
85	ab^x	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	190,4	243,5	148,4	170,6	175,4
86	$ax + b$	x_i	2	4	6	8	10
		y_i	12,2	14,4	18,8	20,6	18,3
87	$ax + b$	x_i	3	5	7	8	9
		y_i	10,4	12,3	11,4	15,6	16,7
88	$ax + b$	x_i	2	4	6	8	12
		y_i	5,4	6,7	7,9	13,2	11,4
89	$ax + b$	x_i	3	4	5	6	7
		y_i	4,2	4,7	5,8	6,9	8,1
90	$ax^2 + bx + c$	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	5,2	5,4	6,3	8,1	9,2
91	ab^x	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	281,4	332,4	436	570,6	475,8

Номер варіанта	$f(x)$	Експериментальні дані					
92	$ax + b$	x_i	2	4	6	8	10
		y_i	23,2	30,1	31,5	42,8	54,6
93	ab^x	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	28	34,1	45,6	59,8	70,3
94	$ax^2 + bx + c$	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	35,1	35,3	36,2	38,4	39,1
95	$ax + b$	x_i	3	6	9	12	15
		y_i	2,1	4,2	3,6	4,8	5,6
96	$ax + b$	x_i	4	5	7	9	11
		y_i	3,2	3,8	4,4	5,8	6,4
97	$ax + b$	x_i	2	4	6	7	9
		y_i	9,1	9,8	11,2	13,4	18,2
98	$ax + b$	x_i	1	4	7	10	13
		y_i	15,2	25,4	35,9	45,1	54,2
99	$ax + b$	x_i	1	2	3	4	5
		y_i	3,4	4,8	4,9	5,6	6,8
100	$ax + b$	x_i	2	4	6	8	10
		y_i	21,2	29,7	35,4	41,6	49,5

Задача 5.5. За даними табл. 5.5 знайти подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)} f(x;y)dxdy$.

Таблиця 5.5

Номер варіанта	$f(x; y)$	D
1	xy	$0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 2$
2	e^{x+y}	$0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1$
3	$x^2/(1 + y^2)$	$0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1$
4	$1/(x + y + 1)^2$	$0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1$
5	$y/(1 + x^2 + y^2)^{3/2}$	$0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1$

Номер варіанта	$f(x; y)$	D
6	$x \cdot \sin(x + y)$	$0 \le x \le \pi;\ 0 \le y \le \pi/2$
7	$x^2 ye^{xy}$	$0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 2$
8	$x^2y \cos(xy^2)$	$0 \le x \le \pi/2;\ 0 \le y \le 2$
9	x^3y^2	$x^2 + y^2 \le R^2$
10	$x^2 + y$	Область, обмежена кривими $y = x^2$; $y^2 = x$
11	x^2/y^2	Область, обмежена кривими $x = 2$; $y = x$; $xy = 1$
12	$\sqrt{1 - x^2 - y^2}$	x2 + y2 ≤ 1; x > 0; y > 0
13	$x/(x^2 + y^2)$	$y = x\operatorname{tg}x;\ y = x;\ 0 \le x < \pi/2$
14	xy	$\lvert x + 2y\rvert \le 3, \lvert x - y\rvert \le 3$
15	$\sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}}$	$x^2/9 + y^2/16 \le 1$
16	$\sqrt{1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}}$	$x^2/16 + y^2/25 \le 1$
17	$\sqrt{1 - \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36}}$	$x^2/25 + y^2/36 \le 1$
18	$\sqrt{x} + \sqrt{y}$	$\sqrt{x} + \sqrt{y} \le \sqrt{5}$
19	$\sqrt{x} + \sqrt{y}$	$\sqrt{x} + \sqrt{y} \le 3$
20	$x^3 y \sin(xy^3)$	$0 \le x \le \pi/2;\ 0 \le y \le 2$
21	$1/(x^2 + y^2)^2$	$x^2 - y^2 = 6;\ x = 3$
22	$\lvert xy\rvert$	$(x^2 + y^2)^2 \le x^2 - y^2;\ x \ge 0$
23	x^2	$(x^2 + y^2)^2 \le 2xy;\ x \ge 0$
24	$\cos(x + y)$	$0 \le x \le \pi/2;\ y = x$
25	$(x - y)e^y$	$-1 < x < 1;\ y = x;\ y = 2x$
26	$(x - y)^2$	$0 \le x \le 5;\ 0 \le y \le 5 - x$
27	$e^{(x+y)^2}$	$0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1 - x$

8*

Номер варіанта	$f(x; y)$	D
28	$x^4 - y^4$	$x > 0;\ 1 \le xy \le 2;\ 1 \le x^2 - y^2 \le 2$
29	$\dfrac{xy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$	$0 \le y \le x;\ 0 \le x$
30	$(1 - y^2)^{3/2}$	$0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}$
31	$x^2 + y^3$	$0 \le x \le 5;\ y = x$
32	$x^2 + y^2$	$-1 \le x \le 2;\ y = 2x;\ y = (7x + 10)/6$
33	$\sin(x + y)$	$1 \le x \le 2;\ y = \ln x;\ y = 3x$
34	$x + y$	$\pi/2 \le x \le \pi;\ y = \sin x;\ y = \cos x$
35	$x + y$	$\pi/4 \le x \le \pi;\ y = \sin x;\ y = \cos x$
36	$x - y$	$-1 \le x \le 2;\ y = x^2 - 1;\ y = 3 + 2x - x^2$
37	$x - y$	$-6 \le x \le 2;\ y = 2 - x;\ y = x^2/4 - 1$
38	$x + y$	$1 \le x \le e,\ y = \ln x,\ y = e^x$
39	$x^2 - y$	$0 < x < 2;\ y = 6 - x;\ y = x - 2$
40	$x - y$	$2 \le x \le 4;\ y = \log_2 x;\ y = 2/3(x - 1)$
41	xy	$1 \le x \le 2;\ y = x - 1$
42	y/x	$x^3 + y^3 = 3xy$
43	$\sqrt{x^2 + y^2}$	$-2 \le x \le 2;\ y = \sqrt{4 - x^2}$
44	$x / \sqrt{x^2 + y^2}$	$0 \le x \le 1;\ y = x^2$
45	$x / (x^2 + y^2)$	$0 \le x \le 2$
46	$\sqrt{y}$	$0 \le x \le 1;\ y = 1 - \sqrt{1 - x^2};\ y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$
47	$\ln(1 + x^2 + y^2)$	$0 \le x \le 1;\ y = \sqrt{1 - x^2};\ y = -\sqrt{1 - x^2}$
48	$\sqrt{1 - x^2 - y^2}$	$-1 \le x \le 1,\ y = -\sqrt{1 - x^2}$
49	$x^2 + y^2$	$0 \le x \le 1;\ \dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x$
50	$xy/(x^2 + y^2)$	$\|x\| \le y \le 1$

Задача 5.5-1. За даними табл. 5.5-1 обчислити криволінійні інтеграли $\int_L f(x; y)\, ds$ або $\int_L f_1(x; y)dx + f_2(x; y)\, dy$.

Таблиця 5.5-1

Номер варіанта	$f(x; y)$ або $f_1(x; y)dx + f_2(x; y)dy$	L
51	$1/(x - y)$	Відрізок прямої $y = \dfrac{1}{2}x - 2$ між точками A (0; 2) і B (4; 0)
52	xy	Контур прямокутника з вершинами A (0; 0), B (4; 0), C (4; 2), D (0; 2)
53	y	Дуга параболи $y^2 = 2px$, утворена перерізом ($x^2 = 2py$)
54	xy	Чверть еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, що лежить у I квадранті
55	$x\sqrt{x^2 - y^2}$	$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2);\ (x \ge 0)$
56	$(x^2 + y^2)^2$	$x = 2\cos t,\ y = 2\sin t$
57	xy	Контур прямокутника з вершинами A (0; 0), B (3; 0), C (3; 2), D (0; 2)
58	x	Відрізок прямої $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1;\ x \ge 0;\ y \ge 0$
59	$x^2 - y^2$	Дуга параболи $y = x^2$ від точки (0; 0) до точки (2; 4)
60	$(x^2 + y^2)^3$	$x = 3\cos t,\ y = 3\sin t$
61	$x + y$	Контур трикутника з вершинами O (0; 0), A (1; 0), B (0; 1)
62	y^2	$x = a(t - \sin t);\ y = a(t - \cos t)\ (0 \le t \le 2\pi)$
63	$x^2 + y^2$	$x = a(\cos t + t\sin t)$; $y = a(\sin t - t\cos t)\ (0 \le t \le 2\pi)$
64	$x^{4/3} + y^{4/3}$	Дуга астроїди $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$
65	$e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$	Опуклий контур, обмежений кривими $r = a,\ \varphi = 0,\ \varphi = \pi/4$

Продовження табл. 5.5–1

Номер варіанта	$f(x;y)$ або $f_1(x;y)dx + f_2(x;y)dy$	L
66	$\sqrt{x^2+y^2}$	Коло $x^2 + y^2 = ax$
67	$1/y - x$	Відрізок із кінцями (0; – 2) і (4; 0)
68	xy	Межа квадрата з вершинами (1; 0), (0; 1), (– 1; 0), (0; – 1)
69	x^2	Дуга кола $x^2 + y^2 = a^2$
70	xy	Межа прямокутника з вершинами (0; 0), (6; 0), (6; 2), (0; 2)
71	$1/\sqrt{x^2+y^2+4}$	Відрізок із кінцями (0; 0) і (1; 2)
72	$1/\sqrt{x^2+y^2+16}$	Відрізок із кінцями (0; 0) і (1; 4)
73	$(x^2+y^2)^4$	Коло $x^2 + y^2 = a^2$
74	$\sqrt{x^2+y^2}$	Коло $x^2 + y^2 = bx$
75	x^2	Дуга кола $x^2 + y^2 = 16$; $y > 0$
76	$\sin xdy + \sin ydx$	Відрізок від точки $A(0; \pi)$ до $B(\pi; 0)$
77	$(x^2+y^2)dx + (x^2-y)dy$	Від точки (– 1; 1) до (2; 2) по лінії $y = \|x\|$
78	$(x^2-2xy)dx + (y^2-2xy)dy$	Від точки (– 1; 1) до (1; 1) по лінії $y = x^2$
79	$y/xdx + xdy$	Від точки (1; 0) до (e; 1) по лінії $y = \ln x$
80	$(x+y)dx + (x-y)dy$	Уздовж кола $x^2 + y^2 = 1$ у разі обходу його проти годинникової стрілки
81	$xe^{x^2}dy + ydx$	Від точки (0; 0) до точки (1; 1) уздовж кривої $y = x^2$
82	xdy	Контур трикутника, утворений осями координат та прямою $x/2 + y/3 = 1$ за годинниковою стрілкою
83	$x^2 - y^2$	Від точки (0; 0) до точки (2; 4) уздовж $y = x^2$
84	$xydx + (y-x)dy$	Від точки (0; 0) до точки (1; 1) уздовж кривої $y = x^3$
85	$2xydx + x^2dy$	Від точки (0; 0) до точки (1; 1) уздовж кривої $y = x$

Закінчення табл. 5.5–1

Номер варіанта	$f(x;y)$ або $f_1(x;y)dx + f_2(x;y)dy$	L
86	$xydx$	Дуга синусоїди $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$
87	$(x - 1/y)dy$	Дуга параболи $y = x^2$, $1 \le x \le 2$
88	$xdy - ydx$	Крива $y = x^3$, $0 \le x \le 2$
89	$y/xdx + xdy$	Крива $y = \ln x$, $1 \le x \le e$
90	$2xydx + x^2dy$	Дуга параболи $y = x^2/4$, $0 \le x \le 2$
91	$xydx + y^2dy$	Дуга параболи $y^2 = 2x$, A (0; 0), B (2; 2), $A \to B$
92	$3x/ydx - 2y^3/xdy$	Дуга параболи $y^2 = x$, A (4; 2), B (1; 1), $A \to B$
93	xdy	Півколо $x^2 + y^2 = a^2$, $x \ge 0$, A (0; – a) $\to$ $\to B$ (0; a)
94	$x^3dy - xydx$	Відрізок AB, A (0; – 2) $\to B$ (1; 3)
95	$-3x^2dx - y^3dx$	Відрізок AB, A (0; 0) $\to B$ (2; 4)
96	$(2x-y)dx + (4x+5y)dx$	Відрізок AB, A (3; – 4) $\to B$(1; 4)
97	$(4x+5y)dx + (2x-y)dy$	Відрізок AB, A (1; – 9) $\to B$ (4; – 3)
98	$\frac{x}{y}dx - \frac{y-x}{x}dy$	Дуга параболи $y = x^2$; A (2; 4) $\to B$ (1; 1)
99	$(xy - y^2)dx + xdy$	Крива $y = 2\sqrt{x}$; $0 \le x \le 1$
100	$2xydx + x^2dy$	Дуга параболи $y = \sqrt{x/2}$; $0 \le x \le 2$

Невизначений інтеграл. Визначений інтеграл. Невласний інтеграл

Задача 6.1. За даними табл. 6.1 знайти інтеграл

$$\int \frac{af(mx)+bg(\varphi(nx))}{ch(kx)}dx.$$

Таблиця 6.1

Номер варіанта	a	b	c	$f(u)$	$g(u)$	$\varphi(u)$	$h(u)$	m	n	k
1	1	4	2	$\sqrt[5]{u^3}$	$\log_3 u$	u	u	3	4	5
2	3	3	3	$u^3\sin(u^3)$	$\log_5 u$	u	u	2	3	4
3	4	2	4	$\log_5 u$	$u^2e^{u^2}$	u	u	4	5	5
4	2	5	5	$\sin u$	$\sin u$	$\mathrm{tg}u$	$\cos^2 u$	3	3	3
5	4	6	6	$\mathrm{cosec}u$	$\frac{1}{\cos^2 u}$	$\sin u$	$\sec u$	2	2	2
6	5	7	7	$\cos u$	$\mathrm{ctg}u$	$\mathrm{ctg}u$	$\sin^2 u$	5	5	5
7	1	8	8	$\sec u$	3^u	$\cos u$	$\mathrm{cosec}u$	4	4	4
8	4	8	9	$\log_2 u$	$u^3e^{u^3}$	u	u	5	2	4
9	5	5	8	$u^4e^{u^4}$	$\mathrm{ctg}u$	$\log_5 u$	u	5	5	4
10	7	7	7	$\sqrt[5]{u^9}$	$\frac{1}{\cos^2 u}$	$\log_4 u$	u	6	3	4
11	4	8	6	$\cos u$	$\frac{1}{\cos^2 u}$	$\mathrm{ctg}u$	$\sin^2 u$	5	5	5
12	3	9	5	$\sqrt[3]{u^5}$	$\frac{1}{\sin^2 u}$	$\log_3 u$	u	7	4	5
13	6	4	4	$\sin u$	$\sqrt[5]{u^3}$	$\mathrm{tg}u$	$\cos^2 u$	3	3	3
14	3	1	3	5^u	$\frac{1}{\cos^2 u}$	5^u	5^{-u}	4	2	2
15	3	5	2	$\log_7 u$	$u^4e^{u^4}$	u	u	7	5	3

Продовження табл. 6.1

Номер варіанта	a	b	c	$f(u)$	$g(u)$	$\varphi(u)$	$h(u)$	m	n	k
16	6	5	3	7^u	$\mathrm{ctg}u$	7^{-u}	7^u	5	3	3
17	2	4	4	$\cos u$	u^4	$\mathrm{ctg}u$	$\sin^2 u$	2	2	2
18	4	3	5	$\mathrm{cosec}u$	4^u	$\sin u$	$\sec u$	3	3	3
19	6	3	6	$\sec u$	$\sqrt[5]{u^9}$	$\cos u$	$\mathrm{cosec}u$	7	7	7
20	6	4	7	$\cos u$	4^u	$\mathrm{ctg}u$	$\sin^2 u$	4	4	4
21	4	7	8	$\sqrt[7]{u^{11}}$	$\cos u$	$\log_2 u$	u	2	3	4
22	2	8	9	9^u	$\mathrm{ctg}u$	9^u	9^{-u}	5	2	2
23	2	5	8	$\cos u$	$\frac{1}{\sin^2 u}$	$\mathrm{ctg}u$	$\sin^2 u$	6	6	6
24	4	4	7	$\sqrt[3]{u^5}$	$\frac{1}{\cos^2 u}$	$\log_2 u$	u	5	3	4
25	5	3	6	3^u	$\mathrm{ctg}u$	3^{-u}	3^u	6	2	2
26	6	2	5	$\cos u$	7^u	$\mathrm{ctg}u$	$\sin^2 u$	5	5	5
27	5	4	4	$\mathrm{cosec}u$ 4ууу	$\sqrt[5]{u^9}$	$\sin u$	$\sec u$	6	6	6
28	3	5	3	5^u	$\mathrm{ctg}u$	5^u	5^{-u}	5	7	7
29	3	6	2	$\sin u$	$\cos u$	$\mathrm{tg}u$	$\cos^2 u$	7	7	7
30	1	3	3	$\sec u$	9^u	$\cos u$	$\mathrm{cosec}u$	8	8	8
31	2	4	4	$\log_4 u$	$u^2e^{u^2}$	u	u	3	4	5
32	4	5	5	4^u	$\mathrm{ctg}u$	4^{-u}	4^u	1	4	4
33	6	2	6	$\cos u$	$\mathrm{tg}u$	$\mathrm{ctg}u$	$\sin^2 u$	3	3	3
34	4	3	7	$\log_3 u$	$u^3\cos u^3$	u	u	1	2	3
35	3	6	8	$\mathrm{cosec}u$	$\cos u$	$\sin u$	$\sec u$	7	7	7
36	2	5	9	$\log_5 u$	$u^3e^{u^3}$	u	u	1	2	3
37	2	1	8	7^u	$\mathrm{ctg}u$	7^u	7^{-u}	1	3	3

Номер варіанта	a	b	c	$f(u)$	$g(u)$	$\varphi(u)$	$h(u)$	m	n	k
38	6	3	7	$\sec u$	$\mathrm{tg}\, u$	$\cos u$	$\mathrm{cosec}\, u$	4	4	4
39	7	4	6	$\sin u$	$\frac{1}{\cos^2 u}$	$\mathrm{tg}\, u$	$\cos^2 u$	5	5	5
40	8	5	5	$\sqrt[5]{u^9}$	$\cos u$	$\log_5 u$	u	3	4	5
41	4	4	4	9^u	$\mathrm{ctg}\, u$	9^{-u}	9^u	5	1	1
42	2	3	3	$\log_2 u$	$u^2 e^{u^2}$	u	u	2	4	5
43	4	4	2	$\mathrm{cosec}\, u$	7^u	$\sin u$	$\sec u$	8	8	8
44	5	5	3	4^u	$\mathrm{ctg}\, u$	4^u	4^{-u}	2	1	1
45	7	6	4	$\sqrt[5]{u^7}$	$\mathrm{ctg}\, u$	$\log_7 u$	u	3	4	5
46	8	7	5	$\sin u$	5^u	$\mathrm{tg}\, u$	$\cos^2 u$	9	9	9
47	9	8	6	$\cos u$	$\frac{1}{\sin^2 u}$	$\mathrm{ctg}\, u$	$\sin^2 u$	4	4	4
48	3	9	7	$\log_4 u$	$u^2 \sin u^2$	u	u	8	4	3
49	4	5	8	$\sec u$	$\sqrt[5]{u^3}$	$\cos u$	$\mathrm{cosec}\, u$	9	9	9
50	4	3	9	7^u	$\mathrm{ctg}\, u$	7^{-u}	7^u	5	3	3
51	6	2	8	$\cos u$	$\sqrt[5]{u^7}$	$\mathrm{ctg}\, u$	$\sin^2 u$	2	2	2
52	5	1	7	$\sqrt[5]{u^9}$	$\sin u$	$\log_2 u$	u	2	4	3
53	1	4	6	4^u	$\mathrm{tg}\, u$	4^u	4^{-u}	2	5	5
54	2	5	5	$\sqrt[5]{u^{11}}$	$\frac{1}{\sin^2 u}$	$\log_3 u$	u	7	8	8
55	4	6	4	$\sin u$	$\frac{1}{\cos^2 u}$	$\mathrm{tg}\, u$	$\cos^2 u$	3	3	3
56	5	7	3	$\mathrm{cosec}\, u$	$\sqrt[3]{u^5}$	$\sin u$	$\sec u$	3	3	3
57	6	8	3	$\log_3 u$	$u^3 \mathrm{tg}\, u^3$	u	u	3	2	1

Номер варіанта	a	b	c	$f(u)$	$g(u)$	$\varphi(u)$	$h(u)$	m	n	k
58	3	9	5	$\sec u$	5^u	$\cos u$	$\mathrm{cosec}\, u$	3	3	3
59	2	2	6	5^u	$\mathrm{ctg}\, u$	5^{-u}	5^u	3	5	5
60	4	3	7	$\cos u$	$\cos u$	$\mathrm{ctg}\, u$	$\sin^2 u$	8	8	8
61	3	3	8	$\sqrt[7]{u^{11}}$	$\mathrm{tg}\, u$	$\log_7 u$	u	5	3	2
62	4	4	9	$\log_3 u$	$u^2 \sin u^2$	u	u	4	3	7
63	5	7	8	$\sqrt[3]{u^5}$	9^u	$\log_2 u$	u	3	4	2
64	3	8	7	$\sec u$	u^4	$\cos u$	$\mathrm{cosec}\, u$	3	3	3
65	4	9	6	$\cos u$	$\sqrt[5]{u^3}$	$\mathrm{ctg}\, u$	$\sin^2 u$	4	4	4
66	4	9	5	7^u	$\mathrm{ctg}\, u$	7^u	7^{-u}	10	2	2
67	3	8	4	9^u	$\frac{1}{\cos^2 u}$	9^{-u}	9^u	7	8	8
68	2	7	3	$\sin u$	4^u	$\mathrm{tg}\, u$	$\cos^2 u$	5	5	5
69	3	5	2	$\sec u$	$\sqrt[3]{u^5}$	$\cos u$	$\mathrm{cosec}\, u$	7	7	7
70	3	4	3	$\log_7 u$	$u^2 \mathrm{ctg}\, u^2$	u	u	7	4	3
71	5	3	4	$\mathrm{cosec}\, u$	9^u	$\sin u$	$\sec u$	6	6	6
72	4	2	5	$\cos u$	$\frac{1}{\cos^2 u}$	$\mathrm{ctg}\, u$	$\sin^2 u$	7	7	7
73	2	1	6	5^u	$\mathrm{ctg}\, u$	5^u	5^{-u}	5	6	6
74	2	2	7	$\sqrt[5]{u^7}$	$\cos u$	$\log_2 u$	u	4	7	8
75	2	3	8	$\sin u$	$\sqrt[5]{u^9}$	$\mathrm{tg}\, u$	$\cos^2 u$	3	3	3
76	2	4	9	$\sec u$	7^u	$\cos u$	$\mathrm{cosec}\, u$	5	5	5
77	3	5	8	$\sqrt[7]{u^{11}}$	$\frac{1}{\sin^2 u}$	$\log_7 u$	u	3	2	1
78	4	6	7	$\cos u$	$\cos u$	$\mathrm{ctg}\, u$	$\sin^2 u$	9	9	9
79	5	5	6	3^u	$\mathrm{ctg}\, u$	3^{-u}	3^u	4	3	3

Закінчення табл. 6.1

Номер варіанта	a	b	c	$f(u)$	$g(u)$	$\varphi(u)$	$h(u)$	m	n	k
80	5	4	5	u^4	$\frac{1}{\cos^2 u}$	$\log_3 u$	u	2	3	4
81	5	3	4	$\log_7 u$	$u^3 \operatorname{tg} u^3$	u	u	4	5	6
82	3	24	3	$\operatorname{cosec} u$	$\frac{1}{\sin^2 u}$	$\sin u$	$\sec u$	8	8	8
83	3	5	2	4^u	$\operatorname{ctg} u$	4^u	4^{-u}	8	4	4
84	3	6	3	$\sec u$	$\sqrt[5]{u^3}$	$\cos u$	$\operatorname{cosec} u$	2	2	2
85	4	7	3	$\cos u$	$\frac{1}{\cos^2 u}$	$\operatorname{ctg} u$	$\sin^2 u$	1	1	1
86	5	8	3	$\sqrt[5]{u^7}$	$\frac{1}{\sin^2 u}$	$\log_5 u$	u	4	2	6
87	5	9	4	$\log_2 u$	$u^2 \sin u^2$	u	u	2	3	4
88	5	8	4	$\sec u$	$\operatorname{tg} u$	$\cos u$	$\operatorname{cosec} u$	7	7	7
89	5	7	5	5^u	$\operatorname{ctg} u$	5^{-u}	5^u	1	2	2
90	5	6	5	$\sin u$	9^u	9^u	$\cos^2 u$	2	2	2
91	6	5	6	$\operatorname{cosec} u$	$\sqrt[3]{u^5}$	$\sin u$	$\sec u$	3	3	3
92	7	4	6	$\sec u$	$3u$	$\cos u$	$\operatorname{cosec} u$	9	9	9
93	8	3	7	$\sqrt[5]{u^9}$	$\frac{1}{\sin^2 u}$	$\log_4 u$	u	7	3	5
94	9	2	8	$\cos u$	$\sin u$	$\operatorname{ctg} u$	$\sin^2 u$	6	6	6
95	7	3	9	7^u	$\operatorname{ctg} u$	7^u	7^{-u}	4	9	9
96	8	4	8	$\log_4 u$	$u^2 \operatorname{ctg} u^2$	u	u	2	4	5
97	9	5	7	$\operatorname{cosec} u$	7^u	$\sin u$	$\sec u$	6	6	6
98	7	6	6	$\sin u$	$\sqrt[5]{u^3}$	$\operatorname{tg} u$	$\cos^2 u$	8	8	8
99	5	7	5	$\sec u$	$\frac{1}{\sin^2 u}$	$\cos u$	$\operatorname{cosec} u$	3	3	3
100	4	8	5	9^u	$\operatorname{ctg} u$	9^{-u}	9^u	7	8	8

Задача 6.2. За даними табл. 6.2 знайти інтеграл

$$\int \frac{f(m\cdot x)+n\cdot x}{(1-m^2x^2)^{a/2}(1+m^2x^2)^{1-a}}\,dx\,.$$

Таблиця 6.2

Номер варіанта	$f(u)$	m	n	a	Номер варіанта	$f(u)$	m	n	a
1	$\arcsin u$	2	2	1	51	$\arcsin u$	8	8	1
2	$\arccos u$	3	3	1	52	$\operatorname{arctg} u$	9	9	0
3	$\operatorname{arcctg} u$	4	4	0	53	$\arccos u$	5	8	1
4	$\operatorname{arctg} u$	5	5	0	54	$\operatorname{arcctg} u$	8	7	0
5	$\arcsin u$	6	6	1	55	$\arcsin u$	7	6	1
6	$\arccos u$	7	7	1	56	$\operatorname{arcctg} u$	3	5	0
7	$\operatorname{arcctg} u$	8	8	0	57	$\arccos u$	5	4	1
8	$\operatorname{arctg} u$	9	9	0	58	$\operatorname{arctg} u$	4	3	0
9	$\arcsin u$	3	8	1	59	$\arcsin u$	3	2	1
10	$\operatorname{arcctg} u$	4	7	0	60	$\operatorname{arcctg} u$	3	3	0
11	$\arccos u$	5	6	1	61	$\operatorname{arcctg} u$	5	4	0
12	$\operatorname{arctg} u$	4	5	0	62	$\arccos u$	6	5	1
13	$\arcsin u$	3	4	1	63	$\arcsin u$	3	6	1
14	$\operatorname{arcctg} u$	7	3	0	64	$\operatorname{arctg} u$	7	7	0
15	$\operatorname{arctg} u$	8	2	0	65	$\operatorname{arcctg} u$	9	8	0
16	$\arccos u$	9	1	1	66	$\arccos u$	8	9	1
17	$\arcsin u$	4	2	1	67	$\arcsin u$	7	8	1
18	$\arcsin u$	2	3	1	68	$\operatorname{arctg} u$	7	7	0
19	$\arccos u$	4	4	1	69	$\arccos u$	7	6	1
20	$\operatorname{arcctg} u$	2	5	0	70	$\operatorname{arctg} u$	6	5	0
21	$\operatorname{arctg} u$	3	6	0	71	$\arccos u$	5	4	1
22	$\operatorname{arcctg} u$	4	7	0	72	$\operatorname{arcctg} u$	4	3	0
23	$\operatorname{arctg} u$	2	8	0	73	$\operatorname{arctg} u$	4	2	0
24	$\arccos u$	5	9	1	74	$\arcsin u$	3	3	1

Закінчення табл. 6.2

Номер варіанта	$f(u)$	m	n	a	Номер варіанта	$f(u)$	m	n	a
25	$\arcsin u$	4	8	1	75	$\arcsin u$	5	4	1
26	$\arcsin u$	7	7	1	76	$\mathrm{arcctg}\, u$	5	5	0
27	$\mathrm{arctg}\, u$	3	6	0	77	$\mathrm{arctg}\, u$	6	6	0
28	$\arccos u$	5	5	1	78	$\arccos u$	7	7	1
29	$\mathrm{arcctg}\, u$	4	4	0	79	$\arcsin u$	7	8	1
30	$\mathrm{arctg}\, u$	8	3	0	80	$\mathrm{arcctg}\, u$	6	9	0
31	$\arccos u$	5	2	1	81	$\mathrm{arcctg}\, u$	8	8	0
32	$\mathrm{arcctg}\, u$	3	3	0	82	$\mathrm{arctg}\, u$	4	7	0
33	$\mathrm{arcctg}\, u$	7	4	0	83	$\arccos u$	3	6	1
34	$\arcsin u$	8	5	1	84	$\arccos u$	3	5	1
35	$\arcsin u$	9	6	1	85	$\mathrm{arctg}\, u$	6	4	0
36	$\arccos u$	7	7	1	86	$\arcsin u$	3	3	1
37	$\mathrm{arctg}\, u$	5	8	0	87	$\arcsin u$	8	2	1
38	$\arccos u$	8	9	1	88	$\mathrm{arcctg}\, u$	9	3	0
39	$\mathrm{arcctg}\, u$	7	8	0	89	$\mathrm{arctg}\, u$	7	4	0
40	$\mathrm{arctg}\, u$	5	7	0	90	$\arccos u$	3	5	1
41	$\mathrm{arcctg}\, u$	2	6	0	91	$\arcsin u$	3	6	1
42	$\arcsin u$	3	5	1	92	$\mathrm{arctg}\, u$	6	7	0
43	$\arcsin u$	3	4	1	93	$\mathrm{arcctg}\, u$	5	8	0
44	$\arccos u$	4	3	1	94	$\arccos u$	4	9	1
45	$\mathrm{arctg}\, u$	5	2	0	95	$\arcsin u$	4	8	1
46	$\mathrm{arcctg}\, u$	4	3	0	96	$\mathrm{arctg}\, u$	3	7	0
47	$\arccos u$	3	4	1	97	$\arccos u$	4	6	1
48	$\mathrm{arctg}\, u$	5	5	0	98	$\arcsin u$	5	5	1
49	$\mathrm{arcctg}\, u$	5	6	0	99	$\mathrm{arctg}\, u$	6	4	0
50	$\arcsin u$	7	7	1	100	$\mathrm{arcctg}\, u$	7	3	0

Задача 6.3. За даними табл. 6.3 знайти інтеграл

$$\int x^m f(a \cdot x + b)dx .$$

Таблиця 6.3

Номер варіанта	$f(u)$	m	a	b	Номер варіанта	$f(u)$	m	a	b
1	$\sin u$	2	2	4	51	7^u	3	8	4
2	$\log_3 u$	3	3	3	52	$\log_4 u$	3	9	3
3	3^u	2	4	3	53	$\sin u$	2	8	2
4	$\log_4 u$	3	5	3	54	5^u	3	7	1
5	$\cos u$	2	6	5	55	$\log_3 u$	3	6	2
6	5^u	3	7	6	56	9^u	3	5	3
7	$\log_2 u$	2	8	7	57	$\log_5 u$	2	4	2
8	7^u	3	9	7	58	9^u	3	3	3
9	$\sin u$	2	8	8	59	$\log_4 u$	3	2	4
10	$\log_4 u$	3	7	9	60	5^u	3	3	6
11	3^u	3	6	8	61	$\sin u$	2	4	7
12	$\log_3 u$	2	5	7	62	$\log_5 u$	2	5	8
13	$\cos u$	2	4	6	63	4^u	3	6	2
14	4^u	3	3	5	64	$\cos u$	3	7	3
15	$\log_4 u$	2	2	4	65	$\log_4 u$	2	8	3
16	5^u	3	1	3	66	5^u	3	9	4
17	$\sin u$	2	2	2	67	$\log_2 u$	2	8	4
18	$\log_5 u$	3	3	3	68	7^u	2	7	4
19	3^u	2	4	4	69	$\cos u$	3	6	4
20	$\log_5 u$	3	5	5	70	$\log_4 u$	3	5	7
21	7^u	2	6	4	71	5^u	3	4	7
22	$\cos u$	3	7	3	72	$\log_3 u$	3	3	7
23	4^u	3	8	4	73	7^u	2	2	7
2,	$\log_2 u$	2	9	5	74	$\sin u$	3	3	4

Продовження табл. 6.3

Номер варіанта	$f(u)$	m	a	b	Номер варіанта	$f(u)$	m	a	b
25	7^u	3	8	6	74	$\log_5 u$	2	4	4
26	$\sin u$	3	7	7	76	3^u	3	5	4
27	$\log_4 u$	3	6	8	77	$\log_4 u$	2	6	4
28	7^u	3	5	7	78	7^u	3	7	9
29	$\log_5 u$	2	4	8	79	$\sin u$	3	8	9
30	$\cos u$	3	3	7	80	5^u	2	9	9
31	$\log_4 u$	2	2	6	81	$\log_4 u$	3	8	9
32	3^u	3	3	5	82	7^u	3	7	3
33	$\log_5 u$	3	4	4	83	$\sin u$	3	6	3
34	$\sin u$	3	5	3	84	4^u	2	5	3
35	5^u	3	6	4	85	$\cos u$	2	4	3
36	$\log_4 u$	2	7	5	86	$\log_4 u$	3	3	4
37	4^u	3	8	6	87	$\log_2 u$	2	2	4
38	$\log_5 u$	3	9	5	88	5^u	3	3	4
39	$\sin u$	2	8	4	89	$\sin u$	2	4	7
40	5^u	3	7	5	90	$\log_3 u$	3	5	8
41	$\log_4 u$	2	6	6	91	$\cos u$	3	6	8
42	$\sin u$	3	5	7	92	5^u	2	7	5
43	$\log_5 u$	2	4	8	93	$\log_4 u$	3	8	5
44	4^u	2	3	9	94	3^u	3	9	5
45	$\log_2 u$	3	2	8	95	$\log_3 u$	2	8	4
46	7^u	2	3	7	96	$\sin u$	3	7	4
47	$\cos u$	3	4	8	97	5^u	2	6	5
48	$\log_5 u$	3	5	7	98	$\log_2 u$	3	5	5
49	5^u	3	6	6	99	4^u	3	4	4
50	$\log_3 u$	3	7	5	100	$\cos u$	2	3	4

Задача 6.4. За даними табл. 6.4 знайти інтеграл $\int f(m \cdot x)dx$.

Таблиця 6.4

Номер варіанта	$f(u)$	m	Номер варіанта	$f(u)$	m	Номер варіанта	$f(u)$	m
1	$\arcsin u$	3	34	$\mathrm{arctg}\, u$		67	$\arccos u$	7
2	$\mathrm{arctg}\, u$	2	35	$\arccos u$	7	68	$\mathrm{arcctg}\, u$	5
3	$\arccos u$	4	36	$\mathrm{arcctg}\, u$		69	$\arcsin u$	7
4	$\mathrm{arcctg}\, u$	3	37	$\arcsin u$	1	70	$\mathrm{arctg}\, u$	7
5	$\arcsin u$	2	38	$\mathrm{arctg}\, u$	4	71	$\arccos u$	6
6	$\mathrm{arctg}\, u$	5	39	$\arccos u$	5	72	$\mathrm{arcctg}\, u$	7
7	$\arccos u$	4	40	$\mathrm{arcctg}\, u$	3	73	$\arcsin u$	5
8	$\mathrm{arcctg}\, u$	5	41	$\arcsin u$	5	74	$\mathrm{arctg}\, u$	4
9	$\arcsin u$	5	42	$\mathrm{arctg}\, u$	2	74	$\arccos u$	3
10	$\mathrm{arctg}\, u$	6	43	$\arccos u$	8	76	$\mathrm{arcctg}\, u$	5
11	$\arccos u$	5	44	$\mathrm{arcctg}\, u$	2	77	$\arcsin u$	3
12	$\mathrm{arcctg}\, u$	7	45	$\arcsin u$	3	78	$\mathrm{arctg}\, u$	9
13	$\arcsin u$	3	46	$\mathrm{arctg}\, u$	9	79	$\arccos u$	4
14	$\mathrm{arctg}\, u$	4	47	$\arccos u$	4	80	$\mathrm{arcctg}\, u$	2
15	$\arccos u$	7	48	$\mathrm{arcctg}\, u$	8	81	$\arcsin u$	4
16	$\mathrm{arcctg}\, u$	5	49	$\arcsin u$	9	82	$\mathrm{arctg}\, u$	8
17	$\arcsin u$	2	50	$\mathrm{arctg}\, u$	5	83	$\arccos u$	8
18	$\mathrm{arctg}\, u$	3	51	$\arccos u$	2	84	$\mathrm{arcctg}\, u$	2
19	$\arccos u$	7	52	$\mathrm{arcctg}\, u$	2	85	$\arcsin u$	1
20	$\mathrm{arcctg}\, u$	4	53	$\arcsin u$	2	86	$\mathrm{arctg}\, u$	4
21	$\arcsin u$	2	54	$\mathrm{arctg}\, u$	7	87	$\arccos u$	2
22	$\mathrm{arctg}\, u$	5	55	$\arccos u$	3	88	$\mathrm{arcctg}\, u$	7
23	$\arccos u$	6	56	$\mathrm{arcctg}\, u$	3	89	$\arcsin u$	1
24	$\mathrm{arcctg}\, u$	5	57	$\arcsin u$	3	90	$\mathrm{arctg}\, u$	2

Продовження табл. 6.4

Номер варіанта	$f(u)$	m	Номер варіанта	$f(u)$	m	Номер варіанта	$f(u)$	m
25	$\arcsin u$	6	58	$\mathrm{arctg}\, u$	3	91	$\arccos u$	3
26	$\mathrm{arctg}\, u$	5	59	$\arccos u$	3	92	$\mathrm{arcctg}\, u$	9
27	$\arccos u$	6	60	$\mathrm{arcctg}\, u$	8	93	$\arcsin u$	7
28	$\mathrm{arcctg}\, u$	5	61	$\arcsin u$	5	94	$\mathrm{arctg}\, u$	6
29	$\arcsin u$	7	62	$\mathrm{arctg}\, u$	4	95	$\arccos u$	4
30	$\mathrm{arctg}\, u$	8	63	$\arccos u$	3	96	$\mathrm{arcctg}\, u$	2
31	$\arccos u$	3	64	$\mathrm{arcctg}\, u$	3	97	$\arcsin u$	6
32	$\mathrm{arcctg}\, u$	1	65	$\arcsin u$	4	98	$\mathrm{arctg}\, u$	8
33	$\arcsin u$	3	66	$\mathrm{arctg} u$	10	99	$\arccos u$	3
						100	$\mathrm{arcctg}\, u$	7

Задача 6.5. За даними табл. 6.5 знайти інтеграл

$$\int \frac{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}{(x^2 + mx + n)(px + q)} dx .$$

Таблиця 6.5

Номер варіанта	a	b	c	d	e	m	n	p	q
1	1	4	2	3	4	1	7	1	4
2	3	3	– 3	– 2	3	1	– 1	– 1	– 3
3	4	2	4	4	5	1	– 2	2	2
4	2	5	5	3	3	1	2	2	– 5
5	4	– 3	6	2	2	1	8	2	– 3
6	5	7	7	– 5	5	1	1	– 1	7
7	1	8	– 8	4	4	1	1	1	– 8
8	4	8	9	5	2	2	1	2	8
9	5	5	8	5	5	3	– 9	– 1	5
10	7	7	7	– 6	3	3	– 11	1	7
11	4	8	.6	5	5	1	3	2	– 3

Продовження табл. 6.5

Номер варіанта	a	b	c	d	e	m	n	p	q
12	3	9	5	7	4	1	– 8	– 1	9
13	6	4	4	3	3	2	9	1	4
14	3	1	– 3	4	2	2	9	1	– 1
15	3	5	2	7	5	3	– 1	1	5
16	6	5	3	5	3	1	4	– 2	5
17	2	4	4	– 2	2	1	1	2	4
18	4	3	5	3	3	1	– 7	1	– 3
19	6	3	6	7	7	2	– 7	2	3
20	6	4	7	4	4	3	– 8	– 2	4
21	4	7	8	2	3	1	2	2	– 7
22	2	8	9	5	2	1	2	1	8
23	2	5	– 8	6	– 6	1	1	1	5
24	4	4	7	5	3	2	– 11	– 2	4
25	5	3	6	6	2	3	– 13	1	3
26	6	2	5	5	5	3	– 8	2	– 2
27	5	4	4	– 6	6	2	4	1	4
28	3	5	3	5	7	7	3	– 1	5
29	3	6	2	7	7	7	2	1	6
30	4	3	3	8	8	8	3	2	– 3
31	2	4	– 4	3	4	5	– 4	– 1	4
32	4	5	5	1	4	4	5	2	5
33	6	– 2	6	3	3	3	6	1	2
34	4	3	7	– 3	2	– 1	7	– 2	3
35	3	6	8	7	7	7	8	1	6
36	2	– 5	9	– 1	2	– 4	9	2	– 5
37	2	1	8	1	3	3	8	1	1
38	6	3	7	4	4	4	7	– 2	3
39	7	– 4	6	5	5	5	6	1	4
40	8	5	5	3	4	5	5	2	– 5

Продовження табл. 6.5

Номер варіанта	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*m*	*n*	*p*	*q*
41	4	4	– 4	5	1	1	– 4	– 2	4
42	2	3	3	2	4	5	3	1	3
43	4	– 4	2	8	8	8	2	– 1	4
44	5	5	3	2	1	1	3	1	5
45	7	6	– 4	3	4	5	– 4	2	– 6
46	8	7	5	9	9	9	5	– 2	7
47	9	8	6	4	4	4	6	1	8
48	3	9	– 7	8	4	3	– 7	– 1	9
49	4	5	8	9	9	9	8	– 1	5
50	4	– 3	9	5	3	3	9	1	– 3
51	6	2	8	2	2	2	8	2	2
52	5	1	7	2	4	3	7	1	1
53	1	– 4	6	2	5	5	6	– 1	4
54	2	5	5	7	8	8	5	– 1	5
55	4	6	4	3	3	3	4	2	6
56	5	– 7	3	3	3	3	3	1	– 7
57	6	8	3	3	2	1	3	1	8
58	3	9	5	3	3	3	5	– 1	9
59	2	2	6	3	5	5	6	– 2	2
60	4	3	7	8	8	8	7	2	– 3
61	3	3	8	5	3	2	8	1	3
62	4	4	9	4	3	7	9	1	– 4
63	5	7	8	– 2	4	2	8	1	7
64	3	8	7	3	3	3	7	– 1	8
65	4	9	6	– 1	4	4	6	2	9
66	4	9	5	– 3	2	2	5	– 2	9
67	3	8	4	7	8	8	4	1	– 8
68	2	7	3	5	5	5	3	1	7
69	3	5	2	– 1	7	7	2	– 1	5
70	3	4	3	– 3	4	3	3	1	– 4

Продовження табл. 6.5

Номер варіанта	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*m*	*n*	*p*	*q*
71	5	3	4	6	6	6	4	– 1	3
72	4	2	5	– 1	7	7	5	2	2
73	2	1	6	5	6	6	6	– 1	1
74	2	2	7	4	7	8	7	2	– 2
74	2	3	8	3	3	3	8	– 1	3
76	2	4	9	5	5	5	9	1	4
77	3	5	8	3	2	1	8	1	– 5
78	4	6	7	9	9	9	7	– 2	6
79	5	5	6	4	3	– 1	6	1	5
80	5	4	5	2	3	4	5	– 1	4
81	5	3	4	4	5	6	4	1	3
82	3	1	3	2	– 2	– 1	3	1	– 1
83	3	5	2	8	4	– 1	2	1	5
84	3	6	3	2	2	2	3	– 1	6
85	4	7	3	1	1	1	3	2	7
86	5	– 1	3	4	2	6	3	1	– 3
87	2	9	4	2	3	4	4	2	9
88	5	– 2	4	– 1	– 2	– 3	4	1	– 1
89	1	7	5	1	2	2	5	– 1	7
90	5	6	5	2	2	2	5	1	6
91	6	5	6	3	3	3	6	2	5
92	1	4	6	– 1	– 3	– 1	6	– 1	4
93	2	3	7	7	3	5	7	2	3
94	9	2	8	– 1	– 3	– 1	8	1	2
95	7	3	9	4	9	9	9	– 1	3
96	1	4	– 1	2	4	5	8	1	4
97	2	5	– 2	– 1	– 3	6	– 1	2	– 5
98	7	6	6	– 2	– 3	– 1	6	– 1	6
99	5	– 1	5	3	– 3	3	5	– 2	7
100	4	– 2	5	7	– 1	– 2	5	2	– 1

Задача 6.6. За даними табл. 6.6 обчислити визначений інтеграл $\int\limits_a^b x^m f(px+q)dx$.

Таблиця 6.6

Номер варіанта	*a*	*b*	*f(u)*	*m*	*p*	*q*	Номер варіанта	*a*	*b*	*f(u)*	*m*	*p*	*q*
1	0	1	cos u	3	8	4	51	0	1	7u	2	2	4
2	1	2	5u	3	9	3	52	1	3	cos u	3	3	3
3	0	1	$\log_4$ u	2	8	2	53	0	1	4u	2	4	3
4	1	2	3u	3	7	1	54	1	2	$\log_2$ u	3	5	3
5	0	2	$\log_3$ u	3	6	2	55	0	3	7u	2	6	5
6	1	2	sin u	3	5	3	56	0	1	sin u	3	7	6
7	0	1	5u	2	4	2	57	1	2	$\log_4$ u	2	8	7
8	1	2	$\log_2$ u	3	3	3	58	0	3	7u	3	9	7
9	0	2	4u	3	2	4	59	1	3	$\log_5$ u	2	8	8
10	1	3	cos u	3	3	6	60	0	1	cos u	3	7	9
11	0	1	$\log_4$ u	2	4	7	61	0	2	$\log_4$ u	3	6	8
12	1	2	7u	2	5	8	62	1	2	3u	2	5	7
13	0	3	sin u	3	6	2	63	0	1	$\log_5$ u	2	4	6
14	1	2	4u	3	7	3	64	0	2	sin u	3	3	5
15	0	3	cos u	2	8	3	65	1	3	5u	2	2	4
16	1	2	$\log_4$ u	3	9	4	66	0	1	$\log_4$ u	3	1	3
17	1	2	$\log_2$ u	2	8	4	67	0	2	4u	2	2	2
18	1	3	5u	2	7	4	68	1	3	$\log_5$ u	3	3	3
19	0	1	sin u	3	6	4	69	0	1	sin u	2	4	4
20	1	3	$\log_3$ u	3	5	7	70	1	2	5u	3	5	5
21	0	2	5u	3	4	7	71	0	3	$\log_4$ u	2	6	4
22	1	2	$\log_3$ u	3	3	7	72	0	1	sin u	3	7	3
23	0	3	7u	2	2	7	73	1	2	$\log_5$ u	3	8	4
24	1	2	sin u	3	3	4	74	0	3	4u	2	9	5

Закінчення табл. 6.6

Номер варіанта	*a*	*b*	*f(u)*	*m*	*p*	*q*	Номер варіанта	*a*	*b*	*f(u)*	*m*	*p*	*q*
25	1	3	$\log_5$ u	2	4	4	75	0	1	$\log_2$ u	3	8	6
26	1	2	3u	3	5	4	76	0	2	7u	3	7	7
27	0	3	$\log_4$ u	2	6	4	77	1	3	cos u	3	6	8
28	0	1	7u	3	7	9	78	0	1	$\log_5$ u	3	5	7
29	0	1	sin u	3	8	9	79	0	2	5u	2	4	8
30	0	2	5u	2	9	9	80	0	3	$\log_3$ u	3	3	7
31	0	3	sin u	3	8	9	81	1	2	7u	2	2	6
32	1	3	$\log_3$ u	3	7	3	82	0	1	$\log_4$ u	3	3	5
33	0	2	3u	3	6	3	83	1	2	sin u	3	4	4
34	1	3	$\log_4$ u	2	5	3	84	0	3	5u	3	5	3
35	0	2	cos u	2	4	3	85	1	3	$\log_3$ u	3	6	4
36	1	3	5u	3	3	4	86	0		9u	2	7	5
37	0	3	$\log_2$ u	2	2	4	87	1	3	$\log_5$ u	3	8	6
38	1	3	7u	3	3	4	88	0	2	9u	3	9	5
39	0	3	sin u	2	4	7	89	1	3	$\log_4$ u	2	8	4
40	1	2	$\log_4$ u	3	5	8	90	0	1	5u	3	7	5
41	0	3	3u	3	6	8	91	0	3	sin u	2	6	6
42	1	2	$\log_3$ u	2	7	5	92	0	2	$\log_5$ u	3	5	7
43	0	3	cos u	3	8	5	93	1	2	4u	2	4	8
44	1	2	4u	3	9	5	94	0	1	cos u	2	3	9
45	0	3	$\log_4$ u	2	8	4	95	0	2	$\log_4$ u	3	2	8
46	1	2	5u	3	7	4	96	0	3	5u	2	3	7
47	0	3	sin u	2	6	5	97	1	1	$\log_2$ u	3	4	8
48	1	2	$\log_5$ u	3	5	5	98	0	2	7u	3	5	7
49	0	1	3u	3	4	4	99	0	2	cos u	3	6	6
50	1	2	$\log_5$ u	2	3	4	100	1	2	$\log_4$ u	3	7	5

Задача 6.7. За даними табл. 6.7 обчислити (або довести розбіжність) невластивий інтеграл $\int\limits_{a}^{\infty}\frac{f(p\cdot x+q)}{x^{m}}dx$.

Таблиця 6.7

Номер варіанта	a	$f(u)$	m	p	q	Номер варіанта	a	$f(u)$	m	p	q
1	0	$\log_4 u$	2	6	6	51	0	$5u$	3	4	7
2	1	arctg u	3	5	7	52	1	$\log_3 u$	3	3	7
3	1	$\log_5 u$	2	4	8	53	1	$7u$	2	2	7
4	1	$4u$	2	3	9	54	1	arctg u	3	3	4
5	0	$\log_2 u$	3	2	8	55	0	$\log_5 u$	2	4	4
6	1	$7u$	2	3	7	56	1	$3u$	3	5	4
7	0	arcctg u	3	4	8	57	1	$\log_4 u$	2	6	4
8	1	$\log_5 u$	3	5	7	58	0	$7u$	3	7	9
9	1	$5u$	3	6	6	59	1	arctg u	3	8	9
10	1	$\log_3 u$	3	7	5	60	1	$5u$	2	9	9
11	0	$7u$	2	2	6	61	0	arctg u	3	8	9
12	1	$\log_4 u$	3	3	5	62	1	$\log_3 u$	3	7	3
13	1	arctg u	3	4	4	63	0	$3u$	3	6	3
14	1	$5u$	3	5	3	64	1	$\log_4 u$	2	5	3
15	0	$\log_3 u$	3	6	4	65	1	arcctg u	2	4	3
16	1	$9u$	2	7	5	66	0	$5u$	3	3	4
17	1	$\log_5 u$	3	8	6	67	0	$\log_2 u$	2	2	4
18	1	$9u$	3	9	5	68	1	$7u$	3	3	4
19	0	$\log_4 u$	2	8	4	69	1	arctg u	2	4	7
20	1	$5u$	3	7	5	70	1	$\log_4 u$	3	5	8
21	0	arctg u	2	6	4	71	0	$3u$	3	6	8
22	1	$\log_5 u$	3	7	3	72	1	$\log_3 u$	2	7	5
23	1	$4u$	3	8	4	73	1	arcctg u	3	8	5
24	1	arcctg u	2	9	5	74	0	$4u$	3	9	5

Закінчення табл. 6.7

Номер варіанта	a	$f(u)$	m	p	q	Номер варіанта	a	$f(u)$	m	p	q
25	1	$\log_4 u$	3	8	6	75	0	$\log_4 u$	2	8	4
26	1	$5u$	3	7	7	76	1	$5u$	3	7	4
27	0	$\log_2 u$	3	6	8	77	1	arctg u	2	6	5
28	0	$7u$	3	5	7	78	0	$\log_5 u$	3	5	5
29	1	arcctg u	2	4	8	79	0	3^u	3	4	4
30	1	$\log_4 u$	3	3	7	80	1	$\log_5 u$	2	3	4
31	0	arcctg u	3	8	4	81	1	$7u$	2	2	4
32	1	$5u$	3	9	3	82	0	arcctg u	3	3	3
33	0	$\log_4 u$	2	8	2	83	1	$4u$	2	4	3
34	1	$3u$	3	7	1	84	1	$\log_2 u$	3	5	3
35	0	$\log_3 u$	3	6	2	85	1	$7u$	2	6	5
36	1	arctg u	3	5	3	86	0	arctg u	3	7	6
37	1	$5u$	2	4	2	87	1	$\log_4 u$	2	8	7
38	1	$\log_2 u$	3	3	3	88	0	$7u$	3	9	7
39	0	$4u$	3	2	4	89	1	log5u	2	8	8
40	1	arcctg u	3	3	6	90	0	arcctg u	3	7	9
41	0	$\log_4 u$	2	4	7	91	1	$\log_4 u$	3	6	8
42	1	$7u$	2	5	8	92	0	$3u$	2	5	7
43	1	arctg u	3	6	2	93	1	$\log_5 u$	2	4	6
44	1	$4u$	3	7	3	94	0	arctg u	3	3	5
45	0	arcctg u	2	8	3	95	0	$5u$	2	2	4
46	1	$\log_4 u$	3	9	4	96	1	$\log_4 u$	3	1	3
47	0	$\log_2 u$	2	8	4	97	1	$4u$	2	2	2
48	1	$5u$	2	7	4	98	0	$\log_5 u$	3	3	3
49	1	arctg u	3	6	4	99	1	arctg u	2	4	4
50	1	$\log_3 u$	3	5	7	100	1	$5u$	3	5	5

Застосування інтегралів при розв'язуванні прикладних задач

Задача 6.8. За даними табл. 6.8 обчислити наближено інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, користуючись формулою:

а) лівих прямокутників;
б) правих прямокутників;
в) трапеції;
г) Сімпсона.

Таблиця 6.8

Номер варіанта	a	b	n	$F(x)$	Номер варіанта	a	b	n	$F(x)$
1	0	1	10	$\sqrt{2-x^3}$	11	0	2	10	$\sqrt{1+x^3}$
2	0	1	10	$\sqrt[3]{3-2x^2}$	12	0	$\pi/2$	10	$\sqrt{3-\cos 2x}$
3	0	1	10	$e^{-x^2/4}$	13	0	4	10	$1/(1+x^4)$
4	0	π	10	$\sqrt{2-\sin x}$	14	0	2	10	$\sqrt[3]{4-5x^2}$
5	0	1	10	$\sqrt{1+4x^3}$	15	0	$\pi/2$	10	$\sqrt{4-\sin 2x}$
6	0	$\pi/2$	10	$\sqrt{1-0{,}1\sin^2 x}$	16	0	$\pi/2$	10	$\sin 2x/x$
7	0	$\pi/3$	10	$\sin x/x$	17	0	1	10	$1/\sqrt{4-x^3}$
8	0	$\pi/3$	10	$\sqrt{\cos x}$	18	0	$\pi/2$	10	$\cos x/x$
9	0	1	10	$\sqrt{4+x^2}$	19	0	1	10	$\sqrt{1+10x^3}$
10	0	$\pi/2$	10	$\cos x/(1+x)$	20	0	2	10	$\sqrt{9+x^2}$

Задача 6.8-1. За даними табл. 6.8-1 обчислити довжину дуги кривої $y=f(x)$ або $x=f(t)$, $y=g(t)$ від $x=a$ до $x=b$.

Таблиця 6.8-1

Номер варіанта	$y=f(x)$ *або* $x=f(t), y=g(t)$	a	b
21	$y=2(e^{x/4}+e^{-x/4})$	0	3
22	$y=4(e^{x/8}+e^{-x/8})$	0	8
23	$y=5(e^{x/10}+e^{-x/10})$	0	11
24	$y=\ln x$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$
25	$y=\ln(1-x^2)$	0	1/2
26	$y=\ln((e^x+1)/(e^x-1))$	2	5
27	$y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$	—	—
28	$y=\ln((e^x+1)/(e^x-1))$	6	8
29	$x=2\cos^5 t, y=2\sin^5 t$	—	—
30	$x=t^2, y=t-t^3/3$	Одна петля	
31	$y=6(e^{x/12}+e^{-x/12})$	0	12
32	$y=\ln 2x$	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{8}$
33	$y=\ln(1-x^3)$	0	1/3
34	$x=2t^2, y=t-t^4/4$	Одна петля	
35	$y=\ln((e^{2x+1}+1)/(e^{2x+1}-1))$	3	6
36	$y=\sqrt{4x-x^2}+\arcsin 2\sqrt{x}$	—	—
37	$x=2(t-\sin t), y=2(1-\cos t)$	Одна арка	
38	$x^{2/3}+y^{2/3}=4^{2/3}$		
39	$y=\ln x$	3/4	12/5
40	$y=\ln(2\cos x)$	Точка перетину з віссю Oy	Точка перетину з віссю Ox

Задача 6.8-2. За даними табл. 6.8-2 обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = f_1(x)$ та $y = g_1(x)$. Знайти об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = f_2(x)$, $y = g_2(x)$, $x = h(y)$, навколо даної осі.

Таблиця 6.8-2

Номер варіанта	$y = f_1(x)$	$y = g_1(x)$	$y = \ln x$	$y = f_2(x)$	$h(y)$	Дана вісь
41	x^2	$\sqrt{x}$	xe^x	0	1	Ox
42	$4 - x^2$	0	$2x - x^2$	0	—	Oy
43	$3 - 2x - x^2$	0	$2\left(\frac{x}{3}\right)^2$	$2\left\|\frac{x}{3}\right\|$	—	Ox
44	$\ln x$	0	$2\left(\frac{x}{3}\right)^2$	$2\left\|\frac{x}{3}\right\|$	e	Oy
45	x^2	$2 - x^2$	e^{-x}	0	$0 \le x < +\infty$	Ox
46	$x^2 + 4x$	$x + 4$	$e^{-x}\sqrt{\sin x}$	—	$0 \le x < +\infty$	Ox
47	$6x - x^2$	0	$\sin x$	0	$0 \le x \le \pi$	Ox
48	x^3	8 Прим. $x = 0$	$\sin x$	0	$0 \le x \le \pi$	Oy
49	$\sin x$	$y = 0$	$4\left(\frac{x}{7}\right)^{2/3}$	0	$0 \le x \le 7$	Ox
50	$6/x$	$7 - x$	$-x^2 + 8$	x^2	—	Ox
51	$4/x$	$5 - x$	$\sqrt{1 - x^2}$	$\sqrt{3/2^x}$	—	Ox
52	$\sqrt{16 - 8x}$	$\sqrt{24x + 48}$	$\sin x$	0	—	Ox
53	$x^2 + 3x$	$4 - 3x$	$1/(1 + x^2)$	0	± 1	Ox
54	$1/(1 + x^2)$	$x^2/3$	x^3	8	0	Oy
55	x^2	$-x^2$	x^2	4	—	Пряма $x = 2$

Номер варіанта	$y = f_1(x)$	$y = g_1(x)$	$y = \ln x$	$y = f_2(x)$	$h(y)$	Дана вісь
56	$x(x-1)^2$	0	$x\sqrt{-x}$	0	-4	Oy
57	$x - x^2\sqrt{x}$	0	$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$	0	$0, x > 0$	Ox
58	e^x	$e^{-x}, x = 1$	$2 - x^2/2$	$2 - x$	—	Oy
59	$(x^2 + 2x)e^{-x}$	0	$\cos x$	-1	$-\pi \le x \le \pi$	пряма $y = -1$
60	$2x^2e^x$	$-x^3e^x$	x^5	32	0	Oy

Економічна задача

Задача 6.8-3. Нехай $f(x)$ — навантаження на електростанцію (у кіловат-годинах); x — кількість годин, відмічуваних від початку доби. За даними табл. 6.8-3 обчислити витрати електроенергії за n діб.

Таблиця 6.8-3

Номер варіанта	$f(x)$	n	Номер варіанта	$f(x)$	n
61	$-x^2 + 25x + 180$	2	71	$-6x^2 + 3x + 4$	2
62	$-x^2 + 10x + 104$	3	72	$-8x^2 + 10x + 5$	3
63	$-x^2 + 30x + 90$	4	73	$-14x^2 + 25x + 15$	2
64	$-2x^2 + 30x + 80$	5	74	$-9x^2 + 3x + 9$	2
65	$-4x^2 + 25x + 16$	2,5	75	$-27x^2 + 13x + 14$	2,5
66	$-9x^2 + 15x + 12$	2	76	$-7x^2 + 15x + 7$	1,5
67	$-8x^2 + 15x + 13$	1,5	77	$-3x^2 + 5x + 9$	1
68	$-4x^2 + 9x + 12$	1	78	$-2x^2 + 10x + 8$	1,5
69	$-5x^2 + 8x + 14$	2,3	79	$-4x^2 + 5x + 6$	2
70	$-7x^2 + 4x + 5$	1,2	80	$-9x^2 + 12x + 15$	3

Задача 6.8-4. Витрати виробництва $K(x)$ визначаються формулою $K(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, де x — кількість вироблених одиниць продукції.

За даними табл. 6.8-4 знайти середнє значення витрат виробництва, якщо обсяг його змінюється від a до b умовних одиниць. Зазначити обсяг продукції, при якому витрати набувають середнього значення.

Таблиця 6.8-4

Номер варіанта	α	β	γ	a	b
81	1	5	6	5	15
82	2	10	12	4	13
83	2	1	– 1	6	18
84	3	2	– 1	12	15
85	9	3	– 2	10	20
86	8	2	– 1	12	28
87	3	2	– 1	20	40
88	4	2	– 2	21	33
89	2	3	9	13	25
90	1	1	– 12	10	21
91	3	4	8	10	21
92	4	3	2	2	14
93	5	6	8	4	20
94	6	7	8	5	25
95	7	9	12	3	13
96	4	2	1	2	12
97	4	3	2	3	13
98	2	3	4	2	11
99	3	4	5	8	12
100	15	1	1	2	12

Розділ 7. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Задача 7.1. За даними табл. 7.1 розв'язати диференціальне рівняння $P(x,y)y'=Q(x,y)$. Знайти його загальний розв'язок, а також частинний розв'язок, який задовольняє умову $y(x_0)=y_0$.

Таблиця 7.1

Номер варіанта	$P(x,y)$	$Q(x,y)$	y_0	x_0
1	$2x^2+x\cdot y$	$x\cdot y+y^2$	1	1
2	a^2+x^2	$1-x\cdot y$	$\frac{\ln\lvert a\rvert}{\lvert a\rvert}$	0
3	$2x+1$	$x-2y$	2	0
4	x	$-2y-2e^{-x^2}$	e^{-1}	1
5	x	$\ln x-y-1$	0	1
6	$\cos x$	$y\cdot\sin x+2\cdot\sin 2x$	1	0
7	$\sin 2x$	$2y+2\cos x$	$-\sqrt{2}$	$\pi/4$
8	$x^2\cdot\sin x$	$yx^2\cos x-\sin^2 x$	$2/\pi$	$\pi/2$
9	1	$1/\cos x-y\cdot\mathrm{tg}x$	$\sqrt{2}$	$\pi/4$
10	1	$e^{-\sin x}-y\cdot\cos x$	2	0
11	x	$2y+2x^4$	8	2
12	1	$3x+2xy$	2	0
13	$x\cdot\mathrm{tg}\,y$	$-\ln(\cos y)$	0	1
14	y	$-x\cdot e^y$	0	1
15	e^{2x}	$(x-1)\mathrm{tg}\,y\cdot e^{1+x^2}$	$\pi/2$	1
16	$y^2(1+e^{2x})$	e^x	0	0
17	1	$\cos(x-2y)-\cos(x+2y)$	$\pi/4$	0
18	1	2^{x-y}	– 5	– 3

Номер варіанта	$P(x,y)$	$Q(x,y)$	y_0	x_0
19	$\sqrt{x+1}$	$-y\cdot\ln^3 y$	e	$-\frac{15}{16}$
20	$y\cdot\sqrt{1+x^2}$	$-x\cdot\sqrt{1+y^2}$	0	0
21	1	$\sin(x-y)-\sin(x+y)$	$\pi/2$	$\pi/2$
22	1	$e^{x+y}+e^{x-y}$	0	0
23	$\sqrt{a^2-x^2}$	$\sqrt{a^2-y^2}$	a	a
24	$x\cdot(1-y)$	$y(x+2)$	1	1
25	$y^2\cdot(x^4+1)$	$-x(y^6+1)$	1	0
26	$\sqrt{y}+\sqrt{xy}$	$\sqrt{y}-\sqrt{xy}$	4	0
27	$\sqrt{1+\sin y}$	$-\sqrt{1+\cos 2x}$	0	$\pi/4$
28	$\cos x-\sin x+1$	$\cos y-\sin y-1$	$\pi/2$	$-\pi/2$
29	$(3y+2)\cdot\sqrt{x^2+4x+13}$	$-(4+y^2)(x+1)$	0	0
30	1	$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$	$\pi/2$	0
31	$1+x^2$	$-y$	1	1
32	$\cos x$	$y/\ln y$	1	0
33	x	$y+\sqrt{x^2+y^2}$	0	1
34	x	$y(1+\ln y/x)$	e^{-1}	1
35	x^2	y^2-xy	1	+1
36	$3y^2$	$(x+1)y^3$	+1	1
37	$1-x^2$	xy^2+xy	0,5	0
38	$x\cos(y/x)$	$y\cos(y/x)-x$	π	1
39	x	$\ln x-y+1$	1	1

Номер варіанта	$P(x,y)$	$Q(x,y)$	y_0	x_0
40	x^2y^2	$(1-y)x^3$	0	-1
41	1	$xe^{-x^2}-2xy$	2	0
42	$6x-6y^2$	$2y$	1	1
43	x	e^x-y	e	1
44	$x\cdot(x+1)$	$y+x(x+1)$	0	1
45	$5y+7x$	$-8y-10x$	0	1
46	$x+1$	$e^x(x+1)^{n+1}+ny$	2	0
47	$1-x^2$	$y+(1+x)^2(1-x)$	1	0
48	$(1+e^x)\cdot y$	e^y	0	0
49	e^x	$e^{2x}-ye^x$	1	0
50	$x\cdot\cos y+\sin 2y$	1	π	0
51	x	$y+x^2\cos x$	$\pi/2$	$\pi/2$
52	1	$\frac{a}{x^n}-\frac{n}{x}y$	0	1
53	$1+x^2$	$\operatorname{arctg} x-y$	0	0
54	$\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x-y$	0	0
55	$\sin x$	$y+\sin x\cos^2 x\ln\operatorname{tg} x$	0	$\pi/2$
56	$x\ln x$	$y+(x\ln x)^2$	$e^2/2$	e
57	$\sin x$	$y\cos x-1$	0	$\pi/2$
58	$x+y^2$	y	1	1
59	1	$\sin 6x-3y\operatorname{tg} 3x$	1/3	0
60	$2xy+3$	y^2	1	0

Продовження табл. 7.1

Номер варіанта	$P(x,y)$	$Q(x,y)$	y_0	x_0
61	y^4+2x	y	2	8
62	x	$3x^3y^{4/3}-2y$	1	1
63	$x-1$	$y+y^2$	-1	2
64	$x\cos^2 x$	$2x\sqrt{y}-2y\cos^2 x$	1	2π
65	$4x$	$-3y-e^x x^4 y^5$	0	1
66	1	$e^{x/2}\sqrt{y}-y$	9/4	0
67	x^3+1	$y^2(x^3+1)^2\sin x-3x^2y$	1	0
68	$x+x^2y^2$	$-y$	-1	1
69	1	$2y\,\mathrm{tg}\,x-y^2\sin^2 x$	1	0
70	y^2+2y+x^2	$-2x$	0	1
71	$xy\left(1+x^2\right)$	$1+y^2$	$\pi/4$	1
72	$3y^2$	$x+1-y^3$	-1	1
73	x	$\ln x+1-y$	-3	1
74	$xy-x^2$	y^2	1	1
75	$1+x^2$	$(1+x^2)^2-2xy$	0	1
76	1	$2x^3y^3-2xy$	10	0
77	$\cos^2 x$	$\mathrm{tg}\,x-y$	0	0
78	$1-x^2$	$\left(1-x^2\right)\left(\arcsin x+x\right)-xy$	1	0
79	x	x^3y^4-y	1	1
80	$1+x^2$	$4\sqrt{y(1+x^2)}\,\mathrm{arctg}\,x+2xy$	0	$\pi/4$

Закінчення табл. 7.1

Номер варіанта	$P(x,y)$	$Q(x,y)$	y_0	x_0
81	$x+\ln y$	y	1	2
82	$x^2\ln y-x$	y	1	0,5
83	$x+\sqrt{x^2+y^2}$	y	$\sqrt{3}$	1
84	xy	$-x^2-2xy$	0	1
85	x	$y-\sqrt{x^2+y^2}$	1	0
86	1	$4+(y/x)+(y/x)^2$	2	1
87	x	$y+x\left(\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}\right)^{-1}$	0	1
88	x	$2(y-\sqrt{xy})$	0	1
89	$4xy(x^2+y^2)$	$-(x^4+6x^2y^2+y^4)$	0	1
90	$x-y+4$	$2-x-y$	1	1
91	$1-x-2y$	$2x+y+1$	0	2
92	$1-2x-2y$	$x+y+2$	2	2
93	1	$xy-y^3e^{x^2}$	1	0
94	1	$-x(y+y^3)$	0,5	0
95	x^2	$2xy-3$	1	-1
96	$x-x^3$	$x^3+(2x^2-1)y$	0	0,5
97	$1+x^2$	$\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)y$	$\sqrt{2}$	1
98	$1+x$	$(1+x)e^{-x}-y$	0	0
99	$2xy$	$2y^2+\sqrt{x^4+y^4}$	0	1
100	x	$4(y+\sqrt{y})$	4	1

Задача 7.2. За даними табл. 7.2 знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $C_1y'' + C_2y' + C_3y = 0$.

Таблиця 7.2

Номер варіанта	C_1	C_2	C_3	Номер варіанта	C_1	C_2	C_3
1	2	1	– 0,5	51	25	– 20	4
2	4	– 20	25	52	0,5	1	– 2
3	1	– 2	1	53	6	– 7	1
4	4	– 8	5	54	4	3	– 1
5	1	6	– 13	55	a2	2a	1
6	1	0	1	56	3	– 4	1
7	3	– 2	– 8	57	1	– 9	8
8	1	– 2	– 1	58	2	1	– 2
9	1	– 4	0	59	9	3	– 2
10	1	0	– 9	60	15	2	– 1
11	1	1	– 2	61	12	– 1	1
12	1	– 4	3	62	8	– 9	8
13	1	4	– 29	63	6	1	– 2
14	4	4	1	64	4	– 8	3
15	1	– 1	– 2	65	3	4	– 7
16	1	0	– 25	66	3	1	– 4
17	1	– 1	0	67	6	– 13	5
18	1	– 4	4	68	15	7	– 2
19	1	5	6	69	20	– 31	12
20	1	– 10	25	70	20	7	– 3
21	1	– 2	– 10	71	20	– 17	3
22	9	0	– 1	72	4	– 21	20
23	1	3	0	73	3	– 5	7
24	1	0	– 9	74	1	9	8

Закінчення табл. 7.2

Номер варіанта	C_1	C_2	C_3	Номер варіанта	C_1	C_2	C_3
25	1	0	– 1	75	1	1	– 12
26	1	9	0	76	12	– 7	1
27	1	– 7	6	77	6	– 7	2
28	1	3	2	78	4	4	– 3
29	1	2a	a2	79	3	– 10	7
30	1	– 2	– 3	80	6	7	– 5
31	1	2	– 5	81	15	– 13	2
32	1	a	0	82	20	1	– 12
33	1	– 4	3	83	20	17	3
34	1	– 4	4	84	4	– 11	– 20
35	1	0	– 4	85	5	– 19	12
36	1	4	0	86	7	– 13	– 2
37	1	3	– 4	87	5	– 11	– 12
38	4	0	– 1	88	14	– 31	15
39	4	1	0	89	7	– 15	2
40	4	– 3	– 1	90	10	34	24
41	8	2	– 3	91	12	– 11	– 15
42	2	– 1	– 1	92	3	22	– 24
43	4	– 4	1	93	10	33	– 7
44	10	2	– 1	94	12	– 11	– 15
45	– 1	0	9	95	3	– 25	28
46	25	– 10	1	96	10	– 45	7
47	25	0	1	97	12	29	15
48	2	1	– 1	98	8	2	– 3
49	13	– 6	– 1	99	3	– 17	28
50	5	– 8	4	100	4b2	– 4b	1

Задача 7.3. За даними табл. 7.3 знайти розв'язок рівняння $C_1y'' + C_2y' + C_3y = f(x)$. Значення коефіцієнтів C_1, C_2, C_3 взяти з відповідного варіанта умови попередньої задачі (див. табл. 7.2).

Таблиця 7.3

Номер варіанта	$f(x)$	Номер варіанта	$f(x)$	Номер варіанта	$f(x)$
1	$1-2x$	34	$-8\cos 3x$	67	$e^{5x}\cos x$
2	$0{,}5\sin x$	35	$\cos x$	68	$(2x+1)\,e^{4x}$
3	$3\cos 2x$	36	$\sin x - 2e^{-x}$	69	9
4	$7\,e^{3x}$	37	$x\cos 2x$	70	$(x+1)^2$
5	$x+2$	38	$3\sin 2x - \cos 2x$	71	$2e^x$
6	$2\sin x - \cos x$	39	$\frac{3}{2}e^x + x^2$	72	$-\frac{17}{2}\cos 2x$
7	$1{,}5\,e^{-x}$	40	$10\,e^{-x}$	73	1
8	$\sin 3x$	41	$2x^3 - 30$	74	$2x$
9	$3x-2$	42	$2\cdot e^x\cdot\cos\frac{x}{2}$	75	$e2x + e^{-2x}$
10	1	43	$x - e^{-2x} + 1$	76	$3(x-1)^2$
11	e^{2x}	44	$e^x(3-4x)$	77	$7x^2 + x + 7$
12	$x\sin x$	45	$3x + 5\sin 2x$	78	$21\sin 7x$
13	$2\cos x + \sin x$	46	$2\sin 3x - x$	79	$3\,e^{-5x}$
14	$\cos x\,e^{-2x}$	47	$3-2x^2$	80	$6\,x\,e^{2x}$
15	x^2-1	48	$29\cos x$	81	$(3x+2)^2$
16	$2x^2+x$	49	$\cos 2x$	82	$\sin^2 3x$
17	$3x\,e^{3x}$	50	$17\sin x$	83	$1-5\cos 2x$
18	$5\,e^{0{,}6x}$	51	$27x\sin x$	84	$3+4\sin 3x$
19	$\sin\frac{4}{5}x$	52	$\sin 2x$	85	$8x\cos 2x$

Закінчення табл. 7.3

Номер варіанта	$f(x)$	Номер варіанта	$f(x)$	Номер варіанта	$f(x)$
20	$e^{3/5x}\cos x$	53	$0{,}4\,e^{3x}$	86	$x - 3\cos 4x$
21	$e^{0{,}6x}\sin 0{,}8x$	54	$e^{-x} + \sin 2x$	87	$10\sin x\,e^{2x}$
22	$13\,e^x + x$	55	$\cos 2x - 3\,e^{2x}$	88	$10 - 5e^{-3x}$
23	$10\,x^2 + 6$	56	$1 - 6x + 9x^2$	89	$(2x-1)^2$
24	$2\,(1-x)$	57	$17\,x^2$	90	$\sin^2 3x$
25	3	58	$12\,x^2 - 6$	91	$6x - 4$
26	$e^x(x^2+x)$	59	$6 - 7\,x + x^2$	92	$2\cos 5x + 5\sin 5x$
27	1	60	$2\sin x - 3\cos x$	93	$9x\cos 4x$
28	e^{-x}	61	$x^2 + 3x$	94	$3\,(e^{6x} - e^{-6x})$
29	$3\,e^{2x}$	62	$5\,x\,e^{-4x}$	95	$4\,(x+1)\cdot e^{-3x}$
30	$2\,(\sin 2x + x)$	63	$11\sin 3x\,e^{-x}$	96	$6-4x^2$
31	$\sin x\cos 2x$	64	$3x - 14$	97	7
32	$ex - (x-1)$	65	$\cos 3x + 7\sin 3x$	98	$2x\sin 5x$
33	$2\,x^2 - x + 2$	66	$3\,(e^x + e^{-x})$	99	$3\,(x-1)\sin 4x$
				100	$27x^2 + 3x - 1$

Розділ 8. РЯДИ

Задача 8.1. За даними табл. 8.1 дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ (для знакозмінного ряду встановити, якою є його збіжність — абсолютною чи умовною).

Таблиця 8.1

Номер варіанта	$f(n)$	Номер варіанта	$f(n)$
1	$(-1)^n \frac{3^n+2^n}{6^n}$	51	$\frac{1}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}$
2	$(-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n}$	52	$1-\cos\frac{\pi}{n}$
3	$\sin\frac{\pi n}{2^n}$	53	$e^n n!n^{\ n}$
4	$(-1)^n \frac{n}{n^2+1}$	54	$\frac{(-1)^n}{n\operatorname{arctg}(n^2)}$
5	$\frac{n+\sin\pi n}{2^n}$	55	$\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$
6	$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$	56	$n\operatorname{tg}\frac{\pi n}{2^{n+1}}$
7	$\frac{\sin n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$	57	$\sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$
8	$\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$	58	$(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^{n^2}}{n!}$
9	$(-1)^n\sqrt{\frac{n+3}{n^3+2n-1}}$	59	$n^2\sin\frac{\pi}{n^4}$
10	$(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$	60	$2^{-n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$
11	$(-1)^n\operatorname{arctg}\frac{\pi n}{2^n}$	61	$\sin\frac{\pi}{2n}$

Продовження табл. 8.1

Номер варіанта	$f(n)$	Номер варіанта	$f(n)$
12	$(-1)^n 10^{-n} n!$	62	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}$
13	$(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$	63	$\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$
14	$n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$	64	$\frac{2n+1}{n(n+1)^2}$
15	$\frac{1}{n}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$	65	$(-1)^n\left(\ln(n^2+1)\right)^{-1}$
16	$\frac{(n+1)!}{2^n n!}$	66	$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+2n}}$
17	$(-1)^n\arcsin^n\left(\frac{1}{n}\right)$	67	$\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$
18	$3^{-n}\sin n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$	68	$\sin\frac{1}{n+1}\operatorname{arctg}^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^2$
19	$(-1)^n\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$	69	$\left(\frac{1-2n}{5-2n}\right)^{3n}$
20	$\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n+2}$	70	$\left(\frac{n+5}{2n-1}\right)^n$
21	$(-1)^n n\left(n(n+1)(n+2)\right)^{-\frac{1}{2}}$	71	$\left(\frac{n-1}{n^2+1}\right)^{n+1}$
22	$\frac{n+1}{n^3+2n^2+1}$	72	$\left(\frac{n^2-n+2}{2n^2+n+1}\right)^{2n-1}$
23	$(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$	73	$\left(\frac{3n+2}{n+5}\right)^{n^2}$
24	$\frac{n!\sin n}{n^n}$	74	$\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)n^{-2}$

Номер варіанта	$f(n)$	Номер варіанта	$f(n)$
25	$\sin\left(\frac{n^2+1}{n^3}\right)^2$	75	$\sqrt{1-\cos\frac{1}{n}}\,n^{-1}$
26	$2^n n! n^{-n}$	76	$(-1)^n\left(\sqrt{n^2-1}-n\right)$
27	$\sin\frac{1}{n}\,n^{-\frac{1}{2}}$	77	$\frac{(-1)^n(\sqrt[3]{n+1}-1)}{n}$
28	$(-1)^n\ln\frac{n^2+1}{n^3}$	78	$(-1)^n\left(\sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2-5n}\right)$
29	$(2n)!\left((2^n)!\right)^{-1}$	79	$\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3-1}\right)$
30	$n^n\left((2n)!\right)^{-1}$	80	$(-1)^n\cos\frac{1}{n^2}$
31	$n^n(n!)^{-2}$	81	$(\mathrm{arctgn})^{n+1}2^{\;n}$
32	$(n!)^n n^{-n^2}$	82	$(n^3+2^{3n})3^{-2n}$
33	$(-1)^n\left(\frac{3n-1}{4n-3}\right)^{\frac{n}{2}}$	83	$\frac{(-1)^n(\ln(n+1))^n}{\left(\sqrt{n+1}\right)^n}$
34	$(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}n^3 2^{-n}$	84	$\frac{(-1)^n n}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$
35	$\sin(n\alpha)(\ln 10)^{-n}$	85	$(n^3+\cos(\pi n))2^{-n}$
36	$\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$	86	$\frac{(-1)^n\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$
37	$3^n(-1)^{n+1}(n!)^{-1}$	87	$\frac{\mathrm{arctg}(n+1)}{n^2+1}$

Номер варіанта	$f(n)$	Номер варіанта	$f(n)$
38	$(-1)^n\frac{\ln n}{n}$	88	$\frac{2^n e^{n+1}3^{n+2}}{n!}$
39	$(-1)^n\,\mathrm{tg}\frac{1}{n\sqrt{n}}$	89	$(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$
40	$n!2^n(n+1)^{-n}$	90	$\sin(\pi n)(n+1)!n^{-n}$
41	$(n+1)^{\frac{n}{3}}(n!)^{-1}$	91	$\frac{(-1)^n n^n}{(3n)!}$
42	$(-1)^n n^{\frac{n}{2}}\left((n+1)!\right)^{-1}$	92	$(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n!}{\left(3+\frac{1}{\mathrm{n}}\right)^n}$
43	$n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)^{-n}$	93	$(\ln\mathrm{tg}\,n^{-2})^{-2}$
44	$\left(\ln\sin\frac{1}{n}\right)^{-2}$	94	$(-1)^n\arcsin\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$
45	$(-1)^n n^2 e^{-\sqrt{n}}$	95	$\frac{\sin(\pi n)}{(n-\ln n)^2}$
46	$(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$	96	$\frac{n(-1)^n}{\mathrm{ctg}\left(n^{-3}\right)}$
47	$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$	97	$(-1)^n\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}\right)$
48	$\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$	98	$\left(\frac{2n-3}{4n+1}\right)^{n+1}$
49	$\ln^{-1}(n+1)\cos\frac{\pi n^2}{n+1}$	99	$\frac{(3n)!}{(3^n)!}$
50	$\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)+\ln^{1/2}(n+1)}$	100	$(-1)^n\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

Задача 8.2. За даними табл. 8.2 знайти область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} F(x;\, n)$.

Таблиця 8.2

Номер варіанта	$F(x,n)$	Номер варіанта	$F(x,n)$
1	$\dfrac{(-1)^n x^n}{5^n\sqrt{n+1}}$	51	$\dfrac{2^n x^n}{n!}$
2	$\dfrac{3^n x^n}{2^n(n+1)}$	52	$n!x^n 3^{-n}$
3	$(-1)^n \ln^n x$	53	$x^n n!\, n^{-n}$
4	$2^n \cdot x^{n^2}$	54	$\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{3n-1} x^n$
5	$\dfrac{3^n x^{2n}}{(2n+1)^2\sqrt{2^n}}$	55	$3^{n^2} x^{n^2}$
6	$\dfrac{(-1)^n x^n}{\sqrt{2n-1}}$	56	$\dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$
7	$\dfrac{1}{1+x^n}$	57	$\dfrac{x^{n-1}}{(n+1)3^n \ln(n+1)}$
8	$\dfrac{x^{3n}}{n+\sqrt{n}}$	58	$x^{n!}$
9	$\dfrac{x^n}{1+x^{2^n}}$	59	$n!x^{n!}$
10	$\dfrac{(3^n+2^n)x^n}{5^n\sqrt{3n-2}}$	60	$\dfrac{x^{n^2}}{2^{n-1}\cdot n^n}$
11	$\sin\dfrac{x}{2^n}$	61	$(3^n+4^n)7^{-n} x^n$
12	$\dfrac{2^n x^n}{3^n+7^n}$	62	$n!x^n(n+1)^{-n}$

Номер варіанта	$F(x,n)$	Номер варіанта	$F(x,n)$
13	$(-1)^n e^{-nx}$	63	$\dfrac{(n+1)^{\frac{n}{3}} x^n}{n!}$
14	$\dfrac{7^n x^n}{6^n\sqrt[3]{n}}$	64	$n^5 x^n (n+1)^{-n}$
15	$\dfrac{5^n\sqrt{n+1}x^n}{4^n}$	65	$x^{n^n} n^{-n}$
16	$\dfrac{(2x+1)^n}{2n+1}$	66	$(-1)^{n+1}\dfrac{(x+5)^n}{n4^n}$
17	$\dfrac{10^n x^n}{\sqrt{n^2+1}}$	67	$\dfrac{(x-3)^n}{n2^n}$
18	$\dfrac{(-1)^n(x+1)^n}{2^n}$	68	$\dfrac{(x-1)^{2n}}{(2n+1)9^n}$
19	$\dfrac{(2x-3)^n 2^n}{\sqrt{n}}$	69	$(-1)^n\dfrac{(x-2)^{2n}}{2n}$
20	$\dfrac{(-1)^n x^{2n-1}}{\sqrt{n+1}}$	70	$\dfrac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n+1}\,5^n}$
21	$\dfrac{x^{2n}}{3^n\sqrt{n+2}}$	71	$\dfrac{6^n x^n}{7^n\sqrt{n+2}}$
22	nx^{-n}	72	$\dfrac{(-1)^n 10^n x^{n+1}}{\sqrt[3]{n+2}}$
23	$(-1)^n\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$	73	$\dfrac{3^n+2^n}{5^n}x^n$
24	ne^{nx}	74	$\dfrac{3^n\sqrt{2n+1}\,x^n}{5^n}$

Номер варіанта	$F(x,n)$	Номер варіанта	$F(x,n)$
25	$(-1)^{n+1} n^{-x}$	75	$\dfrac{6^n x^n \sqrt{n}}{5^n + 7^n}$
26	$(-1)^{n+1} n^{-\ln x}$	76	$\dfrac{(-1)^n x^{3n}}{2^n + 3^n}$
27	$\dfrac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$	77	$\dfrac{x^n \sqrt{n-1}}{n^2 + n}$
28	$2^n \sin\dfrac{x}{3^n}$	78	$\dfrac{(-2)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$
29	$\dfrac{\cos(nx)}{e^{nx}}$	79	$\dfrac{n^{\frac{n}{2}} x^n}{(n+1)!}$
30	$n!x^{-n}$	80	$3^n x^n n^{-\frac{1}{3}}$
31	$(-1)^{n+1} e^{-n\sin x}$	81	$\dfrac{x^n}{(n+1)(n+2)}$
32	$\dfrac{(-1)^n}{n!\,x^n}$	82	$\dfrac{\ln(n+1)x^n}{n+1}$
33	$\dfrac{x^n}{1-x^n}$	83	$e^{-n^2 x}$
34	$\dfrac{2^n \sin^n x}{n^2}$	84	$x^n \operatorname{tg}\dfrac{x}{2^n}$
35	$\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^n$	85	$\dfrac{(-1)^n n}{1+x^n}$
36	$\dfrac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n$	86	$\dfrac{x^n}{n+\sqrt{n}}$

Номер варіанта	$F(x,n)$	Номер варіанта	$F(x,n)$
37	$\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^n$	87	$n x e^{-nx}$
38	$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$	88	$3^n (-1)^n (x+1)^{n^2}$
39	$n!\,2^{-n^2} x^n$	89	$\dfrac{(x+2)^{-n}}{2n+1}$
40	$2^n \dfrac{x^{2n}}{\sqrt{n^2+1}}$	90	$(-1)^n (n^2+1)^{-2} (x+1)^{-n}$
41	$x^n 3^{-n^2}$	91	$\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n+1} (x+1)^n$
42	$((2n-1)x^n)^{-1}$	92	$(x+4)^n n!\,n^{-n}$
43	$\sqrt{n}(x-2)^{-n}$	93	$(x-2)^{n!}$
44	$\dfrac{2n+1}{(n+1)^3 x^n}$	94	$\dfrac{(-1)^n (x-3)^n}{4^n \sqrt{n+1}}$
45	$\dfrac{(-1)^{n-1}(x-5)^{-n}}{n3^n}$	95	$\dfrac{7^n (x+2)^n}{6^n \sqrt{n}}$
46	$n^n x^{-\frac{n}{2}}$	96	$\dfrac{(-1)^n (x+4)^n}{5^n + 3^n}$
47	$x^n + \dfrac{1}{2^n x^n}$	97	$\dfrac{5^n (x-1)^{3n}}{2^n + 3^n}$
48	$\dfrac{x^{n-1} 2^{n+1}}{(4n-3)^2}$	98	$\dfrac{(-3)^n (x-3)^n}{\sqrt{n^2+1}}$
49	$(n+1)^2 x^{3n}$	99	$n!(x+1)^{n!}$
50	$(-1)^n (2n+1)^2 x^{-n}$	100	$\dfrac{(x+2)^{n^2}}{3^{n-1} n^n}$

Задача 8.3. За даними табл. 8.3 записати перші n членів розкладу функції $f(x)$ у ряд Тейлора за степенями $x - c$.

Таблиця 8.3

Номер варіанта	n	c	$f(x)$	Номер варіанта	n	c	$f(x)$
1	3	1	x^x	51	6	0	$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$
2	3	2	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$	52	5	0	$\ln\frac{1+x}{1-x}$
3	3	1	$\frac{x}{x^2-5x+6}$	53	6	0	$\ln(1+x-2x^2)$
4	6	– 1	e^{-x^2}	54	4	0	$\frac{1}{\cos x}$
5	5	0	$\cos^4 x$	55	4	0	$\ln\cos x$
6	5	0	$\sin^4 x$	56	6	2	x^{-2}
7	6	0	$\frac{x^{10}}{1-x}$	57	5	– 4	$\frac{1}{x^2+3x+2}$
8	7	0	$\frac{1}{(1-x)^2}$	58	6	4	$\sqrt{x}$
9	7	0	$\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$	59	5	$\frac{\pi}{2}$	$\cos^2 x$
10	6	0	$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	60	5	1	$\frac{x}{\sqrt{1+x}}$
11	6	0	$\frac{x}{1+x-2x^2}$	61	5	1	$2^{\sin(x-1)}$
12	6	0	$\frac{1}{1-x-x^2}$	62	3	1	x^{x^2}
13	7	0	$\frac{1}{1+x+x^2}$	63	5	0	$\frac{x}{x^2+5x+6}$

Номер варіанта	n	c	$f(x)$	Номер варіанта	n	c	$f(x)$
14	6	0	$\frac{1}{1+x+x^2+x^3}$	64	5	1	e^{2x^2}
15	7	0	$\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$	65	4	2	$2^{\cos^2(x-2)}$
16	6	0	$\ln(1+x+x^2+x^3)$	66	4	– 1	$3^{\sin^2(x+1)}$
17	7	0	$\arcsin x$	67	4	0	$\frac{x}{x^2+5x-6}$
18	6	0	$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$	68	5	0	$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$
19	7	0	$(1+x)\ln(1+x)$	69	4	– 3	$2^{\arcsin(x+3)}$
20	6	0	$\ln\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}$	70	3	0	$\mathrm{tg}(2^x)$
21	5	0	$\mathrm{arctg}\frac{2x}{2-x^2}$	71	4	– 2	$2^{\mathrm{tg}^2(x+2)}$
22	6	0	$\arccos(1-2x^2)$	72	5	0	$x\arcsin 2x$
23	6	0	$(1+x)e^{-x}$	73	5	0	$\frac{4x-3}{(1-x)^2}$
24	6	0	$e^x \sin x$	74	6	0	x^{e} [illegible]
25	5	0	$\frac{\ln(1+x)}{1+x}$	75	5	0	$\frac{1}{1-x^2}$
26	5	0	$(\mathrm{arctg}\, x)^2$	76	4	4	$3^{\sqrt{x-4}}$
27	6	0	$\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2$	77	4	– 5	$2^{\sin(x+5)}$

Номер варіанта	n	c	$f(x)$	Номер варіанта	n	c	$f(x)$
28	5	0	$\ln^2(1-x)$	78	5	0	$\ln(x+3)$
29	6	1	$(1+x^2)\operatorname{arctg}x$	79	6	0	$\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$
30	6	0	$e^x\cos x$	80	4	0	$\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$
31	4	0	$\operatorname{tg}x$	81	4	0	$\sqrt{x^2+1}$
32	4	0	$\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}$	82	4	3	$2^{\arcsin(x-3)}$
33	6	0	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x+x^2}}$	83	3	0	$3^{\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$
34	6	0	$\int_0^x e^{-t^2}dt$	84	4	0	$\ln\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$
35	7	0	$\int_0^x \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$	85	3	$\dfrac{\pi}{2}$	$x^{\sin x}$
36	5	0	$x\operatorname{arctg}x-\ln(1+x^2)$	86	4	0	$\cos(2^x)$
37	6	0	$\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{2-x^2}$	87	4	0	$\sqrt{1+\sin x}$
38	5	0	$x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$	88	4	0	$\sqrt{x^2-x+1}$
39	4	1	$\int_0^x \dfrac{tdt}{\ln(1+t)}$	89	5	0	$\cos^2 x\cdot e^{2x}$
40	5	0	$\int_0^x \dfrac{\sin t}{t}dt$	90	4	-1	$(1+x)e^{-x}$
41	6	0	$\int_0^x \dfrac{\operatorname{arctg}t}{t}dt$	91	4	0	$\dfrac{x}{4+x^2}$

Номер варіанта	n	c	$f(x)$	Номер варіанта	n	c	$f(x)$
42	5	0	$(1+x)e^{-x}-(1-x)e^x$	92	6	0	$\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$
43	5	0	$\ln(x+2)$	93	4	0	$\ln(1+2^x)$
44	6	0	$\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$	94	3	1	$2^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}$
45	5	0	$\dfrac{2x-3}{(x-1)^2}$	95	3	2	$\operatorname{arctg}^2(x-2)$
46	6	0	$\dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}$	96	4	-1	$x\arcsin(x+1)$
47	7	0	$x^{e^{-2x}}$	97	4	1	$\dfrac{x}{x^2-5x+6}$
48	6	1	e^{x^2}	98	4	1	$(1+x)^{\frac{1}{2x}}$
49	5	0	$\dfrac{x}{1+x^2}$	99	4	0	$\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1-x^2}$
50	5	0	$\sin 3x+x\cos 3x$	100	6	0	$\dfrac{x}{\sqrt{1-4x}}$

ЧАСТИНА II

Розв'язування типових задач

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Матриці. Дії з матрицями

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Якщо $m = n$, матриця називається ***квадратною***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементи a_{ii}, $i = 1, 2, \dots n$, утворюють ***головну діагональ*** квадратної матриці. Квадратна матриця називається ***трикутною***, якщо елементи, які містяться з одного боку від головної діагоналі, нульові. ***Діагональною*** називається квадратна матриця, в якій усі елементи, крім елементів головної діагоналі, нульові. ***Одинична*** матриця E — це діагональна матриця, в якій елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці.

Якщо елементи i-го рядка матриці записати у i-й стовпець ($i = 1, 2, \dots m$), дістанемо ***транспоновану матрицю*** A'.

Множення матриці на число полягає у множенні на нього всіх елементів матриці; ***додавання матриць*** однакового розміру — у додаванні елементів, які містяться у відповідних рядках і стовпцях.

Нехай матриця B має m_1 рядків і n_1 стовпців, а матриця C — m_2 рядків і n_2 стовпців. ***Операцію множення*** $A = BC$ можна виконати, якщо $n_1 = m_2$. При цьому матриця A матиме m_1 рядків і n_2 стовпців, а її елементи визначатимуться за формулою: $a_{ik} = b_{i1}c_{1k} + b_{i2}c_{2k} + \dots + b_{in_1}c_{m_2 k}$, де $i = 1, 2, \dots, m_1$, $k = 1, 2, \dots, n_2$.

Приклад. Знайти $A = BC$, якщо:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Матриця A матиме три рядки і два стовпці. Обчислимо її елементи:

$a_{11} = 2\cdot 7 + 1\cdot 8 = 22$; $a_{12} = 2\cdot 9 + 1\cdot 10 = 28$; $a_{21} = 5\cdot 7 + 4\cdot 8 = 67$; $a_{22} = 5\cdot 9 + 4\cdot 10 = 85$; $a_{31} = 6\cdot 7 + 3\cdot 8 = 66$; $a_{32} = 6\cdot 9 + 3\cdot 10 = 84$.

Отже,

$$A = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 67 & 85 \\ 66 & 84 \end{pmatrix}.$$

Визначники. Обчислення визначників

Для квадратних матриць вводиться поняття ***визначника***. Це число, відшукуване за відповідними правилами.

Визначник другого порядку:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Схема обчислень полягає у відшуканні різниці добутку елементів головної діагоналі та добутку елементів другої діагоналі.

Визначник третього порядку:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Обчислення виконуються за таким правилом: зі знаком «+» беруться добутки елементів головної діагоналі, а також елементів, розміщених на прямих, паралельних головній діагоналі, та елемента, розміщеного у відповідному протилежному куті визначника. Зі знаком «–» беруться добутки елементів, побудовані за таким самим правилом відносно другої діагоналі визначника.

Визначник n-го ($n \geq 4$) порядку.

Для обчислення таких визначників використовуються їхні властивості.

1. Якщо до елементів довільного рядка (стовпця) визначника додати лінійну комбінацію елементів інших рядків (стовпців), то значення визначника не зміниться.

Користуючись цією властивістю, визначник перетворюють так, що в деякому рядку (стовпці) принаймні $n-1$ елемент дорівнює нулю.

2. Визначник можна подати як суму добутків елементів довільного рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

Якщо перед цим у деякому рядку (стовпці) $n-1$ елемент став нульовим, то обчислення визначника n-го порядку зведеться до обчислення визначника порядку $n-1$, бо алгебраїчне доповнення $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$, де M_{ik} — мінор елемента a_{ik}, що являє собою визначник (n – 1)-го порядку, утворюваний викреслюванням у даному визначнику i-го рядка та k-го стовпця.

Задача 1.1. Обчислити визначник

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Якщо серед елементів визначника є такі, що дорівнюють ± 1, тоді відповідний рядок (стовпець) використовується для утворення в стовпці (рядку) нулів.

Елемент $a_{43} = -1$. У четвертому рядку решта елементів за модулем менші, ніж елементи у третьому стовпці. Зробимо нульовими всі елементи четвертого рядка, крім a_{43}. Для цього до першого і другого стовпців визначника додамо третій, помножений на 2, а до четвертого — цей самий стовпець, помножений на 3.

Далі розкладемо визначник за елементами четвертого рядка і завдяки цьому матимемо змогу обчислити визначник нижчого — третього порядку:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -5 & -3 & -5 \\ 13 & 12 & 5 & 18 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} -4 & -5 & -5 \\ 13 & 12 & 18 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 13 & 12 & 18 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -48 + 325 + 270 - 180 - 360 + 65 = 72.$$

Зауважимо, що після розкладання даного визначника за елементами четвертого рядка з елементів першого рядка здобутого визначника третього порядку винесено спільний множник – 1.

Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці

Якщо A — квадратна матриця, а її визначник $D = |A| \neq 0$, то для неї існує **обернена матриця** A^{-1}. Добуток цих матриць незалежно від порядку множення дає одиничну матрицю E.

Обернена матриця A^{-1} — це транспонована матриця алгебраїчних доповнень елементів матриці A, поділених на визначник матриці A:

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Задача 1.2. Для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ знайти обернену.

Обчислимо визначник матриці:

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}=4+9+2-6-1-12=-4.$$

Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів матриці за формулою $A_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik}$. Наприклад, $A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=4-1=3.$

Аналогічно обчислюємо решту алгебраїчних доповнень:

$A_{12}=-5; A_{13}=1; A_{21}=-1; A_{22}=-1; A_{23}=1; A_{31}=-4; A_{32}=8; A_{33}=-4.$

Отже, $A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-1&-4\\-5&-1&8\\1&1&-4\end{pmatrix}.$

Перевірка:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\left(-\frac{1}{4}\right)\begin{pmatrix}3&-1&-4\\-5&-1&8\\1&1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Розв'язування довільних систем лінійних рівнянь

Маємо систему лінійних рівнянь $AX=B$, в якій матриця A має розмір $m\times n$. Така система називається **сумісною**, якщо ранг основної матриці A дорівнює рангу розширеної матриці. Розширену матрицю дістанемо, доповнивши матрицю A стовпцем вільних членів.

У разі, коли система сумісна і ранг матриць дорівнює n, система має єдиний розв'язок. Якщо ж у сумісній системі ранг r менший за кількість невідомих, система має безліч розв'язків. Щоб знайти їх, беремо r рівнянь, у лівій частині яких залишаємо r невідомих. Рівняння та невідомі беремо так, щоб мінор, складений з коефіцієнтів зазначених рівнянь, був відмінний від нуля. Невідомі, залишені в лівій частині, називаються ***базисними***. Решту невідомих переносимо у праву частину рівняння.

Ці невідомі називаються ***вільними***.

Загальний розв'язок системи дістаємо, розв'язуючи систему відносно базисних невідомих. Їхні значення виражаються через вільні члени і вільні невідомі. ***Частинні розв'язки*** дістаємо, надаючи вільним невідомим певних числових значень. ***Базисний розв'язок*** системи маємо, якщо всі вільні невідомі дорівнюють нулю.

Довільну систему лінійних рівнянь можна розв'язувати за методом Жордана—Гаусса без попереднього дослідження сумісності системи. Якщо система несумісна, у деякій таблиці матимемо суперечність.

Після r кроків методу дістанемо загальний розв'язок системи. Щоб записати його, потрібно вільні невідомі треба перенести в праву частину рівнянь.

Задача 1.3. Дослідити та розв'язати систему рівнянь:

$$x_1-3x_2+2x_3-x_4=2,$$
$$2x_1+x_2-5x_3+3x_4=1,$$
$$4x_1-5x_2-x_3+x_4=5.$$

Знайти загальний і базисний розв'язки системи.

Основна матриця

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&2&-1\\2&1&-5&3\\4&-5&-1&1\end{pmatrix}.$$

Знайдемо її ранг: $1\le r(A)\le 3$. Застосуємо метод обвідних мінорів, відмінних від нуля. Кожний елемент матриці — мінор першого порядку. Елемент $a_{11}=1\ne 0$. Розглянемо мінори другого порядку, які обводять його. У запису мінорів угорі зазначено номери рядків, а внизу — номери стовпців, які їх утворюють:

$$M_{12}^{12}=\begin{vmatrix}1&-3\\2&1\end{vmatrix}=1+6=7\ne 0.$$

Отже, ранг матриці не менший за 2. Розглянемо мінори третього порядку:

$$M_{123}^{123}=\begin{vmatrix}1&-3&2\\2&1&-5\\4&-5&-1\end{vmatrix}=-1-20+60-8-6-25=0;$$

$$M_{124}^{123}=\begin{vmatrix}1&-3&-1\\2&1&3\\4&-5&1\end{vmatrix}=1+10-36+4+15+6=0.$$

Усі мінори третього порядку, які обводять відмінний від нуля мінор другого порядку, дорівнюють нулю. Тоді ранг матриці A дорівнює двом.

Розглянемо розширену матрицю:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-3&2&-1&2\\2&1&-5&3&1\\4&-5&-1&1&5\end{pmatrix}.$$

Її ранг не менший від 2.

Розглянемо ще один мінор третього порядку:

$$M_{125}^{123}=\begin{vmatrix}1&-3&2\\2&1&1\\4&-5&5\end{vmatrix}=5-20-12-8+5+30=0.$$

Отже, ранги основної та розширеної матриць однакові, система сумісна. Відмінний від нуля мінор другого порядку утворюють коефіцієнти при x_1 та x_2 першого і другого рівнянь:

$$x_1-3x_2=2-2x_3+x_4,$$
$$2x_1+x_2=1+5x_3-3x_4.$$

Розв'яжемо цю систему за формулами Крамера. Визначник системи $D=7$:

$$D_1=\begin{vmatrix}2-2x_3+x_4&-3\\1+5x_3-3x_4&1\end{vmatrix}=2-2x_3+x_4+3+15x_3-9x_4=5+13x_3-8x_4;$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&2-2x_3+x_4\\2&1+5x_3-3x_4\end{vmatrix}=1+5x_3-3x_4-4+4x_3-2x_4=-3+9x_3-5x_4.$$

Маємо загальний розв'язок системи:

$$x_1=\frac{5}{7}+\frac{13}{7}x_3-\frac{8}{7}x_4;$$
$$x_2=-\frac{3}{7}+\frac{9}{7}x_3-\frac{5}{7}x_4.$$

Базисний розв'язок системи:

$$x_1=\frac{5}{7};\ x_2=-\frac{3}{7};\ x_3=0;\ x_4=0.$$

Розв'язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими

Маємо систему n лінійних рівнянь з n невідомими $AX=B$. Якщо $D=|A|\neq 0$, система має єдиний розв'язок, який можна дістати:

а) за формулами Крамера —

$$x_i=\frac{D_i}{D},\ i=1,2,\dots n,$$

де D_i — визначник, який дістаємо заміною у визначнику D i-го стовпця стовпцем вільних членів;

б) за допомогою оберненої матриці —

$$X=A^{-1}B;$$

в) за методом Жордана—Гаусса. Систему рівнянь подамо в табличній формі. Для контролю обчислень додамо ще стовпець K, в якому знайдено суму елементів у рядках:

x_1	x_2	...	x_n	b_i	K
a_{n11}	a_{21}	...	a_{1n}	b_1	k_1
a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2	k_2
...	...	...	...	...	...
a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}	b_n	k_n

Методом повного виключення змінних матриця A зводиться до одиничної. Для цього виконується n кроків перетворення Жордана—Гаусса, кожний з яких складається з таких операцій:

1) вибираємо розв'язувальний елемент $a_{ik} \neq 0$;

2) у новій таблиці елементи i-го рядка ділимо на a_{ik};

3) у k-му стовпці нової таблиці решта елементів дорівнюють нулю;

4) інші елементи таблиці обчислюємо за формулою:

$$a'_{rs} = \frac{a_{rs}a_{ik} - a_{is}a_{rk}}{a_{ik}} = a_{rs} - \frac{a_{rk}}{a_{ik}}a_{is} \quad (r \neq i,\ s \neq k).$$

Стовпці вільних членів і контрольний будуємо аналогічно. У новій таблиці робимо перевірку, порівнюючи суми елементів за рядками з елементом контрольного стовпця.

Після n кроків перетворення у стовпці вільних членів дістаємо розв'язок системи.

Задача 1.4. Розв'язати систему рівнянь:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4;$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8;$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2.$$

Матрицю A було розглянуто в прикладі на обчислення оберненої матриці. Її визначник $D = -4$. Там само було знайдено матрицю A^{-1}. Розв'яжемо систему трьома методами.

1. *За формулами Крамера.* Обчислимо значення визначників D_i:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 16 + 24 + 4 - 12 - 4 - 32 - 4;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 16 + 18 + 4 - 24 - 2 - 24 = -12;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 12 + 16 - 8 - 8 - 12 = 4.$$

Тоді

$$x_1 = \frac{-4}{-4} = 1;\ x_2 = \frac{-12}{-4} = 3;\ x_3 = \frac{4}{-4} = -1;$$

2. *За допомогою оберненої матриці*:

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -5 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 12-8-8 \\ -20-8+16 \\ 4+8-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix};$$

3. *Методом Жордана—Гаусса*:

x_1	x_2	x_3	b_i	K
1	2	3	4	10
3	2	1	8	14
1	1	2	2	6
1	2	3	4	10
0	–4	–8	–4	–16
0	–1	–1	–2	–4
1	0	1	0	2
0	0	–4	4	0
0	1	1	2	4
1	0	0	1	2
0	0	1	3	0
0	1	0	–1	4

Розв'язувальні елементи в таблицях виділено. В останніх трьох рядках четвертої таблиці маємо розв'язок системи: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $x_3 = -1$.

n-вимірні векторні простори. Лінійна залежність і незалежність векторів. Базис *n*-вимірного простору. Розклад вектора за векторами базису

Упорядкована множина n дійсних чисел називається ***n*-вимірним вектором**:

$$a = (a_1, a_2, ..., a_n).$$

Після введення операції множення вектора на число і додавання векторів можна розглядати n-вимірний векторний простір як сукупність усіх n-вимірних векторів.

Система векторів $a_1, a_2, ..., a_n$ називається ***лінійно незалежною***, якщо рівність

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + ... + k_n a_n = 0$$

виконується при $k_1 = k_2 = ... = k_n = 0$. Якщо ж ця рівність виконується при ненульових значеннях k_i, система векторів називається ***лінійно залежною***.

Система векторів $a_1, a_2, ..., a_n$ лінійно незалежна, якщо визначник матриці, складеної з координат векторів, відмінний від нуля.

Довільна система n лінійно незалежних векторів n-вимірного простору утворює *базис векторного простору. Будь-який вектор n-вимірного простору розкладається за векторами базису.*

Задача 1.5. Довести, що вектори $a_1 = (1;\ 5;\ -2)$, $a_2 = (3;\ 4;\ 1)$, $a_3 = (2; 1; 3)$ утворюють базис; розкласти вектор $x = (11; 17; 6)$ за векторами базису.

Покажемо, що вектори a_1, a_2, a_3 лінійно незалежні. Обчислимо визначник, складений з їхніх координат:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 6 + 10 + 16 - 1 - 45 = -14 \neq 0.$$

Визначник відмінний від нуля, вектори лінійно незалежні та утворюють базис простору. Розклад вектора x за векторами базису шукаємо за методом Жордана—Гаусса. Координати векторів запишемо в стовпці. Матрицю координат векторів a_1, a_2, a_3 зведемо до одиничної, одночасно знайдемо розклад вектора x. Щоб контролювати обчислення, таблицю доповнимо стовпцем, в якому знайдено суми елементів у рядках.

a_1	a_2	a_3	x	K
1	3	2	11	17
5	4	1	17	27
–2	1	3	6	8
1	3	2	11	17
0	–11	–9	–38	–58
0	7	7	28	42
1	0	–1	–1	–1
0	0	2	6	8
0	1	1	4	6
1	0	0	2	3
0	0	1	3	4
0	1	0	1	2

Маємо розклад:

$$x = 2a_1 + a_2 + 3a_3.$$

Отже, вектор x у базисі, утвореному векторами a_1, a_2, a_3, має координати:

$$x = (2; 1; 3).$$

Власні числа і власні вектори матриці

Маємо квадратну матрицю A. Якщо існує ненульовий вектор X, такий що $AX = \lambda X$, то λ — ***власне число***, а X — ***власний вектор матриці A***. Якщо рівняння переписати у вигляді $(A - \lambda E)X = 0$, то воно зведеться до системи n лінійних однорідних рівнянь з n невідомими. Така система має ненульовий розв'язок, якщо визначник матриці $(A-\lambda E)$ дорівнює нулю. Таким чином, щоб знайти власні числа матриці, потрібно розв'язати рівняння степеня n відносно λ, яке дістанемо розкриттям визначника $|A-\lambda E|=0$. *Власні вектори* можна знайти, підставивши відповідні значення λ у рівняння $(A-\lambda E)\,X=0$.

Задача 1.6. Знайти власні числа і власні вектори матриці

$$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&5&1\\1&1&3\end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо рівняння $|A-\lambda E|=0$:

$$\begin{vmatrix}3-\lambda&1&1\\1&5-\lambda&1\\1&1&3-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

$$(3-\lambda)^2(5-\lambda)+1+1-5+\lambda-3+\lambda-3+\lambda=0.$$

$$\left(9-6\lambda+\lambda^2\right)(5-\lambda)+3\lambda-9=0.$$

$$45-9\lambda-30\lambda+6\lambda^2+5\lambda^2-\lambda^3+3\lambda-9=0.$$

$$\lambda^3-11\lambda^2+36\lambda-36=0.$$

Корені цього рівняння — власні числа матриці:

$$\lambda_1=2;\ \lambda_2=3;\ \lambda_3=6.$$

Знайдемо власні вектори, які відповідають знайденим власним числам.

$\boxed{1.\ \lambda_1=2}$ Маємо систему рівнянь $(A-\lambda_1 E)\,X=0$.

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Шукаємо розв'язок за методом Жордана—Гаусса в табличній формі:

x_1	x_2	x_3
1	1	1
1	3	1
1	1	1
1	1	1
0	2	0
0	0	0
1	0	1
0	1	0

$$x_1=-x_3;\qquad x_2=0.$$

Якщо $x_3=-1$, то $x_1=1$, тобто $X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

$\boxed{2.\ \lambda_2=3}$ Дістанемо рівняння:

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Шукаємо розв'язок рівняння в табличній формі:

x_1	x_2	x_3
0	1	1
1	2	1
1	1	0
0	1	1
1	0	−1
1	0	−1
0	1	1
1	0	−1
0	0	0

$$x_2=-x_3,\ x_1=x_3.$$

Візьмемо $x_3=1$, тоді $x_1=1$, $x_2=-1$, $X_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

$\boxed{3.\ \lambda_3=6}$ Маємо рівняння:

$$\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Знову шукаємо розв'язок системи в табличній формі:

x_1	x_2	x_3
–3	1	1
1	–1	1
1	1	–3
–3	1	1
–2	0	2
4	0	–4
0	1	–2
1	0	–1
0	0	0

$$x_2=2x_3,\ x_1=x_3.$$

Якщо $x_3=1$, то $x_1=1$, $x_2=2$ і $X_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

Ранг матриці

Розглянемо матрицю порядку $m\times n$. Виберемо в ній довільним чином k рядків та k стовпців. На їх перетині дістанемо визначник k-го порядку, який називається *мінором k-го порядку даної матриці.*

Рангом матриці називається найвищий порядок її мінора, відмінного від нуля.

Існує два методи обчислення рангу матриці.

1. ***Метод обвідних мінорів***.

Якщо знайдений мінор k-го порядку матриці відмінний від нуля, а всі її мінори $k+1$-го порядку, які містять даний мінор k-го порядку, дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k.

2. ***Метод елементарних перетворень***. Такими називають перетворення матриці:

1) переставлення рядків або стовпців матриці;

2) множення всіх елементів рядка або стовпця на відмінне від нуля число;

3) додавання до елементів деякого рядка або стовпця відповідних елементів іншого рядка або стовпця, помножених на відмінне від нуля число.

Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці. За їх допомогою матрицю зводять до вигляду, коли в кожному рядку та кожному стовпці залишається не більш як одне відмінне від нуля число. Тоді ранг матриці дорівнює кількості відмінних від нуля елементів.

Задача 1.6. 1. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix}13 & 6 & -8 & -8\\ 2 & 6 & -1 & -7\\ -7 & 12 & 5 & -13\\ 3 & -2 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

Обчислимо мінор другого порядку: $\begin{vmatrix}13 & 6\\ 2 & 6\end{vmatrix}=13\cdot6+2\cdot6=90.$

Обчислимо його обвідні мінори третього порядку:

$$\begin{vmatrix}13 & 6 & -8\\ 2 & 6 & -1\\ -7 & 12 & 5\end{vmatrix}=13\cdot6\cdot5+6\cdot1\cdot7-2\cdot12\cdot8-7\cdot6\cdot8-2\cdot6\cdot5+13\cdot12\cdot1=0;$$

$$\begin{vmatrix} 13 & 6 & -8 \\ 2 & 6 & -7 \\ -7 & 12 & -13 \end{vmatrix} = -13\cdot 6\cdot 13 + 6\cdot 7\cdot 7 - 2\cdot 12\cdot 8 - 7\cdot 6\cdot 8 + 2\cdot 6\cdot 13 + 13\cdot 12\cdot 7 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 13 & 6 & -8 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -13\cdot 6\cdot 2 - 6\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 8 + 3\cdot 6\cdot 8 + 2\cdot 6\cdot 2 - 13\cdot 2\cdot 1 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 13 & 6 & -8 \\ 2 & 6 & -7 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 13\cdot 6\cdot 2 - 6\cdot 3\cdot 7 + 2\cdot 2\cdot 8 + 3\cdot 6\cdot 8 - 2\cdot 6\cdot 2 - 13\cdot 2\cdot 7 = 0.$$

Таким чином, знайдено мінор другого порядку, відмінний від нуля, а всі його обвідні мінори третього порядку дорівнюють нулю. Тому ранг матриці дорівнює двом.

2. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \\ -4 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Поміняємо місцями перший і четвертий рядки та перший і третій стовпці. Дістанемо еквівалентну матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 7 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \\ -3 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Помножимо елементи першого рядка на -2 та додамо до відповідних елементів другого рядка. Помножимо елементи першого рядка на 3 та додамо до відповідних елементів третього рядка. Помножимо елементи першого рядка на –3 та додамо до відповідних елементів четвертого рядка.

Дістанемо $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & -9 \\ 0 & -4 & 2 & 18 \\ 0 & 4 & -2 & -18 \end{pmatrix}$.

Помножимо елементи першого стовпця на 2 та додамо до відповідних елементів другого стовпця. Помножимо елементи першого стовпця на – 2 та додамо до відповідних елементів третього стовпця. Помножимо елементи першого стовпця на – 7 та додамо до відповідних елементів четвертого стовпця.

Дістанемо еквівалентну матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -9 \\ 0 & -4 & 2 & 18 \\ 0 & 4 & -2 & -18 \end{pmatrix}.$$

Помножимо елементи другого рядка на 2 та додамо до відповідних елементів третього рядка. Помножимо елементи другого рядка на –2 та додамо до відповідних елементів четвертого рядка.

Дістанемо еквівалентну матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Поділимо елементи другого стовпця на 2. Утворений стовпець додамо до третього стовпця, потім помножимо його на 9 і додамо до четвертого стовпця.

Дістанемо еквівалентну матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ранг цієї матриці дорівнює 2.

Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду

Квадратичною формою від n змінних називається вираз $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, в якому $a_{ij}=a_{ji}$. З коефіцієнтів квадратичної форми можна скласти симетричну матрицю $A=(a_{ij})$, яка називається ***матрицею квадратичної форми***.

Кожну квадратичну форму в результаті певного перетворення координат можна звести до канонічного вигляду $\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+ +\ldots+\lambda_n y_n^2$, при цьому $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ називаються ***канонічними коефіцієнтами*** квадратичної форми.

До канонічного вигляду квадратичну форму можна звести такими способами:

1. ***Метод Лагранжа.***

Якщо $a_{11}\neq 0$, групуємо доданки, що містять x_1, та виділяємо повний квадрат. Потім групуємо доданки, що містять x_2, та виділяємо повний квадрат і т. д.

2. ***Метод Якобі.***

Головними мінорами матриці квадратичної форми називаються мінори різних порядків, розташовані в її лівому верхньому куті:

$$\Delta_1=|a_{11}|,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\ \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\ \ldots .$$

Якщо всі головні мінори матриці квадратичної форми відмінні від нуля, то канонічні коефіцієнти квадратичної форми знаходять за формулами:

$$\lambda_1=\Delta_1;\ \lambda_i=\frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}\ \ (i=2,\ 3,\ \ldots,n).$$

3. Канонічні коефіцієнти квадратичної форми дорівнюють власним числам матриці квадратичної форми.

Задача 1.7. Звести квадратичну форму $3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+ +4x_1x_2-4x_2x_3$ до канонічного вигляду.

1. *За методом Лагранжа*:

$$3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3=3\left(x_1^2+\frac{4}{3}x_1x_2\right)+4x_2^2+$$

$$+5x_3^2-4x_2x_3=3\left(x_1+\frac{2}{3}x_2\right)^2+\frac{8}{3}x_2^2-4x_2x_3+5x_3^2=$$

$$=3(x_1+\frac{2}{3}x_2)^2+\frac{8}{3}\left(x_2^2-\frac{3}{2}x_2x_3\right)+5x_3^2=3\left(x_1+\frac{2}{3}x_2\right)^2+$$

$$+\frac{8}{3}\left(x_2-\frac{3}{4}x_3\right)^2+\frac{7}{2}x_3^2=3y_1^2+\frac{8}{3}y_2^2+\frac{7}{2}y_3^2.$$

2. *За методом Якобі*:

Запишемо матрицю квадратичної форми $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0\\ 2 & 4 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}$.

Її головні мінори $\Delta_1=3;\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix} 3 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=8;\ \ \Delta_3=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0\\ 2 & 4 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{vmatrix}=28$.

Канонічні коефіцієнти $\lambda_1=3;\ \lambda_2=\dfrac{8}{3};\ \lambda_3=\dfrac{7}{2}$. Тому квадратична форма зводиться до канонічного вигляду таким чином: $3y_1^2+\dfrac{8}{3}y_2^2+\dfrac{7}{2}y_3^2$.

3. Обчислимо власні числа матриці квадратичної форми $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0\\ 2 & 4 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}$. Для цього складемо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0\\ 2 & 4-\lambda & -2\\ 0 & -2 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0$. Розкриваючи визначник, дістанемо кубічне рівняння $\lambda^3-12\lambda^2+39\lambda-28=0$, корені якого $\lambda_1=1;\ \lambda_2=4;$ $\lambda_3=7$. Таким чином, квадратичну форму можна звести до такого канонічного вигляду: $y_1^2+4y_2^2+7y_3^2$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Задача 2.1. Дано координати чотирьох вершин $A_1\,(0, 0, 1)$, $A_2\,(1, 0, -1)$, $A_3\,(1, 2, 0)$, $A_4\,(2, 0, 1)$ піраміди $A_1A_2A_3A_4$. За допомогою методів векторної алгебри знайти:

а) *довжину ребра* A_1A_2;

б) *площу грані* $A_1A_2A_3$;

в) *кут між векторами* $\overline{A_1A_2}$ і $\overline{A_1A_4}$;

г) *об'єм піраміди* $A_1A_2A_3A_4$;

д) *напрямні косинуси вектора* $\overline{a} = \overline{A_1A_4}$.

а) Розглянемо вектор $\overline{A_1A_2} = (1,\ 0,\ -2)$. Довжину вектора $\overline{a} = (x, y, z)$ знаходимо за формулою $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Звідси $\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

б) Площа грані $A_1A_2A_3$ дорівнює $S = \frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\right|$, де $\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}$ — векторний добуток векторів $\overline{A_1A_2}$ і $\overline{A_1A_3}$, який знаходимо за формулою

$$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

У нашому випадку $\overline{A_1A_2} = (x_1,\ y_1,\ z_1) = (1,\ 0,\ -2)$, $\overline{A_1A_3} = (x_2,\ y_2,\ z_2) = (1,\ 2,\ -1)$

Маємо $\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4i - j + 2k$.

Звідси $S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 1^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

в) Кут між векторами $\overline{A_1A_2}$ і $\overline{A_1A_4}$ знаходимо за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_4}}{\left|\overline{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overline{A_1A_4}\right|}.$$

У нашому випадку $\overline{A_1A_2} = (1,\ 0,\ -2)$, $\overline{A_1A_4} = (2,\ 0,\ 0)$.

Маємо: $\cos\varphi = \dfrac{2\cdot 1 + 0 + 0\cdot(-2)}{\sqrt{5}\cdot 2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Отже, $\varphi = \arccos\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

г) Об'єм піраміди знаходимо за формулою

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

де $\overline{A_1A_2} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{A_1A_3} = (x_2, y_2, z_2)$, $\overline{A_1A_4} = (x_3, y_3, z_3)$. Використовуючи попередні обчислення, дістаємо

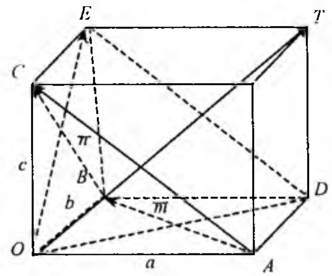
$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 8 = \frac{4}{3}(\text{куб. од.}).$$

д) Застосовуючи формулу напрямних косинусів

$$\cos\alpha = \frac{x}{\left|\overline{a}\right|},\quad \cos\beta = \frac{y}{\left|\overline{a}\right|},\quad \cos\gamma = \frac{z}{\left|\overline{a}\right|},$$

знаходимо $\cos\alpha = \frac{2}{2} = 1$; $\cos\beta = \frac{0}{2} = 0$; $\cos\gamma = \frac{0}{2} = 0$.

Задача 2.1-1. Дано довжину $OA = 1$, $OB = 2$, $OC = 3$ ребер OA, OB, OC прямокутного паралелепіпеда.



Знайти:

а) *площу трикутника OED*;

б) *проекцію вектора* $\overline{AB}$ на $\overline{BC}$;

в) *кут ABC*; $\cos\angle ABC = \dfrac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|}$;
г) *довжину діагоналі паралелепіпеда*;
д) *об'єм піраміди OABC*.

а) Діагоналі OD і OE розглянемо як вектори $\overline{m}$ і $\overline{n}$. У координатній формі вони запишуться як $\overline{m}=(1,\ 2,\ 0)$, $\overline{n}=(0,\ 2,\ 3)$.

Площу трикутника OED знаходимо за формулою $S_{OED}=\dfrac{1}{2}\left|\overline{m}\times\overline{n}\right|$.

Обчислимо векторний добуток $\overline{m}\cdot\overline{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=6i-3j+2k.$

Звідси $S_{OED}=\dfrac{1}{2}\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}=\dfrac{7}{2}$ (кв. од.).

б) $\boxed{\text{пр}_{\overline{BC}}\ \overline{AB}=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BC}|}.}$ У нашому випадку $\overline{AB}=-\overline{a}+\overline{b}=$ $=(-1,2,0)$, $\overline{BC}=-\overline{b}+\overline{c}=(0,\ -2,\ 3)$.

Маємо: $\text{пр}_{\overline{BC}}\ \overline{AB}=\dfrac{(-1)\cdot 0+2\cdot(-2)+3\cdot 0}{\sqrt{(-2)^2+3^2}}=-\dfrac{4}{\sqrt{13}}=-\dfrac{4\sqrt{13}}{13}.$

в) Оскільки $\overline{BA}=(1,\ -2,\ 0)$, $\overline{BC}=(0,\ -2,\ 3)$, дістанемо:

$$\cos\angle ABC=\frac{1\cdot 0+(-2)(-2)+0\cdot 3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}}=\frac{4}{\sqrt{65}}=\frac{4\sqrt{65}}{65}.$$

Отже, $\angle ABC=\arccos\dfrac{4\sqrt{65}}{65}$.

г) Розглянемо вектор $\overline{OT}=(1,\ 2,\ 3)$. Довжиною діагоналі паралелепіпеда є довжина вектора $\overline{OT}=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}.$
Звідси $|\overline{OT}|=\sqrt{14}$.

д) Об'єм піраміди знаходимо за формулою $V=\pm\dfrac{1}{6}\left(\overline{OA}\times\overline{OB}\right)\overline{OC}$, де $\left(\overline{OA}\times\overline{OB}\right)\overline{OC}$ — мішаний добуток векторів $\overline{OA}=(1,\ 0,\ 0)$, $\overline{OB}=(0,\ 2,\ 0)$, $\overline{OC}=(0,\ 0,\ 3)$.

Маємо: $V=\dfrac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=1$ (куб. од.).

Задача 2.1-2 Дано три послідовні вершини паралелограма A (1, 0, 0), B (4, 3, 2), C (2, –1, 0). Застосовуючи методи векторної алгебри, знайти:
а) *координати четвертої вершини D (x, y, z)*;
б) *площу трикутника ABC*;
в) *довжину діагоналі AC*;
г) *кут ABC;*
д) *об'єм піраміди OABC*.

а) Сторони паралелограма розглядаємо як вектори. Маємо: $\overline{AB}=\overline{DC}$, $\overline{AB}=(4-1,\ 3-0,\ 2-0)=(3,\ 3,\ 2)$, $\overline{DC}=(2-x,\ -1-y,\ -z)$. Вектори рівні, якщо рівні їхні координати. Звідси дістаємо:

$$\begin{cases} 3=2-x, \\ 3=-1-y, \\ 2=-z, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1, \\ y=-4, \\ z=-2. \end{cases}$$

Отже, D (– 1, – 4, – 2).

б) Площа $\Delta\ ABC$ є половина площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$; площа його дорівнює модулю векторного добутку векторів $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$.

Маємо: $\overline{BA}=(-3,-3,-2)$, $\overline{BC}=(-2,-4,-2)$.

Векторний добуток $\overline{BA}\times\overline{BC}$ знаходимо за формулою:

$$\overline{BA}\times\overline{BC}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -3 & -3 & -2 \\ -2 & -4 & -2 \end{vmatrix}=2\overline{i}-2\overline{j}+6\overline{k}.$$

Звідси $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{BA}\times\overline{BC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{4+4+36} = \sqrt{11}$ кв. од.

Отже, $S_{\Delta ABC} = \sqrt{11}$ (кв. од.)

в) Розглядаючи AC як вектор $\overline{AC}$, маємо:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = (+3,+3,+2)+(-2,-4,-2) = (1,\ -1,\ 0).$$

Звідси $\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{1^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{2}$.

г) Використаємо формулу і вектори $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$, знайдені в п. б:

$$\cos\angle ABC = \frac{\left(\overline{BA}\cdot\overline{BC}\right)}{\left|\overline{BA}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|} = \frac{(-3)(-2)+(-3)(-4)+(+2)(-2)}{\sqrt{9+9+9}\ \sqrt{4+16+4}} = \frac{22}{\sqrt{22}\ \sqrt{24}} =$$

$$= \frac{\sqrt{33}}{12}.$$

Звідси $\angle ABC = \arccos\frac{\sqrt{33}}{12}$.

д) Об'єм піраміди обчислюється за формулою $V = \frac{1}{6}\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\overline{c}$, де $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\overline{c}$ — мішаний добуток векторів $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}$.

Маємо: $V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}2 = \frac{1}{3}$ (куб. од.).

Задача 2.1-3. На векторах $\overline{m} = 2\overline{i}+3\overline{j},\ \overline{n} = \overline{i}+\overline{k},\ \overline{p} = 2\overline{j}-4\overline{k}$ побудовано паралелепіпед, де $\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}$ — орти відповідної системи координат. Знайти за методами векторної алгебри:

а) *об'єм паралелепіпеда*;

б) *площу грані, побудованої на векторах* $\overline{m}$ і $\overline{n}$;

в) *довжину діагоналі паралелограма, побудованого на векторах* $\overline{m}$ і $\overline{p}$;

г) *кут між стороною* $\overline{m}$ *і діагоналлю грані, утвореної векторами* $\overline{m}$ і $\overline{p}$.

а) Об'єм обчислюємо за формулою $V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & y_3 \end{vmatrix}$, де $(x_i,\ y_i,\ z_i)\ (i=1,\ 2,\ 3)$ — відповідні координати векторів $\overline{m},\ \overline{n},\ \overline{p}$. У нашому випадку

$$V = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = +12-4 = 8 \text{ (куб. од.)}.$$

Отже, об'єм паралелепіпеда дорівнює 8 куб. од.

б) Грань, побудована на векторах $\overline{m}$ і $\overline{n}$, є паралелограмом. Площа паралелограма чисельно дорівнює модулю векторного добутку векторів $\overline{m}$ і $\overline{n}$:

$$S = \left|\overline{m}\times\overline{n}\right|.$$

Векторний добуток обчислюється так:

$$\overline{m}\times\overline{n} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\overline{i}-2\overline{j}-3\overline{k}.$$

Звідси $S = \left|\overline{m}\times\overline{n}\right| = \sqrt{3^2+(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{22}$ (кв. од.).

в) Діагональ паралелограма $\overline{d} = \overline{m}+\overline{p}$.

У нашому випадку $\overline{d} = 2\overline{i}+3\overline{j}+2\overline{j}-4\overline{k} = 2\overline{i}+5\overline{j}-4\overline{k}$.

Звідси $\left|\overline{d}\right| = \sqrt{2^2+5^2+(-4)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

г) Використовуючи дані, обчислені в п. в, зводимо задачу до знаходження кута між векторами $\overline{m}$ і $\overline{d}$:

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overline{m}\cdot\overline{d}\right)}{\left|\overline{m}\right|\left|\overline{d}\right|} = \frac{2\cdot 2+3\cdot 5+0\cdot(-4)}{\sqrt{2^2+3^2}\cdot 3\sqrt{5}} = \frac{19}{3\sqrt{13\cdot 5}} = \frac{19\sqrt{65}}{195}.$$

Отже, $\varphi = \arccos\frac{19\sqrt{65}}{195}$.

Задача 2.1-4. Паралелограм побудовано на векторах $\bar a = 3\bar p + 2\bar q$ і $\bar b = -2\bar p + 4\bar q$, $|p| = 1$, $|q| = 1$, $(\widehat{\bar p,\bar q}) = \frac{\pi}{3}$. Методами векторної алгебри знайти:

а) *довжини діагоналей;*

б) *кут між діагоналями.*

а) Відомо, що

$$\bar d_1 = \bar a + \bar b = 3\bar p + 2\bar q - 2\bar p + 4\bar q = -\bar p + 6\bar q.$$

$$\bar d_2 = \bar a - \bar b = 3\bar p + 2\bar q + 2\bar p - 4\bar q = 5\bar p - 2\bar q.$$

Тобто довжина діагоналі $|\bar d_1| = \sqrt{\bar d_1^2} = \sqrt{(-\bar p + 6\bar q)^2} = \sqrt{\bar p^2 - 12\bar p\bar q + 36\bar q^2}$. Оскільки $\bar p^2 = |\bar p|\,|\bar p|\cos 0 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$;

$\bar q^2 = |\bar q|\cdot|\bar q|\cos 0 = 1$; $\bar p\,\bar q = |\bar p|\cdot|\bar q|\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, то

$$|\bar d_1| = \sqrt{1 - 12\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + 36} = \sqrt{31},$$

$$|\bar d_2| = \sqrt{(5\bar p - 2\bar q)^2} = \sqrt{25\bar p^2 - 20\bar p\cdot\bar q + 4\bar q^2} = \sqrt{25 - 20\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + 4} = \sqrt{19}.$$

Маємо: $|\bar d_1| = \sqrt{31}$, $|\bar d_2| = \sqrt{19}$.

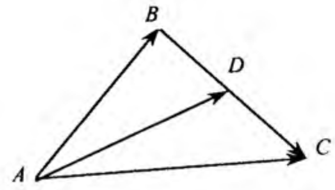
б) Кут між діагоналями розглядаємо як кут між двома векторами $\bar d_1$ і $\bar d_2$:

$$\cos\varphi = \frac{(\bar d_1\ \bar d_2)}{|\bar d_1|\,|\bar d_2|} = \frac{(-\bar p + 6\bar q)(5\bar p - 2\bar q)}{\sqrt{19}\,\sqrt{31}} = \frac{-5\bar p^2 + 32\bar p\,\bar q - 12\bar q^2}{\sqrt{19\cdot 31}} =$$

$$= \frac{-5\cdot 1 + 32\cdot\frac{1}{2} - 12\cdot 1}{\sqrt{19\cdot 31}} = -\frac{1}{\sqrt{19\cdot 31}} = -\frac{\sqrt{589}}{589}.$$

Отже, $\varphi = \pi - \arccos\frac{\sqrt{589}}{589}$.

Задача 2.1-5. Вектори $\overline{AB} = 3\bar i + 2\bar j$ і $\overline{BC} = \bar i + \ + 2\sqrt{3}\,\bar j$ — це сторони трикутника. Обчислити кути трикутника, довжину медіани AD, якщо $\bar i$, $\bar j$ — взаємно перпендикулярні одиничні вектори.



1) Знаходимо

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 4\bar i + \left(2 + 2\sqrt{3}\right)\bar j.$$

Кути трикутника такі:

$$\cos\angle BAC = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}|\,|\overline{AC}|} = \frac{3\cdot 4 + 4\left(1 + \sqrt{3}\right)}{\sqrt{3^2 + 2^2}\,\sqrt{4^2 + \left(2 + 2\sqrt{3}\right)^2}} =$$

$$= \frac{16 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{13}\cdot 2\sqrt{8 + 2\sqrt{3}}} = \frac{8 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{13}\sqrt{8 + 2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{3}}}{\sqrt{13}}.$$

$$\cos\angle ABC = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BA}|\,|\overline{BC}|} = \frac{-3\cdot 1 - 2\cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{13}\sqrt{13}} = -\frac{3 + 4\sqrt{3}}{13}.$$

$$\cos\angle BCA = \frac{\overline{CB}\cdot\overline{CA}}{|\overline{CB}|\,|\overline{CA}|} = \frac{-1(-4) - 2\sqrt{3}\left(-2 - 2\sqrt{3}\right)}{\sqrt{13}\sqrt{4^2 + \left(2 + 2\sqrt{3}\right)^2}} = \frac{4 + 4\sqrt{3} + 12}{\sqrt{13}\cdot 2\sqrt{8 + 2\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{2\left(8 + 2\sqrt{3}\right)}{\sqrt{13}\cdot 2\sqrt{8 + 2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{3}}}{\sqrt{13}}.$$

$$\angle A = \arccos\frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{3}}}{\sqrt{13}};\quad \angle B = \pi - \arccos\frac{3 + 4\sqrt{3}}{13};\quad \angle C = \arccos\frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{3}}}{\sqrt{13}}.$$

2) Медіану AD розглядаємо як вектор, тому

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AB} + \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{7}{2}\bar{i} + \left(1+\sqrt{3}\right)\bar{j}.$$

Визначаємо довжину медіани:

$$AD = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(1+\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4} + 1 + 2\sqrt{3} + 3} = \sqrt{\frac{65+8\sqrt{3}}{4}}.$$

Довжина медіани $AD = \dfrac{\sqrt{65+8\sqrt{3}}}{2}$.

Задача 2.1-6. Знайти проекцію вектора $\bar{a} = 6\bar{m} + 5\bar{n}$ за напрямом вектора $\bar{b} = 4\bar{m} + 3\bar{n}$, де $|\bar{m}| = |\bar{n}| = 1$, $(\widehat{\bar{m},\ \bar{n}}) = 120^\circ$. Застосовуємо формулу:

$$\boxed{\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi = \frac{|\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi}{|\bar{b}|} = \frac{(\bar{a}\cdot\bar{b})}{|\bar{b}|}.}$$

У нашому випадку

$$\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\left(6\bar{m}+5\bar{n}\right)\left(4\bar{m}+3\bar{n}\right)}{\sqrt{(4\bar{m}+3\bar{n})^2}} = \frac{24\bar{m}^2 + 38\bar{m}\,\bar{n} + 15\bar{n}^2}{\sqrt{16\bar{m}^2 + 24\bar{m}\,\bar{n} + 9\bar{n}^2}},$$

але $\bar{m}^2 = |\bar{m}||\bar{m}|\cos 0 = 1\cdot1\cdot1 = 1$, $\bar{n}^2 = |\bar{n}||\bar{n}|\cos 0 = 1\cdot1\cdot1 = 1$,

$(\bar{m}\cdot\bar{n}) = |\bar{m}||\bar{n}|\cos 120 = 1\cdot1\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

Тому $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \dfrac{24 - 38\cdot\frac{1}{2} + 15}{\sqrt{16-12+9}} = \dfrac{20}{\sqrt{13}} = \dfrac{20\sqrt{13}}{13}$.

Звідси $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \dfrac{20\sqrt{13}}{13}$.

Задача 2.1-7. Перевірити на компланарність вектори:

$$\bar{p} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}, \quad \bar{q} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}, \quad \bar{r} = 6\bar{i} + 4\bar{j} - \bar{k}.$$

Якщо вектори компланарні, то визначник, складений із координат цих векторів, дорівнює нулю (мішаний добуток векторів тотожний нулю).

Маємо $\left(\bar{p}\times\bar{q}\right)\bar{r} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 18 - 8 - 12 + 6 - 8 = 0$.

Отже, вектори компланарні (лежать в одній площині, лінійно залежні $2\bar{p} + \bar{q} = \bar{r}$).

Задача 2.1-8. Для вектора $\bar{p} = 4\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$, де $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — орти відповідної системи координат, знайти:

а) *довжину вектора* $\bar{p}$;

б) *напрямні косинуси вектора* $\bar{p}$;

в) *проекцію вектора* $\bar{p}$ *на вектор* $\bar{q} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 6\bar{k}$.

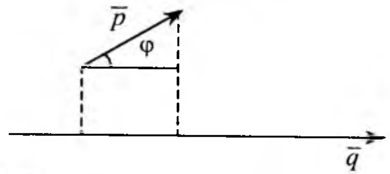
а) Згідно з формулою $|\bar{p}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, де x, y, z — координати вектора $\bar{p}$, маємо $|\bar{p}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.

б) Відомо, що $\cos\alpha = \dfrac{x}{|\bar{p}|}$, $\cos\beta = \dfrac{y}{|\bar{p}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{z}{|\bar{p}|}$.

Оскільки $|\bar{p}| = \sqrt{29}$ і відомі координати вектора, маємо

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{29}}, \quad \cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{29}}, \quad \cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{29}}.$$

в) Проекція вектора $\bar{p}$ на вектор $\bar{q}$ становить:



$$\text{пр}_{\bar{q}}\,\bar{p} = |\bar{p}|\cos\varphi = \frac{|\bar{p}|\,|\bar{q}|}{|\bar{q}|}\cos\varphi = \frac{(\bar{p}\ \bar{q})}{|\bar{q}|} = \frac{4\cdot2 + (-3)\cdot3 + 2\cdot6}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}} = \frac{11}{\sqrt{49}} = \frac{11}{7}.$$

$$|\bar{p}| = \sqrt{29};\ \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{29}};\ \cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{29}};\ \cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{29}};\ \text{пр}_{\bar{q}}\,\bar{p} = \frac{11}{7}.$$

Задача 2.1-9. Дано: вектор $\overline{a} = (3,\ 6,\ -2)$.

Знайти:

а) *довжину вектора* $\overline{a}$;

б) *одиничний вектор, паралельний вектору* $\overline{a}$;

в) *одиничний вектор, одночасно перпендикулярний до вектора* $\overline{a}$ *і осі OX*;

г) *проекцію вектора* $\overline{a}$ *на вектор* $\overline{p} = (2,\ 3,\ -6)$.

а) Згідно з формулою $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{9 + 36 + 4} = 7$.

б) $\overline{a_0} = \dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = \left(\dfrac{3}{7},\ \dfrac{6}{7},\ -\dfrac{2}{7}\right)$.

в) Припустимо, що вектор $\overline{m}$, який потрібно знайти, має координати $\overline{m} = (x,\ y,\ z)$. Цей вектор перпендикулярний до векторів $\overline{a} = (3, 6, -2)$ і $(1,\ 0,\ 0)$.

Звідси $\begin{cases} \overline{a} \cdot \overline{m} = 0 \\ x \cdot 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 6y - 2z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3y \\ x = 0 \end{cases}$.

Отже, $\overline{m} = (0, y, 3y)$.

Оскільки $\overline{m}$ одиничний, то $y^2 + 9y^2 = 1 \Rightarrow 10y^2 = 1$, $y^2 = \dfrac{1}{10}$,

$y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $y_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

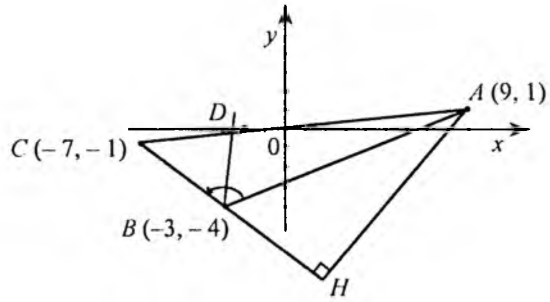
$$\overline{m_1} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right),\ \overline{m_2} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

г) $\text{пр}_{\overline{b}}\, \overline{a} = \dfrac{3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + (-2)(-6)}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \dfrac{36}{7}$,

оскільки $\text{пр}_{\overline{p}}\, \overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cos\left(\overline{a},\ \overline{p}\right) = \dfrac{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{p}\right|}{\left|\overline{p}\right|} \cos\left(\widehat{\overline{a}, \overline{p}}\right) = \dfrac{\left(\overline{a},\ \overline{p}\right)}{\left|\overline{p}\right|}$.

Метод координат і пряма лінія

Задача 2.2. У трикутнику *ABC* відомі координати вершин *A* (9, 1), *B* (–3, –4), *C* (–7, –1).



Знайти:

а) *довжину сторони BC*;

б) *рівняння BC*;

в) *рівняння висоти AH, проведеної з точки A*;

г) *довжину висоти, проведеної з точки A*;

д) *рівняння бісектриси BD внутрішнього кута B трикутника*;

е) *площу трикутника*;

є) *кут B у радіанах з точністю до двох знаків.*

а) Використаємо формулу відстані між двома точками *B* і *C*:

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-3+7)^2 + (-4+1)^2} = \sqrt{16+9} = 5.$$

Отже, $BC = 5$.

б) Скористаємось рівнянням прямої, яка проходить через дві точки:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$

Беручи $x_1 = -3$, $y_1 = -4$, $x_2 = -7$, $y_2 = -1$, дістаємо:

$$\frac{x+3}{-7+3} = \frac{y+4}{-1+4} \Rightarrow \frac{x+3}{-4} = \frac{y+4}{3} \Rightarrow 3x + 9 = -7y - 16 \Rightarrow 3x + 4y + 25 = 0.$$

(BC): $3x + 4y + 25 = 0$.

в) Висота $AH \perp BC$, тому $\left(\overline{AH} \cdot \overline{BC}\right) = 0$. Позначимо точку $H(x, y)$, тоді $\overline{AH} = (x-9,\ y-1)$; $\overline{BC} = (-7+3,\ -1+4) = (-4, 3)$ і
$-4(x-9) + 3(y-1) = 0 \Rightarrow -4x + 3y + 33 = 0$.

(AH): $4x - 3y - 33 = 0$.

г) Задача зводиться до знаходження відстані від точки A до прямої BC, яка обчислюється за формулою

$$\boxed{AH = d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},}$$

де $Ax + By + C = 0$ — рівняння прямої BC; x_0, y_0 — координати точки A. Маємо:

$$AH = d = \frac{|3 \cdot 9 + 4 \cdot 1 + 25|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{56}{5} = 11{,}2.$$

Довжина $AH = 11{,}2$.

д) Бісектриса BD трикутника ABC — це геометричне місце точок, рівновіддалених від прямих BC і BA. Рівняння BC знайдено в п. б. Аналогічно знаходимо рівняння прямої BA:

$$\frac{x - x_B}{x_A - x_B} = \frac{y - y_B}{y_A - y_B};$$

$$\frac{x+3}{9+3} = \frac{y+4}{1+4} \Rightarrow 5(x+3) = 12(y+4) \Rightarrow 5x - 12y - 33 = 0;$$

$$\frac{|3x + 4y + 25|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|5x - 12y - 33|}{\sqrt{5^2 + 12^2}}.$$

Для внутрішнього кута трикутника дістаємо:

$$\frac{3x + 4y + 25}{5} = \frac{-(5x - 12y - 33)}{13} \Rightarrow 39x + 52y + 325 =$$
$$= -25x + 60y + 165 \Rightarrow 64x - 8y + 160 = 0 \Rightarrow 8x - y + 20 = 0.$$

Отже, $8x - y + 20 = 0$.

е) Площу трикутника можна обчислити, використавши:
1) векторний добуток;

2) формулу $S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$;

3) $S = \frac{1}{2} a h$.

Використаємо останню формулу:

$$S = \frac{1}{2} a h = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{56}{5} = 28 \text{ кв. од.}$$

$S = 28$ (кв. од.).

є) Шуканий кут можна обчислити як кут:
1) між двома векторами $\overline{BC}$ і $\overline{BA}$;
2) між прямими BA і BC через кутові коефіцієнти.
Обчислимо кут способом 2:

$$\operatorname{tg}\angle B = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1},$$

де k_1 і k_2 — кутові коефіцієнти прямих AB і BC.

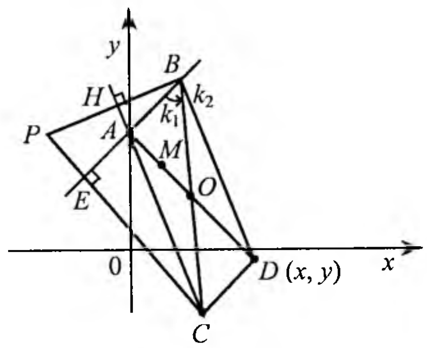
$$k_1 = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1-(-4)}{9-(-3)} = \frac{5}{12},\quad k_2 = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-1-(-4)}{-7-(-3)} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}.$$

$$\text{Звідси } \operatorname{tg}\angle B = \frac{\frac{-3}{4} - \frac{5}{12}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{12}} = \frac{-\frac{14}{12}}{1 - \frac{5}{16}} = \frac{-\frac{14}{12}}{\frac{11}{16}} = -\frac{56}{33};$$

$$\angle B = \pi - \operatorname{arctg}\frac{56}{33} = 3{,}14 - 1{,}04 \approx 2{,}10.$$

Задача 2.2-1. У трикутнику ABC дано рівняння двох сторін: AB — $7x - 5y + 10 = 0$ і AC — $3x + y - 2 = 0$, а також точку перетину медіан $M(1, 1)$.

Знайти:
а) *рівняння третьої сторони BC*;
б) *відстань від точки B до прямої AC;*
в) *кут B в радіанах з точністю до двох знаків*;
г) *точку перетину висот трикутника.*



а) Побудуємо рисунок. На продовженні прямої AM відкладемо відрізок $MD = 2\,AM$. Через точку D проведемо прямі DB і DC, паралельні AC і AB. Фігура $ABDC$ — паралелограм. Точка D діагоналі AD паралелограма $ABDC$ поділяє зовнішньо відрізок AM у відношенні $\frac{AD}{DM} = \frac{-3}{2}$. Щоб знайти рівняння BC, необхідно знайти координати точок B і C, які можна знайти, знаючи рівняння прямих BD і DC. Для відшукання рівняння прямої BD потрібно знайти координати точки D і використати умову паралельності прямих AC і BD. Аналогічно знаходимо рівняння CD.

1) Знаходимо координати точки D:

$$x_D = \frac{x_A + \lambda x_M}{1+\lambda} = \frac{0 - \frac{3}{2}\cdot 1}{1 - \frac{3}{2}\cdot 1} = 3,$$

$$y_D = \frac{y_A + \lambda y_M}{1+\lambda} = \frac{2 - \frac{3}{2}\cdot 1}{1 - \frac{3}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1.$$

Маємо $D\,(3, -1)$.

2) BD: $BD \| AC \Rightarrow 3x + y + n = 0$. Точка D лежить на прямій BD, тому $3\cdot 3 - 1 + n = 0$, $n = -8$. $3x + y - 8 = 0$ — рівняння BD.

3) Знаходимо координати точки B. Для цього можна розв'язати систему рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 7x - 5y + 10 = 0 \\ 3x + y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 22, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -10 & -5 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 30,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & -10 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 56 + 30 = 86.$$

Координати точки B: $x_B = \frac{30}{22} = \frac{15}{11}$, $y_B = \frac{43}{11}$.

4) Аналогічно попередньому визначаємо координати точки C:

$$CD:\ CD \| AB \Rightarrow 7x - 5y + n = 0.$$

Точка D лежить на прямій CD, звідки випливає, що $7\cdot 3 - 5\cdot(-1) + n = 0$, $n = -26$; $7x - 5y - 26 = 0$ — рівняння прямої CD.

5) Знаходимо координати точки C. Для цього потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} 7x - 5y = 26 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 22, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 26 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 36,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 26 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 14 - 78 = -64.$$

Координати точки C: $x_C = \frac{18}{11}$, $y_C = -\frac{32}{11}$.

6) Рівняння прямої BC знаходимо як рівняння прямої, яка проходить через дві точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

де $x_1 = x_B = \frac{15}{11}$, $y_1 = y_B = \frac{43}{11}$; $x_2 = x_C = \frac{18}{11}$, $y_2 = y_C = -\frac{32}{11}$.

$$\frac{x-\frac{15}{11}}{\frac{18}{11}-\frac{15}{11}}=\frac{y-\frac{43}{11}}{-\frac{32}{11}-\frac{43}{11}}\Rightarrow\frac{11x-15}{3}=\frac{11y-43}{-75}\Rightarrow-25\cdot11x+25\cdot15=$$
$$=11y-43\Rightarrow25\cdot11x+11y-418=0\Rightarrow25x+y-38=0.$$

Рівняння BC: $25x+y-38=0$.

б) Відстань від точки B до прямої AC знаходимо за формулою

$$BH=d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

де $Ax+By+C=0$ — рівняння прямої AC; x_0, y_0 — координати точки B.

$$BH=d=\frac{\left|3\cdot\frac{15}{11}+1\cdot\frac{43}{11}-2\right|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

Відстань від точки B до прямої AC дорівнює $\frac{3\sqrt{10}}{5}$.

в) Кут B знаходимо за формулою

$$\text{tg}\angle B=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2},$$

де k_1 — кутовий коефіцієнт прямої AB, а k_2 — кутовий коефіцієнт прямої BC; $k_1=\frac{7}{5}$, $k_2=-25$.

$$\text{tg}\angle B=\frac{-25-\frac{7}{5}}{1-\frac{7}{5}25}=\frac{-\frac{135}{5}}{-34}=\frac{27}{34}=0{,}7941,$$

$$\angle B=\text{arctg}\ 0{,}7941=0{,}6711.$$

$\angle B=0{,}6711$ рад.

г) Знайдемо рівняння висоти BH і висоти CE.

BH: $y-y_B=k_{BH}(x-x_B)$, прямі AC і BH — взаємно перпендикулярні, тому $k_{BH}\cdot k_{AC}=-1\Rightarrow k_{BH}=-\frac{1}{k_{AC}}=-\frac{1}{-3}=\frac{1}{3}$.

Звідси $y-\frac{43}{11}=\frac{1}{3}\left(x-\frac{15}{11}\right)\Rightarrow33y-129=11x-15.$

Рівняння BH матиме такий вигляд: $11x-33y+114=0$.

CE: шукаємо у вигляді $y-y_C=k_{CE}(x-x_C)$. Пряма $CE\perp AB$, тому $k_{CE}\cdot k_{AB}=-1\Rightarrow k_{CE}=-\frac{1}{\frac{7}{5}}=-\frac{5}{7}$.

$$y+\frac{32}{11}=-\frac{5}{7}\left(x-\frac{18}{11}\right)\Rightarrow77y+224=-55x+90\Rightarrow55x+77y+134=0.$$

Рівняння CE таке: $55x+77y+134=0$.

Знайдемо точку перетину висот P.

$$\begin{cases}11x-33y=-114\\55x+77y=-134\end{cases}\Rightarrow\Delta=2662,\ \ \Delta_1=\begin{vmatrix}-114&-33\\-134&77\end{vmatrix}=13200,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}11&-114\\55&-134\end{vmatrix}=4796.$$

Звідси $x_P=\frac{-13200}{2662}\approx-4{,}95$; $y_P=\frac{4796}{2662}\approx1{,}80$.

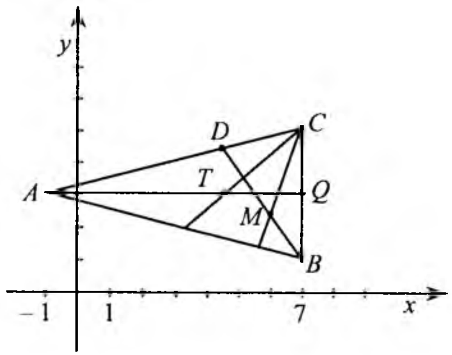
Точка перетину висот P (– 4,95; 1,80).

Задача 2.2-2. Відомі координати двох вершин A (–1, 3), B (7, 1) і точка перетину висот M (6, 3). Знайти:

а) *рівняння його сторін*;
б) *координати третьої вершини C*;
в) *тангенс кута A*;
г) *довжину висоти BD*;

д) *площу трикутника* $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} BD \cdot AC$;

е) *точку перетину медіан.*



а) Спочатку зробимо рисунок. Знайдемо рівняння висот.

BC: $AM \perp BC$. Розглядаючи їх як вектори, маємо $\left(\overline{AM} \cdot \overline{BC}\right) = 0$, або, у координатній формі:

$$\overline{AM} = (6 - (-1), 3 - 3) = (7, 0),$$
$$\overline{BC} = (x - 7) + 0 \cdot (y + 1),$$
$$7(x - 7) + 0(y - 1) = 0, \quad x = 7.$$

AC: $AC \perp BM$, розглядаючи ці відрізки як вектори, маємо $\left(\overline{BM} \cdot \overline{AC}\right) = 0$, або, у координатній формі:

$$\overline{BM} = (6 - 7,\ 3 - 1) = (-1,\ +2),$$
$$\overline{AC} = (x + 1, y - 3),$$
$$-1(x + 1) + 2(y - 3) = 0 \Rightarrow -x - 1 + 2y - 6 = 0.$$

Звідси $x - 2y + 7 = 0$.

AB: рівняння сторони AB знаходимо як рівняння прямої, що проходить через дві точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

У нашому випадку

$$x_1 = -1,\ y_1 = 3,\ x_2 = 7,\ y_2 = 1.$$

Маємо

$$\frac{x + 1}{7 + 1} = \frac{y - 3}{1 - 3} \Rightarrow \frac{x + 1}{8} = \frac{y - 3}{-2} \Rightarrow -x - 1 = 4y - 12 \Rightarrow x + 4y - 11 = 0.$$

AC: $x - 2y + 7 = 0$; BC: $x = 7$; AB: $x + 4y - 11 = 0$.

б) Через вершину C проходять дві прямі AC і BC. Щоб знайти координати цієї вершини, потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} x - 2y + 7 = 0 \\ x = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y + 14 = 0 \\ x = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 7 \\ x = 7. \end{cases}$$

Координати вершини C (7, 7).

в) Скористаємось формулою

$$\operatorname{tg}\angle A = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{k_{AC} - k_{AB}}{1 + k_{AC} k_{AB}}.$$

У нашому випадку $k_{AC} = \dfrac{1}{2}$, $k_{AB} = -\dfrac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\angle A = \dfrac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}}{1 + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{4}\right)} = \dfrac{\dfrac{3}{4}}{\dfrac{7}{8}} = \dfrac{6}{7}.$

$$\operatorname{tg}\angle A = \frac{6}{7}.$$

г) Довжина висоти BD дорівнює відстані від точки B до прямої AC і обчислюється за формулою:

$$BD = d = \frac{|x_0 - 2y_0 + 7|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|7 - 2 + 7|}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}.$$

д) BD обчислено в п. г. Знайдемо AC.

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(7 - (-1))^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{64 + 16} =$$
$$= \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

Звідси $S = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{12\sqrt{5}}{5} \cdot 4\sqrt{5} = 24$ (кв. од.).

е) Знайдемо координати точки Q — середини відрізка BC:

$$x_Q = \frac{7+7}{2} = 7 \qquad y_Q = \frac{1+7}{2} = 4.$$

Точка T перетину медіан поділяє медіану AQ у відношенні $\lambda = \frac{AT}{TQ} = 2$. Звідси $x_T = \frac{x_A + \lambda x_Q}{1+\lambda} = \frac{-1+2\cdot 7}{1+2} = \frac{13}{3}$; $y_T = \frac{y_A + \lambda y_Q}{1+\lambda} = \frac{3+24}{1+2} = \frac{11}{3}$.

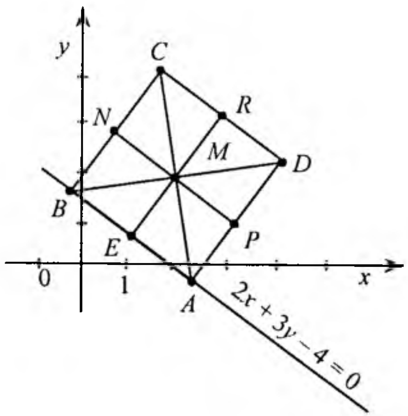
Точка перетину медіан $T\left(\frac{13}{3}, \frac{11}{3}\right)$.

Задача 2.2-3. Рівняння однієї зі сторін квадрата $2x + 3y - 4 = 0$. Точка перетину діагоналей $M(2, 2)$.

Знайти:

а) *довжину сторони AD квадрата*;

б) *рівняння сторін квадрата*.



а) $AD = 2ME$ — відстань від точки M до прямої AB.

$$ME = \frac{|2\cdot 2 + 3\cdot 2 - 4|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{6}{\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}.$$

Звідси $AD = \frac{12\sqrt{13}}{13}$.

б) Достатньо знайти координати вершин B і D. Складаємо рівняння сторони BD, знаходимо координати точки B (точка перетину прямих AB і BD) і, знаючи точки B і M, визначаємо точку D. Рівняння прямої BD шукаємо у вигляді $y - y_M = k_{BD}(x - x_M)$.

Коефіцієнт k_{BD} обчислюємо з рівняння:

$$\operatorname{tg}\angle DBA = \frac{k_{BD} - k_{BA}}{1 + k_{BD}k_{BA}} \Rightarrow \operatorname{tg}45^\circ = \frac{k_{BD} - \left(-\frac{2}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)k_{BD}},$$

$$1 - \frac{2}{3}k_{BD} = k_{BD} + \frac{2}{3}, \quad \frac{5}{3}k_{BD} = \frac{1}{3}, \quad k_{BD} = \frac{1}{5}.$$

Рівняння прямої BD записуємо як $y - 2 = \frac{1}{5}(x-2)$, $x - 5y + 8 = 0$.

Знаходимо координати точки B:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - 5y = -8 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 3 = -13, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -8 & -5 \end{vmatrix} = -20 + 24 = 4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = -16 - 4 = -20, \text{ маємо } x = -\frac{4}{13}, y = \frac{20}{13}.$$

Звідси $B\left(-\frac{4}{13}; \frac{20}{13}\right)$.

BC: рівняння прямої BC шукаємо у вигляді прямої, яка проходить через дану точку в даному напрямі: $y - y_B = k_{BC}(x - x_B)$. Коефіцієнт k_{BC} задовольняє умову $k_{BC}k_{BA} = -1$, $k_{BC} = -\frac{1}{k_{BA}} = -\frac{1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$.

Маємо $y - \frac{20}{13} = \frac{3}{2}\left(x + \frac{4}{13}\right)$, $26 - 40 = 39x + 12$.

Отже, рівняння прямої BC: $\mathbf{3x - 2y + 4 = 0}$.

D: знаходимо координати точки D, яка поділяє зовнішньо відрізок BM у відношенні $\lambda = \frac{BD}{DM} = -2$.

Маємо:

$$x_D = \frac{x_B+\lambda x_M}{1+\lambda} = \frac{-\frac{4}{13}-2\cdot 2}{1-2} = \frac{-\frac{56}{13}}{-1} = \frac{56}{13},$$

$$y_D = \frac{y_B+\lambda y_M}{1+\lambda} = \frac{\frac{20}{13}-2\cdot 2}{1-2} = \frac{32}{13}.$$

CD: пряма $CD\parallel AB$ проходить саме через точку D. Шукаємо рівняння CD у вигляді $y-y_D=k_{AB}\left(x-x_D\right)$,

$$y-\frac{32}{13}=-\frac{2}{3}\left(x-\frac{56}{13}\right)\Rightarrow 39y-96=-26x+112\Rightarrow 26x+39y-208=0,$$

$\mathbf{2x+3y-16=0}$.

AD: Пряма $AD\parallel BC$ і проходить через точку D. Тому її рівняння шукаємо у вигляді $y-y_D=k_{AD}\left(x-x_D\right)$. Оскільки $k_{AD}=k_{BC}=\frac{3}{2}$, то

$$y-\frac{32}{13}=\frac{3}{2}x-\frac{56}{13}\Rightarrow 26y-64=39x-168\Rightarrow 39x-26y-104=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x-2y-8=0.$$

Рівняння сторін квадрата: $3x-2y+4=0$, $2x+3y-16=0$, $3x-2y-8=0$.

Зауваження

Рівняння сторін квадрата можна знайти простіше, скориставшись формулою для відстані від точки M (точка перетину діагоналей) до сторін AB і CD, AD і BC.

$$CD:\ MR=ME=\frac{\left|2x_M+3y_M-C\right|}{\sqrt{4+9}};$$

$$\frac{6\sqrt{13}}{13}=\frac{\left|2x_M+3y_M-C\right|}{\sqrt{13}}\Rightarrow\left|10-C\right|=6;$$

$$10-C=6,\qquad C_1=4,$$
$$-10+C=6,\qquad C_2=16.$$

Рівняння CD: $2x+3y-16=0$, $AB: 2x+3y-4=0$.

AD і BC: рівняння прямих AD і BC запишемо у вигляді $3x-2y+C=0$. Відстані MN і MP від точки M до прямих AD і BC дорівнюють ME.

$$\frac{\left|3x_M-2y_M+C\right|}{\sqrt{2^2+3^2}}=ME,$$

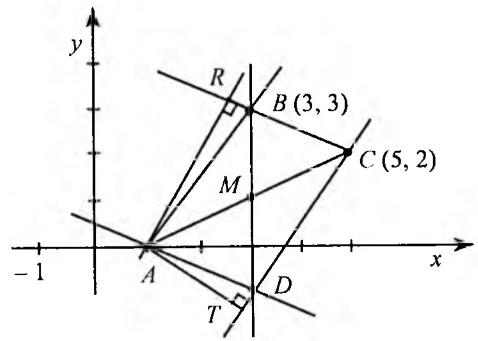
$$\frac{\left|3\cdot 2-2\cdot 2+C\right|}{\sqrt{13}}=\frac{6}{\sqrt{13}}\Rightarrow\left|C+2\right|=6,$$

$$\left[\begin{array}{l}C+2=6\\ C+6=-6\end{array}\right.\Rightarrow\begin{array}{l}C_1=4\\ C_2=-8\end{array}.$$

Рівняння сторін AD і BC мають такий вигляд: $2x-3y+4=0$ і $2x-3y-8=0$.

Задача 2.2-4. Відоме рівняння двох сторін паралелограма $ABCD$. AD: $2x+4y-2=0$; AB: $3x-2y-3=0$. Діагоналі паралелограма перетинаються в точці $M\,(3,\,1)$.

Зобразимо на площині прямі AD і AB, точку $M\,(3,\,1)$, а також паралелограм.



Знайдемо координати вершини A: $\begin{cases}2x+4y=2\\ 3x-2y=3\end{cases}\Rightarrow x=1,\ y=0.$

Знайти:

а) *рівняння діагоналей*;

б) *довжини висот AT і AR паралелограма, що дорівнюють відстані від точки A до прямих BC і DC*;

в) *кут BAD*;

г) *площу паралелограма*;

д) *рівняння висоти AF, опущеної з точки A на діагональ BD.*

а) 1) Рівняння діагоналі AC можна знайти як рівняння прямої, що проходить через дві точки A і M:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \quad \text{де} \quad x_1=1,\ y_1=0,\ x_2=3,\ y_2=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-0}{1-0}\Rightarrow x-1=2y, \qquad \mathbf{x-2y-1=0.}$$

2) Для відшукання рівняння діагоналі BD потрібно знайти рівняння сторони BC, координати точки B як точки перетину двох прямих AB і BC і координати точки C.

Точка C поділяє відрізок AM зовнішньо у відношенні $\lambda=\frac{AC}{CM}=-2$. Координати точки C:

$$\left.\begin{aligned} x_C&=\frac{x_A+\lambda x_M}{1+\lambda}=\frac{1-2\cdot 3}{1-2}=5,\\ y_C&=\frac{y_A+\lambda y_M}{1+\lambda}=\frac{0-2\cdot 1}{1-2}=2,\end{aligned}\right\}\Rightarrow C(5,2).$$

Рівняння прямої BC шукаємо у вигляді $2x+4y+n=0$ $BC\parallel AD$, напрямні вектори рівні між собою, координати точки C задовольняють рівняння прямої $2\cdot 5+4\cdot 2+n=0$ $n=-18$. Рівняння прямої BC має вигляд $x+2y-9=0$.

Знайдемо тепер координати точки B. Точка належить прямим BC і AB, тому вона задовольняє рівняння кожної з них.

$$\begin{cases}x+2y-9=0\\3x-2y-3=0\end{cases}\Rightarrow x=3,\quad y=3,\quad B(3,\ 3).$$

Рівняння діагоналі BD шукаємо у вигляді $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, де $x_1=x_M=3,\quad y_1=y_M=1,\quad x_2=x_B=3,\quad y_2=y_B=3.$

Маємо $\frac{x-3}{3-3}=\frac{y-1}{3-1}\Rightarrow\frac{x-3}{0}=\frac{y-1}{2}$.

Рівняння діагоналі BD $x=3$.

б) $AR=\frac{|x_A+2y_A-9|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|1-9|}{\sqrt5}=\frac{8\sqrt5}{5}.$

Знайдемо рівняння прямої DC. Шукаємо DC у вигляді $3x-2y+e=0$. Точка C лежить на прямій DC, тому $3\cdot 5-2\cdot 2+e=0$, $e=-11$. Рівняння DC має вигляд $3x-2y-11=0$. Відстань точки A (висота AT) до прямої DC:

$$AT=\frac{|3x_A-2y_A-7|}{\sqrt{13}}=\frac{4}{\sqrt{13}}=\frac{4\sqrt{13}}{13}.$$

$$AR=\frac{8\sqrt5}{5},\quad AT=\frac{4\sqrt{13}}{13}.$$

в) Кут BAD шукаємо за формулою $\operatorname{tg}\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$, де k_2 і k_1 — кутові коефіцієнти прямих AD і AB: $k_1=k_{AD}=-\frac12$, $k_2=k_{AB}=\frac32$.

$$\operatorname{tg}\angle BAD=\frac{\frac32+\frac12}{1-\frac34}=\frac{2}{\frac14}=8.$$

$\angle BAD=\operatorname{arctg}\ 8=1{,}44644.$

г) 1-й спосіб. $S_{ABCD}=AR\cdot BC$.

$$AR=\frac{8\sqrt5}{5},\quad BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=$$

$$=\sqrt{(3-5)^2+(3-2)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt5.$$

$$S_{ABCD}=\frac{8\sqrt5}{5}\sqrt5=8\ (\text{кв. од.}).$$

$S_{ABCD}=8$ кв. од.

2-й спосіб.

$$S_{ABCD}=2\cdot\frac12\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|,\quad \overline{AB}=(2,\ 3,\ 0),\quad \overline{AC}=(4,2,0);$$

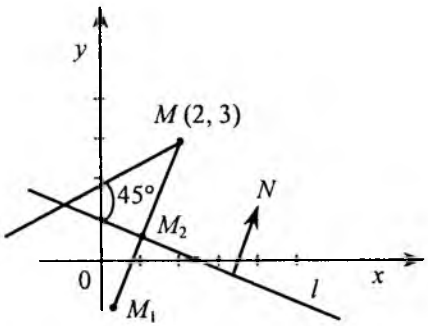
$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 3 & 0\\ 4 & 2 & 0\end{vmatrix}=k=(0,0,-8);$$

$$S_{ABCD}=\sqrt{0+0+8^2}=8\ \text{кв. од.}$$

д) Рівняння BD $x = 3$: Вектор нормалі прямої (1, 0), рівняння висоти шукаємо у вигляді $0x + 1y + C = 0 \Rightarrow y + C = 0$. Точка A (1, 0) належить висоті, тому маємо $1 \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow y = 0$.

Рівняння висоти AF: $y = 0$.

Задача 2.2.5. Рівняння прямої l: $2x + 5y - 5 = 0$. Точка M (2, 3).



Знайти:

а) *рівняння прямої, яка проходить через точку M перпендикулярно до даної прямої;*

б) *координати точки M_1, симетричної точці M відносно прямої l;*

в) *рівняння прямої, яка проходить через точку M під кутом 45° до даної прямої l;*

г) *площу квадрата, сторона якого лежить на прямій l і одна із вершин якого точка M.*

а) Вектор нормалі прямої $2x + 5y - 5 = 0$ є $\overline{N} = (2, 5)$. Позначимо координати проекції точки M на пряму l через M_2 (x, y). Вектори $\overline{MM_2}$ і $\overline{N}$ — паралельні, тому їх координати пропорційні:

$$\overline{MM_2} = (x - 2, y - 3);$$

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{5}, \text{ або } 5x - 10 = 2y - 6 \Rightarrow 5x - 2y - 4 = 0.$$

Отже, рівняння перпендикуляра MM_2: $5x - 2y - 4 = 0$.

б) Знайдемо точку M_2 перетину прямих MM_2 і l:

$$\begin{cases} 5x - 2y - 4 = 0 \\ 2x + 5y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 2x + 5y = 5 \end{cases} \Rightarrow \Delta \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 29,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 30,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 17 \Rightarrow x_2 = \frac{30}{29},\ y_2 = \frac{17}{29}.$$

Точки M і M_1 симетричні відносно точки M_2. Маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{x + x_1}{2} = x_2 \\ \dfrac{y + y_1}{2} = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2 + x_1}{2} = \dfrac{30}{29} \\ \dfrac{3 + y_1}{2} = \dfrac{17}{29} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2 = \dfrac{60}{29} \\ y_1 + 3 = \dfrac{17}{29} \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{29},\ y_1 = -\frac{70}{29}.$$

Звідси координати точки $M_1\left(\frac{2}{29}, -\frac{70}{29}\right)$.

в) Позначимо через k кутовий коефіцієнт шуканої прямої. Визначатимемо рівняння у вигляді

$$y - y_M = k(x - x_M).$$

Обчислимо k. Дістаємо: $\operatorname{tg} 45^\circ = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$. У нашому випадку $k_2 = k$, $k_1 = -\dfrac{2}{5}$. Маємо $1 = \dfrac{k + \frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}k} \Rightarrow 1 - \dfrac{2}{5}k = k + \dfrac{2}{5},\ \dfrac{7}{5}k = \dfrac{3}{5},\ \ k = \dfrac{3}{5}$. Рівняння шуканої прямої: $y - 3 = \dfrac{3}{5}(x - 2)$, $5y - 15 = 3x - 6$.

Рівняння шуканої прямої $3x - 5y + 9 = 0$.

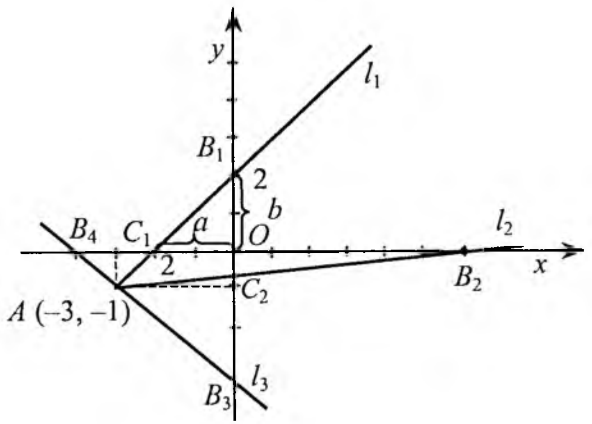
г) Знайдемо довжину сторони квадрата, яка дорівнює відстані від точки M до прямої l.

$$MM_2 = \frac{|2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{14}{\sqrt{29}};$$

$$S_{\text{квадрата}} = MM_2^2 = \frac{196}{29} \text{ (кв. од.)};$$

$$S = \frac{196}{29} \text{ (кв.од.)}.$$

Задача 2.2-6. Пряма l проходить через точку A (– 3, – 1) і відтинає трикутник площею $S = 2$ кв. од. (див. рисунок).



Знайти:

а) *рівняння прямих l_1 і l_2, які задовольняють умову задачі;*

б) *відстань від початку координат до кожної з цих прямих*;

в) *відстань між точками перетину прямих l_1* і *l_2 з осями координат;*

г) *рівняння прямої, яка проходить через початок координат перпендикулярно до кожної з цих прямих.*

а) Проаналізуємо числові дані. Якщо $S_{\Delta B_3OB_4} \ge S$, то задача має два розв'язки: трикутники B_1OC_1 і OC_2B_2. Якщо $S_{\Delta B_3OB_4} < S$, то задача має три розв'язки.

У нашому випадку задача має два розв'язки: прямі l_1 і l_2. Рівняння прямої шукатимемо у вигляді рівняння прямої у відрізках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Шукана пряма проходить через точку $A\,(-3,-1)$, тому $-\frac{3}{a}-\frac{1}{b}=1$. Водночас площа трикутника, який відтинається в нашому випадку, дорівнює чисельно $\frac{1}{2}ab=2$ (a і b — відрізки, які відтинає пряма на осях координат протилежного знака).

Маємо систему:

$$\begin{cases}\frac{3}{a}+\frac{1}{b}=-1\\ ab=-4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{3}{a}-\frac{a}{4}=-1\\ b=-\frac{4}{a}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}12-a^2=-4a\\ b=-\frac{4}{a}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^2-4a-12=0\\ b=-\frac{4}{a}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; a_1=6, \quad b_1=-\frac{2}{3}$$
$$a_2=-2, \quad b_2=2.$$

Звідси $\frac{x}{-2}+\frac{y}{2}=1$, $\frac{x}{6}+\frac{y}{-2}=1$.

l_1: $x-y+2=0$, l_2: $x-9y=6$.

б) $d_1=\frac{|x_0-y_0-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$;

$$d_2=\frac{|x_0-9y_0-6|}{\sqrt{82}}=\frac{6}{\sqrt{82}}.$$

Відповідь: $\sqrt{2}$; $\frac{6}{\sqrt{82}}$.

в) $C_1B_1=\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{2}$;

$$C_2B_2=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6^2+\frac{4}{9}}=\sqrt{36\frac{4}{9}}.$$

Відповідь: $2\sqrt{2}$; $\sqrt{36\frac{4}{9}}$.

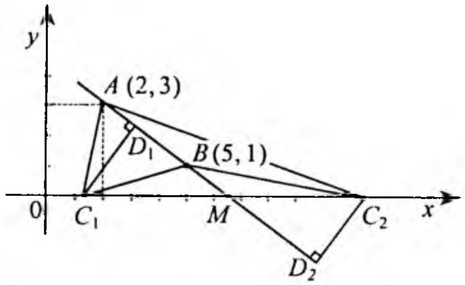
г) Для прямої l_1: $y-kx=0$. Якщо прямі взаємно перпендикулярні, то $1\cdot 1-k(-1)=0$, $k=-1$.

Маємо: $y + x = 0, y = -x$.

2) Для прямої l_2: $y-kx=0$. $1\cdot 9+k\cdot 1=0$, $k=-9$. Маємо: $y + 9x = 0, y = -9x$.

$y = -x, y = -9x$.

Задача 2.2-7



Дві точки A (2, 3), B (5, 1) лежать на прямій.
Знайти:
а) *точку перетину прямої з віссю Ox*;
б) *точку C на осі Ox, таку щоб площа трикутника ABC дорівнювала S* = 5 кв. од.;
в) *відстань від точки C до прямої AB*;
г) *рівняння висоти CD трикутника ABC*;
д) *кут ACB.*

а) Знайдемо рівняння прямої AB як рівняння, що проходить через дві точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \quad \text{де} \quad x_1=x_A=2, \quad y_1=y_A=3, \quad x_2=x_B=5,$$

$y_2=y_B=1$. Маємо:

$$\frac{x-2}{5-2}=\frac{x-2}{1-3}\Rightarrow\frac{x-2}{-2}=\frac{y-3}{-2}\Rightarrow -2x+4=3y-9\Rightarrow AB:\ 2x+3y-13=0\,.$$

Знайдемо точку перетину прямої AB з віссю Ox. Для цього візьмемо в рівнянні прямої $2x+3y-13=0$ значення $y=0$, звідки $2x-13=0$, $x=\frac{13}{2}$.

Отже, точка перетину прямої AB з віссю Ox $M\left(\frac{13}{2};\,0\right)$.

б) Позначимо координати точки C $(x,\,0)$. Тоді площу трикутника обчислимо так:

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1\\ 5 & 1 & 1\\ x & 0 & 1\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}(2+3x-15)=\pm\frac{1}{2}(2x-13).$$

З умови задачі $S=5$. Маємо:

$$\frac{1}{2}\left|2x-13\right|=5\Rightarrow\left|2x-13\right|=10 \quad \begin{cases}2x-13=10\\ -2x+13=10\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=11{,}5\\ x_2=1{,}5.\end{array}\right.$$

Існують дві точки $C_1(1{,}5;\ 0), C_2(11{,}5;\ 0)$.

в) Відстань від точки C до прямої AB знаходимо за формулою

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

У нашому випадку AB: $2x+3y-13=0$, $x_0=x_c$, $y_0=y_c$,

$$C_1D_1=\frac{\left|2\cdot1{,}5+3\cdot0-13\right|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{10}{\sqrt{13}}=\frac{10\sqrt{13}}{13},$$

$$C_2D_2=\frac{\left|2\cdot11{,}2+3\cdot0-13\right|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{10\sqrt{13}}{13}.$$

Відстань від точок C_1 і C_2 до прямої AB дорівнює $\frac{10\sqrt{13}}{13}$.

г) У нашому випадку є дві точки C_1 і C_2, тому має бути два перпендикуляри.

Рівняння перпендикуляра шукаємо у вигляді $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$.
Вектор $\overline{N}=(2,\ 3)$, складений з коефіцієнтів при змінних x і y рівняння $2x+3y-13=0$, перпендикулярний до даної прямої, тому $\frac{m}{2}=\frac{n}{3}$; x_0, y_0 — координати точки C_1 або C_2.

Звідси рівняння прямої C_1D_1:

$$\frac{x-\frac{3}{2}}{2}=\frac{y-0}{3}\Rightarrow 3x-\frac{9}{2}=2y\Rightarrow 6x-4y-9=0\,.$$

Аналогічно — рівняння C_2D_2:

$$\frac{x-\frac{23}{2}}{2}=\frac{y-0}{3}\Rightarrow 3x-6912=2y\Rightarrow 6x-4y-69=0.$$

Рівняння висоти

$$C_1D_1:\ 6x-4y-9=0 \ \text{і}\ C_2D_2:\ 6x-4y-69=0\,.$$

д) Кут ACB визначатимемо як кут між двома векторами $\overline{CA}$ і $\overline{CB}$:

$$\cos\angle AC_1B=\frac{\overline{C_1A}\cdot\overline{C_2B}}{\left|\overline{C_1A}\right|\cdot\left|\overline{C_1B}\right|},$$

де $\overline{C_1A}=(2-1{,}5;\ 3-0)=\left(\frac{1}{2},3\right)$, $\overline{C_1B}=(5-1{,}5;\ 1-0)=\left(\frac{7}{2},1\right)$,

$$\cos\angle AC_1B=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}+3\cdot1}{\sqrt{\frac{1}{4}+9}\cdot\sqrt{\frac{49}{4}+1}}=\frac{\frac{19}{4}}{\sqrt{\frac{13}{4}}\cdot\sqrt{\frac{53}{4}}}=\frac{19}{\sqrt{53\cdot13}}\approx0{,}7238\,,$$

$\angle AC_1B=0{,}7614$ рад.

Аналогічно: $\cos\angle AC_2B=\dfrac{\overline{C_2A}\cdot\overline{C_2B}}{\left|\overline{C_2A}\right|\left|\overline{C_2B}\right|}$,

де $\overline{C_2A}=(2-11{,}5;\ 3-0)=(-9{,}5;3)$, $\overline{C_2B}=(5-11{,}5;\ 1-0)=(-6{,}5;\ 1)$;

$$\cos\angle AC_2B=\frac{-9{,}5\cdot(-6{,}5)+3\cdot1}{\sqrt{9{,}5^2+3^2}\sqrt{6{,}5^2+1}}=\frac{64{,}75}{\sqrt{99{,}25\cdot43{,}25}}=$$

$$=\frac{64{,}75}{\sqrt{4292{,}5625}}=\frac{64{,}75}{65{,}51}=0{,}9883\Rightarrow\angle AC_2B=0{,}1532\ \text{рад.}$$

Відповідь. $\angle AC_1B=0{,}7614$ рад, $\angle AC_2B=0{,}1532$ рад.

Задача 2.2-8. Відомі точки P (4, 2), Q (2, 7), R (–2, 3) — середини сторін трикутника.

Знайти:

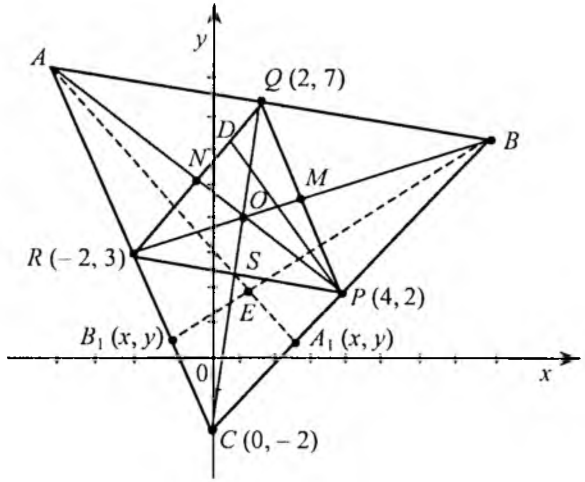
а) *координати вершин трикутника*;

б) *точку перетину медіан трикутника — точку O*;

в) *площу трикутника ABC*;

г) *відстань PD (від точки P до середньої лінії QR)*;

д) *точку перетину висот Q.*



а) Зробимо рисунок. Через точку P проведемо пряму, паралельну середній лінії RQ трикутника. Аналогічно через точку Q проведемо лінію, паралельну прямій RP, і через точку R проведемо пряму, паралельну прямій QP. Точки перетину цих прямих будуть вершинами трикутника ABC. Вершини трикутника можна знайти за допомогою класичного методу як точки перетину сторін трикутника. Тут пропонується інший спосіб. Сполучимо точки R і B. Пряма RB перетинає відрізок QP у точці M. Точка M поділяє відрізок QP навпіл, тому координати точки M такі:

$$x_M=\frac{x_Q+x_P}{2}=\frac{2+4}{2}=3;\quad y_M=\frac{y_Q+y_P}{2}=\frac{7+2}{2}=\frac{9}{2};\quad M\left(3;\frac{9}{2}\right).$$

Відрізок RM поділяється точкою B зовнішньо у відношенні $\lambda=\dfrac{RB}{BM}=-2$. Звідси

$$x_B=\frac{x_R+\lambda x_M}{1+\lambda}=\frac{-2-2\cdot3}{1-2}=8,$$

$$y_B=\frac{y_R+\lambda y_M}{1+\lambda}=\frac{3-2\cdot\frac{9}{2}}{1-2}=6\Rightarrow B(8,\ 6).$$

Аналогічно знаходимо координати точок C і A:

$$C:\ x_S=\frac{x_R+x_P}{2}=\frac{-2+4}{2}=1,\ y_S=\frac{y_S+y_P}{2}=\frac{3+2}{2}=$$
$$=\frac{5}{2},\ C\left(1,\ \frac{5}{2}\right),\ \lambda=\frac{QC}{CS}=-2.$$

$$x_C=\frac{x_Q+\lambda x_S}{1+\lambda}=\frac{2-2\cdot 1}{1-2}=0,\ y_C=\frac{y_Q+\lambda y_S}{1+\lambda}=\frac{7-2\cdot\frac{5}{2}}{1-2}=-2\Rightarrow C(0,\ -2).$$

$$A:\ x_N=\frac{x_R+x_Q}{2}=\frac{-2+2}{2}=0,\ y_N\frac{3+7}{2}=5,\ \ N(0,\ 5),\ \lambda=\frac{PA}{AN}=-2,$$
$$x_A=\frac{x_P+\lambda x_N}{1+\lambda}=\frac{4-2\cdot 0}{1-2}=-4,\ y_A=\frac{2-2\cdot 5}{-1}=8,\ \ A(-4,8).$$

Координати вершин трикутника: $A\ (-4,\ 8)$; $B\ (8,\ 6)$; $C\ (0,\ -2)$.

б) Точка перетину медіан трикутника буде спільною як для трикутника RQP, так і для трикутника ABC. Розглянемо ΔRQP і медіану RM. Точка O поділяє відрізок RM у відношенні $\lambda=\dfrac{RO}{OM}=2.$

Звідси $x_0=\dfrac{x_R+\lambda x_M}{1+\lambda}=\dfrac{-2+2\cdot 3}{1+2}=\dfrac{4}{3}$; $y_0=\dfrac{y_R+\lambda y_M}{1+\lambda}=\dfrac{3+2\frac{9}{2}}{3}=4$.

Координати точки перетину медіан: $O\left(\dfrac{4}{3},4\right)$.

в) Площу трикутника ABC знаходимо за формулою

$$S_{ABC}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_2 & 1\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-4 & 8 & 1\\ 8 & 6 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=$$
$$=\pm\frac{1}{2}(-24-16-64-8)=\pm\frac{1}{2}(-112)=56.$$

Площа трикутника ABC дорівнює 56 кв. од.

г) Знайдемо рівняння QR як рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},\ x_1=x_Q,\ y_1=y_Q,\ x_2=x_R,\ y_2=y_R,$$
$$\frac{x-2}{-2-2}=\frac{y-7}{3-7}\Rightarrow\frac{x-2}{-4}=\frac{y-7}{-4}\Rightarrow x-2=y-7,\ x-y+5=0.$$

Звідси $PD=\dfrac{|x_P-y_P+5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|4-2+5|}{\sqrt{2}}=\dfrac{7}{\sqrt{2}}=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$.

$PD=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$.

д) Точку перетину висот знайдемо як точку перетину прямих AA_1 і BB_1.

1) Рівняння прямої AA_1:

$$\overline{AA_1}\perp\overline{BC},\ \overline{AA_1}=(x+4,\ y-8),\ \overline{BC}=(8-0,\ 6-(-2))=(8,\ 8),$$
$$(\overline{AA_1}\cdot\overline{BC})=0\Rightarrow 8(x+4)+8(y-8)=0\Rightarrow \mathbf{x+y-4=0}.$$

2) Рівняння прямої BB_1:

$$BB_1\perp AC,\ \overline{BB_1}=(x-8,\ y-6),\ \overline{AC}=(0-(-4),\ -2-8)=(4,\ -10),$$
$$(\overline{BB_1}\cdot\overline{AC})=0\Rightarrow 4(x-8)-10(y-6)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x-16-5y+30=0\Rightarrow 2x-5y+14=0.$$

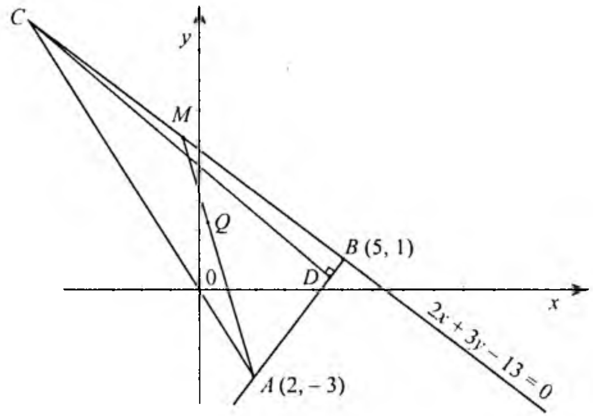
Щоб знайти точку перетину висот, потрібно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases}2x-5y=-14\\ x+y=4\end{cases}\Rightarrow\Delta=\begin{vmatrix}2 & -5\\ 1 & 1\end{vmatrix}=7,\ \ \Delta_1=\begin{vmatrix}-14 & -5\\ 4 & 1\end{vmatrix}=6,$$
$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & -14\\ 1 & 4\end{vmatrix}=22,\ x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{6}{7},\ \ y=\frac{22}{7}.$$

Координати точки перетину висот трикутника ABC: $E\left(\dfrac{6}{7},\ \dfrac{22}{7}\right)$.

Задача 2.2-9. Дано дві вершини $A\ (2,-3)$, $B\ (5,1)$ трикутника ABC, рівняння сторони BC: $2x+3y-13=0$ і медіани AM: $3x+2y-3=0$.

Знайти:
а) *точку перетину медіан*;
б) *тангенс кута CBA;*
в) *рівняння сторони AC;*
г) *рівняння висоти CD, опущеної з вершини C на сторону AB*;
д) *довжину висоти CD*;
е) *площу трикутника ABC.*



а) Знайдемо спочатку точку M перетину медіани AB і сторони BC:

$$\begin{cases} 2x+3y-13=0 \\ 3x+y-3=0 \end{cases};\ \Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=2-9=-7;\ \Delta_1=\begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=13-9=4;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=6-39=-33.$$

Координати точки $M\left(-\frac{4}{7},\ \frac{33}{7}\right)$. Точка Q перетину медіан поділяє відрізок AM у відношенні $\lambda=\frac{AQ}{QM}=2$. Тому

$$x_Q=\frac{x_A+\lambda x_M}{1+\lambda}=\frac{2+2\left(-\frac{4}{7}\right)}{1+2}=\frac{\frac{6}{7}}{3}=\frac{2}{7};$$

$$y_Q=\frac{y_A+\lambda y_M}{1+\lambda}=\frac{-3+2\cdot\frac{33}{7}}{1+2}=\frac{\frac{45}{7}}{3}=\frac{15}{7}.$$

Координати точки перетину медіани $Q\left(\frac{2}{7},\ \frac{15}{7}\right)$.

б) $\operatorname{tg}\angle CBA=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$, де k_1 — кутовий коефіцієнт BC, $k_1=-\frac{2}{3}$;
k_2 — кутовий коефіцієнт сторони AB $k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1-(-3)}{5-2}=\frac{4}{3}$.

Звідси $\operatorname{tg}\angle CBA=\frac{\frac{3}{4}-\left(-\frac{2}{3}\right)}{1-\frac{4}{3}\frac{2}{3}}=\frac{2}{\frac{1}{9}}=18$.

$\operatorname{tg}\angle CBA=18$.

в) Координати точки A відомі. Щоб знайти координати точки C, розглянемо відрізок BC, точка M — поділяє цей відрізок навпіл, точка C — відрізок BM зовнішньо у відношенні $\lambda=\frac{BC}{CM}=-2$. Тому

$$x_C=\frac{x_B+\lambda x_M}{1+\lambda}=\frac{5-2\left(\frac{-4}{7}\right)}{1-2}=\frac{\frac{43}{7}}{-1}=-\frac{43}{7};$$

$$y_C=\frac{y_B+\lambda y_M}{1+\lambda}=\frac{1-2\frac{33}{7}}{1-2}=\frac{-\frac{59}{7}}{-1}=\frac{59}{7}.$$

Координати точки $C\left(-\frac{43}{7},\ \frac{59}{7}\right)$. Рівняння сторони AC шукаємо у вигляді рівняння прямої, яка проходить через дві точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},\ \text{де}\ \ x_1=2,\ y_1=-3,\ x_2=-\frac{43}{7},\ y_2=\frac{59}{7}.$$

$$\frac{x-2}{-\frac{43}{7}-2}=\frac{y+3}{\frac{59}{7}+3}\Rightarrow\frac{x-2}{-\frac{57}{7}}=\frac{y+3}{\frac{80}{7}}\Rightarrow 80x-160=-57y-171.$$

Рівняння сторони AC: $80x+57y+11=0$.

г) Позначимо точку $D(x, y)$. $\overline{CD} \perp \overline{AB} \Rightarrow (\overline{CD} \cdot \overline{AB}) = 0$;

$$\overline{CD} = \left(x + \frac{43}{7},\ y - \frac{59}{7}\right),\ \overline{AB} = (3, 4).$$

Маємо:

$$3\left(x + \frac{43}{7}\right) + \left(y - \frac{59}{7}\right) = 0 \Rightarrow 21x + 129 + 28y - 236 = 0,$$

$$21x + 28y - 107 = 0.$$

Рівняння висоти CD: $21x + 28y - 107 = 0$.

д) Скористаємось формулою

$$d = CD = \frac{|Ax_0 + By_0 + C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

де A, B, C — коефіцієнти прямої AB; $x_0\ y_0$ — координати точки C.

Рівняння AB: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \dfrac{x-2}{5-2} = \dfrac{y+3}{1+3} \Rightarrow \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+3}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4x - 8 = 3y + 9 \Rightarrow 4x - 3y - 17 = 0.$$

$$d = CD = \frac{\left|4\left(-\frac{43}{7}\right) - 3 \cdot \frac{59}{7} - 17\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{\left|\frac{-172 - 177 - 119}{7}\right|}{5} = \frac{468}{35}.$$

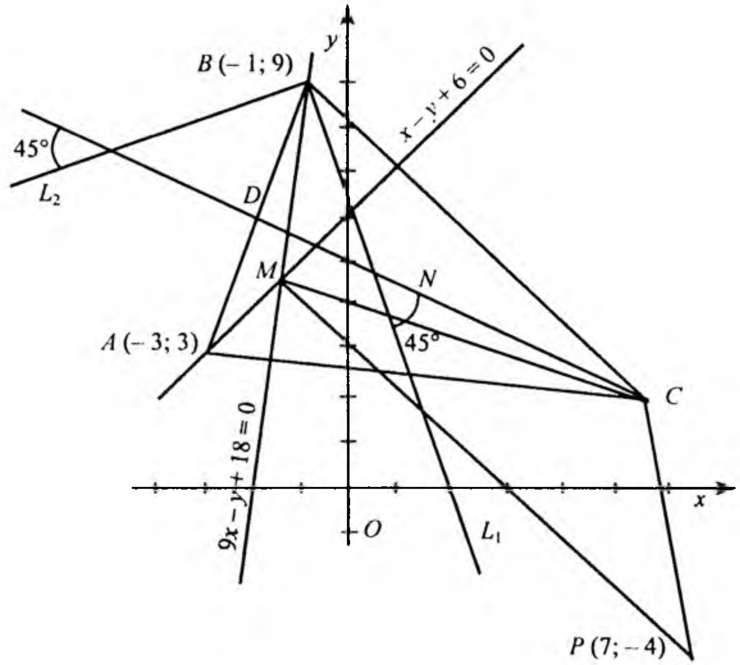
Довжина висоти CD дорівнює $\dfrac{468}{35}$.

е)
$$S_{\Delta ABC} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ -\frac{43}{7} & \frac{59}{7} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 + \frac{129}{7} + \frac{295}{7} + \frac{43}{7} + 15 - \frac{118}{7}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{468}{7} = \frac{234}{7} \approx 33{,}4 \text{ (кв.од.)}.$$

$S_{\Delta ABC} \approx 33{,}4$ кв.од.

Задача 2.2-10. Дано координати вершин $A(-3;\ 3)$ та $B(-1;\ 9)$ трикутника ABC, рівняння двох його висот $x - y + 6 = 0$ та $9x - y + 18 = 0$ і координати точки $P(7; -4)$.



Відкладаємо дані точки $A(-3; 3)$; $B(-1; 9)$ та $P(7; -4)$ (див. рисунок). Будуємо прямі $x - y + 6 = 0$ та $9x - y + 18 = 0$. На цих прямих лежать висоти трикутника, які перетинаються в точці M. Через точки A та B проводимо прямі, перпендикулярні до висот. У точці їх перетину міститься третя вершина C. Через вершину C проводимо пряму CD, на якій лежить медіана CD. Позначаємо на ній точку перетину медіан N. Через вершину B під кутом 45° до медіани CD проводимо дві прямі BL_1 та BL_2. Креслимо трикутник MPC.

1) Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки, має вигляд $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_2}$. Підставивши в це рівняння координати точок A та B, складемо рівняння сторони AB: $\dfrac{y-3}{9-3} = \dfrac{x+3}{-1+3}$, або $3x - y + 12 = 0$.

Кутовий коефіцієнт висоти, що проходить через вершину B, $k = 9$. З умови перпендикулярності висоти та сторони AC знаходимо кутовий коефіцієнт $k_{AC}=-\frac{1}{9}$. Рівняння прямої, що проходить через задану точку, має вигляд $y-y_1=k(x-x_1)$. Підставляючи в це рівняння координати точки A та k_{AC}, складаємо рівняння сторони AB: $y-3=-\frac{1}{9}(x+3)$, або $x+9y-24=0$. Аналогічно знаходимо рівняння сторони BC: $x+y-8=0$.

2) Координати точки C знайдемо, розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} x+9y-24=0 \\ x+y-8=0. \end{cases}$ Звідси $C(6;2)$.

За формулами координат середини відрізка $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ обчислюємо координати середини сторони AB — точки $D(-2;\ 6)$. Тепер складаємо рівняння медіани CD: $\frac{y-2}{6-2}=\frac{x-6}{-2-6}$, або $x+2y-10=0$.

Медіани трикутника в точці перетину поділяються у відношенні 2:1. Звідси випливає, що точка N поділяє відрізок CD у відношенні $\lambda=\frac{CN}{ND}=2$. За формулами поділу відрізка в даному відношенні $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$ $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ обчислюємо координати точки перетину медіан $N\left(\frac{2}{3};\frac{14}{3}\right)$.

3) З формули кута між прямими $\operatorname{tg}\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ знайдемо кутові коефіцієнти прямих BL_1 та BL_2. Для кута між прямими BL_1 та CD пряма BL_1 перша, її кутовий коефіцієнт k_1 невідомий. Пряма CD — друга, її кутовий коефіцієнт $k=-\frac{1}{2}$. Таким чином, $\operatorname{tg}45°=\frac{-\frac{1}{2}-k_1}{1-\frac{1}{2}k_1}$. Звідси $k_1=-3$. Підставляючи в рівняння $y-y_1=k(x-x_1)$ знайдене значення k_1 та координати точки B, знаходимо рівняння прямої BL_1: $3x+y-6=0$.

Для кута між прямими BL_2 та CD пряма CD перша, її кутовий коефіцієнт $k_1=-\frac{1}{2}$ Пряма BL_2 — друга, її кутовий коефіцієнт k_2 невідомий. Таким чином $\operatorname{tg}45°=\frac{k_2+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}k_2}$. Звідси $k_2=\frac{1}{3}$ і рівняння прямої BL_2 має вигляд: $y-9=\frac{1}{3}(x+1)$ або $x-3y+28=0$.

Зауваження. Прямі BL_1 та BL_2 взаємно перпендикулярні, тому кутовий коефіцієнт прямої BL_2 швидше можна було знайти з умови перпендикулярності прямих $k_1k_2=-1$.

4) Координати точки M перетину висот трикутника знайдемо, розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} x-y+6=0 \\ 9x-y+18=0 \end{cases}$. Звідси $M\left(-\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$.

Складемо рівняння сторони MC: $\frac{y-\frac{9}{2}}{2-\frac{9}{2}}=\frac{x+\frac{3}{2}}{6+\frac{3}{2}}$, або $x+3y-12=0$.

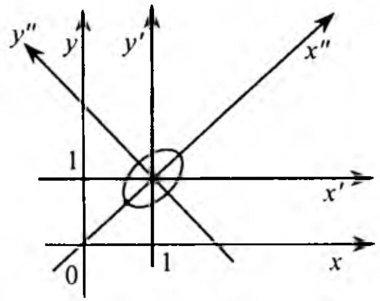
Довжину сторони MC знайдемо за формулою відстані між точками $MC=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{\left(6+\frac{3}{2}\right)^2+\left(2-\frac{9}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{10}}{2}$. Довжину висоти h трикутника MPC знайдемо як відстань від точки P до прямої MC за формулою $h=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Підставляючи сюди коефіцієнти рівняння прямої MC та координати точки $P(7;\ -4)$, дістаємо: $h=\frac{|1\cdot 7-3\cdot 4-12|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{17}{\sqrt{10}}$. Тепер обчислюємо площу трикутника MPC: $S=\frac{1}{2}MC\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\frac{5\sqrt{10}}{2}\cdot\frac{17}{\sqrt{10}}=\frac{85}{4}$.

Зауваження. Площу трикутника MPC можна було знайти за формулою $S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$.

Задача 2.3. Криву другого порядку задано рівнянням

$$3x^2-4xy+4y^2-2x-4y+2=0.$$

Визначити тип цієї кривої, записати її канонічне рівняння та побудувати в старій системі координат.



Для розв'язання задачі знайдемо визначник:

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=12-4=8>0.$$

Згідно з класифікацією кривих другого порядку маємо еліпс. Координати центра нової системи координат знайдемо за формулами:

$$x_0=\frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\delta}=\frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{8}=1;\ y_0=\frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}}{\delta}=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}}{\delta}=1$$

$O'(1,\ 1)$.

Знайдемо $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=-8.$

Кут α, на який потрібно повернути осі системи координат відносно точки O', знайдемо зі співвідношення:

$$\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{-4}{3-4}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}4.$$

Значення коефіцієнтів у $a_{11}^{\bullet}$ і $a_{22}^{\bullet}$ знайдемо за формулами:

$$a_{11}^{\bullet}=a_{11}\cos^2\alpha+2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha+a_{22}\sin^2\alpha=\frac{1}{2}\left(7-\sqrt{17}\right),$$

$$a_{22}^{\bullet}=a_{11}\sin^2\alpha-2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha-a_{22}\cos^2\alpha=\frac{1}{2}\left(7+\sqrt{17}\right).$$

Таким чином, рівняння еліпса в канонічній формі набирає вигляду: $a_{11}^{\bullet}(x'')^2+a_{22}^{\bullet}(y'')^2+\dfrac{\Delta}{\delta}=0$, або $\dfrac{16x''^2}{7+\sqrt{17}}+\dfrac{16y^2}{7-\sqrt{17}}=1$.

Задача 2.4. Знайти проекцію точки $A\,(2,-1,3)$ на площину $x-2y+3z+15=0$.

Запишемо рівняння перпендикуляра до площини, що проходить через точку A. За напрямний вектор цієї прямої можна взяти нормальний вектор площини. Дістанемо

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{3}.$$

Знайдемо тепер точку перетину цього перпендикуляра і площини. Для цього запишемо параметричне рівняння прямої:

$$x=t+2;\ y=-2t-1;\ z=3t+3.$$

Підставивши значення x, y, z у рівняння площини, дістанемо $t+2+2(2t+1)+3(3t+3)+15=0$, звідки $t=-2$.

Координати проекції точки A на площину: $x=0$, $y=3$, $z=-3$.

Задача 2.4-1. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $A(2;-1;3)$ та через пряму $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+3}{1}$.

Точка $M_0(0;\ 1;\ -3)$ лежить на прямій. Вектори $\vec{S}=(2;-1;1)$ і $\overrightarrow{AM}(-2;2;-6)$ колінеарні шуканій площині, тому вектор $\vec{N}=\vec{S}\times\overrightarrow{AM}$ буде перпендикулярним до шуканої площини.

$$\vec{N}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -6 \end{vmatrix}=4\vec{i}+10\vec{j}+2\vec{k}.$$

Отже, рівняння шуканої площини: $4(x-2)+10(y+1)+2(z-3)=0$, або $4x+10y+2z-4=0$.

Задача 2.4-2. Знайти проекцію прямої $\frac{x-1}{-6}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+6}{-4}$ на площину $-x+2y-3z+5=0$.

Знайдемо точку перетину прямої і площини. Для цього перейдемо до канонічного рівняння прямої у просторі $x=-6t+1$, $y=5t+3$, $z=-4t-6$. Далі $t=\frac{-1+6+18+5}{6+10+12}=1$. Точка перетину $A(7;\ -2;\ -2)$.

Як і в задачі 2.4, знайдемо проекцію точки $(1;\ 3;\ -6)$, що лежить на прямій, на площину $-x+2y-3t+5=0$. $B(3;\ -1;\ 0)$. Рівняння проекції запишемо як рівняння прямої, що проходить через точки A і B:

$$\frac{x-3}{7-3}=\frac{y+1}{-2+1}=\frac{z}{-2}\text{, або } \frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{-2}.$$

Задача 2.4-3. Через пряму $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{-1}$ провести площину паралельно площині $x+y+8z+11=0$.

Для того щоб задача мала розв'язок, пряма і площина мають бути паралельними, тобто $Am+Bn+Cp=0$. Перевіримо цю умову: $3\cdot 1+5\cdot 1-8\cdot 1=0$. Тоді нормальний вектор шуканої площини $\vec{N}=(1;\ 1;\ 8)$, а точка, через яку вона проходить, $A(2;\ 0;\ -1)$. Тому її рівняння можна записати як $x-2+y+8(z+1)=0$, або $x+y+8z+6=0$.

Задача 2.4-4. Знайти відстань точки $A(2;\ -1;\ 4)$ до прямої $\frac{x}{-3}=\frac{y+2}{0}=\frac{z+1}{4}$.

Шукану відстань можна знайти як довжину висоти паралелограма, побудованого на векторах $\overline{M_0A}$ і $\vec{S}$. Ураховуючи, що площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку цих векторів, знайдемо висоту з формули:

$$d=\frac{\left|\overline{M_0A}\times\vec{S}\right|}{\left|\vec{S}\right|};\ \overline{M_0A}\times\vec{S}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 3\\ -3 & 0 & 4\end{vmatrix}=-12\vec{i}-17\vec{j}-9\vec{k};$$

$$\overline{M_0A}\times\vec{S}=\sqrt{144+289+81}=\sqrt{514};\ \left|\vec{S}\right|=\sqrt{9+16}=5.$$

Звідси $d=\frac{\sqrt{514}}{5}$.

Задача 2.4-5. На прямій $\frac{x}{1}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-3}{-1}$ знайти точку, найближчу до точки $A(3;\ 2;\ 6)$.

Множина всіх перпендикулярів до прямої лежатиме в площині, яка перпендикулярна до прямої і проходить через точку A. Запишемо рівняння цієї площини:

$$x-3+2(y-2)-(z-6)=0 \text{ або } x+2y-z-1=0.$$

Знайдемо точку перетину площини і прямої $x=t$, $y=2t-7$, $z=-t+3$; $t+2(2t-7)+t-3-1=0;\ t=3$.

Найближча точка має координати $B(3;\ -1;\ 0)$.

Задача 2.4-6. Знайти точку, симетричну точці $A(4;\ 3;\ 10)$ відносно прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$.

Так само, як у задачі 2.4.-5, знайдемо координати найближчої точки до A на прямій $B(3;\ 6;\ 8)$. Координати симетричної точки визначимо за формулою поділу відрізка навпіл.

Дістанемо точку $C(2;\ 9;\ 6)$.

Задача 2.4-7. Знайти відстань між двома паралельними прямими $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}$ і $\frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$.

Запишемо рівняння площини, яка проходить через точку на одній із прямих перпендикулярно до цієї прямої: $3(x-2)+4(y+1)+2z=0;\ 3x+4y+2z-2=0$.

Знайдемо точку перетину цієї площини з іншою прямою $B(4;\ -3;\ 1)$. Знайдемо відстань точки $A(2;\ -1;\ 0)$, що лежить на першій прямій і в перпендикулярній площині, до точки B:

$$d=\sqrt{4+4+1}=3.$$

Отже, $d=3$.

Задача 2.4-8. Знайти найкоротшу відстань між двома прямими, що не перетинаються:

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2} \text{ і } \frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+1}{5}.$$

Відстань між такими прямими можна знайти як відстань між площиною, що проходить через одну пряму паралельно іншій прямій, і точкою на цій другій прямій.

Припустимо, $Ax+By+Cz+D=0$ — рівняння шуканої площини. Умови того, що пряма $\frac{x-5}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$ лежить у площині і ця площина паралельна іншій прямій, запишуться у вигляді системи:

$$\begin{cases} 5A-2B+D=0 \\ 3A+B+2C=0 \\ 3A+4B+5C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=-3 \\ C=3 \\ D=1. \end{cases}$$

Отже, рівняння шуканої площини має вигляд: $-x-3y+3z+1=0$. Відстань від точки $A(3;\ 1;\ -1)$ до площини знайдемо за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|-3-3-3+1|}{\sqrt{1+9+9}}=\frac{8}{\sqrt{19}}.$$

Задача 2.4-9. Дано координати точок $M(1;-4;-5)$, $N(1;-6;-6)$, $P(-6;-4;1)$ і $S(5;8;6)$ — вершин піраміди *SMNPQ*, в основі якої лежить паралелограм *MNPQ*.

Знайти:
1) Площу грані *MSN*.
2) Об'єм та висоту піраміди.
3) Рівняння площини грані *MSN*.
4) Проекцію точки *Q* на площину грані *MSN*.
5) Проекцію точки *M* на бічне ребро *SP*.
6) Рівняння площини, яка проходить через ребро *PQ* перпендикулярно до площини грані *MSN*.
7) Рівняння площини, яка проходить через точку *Q* перпендикулярно до площин граней *MSN* та *NSP*.

Знайдемо координати вершини *Q*. Вектори $\overline{MN}$ та $\overline{QP}$ рівні, тому $(0;-2;-1)=(-6-x;-4-y;1-z)$. Звідси $x=-6$, $y=-2$, $z=2$. Отже, $Q(-6;-2;2)$.

1) Знайдемо координати векторів $\overline{MN}$ та $\overline{MS}$:

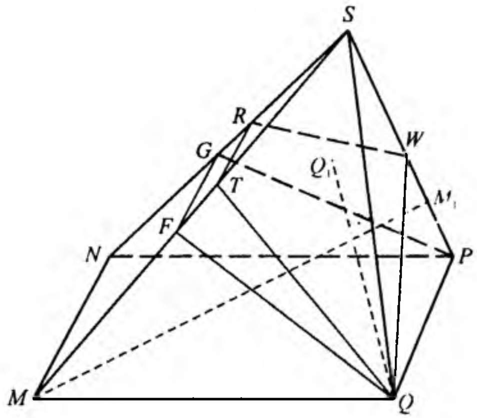
$$\overline{MN}=(0;-2;-1),\ \overline{MS}=(4;12;11).$$

Обчислимо векторний добуток цих векторів:

$$\overline{MN}\times\overline{MS}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -2 & -1 \\ 4 & 12 & 11 \end{vmatrix}=-10\bar{i}-4\bar{j}+8\bar{k}.$$

Тепер знаходимо площу грані *MSN*:

$$S_{MSN}=\frac{1}{2}\sqrt{(-10)^2+(-4)^2+8^2}=3\sqrt{5}.$$



2) Знайдемо координати вектора $\overline{MQ}=(-7;2;7)$. Тепер обчислимо об'єм піраміди:

$$V=2\cdot\frac{1}{6}\left|\overline{MN}\ \overline{MS}\ \overline{MQ}\right|=\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 4 & 12 & 11 \\ -7 & 2 & 7 \end{vmatrix}=\frac{118}{3}.$$

Площа основи

$$S_{MNPQ}=\left|\overline{MN}\times\overline{MQ}\right|=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -2 & -1 \\ -7 & 2 & 7 \end{vmatrix}=\left|-12\bar{i}+7\bar{j}-14\bar{k}\right|=\sqrt{389}.$$

Знаючи об'єм піраміди та площу її основи, знайдемо висоту піраміди

$$H = \frac{3V}{S} = \frac{118}{\sqrt{389}} = 5{,}98\,.$$

3) Складемо рівняння площини, що проходить через точки $M(1;-4;-5)$, $N(1;-6;-6)$ та $S(5;8;6)$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+4 & z+5 \\ 0 & -2 & -1 \\ 4 & 12 & 11 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Звідси дістанемо рівняння площини грані MSN: $5x + 2y - 4z - 17 = 0$.

4) Складемо рівняння площини грані NSP:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+6 & z+6 \\ 4 & 14 & 12 \\ -7 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0\,,$$

або $37x - 56y + 53z - 55 = 0$. Щоб знайти проекцію точки Q на цю площину, запишемо рівняння прямої, яка проходить через точку Q перпендикулярно до площини, і знайдемо точку перетину прямої та площини. Напрямний вектор прямої QQ_1 дорівнює $\bar{s} = (37;-56;53)$. Її рівняння $\dfrac{x+6}{37} = \dfrac{y+2}{-56} = \dfrac{z-2}{53}$.

Координати точки Q_1 знайдемо із системи рівнянь

$$\begin{cases} 37x - 56y + 53z - 55 = 0, \\ \dfrac{x+6}{37} = \dfrac{y+2}{-56} = \dfrac{z-2}{53}. \end{cases}$$

Перейдемо від канонічних рівнянь прямої до параметричних:

$$\begin{cases} 37x - 56y + 53z - 55 = 0, \\ x = 37t - 6, \\ y = -56t - 2, \\ z = 53t + 2. \end{cases}$$

Звідси $t = \dfrac{59}{7314} = 0{,}008$; $x = -5{,}70$; $y = -2{,}45$; $z = 2{,}43$. Таким чином, $Q_1(-5{,}70;-2{,}45;2{,}43)$.

5) Напрямний вектор прямої SP дорівнює $\bar{s} = \overline{SP} = (11;12;5)$. Її рівняння $\dfrac{x-5}{11} = \dfrac{y-8}{12} = \dfrac{z-6}{5}$. Складемо рівняння площини, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої SP. Її вектор нормалі $\bar{n} = (11;12;5)$, тому рівняння площини має вигляд: $11(x-1) + 12(y+4) + 5(z+5) = 0$, або $11x + 12y + 5z + 62 = 0$. Точку перетину цієї площини та прямої SP знайдемо із системи

$$\begin{cases} 11x + 12y + 5z + 62 = 0, \\ \dfrac{x-5}{11} = \dfrac{y-8}{12} = \dfrac{z-6}{5}. \end{cases}$$

Звідси $t = -\dfrac{243}{290} = -0{,}838$; $x = -4{,}22$; $y = -2{,}06$; $z = 1{,}81$. Таким чином, $M_1(-4{,}22;-2{,}06;1{,}81)$.

6) Нехай точка $K(x;y;z)$ — довільна точка шуканої площини $QFGP$. Тоді вектори $\overline{PK} = (x+6;y+4;z-1)$, $\overline{PQ} = (0;\,2;\,1)$ та вектор нормалі площини MSN $\bar{n}_1 = (37;-56;53)$ — компланарні. Тому їхній мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} x+6 & y+4 & z-1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0\,,\ \text{або}\ 2x - y + 2z + 6 = 0\,.$$

7) 1-й спосіб. Нехай точка $L(x;y;z)$ — довільна точка шуканої площини. Тоді вектор $\overline{QL} = (x+6;y+2;z-2)$, вектор нормалі площини MSN $\bar{n} = (5;2;-4)$ та вектор нормалі площини NSP $\bar{n}_1 = (37;-56;53)$ — компланарні. Тому їхній мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} x+6 & y+4 & z-1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0\,,\ \text{або}\ 2x - y + 2z + 6 = 0\,.$$

2-й спосіб. Якщо площина $QTRW$ перпендикулярна до площин MSN та NSP, то вона перпендикулярна до лінії їх перетину NS. Тому вектором нормалі площини $QTRW$ є вектор $\overline{NS} = (4;14;12)$. Таким чином, рівняння площини $QTRW$ має вигляд $4(4x+6) + 14(y+2) + 12(z-2) = 0$, або $2x + 7y + 6z + 14 = 0$.

Задача 3.1.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{A_1x^4+B_1x^3+C_1x^2+D_1x+F_1}{A_2x^4+B_2x^3+C_2x^2+D_2x+F_2}$.

Правило:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{якщо } n=m,\\ 0, & \text{якщо } n<m,\\ \infty, & \text{якщо } n>m.\end{cases}$$

Приклад 1.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{21x^4+2x^3+x^2+1}{x^3+7x^2+10x-3}$.

У результаті безпосереднього підставлення НВВ у чисельник і знаменник даного дробу прямують до нескінченності. Маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Для відшукання границі необхідно чисельник і знаменник поділити на старший степінь x (у даному випадку — на x^4) і врахувати, що якщо $x\to\infty$, то $\dfrac{c}{x^n}\to 0$, де c — стала величина.

Остаточно маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{21x^4+2x^3+x^2+1}{x^3+7x^2+10x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{21+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{x^2}+\dfrac{10}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}}=\left[\frac{21}{0}\right]=\infty.$$

Відповідь. ∞.

Приклад 2.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+1}{x^4-7x^2+3}$.

Безпосереднє підставлення дає невизначеність типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Розкриємо невизначеність (див. приклад 1). Маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{x^4-7x^2+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}{1-\dfrac{7}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}}=\left[\frac{0}{1}\right]=0.$$

Відповідь. 0.

Приклад 3.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+5x^2+7x-3}{6x^4+3x^3+10x-20}$.

Безпосереднє підставлення дає невизначеність типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Розкриємо невизначеність (див. приклад 2). Маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+5x^2+7x-3}{6x^4+3x^3+10x-20}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{1+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}}{6+\dfrac{3}{x}+\dfrac{10}{x^3}-\dfrac{20}{x^4}}=\frac{1}{6}.$$

Відповідь. $\dfrac{1}{6}$.

Приклад 4.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{25x^4+10x^3+x^2+5}{21x^3+15x^2+7x-1}$.

Безпосереднє підставлення замість x значення, до якого прямує ця змінна (у даному випадку $x=-1$), дає:

$$\lim_{x\to -1}\frac{25x^4+10x^3+x^2+5}{21x^3+15x^2+7x-1}=\frac{25(-1)^4+10(-1)^3+(-1)^2+5}{21(-1)^3+15(-1)^2+7(-1)-1}=$$

$$=\frac{25-10+1+5}{-21+15-7-1}=-\frac{21}{14}=-\frac{3}{2}.$$

Відповідь. $-\dfrac{3}{2}$.

Приклад 5.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^4+x^3-6x^2+x+3}{2x^3+11x^2+18x+9}$.

Безпосереднє підставлення дає невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

У цьому випадку необхідно многочлен чисельника і многочлен знаменника поділити на двочлен $x - x_0$ (для даного прикладу на $x + 3$):

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3-6x^2+x+3 & x+3 \\ \underline{x^4+3x^3} & \overline{x^3-2x^2+1} \\ \quad -2x^3-6x^2 & \\ \quad \underline{-2x^3-6x^2} & \\ \qquad\quad x+3 & \\ \qquad\quad \underline{x+3} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 2x^3+11x^2+18x+9 & x+3 \\ \underline{2x^3+6x^2} & \overline{2x^2+5x+3} \\ \quad 5x^2+18x & \\ \quad \underline{5x^2+15x} & \\ \qquad 3x+9 & \\ \qquad \underline{3x+9} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Маємо:

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^4+x^3-6x^2+x+3}{2x^3+11x^2+18x+9}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x^3-2x^2+1)}{(x+3)(2x^2+5x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{x^3-2x^2+1}{2x^2+5x+3}=\frac{(-3)^3-2(-3)^2+1}{2(-3)^2+5(-3)+3}=\frac{-27-18+1}{18-15+3}=-\frac{44}{6}=-\frac{22}{3}.$$

Відповідь. $-\dfrac{22}{3}$.

Задача 3.1.-1.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Особливі границі.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ — перша особлива границя.

Границі — наслідки першої особливої границі:

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$. 2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=1$. 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg}x}=1$. 4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\alpha x}{\operatorname{tg}\beta x}=\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Зауваження. За допомогою першої особливої границі та її наслідків можна досліджувати невизначеності типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ для виразів, що містять тригонометричні функції.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ — друга особлива границя.

Границі — наслідки другої особливої границі:

1. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab}$. 4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

Зауваження. За допомогою другої особливої границі та її наслідків можна досліджувати невизначеності типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]^x$, $\left[1^\infty\right]$.

Означення. *Дві нескінченно малі величини* $\alpha(x)$ *та* $\beta(x)$ *називаються еквівалентними, якщо при* $x\to a$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

При дослідженні відношення нескінченно малих величин їх можна заміновати еквівалентними.

Виходячи з наслідків першої та другої особливих границь, можна записати таку шкалу еквівалентності нескінченно малих величин при $x\to0$:

$x\sim\sin x\sim\operatorname{tg}x\sim\arcsin x\sim\operatorname{arctg}x\sim e^x-1\sim\ln(x+1)$.

Приклад 6.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}7x-\sin3x}{15x}$.

Безпосереднє підставлення дає невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Спростимо вираз за допомогою тотожних перетворень і застосуємо першу особливу границю.

Дістаємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}7x-\sin 3x}{15x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}7x}{15x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{15x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\cos 7x\,15x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{15x}=\frac{1}{15}\lim_{x\to 0}\frac{7\sin 7x}{7x}-\frac{1}{15}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=$$

$$=\frac{7}{15}-\frac{3}{15}=\frac{4}{15}.$$

Відповідь. $\frac{4}{15}$.

Приклад 7.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

Безпосереднє підставлення дає невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$. Помножимо і поділимо знаменник і чисельник даного дробу на відповідні спряжені вирази. Скористаємось формулою: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+16}-4\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+4-4\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(x^2+16-16\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\frac{8}{4}=2.$$

Відповідь. 2.

Приклад 8.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\arcsin(1-4x)}{16x^2-1}$.

Безпосереднє підставлення дає невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Введемо заміну $x=\frac{1-\sin y}{4}$. Якщо x прямує до $\frac{1}{4}$, то y прямує до 0: $y=\arcsin(1-4\cdot\frac{1}{4})=0$.

Маємо:

$$\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\arcsin(1-4x)}{16x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\arcsin(1-4x)}{(4x-1)(4x+1)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{-\sin y\left(\frac{4(1-\sin y)}{4}+1\right)}=$$

$$=-\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y(2-\sin y)}=-\lim_{y\to 0}\frac{1}{2-\sin y}=-\frac{1}{2}.$$

Відповідь. $-\frac{1}{2}$.

Зауваження. Невизначеності типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ та $\left[\frac{0}{0}\right]$ зручно розкривати, користуючись правилом Лопіталя:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тобто необхідно знайти похідну від чисельника і похідну від знаменника дробу, а потім обчислити здобуту границю безпосереднім підставленням.

Приклад 9.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}-2\cos x}{\text{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$.

🔑 Безпосереднє підставлення дає невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$. Знайдемо границю за допомогою правила Лопіталя:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}-2\cos x}{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\left(\sqrt{2}-2\cos x\right)'}{\left(\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x}{\dfrac{1}{\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(2\sin x\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,1 = \sqrt{2}.$$

Відповідь. $\sqrt{2}$.

Задача 3.1-2.
Знайти границю $\lim\limits_{x\to\beta} \varphi(x)^{\psi(x)}$.

> Невизначеності типу $[\infty-\infty]$, $[0\cdot\infty]$, $[0^{\infty}]$, $[0^0]$ шляхом тотожних перетворень зводять до невизначеностей типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ або $\left[\frac{0}{0}\right]$ та розкривають за допомогою методів, розглянутих у попередніх прикладах.

Приклад 10.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{x^2+1}\right)^{x+3}$.

🔑 Безпосереднє підставлення дає невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{\infty}$. Знайдемо границю основи (див. приклад 2).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x+1}{x^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 3,$$ що не приводить до невизначеності: $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^{x+3} = \infty$.

Відповідь. ∞.

Приклад 11.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+7}{3x+1}\right)^{5x-2}$.

🔑 Безпосереднє підставлення дає невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{\infty}$. Знайдемо границю основи (див. приклад 2):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+7}{3x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{7}{x}}{3+\frac{1}{x}} = \frac{2}{3},$$ що не приводить до невизначеності: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{5x-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\infty} = 0$.

Відповідь. 0.

Приклад 12.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x-1}{2x^2-2x+1}\right)^{\frac{x+3}{3}}$.

🔑 Безпосереднє підставлення дає невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{\infty}$. Знайдемо границю основи:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-1}{2x^2-2x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Маємо невизначеність типу 1^{∞}, котру розкриваємо за допомогою другої особливої границі:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3x-1}{2x^2-2x+1}\right)^{\frac{x+3}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x^2+3x-1}{2x^2-2x+1}-1\right)^{\frac{x+3}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x^2+3x-1-2x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}\right)^{\frac{x+3}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5x-2}{2x^2-2x+1}\right)^{\frac{x+3}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x^2-2x+1}{5x-2}}\right)^{\frac{2x^2-2x+1}{5x-2}\cdot\frac{5x-2}{2x^2-2x+1}\cdot\frac{x+3}{3}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{(5x-2)(x+3)}{3(2x^2-2x+1)}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+13x-6}{3(2x^2-2x+1)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5+\frac{13}{x}-\frac{6}{x^2}}{3\left(2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}=e^{\frac{5}{6}}.$$

Відповідь. $e^{\frac{5}{6}}$.

Приклад 13.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$.

🔑 Безпосереднє підставлення дає невизначеність типу $[\infty-\infty]$. Помножимо та поділимо вираз на спряжений:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+5x}+x\right)}{\sqrt{x^2+5x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+5x-x^2\right)}{\sqrt{x^2+5x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2+5x}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+1}=\frac{5}{2}.$$

Відповідь. $\frac{5}{2}$.

Приклад 14.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(1-2x)\operatorname{tg}\pi x$.

🔑 Безпосереднє підставлення дає невизначеність типу $[0\cdot\infty]$.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}(1-2x)\operatorname{tg}\pi x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1-2x}{\operatorname{ctg}\pi x}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Розкриємо невизначеність за допомогою правила Лопіталя:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1-2x}{\operatorname{ctg}\pi x}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(1-2x)'}{(\operatorname{ctg}\pi x)'}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{-2}{-\frac{\pi}{\sin^2\pi x}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2\sin^2\pi x}{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

Відповідь. $\frac{2}{\pi}$.

Приклад 15.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to0}(x)^{\operatorname{tg}x}$.

🔑 Безпосереднє підставлення дає невизначеність типу $[0^0]$. Припустимо $\lim\limits_{x\to0}(x)^{\operatorname{tg}x}=y$, тоді $\ln y=\ln\lim\limits_{x\to0}x^{\operatorname{tg}x}$; $\ln y=\lim\limits_{x\to0}\ln x^{\operatorname{tg}x}$; $\ln y=\lim\limits_{x\to0}\operatorname{tg}x\ln x$.

$$\lim_{x\to0}\operatorname{tg}x\ln x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to0}\frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg}x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2x}}=-\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{(\sin^2x)'}{(x)'}=-\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\cos x}{1}=0.$$

$$\ln y=0;\quad y=1.$$

Відповідь. 1.

Неперервність функції

Означення. Функція $y = f(x)$ **називається неперервною в точці** x_0**,** якщо:

а) вона існує в цій точці;

б) існують лівостороння та правостороння границі, що рівні між собою і дорівнюють значенню функції в цій точці:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0).$$

Якщо хоча б одна з умов не виконується, то функція називається *розривною в точці* x_0, а сама точка — *точкою розриву*.

Розрізняють такі типи розривів:

1. *Розрив першого роду*. Якщо існують скінченні односторонні границі, але вони не рівні між собою:

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = C_1$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = C_2$, $C_1 \neq C_2$, $|C_1 - C_2|$ називається *стрибком функції*.

2. *Усувний розрив першого роду*. Якщо існують скінченні та рівні між собою односторонні границі, але вони не дорівнюють значенню функції в цій точці:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0).$$

Для усунення розриву можна функцію довизначити в точці x_0.

3. *Розрив другого роду*. Якщо одна або обидві односторонні границі не існують (зокрема, дорівнюють нескінченності), то розрив у цій точці називають *розривом другого роду*.

Задача 3.2. Дослідити функцію $y = f(x)$ на неперервність. Знайти точки розриву, якщо вони існують. Дослідити їхній характер, побудувати схематично графік функції.

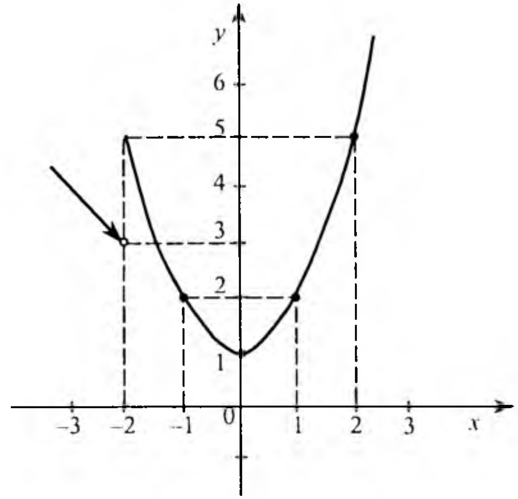
Приклад 1.

Дослідити на неперервність та знайти точки розриву функції:

$$y = \begin{cases} -x+3, & \text{якщо } x < -2; \\ 3, & \text{якщо } x = -2; \\ x^2+1, & \text{якщо } x > -2. \end{cases}$$

Функція визначена на множині дійсних чисел. Дослідимо поводження функції в точці $x = -2$ та знайдемо односторонні границі: $\lim\limits_{x\to-2-0}(-x+3) = 2+3 = 5$, $\lim\limits_{x\to-2+0}(x^2+1) = 5$. Односторонні границі рівні між собою, але не дорівнюють значенню функції в цій точці: $f(-2) = 3$.

Маємо усувний розрив першого роду. Якщо довизначити $f(-2) = 5$, то функція стане неперервною. Графік функції зображено на рисунку.



Приклад 2.

Дослідити на неперервність та знайти точки розриву функції

$$y = \frac{x^2-4}{|x-2|}.$$

Функція визначена на множині дійсних чисел, окрім точки $x = 2$. Якщо $x < 2$, то $|x-2| = -(x-2)$, якщо $x > 2$, то $|x-2| = x-2$, тому

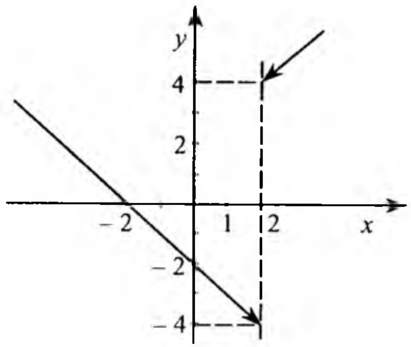
$$y = \begin{cases} \dfrac{(x-2)(x+2)}{-(x-2)} = -(x+2), & x < 2; \\ \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = x+2, & x > 2. \end{cases}$$

Обчислимо односторонні границі функції при $x \to 2$:

$$\lim_{x\to 2-0}\left(-(x+2)\right)=-4; \qquad \lim_{x\to 2+0}(x+2)=4.$$

Односторонні границі існують, але не рівні між собою. У цій точці маємо неусувний розрив першого роду.

Графік функції зображено на рисунку.



Приклад 3.

Дослідити на неперервність та знайти точки розриву функції

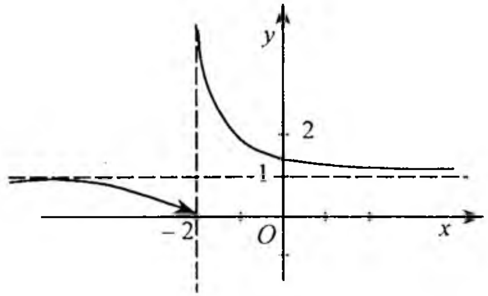
$$y = 2^{\frac{1}{x+2}}.$$

Функція не визначена в точці $x = -2$. З'ясуємо тип розриву. Для цього знайдемо лівосторонню та правосторонню границі функції в цій точці:

$\lim\limits_{x\to 2-0} 2^{\frac{1}{x+2}} = 0$, оскільки при $x < -2$ значення виразу $x + 2$ — нескінченно мала від'ємна величина. Тоді $\dfrac{1}{x+2}$ — нескінченно велика від'ємна величина. Аналогічно при $x > -2$ значення виразу $x + 2$ — нескінченно мала додатна величина, а $\dfrac{1}{x+2}$ — нескінченно велика додатна величина, тому $\lim\limits_{x\to 2-0} 2^{\frac{1}{x+2}} = +\infty$. Отже, одна з границь не існує (зокрема, дорівнює нескінченності), тобто в точці $x = -2$ маємо розрив другого роду.

Для побудови графіка функції знайдемо границю, якщо $x \to \infty$.

$\lim\limits_{x\to\infty} 2^{\frac{1}{x+2}} = 1$, отже, $y = 1$ — горизонтальна асимптота. Графік функції схематично зображено на рисунку.



Розділ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Диференціювання явно заданих функцій

Нехай x_1 та x_2 — два значення аргументу, а $y_1 = f(x_1)$ та $y_2 = f(x_2)$ — відповідні значення функції $y = f(x)$.

Тоді різниця $\Delta x = x_2 - x_1$ називається ***приростом аргументу***, а різниця $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$ — ***приростом функції на сегменті*** $[x_1, x_2]$.

> ***Похідною*** функції $y = f(x)$ за аргументом x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля:
>
> $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Геометрично похідна являє собою кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці x:

$$y' = \operatorname{tg}\alpha = k\ .$$

Знаходження похідної називається ***диференціюванням функції***.

Формули диференціювання основних функцій

1. $(x^m)' = mx^{m-1}$.
2. $(a^x)' = a^x \ln a$.
3. $(e^x)' = e^x$.
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
6. $(\sin x)' = \cos x$.
7. $(\cos x)' = -\sin x$
8. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
12. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Основні правила диференціювання

> Нехай $c = \text{const}$; $u = u(x)$, $v = v(x)$ — диференційовні функції, тоді:
>
> 1) $c' = 0$; 2) $x' = 1$; 3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; 4) $(cu)' = c \cdot u'$; 5) $(uv)' = u'v + uv'$; 6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$; 7) якщо $y = f(u)$, $u = u(x)$ $(y = f(u(x)))$, де для функцій $f(u)$ та $u(x)$ існують похідні, тоді $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ (правило диференціювання складеної функції).
>
> Функція $y = f(u)$, де $u = u(x)$, називається **складеною функцією**, або **суперпозицією функцій** $f(u)$ та $u(x)$.

Задача 4.1. Знайти похідну y'_x функції $y = f(ax+b) f(\varphi(u))$, якщо $f(x) = \sin\sqrt{x}$, $\varphi(x) = x^3$, $\psi(x) = \ln(3x+5)$, $u(x) = \sqrt{x}$, $a = 2$, $b = 1$.

Запишемо функціональну залежність $y = y(x)$ в явному вигляді:

$$y(x) = \sin\sqrt{2x+1}\ \ln^3\left(3\sqrt{x}+5\right).$$

Звідси:

$$y'(x) = \left(\sin\sqrt{2x+1}\right)'_x \ln^3\left(3\sqrt{x}+5\right) + \sin\sqrt{2x+1}\left(\ln^3\left(3\sqrt{x}+5\right)\right)'_x =$$

$$= \cos\sqrt{2x+1}\ \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} 2\ln^3\left(3\sqrt{x}+5\right) +$$

$$+ \sin\sqrt{2x+1}\ 3\ln^2\left(3\sqrt{x}+5\right) \frac{1}{3\sqrt{x}+5}\ \frac{3}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \ln^2\left(3\sqrt{x+5}\right)\left(\frac{\cos\sqrt{2x+1}\ln\left(3\sqrt{x}+5\right)}{\sqrt{2x+1}} + \frac{9\sin\sqrt{2x+1}}{2\left(3\sqrt{x}+5\right)\sqrt{x}}\right).$$

Дослідження функцій і побудова їхніх графіків

Функція $y = f(x)$ називається *зростаючою на проміжку*, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції (якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$); функція називається *спадною на проміжку*, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції (якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$).

Ознаки зростання та спадання функції

Теорема 1 (необхідна умова зростання (спадання) функції):

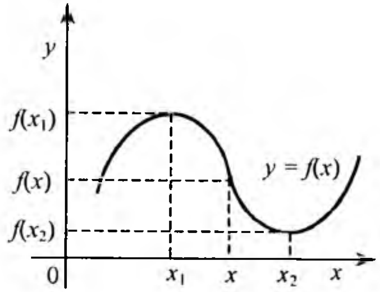
1. Якщо диференційовна функція зростає на деякому проміжку, то похідна цієї функції невід'ємна на цьому проміжку.
2. Якщо диференційовна функція спадає на деякому проміжку, то похідна цієї функції недодатна на цьому проміжку.

Теорема 2 (достатня умова зростання (спадання) функції):

1. Якщо похідна диференційовної функції додатна всередині деякого проміжку, то функція зростає на цьому проміжку.
2. Якщо похідна диференційовної функції від'ємна всередині проміжку, то функція спадає на цьому проміжку.

Екстремуми функцій

При значенні x_1 аргументу x функція $f(x)$ має ***максимум*** $f(x_1)$, якщо в деякому околі точки x_1 виконується нерівність $f(x_1) > f(x)$ $(x \neq x_1)$. Аналогічно: при значенні x_2 аргументу x функція $f(x)$ має ***мінімум*** $f(x_2)$, якщо в деякому околі точки x_2 виконується нерівність $f(x_2) < f(x)$ $(x \neq x_2)$.



Максимум або мінімум функції називається ***екстремумом функції***, а ті значення аргументу, при яких досягаються екстремуми функції, називаються ***точками екстремуму функції*** (відповідно точками максимуму або мінімуму функції).

Екстремум функції у загальному випадку має локальний характер — це найбільше або найменше значення функції порівняно з близькими її значеннями.

Необхідна умова екстремуму функції

Теорема: У точці екстремуму диференційовної функції $y = f(x)$ похідна її дорівнює нулю:

$$f'(x_2) = 0 .$$

Геометрично умова означає, що в точці екстремуму диференційовної функції $y = f(x)$ дотична до її графіка паралельна осі Ox.

Значення аргументу x, які для заданої функції перетворюють її похідну $f'(x)$ на нуль або для яких похідна $f'(x)$ не існує (наприклад, перетворюється на нескінченність), називаються **критичними значеннями аргументу (критичними точками)**.

Достатні умови екстремуму функції

Теорема 1 *(перше правило)*. Нехай функція $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі, в якому міститься критична точка x_0, і диференційовна в усіх точках цього інтервалу (крім, можливо, самої точки x_0). Якщо при переході зліва направо через цю точку похідна:

1) змінює знак з «+» на «–», то при $x = x_0$ функція має максимум;
2) змінює знак з «–» на «+», то функція має у цій точці мінімум;
3) не змінює свого знака, то функція в точці $x = x_0$ екстремуму не має.

Зауваження. На основі цієї теореми можна сформулювати таке правило дослідження неперервної функції $y = f(x)$ на максимум і мінімум.

1. Знаходимо першу похідну функції, тобто $f'(x)$.

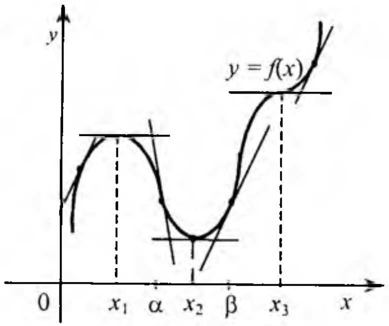
2. Обчислюємо критичні значення аргументу x (критичні точки), для цього:

а) прирівнюємо першу похідну до нуля і відшукуємо дійсні корені знайденого рівняння $f'(x) = 0$;

б) знаходимо значення x, для яких похідна $f'(x)$ має розрив.

3. Досліджуємо знак похідної ліворуч і праворуч від критичної точки. Оскільки знак похідної залишається сталим в інтервалі між двома критичними точками, для дослідження знака похідної ліворуч

і праворуч, наприклад від критичної точки x_2, достатньо визначити знак похідної в точках α і β $(x_1 < \alpha < x_2 < \beta < x_3)$, де x_1 і x_3 — найближчі критичні точки).



4. Обчислюємо значення функції $f(x)$ у кожній критичній точці.

Таким чином, маємо таке схематичне зображення можливих випадків.

x (досліджуваний інтервал змінної)	(x_1, x_2)	x_2	(x_2, x_3)
$f'(x)$ (знак похідної в досліджуваному інтервалі	+	$f(x_2) = 0$ або не існує	−
	−		+
	+ (−)		+ (−)
$f(x)$ (характер поводження функції)	Функція зростає	Точка максимуму	Функція спадає
	Функція спадає	Точка мінімуму	Функція зростає
	Функція зростає (спадає)	Немає ні максимуму, ні мінімуму	Функція зростає (спадає)

Теорема 2 *(друге правило)*. Якщо для диференційовної функції $f(x)$ в деякій точці x_0 її перша похідна $f'(x)$ дорівнює нулю, а друга похідна $f''(x)$ існує й відмінна від нуля, тобто $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, то:

1) якщо друга похідна $f''(x_0) > 0$, то в точці x_0 функція $f(x)$ має мінімум;

2) якщо $f''(x_0) < 0$ — максимум;

3) якщо $f''(x_0) = 0$ — питання залишається відкритим, і для його розв'язання потрібно застосувати перше правило.

Зауваження. Для критичних точок, в яких похідна функції не існує або дорівнює нескінченності, друге правило не застосовується.

Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$, то вона набуває на цьому проміжку свого найбільшого і найменшого значення.

Найбільше значення функції на проміжку $[a; b]$ називається ***абсолютним максимумом***, а найменше — ***абсолютним мінімумом***.

Правило:

Щоб знайти найбільше значення неперервної функції на проміжку $[a, b]$, необхідно:

1) знайти всі максимуми функції на проміжку;

2) визначити значення функції на кінцях проміжку, тобто обчислити $f(a)$ і $f(b)$;

3) з усіх знайдених значень функції вибрати найбільше: воно й буде найбільшим значенням функції на проміжку.

Аналогічно потрібно діяти і при визначенні найменшого значення функції на проміжку.

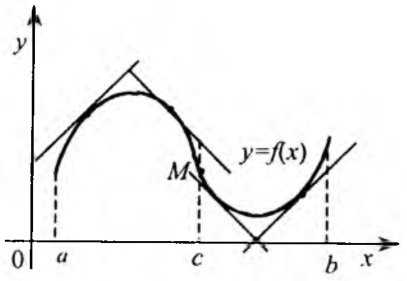
Опуклість і вгнутість кривої. Точка перегину

Крива на проміжку називається *опуклою* (*угнутою*), якщо всі точки кривої лежать нижче (вище) від будь-якої її дотичної на цьому проміжку.

Наведемо дві теореми.

Теорема 1. А. Якщо в усіх точках проміжку (c, b) для функції $y = f(x)$ друга її похідна $f''(x) > 0$, то графік функції вгнутий.

Б. Якщо в усіх точках проміжку (a, c) друга похідна функції $f(x)$ від'ємна $(f''(x) < 0)$, то графік функції опуклий.

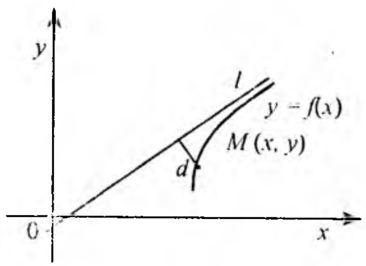


Теорема 2. Якщо для функції $y = f(x)$ друга похідна її $f''(x)$ у деякій точці x_0 перетворюється на нуль або не існує і при переході через цю точку змінює свій знак на протилежний, то точка $M(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції.

Зауваження. Якщо в точці x_0 друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, але при переході через цю точку $f''(x)$ не змінює свого знака, то точка $M(x_0, f(x_0))$ не є точкою перегину графіка функції.

Асимптоти

Змінна точка M рухається по кривій у нескінченність, коли відстань від цієї точки до початку координат необмежено зростає.



Пряма називається асимптотою кривої, якщо відстань d від змінної точки M кривої до цієї прямої при віддаленні точки M у нескінченність прямує до нуля. Асимптоти бувають вертикальні й похилі.

Вертикальні асимптоти. Якщо $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ або $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$, або $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою для графіка функції $y = f(x)$.

Похилі асимптоти. Нехай крива $y = f(x)$ має похилу асимптоту $y = kx + b$ у правій півплощині $(x > 0)$, тоді

$$\boxed{k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx)}$$

Якщо хоча б одна з границь не існує, то крива похилих асимптот у відповідній півплощині не має.

Зауваження. Ці формули записано за припущення, що $x \to +\infty$. Аналогічні формули існують при $x \to -\infty$ (лівої півплощини).

План дослідження функцій і побудови їхніх графіків

При дослідженні функцій виконати такі дії:

1. Знайти область визначення функції.
2. Установити парність (непарність) і періодичність функції.
3. Знайти точки розриву функції та встановити характер розриву.
4. Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
5. Знайти точки екстремуму й обчислити значення функції в цих точках.
6. Визначити інтервали зростання і спадання функції.
7. Знайти точки перегину, інтервали опуклості та вгнутості.
8. Знайти асимптоти.
9. Знайти граничні значення функції, коли x прямує до граничних точок області визначення.

Графік функції будують за характерними точками й лініями, знайденими в результаті дослідження. Якщо їх недостатньо, знаходять допоміжні точки для деяких конкретних значень аргументу.

Задача 4.2.

Дослідити функцію $y=\dfrac{x^2+ax+b}{cx+d}$ та побудувати її графік, якщо $a=2$, $b=17$, $c=1$, $d=1$.

У нашому випадку функція має вигляд $y=\dfrac{x^2+2x+17}{x+1}$.

1. Знаходимо область визначення функції. Функція існує при всіх значеннях x, за винятком значення $x=-1$. Звідси її область визначення: $x\in(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ +\infty)$.

2. Точка $x=-1$ є точкою розриву функції.

Дослідимо характер розриву:

$$\lim_{x\to-1\pm0} y=\lim_{x\to-1\pm0}\frac{x^2+2x+17}{x+1}=\frac{16}{\lim\limits_{x\to-1\pm0} x+1}=\pm\infty.$$

Точка $x=-1$ — точка розриву другого роду.

3. Вертикальні асимптоти. Пряма $x=-1$ є вертикальною асимптотою графіка функції.

4. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат:

а) з віссю Ox крива не перетинається, оскільки рівняння $\dfrac{x^2+2x+17}{x+1}$ не має дійсних коренів;

б) з віссю Oy: $x=0$, $y=17$; шукана точка (0; 17).

5. Знаходимо точки екстремуму та інтервали зростання і спадання функції; результати заносимо в таблицю (наведено далі):

$$y'=\frac{\left(x^2+2x+17\right)'(x+1)-\left(x^2+2x+17\right)(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{\left(x^2+2x-15\right)}{(x+1)^2};$$

$y'=0\Rightarrow x_1=-5,\ x_2=3$ — критичні точки. При $x=-1$ y' — не існує, але ця точка не входить в область визначення функції.

Критичними точками $x_1=-5$, $x_2=3$ розіб'ємо область визначення на чотири інтервали: $(-\infty,\ -5)$, $(-5,\ -1)$, $(-1,\ 3)$, $(3,\ +\infty)$.

Визначимо знак першої похідної на кожному зі знайдених інтервалів:

$x=-6\in(-\infty,\ -5)$; $\quad y'(-6)=\dfrac{9}{25}>0$;

$x=-4\in(-5,\ -1)$; $\quad y'(-4)=-\dfrac{7}{9}<0$;

$x=0\in(-1,\ 3)$; $\quad y'(0)=-15<0$;

$x=4\in(3,\ +\infty)$; $\quad y'(4)=\dfrac{9}{25}>0$.

Проходячи через критичну точку $x_1=-5$ зліва направо, похідна змінює знак з «+» на «–». Завдяки цьому в точці $x_1=-5$ функція має максимум:

$$y_{\max}(-5)=\frac{(-5)^2+2(-5)+17}{-5+1}=-8.$$

Проходячи критичну точку $x_2=3$ зліва направо, похідна змінює знак з «–» на «+». Завдяки цьому в точці $x_2=3$ функція має мінімум:

$$y_{\min}(3)=\frac{3^2+2\cdot3+17}{3+1}=8.$$

Інтервали зростання функції: $(-\infty,\ -5)$, $(3,\ +\infty)$.

Інтервали спадання функції: $(-5,\ -1)$, $(-1,\ 3)$.

x	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, -1)$	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	–	–	0	+
y	↗	max –8	↘	↘	min 8	↗

6. Інтервали опуклості й угнутості функції знаходимо за допомогою другої похідної:

$$y''=\frac{\left(x^2+2x-15\right)'(x+1)^2-\left(x^2+2x-15\right)\left((x+1)^2\right)'}{(x+1)^4}=\frac{32}{(x+1)^3};$$

17[635]

$y'' \neq 0$ на всій області визначення функції $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$;

y'' не існує в точці $x = -1$, яка не належить області визначення функції;

$x = -2 \in (-\infty, -1)$, $y''(-2) = \dfrac{32}{(-2+1)^3} = -32 < 0$, а отже, графік функції опуклий на інтервалі $(-\infty, -1)$;

$x = 0 \in (-1, +\infty)$, $y''(0) = \dfrac{32}{(0+1)^3} = 32 > 0$, а отже, графік функції вгнутий на інтервалі $(-1, +\infty)$;

Результати дослідження заносимо в таблицю:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
y''	$-$	$+$
y	$\cap$	$\cup$

7. Рівняння похилої асимптоти відшукуємо у вигляді $y = kx + b$, де $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+2x+17}{x(x+1)} = 1$;

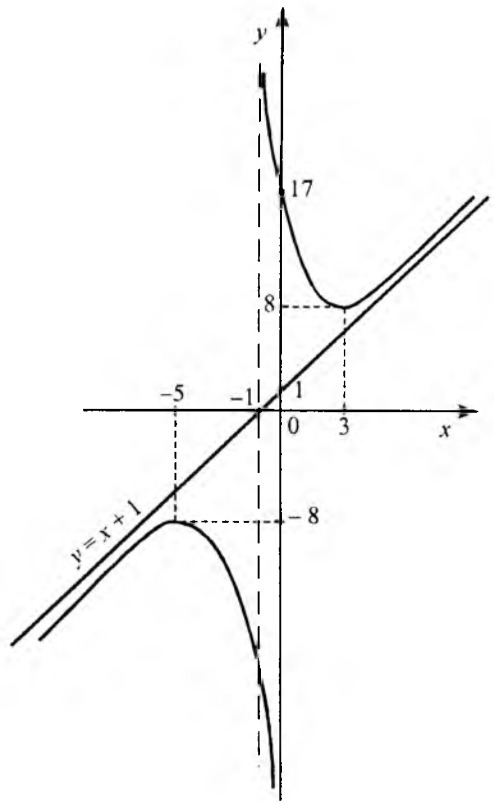
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+2x+17}{x+1} - x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+17}{x+1} = 1.$$

Таким чином, як у правій ($x > 0$), так і в лівій ($x < 0$) півплощині крива має одну й ту саму похилу асимптоту $y = x + 1$.

8. Знайдемо граничні значення функції при $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x+17}{x+1} = \left| \begin{array}{c} \text{За} \\ \text{правилом} \\ \text{Лопіталя} \end{array} \right| = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+2}{1} = \pm\infty.$$

9. За результатами дослідження будуємо графік функції (див. рисунок).



Застосування похідної до розв’язування задач геометрії

Якщо криву задано рівнянням $y = f(x)$, то $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, де α — кут, утворений з додатним напрямом осі Ox дотичною до кривої в точці з абсцисою x_0.

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).}$$

Нормаллю до кривої в точці M_0 називається перпендикуляр, проведений до дотичної в цій точці.

Рівняння нормалі має вигляд:

$$\boxed{y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)\ .}$$

Кутом між двома кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ в точці їх перетину $M_0(x_0,\ y_0)$ називається кут між дотичними до цих кривих у точці M_0. Цей кут обчислюється за формулою:

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)}\ .}$$

Задача 4.3 Знайти гострий кут між дотичними до кривої $y = ax^2 + bx + c$, що проходять через точку $M_0(x_0,\ y_0)$, якщо $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, $x_0 = 2$, $y_0 = -1$.

У нашому випадку рівняння параболи має вигляд $y = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. Знайдемо похідну $y' = f'(x) = 2(x+1)$.

Нехай точка $M_1(x_1,\ y_1)$ — точка дотику дотичної до заданої параболи. Рівняння цієї дотичної має вигляд:

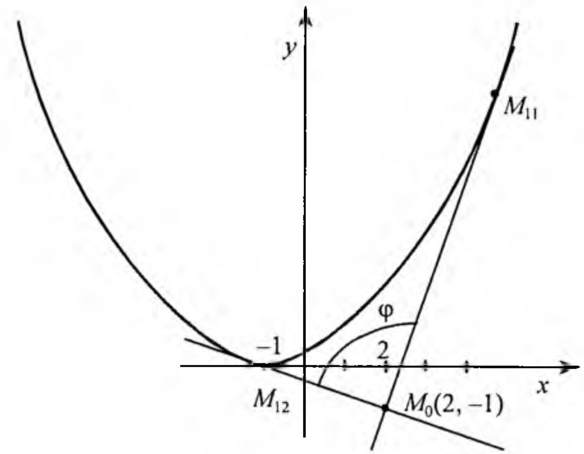
$$y - y_1 = 2(x_1 + 1)(x - x_1).$$

Точки $M_0(2, -1)$ та $M_1(x_1,\ y_1)$ належать відповідно дотичній та параболі. Записуємо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} -1 - y_1 = 2(x_1 + 1)(2 - x_1), \\ y_1 = (x_1 + 1)^2. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, дістаємо дві точки дотику на параболі:

$M_{11}\left(2 + \sqrt{10};\ \left(3 + \sqrt{10}\right)^2\right)$ і $M_{12}\left(2 - \sqrt{10};\ \left(3 - \sqrt{10}\right)^2\right)$ (див. рисунок):



Позначимо кутові коефіцієнти дотичних M_0M_{11} та M_0M_{12} відповідно так:

$$k_1 = f'(x_{11}) = 2\left(3 + \sqrt{10}\right);$$

$$k_2 = f'(x_{12}) = 2\left(3 - \sqrt{10}\right).$$

Гострий кут між дотичними M_0M_{11} та M_0M_{12} обчислюється за формулою:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = \frac{2\left(3 - \sqrt{10}\right) - 2\left(3 + \sqrt{10}\right)}{1 + 4\left(3 - \sqrt{10}\right)\left(3 + \sqrt{10}\right)} = \frac{4\sqrt{10}}{3}\ .$$

Звідси маємо: $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$.

Знаходження похідної неявно заданих функцій

Нехай рівняння $F(x, y) = 0$ визначає y як неявну функцію від x. Продиференціюємо за x обидві частини цього рівняння, дістанемо рівняння першого степеня відносно y', з цього рівняння легко знайти y', тобто похідну неявно заданої функції.

Задача 4.4. Знайти похідну y' функції y, заданої рівнянням $f(a\varphi(u(x))+b\psi(u(y)))=\varphi(x)$. Тут $f(x)=3x$, $\varphi(x)=x^3$, $\psi(x)=5x$, $u(x)=2x$, $a=3$, $b=1$.

Функція y визначається рівнянням

$$\operatorname{tg}(72x^3+10y)=x^3.$$

Продиференціювавши за x обидві частини цього рівняння, дістанемо

$$\frac{216x^2+10y'}{\cos^2(72x^3+10y)}=3x^2.$$

Звідси

$$y'=\frac{1}{10}(3x^2\cos^2(72x^3+10y)-216x^2).$$

Розділ 5. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Повний диференціал функції двох змінних $z=f(x,y)$ обчислюється за формулою

$$dz=z'_x dx+z'_y dy, \tag{1}$$

де z'_x, z'_y — частинні похідні функції $z=f(x,y)$.

Задача 5.1. Знайти повний диференціал функції двох змінних x і y:

$$z=\alpha(f(y))^{g(x)}+\beta g(x)\,h^{\gamma}(u)+\gamma\frac{h(u)}{q(u^2)}+\nu[h(u)]^{q(u)},$$

якщо

$\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=1$, $\nu=1$, $f(y)=y^2$, $g(x)=\cos x$, $u=xy$, $h(u)=\operatorname{tg} u$, $q(u)=\arcsin u$.

1. Спочатку утворимо функцію z, підставивши замість параметрів α, β, γ, ν задані значення, а замість f, g, h і q — задані функції. Дістанемо функцію двох змінних:

$$z(x;y)=1\cdot\left(y^2\right)^{\cos x}+1\cos x\operatorname{tg}(xy)+1\cdot\frac{\operatorname{tg}(xy)}{\arcsin\,(x^2y^2)}+1\cdot[\operatorname{tg}(xy)]^{\arcsin(xy)}. \tag{2}$$

2. Знайдемо частинні похідні функції $z\,(x,\ y)$ за x і y, скориставшись тим, що похідна суми дорівнює сумі похідних:

$$z'_x=\left(y^{2\cos x}\right)'_x+(\cos x\ \operatorname{tg}(xy))'_x+\left(\frac{\operatorname{tg}\,(xy)}{\arcsin\,(x^2y^2)}\right)'_x+\left((\operatorname{tg}(xy))^{\arcsin(xy)}\right)'_x; \tag{3}$$

$$z'_y=\left(y^{2\cos x}\right)'_y+(\cos x\ \operatorname{tg}(xy))'_y+\left(\frac{\operatorname{tg}(xy)}{\arcsin\,(x^2y^2)}\right)'_y+\left((\operatorname{tg}(xy))^{\arcsin(xy)}\right)'_y. \tag{4}$$

Обчислює частинні похідні в сумах (3) і (4), вважаючи відповідно змінну y і змінну x константами та використовуючи необхідні правила диференціювання і таблицю похідних функції однієї змінної:

$$\left(y^{2\cos x}\right)'_x = \left\|\begin{array}{l} y \text{ вважаємо сталою,}\\ \text{тому задана функція є}\\ \text{показниковою функцією}\\ \text{однієї змінної } x.\\ \text{Застосовуємо формулу :}\\ \left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'. \end{array}\right\| = y^{2\cos x} \ln y \left(2\cos x\right)'_x =$$

$$= -2\sin x \ln y \cdot y^{2\cos x};$$

$$\left(y^{2\cos x}\right)'_y = \left\|\begin{array}{l} x \text{ вважаємо сталою,}\\ \text{тому функція}\\ \text{є степеневою функцією}\\ \text{однієї змінної } y.\\ \text{Застосовуємо формулу}\\ \left(u^a\right)' = a u^{a-1} u'. \end{array}\right\| = 2\cos x \; y^{2\cos x-1} \cdot 1;$$

$$\left(\cos x \operatorname{tg}(xy)\right)'_x = \left\|\begin{array}{l} y \text{ вважаємо сталою,}\\ \text{тому задана функція є}\\ \text{добутком двох функцій,}\\ \text{які залежать від змінної } x.\\ \text{Застосовуємо правило}\\ \left(u\,v\right)' = u'v + uv'. \end{array}\right\| =$$

$$= \left(\cos x\right)'_x \operatorname{tg}(xy) + \cos x\left(\operatorname{tg}(xy)\right)'_x = -\sin x \operatorname{tg}(xy) + \cos x \frac{1}{\cos^2(xy)} y;$$

$$\left(\cos x \operatorname{tg}(xy)\right)'_y = \left\|\begin{array}{l} x \text{ вважаємо сталою, тому функція}\\ \text{є добутком сталої величини та}\\ \text{функції, яка залежить від змінної } y.\\ \text{Застосовуємо формулу}\\ \left(\text{const } u\right)' = \text{const } u'. \end{array}\right\| =$$

$$= \cos x\left(\operatorname{tg}(xy)\right)'_y = \cos x \frac{1}{\cos^2(xy)} x;$$

$$\left(\frac{\operatorname{tg}(xy)}{\arcsin\left(x^2y^2\right)}\right)'_x = \left\|\begin{array}{l} y \text{ вважаємо сталою, тому функція є}\\ \text{часткою двох функцій, які залежать}\\ \text{від змінної } x.\\ \text{Застосовуємо формулу}\\ \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}. \end{array}\right\| =$$

$$= \frac{\left(\operatorname{tg}(xy)\right)'_x \arcsin\left(x^2y^2\right)}{\arcsin^2\left(x^2y^2\right)} - \frac{\left(\operatorname{tg}(xy)\right)\left(\arcsin\left(x^2y^2\right)\right)'_x}{\arcsin^2\left(x^2y^2\right)} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\cos^2(xy)} y \arcsin\left(x^2y^2\right) - \operatorname{tg}(xy)\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(x^2y^2\right)^2}} 2xy^2}{\arcsin^2\left(x^2y^2\right)};$$

$$\left(\frac{\operatorname{tg}(xy)}{\arcsin\left(x^2y^2\right)}\right)'_y = \left\|\begin{array}{l} x \text{ вважаємо сталою, тому функція є часткою}\\ \text{двох функцій, які залежать від змінної } y.\\ \text{Застосовуємо формулу}\\ \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}. \end{array}\right\| =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\cos^2(xy)} x \arcsin\left(x^2y^2\right) - \operatorname{tg}(xy)\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(x^2y^2\right)^2}} 2x^2y}{\arcsin^2\left(x^2y^2\right)};$$

$$\left([\mathrm{tg}(xy)]^{\arcsin(xy)}\right)'_x = \left\| \begin{array}{l} y \text{ вважаємо сталою, тому функція є} \\ \text{степенево-показниковою} \\ \text{функцією від змінної } x. \\ \text{Застосовуємо формулу} \\ (u^v)'_x = u^v \ln u \, v'_x + v u^{v-1} u'_x = \\ = u^{v-1}[u \ln u \, v'_x + v u'_x]. \end{array} \right\| =$$

$$= [\mathrm{tg}(xy)]^{\arcsin(xy)-1}\left(\mathrm{tg}(xy)\ln \mathrm{tg}(xy)\frac{y}{\sqrt{1-(xy)^2}} + \arcsin(xy)\frac{1}{\cos^2(xy)}y\right);$$

$$\left([\mathrm{tg}(xy)]^{\arcsin(xy)}\right)'_y = \left\| \begin{array}{l} x \text{ вважаємо сталою, тому функція є} \\ \text{степенево-показниковою} \\ \text{функцією від змінної } y. \\ \text{Застосовуємо формулу} \\ (u^v)'_y = u^{v-1}[u \ln u \, v'_y + v u'_y]. \end{array} \right\| =$$

$$= [\mathrm{tg}(xy)]^{\arcsin(xy)-1}\left(\mathrm{tg}(xy)\ln \mathrm{tg}(xy)\frac{x}{\sqrt{1-(xy)^2}} + \arcsin(xy)\frac{x}{\cos^2(xy)}\right)$$

3. Підставивши знайдені вирази спочатку в суми (3) і (4), а потім у формулу (1), дістанемо з урахуванням перетворень і спрощень повний диференціал функції (2):

$$dz = y^{2\cos x-1}[-2\sin x \cdot y \ln y dx + 2\cos x dy] +$$
$$+\left[\left(-\sin x\ \mathrm{tg}(xy) + \frac{y\cos x}{\cos^2(xy)}\right)dx + \frac{\cos x \cdot x}{\cos^2(xy)}dy\right] +$$
$$+\left(\frac{1}{\arcsin(x^2y^2)}\frac{1}{\cos^2(xy)} - \frac{\mathrm{tg}(xy)2xy}{\sqrt{1-x^4y^4}\arcsin^2(x^2y^2)}\right)(ydx + xdy) +$$
$$+[\mathrm{tg}(xy)]^{\arcsin(xy)-1}\left(\frac{\mathrm{tg}(xy)\ln \mathrm{tg}(xy)}{\sqrt{1-(xy)^2}} + \frac{\arcsin(xy)}{\cos^2(xy)}\right)(ydx + xdy).$$

Похідна за напрямом $\vec{l} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ функції трьох змінних $u = u(x, y, z)$ у точці $M(x_0; y_0; z_0)$ обчислюється за формулою:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial e}\right|_M = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \cos\gamma. \qquad (5)$$

Градієнт функції трьох змінних $u = u(x; y; z)$ у точці $M\ (x_0; y_0; z_0)$ обчислюється за формулою

$$\left.\overline{\mathrm{grad}}\ u\right|_M = \left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M; \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M; \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M\right). \qquad (6)$$

Задача 5.2. Знайти похідну за напрямом $\vec{l} = (\cos 45^\circ; \cos 60^\circ; \cos 60^\circ)$ і градієнт функції $u = x^\alpha y^\beta z^\gamma + a_{11}x^\alpha + a_{12}y^\beta + a_{22}z^\gamma$ у точці $M(x_0; y_0; z_0)$, якщо $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, $a_{11} = -5$, $a_{12} = -7$, $a_{22} = -9$, $x_0 = -1$, $y_0 = -1$, $z_0 = 1$.

1. Спочатку утворимо функцію $u = u(x, y, z)$, підставивши замість параметрів α, β, γ, коефіцієнтів a_{11}, a_{12}, a_{22} і координат x_0; y_0; z_0 відповідні значення. Дістанемо функцію $u(x, y, z) = xy^2z^3 - 5x - 7y^2 - 9z^3$ і точку $M(-1; -1; 1)$.

2. Знайдемо і обчислимо в точці M частинні похідні функції u: u'_x, u'_y, u'_z.

$$u'_x = \left\| \begin{array}{l} y, z \text{ вважаємо сталими;} \\ \text{функція } u \text{ буде функцією} \\ \text{однієї змінної } x. \end{array} \right\| = y^2z^3 - 5.$$

$$\left.u'_x\right|_M = \left\| \begin{array}{l} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{array} \right\| = 1 \cdot 1 - 5 = -4.$$

$$u'_y = \left\| \begin{matrix} x,\ z \text{ вважаємо сталими;} \\ \text{функція } u \text{ буде функцією} \\ \text{однієї змінної } y. \end{matrix} \right\| = 2xyz^3 - 14y.$$

$$u'_y\big|_M = \left\| \begin{matrix} x=-1 \\ y=-1 \\ z=1 \end{matrix} \right\| = 2(-1)(-1)1^3 + 14\cdot 1 = 2 + 14 = 16.$$

$$u'_z = \left\| \begin{matrix} x,\ y \text{ вважаємо сталими;} \\ \text{функція } u \text{ буде функцією} \\ \text{однієї змінної } z. \end{matrix} \right\| = 3xy^2z^2 - 27z^2.$$

$$u'_z\big|_M = \left\| \begin{matrix} x=-1 \\ y=-1 \\ z=1 \end{matrix} \right\| = 3(-1)(-1)^2\ 1^2 - 27\cdot 1^2 = -3 - 27 = -30.$$

3. Підставимо знайдені значення $u'_x\big|_M$, $u'_y\big|_M$, $u'_z\big|_M$ у формули (5) і (6):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_M = -4\cos 45^\circ + 16\cos 60^\circ - 30\cos 30^\circ = -4\frac{\sqrt{2}}{2} + 16\cdot\frac{1}{2} - 30\cdot\frac{1}{2} =$$
$$= -2\sqrt{2} - 7.$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, u\big|_M = -4\bar{i} + 16\bar{j} - 30\bar{k}.$$

Алгоритм відшукання екстремумів функції двох змінних

1. Знаходимо стаціонарні точки, тобто точки, в яких $u'_x = 0$, $u'_y = 0$. Для цього обчислюємо частинні похідні першого порядку u'_x, u'_y функції u і розв'язуємо систему рівнянь $\begin{cases} u'_x = 0, \\ u'_y = 0. \end{cases}$

2. Знаходимо частинні похідні другого порядку $u''_{xx}, u''_{xy}, u''_{yy}$.

3. Обчислюємо значення a_{11}, a_{12}, a_{22} — відповідні значення частинних похідних $u''_{xx}, u''_{xy}, u''_{yy}$ у стаціонарних точках.

4. Знаходимо $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ для кожної точки.

5. Остаточного висновку доходимо, розглядаючи такі випадки:
   1) $\Delta > 0, a_{11} > 0$ — матимемо точку мінімуму;
   2) $\Delta > 0, a_{11} < 0$ — матимемо точку максимуму;
   3) $\Delta < 0$ — немає екстремуму;
   4) $\Delta = 0$ — сумнівний випадок.

Задача 5.3.1. Знайти екстремум функції двох змінних

$$z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_3,$$

якщо

$$a_{11} = 2,\ a_{12} = 1,\ a_{22} = 4,\ a_1 = 4,\ a_2 = -5,\ a_3 = -6.$$

1. Спочатку утворимо функцію двох змінних, підставивши замість коефіцієнтів $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_3$ задані значення:

$$z = 2x^2 + 2xy + 4y^2 + 4x - 5y - 6.$$

2. Згідно з алгоритмом знайдемо частинні похідні z'_x, z'_y:

$$z'_x = 4x + 2y + 4,$$
$$z'_y = 2x + 8y - 5.$$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4x+2y+4=0; \\ 2x+8y-5=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+2y+4=0; \\ -4x-16y+10=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+2y+4=0; \\ -14y=-14; \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y=1; \\ 4x=-6; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2}; \\ y=1. \end{cases}$$

Дістанемо стаціонарну точку $\left(-\dfrac{3}{2};\ 1\right)$.

3. Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$u''_{xx}=4, u''_{xy}=2, u''_{yy}=8.$$

Тоді

$$a_{11}=4, a_{12}=2, a_{22}=8.$$

4. Обчислимо визначник:

$$\Delta=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 8\end{vmatrix}=32-2^2=28.$$

5. Висновок: $\Delta=28>0$, $a_{11}=4>0$.

Тому $\left(-\frac{3}{2};1\right)$ — точка мінімуму.

6. Обчислимо значення функції z у точці $\left(-\frac{3}{2};1\right)$:

$$z_{\min}=2\left(-\frac{3}{2}\right)^2+2\left(-\frac{3}{2}\right)1+4\cdot1^2+4\left(-\frac{3}{2}\right)-5-6=$$
$$=2\cdot\frac{9}{4}-3+4-6-5-6=\frac{9}{2}-16=\frac{9-32}{2}=-\frac{23}{2}.$$

Задача 5.3.2. Знайти екстремуми функції двох змінних $z=f(x;y)$ за умови $\varphi(x;y)=0$, якщо:

$$f(x;y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y};\quad \varphi(x;y)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{16}.$$

Потрібно знайти точки екстремуму функції $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ за умови $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{16}=0$.

1. Згідно з алгоритмом спочатку утворимо функцію Лагранжа:

$$L(x;y;\lambda)=f(x;y)+\lambda\varphi(x;y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\lambda\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{16}\right).$$

Точка (0; 0) не входить в область визначення функції $f(x;y)$.

2. Знайдемо L'_x, L'_y:

$$L'_x=-\frac{1}{x^2}-2\lambda x^{-3}=-\frac{1}{x^3}(x+2\lambda);$$
$$L'_y=-\frac{1}{y^2}-2\lambda y^{-3}=-\frac{1}{y^3}(y+2\lambda);$$
$$L'_y=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{16}.$$

3. Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}-\frac{1}{x^3}(x+2\lambda)=0;\\ -\frac{1}{y^3}(y+2\lambda)=0;\\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{16}=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\lambda;\\ y=-2\lambda;\\ \frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}=\frac{1}{16};\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\lambda;\\ y=-2\lambda;\\ \frac{1}{2\lambda^2}=\frac{1}{16};\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\pm\sqrt{8};\\ x=\pm2\sqrt{8}=\pm4\sqrt{2};\\ y=\pm2\sqrt{8}=\pm4\sqrt{2}.\end{cases}$$

Дістанемо дві точки, «підозрілі» на умовний екстремум: $A\left(4\sqrt{2};4\sqrt{2};-2\sqrt{2}\right)$, $B\left(-4\sqrt{2};-4\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$.

4. Знайдемо частинні похідні другого порядку функції $L(x;y;\lambda)$:

$$L''_{xx}=2x^{-3}+6\lambda x^{-4};\quad L''_{xy}=0;\quad L''_{x\lambda}=-\frac{2}{x^3};\quad L''_{yy}=2y^{-3}+6\lambda y^{-4};$$

$$L''_{yx}=0;\quad L''_{y\lambda}=-\frac{2}{y^3};\quad L''_{\lambda\lambda}=0;$$

5. Обчислимо значення похідних другого порядку в точках $A\left(4\sqrt{2};4\sqrt{2};-2\sqrt{2}\right)$; $B\left(-4\sqrt{2};-4\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$.

$$L''_{xx}\Big|_A=2\left(4\sqrt{2}\right)^{-3}+6\left(-2\sqrt{2}\right)\left(4\sqrt{2}\right)^{-4}=\frac{2}{128\sqrt{2}}-\frac{12\sqrt{2}}{256\cdot4}=\frac{\sqrt{2}}{128}-\frac{3\sqrt{2}}{256}=-\frac{\sqrt{2}}{256};$$

$$L''_{xy}\Big|_A=0;$$

$$L''_{x\lambda}\Big|_A=-\frac{2}{x^3}\Big|_{x=4\sqrt{2}}=-\frac{2}{(4\sqrt{2})^3}=-\frac{2}{64\cdot 2\sqrt{2}}=-\frac{1}{64\sqrt{2}};$$

$$L''_{yy}\big|_A=\left(2y^{-3}+6\lambda y^{-4}\right)\big|_A=-\frac{\sqrt{2}}{256};$$

$$L''_{yx}\big|_A=0;$$

$$L''_{y\lambda}\Big|_A=-\frac{2}{y^3}\Big|_A=-\frac{1}{64\sqrt{2}};$$

$$L''_{\lambda\lambda}\big|_A=0;$$

$$L''_{x\lambda}\big|_B=-2x^{-3}\big|_B=\frac{1}{64\sqrt{2}};$$

$$L''_{y\lambda}\big|_B=-2y^{-3}\big|_B=\frac{1}{64\sqrt{2}};$$

$$L''_{xx}\big|_B=\frac{\sqrt{2}}{256},\ L''_{yy}\big|_B=\frac{\sqrt{2}}{256};$$

$$L''_{xy}\big|_B=0,\ L''_{yx}\big|_B=0,\ L''_{\lambda\lambda}\big|_B=0.$$

6. Знайдемо: $\Delta|_A, \Delta|_B$:

$$\Delta=\begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{x\lambda} \\ L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{y\lambda} \\ L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} & L''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix};$$

$$\Delta|_A=\begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{256} & 0 & -\frac{1}{64\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{256} & -\frac{1}{64\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{64\sqrt{2}} & -\frac{1}{64\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}=2\frac{1}{64^2\cdot 2}\,\frac{\sqrt{2}}{256}=\frac{\sqrt{2}}{256\cdot 64^2}>0;$$

$$\Delta|_B=\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{256} & 0 & \frac{1}{64\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{256} & \frac{1}{64\sqrt{2}} \\ \frac{1}{64\sqrt{2}} & \frac{1}{64\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}=-\frac{\sqrt{2}}{256\cdot 64^2}<0.$$

Отже, у точці A — максимум; у точці B — мінімум; $z_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $z_{\min}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Область визначення функції двох змінних відшукуємо за наведеним далі алгоритмом.

1. Записуємо область визначення функцій $z=f(x,y)$, враховуючи, що область визначення функції $y=\sqrt{x}$:

$$x\ge 0;$$

функції $y=\log_a x$:

$$x>0,\ a\ne 1,\ a>0;$$

функції $y=\frac{1}{x}$,

$$x\ne 0,\ x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty);$$

функцій $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$:

$$-1\le x\le 1.$$

2. Зображуємо межі на рисунку.
3. Вибираємо контрольні точки і заштриховуємо відповідні області.

Задача 5.4. Знайти і зобразити графічно область визначення функції двох змінних:

$$z=\alpha\sqrt{f(x;\,y)}+\frac{\beta}{g(x;\,y)}+\gamma\lg h(x;\,y)+\arcsin\left(\alpha x+\beta y+\alpha\beta+\gamma\right),$$

якщо

$$\alpha = 1;\ \beta = 2;\ \gamma = -5;\ f(x;y) = \alpha x^2 - \beta y^2 + \gamma;\ g(x;y) = \alpha xy + \gamma;$$
$$h(x;y) = 6x + y.$$

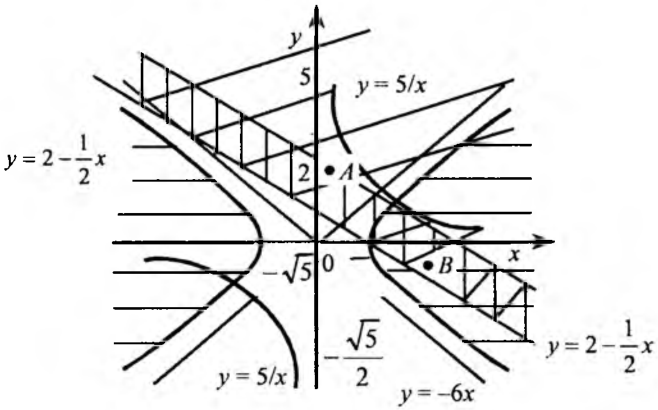
1. Спочатку утворимо функцію $z(x;y)$, підставивши задані значення в загальний вираз:

$$z = \sqrt{x^2 - 2y^2 - 5} + \frac{2}{xy - 5} - 5\lg(6x + y) + \arcsin(x + 2y - 3).$$

2. З урахуванням області визначення функцій $y = \sqrt{x}$; $y = \lg x$; $y = \frac{1}{x}$; $y = \arcsin x$ дістанемо систему нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 - 5 \ge 0; \\ xy - 5 \ne 0; \\ 6x + y > 0; \\ -1 \le x + 2y - 3 \le 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{5/2} \ge 1; \\ xy \ne 5; \\ y > -6x; \\ y \le \dfrac{1}{2}(4 - x); \\ y \ge \dfrac{1}{2}(2 - x). \end{cases}$$

3. Побудуємо лінії $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5/2} = 1$; $xy = 5$; $y = -6x$; $y = 2 - \frac{x}{2}$; $y = 1 - \frac{1}{2}x$.



4. Візьмемо контрольні точки A (1; 2), B (3; −1) і підставимо їх координати в систему нерівностей.

Точка $A(1;2)$: $x = 1;\ y = 2$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{5} - \dfrac{4}{5/2} \ngeq 1; \\ 2 \ne 5; \\ 2 > -6; \\ 2 \nleq \dfrac{1}{2}3; \\ 2 \ge \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Точка $B(3;-1)$: $x = 3,\ y = -1/2$:

$$\begin{cases} \dfrac{9}{5} - \dfrac{1/2}{5} \ge 1; \\ 3(-1/2) \ne 5; \\ -\dfrac{1}{2} > -6 \cdot 3; \\ -\dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{2}(4 - 3); \\ -\dfrac{1}{2} \ge \dfrac{1}{2}(2 - 3). \end{cases}$$

Точка A належить незаштрихованій області, точка B — заштрихованій.

Емпіричні формули методу найменших квадратів

Припустимо, що $x_1, x_2, ..., x_n$ — послідовність значень незалежної змінної, а $y_1, y_2, ..., y_n$ — послідовність відповідних значень залежної змінної.

1. Необхідно підібрати пряму $y = ax + b$, яка є найточнішим наближенням залежності між x та y. Невідомі параметри a і b обчислюються із системи рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i = na + b\sum_{i=1}^{n} x_i; \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2. \end{cases}$$

2. Необхідно підібрати параболу $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, яка є найточнішим наближенням залежності між x та y. Невідомі a_0, a_1, a_2 обчислюються із системи рівнянь:

$$\begin{cases} a_0\sum_{i=1}^{n} x_i + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ na_0 + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i; \\ a_0\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i. \end{cases}$$

3. Необхідно знайти гіперболу $y = a + \frac{b}{x}$, яка є найточнішим наближенням залежності між x та y. Невідомі параметри a і b визначаємо із системи:

$$\begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i; \\ a\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + b\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} y_i. \end{cases}$$

4. Необхідно знайти показникову криву $y = ab^x$, яка є найточнішим наближенням залежності між x та y. Невідомі параметри a і b обчислюємо із системи:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \lg y_i = n\lg a + \lg b\sum_{i=1}^{n} x_i; \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \lg y_i = \lg a\sum_{i=1}^{n} x_i + \lg b\sum_{i=1}^{n} x_i^2. \end{cases}$$

Задача 5.5. Знайти показникову криву, яка відповідає даним наведеної таблиці:

x_i	y_i	$\lg y_i$	$x_i \lg y_i$	x_i^2
0	45,5	1,658	0,000	0
1	98,5	1,6857	1,6857	1
2	55,8	1,7466	3,4932	4
3	65,7	1,8176	5,4528	9
4	86	1,9345	7,7380	16
5	86,3	1,9836	9,8180	25
6	105,0	2,0212	12,1272	36
$\sum x_i = 21$	...	$\sum \lg y_i = 12,8472$	$\sum x_i \lg y_i = 40,4149$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 91$

Дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 7\lg a + 21\lg b = 12,8472; \\ 21\lg a + 91\lg b = 40,4149. \end{cases}$$

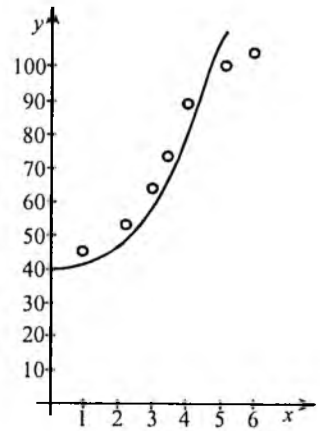
Розв'язавши систему рівнянь, дістанемо:

$$\lg a = 1,6346;$$
$$\lg b = 0,0669.$$

Звідси

$$a = 43,1;$$
$$b = 1,167.$$

Показникову криву, яка найточніше відбиває динаміку функції y, наведено на рисунку.



Розділ 6. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Невизначений інтеграл

Якщо на деякому інтервалі $x \in (a;b)$ задано функцію $f(x)$ і відомо, що вона є похідною деякої функції $F(x)$: $F'(x)=f(x)$, то функція $F(x)$ називається ***первісною функції*** $f(x)$, а процедура знаходження первісної є ***операцією інтегрування функції*** $f(x)$.

Теорема про множину первісних

Припустимо, відома деяка первісна $F(x)$ функції $f(x)$, тоді функція $\Phi(x)$ є первісною тоді і тільки тоді, коли $\Phi(x)=F(x)+C$, де C — довільна стала.

Математичний запис операції інтегрування, а також її результат, що визначається з точністю до сталої C, можна назвати ***невизначеним інтегралом***.

Приклад. $\int 2x dx = x^2 + C$, тобто для функції $f(x)=2x$ первісною є $F(x)=x^2+C$. Перевірка: $F'(x)=\left(x^2+C\right)'=2x+0$.

Властивості операції інтегрування

1. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$.
2. $\int dF(x)=F(x)+C$.

Ці дві властивості вказують на зв'язок операцій інтегрування та диференціювання як обернених операцій. Можна вважати, що знаки диференціала та інтеграла взаємно знищуються.

3. Лінійність операції інтегрування:

$$\int \left(af(x)+bg(x)\right)dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx.$$

Таблиця первісних

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$, при $n \neq -1$.
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C$.

3а. $\int e^x dx = e^x + C$.
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.
8. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$.
9. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$.
10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$.
11. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$.
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$.
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$.
14. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$.
15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$.
16. $\int \dfrac{xdx}{x^2+a} = \dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+a\right| + C$.

Інтегрування розкладом

Це найпростіший метод інтегрування, що спирається на лінійну властивість невизначеного інтеграла. Інтеграл від суми розкладається на суму простіших інтегралів. Поширеним є випадок, коли у вигляді суми розкладаємо дріб за доданками в чисельнику.

Приклад.

$$\int\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}{x}dx=\int\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3+3\left(\sqrt{x}\right)^2+3\sqrt{x}+1}{x}dx=$$

$$=\int\left(\sqrt{x}+3+3x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}\right)dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx+3\int dx+3\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\int\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x+6x^{\frac{1}{2}}+\ln|x|+C.$$

Інтегрування методом підставлення і безпосередньо

Якщо за допомогою підставлення $t=\varphi(x)$ підінтегральний вираз можна звести до вигляду $\int f(t)\,dt$, де $f(t)$ — функція з відомою первісною $F(t)$, то виконуємо інтегрування підставлення за схемою:

$$\int f(\varphi(x))\ \varphi'(x)\,dx=\left|\begin{array}{l}t=\varphi(x)\\ dt=\varphi'(x)\,dx\end{array}\right|=\int f(t)\,dt=F(t)+C=F(\varphi(x))+C.$$

Приклад.

$$\int\sin^3x\cos x dx=\left|\begin{array}{l}t=\sin x\\ dt=\cos x dx\end{array}\right|=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{\sin^4x}{4}+C.$$

Зауваження. Підставлення $t=\varphi(x)$ приводить до інтеграла виду $\int f(t)\,dt$ тільки тоді, коли в заданому інтегралі можна виділити вираз виду $dt=\varphi'(x)\,dx$.

Інтегрування безпосередньо збігається за змістом з інтегруванням підставлення, але нова змінна не вводиться, запис скорочується до прямого застосування формули:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=\int f(\varphi(x))d(\varphi(x))=F(\varphi(x))+C.$$

Приклад.

$$\int\mathrm{tg}^2x\frac{1}{\cos^2x}dx=\int\mathrm{tg}^2x d(\mathrm{tg}x)=\frac{\mathrm{tg}^3x}{3}+C.$$

Задача 6.1. Зінтегрувати такий вираз:

$$\int\frac{a\,f(mx)+bg(\varphi(nx))}{ch\,(kx)}dx,$$

якщо

Варіант	a	b	c	$f(u)$	$g(u)$	$\varphi(u)$	$h(u)$	m	n	k
0	3	4	5	cosec u	5^{φ}	sin u	sec u	2	2	2

$$\int\frac{3\,\mathrm{cosec}\,2x+4\cdot5^{\sin2x}}{5\sec2x}dx=\frac{1}{5}\int\left(\frac{3}{\sin2x}+4\cdot5^{\sin2x}\right)\cos2xdx=$$

$$=\frac{3}{5}\int\frac{\cos2xdx}{\sin2x}+\frac{4}{5}\int5^{\sin2x}\cos2xdx=\frac{3}{10}\int\frac{d(\sin2x)}{\sin2x}+$$

$$+\frac{4}{10}\int5^{\sin2x}d(\sin2x)=\frac{3}{10}\ln|\sin2x|+\frac{2}{5}\,\frac{5^{\sin2x}}{\ln5}+C.$$

Задача 6.2. Зінтегрувати вираз $\int\frac{f(mx)+nx}{\left(1-m^2x^2\right)^{a/2}\left(1+m^2x^2\right)^{1-a}}dx$, якщо

Варіант	$f(u)$	m	n	a
0	arctg u	7	5	0

$$\int\frac{\mathrm{arctg}7x+5x}{1+49x^2}dx=\int\frac{\mathrm{arctg}7x}{1+49x^2}dx+\int\frac{5x}{1+49x^2}dx=I_0\,;$$

$$I_1=\int\frac{\mathrm{arctg}\,7x}{1+49x^2}dx=\left|\begin{array}{l}t=\mathrm{arctg}\,7x\\ dt=\dfrac{7}{1+49x^2}dx\end{array}\right|=\frac{1}{7}\int tdt=\frac{1}{7}\frac{t^2}{2}+C=$$

$$=\frac{1}{14}\mathrm{arctg}^2\,7x+C;$$

$$I_2=\int\frac{5x}{1+49x^2}dx=\left|\begin{array}{l}t=1+49x^2\\ dt=98xdx\end{array}\right|=\frac{5}{98}\int\frac{dt}{t}=\frac{5}{98}\ln|t|+C=$$

$$=\frac{5}{98}\ln\left|1+49x^2\right|+C;$$

$$I_0=\frac{1}{14}\mathrm{arctg}^2\,7x+\frac{5}{98}\ln\left|1+49x^2\right|+C\,.$$

Інтегрування частинами

Інтегрування частинами — це потужний метод інтегрування, що дає змогу змінити вираз підінтегральної функції. Формула інтегрування частинами:

$$\int U dV = UV - \int V dU .$$

Доведення цієї формули спирається на відому формулу похідної від добутку:

$$(UV)' = U'V + UV' .$$

$$d(UV) = VdU + UdV;$$

Далі маємо:

$$UdV = d(UV) - VdU;$$

$$\int UdV = \int d(UV) - \int VdU;$$

$$\int UdV = UV - \int VdU.$$

Основна особливість методу полягає в тому, що він дає змогу перейти від функції до її диференціала, тому за U і вибирають функцію, яка при диференціюванні спрощується.

Приклад.

$$\int \ln x dx = \left| \begin{matrix} U = \ln x, & dU = \frac{1}{x} dx \\ dV = dx, & V = x \end{matrix} \right| = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

Зауваження. Вибір функції U повністю визначає dV — це те, що залишається в підінтегральному виразі після вилучення U. Обчислення V за відомим диференціалом dV полягає в операції інтегрування $V = \int dV$ (але довільна константа C не пишеться).

Правило вибору функції U

Як функцію U при інтегруванні частинами найчастіше вибирають логарифмічну функцію, обернені тригонометричні функції або степеневі вирази в інтегралах виду $\int P_n(x)\, e^x dx$, $\int P_n(x)\, a^x dx$, $\int P_n(x) \cos mx dx$, $\int P_n(x) \sin mx dx$, де $P_n(x)$ — позначення деякого многочлена степеня n відносно змінної x. Якщо порядок многочлена вищий за перший, то метод інтегрування частинами застосовується кілька разів.

Приклад.

$$\int \left(x^2 + 3x - 1\right) 3^x dx = \left| \begin{matrix} U = x^2 + 3x - 1 & dU = (2x+3)\, dx \\ dV = 3^x dx & V = \frac{3^x}{\ln 3} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{3^x}{\ln 3}\left(x^2 + 3x - 1\right) - \frac{1}{\ln 3}\int (2x+3)\, 3^x dx = \left| \begin{matrix} U = 2x+3 & dU = 2dx \\ dV = 3^x dx & V = \frac{3^x}{\ln 3} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{3^x}{\ln 3}\left(x^2 + 3x - 1\right) - \frac{1}{\ln 3}\left(\frac{3^x}{\ln 3}(2x+3) - \frac{2}{\ln 3}\int 3^x dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\ln 3}\left(3^x\left(x^2 + 3x - 1\right) - \left(\frac{3^x}{\ln 3}(2x+3) - 2 \cdot \frac{3^x}{\ln^2 3} \right)\right) + C =$$

$$= \frac{3^x}{\ln 3}\left(x^2 + 3x - 1 - \frac{2x+3}{\ln 3} + \frac{2}{\ln^2 3} \right) + C =$$

$$= \frac{3^x}{\ln 3}\left(x^2 + x\left(3 - \frac{2}{\ln 3}\right) - 1 - \frac{3}{\ln 3} + \frac{2}{\ln^2 3} \right) + C.$$

Задача 6.3. Зінтегрувати вираз $\int x^m f(ax+b)\, dx$, якщо

Варіант	$f(u)$	m	a	b
0	$\cos u$	2	3	– 4

$$\int x^2 \cos(3x-4) dx = \left| \begin{matrix} U = x^2; & dU = 2xdx \\ dV = \cos\ (3x-4)\ dx; & V = \frac{1}{3}\sin(3x-4) \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{3}\sin(3x-4) - \frac{2}{3}\int x \sin(3x-4)\ dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} U = x; & dU = dx \\ dV = \sin(3x-4)\ dx; & V = -\frac{1}{3}\cos(3x-4) \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{3}\sin(3x-4) -$$

$$-\frac{2}{3}\left(-\frac{x}{3}\cos(3x-4) + \frac{1}{3}\int \cos\ (3x-4)\ dx \right) = \frac{x^2}{3}\sin(3x-4) +$$

$$+\frac{2x}{9}\cos(3x-4) - \frac{2}{9}\int \cos(3x-4) dx = \frac{x^2}{3}\sin(3x-4) +$$

$$+\frac{2x}{9}\cos(3x-4) - \frac{2}{27}\sin(3x-4) + C.$$

Задача 6.4. Зінтегрувати вираз $\int f(mx)dx$, якщо

Варіант	$f(u)$	m
0	arctg u	5

$$\int \operatorname{arctg} 5x dx = \left| \begin{matrix} U = \operatorname{arctg} 5x & dU = \dfrac{5dx}{1+25x^2} \\ dV = dx & V = x \end{matrix} \right| =$$

$$= x\operatorname{arctg} 5x - \int \frac{5x}{1+25x^2}dx = x\operatorname{arctg} 5x - \frac{1}{10}\int \frac{50xdx}{1+25x^2} =$$

$$= x\operatorname{arctg} 5x - \frac{1}{10}\int \frac{d(1+25x^2)}{1+25x^2} = x\operatorname{arctg} 5x - \frac{1}{10}\ln\left|1+25x^2\right| + C.$$

Інтегрування раціональних виразів

Раціональним називається вираз виду $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$ та $Q_m(x)$ — многочлени відповідно n-го та m-го степеня. Дріб називається ***правильним***, якщо $n < m$, і ***неправильним*** при $n \geq m$.

Теорема. Кожний неправильний дріб можна подати у вигляді суми деякого многочлена та правильного раціонального дробу.

Існують чотири типи виразів, що називаються ***елементарними (найпростішими) дробами.***

I. Дроби виду $\dfrac{A}{x-a}$.

II. Сума дробів виду $\dfrac{A_1}{x-a} + \dfrac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \dfrac{A_n}{(x-a)^n}$.

III. Дроби виду $\dfrac{Mx+N}{x^2+\beta x+\gamma}$.

IV. Сума дробів виду

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+\beta x+\gamma} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+\beta x+\gamma)^2} + \ldots + \frac{M_kx+N_k}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}.$$

Теорема. Кожний правильний дріб можна подати у вигляді суми елементарних дробів. Тип і кількість доданків визначають за розкладом знаменника на множники. Кожному множнику виду $(x-a)$ відповідає дріб типу I, множнику виду $(x-a)^n$ — дріб типу II, множнику виду $(x^2+\beta x+\gamma)$ — дріб типу III, множнику виду $(x^2+\beta x+\gamma)^k$ — дріб типу IV.

Метод невизначених коефіцієнтів. Невідомі коефіцієнти розкладу правильного дробу позначають великими латинськими літерами і визначають за умови тотожної рівності лівої та правої частин.

Задача 6.5. Зінтегрувати такий вираз: $\int \dfrac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}{(x^2+mx+n)(px+q)}dx$,

якщо:

Варіант	a	b	c	d	e	m	n	p	q
0	8	30	58	20	–55	3	5	4	–3

В інтегралі $I = \int \dfrac{8x^4+30x^3+58x^2+20x-55}{(x^2+3x+5)(4x-3)}dx$ під знаком інтеграла міститься неправильний дріб. Виділимо цілу частину шляхом ділення многочленів:

$$\begin{array}{r|l} -\,8x^4+30x^3+58x^2+20x-55 & 4x^3+9x^2+11x-15 \\ \cline{2-2} \underline{8x^4+18x^3+22x^2-30x} & 2x+3 \\ -\,12x^3+36x^2+50x-55 & \\ \underline{12x^3+27x^2+33x-45} & \\ 9x^2+17x-10 & \end{array}$$

Таким чином, інтеграл зводиться до вигляду:

$$I=\int\left(2x+3+\frac{9x^2+17x-10}{(x^2+3x+5)\ (4x-3)}\right)\,dx\,.$$

Третій доданок підінтегрального виразу — це правильний дріб. Розкладаємо його на суму елементарних дробів за методом невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{9x^2+17x-10}{(x^2+3x+5)\ (4x-3)}=\frac{A}{4x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+3x+5}=$$

$$=\frac{A(x^2+3x+5)+(Bx+C)\ (4x-3)}{(4x-3)\ (x^2+3x+5)}=$$

$$=\frac{(A+4B)\,x^2+(3A-3B+4C)\,x+5A-3C}{(x^2+3x+5)\ (4x-3)}.$$

Тепер коефіцієнти A, B та C знаходимо за умови тотожної рівності многочленів:

$$9x^2+17x-10\equiv(A+4B)\ x^2+(3A-3B+4C)\ x+5A-3C.$$

Зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях невідомих, дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}A+4B=9;\\3A-3B+4C=17;\\5A-3C=-10;\end{cases}\qquad\begin{cases}A=1;\\B=2;\\C=5.\end{cases}$$

Остаточно заданий інтеграл набирає вигляду:

$$I=\int\left(2x+3+\frac{1}{4x-3}+\frac{2x+5}{x^2+3x+5}\right)\,dx\,.$$

Окремо зінтегруємо останній доданок. Застосуємо при цьому загальну схему інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен. Послідовність дій: 1) виділяємо повний квадрат у знаменнику; 2) вводимо як нову змінну вираз, що підноситься до квадрата; 3) розкладаємо дріб на суму за доданками в чисельнику; 4) інтегруємо кожний доданок окремо; 5) повертаємось до початкової змінної:

$$I=\int\frac{2x+5}{x^2+3x+5}dx=\int\frac{2x+5}{x^2+2\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}+5-\frac{9}{4}}dx=\int\frac{2x+5}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}t=x+\frac{3}{2}\\ x=t-\frac{3}{2};\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{2t-3+5}{t^2+\frac{11}{4}}dx=\int\frac{2tdt}{t^2+\frac{11}{4}}+2\int\frac{dt}{t^2+\frac{11}{4}}=\ln\left|t^2+\frac{11}{4}\right|+$$

$$+\frac{4}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{11}}+C=\ln\left|x^2+3x+5\right|+\frac{4\sqrt{11}}{11}\operatorname{arctg}\frac{(2x+3)\sqrt{11}}{11}+C.$$

Визначений інтеграл

Якщо відрізок $[a,b]$ розбити на n частин вигляду $[x_{k-1},\ x_k]$, де $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ і в кожній частині взяти довільну точку $\xi_k\in[x_{k-1},\ x_k]$, то вираз $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\ (x_k-x_{k-1})$ є **інтегральною сумою функції** $f(x)$, що відповідає цьому розбиттю відрізка.

Визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ називається границя, до якої прямують значення інтегральних сум S_n за умови, що $n\to\infty$, а $\Delta=\max\limits_{k}\Delta x_k\to0$, де $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$:

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta\to0}}S_n=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta\to0}}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\ (x_k-x_{k-1}).$$

Числа a та b називаються нижньою та верхньою межами інтегрування.

Для практичного знаходження визначених інтегралів застосовують формулу Ньютона–Лейбніца.

Теорема Ньютона–Лейбніца. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і $F(x)$ — деяка довільна її первісна, то значення визначеного інтеграла на відрізку $[a,b]$ від функції $f(x)$ обчислюється за формулою:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Для визначеного інтеграла іноді доцільно виконати підставлення.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, функції $\varphi(x)$ та $\varphi'(x)$ визначені й неперервні на $[\alpha,\beta]$ і $\varphi(t)\in[a,b]$ при $t\in[\alpha,\beta]$. Тоді якщо $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Ця формула називається ***формулою заміни змінної у визначеному інтегралі***, або інтегрування підставленням.

Необхідно пам'ятати, що при виконанні підставлення для визначеного інтеграла необхідно змінювати значення меж інтегрування.

Інтегрування частинами для визначеного інтеграла

Якщо функція $U(x)$ і $V(x)$ неперервно диференційовні на $[a,b]$, то

$$\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU.$$

Задача 6.6. Обчислити визначений інтеграл $\int_a^b x^m f(px+q)\,dx$, якщо

Варіант	a	b	$f(u)$	m	p	q
0	1	2	$\log_2 u$	1	2	3

Підставивши значення параметрів у загальну формулу, дістанемо:

$$\int_1^2 x\log_2(2x+3)\,dx = \left| \begin{matrix} U=\log_2(2x+3) & dU=\dfrac{2dx}{(2x+3)\ln 2} \\ dV = xdx & V=\dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$=\frac{x^2\log_2(2x+3)}{2}\Bigg|_1^2 - \frac{1}{\ln 2}\int_1^2 \frac{x^2}{2x+3}dx = \frac{x^2\log_2(2x+3)}{2}\Bigg|_1^2 -$$

$$-\frac{1}{4\ln 2}\int_1^2 \frac{4x^2-9+9}{2x+3}dx = \frac{x^2\log_2(2x+3)}{2}\Bigg|_1^2 -$$

$$-\frac{1}{4\ln 2}\int_1^2\left(2x-3+\frac{9}{2x+3}\right)dx = \frac{x^2\log_2(2x+3)}{2}\Bigg|_1^2 -$$

$$-\frac{1}{4\ln 2}\left(x^2-3x+\frac{9}{2}\ln|2x+3|\right)\Bigg|_1^2 = \frac{2^2\log_2(2\cdot 2+3)}{2} -$$

$$-\frac{1^2\log_2(2\cdot 1+3)}{2} - \frac{1}{4\ln 2}\left(2^2-3\cdot 2+\frac{9}{2}\ln(2\cdot 2+3)\right) +$$

$$+\frac{1}{4\ln 2}\left(1^2-3\cdot 1+\frac{9}{2}\ln(2\cdot 1+3)\right) = \frac{1}{8}\,\frac{7\ln 7+5\ln 5}{\ln 2}.$$

Невластиві інтеграли

Невластивий інтеграл на необмеженому проміжку інтегрування — це границя, до якої прямує значення визначеного інтеграла при необмеженому збільшенні границі інтегрування:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\xi\to\infty}\int_a^\xi f(x)\,dx = \lim_{\xi\to\infty}[F(\xi)-F(a)].$$

Якщо остання границя не існує, то невластивий інтеграл називають ***розбіжним***.

Задача 6.7. Обчислити невластивий інтеграл або довести його розбіжність:

$$\int_a^{\infty}\frac{f(px+q)}{x^m}dx, \text{ якщо}$$

Варіант	a	$f(u)$	m	p	q
0	1	$\log_6 u$	2	5	7

Підставляємо значення параметрів із таблиці в загальну формулу, маємо:

$$I_0=\int_1^{\infty}\frac{\log_6(5x+7)}{x^2}dx=\lim_{\xi\to\infty}\int_1^{\xi}\frac{\log_6(5x+7)}{x^2}dx.$$

Знайдемо спочатку первісну підінтегральної функції.

$$\int\frac{\log_6(5x+7)}{x^2}dx=\left|\begin{matrix} U=\log_6(5x+7) & dU=\dfrac{5dx}{(5x+7)\ln 6} \\ dV=\dfrac{dx}{x^2} & V=-\dfrac{1}{x}\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{\log_6(5x+7)}{x}+\frac{5}{\ln 6}\int\frac{dx}{x(5x+7)}.$$

Для визначення другого інтеграла необхідно розкласти раціональний вираз під знаком інтеграла на суму елементарних дробів:

$$\frac{1}{x(5x+7)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{5x+7}=\frac{A(5x+7)+Bx}{x(5x+7)};\quad 1\equiv A(5x+7)+Bx.$$

Підставляючи в останню тотожність значення $x=0$, знаходимо $A=\frac{1}{7}$, потім знаходимо $B=-\frac{5}{7}$. Таким чином, невизначений інтеграл дорівнює

$$I_1=-\frac{\log_6(5x+7)}{x}+\frac{5}{\ln 6}\int\left(\frac{1}{7x}-\frac{5}{7(5x+7)}\right)dx=$$

$$=-\frac{\log_6(5x+7)}{x}+\frac{5\ln|x|}{7\ln 6}-\frac{5\ln|5x+7|}{7\ln 6}.$$

Повернемося до невластивого інтеграла:

$$I_0=\lim_{\xi\to\infty}\int_1^{\xi}\frac{\log_6(5x+7)}{x^2}dx=\lim_{\xi\to\infty}\left(-\frac{\log_6(5x+7)}{x^2}+\frac{5\ln|x|}{7\ln 6}-\right.$$

$$\left.-\frac{5\ln|5x+7|}{7\ln 6}\right)\Bigg|_1^{\xi}=\lim_{\xi\to\infty}\left(-\frac{\log_6(5\xi+7)}{\xi}+\frac{5\ln|\xi|}{7\ln 6}-\frac{5\ln|5\xi+7|}{7\ln 6}+\right.$$

$$\left.+\frac{\log_6(5\cdot 1+7)}{1}-\frac{5\ln|1|}{7\ln 6}+\frac{5\ln|5\cdot 1+7|}{7\ln 6}\right)=\lim_{\xi\to\infty}\left(-\frac{\log_6(5\xi+7)}{\xi}+\right.$$

$$\left.+\frac{5}{7\ln 6}\lim_{\xi\to\infty}\ln\frac{\xi}{5\xi+7}+\log_6(12)+\frac{5\ln|12|}{7\ln 6}\right)=$$

$$=0+\frac{5}{7\ln 6}\ln\frac{1}{5}+\log_6 12-0+\frac{5\ln 12}{7\ln 6}=-\frac{1}{7}\frac{5\ln 5-24\ln 2-12\ln 3}{\ln 2+\ln 3}.$$

Подвійні інтеграли

1. Якщо функція $f(x, y)$ інтегровна на множині

$$D=\{(x;y)\,|\,a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le\psi(x)\},$$

то

$$\iint_D f(x;y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)\,dy. \qquad (1)$$

2. Якщо функція $f(x, y)$ інтегровна на множині

$$D=\{(x;y)\,|\,\alpha(y)\le x\le\beta(y), c\le y\le d\},$$

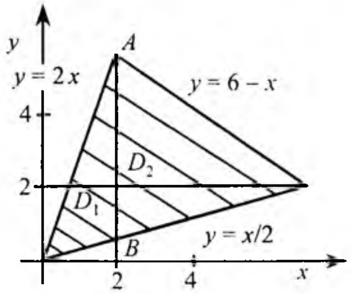
то

$$\iint_D f(x;y)\,dxdy=\int_c^d dy\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x;y)\,dx. \qquad (2)$$

Задача 6.8. Знайти подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy$, якщо $f(x;y)=(1+x+y)^{-2}$, D — трикутник, обмежений прямими $x=2y$; $y=2x$; $x+y=6$.

Трикутник D зображено на рисунку. Відрізком AB поділимо область D на дві області D_1 і D_2. Тоді:

$$I=\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x;y)\,dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x;y)\,dxdy.$$



За формулою (1) знаходимо

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)dx\,dy=\int_0^2 dx\int_{x/2}^{2x}\frac{dy}{(x+y+1)^2}=\int_0^2\left(-\frac{1}{x+y+1}\right)\Bigg|_{x/2}^{2x}dx=$$

$$=\int_0^2\left(-\frac{1}{3x+1}+\frac{1}{\frac{3}{2}x+1}\right)dx=-\frac{1}{3}\ln 7+\frac{2}{3}\ln 4.$$

$$\iint\limits_{D_2} f(x;y)dxdy=\int_2^4 dx\int_{x/2}^{6-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}=\int_2^4\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{\frac{3}{2}x+1}\right)dx=$$

$$=-\frac{2}{7}+\frac{2}{3}(\ln 7-\ln 4).$$

Отже,

$$I=\frac{1}{3}\ln 7-\frac{2}{7}.$$

Криволінійний інтеграл першого роду

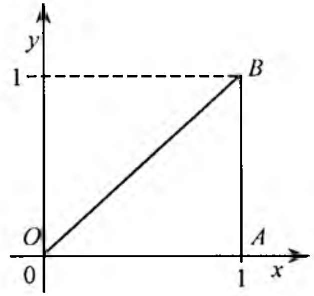
Якщо гладку криву Г задано рівнянням $x=x(t), y=y(t), z=z(t), \alpha\le t\le\beta$, а функція $f(x,y,z)$ неперервна на кривій Г, то

$$\int\limits_\Gamma f(x,y,z)\,ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt. \qquad (1)$$

Якщо Г — гладка плоска крива, задана рівнянням $y=f(x)$, $a\le x\le b$, то $\int\limits_\Gamma f(x;y)\,ds=\int_a^b f(x;f(x))\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$ (2)

Якщо Г — гладка плоска крива, задана рівнянням $x=\varphi(y)$, $c\le y\le d$, то $\int\limits_\Gamma f(x;y)\,ds=\int_c^d f(\varphi(y),y)\sqrt{1+(\varphi'(y))^2}\,dy.$ (3)

Задача 6.9. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_\Gamma (x+y)ds$, де Г — межа трикутника з вершинами O (0; 0), A (1; 0), B (1; 1).



Нехай I_1, I_2, I_3 — криволінійні інтеграли від функції $x+y$ по відрізках відповідно AB, BO, OA.

Відрізок AB задається рівнянням $x=1$, $0\le y\le 1$, тому за формулою (1) маємо:

$$I_1=\int_0^1(y+1)dy=\frac{3}{2}.$$

Відрізки BO і OA задаються відповідно рівняннями $y=x$; $0\le x\le 1$; $y=0$; $0\le x\le 1$.

За формулою (2) знаходимо

$$I_2=\int_0^1 2x\sqrt{2}\,dx=\sqrt{2};$$

$$I_3=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}.$$

Отже,

$$I=I_1+I_2+I_3=2+\sqrt{2}.$$

Криволінійний інтеграл другого роду

Якщо гладку криву Γ задано рівнянням $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$; $\alpha \le t \le \beta$, а вектор-функція $\vec{F}$ $(P;\ Q;\ R)$ неперервна на Г, то

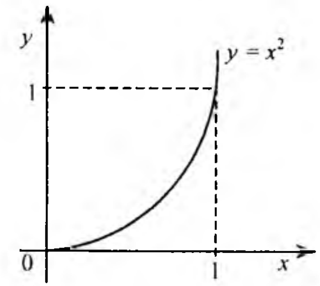
$$\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\int_\alpha^\beta \big(P(x(t);\ y(t);\ z(t))x'(t)+Q(x(t);\ y(t); z(t))y'(t)+ R(x(t);\ y(t);\ z(t))z'(t)\big)\,dt. \qquad (1)$$

Якщо Г — плоска гладка крива, задана рівнянням $y = f(x)$ $a \le x \le b$, то

$$\int_\Gamma P(x;y)\,dx=\int_a^b P(x;f(x))\,dx; \qquad (2)$$

$$\int_\Gamma Q(x;y)\,dy=\int_a^b Q(x;f(x))f'(x)\,dx. \qquad (3)$$

Задача 6.10. Обчислити криволінійний інтеграл $I=\int_\Gamma ydx+xdy$ за кривою Г з початком (0; 0) і кінцем A (1; 1), якщо Г — дуга параболи $y=x^2$.



Якщо Г — дуга параболи, застосовуємо формули (2) і (3). Маємо:

$$\int_\Gamma ydx=\int_0^1 x^2dx; \qquad \int_\Gamma xdy=\int_0^1 2x^2dx; \qquad I=\int_0^1 3x^2dx=1.$$

Застосування інтегрального числення

Довжина дуги кривої

Якщо криву задано рівнянням $y=f(x)$, то довжина дуги від $x=a$ до $x=b$ обчислюється за формулою:

$$I=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \qquad (1)$$

Якщо криву задано рівнянням $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, то довжина дуги обчислюється за формулою:

$$I=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt. \qquad (2)$$

Задача 6.11. Обчислити довжину дуги кривої $y=f(x)$ від $x=a$ до $x=b$, якщо

$f(x)=3(e^{x/6}+e^{-x/6})$, $a=0;\ b=3.$

Застосовуємо формулу (1).
Тоді

$$I=\int_0^3\sqrt{1+\left(\frac{3}{6}\right)^2\left(e^{x/6}-e^{-x/6}\right)^2}\,dx=\int_0^3\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{x/3}-2+e^{-x/3}\right)}\,dx=$$

$$=\int_0^3\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{x/3}+\frac{1}{4}e^{-x/3}}\,dx=\int_0^3\sqrt{\frac{e^{2x/3}+2e^{x/3}+1}{4e^{x/3}}}\,dx=$$

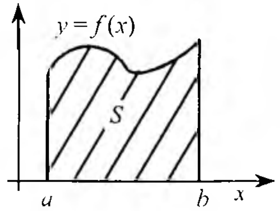
$$=\frac{1}{2}\int_0^3 e^{-x/6}\sqrt{\left(e^{x/3}+1\right)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^3 e^{-x/6}\left(e^{x/3}+1\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^3\left(e^{x/6}+e^{-x/6}\right)dx=\frac{1}{2}\left(6e^{x/6}-6e^{-x/6}\right)\Big|_0^3=$$

$$=\frac{6}{2}\left(e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}\right)=3\left(\sqrt{e}-\frac{1}{\sqrt{e}}\right).$$

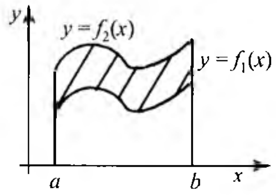
Площа фігури

1. Припустимо, $y=f(x)$ — невід'ємна і неперервна на відрізку $[a;\ b]$. Тоді площа S під графіком кривої $y=f(x)$ на $[a;\ b]$ чисельно дорівнює визначеному інтегралу $\int_a^b f(x)\,dx$:



$$S=\int_a^b f(x)dx\ . \qquad (1)$$

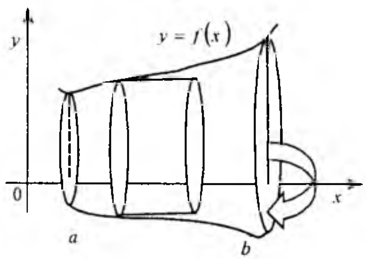
2. Нехай на відрізку $[a;\ b]$ задано неперервні функції $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$, такі що $f_2(x)\geq f_1(x)$. Тоді площа S фігури, утвореної кривими $y=f_2(x)$ і $y=f_1(x)$ на відрізку $[a;\ b]$, обчислюється за формулою:



$$S=\int_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx\ . \qquad (2)$$

Обчислення об'ємів тіл обертання

Нехай на відрізку $[a;\ b]$ задано неперервну знакосталу функцію $y=f(x)$. Потрібно знайти об'єм V_x тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$.



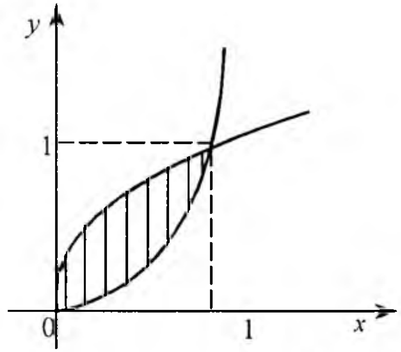
$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \ (3)$$

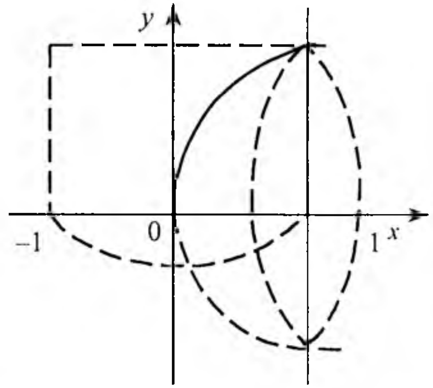
Аналогічно

$$V_y=\pi\int_a^b \varphi^2(y)\,dy. \ (4)$$

Задача 6.12. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=f_1(x)$ і $y=g_1(x)$, та знайти об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y=f_2(x)$; $y=g_2(x)$; $x=h(y)$ навколо осі Ox, якщо

$$f_1(x)=x^2,\quad f_2(x)=2xe^x,\quad g_1(x)=\sqrt{x},\quad g_2(x)=0,\quad h(y)=1.$$





Зробимо рисунок фігури, обмеженої лініями $y=x^2$ і $y=\sqrt{x}$.

Знайдемо точки перетину ліній $y=x^2$ і $y=\sqrt{x}$: $x^2=\sqrt{x}\Rightarrow x_1=0$; $x_2=1$.

Отже, за формулою (2) маємо:

$$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left.\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\,.$$

Виконаємо рисунок тіла обертання фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі Ox.

Застосовуємо формулу (3):

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx\,,$$

або

$$V = \pi\int_0^1 \left(2xe^x\right)^2 dx = 4\pi\int_0^1 x^2 e^{2x} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x^2; \\ e^{2x}dx = dv; \\ v = \int e^{2x}dx = \dfrac{1}{2}e^{2x}; \\ du = 2xdx. \end{array} \right| = 4\pi\left(\frac{1}{2}x^2e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{2}{2}\int_0^1 xe^{2x}dx\right) = 4\pi\left(\frac{1}{2}e^2 - \int_0^1 xe^{2x}dx\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x; \\ e^{2x}dx = dv; \\ v = \dfrac{1}{2}e^{2x}; \\ du = dx. \end{array} \right| = 4\pi\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^{2x}x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx\right) =$$

$$= 4\pi\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1\right) = 4\pi\cdot\frac{1}{4}\left(e^2 - e^0\right) = \pi\left(e^2 - 1\right).$$

Формули наближеного обчислення визначеного інтеграла

$$\int_a^b f(x)dx$$

1. Формули прямокутників:

а) $\int_a^b f(x)\,dx \approx \dfrac{b-a}{n}\left(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right)$; (1)

б) $\int_a^b f(x)\,dx \approx \dfrac{b-a}{n}\left(y_1 + y_2 + \ldots + y_n\right)$. (2)

2. Формула трапецій:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right). \quad (3)$$

3. Формула параболічних трапецій (Сімпсона):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\left(y_0 + y_{2n} + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}\right)\right),$$

$n = 2k$. (4)

Задача 6.13. Обчислити наближено інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, користуючись формулами:

а) лівих прямокутників;
б) правих прямокутників;
в) трапецій;
г) Сімпсона,

якщо $a = 7;\ b = 17,\ f(x) = \left(3x^5 + 1\right)^{-1/2},\ n = 10$.

Обчислимо значення $f(x_i),\ i = 0, \ldots, 10$, і наведемо їх у таблиці:

i	x_i	y_i
0	7	0,0045
1	8	0,003
2	9	0,0024
3	10	0,002
4	11	0,0014
5	12	0,0012
6	13	0,001
7	14	0,0008
8	15	0,0006
9	16	0,0005
10	17	0,00048

Підставивши знайдені значення у формули (1), (2), (3), (4), дістанемо:

1. а) $I \approx 0{,}0174$;
   б) $I \approx 0{,}0134$.
2. $I \approx 0{,}0154$.
3. $I \approx 0{,}01529$.

Задача 6.14. Нехай $f(x)$ — навантаження на електростанцію (у кіловат-годинах); x — кількість годин, що відраховуються від початку доби. Обчислити витрати електроенергії за n діб, якщо $f(x)=3x^2+16x+42$; $n=5$.

Витрати електроенергії обчислюються за формулою:

$$\boxed{\text{Витрати} = \int_a^b f(x)\,dx.}$$

У даному випадку $a = 0$, $b = 5 \cdot 24 = 120$.
Отже,

$$\text{витрати} = \int_0^{120}\left(3x^2+16x+42\right)dx = \left(\frac{3x^3}{3}+16\frac{x^2}{2}+42x\right)\Bigg|_0^{120} =$$

$$=\left(x^3+8x^2+42x\right)\Big|_0^{120} = 120\left(120^2+8\cdot120+42\right)=$$

$$=120\,(14400+960+42)=1\ 848\ 240\ .$$

Задача 6.15. Витрати виробництва $K(x)$ визначаються за формулою:

$$K(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,$$

де x — кількість вироблених одиниць продукції. Обчислити середнє значення витрат виробництва, якщо обсяг його змінюється від a до b умовних одиниць. Знайти обсяг продукції, при якому витрати набувають середнього значення; $\alpha=1$, $\beta=5$, $\gamma=6$, $a=1$, $b=11$.

Середнє значення μ функції $K(x)$ можна знайти за теоремою про середнє:

$$\int_a^b K(x)\,dx=\mu(b-a),$$

або

$$\mu=\frac{\int_1^{11}\left(x^2+5x+6\right)dx}{(11-1)}=\frac{\left(\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+6x\right)\Big|_1^{11}}{10}=$$

$$=\frac{1}{10}\left(\frac{11^3}{3}+\frac{5}{2}11^2+66-\frac{1}{3}-\frac{5}{2}-6\right)=$$

$$=\frac{1}{10}\left(\frac{1330}{3}+60+\frac{600}{2}\right)=\frac{1}{10}\left(360+\frac{1330}{3}\right)=80{,}3333\ldots\approx80{,}33.$$

Знайдемо обсяг продукції, при якому витрати набувають середнього значення 80,33. Для цього розв'яжемо рівняння:

$$x^2+5x+6=80{,}33;$$

$$x^2+5x-74{,}33=0;$$

$$D=25+4\cdot74{,}33=322{,}32\approx(17{,}95)^2;$$

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm17{,}95}{2};$$

$x_1 < 0$ — не задовольняє умову задачі.
Тому $x \approx 6{,}476$.

Розділ 7. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Диференціальним рівнянням (ДР) першого порядку з відокремленими змінними називаються рівняння виду:

$$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0\,, \qquad (1)$$

де $f(x)$, $x \in (a;\, b)$; $g(y)$, $y \in (c;\, d)$ — неперервні функції.

Загальним інтегралом рівняння (1) є

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = c\,,$$

де с — довільна стала.

До рівняння (1) зводиться ***диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:***

$$f_1(x)g_1(y)y' + f(x)g(y) = 0\,, \qquad (2)$$

або

$$y' = f(x)g(y)\,. \qquad (3)$$

Якщо $f_1(x) \neq 0$, $g(y) \neq 0$, то, поділивши обидві частини рівняння (2) на добуток $f_1(x)g(y)$ (а рівняння (3) на $g(y)$), дістанемо рівняння виду (1):

$$\frac{g_1(y)}{g(y)}dy + \frac{f(x)}{f_1(x)}dx = 0\,,$$

загальним інтегралом якого є $\int \frac{g_1(y)}{g(y)}dy + \int \frac{f(x)}{f_1(x)}dx = C$.

Задача 7.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x + xy + + y'\,(y + xy) = 0.$$

Запишемо це рівняння у вигляді $x\,(1 + y)\,dx + y\,(1 + x)\,dy = 0$. Вважаємо, що $x \neq -1$, $y \neq -1$. Поділимо обидві його частини на $(1 + x)(1 + y)$ і виконаємо інтегрування:

$$\int \frac{xdx}{1+x} + \int \frac{ydy}{1+y} = C\,.$$

Обчислимо інтеграл

$$\int \frac{zdz}{1+z} = \int \frac{(z+1-1)dz}{1+z} = \int (1 - \frac{1}{1+z})dz = \int dz - \int \frac{dz}{1+z} = z - \ln|1+z|,$$

дістанемо загальний розв'язок заданого рівняння $x + \ln x + y + \ln y = C$.

Диференціальне рівняння називається ***лінійним***, якщо воно лінійне відносно шуканої функції $y\,(x)$ та всіх її похідних:

$$p(x)\,y' + g\,(x)\,y = f\,(x), \qquad (4)$$

де функції $p(x)$, $g\,(x)$, $f\,(x)$ — неперервні на деякому інтервалі $(a;\, b)$.

Розв'язок рівняння (4) шукаємо у вигляді $y = u(x)\cdot v(x)$. Одна з цих функцій вибирається довільно, при цьому інша функція має визначатися залежно від першої так, щоб їхній добуток $u \cdot v$ задовольняв рівняння (4). Цей метод відшукання розв'язку рівняння (4) називається ***методом Бернуллі***. Для розв'язання рівняння (4) ще застосовується ***метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)***.

Задача 7.2. Знайти розв'язок рівняння $y'\cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$, який задовольняє умову $y\,(0) = 0$.

Нехай $y = u(x)\;v(x)$, тоді $y' = u'v + uv'$. Після підставлення в рівняння матимемо $u'\;v\cos^2 x + u(v'\cos^2 x + v) = \operatorname{tg} x$. Виберемо функцію $v(x)$ так, щоб вираз у дужках лівої частини рівняння дорівнював нулю, а саме: $v'\cos^2 x + v = 0$. Інтегруючи це рівняння, дістанемо: $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{\cos^2 x}$ або $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{\cos^2 x}$; $\ln v = -\operatorname{tg} x$; $v = e^{-\operatorname{tg} x}$.

Для функції $u(x)$ маємо рівняння: $u'e^{-\operatorname{tg} x}\cos^2 x = \operatorname{tg} x$;

$du = \frac{e^{\operatorname{tg} x}\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx$, або $u(x) = \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx = e^{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x - 1) + C$. Отже, усі розв'язки рівняння подаються у вигляді $y\,(x) = \operatorname{tg} x - 1 + Ce^{-\operatorname{tg} x}$.

Використовуючи умову $y\,(0) = 0$, знаходимо значення сталої C; $0 = -1 + C$; $C = 1$ і відповідний частинний розв'язок рівняння: $y(x) = \operatorname{tg} x - 1 + e^{-\operatorname{tg} x}$.

Диференціальне рівняння $P(x, y)dx + Q(x, y)\,dy = 0$ називається *однорідним*, якщо $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ є однорідними функціями одного й того самого виміру. Нагадаємо, що $f(x, y)$ називають ***однорідною функцією виміру*** m, коли вона задовольняє тотожність $f(tx, ty) = t^m f(x, y)$ для всіх $t > 0$.

Згідно з припущенням про однорідність функцій $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ диференціальне рівняння можна записати у вигляді:

$$x^m P\left(1, \frac{y}{x}\right)dx + x^m Q\left(1, \frac{y}{x}\right)dy = 0\,.$$

Застосувавши заміну $y = ux$, дістанемо:

$$P(1, u)\,dx + Q(1, u)\,(udx + xdu) = 0,$$

звідки

$$\frac{dx}{x} + \frac{Q(1, u)\,du}{P(1, u) + uQ(1, u)} = 0\,.$$

Змінні відокремлені. Інтегрування дає:

$$\ln x + \int \frac{Qdu}{P + uQ} = \ln C \ \text{ або } \ x = C\exp\left(-\int \frac{Qdu}{P + uQ}\right).$$

Диференціальне рівняння $y' = f(x; y)$ називається ***однорідним***, якщо $f(x, y)$ — однорідна функція нульового виміру.

Задача 7.3. Розв'язати рівняння: $y^2dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$.

Візьмемо $y = ux$, $dy = udx + xdu$. Тоді $x^2u^2dx + (x^2 - x^2u) \times$ $\times\,(udx + xdu) = 0$, або $\dfrac{dx}{x} + \dfrac{1-u}{u}du = 0$. Після інтегрування маємо: $\ln x + \ln u - u = \ln C$. Остаточно маємо: $y = C\exp\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Рівняння виду $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}\,y' + a_ny = f(x)$, де a_i — сталі, називають ***лінійним рівнянням зі сталими коефіцієнтами***. Таке рівняння завжди можна зінтегрувати, тобто знайти його загальний розв'язок.

Спинимося спочатку на відповідному йому однорідному рівнянні:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}\,y' + a_ny = 0.$$

Шукатимемо частинний розв'язок такого рівняння, використовуючи метод Ейлера, у вигляді $y = e^{rx}$, де r — константа. Підставляючи в ліву частину, матимемо $e^{rx}(r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \cdots + a_{n-1} r + a_n) = 0$. Останній вираз тотожно дорівнюватиме нулю, а отже, і e^{rx} буде розв'язком, якщо r — корінь рівняння:

$$r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0,$$

яке називають **характеристичним** для відповідного диференціального рівняння. Розглянемо деякі випадки однорідних рівнянь другого порядку на прикладах.

Приклад.
Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 7y' + 6y = 0$.

Відповідне характеристичне рівняння $r^2 - 7r + 6 = 0$ має два різних дійсних корені $r_1 = 6$ і $r_2 = 1$. Тоді e^{6x} і e^x — частинні лінійно незалежні розв'язки рівняння, а загальний його розв'язок має вигляд: $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x$.

Приклад.
Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + y = 0$.

Характеристичне рівняння $r^2 - 2r + 1 = 0$ має два *кратні корені* $r_1 = r_2 = 1$. Тому загальний розв'язок рівняння має вигляд $y = (C_1 + C_2x)\,e^x$.

Приклад.
Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Характеристичне рівняння $r^2 - 4r + 13 = 0$ має два різні уявні корені $r_1 = 2 + 3i$, $r_2 = 2 - 3i$. Корені характеристичного рівняння ***комплексні*** і ***спряжені***, тому їм відповідають частинні розв'язки $y_1 = e^{2x}\cos 3x$ і $y_2 = e^{2x}\sin 3x$. Тоді $y = e^{2x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x)$ — загальний розв'язок заданого рівняння.

Задача 7.4. Знайти розв'язок рівняння $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$ (5), який задовольняє початкові умови $y(\ln 2) = 1;\ y'(2\ln 2) = 1$.

Характеристичне рівняння $r^2 - 2r - 3 = 0$ має корені $r_1 = 3$ і $r_2 = -1$. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння: $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння

20[635]

шукатимемо у вигляді $y = Ae^{4x}$ (6), $y' = 4Ae^{4x}$, $y'' = 16Ae^{4x}$ (7). Підставивши (6), (7) у рівняння (5), дістанемо $16Ae^{4x} - 8Ae^{4x} - 3Ae^{4x} = e^{4x} - 3Ae^{4x} = e^{4x}$, або $5Ae^{4x} = e^{4x}$, звідки $A = 0{,}2$. Загальний розв'язок рівняння (5): $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{5}e^{4x}$. Для визначення C_1 і C_2 скористаємося початковими умовами:

$$\begin{cases} C_1e^{3\ln 2} + C_2e^{-\ln 2} + \frac{1}{5}e^{4\ln 2} = 1; \\ 3C_1e^{6\ln 2} - C_2e^{-2\ln 2} + \frac{4}{5}e^{8\ln 2} = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8C_1 + \frac{1}{2}C_2 + \frac{16}{5} = 1; \\ 192C_1 - \frac{1}{4}C_2 + \frac{1024}{5} = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо $C_1 = -\frac{2049}{1960}$, $C_2 = \frac{604}{49}$.

Отже, $y = -\frac{2049}{1960}e^{3x} + \frac{604}{49}e^{-x} + \frac{1}{5}e^{4x}$.

Розділ 8. РЯДИ

Числові ряди

Числовим рядом називається вираз виду

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n ,$$

а числа u_1, u_2, ... — ***членами ряду***; n-й член u_n має назву ***загальний член ряду***.

Частинні суми ряду утворюють таку числову послідовність:

$$S_1 = u_1,$$
$$S_2 = u_1 + u_2,$$
$$\ldots$$
$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$
$$\ldots$$

Числовий ряд називається ***збіжним***, якщо існує границя послідовності його частинних сум $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, при цьому число S — це ***сума ряду***. Якщо ця границя не існує, то ряд називається ***розбіжним***.

Необхідна умова збіжності ряду.

Якщо ряд збіжний, то границя його загального члена дорівнює нулю, тобто $\left(\lim_{n\to\infty} S_n = S\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} u_n = 0\right)$.

Наслідок. Якщо $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд буде розбіжним.

Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів.

Ознака порівняння.

Якщо для рядів із додатними членами

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$
$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \qquad (2)$$

виконується нерівність $u_n \leq v_n$, то

1) зі збіжності ряду (2) випливає збіжність ряду (1);
2) із розбіжності ряду (1) випливає розбіжність ряду (2).

20*

Ознака порівняння в граничній формі

Якщо для рядів із додатними членами (1) і (2) існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=C\ (0<C<\infty)$, то ці ряди або обидва збіжні, або обидва розбіжні.

Для застосування ознаки порівняння крім досліджуваного ряду потрібно будувати ряд порівняння, збіжність якого відома або її можна легко встановити.

Як ряд порівняння рекомендується брати такі ряди:

1. Геометричний ряд $a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$, який є збіжним при $|q|<1$ та розбіжним при $|q|\ge 1$.

2. Ряд Діріхле (узагальнений гармонічний ряд)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots,$$

який збіжний при $p>1$ та розбіжний при $p\le 1$.

Ознака Даламбера

Якщо для знакододатного ряду існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, то

при $l<1$ — ряд збіжний;
при $l>1$ — ряд розбіжний;
при $l=1$ — питання про збіжність ряду ознака не розв'язує.

Ознака Коші (радикальна)

Якщо для знакододатного ряду існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, то

при $l<1$ — ряд збіжний;
при $l>1$ — ряд розбіжний;
при $l=1$ — питання про збіжність ряду ознака не розв'язує.

Ознака Коші (інтегральна)

Якщо функція $f(x)$ — неперервна, додатна і монотонно спадна при $x\ge 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ і невластивий інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}f(x)dx$ або обидва збіжні, або обидва розбіжні.

Ряд називається ***знакозмінним***, *якщо він містить нескінченну кількість як додатних, так і від'ємних членів.*

Збіжність знакозмінних рядів може бути *абсолютна* чи *умовна.*

Знакозмінний ряд називається ***абсолютно збіжним***, якщо він збіжний, а також збіжним є ряд, складений з абсолютних величин його членів.

Знакозмінний ряд називається ***умовно збіжним***, якщо він збіжний, а ряд, складений з абсолютних величин його членів, розбіжний.

Достатня умова збіжності знакозмінного ряду.

Якщо збіжний ряд буде складено з абсолютних величин членів знакозмінного ряду, то збіжним виявиться і сам знакозмінний ряд.

Знакозмінний ряд виду $+a_1-a_2-a_3+a_4-\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots$, $(a_n>0)$ називається ***знакопочерговим***.

Ознака Лейбніца

Якщо для знакопочергового ряду виконуються такі умови:

1. $a_1>a_2>\ldots>a_n>a_{n+1}>\ldots$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,

то знакопочерговий ряд буде збіжним.

Задача 8.1. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ (для знакозмінного ряду встановити, абсолютною чи умовною є його збіжність).

1. $\boxed{f(n)=\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+1}.}$

На основі цих даних побудуємо такий ряд:

$$\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{11}-\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{19}-\sqrt{10}\right)+\ldots+\left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+1}\right)+\ldots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+1}\right).$$

Загальний член цього ряду $u_n=f(n)=\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+1}>0$, а тому ряд є знакододатним.

Перевіримо для цього ряду необхідну умову збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+1}}{1}\right)=|\infty-\infty|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+1-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2+1}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{3}{2}\neq 0\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ необхідна умова збіжності не виконується, а тому ряд є розбіжним.

2. $\boxed{f(n)=n^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{n^2}.}$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^2}=\sqrt{1}\sin 1+\sqrt{2}\sin\frac{1}{2^2}+\sqrt{3}\sin\frac{1}{3^2}+\ldots+$ $+\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^2}+\ldots$ є знакододатним, бо $u_n=f(n)=\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^2}>0$. Для дослідження збіжності цього ряду застосуємо ознаку порівняння:

$$u_n=\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^2}<\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n\sqrt{n}}=v_n\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Побудований ряд порівняння є збіжним рядом Діріхле $\left(p=\frac{3}{2}>1\right)$, а тому і досліджуваний ряд є збіжним за ознакою порівняння.

3. $\boxed{f(n)=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right).}$

Загальний член ряду $u_n=f(n)=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)>0\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ — знакододатний.

Виберемо ряд порівняння $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Він збіжний як ряд Діріхле із $p=2>1$.

Розглянемо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\ln e=1.$ За ознакою порівняння (у граничній формі) досліджуваний ряд збіжний.

4. $\boxed{f(n)=\frac{n^2}{n!}.}$

Загальний член ряду $u_n=\frac{n^2}{n!}$;

$$u_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)!};\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 n!}{(n+1)!n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 n!}{(n+1)n!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}{n+1}=0<1.$$

Отже, даний ряд за ознакою Даламбера збігається.

5. $\boxed{f(n)=\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}.}$

Загальний член ряду $u_n=\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Розглянемо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(\frac{n}{3n+1}\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}}<1.$$

Отже, даний ряд за ознакою Коші збіжний.

6. $\boxed{f(n)=\dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}.}$

Загальний член ряду

$$u_n=\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}=f(n)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}.$$

Невластивий інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{d\ln(x+1)}{\ln^2(x+1)}=$
$=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln(x+1)}\right)\Bigg|_1^b=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln(b+1)}\right)=\frac{1}{\ln 2}$ буде збіжним. Отже, за інтегральною ознакою ряд збігається.

7. $\boxed{f(n)=(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\dfrac{n}{2^n}.}$

Щоб виявити тип ряду, розгорнемо його:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{2^n}=-\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}-\ldots+(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{2^n}+\ldots$$

Неважко помітити, що ряд є знакозмінним.
Утворимо ряд з абсолютних величин членів ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}.$$

Дослідимо збіжність знакододатного ряда за допомогою ознаки Даламбера. Тут $|u_n|=\dfrac{n}{2^n}$; $|u_{n+1}|=\dfrac{n+1}{2^{n+1}}$ та $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n}=\dfrac{1}{2}<1.$

За ознакою Даламбера ряд, утворений із абсолютних величин членів ряду, збігається. Отже, збігається і початковий ряд, причому абсолютно.

8. $\boxed{f(n)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}.}$

Ряд з даним загальним членом знакопочерговий. Ряд складено з абсолютних величин членів ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, що є розбіжним як ряд Діріхле з $p=\dfrac{1}{2}<1$.

Початковий ряд знакочерговий, для дослідження його збіжності можна застосувати ознаку Лейбніца:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\Rightarrow|u_n|>|u_{n+1}|$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

Умови теореми Лейбніца виконано, отже, ряд збіжний, але умовно.

Функціональні ряди

> Ряд $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots,$ (1)
>
> члени якого $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$, … — функції від аргументу x, називається ***функціональним рядом***.

При $x=x_0$ ряд (1) перетворюється на числовий

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots. \qquad (2)$$

Якщо ряд (2) збігається (розбігається), то кажуть, що при $x=x_0$ збігається (розбігається) функціональний ряд (1).

> Усі значення аргументу x, при яких функціональний ряд збіжний, називаються ***областю збіжності функціонального ряду.***

В області збіжності існує границя частинних сум функціонального ряду

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x);\ S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x),$$

де функція $S(x)$ — сума ряду.

Ряд $r_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+...$ називається ***залишком ряду***. В області збіжності функціонального ряду виконується рівність:

$$S(x)=S_n(x)+r_n(x),$$

де $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$.

У загальному випадку при дослідженні на збіжність функціонального ряду використовується та сама методика, що й для знакозмінного ряду.

Задача 8.2. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F(x, n)$, якщо $F(x, n)=\dfrac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$.

Цей ряд є знакододатним. Отже, маємо право застосувати до нього ознаку Даламбера, при цьому x будемо вважати за деякий параметр:

$$|u_n(x)|=\frac{\sqrt{n}}{|x-2|^n};$$

$$|u_{n+1}(x)|=\frac{\sqrt{n+1}}{|x-2|^{n+1}};$$

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\frac{1}{|x-2|}\sqrt{\frac{n+1}{n}}=\frac{1}{|x-2|}\sqrt{1+\frac{1}{n}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x-2|}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{|x-2|}.$$

За ознакою Даламбера ряд збігатиметься, якщо

$$\frac{1}{|x-2|}<1 \Leftrightarrow |x-2|>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2>1 \\ x-2<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<1 \end{array}\right.,$$

і розбігатиметься, якщо

$$\frac{1}{|x-2|}>1, \Leftrightarrow |x-2|<1, \Leftrightarrow \begin{cases} x-2<1, \\ x-2>-1, \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<3.$$

Залишається дослідити ряд на збіжність у точках $x = 1$ і $x = 3$. При $x = 1$ маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}$, а при $x = 3$ — ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}$. Ці ряди розбігаються, бо, очевидно, для них не виконується необхідна умова збіжності. Таким чином, область збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{|x-2|^n}$ буде $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. У цій області ряд збігається абсолютно.

Степеневі ряди

Функціональний ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

називається ***степеневим рядом***. Його загальний член $u_n(x)=a_nx^n$; числа a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... називаються ***коефіцієнтами степеневого ряду***.

Розглядають і більш загальний вигляд степеневого ряду:

$$a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+...+a_n(x-c)^n+...$$

Теорема Абеля.

Якщо степеневий ряд:

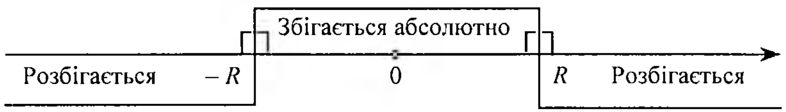
1) збігається при $x = x_0$, то він абсолютно збігається для будь-якого x, що задовольняє нерівність $|x|>|x_0|$;

2) розбігається при $x = x_1$, то він розбігається при всіх x, що задовольняють нерівність $|x| > |x_1|$.

Інтервал і радіус збіжності степеневого ряду

Інтервалом збіжності степеневого ряду називається такий інтервал $(-R; R)$, у всіх внутрішніх точках якого ряд збігається абсолютно, а для всіх точок $|x| > R$ ряд є розбіжним. При цьому число $R > 0$ називається ***радіусом збіжності*** степеневого ряду.

Геометрична інтерпретація



Для узагальненого степеневого ряду інтервал збіжності $(c - R; c + R)$ має центр симетрії в точці $x = c$.

Зауваження. На кінцях інтервалу збіжності, тобто в точках $x = -R$, $x = R$, ряд може як збігатися, так і розбігатися. Це питання потребує спеціального дослідження в кожному конкретному випадку.

Радіус збіжності визначається за формулою:

$$R = \frac{1}{l} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Використовуючи радикальну ознаку Коші, можна дістати формулу для радіуса збіжності степеневого ряду в такому вигляді:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Зауваження. Формулами можна користуватися лише в тих випадках, коли зазначені границі існують. У загальному випадку дослідження збіжності степеневого ряду виконується за такою самою методикою, як і для довільного функціонального ряду.

Приклад 1. Знайти область збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

$a_n = \frac{1}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$;

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right) = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty .$$

Звідси інтервал збіжності даного ряду $(-\infty, +\infty)$, тобто ряд збіжний на всій числовій осі.

Приклад 2. Дослідити збіжність ряду:

$$(x-2) + \frac{1}{2^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3^2}(x-2)^3 + \dots .$$

Узявши $x - 2 = y$, дістанемо ряд

$$y + \frac{1}{2^2}y^2 + \frac{1}{3^2}y^3 + \dots + \frac{1}{n^2}y^n + \dots$$

Знайдемо радіус збіжності цього ряду:

$$a_n = \frac{1}{n^2},\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2},$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 1.$$

Дослідимо поводження ряду на кінцях інтервалу $(-1, 1)$. Якщо $y = 1$, дістанемо ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

який є збіжним як ряд Діріхле з $p = 2 > 1$.

Якщо $y = -1$, дістаємо ряд:

$$-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n^2}+\ldots .$$

Цей ряд збігається, оскільки збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, складений з абсолютних величин його членів.

Отже, область збіжності ряду:

$$-1 \le y \le 1.$$

Замінивши змінну y змінною x, дістанемо шукану область збіжності ряду:

$$-1 \le x-2 \le 1, \text{ або } 1 \le x \le 3.$$

Приклад 3. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^{n-1}x^{2n-2}.$$

У цьому прикладі слід застосувати безпосередньо ознаку Даламбера або радикальну ознаку Коші, оскільки формулою для радіуса збіжності скористатися не можна (даний ряд не містить усіх степенів x, тобто коефіцієнти $a_{2n-1}=0$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$).

Запишемо ряд, утворений з абсолютних величин членів ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}|x|^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^{2n-2}.$$

Застосуємо спочатку ознаку Даламбера:

$$u_n(x)=2^{n-1}x^{2n-2},\; u_{n+1}(x)=2^n x^{2n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n x^{2n}}{2^{n-1}x^{2n-2}}=x^2\lim_{n\to\infty}2=2x^2<1,$$

$$2x^2<1,\; |x|<\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, даний ряд збігається на інтервалі $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Дослідимо збіжність ряду на кінцях знайденого інтервалу.

а) $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^{n-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^{n-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2(n-1)}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+\ldots .$$

Знайдений числовий ряд розбігається, бо його загальний член $u_n=(-1)^{n-1}$ не прямує до нуля при $n\to\infty$.

б) $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}.$$

Ряд розбіжний.

Областю збіжності ряду є

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

За радикальною ознакою Коші дістанемо:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{n-1}x^{2n-2}}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{n-1}{n}}x^{\frac{2n-2}{n}}=\lim_{n\to\infty}2^{1-\frac{1}{n}}x^{2-\frac{2}{n}}=$$

$$=2^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)}x^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{n}\right)}=2x^2<1.$$

Звідси $|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ або $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Приклад 4. Визначити інтервал збіжності і знайти суму ряду

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots .$$

Розглянемо степеневий ряд

$$S(x)=1+x+x^2+x^3+\ldots .$$

Останній ряд є геометричною прогресією зі знаменником $q = x$ і першим членом $a = 1$. Застосувавши формулу $\left(S = \frac{a}{1-q}\right)$, дістанемо:

$$S(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Задана сума існує для всіх x, що задовольняють нерівність $|x| < 1$.
Інтегруючи рівність

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

у межах від 0 до x, дістаємо:

$$\int_0^x S(x)\,dx = \int_0^x \left(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\right)dx = \int_0^x \frac{1}{1-x}\,dx.$$

Тобто $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots = -\ln(1-x)$.

Цей ряд також збігається в інтервалі $|x| < 1$. Точка $x = -1$ належить області збіжності останнього ряду.

Зображення функцій степеневими рядами. Ряди Тейлора і Маклорена

Формули, що подають функцію $f(x)$ у вигляді степеневих рядів, мають вигляд:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f'(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \ldots .$$

Кажуть, що ряд Маклорена дає розвинення функції в ряд поблизу точки $x = 0$, а ряд Тейлора — поблизу точки $x = c$.

Теорема *(достатня умова розвинення функції в ряд Маклорена).*

Якщо на проміжку $[-R; R]$ похідні будь-якого порядку для функції $f(x)$ обмежені одним і тим самим числом $|f^{(n)}(x)| < M$, то на інтервалі $(-R; R)$ функцію $f(x)$ можна розкласти в ряд Маклорена (інакше кажучи, ряд Маклорена для $f(x)$ у кожній точці із $(-R; R)$ збігається абсолютно).

Приклад. Розвинути в ряд за степенями x функцію $f(x) = 2^x$.

Знайдемо значення функції та її похідних при $x = 0$:

$$\begin{aligned}
&f(x) = 2^x; && f(0) = 2^0 = 1;\\
&f'(x) = 2^x \ln 2; && f'(0) = \ln 2;\\
&f''(x) = 2^x (\ln 2)^2; && f''(0) = (\ln 2)^2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f^{(n)}(x) = 2^x (\ln 2)^n; && f^{(n)}(0) = \ln^n 2.
\end{aligned}$$

Оскільки $0 < \ln 2 < 1$, для будь-якого фіксованого x маємо $\left|f^{(n)}(x)\right| = 2^x \ln^n 2 < 2^x$, тобто достатня умова розвинення функції $f(x) = 2^x$ в ряд Маклорена виконується і ряд Маклорена для неї

$$2^x = 1 + x\ln 2 + \frac{x^2 \ln^2 2}{2!} + \ldots + \frac{x^n \ln^n 2}{n!} + \ldots$$

буде абсолютно збіжним для $x \in (-\infty; +\infty)$.

Зауваження. Залишок ряду Маклорена $r_n(x)$ можна замінити одним залишковим членом $\bar{r}_n(x)$, який у формі Лагранжа має такий вигляд:

$$\bar{r}_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \; -R < \xi < R.$$

Тоді ряд Маклорена набирає вигляду формули Маклорена:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!} x^k + \bar{r}_n(x).$$

Теорема. Для того щоб функцію $f(x)$ можна було розвинути в ряд Маклорена на інтервалі $x \in (-R; R)$, необхідно і достатньо, щоб на цьому інтервалі

$$\lim_{n\to\infty} \bar{r}_n(x) = 0.$$

Ряд Маклорена для деяких елементарних функцій

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Область збіжності $x \in (-\infty; +\infty)$;

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Область збіжності $x \in (-1; 1)$;

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

Область збіжності $x \in (-1; 1]$;

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Область збіжності $x \in [-1; 1]$.

Використовуючи ці формули, можна в деяких випадках записати розвинення функції в ряд Маклорена без обчислення коефіцієнтів цього ряду (тобто без обчислення похідних функцій).

Приклад. Розкласти в степеневий ряд функцію e^{x^2}.

У розкладі

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

замінюємо x на $-x^2$; дістаємо:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} \ldots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Задача 8.3. Розкласти функцію $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x + 1$ в ряд за степенями $(x-2)$.

Маємо:

$f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x + 1;$	$f(2) = 21;$
$f'(x) = 3x^2 + 10x - 4;$	$f'(2) = 28;$
$f''(x) = 6x + 10;$	$f''(2) = 22;$
$f'''(x) = 6;$	$f'''(2) = 6;$
$f^{IV}(x) = 0;$	$f^{IV}(2) = 0.$

Похідні порядку, вищого за третій, дорівнюють нулю. Ряд Тейлора для даної функції має вигляд

$$f(x) = 21 + \frac{28}{1!}(x-2) + \frac{22}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^3.$$

ДОДАТКИ

Додаток 1

ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ З ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

1. Вектори і дії з ними

1.1. Скаляри і вектори

Скалярні величини характеризуються числом, наприклад об'єм тіла, маса, температура. *Скаляром* називається будь-яке дійсне число. Векторні величини характеризуються числовою мірою і напрямом у просторі, наприклад швидкість, прискорення, сила. *Вектором* називається напрямлений відрізок. Зображається вектор стрілкою (рис. 1.1). Позначається: $\overrightarrow{AB}$ (A — початок, B — кінець вектора) або $\vec{a}$.

Часто замість стрілки в позначенні вектора записують горизонтальну риску, як, наприклад, на рис. 1.2 і 1.3.

Саме таке позначення використовується далі.

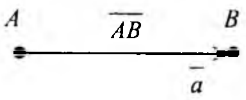


Рис. 1.1

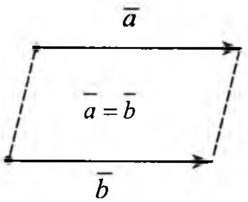


Рис. 1.2

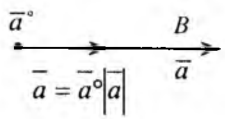


Рис. 1.3

Довжина вектора $\overline{a}$ або $\overline{AB}$ називається його *модулем* і позначається $|\overline{a}|=a, |\overline{AB}|=AB.$

1.2. Рівність векторів

Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називаються *рівними*, якщо вони однаково напрямлені: $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$, а їхні модулі рівні між собою. Записують: $\overline{a}=\overline{b}$ (див. рис. 1.2), тобто в результаті паралельного перенесення вони суміщаються.

За означенням рівності векторів за початок вектора береться будь-яка точка простору. Такі вектори називаються *вільними*. Векторна алгебра вивчає дії з вільними векторами.

Нульовий вектор — вектор, модуль якого дорівнює нулю, позначається: $\overline{a}=\overline{0}$. Для кожного вектора $\overline{a}$ маємо: $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$. Нульовим вектором є точка, напрям його невизначений.

Орт вектора. Ортом вектора $\overline{a}$ називається вектор $\overline{a}^{\circ}$: $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{a}^{\circ}$, $|\overline{a}^{\circ}|=1$ (рис. 1.3). Вираз вектора через його модуль і орт: $\overline{a}=|\overline{a}|\overline{a}^{\circ}$.

1.3. Додавання векторів

Додавання векторів визначається за правилом паралелограма або многокутника (рис. 1.4).

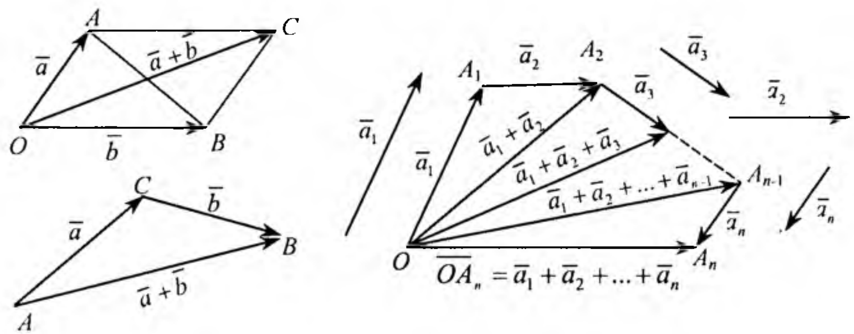


Рис. 1.4

Сума векторів замкненого многокутника: $\overline{a_1}+\overline{a_2}+...+\overline{a_n}=\overline{0}$ (рис. 1.5).

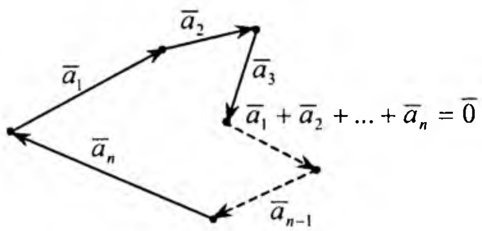


Рис. 1.5

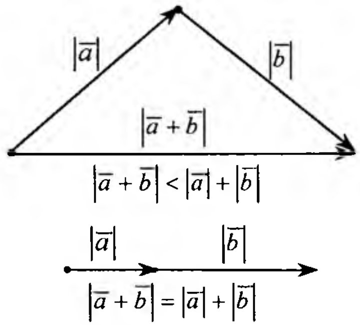


Рис. 1.6.

Модуль суми векторів $|\overline{a}+\overline{b}|\le|\overline{a}|+|\overline{b}|$ (рис. 1.6) пов'язаний з відношеннями між сторонами трикутника.

1.4. Закони додавання векторів

Закони додавання векторів:

1) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ — *переставний;*

2) $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$ — *сполучний.*

Протилежні вектори. Два вектора $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називаються взаємно протилежними, якщо вони мають рівні модулі $\left(|\overline{a}|=|\overline{b}|\right)$ і напрямлені протилежно $(\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b})$.

Вектор, протилежний вектору $\overline{a}$ позначається $-\overline{a}$.

Із $\overline{a}=\overline{AB}\Rightarrow-\overline{a}=\overline{BA}$. Сума протилежних векторів $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$.

Віднімання векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (різниця векторів позначається: $\overline{a}-\overline{b}$) — обернена операція щодо додавання векторів: $\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+(-\overline{b})$ (рис. 1.7).

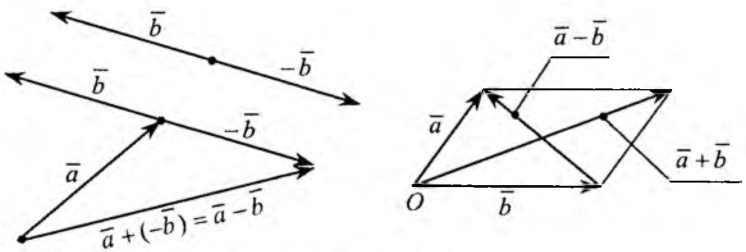


Рис. 1.7.

1.5. Множення вектора на скаляр

Множення вектора на скаляр. Добуток вектора $\overline{a}$ і скаляра λ (позначається $\lambda\overline{a}$) є вектор, який має такі властивості:

1) $|\lambda\overline{a}|=|\overline{a}\lambda|=|\lambda||\overline{a}|$;

2) якщо $\lambda>0$, то $\lambda\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{a}$; якщо $\lambda<0$, то $\lambda\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{a}$

3) якщо $\overline{a}=0$, то $\lambda\overline{a}=\overline{0}$; якщо $\lambda=0$, то $0\overline{a}=\overline{0}$.

Закони множення вектора на скаляр:

1) $\lambda\overline{a}=\overline{a}\lambda$ — *переставний;*

2) $\lambda(\mu\overline{a})=(\lambda\mu)\overline{a}$ — *сполучний;*

3) $\left.\begin{matrix}(\overline{a}+\overline{b})\lambda=\overline{a}\lambda+\overline{b}\lambda\\(\lambda+\mu)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}\end{matrix}\right\}$ — *розподільний.*

1.6. Лінійна комбінація векторів

Лінійна комбінація векторів. Якщо з векторами $\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_n$ виконуються операції додавання, віднімання і множення на скаляр, то вектор $\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+\ldots\lambda_n\overline{a}_n$ називається *лінійною комбінацією* заданих векторів. Операції додавання, віднімання і множення на скаляр називаються *лінійними операціями.*

Лінійні залежності між векторами. Вектори $\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_n$ називаються *лінійно залежними (незалежними),* якщо їхня лінійна комбінація є нуль-вектор $\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+\ldots\lambda_n\overline{a}_n=\overline{0}$ і хоча б одне з чисел λ_1, λ_2, ..., λ_n, не дорівнює нулю.

1.7. Колінеарні вектори

Колінеарні вектори. Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони паралельні між собою, однаково або протилежно напрямлені.

Колінеарні вектори $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}\uparrow\downarrow\overline{c}\parallel l$, і тільки колінеарні, належать одній прямій l зі спільним на ній початком O.

Нехай лінійна комбінація $\lambda_1\overline{a_1}+\lambda_2\overline{a_2}=\overline{0},\ \lambda_2\neq0.$

Звідси $\overline{a_2}=-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\overline{a_1}$, тобто вектор $\overline{a_2}$ колінеарний вектору $\overline{a_1}$.

Отже, два лінійно залежні вектори колінеарні. Якщо вектори $\overline{a}_1$ і $\overline{a}_2$ лінійно незалежні, то лінійна комбінація $\lambda_1\overline{a_1}+\lambda_2\overline{a_2}=\overline{0}$ при $\lambda_1=0$ і $\lambda_2=0$.

1.8. Компланарні вектори

Компланарні вектори. Вектори, паралельні одній площини, називаються *компланарними.*

Компланарні вектори зі спільним початком належать одній і тій самій площині (рис. 1.8).

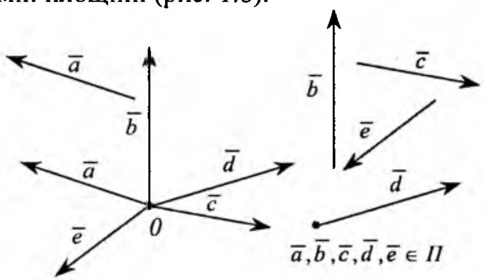


Рис. 1.8

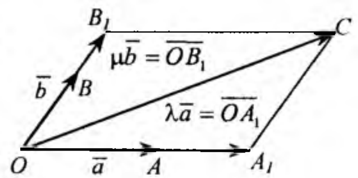


Рис. 1.9

Нехай три вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ — компланарні (рис. 1.9). Тоді $\overline{OA_1}=\lambda\overline{a}$, $\overline{OB_1}=\mu\overline{b}$, звідки

$$\overline{c}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{b},\ \ \lambda\neq 0,\ \mu\neq 0,$$

тобто три компланарні вектори лінійно залежні, і навпаки: три вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони компланарні.

Якщо некомпланарні орти ($\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3$) взаємно ортогональні, то вони утворюють ортогональний базис $(\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k})$ векторного простору: $\left|\overline{i}\right|=\left|\overline{j}\right|=\left|\overline{k}\right|=1$, $\overline{i}\perp\overline{j}\perp\overline{k}$, який визначає прямокутну систему координат Oxyz. Орти $\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}$ відповідно визначають осі координат: Ox — вісь абсцис, Oy - вісь ординат, Oz — вісь аплікат (рис. 1.10). В базисі $(\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k})$ радіус-вектор $\overline{r}=(x,y,z)$ точки $M\,(x,\ y,\ z)$ записується у вигляді: $\overline{r}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$.

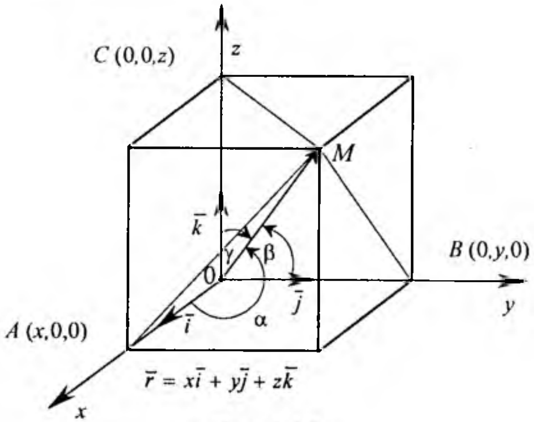


Рис. 1.10

На площині ортогональна система координат визначається базисом $(\overline{i},\overline{j})$. У базисі $(\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k})$ радіус-вектор $\overline{r}=\overline{OM}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда. Тому модуль радіуса-вектора $\overline{r}=(x,y,z)$ дорівнює $\left|\overline{r}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. На рис. 1.10 зображено модель прямокутної системи координат $Oxyz$.

Позначимо в прямокутних трикутниках (див. рис. 1.10) AOM, BOM і COM відповідно кути $\widehat{\overline{i},\overline{r}}=\alpha$, $(\widehat{\overline{j},\overline{r}})=\beta$, $(\widehat{\overline{k},\overline{r}})=\gamma$. Косинуси цих кутів ($\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$) називаються *напрямними косинусами* вектора $\overline{r}$. У цих

трикутниках $\left(\angle MAO=\angle MBO=\angle MCO=\frac{\pi}{2}\right)$: $\cos\alpha=\frac{x}{\left|\overline{r}\right|}$; $\cos\beta=\frac{y}{\left|\overline{r}\right|}$; $\cos\gamma=\frac{z}{\left|\overline{r}\right|}$. Звідси:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{x^2}{\left|\overline{r}\right|^2}+\frac{y^2}{\left|\overline{r}\right|^2}+\frac{z^2}{\left|\overline{r}\right|^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{\left|\overline{r}\right|^2}=1. \qquad (1)$$

Отже, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

1.9. Лінійні операції з векторами в координатній формі

1. Алгебраїчне додавання (сума і різниця векторів).
Нехай $\overline{a}=(x_1,y_1,z_1)$ і $\overline{b}=(x_2,y_2,z_2)$. Тоді

$$\overline{a}\pm\overline{b}=\left(x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k}\right)\pm\left(x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k}\right)=$$
$$=(x_1\pm x_2)\overline{i}+(y_1\pm y_2)\overline{j}+(z_1\pm z_2)\overline{k},$$
$$\overline{a}\pm\overline{b}=\left(x_1\pm x_2,\ y_1\pm y_2,\ z_1\pm z_2\right).$$

2. Множення вектора $\overline{a}=(x,y,z)$ на скаляр λ: $\lambda\overline{a}=(\lambda x,\ \lambda y,\ \lambda z)$.
3. Визначення вектора $\overline{a}$ за його початком і кінцем.

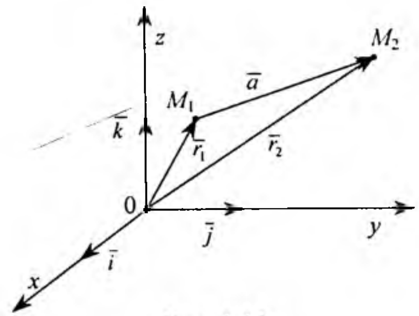


Рис. 1.11

Нехай (рис. 1.11) $\overline{r_1}=(x_1,y_1,z_1)$, $\overline{r_2}=(x_2,y_2,z_2)$. Тоді

$$\overline{a}=\overline{r_2}-\overline{r_1}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1).$$

4. Модуль вектора $\bar{a}$ з початком в точці (x_1, y_1, z_1) і кінцем в точці (x_2, y_2, z_2) визначається як відстань між цими точками:

$$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

а його напрямні косинуси такі:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{\left|\bar{a}\right|},\ \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{\left|\bar{a}\right|},\ \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{\left|\bar{a}\right|}.$$

1.10. Поділ відрізка в заданому відношенні

Знайти точку $M(x, y)$, яка лежить між точками $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ або поза ними на прямій M_1M_2 і поділяє відрізок M_1M у відношенні $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$ (рис. 1.12).

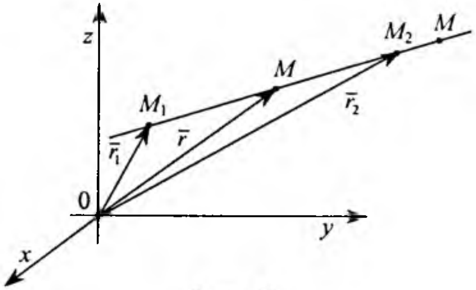


Рис. 12.

Якщо $\overline{M_1M} \uparrow\uparrow \overline{MM_2}$, то $\lambda > 0$ (точка M поділяє внутрішньо відрізок M_1M_2).

Якщо $\overline{M_1M} \uparrow\downarrow \overline{MM_2}$ то $\lambda < 0$ (точка M поділяє зовнішньо відрізок M_1M_2).

З рівностей $\bar{r} - \bar{r}_1 = \lambda(\bar{r}_2 - \bar{r})$ і $\bar{r} - \bar{r}_1 = -\lambda(\bar{r} - \bar{r}_2)$ знаходимо

$$\bar{r} = \frac{\bar{r}_1 + \lambda \bar{r}_2}{1 + \lambda},$$

або в координатах:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda},\ \lambda \neq -1.$$

Зокрема, якщо $\lambda = 1$, то точка $M(x,y,z)$ — середина відрізка M_1M_2. Тоді

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (2)$$

З відношення $M_1M : MM_2 = \lambda$ випливає, що, коли довільна точка M переміщується від M_1 до M_2, то $\lambda \in [0, \infty)$; якщо вона переміщується в напрямі $\overline{M_1M_2}(\overline{M_2M_1})$ поза точкою $M_2(M_1)$, то $\lambda \in (-\infty, -1)$ $(\lambda \in (-1, 0))$ (рис. 1.13). Отже, $\lambda \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup [0, +\infty)$.

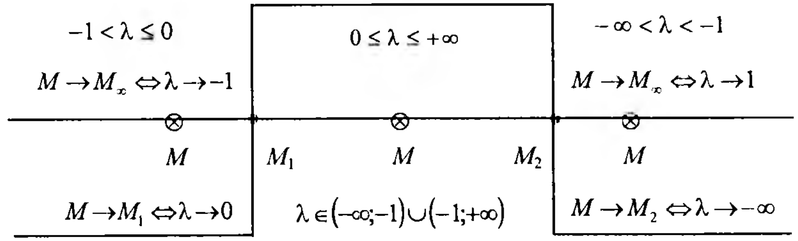


Рис. 1.13.

ЗАДАЧІ

1. Знайти модуль вектора $\bar{a} = (8, -12, 9)$, його проекції на координатні площини і напрямні косинуси.

Розв'язання. Модуль вектора $\bar{a} = \sqrt{8^2 + 12^2 + 81} = 17$. Проекції вектора $\bar{a}$ на координатні площини:

$$\bar{a}_{xy} = \sqrt{8^2 + 12^2} \approx 14{,}42,\quad \bar{a}_{xz} = \sqrt{8^2 + 9^2} \approx 20{,}04,\quad \bar{a}_{yz} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15.$$

Напрямні косинуси:

$$\cos\alpha = \frac{8}{17},\quad \cos\beta = -\frac{12}{17},\quad \cos\gamma = \frac{9}{17}.$$

2. Напрямні кути вектора такі: $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$. Напрям осі змінився так, що всі напрямні кути змінилися на однакову величину. Знайти цю величину.

Розв'язання. Із формули

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\cos^2(60°+\varphi)+\cos^2(60°+\varphi)+\cos^2(45°+\varphi)=1.$$

Очевидно, одним розв'язком є $\varphi=180°$.
Виконаємо перетворення:

$$1+\cos\,(120°+2\varphi)+\frac{1}{2}(1+\cos(90°+2\varphi))=1\Rightarrow$$

$$\sin(30°+2\varphi)+\frac{1}{2}\sin 2\varphi=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos 2\varphi+\left(\sqrt{3}+1\right)\sin 2\varphi=1,$$

$$\left(\sqrt{3}+1\right)\sin 2\varphi=2\sin 2\varphi,$$

$$\left(\sqrt{3}+1\right)\cos\varphi=\sin\varphi\Rightarrow\varphi=\mathrm{arctg}\left(\sqrt{3}+1\right).$$

Розв'язок рівняння є $\varphi=\mathrm{arctg}2{,}7321+n\pi$, $n\in Z$; при $n=0$ і $n=1$ відповідно дістаємо:

$$\varphi=69°54' \text{ і } \varphi=249°54'.$$

2. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ

2.1. Означення. Закони скалярного добутку

Кут φ між двома векторами $\bar a$ і $\bar b$ і спільним початком O позначається:

$$\left(\widehat{\bar a,\bar b}\right)=\varphi,\quad 0\le\varphi\le\pi,\quad \bar a\ne 0,\ \bar b\ne 0.$$

Якщо $\varphi=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$, то $\bar a\uparrow\uparrow\bar b,\ \bar a\perp\bar b,\ \bar a\uparrow\downarrow\bar b$; якщо один із векторів $\bar a$ або $\bar b$ нульовий, то кут між ними невизначений.

Означення. Скалярним добутком векторів $\bar a$ і $\bar b$ (позначається $\bar a\cdot\bar b$) називається число (скаляр), що дорівнює добуткові модулів цих векторів на косинус кута між ними:

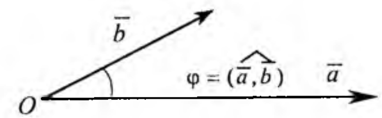
$$\bar a\cdot\bar b=ab\cos\varphi.$$

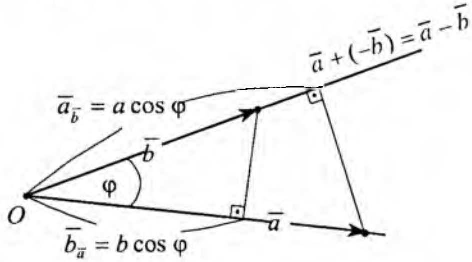
Якщо $\bar a\ne\bar 0,\ \bar b\ne\bar 0$, то при $0\le\varphi<\frac{\pi}{2},\ \varphi=\frac{\pi}{2}$ скалярний добуток: $\bar a\cdot\bar b\ge 0$; якщо $\frac{\pi}{2}<\varphi\le\pi$, то $\bar a\cdot\bar b<0$, якщо $\varphi=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$, то відповідно

$$\bar a\cdot\bar b=ab\Leftrightarrow\bar a\uparrow\uparrow\bar b;\ \bar a\cdot\bar b=0\Leftrightarrow\bar a\perp\bar b;\ \bar a\cdot\bar b=-ab\Leftrightarrow\bar a\uparrow\downarrow\bar b.$$

Вираз скалярного добутку через добуток модуля одного вектора на проекцію другого вектора на цей вектор (див. рисунок):

$$\bar a\cdot\bar b=a b_{\bar a}=b a_{\bar b}.$$





Закони скалярного добутку:

1) $\bar a\cdot\bar b=\bar b\cdot\bar a$ — *переставний;*
2) $\bar a\cdot\left(\bar b+\bar c\right)=\bar a\cdot\bar b+\bar a\cdot\bar c$ — *розподільний;*
3) $\left(\lambda\bar a\right)\cdot\bar b=\lambda\left(\bar a\cdot\bar b\right)$ — *сполучний відносно скалярного множника.*

Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату модуля: $\bar a^2=\bar a\cdot\bar a=a^2$ Отже, $a=\sqrt{\bar a^2}$.

Кут між векторами $\bar a$ і $\bar b$ визначається з рівності $\cos\left(\widehat{\bar a,\bar b}\right)=\dfrac{\bar a\cdot\bar b}{ab}$.

Таблиця скалярного добутку ортів:

$\bullet$	$\bar i$	$\bar j$	$\bar k$
$\bar i$	1	0	0
$\bar j$	0	1	0
$\bar k$	0	0	1

Нехай $\overline{a}=(x_1, y_1, z_1)$ і $\overline{b}=(x_2, y_2, z_2)$. Тоді

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left(x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k}\right)\cdot\left(x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k}\right).$$

За таблицею скалярного добутку ортів і сполучним законом відносно скалярних множників маємо:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Отже, скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їхніх однойменних координат.

Проекція вектора $\overline{a}=(x, y, z)$ на вісь $\overline{e^{\circ}}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$:

$$\overline{a}\cdot\overline{e^{\circ}}=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma.$$

Формула косинуса кута $\varphi=\left(\widehat{\overline{a}\ \overline{b}}\right)$ між векторами $\overline{a}=(x_1, y_1, z_1)$ і $\overline{b}=(x_2, y_2, z_2)$:

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Напрямні косинуси вектора $\overline{a}=(x, y, z)$:

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Для напрямних косинусів: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Модуль вектора $\overline{a}=(x,y,z)$ дорівнює $a=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Необхідна і достатня умова перпендикулярності векторів $\overline{a}=(x_1, y_1, z_1)$ і $\overline{b}=(x_2, y_2, z_2)$:

$$\overline{a}\perp\overline{b}\quad\Leftrightarrow\quad x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

ЗАДАЧІ

1. У ΔABC вектори $\overline{CA}=\overline{a}$, $\overline{CB}=\overline{b}$. Знайти вектор $\overline{c}$ — бісектрису кута $\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right)$.

Розв'язання. Бісектриса кута $\left(\widehat{\overline{a}\ \overline{b}}\right)$ перетинає сторону $\overline{AB}$ в точці D, яка поділяє відрізок AB на відрізки AD і DB у відношенні λ:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{a}{b}=\lambda.$$

У векторному вигляді

$$\overline{r}(D)=\frac{\overline{r}(A)+\lambda\overline{r}(B)}{1+\lambda},$$

або

$$\overline{c}=\frac{\overline{a}+\lambda\overline{b}}{1+\lambda}.$$

У цю рівність підставляємо значення λ :

$$\overline{c}=\frac{b\overline{a}+a\overline{b}}{a+b}.$$

2. У правильному тетраедрі $ABCD$ точки M і E — середини ребер AC і AB, N — точка перетину медіан грані BCD. Знайти кут між векторами $\overline{MN}$ і $\overline{DE}$.

Розв'язання. Позначимо $\overline{DA}=\overline{a}, \overline{DB}=\overline{b}, \overline{DC}=\overline{c}$, $\left|\overline{a}\right|=\left|\overline{b}\right|=\left|\overline{c}\right|=a$ – у правильного тетраедра всі ребра рівні. Тоді скалярні добутки $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot\overline{c}=\overline{b}\cdot\overline{c}=\frac{a^2}{2}$ ($\cos 60^{\circ}=\frac{1}{2}$ — грані являють собою рівносторонні трикутники).

Далі маємо:

$$\overline{DE}=\frac{1}{2}\left(\overline{a}+\overline{b}\right),\ \overline{DM}=\frac{1}{2}\left(\overline{a}+\overline{c}\right),\ \overline{DN}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overline{b}+\overline{c}\right)=\frac{1}{3}\left(\overline{b}+\overline{c}\right).$$

Тому

$$\overline{MN}=\overline{DN}-\overline{DM}=\frac{1}{2}(\bar a+\bar c)-\frac{1}{3}(b+c)=\frac{1}{6}(3\bar a-2\bar b+\bar c)\Rightarrow\left|6\overline{MN}\right|^2=$$

$$=(3\bar a-2\bar b+\bar c)^2=9a^2+4b^2+c^2-12\bar a\cdot\bar b+6\bar a\cdot\bar c-4\bar b\cdot\bar c=$$

$$=14a^2-10\bar a\cdot\bar b=9a^2\Rightarrow\left|\overline{MN}\right|=\frac{1}{2}a;$$

$$\left|\overline{DE}\right|=\frac{1}{2}\left|\bar a+\bar b\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(\bar a+\bar b)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+2\bar a\cdot\bar b}=\frac{1}{2}a\sqrt{3}.$$

Знаходимо

$$\overline{DE}\cdot\overline{MN}=\frac{1}{2}(\bar a+\bar b)\cdot\frac{1}{6}(3\bar a-2\bar b+\bar c)=$$

$$=\frac{1}{12}(3a^2-2\bar a\cdot\bar b+\bar a\cdot\bar c+3\bar a\cdot\bar b-2b^2+\bar b\cdot\bar c)=\frac{5a^2}{24}.$$

Позначимо кут $\left(\widehat{\overline{DE},\ \overline{MN}}\right)=\varphi$. Тоді

$$\cos\varphi=\frac{\overline{DE}\cdot\overline{MN}}{DE\cdot MN}=\frac{\frac{5}{24}a^2}{\frac{1}{2}a\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}a}=\frac{5}{6\sqrt{3}},$$

звідки

$$\varphi=\arccos\frac{5}{6\sqrt{3}}.$$

3. Векторний добуток

3.1. Означення

Векторним добутком векторів $\bar a$ і $\bar b$ (позначається: $\bar a\times\bar b$) називається вектор $\bar c=\bar a\times\bar b$, який визначається за таким правилом (рис. 3.1):

1) модуль $\left|\bar c\right|=ab\sin\varphi,\ \varphi=(\widehat{\bar a,\bar b})$;

2) вектор $\bar c\perp\bar a$ і $\bar c\perp\bar b$;

3) напрям вектора $\bar c$ такий, що впорядкована трійка векторів $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ права, однакової орієнтації з базисом $(\bar i,\ \bar j,\ \bar k)$ (рис. 3.2).

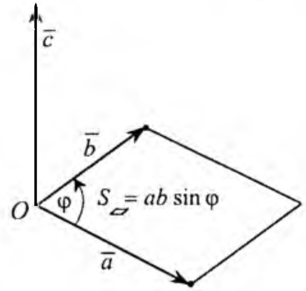
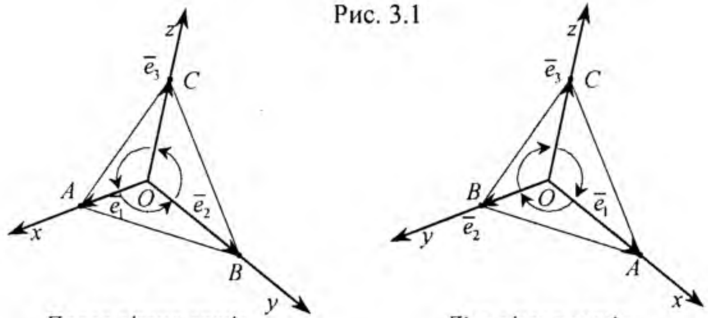


Рис. 3.1



Права в'язка ортів *Ліва в'язка ортів*

Рис. 3.2

3.2 Геометричні властивості векторного добутку

1. $\left|\bar c\right|=ab\sin\varphi=S$ — площі паралелограма, побудованого на векторах $\bar a$ і $\bar b$ зі спільним початком; $\left|\bar c\right|=ab\Leftrightarrow\bar a\perp\bar b$.

2. Площа S трикутника, визначеного векторами $\bar a$ і $\bar b$ зі спільним початком, дорівнює:

$$S=\frac{1}{2}\left|\bar a\times\bar b\right|.$$

3. $\bar c=\left|\bar c\right|\bar e,\ \ \left|\bar e\right|=1$, тобто $\bar c=S\bar e$, де $S=ab\sin\varphi$.

4. $\bar a\times\bar b=0\Leftrightarrow\bar a\parallel\bar b$ (вектори $\bar a$ і $\bar b$ — колінеарні, $\sin\varphi=0$, при $\varphi=0°;\ 180°$).

3.3. Алгебраїчні властивості векторного добутку

1. Відсутність переставного закону:

$$\bar{a}\times\bar{b}=-\left(\bar{b}\times\bar{a}\right).$$

Вектори $\bar{a}\times\bar{b}$ і $\bar{b}\times\bar{a}$ — протилежні, які мають однакові модулі, колінеарні, перпендикулярні до площини $\left(\bar{a},\bar{b}\right)$, трійки: $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{a}\times\bar{b}$ і $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{b}\times\bar{a}$ протилежної орієнтації.

2. Сполучний закон відносно скалярного множника

$$\left(\lambda\bar{a}\right)\times\bar{b}=\lambda\left(\bar{a}\times\bar{b}\right),$$

$$\bar{a}\times\left(\mu\bar{b}\right)=\mu\left(\bar{a}\times\bar{b}\right).$$

3. Розподільний закон відносно додавання:

$$\bar{a}\times\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}\ ,$$

$$\left(\bar{b}+\bar{c}\right)\times\bar{a}=\bar{b}\times\bar{a}+\bar{c}\times\bar{a}.$$

3.4. Таблиця векторних добутків ортів:

$\times$	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	$\bar{0}$	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$-\bar{k}$	$\bar{0}$	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	$\bar{0}$

У таблиці для визначення знаків користуються такою схемою:

$$\xrightarrow{\qquad\qquad\qquad} «+»$$
$$\bar{i}\ \ \bar{j}\ \ \bar{k}\ \ \bar{i}\ \ \bar{j}\ \ \bar{k}$$
$$«-» \xleftarrow{\qquad\qquad\qquad}$$

3.5. Вираз векторного добутку через координати векторів

Нехай $\bar{a}=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k}$ і $\bar{b}=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}$. Тоді

$$\bar{a}\times\bar{b}=\left(x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k}\right)\times\left(x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}\right).$$

Використовуючи таблицю векторного добутку ортів і сполучний закон відносно скалярних множників, дістає вектор у вигляді формули визначника третього порядку

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix},$$

який обчислюємо, розкладаючи його за елементами $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$ першого рядка.

ЗАДАЧІ

1. Обчислити синус кута між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}=(2,1,-1)$ і $\bar{b}=(1,-3,1)$.

Розв'язання. Вектори діагоналей паралелограма

$$\bar{a}+\bar{b}=(3,-2,0),\quad \bar{a}-\bar{b}=(1,4,-2),\quad \left|\bar{a}+\bar{b}\right|=\sqrt{13},\quad \left|\bar{a}-\bar{b}\right|=\sqrt{21}.$$

Векторний добуток і його модуль:

$$\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}-\bar{b}\right)=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & -2 & 0\\ 1 & 4 & -2\end{vmatrix}=(4,\ 6,\ 14)\qquad \left|\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}-\bar{b}\right)\right|=\sqrt{248}.$$

За означенням модуля векторного добутку $\sqrt{248}=\sqrt{13}\cdot\sqrt{21}\sin\varphi$.

Звідси $\sin\varphi=\sqrt{\dfrac{248}{13\cdot 21}}=0{,}9531$.

2. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}=\bar{m}+2\bar{n}$ і $\bar{b}=\bar{m}-3\bar{n}$, $\left|\bar{m}\right|=5$, $\left|\bar{n}\right|=3$, $\left(\widehat{\bar{m},\bar{n}}\right)=\frac{\pi}{6}$.

Розв'язання. Площа S паралелограма така:

$$S=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\left|\left(\bar{m}+2\bar{n}\right)\times\left(\bar{m}-3\bar{n}\right)=\left|\bar{m}\times\bar{m}-3\bar{m}\times\bar{n}+2\bar{n}\times\bar{m}-6\bar{n}\times\bar{n}\right|\right|=$$

$$=\left|5\vec{n}\times\vec{m}\right|=5\left|\vec{n}\right|\left|\vec{m}\right|\sin\left(\widehat{\vec{n},\ \vec{m}}\right)=5\cdot3\cdot5\sin\frac{\pi}{6}=37{,}5\ .$$

3. Знайти вектор $\bar{x}$, якщо

$$\bar{x}\perp\bar{a}=(4,-2,-3),\quad \bar{x}\perp\bar{b}=(0,1,3),\quad \left|\bar{x}\right|=26\ \text{ і }\ \frac{\pi}{2}<\left(\widehat{\bar{x},\bar{j}}\right)<\pi\,.$$

Розв'язання. Оскільки вектор $\bar{x}$ з ортом $\bar{j}$ утворює тупий кут, то трійка $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{x}$ — орієнтована з базисом $\left(\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}\right)$. Тому

$$\bar{x}=\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 4 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=(-3,\ -12,\ 4),$$

звідки $\left|\bar{x}\right|=\sqrt{9+14+16}=13$. За умовою $\left|\bar{x}\right|=26$. Отже, $\bar{x}=(-6,\ -24,\ 8)$.

4. Мішаний (векторно-скалярний) добуток трьох векторів

4.1. Означення

Мішаний добуток трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ (позначається: $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$) — це число (скаляр)

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right).$$

4.2. Геометричний зміст мішаного добутку

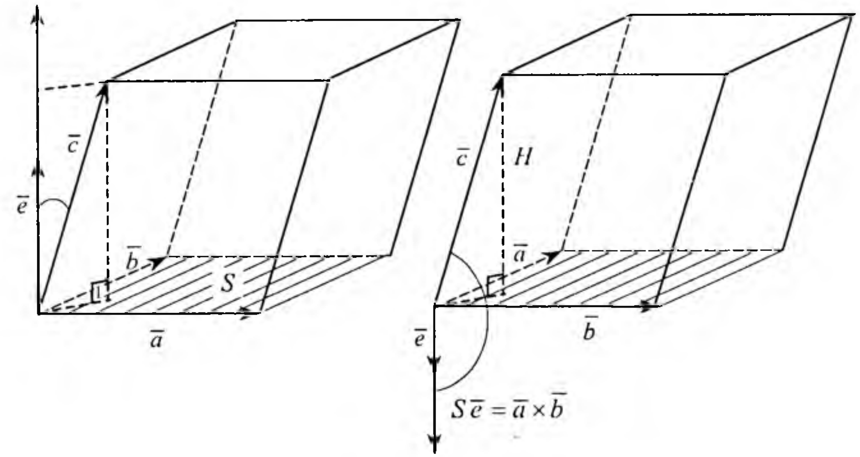
Нехай $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ — не компланарні. Позначимо $\bar{a}\times\bar{b}=S\bar{e}$, $\left|\bar{e}\right|=1$, $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=S$ — площа паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$ зі спільним початком. Тоді

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=S\left(\bar{e}\cdot\bar{c}\right)=S\bar{c}_{\bar{e}}=S(\pm H)\,,$$

де $\bar{c}_{\bar{e}}=\pm H$ — висота похилого паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (див. рисунок). Отже, $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=S(\pm H)=\pm V$ — *об'єм паралелепіпеда* ($V>0$ для правої трійки і $-V>0$ для лівої трійки векторів), або

$$\left|(a\times b)\cdot\bar{c}\right|=V\,.$$

Об'єм V тетраедра, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, дорівнює $V=\frac{1}{6}\left|\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)\right|$.



4.3. Закони мішаного добутку

1. *Сполучений закон.* Згідно з геометричним змістом мішаного добутку об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, не зміниться, якщо визначити його основу або векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$, або $\bar{b}$ і $\bar{c}$, або

$\overline{c}$ і $\overline{a}$. При цьому кожна трійка $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$, $\overline{b},\overline{c},\overline{a}$ і $\overline{c},\overline{a},\overline{b}$ — права. Тому знак векторного добутку «×» можна поставити між будь-якою парою векторів мішаного добутку $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$, а переставлення векторів у цих парах змінює лише знак мішаного добутку, відповідні трійки будуть лівими, а отже, і об'єм $(-V) > 0$.

Ця властивість схематично визначається коловим переставленням векторів мішаного добутку $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ без знаків векторного і скалярного множення. Таким чином,

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=(\overline{c},\overline{a},\overline{b})=(\overline{b},\overline{c},\overline{a})=-(\overline{b},\overline{a},\overline{c})=-(\overline{a},\overline{c},\overline{b})=-(\overline{c},\overline{b},\overline{a})$$

2. *Розподільний закон*

$$(\overline{a}+\overline{a_1},\overline{b},\overline{c})=(\overline{a},\overline{b},\overline{c})+(\overline{a_1},\overline{b},\overline{c}).$$

3. *Сполучний закон відносно скалярних множників:*

$$(\lambda\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c})=\lambda(\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}).$$

Умова компланарності трьох векторів. Вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — компланарні, якщо $(\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c})=0$.

4.3. Вираз мішаного добутку через координати векторів

Нехай $\overline{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\overline{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3\ y_3\ z_3)$. Тоді мішаний добуток $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ визначається у вигляді визначника

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

ЗАДАЧІ

1. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{m}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$, $\overline{n}=\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}$, $\overline{p}=\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}$.

Розв'язання. Об'єм V паралелепіпеда дорівнює модулю мішаного добутку трьох векторів

$$V=(\overline{m},\overline{n},\overline{p})=\left[(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})\times(\overline{a}+\overline{b}-\overline{c})\right]\cdot(\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}).$$

Знайдемо

$$(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})\times(\overline{a}+\overline{b}-\overline{c})=\overline{a}\times\overline{a}+\overline{a}\times\overline{b}-\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{a}+\overline{b}\times\overline{b}-\overline{b}\times\overline{c}+$$
$$+\overline{c}\times\overline{a}+\overline{c}\times\overline{b}-\overline{c}\times\overline{c}=2(\overline{c}\times\overline{a}+\overline{c}\times\overline{b})$$

Тоді

$$2(\overline{c}\times\overline{a}+\overline{c}\times\overline{b})\cdot(\overline{a}-\overline{b}+\overline{c})=$$
$$=2((\overline{c},\overline{a},\overline{a})+(\overline{c},\overline{b},\overline{a})-(\overline{c},\overline{a},\overline{b})-(\overline{c},\overline{b},\overline{b})+(\overline{c},\overline{a},\overline{c})+(\overline{c},\overline{b},\overline{a}))=4(\overline{c},\overline{b},\overline{a}).$$

Тут мішані добутки з двома однаковими векторами дорівнюють нулю.

Отже,

$$V=4\left|(\overline{c},\overline{b},\overline{a})\right|=4\left|(\overline{c}\times\overline{b})\cdot\overline{a}\right|.$$

2. Знайти скалярний добуток двох векторних добутків

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot(\overline{c}\times\overline{d}).$$

Розв'язання. Розглянемо як мішаний добуток трьох векторів:

$$(\overline{a}\cdot\overline{b})\cdot(\overline{c}\cdot\overline{d})=(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\cdot\overline{d})=(\overline{c}\cdot\overline{d},\overline{a},\overline{b})=\left[(\overline{c}\cdot\overline{d})\cdot\overline{a})\right]\cdot\overline{b}=$$
$$=\left[\overline{d}(\overline{a}\cdot\overline{c})-\overline{a}(\overline{b}\cdot\overline{c})\right]\cdot\overline{b}=(\overline{b}\cdot\overline{d})(\overline{a}\cdot\overline{c})-(\overline{a}\cdot\overline{b})(\overline{b}\cdot\overline{c})=\begin{vmatrix} \overline{a}\cdot\overline{c} & \overline{b}\cdot\overline{c} \\ \overline{a}\cdot\overline{b} & \overline{b}\cdot\overline{d} \end{vmatrix}.$$

5. Криві другого порядку

5.1. Основні поняття

Рівняння другого степеня відносно змінних x, y:

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$

де $a_{ij}\ (i,j=1,2,3)$ — параметри рівняння, на декартовій площині Oxy визначає лінію другого порядку.

Нехай прямі a і b перетинаються в точці S. При обертанні прямої a навколо прямої b як осі дістанемо конічну поверхню обертання — двопорожнинний конус, де S — вершина, b — вісь, a — твірна конічної поверхні (рис. 5.1, *а*).

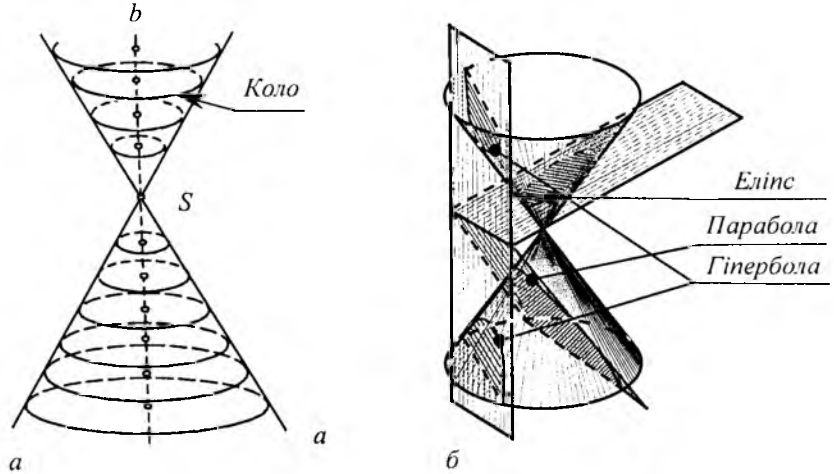


Рис. 5.1

У перерізі прямого конуса площиною Π можливі такі криві: коло, якщо площина $\Pi \perp b$ — осі конуса, еліпс, парабола, гіпербола, якщо площина Π не проходить через вершину конуса S і відповідно перетинає всі твірні конуса, паралельна одній з його твірних і перетинає обидві порожнини конуса. Такі криві називаються *конічними перерізами* (рис. 5.1, *б*).

Якщо параметр $a_{12}=0$, рівняння конічних перерізів, осі симетрії яких збігаються з осями координат декартової площини Oxy або паралельні їм, зводяться відповідними перетвореннями до виду канонічних рівнянь залежно від його параметрів (див. таблицю):

$a_{12}=0$	$a_{11}=a_{22}\neq 0$ $a_{13}^2+a_{23}^2-4a_{11}a_{33}>0$	$a_{11}\neq a_{22}$ $a_{11}a_{22}>0$	$a_{11}\neq a_{22}$ $a_{11}a_{22}=0$	$a_{11}\neq a_{22}$ $a_{11}a_{22}<0$	$a_{11}=a_{22}=0$
	Коло	Еліпс	Парабола	Гіпербола	Пряма

Канонічні перерізи, крім параболи, називаються *центральними кривими.*

5.2. Коло

Рівняння кола з центром $O_1(x_0,\ y_0)$ і радіусом r (позначається: $k(O_1,r)$) має вигляд (рис. 5.2):

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2.$$

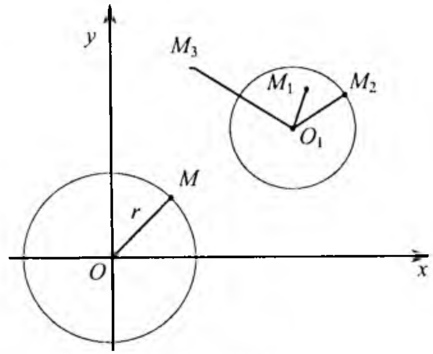


Рис. 5.2

Рівняння кола $k(O,r)$ з центром у початку координат:

$$x^2+y^2=r^2.$$

Точка $M(x_1, y_1)$ площини Oxy лежить усередині кола, на колі або поза колом, якщо вираз:

$$(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2\ \leq r^2 \text{ або } >r^2.$$

Рівняння називається *загальним рівнянням кола*, якщо $a_{11}=a_{22}$, $a_{12}=0$, $a_{13}^2+a_{23}^2-4a_{11}a_{33}>0$.

ЗАДАЧІ

1. Знайти канонічне рівняння кола, заданого загальним рівнянням:

$$x^2+y^2-6x+10y-15=0.$$

Розв'язання. Утворимо повні квадрати відносно змінних x і y:

$$\left(x^2-6x+9\right)+\left(y^2+10y+25\right)=15+9+25\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(x-3)^2+(y+5)^2=49.$$

Отже, $k(O_1, r)$: $O_1(3,-5)$, $r=7$.

5.3. Еліпс

Означення. Еліпсом називається геометрія місце точок, сума відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) стала й більша за відстань між фокусами.

Параметри еліпса

Нехай $M(x, y)$ — точка еліпса (рис. 5.3). $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$ — фокуси, $F_1F_2 = 2c$ — міжфокусна відстань; $MF_1 = r_1$, $MF_2 = r_2$ — фокальні радіуси: $r_1+r_2=2a>2c$.

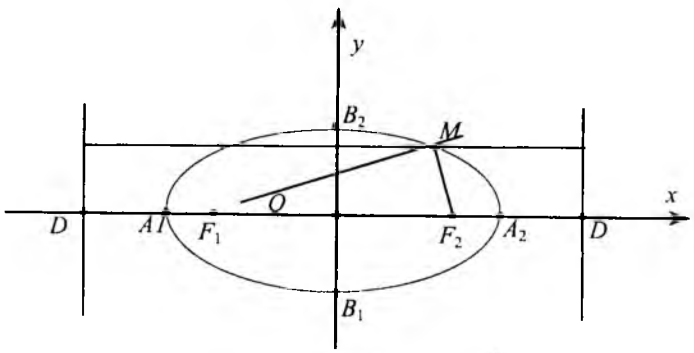


Рис. 5.3

$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ — вершини еліпса ($a > b$). A_1A_2 — велика і B_1B_2 — мала вісь еліпса, $F_1F_2\subset A_1A_2$. Звідси a і b —

відповідно велика і мала піввісь, точка $O(0,0)=A_1A_2\cap B_1B_2$ — центр еліпса (центр симетрії). Число $e=\dfrac{c}{a}<1$ — *ексцентриситет еліпса.*

Директриса

Директрисою еліпса називається пряма, що має таку властивість: відношення відстаней будь-якої точки еліпса до неї і до відповідного їй фокуса стале.

Прямі $x=\pm\dfrac{a}{e}$ — *директриси еліпса*, відповідні суміжним фокусам F_2 і F_1.

Формули фокальних радіусів: $r_1=a+ex,\quad r_2=a-ex$.

Канонічне рівняння еліпса

Канонічне рівняння еліпса з центром $O(0, 0)$ або $O_1(x_0, y_0)$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{або} \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Залежність між параметрами еліпса a, b, і c: $c^2 = a^2 - b^2$.

ЗАДАЧА

1. Знайти рівняння хорди, що проходить через точку (2, 1) еліпса $9x^2 + 25y^2 = 225$ і поділяється діаметром $2x + y = 0$ пополам.

Розв'язання. Шукана хорда спряжена з діаметром. Тому їхні кутові коефіцієнти $k_1k=-\dfrac{b^2}{a^2}$, кутовий коефіцієнт діаметра $k_1=-2$. Тоді кутовий коефіцієнт спряженої хорди $k=\dfrac{9}{50}$.

Рівняння хорди має вигляд:

$$y-1=\frac{9}{50}(x-2)\quad\Rightarrow\quad 9x-50y+32=0.$$

5.4. Гіпербола

Означення. Гіперболою називається геометричне місце точок, абсолютна величина різниці відстаней яких від двох заданих точок (фокусів) стала й менша за відстань між фокусами.

Параметри гіперболи

Нехай $M(x,y)$ — точка гіперболи, $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c,0)$ — фокуси, $F_1F_2 = 2c$ — міжфокусна відстань; $MF_1 = r_1$, $MF_2 = r_2$ — фокальні радіуси: $|r_1 - r_2| = 2a < 2c$ або $r_1 - r_2 = \pm 2a$. $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ — вершини гіперболи, A_1A_2 — дійсна вісь (вісь симетрії — головна вісь), $OA_1 = OA_2 = a$ — дійсна піввісь, $F_1F_2 \subset A_1A_2$. Координатні осі — осі симетрії, $O(0,0)$ — центр симетрії, B_1B_2 — уявна вісь.

Прямокутник зі сторонами $2a$ і $2b$, симетричний відносно осей гіперболи і такий, що дотикається до неї в її вершинах, називається *основним прямокутником гіперболи* (рис. 5.4).

Число $e = \frac{c}{a} > 1$ — *ексцентриситет гіперболи.* Прямі $x = \pm\frac{a}{e}$ — директриси гіперболи відповідно суміжним фокусам F_2 (зі знаком «+») і F_1(зі знаком «–»).

Формули фокальних радіусів точки $M(x, y)$ гіперболи:

$$\begin{aligned} r_1 &= ex + a, \\ r_2 &= ex - a, \end{aligned} \quad \text{якщо } x \ge a \quad \text{і} \quad \begin{aligned} r_1 &= -(ex + a), \\ r_2 &= -(ex - a), \end{aligned} \quad \text{якщо } x \le -a.$$

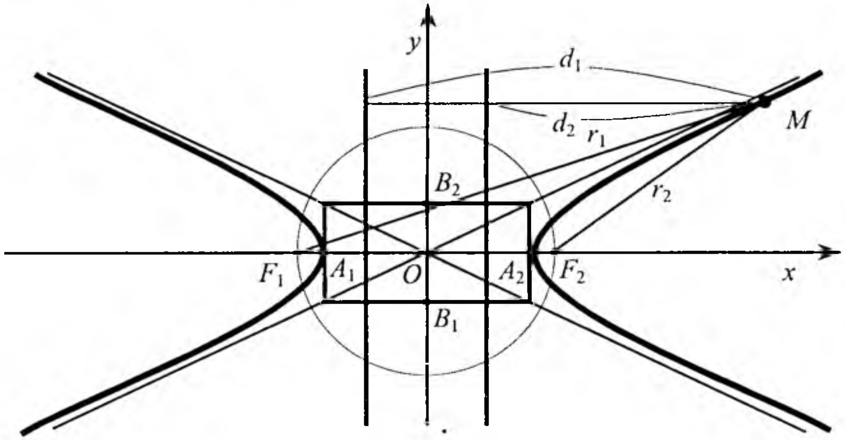


Рис. 5.4

Канонічне рівняння гіперболи з центром $O(0,0)$ або $O_1(x_0, y_0)$ має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{або} \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Прямі, що суміщуються з діагоналями основного прямокутника, називаються *асимптотами гіперболи* (рис. 5.4). Рівняння асимптот

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

ЗАДАЧІ

1. Знайти канонічне рівняння кривої

$$5x^2 - 9y^2 - 30x + 18y - 9 = 0$$

Розв'язання. Оскільки у рівнянні

$a_{12} = 0$, $a_{11} \ne a_{22}$ і $a_{11}a_{22} < 0$, то воно є рівнянням гіперболи.

Перетворення:

$$5(x^2 - 6x + 9) - 9(y^2 - 2y + 1) = 45, \;\Rightarrow\; \frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1.$$

2. Знайти рівняння хорди гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$, яка в точці (5,1) поділяється пополам.

Розв'язання. Точка (5,1) належить діаметру $y = \frac{1}{5}x$, який спряжений з шуканою хордою. Із формули $k' = \frac{b^2}{a^2k}$ знаходимо кутовий коефіцієнт хорди

$$k' = \frac{4 \cdot 5}{9} = \frac{20}{9}.$$

Рівняння хорди: $y - 1 = \frac{20}{9}(x - 5) \;\Rightarrow\; 20x - 9y - 91 = 0.$

5.5. Парабола

Означення. Параболою називається геометричне місце точок, відстані яких від заданої точки (фокуса) і прямої (директриси) однакові.

Відстань від фокуса параболи до її директриси називається параметром параболи (позначається: p).

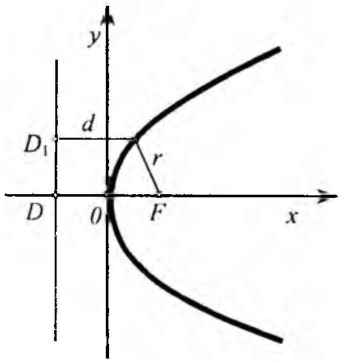


Рис. 5.5

Канонічне рівняння параболи

Якщо за вісь абсцис узяти пряму, що проходить через фокус і перпендикулярна до директриси, а за початок координат — точку, що є серединою відрізка осі абсцис між фокусом і директрисою (рис. 5.5), то канонічне рівняння параболи має вигляд:

$$y^2 = 2px,$$

де $DF = p$ — параметр параболи: O — вершина $\left(OD = DF = \dfrac{p}{2}\right)$;

$DD_1 \perp Ox$ — директриса параболи; $r = MF$ — фокальний радіус точки $M(x, y)$ параболи: $r = x + \dfrac{p}{2}$, $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ — фокус параболи (див. рис. 5.5).

Рівняння параболи з вершиною O_1 (x_0, y_0):

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0),$$

пряма $x = x_0$ — вісь симетрії параболи.

Можливі положення параболи в системі координат Oxy зображено на рис. 5.6.

Діаметр параболи — пряма, що проходить через середини паралельних хорд параболи. Усі діаметри параболи паралельні між собою.

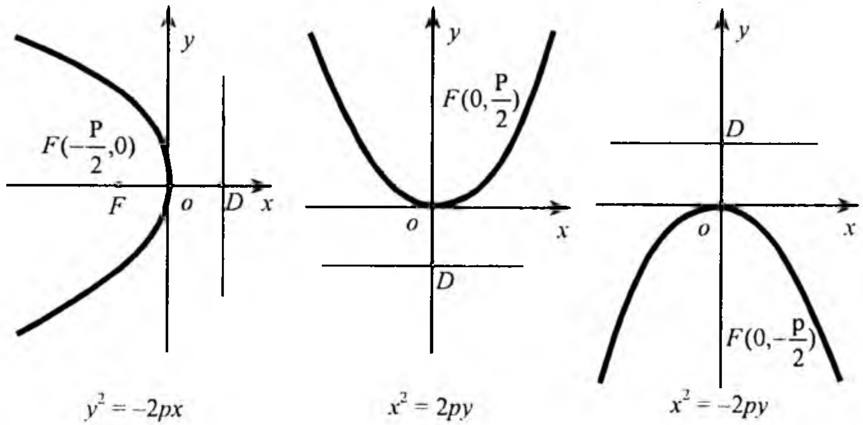


Рис. 5.6

ЗАДАЧІ

1. Знайти канонічне рівняння кривої 2-го порядку

$$y^2 - 6y + 12x + 57 = 0.$$

Розв'язання. Оскільки в загальному рівнянні другого порядку $a_{11} \neq a_{22}$ і $a_{11}a_{22} = 0$, $a_{12} = 0$, то воно є параболою. Зведемо його до вигляду $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

Перетворення:

$y^2 - 2 \cdot 3 \cdot y + 9 = -12x - 57 + 9 \Rightarrow (y - 3)^2 = -12(x + 4)$ — це парабола з вершиною $O_1(-4, 3)$, параметром $p = 6$; рівняння директриси $x = -1$, $F(-7, 3)$, $y = 3$ — вісь параболи;

6. Дослідження загального рівняння лінії 2-го порядку

6.1. Основні поняття

Нехай маємо загальне рівняння лінії 2-го порядку:

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0, \qquad (1)$$

задане в системі координат oxy із базисом $(\bar{i},\bar{j})$. Тоді за допомогою відповідного перетворення координат (паралельного перенесення та повороту) можна подати це рівняння в канонічному вигляді, перейшовши до системи O_1XY із базисом $(\bar{i}_1,\bar{j}_1)$.

Рівняння (1) визначає не лише геометричні властивості лінії, а й особливості її розміщення на координатній площині. При перетворенні координат розміщення лінії змінюється, а отже, змінюється і її рівняння, при цьому властивості рівняння, які характеризують тип лінії (форму і розміри) лишаються незмінними — інваріантними відносно перетворення координат.

6.2. Еліпс і гіпербола — центрально симетричні лінії 2-го порядку

Центр $O_1(x_0,y_0)$ кривої 2-го порядку, заданої рівнянням (1), визначається із системи рівнянь:

$$\begin{cases} F_x=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0,\\ F_y=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}=0, \end{cases} \qquad (2)$$

де F_x і F_y — частинні похідні за x і y лівої частини $F(x, y)$ рівняння (1).

Якщо визначник системи рівнянь (2)

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0,$$

то система (2) має єдиний розв'язок, тобто крива (1) має єдиний центр симетрії $O_1(x_0,y_0)$, координати якого подаються так:

$$x_0=\frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}}{\delta},\quad y_0=\frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11}\\ a_{23} & a_{21}\end{vmatrix}}{\delta}. \qquad (3)$$

При паралельному перенесенні базису $(\bar{i},\bar{j})$ рівняння (1) у системі координат $O_1x'y'$ з початком $O_1(x_0,y_0)$ перетворюється на таке рівняння:

$$a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2+\frac{\Delta}{\delta}=0, \qquad (4)$$

де Δ — дискримінант рівняння (1),

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

За допомогою перетворення координат

$$x'=X\cos\alpha-Y\sin\alpha,$$
$$y'=X\sin\alpha+Y\cos\alpha$$

дістаємо систему координат O_1XY, яка утворюється поворотом базису $(\bar{i},\bar{j})$ на такий кут α, щоб рівняння перетворилося на канонічне:

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+\frac{\Delta}{\delta}=0\Rightarrow\frac{X^2}{-\frac{\Delta}{\lambda_1\delta}}+\frac{Y^2}{-\frac{\Delta}{\lambda_2\delta}}, \qquad (5)$$

де λ_1 і λ_2 — корені характеристичного рівняння

$$\lambda^2-s\lambda+\delta=0,\quad s=a_{11}+a_{22}.$$

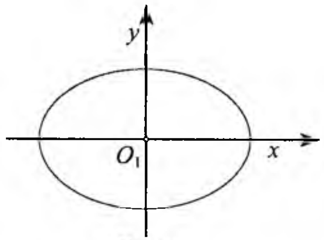
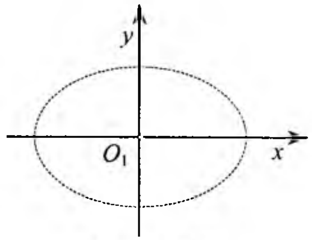
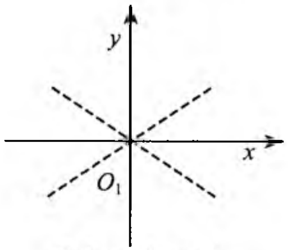
Кут α повороту базису $(\bar{i},\bar{j})$ визначається за формулою:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}>0,\quad a_{12}\neq 0,$$

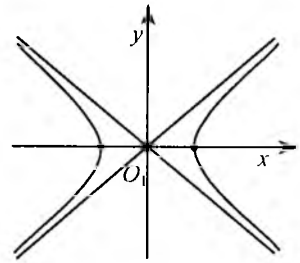
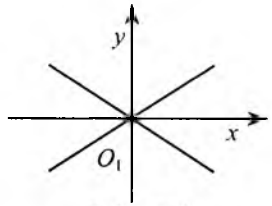
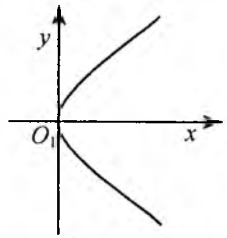
$\operatorname{tg}\alpha=k$ — кутовий коефіцієнт осі O_1X в системі координат Oxy.

Різні випадки дослідження загального рівняння 2-го порядку наведено в таблиці.

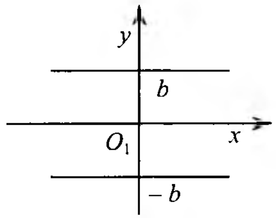
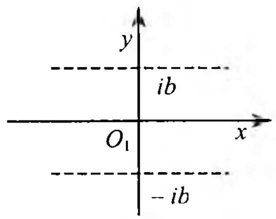
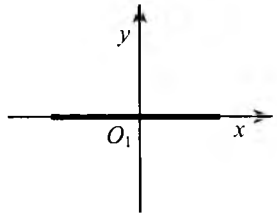
ТАБЛИЦЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО РІВНЯННЯ 2-ГО ПОРЯДКУ

1	$s=a_{11}+a_{22},\ -\frac{\Delta}{\lambda_2\delta}>0,$ $-\frac{\Delta}{\lambda_2\delta}=b^2,\ \lvert\lambda_1\rvert<\lvert\lambda_2\rvert\Rightarrow a>b,$ $s\Delta<0,$ $\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+\frac{\Delta}{\delta}=0\Rightarrow$ $\Rightarrow\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1\ \ \lambda^2-s\lambda+\delta=0$	$\operatorname{sgn}\lambda_1=$ $=\operatorname{sgn}\lambda_2\neq$ $\neq\operatorname{sgn}\frac{\Delta}{\delta}$	 Еліпс
2	$\delta>0,\ -\frac{\Delta}{\lambda_1\delta}>0,\ -\frac{\Delta}{\lambda_1\delta}=a^2,$ $s\Delta<0,\ -\frac{\Delta}{\lambda_2\delta}>0,\ -\frac{\Delta}{\lambda_2\delta}=b^2.$ $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=-1$	$\operatorname{sgn}\lambda_1=$ $=\operatorname{sgn}\lambda_2$ $\Delta=0$	 Уявний еліпс
3	$\delta>0,\ \lambda_1X^2+\lambda_2Y^2=0,$ $a^2=\frac{1}{\lvert\lambda_1\rvert},\ b^2=\frac{1}{\lvert\lambda_2\rvert},\ \Delta=0,$ $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0,$ $\left(\frac{X}{a}+i\frac{Y}{b}\right)\left(\frac{X}{a}-i\frac{Y}{b}\right)=0;$ $i=\sqrt{-1}$ уявна одиниця	$\operatorname{sgn}\lambda_1=$ $=\operatorname{sgn}\lambda_2$ $\Delta=0$	 Дві уявні прямі, що перетинаються

ТАБЛИЦЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО РІВНЯННЯ 2-ГО ПОРЯДКУ

4	$\delta<0,\ \lambda_1\lambda_2<0,\ \lambda_1\Delta>0,$ $-\frac{\Delta}{\lambda_1\delta}>0,\ -\frac{\Delta}{\lambda_1\delta}=a^2,\ \ \Delta\neq0,$ $\lambda_2\Delta<0,\ -\frac{\Delta}{\lambda_2\delta}>0,$ $-\frac{\Delta}{\lambda_2\delta}=b^2,\ k=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}$ (тут λ_1, якщо $\lambda_1\Delta>0$) $\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+\frac{\Delta}{\delta}=0\Rightarrow$ $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$	$\operatorname{sgn}\lambda_1\neq$ $\neq\operatorname{sgn}\lambda_2$ $\Delta\neq0$	 Гіпербола
5	$\delta<0,\ \frac{1}{\lambda_1}=a^2,\ \frac{1}{\lambda_2}=b^2,$ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\Rightarrow$ $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0\ \ \Delta=0,$	$\operatorname{sgn}\lambda_1\neq$ $\neq\operatorname{sgn}\lambda_2$ $\Delta=0$	 Дві прямі, що перетинаються
6	$\delta=0,\ a_{11}\neq0,\ \Delta\neq0,\ a_{22}\neq0,$ $a_{33}\neq0,\ a_{12}\neq0,\ Y^2=2pX,$ $p=\sqrt{-\frac{\Delta}{s^3}},\ s=a_{11}+a_{22},$ $F_x+\frac{a_{12}}{a_{11}}F_y=0$ — рівняння осі симетрії $O_1X\perp O_1Y$ $\begin{cases}F=0,\\ F_x+\frac{a_{12}}{a_{11}}F_y=0\end{cases}\Rightarrow$ $O_1(x_0,y_0)$ — вершина $\delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0,\ a_{11}a_{12}>0,$ $a_{11}^2+a_{23}^2\neq0$		 Парабола

ТАБЛИЦЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО РІВНЯННЯ 2-ГО ПОРЯДКУ

7	$\delta = 0,\ \Delta = 0 \Rightarrow$ дві дійсні паралельні прямі: $y^2 = b^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow (y-b)(y+b) = 0$		
8	$\delta = 0,\ \Delta = 0 \Rightarrow$ дві уявні паралельні прямі: $y^2 = -b^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow (y-ib)(y+ib) = 0$		
9	$\delta = 0,\ \Delta = 0 \Rightarrow$ дві збіжні дійсні прямі: $y^2 = 0$		

Таким чином, існує 9 різних типів кривих ліній 2-го порядку.

ЗАДАЧА

Знайти канонічне рівняння лінії

$$13x^2 + 10xy + 13y^2 - 36x - 36y - 36 = 0.$$

Розв'язання. Обчислюємо:

$$\delta = \begin{vmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = 144, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 13 & 5 & -18 \\ 5 & 13 & -18 \\ -18 & -18 & -36 \end{vmatrix} = 36 \begin{vmatrix} 0 & -8 & 22 \\ 0 & 8 & 14 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -10568 = -72 \cdot 144.$$

$$s = a_{11} + a_{22} = 26, \quad s\Delta < 0, \quad \frac{\Delta}{\delta} = -72.$$

Характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 26\lambda + 144 = 0,$$

його корені:

$$\lambda_1 = 8, \quad \lambda_2 = 18; \quad \lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow a > b$$

Отже, $\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2 \neq \operatorname{sgn}\dfrac{\Delta}{\delta} \Rightarrow$ крива — еліпс.

Канонічне рівняння:

$$8X^2 + 18Y^2 - 72 = 0 \Rightarrow \frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1.$$

Координати центра $O_1(x_0, y_0)$ симетрії кривої:

$$\begin{cases} 13x + 5y - 18 = 0, \\ 5x + 13y - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow O_1(1,1).$$

Кутовий коефіцієнт великої осі O_1X

$$k = \frac{8-13}{5} = -1 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Точки перетину кривої з координатними осями Oxy: $M_2(3{,}55;\ 0)$; $M_1(-0{,}78; 0)$; $M_3(0; -0{,}78)$; $M_4(0; 3{,}55)$ (рис. 6.1).

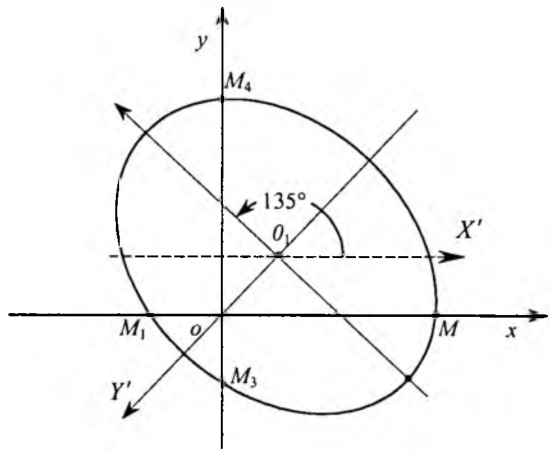


Рис. 6.1

6.3. Площина. Основні поняття, формули, рівняння

Вигляд рівняння площини П визначається її різним однозначним розміщенням в координатному просторі $Oxyz$. Розглянемо випадки 1—9.

1. Точкою $M_0(x_0, y_0, z_0) \in П$ *і нормаллю площини* $\overline{n} = (A, B, C)$ (рис. 6.2).

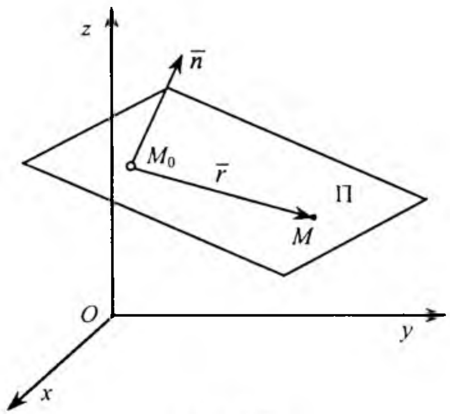


Рис. 6.2

Змінний вектор $\overline{M_0M} = \overline{r} = (x, y, z) \in П$, $\overline{n} \perp \overline{r}$. Тому $\overline{n} \cdot \overline{r} = (A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$. Звідси дістаємо загальне рівняння площини:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

де $D = -x_0A - y_0B - z_0C$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, тобто вектор $\overline{n} \neq 0$.

Залежно від значень параметрів A, B, C, D загального рівняння площини П визначаються такі її положення в просторі $Oxyz$:

а) $D = 0,\ A, B, C \neq 0 \Leftrightarrow O(0,0) \in П$;	е) $C = D = 0,\ A, B \neq 0 \Leftrightarrow Oz \in П$;
б) $C = 0,\ A, B, D \neq 0 \Leftrightarrow П \parallel Oz$;	є) $A = D = O,\ B, C \neq 0 \Leftrightarrow Ox \in П$;
в) $B = 0,\ A, C, D \neq 0 \Leftrightarrow П \parallel Oy$;	ж) $A = B = 0,\ C, D \neq 0 \Leftrightarrow П \parallel Oxy$;
г) $A = 0,\ B, C, D \neq 0 \Leftrightarrow П \parallel Ox$;	з) $A = C = 0,\ B, D \neq 0 \Leftrightarrow П \parallel Oxz$;
д) $B = D = 0,\ A, C \neq 0 \Leftrightarrow O_y \in П$;	и) $B = C = 0,\ A, D \neq 0 \Leftrightarrow П \parallel Oyz$;

і) $B = C = D = 0, A \neq 0$ або $A = C = D = 0,\ B \neq 0$,

або $A = B = D = 0,\ \ C \neq 0 \Leftrightarrow x = 0$, або $y = 0$, або $z = 0$ — це відповідно рівняння координатних площин: Oyz, Oxz, Oxy.

Площина П поділяє простір $Oxyz$ на два півпростори (дві області множини точок). В одному з них, де лежить кінець вектора $\overline{n}$, вираз $Ax + By + Cz + D \geq 0$, а в другому $Ax + By + Cz + D \leq 0$.

За формулою

$$\cos\left(\widehat{\overline{n}, \overline{ON}} \notin П\right) = \frac{\overline{n} \cdot \overline{ON}}{|\overline{n}||\overline{ON}|} > 0, \left(\widehat{\overline{n}, \overline{ON}}\right) < \frac{\pi}{2};$$

$$\cos\left(\widehat{\overline{n}, \overline{ON'}} \notin П\right) < 0, \left(\widehat{\overline{n}, \overline{ON'}}\right) > \frac{\pi}{2}.$$

2. *Двома прямими* l_1 і l_2, *що перетинаються в точці* $M_0(x_0, y_0, z_0) = l_1 \cap l_2$ *і відповідними напрямними векторами* $\overline{v_1} = (m_1, p_1, q_1)$ і $\overline{v_2} = (m_2, p_2, q_2)$ (рис. 6.3).

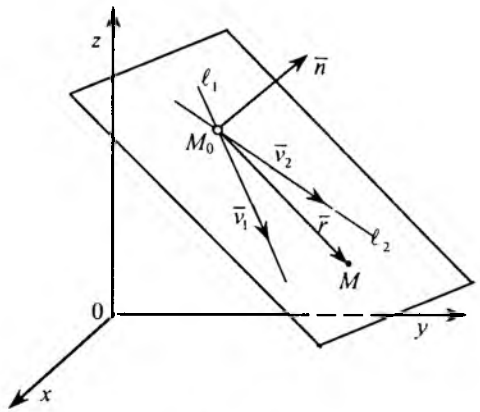


Рис. 6.3

Змінний вектор площини $\overline{OM} = \overline{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Нормаль площини $\overline{n} \perp \overline{v_1}, \overline{v_2}$ дорівнює

$$\overline{v} = \overline{v_1} \times \overline{v_2}.$$

Рівняння площини: $\overline{n} \cdot \overline{r} = 0$.

3. *Трьома заданими точками* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *і* $M_3(x_3, y_3, z_3)$ (рис. 6.4). Нехай $\overline{M_1M} = \overline{r} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ — змінний вектор площини. Її напрямні вектори:

$$\overline{v}_1 = \overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1);$$

$$\overline{v_2} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Тоді нормаль площини

$$\overline{n} = \overline{v_1} \times \overline{v_2}.$$

Рівняння площини: $\overline{n} \cdot \overline{r} = 0$.

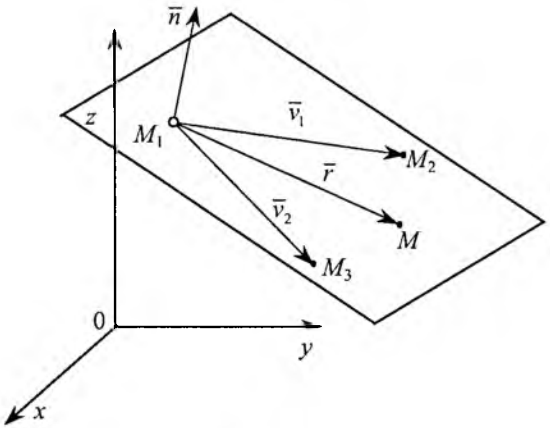


Рис. 6.4

4. *Рівняння площини у відрізках* $|a|, |b|, |c|$ *на координатних осях:*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

де числа a, b і c — абсциса, ордината і аплікатою відповідно точок $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ і $C(0,0,c)$ перетину площини з координатними осями (рис. 6.5), де $|a| = a$, $|b| = b$, $|c| = c$).

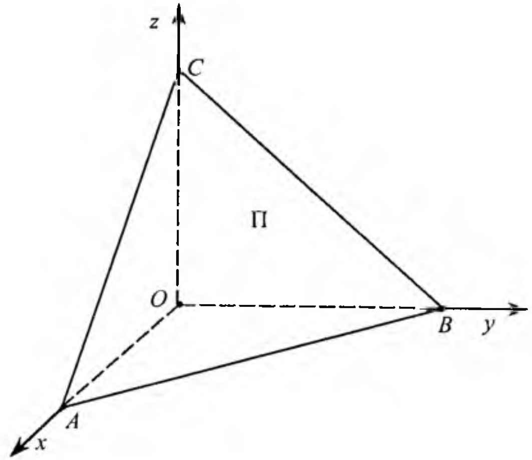


Рис. 6.5

5. *Відстанню* $p > 0$ *початку координат до площини П і нормаллю площини* $\overline{n^\circ} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $|\overline{n^\circ}| = 1$ (рис. 6.6). $M(x, y, z) \in П$, $\overline{r} = (x, y, z)$ — змінний вектор. Звідси

$$\overline{n^\circ} \cdot r = |\overline{n^\circ}| Пp_{\overline{n^\circ}} \overline{r} = p \Rightarrow (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)(x, y, z) = p,$$

або $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ — *нормальне рівняння площини.*

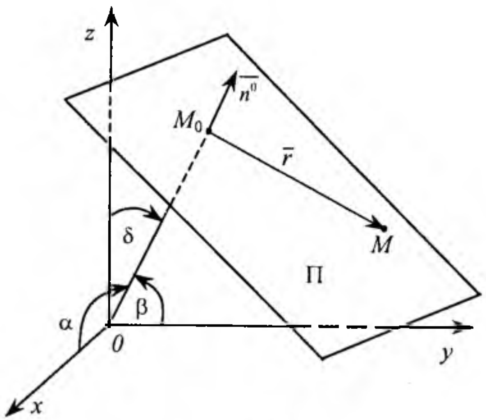


Рис. 6.6

6. *Зведення загального рівняння площини до нормального вигляду.* Із загального рівняння площини $Ax+By+Cz+D=0 \Rightarrow \bar{n}=(A,B,C)$, $|\bar{n}|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, $\cos\alpha=\frac{A}{\pm|\bar{n}|}$, $\cos\beta=\frac{B}{\pm|\bar{n}|}$, $\cos\gamma=\frac{C}{\pm|\bar{n}|}$. Тоді

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \Rightarrow x\frac{A}{\pm|\bar{n}|}+y\frac{B}{\pm|\bar{n}|}+Z\frac{C}{\pm|\bar{n}|}+\frac{D}{\pm|\bar{n}|}=0,$$

або

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$$

(знак $\pm|\bar{n}|$ перед коренем вибираємо протилежним знаку D за умовою: $-p|\bar{n}|<0$).

Маємо зведене загальне рівняння площини до нормального вигляду.

7. *Відстань* $d>0$ *точки* $N(x_1,y_1,z_1)$ *від площини* $x\cos\alpha+y\cos\beta+$ $+z\cos\gamma-p=0$:

$$d=|x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p|.$$

Якщо площину задано загальним рівнянням, то

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Число $\delta=\pm d$ називається *відхиленням точки N(x,y,z) від площини* $Ax+By+Cz+D=0$. Тричлен $Ax+By+Cz+D\geq 0$ (або $Ax+By+Cz+D\leq 0$), коли точка N і початок координат лежать по різні боки (по один бік) від площини.

8. *Взаємне розміщення двох площин* $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_2=0$, $\bar{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ і $\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, $\bar{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$:

а) площини перетинаються

$$\Pi_1\cap\Pi_2=l \Leftrightarrow \bar{n}_1 \nparallel \bar{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2};$$

б) площини паралельні $\Pi_1 \parallel \Pi_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$;

в) площини суміщаються.

9. *Кут* φ *між двома площинами* Π_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і Π_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ відповідно з нормалями $\bar{n}_1$ і $\bar{n}_2$. За формулою скалярного добутку

$$\cos\varphi=\frac{\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

ЗАДАЧІ

1. Знайти рівняння площини П, якщо точки $M_1(1,0,-1)$, $M_2(2,2,3)$, $M_3(0,-3,1)\in\Pi$.

Розв'язання. Вектори $\overline{M_1M_2}=(1,2,4)$, $\overline{M_1M_3}=(-1,-3,2)$, $\overline{M_1M_2}\nparallel\overline{M_1M_3}$.

$$\bar{n}=\overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 2 & 4\\ -1 & -3 & 2\end{vmatrix}=(16,-6,-1).$$

Рівняння площини $\Pi(M_1\in\Pi)$:

$$16(x-1)-6(y-0)-(z+1)=0\Rightarrow 16x-6y-z-17=0.$$

2. Знайти рівняння площини П, що проходить через лінію перетину l площин $\Pi_1: x-2y+3z-4=0$ і $\Pi_2: x+y-5z+9=0$ і паралельно осі Oz.

Розв'язання. Площина П належить пучку з віссю l:

$$x-2y+3z-4+\lambda(x+y-5x+9)=0\Rightarrow$$
$$(1+\lambda)x+(\lambda-2)y+(3-5\lambda)z-4+9\lambda=0$$

Нормаль площини П: $\bar{n}\perp\bar{k}\Rightarrow(1+\lambda,\ \lambda-2,\ 3-5\lambda)\cdot(0,0,1)=0$,

звідки $3-5\lambda=0\Rightarrow\lambda=\frac{3}{5}$. Рівняння площини П має вигляд:

$$\left(1+\frac{3}{5}\right)x+\left(\frac{3}{5}-2\right)y+\left(3-5\cdot\frac{3}{5}\right)z-4+9\cdot\frac{3}{5}=0\Rightarrow 8x-7y+7=0.$$

3. Знайти гострий кут між площинами Π_1: $11x-8y-7z-15=0$ і Π_2: $4x-10y+z-2=0$.

Розв'язання. Нормалі площин відповідно є вектори $\overline{n_1}=(11,-8,-7)$ і $\overline{n_2}=(4,-10,1)$, $\overline{n_1} \nparallel \overline{n_2}$. Тоді $(\widehat{\Pi_1, \Pi_2})=(\widehat{\overline{n_1}, \overline{n_2}})$ За формулою скалярного добутку:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right|\left|\overline{n_2}\right|}=\frac{11\cdot4+(-8)(-10)+(-7)\cdot1}{\sqrt{11^2+8^2+7^2}\cdot\sqrt{4^2+16^2+1^2}}=\frac{44+80-7}{\sqrt{234}\cdot\sqrt{117}}=$$

$$=\frac{117}{117\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

Пряма в просторі

Вигляд рівняння прямої визначається однозначним її розміщенням в просторі $Oxyz$. Розглянемо можливі випадки задання прямої.

1. Точкою $M_0(x_0,y_0,z_0)$ і напрямним вектором $\overline{v}=(m,p,q)$ (рис. 6.7).

$\overline{v}^{\circ}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, $\quad\left|\overline{v}^{\circ}\right|=1$, $\quad\alpha=(\widehat{\overline{v}, \overline{i}})$, $\quad\beta=(\widehat{\overline{v}, \overline{j}})$, $\quad\gamma=(\widehat{\overline{v}, \overline{k}})$,

$\left|\overline{v}\right|=\sqrt{m^2+p^2+q^2}$, $\quad\cos\alpha=\dfrac{m}{\pm\left|\overline{v}\right|}$; $\quad\cos\beta=\dfrac{n}{\pm\left|\overline{v}\right|}$, $\quad\cos\gamma=\dfrac{p}{\pm\left|\overline{v}\right|}$.

$\overline{M_0M}=\overline{r}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ — змінний вектор, вектори $\overline{v}$ і $\overline{r}$ колінеарні:

$$\overline{v}\parallel\overline{r}\Leftrightarrow(m,p,q)\parallel(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\Leftrightarrow\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{p}=\frac{z-z_0}{q}.$$

Ці рівняння називаються *канонічними рівняннями прямої*. Якщо рівні між собою відношення позначити через t, то дістанемо параметричні рівняння прямої:

$$x=x_0+mt,$$

$$y=y_0+pt,$$

$$z=z_0+qt,\ \ t\in R.$$

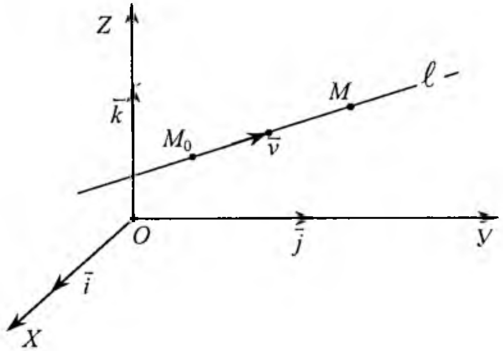


Рис. 6.7

2. *Двома точками* $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Напрямний вектор прямої $\overline{v}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$, $\overline{r}=(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)$ — змінний вектор прямої.

Дістанемо канонічні рівняння прямої:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

3. *Двома загальними рівняннями площин, що перетинаються:* $\Pi_1\bigcap\Pi_2=l:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$ Система рівнянь називається *загальним рівнянням прямої.*

4. Кут $\varphi=(\widehat{l_1, l_2})$ між двома прямими l_1 і l_2 з напрямними векторами $\overline{v_1}=(m_1,p_1,q_1)$ і $\overline{v_2}=(m_2,p_2,q_2)$ знаходимо за формулою

$$\cos\varphi=\frac{\overline{v_1}\cdot\overline{v_2}}{\left|\overline{v_1}\right|\left|\overline{v_2}\right|}.$$

Умова перпендикулярності та паралельності двох прямих:

$$l_1\perp l_2\Leftrightarrow\overline{v_1}\perp\overline{v_2}\Leftrightarrow\overline{v_1}\cdot\overline{v_2}=0,\ m_1m_2+p_1p_2+q_1q_2=0;$$

$$l_1\parallel l_2\Rightarrow\overline{v_1}\parallel\overline{v_2}\Leftrightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}.$$

5. *Кут* $\varphi > 0$ *між прямою* $l: M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$, $\bar{v} = (m, p, q) \in l$ *і площиною* $\Pi: M_1(x_1, y_1, z_1) \in \Pi$, $\bar{n} = (A, B, C)$, $\bar{n} \perp \Pi$. Кут $\varphi = (\widehat{l, \Pi})$ знаходимо за формулою

$$\sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\bar{n} \cdot \bar{v}}{|\bar{n}||\bar{v}|}.$$

6. *Розміщення прямої l відносно площини* Π. Із попередньої формули випливає:

а) $l \perp \Pi \Leftrightarrow \bar{V} \parallel \bar{n} \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{p} = \frac{C}{q}$;

б) $l \parallel \Pi \Leftrightarrow \bar{V} \perp \bar{n} \Leftrightarrow \bar{n} \cdot \bar{V} = Am + Bp + Cq = 0$;

в) $l \subseteq \Pi$ (пряма l лежить в площині Π) $\Leftrightarrow Am + Bp + Cq = 0$, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$;

г) $M_2(x_2, y_2, z_2) = l \bigcap \Pi \Leftrightarrow \bar{V} \cdot \bar{n} \neq 0$, $\bar{V} \nparallel \bar{n}$. Для знаходження точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$ перетину прямої l з площиною Π підставляємо в рівняння площини Π

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

значення *x, y* і *z* із параметричних рівнянь прямої *l*:

$$x = x_0 + mt,$$

$$y = y_0 + pt,$$

$$z = z_0 + qt.$$

Дістаємо рівняння відносно параметра *t*, його розв'язок $t = t_1$ визначає точку перетину $M_2(x_2, y_2, z_2)$, де

$$x_2 = x_0 + mt_1,$$

$$y_2 = y_0 + pt_1,$$

$$z_2 = z_0 + qt_1.$$

ЗАДАЧІ

1. Знайти точку перетину прямої *l*

$$\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$$

з площиною Π: $3x + 5y - z - 2 = 0$.

Розв'язання. Значення *x, y, z* з параметричних рівнянь прямої *l:*

$$x = 12 + 4t, \ y = 9 + 3t, \ z = 1 + t, \ t \in R,$$

підставляємо в рівняння площини Π:

$$3(12 + 4t) + 5(9 + 3t) - (1 + t) - 2 = 0 \Rightarrow t = 3.$$

Підставляючи значення параметра $t = 3$, в параметричні рівняння прямої, дістаємо координати точки перетину $l \bigcap \Pi = (24, 18, 4)$.

2. Знайти косинус кута φ між прямими

$$l_1: \begin{cases} 3x - 4y - 2x = 0, \\ 2x + y - 2z = 0, \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0, \\ y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Знаходимо напрямні вектори $\bar{v}_1$ і $\bar{v}_2$ відповідно прямих l_1 і l_2:

$$\bar{v}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (10, 2, 11), \qquad \bar{v}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (3, 12, 4).$$

Тоді кут $\varphi = (\widehat{l_1, l_2}) = (\widehat{\bar{v}_1, \bar{v}_2})$. За формулою

$$\cos\varphi = \frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2}{|\bar{v}_1||\bar{v}_2|} = \frac{10 \cdot 3 + 2 \cdot 12 + 11 \cdot 4}{\sqrt{10^2 + 2^2 + 11^2}\sqrt{3^2 + 12^2 + 4^2}} = \frac{98}{\sqrt{225} \cdot \sqrt{169}} = \frac{98}{195}.$$

3. Знайти косинус кута φ між прямими

$$l_1: \begin{cases} 3x-4y-2x=0, \\ 2x+y-2z=0, \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} 4x+y-6z-2=0, \\ y-3z+2=0. \end{cases}$$

Розв'язання. Знаходимо напрямні вектори $\overline{v_1}$ і $\overline{v_2}$ відповідно прямих l_1 і l_2

$$\overline{v_1} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (10,2,11), \qquad \overline{v_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (3,12,4).$$

Тоді кут $\varphi = (\widehat{l_1, l_2}) = (\widehat{\overline{v_1}, \overline{v_2}})$. За формулою

$$\cos\varphi = \frac{\overline{v_1}\cdot\overline{v_2}}{|\overline{v_1}||\overline{v_2}|} = \frac{10\cdot 3+2\cdot 12+11\cdot 4}{\sqrt{10^2+2^2+11^2}\sqrt{3^2+12^2+4^2}} = \frac{98}{\sqrt{225}\cdot\sqrt{169}} = \frac{98}{195}.$$

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії

1.1. Відстань між двома точками. Площа трикутника

Якщо на площині задано дві точки $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$, то відстань між ними (рис. 1.1) обчислюється за формулою

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}, \tag{1.1}$$

тобто довжина відрізка дорівнює квадратному кореню із суми квадратів різниць відповідних координат.

Площа трикутника з вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, та $C(x_3; y_3)$ (рис. 1.2) обчислюється за формулою

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}. \tag{1.2}$$

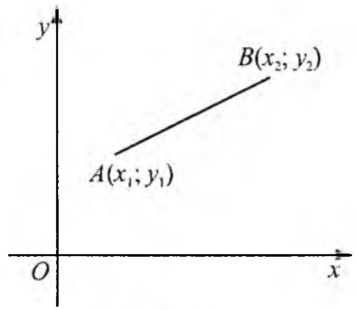


Рис. 1.1

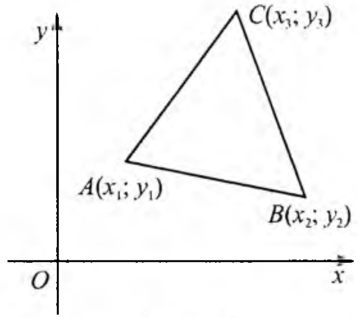


Рис. 1.2

Знаки «плюс» або «мінус» вибираємо залежно від того, проти чи за годинниковою стрілкою відбувається обхід периметра трикутника від A до B та від B до C.

З формули (1.2) при $S = 0$ дістаємо умову того, що три точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ та $C(x_3; y_3)$ лежать на одній прямій:

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}. \tag{1.3}$$

Приклад 1. Задано дві суміжні вершини квадрата $A(5;\ 3)$ та $B(-1;\ 4)$. Знайти його площу.

Розв'язання. За формулою (1.1) обчислюємо довжину сторони квадрата:

$$AB=\sqrt{(5+1)^2+(3-4)^2}=\sqrt{37}.$$

Площа квадрата дорівнює $S=AB^2=37$ (кв. од.).

Приклад 2. Довести, що трикутник з вершинами $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 3)$ та $C(5;\ -1)$ прямокутний.

Розв'язання. Обчислюємо довжини сторін трикутника:

$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5},$$
$$AC=\sqrt{(5-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{20},$$
$$BC=\sqrt{(5-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{25}=5.$$

Довжини сторін задовольняють умову $AB^2+AC^2=BC^2$, тому цей трикутник прямокутний.

Приклад 3. На осі абсцис знайти таку точку M, відстань якої до точки $N(2;\ -3)$ дорівнює 5.

Розв'язання. Якщо точка M лежить на осі Ox, то вона має координати $M(x;\ 0)$. Тоді відстань $MN=\sqrt{(x-2)^2+(0+3)^2}=5$. З останньої рівності знаходимо $(x-2)^2=16$, звідки $x_1=6$, $x_2=-2$. Таким чином, задача має два розв'язки: $M_1(6;\ 0)$ та $M_2(-2;\ 0)$, зображені на рис. 1.3.

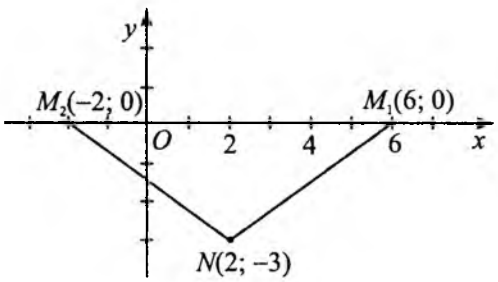


Рис. 1.3

Приклад 4. Дано вершини трикутника $M(-3;\ 6)$, $N(9;\ -10)$ і $P(-5;\ 4)$. Визначити центр C і радіус R описаного біля цього трикутника кола.

Розв'язання. Нехай центр кола має координати $C(a;\ b)$. Точка C однаково віддалена від даних точок M, N та P, тобто $MC=NC=PC$. Підставляючи в останні рівності координати точок, дістаємо систему рівнянь для визначення a та b:

$$\begin{cases}\sqrt{(a+3)^2+(b-6)^2}=\sqrt{(a-9)^2+(b+10)^2},\\ \sqrt{(a+3)^2+(b-6)^2}=\sqrt{(a+5)^2+(b-4)^2}.\end{cases}$$

Підносимо кожне рівняння до квадрата і після очевидних спрощень дістаємо:

$$\begin{cases}3a-4b-17=0,\\ a+b-1=0.\end{cases}$$

Звідси $a=3$, $b=-2$. Таким чином, центр кола має координати $C(3;\ -2)$. Радіус кола $R=MC=\sqrt{(3+3)^2+(-2-6)^2}=\sqrt{100}=10$.

Приклад 5. Яку умову задовольняють координати точки $M(x;\ y)$, якщо вона рівновіддалена від точок $A(3;\ 5)$ та $B(-1;\ 4)$?

Розв'язання. За умовою задачі $AM=BM$, або в координатній формі:

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2}.$$

Піднесемо обидві сторони цього рівняння до квадрата, розкриємо дужки і після зведення подібних членів дістанемо шукану умову: $8x+2y-17=0$.

Приклад 6. Знаючи дві протилежні вершини ромба $A(2;\ 1)$, $C(14;\ 9)$ і довжину його сторони $AB=\sqrt{65}$, визначити координати інших вершин ромба.

Розв'язання. Нехай вершина B має координати $B(x;\ y)$. Сторони ромба рівні, тому $AB=AC=\sqrt{65}$. Скориставшись формулою (1.1), дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases}\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-14)^2+(y-9)^2},\\ \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{65}.\end{cases}$$

Спростивши кожне рівняння, дістанемо еквівалентну систему:

$$\begin{cases} 3x+2y-34=0, \\ (x-2)^2+(y-1)^2=65; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{34-3x}{2}, \\ (x-2)^2+\left(\dfrac{34-3x}{2}-1\right)^2=65; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{34-3x}{2}, \\ x^2-16x+60=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{34-3x}{2}, \\ x_1=6, x_2=10; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=6, \\ y_1=8; \end{cases} \\ \begin{cases} x_1=10, \\ y_1=2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким чином, дві інші вершини ромба мають координати $B(6;\ 8)$, $D(10;\ 2)$. Ромб зображено на рис. 1.4.

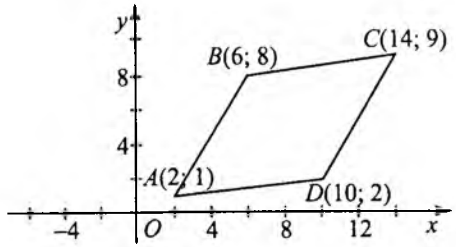


Рис. 1.4

Приклад 7. Обчислити довжину проведеної з вершини C висоти трикутника ABC з вершинами $A(3;\ 6)$, $B(-1;\ 3)$ і $C(2;\ -1)$.

Розв'язання. Довжину основи AB трикутника ABC знайдемо як відстань між точками A та B: $a=AB=\sqrt{(-1-3)^2+(3-6)^2}=\sqrt{25}=5$. Площу трикутника обчислимо за формулою (1.2):

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1-3 & 3-6 \\ 2-3 & -1-6 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -1 & -7 \end{vmatrix}=\frac{25}{2}.$$

Тепер знаходимо висоту трикутника $h=\dfrac{2S}{a}=5.$

Приклад 8. Відомі дві вершини трикутника $A(4;\ 3)$ і $B(2;\ 1)$ та його площа $S=5$. Знайти координати третьої вершини C, якщо вона лежить на бісектрисі другого та четвертого координатних кутів.

Розв'язання. Якщо точка лежить на бісектрисі другого та четвертого координатних кутів, то її абсциса та ордината однакові за абсолютною величиною та протилежні за знаком, тобто $C(x;\ -x)$. За формулою площі трикутника маємо:

$$\begin{vmatrix} 2-4 & 1-3 \\ x-4 & -x-3 \end{vmatrix}=\pm 10 .$$

Обчислюючи визначник, знаходимо $4x-2=\pm 10$. Звідси $x_1=3$, $x_2=-2$. Таким чином, третя вершина трикутника може міститись в одній із точок $C_1(3;\ -3)$ або $C_2(-2;\ 2)$ (рис. 1.5).

Приклад 9. Пряма проходить через точки $A(11;\ 3)$ та $B(3;\ -1)$. На цій прямій знайти точку, ордината якої дорівнює 4.

Розв'язання. Нехай точка M має координати $M(x;\ 4)$. Якщо точки A, B та M лежать на одній прямій, то згідно з (1.3) маємо: $\dfrac{3-11}{x-11}=\dfrac{-1-3}{4-3}$. Звідси $x=13$. Точка M має координати $M(13;\ 4)$.

Приклад 10. Знайти точку перетину діагоналей AC і BD чотирикутника з вершинами $A(-3;\ 1)$, $B(-2;\ 5)$, $C(5;\ 5)$, $D(1;\ -4)$.

Розв'язання. Точка $M(x;\ y)$ (рис. 1.6) перетину діагоналей чотирикутника належить прямим, що проходять через точки A і C та B і D. Використовуючи умову (1.3), дістаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{5+3}=\dfrac{y-1}{5-1}, \\ \dfrac{x+2}{1+2}=\dfrac{y-5}{-4-5}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+5=0, \\ 3x+y+1=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1, \\ y=2. \end{cases}$$

Таким чином, точка перетину діагоналей має координати $M(-1;\ 2)$.

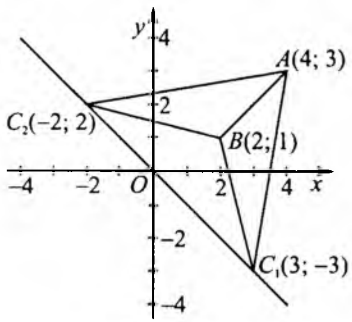


Рис. 1.5

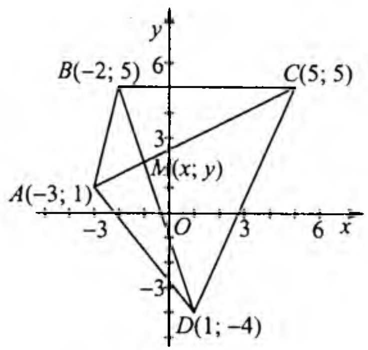


Рис. 1.6

2. Поділ відрізка у даному відношенні

Якщо точка $M(x; y)$ лежить на прямій (рис. 1.7), що проходить через точки $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$, то її координати обчислюються за формулами:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}; \tag{1.4}$$

тут $\lambda=\pm\frac{M_1M}{MM_2}$ — відношення, в якому точка M поділяє відрізок M_1M_2. Знак «+» беремо, якщо точка M належить відрізку M_1M_2, знак «-» — якщо вона не належить цьому відрізку.

З формул (1.4) при значенні $\lambda=1$ дістанемо формули координат середини відрізка:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{1.5}$$

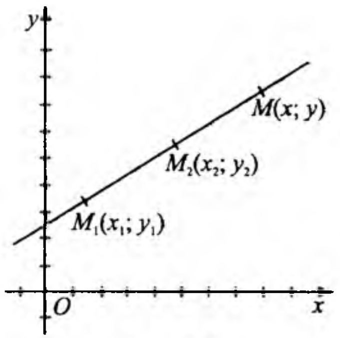


Рис. 1.7

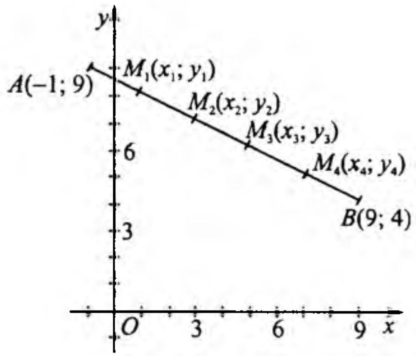


Рис. 1.8

Приклад 1. Відрізок між точками $A(2; -5)$ та $B(7; 10)$ поділено на п'ять рівних частин (рис. 1.8). Знайти координати точок поділу.

Розв'язання. Знайдемо відношення, в якому точка $M_1(x_1; y_1)$ поділяє відрізок AB: $\lambda=\frac{AM_1}{M_1B}=\frac{1}{4}$. Обчислимо координати точки $M_1(x_1; y_1)$ за формулами (1.4):

$$x_1=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{-1+\frac{1}{4}\cdot 9}{1+\frac{1}{4}}=1;\ y_1=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}=\frac{9+\frac{1}{4}\cdot 4}{1+\frac{1}{4}}=8.$$

Для точки $M_2(x_2; y_2)$ відношення $\lambda=\frac{AM_2}{M_2B}=\frac{2}{3}$, і її координати

$$x_2=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{-1+\frac{2}{3}\cdot 9}{1+\frac{2}{3}}=3;\ y_2=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}=\frac{9+\frac{2}{3}\cdot 4}{1+\frac{2}{3}}=7.$$

Точки $M_3(x_3; y_3)$ та $M_4(x_4; y_4)$ поділяють відрізок у відношеннях $\lambda=\frac{AM_3}{M_3B}=\frac{3}{2}$ і $\lambda=\frac{AM_4}{M_4B}=4$. Легко переконатись, що їхні координати $M_3(5, 6)$ і $M_4(7, 5)$.

Приклад 2. Проведено відрізок від точки $A(-3; 3)$ до точки $B(3; -2)$. До якої точки потрібно продовжити цей відрізок, щоб його довжина збільшилась утричі?

Розв'язання. Якщо довжина відрізка AB збільшиться втричі, то відношення, в якому шукана точка M поділяє відрізок AB (рис. 1.9), дорівнює $\lambda=-\frac{AM}{MB}$. Знак «–» вибрано тому, що точка M не належить відрізку AB.

За формулами (1.4) знаходимо $x=\frac{-1-\frac{3}{2}\cdot 3}{1-\frac{3}{2}}=11,\ y=\frac{3-\frac{3}{2}\cdot(-2)}{1-\frac{3}{2}}=-12.$

Таким чином, відрізок потрібно продовжити до точки $M(11; -12)$.

Приклад 3. Знайти довжину медіани AD (рис. 1.10) трикутника з вершинами $A(1; 3)$, $B(2; 1)$ та $C(-4; -3)$.

Розв'язання. Медіана AD поділяє сторону BC пополам, тому координати точки D обчислюємо за формулами (1.5):

$$x_D=\frac{2-4}{2}=-1,\ y_D=\frac{1-3}{2}=-1.$$

Тепер знайдемо відстань між точками $A(1; 3)$ та $D(-1; -1)$:

$$AD=\sqrt{(-1-1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

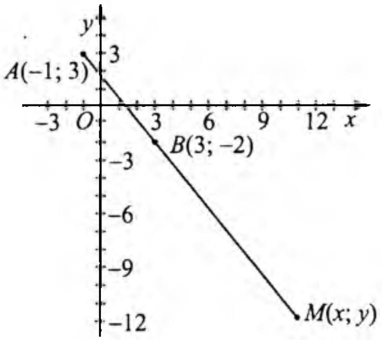


Рис. 1.9

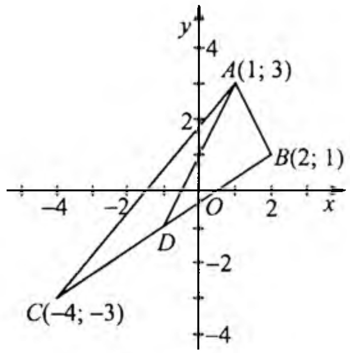


Рис. 1.10

Приклад 4. Знайти довжину бісектриси AD (рис. 1.11) трикутника з вершинами $A(-3;\ 1)$, $B(1;\ 4)$ та $C(3;\ 9)$.

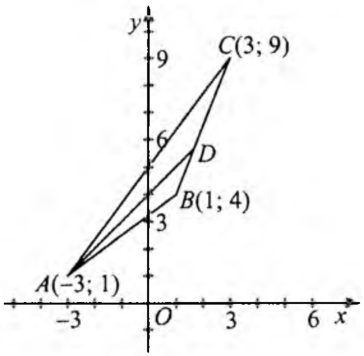


Рис. 11

Розв'язання. Бісектриса внутрішнього кута трикутника поділяє протилежну сторону у відношенні, пропорційному до довжин прилеглих сторін. Обчислюємо довжини сторін $AB=\sqrt{(1+3)^2+(4-1)^2}=5$, $AC=\sqrt{(3+3)^2+(9-1)^2}=10$ та відношення, в якому точка D поділяє сторону BC: $\lambda=\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$. Тепер знаходимо координати точки D:

$$x=\frac{1+\frac{1}{2}\cdot 3}{1+\frac{1}{2}}=\frac{5}{3},\quad y=\frac{4+\frac{1}{2}\cdot 9}{1+\frac{1}{2}}=\frac{17}{3}.$$

Приклад 5. Дано дві суміжні вершини паралелограма $A(-2;\ -1)$ і $B(3;\ 1)$ (рис. 1.12) та точку перетину його діагоналей $M(1;\ 2)$. Знайти координати двох інших вершин паралелограма.

Розв'язання. Точки C та D поділяють відрізки AM та BM у відношенні $\lambda=-2$. Тому

$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_M}{1+\lambda}=\frac{-2-2\cdot 1}{1-2}=4,\quad y_C=\frac{y_A+\lambda y_M}{1+\lambda}=\frac{-1-2\cdot 2}{1-2}=5;$$

$$x_D=\frac{x_B+\lambda x_M}{1+\lambda}=\frac{3-2\cdot 1}{1-2}=-1,\quad y_D=\frac{y_B+\lambda y_M}{1+\lambda}=\frac{1-2\cdot 2}{1-2}=3.$$

Приклад 6. Дано вершини трикутника $A(-3;\ -1)$ і $B(1;\ 5)$ та точку перетину медіан $M(2;\ 0)$. Знайти координати третьої вершини C.

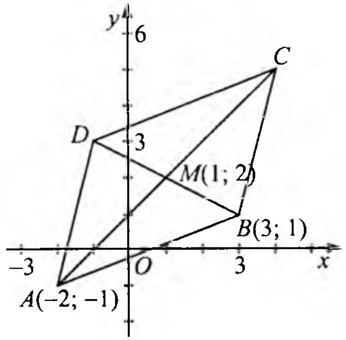


Рис. 1.12

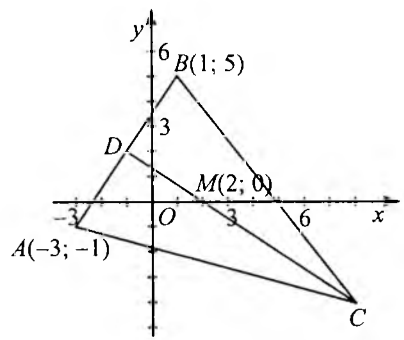


Рис. 1.13

Розв'язання. Нехай CD — медіана, проведена з вершини C (рис. 1.13). Точка D — це середина відрізка AB, за формулами (1.5) вона має координати $D(-1;\ 2)$. Медіани трикутника в точці перетину поділяються у відношенні 2:1. Звідси випливає, що точка C поділяє відрізок MD у відношенні $\lambda=-\dfrac{MC}{CD}=-\dfrac{2}{3}$. Її координати обчислюємо за формулами (1.4):

$$x_C=\frac{x_M+\lambda x_D}{1+\lambda}=\frac{2-\frac{2}{3}\cdot(-1)}{1-\frac{2}{3}}=8,\quad y_C=\frac{y_M+\lambda y_D}{1+\lambda}=\frac{0-\frac{2}{3}\cdot 2}{1-\frac{2}{3}}=-4.$$

Таким чином, точка C має координати $C(8;\ -4)$.

2. Рівняння лінії на площині

2.1. Поняття рівняння лінії. Перетин ліній

Нехай на площині задано прямокутну систему координат xOy.
Рівняння з двома змінними

$$F(x, y) = 0, \tag{2.1}$$

яке задовольняють координати x та y кожної точки лінії і не задовольняють координати жодної точки, що не лежить на лінії, називається *рівнянням лінії*.

Змінні x та y в рівнянні (2.1) називаються *змінними координатами її точок*.

Надалі замість виразу «дано рівняння лінії $F(x, y) = 0$» будемо казати скорочено: дано лінію $F(x, y) = 0$.

Для знаходження координат точок перетину ліній $F_1(x, y) = 0$ та $F_2(x, y) = 0$ потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0, \\ F_2(x,y)=0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Якщо ця система рівнянь несумісна, то це означає, що дані лінії не перетинаються.

Приклад 1. Визначити, які з точок $M_1(2; 1)$, $M_2(-3; 4)$, $M_3(-1; 7)$ лежать на лінії $2x + y - 5 = 0$.

Розв'язання. Підставляємо координати даних точок в рівняння лінії і переконуємось, що це рівняння задовольняють координати точок M_1 та M_3 і не задовольняють координати точки M_2. Таким чином, точки M_1 та M_3 лежать на лінії $2x + y - 5 = 0$, точка M_2 не лежить на цій лінії.

Приклад 2. Знайти точки перетину кола $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$ з віссю абсцис.

Розв'язання. Рівняння осі абсцис $y = 0$, тому точки перетину кола та осі Ox знаходимо, розв'язуючи систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y-8=0, \\ y=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x-8=0, \\ y=0; \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_1=-2, \\ x_2=4; \end{array} \right. \\ y=0. \end{array} \right.$$

Отже, коло перетинає вісь абсцис у точках $M_1(-2; 0)$ та $M_2(4; 0)$.

Приклад 3. Знайти точки перетину ліній $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ та $x - y - 5 = 0$.

Розв'язання. Точки перетину ліній знаходимо, розв'язуючи систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1, \\ x-y-5=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2+25y^2=100, \\ x=y+5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(y+5)^2+25y^2=100, \\ x=y+5; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 29y^2+40y=0, \\ x=y+5; \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} y_1=0, \\ y_2=-\frac{40}{29}; \end{array} \right. \\ x=y+5; \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=5, \\ y_1=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=\frac{105}{29}, \\ y_2=-\frac{40}{29}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Таким чином, дані лінії перетинаються в точках $M_1(5; 0)$ та $M_2\left(\frac{105}{29}; -\frac{40}{29}\right)$.

2.2. Рівняння лінії як геометричного місця точок

Нехай лінію задано як геометричне місце точок, що мають деяку одну й ту саму властивість. Для того щоб скласти її рівняння, потрібно:

1) вибрати довільну (змінну) точку $M(x; y)$ цієї лінії;
2) записати спільну властивість точок лінії у вигляді рівності;
3) виразити геометричні образи (відрізки, кути тощо), які входять у записану рівність, через координати змінної точки $M(x; y)$.

Приклад 1. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від двох даних точок $A(1; 3)$ та $B(-5; 2)$.

Розв'язання. Нехай точка $M(x; y)$ — довільна точка лінії. Геометричну властивість даної лінії можна записати у вигляді

$$AM = BM. \tag{2.3}$$

Виразимо довжини відрізків, що входять до складу рівності (2.3), через координати точок A, B та M:

$$AM = \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}, \quad BM = \sqrt{(x+5)^2+(y-2)^2}.$$

Підставивши здобуті вирази в рівність (2.3), дістанемо рівняння шуканої лінії:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x+5)^2+(y-2)^2}. \qquad (2.4)$$

Справді, для кожної точки $M(x;\,y)$, що лежить на лінії, виконується рівність (2.3), а отже, вона задовольняє рівняння (2.4). Для кожної точки M, що не лежить на даній лінії, не виконується рівність (2.3), і тому її координати не задовольняють рівняння (2.4). Рівняння (2.4) можна суттєво спростити. Якщо піднести обидві його частини до квадрату, розкрити дужки та звести подібні члени, дістанемо

$$12x + 2y + 19 = 0. \qquad (2.5)$$

Це і є рівняння даної лінії. Таким чином, рівняння (2.5) є рівнянням перпендикуляра до відрізка AB, проведеного через середину цього відрізка.

Приклад 2. Скласти рівняння геометричного місця точок, сума квадратів відстаней яких від двох даних точок $A(-a;\,0)$ та $B(a;\,0)$ дорівнює $4a^2$.

Розв'язання. Позначимо довільну точку лінії через $M(x;\,y)$. З умови задачі випливає, що

$$AM^2 + BM^2 = 4a^2. \qquad (2.6)$$

Виразимо довжини відрізків AM та BM через змінні координати точки M:

$$AM=\sqrt{(x+a)^2+y^2},\ \ BM=\sqrt{(x-a)^2+y^2}.$$

Підставляючи здобуті вирази у рівність (2.6), знаходимо рівняння, яке задовольняють координати x і y точки M:

$$(x + a)^2 + y^2 + (x - a)^2 + y^2 = 4a^2.$$

Звідси після очевидних спрощень маємо:

$$x^2 + y^2 = a^2. \qquad (2.7)$$

Це і є рівняння даної лінії. Справді, для кожної точки M, що лежить на цій лінії, виконується умова (2.6), а отже, координати точки M задовольняють рівняння (2.7); для кожної точки M, що не лежить на лінії, не буде виконуватися умова (2.6), а отже, її координати не будуть задовольняти рівняння (2.7).

Рівняння (2.7) є рівнянням кола радіуса a з центром у початку координат.

Приклад 3. Скласти рівняння геометричного місця центра ваги трикутника, дві вершини якого $A(1;\,0)$ та $B(5;\,0)$, якщо третя вершина лежить на бісектрисі першого та третього координатних кутів.

Розв'язання. Центр ваги трикутника міститься в точці $M(x;\,y)$ перетину його медіан (рис. 2.1).

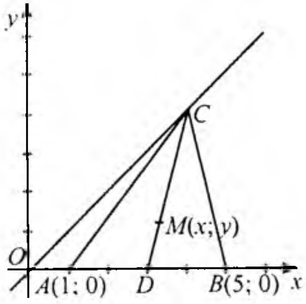


Рис. 2.1

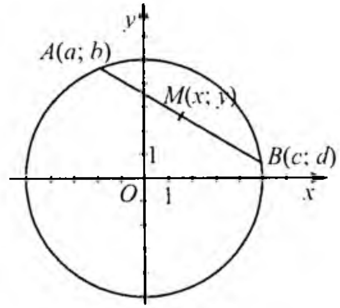


Рис. 2.2

Розглянемо медіану CD. Координати точки D знайдемо за формулами (1.5) координат середини відрізка $x_D=\dfrac{1+5}{2}=3,\ y_D=0$. Медіани трикутника в точці перетину поділяються у відношенні 2:1, тому вершина C трикутника поділяє відрізок MD у відношенні $\lambda=-\dfrac{MC}{CD}=-\dfrac{2}{3}$. За формулами (1.4) поділу відрізка у даному відношенні знаходимо:

$$x_C=\frac{x_M+\lambda x_D}{1+\lambda}=\frac{x-\dfrac{2}{2}\cdot 3}{1-\dfrac{2}{3}}=3x-6,\ \ y_C=\frac{y_M+\lambda y_D}{1+\lambda}=\frac{y-\dfrac{2}{3}\cdot 0}{1-\dfrac{2}{3}}=3y.$$

Точка C лежить на бісектрисі координатного кута, тому $x_C = y_C$. Звідси $3x - 6 = 3y$, або $x - y - 2 = 0$.

Приклад 4. Скласти рівняння геометричного місця середин тих хорд кола $x^2 + y^2 = 25$, довжина яких дорівнює 8.

Розв'язання. Розглянемо хорду AB, що сполучає точки $A(a;\,b)$ та $B(c;\,d)$. Нехай її середина — точка $M(x;\,y)$ (рис. 2.2). Точки A та B лежать на колі, тому їхні координати задовольняють рівняння кола, тобто

$$a^2 + b^2 = 25,\ \ c^2 + d^2 = 25\,. \qquad (2.8)$$

За умовою довжина хорди $AB = 8$. Звідси $(c - a)^2 + (d - b)^2 = 64$, або $c^2 + d^2 + a^2 + b^2 - 2ac - 2bd = 64$. Ураховуючи (2.8), з останньої рівності дістанемо:

$$ac + bd = -7. \qquad (2.9)$$

Точка $M(x;\ y)$ — середина відрізка AB. Тому $x=\dfrac{a+c}{2}$, $y=\dfrac{b+d}{2}$. Обчислимо вираз x^2+y^2, ураховуючи рівності (2.8) та (2.9):

$$x^2+y^2=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(\frac{b+d}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd)}{4}=$$

$$=\frac{25+25-14}{4}=9.$$

Таким чином, рівняння шуканого геометричного місця точок має вигляд $x^2+y^2=9$.

2.3. Рівняння лінії в полярній системі координат

Нехай на площині задано точку O, яка називається *полюсом*, та вісь OP, яка називається *полярною віссю* (рис. 2.3). Назвемо *полярним радіусом* точки M її відстань $r=OM$ і *полярним кутом* точки M — кут φ між полярною віссю та відрізком OM. Тоді кожній точці площини відповідає єдина пара чисел $(r;\ \varphi)$, які називаються *полярними координатами* точки.

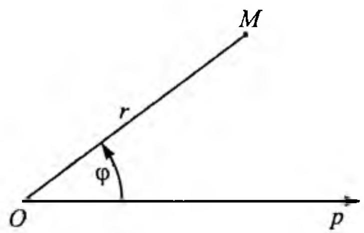


Рис. 2.3

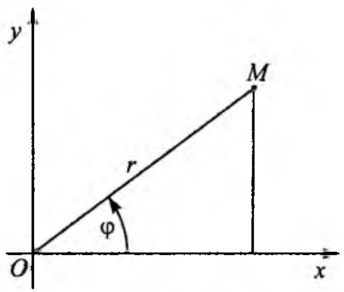


Рис. 2.4

Якщо взяти полюс за початок декартової прямокутної системи координат, а полярну вісь — за вісь Ox (рис. 2.4), то декартові координати $(x;\ y)$ точки M та її полярні координати $(r;\ \varphi)$ будуть пов'язані залежностями

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi; \tag{2.10}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad tg\varphi=\frac{y}{x}. \tag{2.11}$$

Приклад 1. У декартових координатах задано точку $M(1;\ -1)$. Знайти її полярні координати.

Розв'язання. За формулами (2.11) маємо:

$$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},\quad tg\varphi=-1,\quad \varphi=\frac{3\pi}{4}.$$

Отже, у полярних координатах $M\left(\sqrt{2};\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Приклад 2. У полярних координатах задано точку $M\left(4;\dfrac{\pi}{3}\right)$. Знайти її декартові координати.

Розв'язання. За формулами (2.10) $x=4\cos\dfrac{\pi}{3}=2$, $y=4\sin\dfrac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$..

Таким чином, у декартових координатах $M\left(2;2\sqrt{3}\right)$.

Приклад 3. Скласти рівняння кола, що проходить через полюс, якщо його центр міститься на полярній осі, а радіус дорівнює a (рис. 2.5).

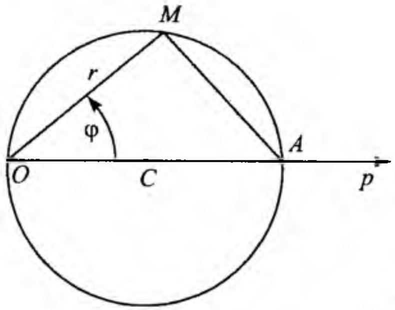


Рис. 2.5

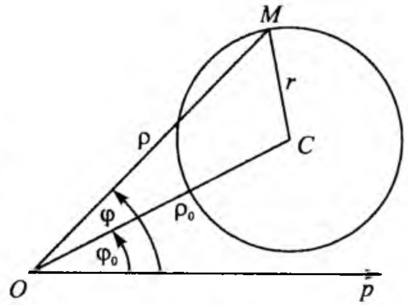


Рис. 2.6

Розв'язання. Нехай $M(r;\varphi)$ — довільна точка кола. Оскільки точка M може займати на колі будь-яке положення, то ρ і φ є змінними величинами. Як і у випадку декартової системи, їх називають *поточними*, або *змінними координатами*. Трикутник OMA побудовано на діаметрі кола, тому він прямокутний. За умовою діаметр кола $OA=2a$. З ΔOMA знаходимо $OM=OA\cos\varphi$. Отже, рівняння кола має вигляд

$$r=2a\cos\varphi.$$

Приклад 4. У полярній системі координат скласти рівняння кола, що має центр $C(\rho_0;\varphi_0)$ і радіус r (рис. 2.6).

Розв'язання. Позначимо буквою M довільну точку кола, нехай ρ і φ — її полярні координати.

Усі точки кола віддалені від центра на відстань r. Запишемо цю умову символічно:

$$CM = r. \tag{2.12}$$

Виразимо CM через координати точки M. За теоремою косинусів маємо:

$$CM = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^{\,2} - 2\rho_0\rho\cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Підставивши здобутий вираз у рівність (2.12), знайдемо рівняння, що пов'язує координати ρ, φ точки M:

$$\sqrt{\rho^2 + \rho_0^{\,2} - 2\rho_0\rho\cos(\varphi - \varphi_0)} = r. \tag{2.13}$$

Це і є рівняння даного кола.

Справді, для кожної точки M, що лежить на даному колі, виконується умова (2.12) і, отже, координати точки M задовольняють рівняння (2.13); для кожної точки M, що не лежить на даному колі, умова (2.12) не виконується і, отже, її координати не задовольняють рівняння (2.13).

Таким чином, задачу розв'язано. Можна лише трохи спростити знайдене рівняння і подати його у виді, вільному від радикала:

$$\rho^2 - 2\rho_0\rho\cos(\varphi - \varphi_0) = r^2 - \rho_0^{\,2}.$$

3. Пряма лінія

3.1. Різні види рівняння прямої. Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Розглянемо деяку пряму на площині (рис. 3.1). *Кутом нахилу прямої до осі Ох* називається кут, що відлічується проти руху стрілки годинника від додатного напряму осі до даної прямої. *Кутовим коефіцієнтом прямої* називається тангенс кута нахилу прямої до осі Ox:

$$k = \operatorname{tg}\varphi. \tag{3.1}$$

Кутовий коефіцієнтом прямої характеризує напрям прямої. Якщо $k > 0$, то пряма утворює з віссю Ox гострий кут, якщо $k < 0$ — тупий кут. При $k = 0$ пряма паралельна осі Ox. Для прямої, паралельної осі ординат, кутовий коефіцієнт не існує.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд

$$y = kx + b, \tag{3.2}$$

тут b — довжина відрізка, який відтинає пряма на осі ординат (рис. 3.1).

У вигляді (3.2) можна записати рівняння кожної прямої, не паралельної осі Ox. Якщо пряма паралельна осі Ox (рис. 3.1), то її рівняння має вигляд

$$x = a. \tag{3.3}$$

Рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(x_1; y_1)$ (рис. 3.2), має вигляд

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{3.4}$$

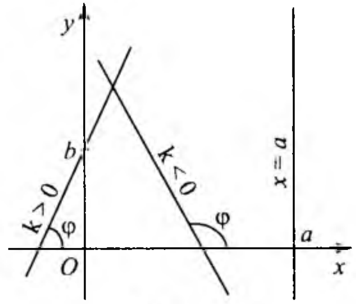


Рис. 3.1

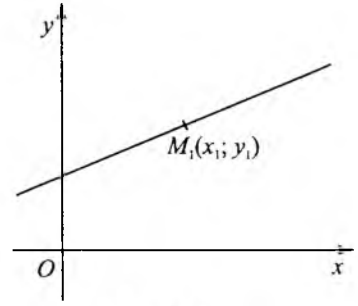


Рис. 3.2

Рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$ (рис. 3.3) має вигляд

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{3.5}$$

Кутовий коефіцієнт цієї прямої

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{3.6}$$

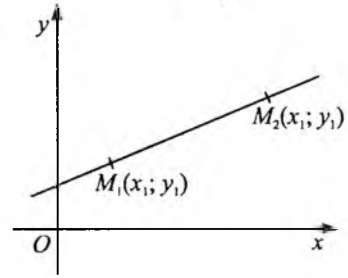


Рис. 3.3

Рівняння

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (3.7)$$

називається *рівнянням прямої у відрізках* на осях. Тут a та b — відрізки, які відтинає пряма на осях координат (рис. 3.4).

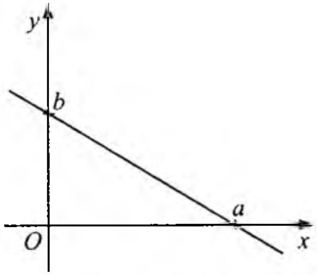


Рис. 3.4

Загальним рівнянням прямої називається рівняння

$$Ax + By + C = 0. \qquad (3.8)$$

Коефіцієнти A та B загального рівняння прямої дорівнюють координатам вектора $\bar{n}(A;B)$, перпендикулярного до прямої (рис. 3.5).

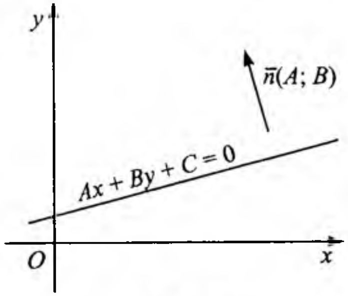


Рис. 3.5

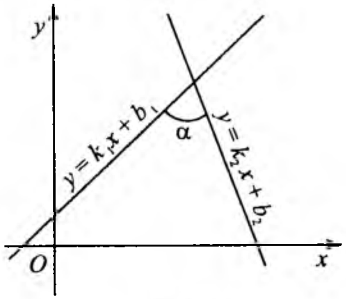


Рис. 3.6

Кутом між прямими називається кут, який відлічується проти руху стрілки годинника від першої прямої до другої (рис. 3.6). Кут між прямими $y=k_1x+b_1$ та $y=k_2x+b_2$ обчислюється за формулою

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \qquad (3.9)$$

Умовою паралельності прямих є рівність їхніх кутових коефіцієнтів:

$$k_1 = k_2. \qquad (3.10)$$

Умовою перпендикулярності прямих є співвідношення

$$k_1k_2 = -1. \qquad (3.11)$$

Якщо прямі задано загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1=0$ та $A_2x+B_2y+C_2=0$, то кут між ними обчислюється за формулою

$$\cos\alpha=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}, \qquad (3.12)$$

умова паралельності має вигляд

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}, \qquad (3.13)$$

умова перпендикулярності має вигляд

$$A_1A_2+B_1B_2=0. \qquad (3.14)$$

Приклад 1. Скласти рівняння сторін та діагоналей трапеції з вершинами $A(-4; 0)$, $B(0; 6)$, $C(3; 6)$ та $D(3; 0)$ (рис. 3.7).

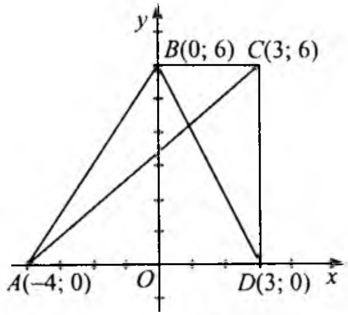


Рис. 3.7

Розв'язання. Рівняння сторони AB запишемо у вигляді рівняння прямої у відрізках (3.7) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Пряма AB відтинає на координатних осях відрізки $a = -4$ та $b = 6$, тому її рівняння $\frac{x}{-4}+\frac{y}{6}=1$.

Рівняння сторони BC запишемо у вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом (3.2) $y = kx + b$. Пряма BC паралельна осі Ox, тому її кутовий коефіцієнт $k = 0$. Пряма BC відтинає на осі Oy відрізок $b = 6$. Отже, рівняння прямої BC має вигляд $y = 6$.

Пряма CD паралельна осі Oy, тому її рівняння має вигляд (3.3) $x = a$. Сторона CD відтинає на осі Ox відрізок $a = 3$, отже, її рівняння $x = 3$.

Пряма AD має кутовий коефіцієнт $k = 0$ і проходить через початок координат, тому її рівняння має вигляд $y = 0$.

Діагональ BD відтинає на координатних осях відрізки $a = 3$ та $b = 6$, тому за формулою (3.7) її рівняння $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$.

Рівняння діагоналі AC шукаємо у вигляді (3.5) рівняння прямої, що проходить через дві дані точки $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Підставляючи сюди координати точок $A(-4; 0)$ та $C(3; 6)$, дістаємо $\frac{y - 0}{6 - 0} = \frac{x + 4}{3 + 4}$. Звідси маємо рівняння прямої AC $6x - 7y + 24 = 0$.

Приклад 2. Визначити кутовий коефіцієнт прямої $5x + 4y - 2 = 0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння даної прямої у вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом (3.2):

$$y = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{2}.$$

Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт даної прямої $k = -\frac{5}{4}$.

Приклад 3. Дано пряму $5x - y + 10 = 0$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(7; -2)$:

1) паралельно даній прямій;

2) перпендикулярно до даної прямої.

Розв'язання. Кутовий коефіцієнт даної прямої $k = 5$.

Кутовий коефіцієнт прямої, що паралельна даній прямій, за умовою (3.10) також дорівнює 5. Таким чином, узявши в рівнянні (3.4)

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

$k = 5$, $x_1 = 7$, $y_1 = -2$, дістанемо $y + 2 = 5(x - 7)$, або $5x - y - 37 = 0$. Це і є рівняння прямої, яка проходить через точку $M(7; -2)$ паралельно даній прямій.

З умови перпендикулярності прямих (3.11) $k_1 k_2 = -1$ випливає, що кутовий коефіцієнт прямої, перпендикулярної до даної прямої, $k_2 = -\frac{1}{5}$. Підставляючи знайдене значення k та координати точки M в рівняння (3.4), дістаємо $y + 2 = -\frac{1}{5}(x - 7)$, або після очевидних спрощень $x + 5y + 3 = 0$.

Приклад 4. Дано трикутник з вершинами $A(-3; 1)$, $B(1; 7)$ та $C(5; -1)$. Скласти рівняння сторони AC, медіани AE, висоти BD та обчислити кут α між медіаною AE та висотою BD (рис. 3.8).

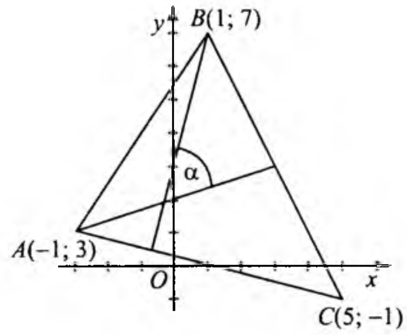


Рис. 3.8

Розв'язання. Складемо рівняння сторони AC, підставивши координати точок $A(-3; 1)$ та $C(5; -1)$ в рівняння (3.5). Дістаємо: $\frac{y - 1}{-1 - 1} = \frac{x + 3}{5 + 3}$, звідси $\frac{y - 1}{-2} = \frac{x + 3}{8}$, або остаточно

$$x + 4y - 1 = 0. \qquad (3.15)$$

Обчислимо координати точки D за формулами координат середини відрізка:

$x_E = \frac{1 + 5}{2} = 3, y_E = \frac{7 - 1}{2} = 3$. Підставляючи в рівняння (3.5) координати точок $A(-3; 1)$ та $E(3; 3)$, знаходимо рівняння медіани AE: $\frac{y - 1}{3 - 1} = \frac{x + 3}{3 + 3}$, або $\frac{y - 1}{2} = \frac{x + 3}{6}$, звідси остаточно

$$x - 3y + 6 = 0. \qquad (3.16)$$

Висота BD перпендикулярна до сторони AC, кутовий коефіцієнт якої знайдемо з рівняння (3.15): $k_{AC}=-\dfrac{1}{4}$. Тому кутовий коефіцієнт висоти BD $k_{BD}=-\dfrac{1}{k_{AC}}=4$. Підставимо знайдене значення k_{BD} та координати точки B в рівняння (3.4) і дістанемо рівняння висоти BD: $y-7=4(x-1)$, або $4x-y+3=0$.

З рівняння (3.16) визначимо кутовий коефіцієнт медіани AE: $k_{AE}=\dfrac{1}{3}$.

Кут між медіаною та висотою обчислимо за формулою (3.9), в якій $k_1=k_{AE}=\dfrac{1}{3}, k_2=k_{BD}=4$.

Тоді $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{4-\dfrac{1}{3}}{1+\dfrac{1}{3}\cdot 4}=\dfrac{11}{7}$, звідси $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{11}{7}=57^\circ 32'$.

Приклад 5. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(4;\,2)$ і утворює з віссю Ox кут 135° (рис. 3.9).

Розв'язання. За формулою (3.1) обчислюємо кутовий коефіцієнт прямої: $k=\operatorname{tg}135^\circ=-1$. Підставимо знайдене значення k та координати точки $A(4;\,2)$ в рівняння (3.4) і дістанемо: $y-2=-(x-4)$, або $x+y-6=0$.

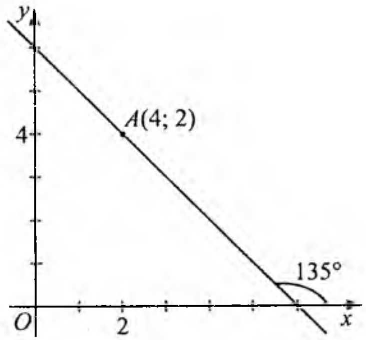


Рис. 3.9

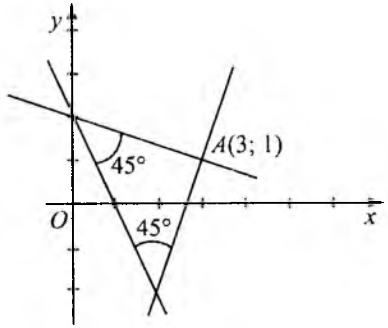


Рис. 3.10

Приклад 6. Скласти рівняння прямих, які проходить через точку $A(3;\,1)$ і утворюють з прямою $2x+y-2=0$ кут 45° (рис. 3.10).

Розв'язання. Пряма $2x+y-2=0$ має кутовий коефіцієнт $k=-2$. Кутовий коефіцієнт однієї з шуканих прямих знайдемо з формули (3.9) кута між прямими, якщо візьмемо в ній $k_1=k=-2$, $\alpha=45^\circ$:

$$\operatorname{tg}45^\circ=\frac{k_2+2}{1-2k_2},\ \text{або}\ 1=\frac{k_2+2}{1-2k_2}.$$

Звідси $1-2k_2=k_2+2$ і $k_2=-\dfrac{1}{3}$. Таким чином, рівняння однієї з прямих буде таке: $y-1=-\dfrac{1}{3}(x-3)$ або $x+3y-6=0$.

Другий розв'язок дістанемо, якщо у формулі кута між прямими (3.9) візьмемо $k_2=k=-2, \alpha=45^\circ$ та обчислимо k_1:

$$1=\frac{-2-k_1}{1-2k_1}.$$

Звідси $k_1=3$ і маємо другий розв'язок: $y-1=3(x-3)$, або $3x-y-8=0$.

Слід зауважити, що кожна зі знайдених прямих утворює з даною в умові прямою кут $\alpha=45^\circ$, тому ці прямі взаємно перпендикулярні і після того, як знайдено кутовий коефіцієнт однієї з них $k_2=-\dfrac{1}{3}$, кутовий коефіцієнт другої можна знайти з умови перпендикулярності $k_1=-\dfrac{1}{k_2}=3$.

Приклад 7. Дано рівняння двох сторін прямокутника $x-2y=0$, $x-2y+15=0$ та рівняння одної з його діагоналей $7x+y-15=0$. Знайти вершини прямокутника (рис. 3.11).

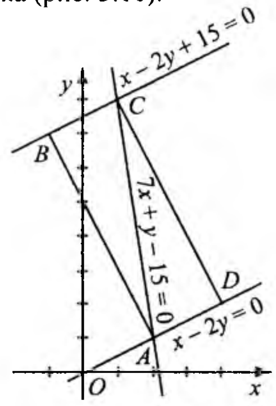


Рис. 3.11

Розв'язання. В умові задачі задано рівняння двох паралельних сторін прямокутника, оскільки для цих прямих виконується умова паралельності (3.13).

Знайдемо координати двох протилежних вершин прямокутника, розміщених на перетині паралельних сторін та діагоналі. Для цього розв'яжемо дві системи рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2y=0,\\7x+y-15=0;\end{cases}\\\begin{cases}x-2y+15=0,\\7x+y-15=0;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2y,\\14y+y-15=0;\end{cases}\\\begin{cases}y=8x,\\7x+8x-15=0;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2,\\y=1;\end{cases}\\\begin{cases}x=1,\\y=8.\end{cases}\end{array}\right.$$

Таким чином, маємо координати двох вершин прямокутника $A(2;1)$, $C(1;8)$.

Кутові коефіцієнти заданих в умові сторін *AD* та *BC* $k_1=\frac{1}{2}$. Тому кутові коефіцієнти перпендикулярних до них сторін *AB* та *CD* $k_2=-2$.

Складемо рівняння сторони *AB*: $y-1=-2(x-2)$, або $2x+y-5=0$.

Складемо рівняння сторони *CD*: $y-8=-2(x-1)$, або $2x+y-10=0$.

Вершини *B* та *C* знайдемо, розв'язавши дві системи рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2y+15=0,\\2x+y-5=0;\end{cases}\\\begin{cases}x-2y=0,\\2x+y-10=0;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2y-15,\\4y-30+y-5=0;\end{cases}\\\begin{cases}x=2y,\\4y+y-10=0;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-1,\\y=7;\end{cases}\\\begin{cases}x=4,\\y=2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Отже, знайдено координати ще двох вершин прямокутника $B(-1;7)$ та $D(4;2)$.

Приклад 8. Точка $A(-1;4)$ є вершиною квадрата, діагональ якого лежить на прямій $7x-y-14=0$. Скласти рівняння сторін та другої діагоналі цього квадрата (рис. 3.12.).

Розв'язання. Кутовий коефіцієнт прямої $7x-y-14=0$ дорівнює $k=7$. Сторони *AB* та *AD* лежать на прямих, що проходять через точку $A(-1;\ 4)$ під кутом 45° до прямої $7x-y-14=0$. Знайдемо кутовий коефіцієнт k_1 прямої *AB*. Для цього підставимо у формулу (3.9) значення кута між прями

мими $\alpha=45°$, $k_2=k=7$. Дістанемо $1=\frac{7-k_1}{1+7k_1}$, звідси $7-k_1=1+7k_1$ і $k_1=\frac{3}{4}$. Складемо рівняння прямої *AB*: $y-4=\frac{3}{4}(x+1)$, або $3x-4y+19=0$.

Сторона *AD* перпендикулярна до прямої *AB*, тому її кутовий коефіцієнт $k_{AD}=-\frac{4}{3}$. Складемо рівняння прямої *AD*: $y-4=-\frac{4}{3}(x+1)$, звідки $4x+3y-8=0$.

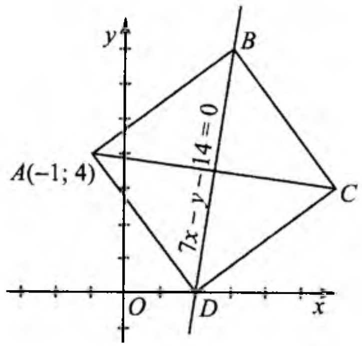


Рис. 3.12

Координати вершин *B* та *D* обчислимо, розв'язавши дві системи рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-4y+19=0,\\7x-y-14=0;\end{cases}\\\begin{cases}4x+3y-8=0,\\7x-y-14=0;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-28x+56+19=0,\\y=7x-14;\end{cases}\\\begin{cases}4x+21x-42-8=0,\\y=7x-14;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3,\\y=7;\end{cases}\\\begin{cases}x=2,\\y=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Отже, вершини *B* та *D* мають координати: *B*(3; 7), *D*(2; 0).

Сторона *BC* паралельна прямій *AD*, тому її кутовий коефіцієнт $k_{BC}=k_{AD}=-\frac{4}{3}$. Складемо рівняння прямої *BC*: $y-7=-\frac{4}{3}(x-3)$, спростивши дістанемо $4x+3y-33=0$.

Сторона *CD* паралельна прямій *AB*, її кутовий коефіцієнт $k_{CD}=k_{AB}=\frac{3}{4}$. Складемо рівняння прямої *CD*: $y-0=\frac{3}{4}(x-2)$, звідки $3x-4y-6=0$.

Діагоналі квадрата AC та BD взаємо перпендикулярні, тому $k_{AC}=-\frac{1}{k_{BD}}=-\frac{1}{7}$. Запишемо рівняння діагоналі AC: $y-4=-\frac{1}{7}(x+1)$, або $x+7y-27=0$.

Приклад 9. Знайти точку M_1, симетричну точці $M(3; -3)$ відносно прямої, що проходить через точки $A(-2; 2)$ та $B(-6; 4)$.

Розв'язання. Складемо рівняння прямої AB: $\frac{y-2}{4-2}=\frac{x+2}{-6+2}$, після спрощення дістанемо $x+2y-2=0$. Її кутовий коефіцієнт $k=-\frac{1}{2}$.

Знайдемо проекцію точки $M(3; -3)$ на пряму AB. Для цього запишемо рівняння перпендикуляра MC, опущеного з точки M на пряму AB, та знайдемо точку C їх перетину. Кутовий коефіцієнт $k_{MC}=-\frac{1}{k}=2$, рівняння перпендикуляра MC: $y+3=2(x-3)$, або $2x-y-9=0$. Координати точки C знаходимо, розв'язуючи систему:

$$\begin{cases} x+2y-2=0, \\ 2x-y-9=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+4x-18-2=0, \\ y=2x-9; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=-1. \end{cases}$$

Точка M_1, симетрична точці $M(3; -3)$, поділяє відрізок MC у відношенні $\lambda=-\frac{MM_1}{M_1C}=-2$. Тепер обчислюємо координати точки M_1:

$$x=\frac{3+(-2)\cdot 4}{1-2}=5,\quad y=\frac{-3+(-2)\cdot(-1)}{1-2}=1.$$

Таким чином, $M_1(5; 1)$.

Приклад 10. Дано вершини трикутника $A(1; 2)$, $B(5; 5)$ та $C(7; -6)$. Знайти проекцію вершини B на бісектрису кута A цього трикутника (рис. 3.13).

Розв'язання. Обчислимо довжини сторін AB та AC даного трикутника:

$$AB=\sqrt{(5-1)^2+(5-2)^2}=\sqrt{25}=5;$$
$$AC=\sqrt{(7-1)^2+(-6-2)^2}=\sqrt{100}=10.$$

Знайдемо відношення λ, в якому бісектриса AD поділяє сторону трикутника BC:

$$\lambda=\frac{CD}{DB}=\frac{AC}{AB}=\frac{10}{5}=2.$$

Тепер за формулами поділу відрізка в даному відношенні обчислюємо координати точки D:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{7+2\cdot 5}{1+2}=\frac{17}{3};\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{-6+2\cdot 5}{1+2}=\frac{4}{3}.$$

Таким чином, точка D має координати $D\left(\frac{17}{3};\frac{4}{3}\right)$.

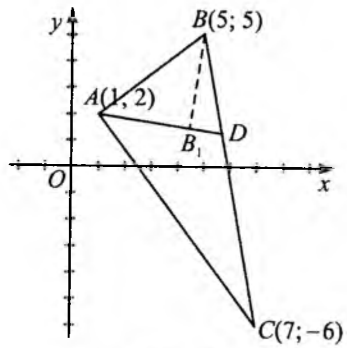


Рис. 32

Складемо рівняння бісектриси AD:

$$\frac{y-\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{x-\frac{17}{3}}{-\frac{14}{3}},\text{ або }\frac{y-\frac{4}{3}}{2-\frac{4}{3}}=\frac{x-\frac{17}{3}}{1-\frac{17}{3}};\text{ звідки }x+7y-15=0.$$

Кутовий коефіцієнт бісектриси AD дорівнює $k_1=-\frac{1}{7}$. З умови перпендикулярності прямих випливає, що кутовий коефіцієнт перпендикуляра, опущеного з вершини B на бісектрису AD, дорівнює $k_2=7$. Запишемо рівняння цього перпендикуляра: $y-5=7(x-5)$, звідки $7x-y-30=0$.

Знаходимо координати проекції B_1 вершини B на бісектрису кута A:

$$\begin{cases} 7x-y-30=0 \\ x+7y-15=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=7x-30 \\ x+7(7x-30)-15=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4{,}5; \\ y=1{,}5. \end{cases}$$

Приклад 11. Записати рівняння прямої, яка походить через точку $M(4;\ 3)$ і відтинає від координатного кута трикутник площею 3 кв. од.

Розв'язання. Будемо шукати рівняння прямої у вигляді $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Точка $M(4;\ 3)$ належить прямій, тому її координати задовольняють це рівняння. Отже $\frac{4}{a}+\frac{3}{b}=1$. Площа трикутника OAB $S=\frac{1}{2}|ab|$. Таким чином, для знаходження параметрів a та b маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{4}{a}+\frac{3}{b}=1\\ \frac{1}{2}|ab|=3\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{4}{a}+\frac{3}{b}=1\\ ab=6\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{4}{a}+\frac{3}{b}=1\\ ab=-6\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{4}{a}+\frac{3a}{6}=1\\ b=\frac{6}{a}\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{4}{a}-\frac{3a}{6}=1\\ b=-\frac{6}{a}\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2-2a+8=0\\ b=\frac{6}{a}\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+2a-8=0\\ b=-\frac{6}{a}\end{cases}\end{array}\right..$$

Перша із систем не має розв'язків, розв'язки другої системи:

$$\begin{cases}a_1=2,\\ b_1=-3;\end{cases}\quad\begin{cases}a_2=-4,\\ b_2=\frac{3}{2}.\end{cases}$$

Таким чином, маємо дві прямі (рис. 3.14), що задовольняють умову задачі:

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1 \text{ та } \frac{x}{-4}+\frac{2y}{3}=1.$$

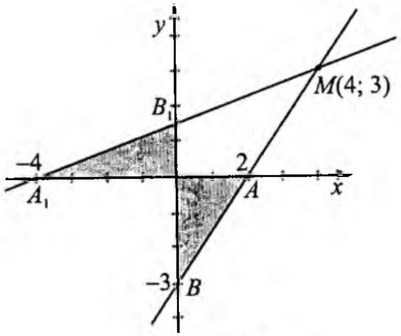


Рис. 3.14

3.2. Відстань від точки до прямої

Відстань від точки $M(x_0;\ y_0)$ до прямої, заданої рівнянням $Ax+By+C=0$, обчислюється за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (3.17)$$

Приклад 1. Знайти відстань між паралельними прямими $4x+y+3=0$ та $4x+y-7=0$.

Розв'язання. На прямій $4x+y+3=0$ знаходимо довільну точку, наприклад $M(0;\ -3)$. Обчислюємо відстань від точки $M(0;\ -3)$ до прямої $4x+y-7=0$ за формулою (3.17):

$$d=\frac{|4\cdot 0+1\cdot(-3)-7|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{17}}=\frac{10}{\sqrt{17}}.$$

Приклад 2. Обчислити довжину висоти BD трикутника з вершинами $A(1;\ 3)$, $B(3;\ 5)$ та $C(7;\ 1)$.

Розв'язання. Складемо рівняння сторони AC: $\frac{y-3}{1-3}=\frac{x-1}{7-1}$, звідки $x+3y-10=0$. Обчислюємо довжину висоти як відстань від вершини $B(3;\ 5)$ до прямої AC:

$$h=\frac{|1\cdot 3+3\cdot 5-10|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{8}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}.$$

Приклад 3. Скласти рівняння прямої, що паралельна прямій $5x-12y+7=0$ і віддалена від неї на 4 одиниці.

Розв'язання. Нехай $M(x;\ y)$ — довільна точка шуканої прямої. За формулою відстані від точки до прямої (3.17) маємо:

$$\frac{|5x-12y+7|}{\sqrt{5^2+12^2}}=4,$$

звідки $|5x-12y+7|=52$, або $5x-12y+7=\pm 52$. Таким чином, маємо рівняння двох прямих, що паралельні даній прямій і віддалені від неї на 4 одиниці:

$$5x-12y+59=0;\ 5x-12y-45=0.$$

Приклад 4. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $A(2; 4)$ на відстані 4 одиниць від точки $B(-6; 3)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку $A(2; 4)$:

$$y-4=k(x-2),\text{ або } kx-y+4-2k=0. \tag{3.18}$$

Ця пряма віддалена від точки $B(-6; 3)$ на 4 одиниці, тому за формулою (3.17) маємо рівняння для визначення кутового коефіцієнта k:

$$\frac{|-6k-3+4-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=4\text{ , або } |1-8k|=4\sqrt{k^2+1}\text{ .}$$

Підносимо обидві частини до квадрата і після зведення подібних членів дістаємо: $48k^2-16k-15=0$. Звідси $k_1=\frac{3}{4}$; $k_2=-\frac{5}{12}$. Підставляючи знайдені значення кутових коефіцієнтів в рівняння (3.18), дістаємо рівняння двох прямих, що проходять через точку $A(2; 4)$ на відстані 4 одиниць від точки $B(-6; 3)$: $y-4=\frac{3}{4}(x-2)$ і $y-4=-\frac{5}{12}(x-2)$, або остаточно $3x-4y+10=0$ та $5x+12y-58=0$.

Приклад 5. Знайти рівняння бісектрис кутів, утворених прямими $3x+4y-18=0$ та $12x+9y-50=0$.

Розв'язання. Бісектриса кута є геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін кута. Нехай точка $M(x; y)$ — довільна точка бісектриси. Її відстань від прямої $3x+4y-18=0$ дорівнює

$$d_1=\frac{|3x+4y-18|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|3x+4y-18|}{5}. \tag{3.19}$$

Відстань від точки $M(x; y)$ до прямої $12x+9y-50=0$ дорівнює

$$d_2=\frac{|12x+9y-44|}{\sqrt{12^2+9^2}}=\frac{|12x+9y-44|}{15}\text{ .} \tag{3.20}$$

За властивістю бісектриси $d_1 = d_2$. Підставляючи в останню рівність вирази (3.19) та (3.20), дістаємо:

$$\frac{|3x+4y-18|}{5}=\frac{|12x+9y-44|}{15}\text{ .}$$

Звідси $3|3x+4y-18|=|12x+9y-44|$, або $9x+12y-54=\pm(12x+9y-44)$. Після зведення подібних членів остаточно дістанемо рівняння двох бісектрис: $3x-3y+10=0$ та $3x+3y-14=0$.

Приклад 6. Знайти точку, віддалену від прямої $4x+3y-2=0$ на 2 одиниці та рівновіддалену від точок $A(4; -3)$ та $B(2; -1)$.

Розв'язання. Геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка AB, є перпендикуляр до цього відрізка, проведений через його середину. Складемо його рівняння. Нехай точка C — середина відрізка AB, тоді вона має координати $C(3; -2)$. Кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через точки $A(4; -3)$ та $B(2; -1)$, дорівнює

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-1+3}{2-4}=-1.$$

Тоді кутовий коефіцієнт перпендикуляра $k_1 = 1$, а його рівняння

$$y+2=x-3\text{ , або } x-y-5=0. \tag{3.21}$$

Якщо $M(x; y)$ — шукана точка, то вона віддалена від прямої $4x+3y-2=0$ на 2 одиниці і її координати задовольняють рівнянню (21). Таким чином маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x-y-5=0, \\ \dfrac{|4x+3y-2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y-5=0, \\ |4x+3y-2|=10; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y-5=0, \\ 4x+3y-2=\pm 10. \end{cases}$$

Ця система рівнянь має два розв'язки $x_1=1, y_1=-4$ та $x_2=\frac{27}{7}$, $y_2=-\frac{8}{7}$. Таким чином, маємо дві точки $M_1(1; -4)$ та $M_2\left(\frac{27}{7};-\frac{8}{7}\right)$, які задовольняють умову задачі.

3.3. Рівняння в'язки прямих

Сукупність прямих, що проходять через точку M, називається *в'язкою прямих з центром M*.

Якщо $A_1x+B_1y+C_1=0$ та $A_2x+B_2y+C_2=0$ — рівняння двох прямих, які перетинаються в точці M, то рівняння

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0, \tag{3.22}$$

де α та β — довільні числа, які одночасно не дорівнюють нулю, визначає в'язку прямих з центром в точці M.

Якщо $\alpha \neq 0$, то, поділивши рівняння (3.22) на α та позначивши $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$, дістанемо

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0. \qquad (3.23)$$

Рівняння (3.23) визначає кожну пряму в'язки з центром в точці M, окрім прямої, яка відповідає $\alpha = 0$, тобто окрім прямої $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Приклад 1. Записати рівняння прямої, що належить в'язці прямих

$$3x + 5y - 1 + \lambda(x - y + 2) = 0,$$

та проходить через точку $A(4; -1)$.

Розв'язання. Підставимо координати точки $A(4; -1)$ в дане рівняння. Дістанемо $6 + 7\lambda = 0$, звідки $\lambda = -\frac{6}{7}$. Підставимо знайдене значення λ в рівняння в'язки прямих і дістанемо:

$$3x + 5y - 1 - \frac{6}{7}(x - y + 2) = 0,$$

або після спрощення $15x + 41y - 19 = 0$.

Приклад 2. Дано рівняння сторони AB $3x + 4y - 9 = 0$ та бісектриси AD $3x + 3y - 5 = 0$ трикутника ABC. Не обчислюючи координат вершини A, знайти рівняння сторони AC.

Розв'язання. З рівнянь сторони AB та бісектриси AD знаходимо їхні кутові коефіцієнти: $k_{AB} = -\frac{3}{4}, k_{AD} = -1$. Позначимо кутовий коефіцієнт сторони AC через k. Пряма AD — бісектриса кута $\angle BAC$, тому $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$. Підставляючи в останню рівність кутові коефіцієнти відповідних прямих, за формулами (3.9) дістаємо рівняння для визначення k:

$$\frac{k_{AB} - k_{AD}}{1 + k_{AB}k_{AD}} = \frac{k_{AD} - k}{1 + k_{AD}k}, \text{ або } \frac{-\frac{3}{4} + 1}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{-1 - k}{1 - k}.$$

Звідси $k = -\frac{4}{3}$.

Запишемо рівняння в'язки прямих із центром у точці A

$$3x + 4y - 9 + \lambda(3x + 3y - 5) = 0 \qquad (3.24)$$

і виберемо з цих прямих ту, кутовий коефіцієнт якої $k = -\frac{4}{3}$.

$-\frac{3 + 3\lambda}{4 + 3\lambda} = -\frac{3}{4}$. Знайдене з останньої рівності $\lambda = -\frac{7}{3}$ підставимо в рівняння в'язки прямих (3.24):

$$3x + 4y - 9 - \frac{7}{3}(3x + 3y - 5) = 0.$$

Після очевидних спрощень знайдемо рівняння сторони AC: $12x + 9y - 8 = 0$.

Приклад 3. Дано рівняння сторін трикутника (AB) $x + 2y - 1 = 0$, (AC) $5x + 4y - 17 = 0$ та (BC) $x - 4y + 11 = 0$. Не обчислюючи координати його вершин, знайти рівняння висот трикутника.

Розв'язання. Запишемо рівняння в'язки прямих з центром в точці A

$$x + 2y - 1 + \lambda(5x + 4y - 17) = 0$$

і виберемо з них ту, яка перпендикулярна до BC. З умови перпендикулярності прямих (3.14) $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ дістанемо $(1 + 5\lambda)\cdot 1 + (2 + 4\lambda)\cdot(-4) = 0$.

Звідси $\lambda = -\frac{7}{11}$ і рівняння висоти, опущеної з вершини A, буде $x + 2y - 1 - \frac{7}{11}(5x + 4y - 17) = 0$, або після спрощення: $4x + y - 18 = 0$.

Аналогічно знайдемо рівняння двох інших висот $4x - 5y + 22 = 0$ та $2x - y + 1 = 0$.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Барковський В. В., Барковська Н. В.* Математика для економістів: Вища математика. — К., 1997. — 397 с.
2. *Валєєв К. Г., Джалладова І. А.* Вища математика. Навч. посібник: у 2-х ч. — К.: КНЕУ, 2001. — Ч. 1. — 546 с.
3. *Валєєв К. Г., Джалладова І. А.* Вища математика. Навч. посібник: у 2-х ч. — К.: КНЕУ, 2002. — Ч. 2. — 451 с.
4. Вища математика: Навч.-метод. посібник для сам. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий. — К.: КНЕУ, 1999. — 396 с.
5. Вища математика: Навч.-метод. посібник для сам. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова та ін. — Вид. 2-ге, перероб. і доп. — К.: КНЕУ, 2002. — 606 с.
6. *Глаголев А. А., Солнцева Т. В.* Курс высшей математики. — М.: Высш. школа, 1971. — 654 с.
7. Збірник завдань для контрольних робіт № 1, № 2 для студ. заочної форми навч. / Укл.: А. Б. Волощенко, І. Ф. Грейджук, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. — К.: КНЕУ, 1999. — 120 с.
8. *Кудрявцев В. А., Демидович Б. П.* Краткий курс высшей математики. — 6-е изд. — М.: Наука, 1986. — 576 с.
9. Методичні вказівки до вивчення розділів вищої математики «Вступ до математичного аналізу»; «Диференціальне числення» для студ. 1 курсу екон. спец. / Укл.: О. І. Лютий, В. Г. Овсієнко. — К.: КІНХ, 1991. — 80 с.
10. Методичні вказівки до вивчення розділу вищої математики «Диференціальні рівняння» для студ. І курсу екон. спец. / Укл.: О. І. Лютий, І. А. Джалладова. — К.: КНЕУ, 1995. — 42 с.
11. Методичні вказівки до вивчення розділу вищої математики «Комплексні числа та функції» для студ. усіх форм навч. / Укл.: К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. — К.: КНЕУ, 1999. — 60 с.
12. Методичні вказівки до вивчення розділу вищої математики «Функції багатьох змінних в економічних задачах в прикладах» для студ. І курсу всіх екон. спец. і всіх форм навчання / Укл. І. А. Джалладова. — К.: КНЕУ, 1996. — 44 с.
13. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: 4-е изд. — М.: Физматгиз, 1962.
14. *Привалов И. И.* Аналитическая геометрия. Изд. 24—27. — М.: Физматгиз, 1959. — 1962.
15. *Лютий О. І., Макаренко О. І.* Збірник задач з вищої математики. Навч. посібник. — К.: КНЕУ, 2003. — 305 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

БЛУДОВА Тетяна Володимирівна
ГРЕДЖУК Ігор Федорович
ДЖАЛЛАДОВА Ірада Агаверді кизи та ін.

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Редактор *О. Бондаренко*
Художник обкладинки *Т. Зябліцева*
хнічний редактор *Т. Піхота*
Коректор *Є. Піщаль*
Верстка *В. Піхота*

Підписано до друку 14.02.06. Формат 60×84/16. Папір офсет. № 1.
Гарнітура Тип Таймс. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 23,48.
Обл.-вид. арк. 22,85. Наклад 3500 пр. Зам. № 04-2848.

Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана
03680, м. Київ, проспект Перемоги, 54/1

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи (серія ДК, № 235 від 07.11.2000)

Тел./факс (044) 537–61–41; тел. (044) 537–61–44
E-mail: publish@kneu.kiev.ua

Друк ТОВ „Видавничо-поліграфічний дім „Формат"
Зам. № 120. Тел. 463-53-23