В.В. Городецький, О.В. Мартинюк

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ

В ТЕОРЕМАХ І ЗАДАЧАХ

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

В.В.Городецький, О.В.Мартинюк

Диференціальна геометрія в теоремах і задачах

Навчальний посібник

Чернівці
"Рута"
2006

ББК 22.151.6я73
Г 701
УДК 514.7(075.8)

Друкується за ухвалою Вченої ради
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

Рецензенти: Ю.В.Теплінський, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри геометрії та диференціальних рівнянь Кам'янець-Подільського державного університету;
О.Р.Никифорчин, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Городецький В.В., Мартинюк О.В.
Г 701 Диференціальна геометрія в теоремах і задачах:
Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2006. – 400 с.
ISBN 966-568-835-9

У посібнику викладено основний теоретичний матеріал, який стосується теорії кривих і поверхонь у тривимірному евклідовому просторі, наведено основні положення теорії *n*-вимірних афінних і евклідових просторів, тензорного числення. Дається розв'язання типових задач різного ступеня складності.

Для студентів університетів спеціальності "Математика".

ББК 22.151.6я73

ISBN 966-568-835-9

Зміст

Вступ

Диференціальна геометрія - це частина математики, яка вивчає геометричні образи, в першу чергу криві та поверхні, використовуючи методи математичного аналізу. Ці методи власне і виникли при розв'язування таких геометричних задач як знаходження дотичної до кривої, площі та об'єму фігур.

У зародженні та початковому розвитку диференціальної геометрії основну стимулюючу роль відіграли проблеми картографії та геодезії; зокрема, задача про відшукання найкоротшого шляху між двома точками кривої поверхні (у геодезії – поверхні Землі). Виникнення диференціальної геометрії відноситься до першої половини XVIII ст. і воно пов'язується з прізвищами Л.Ейлера та Г.Монжа.

Л.Ейлер багато займався картограграфічною проблемою та геометрією на сфері. Його праці зі сферичної геометрії, без сумніву, мали вплив на М.Лобачевського, оскільки показали існування двовимірної геометрії, яка істотно відрізнялася від евклідової. Серед праць Ейлера основне значення з точки зору диференціальної геометрії має мемуар "Дослідження про кривину поверхонь", опублікований в 1760 р. і який є першою в історії математики працею з диференціальної геометрії поверхонь.

Класиком диференціальної геометрії є також французький математик Г.Монж, який написав книгу, присвячену диференціальній геометрії, "Застосування аналізу до геометрії" (1805 р.). У цій книзі зібрані всі результати, одержані автором та його попередниками (тут, крім Ейлера, слід назвати співвітчизника і учня Монжа Ж.Меньє, який написав мемуар "Про кривину поверхонь").

Вважають, що диференціальна геометрія відокремилася у самостійну математичну дисципліну в 1827 році; коли К.Гаусс опублікував класичну працю "Загальні дослідження про криві поверхні". Гаусс із характерною для нього чіткістю і строгістю ввів основні для класичної диференціальної геометрії поняття двох перших основних квадратичних форм, сферичного зображення поверхні, поняття повної кривини поверхні, вигинання поверхні, внутрішньої геометрії поверхні.

Відкриття М.І.Лобачевським неевклідової геометрії (1829 р.) відіграло визначну роль у розвитку всієї геометрії, у тому числі і диференціальної. Так, у 1854 р. Б.Ріман у своїй лекції "Про гіпотези, які лежать в основі геометрії" заклав основи нової (ріманової) геометрії. Ріман виділив серед всіх відомих на той час фактів теорії поверхонь те, що забезпечує побудову внутрішньої геометрії: першу квадратичну форму та гауссову кривину. Він показав, що необмежене число геометрій може бути побудовано на основі заданих квадратичних форм $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}dx^i dx^j$. Побудовані при цьому простори називають рімановими просторами. Отже, у рамках диференціальної геометрії виникли надзвичайно широкі узагальнення поняття простору, і це, в свою чергу, послужило поштовхом для подальшого розширення та узагальнення всіх понять геометрії.

Теоретико-групова точка зору Ф.Клейна, викладена у його "Ерлангенській програмі" (1872 р.), у застосуванні до диференцальної геометрії була розвинена Е.Картаном, який побудував теорію просторів проективної та афінної зв'язності.

У Росії школу диференціальної геометрії створили Ф.Міндінг та К.Петерсон, основні дослідження яких пов'язані з питаннями вигинання поверхонь. Великий внесок у розвиток диференціальної геометрії зробили українські вчені А.В.Погорєлов, М.І.Кованцов та їхні учні.

Ця книга написана як навчальний посібник з традиційної частини диференціальної геометрії, яка вивчає геометричні властивості кривих та поверхонь у тривимірному евклідовому просторі. У посібнику наведено також матеріал, який стосується n-вимірних афінних, точкових евклідових і псевдоевклідових просторів та елементів тензорного числення. Теоретичний матеріал ілюструється достатньою кількістю вправ та прикладів. У математиці одним з кращих способів глибокого засвоєння предмета є розв'язування задач з використанням при цьому необхідних теоретичних відомостей, тому в кінці кожного розділу даються завдання для самостійної роботи. Ці завдання дадуть змогу перевірити наскільки глибоко читач зрозумів викладений матеріал.

Розділ 1.
Афінні, евклідові та псевдоевклідові простори

Предметом геометричного дослідження є **точкові конфігурації**, тобто підмножини деякої множини, яка називається **точковим простором**, елементи якого називають **точками**. Існують різні принципи такого дослідження. Одним з важливіших принципів є **теоретико-груповий принцип**, сформульований німецьким геометром Ф.Клейном. У відповідності з цим принципом у точковому просторі діє деяка група перетворень, тобто бієктивних відображень цього простору. **Геометрія вивчає ті властивості точкових конфігурацій, які є інваріантними (незмінними) відносно перетворень цієї групи**. Це складає зміст означення геометрії за Клейном, яке викладене ним у знаменитій Ерлангенській програмі (1872 р.). Незважаючи на певну вузькість із сучасної точки зору, це означення не втратило своєї актуальності і у наш час. Зауважимо, що в геометрії точкові конфігурації називають **фігурами**. В залежності від типу групи перетворень точкового простору розрізняють різні геометрії (афінна геометрія, евклідова геометрія, конформна геометрія, проективна геометрія і т.п.). Одним із найбільш фундаментальних типів геометрії є афінна геометрія, до вивчення якої ми і приступаємо.

§1.1. Афінні простори $\mathcal{A}_n$. Фігури в $\mathcal{A}_n$. Афінні перетворення

Основним об'єктом дослідження афінної геометрії є точковий простір, який у даному випадку називається афінним простором. Для того, щоб виділити клас афінних просторів серед інших множин, наділених додатковою структурою,

вводиться його аксіоматичний опис, тобто перелік апріорних властивостей афінних просторів. Ці властивості характеризують певні зв'язки двоточкових конфігурацій афінного простору з векторами деякого фіксованого лінійного простору, який називається простором перенесень.

Нехай $P = \{a, b, c, \dots\}$ – будь-яке поле з елементами довільної природи (якщо a, b, c, … – числа, то P – числове поле), яке ми називатимемо полем скалярів, а його елементи – скалярами, $V_n = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{x}, \vec{y}, \dots\}$ – n-вимірний векторний простір над полем P, $\mathcal{A} = \{A, B, C, \dots\}$ – деяка непорожня множина, де A, B, C, … – елементи довільної природи, $f\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V_n$ – відображення, яке кожній впорядкованій парі (A, B) елементів $\{A, B\} \subset \mathcal{A}$ ставить у відповідність вектор $f(A, B) \in V_n$, який надалі позначатимемо символом $\overrightarrow{AB}$.

Означення 1.1. *Афінним точковим простором над векторним простором V_n над полем P називається множина $\mathcal{A}$ із заданим відображенням f, яке задовольняє такі вимоги (аксіоми Вейля афінного простору):*

1. Для кожного елемента $A \in \mathcal{A}$ відображення $f_A\colon \mathcal{A} \to V_n$, що діє за правилом

$$\forall B \in \mathcal{A}: \quad f_A(B) := f(A, B) \equiv \overrightarrow{AB} \in V_n$$

є бієкцією;

2. $\forall \{A, B, C\} \subset \mathcal{A}$: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Зазначимо, що з аксіоми 1 випливає, що для кожних $A \in \mathcal{A}$, $\vec{x} \in V_n$ існує єдиний елемент $X \in \mathcal{A}$ такий, що $\overrightarrow{AX} = \vec{x}$.

Елементи A, B, C, … називаються точками афінного точкового простору $\mathcal{A}$, векторний простір V_n – простором паралельних перенесень цього афінного простору, вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$ з V_n – перенесеннями або вільними векторами простору $\mathcal{A}$.

Натуральне число n називається розмірністю точкового афінного простору $\mathcal{A}_n$, тому надалі писатимемо $\mathcal{A}_n$.

Переконаємося, що для будь-якого n існує n-вимірний афінний точковий простір над полем $P = \mathbb{R}$.

Справді, $V_n = \{\overrightarrow{a} = \{a_1; \dots; a_n\} \Big| a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$ є n-вимірним дійсним лінійним простором відносно таких операцій:

1) $\forall \{a_1; \dots; a_n\}, \ \{b_1; \dots; b_n\} \in V_n$: $\{a_1; \dots; a_n\} + \{b_1; \dots; b_n\} := \{a_1 + b_1; \dots; a_n + b_n\}$;

2) $\forall k \in \mathbb{R} \ \forall \{a_1; \dots; a_n\} \in V_n$: $k\{a_1; \dots; a_n\} := \{ka_1; \dots; ka_n\}$.

Нехай $\mathcal{A}$ – множина всеможливих наборів з n дійсних чисел чисел, тобто

$$\mathcal{A} = \{A =< a_1; \dots; a_n >, a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}.$$

Відображення f: $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V_n$ задамо за правилом:

$$\forall < a_1; \dots; a_n >, < b_1; \dots; b_n > \in \mathcal{A}: \quad f(< a_1; \dots; a_n >,$$
$$< b_1; \dots; b_n >) := \{b_1 - a_1; \dots; b_n - a_n\} \in V_n.$$

Перевіримо виконання аксіом Вейля.

1. Для кожного елемента $A =< a_1; \dots; a_n > \in \mathcal{A}$ відображення f_A: $\mathcal{A} \to V_n$ діє за правилом:

$$\forall B =< b_1; \dots; b_n > \in \mathcal{A} : f_A(B) = f(A, B) = f(< a_1; \dots; a_n >,$$
$$< b_1; \dots; b_n >) := \{b_1 - a_1; \dots; b_n - a_n\} \in V_n.$$

Якщо $\overrightarrow{x} = \{x_1; \dots; x_n\} \in V_n$, то $f_A(B) = \overrightarrow{x}$ тоді і тільки тоді, коли $B =< x_1 + a_1; \dots; x_n + a_n >$, тобто відображення f_A є бієктивним відображенням $\mathcal{A}$ на V_n. Отже, перша аксіома Вейля виконується.

2. $\forall A =< a_1; \dots; a_n > \in \mathcal{A}$, $B =< b_1; \dots; b_n > \in \mathcal{A}$, $C =< c_1; \dots; c_n > \in \mathcal{A}$:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = f(A, B) + f(B, C) = \{b_1 - a_1; \dots; b_n - a_n\} +$$

$$+ \{c_1 - b_1; \dots; c_n - b_n\} = \{c_1 - a_1; \dots; c_n - a_n\} = f(A, C) = \overrightarrow{AC}.$$

Таким чином, аксіоми Вейля виконуються. Це і означає, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ існує n-вимірний дійний афінний точковий простір над полем $\mathbb{R}$.

Наслідки з аксіом Вейля

1) $\forall A \in \mathcal{A}_n$: $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

Справді, на підставі другої аксіоми Вейля стосовно впорядкованої трійки точок A, A, B твердимо, що

$$\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB},$$

отже, $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

2) $\forall \{A, B\} \subset \mathcal{A}_n$: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Справді, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$. Звідси випливає, що $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

3) $\forall \{A, B, C, D\} \subset \mathcal{A}_n \Rightarrow (\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD})$.

Якщо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$. З іншого боку, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Отже, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Навпаки, якщо $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, то

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}, \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD},$$

тобто $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$. Звідси випливає, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Фігури в $\mathcal{A}_n$. Фігурою афінного точкового простору $\mathcal{A}_n$ називають будь-яку множину точок цього простору.

Нехай A і B – різні точки простору $\mathcal{A}_n$.

1. Відрізком називається фігура

$$[A, B] := \{M \in \mathcal{A}_n : \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0, 1]\}.$$

Зауважимо, що фігури $[A, B]$ та $[B, A]$ збігаються, бо

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BM} = (1 - t)\overrightarrow{BA}.$$

Точки A і B називаються кінцями даного відрізка.

Точка C відрізка $[A, B]$, яка відповідає значенню $t = \frac{1}{2}$, називається його серединою.

2. Променем з початком у точці A і довільною точкою B називається фігура

$$[A, B) := \{M \in \mathcal{A}_n : \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0, +\infty)\}.$$

Кутом у афінному просторі $\mathcal{A}_n$ називається фігура, утворена об'єднанням двох променів із спільним початком O; точка O називається вершиною кута, промені $[O, A)$ та $[O, B)$ називаються сторонами кута $[O, A) \cup [O, B)$, який позначають символом $\angle AOB$.

3. Прямою у афінному просторі $\mathcal{A}_n$ називається фігура

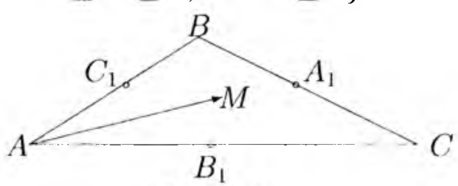
$$(A, B) := \{M \in \mathcal{A}_n : \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}, \quad t \in \mathbb{R}; A, B \in \mathcal{A}_n, A \neq B\}.$$

Зрозуміло, що точки A, B є точками даної прямої, бо відповідають значенням t, які відповідно дорівнюють 0 і 1.

4. Нехай A, B, C – три точки, що не лежать на одній прямій (будь-які два вектори з трьох векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ – лінійно незалежні).

Трикутником називається фігура

$$\Delta ABC := \{M \in \mathcal{A}_n : \overrightarrow{AM} = t^1\overrightarrow{AB} + t^2\overrightarrow{AC}, \quad 0 \leq t^1 \leq 1,$$
$$0 \leq t^2 \leq 1, t^1 + t^2 \leq 1\}.$$



Мал. 1.1.

Точки A, B, C називаються вершинами даного трикутника. Нехай A_1, B_1, C_1 – середини відрізків $[B, C]$, $[A, C]$,

$[A, B]$ відповідно. **Медіаною трикутника називається відрізок, який з'єднує вершину трикутника з серединою протилежної сторони** (Мал. 1.1).

5. Нехай A, B, D – точки простору $\mathcal{A}_n$, які не лежать на одній прямій. **Паралелограмом називається фігура**

$$P_2 := \{M \in \mathcal{A}_n : \overrightarrow{AM} = t^1\overrightarrow{AB} + t^2\overrightarrow{AD}, \ 0 \leq t^1 \leq 1, 0 \leq t^2 \leq 1\}.$$

Нехай $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Точки A, B, C, D називаються вершинами паралелограма, $\{A, B, C, D\} \subset P_2$, при цьому точка A відповідає значенням параметрів $t^1 = 0$, $t^2 = 0$; точка B – $t^1 = 1$, $t^2 = 0$; точка C – $t^1 = 1$, $t^2 = 1$; точка D – $t^1 = 0$, $t^2 = 1$.

6. Паралелепіпедом розмірності m, $1 \leq m \leq n$, з вершиною у точці $A \in \mathcal{A}_n$, називається фігура

$$P_m := \{M \in \mathcal{A}_n : \overrightarrow{AM} = t^1\vec{a_1} + t^2\vec{a_2} + \ldots + t^m\vec{a_m} := t^i\vec{a_i},$$

де $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_m}$ – лінійно незалежні вектори простору V_n, $0 \leq t^i \leq 1$, $1 \leq i \leq m\}$.

Зазначимо, що прикладами паралелепіпедів розмірностей 1, 2 є відповідно відрізок та паралелограм.

7. Нехай $1 \leq m \leq n - 1$. **Фігура**

$$\Pi_m := \{M \in \mathcal{A}_n : \overrightarrow{M_0M} = t^1\vec{a_1} + \ldots + t^m\vec{a_m} := t^i\vec{a_i},$$

$t^i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, де $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_m}$ – лінійно незалежні вектори$\}$, називається m-вимірною площиною.

Якщо $m = n - 1$, то площина Π_{n-1} називається гіперплощиною афінного простору, якщо $m = 1$, то Π_1 – пряма в $\mathcal{A}_n$.

Зауважимо, що $\{t^1\vec{a_1} + \ldots + t^m\vec{a_m}\} = \mathcal{L}(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_m})$ – лінійна оболонка векторів $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_m}$, яка є підпростором лінійного простору V_n. Отже, площину в афінному просторі $\mathcal{A}_n$ можна означати ще й так.

Нехай Π_m^0 – m-вимірний підпростір лінійного простору V_n, $1 \le m \le n-1$, M_0 – деяка точка в $\mathcal{A}_n$. Тоді

$$\Pi_m := \{M \in \mathcal{A}_n : \overrightarrow{M_0 M} \in \Pi_m^0\},$$

де Π_m^0 називають напрямним підпростором площини Π_m. Якщо ж виділений нами підпростір простору V_n є нульовим, то одержуємо одноточкову фігуру $\{M \in \mathcal{A}_n : \overrightarrow{M_0 M} = \overrightarrow{0}\} \equiv M_0$. На цій підставі часто одноточкові фігури називають нуль-вимірними площинами.

Із означення площини в афінному просторі випливають такі властивості:

1. Точка $M_0 \in \Pi_m$, бо $\overrightarrow{M_0 M_0} = \overrightarrow{0} \in \Pi_m^0$.

2. Нехай $M_1 \in \Pi_m$, тобто $\overrightarrow{M_0 M_1} \in \Pi_m^0$. Тоді виконується рівність:

$$\Pi_m = \{M \in \mathcal{A}_n : \overrightarrow{M_1 M} \in \Pi_m^0\}.$$

Справді, нехай

$$\tilde{\Pi}_m := \{M \in \mathcal{A}_n : \overrightarrow{M_1 M} \in \Pi_m^0\}.$$

Доведемо, що площини Π_m і $\tilde{\Pi}_m$ збігаються.

а) Якщо точка $M \in \Pi_m$, то $\overrightarrow{M_0 M} \in \Pi_m^0$. Оскільки $M_1 \in \Pi_m$, то $\overrightarrow{M_0 M_1} \in \Pi_m^0$. Отже,

$$\overrightarrow{M_1 M} = \overrightarrow{M_1 M_0} + \overrightarrow{M_0 M} \in \Pi_m^0$$

і тому точка $M \in \tilde{\Pi}_m$, тобто $\Pi_m \subset \tilde{\Pi}_m$.

б) Нехай точка $M \in \tilde{\Pi}_m$, тобто $\overrightarrow{M_1 M} \in \Pi_m^0$. Оскільки

$$\overrightarrow{M_0 M} = \overrightarrow{M_0 M_1} + \overrightarrow{M_1 M} \in \Pi_m^0,$$

то точка $M \in \Pi_m$. Отже, $\tilde{\Pi}_m \subset \Pi_m$. Цим доведено, що площини Π_m і $\tilde{\Pi}_m$ збігаються, бо кожна з них належить іншій.

Зауваження 1.1. Із наведених вище міркувань випливає, що:

1) точка M_0 з означення площини є точкою цієї площини і всі точки площини Π_m є рівноправними у цьому розумінні;

2) якщо площини Π_m та Π_s афінного простору $\mathcal{A}_n$ мають хоч одну спільну точку, то їхнім перетином є площина, розмірність якої збігається з розмірністю підпростору $\Pi_k^0 = \Pi_m^0 \cap \Pi_s^0$ векторного простору V_n. Напрямним підпростором площини $\Pi_m \cap \Pi_s$ є Π_k^0, а за "початкову" точку можна взяти будь-яку спільну точку даних площин Π_m і Π_s.

Відзначимо також, що у афінному просторі не визначені поняття віддалі між двома точками, довжини лінії, площі та об'єму фігур, величини кута та поняття перпендикулярності. Всі ці поняття пов'язані з наявністю метрики в просторі.

Взаємне розміщення двох площин афінного простору. Нехай $\Pi_m = \{M \in \mathcal{A}_n : \overrightarrow{M_1 M} \in \Pi_m^0\}$, $\Pi_s = \{M \in \mathcal{A}_n : \overrightarrow{M_2 M} \in \Pi_s^0\}$, $m \le s$, – дві площини афінного простору $\mathcal{A}_n$.

Означення 1.2. *Площини Π_m та Π_s $(m \le s)$ називаються паралельними, якщо вони не перетинаються і $\Pi_m^0 \subset \Pi_s^0$.*

Коротко це записують так:

$$(\Pi_m \parallel \Pi_s) \Leftrightarrow \begin{cases} \Pi_m \cap \Pi_s = \emptyset, \\ \Pi_m^0 \subset \Pi_s^0. \end{cases}$$

У літературі зустрічається ще й таке означення паралельності площин.

Означення 1.3. *Площини Π_m та Π_s $(m \le s)$ називаються паралельними, якщо вони не перетинаються і розмірність е перетину їхніх напрямних підпросторів не менша одиниці.*

Отже,

$$(\Pi_m \parallel \Pi_s) \Leftrightarrow \begin{cases} \Pi_m \cap \Pi_s = \emptyset, \\ \dim(\Pi_m^0 \cap \Pi_s^0) \ge 1. \end{cases}$$

Відношення $\frac{e}{m}$ називається ступенем паралельності. Якщо ступінь паралельності дорівнює одиниці, то кажуть, що площина Π_m повністю паралельна площині Π_s. Отже, паралельні площини за першим означенням – це "повністю" паралельні площини за другим означенням.

Означення 1.4. *Площини Π_m та Π_s афінного простору $\mathcal{A}_n$ називаються мимобіжними, якщо вони не перетинаються, а перетин їхніх напрямних підпросторів містить лише нульовий вектор.*

Отже,

$$(\Pi_m \text{ мимобіжна } \Pi_s) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Pi_m \cap \Pi_s = \emptyset, \\ \Pi_m^0 \cap \Pi_s^0 = \{\overrightarrow{0}\}. \end{array} \right.$$

Мимобіжні площини можна вважати паралельними площинами з нульовим ступенем паралельності.

Теорема 1.1. *У n-вимірному афінному просторі $\mathcal{A}_n$ будь-які дві площини Π_m і Π_s при $m+s \geq n$ не є мимобіжними.*

Доведення. 1. Нехай $m+s > n$ і $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_m}$ – базис в Π_m^0, $\overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_s}$ – базис в Π_s^0. Система векторів $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_m}, \overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_s}$ векторного простору V_n лінійна залежна, бо $m+s > n$. Отже, виконується рівність

$$t^i \overrightarrow{a_i} + \tau^j \overrightarrow{b_j} = \overrightarrow{0}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq s, \tag{1.1}$$

при деяких значеннях параметрів $t^1, \ldots, t^m, \tau^1, \ldots, \tau^s$, серед яких хоча б одне відмінне від нуля. Зауважимо, що $\{t^1, \ldots t^m\} \neq \overrightarrow{0}$, бо якщо б це було не так, тобто $\{t^1, \ldots t^m\} = \overrightarrow{0}$, то рівність (1.1) мала б вигляд $\tau^j \overrightarrow{b_j} = \overrightarrow{0}$. Тоді $\{\tau^1, \ldots, \tau^s\} = \overrightarrow{0}$, оскільки $\overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_s}$ – базис в Π_s^0. Отже, система векторів $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_m}, \overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_s}$ простору V_n лінійно незалежна, що неможливо. Аналогічно доводимо, що і $\{\tau^1, \ldots, \tau^s\} \neq \overrightarrow{0}$. Отже, вектор $\overrightarrow{a} = t^i \overrightarrow{a_i} = -\tau^j \overrightarrow{b_j} \neq \overrightarrow{0}$

є спільним вектором підпросторів Π_m^0 і Π_s^0, тому площини Π_m і Π_s не є мимобіжними.

2. Розглянемо випадок, коли $m+s = n$.

а) Нехай $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_m}, \overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_s}$ – лінійно залежні вектори. Тоді площини Π_m і Π_s також не є мимобіжними, бо аналогічно до попереднього випадку напрямні підпростори мають нетривіальний перетин.

б) Якщо вектори $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_m}, \overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_s}$ – лінійно незалежні, то $\Pi_m^0 \cap \Pi_s^0 = \{\overrightarrow{0}\}$. Доведено, що в цьому випадку площини Π_m і Π_s перетинаються, тобто існує єдина спільна точка M: $M \in \Pi_m$, $M \in \Pi_s$.

Нехай $M_1 \in \Pi_m$, $M_2 \in \Pi_s$. Оскільки $\overrightarrow{M_1 M_2} \in V_n$, то існують числа ρ^i та δ^j такі, що

$$\overrightarrow{M_2 M_1} = \rho^i \overrightarrow{a_i} + \delta^j \overrightarrow{b_j}.$$

Розглянемо співвідношення

$$\overrightarrow{M_2 M} = \overrightarrow{M_2 M_1} + \overrightarrow{M_1 M},$$

де M – довільно фіксована точка площини Π_m. З'ясуємо, за яких умов ця точка належатиме площині Π_s, тобто чи існують числа t^i та τ^j такі, що $\overrightarrow{M_1 M} = t^i \overrightarrow{a_i}$, $\overrightarrow{M_2 M} = \tau^j \overrightarrow{b_j}$. Отже, маємо, що

$$\tau^j \overrightarrow{b_j} = (\rho^i \overrightarrow{a_i} + \delta^j \overrightarrow{b_j}) + t^i \overrightarrow{a_i} \Leftrightarrow (\rho^i + t^i)\overrightarrow{a_i} + (\delta^j - \tau^j)\overrightarrow{b_j} = \overrightarrow{0}. \tag{1.2}$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_m}, \overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_s}$ – лінійно незалежні, то з (1.2) випливає, що

$$t^i = -\rho^i, \quad \tau^j = \delta^j. \tag{1.3}$$

Таким чином, $\overrightarrow{M_1 M} = -\rho^i \overrightarrow{a_i}$, $\overrightarrow{M_2 M} = \delta^j \overrightarrow{b_j}$, тобто точка M належить також і площині Π_s, причому така точка єдина (див. (1.3)). Оскільки $M \in \Pi_m$ і $M \in \Pi_s$, то $\Pi_m \cap \Pi_s \neq \emptyset$.

Отже, і в цьому випадку площини Π_m і Π_s не є мимобіжними.

Теорема доведена.

Декартові координати в афінному просторі

Означення 1.5. *Декартовою системою координат (декартовим репером) в афінному просторі $\mathcal{A}_n$ називається впорядкована система $\{0, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$, яка містить точку 0 афінного простору $\mathcal{A}_n$ і базис векторів $\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ векторного простору V_n.*

Декартову систему координат можна задавати і за допомогою впорядкованої системи з $n+1$ точок O, A_1, ..., A_n афінного точкового простору $\mathcal{A}_n$, що задовольняють умову лінійної незалежності векторів $\overrightarrow{OA_1}, \ldots, \overrightarrow{OA_n}$. Позначатимемо декартову систему координат так: $R = \{O, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$.

Нехай M – будь-яка точка афінного простору $\mathcal{A}_n$. Вектор $\overrightarrow{OM}$ називають радіус-вектором точки M по відношенню до точки (полюса) O.

Означення 1.6. *Декартовими координатами точки M в даній декартовій системі координат $R = \{O, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ називаються координати вектора $\overrightarrow{OM}$ відносно базису векторів $\overrightarrow{e_1}$, ..., $\overrightarrow{e_n}$ векторного простору V_n.*

Якщо $\overrightarrow{OM} = x^1\overrightarrow{e_1} + \ldots + x^n\overrightarrow{e_n}$, то коротко записують $M(x^1; \ldots; x^n)$ і саме ці числа x^1, ..., x^n є декартовими координатами точки M в декартовій системі координат $R = \{O, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$. Якщо точки A і B мають в декартовій системі координат $R = \{O, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ відповідно координати x_1^1, x_1^2, ..., x_1^n і x_2^1, x_2^2, ..., x_2^n, то вектор $\overrightarrow{AB}$ в базисі $\overrightarrow{e_1}$, ..., $\overrightarrow{e_n}$, який входить в декартовий репер R, має координати $x_2^1 - x_1^1$, $x_2^2 - x_1^2$, ..., $x_2^n - x_1^n$, бо

$$\overrightarrow{OA} = x_1^1\overrightarrow{e_1} + x_1^2\overrightarrow{e_2} + \ldots + x_1^n\overrightarrow{e_n}, \quad \overrightarrow{OB} = x_2^1\overrightarrow{e_1} + x_2^2\overrightarrow{e_2} + \ldots + x_2^n\overrightarrow{e_n}$$

і

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Рівняння m-вимірної площини

1. Векторно-параметричне рівняння площини. Нехай $\Pi_m = \{M \in \mathcal{A}_n : \overrightarrow{M_0M} \in \Pi_m^0\}$ – площина афінного простору $\mathcal{A}_n$, $R = \{O, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ – декартова система координат в $\mathcal{A}_n$. Позначимо $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{r_0}$, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}$, де $\overrightarrow{r_0}$ – радіус-вектор точки M_0, $\overrightarrow{r}$ – радіус-вектор точки M. Тоді $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}$. Отже,

$$\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{M_0M} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}.$$

Нехай $\overrightarrow{a_1}$, ..., $\overrightarrow{a_m}$ – базис в Π_m^0. Оскільки $\overrightarrow{M_0M} \in \Pi_m^0$, то $\overrightarrow{M_0M} = t^i\overrightarrow{a_i}$, де $t^i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$. Таким чином,

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + t^i\overrightarrow{a_i}. \tag{1.4}$$

Рівняння (1.4) називається **векторно-параметричним рівнянням площини Π_m.**

2. Координатно-параметричні рівняння площини

Нехай точки M_0 і M мають в репері R відповідно координати x_0^1, ..., x_0^n і x^1, ..., x^n. Тоді

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r} = x^J\overrightarrow{e_J}, \quad \overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{r_0} = x_0^J\overrightarrow{e_J}, \quad 1 \le J \le n,$$

$$\overrightarrow{M_0M} = t^i\overrightarrow{a_i} = t^i a_i^J\overrightarrow{e_J},$$

де $\operatorname{rang}(a_i^J) = m$, бо вектори $\overrightarrow{a_i}$ – лінійно незалежні. Рівність $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{M_0M}$ набуває вигляду

$$x^J\overrightarrow{e_J} - x_0^J\overrightarrow{e_J} = t^i a_i^J\overrightarrow{e_J}.$$

Отже,

$$x^J = x_0^J + t^i a_i^J, \quad \operatorname{rang}(a_i^J) = m. \tag{1.5}$$

Рівняння (1.5) називаються **координатно-параметричними рівняннями m-вимірної площини.**

Виключимо параметри t^i в (1.5). Оскільки $\operatorname{rang}(a_i^J) = m$, то є мінор m-го порядку цієї матриці, відмінний від нуля.

Без обмеження загальності можна вважати, що $\det(a_i^j) \neq 0$, $1 \leq i, j \leq m$. Запишемо систему рівнянь (1.5) у такому вигляді:

$$\begin{cases} x^j = x_0^j + t^i a_i^j, & 1 \leq i, j \leq m, \\ x^\alpha = x_0^\alpha + t^i a_i^\alpha, & m+1 \leq \alpha \leq n. \end{cases} \tag{1.6}$$

Із перших m рівнянь системи (1.6) за допомогою формул Крамера знаходимо, що $t^i = (x^j - x_0^j)\tilde{a}_j^i$, де $(\tilde{a}_j^i)$ – матриця, обернена до матриці (a_i^j). Підставивши t^i в інші рівняння системи (1.6) знайдемо, що

$$x^\alpha = x_0^\alpha + (x^j - x_0^j)\tilde{a}_j^i a_i^\alpha.$$

Отже,

$$x^\alpha = b_j^\alpha x^j + b^\alpha, \tag{1.7}$$

де $b_j^\alpha = \tilde{a}_j^i a_i^\alpha$, $b^\alpha = x_0^\alpha - \tilde{a}_j^i a_i^\alpha x_0^j$. Система рівнянь (1.7) визначає m-вимірну площину в декартових координатах, причому m декартових координат змінюються довільно, а інші через них зображаються.

Зауваження 1.2. Для $m = 1$ (1.5) набуває вигляду:

$$x^J = x_0^J + ta^J, \quad \operatorname{rang}(a^J) = 1,$$

або ж

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + ta^1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x^n = x_0^n + ta^n \end{cases} -$$

координатно-параметричні рівняння прямої;

$$\frac{x^1 - x_0^1}{a^1} = \frac{x^2 - x_0^2}{a^2} = \ldots = \frac{x^n - x_0^n}{a^n} -$$

канонічні рівняння прямої; $a^1, \ldots, a^n$ – координати напрямного вектора прямої.

Загальні рівняння площини. Кожна сумісна система $n - m$ незалежних рівнянь

$$c_J^\sigma x^J + c^\sigma = 0, \ \operatorname{rang}(c_J^\sigma) = n - m, \ 1 \leq \sigma \leq n - m, \tag{1.8}$$

визначає деяку m-вимірну площину Π_m у просторі $\mathcal{A}_n$; рівняння системи (1.8) називаються **загальними рівняннями m-вимірної площини.**

Справді, нехай x_0^i – деякий розв'язок системи (1.8), тобто

$$c_J^\sigma x_0^J + c^\sigma = 0. \tag{1.9}$$

Від кожного рівняння системи (1.8) віднімемо відповідну тотожність з (1.9); в результаті дістанемо нову систему

$$c_J^\sigma y^J = 0, \tag{1.10}$$

де $y^J = x^J - x_0^J$. Це система лінійних однорідних рівнянь рангу $n - m$. Отже, її фундаментальна система розв'язків містить m лінійно незалежних розв'язків; позначимо їх через a_s^J, $1 \leq s \leq m$. Кожний розв'язок y^J є їхньою лінійною комбінацією: $y^J = \lambda^s a_s^J$, тобто $x^J = x_0^J + \lambda^s a_s^J$. Таким чином, маємо параметричні рівняння площини Π_m, яка проходить через точку $M_0(x_0^1; \ldots; x_0^n)$, причому напрямний підпростір Π_m^0 має базис з векторів $\vec{a_s} = a_s^J \vec{e_J}$; координати кожного вектора $\vec{a_s}$ утворюють один з розв'язків фундаментальної системи розв'язків однорідної системи (1.10).

Наслідок 1.1. *Площина в афінному просторі задається однорідною системою лінійних рівнянь тоді і тільки тоді, коли вона проходить через полюс (точку O) декартового репера R.*

Зауваження 1.3. Однорідна система рівнянь $c_J^\sigma x^J = 0$, яка відповідає неоднорідній системі (1.8), визначає напрямний підпростір Π_m^0 площини Π_m, оскільки, як відомо, сукупність розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь рангу

$n-m$ збігається з підпростором розмірності m у лінійному n-вимірному просторі.

Зауваження 1.4. Якщо $m = n-1$, тобто розглядається гіперплощина Π_{n-1}, то $n - m = 1$. Отже гіперплощина в афінному просторі $\mathcal{A}_n$ задається одним рівнянням

$$c_J x^J + c = 0.$$

Кожне з рівнянь системи (1.8) можна розглядати як рівняння деякої гіперплощини, тобто кожну m-вимірну площину в $\mathcal{A}_n$ можна розуміти як множину точок в $\mathcal{A}_n$, яка одержується при перетині $n-m$ гіперплощин.

Взаємне розміщення площин афінного простору, заданних рівняннями в декартових координатах. Нехай площини Π_m та Π_s задані своїми рівняннями:

$$\Pi_m : a^\alpha_J x^J = a^\alpha, \operatorname{rang}(a^\alpha_J) = n-m, 1 \le \alpha \le n-m,$$

$$\Pi_s s : b^u_J x^J = b^u, \operatorname{rang}(b^u_J) = n-s, 1 \le u \le n-s,$$

причому $m \le s$. Із результатів, які стосуються систем лінійних алгебраїчних рівнянь, відомих з курсу лінійної алгебри, випливають наступні твердження.

1. Для того, щоб $\Pi_m \cap \Pi_s = \emptyset$, необхідно і досить, щоб система рівнянь

$$\begin{cases} a^\alpha_J x^J = a^\alpha, \\ b^u_J x^J = b^u, \end{cases}$$

була несумісною, тобто

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a^\alpha_J & a^\alpha \\ b^u_J & b^u \end{pmatrix} > \operatorname{rang}\begin{pmatrix} a^\alpha_J \\ b^u_J \end{pmatrix}.$$

2. Для того, щоб площини Π_m і Π_s були мимобіжними, необхідно і досить, щоб

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a^\alpha_J \\ b^u_J \end{pmatrix} = n, \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} a^\alpha_J & a^\alpha \\ b^u_J & b^u \end{pmatrix} = n+1.$$

3. Для того, щоб Π_m і Π_s були паралельними в розумінні означення 1.2, необхідно і досить, щоб

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a^\alpha_J \\ b^u_J \end{pmatrix} = n-m, \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} a^\alpha_J & a^\alpha \\ b^u_J & b^u \end{pmatrix} = n-m+1.$$

4. Площини Π_m і Π_s паралельні в розумінні означення 1.3 тоді і тільки тоді, коли

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a^\alpha_J \\ b^u_J \end{pmatrix} = n-e, \operatorname{rang}\begin{pmatrix} a^\alpha_J & a^\alpha \\ b^u_J & b^u \end{pmatrix} = n-e+1, 1 \le e \le m;$$

при цьому ступінь паралельності даних площин дорівнює $\frac{e}{m}$.

5. Необхідною і достатньою умовою перетину площин Π_m і Π_s є рівність

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a^\alpha_J & a^\alpha \\ b^u_J & b^u \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} a^\alpha_J \\ b^u_J \end{pmatrix}.$$

Якщо ці ранги рівні $n-e$, то площини перетинаються по e-вимірній площині.

Теорема 1.2. *Нехай Π_m і Π_s – дві площини афінного простору $\mathcal{A}_n$, Π^0_m і Π^0_s – їхні напрямні підпростори, Π^0_r – сума Π^0_m і Π^0_s. Для того, щоб Π_m і Π_s перетиналися, необхідно і досить, щоб існували точки A і B: $A \in \Pi_m$, $B \in \Pi_s$ такі, що $\overrightarrow{AB} \in \Pi^0_r$. Якщо ці умови виконані, то дані площини перетинаються по деякій площині розмірності $m+s-r$.*

Доведення. Необхідність твердження очевидна, тому що якщо Π_m та Π_s перетинаються, то за точки A і B можна взяти одну із спільних точок. У цьому випадку $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, тому $\overrightarrow{AB} \in \Pi^0_r$.

Достатність. Нехай існують точки $A \in \Pi_m$ і $B \in \Pi_s$ такі, що $\overrightarrow{AB} \in \Pi^0_r$. Із означення суми підпросторів у лінійному просторі випливає, що існують вектори $\overrightarrow{p}$ і $\overrightarrow{q}$ такі, що $\overrightarrow{p} \in \Pi_m^0$, $\overrightarrow{q} \in \Pi_s^0$, $\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q} = \overrightarrow{AB}$. За першою аксіомою Вейля афінного простору існують точки $S_1 \in \Pi_m$ і $S_2 \in \Pi_s$ такі, що $\overrightarrow{AS_1} = \overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{S_2B} = \overrightarrow{q}$. З іншого боку,

$$\overrightarrow{AS_1} + \overrightarrow{S_2B} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AS_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS_2} = \overrightarrow{AS_2}.$$

Отже, $S_1 = S_2$, тобто площини Π_m та Π_s перетинаються.

Зауважимо тепер, що з лінійної алгебри відомо, що

$$\dim(\Pi_m^0 + \Pi_s^0) = \dim \Pi_m^0 + \dim \Pi_s^0 - \dim(\Pi_m^0 \cap \Pi_s^0).$$

Оскільки $\Pi_m^0 + \Pi_s^0 := \Pi_r^0$, то звідси дістаємо, що $\dim(\Pi_m^0 \cap \Pi_s^0) = m + s - r$.

Теорема доведена.

Наслідок 1.2. *Якщо сума Π_r^0 напрямних підпросторів площин Π_m і Π_s збігається з V_n, то площини перетинаються.*

Дійсно, в цьому випадку для будь-яких точок A і B: $A \in \Pi_m$, $B \in \Pi_s$ маємо, що $\overrightarrow{AB} \in \Pi_r^0$.

Наслідок 1.3. *Нехай $A \in \Pi_m$, $B \in \Pi_s$ і $\overrightarrow{AB} \notin \Pi_r^0$. Тоді площини Π_m та Π_s не перетинаються.*

Доведення. Нехай існує точка $M_0 \in \Pi_m \cap \Pi_s$. Оскільки $\overrightarrow{AM_0} \in \Pi_m^0$, $\overrightarrow{M_0B} \in \Pi_r^0$, то $\overrightarrow{AM_0} + \overrightarrow{M_0B} = \overrightarrow{AB} \in \Pi_r^0$, що неможливо.

Наслідок 1.4. *Нехай A_1, B_1, A_2, B_2 такі, що: $A_1 \in \Pi_m$, $A_2 \in \Pi_m$, $B_1 \in \Pi_s$, $B_2 \in \Pi_s$. Тоді*

1) $\overrightarrow{A_1B_1} \in \Pi_r^0 \Leftrightarrow \overrightarrow{A_2B_2} \in \Pi_r^0 \Leftrightarrow \Pi_m \cap \Pi_s \neq \emptyset$;

2) $\overrightarrow{A_1B_1} \notin \Pi_r^0 \Leftrightarrow \overrightarrow{A_2B_2} \notin \Pi_r^0 \Leftrightarrow \Pi_m \cap \Pi_s = \emptyset$.

Доведення. 1) Нехай $\overrightarrow{A_1B_1} \in \Pi_r^0$. Доведемо, що $\overrightarrow{A_2B_2} \in \Pi_r^0$. Очевидно, правильними є співвідношення

$$\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_2}.$$

Оскільки $\overrightarrow{A_2A_1} \in \Pi_m^0 \subset \Pi_r^0$, $\overrightarrow{A_1B_1} \in \Pi_r^0$ за умовою, $\overrightarrow{B_1B_2} \in \Pi_s^0 \subset \Pi_r^0$, то $\overrightarrow{A_2B_2} \in \Pi_r^0$.

Аналогічно доводиться твердження 2).

Афінні перетворення простору $\mathcal{A}_n$. Нехай $R = \{O, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$, $R' = \{O, \overrightarrow{e_1}', \ldots, \overrightarrow{e_n}'\}$ – дві декартові системи координат простору $\mathcal{A}_n$, F – перетворення простору $\mathcal{A}_n$, яке діє за правилом: $F(M) = M'$ тоді і тільки тоді, коли

$$\overrightarrow{OM} = x^J \overrightarrow{e_J}, \quad \overrightarrow{O'M'} = x^J \overrightarrow{e_J}'. \tag{1.11}$$

Отже, точці $M \in \mathcal{A}_n$ ставиться у відповідності така точка $M' \in \mathcal{A}_n$, яка має в системі координат R' такі ж координати, що й точка M в системі R.

Означення 1.7. *Афінним перетворенням простору $\mathcal{A}_n$ називається відображення $F\colon \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$ на себе, яке визначається правилом (1.11).*

Афінні перетворення афінного простору $\mathcal{A}_n$ мають важливі алгебраїчні та геометричні властивості. Наведемо деякі з них.

1. Множина всіх афінних перетворень n-вимірного афінного простору утворює групу перетворень.

Доведення. Для доведення сформульованого твердження доситься переконатися в тому, що:

а) композиція двох афінних перетворень є афінним перетворенням;

б) обернене перетворення до афінного є афінним перетворенням.

Передусім встановимо формулу, якою задається будь-яке афінне перетворення в декартових координатах. Якщо $F(M) = M'$ і $x^1, \ldots, x^n$ – координати точки M' в репері R, то припустимо, що $x^{1'}$, …, $x^{n'}$ – координати точки M' в репері R'. З'ясуємо, як зображаються координати x^J через $x^{K'}$ і навпаки. Маємо:

$$\overrightarrow{OM'} = x^{J'} \overrightarrow{e_J}, \quad \overrightarrow{e_J}' = a_J^K \overrightarrow{e_K}, \det(a_J^K) \neq 0,$$

$$\overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM'}, \tag{1.12}$$

де

$$\overrightarrow{OM'} = x^{J'}\vec{e_J} = x^{J'}\tilde{a}^K_J\vec{e_K}' = x^{K'}\tilde{a}^J_K\vec{e_J}', \quad \overrightarrow{OO'} = -\tilde{a}^J\vec{e_J}'$$

Тоді (1.12) запишеться так:

$$x^J\vec{e_J}' = x^{K'}\tilde{a}^J_K\vec{e_J}' + \tilde{a}^J\vec{e_J}' = (\tilde{a}^J_K x^{K'} + \tilde{a}^J)\vec{e_J}'.$$

Скориставшись властивістю єдиності розкладу вектора за базисом одержимо, що

$$x^J = \tilde{a}^J_K x^{K'} + \tilde{a}^J, \quad \det(\tilde{a}^J_K) \neq 0. \tag{1.13}$$

Закон (1.13) є лінійним і невиродженим. Аналогічно знаходимо, що

$$x^{J'} = a^J_K x^K + a^J, \quad \det(a^J_K) \neq 0.$$

Перейдемо до доведення властивості 1.

а) Нехай задані довільні два афінні перетворення:

$$F: \ x^{J'} = a^J_K x^K + a^J, \quad \det(a^J_K) \neq 0,$$

$$G: \ x'^J = b^J_K x^K + b^J, \quad \det(b^J_K) \neq 0.$$

Треба довести, що перетворення $L = G \circ F$ також афінне.

Виразимо перетворення L в афінних координатах:

$$L: \ x^{J'} = b^J_K(a^K_N x^N + a^K) + b^J = b^J_K a^K_N x^N + (b^J_K a^K + b^J) =$$
$$= c^J_N x^N + c^J.$$

Одержаний закон є лінійним і невиродженим, бо

$$\det(c^J_N) = \det(b^J_K) \cdot \det(a^K_N) \neq 0.$$

Отже, перетворення L є афінним перетворенням простору $\mathcal{A}_n$.

б) Доведемо, що обернене перетворення до афінного є також афінним. Нехай

$$F: \ x^{J'} = a^J_K x^K + a^J, \quad \det(a^J_K) \neq 0.$$

Тоді

$$F^{-1}: \ x^{J'} = \tilde{a}^J_K x^K + \tilde{a}^J, \quad \det(\tilde{a}^J_K) \neq 0.$$

Отже, F^{-1} – афінне перетворення.

2. При афінному перетворенні m-вимірна площина відображається на m-вимірну площину: $F(\Pi_m) = \Pi'_m$.

Справді, площина Π_m в репері $R = \{O, \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\}$ задається системою рівнянь

$$c^\alpha_J x^J = c^\alpha, \quad \operatorname{rang}(c^\alpha_J) = n - m, \quad 1 \leq \alpha \leq n - m. \tag{1.14}$$

Але площина Π'_m задається в репері $R' = \{O, \vec{e_1}', \ldots, \vec{e_n}'\}$ тією ж системою рівнянь (1.14). Отже, Π'_m є площиною розмірності m.

Звідси дістаємо, що при афінному перетворенні пряма Π_1 відображається на пряму Π'_1.

3. За допомогою афінного перетворення площини $\mathcal{A}_2$ будь-який трикутник відображається на трикутник; при цьому медіани відображаються на медіани.

4. У тривимірному афінному просторі $\mathcal{A}_3$ тетраедр афінним перетворенням відображається на тетраедр; при цьому медіани першого тетраедра відображаються на медіани другого тетраедра, середні лінії – на середні лінії другого тетраедра.

§1.2. Евклідові та точкові евклідові простори

Означення 1.8. *Числова функція $g(\vec{x}, \vec{y})$ двох векторних аргументів $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$ називається **білінійною формою**, якщо вона лінійна по кожному аргументу, тобто*

1) $\forall\{\lambda_1, \lambda_2\} \subset \mathbb{R}\ \forall\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{y}\} \subset V_n$: $g(\lambda_1\vec{x_1} + \lambda_2\vec{x_2}, \vec{y}) = \lambda_1 g(\vec{x_1}, \vec{y}) + \lambda_2 g(\vec{x_2}, \vec{y})$;

2) $\forall\{\mu_1, \mu_2\} \subset \mathbb{R}\ \forall\{\vec{x}, \vec{y_1}, \vec{y_2}\} \subset V_n$: $g(\vec{x}, \mu_1\vec{y_1} + \mu_2\vec{y_2}) = \mu_1 g(\vec{x}, \vec{y_1}) + \mu_2 g(\vec{x}, \vec{y_2})$.

Білінійна форма називається **симетричною**, якщо

$$\forall\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset V_n : g(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{y}, \vec{x}).$$

Нехай $\{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\}$ – базис простору V_n, $\vec{x} = x^i\vec{e_i}$, $\vec{y} = y^j\vec{e_j}$.Тоді

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = g(x^i\vec{e_i}, y^j\vec{e_j}) = x^i y^j g(\vec{e_i}, \vec{e_j}) \equiv x^i y^j a_{ij} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x^i y^j,$$

$$a_{ij} = g(\vec{e_i}, \vec{e_j}). \tag{1.15}$$

Формула (1.15) дає зображення білінійної форми $g(\vec{x}, \vec{y})$ в координатах аргументів $\vec{x}$, $\vec{y}$ у даному базисі. Матриця (a_{ij}) називається матрицею білінійної форми g.

Нехай білінійна форма g є симетричною. Функція $g(\vec{x}, \vec{x})$ називається **квадратичною формою**, яка відповідає даній симетричній білінійній формі $g(\vec{x}, \vec{y})$. Вихідна (симетрична) білінійна форма $g(\vec{x}, \vec{y})$ називається **полярною** для квадратичної форми $g(\vec{x}, \vec{x})$. Квадратична форма $g(\vec{x}, \vec{x})$ називається **додатно визначеною**, якщо $g(\vec{x}, \vec{x}) > 0$, $\forall\vec{x} \neq \vec{0}$.

Означення 1.9. *Скалярним добутком у n-вимірному векторному просторі V_n називається числова функція двох векторних аргументів*

$$V_n \supset \{\vec{x}, \vec{y}\} \mapsto (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R},$$

яка задовольняє такі умови (аксіоми скалярного добутку):

1) $\forall\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset V_n$: $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$;

2) $\forall\{\lambda_1, \lambda_2\} \subset \mathbb{R}\ \forall\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{y}\} \subset V_n$: $(\lambda_1\vec{x_1} + \lambda_2\vec{x_2}, \vec{y}) = \lambda_1(\vec{x_1}, \vec{y}) + \lambda_2(\vec{x_2}, \vec{y})$;

3) якщо $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ при фіксованому $\vec{x}$ і довільному $\vec{y} \in V_n$, то $\vec{x} = \vec{0}$ (умова невиродженості).

Отже, скалярний добуток $(\vec{x}, \vec{y})$ представляє собою **білінійну симетричну невироджену форму**. Правильним є і обернене твердження: кожну невироджену симетричну білінійну форму $g(\vec{x}, \vec{y})$, задану на $V_n \times V_n$, можна взяти за скалярний добуток, поклавши $(\vec{x}, \vec{y}) := g(\vec{x}, \vec{y})$, $\forall\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset V_n$.

Означення 1.10. *Дійсний n-вимірний векторний простір, в якому задано фіксовану невироджену симетричну білінійну форму $g(\vec{x}, \vec{y})$ з відповідною невиродженою дійсною додатно визначеною квадратичною формою $g(\vec{x}, \vec{x})$, називається n-вимірним евклідовим простором E_n.*

Отже, в E_n задано скалярний добуток

$$(\vec{x}, \vec{y}) := g(\vec{x}, \vec{y}), \quad \forall\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset V_n.$$

Зауважимо, що з аксіом 1) і 2) скалярного добутку випливає, що $\forall\vec{x} \in E_n$: $(\vec{0}, \vec{x}) = (\vec{x}, \vec{0}) = 0$, зокрема, $(\vec{0}, \vec{0}) = 0$. Отже, $\forall\vec{x} \in E_n$: $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$.

Якщо $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, то вектори $\vec{x}$, $\vec{y} \in V_n$ називаються **ортогональними**.

Нехай $\{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\}$ – базис простору V_n, у якому квадратична форма $g(\vec{x}, \vec{x})$ має нормальний вигляд; тоді, якщо $x^1, \ldots, x^n$ – координати вектора $\vec{x}$ у цьому базисі, то

$$(\vec{x}, \vec{x}) \equiv g(\vec{x}, \vec{x}) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2.$$

Скалярний добуток двох векторів подається при цьому у вигляді:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x^1y^1 + x^2y^2 + \ldots + x^ny^n,$$

$$\vec{x} = \{x^1, \ldots, x^n\}, \ \vec{y} = \{y^1, \ldots, y^n\}.$$

Базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ називається **ортонормованим**, для елементів цього базису справджуються співвідношення:

$$(\vec{e_i}, \vec{e_j}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j, \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Означення 1.11. *Модулем (нормою) або довжиною вектора* $\vec{x}$ *називається дійсне число* $\|\vec{x}\| := \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} \equiv \sqrt{g(\vec{x}, \vec{x})}$.

З означення $\|\vec{x}\|$ випливає, що

1) $\forall \vec{x} \in E_n$: $\|\vec{x}\| \geq 0$;

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall \vec{x} \in E_n$: $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$.

Справді,

$$\|\lambda \vec{x}\| = \sqrt{(\lambda \vec{x}, \lambda \vec{x})} = \sqrt{\lambda^2 (\vec{x}, \vec{x})} = |\lambda| \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|.$$

3) Для будь-яких $\vec{x}$, $\vec{y} \in E_n$ справедлива **нерівність Коші-Буняковського**:

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 \leq (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y}).$$

Справді, нехай $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$. Тоді для довільного дійсного числа λ справджується нерівність $(\lambda \vec{x} - \vec{y}, \lambda \vec{x} - \vec{y}) \geq 0$, тобто

$$\lambda^2 (\vec{x}, \vec{x}) - 2\lambda (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) \geq 0.$$

Необхідною і достатньою умовою невід'ємності останнього квадратного тричлена (відносно λ) є недодатність його дискримінанта, тобто нерівність

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 - (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y}) \leq 0,$$

яка рівносильна нерівності Коші-Буняковського. Якщо $\vec{x} = \vec{0}$, то $(\vec{0}, \vec{0}) = 0$, $(\vec{0}, \vec{y}) = 0$, $\forall \vec{y} \in E_n$. Отже, у

цьому випадку маємо рівність $(\vec{0}, \vec{y}) = (\vec{0}, \vec{0}) \cdot (\vec{y}, \vec{y})$. Аналогічно розглядається випадок $\vec{y} = \vec{0}$.

4) **Нерівність трикутника для довжини вектора**, тобто

$$\forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset E_n : \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$

Доведення цієї властивості спирається на нерівність Коші-Буняковського. Отже,

$$\forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset E_n : \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) +$$

$$+ 2(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) \leq (\vec{x}, \vec{x}) + 2\sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} \cdot \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})} + (\vec{y}, \vec{y}) =$$

$$= (\sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} + \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})})^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2.$$

Звідси вже випливає нерівність

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$

5) Для довільних двох векторів $\vec{x}, \vec{y} \in E_n$ справджується **рівність паралелограма**:

$$2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2) = \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2.$$

6) Якщо $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$, то з нерівності Коші-Буняковського випливає, що

$$-1 \leq \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \leq 1.$$

Отже, існує єдине дійсне число φ таке, що

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Число φ називають **величиною кута між** $\vec{x}$ **і** $\vec{y}$. Отже, для того, щоб ненульовий вектор $\vec{x}$ був ортогональний до ненульового вектора $\overrightarrow{y}$ ($\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y}$), необхідно і досить, щоб $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Якщо вектор $\overrightarrow{x} \in E_n$ ортогональний до кожного вектора з деякого підпростору $L \subset E_n$, то кажуть, що $\overrightarrow{x}$ ортогональний до L ($\overrightarrow{x} \perp L$). Сукупність всіх $\overrightarrow{x} \in E_n$, ортогональних до L, позначається символом $L^{\perp}$. При цьому $E_n = L \oplus L^{\perp}$, тобто кожний вектор $\overrightarrow{x} \in E_n$ допускає єдине зображення у вигляді $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}$, де $\overrightarrow{y} \in L$, $\overrightarrow{z} \in L^{\perp}$. Вектор $\overrightarrow{y} \in L$ називається **ортогональною проекцією** $\overrightarrow{x}$ **на** L, вектор $\overrightarrow{z}$ – **ортогональною складовою** $\overrightarrow{x}$.

Означення 1.12. *n-вимірний афінний простір $\mathcal{A}_n$ над n-вимірним векторним евклідовим простором E_n називається точковим евклідовим простором $\mathcal{E}_n$.*

Число $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})}$ називається віддалю між двома точками в $\mathcal{E}_n$:

$$\rho(A, B) := \sqrt{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})} \geq 0.$$

Із означення віддалі між двома точками в $\mathcal{E}_n$ та властивостей довжини вектора випливає, що:

1. $\forall \{A, B\} \subset \mathcal{E}_n$: $\rho(B, A) = \rho(A, B)$.

Дійсно,

$$\rho(B, A) = \sqrt{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA})} = \sqrt{(-\overrightarrow{AB}, -\overrightarrow{AB})} = \sqrt{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})} =$$
$$= \rho(A, B).$$

2. $\forall \{A, B, C\} \subset \mathcal{E}_n$: $\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C)$ (**нерівність трикутника для віддалі**).

Для доведення цієї властивості скористаємося тим, що за першою аксіомою Вейля афінного простору кожну точку $A \in \mathcal{E}_n$ можна ототожнити з її радіус-вектором $\overrightarrow{r_A} := \overrightarrow{OA}$ по відношенню до точки O. Тоді за другою аксіомою Вейля

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}.$$

Отже, віддаль між двома точками $A, B \in \mathcal{E}_n$ можна знайти за формулою

$$\rho(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}\|.$$

З нерівності трикутника для довжини вектора дістаємо, що

$$\rho(A, C) = \|\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A}\| = \|\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}\| \leq$$
$$\leq \|\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B}\| + \|\overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}\| = \rho(B, C) + \rho(A, B).$$

3. Якщо $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, то $\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2$ (теорема Піфагора).

Доведення. Оскільки $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, тобто $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, то

$$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) =$$
$$= \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 - 2(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}).$$

За умовою $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, отже, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = 0$. Таким чином,

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2.$$

4. Якщо A, B, C – три точки, які не лежать на одній прямій ($\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ – лінійно незалежні вектори), то

$$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 - 2\|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}})$$

(теорема косинусів).

Доведення. За другою аксіомою Вейля

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.$$

Тоді

$$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) =$$

$$= \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 - 2(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}).$$

Оскільки

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}),$$

то прийдемо до потрібної рівності.

Якщо $\{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ – ортонормований базис в E_n, то для будь-яких точок A, B, які задані своїми декартовими координатами $A(x_1^1; \ldots; x_1^n)$, $B(x_2^1; \ldots; x_2^n)$ маємо

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_2^1 - x_1^1)^2 + \ldots + (x_2^n - x_1^n)^2}.$$

Площини в $\mathcal{E}_n$. Дві площини Π_m і Π_s називаються ортогональними, якщо їхні напрямні підпростори Π_m^0 і Π_s^0 ортогональні, тобто будь-який вектор з Π_m^0 ортогональний до будь-якого вектора з Π_s^0. Якщо M_0 – довільна точка простору $\mathcal{E}_n$, то існує єдина площина Π_{n-m} розмірності $n - m$, яка проходить через точку M_0 ортогонально до площини Π_m.

Оскільки $\Pi_m^0 \oplus \Pi_{n-m}^0 = E_n$, то площини Π_m і Π_{n-m} перетинаються. Але підпростори цих площин ортогональні, тому їхнім перетином є підпростір нульової розмірності. Отже, $\Pi_m \cap \Pi_{n-m} = \{M_0'\}$. Точка M_0' називається проекцією точки M_0 на площину Π_m, при цьому $\overrightarrow{M_0M_0'} \perp \Pi_m$. Зауважимо, що проекція точки M_0 на площину існує і єдина. Віддаль між точками M_0 і M_0' називається віддаллю від точки M_0 до площини Π_m, тобто

$$\rho(M_0, \Pi_m) := \rho(M_0, \text{пр}_{\Pi_m} M_0) = \|\overrightarrow{M_0M_0'}\|.$$

Якщо в $\mathcal{E}_n$ задані точка A і площина Π_m, то віддаль від точки до площини може бути означена ще й так:

$$\rho(A, \Pi_m) := \inf_{M \in \Pi_m} \rho(A, M).$$

Віддаллю між двома площинами Π_m **і** Π_s називається мінімум віддалей між будь-якими двома точками, одна з яких належить Π_m, а друга – Π_s. Можна довести, що ця віддаль є модулем ортогональної складової вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ відносно лінійного підпростору $\Pi_k^0 = \mathcal{L}(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_m}, \overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_s})$, де $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_m}$ – базис в Π_m^0, $\overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_s}$ – базис в Π_s^0, $M_1 \in \Pi_m$, $M_2 \in \Pi_s$.

§1.3. Псевдоевклідові простори

У векторному просторі V_n задамо білінійну симетричну невироджену форму: g: $V_n \times V_n \to \mathbb{R}$ таку, що відповідна їй квадратична форма $g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) := f(\overrightarrow{x})$ є дійсною невиродженою формою індекса (m, p), де $m + p = n$, m – від'ємний, а p – додатний індекс інерції, $1 \leq m \leq n - 1$. Це означає, що у V_n існує базис, відносно якого матриця (g_{ij}) форми g має вигляд: $g_{ij} = 0$ для $i \neq j$, $g_{ii} = -1$ для $1 \leq i \leq m$, $g_{ii} = 1$ для $m + 1 \leq i \leq n$.

Число $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) := g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \mathbb{R}$, $\forall \{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\} \subset V_n$, називається **скалярним добутком індекса** (m, p) **векторів** $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$, а число $\|\overrightarrow{x}\| := \sqrt{g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})} = \sqrt{(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})}$ – **довжиною (номрою) вектора** $\overrightarrow{x}$.

Означення 1.13. *Простір V_n із введеним скалярним добутком називається псевдоевклідовим простором індекса (m, p) (або індекса m) і позначається символом $E^n_{m,p}$ (або $E_{n,m}$).*

Нехай $\{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ – базис простору V_n такий, що в ньому квадратична форма $f(\overrightarrow{x}) = g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ має нормальний вигляд:

$$g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = -(x^1)^2 - (x^2)^2 - \ldots - (x^m)^2 + (x^{m+1})^2 + \ldots + (x^n)^2,$$

$$\overrightarrow{x} = \{x^1, \ldots, x^n\}.$$

Із властивостей білінійної форми та її симетричності випливає, що

$$f(\vec{x}+\vec{y}) = g(\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}) = g(\vec{x}, \vec{x})+g(\vec{x}, \vec{y})+g(\vec{y}, \vec{x})+$$

$$+g(\vec{y}, \vec{y}) = f(\vec{x}) + 2g(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{y}), \quad \forall\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset V_n.$$

Звідси дістаємо, що

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}[f(\vec{x} + \vec{y}) - f(\vec{x}) - f(\vec{y})]. \tag{1.16}$$

З (1.16) випливає, що скалярний добуток векторів $\vec{x} = \{x^1, \ldots, x^n\}$, $\vec{y} = \{y^1, \ldots, y^n\} \in V_n$ у базисі $\{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\}$ має вигляд

$$(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \vec{y}) = -x^1y^1 - \ldots - x^my^m+$$

$$+x^{m+1}y^{m+1} + \ldots + x^ny^n. \tag{1.17}$$

Базис $\{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\}$ називається **псевдоортонормованим**. Для векторів цього базису (1.17) дістаємо, що

$$(\vec{e_i}, \vec{e_j}) = g(\vec{e_i}, \vec{e_j}) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } i = j \leq m, \\ 1, & \text{якщо } i = j > m, \\ 0 & \text{якщо } i \neq j. \end{cases} \tag{1.18}$$

Із формули (1.17) випливає, що в $E_{n,m}$ скалярний квадрат вектора $\vec{x} \neq \vec{0}$ може бути додатним, від'ємним або рівним нулю. Так, для базисних векторів $(\vec{e_i}, \vec{e_i}) = -1$, якщо $i \leq m$, $(\vec{e_i}, \vec{e_i}) = 1$, якщо $i > m$; для кожного $\vec{e} = \vec{e_i}+\vec{e_j}$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = m + 1, \ldots, n)$ маємо $(\vec{e}, \vec{e}) = 0$, хоча $\vec{e} \neq \vec{0}$. Довжина кожного з векторів $\vec{e_1}$, ..., $\vec{e_m}$ дорівнює $\sqrt{-1}$, тому вони називаються **уявноодиничними**. Кожний з векторів $\overrightarrow{e_{m+1}}$, ..., $\vec{e_n}$ має довжину, що дорівнює одиниці, і називається **одиничним**. Ненульові вектори, довжина яких дорівнює нулю, називаються **ізотропними**.

Два вектори з $E_{n,m}$ називаються **ортогональними**, якщо їхній скалярний добуток дорівнює нулю. Із умов (1.18) випливає, що вектори базису $\{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\}$ попарно ортогональні. Таким чином, вектори псевдоортонормованого базису попарно ортогональні, а їхні довжини дорівнюють або $i = \sqrt{-1}$, або одиниці.

Отже, поруч з деякими спільними властивостями псевдоевклідового простору $E_{n,m}$ і евклідового простору E_n між ними існують і відмінності: в $E_{n,m}$ є вектори уявної довжини і ненульові вектори, ортогональні самі до себе, хоча це звичайні вектори з векторного простору V_n над полем дійсних чисел.

Означення 1.14. *n-вимірний афінний простір $\mathcal{A}_n$ над n-вимірним псевдоевклідовим простором індекса m, $1 \leq m \leq n-1$, називається точковим n-вимірним псевдоевклідовим простором індекса m і позначається символом $\mathcal{E}_{n,m}$.*

Віддаллю між точками $A, B \in \mathcal{E}_{n,m}$ називається довжина вектора $\overrightarrow{AB}$, тобто

$$\rho(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})} = \sqrt{g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})}.$$

Псевдоевклідова віддаль може бути дійсною, якщо $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) > 0$; уявною, якщо $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) < 0$ і дорівнювати нулю, коли вектор $\overrightarrow{AB}$ ізотропний. Якщо $A(x_1^1; \ldots; x_1^n)$, $B(x_2^1; \ldots; x_2^n)$, то $\overrightarrow{AB} = \{x_2^1 - x_1^1; \ldots; x_2^n - x_1^n\}$. Тоді

$$\rho(A, B) = \sqrt{g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x_2^i - x_1^i)(x_2^j - x_1^j)},$$

$$g_{ij} = g(\vec{e_i}, \vec{e_j}).$$

У псевдоортонормованому базисі віддаль між точками A та B обчислюється за формулою

$$\rho(A, B) = \sqrt{-(x^1)^1 - \ldots - (x^m)^2 + (x^{m+1})^2 + (x^n)^2},$$

$$x^i := x_1^i - x_1^i.$$

Зазначимо також, що

$$\forall \{A, B\} \subset \mathcal{E}_{n,m} : \rho(A, B) = \rho(B, A).$$

Афінне перетворення F простору $\mathcal{E}_{n,m}$ називається **рухом**, якщо відображення $f\colon E_{n,m} \to E_{n,m}$, яке визначається правилом:

$$\forall \overrightarrow{AB} \in E_{n,m} : f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{F(A)F(B)}$$

зберігає скалярний добуток, тобто

$$\forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset E_{n,m} : (f(\vec{x}), f(\vec{y})) = (\vec{x}, \vec{y}).$$

Наведемо без доведення основні властивості рухів у псевдоевклідових просторах: множина всіх рухів простору $\mathcal{E}_{n,m}$ утворює групу; кожний рух відображає ортонормований репер у ортонормований репер.

Псевдоевклідовий простір $\mathcal{E}^4_{1,3} = \mathcal{E}_{4,1}$ називається **простором Мінковського**. Він служить математичною моделлю спеціальної теорії відносності.

Важливим поняттям у фізиці є **подія**. Під подією розуміють елементарний фізичний процес, який характеризується набором чисел (t, x^1, x^2, x^3), де t – момент часу, коли відбулася подія; x^1, x^2, x^3 – координати "місця події".

Множина наборів $\{(t, x^1, x^2, x^3)\}$ називається простором подій. У спеціальній теорії відносності постулюється, що простір подій є простором Мінковського з координатами x^0, x^1, x^2, x^3. Зазвичай вважають, що $x^0 = ct$, де c – швидкість світла в порожнині.

Множина точок $M \in \mathcal{E}_{4,1}$ таких, що

$$\{M : \rho(0, M) = 0\} = \{M : g(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM}) = 0\},$$

утворює конус другого порядку з вершиною у точці O, який називається **ізотропним конусом**. Зокрема, якщо O – полюс (початок) репера, то рівняння конуса має вигляд

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0.$$

Вектори, які лежить всередині конуса, називаються **часоподібними**. Для таких векторів $\vec{x}$ маємо $\|\vec{x}\|^2 < 0$. Вектори, які розміщуються поза конусом, називаються **просторовоподібними**. Для таких векторів $\vec{y}$ $\|\vec{y}\|^2 > 0$. Вектори $\vec{z} \neq \vec{0}$, для яких $\|\vec{z}\| = 0$, називаються **ізотропними**. Такі вектори розміщуються на ізотропному конусі. Нехай

$$U^- := \{M \in \mathcal{E}_{4,1} : \|\overrightarrow{OM}\|^2 < 0\},\ U^+ := \{M \in \mathcal{E}_{4,1} :$$

$$\|\overrightarrow{OM}\|^2 > 0\}, \quad U^0 := \{M \in \mathcal{E}_{4,1} : \|\overrightarrow{OM}\|^2 = 0\}.$$

Тоді $\mathcal{E}_{4,1} = U^+ \cup U^- \cup U^0$.

Розглянемо більш детально простір $\mathcal{E}_{2,1}$ – псевдоевклідову площину, яка представляє собою простіший нетривіальний приклад псевдоевклідового простору. За **своїми афінними властивостям** геометрія площини $\mathcal{E}_{2,1}$ не відрізняється від геометрії звичайної евклідової площини: у ній мають зміст поняття прямої, променя, відрізка і т.п. Однак **метричні** властивості цих площин істотно відрізняються.

На псевдоевклідовій площині існує псевдоортонормований репер $\{O, \vec{e_0}, \vec{e_1}\}$, вектори якого задовольняють умови:

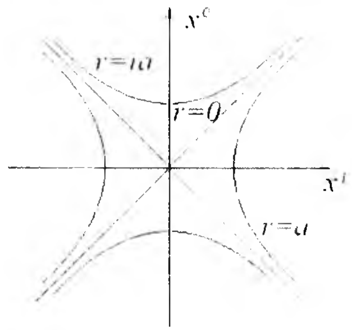
$$(\vec{e_0}, \vec{e_0}) = -1, \quad (\vec{e_1}, \vec{e_1}) = 1, \quad (\vec{e_0}, \vec{e_1}) = 0.$$

Координати довільного вектора $\vec{x}$ у базисі $\{\vec{e_0}, \vec{e_1}\}$ позначатимемо $\{x^0; x^1\}$, скалярний квадрат цього вектора дорівнює

$$(\vec{x}, \vec{x})^2 \equiv \|\vec{x}\|^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2. \qquad (1.19)$$

Для того, щоб відчути особливість метрики (1.19), розглянемо коло в $\mathcal{E}_{2,1}$, яке визначається як сукупність усіх точок, віддалених на одну і ту ж псевдоевклідову віддаль r від даної точки – центра.

Якщо центр збігається з початком координат $O(0;0)$, то за означенням рівняння кола має вигляд $\sqrt{-(x^0)^2+(x^1)^2}=r$. Радіус кола може бути дійсним ($r=a$), тоді $-(x^0)^2+(x^1)^2=a^2$. Якщо радіус кола уявний, тобто $r=ia$, то $-(x^0)^2+(x^1)^2=-a^2$. У випадку, коли радіус $r=0$, маємо $-(x^0)^2+(x^1)^2=0$.



Мал. 1.2.

Таким чином, в $\mathcal{E}_{2,1}$ є три вида кіл. На афінній площині вони представляють собою пару перетинних прямих – коло нульового радіуса – і дві спряжені гіперболи, для яких вказані прямі є асимптотами (Мал. 1.2).

Розглянемо довільний вектор $\vec{x}=x^0\vec{e_0}+x^1\vec{e_1}$, розміщений на якій-небудь асимптоті вказаних гіпербол (коло нульового радіуса). У цьому випадку $|x^0|=|x^1|$, тобто $\|\vec{x}\|^2=0$. Отже, на асимптотах розміщуються ізотропні вектори (ненульові вектори з нульовою нормою).

Вивчимо рух псевдоевклідової площини. Припустимо, що рух залишає нерухомим початок координат. Тоді це перетворення задається формулами (див. (1.13)):

$$x^0=a_{00}x^{0'}+a_{01}x^{1'},\quad x^1=a_{10}x^{0'}+a_{11}x^{1'}. \tag{1.20}$$

Матриця A цього перетворення має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}$$

і для векторів базису $\{\vec{e_0},\vec{e_1}\}$ маємо

$$f(\vec{e_0})=a_{00}\vec{e_0}+a_{10}\vec{e_1},\quad f(\vec{e_1})=a_{01}\vec{e_0}+a_{11}\vec{e_1}. \tag{1.21}$$

За означенням руху

$$(f(\vec{e_0}),f(\vec{e_0}))=(\vec{e_0},\vec{e_0})=-1,$$
$$(f(\vec{e_1}),f(\vec{e_1}))=(\vec{e_1},\vec{e_1})=1,$$
$$(f(\vec{e_0}),f(\vec{e_1}))=(\vec{e_0},\vec{e_1})=0.$$

Звідси, з урахуванням (1.21) маємо, що

$$-a_{00}^2+a_{10}^2=-1,\quad -a_{01}^2+a_{11}^2=1,\quad -a_{00}a_{01}+a_{10}a_{11}=0. \tag{1.22}$$

Оскільки $a_{00}\neq 0$, $a_{11}\neq 0$, то з (1.22) випливає, що

$$\frac{a_{10}}{a_{00}}=\frac{a_{01}}{a_{11}}=\beta,$$

тобто $a_{10}=\beta a_{00}$, $a_{01}=\beta a_{11}$. Підставимо замість a_{10} та a_{01} їхні значення в (1.22); в результаті одержимо, що $a_{00}^2-\beta^2a_{00}^2=1$. Тоді

$$a_{00}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \beta^2a_{11}^2-a_{11}^2=-1\Rightarrow a_{11}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Таким чином, матриця перетворень (1.20) має вигляд:

$$A=\pm\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}. \tag{1.23}$$

Якщо позначити

$$A_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix},$$

то інші матриці (1.23) можна записати так:

$$A_1 = A_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = A_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = A_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Покладемо $\beta = \operatorname{th}\varphi$, $-\infty < \varphi < +\infty$, тоді $1/\sqrt{1-\beta^2} = \operatorname{ch}\varphi$, $\beta/\sqrt{1-\beta^2} = \operatorname{sh}\varphi$ і матриця A набуває вигляду

$$A = \pm \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & \pm\operatorname{sh}\varphi \\ \operatorname{sh}\varphi & \pm\operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

Із рівностей $a_{10} = \beta a_{00}$, $a_{01} = \beta a_{11}$ випливає, що в матриці A обидва елементи першого стовпця, та обидва елементи другого стовпця можуть мати лише однакові знаки.

Множина перетворень (1.20) псевдоевклідової площини з матрицею A вигляду (1.24) утворює групу (див. §1.1), яка називається групою гіперболічних поворотів і позначається символом $O(1,1)$.

На відміну від групи ортогональних перетворень евклідової площини, яка складається із двох зв'язних компонент, група псевдоортогональних перетворень $\mathcal{E}_{2,1}$ складається з чотирьох зв'язних компонент:

$$\{A_0\} = \left\{\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi \\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix}\right\}, \quad \{A_1\} = \left\{\begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi \\ -\operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix}\right\},$$

$$\{A_2\} = \left\{\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & -\operatorname{sh}\varphi \\ \operatorname{sh}\varphi & -\operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix}\right\}, \{A_3\} = \left\{\begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\varphi & -\operatorname{sh}\varphi \\ -\operatorname{sh}\varphi & -\operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix}\right\}.$$

Легко перевірити, що $\det A_0 = \det A_3 = 1$, $\det A_1 = \det A_2 = -1$.

У спеціальній теорії відносності при переході від однієї інерційної системи відліку до іншої використовуються перетворення з матрицею A_0. Розглянемо перетворення (1.20) у випадку $A = A_0$:

$$x^0 = \frac{x^{0'} + \beta x^{1'}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x^1 = \frac{\beta x^{0'} + x^{1'}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

або, оскільки $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^{0'} = ct'$, $x^{1'} = x'$, то

$$t = \frac{t' + \frac{\beta}{c}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x = \frac{\beta ct' + x'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.25}$$

Виразимо x', t' через x, t; в результаті одержимо, що

$$t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x' = \frac{-\beta ct + x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.26}$$

З'ясуємо фізичний зміст параметра β. Припустимо, що в системі R' у стані спокою знаходиться точка M – початок координат, тобто $x' = 0$. Тоді із формули (1.26) випливає, що $x - \beta ct = 0$ або $\beta c = x/t$. Але x/t – швидкість точки M у системі R, дорівнює швидкості системи R' відносно R. Отже, $\beta = v/c$. Тоді формули (1.25), (1.26) набувають вигляду

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad x = \frac{vt' + x'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{1.27}$$

і

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{-vt + x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{1.28}$$

Перетворення (1.27) та (1.28) називаються **перетвореннями Лоренца**.

Якщо v порівняно з c є малим, то $\sqrt{1-v^2/c^2} \approx 1$ і тоді з формул (1.28) маємо $x' \approx x - vt$, $t' \approx t$, тобто при малих v перетворення Лоренца співпадають з перетвореннями Галілея класичної механіки. Із перетворень Лоренца випливають деякі цікаві висновки.

Уповільнення часу. Нехай в системі R відносно нерухомого у ній годинника час змінився від t_1 до t_2, $\Delta t = t_2 - t_1$. Знайдемо значення t_1', яке відповідає t_1, і t_2', яке відповідає t_2, у одній і тій же точці з абсцисою x' у системі R'. За формулою (1.27) знаходимо, що

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t_2 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Звідси

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Отже, $\Delta t' < \Delta t$, тобто **рухомий годинник іде повільніше за нерухомий**.

Скорочення довжини. Нехай в системі R нерухомим є стержень довжини l з координатами x_1 і x_2. Тоді $l = x_2 - x_1$. Якщо координати кінців цього стержня в системі R', заміряні в один і той же момент часу t', відповідно дорівнюють x_1' і x_2', то

$$x_1 = \frac{vt' + x_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x_2 = \frac{vt' + x_2'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

звідки

$$l = x_2 - x_1 = \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{l'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Таким чином, довжина l' стержня у тій системі координат, відносно якої стержень рухається, менша ніж його довжина l у тій системі відліку, відносно якої він є нерухомим.

Приклади розв'язування задач

1. Довести, що відрізок $[A, B]$ у афінному просторі $\mathcal{A}_n$ складається з тих точок $M \in \mathcal{A}_n$, радіус-вектори $\overrightarrow{OM}$ яких задовольняють співвідношення

$$\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OB}, \quad \lambda \in [0, 1]. \qquad (1.29)$$

Розв'язання. Нагадаємо, що за означенням,

$$[A, B] = \{M \in \mathcal{A}_n : \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}, 0 \le t \le 1\}.$$

За другою аксіомою афінного простору мають місце співвідношення:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA},$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Отже, рівняння відрізка $[A, B]$ у векторній формі має вигляд:

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (1 - t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}.$$

Поклавши $\lambda = 1 - t$, дістанемо (1.29).

2. Довести, що кожна r-вимірна площина Π_r в n-вимірному афінному просторі $\mathcal{A}_n$ над векторним простором V_n над полем P є афінним простором над векторним простором V_r над полем P.

Розв'язання. Нехай площина Π_r утворена за допомогою точки $M_0 \in \mathcal{A}_n$, тобто $\Pi_r = \{M \in \mathcal{A}_n : \overrightarrow{M_0M} \in \Pi_r^0\}$. Візьмемо на площині Π_r довільні дві точки M і N. За означенням афінного простору, за допомогою відображення f:

$\mathcal{A}_n \times \mathcal{A}_n \to V_n$ точкам M і N ставиться у відповідність вектор $\overrightarrow{MN} \in V_n$. З другої аксіоми Вейля випливає, що

$$\overrightarrow{M_0M} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M_0N} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M_0N} - \overrightarrow{M_0M},$$

при цьому $\overrightarrow{M_0M} \in \Pi_r^0$, $\overrightarrow{M_0N} \in \Pi_r^0$. Отже, $\overrightarrow{MN} \in \Pi_r^0$. Таким чином, кожній впорядкованій парі точок M, N площини Π_r відповідає вектор $\overrightarrow{MN}$ з r-вимірного векторного простору $V_r = \Pi_r^0$. Вказане відображення $\tilde{f}$: $\Pi_r \times \Pi_r \to V_r$ можна описати за допомогою відображення f:

$$\forall\{M, N\} \subset \Pi_r : \tilde{f}(M, N) = f(M_0, N) - f(M_0, N) = \overrightarrow{MN}. \tag{1.30}$$

З (1.30) випливає, що відображення $\tilde{f}$ задовольняє першу аксіому Вейля. Перевіримо виконання другої аксіоми Вейля:

$$\forall\{A, B, C\} \subset \Pi_r : \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \tilde{f}(A, B) + \tilde{f}(B, C) =$$

$$= f(M_0, B) - f(M_0, A) + f(M_0, C) - f(M_0, B) =$$

$$= f(M_0, C) - f(M_0, A) = \tilde{f}(A, C) = \overrightarrow{AC}.$$

Отже, твердження доведено.

3. Довести, що через $k+1$ точку $A_0, A_1, \ldots, A_k$ афінного простору $\mathcal{A}_n$, які не лежать в $(k-1)$-вимірній площині, проходить єдина k-вимірна площина.

Розв'язання. Утворимо вектори $\overrightarrow{A_0A_1} = \overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k} = \overrightarrow{a_k}$ і передусім доведемо, що ці вектори лінійно незалежні тоді і тільки тоді, коли вони не належать до одного $(k-1)$-вимірного векторного підпростору.

Отже, нехай вектори $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ – лінійно незалежні, але в той же час, лежать в одному $(k-1)$-вимірному підпросторі L_{k-1}. Припустимо, що вектори $\overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_{k-1}}$ утворюють базис

в L_{k-1}, тобто $L_{k-1} = \mathcal{L}(b_1, \ldots, b_{k-1})$. Тоді

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{a_1} = t_1^1\overrightarrow{b_1} + t_2^1\overrightarrow{b_2} + \ldots + t_{k-1}^1\overrightarrow{b_{k-1}}, \\ \overrightarrow{a_2} = t_1^2\overrightarrow{b_1} + t_2^2\overrightarrow{b_2} + \ldots + t_{k-1}^2\overrightarrow{b_{k-1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overrightarrow{a_k} = t_1^k\overrightarrow{b_1} + t_2^k\overrightarrow{b_2} + \ldots + t_{k-1}^k\overrightarrow{b_{k-1}} \end{array} \tag{1.31}$$

Розглянемо лінійну комбінацію векторів $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$:

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_k\overrightarrow{a_k} = \overrightarrow{0}. \tag{1.32}$$

З лінійної незалежності цих векторів випливає, що $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$. З іншого боку, з (1.31) і (1.32) дістаємо таку систему рівнянь відносно $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 t_1^1 + \lambda_2 t_1^2 + \ldots + \lambda_k t_1^k = 0, \\ \lambda_1 t_2^1 + \lambda_2 t_2^2 + \ldots + \lambda_k t_2^k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 t_{k-1}^1 + \lambda_2 t_{k-1}^2 + \ldots + \lambda_k t_{k-1}^k = 0. \end{array} \right. \tag{1.33}$$

Очевидно, що $\operatorname{rang} A = s$, $s \leq k-1$, де

$$A = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_1^2 & \ldots & t_1^k \\ t_2^1 & t_2^2 & \ldots & t_2^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{k-1}^1 & t_{k-1}^2 & \ldots & t_{k-1}^k \end{pmatrix}.$$

Отже, система (1.33) має ненульовий розв'язок. Одержане протиріччя доводить, що вектори $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ не можуть належати до одного $(k-1)$-вимірного підпростору.

Міркуючи аналогічно доводимо, що якщо вектори $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ належать до одного $(k-1)$-вимірного простору, то вони лінійно залежні.

Зауважимо, що доведене твердження не залежить від того, яку з точок взяти за A_0. Справді, розглянемо систему векторів вигляду

$$\overrightarrow{A_iA_0}, \overrightarrow{A_iA_1}, \ldots, \overrightarrow{A_iA_{i-1}}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{A_iA_k}. \tag{1.34}$$

Всі вектори системи

$$\overrightarrow{A_0A_1},\ \overrightarrow{A_0A_2},\ \ldots,\ \overrightarrow{A_0A_k} \tag{1.35}$$

лінійно виражаються через вектори системи (1.34):

$$\overrightarrow{A_0A_1} = \overrightarrow{A_0A_i} + \overrightarrow{A_iA_1} = -\overrightarrow{A_iA_0} + \overrightarrow{A_iA_1},$$

$$\overrightarrow{A_0A_2} = \overrightarrow{A_0A_i} + \overrightarrow{A_iA_2} = -\overrightarrow{A_iA_0} + \overrightarrow{A_iA_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overrightarrow{A_0A_i} = -\overrightarrow{A_iA_0},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overrightarrow{A_0A_k} = \overrightarrow{A_0A_i} + \overrightarrow{A_iA_k} = -\overrightarrow{A_iA_0} + \overrightarrow{A_iA_k}.$$

Аналогічно доводимо, що й усі вектори системи (1.34) лінійно виражаються через вектори системи (1.35), тобто ці системи векторів еквівалентні. Оскільки система векторів (1.35) лінійно незалежна, то й система векторів (1.34) також лінійно незалежна.

Таким чином, $\mathcal{L}(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k})$ утворює k-вимірний підпростір векторного простору V_n, який є напрямним для k-вимірної площини Π_k афінного простору $\mathcal{A}_n$ ($\Pi_k^0 = \mathcal{L}(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k})$), якщо за фіксовану точку взяти, наприклад, точку A_0. Площина Π_k є шуканою, тобто $A_0, A_1, \ldots, A_k \in \Pi_k$.

Така площина єдина. Справді, нехай площина $\tilde{\Pi}_k$ з напрямним підпростором $\tilde{\Pi}_k^0$ також містить точки $A_0, A_1, \ldots, A_k$. Тоді, за доведеним раніше, підпростір $\tilde{\Pi}_k^0$ містить систему лінійно незалежних векторів $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}$. Якщо в $\tilde{\Pi}_k^0$ базис утворюють вектори $\overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_k}$, то вказані системи векторів еквіваленті, тобто

$$\tilde{\Pi}_k^0 = \mathcal{L}(\overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_k}) = \mathcal{L}(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots \overrightarrow{A_0A_k}) = \Pi_k^0.$$

Звідси вже дістаємо, що $\Pi_k = \tilde{\Pi}_k$.

Зауваження 1.5. Наведемо деякі наслідки з доведеного твердження. Якщо, наприклад, $k = 2$, то дана властивість формулюється так: через довільні три точки A_0, A_1, A_2 афінного простору, які не лежать на одній прямій ($k - 1 = 1$), проходить єдина двовимірна площина.

Якщо $k = 1$, то маємо відому вже властивість: через довільні дві різні точки A_0, A_1 афінного простору проходить єдина пряма лінія.

4. Реалізувати 3-вимірний афінний простір $\mathcal{A}_3$ над числовим полем $P = \mathbb{Z}_2$. Знайти в $\mathcal{A}_3$: а) число всіх точок; б) число всіх прямих; в) число прямих, які проходять через одну точку; г) число всіх гіперплощин; д) число прямих, що лежать в одній гіперплощині; е) число прямих, паралельних даній площині.

Розв'язання. Передусім нагадаємо, що $\mathbb{Z}_2$ — це множина класів лишків за модулем 2. Будується $\mathbb{Z}_2$ так: на множині цілих чисел $\mathbb{Z}$ задається відношення еквівалентності $\equiv$: $a \equiv b$ тоді і тільки тоді, коли 2 ділить $a - b$. Клас еквівалентності, що містить a, позначається символом $\tilde{a}$. Сума та добуток класів визначається через їхніх представників: $\tilde{a} + \tilde{b} = \widetilde{a+b}$, $\tilde{a} \cdot \tilde{b} = \widetilde{a \cdot b}$. Легко бачити, що $\mathbb{Z}_2 = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$, клас еквівалентності $\tilde{0}$ містить всі цілі числа вигляду $2k$, $k \in \mathbb{Z}$; клас еквівалентності $\tilde{1}$ містить всі цілі числа вигляду $2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$; при цьому $\tilde{0} + \tilde{0} = \tilde{0}$, $\tilde{0} + \tilde{1} = \tilde{0} = \tilde{1} + \tilde{0} = \tilde{1}$, $\tilde{1} + \tilde{1} = \tilde{0}$, $\tilde{0} \cdot \tilde{0} = \tilde{0}$, $\tilde{0} \cdot \tilde{1} = \tilde{1} \cdot \tilde{0} = \tilde{0}$, $\tilde{1} \cdot \tilde{1} = \tilde{1}$. $\mathbb{Z}_2$ утворює числове поле відносно введених бінарних операцій. Надалі писатимемо: $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.

На множині $\mathbb{Z}_2^3 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ визначимо структуру векторного простору так. Кожний елемент із $\mathbb{Z}_2^3$, який надалі називатимемо вектором і позначатимемо символом $\overrightarrow{a}$ (або $\overrightarrow{b}$, або $\overrightarrow{c}$, ...), представляє собою впорядковану множину $\{a_1; a_2; a_3\}$ елементів із $\mathbb{Z}_2$. У множині $\mathbb{Z}_2^3$ операції додавання векторів та множення векторів на елементи поля $\mathbb{Z}_2$ визначимо так:

$$\forall \vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\} \in \mathbb{Z}_2^3 \ \forall \vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\} \in \mathbb{Z}_2^3 :$$

$$\vec{a} + \vec{b} := \{a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3\};$$

$$\forall \vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\} \in \mathbb{Z}_2^3 \ \forall t \in \mathbb{Z}_2 : \ t\vec{a} := \{ta_1; ta_2; ta_3\}.$$

Очевидно, що так визначені операції задовольняють всі аксіоми лінійного простору, тобто $\mathbb{Z}_2^3$ – векторний простір над полем $\mathbb{Z}_2$, який надалі позначатимемо символом V. Зрозуміло, що вектори $\vec{e_1} = \{1; 0; 0\}$, $\vec{e_2} = \{0; 1; 0\}$, $\vec{e_3} = \{0; 0; 1\}$ утворюють базис векторного простору V, тобто $\dim V = 3$.

За непорожню множину $\mathcal{A}$ візьмемо множину $\mathbb{Z}_2^3$, тобто вихідну множину $\mathbb{Z}_2^3$ без структури векторного простору, її елементи (точки) позначатимемо так:

$$A(a_1; a_2; a_3), \quad B(b_1; b_2; b_3), \ldots .$$

Кожній впорядкованій парі точок $\{A, B\} \subset \mathcal{A}$ поставимо у відповідність вектор

$$\overrightarrow{AB} = \{b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3\} \in V.$$

Отже, задано відображення f: $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$. З'ясуємо, чи задовольняє воно аксіоми афінного простору.

Для довільного $A(a_1; a_2; a_3) \in \mathcal{A}$ і довільного $\vec{v} = \{v_1; v_2; v_3\} \in V$ покладемо $B(a_1 + v_1; a_2 + v_2; a_3 + v_3)$, Тоді $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, тобто відображення f_A: $\mathcal{A} \to V$, яке діє за правилом $f_A(B) = f(A, B) = \overrightarrow{AB}$ є бієкцією. Таким чином, перша аксіома Вейля виконується. Нехай $A(a_1; a_2; a_3)$, $B(b_1; b_2; b_3)$, $C(c_1; c_2; c_3)$ – довільні точки з $\mathcal{A}$. Тоді

$$\overrightarrow{AB} = \{b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3\},$$

$$\overrightarrow{BC} = \{c_1 - b_1; c_2 - b_2; c_3 - b_3\},$$

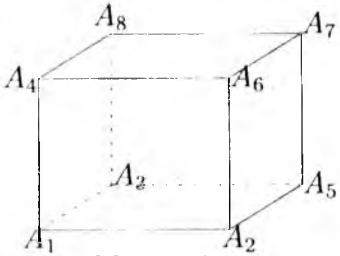
$$\overrightarrow{AC} = \{c_1 - a_1; c_2 - a_2; c_3 - a_3\}.$$

Отже, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, тобто друга аксіома Вейля також виконується і тому $\mathbb{Z}_2^3$ є тривимірним афінним простором $\mathcal{A}_3$ над векторним простором V над полем $\mathbb{Z}_2$.

Оскільки поле $\mathbb{Z}_2$ складається з двох елементів (0 або 1), а точки афінного простору $\mathcal{A}_3$ мають вигляд $A(a_1; a_2; a_3)$, де $a_i \in \mathbb{Z}_2$, $i = 1, 2, 3$, то у просторі $\mathcal{A}_3$ є всього вісім різних точок (див. Мал. 1.3): $A_1(0; 0; 0)$, $A_2(1; 0; 0)$, $A_3(0; 1; 0)$, $A_4(0; 0; 1)$, $A_5(1; 1; 0)$, $A_6(1; 0; 1)$, $A_7(1; 1; 1)$, $A_8(0; 1; 1)$. При цьому вектори $\vec{e_1} = \overrightarrow{A_1A_2}$, $\vec{e_2} = \overrightarrow{A_1A_3}$, $\vec{e_3} = \overrightarrow{A_1A_4}$ разом з точкою A_1 утворюють афінну систему координат в $\mathcal{A}_3$.

У афінному просторі через дві різні точки проходить єдина пряма лінія, тому число всіх прямих в $\mathcal{A}_3$ дорівнює $C_8^2 = 28$. Зазначимо, що пряма лінія в цьому просторі складається лише з **двох точок**.

Знайдемо число прямих, які проходять через одну точку. Якщо одна точка фіксується, то в $\mathcal{A}_3$ залишається ще 7 точок. Оскільки пара точок в $\mathcal{A}_3$ визначає пряму лінію, то різних прямих, які проходять через одну точку, є 7.



Мал. 1.3.

Площиною, відмінною від прямої лінії у даному афінному просторі є, очевидно, гіперплощина (двовимірна площина). Для того, щоб знайти число всіх гіперплощин в $\mathcal{A}_3$, розглянемо структуру одного з лінійних підпросторів розмірності 2 векторного простору V. Такий підпростір збігається з лінійною оболонкою $\mathcal{L}(\vec{a}, \vec{b})$ лінійно незалежних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$. За $\vec{a}$, $\vec{b}$ візьмемо, наприклад, такі вектори: $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2} = \{1; 0; 0\}$, $\vec{b} = \overrightarrow{A_1A_3} = \{0; 1; 0\}$. Розглянемо точки A_1, A_2, A_3. Очевидно, що вони не лежать на одній прямій, тому вони належать гіперплощині Π_2 афінного простору $\mathcal{A}_3$ (бо, як відомо, через три точки, які не лежать на одній прямій, проходить єдина двовимірна площина – гіперплощина у данному випадку). Точка A_5 також обов'язково належить до цієї гіперплощини, оскільки разом з векторами $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$ до напрямного підпростору $\Pi_2^0 = \mathcal{L}(\vec{a}, \vec{b})$ даної гіперплощини належить і вектор $\overrightarrow{A_1A_5} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3}$. Отже, гіперплощина Π_2 складається з чотирьох точок: A_1, A_2, A_3, A_5. Аналогічно розглядаються і інші випадки. Можна підрахувати, що всього у даному афінному просторі є 14 гіперплощин, причому в кожній гіперплощині лежить рівно $C_4^2 = 6$ прямих. Перерахуємо ці гіперплощини:

$$\{A_2, A_3, A_4, A_7\}, \quad \{A_1, A_5, A_6, A_8\}, \quad \{A_2, A_3, A_6, A_8\},$$

$$\{A_1, A_4, A_5, A_7\}, \quad \{A_2, A_4, A_5, A_8\}, \quad \{A_1, A_3, A_6, A_7\},$$

$$\{A_3, A_4, A_5, A_6\}, \quad \{A_1, A_2, A_7, A_8\}, \quad \{A_2, A_5, A_6, A_7\},$$

$$\{A_3, A_5, A_7, A_8\}, \quad \{A_4, A_6, A_7, A_8\}, \quad \{A_1, A_3, A_4, A_8\},$$

$$\{A_1, A_2, A_4, A_6\}, \quad \{A_1, A_2, A_3, A_5\}.$$

Число прямих, паралельних даній площині, також дорівнює 6. Через кожну точку проходить 7 площин. Наприклад, через точку A_1 проходять площини $\{A_1, A_2, A_3, A_5\}$, $\{A_1, A_2, A_4, A_6\}$, $\{A_1, A_2, A_7, A_8\}$, $\{A_1, A_3, A_4, A_8\}$, $\{A_1, A_3, A_6, A_7\}$, $\{A_1, A_4, A_5, A_7\}$, $\{A_1, A_5, A_6, A_8\}$. Нарешті, підрахуємо ще кількість прямих, які мимобіжні, наприклад, з прямою $\{A_4, A_8\}$. Для цього знайдемо всі прямі, які не перетинаються з даною прямою і не паралельні до неї. З малюнку 1.3 видно, що це такі прямі: $\{A_2, A_6\}$, $\{A_5, A_7\}$, $\{A_2, A_7\}$, $\{A_5, A_6\}$, $\{A_1, A_6\}$, $\{A_1, A_2\}$, $\{A_3, A_5\}$, $\{A_3, A_7\}$, $\{A_1, A_7\}$, $\{A_3, A_6\}$, $\{A_1, A_5\}$, $\{A_3, A_2\}$.

5. Знайти координатно-параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $B(6; 5; 1; -1)$ і перетинає площини Π_2 та Π_1:

$$\Pi_2 : \begin{cases} -x^1 + 2x^2 + x^3 = 1, \\ x^1 + x^4 = 1; \end{cases} \tag{1.36}$$

$$\Pi_1 : \begin{cases} x^1 = 4 + t, \\ x^2 = 4 + 2t, \\ x^3 = 5 + 3t, \\ x^4 = 4 + 4t, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.37}$$

Розв'язання. На прямій Π_1 візьмемо довільну точку $M_0(x_0^1; x_0^2; x_0^3; x_0^4)$ і запишемо координатно-параметричні рівняння прямої лінії в $\mathcal{A}_4$, яка проходить через точки B та M_0:

$$\begin{cases} x^1 = 6 + \gamma(x_0^1 - 6), \\ x^2 = 5 + \gamma(x_0^2 - 5), \\ x^3 = 1 + \gamma(x_0^3 - 1), \\ x^4 = -1 + \gamma(x_0^4 + 1), \ \gamma \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Оскільки координати точки M_0 задовольняють (1.37), то одержимо такі рівняння:

$$\begin{cases} x^1 = 6 + \gamma(t - 2), \\ x^2 = 5 + \gamma(2t - 1), \\ x^3 = 1 + \gamma(3t + 4), \\ x^4 = -1 + \gamma(4t + 5). \end{cases} \tag{1.38}$$

Далі знайдемо ті значення параметрів t і γ, при яких дана пряма перетинає площину Π_2. Це буде тоді і тільки тоді, коли після підстановки x^1, x^2, x^3, x^4 з (1.38) в (1.36), кожне з рівнянь в (1.36) перетворюється в рівність. Отже, для знаходження параметрів γ, t маємо таку систему:

$$\begin{cases} 6\gamma t + 4\gamma + 4 = 0, \\ 5\gamma t + 3\gamma + 4 = 0. \end{cases}$$

Легко бачити, що ця система має єдиний розв'язок: $\gamma = 2$, $t = -1$. Вказані значення γ, t визначають координати точки M_1 перетину прямої з площиною Π_2: $M_1(0; -1; 3; 1)$. Координати ж точки M_0 такі: $M_0(3; 2; 2; 0)$. Отже, шукана пряма задається такими координатно-параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x^1 = 6 - 3\gamma, \\ x^2 = 5 - 3\gamma, \\ x^3 = 1 + \gamma, \\ x^4 = -1 + \gamma, \ \gamma \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

6. Знайти координатно-параметричні рівняння площини в A_4, яка задана загальними рівняннями

$$\Pi_1 : \begin{cases} x^1 + x^2 - 2x^3 + 3x^4 = 1, \\ x^1 + 2x^2 - x^3 + 2x^4 = 3, \\ x^1 - x^2 - 4x^3 + 5x^4 = -3. \end{cases} \qquad (1.39)$$

Розв'язання. Передусім знайдемо ранг матриці A, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Застосувавши елементарні перетворення над матрицею A дістаємо, що

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

при цьому змінні x^1, x^2 є базисними, а змінні x^3, x^4 – вільними. За допомогою методу Гаусса послідовного виключення невідомих шукаємо загальний розв'язок (1.39):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x^2 = -x^3 + x^4 + 2, \\ x^1 = 3x^3 - 4x^4 - 1. \end{cases}$$

Змінні x^3, x^4 вважаємо параметрами, тобто

$$x^3 = t^1, \quad x^4 = t^2, \quad \{t^1, t^2\} \subset \mathbb{R}.$$

Отже, координатно-параметричні рівняння площини Π_1 мають вигляд:

$$\begin{cases} x^1 = -1 + 3t^1 - 4t^2, \\ x^2 = 2 - t^1 + t^2, \\ x^3 = t^1, \\ x^4 = t^2, \quad \{t^1, t^2\} \subset \mathbb{R}. \end{cases}$$

7. Знайти загальні рівняння площини в A_5, заданої координатно-параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x^1 = t^1 + t^2 + 2, \\ x^2 = 2t^1 + t^2 + 1, \\ x^3 = t^1 + 2t^2 - 3, \\ x^4 = 3t^1 + t^2 + 3, \\ x^5 = t^1 + 3t^2 + 1. \end{cases} \qquad (1.40)$$

Розв'язання. Оскільки

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

то в системі (1.40) виділимо дві підсистеми:

$$\begin{cases} x^1 = t^1 + t^2 + 2, \\ x^2 = 2t^1 + t^2 + 1; \end{cases} \qquad (1.41)$$

$$\begin{cases} x^3 = t^1 + 2t^2 - 3, \\ x^4 = 3t^1 + t^2 + 3, \\ x^5 = t^1 + 3t^2 + 1. \end{cases} \qquad (1.42)$$

Система (1.41) – система двох лінійних рівнянь відносно параметрів t^1, t^2:

$$\begin{cases} t^1 + t^2 = x^1 - 2, \\ 2t^1 + t^2 = x^2 - 1. \end{cases}$$

Оскільки визначник Δ цієї системи відмінний від нуля ($\Delta = -1$), то за формулами Крамера знаходимо

$$t^1 = -x^1 + x^2 + 1, \quad t^2 = 2x^1 - x^2 - 3.$$

Підставимо знайдені значення t^1, t^2 в рівняння системи (1.42); в результаті одержимо, що

$$\begin{cases} 3x^1 - x^2 - x^3 = 8, \\ x^1 - 2x^2 + x^4 = 3, \\ 5x^1 - 2x^2 - x^5 = 7. \end{cases} \tag{1.43}$$

(1.43) задає шукані загальні рівняння даної площини.

8. Знайти взаємне розміщення двох площин в A_5, якщо

$$\Pi_2 : \begin{cases} x^1 = x^2 = 1, \\ x^3 + x^4 = 5; \end{cases} \qquad \tilde{\Pi}_2 : \begin{cases} x^1 = 2 + t^1, \\ x^2 = 3, \\ x^3 = 3 + 2t^2, \\ x^4 = 4, \\ x^5 = 5 + t^1 + t^2. \end{cases}$$

Розв'язання. Виключимо параметри t^1 і t^2 з рівнянь площини $\tilde{\Pi}_2$: $t^1 = x^1 - 2$, $t^2 = \dfrac{x^3 - 3}{2}$. Отже, $\tilde{\Pi}_2$ має такі загальні рівняння

$$\begin{cases} x^2 = 3, \\ x^3 = 4, \\ 2x^1 + x^3 - 2x^5 = -3. \end{cases}$$

Розглянемо відповідну однорідну систему, складену з рівнянь, якими визначаються площини Π_2 і $\tilde{\Pi}_2$, і знайдемо ранг матриці, складеної з коефіцієнтів рівнянь цієї системи:

$$\begin{cases} x^1 = 0, \\ x^2 = 0, \\ x^3 + x^4 = 0, \\ 2x^1 + x^3 - 2x^5 = 0, \\ x^4 = 0. \end{cases}$$

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5.$$

Знаходимо ранг розширеної матриці, складеної з коефіцієнтів рівнянь відповідних неоднорідних систем, якими визначаються площини Π_2 і $\tilde{\Pi}_2$:

$$\operatorname{rang} A^* = \operatorname{rang} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) =$$

$$= \operatorname{rang} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) = \operatorname{rang} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = 6.$$

Оскільки $\operatorname{rang} A = 5 = n$, $\operatorname{rang} A^* = 6 = n + 1$, то площини Π_2 і $\tilde{\Pi}_2$ є мимобіжними.

9. Знайти взаємне розміщення площин в $\mathcal{A}_4$, заданих своїми загальними рівняннями:

$$\Pi_2 : \begin{cases} 3x^1 - 3x^3 - 2x^4 = 0, \\ 3x^2 + 3x^3 - x^4 = 0; \end{cases} \qquad \tilde{\Pi}_2 : \begin{cases} x^2 = 0, \\ 3x^3 - x^4 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Знаходимо ранги відповідно однорідної та неоднорідної системи рівнянь, якими визначаються площини Π_2 та $\tilde{\Pi}_2$:

$$\operatorname{rang} A \equiv \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3,$$

$$\operatorname{rang} A^* = \operatorname{rang} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) = 4.$$

Оскільки $\operatorname{rang} A = 3$, $\operatorname{rang} A^* = 4$, то площини паралельні в розумінні означення 1.3, ступінь паралельності цих площин $\dfrac{1}{2}$, бо $n - e + 1 = 4$, $n - e = 3$; $n = 4$, тоді $e = 1$, а $m = 2$.

10. Нехай F: $\mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$ – афінне перетворення. Довести, що якщо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{F(A)F(B)} = \overrightarrow{F(C)F(D)}$, $\{A, B, C, D\} \subset \mathcal{A}_n$.

Розв'язання. Припустимо, що прямі (A, B) та (C, D) не збігаються. Тоді, якщо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $(A, B) \parallel (C, D)$. Оскільки афінне перетворення переводить пару паралельних прямих у пару паралельних прямих (переконайтеся у

цьому самостійно), то $(F(A), F(B)) \parallel (F(C), F(D))$. Отже, $\overrightarrow{F(A)F(B)} = \lambda \overrightarrow{F(C)F(D)}$, де $\lambda \in \mathbb{R}$. З іншого боку, згідно з властивістю 3 з наслідків із аксіом Вейля, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ і, внаслідок аналогічних міркувань, $\overrightarrow{F(B)F(D)} = \mu \overrightarrow{F(A)F(C)}$, $\mu \in \mathbb{R}$. З урахуванням того, що

$$\overrightarrow{F(A)F(D)} = \overrightarrow{F(A)F(B)} + \overrightarrow{F(B)F(D)} =$$

$$= \lambda \overrightarrow{F(C)F(D)} + \mu \overrightarrow{F(A)F(C)},$$

та

$$\overrightarrow{F(A)F(D)} = \overrightarrow{F(A)F(C)} + \overrightarrow{F(C)F(D)},$$

дістаємо співвідношення:

$$(\lambda - 1)\overrightarrow{F(C)F(D)} + (\mu - 1)\overrightarrow{F(A)F(C)} = \vec{0}. \qquad (1.44)$$

Оскільки пряма $(F(A), F(B))$ паралельна прямій $(F(C), F(D))$, то вектори $\overrightarrow{F(A)F(C)}$ та $\overrightarrow{F(A)F(B)}$ неколінеарні. Тоді з (1.44) випливає, що $\lambda = \mu = 1$, тобто

$$\overrightarrow{F(A)F(B)} = \overrightarrow{F(C)F(D)}.$$

Якщо ж прямі (A, B) та (C, D) збігаються, то візьмемо точку $E \in \mathcal{A}_n$, яка не лежить на цих прямих і відкладемо від неї вектор $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB}$. Тоді, за доведеним,

$$\overrightarrow{F(A)F(B)} = \overrightarrow{F(E)F(G)}; \quad \overrightarrow{F(C)F(D)} = \overrightarrow{F(E)F(G)},$$

отже,

$$\overrightarrow{F(A)F(B)} = \overrightarrow{F(C)F(D)}.$$

11. Нехай F – афінне перетворення простору $\mathcal{A}_n$. Побудуємо відображення f: $V_n \to V_n$ за правилом:

$$\forall \overrightarrow{AB} \in V_n : f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{F(A)F(B)}.$$

Довести, що:
1) f - бієктивне відображення;
2) f – адитивне відображення, тобто

$$\forall\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\} \subset V_n : f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v});$$

2) f – однорідне відображення, тобто

$$\forall\lambda \in \mathbb{R} \quad \forall\overrightarrow{u} \in V_n : f(\lambda\overrightarrow{u}) = \lambda f(\overrightarrow{u}).$$

Розв'язання. 1) Передусім зазначимо, що відображення f визначено коректно в такому розумінні: геометричний вектор – це клас рівних між собою векторів, які можуть бути відкладені від довільної точки; якщо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то внаслідок прикладу 10

$$f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{F(A)F(B)} = \overrightarrow{F(C)F(D)} = f(\overrightarrow{CD}).$$

Доведемо бієктивність відображення f. Нехай $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{XY} \in V_n$ – довільний вектор. Внаслідок бієктивності відображення F однозначно визначені прообрази точок X та Y при цьому відображенні. Позначимо їх через A і B відповідно і нехай $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. Тоді, за означенням,

$$f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{F(A)F(B)} = \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{v},$$

що і доводить сюр'єктивність відображення f.

Якщо $f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{v})$, тобто $\overrightarrow{F(A)F(B)} = \overrightarrow{F(X)F(Y)}$, то застосувавши результат, одержаний при розв'язуванні прикладу 10 до афінного перетворення F^{-1} знайдемо, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XY}$, тобто $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$. Отже, відображення f є ін'єктивним, а значить, і бієктивним.

2) Нехай $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ – довільні вектори з простору V_n, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{v}$ відкладемо від точки B і нехай $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$. Тоді $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Отже

$$f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = f(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{F(A)F(C)},$$

$$f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{AB}) + f(\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{F(A)F(B)} + \overrightarrow{F(B)F(C)} = \overrightarrow{F(A)F(C)}.$$

Звідси вже дістаємо потрібне співвідношення

$$f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v}).$$

3) Доведемо, що

$$f(\lambda\overrightarrow{u}) = \lambda f(\overrightarrow{u}), \forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall\overrightarrow{u} \in V_n.$$

Зафіксуємо точку $O \in A_n$ і нехай $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OX}$, $\lambda\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OY}$. Тоді $\overrightarrow{OY} = \lambda\overrightarrow{OX}$, тобто точки O, X, Y лежать на одній прямій. Оскільки афінне перетворення відображає пряму в пряму, то точки $F(O)$, $F(X)$, $F(Y)$ також лежать на одній прямій. Отже,

$$\overrightarrow{F(O)F(Y)} = \mu\overrightarrow{F(O)F(X)}, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

тобто

$$f(\lambda\overrightarrow{u}) = f(\lambda\overrightarrow{OX}) = f(\overrightarrow{OY}) = \mu\overrightarrow{F(O)F(X)} = \mu f(\overrightarrow{u}). \tag{1.45}$$

Звідси випливає, що $\mu = \mu(\lambda)$; від $\overrightarrow{u}$ параметр μ не залежить.

Справді, нехай $\overrightarrow{v} \in V_n$ інший вектор, не колінеарний вектору $\overrightarrow{u}$. Нехай $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA}$ і $\lambda\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$. Тоді, як і раніше, $\overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{F(O)F(B)} = \nu\overrightarrow{F(O)F(A)}$, $\nu \in \mathbb{R}$. Отже, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BY} = \overrightarrow{OY}$,

$$\overrightarrow{YB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OY} = \lambda\overrightarrow{OA} - \lambda\overrightarrow{OX} = \lambda(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OX}) = \lambda\overrightarrow{XA}.$$

Звідси випливає паралельних прямих (Y, B) та (X, A), а отже, $(F(Y), F(B)) \parallel (F(X), F(A))$. Але тоді

$$\overrightarrow{F(Y)F(B)} = \alpha\overrightarrow{F(X)F(A)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Таким чином,

$$\nu\overrightarrow{F(O)F(A)} - \mu\overrightarrow{F(O)F(X)} = \overrightarrow{F(O)F(B)} - \overrightarrow{F(O)F(Y)} =$$

$$= \overrightarrow{F(Y)F(B)} = \alpha\overrightarrow{F(X)F(A)} = \alpha\overrightarrow{F(O)F(A)} - \alpha\overrightarrow{F(O)F(X)}.$$

Звідси випливає, що

$$(\nu - \alpha)\overrightarrow{F(O)F(A)} + (\mu - \alpha)\overrightarrow{F(O)F(X)} = \overrightarrow{0},$$

тобто

$$(\nu - \alpha)f(\overrightarrow{v}) + (\mu - \alpha)f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}.$$

Внаслідок лінійної незалежності векторів $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$, властивості 2), якою володіє відображення f та (1.45) дістаємо, що вектори $f(\overrightarrow{v})$ та $f(\overrightarrow{u})$ також лінійно незалежні, тобто $\mu = \nu = \alpha$.

Нехай тепер вектор $\overrightarrow{w}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC}$, $\lambda\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OD}$. Тоді, як і раніше, $\overrightarrow{OD} = \lambda\overrightarrow{OC}$ і, отже,

$$\overrightarrow{F(O)F(D)} = \beta\overrightarrow{F(O)F(C)}.$$

Міркуючи аналогічно попередньому знаходимо, що $\beta = \nu$, тоді $\beta = \mu$ за доведеним.

Отже, $\mu = \mu(\lambda)$. Вивчимо властивості цієї функції. Нехай λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{u} \in V_n$. Тоді

$$\mu(\lambda_1 + \lambda_2)f(\overrightarrow{u}) = f((\lambda_1 + \lambda_2)\overrightarrow{u}) = f(\lambda_1\overrightarrow{u} + \lambda_2\overrightarrow{u}) =$$

$$f(\lambda_1\overrightarrow{u}) + f(\lambda_2\overrightarrow{u}) = \mu(\lambda_1)f(\overrightarrow{u}) + \mu(\lambda_2)f(\overrightarrow{u}) =$$

$$= (\mu(\lambda_1) + \mu(\lambda_2))f(\overrightarrow{u}).$$

Внаслідок довільності у виборі вектора $\overrightarrow{u} \in V_n$ твердимо, що

$$\mu(\lambda_1 + \lambda_2) = \mu(\lambda_1) + \mu(\lambda_2), \quad \{\lambda_1, \lambda_2\} \subset \mathbb{R}. \qquad (1.46)$$

Аналогічно доводимо, що

$$\mu(\lambda_1\lambda_2)f(\overrightarrow{u}) = f((\lambda_1\lambda_2)\overrightarrow{u}) = f(\lambda_1(\lambda_2\overrightarrow{u})) =$$

$$\mu(\lambda_1)f(\lambda_2\overrightarrow{u}) = \mu(\lambda_1)\mu(\lambda_2)f(\overrightarrow{u}),$$

тобто

$$\mu(\lambda_1\lambda_2) = \mu(\lambda_1)\mu(\lambda_2), \quad \{\lambda_1, \lambda_2\} \subset \mathbb{R}. \qquad (1.47)$$

Співвідношення (1.46), (1.47) показують, що відображення μ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є **автоморфізмом поля дійсних чисел**.

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $\mu(1) = 1$, то

$$\mu(n) = \mu(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n}) = \underbrace{\mu(1) + \ldots + \mu(1)}_{n} = n; \qquad (1.48)$$

$$1 = \mu(1) = \mu\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n}\right) = \underbrace{\mu\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)}_{n} = n\mu\left(\frac{1}{n}\right),$$

тобто $\mu\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$. З урахуванням (1.48) дістаємо, що

$$\mu\left(\frac{m}{n}\right) = m\mu\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}; \quad \{m, n\} \subset \mathbb{N}. \qquad (1.49)$$

Таким чином, якщо $q = \frac{m}{n}$ - довільне додатне раціональне число, то внаслідок (1.49), $\mu(q) = q$. Якщо ж $q < 0$, то число $-q$ додатне, і

$$\mu(q) = \mu((-1)(-q)) = \mu(-1)\mu(-q) = (-1)(-q) = q.$$

Отже, звуження відображення μ на множину раціональних чисел є тотожним перетворенням.

Нехай $\lambda \in \mathbb{R}$ – довільне додатне дійсне число. Тоді

$$\mu(\lambda) = \mu(\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda}) = \mu(\sqrt{\lambda})\mu(\sqrt{\lambda}) = \mu(\sqrt{\lambda})^2 > 0.$$

Отже, якщо $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$; $\lambda_1 > \lambda_2$, то $\lambda_1 - \lambda_2 > 0$, звідки

$$\mu(\lambda_1) - \mu(\lambda_2) = \mu(\lambda_1 - \lambda_2) > 0,$$

тобто

$$\mu(\lambda_1) > \mu(\lambda_2), \quad \lambda_1 > \lambda_2.$$

Таким чином, $\mu = \mu(\lambda)$ – монотонно зростаюча функція.

З урахуванням цих обставин розглянемо n-е раціональне наближення довільного дійсного числа λ, тобто знайдемо таке ціле число m, що $\frac{m}{n} < \lambda < \frac{m+1}{n}$. Тоді, за доведеним

$$\frac{m}{n} = \mu\left(\frac{m}{n}\right) < \mu(\lambda) < \mu\left(\frac{m+1}{n}\right) = \frac{m+1}{n},$$

тобто $|\lambda - \mu(\lambda)| < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Звідси випливає, що $\mu(\lambda) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. З урахуванням (1.45) маємо, що $f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$, $\forall\vec{u} \in V_n$.

Зауваження 1.6. Кожне афінне перетворення афінного простору породжує перетворення простору паралельних перенесень, яке є **лінійним**. Із співвідношення $\mu(\lambda) = \lambda$ випливає такий алгебраїчний факт: **група автоморфізмів поля дійсних чисел тривіальна, тобто складається лише з тотожного перетворення.**

Зауваження 1.7. Якщо афінне перетворення F у декартовій системі координат $R = \{o, \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ задано формулами

$$x^{J'} = a^J_K x^K + a^J, \quad \det(a^J_K) \neq 0,$$

то перетворення f векторного простору V_n у базисі $\{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ визначається формулами

$$x^{J'} = a^J_K x^K, \quad \det(a^J_K) \neq 0$$

12. Нехай A, B, C – три точки прямої в $\mathcal{A}_n$. Простим відношенням впорядкованої трійки точок A, B, C прямої в $\mathcal{A}_n$ називається число λ: $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$, яке позначається символом $(A, B; C)$. Довести, що афінне перетворення не змінює простого відношення трьох точок прямої в $\mathcal{A}_n$.

Розв'язання. При будь-якому афінному перетворенні F пряма Π_1 відображається на пряму Π'_1. Отже, впорядкована трійка A, B, C точок прямої відображається на впорядковану трійку A', B', C' точок прямої. Нехай f – лінійне перетворення простору V_n, яке породжується афінним перетворенням F. Оскільки $F(A) = A'$, $F(B) = B'$, $F(C) = C'$, то

$$f(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{F(A)F(C)} = \overrightarrow{A'C'}, \quad f(\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{F(C)F(B)} = \overrightarrow{C'B'}.$$

Якщо $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$, то

$$f(\overrightarrow{AC}) \equiv \overrightarrow{A'C'} = f(\lambda\overrightarrow{CB}) = \lambda f(\overrightarrow{CB}) = \lambda\overrightarrow{C'B'},$$

тобто $\overrightarrow{A'C'} = \lambda\overrightarrow{C'B'}$. Цим доведено, що $(A, B; C) = (A', B'; C')$.

13. Довести, що серед всіх векторів лінійного підпростору L векторного евклідового простору E_n найменший кут із заданим вектором $\vec{x} \in E_n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{x} \notin L^{\perp}$, утворює його ортогональна проекція $\vec{y} \in L$. При цьому рівність $\cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y'}})$, $y' \in L$, має місце тоді і тільки тоді, коли $\vec{y'} = \alpha\vec{y}$, де $\alpha > 0$.

Розв'язання. Вектор $\vec{x} \neq \vec{0}$ подамо у вигляді $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, $\vec{y} \in L$, $\vec{y} \neq \vec{0}$, $\vec{z} \in L^{\perp}$, $(\vec{z}, \vec{y}) = 0$ і доведемо, що $\vec{x}$ та $\vec{y}$ утворюють між собою кут, який змінюється в межах від 0 до $\frac{\pi}{2}$. Справді,

$$\cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = \frac{(\vec{y} + \vec{z}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = \frac{(\vec{y}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} =$$

$$= \frac{\|\vec{y}\|^2}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = \frac{\|\vec{y}\|}{\|\vec{x}\|}, \quad \vec{y} \neq \vec{0}.$$

Оскільки $\|\vec{x}\|^2 = \|\vec{y}\|^2 + \|\vec{z}\|^2$, то $\|\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\|$. Отже, $0 \leq \frac{\|\vec{y}\|}{\|\vec{x}\|} \leq 1$, причому $\frac{\|\vec{y}\|}{\|\vec{x}\|} = 1$, якщо $\vec{y} = \vec{x}$, тобто $\vec{x} \in L$ і, фактично, $\frac{\|\vec{y}\|}{\|\vec{x}\|} \neq 0$, бо тоді $\vec{y} = \vec{0}$, тобто $\vec{x} = \vec{z} \in L^{\perp}$, що суперечить умові задачі. Звідси випливає, що $(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

Далі, для довільного ненульового вектора $\vec{y'} \in L$ маємо

$$\cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}'}) = \frac{(\vec{x}, \vec{y'})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}'\|} = \frac{(\vec{y} + \vec{z}, \vec{y'})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}'\|} = \frac{(\vec{y}, \vec{y'})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}'\|}.$$

Оскільки

$$(\vec{y}, \vec{y'}) = \|\vec{y}\| \cdot \|\vec{y'}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{y}, \vec{y'}}), \quad \vec{y} \neq \vec{0},$$

то

$$\cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y'}}) = \frac{\|\vec{y}\| \cdot \|\vec{y'}\|}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}'\|} \cos(\widehat{\vec{y}, \vec{y'}}) = \frac{\|\vec{y}\|}{\|\vec{x}\|} \cos(\widehat{\vec{y}, \vec{y'}}) =$$

$$= \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) \cdot \cos(\widehat{\vec{y}, \vec{y'}})$$

Проаналізуємо останнє співвідношення. За доведеним раніше, $0 \leq \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) \leq 1$. Отже, якщо $0 \leq \cos(\widehat{\vec{y}, \vec{y'}}) \leq 1$, то

$$0 \leq \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y'}}) \leq \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}). \tag{1.50}$$

Функція $y = \cos\omega$ на проміжку $[0, \pi]$ монотонно спадає, тому з (1.50) випливає, що $(\widehat{\vec{x}, \vec{y'}}) \geq (\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$.

Якщо ж $-1 \leq \cos(\widehat{\vec{y}, \vec{y'}}) \leq 0$, то $\cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y'}}) \leq 0$, тому $\cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y'}}) \leq \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$. Отже, $(\widehat{\vec{x}, \vec{y'}}) \geq (\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$, що й потрібно було довести.

Якщо $\vec{y'} = \alpha\vec{y}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$, де $\alpha > 0$, то

$$\cos(\widehat{\vec{y}, \vec{y'}}) = \frac{(\vec{y}, \vec{y'})}{\|\vec{y}\| \cdot \|\vec{y'}\|} = \frac{(\vec{y}, \alpha\vec{y})}{\|\vec{y}\| \cdot \|\alpha\vec{y}\|} = \frac{\alpha\|\vec{y}\|^2}{\alpha\|\vec{y}\|^2} = 1.$$

Отже, у цьому випадку $\cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y'}}) = \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$.

Навпаки, нехай $\cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y'}})$, тобто $\cos(\widehat{\vec{y}, \vec{y'}}) = 1$. Тоді кут між векторами $\vec{y}$ та $\vec{y'}$ дорівнює нулю. Іншими словами, вектори $\vec{y}$ і $\vec{y'}$ колінеарні і однаково направлені; тоді існує $\alpha > 0$ таке, що $\vec{y'} = \alpha\vec{y}$.

14. Нехай Π_{n-1} – гіперплощина в $\mathcal{E}_n$, $A \in \mathcal{E}_n$, $A \notin \Pi_{n-1}$, Π_1 – ортогональна до Π_{n-1} пряма, яка проходить через точку A, A' – проекція точки A на гіперплощину Π_{n-1}. Довести, що

$$\rho(A, \Pi_{n-1}) = \frac{|(\overrightarrow{A'A}, \vec{a})|}{\|\vec{a}\|},$$

де $\vec{a} \neq \vec{0}$ – довільний вектор з напрямного підпростору Π_1^0.

Розв'язання. Вектори $\vec{a}$ та $\overrightarrow{A'A}$ ортогональні до напрямного підпростору Π_{n-1}^0, тобто вони колінеарні. Отже,

$$(\overrightarrow{A'A}, \vec{a}) = \|\overrightarrow{A'A}\| \cdot \|\vec{a}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{A'A}, \vec{a}}) = \pm\|\overrightarrow{A'A}\| \cdot \|\vec{a}\|.$$

Але, за означенням, $\|\overrightarrow{A'A}\| = \rho(A, \Pi_{n-1})$. Тоді

$$\rho(A, \Pi_{n-1}) = \frac{|(\overrightarrow{A'A}, \vec{a})|}{\|\vec{a}\|}.$$

Якщо взяти будь-який інший вектор $\vec{b} \in \Pi_1^0$, $\vec{b} \neq \vec{a}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, то міркуючи аналогічно встановимо, що

$$\rho(A, \Pi_{n-1}) = \frac{|(\overrightarrow{A'A}, \vec{b})|}{\|\vec{b}\|}.$$

Але в одновимірному підпросторі Π_1^0 вектор $\vec{b} \neq \vec{0}$ має вигляд $\vec{b} = \lambda_1 \vec{e}$, де $\lambda_1 \neq 0$, $\vec{e}$ – базисний вектор в Π_1^0. Аналогічно, $\vec{a} = \lambda_2 \vec{e}$, де $\lambda_2 \neq 0$. Отже, $\vec{b} = \lambda_3 \vec{a}$, де $\lambda_3 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Тоді, скориставшись властивостями скалярного добутку векторів та довжини вектора знаходимо, що

$$\rho(A, \Pi_{n-1}) = \frac{(|\overrightarrow{A'A}, \vec{b})|}{\|\vec{b}\|} = \frac{|(\overrightarrow{A'A}, \lambda_3 \vec{a})|}{\|\lambda_3 \vec{a}\|} =$$

$$= \frac{|\lambda_3| \cdot |(\overrightarrow{A'A}, \vec{a})|}{|\lambda_3| \cdot \|\vec{a}\|} = \frac{|(\overrightarrow{A'A}, \vec{a})|}{\|\vec{a}\|}.$$

Таким чином, $\rho(A, \Pi_{n-1})$ не залежить від вибору вектора $\vec{a} \in \Pi_1^0$, що й потрібно було довести.

Якщо $a_J x^J + a_0 = 0$ рівняння гіперплощини Π_{n-1}, $A(x_0^1, \ldots, x_0^n)$, $A'(x_0^{1'}, \ldots, x_0^{n'})$, то $\overrightarrow{A'A} = \{x_1^1 - x_0^{1'}; \ldots; x_0^n - x_0^{n'}\}$ і

$$\rho(A, \Pi_{n-1}) = \frac{|(\{x_0^{\prime} - x_0^{1'}; \ldots; x_0^n - x_0^{n'}\}, \{a_1; \ldots; a_n\})|}{\|\vec{a}\|} =$$

$$= \frac{|a_J x_0^J - a_J x'^J_0|}{\|\vec{a}\|} = \frac{|a_J x_0^J + a_0|}{\|\vec{a}\|} = \frac{|a_0 x_0^1 + \ldots + a_n x_0^n + a_0|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}},$$

$$\vec{a} = \{a_1; \ldots; a_n\}, \quad \vec{a} \perp \Pi_{n-1}^0$$

(тут враховано те, що $a_J x'^J_0 = -a_0$, бо координати точки A' задовольняють рівняння гіперплощини Π_{n-1}). Отже,

$$\rho(A, \Pi_{n-1}) = \frac{|a_J x_0^J + a_0|}{\|\vec{a}\|}.$$

15. Скласти рівняння площини, ортогональної до даної, яка проходить через точку $M_0(0; 1; -1; 0)$, якщо

$$\Pi_1 : \begin{cases} 2x^1 + x^2 + 3x^3 - x^4 = 0, \\ 3x^1 + 2x^2 + x^4 = 0, \\ 3x^1 + x^2 + 9x^3 - x^4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо базис в Π_1^0. Оскільки

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 9 & -1 \end{pmatrix} = 3,$$

то $n - r = 1$, тобто фундаментальна система містить один розв'язок. Знайдемо його за допомогою методу Гаусса послідовного виключення невідомих:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -9/2 & 4 & 0 \\ 0 & -1/2 & 9/2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & 3/2 & - & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \end{array}\right).$$

Звідси

$$\begin{cases} x^4 = 0, \\ x^2 = 9x^3, \\ x^1 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 = 0, \\ x^3 = 1, \\ x^2 = 9, \\ x^1 = -6. \end{cases}$$

Отже, $\vec{a} = \{-6; 9; 1; 0\}$, $\Pi_1^0 = \mathcal{L}(\vec{a})$. Відзначимо, що Π_1 1-площина або пряма лінія, яка проходить через точку O полюс, тому $\vec{a}$ є напрямним вектором для даної прямої.

Складемо рівняння площини Π_3, яка проходить через точку $M_0(0; 1; -1; 0)$ ортогонально до Π_1. Нехай

$M(y^1;y^2;y^3;y^4) \in \Pi_3$. Тоді вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{y^1;y^2-1;y^3+1;y^4\}$ ортогональний до $\vec{a}$. Отже, рівняння гіперплощини Π_3 є таким:

$$(\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow -6y^1 + 9(y^2-1) + (y^3+1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6y^1 - 9y^2 - y^3 - 8 = 0.$$

16. Знайти віддаль від точки $M_0(4;-1;-3;4)$ до площини

$$\Pi_1: \begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 1, \\ x^1 + 2x^2 + 2x^3 - x^4 = 2, \\ x^1 + 2x^3 + 3x^4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо точку $M_0' \in \Pi_1$, яка є проекцією точки M_0 на площину Π_1. Віддаль між точками M_0 і M_0' буде шуканою віддаллю від точки M_0 до Π_1. Оскільки вектори

$$\vec{n_1} = \{1;1;1;1\}, \quad \vec{n_2} = \{1;2;2;-1\}, \quad \vec{n_3} = \{1;0;2;3\}$$

ортогональні до напрямного підпростору Π_1^0, то вони лежать у напрямного підпросторі Π_3^0 площини Π_3, яка проходить через точку M_0 і ортогональна до площини Π_1. Отже, $\Pi_3^0 = \mathcal{L}(\vec{n_1}, \vec{n_2}, \vec{n_3})$.

Знайдемо базис в Π_1^0. Оскільки

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3,$$

то $n - r = 1$, тобто фундаментальна система розв'язків містить лише один розв'язок . Знайдемо його. Для цього розглянемо таку систему:

$$\begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 = -x^4, \\ x^2 + x^3 = 2x^4, \\ -x^2 + x^3 = -2x^4. \end{cases}$$

Поклавши $x^4 = 1$ знаходимо, що $x^1 = -3$, $x^2 = 2$, $x^3 = 0$. Отже, $\vec{a} = \{-3;2;0;1\}$. Таким чином, $\Pi_0^1 = \mathcal{L}(\vec{a})$.

Нехай $M_0'(x_0^1;x_0^2;x_0^3;x_0^4)$, тоді

$$\overrightarrow{M_0M_0'} = \{x_0' - 4; x_0^2 + 1; x_0^3 + 3; x_0^4 - 4\}.$$

Оскільки $M_0' \in \Pi_1$ і $\overrightarrow{M_0M_0'} \perp \Pi_1^0$, то

$$\begin{cases} x_0^1 + x_0^2 + x_0^3 + x_0^4 = 1, \\ x_0^1 + 2x_0^2 + 2x_0^3 - x_0^4 = 2, \\ x_0^1 + 2x_0^3 + 3x_0^4 = 0, \\ -3(x_0^1 - 4) + 2(x_0^2 + 1) + x_0^4 - 4 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^1 + 2x_0^2 + 3x_0^4 = 0, \\ 3x_0^1 - 2x_0^2 - x_0^4 = 10, \\ x_0^2 + x_0^3 - 2x_0^4 = 1, \\ x_0^1 + x_0^2 + x_0^3 + x_0^4 = 1. \end{cases}$$

Розв'яжемо останню систему рівнянь методом Гаусса:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -14 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Звідси дістаємо, що

$$\begin{cases} x_0^3 = 0, \\ -14x_0^4 = 12, \\ -x_0^2 + 2x_0^4 = -1, \\ x_0^1 + x_0^2 + x_0^3 + x_0^4 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3 = 0, \\ x_0^4 = -\frac{6}{7}, \\ x_0^2 = 1 - 2\frac{6}{7} = -\frac{5}{7}, \\ x_0^1 = 1 + \frac{5}{7} + \frac{6}{7} = \frac{18}{7}. \end{cases}$$

Отже, шукана точка M_0' є такою: $M_0'\left(\frac{18}{7}; -\frac{5}{7}; 0; -\frac{6}{7}\right)$. Тоді

$$\rho(M_0, M_0') = \sqrt{\left(\frac{10}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + 9 + \left(\frac{34}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{1701}{7^2}} = \sqrt{\frac{243}{7}}.$$

17. Знайти віддаль між двома площинами, якщо вони задані рівняннями:

а) $\Pi_1 : \begin{cases} x^1 + x^2 + 2x^3 = 1, \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 = 0; \end{cases}$

$\tilde{\Pi}_1 : \begin{cases} 2x^1 + x^2 + x^3 = 1, \\ x^1 + 4x^2 + 2x^3 = 0; \end{cases}$

б) Π_2: $\vec{x} = \vec{a_1}t_1 + \vec{a_2}t_2 + \vec{x_1}$; $\tilde{\Pi}_2$: $\vec{x} = \vec{a_3}t_1 + \vec{a_4}t_2 + \vec{x_2}$, **де** $\vec{a_1} = \{1; 2; 2; 2\}$, $\vec{a_2} = \{2; -2; 1; 2\}$, $\vec{a_3} = \{2; 0; 2; 1\}$, $\vec{a_4} = \{1; -2; 0; -1\}$, $\vec{x_1} = \{4; 5; 3; 2\}$, $\vec{x_2} = \{1; -2; 1; -3\}$.

Розв'язання. а) Передусім знайдемо базис в Π_1^0 і $\tilde{\Pi}_1^0$:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 2,$$

$n - r = 1$, тому базис в Π_1^0 складається з одного вектора

$$\begin{cases} x^1 + x^2 = -2x^3, \\ x^1 + 2x^2 = -3x^3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = -1, \\ x^2 = -1, \\ x^3 = 1. \end{cases}$$

Отже, $\vec{a_1} = \{-1; -1; 1\}$. Аналогічно,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 2,$$

тоді базис в $\tilde{\Pi}_1^0$ також складається з одного вектора

$$\begin{cases} 2x^1 + x^2 = -x^3, \\ x^1 + 4x^2 = -2x^3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = -2, \\ x^2 = -3, \\ x^3 = 7. \end{cases}$$

Отже, $\vec{a_2} = \{-2; -3; 7\}$. Аналогічно знаходимо точки $M_1 \in \Pi_1$ і $M_2 \in \tilde{\Pi}_1$: $M_1(2; -1; 0)$, $M_2(\frac{4}{7}; -\frac{1}{7}; 0)$. Тому $\overrightarrow{M_1M_2} = \left\{-\frac{10}{7}; \frac{6}{7}; 0\right\}$.

Знайдемо ортогональну складову $\vec{y}$ вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ відносно простору $\Pi_e^0 = \mathcal{L}(\vec{a_1}, \vec{a_2})$. Оскільки

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix} = 2,$$

то базис в $\mathcal{L}$ складається з двох векторів $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, тобто

$$\vec{y} = c_1\vec{a_1} + c_2\vec{a_2}.$$

Обчислимо коефіцієнти c_1, c_2:

$$\begin{cases} (\vec{a_1}, \vec{a_1})c_1 + (\vec{a_1}, \vec{a_2})c_2 = (\vec{a_1}, \overrightarrow{M_1M_2}), \\ (\vec{a_2}, \vec{a_1})c_1 + (\vec{a_2}, \vec{a_2})c_2 = (\vec{a_2}, \overrightarrow{M_1M_2}). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3c_1 + 12c_2 = \frac{4}{7}, \\ 12c_1 + 62c_2 = \frac{2}{7}. \end{cases}$$

Звідси дістаємо, що $c_1 = \frac{16}{21}$, $c_2 = -\frac{1}{7}$. Отже, ортогональна проекція має вигляд:

$$\vec{y} = \frac{16}{21}\{-1; -1; 1\} - \frac{1}{7}\{-2; -3; 7\} = \left\{-\frac{10}{21}; -\frac{1}{3}; -\frac{5}{21}\right\}.$$

Тоді

$$\vec{z} = \overrightarrow{M_1M_2} - \vec{y} = \left\{-\frac{10}{7}; \frac{6}{7}; 0\right\} - \left\{-\frac{10}{21}; -\frac{1}{3}; -\frac{5}{21}\right\} =$$

$$= \left\{-\frac{20}{21}; \frac{25}{21}; \frac{5}{21}\right\},$$

$$\|\vec{z}\| = \rho(\Pi_1, \tilde{\Pi}_1) = \sqrt{\frac{400 + 625 + 25}{21^2}} = \sqrt{\frac{50}{21}}.$$

б) Маємо

$$\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1} = \{-3; -7; -2; -5\}.$$

Знайдемо ортогональну складову $\overrightarrow{y}$ вектора $\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1}$ відносно підпростору $\Pi_l^0 = \mathcal{L}(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4})$. Оскільки

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -2 & -3 \end{pmatrix} = 3,$$

та базис в $\mathcal{L}$ складається з трьох векторів $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$. Тоді

$$\overrightarrow{y} = c_1\overrightarrow{a_1} + c_2\overrightarrow{a_2} + c_3\overrightarrow{a_3}.$$

Обчислимо коефіцієнти c_1, c_2, c_3:

$$\begin{cases} (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_1})c_1 + (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})c_2 + (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_3})c_3 = (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1}), \\ (\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_1})c_1 + (\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_2})c_2 + (\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3})c_3 = (\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1}), \\ (\overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_1})c_1 + (\overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_2})c_2 + (\overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_3})c_3 = (\overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1}). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13c_1 + 4c_2 + 8c_3 = -31, \\ 4c_1 + 13c_2 + 8c_3 = -4, \\ 8c_1 + 8c_2 + 9c_3 = -15. \end{cases}$$

Коефіцієнти c_1, c_2, c_3 знайдемо користуючись методом Гаусса послідовного виключення невідомих:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 13 & 4 & 8 & -31 \\ 4 & 13 & 8 & -4 \\ 8 & 8 & 9 & -15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 13 & 4 & 8 & -31 \\ 9 & -9 & 0 & -27 \\ -18 & 0 & -7 & -47 \end{array}\right).$$

Отже,

$$\begin{cases} c_2 = c_1 + 3, \\ c_3 = -\frac{18}{7}c_1 - \frac{47}{7}, \\ 13c_1 + 4c_2 + 8c_3 = -31. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -3, \\ c_2 = 0, \\ c_3 = 1. \end{cases}$$

Тоді

$$\overrightarrow{y} = -3\{1; 2; 2; 2\} + \{2; 0; 2; 1\} = \{-1; -6; -4; -5\}.$$

Ортогональна складова є такою:

$$\overrightarrow{z} = (\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1}) - \overrightarrow{y} = \{-3; -7; -2; -5\} - \{-1; -6; -4; -5\} =$$
$$= \{-2; -1; 2; 0\},$$

тобто $\|\overrightarrow{z}\| = \sqrt{4+1+4} = 3$.

Відповідь: віддаль між площинами Π_2 та $\bar{\Pi}_2$ дорівнює 3.

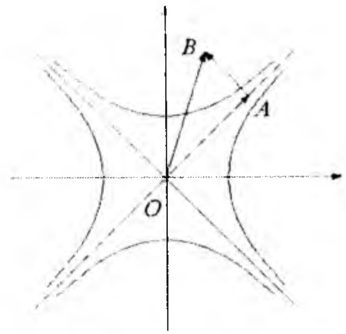
18. Переконатися, що на площині $\mathcal{E}_{2,1}$ нерівність трикутника для метрики (віддалі) не виконується.

Розв'язання. Розглянемо трикутник OAB (Мал. 1.4), де вектори $\overrightarrow{OA}$ та $\overrightarrow{AB}$ є ізотропними (вони паралельні асимптотам гіпербол). Очевидно, що

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB},$$

при цьому $\|\overrightarrow{OA}\| = 0$, $\|\overrightarrow{AB}\| = 0$, $\|\overrightarrow{OB}\| > \|\overrightarrow{OA}\| + \|\overrightarrow{AB}\|$, або у термінах віддалі,

$$\rho(O, B) > \rho(O, A) + \rho(A, B).$$



Мал. 1.4.

19. Нехай $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ – ізотропні вектори, ортогональні в $E_{2,1}$. З'ясувати зміст ортогональності цих векторів з точки зору евклідової геометрії.

Розв'язання. Нехай $\overrightarrow{x} = \{x^0; x^1\}$, $\overrightarrow{y} = \{y^0, y^1\}$. Оскільки

$$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = -x^0y^0 + x^1y^1 = 0,$$

то

$$(-(x^0)^2 + (x^1)^2)(-(y^0)^2 + (y^1)^2) = -(x^1y^0 - x^0y^1)^2,$$

або $\|\overrightarrow{x}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{y}\|^2 = -(x^1y^0 - x^0y^1)^2 < 0$, тобто $\|\overrightarrow{x}\|^2$ та $\|\overrightarrow{y}\|^2$ – числа різних знаків: якщо один із векторів $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ має в метриці $E_{2,1}$ дійсну норму, то інший – уявну. У евклідовому сенсі це означає, що вектори $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ (або їхні продовження) перетинають різні гіперболи $-(x^0)^2 + (x^1)^2 = \pm 1$. Оскільки нас цікавлять лише напрями векторів $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що їхні кінці лежать на одиничному колі псевдоевклідової площини. Нехай, наприклад,

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 = 1, \quad -(y^0)^2 + (y^1)^2 = -1.$$

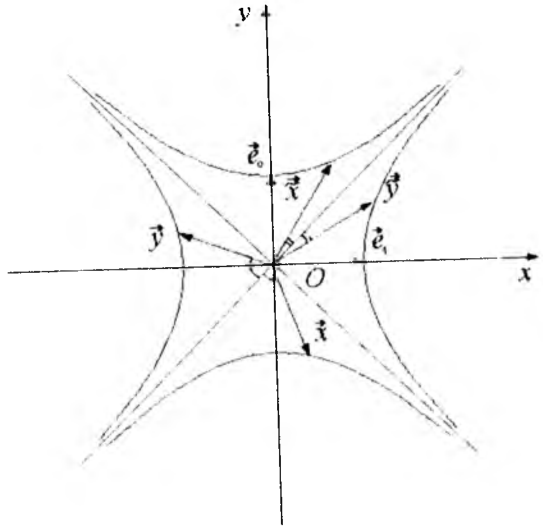
Якщо при цьому $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = -x^0y^0 + x^1y^0 = 0$, то

$$(y^0 - x^0)^2 - (y^1 - x^1)^2 = 0 \tag{1.51}$$

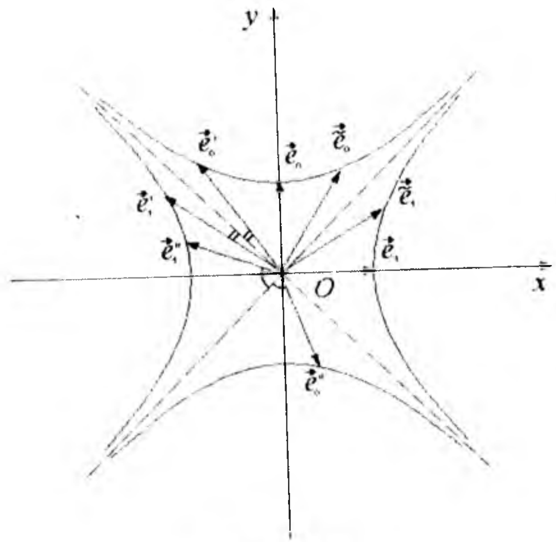
і навпаки. Із останнього співвідношення випливає, що $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 0$. Оскільки

$$\|\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}\|^2 = -(y^0 - x^0)^2 + (y^1 - x^1)^2,$$

то рівність (1.51) означає, що вектор $\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}$ ізотропний, тобто направлений по деякій координатній бісектрисі (асимптоті однієї із гіпербол). Це рівносильно тому, що вектори $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ симетричні відносно іншої бісектриси. Отже, вектори $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ ортогональні в сенсі скалярного добутку псевдоевклідового простору $E_{2,1}$ тоді і лише тоді, коли в сенсі евклідової геометрії вони розміщені на променях, симетричних відносно якої-небудь координатної бісектриси (Мал. 1.5). Зауважимо, що ізотропний вектор $\overrightarrow{x}$, розміщений на бісектрисі, ортогональний сам до себе, бо $\|\overrightarrow{x}\|^2 = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0$.



Мал. 1.5.



Мал. 1.6.

Зауваження 1.8. Викладене вище дозволяє дати евклідову характеристику базисів, ортонормованих у метриці площини $E_{2,1}$. А саме, довільний ортонормований базис складається з векторів $\vec{e_0}'$, $\vec{e_1}'$, кінці яких лежать на гіперболах $-(x^0)^2+(x^1)^2=\pm 1$, симетрично відносно однієї із спільних асимптот (Мал. 1.6).

20. Нехай $\{\vec{e_0},\vec{e_1}\}$ – ортонормований базис площини $E_{2,1}$. Знайти образ цього базису при перетворенні f (f – перетворення руху площини $E_{2,1}$; див. §1.3), якщо матрицею цього перетворення є матриця

$$A_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}, \quad \beta=\operatorname{th}\varphi, -\infty<\varphi<+\infty.$$

Розв'язання. Маємо, що

$$\vec{e_0}':=f(\vec{e_0})=\frac{\vec{e_0}}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{\beta\vec{e_1}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\vec{e_1}':=f(\vec{e_1})=-\frac{\beta\vec{e_0}}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{\vec{e_1}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Оскільки базис $\{\vec{e_0},\vec{e_1}\}$ є ортонормованим і в евклідовій метриці, то розглянемо скалярний добуток

$$(\vec{e_0}',\vec{e_0})=\frac{(\vec{e_0},\vec{e_0})}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}(\vec{e_1},\vec{e_0})=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}>0.$$

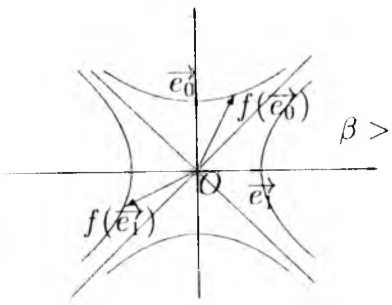
Отже, вектори $\vec{e_0}'$, $\vec{e_0}$ утворюють гострий кут. Аналогічно, якщо $\beta>0$, то

$$(\vec{e_0}',\vec{e_1})=\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}>0, \quad (\vec{e_1}',\vec{e_0})=-\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}<0,$$

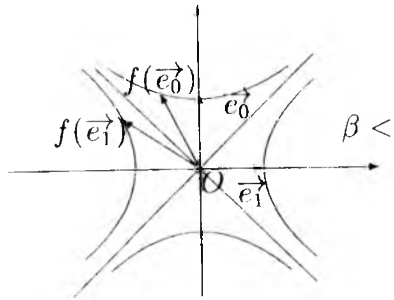
$$(\vec{e_1}',\vec{e_1})=-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}<0,$$

тобто вектори $\vec{e_0}'$, $\vec{e_1}$ утворюють гострий кут, вектори $\vec{e_1}'$, $\vec{e_0}$ – тупий кут, вектори $\vec{e_1}'$, $\vec{e_1}$ також утворюють тупий кут. Урахувавши ці обмеження, а також зауваження 1.8 до прикладу 19, робимо висновок, що кінець вектора $\vec{e_0}'=f(\vec{e_0})$ розміщується на тій же вітці, що і вектор $\vec{e_0}$; кінець вектора $\vec{e_1}'=f(\vec{e_1})$ розміщується на протилежній вітці тієї гіперболи, на якій лежить кінець вектора $\vec{e_1}$ (Мал. 1.7).

Якщо $\beta<0$, то $(\vec{e_0}',\vec{e_0})>0$, $(\vec{e_0}',\vec{e_1})<0$, $(\vec{e_1}',\vec{e_0})>0$, $(\vec{e_1}',\vec{e_1})<0$. У цьому випадку маємо розміщення векторів $f(\vec{e_0})$, $f(\vec{e_1})$, зображене на малюнку 1.8.



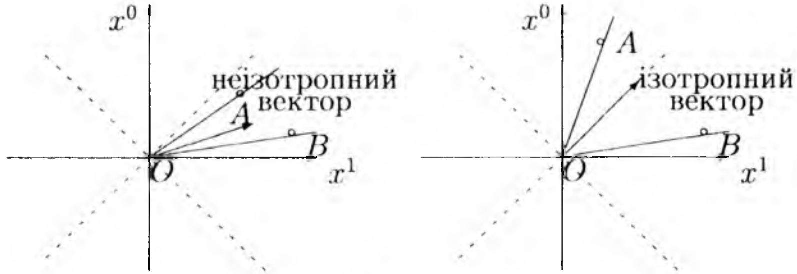
Мал. 1.7.



Мал. 1.8.

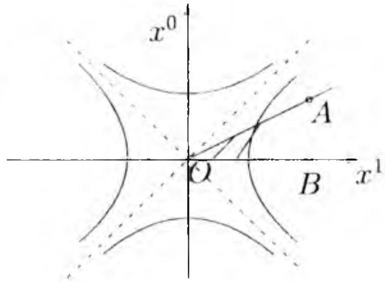
21. Кут на площині $\mathcal{E}_{2,1}$ називається допустимим, якщо довільний промінь з початком у вершині кута, який лежить в області цього кута, має неізотропний вектор (Мал. 1.9). Величиною допустимого кута в $\mathcal{E}_{2,1}$ називається число ψ, що дорівнює подвоєній площі сектора, який утворюється при перетині області цього кута з кругом одиничного або уявноодиничного радіуса з центром у вершині кута. Знайти зв'язок між величиною ψ допустимого кута та його радіанною мірою α відносно асоційованої евклідової

структури.



Мал. 1.9.

Розв'язання. Нехай $\angle AOB$ – допустимий кут в площині $\mathcal{E}_{2,1}$. Із означення випливає, що його область повністю міститься або в області U^+, або в області U^- (див. §1.3). Припустимо, для визначеності, що вона повністю міститься в області U^+. Виберемо



Мал. 1.10.

ортонормований репер $R = \{O, \overrightarrow{e_0}, \overrightarrow{e_1}\}$ в площині $\mathcal{A}_{2,1}$ так, щоб вектор $\overrightarrow{e_1}$ був напрямним вектором однієї із сторін кута, наприклад, променя $[O, A)$ (див. Мал. 1.10).

Знайдемо зв'язок між величиною допустимого кута та його радіанною мірою відносно асоційованої евклідової структури. Для цього введемо полярну систему координат $x^1 = \rho\cos\varphi$, $x^0 = \rho\sin\varphi$ (нагадаємо, що репер R є ортонормованим і відносно асоційованої евклідової структури). Внаслідок (1.19) рівняння одиничного кола γ в репері R має вигляд $-(x^0)^2 + (x^1)^2 = 1$ і, отже, в полярній системі

координат γ задається рівнянням

$$\rho^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}.$$

З урахуванням цього маємо, що

$$\psi = 2S_{\text{сект.}} = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^\alpha \rho^2 d\varphi = \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} = \int_0^\alpha \frac{1}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}\times$$

$$\times\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \int_0^\alpha \frac{d\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{2}\int_0^\alpha \frac{d\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi} + \frac{1}{2}\int_0^\alpha \frac{d\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{tg}\varphi) - \frac{1}{2}\ln(1-\operatorname{tg}\varphi)\Big|_0^\alpha = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}\right).$$

Розв'язуючи рівняння $\psi = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}\right)$ відносно $\operatorname{tg}\alpha$ одержимо, що

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{e^{2\psi}-1}{e^{2\psi}+1} = \frac{e^{\psi}-e^{-\psi}}{e^{\psi}+e^{-\psi}} = \operatorname{th}\psi \equiv \frac{\operatorname{sh}\psi}{\operatorname{ch}\psi}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Нехай $\mathcal{A}_n$ – n-вимірний афінний простір, $\{A, B, C, D\} \subset \mathcal{A}_n$. Довести, що різні точки A, B, C, D є вершинами паралелограма тоді і тільки тоді, коли їхні радіус-вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ задовольняють співвідношення

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}.$$

2. Множина точок афінного простору називається **опуклою**, якщо разом з кожними двома своїми точками

A, B вона містить відрізок $[A, B]$. Гіперплощина Π_{n-1}, яка задається рівнянням

$$A_1x^1 + \ldots + A_nx^n + A_0 = 0,$$

ділить простір $\mathcal{A}_n$ на два півпростори, які складаються з точок, координати яких задовольняють одну з нерівностей: $A_Jx^J + A_0 \leq 0$ або $A_Jx^J + A_0 \geq 0$. Довести, що кожний півпростір є опуклою множиною.

3. Нехай перетин Π скінченної або зліченної системи площин афінного простору $\mathcal{A}_n$ – непорожня множина в $\mathcal{A}_n$. Довести, що Π – площина в $\mathcal{A}_n$.

4. Нехай $\mathcal{A}_n$ – n-вимірний афінний простір,

$$\{A, B, C, D, K, L, M, N\} \subset \mathcal{A}_n,$$

точки A, B, C, D є вершинами паралелограма, а точки K, L, M, N ділять відрізки $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$, $[D, A]$ відповідно у відношенні $\lambda \neq -1$. Довести, що точки K, L, M, N також є вершинами паралелограма.

5. Знайти параметричні рівняння площини Π_1 в афінному просторі $\mathcal{A}_5$, заданої загальними рівняннями:

$$\Pi_1 : \begin{cases} 2x^1 - x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 = 2, \\ 6x^1 - 3x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 5x^5 = 3, \\ 6x^1 - 3x^2 + 4x^3 + 8x^4 + 13x^5 = 9, \\ 4x^1 - 2x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 = 1. \end{cases}$$

6. Знайти загальні рівняння площини в $\mathcal{A}_5$, заданої параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x^1 = t^1 + t^2 + 1, \\ x^2 = t^2 + 2, \\ x^3 = -t^1 + 3t^2 + 5, \\ x^4 = 2t^1 - t^2 + 3, \\ x^5 = 3t^1 - 2t^2 + 1. \end{cases}$$

7. Знайти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку M і перетинає площини Π та $\tilde{\Pi}$, якщо:

а) $M(5; 9; 2; 10; 10)$,

$$\Pi : \begin{cases} x^1 - x^2 - x^4 + x^5 = 2, \\ x^1 - x^3 - x^4 + x^5 = 1, \\ 5x^1 + 3x^2 - 2x^3 - x^5 = 0; \end{cases} \qquad \tilde{\Pi} : \begin{cases} x^1 = 3, \\ x^2 = 6t^1 + 5t^2, \\ x^3 = 0, \\ x^4 = 4t^1 + 3t^2 + 5, \\ x^5 = t^1 + 2t^2 + 6; \end{cases}$$

б) $M(6; -1; -5; 1)$,

$$\Pi : \begin{cases} x^1 = 2t + 3, \\ x^2 = -t + 5, \\ x^3 = -t + 3, \\ x^4 = t + 6; \end{cases} \qquad \tilde{\Pi} : \begin{cases} -6x^1 + 2x^2 - 5x^3 + 4x^4 = 1, \\ 9x^1 - x^2 + 6x^3 - 6x^4 = 5. \end{cases}$$

8. Знайти взаємне розміщення двох площин, якщо:

а) $\Pi_2 : \begin{cases} 6x^1 + 4x^2 + 5x^3 + 2x^4 + 3x^5 = 1, \\ 3x^1 + 2x^2 + 4x^3 + x^4 + 2x^5 = 3, \\ 3x^1 + 2x^2 - 2x^3 + x^4 = -7; \end{cases}$

$\Pi_4 : 9x^1 + 6x^2 + x^3 + 3x^4 + 2x^5 = 2;$

б) $\Pi_2 : \begin{cases} 45x^1 - 28x^2 + 34x^3 - 52x^4 = 9, \\ 36x^1 - 23x^2 + 29x^3 - 43x^4 = 3; \end{cases}$

$\tilde{\Pi}_2 : \begin{cases} 47x^1 - 21x^2 + 28x^3 - 45x^4 = 16, \\ 47x^1 - 32x^2 + 36x^3 - 48x^4 = -17; \end{cases}$;

в) $\Pi_3 : \begin{cases} 6x^1 + 3x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 = 5, \\ 4x^1 + 2x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 = 4; \end{cases}$

$\tilde{\Pi}_3 : \begin{cases} 4x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4 + x^5 = 0, \\ 2x^1 + x^2 + 7x^3 + 3x^4 + 2x^5 = 1; \end{cases}$;

г) $\Pi_1 : \begin{cases} x^1 = t, \\ x^2 = 2t, \\ x^3 = 4t - 1, \\ x^4 = -2, \\ x^5 = -3t + 2; \end{cases}$

Π_4: $3x^1 - 2x^2 + x^3 + x^5 = -1$;

д) $\Pi_2: \begin{cases} 2x^1 + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 = 6, \\ 6x^1 + 5x^2 + 4x^3 + 3x^4 = 2; \end{cases}$

$\tilde{\Pi}_2: \begin{cases} x^1 = 1 - t^1, \\ x^2 = 1 + 2t^1 + t^2, \\ x^3 = 1 - 2t^1 + 2t^2, \\ x^4 = 1 + t^1 + t^2. \end{cases}$

9. Довести, що кожне афінне перетворення відображає пару паралельних прямих у пару паралельних прямих.

10. Афінне перетворення називається **центроафінним**, якщо $\exists O \in \mathcal{A}_n$: $F(O) = O$. Якщо точка $O \in \mathcal{A}_n$ фіксована, то F називається цетроафінним перетворенням відносно точки O. Довести твердження: сукупність усіх центроафінних відносно точки O перетворень афінного простору утворює підгрупу групи афінних перетворень.

11. Довести, що при афінному перетворенні відрізок відображається на відрізок; середина відрізка – на середину відрізка-образу; промінь – на промінь; трикутник – на трикутник; m-вимірний паралелепіпед – на m-вимірний паралелепіпед.

12. Нехай A, B, C – три точки прямої в $\mathcal{A}_n$, $\lambda = (A, B; C)$ – просте відношення впорядкованої трійки точок A, B, C. Довести, що:

$$(B, A; C) = \frac{1}{\lambda},\ (A, C; B) = -(1 + \lambda),\ (C, A; B) = -\frac{1}{1 + \lambda},$$

$$(B, C; A) = -\frac{1 + \lambda}{\lambda},\ (C, B; A) = -\frac{\lambda}{1 + \lambda}.$$

13. Складним відношенням впорядкованої четвірки точок A, B, C, D прямої в $\mathcal{A}_n$ називається число $\lambda = \dfrac{(A, B; C)}{(A, B; D)}$, яке позначатимемо так: $(A, B; C, D)$.

а) Довести, що складне відношення є інваріантом афінних перетворень афінного простору $\mathcal{A}_n$ і має властивості:

$$(A, B; C, D) = (B, A; D, C) = (C, D; A, B).$$

б) Обчислити всі 24 складні відношення чотирьох точок A, B, C, D прямої в $\mathcal{A}_n$, якщо одне з них, наприклад $(A, B; C, D) = \lambda$, відоме.

в) Подати складне відношення впорядкованої четвірки точок прямої в $\mathcal{A}_n$ у декартових координатах цих точок.

14.Довести, що віддаль між будь-якими чотирма точками в $\mathcal{E}_n$ задовольняє нерівність чотирикутника:

$$\forall\{A, B, C, D\} \subset \mathcal{E}_n : |\rho(A, C) - \rho(B, D)| \le \rho(A, B) + \rho(C, D).$$

15. Знайти ортогональну проекцію вектора $\vec{x}$ на підпростір $L = \mathcal{L}(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})$, якщо:

а) $\vec{x} = \{4; -1; -3; 4\}$, $\vec{a_1} = \{1; 1; 1; 1\}$, $\vec{a_2} = \{1; 2; 2; -1\}$, $\vec{a_3} = \{1; 0; 0; 3\}$;

б) $\vec{x} = \{5; 2; -2; 2\}$, $\vec{a_1} = \{2; 1; 1; -1\}$, $\vec{a_2} = \{1; 1; 3; 0\}$, $\vec{a_3} = \{1; 2; 8; 1\}$.

16. Знайти кут між вектором $\vec{x}$ та його ортогональною проекцією на підпростір L, якщо:

а) $\vec{x} = \{2; 2; 1; 1\}$, $L = \mathcal{L}(\vec{a_1}, \vec{a_2})$, де $\vec{a_1} = \{3; 4; -4; -1\}$, $\vec{a_2} = \{0; 1; -1; 2\}$;

б) $\vec{x} = \{1; 0; 3; 0\}$, $L = \mathcal{L}(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})$, де $\vec{a_1} = \{5; 3; 4; -3\}$, $\vec{a_2} = \{1; 1; 4; 5\}$, $\vec{a_3} = \{2; -1; 1; 2\}$.

17. Скласти рівняння площини, ортогональної до даної, яка проходить через: а) точку O (полюс); б) точку $M_0(; 1; 0; -1)$, якщо

1) $\Pi_1: \begin{cases} 2x^1 + x^2 + x^3 + 3x^4 = 0, \\ 3x^1 + 2x^2 + 2x^3 + x^4 = 0, \\ x^1 + 2x^2 + 2x^3 - 9x^4 = 0; \end{cases}$

2) $\Pi_2: \begin{cases} 2x^1 + x^2 + x^3 + 3x^4 = 0, \\ x^1 + 2x^2 + 2x^3 - 9x^4 = 0. \end{cases}$

18. В $\mathcal{E}_4$ знайти площину, яка проходить через точку M і ортогональна до Π_2, якщо:

а) $M(5;-4;4;0)$, Π_2: $\vec{x} = \vec{x_0} + t_1\vec{a_1} + t_2\vec{a_2}$, де $\vec{x_0} = \{2;-1;2;3\}$, $\vec{a_1} = \{1;1;1;2\}$, $\vec{a_2} = \{2;2;1;1\}$;

б) $M(5;0;2;11)$, $\Pi_2: \begin{cases} x^1 + 5x^2 + x^4 = 10, \\ 5x^1 + x^2 + 3x^3 + 8x^4 = -1. \end{cases}$

19. Знайти віддаль від точки до площини, якщо:

а) $M(-5;3;1;0)$, $\Pi_2: \begin{cases} x^1 - 2x^2 + 3x^3 = 4, \\ 2x^1 - x^2 + 2x^3 + 3x^4 = 12; \end{cases}$

б) $M(2;1;-3;4)$, $\Pi_2: \begin{cases} 2x^1 - 4x^2 - 8x^3 + 13x^4 = -19, \\ x^1 + x^2 - x^3 + 2x^4 = 1; \end{cases}$

в) $M(1;-3;-2;9;-4)$,

$\Pi_3: \begin{cases} x^1 - 2x^2 - 3x^3 + 3x^4 + 2x^5 = -2, \\ x^1 - 2x^2 - 7x^3 + 5x^4 + 3x^5 = 1; \end{cases}$

г) $M(2;4;-4;2)$, $\Pi_2: \begin{cases} x^1 + 2x^2 + x^3 - x^4 = 1, \\ x^1 + 3x^2 + x^3 - 3x^4 = 2; \end{cases}$

д) $M(0;0;1;5)$, $\Pi_1: \begin{cases} 2x^1 + x^2 + x^3 + 3x^4 = 4, \\ 3x^1 + 2x^2 + 2x^3 + x^4 = 0, \\ x^1 + 2x^2 + 2x^3 - 9x^4 = 1; \end{cases}$

е) $M(7;-4;-1;2)$, $\Pi_3: x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 10$.

20. Знайти віддаль між двома площинами, якщо:

а) $\Pi_1: \begin{cases} 2x^1 + 2x^2 - 3x^3 + x^4 = 5, \\ 3x^1 + 4x^2 - 4x^3 - x^4 = 0, \\ x^1 - x^3 + 2x^4 = 0, \end{cases}$

$\tilde{\Pi}_1: \begin{cases} 5x^1 + 3x^2 + 4x^3 - 3x^4 = 1, \\ x^1 + x^2 + 4x^3 - 5x^4 = 0, \\ 2x^1 - x^2 + x^3 + 2x^4 = 3; \end{cases}$

б) $\Pi_1: \begin{cases} x^1 + x^2 + 3x^3 = 4, \\ 2x^1 + 3x^2 + 7x^3 = 1, \end{cases}$

$\tilde{\Pi}_1: \begin{cases} 7x^1 + x^3 = 0, \\ 4x^1 + 3x^2 + 3x^3 = 4; \end{cases}$

в) $\Pi_1: \begin{cases} -x^1 + x^3 + x^4 = 1, \\ -3x^1 - x^3 + 5x^4 = 2, \\ 4x^1 - x^2 - 3x^3 + 3x^4 = -1, \end{cases}$

$\Pi_3: x^1 + x^2 + 2x^3 + x^4 = 0$;

г) $\Pi_2: \begin{cases} x^1 + 3x^2 + x^3 + x^4 = 3, \\ x^1 + 3x^2 - x^3 + 2x^4 = 6, \end{cases}$

$\tilde{\Pi}_2: \vec{x} = \vec{x_0} + t_1\vec{a_1} + t_2\vec{a_2}$, де $\vec{x_0} = \{0;2;6;-5\}$, $\vec{a_1} = \{-7;1;1;1\}$, $\vec{a_2} = \{-10;1;2;3\}$;

д) $\Pi_2: \begin{cases} -x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 3, \\ -3x^2 + 2x^3 - 4x^4 = 4, \end{cases}$

$\Pi_1: \vec{x} = \vec{x_0} + t\vec{a}$, де $\vec{x_0} = \{1;3;-3;-1\}$, $\vec{a} = \{1;0;1;1\}$.

е) $\Pi_1: \begin{cases} 2x^1 + 2x^2 - 3x^3 + x^4 = 5, \\ 3x^1 + 4x^2 - 4x^3 - x^4 = 0, \\ x^1 - x^3 + 2x^4 = 0, \end{cases}$

$\tilde{\Pi}_1: \begin{cases} 5x^1 + 3x^2 + 4x^3 - 3x^4 = 1, \\ x^1 + x^2 + 4x^3 - 5x^4 = 0, \\ 2x^1 - x^2 + x^3 + 2x^4 = 3; \end{cases}$

21. Нехай $\{\vec{e_0}, \vec{e_1}\}$ — ортонормований базис площини $E_{2,1}$. Знайти образ цього базису при перетворенні f (f — перетворення руху площини $E_{2,1}$), якщо матрицею цього перетворення є матриця:

а) $A_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}$,

б) $A_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}$,

в) $A_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}$, $\beta = \operatorname{th}\varphi$, $-\infty < \varphi < +\infty$.

Розділ 2.
Теорія ліній у евклідовому просторі

§2.1. Вектор-функції

Під вектором розуміємо геометричний (вільний) вектор – направлений відрізок з початком у довільній точці простору. Нехай U – довільна множина точок прямої або площини.

Функцію, задану на множині U із значеннями у векторному просторі V_3, називають вектор-функцією скалярного аргументу і позначають символом $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in U$.

Множину U називають **множиною визначення вектор-функції** $\vec{r}$ і позначають $D(\vec{r})$. Множину $R(\vec{z}) = \{\vec{a} \in V_3 \,|\, \exists t \in U : \ \vec{r}(t) = \vec{a}\}$ називають **множиною значень вектор-функції** $\vec{r}$.

Якщо $U \subseteq \mathbb{R}^1$, то $\vec{r}$ називають вектор-функцією однієї змінної, якщо ж $U = D(\vec{r}) \subseteq \mathbb{R}^2$, то маємо вектор-функцію двох змінних.

Введемо поняття границі для вектор-функції.

Означення 2.1. *Вектор $\vec{a}$ називається границею вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$ при $t \to t_0$, якщо $\|\vec{r}(t) - \vec{a}\| \equiv |\vec{r}(t) - \vec{a}| \to 0$ при $t \to t_0$, тобто*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\vec{r}(t) - \vec{a}| < \varepsilon. \quad (2.1)$$

При цьому використовується стандартне позначення: $\vec{a} = \lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t)$ або $\vec{r}(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \vec{a}$. Якщо $\vec{a} = \vec{0}$, то $\vec{r}(t)$ називають нескінченно малою вектор-функцією при $t \to t_0$. Отже, якщо $\vec{a} = \lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t)$, то з (2.1) випливає, що вектор-функція $\vec{\alpha}(t) := \vec{r}(t) - \vec{a}$ є нескінченно малою при $t \to t_0$, тобто із граничного співвідношення $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$ випливає, що $\vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{\alpha}(t)$, де $\vec{\alpha}(t) \to \vec{0}$ при $t \to t_0$.

Теорема 2.1. *Нехай $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$, $\vec{r}_3(t)$ – вектор-функції, $f(t)$ – скалярна функція, задані на множині U, причому $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}_1(t) = \vec{a}$, $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}_2(t) = \vec{b}$, $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}_3(t) = \vec{c}$, $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = d$.*

Тоді

1) $\lim\limits_{t \to t_0} (\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)) = \vec{a} \pm \vec{b}$;
2) $\lim\limits_{t \to t_0} f(t)\vec{r}_1(t) = d\vec{a}$;
3) $\lim\limits_{t \to t_0} (\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)) = (\vec{a}, \vec{b})$;
4) $\lim\limits_{t \to t_0} [\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)] = [\vec{a}, \vec{b}]$;
5) $\lim\limits_{t \to t_0} (\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{r}_3(t)) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Доведення. Доведемо, наприклад, властивість 4). Згідно з умовою теореми маємо, що

$$\vec{r}_1(t) = \vec{a} + \vec{\alpha}(t), \vec{r}_2(t) = \vec{b} + \vec{\beta}(t), \lim_{t \to t_0} \vec{\alpha}(t) = \vec{0},$$
$$\lim_{t \to t_0} \vec{\beta}(t) = \vec{0}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
&|[\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)] - [\vec{a}, \vec{b}]| = |[\vec{a} + \vec{\alpha}(t), \vec{b} + \vec{\beta}(t)] - [\vec{a}, \vec{b}]| = \\
&= |[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{\beta}(t)] + [\vec{\alpha}(t), \vec{b}] + [\vec{\alpha}(t), \vec{\beta}(t)] - [\vec{a}, \vec{b}]| \le \\
&\le |[\vec{a}, \vec{\beta}(t)]| + |[\vec{\alpha}(t), \vec{b}]| + |[\vec{\alpha}(t), \vec{\beta}(t)]| \le \\
&\le |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}(t)| + |\vec{\alpha}(t)| \cdot |\vec{b}| + |\vec{\alpha}(t)| \cdot |\vec{\beta}(t)| = \\
&= (|\vec{a}| + |\vec{\alpha}(t)|)|\vec{\beta}(t)| + |\vec{b}| \cdot |\vec{\alpha}(t)| \to 0, \quad t \to t_0.
\end{aligned}$$

Властивість доведена.

Властивості 1) – 3) доводяться аналогічно. Властивість 5) є наслідком властивостей 3) та 4), оскільки, за означенням,

$$(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{r}_3(t)) = ([\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)], \vec{r}_3(t)).$$

Означення 2.2. *Вектор-функція $\vec{r}(t)$ називається неперервною в точці $t_0 \in D(\vec{r})$, якщо*

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) = \vec{r}(\lim_{t\to t_0} t).$$

Наведемо означення неперервної вектор-функції, використовуючи поняття приросту вектор-функції. Нехай $t_0 + \Delta t = t \in D(\vec{r})$. Приростом вектор-функції $\vec{r}(t)$ у точці t_0 називається вектор-функція

$$\Delta\vec{r}(t_0) := \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0).$$

Вектор-функція $\vec{r}(t)$ називається **неперервною у точці** $t_0 \in D(\vec{r})$, якщо приріст $\Delta\vec{r}(t_0)$ є нескінченно малою вектор-функцією при $\Delta t \to 0$, тобто $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \Delta\vec{r}(t_0) = \vec{0}$ (нескінченно малому приросту аргументу Δt відповідає нескінченно малий приріст $\Delta\vec{r}(t_0)$).

Для неперервних вектор-функцій правильними є наступні твердження.

Теорема 2.2 *Якщо вектор-функції $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$, $\vec{r}_3(t)$, а також скалярна функція $f(t)$ визначені на множині U і неперервні в точці $t_0 \in U$, то в точці t_0 є неперервними функції:*
1) $\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)$; 2) $f(t)\vec{r}_1(t)$; 3) $(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t))$; 4) $[\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)]$; 5) $(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{r}_3(t))$.

Наведені властивості випливають з означення неперервної вектор-функції та теореми 2.1.

Надалі вважатимемо, що $U = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Нехай $D(\vec{r}) = U$, $\{t, t + \Delta t\} \subset (a, b)$.

Означення 2.3. *Похідною вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$ у точці $t \in D(\vec{r})$ називається скінченна границя*

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \equiv \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$$

(якщо вона існує).

Цю границю позначають символом $\vec{r}\,'(t_0)$ або $\left.\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_{t_0}$. Вектор-функцію $\vec{r}(t)$, яка має похідну в точці $t_0 \in D(\vec{r})$ називають ще **диференційовною в точці t_0**.

Із означення границі вектор-функції випливає, що

$$\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \vec{r}\,'(t) + \vec{\alpha}(\Delta t), \quad \vec{\alpha}(\Delta t) \to 0, \Delta t \to 0.$$

Отже, приріст диференційовної в точці $t \in D(\vec{r})$ вектор-функції можна подати у вигляді

$$\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t)\Delta t + \vec{\alpha}(\Delta t)\Delta t. \tag{2.2}$$

З (2.2) випливає, що кожна диференційовна в точці $t \in D(\vec{r})$ вектор-функція $\vec{r}(t)$ є неперервною у цій точці; обернене твердження, взагалі кажучи, не є правильним.

Означення 2.4. *Головна лінійна частина приросту вектор-функції називається її диференціалом і позначається символом $d\vec{r}(t)$, тобто $d\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t)\Delta t = \vec{r}\,'(t)dt$.*

Властивості диференційовних вектор-функцій характеризуються наступним твердженням.

Теорема 2.3 *Нехай вектор-функції $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$, $\vec{r}_3(t)$ та скалярна функція $f(t)$ визначені на $(a, b) \subset \mathbb{R}$ та диференційовні в точці $t \in (a, b)$. Тоді в цій точці диференційовні функції: $\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)$, $f(t)\vec{r}_1(t)$, $(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t))$, $[\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)]$, $(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{r}_3(t))$, причому*

1) $(\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t))' = \vec{r}\,'_1(t) \pm \vec{r}\,'_2(t)$;

2) $(f(t)\vec{r}_1(t))' = f'(t)\vec{r}_1(t) + f(t)\vec{r}\,'_1(t)$;

3) $(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t))' = (\vec{r}\,'_1(t), \vec{r}_2(t)) + (\vec{r}_1(t), \vec{r}\,'_2(t))$;

4) $[\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)]' = [\vec{r}\,'_1(t), \vec{r}_2(t)] + [\vec{r}_1(t), \vec{r}\,'_2(t)]$;

3) $(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{r}_3(t))' = (\vec{r}\,'_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{r}_3(t)) + (\vec{r}_1(t), \vec{r}\,'_2(t), \vec{r}_3(t)) + (\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{r}\,'_3(t))$.

Доведення. Доведемо властивість 4). Нехай $\vec{A}(t) := [\vec{r_1}(t), \vec{r_2}(t)]$, $\Delta\vec{A}(t) = \vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t) = [\vec{r_1}(t + \Delta t), \vec{r_2}(t+$

$\Delta t)] - [\vec{r_1}(t), \vec{r_2}(t)]$. Тоді

$$\frac{\Delta \vec{A}(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}([\vec{r_1}(t+\Delta t), \vec{r_2}(t+\Delta t)] - [\vec{r_1}(t), \vec{r_2}(t+\Delta t)] +$$
$$+[\vec{r_1}(t), \vec{r_2}(t+\Delta t)] - [\vec{r_1}(t), \vec{r_2}(t)]) =$$
$$= \left[\frac{\vec{r_1}(t+\Delta t) - \vec{r_1}(t)}{\Delta t}, \vec{r_2}(t+\Delta t)\right] + \left[\vec{r_1}(t), \frac{\vec{r_2}(t+\Delta t) - \vec{r_2}(t)}{\Delta t}\right].$$

Скориставшись властивістю неперервності вектор-функції $\vec{r_2}(t)$, умовою диференційовності вектор-функцій $\vec{r_1}(t)$, $\vec{r_2}(t)$ та теоремою 2.1, перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$ у останньому співвідношенні; в результаті дістанемо, що

$$[\vec{r_1}(t), \vec{r_2}(t)]' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{A}(t)}{\Delta t} = [\vec{r_1}'(t), \vec{r_2}(t)] + [\vec{r_1}(t), \vec{r_2}'(t)].$$

Властивості 1) – 3) доводяться аналогічно. Властивість 5) випливає з властивостей 3), 4).

Зауважимо, що з теореми 2.3 випливають відповідні властивості для диференціалів вектор-функцій, наприклад,

$$d(\vec{r_1}(t), \vec{r_2}(t)) = (d\vec{r_1}(t), \vec{r_2}(t)) + (\vec{r_1}(t), d\vec{r_2}(t))$$

і т.п.

Похідна вектор-функції $\vec{r}'(t)$ називається **похідною другого порядку вектор функції** $\vec{r}(t)$. Позначають її $\vec{r}''(t)$ або $\dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$. Аналогічно визначаються похідні вектор-функцій вищих порядків.

Вектор-функція називається **гладкою**, якщо на області визначення вона має неперервну похідну першого порядку і **регулярною**, якщо на області визначення вона має неперервні похідні першого та другого порядків.

Якщо вектор-функція $\vec{r}(t)$ на U має похідні до k-го порядку включно, то вона називається **k разів диференційовною на U**. Символом $C^{(k)}_{(a,b)}$ позначатимемо множину всіх

векторних та скалярних функцій, які мають в кожній точці $t \in (a,b)$ **неперервні похідні до k-го порядку включно.**

Невизначеним інтегралом від вектор-функції $r(t)$ називають вектор-функцію $\vec{v}(t) = \int \vec{r}(t)dt$ таку, що $\vec{v}'(t) = \vec{r}(t)$, $\forall t$. Ця функція визначається з точністю до сталого векторного доданка. Під визначеним інтегралом розуміють сталий вектор

$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \vec{v}(b) - \vec{v}(a).$$

Для вектор-функцій скалярного аргументу має місце формула Тейлора. Нехай $\vec{r}(t) \in C^{(n+1)}_{(a,b)}$. У просторі V_3 візьмемо довільний ортонормований базис $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ і розкладемо $\vec{r}(t)$ за базисними векторами:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e_1} + y(t)\vec{e_2} + z(t)\vec{e_3}.$$

Очевидно, що з належності $\vec{r}(t)$ до класу $C^{(n+1)}_{(a,b)}$ випливає належність $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ до $C^{(n+1)}_{(a,b)}$ і навпаки. Нехай $t_0 \in (a,b)$.

Для кожної функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ запишемо формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа:

$$x(t) = x(t_0) + x'(t_0)(t-t_0) + \ldots + x^{(n)}(t_0)\frac{(t-t_0)^n}{n!} +$$
$$+x^{(n+1)}(t_0 + \theta_1 \Delta t)\frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \Delta t = t - t_0, \ 0 < \theta_1 < 1,$$

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t-t_0) + \ldots + y^{(n)}(t_0)\frac{(t-t_0)^n}{n!} +$$
$$+y^{(n+1)}(t_0 + \theta_2 \Delta t)\frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta_2 < 1,$$

$$z(t) = z(t_0) + z'(t_0)(t - t_0) + \ldots + z^{(n)}(t_0)\frac{(t-t_0)^n}{n!} +$$

$$+z^{(n+1)}(t_0 + \theta_3 \Delta t)\frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta_3 < 1.$$

Помножимо ці рівності відповідно на $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$; отримані співвідношення почленно додамо і одержимо формулу Тейлора для вектор-функції:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{r}'(t_0)(t - t_0) + \ldots + \vec{r}^{(n)}(t_0)\frac{(t-t_0)^n}{n!} + \vec{R}_n,$$

де

$$\vec{R}_n = (x^{(n+1)}(t_0 + \theta_1 \Delta t)\vec{e_1} + y^{(n+1)}(t_0 + \theta_2 \Delta t)\vec{e_2} +$$

$$+z^{(n+1)}(t_0 + \theta_3 \Delta t)\vec{e_3})\frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Як бачимо, залишковий член $\vec{R}_n$ у загальному випадку не має форми Лагранжа, оскільки числа θ_1, θ_2, θ_3 можуть бути різними. Ця обставина суттєво відрізняє формулу Тейлора для вектор-функції від звичайної формули Тейлора.

У випадку, коли вектор функція $\vec{r}(t)$ має похідні довільного порядку, для неї можна скласти формальний ряд Тейлора в околі точки t_0:

$$\vec{r}(t_0) + \vec{r}'(t_0)(t - t_0) + \ldots + \vec{r}^{(n)}(t_0)\frac{(t-t_0)^n}{n!} + \ldots . \quad (2.3)$$

Нехай $\vec{S}_n(t)$ позначає частинну суму цього ряду. Якщо при даному фіксованому значенні t $\lim\limits_{b\to\infty} \rho(\vec{S}_n(t), \vec{r}(t)) = 0$, тобто

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 = n_0(\varepsilon, t)\, \forall n \geq n_0 : \, |\vec{S}_n(t) - \vec{r}(t)| < \varepsilon,$$

то кажуть, що ряд (2.3), побудований за вектор-функцією $\vec{r}(t)$, збігається до $\vec{r}(t)$ у точці t. Не кожний формальний

ряд Тейлора збігається, але у випадку його збіжності сумою ряду є вихідна вектор-функція. Функцію $\vec{r}(t)$ називають **аналітичною у точці** $t_0 \in (a, b)$, якщо вона має у цій точці похідні будь-якого порядку та існує окіл точки t_0, в якому ряд Тейлора (2.3) збігається до функції $\vec{r}(t)$ (клас $C^{(\omega)}$).

Якщо U – деяка множина точок площини, $t \in U$ – довільна точка, то вектор-функція $\vec{r}(t)$, визначена на U, залежатиме від двох скалярних аргументів u, v – афінних координат точки t. Розклад

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{e_1} + y(u, v)\vec{e_2} + z(u, v)\vec{e_3}$$

вказує на однозначну визначеність вектор- функції $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ упорядкованою трійкою функцій $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$.

Вектори

$$\Delta_u \vec{r} := \vec{r}(u + \Delta u, v) - \vec{r}(u, v),$$

$$\Delta_v \vec{r} := \vec{r}(u, v + \Delta v) - \vec{r}(u, v),$$

$$\vec{\Delta r} := \vec{r}(u + \Delta u, v + \Delta v) - \vec{r}(u, v)$$

називають, відповідно, **частковими (по u та v) та повним приростами вектор-функції** $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Якщо $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \Delta_u \vec{r} = \vec{0}$ або $\lim\limits_{\Delta v \to 0} \Delta_v \vec{r} = \vec{0}$, то вектор-функція $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ називається неперервною, відповідно, за змінною u або v. Якщо $\lim\limits_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \vec{\Delta r} = \vec{0}$, то вектор-функція $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ називається неперервною за сукупністю аргументів.

Границі (якщо вони існують і є скінченними)

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta_u \vec{r}}{\Delta u} := \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta_v \vec{r}}{\Delta v} := \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

називаються **частинними похідними** (по u та по v) **вектор-функції** $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$. Вектор

$$d\vec{r} := \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}dv$$

називають **повним диференціалом вектор-функції** $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, бо він збігається з головною лінійною частиною повного приросту вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$. Формула для вектора приросту вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ має вигляд:

$$\vec{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \vec{r}(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\Delta v +$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}\Delta u^2 + 2\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v}\Delta u \Delta v + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2}\Delta v^2\right) + \frac{1}{3!}\times$$
$$\times\left(\frac{\partial^3 \vec{r}}{\partial u^3}\Delta u^3 + 3\frac{\partial^3 \vec{r}}{\partial u^2 \partial v}\Delta u^2 \Delta v + 3\frac{\partial^3 \vec{r}}{\partial u \partial v^2}\Delta u \Delta v^2 + \frac{\partial^3 \vec{r}}{\partial v^3}\Delta v^3\right) + \ldots,$$

де Δu і Δv – прирости незалежних змінних u та v, $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^3 \vec{r}}{\partial u^3}$, ... – частинні похідні другого, третього і вищих порядків вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$.

На завершення цього параграфу наведемо твердження, яке є наслідком теореми 2.3 і неодноразово буде використане у подальшому.

Лема 2.1. *Похідна вектор-функції сталого модуля перпендикулярна до неї при всіх значеннях аргумента.*

Доведення. Нехай $|\vec{r}(t)| = c = \text{const}$, $\forall t \in U$. Тоді $c^2 = (\vec{r}(t), \vec{r}(t))$, $\forall t \in U$. Продиференціювавши останню рівність дістанемо, що $2(\vec{r}(t), \vec{r}'(t)) = 0$, $\forall t \in U$, звідки і випливає твердження леми 2.1.

Зазначимо, що правильним є і обернене твердження.

§2.2. Поняття кривої в евклідовому просторі. Векторно-параметричні і загальні рівняння

Множина γ точок простору називається **елементарною кривою**, якщо вона є образом відкритого відрізка (інтервала) $(a,b) \subset \mathbb{R}$ при деякому топологічному відображенні $f\colon (a,b) \to \gamma$, яке називається параметризацією цієї кривої. Допускається, що кінці інтервалу можуть бути нескінченними. Якщо γ – елементарна крива, то система рівностей

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \quad x_3 = f_3(t), \tag{2.4}$$

де $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ – координати точки кривої γ, відповідної точці t інтервалу при відображенні $f\colon (a,b) \to \gamma$, називається **рівняннями кривої γ у параметричній формі.** При певному виборі декартової системи координат у просторі трійка функцій (2.4) однозначно визначає вектор-функцію

$$\vec{r}(t) = f_1(t)\vec{e_1} + f_2(t)\vec{e_2} + f_3(t)\vec{e_3}, \tag{2.5}$$

де $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ – впорядкована трійка ортів вибраної системи координат. Відносно цієї системи координат точки $(f_1(t); f_2(t); f_3(t))$ є кінцями радіус-векторів з початками у початку системи координат. Геометричне місце точок $(f_1(t); f_2(t); f_3(t))$ називається **годографом** вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t) = \{f_1(t); f_2(t); f_3(t)\}$. Зауважимо, що одне і те ж геометричне місце точок $(f_1(t); f_2(t); f_3(t))$ може бути годографом різних вектор-функцій, оскільки декартова система координат може обиратися довільно. Рівняння (2.5) називається векторно-параметричним рівнянням кривої γ.

Крива γ, задана рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$, називається **регулярною кривою k-го порядку**, якщо $\vec{r}(t) \in C^{(k)}_{(a,b)}$. Регулярну криву першого порядку називають **гладкою кривою**. Якщо $\vec{r}(t)$ – аналітична вектор-функція на (a,b), то її годограф назвемо **аналітичною кривою** на цьому проміжку.

Множину γ точок простору $\mathcal{E}_3$ називають **простою кривою**, якщо γ зв'язна і у кожної точки $x \in \gamma$ існує окіл U_x такий, що $\gamma \cap U_x$ є елементарною кривою. Цю елементарну криву називають **околом точки** $x \in \gamma$ **на кривій.** Зрозуміло, що кожна елементарна крива є простою. З іншого боку, відомо, що проста крива в $\mathcal{E}_3$ є елементарною, або вона топологічно еквівалентна (гомеоморфна) колу. В останньому випадку просту криву називають **замкненою**.

Множину точок $\gamma \subset \mathcal{E}_3$ називають **загальною кривою**, якщо вона є образом простої кривої $\gamma \subset \mathcal{E}_2$ при деякому локально топологічному відображенні $f\colon \mu \to \gamma$, $\gamma = f(\mu)$. Одну і ту ж множину $\gamma \subset \mathcal{E}_3$ можна отримати за допомогою різних пар (μ_1, f_1), (μ_2, f_2). Кажуть, що ці пари визначають одну і ту ж загальну криву, коли прості криві μ_1, μ_2 допускають таке топологічне відображення $f\colon \mu_1 \to \mu_2$, що $f_1 = f_2 \circ f$. Якщо загальна крива $\gamma = f(\mu)$ задана, то, внаслідок локальної топологічності відображення f, для кожної точки $x \in \mu$ існує окіл U_x такий, що звуження $f|_{U_x}$: $U_x \cap \mu \to f(U_x \cap \mu)$ є топологічним відображенням. З наведених означень випливає, що локальне дослідження кривих зводиться до розгляду елементарних кривих. За методами, які застосовуються при дослідженні геометричних об'єктів, геометрію розділяють на глобальну і локальну. Класична диференціальна геометрія, як правило, локальна.

Природно виникає запитання: коли задана система параметричних рівнянь (2.4) визначає криву? Достатню умову містить наступне твердження.

Теорема 2.4. *Якщо регулярні функції $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ задовольняють умову*

$$\forall t \in (a,b) : \left(\frac{df_1(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{df_2(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{df_3(t)}{dt}\right)^2 > 0,$$

то система (2.4) є системою параметричних рівнянь регулярної кривої, яка є образом інтервалу $(a,b) \subset$

$\mathbb{R}$ при локально топологічному відображенні $f\colon t \to (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \in \mathcal{E}_3$.

Доведення. За умовою відображення f є однозначним і неперервним. Перевіримо, передусім, локальну однозначність відображення f^{-1}. Допустимо, що воно не є таким, тобто існує $t_0 \in (a,b)$, у досить малому околі якого $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset (a,b)$ є точки $t_1 \neq t_2$: $f_i(t_1) \neq f_i(t_2)$, $i \in \{1,2,3\}$. За теоремою Ролля $\exists \alpha_i \in (t_1, t_2)$: $\dfrac{df_i(\alpha_i)}{dt} = 0$. Оскільки δ — довільне додатне число (досить мале), то при $\delta \to 0$, внаслідок неперервності функцій $\dfrac{df_i(t)}{dt}$, дістаємо $\dfrac{df_i(t_0)}{dt} = 0$, що суперечить умові.

Таким чином, f — неперервне і локально бієктивне відображення. Вважаючи на те, що f діє в евклідовому просторі, твердимо, що воно є локально топологічним, тобто у кожної точки $t_0 \in (a,b)$ існує досить малий окіл $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset (a,b)$ такий, що звуження f на цей окіл є топологічним. Справді, у курсі топології відоме твердження: неперервне і бієктивне відображення відрізка $[a,b] \subset \mathbb{R}$ в $\mathcal{E}_3$ є топологічним. Звузимо f на відрізок $[c,d]$, що включає точку t_0, де воно бієктивне. Тоді, на підставі сфомульованого твердження, це звуження є бієктивним. Залишається взяти $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset [c,d]$.

Теорема доведена.

Елементарна крива γ може мати різні параметризації. Якщо $\sigma(\tau)$ строго монотонна функція, яка здійснює топологічне відображення між інтервалами, то $x_i = f(\sigma(\tau)) = g_i(\tau)$, $t = \sigma(\tau)$, $i \in \{1,2,3\}$. Така можливість заміни параметра часто використовується на практиці.

Крива називається **плоскою**, якщо всі її точки належать деякій площині. Плоска крива вважається заданою загальним рівнянням $F(x,y) = 0$, якщо координати всіх точок кривої задовольнять це рівняння. При цьому можуть існувати точки площини, координати яких задовольняють рівняння $F(x, y) = 0$, але множина таких точок не утворює криву в розумінні попередніх означень. За певних умов на функцію F рівняння $F(x, y) = 0$ є рівнянням деякої плоскої кривої.

Теорема 2.5. *Нехай $F(x, y)$ - регулярна функція своїх змінних і $M = \{(x, y) : F(x, y) = 0\} \subset \mathcal{E}_2$ - відповідна їй множина точок. Якщо в точці $(x_0, y_0) \in M$ $F_x^2 + F_y^2 > 0$, то існує її окіл такий, що розташовані в ньому точки даної множини утворюють елементарну криву.*

Доведення. Допустимо, наприклад, що $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тоді, згідно з теоремою про неявну функцію, існує регулярна функція

$$\varphi(x) : \forall (x, \varphi(x)) \in \Pi = \{x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\},$$

$$y_0 = \varphi(x_0),\ F(x, \varphi(x)) = 0$$

і при цьому точками $(x, \varphi(x))$ вичерпуються всі точки прямокутника Π, які задовольняють рівняння $F(x, y) = 0$. В результаті отримаємо елементарну криву $\gamma = M \cap \Pi$: $y = \varphi(x)$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Існує також аналог попередньої теореми для просторових кривих.

Теорема 2.6. *Нехай $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$ - регулярні функції своїх аргументів,*

$$M = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0,\ G(x, y, z) = 0\} \subset \mathcal{E}_3 -$$

відповідна їм множина точок. Якщо в точці $(x_0, y_0, z_0) \in M$ $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix} = 2$, то існує окіл цієї точки такий, що розташовані в ньому точки даної множини утворюють елементарну криву.

Доведення аналогічне доведенню теореми 2.5 і опирається на теорему про систему неявних функцій $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$. Це параметричні рівняння просторової кривої. Кожне з рівнянь цієї системи є загальним рівнянням деякої поверхні, а сама крива є перетином відповідних двох поверхонь.

§2.3. Звичайні та особливі точки кривої. Дотична до кривої

Нехай крива γ задана параметризацією $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in (a, b)$.

Означення 2.5. *Точка $t_0 \in (a, b)$ називається звичайною точкою параметризації $\vec{r}(t)$, якщо вектор-функція $\vec{r}(t)$ диференційовна в точці t_0, причому*

$$\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}.$$

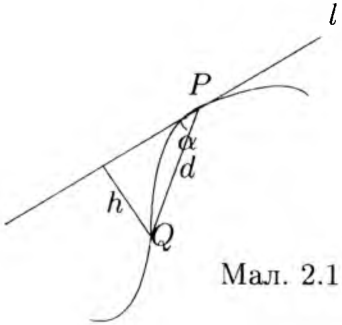
Точку, яка не є звичайною, називають особливою точкою параметризації $\vec{r}(t)$.

Якщо M_0 – точка кривої γ, яка відповідає значенню параметра t_0, то в залежності від того, чи є t_0 звичайною або особливою точкою параметризації $\vec{r}(t)$, точку $M_0(t_0)$ також називають звичайною або особливою точкою цієї параметризації (звичайною або особливою точкою кривої γ, оскільки γ - годограф вектор-функції $\vec{r}(t)$, тобто γ – це множина $M(t)$ точок в $\mathcal{E}_3$, яку описує кінець вектора $\vec{r}(t)$ при зміні t від a до b).

З геометричної точки зору особливість параметризації полягає в тому, що нульовий вектор не визначає напряму дотичної в цій точці; в той же час існують дотичні промені як односторонні граничні положення прямих M_0M, $M \in \gamma$, $M \to M_0$. Якщо точка M_0 є особливою для будь-якої параметризації класу $C^{(k)}$, то її називають особливою точкою кривої в даному класі.

Означення 2.6. *Пряму називають дотичною до кривої в даній точці, якщо вона є граничним положенням січної, що проходить через дану точку та іншу точку кривої, яка наближається вздовж кривої до заданої точки.*

Наведемо ще одне означення дотичної до кривої, яке еквівалентне означенню (2.6) (див. Мал. 2.1).



Мал. 2.1.

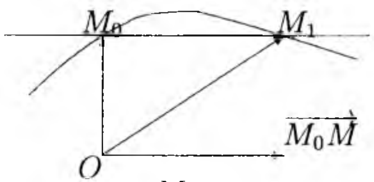
Нехай γ – дана крива, P – точка на ній, g – пряма, що проходить через точку P. Візьмемо на кривій γ точку Q і позначимо її віддалі до точки P та прямої g через d і h відповідно.

Означення 2.7. *Пряма g називається дотичною до кривої γ у точці P, якщо $\frac{h}{d} \to 0$ при $Q \to P$ (або при $d \to 0$).*

Еквівалентність означень 2.6 та 2.7 зумовлюється тим, що $h/d = \sin\alpha$, де α – кут, утворений прямими l та PQ.

Теорема 2.7. *Гладка крива, задана рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in (a, b)$, у кожній своїй звичайній точці $M_0(t_0)$ має єдину дотичну, яка паралельна вектору $\vec{r}\,'(t_0)$.*

Доведення. Нехай точкам M_0 та M даної кривої відповідають значення параметра t_0 і t, а їхніми радіус-векторами є відповідно вектори $\vec{r}(t_0)$ та $\vec{r}(t)$ (Мал. 2.2). Тоді $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$, а вектор $\vec{a}(t_0) = \dfrac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$ паралельний січній M_0M.



Мал. 2.2.

Якщо точка M прямує по кривій до точки M_0, то вектор-функція $\vec{a}(t)$ прямує до похідної $\vec{r}\,'(t_0)$ як до своєї границі. Січна M_0M при цьому, обертаючись навколо точки M_0, займе своє граничне положення, яке за означенням 2.6 визначає дотичну до кривої в точці M_0.

Теорема доведена.

Очевидно, що теорема 2.7 в особливих точках кривої не застосовна. Проте це не означає, що в цих точках дотична не існує або не визначена. Наступна теорема наводить достатні умови існування дотичної в особливій точці регулярної кривої.

Теорема 2.8. *Нехай рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$ задана регулярна крива з класу $C^{(p+1)}_{(a,b)}$, причому $\vec{r}\,'(t_0) = \vec{r}\,''(t_0) = \ldots = \vec{r}^{(p-1)}(t_0) = \vec{0}$, $\vec{r}^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$. Тоді в точці $M_0(t_0)$ цієї кривої існує єдина дотична, паралельна вектору $\vec{r}^{(p)}(t_0)$.*

Доведення. Розкладемо функцію $\vec{r}(t)$ в околі точки t_0 за формулою Тейлора:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{r}^{(p)}(t_0)\frac{(t - t_0)^p}{p!} + \vec{R}_p, \tag{2.6}$$

де $\dfrac{\vec{R}_p}{(t - t_0)^p} \to \vec{0}$ при $t \to t_0$. З формули (2.6) дістаємо співвідношення

$$\frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{(t - t_0)^p} = \frac{1}{p!}\vec{r}^{(p)}(t_0) + \frac{\vec{R}_p}{(t - t_0)^p},$$

звідки

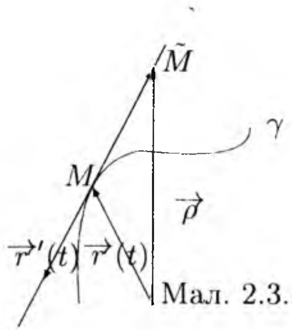
$$\lim_{t \to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{(t - t_0)^p} = \frac{1}{p!}\vec{r}^{(p)}(t_0).$$

Враховуючи, що вектор $\dfrac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{(t - t_0)^p}$ паралельний січній M_0M, а також означення 2.6, завершуємо доведення теореми.

Якщо крива, яка задана рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$ гладка і не містить особливих точок, то рівняння її дотичної можна записати у вигляді

$$\vec{\rho} = \vec{r}(t) + \lambda \vec{r}'(t),$$

де $\lambda \in \mathbb{R}$ – параметр (див. Мал. 2.3), оскільки $\vec{\rho} = \vec{r}(t) + \overrightarrow{M\tilde{M}}$, $\overrightarrow{M\tilde{M}} \parallel \vec{r}'(t)$, тоді $\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{M\tilde{M}} = \lambda \vec{r}'(t)$.



Мал. 2.3.

Якщо ж ця крива задана в параметричній формі рівняннями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

то рівняння дотичної до неї в точці $M(x(t); y(t); z(t))$ набувають вигляду

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} = \frac{Z - z(t)}{z'(t)}, \tag{2.7}$$

де X, Y, Z – координати рухомої точки дотичної.

Означення 2.8. *Пряма, перпендикулярна дотичній до кривої, яка проходить через точку дотику дотичної з кривою, називається нормаллю кривої. Площина, яка перпендикулярна дотичній до кривої і проходить через точку дотику дотичної з кривою, називається нормальною площиною кривої.*

Гладка крива у кожній своїй звичайній точці має безліч нормалей. Усі вони лежать в нормальній площині. Знаючи, наприклад, рівняння (2.7), рівняння нормальної площини кривої у точці M записуємо у вигляді

$$(X - x(t))x'(t) + (Y - y(t))y'(t) + (Z - z(t))z'(t) = 0,$$

де X, Y, Z – координати рухомої точки нормальної площини.

Звичайна точка $M(t_0)$ регулярної кривої γ, яка задається рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in (a, b)$, називається **точкою розпрямлення**, якщо

$$\vec{r}'(t_0) \parallel \vec{r}''(t_0), \quad t_0 \in (a, b).$$

Регулярна крива γ називається **бірегулярною**, якщо вона є годографом вектор-функції $\vec{r}(t)$, $t \in (a, b)$ такої, що

$$\vec{r}'(t) \nparallel \vec{r}''(t), \quad \forall t \in (a, b).$$

Отже, бірегулярна крива містить лише звичайні точки, які не є точками розпрямлення.

Особлива точка $M(t_0)$ кривої γ (класу $C^{(n)}$), яка задається параметризацією $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in (a, b)$, називається **n-кратною особливою точкою**, якщо в точці $t_0 \in (a, b)$ виконуються умови:

$$\vec{r}'(t_0) = \vec{r}''(t_0) = \ldots \vec{r}^{(n-1)}(t_0) = \vec{0}, \quad \vec{r}^{(n)}(t_0) \neq \vec{0}.$$

2-кратні та 3-кратні особливі точки називають, відповідно, **подвійними** та **потрійними особливими точками**.

Зупинимося детальніше на особливих точках плоских аналітичних кривих. Припустимо, що крива γ, задана рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$, лежить у площині π, аналітична на проміжку (a, b) і в точці $t_0 \in (a, b)$ виконуються умови:

1) $\vec{r}'(t_0) = \vec{r}''(t_0) = \ldots = \vec{r}^{(p-1)}(t_0) = \vec{0}$, $\vec{r}^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$;

2) $\vec{r}^{(p)}(t_0) \parallel \vec{r}^{(p+1)}(t_0) \parallel \ldots \vec{r}^{(q-1)}(t_0) \nparallel \vec{r}^{(q)}(t_0)$, $q > p$, (2.8)

тобто $\vec{r}^{(q)}(t_0)$ – наступна похідна, не колінеарна $\vec{r}^{(p)}(t_0)$. Розкладемо $\vec{r}(t)$ в ряд Тейлора в околі точки t_0 і запишемо рівність

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r}^{(p)}(t_0)\frac{(t - t_0)^p}{p!} + \ldots + \vec{r}^{(q)}(t_0)\frac{(t - t_0)^q}{q!} + \ldots,$$

у якій M – точка кривої γ, що відповідає значенню параметра t.

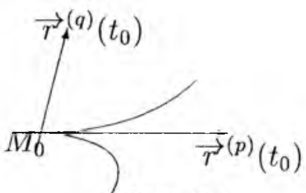
З іншого боку, вектор $\overrightarrow{M_0M}$ можна розкласти за неколінеарними векторами $\vec{r}^{(p)}(t_0)$, $\vec{r}^{(q)}(t_0)$ з деякими коефіцієнтами $\alpha(t)$, $\beta(t)$:

$$\overrightarrow{M_0M} = \alpha(t)\vec{r}^{(p)}(t_0) + \beta(t)\vec{r}^{(q)}(t_0).$$

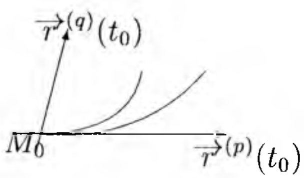
Враховуючи умови (2.8) твердимо, що головною частиною коефіцієнта $\alpha(t)$ при $t \to t_0$ є $(t - t_0)^p/p!$ (наступні члени ряду Тейлора мають більший порядок малості), а головною частиною коефіцієнта $\beta(t)$ є $(t - t_0)^q/q!$ (попередні члени ряду Тейлора колінеарні $\vec{r}^{(p)}(t_0)$, а їх складові по $\vec{r}^{(q)}(t_0)$ дорівнюють нульовому вектору; наступні члени – вищого порядку малості). Знаки коефіцієнтів $\alpha(t)$ і $\beta(t)$ збігаються із знаками їхніх головних частин, тобто при $t > t_0$ вони обидва додатні, а при $t < t_0$ знаки $\alpha(t)$, $\beta(t)$ залежать від парності показників p, q відповідно. Взагалі, при $t < t_0$ можливі чотири випадки.

1. p – парне, q – непарне; тоді $\alpha > 0$, $\beta < 0$. Особливу точку у цьому випадку називають **точкою звороту першого роду**. У цій точці крива підходить до дотичного променя з різних сторін (Мал. 2.4).

2. p – парне, q – парне; $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Особливу точку називають **точкою звороту другого роду**; в ній крива підходить до дотичного променя з однієї сторони (Мал. 2.5).



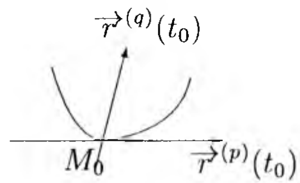
Мал. 2.4.



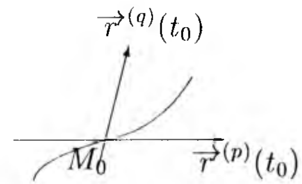
Мал. 2.5.

3. p – непарне, q – парне; $\alpha < 0$, $\beta > 0$. У цьому випадку особливість параметризації не є геометричною і крива в околі точки M_0 поводиться відносно дотичної як і у звичайній точці (Мал. 2.6). Точка M_0 називається **точкою основного типу**. Особливість параметризації можна усунути за допомогою заміни параметра. Наприклад, нехай M_0 відповідає параметру t_0, $\vec{r}(t) = \{t^3; t^4\}$, $p = 3$, $q = 4$. Зробимо заміну $\tau = t^3$, в результаті якої нова параметризація $\vec{r_1} = \vec{r_1}(\tau) = \dfrac{1}{3!}\vec{r}'''(0)\tau + \ldots$ в точці O вже не має особливості. Однак, у загальному випадку подібна заміна може знизити клас регулярності нової параметризації. Справді, якщо в ряді Тейлора вектор-функції $\vec{r}(t)$ будуть лише члени зі степенями t^{3k}, то вказана заміна $\tau = t^3$ залишить параметризацію аналітичною. Якщо ж у ряді присутній хоча б один доданок з показником степеня, який не ділиться на 3, то параметризація $\vec{r_1}(\tau)$ набуває скінченного класу регулярності $C^{(k)}$, $k \neq \infty$. Наприклад, парабола $\vec{r}(t) = \{t^3; t^6\}$, $p = 3$, $q = 6$, має особливість у точці O. Заміна $\tau = t^3$ усуває цю особливість: $\vec{r_1}(\tau) = \{\tau, \tau^2\}$.

4. p – непарне, q – непарне; $\alpha < 0$, $\beta < 0$. Особливу точку називають **точкою перегину**; в ній крива перегинається через дотичну пряму (Мал. 2.7).



Мал. 2.6.



Мал. 2.7.

Наприклад, $\vec{r}(t) = \{t^3; t^5\}$, $p = 3$, $q = 5$. Тут точка O є особливою точкою кривої в класі $C^{(\omega)}$. У той же час інша параметризація даної кривої $\vec{r_1}(\tau) = \{\tau, \operatorname{sgn}\tau \cdot |\tau|^{5/3}\}$

відноситься до класу $C^{(1)}$ і ця точка не є особливою у новій параметризації.

Зауваження 2.1. *Проведені дослідження залишаються правильними і у випадку, коли* $\gamma \in C^{(k)}$, *де* $k < +\infty$ *(тобто параметризація* $\vec{r}(t)$ *не обов'язково є аналітичною).*

Припустимо, що плоска крива γ задається загальним рівнянням $F(x, y) = 0$. Із теореми 2.5 випливає, що якщо F – регулярна функція своїх змінних і в точці $M_0(x_0; y_0)$ частинні похідні $F_x(x_0; y_0)$, $F_y(x_0; y_0)$ не перетворюються в нуль одночасно, то існує окіл точки M_0, в якому частина кривої γ визначається рівнянням $y = \varphi(x)$. Цю частину кривої називають **простим відрізком кривої**. Точки кривої γ, які володіють указаною властивістю, називаються **звичайними**; у протилежному випадку – **особливими**. Отже, особливими можуть бути лише ті точки кривої γ, в яких

$$F_x(x; y) = F_y(x; y) = 0. \qquad (2.9)$$

Якщо в точці M_0 виконуються співвідношення (2.9), і в цій точці хоча б одна із частинних похідних другого порядку F_{xx}, F_{xy}, F_{yy} відмінна від нуля, то особливу точку M_0 називають **подвійною**. Взагалі, якщо в точці M_0 всі частинні похідні від F до $(n-1)$-го порядку включно перетворюються в нуль, але серед похідних n-го порядку є хоча б одна відмінна від нуля, то M_0 називають n-**кратною особливою точкою**.

Дослідимо будову кривої в околі подвійної особливої точки. Для цього припустимо, що частина кривої в цьому околі є простим відрізком, який містить точку M_0. Нехай $y = \varphi(x)$ – рівняння цього відрізка. Оскільки простий відрізок належить кривій, то маємо тотожність $F(x, \varphi(x)) \equiv 0$.

Диференціюючи цю тотожність, отримуємо

$$F_x + +F_y \cdot \varphi' = 0,$$

$$F_{xx} + 2F_{xy}\varphi' + F_{yy}(\varphi')^2 + F_y\varphi'' = 0. \qquad (2.10)$$

Оскільки $F_x(x_0, y_0) = 0$, $F_y(x_0, y_0) = 0$ (точка M_0 – особлива), то система (2.10) у точці $M_0(x_0; y_0)$ набуває вигляду

$$F_{xx}|_{M_0} + 2F_{xy}|_{M_0} \cdot \varphi'(x_0) + F_{yy}|_{M_0} \cdot (\varphi'(x_0))^2 = 0. \qquad (2.11)$$

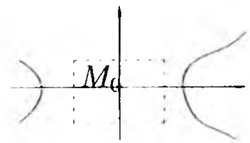
Число $\varphi'(x_0)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної у точці $M_0(x_0; y_0)$ до простого відрізка $y = \varphi(x)$, який є частиною кривої в околі точки M_0. Якщо (2.11) трактувати як квадратне рівняння відносно $k := \varphi'(x_0)$, то дискримінант цього рівняння має вигляд

$$D = 4(F_{xy}|_{M_0})^2 - 4F_{xx}|_{M_0} \cdot F_{yy}|_{M_0} = -4\begin{vmatrix} F_{xx}|_{M_0} & F_{xy}|_{M_0} \\ F_{yx}|_{M_0} & F_{yy}|_{M_0} \end{vmatrix} \equiv$$
$$\equiv -4\delta.$$

Розглянемо три можливі випадки.

1. Якщо $\delta > 0$, то рівняння (2.11) не має дійсних коренів (простого відрізка, яким зображається частина кривої, не існує). Більш детальні дослідження показують, що в досить малому околі точки M_0 взагалі немає точок кривої, окрім самої точки M_0. Такий геометричний результат (дещо несподіваний) пояснюється тим, що крива визначалася як множина точок площини, координати яких задовольняють рівняння $F(x, y) = 0$.

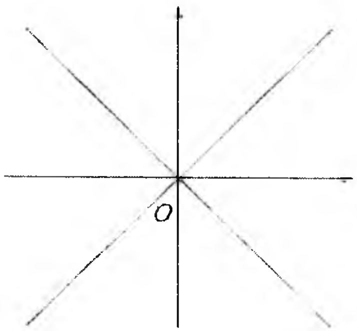
Існування точок кривої, які є "ізольованими" від інших точок, є наслідком такого означення. Така подвійна особлива точка кривої називається **ізольованою**.



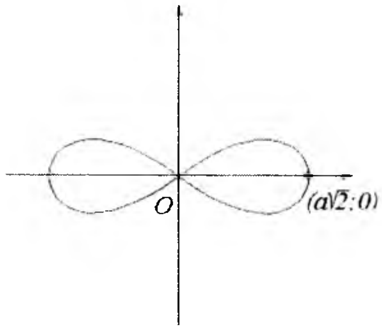
2. Якщо $\delta < 0$, то рівняння (2.11) має два дійсні різні корені: $(\varphi'(x_0))_1 \neq (\varphi'(x_0))_2$. Крива в околі подвійної особливої точки зображається двома різними простими відрізками з різними дотичними у спільній точці M_0 (точка самоперетину). У цьому випадку точку M_0 називають **вузловою точкою** або **точкою самоперетину**. Простішим

прикладом вузлової точки є точка (0; 0) кривої $y^2 - x^2 = 0$ (див. Мал. 2.8). Іншим прикладом є точка (0; 0) лемніскати $(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4$ (Мал. 2.9).

2. Якщо $\delta = 0$, то $(\varphi'(x_0))_1 = (\varphi'(x_0))_2$. Крива зображається двома простими відрізками із спільною дотичною у точці M_0, які можуть розміщуватися з різних сторін відносно дотичної (точка звороту 1-го роду) або з однієї сторони відносно дотичної (точка звороту 2-го роду). Така подвійна особлива точка називається **точкою звороту**.



Мал. 2.8.



Мал. 2.9.

§2.4. Дотик кривих. Стичне коло, стична площина. Сім'ї кривих

Нехай A, B – дві непорожні множини простору $\mathcal{E}_3$. Віддаллю між множинами A, B називається число

$$\rho(A, B) := \inf_{\substack{X \in A \\ Y \in B}} \{\rho(X, Y)\} \equiv \inf_{\substack{X \in A \\ Y \in B}} \{|\overrightarrow{XY}|\}.$$

Якщо одна із цих множин, наприклад А, складається з однієї точки X, то приходимо до поняття віддалі від точки X до множини B:

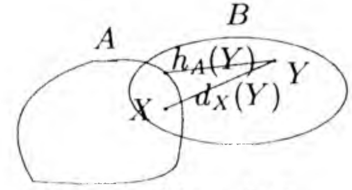
$$\rho(X, Y) := \inf_{Y \in B} \{\rho(X, Y)\} \equiv \inf_{Y \in B} \{|\overrightarrow{XY}|\}.$$

Якщо множини A та B мають хоча б одну спільну точку, то зрозуміло, що $\rho(A, B) = 0$. Але тут виникає таке поняття, як дотик множин. Отже, нехай A, B – такі множини простору $\mathcal{E}_3$, що $X \in A \cap B$, Y – довільна точка множини B (Мал. 2.10).

Означення 2.9. *Множина A має дотик порядку n, $n \in \mathbb{N}$, з множиною B у точці X, якщо*

$$\lim_{Y \to X} \frac{h_A(Y)}{d_X(Y)} = 0,$$

де $h_A(Y)$ – віддаль від точки Y до множини A, $d_X(Y)$ – віддаль від точки Y до точки X.

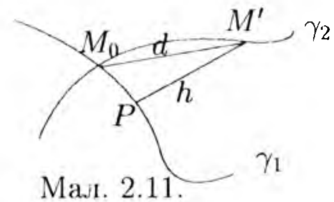


Мал. 2.10.

Якщо нагадати означення дотичної до кривої в точці і взяти за множину A дотичну g (пряму, яка проходить через точку $X = M$), за B – криву γ, M – точка кривої γ, то g і γ у точці M мають дотик 1-го порядку.

У диференціальній геометрії важливу роль відіграють фігури, які мають у спільних точках дотик 2-го та вищих порядків.

Нехай γ_1, γ_2 – дві криві, які мають принаймні одну спільну точку M_0: $M_0 \in \gamma_1 \cap \gamma_2$ (Мал. 2.11). На кривій γ_2 візьмемо точку M' і через h позначимо віддаль від неї до кривої γ_1, а через d – віддаль до точки M_0.



Мал. 2.11.

Означення 2.10. *Крива γ_2 має з кривою γ_1 у точці M_0 дотик порядку n, якщо* $\lim\limits_{M' \to M_0} \dfrac{h}{d} \equiv \lim\limits_{d \to 0} \dfrac{h}{d} = 0.$

Теорема 2.9. *Нехай γ_1 і γ_2 – регулярні плоскі криві, які мають спільну точку $M_0(x_0; y_0)$; $\varphi(x; y) = 0$ – рівнян-*

ня кривої γ_1, $x = x(t)$, $y = y(t)$ – рівняння кривої γ_2, причому $\left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{M_0}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{M_0}\right)^2 \neq 0$. *Для того, щоб у точці M_0 крива γ_2 мала з кривою γ_1 дотик n-го порядку, необхідно і досить, щоб при $t = t_0$, яке відповідає точці M_0, виконувалися умови:*

$$\varphi(x(t_0), y(t_0)) = 0, \frac{d}{dt}\varphi(x(t_0), y(t_0)) = 0, \dots,$$

$$\frac{d^n}{dt^n}\varphi(x(t_0), y(t_0)) = 0.$$

Доведення. Нехай M' – точка кривої γ_2, $\vec{r}(t)$ – її радіус-вектор. Тоді $d = |\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)|$. Для вектор-функції $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t)\}$ із формули Тейлора випливає, що

$$d = |\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)| = |\vec{r}\,'(t_0)(t - t_0) + \varepsilon(\Delta t)|, \ \Delta t = t - t_0,$$

$$\frac{\varepsilon(\Delta t)}{\Delta t} \to 0, \ \Delta t \to 0.$$

Отже, для точок $M'(x'; y')$, $x' = x(t)$, $y' = y(t)$, близьких до M_0, віддаль між ними має порядок Δt: $\dfrac{d}{\Delta t} \to |\vec{r}\,'(t_0)| \neq 0$, $\Delta t \to 0$.

Оцінимо порядок величини h. Передусім переконаємося у тому, що при фіксованій точці $M' \in \gamma_2$ віддаль h реалізується в тій точці $P \in \gamma_1$, де вектор $\overrightarrow{PM'}$ буде нормальним для кривої γ_1 (Мал. 2.11). Справді, нехай $\vec{g}(s)$ – параметризація частини γ_1 в околі точки M_0. Квадрат віддалі від $M' \in \gamma_2$ до точок $P \in \gamma_1$ дорівнює $(\vec{g}(s) - \vec{r}(t), \vec{g}(s) - \vec{r}(t))$. Отже, мінімум цих віддалей досягається тоді, коли

$$\frac{d}{dt}(\vec{g}(s) - \vec{r}(t), \vec{g}(s) - \vec{r}(t)) = 2\left(\vec{g}(s) - \vec{r}(t), \frac{d\vec{g}(s)}{ds}\right) = 0.$$

Таким чином, вектор $\overrightarrow{M'P} = \vec{g}(s) - \vec{r}(t)$ ортогональний до вектора $\dfrac{d\vec{g}(s)}{ds}$, який є нормальним для кривої γ_1.

Нехай ξ, η – координати орта нормалі $\vec{\nu} = \{\xi; \eta\} = \dfrac{\overrightarrow{M'P}}{|\overrightarrow{M'P}|}$. Із рівняння нормалі $X = x' + \lambda\xi$, $Y = y' + \lambda\eta$, $M'(x'; y')$, $\lambda \in \mathbb{R}$ випливає, що координати точки $P(x; y)$ мають такі значення: $x = x' + h\xi$, $y = y' + h\eta$. Оскільки ця точка лежить на кривій γ_1, то $\varphi(x; y) = \varphi(x' + h\xi; y' + h\eta) = 0$. Вважаючи, що величини x', y', ξ, η – фіксовані, введемо до розгляду функцію $\Phi(h) \equiv \varphi(x' + h\xi, y' + h\eta)$. Розкладемо тепер цю функцію в околі нуля за формулою Тейлора і підставимо цей розклад в попереднє рівняння; в результаті одержимо, що

$$\varphi(x', y') + (\varphi_x(M')\xi + \varphi_y(M')\eta)h + o(h) = 0.$$

Розглянемо градієнт $\operatorname{grad}\varphi = \{\varphi_x; \varphi_y\}$. Тоді останню рівність можна записати у вигляді

$$\varphi(x', y') + h(\vec{\nu}, \operatorname{grad}\varphi(M')) + o(h) = 0.$$

Скалярний добуток $(\vec{\nu}, \operatorname{grad}\varphi(M'))$ при $M' \to M$ прямує до скалярного добутку орта нормалі $\vec{\nu_0}$ кривої γ_1 у точці M_0 і $\operatorname{grad}\varphi(M_0)$. Оскільки ці вектори колінеарні, то їхній скалярний добуток відмінний від нуля. Отже,

$$\frac{\varphi(x(t), y(t))}{h} \to -(\vec{\nu_0}, \operatorname{grad}\varphi(M_0)) \neq 0$$

при $\Delta t \to 0$. Останнє означає, що при русі вздовж кривої γ_2 величина h має порядок функції φ.

Із отриманих оцінок величин h, d випливає, що при $\Delta t \to 0$

$$\left(\frac{d}{d^n} \to 0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{\varphi(x(t), y(t))}{\Delta t^n} \to 0\right).$$

Розкладаючи функцію $\varphi(x(t), y(t))$ в околі точки t_0 за формулою Тейлора за степенями $\Delta t = t - t_0$ бачимо, що остання умова може бути виконаною тоді і тільки тоді, коли в цій точці всі похідні функції $\varphi(x(t), y(t))$ до n-го порядку включно дорівнюють нулю.

Теорема доведена.

Як приклад застосування попередньої теореми розглянемо задачу про стичне коло плоскої кривої.

Означення 2.11. *Коло, яке має з плоскою кривою спільну точку, лежить у площині цієї кривої і має з кривою у спільній точці дотик другого порядку, називається стичним.*

Нехай плоска крива є регулярною і задається рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$. Знайдемо рівняння стичного кола цієї кривої у точці, що відповідає параметру $t = t_0$.

Рівняння стичного кола шукаємо у вигляді $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, де $M(a;b)$ – центр, а R - радіус кола. Тоді, згідно з теоремою 2.9 маємо, що

$$\varphi(x,y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2(x-a)\frac{dx}{dt} + 2(y-b)\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2(x-a)\frac{d^2x}{dt^2} + 2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 2(y-b)\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Нехай $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = x'(t_0)$, $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} = y'(t_0)$, $\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=t_0} = x''(t_0)$, $\left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=t_0} = y''(t_0)$. Для визначення a, b, R отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} (x_0-a)^2 + (y_0-b)^2 = R^2, \\ x'(t_0)(x_0-a) + y'(t_0)(y_0-b) = 0, \\ x''(t_0)(x_0-a) + y''(y_0-b) = -x'^2(t_0) - y'^2(t_0). \end{cases} \tag{2.12}$$

Припустимо, що точка $M_0(x(t_0); y(t_0))$ не є точкою розпрямлення; тобто

$$\Delta := \begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тоді система (2.12) має єдиний розв'язок

$$\begin{aligned} a &= x_0 - \frac{y'(t_0)(x'^2(t_0) + y'^2(t_0))}{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)}, \\ b &= y_0 + \frac{x'(t_0)(x'^2(t_0) + y'^2(t_0))}{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)}, \\ R &= \frac{(x'^2(t_0) + y'^2(t_0))^{3/2}}{|x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)|} \end{aligned} \tag{2.13}$$

(для знаходження a, b розглядаємо підсистему системи (2.12), яка складається з другого та третього рівнянь; цю систему розв'язуємо за правилом Крамера, головним визначником якої є визначник Δ; знайшовши a та b з першого рівняння системи (2.12) знаходимо R).

Підсумок. *Якщо γ – регулярна крива і звичайна точка $M_0(x_0; y_0)$ кривої не є точкою розпрямлення, то в цій точці існує стичне коло, координати центра і радіус якого обчислюються за формулами (2.13).*

Зауваження 2.2. Нехай крива γ явно задана рівнянням $y = y(x)$. Тоді формули (2.13) набувають вигляду

$$a = x_0 - \frac{1 + y'^2(t_0)}{y''(t_0)} y'(t_0),$$

$$b = y_0 + \frac{1 + y'^2(t_0)}{y''(t_0)},$$

$$R = \frac{(1 + y'^2(t_0))^{3/2}}{|y''(t_0)|}.$$

Стична площина. Нехай γ – деяка крива в $\mathcal{E}_3$, $M \in \gamma$ – звичайна точка.

Означення 2.12. *Площина, яка містить звичайну точку P кривої γ і має у цій точці з кривою дотик другого порядку, називається стичною площиною кривої γ у точці P.*

Теорема 2.10. *Через кожну звичайну точку P двічі неперервно диференційовної кривої, яка не є точкою розпрямлення, проходить єдина стична площина. Якщо крива є годографом вектор-функції $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$, то вектори $\overrightarrow{r}'(t)$, $\overrightarrow{r}''(t)$ лежать у стичній площині. Якщо точка P є точкою розпрямлення, то кожна площина, яка містить дотичну до кривої, є стичною.*

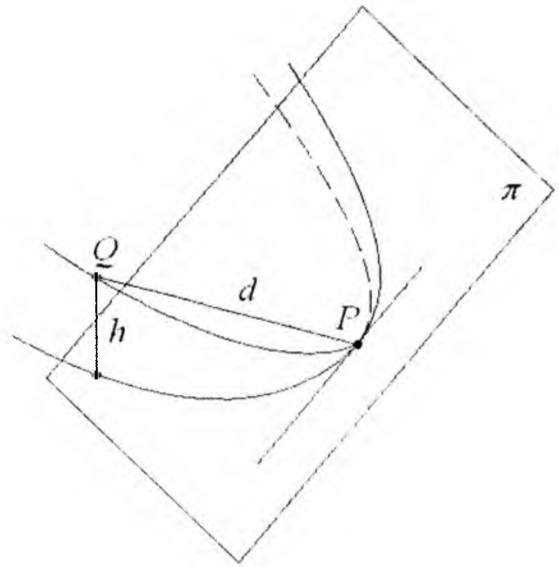
Доведення. Нехай π - стична площина кривої γ у точці P, яка відповідає значенню параметра t, Q – точка кривої γ, яка відповідає значенню параметра $t + \Delta t$ (див. Мал. 2.12), $\overrightarrow{e}$ – одиничний вектор нормалі площини π. Віддаль h від точки Q до площини π дорівнює $|(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{r}(t + \Delta t) - \overrightarrow{r}(t))|$, віддаль d від цієї точки до P дорівнює $|\overrightarrow{r}(t + \Delta t) - \overrightarrow{r}(t)|$. Тоді

$$\frac{h}{d^2} = \frac{|(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{r}(t + \Delta t) - \overrightarrow{r}(t))|}{|\overrightarrow{r}(t + \Delta t) - \overrightarrow{r}(t)|^2} =$$

$$= \frac{|(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{r}'(t)\Delta t + \frac{1}{2}\overrightarrow{r}''(t)\Delta t^2 + \overrightarrow{\varepsilon_1}(t, \Delta t))|}{|\overrightarrow{r}'(t)\Delta t + \overrightarrow{\varepsilon_2}(t, \Delta t)|^2} =$$

$$= \frac{\left|\frac{(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{r}'(t))}{\Delta t} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{r}''(t)) + \frac{\varepsilon'_1(t,\Delta t)}{\Delta t^2}\right|}{|\overrightarrow{r}'(t)|^2 + \varepsilon'_2(t, \Delta t)},$$

де $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\varepsilon'_1(t, \Delta t)}{\Delta t^2} = 0$, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \varepsilon'_2(t, \Delta t) = 0$. Оскільки $\dfrac{h}{d^2} \to 0$ при $\Delta t \to 0$, а $|r'(t)| \neq 0$, то $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{r}'(t)) = 0$, $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{r}''(t)) = 0$. Таким чином, якщо стична площина існує, то вектори $\overrightarrow{r}'(t)$ та $\overrightarrow{r}''(t)$ паралельні цій площині.



Мал. 2.12.

Доведемо, що стична площина існує. Для цього візьмемо площину π, паралельну векторам $\overrightarrow{r}'(t)$, $\overrightarrow{r}''(t)$ (щодо нульового вектора, то будь-яка площина вважається паралельною такому вектору). Тоді $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{r}'(t)) = 0$, $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{r}''(t)) = 0$ і, отже,

$$\frac{h}{d^2} = \frac{\left|\frac{\varepsilon'_1}{\Delta t^2}\right|}{|\overrightarrow{r}'(t)|^2 + \varepsilon'_2} \to 0, \quad \Delta t \to 0.$$

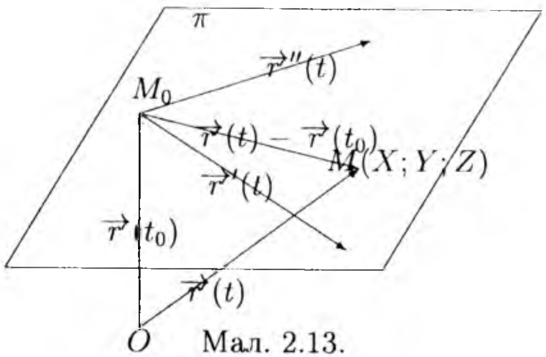
Отже, у кожній звичайній точці кривої існує стична площина. Вона єдина, якщо вектори $\overrightarrow{r}'(t)$, $\overrightarrow{r}''(t)$ не колінеарні (тобто відповідна точка кривої не є точкою розпрямлення). Якщо ж ці вектори колінеарні (або $\overrightarrow{r}''(t) = \overrightarrow{0}$), то кожна площина, проведена через дотичну до кривої, буде стичною площиною.

Теорема доведена.

Якщо крива γ задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то з теореми 2.10 випливає, що рівняння стичної площини в точці $P_0(x(t_0); y(t_0); z(t_0))$ має вигляд

$$\begin{vmatrix} X - x(t_0) & Y - y(t_0) & Z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0,$$

де X, Y, Z – координати рухомої точки стичної площини (тут ми скористалися тим, що вектори $\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$, $\vec{r}'(t_0)$, $\vec{r}''(t_0)$ – компланарні, тобто $(\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0), \vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)) = 0$ (див. Мал. 2.13)).



Мал. 2.13.

Сім'ї кривих. Множина плоских кривих, які визначаються рівнянням $F(x, y, c) = 0$, де c – деяка стала (параметр сім'ї кривих), називається **однопараметричною сім'єю кривих**. Стала c набуває значень з деякої області. Наприклад, рівняння $x^2 + y^2 = c^2$ є рівнянням сім'ї концентричних кіл з центром у початку координат. Якщо $c_1 \le c \le c_2$, то це – рівняння сім'ї концентричних кіл, кожне з яких має радіус, який більший або рівний за число c_1, або менший або рівний за число c_2. Можна розглядати сім'ї кривих, залежних від n параметрів. Тоді n-параметрична сім'я плоских

кривих має рівняння

$$F(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0,$$

де c_1, …, c_n – параметри сім'ї, кожний з яких має свою область зміни. Наприклад, рівняння $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = c_3^2$ визначає трипараметричну сім'ю кіл координатної площини XOY з центрами у точках $(c_1; c_2)$ та радіусом c_3.

В аналітичній геометрії розглядають однопараметричні сім'ї прямих на площині: власні та невласні жмутки прямих; сукупність всіх прямих площини складає двопараметричну сім'ю, сукупність всіх прямих тривимірного простору, які утворюють двопараметричну сім'ю, називають **конгруенцією прямих**, трипараметрична сім'я прямих називається **комплексом прямих**.

Розглянемо однопараметричну сім'ю $\{\gamma_\alpha\}$ гладких кривих на площині, залежних від параметра α. Гладка крива γ називається **обвідною сім'ї кривих** $\{\gamma_\alpha\}$, якщо у кожній своїй точці вона дотикається хоча б однієї кривої з сім'ї $\{\gamma_\alpha\}$ і кожним своїм відрізком дотикається до нескінченної множини кривих цієї сім'ї. Наприклад, гладка крива без особливих точок та без точок розпрямлення є обвідною однопараметричної сім'ї своїх дотичних.

Має місце наступне твердження: **обвідна сім'ї кривих $\{\gamma_\alpha\}$ з рівнянням сім'ї $\varphi(x, y, \alpha) = 0$, $a \le \alpha \le b$, де φ – неперервно диференційовна функція за всіма аргументами така, що $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 \ne 0$, задається рівняннями**

$$\varphi(x, y, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial\varphi(x, y, \alpha)}{\partial\alpha} = 0.$$

Доведення. Для кожної точки $(x; y)$ обвідної треба вказати таке $\alpha \in [a; b]$, що сукупність x, y, α є розв'язком системи $\varphi(x, y, \alpha) = 0$, $\dfrac{\partial\varphi(x, y, \alpha)}{\partial\alpha} = 0$.

Нехай $M(x;y)$ – довільна точка обвідної. Тоді в точці M дотикається нескінченна множина кривих: γ_{α_1}, γ_{α_2}, ..., або таких кривих в сім'ї $\{\gamma_\alpha\}$ скінченна кількість: γ_{α_1}, ..., γ_{α_n}. Припустимо, що обвідна у точці $M(x;y)$ дотикається нескінченної кількості кривих γ_{α_1}, γ_{α_2}, ... Тоді, якщо числова послідовність α_1, α_2, ... збігається до числа $\alpha_0 \in [a;b]$, то можна вказати такі k і l, що при $k \to \infty$ і $l \to \infty$ $\alpha_k \to \alpha_0$, $\alpha_l \to \alpha_0$ і для $\alpha_k < \alpha^* < \alpha_l$ маємо

$$\varphi(x,y,\alpha_k) - \varphi(x,y,\alpha_l) = (\alpha_k - \alpha_l)\frac{\partial\varphi(x,y,\alpha^*)}{\partial\alpha} = 0,$$

бо $\varphi(x,y,\alpha_k) = 0$ і $\varphi(x,y,\alpha_l) = 0$. Тому і $\dfrac{\partial\varphi(x,y,\alpha_0)}{\partial\alpha} = 0$.

Якщо ж у точці M обвідної дотикається скінченна кількість кривих γ_{α_1}, ..., γ_{α_n} сім'ї $\{\gamma_\alpha\}$, то допустимо, що висновок твердження не вірний, тобто для будь-якого α_k, $k \in \{1,\ldots,n\}$, $\dfrac{\partial\varphi(x,y,\alpha_k)}{\partial\alpha} \neq 0$. За цих умов можна показати, що вздовж довільного відрізка обвідної до неї дотикається скінченна кількість кривих сім'ї $\{\gamma_\alpha\}$, а це суперечить означенню обвідної.

Систему рівнянь $\varphi(x,y,\alpha) = 0$, $\dfrac{\partial\varphi(x,y,\alpha)}{\partial\alpha} = 0$ можуть задовольняти криві, які не є обвідними для сім'ї кривих $\{\gamma_\alpha\}$. Тому ці рівняння називають рівняннями **дискримінантної кривої** в сім'ї кривих $\varphi(x,y,\alpha) = 0$. Для знаходження обвідної сім'ї кривих потрібно із точок дискримінантної кривої вилучити особливі точки.

Наприклад, знайдемо обвідну сім'ї кривих

$$(x-\alpha)^3 - (y-\alpha)^3 = 0.$$

Нехай $\varphi(x,y,\alpha) = (x-\alpha)^3 - (y-\alpha)^3$. Тоді

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = -3(x-\alpha)^2 + 2(y-\alpha)$$

і для дискримінантної кривої маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} (y-\alpha)^2 = (x-\alpha)^3, \\ y-\alpha = \frac{3}{2}(x-\alpha)^2. \end{cases}$$

Вилучивши параметр α з цієї системи, отримаємо рівняння дискримінантної кривої у вигляді

$$(y-x)\left(y-x+\frac{4}{27}\right) = 0.$$

Знайдемо особливі точки кривих заданої сім'ї:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 3(x-\alpha)^2 = 0, \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -2(y-\alpha) = 0, (x-\alpha)^3 = (y-\alpha)^2.$$

Звідси дістаємо, що всі особливі точки кривих даної сім'ї належать прямій $y = x$. Отже, обвідною даної сім'ї кривих є пряма $y = x - \dfrac{4}{27}$.

§2.5. Довжина дуги кривої

Нехай $\gamma \subset \mathcal{E}_3$ – елементарна крива, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in (a,b)$ її векторно-параметричне рівняння. Зафіксуємо $t_0 > a$, $T < b$. Ділянку кривої на відрізку $[t_0;T] \subset (a;b)$ називатимемо її дугою. Розглянемо правильне (строго монотонне) розбиття відрізка $[t_0;T]$: $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$; відповідні точки на кривій γ позначимо через $M_0 = M_0(t_0)$, $M_1 = M_1(t_1)$, ..., $M_n = M_n(t_n)$. З'єднаємо ці точки відрізками прямих; в результаті отримаємо ламану, вписану в дугу кривої. Ламана $M_0M_1\ldots M_n$ називається **правильно вписаною в дугу кривої**, якщо її вершини на кривій слідують у тому ж порядку (тобто без зворотів), що і їхні прообрази на відрізку $[t_0;T]$. Позначимо через L_n довжину цієї ламаної. Величину

$$\Delta t \equiv \max\{\Delta t = t_1 - t_0, \ldots, \Delta t_n = t_n - t_{n-1}\}$$

називають **параметром (рангом)** розбиття відрізка $[t_0; T]$. Зрозуміло, що якщо $\Delta t \to 0$, то $n \to \infty$. Якщо границя $s := \lim\limits_{\Delta t \to 0} L_n$ існує і не залежить від способу розбиття відрізка $[t_0; T]$, то вона називається **довжиною дуги кривої**, а сама дуга – **спрямною**. Елементарну криву називають спрямною, якщо вона спрямна на кожній своїй дузі. Загальну криву називають спрямною, коли вона спрямна на кожній своїй елементарній ділянці.

Теорема 2.11. *Неперервно-диференційовна крива є спрямною. Довжина дуги для даної параметризації $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$, $t \in [t_0; T]$ обчислюється за формулою*

$$s = \int\limits_{t_0}^{T} |\overrightarrow{r}'(t)| dt. \tag{2.14}$$

Доведення. Введемо позначення: $\overrightarrow{\Delta_i r} = \overrightarrow{r}(t_i) - \overrightarrow{r}(t_{i-1})$, $\overrightarrow{r}'_i = \overrightarrow{r}'(t_i)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ і оцінимо різницю

$$|L_n - s| = \left| \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{\Delta_i r}| - \int\limits_{t_0}^{T} |\overrightarrow{r}'(t)| dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{\Delta_i r}| - \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{r}'_i| \Delta t_i \right| + \left| \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{r}'_i| \Delta t_i - \int\limits_{t_0}^{T} |\overrightarrow{r}'(t)| dt \right| \equiv$$

$$\equiv A + B.$$

Доданок $B \to 0$ при $\Delta t \to 0$ за означенням інтеграла. Для першого доданку маємо

$$A = \left| \sum_{i=1}^{n} (|\overrightarrow{\Delta_i r}| - |\overrightarrow{r}'_i| \Delta t_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{\Delta_i r} - \overrightarrow{r}'_i \Delta t_i|$$

(тут використана нерівність $|\overrightarrow{a}| - |\overrightarrow{b}| \leq |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|$). У свою чергу, для кожного окремого доданку останньої суми отримаємо оцінку

$$|\overrightarrow{\Delta_i r} - \overrightarrow{r}'_i \Delta t_i| = \left| \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \overrightarrow{r}'(t) dt - \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \overrightarrow{r}'_i dt \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} (\overrightarrow{r}'(t) - \overrightarrow{r}'_i) dt \right| \leq \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} |\overrightarrow{r}'(t) - \overrightarrow{r}'_i| dt.$$

Оскільки вектор-функція $\overrightarrow{r}'(t)$ неперервна на відрізку $[t_0; T]$, то вона рівномірно неперервна на цьому відрізку, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall t, s \in [t_0; T] : |t - s| < \delta \Rightarrow |\overrightarrow{r}'(t) - \overrightarrow{r}'(s)| < \varepsilon.$$

Отже, якщо всі відрізки $[t_{i-1}, t_i]$ по довжині менші за δ, то

$$\forall t \in [t_{i-1}, t_i] : |\overrightarrow{r}'(t) - \overrightarrow{r}'_i| = |\overrightarrow{r}'(t) - \overrightarrow{r}'(t_{i-1})| < \varepsilon.$$

Таким чином,

$$\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} |\overrightarrow{r}'(t) - \overrightarrow{r}'_i| dt < \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon dt = \varepsilon \Delta t_i, \; |\overrightarrow{\Delta_i r} - \overrightarrow{r}'_i \Delta t_i| \leq \varepsilon \Delta t_i,$$

$$A \leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \Delta t_i = \varepsilon (t_1 - t_0 + t_2 - t_1 + \ldots + T - t_{n-1}) = \varepsilon (T - t_0).$$

Зменшуючи ε і, відповідно йому – ранг розбиття, перший доданок можемо зробити як завгодно малим, тобто $A \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Теорема доведена.

Якщо у формулі (2.14) T замінити змінною t, то довжина дуги стає функцією від t, $t_0 < t \le T$:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\vec{r}'(\tau)|d\tau.$$

Продиференціювавши останню рівність по t і беручи до уваги те, що підінтегральна функція $|\vec{r}'(t)|$ неперервна при всіх $t \in [t_0; T]$, маємо

$$\frac{ds(t)}{dt} = |\vec{r}'(t)|.$$

Якщо на дузі, що відповідає відрізку $[t_0; T]$, немає особливих точок, то $|\vec{r}'(t)| > 0$, тобто функція $s(t)$ монотонно зростає на цьому відрізку. Цього досить для існування оберненої до $s = s(t)$ функції $t = t(s)$, визначеної на відрізку $[s(t_0); s(T)] = J$.

У такому випадку на відрізку J дугу кривої γ можна задати векторним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t(s)) \equiv \vec{r_1}(s)$, у якому роль параметра відіграє довжина дуги кривої.

Означення 2.13. *Якщо крива γ задана на відрізку $[s_1; s_2] \subset \mathbb{R}$ рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(s)$, де s – довжина дуги вздовж цієї кривої, то параметр s називають натуральним (природним) і кажуть, що крива γ задана в натуральній параметризації.*

Якщо крива γ задана рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(s)$ у натуральній параметризації, то і в цьому випадку має місце формула (2.14):

$$s = \int_{s_1}^{s} |\vec{r}'(\tau)|d\tau, \quad s_1 < s \le s_2.$$

Звідси дістаємо, що $|\vec{r}'(s)| = 1, \forall s \in [s_1; s_2]$. Отже, **похідна вектор-функції $\vec{r}(s)$ по натуральному параметру є одиничним вектором**.

На завершення наведемо формули для обчислення довжин дуг регулярних кривих у випадку аналітичного задання цих кривих.

1. Крива задана рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Тоді

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{r}'(t)|dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt.$$

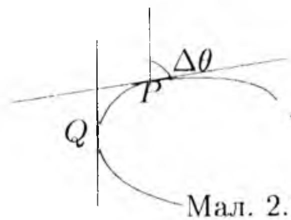
2. Крива задана рівняннями $y = y(x)$, $z = z(x)$:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)}dx.$$

Для плоских кривих, розміщених у площині XOY, у цих формулах слід покласти $z' = 0$.

§2.6. Кривина та скрут кривої

Нехай P – довільна точка регулярної кривої γ, Q – точка кривої, близька до P. Позначимо через $\Delta\theta$ кут між дотичними до кривої у точках P та Q, через $|\Delta s|$ – довжину дуги відрізка PQ (див. Мал. 2.14).



Мал. 2.14.

Означення 2.14. *Кривиною кривої γ у точці P називається границя відношення $\frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}$ при $Q \to P$, тобто*

$$k := \lim_{Q \to P} \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|} = \lim_{|\Delta s| \to 0} \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}$$

(за умови, що вказана границя існує).

Теорема 2.12. *У кожній звичайній точці двічі неперервно диференційовної кривої існує єдина кривина. Якщо крива задана натуральною параметризацією $\vec{r} = \vec{r}(s)$, то $k = |\vec{r}\,''(s)|$.*

Доведення. Нехай точкам P і Q відповідають значення параметрів s і $s + \Delta s$ відповідно. Кут $\Delta\theta$ дорівнює куту між одиничними дотичними векторами $\vec{\tau}(s) = \vec{r}\,'(s)$ та $\vec{\tau}(s+\Delta s) = \vec{r}\,'(s+\Delta s)$. Оскільки вектори $\vec{\tau}(s)$ та $\vec{\tau}(s+\Delta s)$ одиничні і утворюють кут $\Delta\theta$, то

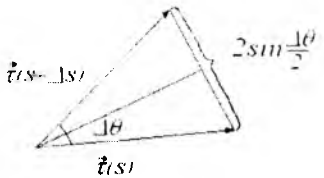
$$|\vec{\tau}(s + \Delta s) - \vec{\tau}(s)| = 2\sin\frac{\Delta\theta}{2}$$

(див. Мал. 2.15). Тому

$$\frac{|\vec{\tau}(s + \Delta s) - \vec{\tau}(s)|}{|\Delta s|} = \frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{|\Delta s|} = \frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\,\frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}.$$

Оскільки $\Delta\theta \to 0$ при $|\Delta s| \to 0$, то врахувавши неперервність $\vec{\tau}(s)$ і перейшовши до границі в останньому співвідношенні при $|\Delta s| \to 0$ знайдемо, що k існує і $k = |\vec{r}\,''(s)|$.

Теорема доведена.



Мал. 2.15.

Надалі домовимося похідні вектор-функції по натуральному параметру позначати символами $\dot{\vec{r}}$, $\ddot{\vec{r}}$, $\dddot{\vec{r}}$.

Знайдемо обчислювальну формулу для кривини у випадку довільного параметричного задання кривої. Отже,

нехай крива задана векторним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Знайдемо зображення другої похідної від $\vec{r}$ по s через похідні по параметру t. Маємо, що

$$\vec{r}\,' = \dot{\vec{r}} \cdot s',\ \vec{r}\,'' = \ddot{\vec{r}} \cdot s'^2 + \dot{\vec{r}} \cdot s'',\ s' \equiv s'_t = |\vec{r}\,'(t)|,$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{r}\,'}{s'} = \frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|},\ |\dot{\vec{r}}| = 1.$$

Тоді

$$s'' = \frac{d}{dt}s'_t = \frac{d}{dt}(\vec{r}\,', \vec{r}\,')^{1/2} = \frac{(\vec{r}\,', \vec{r}\,'')}{(\vec{r}\,', \vec{r}\,')^{1/2}} = \frac{(\vec{r}\,', \vec{r}\,'')}{|\vec{r}\,'|},$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{r}\,'' - \dot{\vec{r}} \cdot s''}{(s')^2} = \frac{1}{|\vec{r}\,'|^2}\left(\vec{r}\,'' - \frac{(\vec{r}\,', \vec{r}\,'')}{|\vec{r}\,'|} \cdot \frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|}\right) =$$

$$= \frac{\vec{r}\,''}{|\vec{r}\,'|^2} - \frac{(\vec{r}\,', \vec{r}\,'')}{|\vec{r}\,'|^4}\vec{r}\,'.$$

Знайдемо тепер $k = |\ddot{\vec{r}}|$. Оскільки $\dot{\vec{r}}$ – одиничний вектор, то вектор-функція $\ddot{\vec{r}}$ ортогональна до $\dot{\vec{r}}$ (див. лему 2.1). Тому

$$k = |\ddot{\vec{r}}| = |[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}]| = \left|\left[\frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|}, \frac{\vec{r}\,''}{|\vec{r}\,'|^2} - \frac{(\vec{r}\,', \vec{r}\,'')}{|\vec{r}\,'|^4}\vec{r}\,'\right]\right| =$$

$$= \frac{|[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']|}{|\vec{r}\,'|^3}.$$

З цієї формули для кривини кривої, яка задана рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ дістаємо, що

$$k^2 = \frac{\begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x' & y' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y'' & z'' \\ y' & z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'' & x'' \\ z' & x' \end{vmatrix}^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}.$$

Якщо крива плоска і розміщується в площині XOY, то

$$k^2 = \frac{(x''y' - y''x')^2}{(x'^2 + y'^2)^3}.$$

Якщо плоска крива задається рівнянням $y = y(x)$, то

$$k^2 = \frac{(y'')^2}{(1 + y'^2)^3}.$$

Зазначимо також, що крива, яка має в кожній звичайній точці кривину, рівну нулю, є або прямою, або відкритим відрізком прямої. Правильним є і обернене твердження (справді, $k = |\ddot{\vec{r}}| = 0 \Rightarrow \ddot{\vec{r}}(s) = \vec{0} \Rightarrow \vec{r}(s) = \vec{a}s + \vec{b}$, де $\vec{a}$, $\vec{b}$ – сталі вектори; навпаки, для прямої $\Delta\theta = 0 \Rightarrow k = 0$).

Зауваження 2.3. З формули $k = \dfrac{|[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']|}{|\vec{r}\,'|^3}$ випливає, що у точці розпрямлення $k = 0$, бо у такій точці $\vec{r}\,' \parallel \vec{r}\,''$.

Зауваження 2.4. Кривина кривої є миттєвою кутовою швидкістю обертання дотичної в даній точці.

Як приклад, знайдемо кривину такої важливої кривої як коло радіуса R з центром у початку координат. Рівняння такого кола має вигляд $x^2 + y^2 - R^2 = 0$. Задамо це коло параметричними рівняннями $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 \leq t < 2\pi$; тоді

$$\vec{r}(t) = R\cos t\,\vec{i} + R\sin t\,\vec{j} \equiv \{R\cos t; R\sin t\},$$

$$\vec{r}\,'(t) = \{-R\sin t; R\cos t\}.$$

Отже,

$$s = \int_0^t |\vec{r}\,'(t)|dt = \int_0^t R dt = t \cdot R,$$

тобто $t = \frac{s}{R}$. Звідси випливає, що натуральна параметризація $\vec{r} = \vec{r}(s)$ кола має вигляд

$$\vec{r}(s) = \left\{R\cos\frac{s}{R}; R\sin\frac{s}{R}\right\}.$$

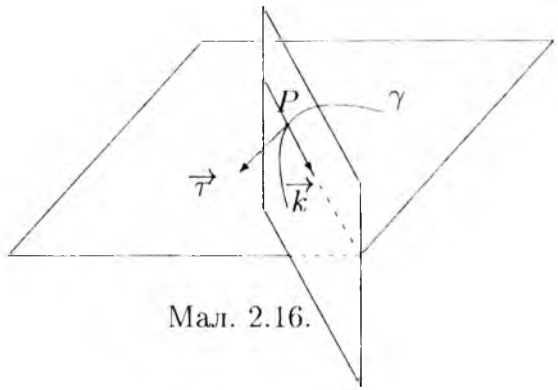
Тоді

$$\dot{\vec{r}}(s) = \left\{-\sin\frac{s}{R}; \cos\frac{s}{R}\right\},\ \ddot{\vec{r}}(s) = \left\{-\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}; -\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R}\right\},$$

$$|\ddot{\vec{r}}(s)| = \frac{1}{R}, k = |\ddot{\vec{r}}(s)| = \frac{1}{R}.$$

Таким чином, кривина кола в кожній його точці – стала величина, яка дорівнює $\frac{1}{R}$.

Зауваження 2.5. Нехай γ - регулярна крива, задана натуральною парметризацією $\vec{r} = \vec{r}(s)$, $\vec{r}\,'(s) = \dot{\vec{r}}(s)$. Вектор $\vec{k} = \ddot{\vec{r}}$ називають **вектором кривини**. Оскільки $|\dot{\vec{r}}| = 1$, то $\vec{k} \perp \dot{\vec{r}}$. Із означення похідної випливає, що вектор кривини завжди направлений у бік вгнутості кривої і є напрямним вектором прямої, яка отримується при перетині стичної площини кривої у точці P з нормальною площиною кривої у цій же точці (див. Мал. 2.16).

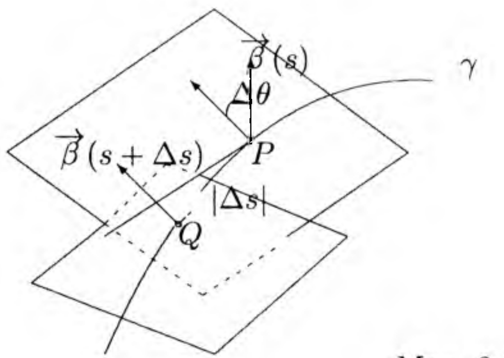


Мал. 2.16.

Нагадаємо, що пряма, яка проходить через точку кривої, перпендикулярно до дотичної до кривої в цій точці, називається нормаллю кривої. Якщо стична площина єдина, то виділяють дві прямі: **головна нормаль** – нормаль, що лежить в стичній площині; **бінормаль** – нормаль, перпендикулярна до стичної площини.

Розглянемо регулярну криву $\gamma \subset \mathcal{E}_3$ з натуральною параметризацією $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Зафіксуємо на кривій точку, в якій кривина $k(s) \neq 0$ і розглянемо вектор $\vec{\nu} = \dfrac{\ddot{\vec{r}}}{k}$. Цей вектор є одиничним і лежить в стичній площині (див. теорему 2.10 про стичну площину). Крім того, він ортогональний до вектора $\vec{\tau} = \dot{\vec{r}}$, оскільки $|\vec{\tau}| = 1$ (див. лему 2.1). Отже, вектор $\vec{\nu}$ направлений по головній нормалі кривої і є **одиничним вектором бінормалі кривої.**

Скрут кривої. Нехай P – довільна точка γ, Q – точка кривої, близька до P. Символом $\Delta\theta$ позначимо кут між стичними площинами кривої в точках P та Q, через $|\Delta s|$ довжину відрізка PQ кривої (див. Мал. 2.17). Очевидно, що величина двогранного кута $\Delta\theta$ між стичними площинами дорівнює величині лінійного кута між бінормаллями у точках P та Q кривої.



Мал. 2.17.

Означення 2.15. *Скрутом кривої γ у точці P називають границю відношення $\dfrac{\Delta\theta}{|\Delta s|}$ при $Q \to P$, тобто*

$$\chi := \lim_{Q\to P} \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|} \equiv \lim_{|\Delta s|\to 0} \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}$$

(за умови, що вказана границя існує).

Теорема 2.13. *У кожній звичайній точці тричі неперевно диференційовної кривої, яка не є точкою розпрямлення, існує єдиний скрут. Якщо лінія віднесена до натуральної параметризації, то*

$$\chi = \frac{(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}})}{k^2}.$$

Доведення. Нехай $\vec{\beta}(s)$ та $\vec{\beta}(s+\Delta s)$ – одиничні вектори бінормалі кривої в точках P та Q відповідно. Тоді $\Delta\theta = (\widehat{\vec{\beta}(s), \vec{\beta}}(s+\Delta s))$, Як і при доведенні теореми 2.12 встановлюємо, що

$$|\vec{\beta}(s+\Delta s) - \vec{\beta}(s)| = 2\sin\frac{\Delta\theta}{2}.$$

Із співвідношення

$$\frac{|\vec{\beta}(s+\Delta s) - \vec{\beta}(s)|}{|\Delta s|} = 2\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{|\Delta s|} = \frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \cdot \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}$$

випливає, що границя $\dfrac{\Delta\theta}{|\Delta s|}$ при $|\Delta s| \to 0$ існує, оскільки тоді $\Delta\theta \to 0$, і ця границя рівна $|\dot{\vec{\beta}}|$, тобто $\chi = |\dot{\vec{\beta}}|$. Вектор $\dot{\vec{\beta}}$ ортогональний до $\vec{\beta}$ (бо $|\vec{\beta}| = 1$); крім того, $\dot{\vec{\beta}}$ ортогональний до $\vec{\tau}$, оскільки $\vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{\nu}]$ і

$$\dot{\vec{\beta}} = [\dot{\vec{\tau}}, \vec{\nu}] + [\vec{\tau}, \dot{\vec{\nu}}] = [\vec{\tau}, \dot{\vec{\nu}}]\,[\dot{\vec{\tau}}, \vec{\nu}] = 0, \qquad (2.15)$$

бо $\dot{\vec{\tau}} \parallel \vec{\nu}$.

Отже, $\dot{\vec{\beta}} \parallel \vec{\nu}$, тобто

$$\dot{\vec{\beta}} = \lambda\vec{\nu} \Rightarrow |\dot{\vec{\beta}}| = |\lambda|\,|\vec{\nu}| = |\lambda| \Rightarrow |\lambda| = |\dot{\vec{\beta}}| = \chi \Rightarrow \lambda = \pm\chi.$$

Покладемо $\lambda = -\chi$. Тоді $\dot{\vec{\beta}} = -\chi\vec{\nu}$, $\chi = -(\dot{\vec{\beta}}, \vec{\nu})$. Урахувавши (2.15) знайдемо, що

$$\chi = -([\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{\nu}}], \vec{\nu}) = -\left(\left[\dot{\vec{r}}, \left(\frac{\ddot{\vec{r}}}{k}\right)'\right], \vec{\nu}\right) =$$

$$= -\left(\left[\dot{\vec{r}}, \frac{\dddot{\vec{r}}\cdot k - \ddot{\vec{r}}\cdot \dot{k}}{k^2}\right], \frac{\ddot{\vec{r}}}{k}\right) =$$

$$= -\left(\left[\dot{\vec{r}}, \frac{\dddot{\vec{r}}\cdot k}{k^2}\right] - \left[\dot{\vec{r}}, \frac{\ddot{\vec{r}}\cdot \dot{k}}{k^2}\right], \frac{\ddot{\vec{r}}}{k}\right) =$$

$$= -\left(\left[\dot{\vec{r}}, \frac{\dddot{\vec{r}}}{k}\right], \frac{\ddot{\vec{r}}}{k}\right) + \left(\left[\dot{\vec{r}}, \frac{\ddot{\vec{r}}\cdot \dot{k}}{k^2}\right], \frac{\ddot{\vec{r}}}{k}\right) =$$

$$= \frac{1}{k^2}([\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}], \dddot{\vec{r}}) + \frac{\dot{k}}{k^3}(\dot{\vec{r}}, [\ddot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}]) = \frac{1}{k^2}(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}).$$

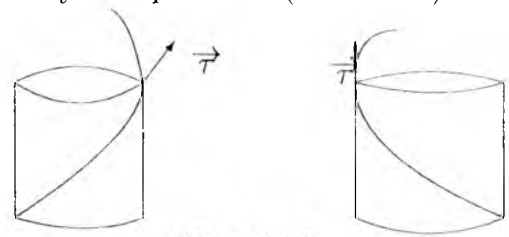
Теорема доведена.

Зауважимо, що скрут у довільній точці прямої не визначений, оскільки він не існує у точці, де кривина дорівнює нулю.

Якщо ж крива плоска, то одна і та ж площина є стичною площиною кривої у всіх її звичайних точках (за винятком точок розпрямлення). Тому вздовж плоскої кривої головним одиничним вектором цієї сталої стичної площини є вектор $\vec{\beta} = \overrightarrow{\mathrm{const}}$. Отже, для плоскої кривої $\dot{\vec{\beta}} = \vec{0}$ і тому $\chi = 0$. Правильним є обернене твердження: якщо крива у кожній своїй точці має скрут, рівний нулю, то крива плоска. Справді, $\chi = -(\dot{\vec{\beta}}, \vec{\nu})$. Крім того, $(\dot{\vec{\beta}}, \dot{\vec{r}}) = 0$,

$(\dot{\vec{\beta}}, \vec{\beta}) = 0$, тоді $\dot{\vec{\beta}} = \vec{0}$. Отже, $\vec{\beta} = \vec{\beta_0} = \overrightarrow{\mathrm{const}}$. Вектори $\dot{\vec{r}}$ та $\vec{\beta}$ ортогональні, тому $(\dot{\vec{r}}, \vec{\beta_0}) = 0$. Інтегруючи, звідси знаходимо, що $(\vec{r}(s) - \vec{r_0}, \vec{\beta_0}) = 0$. Це і означає, що крива лежить у площині, яка задається векторним рівнянням $(\vec{r}(s) - \vec{r_0}, \vec{\beta_0}) = 0$.

Плоскі криві – це криві нульового скруту. Існують криві сталої кривини і сталого скруту. Прикладом може служити гвинтова лінія $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ht$; $t \in (-\infty, \infty)$, $a > 0$, $h = \mathrm{const}$. Для цієї лінії $k = \dfrac{a}{a^2 + h^2}$, $\chi = \dfrac{h}{a^2 + h^2}$. Вона лежить на прямому круговому циліндрі $x^2 + y^2 = a^2$ і утворює його "правогвинтову нарізку" при $h > 0$ і "лівогвинтову" – при $h < 0$ (Мал. 2.18).



Мал. 2.18.

Просторові криві (зі змінним ненульовим скрутом) сталої ненульової кривини називаються **скісними колами**. Скісні кола відносяться до класу **кривих Бертрана**, а гвинтові лінії – до класу **ліній відкосу** (сукупність кривих, кожна з яких володіє властивістю: дотичні до кривої утворюють сталий кут з деяким фіксованим напрямом). Лінії відкосу характеризуються властивістю: вздовж них відношення скруту до кривини стале.

Якщо від точки P кривої на головній нормалі у напрямку вектора $\vec{\nu}$ відкласти відрізок PA довжиною $R = \dfrac{1}{k}$ (R – радіус кривини кривої у точці P), то точка A називається **центром кривини кривої у точці** P. Для плоскої кривої центр кривини збігається з центром стичного кола кривої. **Віссю кривини кривої** у точці M називається пряма, яка проходить через центр кривини кривої у точці P, перпендикулярно до стичної площини кривої у точці P. Точки кривої, в яких скрут дорівнює нулю, називаються **точками сплощення кривої**. Крива, в якої скрут не визначений хоча б в одній точці, а у всіх інших точках рівний нулю, може не лежати в одній площині. Прикладом такої кривої є крива

$$x = \begin{cases} e^{1/t}, & \text{якщо } t < 0, \\ 0, & \text{якщо } t \geq 0, y = t, \end{cases} \qquad z = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \leq 0, \\ e^{-1/t}, & \text{якщо } t > 0. \end{cases}$$

Знайдемо тепер обчислювальну формулу для скруту кривої, віднесеної до довільної параметризації. Оскільки скрут кривої, віднесеної до натуральної параметризації s, обчислюється за формулою $\chi(s) = \dfrac{(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}})}{k^2(s)}$, то виразимо похідні $\dot{\vec{r}}$, $\ddot{\vec{r}}$, $\dddot{\vec{r}}$ через $\vec{r}\,'$, $\vec{r}\,''$, $\vec{r}\,'''$:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}\,'\frac{dt}{ds}, \quad \ddot{\vec{r}} = \vec{r}\,''\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \vec{r}\,'\frac{d^2t}{ds^2},$$

$$\dddot{\vec{r}} = \vec{r}\,'''\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\vec{r}\,''\frac{dt}{ds}\frac{d^2t}{ds^2} + \vec{r}\,'\frac{d^3t}{ds^3}.$$

З останніх співвідношень дістаємо, що

$$[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}] = \left[\vec{r}\,'\frac{dt}{ds}, \vec{r}\,''\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \vec{r}\,'\frac{d^2t}{ds^2}\right] = \left(\frac{dt}{ds}\right)^3[\vec{r}\,', \vec{r}\,''],$$

$$(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}) = ([\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}], \dddot{\vec{r}}) = \left(\frac{dt}{ds}\right)^6([\vec{r}\,', \vec{r}\,''], \vec{r}\,''') =$$

$$= \left(\frac{dt}{ds}\right)^6(\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''').$$

Нагадаємо, що $k = \dfrac{|[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']|}{|\vec{r}\,'|^3}$. Крім того,

$$s = \int\limits_0^t |\vec{r}\,'(\tau)|d\tau \Rightarrow \frac{ds}{dt} = |\vec{r}\,'(t)| \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\vec{r}\,'(t)|}.$$

Отже,

$$\chi = \frac{(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}})}{k^2} = \frac{\left(\frac{dt}{ds}\right)^6(\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''')}{|[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']|^2}|\vec{r}\,'|^6 = \frac{(\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''')}{|[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']|^2}.$$

§2.7. Тригранник Френе. Формули Френе. Основна теорема теорії кривих

Оскільки при вивченні кривих використовуються їхні рівняння, то вибір системи координат впливає на вигляд рівняння. Наприклад, якщо центр еліпса вибрати за початок системи координат на площині еліпса, а координатні вісі сумістити з осями симетрії еліпса, то в такій системі координат еліпс має канонічне рівняння. За канонічним рівнянням еліпса легко визначаються його розміри, фокуси, директриси.

Опишемо просторову систему координат, пов'язану з кривою, з її геометричними властивостями, яка була б зручною для побудови її локальної диференціальної геометрії. Якщо крива γ гладка і точка M кривої звичайна, то у цій точці крива має єдину дотичну. Якщо γ є годографом вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то напрямним вектором дотичної є вектор $\vec{r}\,'(t)$. Для визначеності можна вважати, що напрям вектора $\vec{r}\,'(t)$ у точці M кривої узгоджений з напрямом зростання параметра t при русі точки M по кривій. Орт вектора $\vec{r}\,'(t)$ позначають символом $\vec{\tau}$; $\vec{\tau} = \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}$.

Якщо γ – двічі неперервно диференційовна крива і точка M – її звичайна точка, яка не є точкою розпрямлення, то крива γ у точці M має єдину стичну площину, яка визначається точкою M і векторами $\vec{r}'(t)$ та $\vec{r}''(t)$. Очевидно, що стична площина кривої у точці M містить дотичну до кривої у точці M.

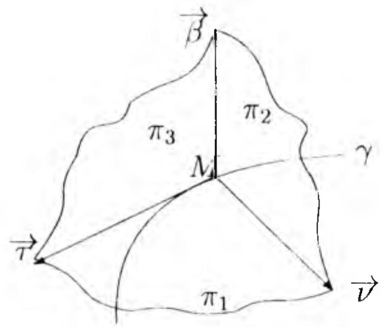
Вектор $[\vec{r}', \vec{r}'']$ ортогональний до стичної площини і є напрямним вектором бінормалі кривої в точці M. Орт напрямного вектора бінормалі $\vec{\beta} = \frac{[\vec{r}', \vec{r}'']}{|[\vec{r}', \vec{r}'']|}$. Площина, яка визначається точкою M та векторами $\vec{r}$, $\vec{\beta}$ називається **спрямною.**

Вектор $[\vec{r}', [\vec{r}', \vec{r}'']]$ перпендикулярний до $\vec{r}'$ і $[\vec{r}', \vec{r}'']$, тобто він є напрямним вектором головної нормалі. Орт напрямного вектора головної нормалі $\vec{\nu} = \frac{[\vec{r}', [\vec{r}', \vec{r}'']]}{|[\vec{r}', [\vec{r}', \vec{r}'']]|}$. Напрям напрямного вектора головної нормалі можна вибрати від точки M кривої до центра стичного кола кривої у точці M. Можна переконатися в тому, що стичне коло кривої у точці лежить у стичній площині кривої у точці M. Отже, головна нормаль – це пряма перетину нормальної площини зі стичною площиною. Нормальна площина визначається точкою M та векторами $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$.

Триграний кут з вершиною у точці M кривої, утворений трьома попарно ортогональними прямими, які перетинають криву у точці M з напрямними векторами $\vec{r}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$, називається **тригранником Френе кривої у точці** M. Гранями цього тригранника є три взаємно перпендикулярні площини: стична, нормальна та спрямна. Тригранник Френе у кожній звичайній точці двічі неперервно диференційовної кривої, яка не є точкою розпрямлення, **однозначно** визначається точкою M і ортонормованим базисом векторів $\{\vec{r}, \vec{\nu}, \vec{\beta}\}$. Якщо точка M описує криву γ, то тригранник Френе, рухаючись, змінює своє положення

у просторі. У точці розпрямлення кривої ($\vec{r}'(t) \parallel \vec{r}''(t)$) кожна площина, яка проходить через дотичну до кривої, є стичною площиною кривої. У цьому випадку вважають, що у точці розпрямлення кривої однозначно визначеними є дотична пряма і нормальна площина кривої, а стична площина, головна нормаль, бінормаль та спрямна площина не є однозначно визначеними. У точках розпрямлення за орт головної нормалі можна взяти будь-який вектор, ортогональний до дотичного вектора $\vec{r}$. У таких точках маємо жмуток стичних і спрямних площин, віссю якого є дотична пряма кривої в даній точці. Сказане, зокрема, стосується прямої, на якій кривина дорівнює нулю.

Складемо рівняння елементів тригранника Френе (Мал. 2.19). Для цього нагадаємо відомі з курсу аналітичної геометрії рівняння прямих і площини:



π_1 – стична площина
π_2 – нормальна площина
π_3 – спрямна площина

Мал. 2.19.

$\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ – векторно-параметричне рівняння прямої з напрямним вектором $\vec{a}$;

$(\vec{r} - \vec{r_0}, \vec{n}) = 0$ – загальне рівняння площини з нормальним вектором $\vec{n}$;

$(\vec{r} - \vec{r_0}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$ – загальне рівняння площини з напрямними векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ (у всіх цих рівняннях $\vec{r}$, $\vec{r_0}$ –

радіус-вектори відповідно довільної і фіксованої точки прямої чи площини). Залишається застосувати їх до відповідних елементів тригранника Френе. Отже,

$\vec{\rho} = \vec{r} + \lambda\vec{r}'$ – векторно-параметричне рівняння дотичної;

$\vec{\rho} = \vec{r} + \lambda[\vec{r}', [\vec{r}', \vec{r}'']]$ – векторно-параметричне рівняння головної нормалі;

$\vec{\rho} = \vec{r} + \lambda[\vec{r}', \vec{r}'']$ – векторно-параметричне рівняння бінормалі;

$(\vec{\rho} - \vec{r}, [\vec{r}', \vec{r}'']) = 0$ – загальне рівняння стичної площини з нормальним вектором;

$(\vec{\rho} - \vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') = 0$ – загальне рівняння стичної площини з напрямними векторами;

$(\vec{\rho} - \vec{r}, \vec{r}') = 0$ – загальне рівняння нормальної площини з нормальним вектором;

$(\vec{\rho} - \vec{r}, [\vec{r}', [\vec{r}', \vec{r}'']]) = 0$ – загальне рівняння спрямної площини з нормальним вектором.

Якщо $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ – параметричні рівняння кривої γ відносно ортонормованого репера $\{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, то, використовуючи зображення скалярного, векторного і мішаного добутків векторів у координатах, неважко записати рівняння будь-якого елемента тригранника Френе в координатах. Слід тільки пам'ятати, що у всіх цих рівняннях значення параметра t фіксовано вибором точки $M \in \gamma$.

Якщо крива γ задана в природній параметризації, то елементами ортонормованого базису $\{\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}\}$ є вектори:

$\vec{\tau} = \dot{\vec{r}}$, $\vec{\nu} = \dfrac{\ddot{\vec{r}}}{k} = \dfrac{\ddot{\vec{r}}}{|\ddot{\vec{r}}|}$, $\vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{\nu}]$.

Формули Френе. Розглянемо регулярну криву $\gamma \in \mathcal{E}_3$ з натуральною параметризацією $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Зафіксуємо точку на кривій, у якій $k(s) \neq 0$ і побудуємо в цій точці праву ортонормовану трійку векторів $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$. Формули Френе, до знаходження яких ми приступимо, включають розклади похідних по натуральному параметру від ортів базису Френе у самому базисі. Раніше, при означенні вектора $\vec{\nu}$ була отримана **перша формула Френе**: $\vec{\nu} = \dfrac{\ddot{\vec{r}}}{k} = \dfrac{\dot{\vec{\tau}}}{k}$, тобто $\dot{\vec{\tau}} = k\vec{\nu}$. При доведенні теореми 2.13 була встановлена формула $\dot{\vec{\beta}} = -\chi\vec{\nu}$, яка називається **третьою формулою Френе**. Оскільки $\vec{\nu} = [\vec{\beta}, \vec{\tau}]$, то $\dot{\vec{\nu}} = [\dot{\vec{\beta}}, \vec{\tau}] + [\vec{\beta}, \dot{\vec{\tau}}]$. Використовуючи першу та третю формули Френе отримуємо:

$$\dot{\vec{\nu}} = [-\chi\vec{\nu}, \vec{\tau}] + [\vec{\beta}, k\vec{\nu}] = -\chi[\vec{\nu}, \vec{\tau}] + k[\vec{\beta}, \vec{\nu}] = \chi\vec{\beta} - k\vec{\tau}.$$

Рівність $\dot{\vec{\nu}} = \chi\vec{\beta} + k\vec{\tau}$ називається **другою формулою Френе**. Формули Френе можна записати у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{\tau}} \\ \dot{\vec{\nu}} \\ \dot{\vec{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \chi \\ 0 & -\chi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\tau} \\ \vec{\nu} \\ \vec{\beta} \end{pmatrix}.$$

Для плоских кривих ($\chi = 0$) формули Френе спрощуються і набувають вигляду: $\dot{\vec{\tau}} = k\vec{\nu}$, $\dot{\vec{\nu}} = -k\vec{\tau}$.

Зауваження 2.6. З третьої формули Френе випливає, що $|\chi| = |\dot{\vec{\beta}}|$. Отже, $|\chi|$ (абсолютний скрут) є миттєвою кутовою швидкістю обертання бінормалі кривої в даній точці. Крім того, кінематичне тлумачення має також знак скруту. Для цього розкладемо орт бінормалі за формулою Тейлора:

$$\vec{\beta} = \vec{\beta}(s_0) + \dot{\vec{\beta}}(s_0)\Delta s + \vec{0}(\Delta s), \Delta s = s - s_0.$$

Врахувавши третю формуле Френе знаходимо, що $\overrightarrow{\Delta\beta} = -\chi\Delta s\vec{\nu}(s_0) + \vec{o}(\Delta s)$. Таким чином, нехтуючи малою відносно Δs вектор-функцією $\vec{o}(\Delta s)$, можемо зробити висновок про те, що головна частина в розкладі вектора $\overrightarrow{\Delta\beta}$ є вектор $-\chi \Delta s \vec{\nu}(s_0)$. Оскільки $\Delta s > 0$, то останній вектор протилежно направлений до вектора $\vec{\nu}(s_0)$, коли $\chi(s_0) > 0$ і співнаправлений з ним, коли $\chi(s_0) < 0$. Якщо тепер уявити в точці $M_0(s_0) \in \gamma$ спостерігача, спрямованого поглядом на нормальну площину кривої з кінця вектора $\vec{\tau}(s_0)$, то він буде спостерігати миттєве обертання цієї площини навколо дотичної прямої проти руху годинникової стрілки (додатний рух), коли $\chi(s_0) > 0$ і – за стрілкою (від'ємний рух), коли $\chi(s_0) < 0$.

Основна теорема теорії кривих

Теорема 2.14. *Нехай $k(s) > 0$, $\chi(s)$ – задані регулярні функції. У евклідовому просторі $\mathcal{E}_3$ існує крива, для якої параметр s є натуральним, а ці функції будуть відповідно її кривиною і скрутом. Така крива визначається однозначно, якщо задано початкове положення репера Френе.*

Доведення. Припустимо, що така крива існує і $\vec{r} = \vec{r}(s)$ - її натуральна параметризація. Тоді для неї, згідно з формулами Френе, повинні виконуватися співвідношення:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\tau}, \dot{\vec{\tau}} = k\vec{\nu}, \dot{\vec{\nu}} = \chi\vec{\beta} - k\vec{\tau}, \dot{\vec{\beta}} = -\chi\vec{\nu}. \qquad (2.16)$$

Таким чином, для існування кривої необхідно знайти розв'язки системи (2.16) звичайних диференціальних рівнянь відносно чотирьох невідомих вектор-функцій $\vec{r}(s)$, $\vec{\tau}(s)$, $\vec{\nu}(s)$, $\vec{\beta}(s)$ (у координатному вигляді буде 12 невідомих). Ця система є лінійною, і з курсу диференціальних рівнянь відомо, що така система має розв'язок, який буде єдиним при фіксованих початкових даних $\vec{r_0} = \vec{r}(s_0)$, $\vec{\tau_0} = \vec{\tau}(s_0)$, $\vec{\nu_0} = \vec{\nu}(s_0)$, $\vec{\beta_0} = \vec{\beta}(s_0)$ (розв'язком задачі Коші). У нашому випадку слід враховувати те, що ці початкові дані визначають у точці M_0 ортонормовану праву трійку векторів $\vec{\tau_0}$, $\vec{\nu_0}$, $\vec{\beta_0}$:

$$(\vec{\tau_0}, \vec{\tau_0}) = (\vec{\nu_0}, \vec{\nu_0}) = (\vec{\beta_0}, \vec{\beta_0}) = 1, (\vec{\tau_0}, \vec{\nu_0}) = (\vec{\tau_0}, \vec{\beta_0}) =$$

$$= (\vec{\nu_0}, \vec{\beta_0}) = 0, \quad (\vec{\tau_0}, \vec{\nu_0}, \vec{\beta_0}) = 1. \qquad (2.17)$$

Нехай $\vec{r}(s)$, $\vec{\tau}(s)$, $\vec{\nu}(s)$, $\vec{\beta}(s)$ – розв'язок, який відповідає початковому положенню репера Френе $\{M_0; \vec{\tau_0}, \vec{\nu_0}, \vec{\beta_0}\}$. Залишається пересвідчитися в тому, що крива γ з параметризацією

$$\vec{r} = \int\limits_{s_0}^{s} \vec{\tau}(\xi) d\xi + \vec{r_0}$$

є шуканою кривою.

а) Передусім переконаємося у тому, що трійка векторів $\vec{\tau}(s)$, $\vec{\nu}(s)$, $\vec{\beta}(s)$ є ортонормованою правою трійкою у будь-якій точці знайденої кривої. Для цього знайдемо похідні функцій $(\vec{\tau}, \vec{\tau})$, $(\vec{\nu}, \vec{\nu})$, $(\vec{\beta}, \vec{\beta})$, $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$, $(\vec{\tau}, \vec{\beta})$, $(\vec{\nu}, \vec{\beta})$. Враховуючи при цьому (2.16), отримаємо таку систему рівнянь:

$$(\vec{\tau}, \vec{\tau})^{\cdot} = 2k(\vec{\tau}, \vec{\nu}), (\vec{\nu}, \vec{\nu})^{\cdot} = -2k(\vec{\tau}, \vec{\nu}) + 2\chi(\vec{\nu}, \vec{\beta}),$$

$$(\vec{\beta}, \vec{\beta})^{\cdot} = -2\chi(\vec{\nu}, \vec{\beta}), (\vec{\tau}, \vec{\nu})^{\cdot} = -k(\vec{\tau}, \vec{\tau}) + k(\vec{\nu}, \vec{\nu}) +$$

$$+\chi(\vec{\tau}, \vec{\beta}), \quad (\vec{\tau}, \vec{\beta})^{\cdot} = -\chi(\vec{\tau}, \vec{\nu}) + k(\vec{\nu}, \vec{\beta}), \qquad (2.18)$$

$$(\vec{\nu}, \vec{\beta})^{\cdot} = -\chi(\vec{\nu}, \vec{\nu}) + \chi(\vec{\beta}, \vec{\beta}) - k(\vec{\tau}, \vec{\beta}).$$

Розглянемо (2.18) як лінійну систему звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомих функцій $(\vec{\tau}, \vec{\tau})$, $(\vec{\nu}, \vec{\nu})$, $(\vec{\beta}, \vec{\beta})$, $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$, $(\vec{\tau}, \vec{\beta})$, $(\vec{\nu}, \vec{\beta})$. Як випливає з її будови, якщо останні функції утворені з розв'язку $\vec{\tau}(s)$, $\vec{\nu}(s)$, $\vec{\beta}(s)$ системи (2.16), то ці функції утворюють розв'язок системи (2.18). З іншого боку, нескладно переконатися в тому, що сталі функції 1, 1, 1, 0, 0, 0 також задовольняють систему (2.18). Більш того, якщо $\vec{\tau}(s)$, $\vec{\nu}(s)$, $\vec{\beta}(s)$ – розв'язок задачі Коші (2.16), (2.17), то зазначені розв'язки системи (2.18), як функції, мають однакові значення при $s = s_0$. Отже, в цьому випадку маємо пару розв'язків, які співпадають в точці $s = s_0$. Внаслідок теореми єдиності вони співпадають тотожно: $\forall s$: $(\vec{\tau}, \vec{\tau}) = 1$, $(\vec{\nu}, \vec{\nu}) = 1$, $(\vec{\beta}, \vec{\beta}) = 1$, $(\vec{\tau}, \vec{\nu}) = 0$, $(\vec{\tau}, \vec{\beta}) = 0$, $(\vec{\nu}, \vec{\beta}) = 0$, тобто трійка векторів $\vec{\tau}(s)$, $\vec{\nu}(s)$, $\vec{\beta}(s)$ – ортонормована в кожній точці кривої. Звідси, в свою чергу випливає, що їхній мішаний добуток дорівнює $+1$ або -1. Але на підставі (2.17) в точці $s = s_0$ він дорівнює $+1$. Внаслідок неперервності трьох вектор-функцій $\vec{\tau}(s)$, $\vec{\nu}(s)$, $\vec{\beta}(s)$ їхній мішаний добуток є неперервною скалярною функцією і $(\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s)) \equiv 1$, тобто ця трійка векторів є правою у кожній точці кривої.

б) Параметризація є натуральною. Справді, з попереднього пункту випливає ознака натуральності: $|\dot{\vec{r}}| = 1$.

в) Переконаємося у тому, що задані функції $k(s) > 0$, $\chi(s)$ є відповідно кривиною і скрутом кривої. Справді, оскільки параметр на кривій є натуральним, то, використовуючи відповідні формули для обчислення кривини і скруту, внаслідок (2.16) маємо, що

$$|\ddot{\vec{r}}| = |\dot{\vec{\tau}}| = |k\vec{\nu}| = k|\vec{\nu}| = k;\ k^{-2}(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}) =$$

$$= k^{-2}(\vec{\tau}, k\vec{\nu}, \dot{k}\vec{\nu} + k\dot{\vec{\nu}}) =$$

$$= k^{-2}(\vec{\tau}, k\vec{\nu}, k(-k\vec{\tau} + \chi\vec{\beta})) = \chi(\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}) = \chi.$$

Теорема доведена.

Приклади розв'язування задач

1. Довести твердження: для того, щоб вектор $\vec{r}(t)$ був паралельний фіксованій площині π при всіх $t \in (a,b)$ необхідно, а за умови, що $\vec{r}(t) \nparallel \vec{r}'(t)$ при всіх

$t \in (a,b)$ і досить, щоб $(\vec{r}(t), \vec{r}'(t), \vec{r}''(t)) = 0$ для всіх $t \in (a,b)$.

Розв'язання. Нехай $\vec{n}$ – нормальний вектор площини π і $\vec{r}(t) \parallel \pi$. Тоді $(\vec{n}, \vec{r}(t)) = 0$, тобто $(\vec{n}, \vec{r}'(t)) = 0$, $(\vec{n}, \vec{r}''(t)) = 0$. Отже, вектори $\vec{r}(t)$, $\vec{r}'(t)$, $\vec{r}''(t)$ перпендикулярні до вектора $\vec{n}$, тобто компланарні. Тоді їхній мішаний добуток дорівнює нулю.

Навпаки, нехай $(\vec{r}(t), \vec{r}'(t), \vec{r}''(t)) = 0$. Оскільки $\vec{r}(t) \nparallel \vec{r}'(t)$, то $\vec{r}''(t)$ можна подати в вигляді

$$\vec{r}''(t) = \lambda_1(t)\vec{r}(t) + \lambda_2(t)\vec{r}'(t).$$

Тоді

$$[\vec{r}, \vec{r}']' = [\vec{r}, \vec{r}''] = \lambda_1(t)[\vec{r}, \vec{r}] + \lambda_2(t)[\vec{r}, \vec{r}'] = \lambda_2(t)[\vec{r}, \vec{r}'].$$

Введемо позначення: $\vec{\rho} = [\vec{r}, \vec{r}']$ і подамо $\vec{\rho}(t)$ у вигляді: $\vec{\rho}(t) = |\vec{\rho}(t)|\vec{e}(t)$, де $\vec{e}(t)$ – одиничний вектор. Отже, маємо рівність $\vec{\rho}'(t) = \lambda_2(t)\vec{\rho}(t)$. Доведемо, що вектор $\vec{e}(t)$ – сталий. Продиференціювавши рівність $\vec{\rho}(t) = |\vec{\rho}(t)|\vec{e}(t)$ знайдемо, що

$$\vec{\rho}'(t) = |\vec{\rho}(t)|'\vec{e}(t) + |\vec{\rho}(t)|\vec{e}'(t).$$

Звідси

$$|\vec{\rho}(t)|\vec{e}'(t) = \vec{\rho}'(t) - |\vec{\rho}(t)|'\vec{e}(t) = \lambda_2(t)\vec{\rho}(t) - |\vec{\rho}(t)|'\vec{e}(t) =$$

$$= (\lambda_2(t)|\vec{\rho}(t)| - |\vec{\rho}(t)|')\vec{e}(t).$$

Оскільки, за лемою 2.1, $\vec{e}'(t) \perp \vec{e}(t)$, то

$$|\vec{\rho}(t)| \cdot |\vec{e}'(t)|^2 = (\lambda_2(t)|\vec{\rho}(t)| - |\vec{\rho}(t)|')(\vec{e}(t), \vec{e}'(t)) = 0.$$

Звідси випливає, що $\vec{e}'(t) = \vec{0}$, тобто $\vec{e}(t) = \vec{e}$ – сталий одиничний вектор. Отже, $[\vec{r}, \vec{r}'](t) = |[\vec{r}, \vec{r}'](t)|\vec{e}$, тобто вектор $[\vec{r}, \vec{r}']$ зберігає напрям. Але $\vec{r} \perp [\vec{r}, \vec{r}']$. Звідси дістаємо, що вектор $\vec{r}(t)$, $t \in (a,b)$, паралельний площині, яка перпендикулярна вектору $[\vec{r}, \vec{r}']$.

2. З'ясувати, які лінії задаються рівнянням $\vec{r}'(t) = [\vec{e}, [\vec{r}(t), \vec{e}]]$, де $\vec{e}$ – сталий одиничний вектор.

Розв'язання. Введемо прямокутну декартову систему координат так, щоб $\vec{k} = \vec{e}$. Тоді, якщо $\vec{r}(t) = \{x(t); y(t); z(t)\}$, то

$$[\vec{r}(t), \vec{e}] = \left\{ \begin{vmatrix} y(t) & z(t) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z(t) & x(t) \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= \{y(t); -x(t); 0\},$$

$$[\vec{e}, [\vec{r}(t), \vec{e}]] = [\vec{k}, [\vec{r}(t), \vec{e}]] =$$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -x(t) & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y(t) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ y(t) & -x(t) \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= \{x(t); y(t); 0\} \equiv x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}.$$

З іншого боку, $\vec{r}'(t) = \{x'(t); y'(t); z'(t)\}$ і задане в умові диференціальне рівняння у вибраній системі координат можна записати так: $x' = x$, $y' = y$, $z' = 0$. Звідси $x = c_1 e^t$, $y = c_2 e^t$, $z = c_3$, де c_1, c_2, c_3 – довільні сталі. Якщо $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, то $\frac{x}{y} = \frac{c_1}{c_2}$ або $y = \frac{c_2}{c_1}x$. Отже, шукані лінії є прямими лініями, які утворюються при перетині площин $y = \frac{c_2}{c_1}x$ з площинами $z = c_3$.

3. З'ясувати, за якої умови плоска лінія $\vec{r}(t) = \{x(t); tx(t)\}$, $x(t) \in C^{(2)}_{\mathbb{R}}$, є прямою лінією.

Розв'язання. Для того, щоб плоска лінія була прямою, необхідно і досить, щоб вектор-функція $\vec{r}(t)$ задовольняла умову: $\vec{r}'(t) \parallel \vec{r}''(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ (у цьому випадку кожна

точка кривої є точкою розпрямлення і у кожній такій точці кривина $k = 0$). Крім того, оскільки вектор-функція $\vec{r}(t)$ повинна визначати пряму лінію, то $\vec{r}(t)$ не повинна мати жодної особливої точки, тобто $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Оскільки $\vec{r}'(t) = \{x'(t), x(t) + tx'(t)\}$, то ця умова рівносильна тому, що одночасно $x'(t) \neq 0$, $x(t) + tx'(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Звідси знаходимо, що

$$x(t) \neq \text{const}\,, x(t) = \frac{1}{ct}, \forall t \neq 0, x(0) \neq 0, c = \text{const} \neq 0.$$

Із умови $\vec{r}'(t) \parallel \vec{r}''(t)$, $\vec{r}''(t) = \{x''(t); 2x'(t) + tx''(t)\}$ випливає співвідношення

$$\frac{x''}{x'} = \frac{2x' + tx''}{x + tx'}.$$

Звідси дістаємо, що функція $x(t)$ повинна задовольняти диференціальне рівняння

$$\frac{2x'}{x} = \frac{x''}{x'}.$$

Інтегруючи його знаходимо, що

$$x(t) = -\frac{1}{c_1 t + c_2}; c_1 \neq 0, c_2 - \text{const}\,.$$

Із обмежень на функцію x випливає, що одночасно $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$.

Таким чином, плоска лінія, яка визначається векторним рівнянням $\vec{r}(t) = \{x(t); tx(t)\}$, буде прямою тоді і лише тоді, коли

$$x(t) = -\frac{1}{c_1 t + c_2}, t \in \mathbb{R}; c_1 \neq 0, c_2 \neq 0.$$

4. З'ясувати, що є годографом вектор-функції $\vec{r}$, якщо:

а) $\vec{r}(t) = \frac{a}{2}(t + \frac{1}{t})\vec{e_1} + \frac{b}{2}(t - \frac{1}{t})\vec{e_2}$, $t \neq 0$,
де $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ **– ненульові, неколінеарні сталі вектори;**

б) $\vec{r}(u,v) = u\cos v\,\vec{a} + u\sin v\,\vec{b} + u^2\vec{c}$;

в) $\vec{r}(u,v) = \dfrac{\sqrt{u^2+c^2}}{c}\cos v\,\vec{a} + \dfrac{\sqrt{u^2+c^2}}{c}\sin v\,\vec{b} + u\vec{c}$, $c \neq 0$,
де $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ **– сталі вектори,** $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$.

Розв'язання. а) Розглянемо афінну систему координат з початком у точці O та осями, які визначаються векторами $\vec{e_1}$ та $\vec{e_2}$. Якщо $\vec{\tau_1}$ і $\vec{\tau_2}$ – одиничні вектори цих осей, то $\vec{e_1} = |\vec{e_1}|\vec{\tau_1}$, $\vec{e_2} = |\vec{e_2}|\vec{\tau_2}$. Тоді параметричні рівняння годографа мають вигляд

$$x = \frac{a|\vec{e_1}|}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \quad y = \frac{b|\vec{e_2}|}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

Звідси дістаємо, що

$$\frac{2x}{a|\vec{e_1}|} = t + \frac{1}{t}, \frac{2y}{b|\vec{e_2}|} = t - \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{2x}{a|\vec{e_1}|} + \frac{2y}{b|\vec{e_2}|} = 2t,$$

$$\frac{2x}{a|\vec{e_1}|} - \frac{2y}{b|\vec{e_2}|} = \frac{2}{t} \Rightarrow \frac{x}{a|\vec{e_1}|} - \frac{y}{b|\vec{e_2}|} = \frac{1}{\frac{x}{a|\vec{e_1}|} + \frac{y}{b|\vec{e_2}|}} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{x}{a|\vec{e_1}|} - \frac{y}{b|\vec{e_2}|}\right)\left(\frac{x}{a|\vec{e_1}|} + \frac{y}{b|\vec{e_2}|}\right) = 1.$$

Отже, годографом вектор-функції $\vec{r}(t)$ у побудованій системі координат є гіпербола, рівняння якої має вигляд:

$$\frac{x^2}{(a|\vec{e_1}|)^2} - \frac{y^2}{(b|\vec{e_2}|)^2} = 1.$$

б) Аналогічно попередньому, будуємо просторову афінну систему координат з початком у точці O та осями, які

визначаються векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (згідно з умовою задачі ці вектори не є компланарними). Нехай $\vec{\tau_1}$, $\vec{\tau_2}$, $\vec{\tau_3}$ – одиничні вектори цих осей. Тоді параметричні рівняння годографа є такими:

$$x = u\cos v|\vec{a}|, y = u\sin v|\vec{b}|, z = u^2|\vec{c}|.$$

Звідси маємо, що

$$\left(\frac{x}{|\vec{a}|}\right)^2 + \left(\frac{y}{|\vec{b}|}\right)^2 = u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v = u^2,$$

$$\left(\frac{x}{|\vec{a}|}\right)^2 + \left(\frac{y}{|\vec{b}|}\right)^2 - \left(\frac{z}{|\vec{c}|}\right)^2 = 0.$$

Отже, годографом вектор-функції $\vec{r}(u,v)$ у даній системі координат є конус 2-го порядку.

в) Систему координат будуємо аналогічно тому, як це було зроблено у попередньому прикладі. Тоді

$$\vec{r}(u,v) = \frac{\sqrt{u^2+c^2}}{c}\cos v|\vec{a}|\vec{\tau_1} + \frac{\sqrt{u^2+c^2}}{c}\sin v|\vec{b}|\vec{\tau_2} + u|\vec{c}|\vec{\tau_3}.$$

Звідси випливає, що

$$\left(\frac{x}{|\vec{a}|}\right)^2 + \left(\frac{y}{|\vec{b}|}\right)^2 = \frac{u^2+c^2}{c^2}(\cos^2 v + \sin^2 v) = \frac{u^2+c^2}{c^2} = 1 + \frac{u^2}{c^2}.$$

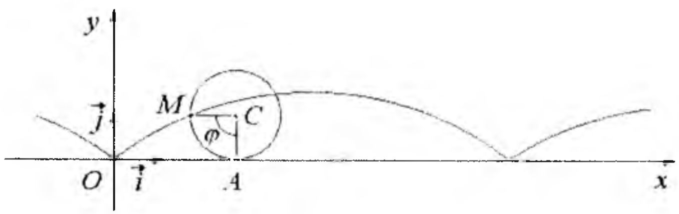
Оскільки $\dfrac{z}{|\vec{c}|} = u$, то маємо таке рівняння годографа:

$$\left(\frac{x}{|\vec{a}|}\right)^2 + \left(\frac{y}{|\vec{b}|}\right)^2 - \left(\frac{z}{|\vec{c}|}\right)^2 = 1.$$

Це рівняння у вказаній системі координат є рівнянням однопорожнинного гіперболоїда.

5. Коло радіуса a котиться без ковзання по прямій l. Знайти векторне рівняння кривої γ, яку описує фіксована точка M кола. З'ясувати характер особливих точок кривої γ.

Розв'язання. За вісь абсцис візьмемо пряму l. Нехай у початковий момент часу точка M знаходиться в початку координат. Позначимо через φ кут між вертикальним радіусом кола і радіусом кола, проведеним у точку M кривої γ (Мал. 2.20).



Мал. 2.20.

Радіус-вектор точки M подамо у вигляді $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$. Очевидно, $\overrightarrow{AC} = a\,\vec{j}$. Оскільки коло котиться без ковзання, то довжина відрізка OA дорівнює довжині дуги кола $\overset{\frown}{AM}$, звідки $\overrightarrow{OA} = a\varphi\,\vec{i}$. Оскільки $\overrightarrow{CM} = -a\sin\varphi\,\vec{i} - a\cos\varphi\,\vec{j}$, то

$$\vec{r}(\varphi) = a(\varphi - \sin\varphi)\,\vec{i} + a(1 - \cos\varphi)\,\vec{j}.$$

Вектор $\vec{r}\,'(\varphi) = a(1 - \cos\varphi)\,\vec{i} + a\sin\varphi\,\vec{j}$ перетворюється в нульовий вектор при $\varphi_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Але $\vec{r}\,''(\varphi_k) = \{0; a\} \neq \vec{0}$, $\vec{r}\,'''(\varphi_k) = \{a; 0\} \neq \vec{0}$, тобто $p = 2$, $q = 3$. Із загальної класифікації особливих точок плоских кривих випливає, що особливі точки кривої γ, які відповідають значенням параметрів $\varphi_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, є точками звороту першого роду.

Побудована крива γ називається **циклоїдою**.

6. Знайти особливі точки кривої $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$. Скласти параметричні рівняння кривої.

Розв'язання. Нехай $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$. Особливі точки кривої знаходимо із рівнянь

$$F_x = 3x^2 - 3ay = 0, \quad F_y = 3y^2 - 3ax = 0.$$

Безпосередньо переконуємося у тому, що крива має єдину особливу точку $O(0;0)$. З'ясуємо, чи є ця точка подвійною особливою точкою. Для цього знайдемо частинні похідні другого порядку $F_{xx}(0;0)$, $F_{xy}(0;0)$, $F_{yy}(0;0)$. Отже, маємо, що

$$F_{xx} = 6x, F_{yy} = 6y, F_{xy} = -3a,$$

$$\begin{vmatrix} F_{xx}(0;0) & F_{xy}(0;0) \\ F_{yx}(0;0) & F_{yy}(0;0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3a \\ -3a & 0 \end{vmatrix} = -9a^2 < 0.$$

Звідси випливає, що точка $O(0;0)$ є точкою самоперетину (або вузловою точкою). Зобразимо графік цієї кривої. Для цього припустимо, що y є неявною функцією від x; тоді маємо співвідношення:

$$F_x(x,y) + F_y(x,y) \cdot y'_x = 0, \quad y'_x = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.$$

Знайдемо екстремуми неявної функції. Для того, щоб $y'_x = 0$, повинна виконуватися умова $F_x = 0$. Розв'язуючи систему рівнянь $F = 0$, $F'_x = 0$, знаходимо дві пари відповідних значень: $(0;0)$, $(a\sqrt[3]{2}; a\sqrt[3]{4})$. Очевидно, що точка O не є точкою екстремуму. У другій точці $F_y(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4}) = 3a^2(4^3 - \sqrt[3]{2}) > 0$, тому згідно з теоремою про неявну функцію в деякому околі цієї точки рівняння $F(x,y) = 0$ справді визначає y як функцію x. Для того, щоб переконатися в наявності екстремуму, обчислимо y''_{xx} при $x = a\sqrt[3]{2}$. Це можна зробити, скориставшись співвідношенням

$$F_{xx} + F_{xy} \cdot y'_x + (F_{xy} + F_{yy} \cdot y'_x)y'_x + F_y \cdot y''_{xx} = 0,$$

поклавши в ньому $y'_x = 0$. Тоді $y''_{xx} = -\frac{F_{xx}}{F_y}$. Звідси знаходимо, що

$$y''_{xx}\Big|_{a\sqrt[3]{2}} = -\frac{2\sqrt[3]{2}}{a(4^3 - \sqrt[3]{2})} < 0.$$

Отже, у точці $(a\sqrt[3]{2}; a\sqrt[3]{4})$ максимум y як функції x, рівний $2^{5/2}a^3(2^{5/2} - 1)$.

Горизонтальних та вертикальних асимптот крива не має, оскільки коефіцієнти при x^3 та y^3 – сталі величини. Для знаходження похилої асимптоти, як відомо, у рівнянні $F(x,y) = 0$ замінюємо y на $kx + b$, прирівнюємо до нуля коефіцієнт при двох вищих степенях x і одержану систему розв'язуємо відносно k та b. Отже,

$$x^3 + (kx + b)^3 - 3ax(kx + b) = 0.$$

Звідси дістаємо систему рівнянь відносно k та b:

$$\begin{cases} 1 + k^3 = 0, \\ k(bk - a) = 0. \end{cases} \Rightarrow k = -1, b = -a.$$

Таким чином, дана крива має похилу асимптоту $y = -x - a$, або $x + y + a = 0$.

Покажемо, що крива розміщується над асимптотою (тобто, при одному значенні аргументу x ордината y даної кривої більша за ординату дотичної, яка відповідає значенню x). Для цього рівняння кривої подамо у вигляді

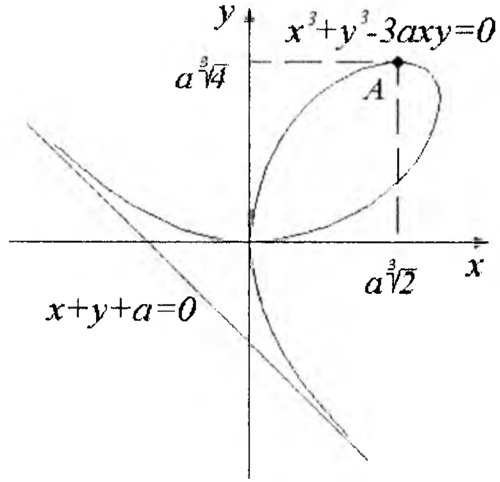
$$x + y = \frac{3axy}{x^2 - xy + y^2}, x \neq 0, y \neq 0,$$

а рівняння дотичної у вигляді $x + y = -a$. Тоді

$$\frac{3axy}{x^2 - xy + y^2} - (-a) = \frac{a^2(x^2 + 2xy + y^2)}{x^2 - xy + y^2} = \frac{a(x+y)^2}{x^2 - xy + y^2} =$$

$$= \frac{a(x+y)^2}{\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2} > 0,$$

що й потрібно було довести. У точці $(0;0)$ маємо $F(0;0) = 0 > -a$.



Мал. 2.21.

Підставивши у рівняння кривої $y = tx$ знайдемо, що

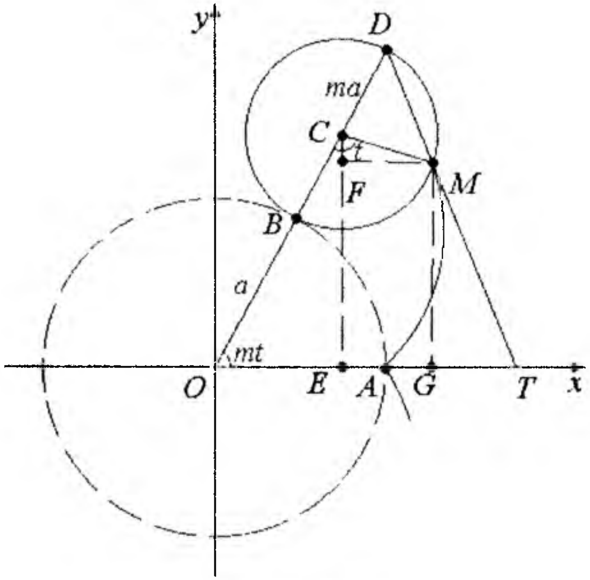
$$x^3 + t^3x^3 - 3ax^2t = 0,$$

або $x = \frac{3at}{1+t^3}$; тоді $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$, $t \neq -1$. Це і є параметричні рівняння даної кривої.

При $t \to \pm\infty$ обидві координати прямують до нуля; можна вважати, що початкова точка $(0;0)$ одержується як при $t = 0$, так і при $t = \pm\infty$. При зміні t від $-\infty$ до -1 точка $(x; y)$, виходячи з початку, вздовж правої вітки наближається до нескінченності. При зміні t від -1 до 0 точка із нескінченності вздовж лівої вітки повертається в початок. Нарешті, при зростанні t від 0 до $+\infty$ точка описує проти годинникової стрілки петлю (див. Мал. 2.21; на малюнку відмічена точка $A(a\sqrt[3]{2}; a\sqrt[3]{4})$, яка відповідає максимуму y як функції x).

Зазначимо, що досліджувана крива називається **листом Декарта**.

7. Якщо один круг без ковзання котиться по іншому кругу, то крива, яка описується довільною точкою кола рухомого круга, називається епіциклоїдою. Скласти параметричні рівняння епіциклоїди; знайти особливі точки цієї кривої.



Мал. 2.22.

Розв'язання. Початок координат візьмемо в центрі O нерухомого круга, вісь Ox проведемо через точку A, яка є точкою дотику обох кругів (Мал. 2.22). Коли рухомий круг перейде в нове положення, вказане на малюнку, точка A переміститься в точку M. Нам необхідно охарактеризувати геометричне місце точок M.

Позначимо через a радіус нерухомого круга, а через ma - радіус круга, що котиться. За параметр виберемо кут $t = \angle MCB$. Вважаємо, що на початку руху цей кут дорівнює нулю. Згідно з означенням епіциклоїди, дуга $\overset{\smile}{AB}$, яка проходиться точкою дотику по нерухомому колу, дорівнює дузі $\overset{\smile}{MB}$, яка проходиться точкою дотику по колу, що котиться:

$$a \cdot \angle AOB = ma \cdot \angle MCB = mat,$$

звідки $\angle AOB = mt$. Виразимо тепер координати x, y точки M через t:

$$x = OG = OE + FM = (a + ma)\cos mt + ma \sin \angle FCM;$$

але

$$\angle FCM = \angle BCM - \angle OCE, \quad \angle OCE = \frac{\pi}{2} - mt,$$

тоді

$$\angle FCM = (1 + m)t - \frac{\pi}{2}, \quad \sin \angle FCM = -\cos(1 + m)t.$$

Отже,

$$x = a[(1 + m)\cos mt - m\cos(1 + m)t].$$

Аналогічно знаходимо, що

$$y = a[(1 + m)\sin mt - m\sin(1 + m)t].$$

Ці рівняння є параметричними рівняннями епіциклоїди.

Коли круг, який котиться, доторкнеться нерухомого круга у тій точці, що і на початку руху (тобто при $t = 2\pi$), то точка M опише одну вітку кривої. При подальшому русі вона опише наступну вітку, подібну першій і т.д.

Похідні

$$x'_t = -m(m+1)a[\sin mt - \sin(1+m)t],$$

$$y'_t = m(m+1)a[\cos mt - \cos(1+m)t]$$

одночасно перетворюються в нуль при $t_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, тобто кожний раз, коли розглядувана на рухомому крузі точка стає точкою дотику. Відповідні точки кривої є особливими. З'ясуємо, якого типу ці точки. Для цього знайдемо x''_{tt}, y''_{tt}, x'''_{ttt}, y'''_{ttt}:

$$x''_{tt} = -m(m+1)a[m\cos mt - (1+m)\cos(1+m)t] =$$

$$= -m(m+1)a[m(\cos mt - \cos(1+m)t) - \cos(1+m)t],$$

$$y''_{tt} = m(m+1)a[-m\sin mt + (1+m)\sin(1+m)t] =$$

$$= m(m+1)a[-m(\sin mt - \sin(1+m)t) + \sin(1+m)t],$$

$$x'''_{ttt} = -m(m+1)a[-m^2\sin mt + (1+m)^2\sin(1+m)t],$$

$$y'''_{ttt} = m(m+1)a[-m^2\cos mt + (1+m)^2\cos(1+m)t].$$

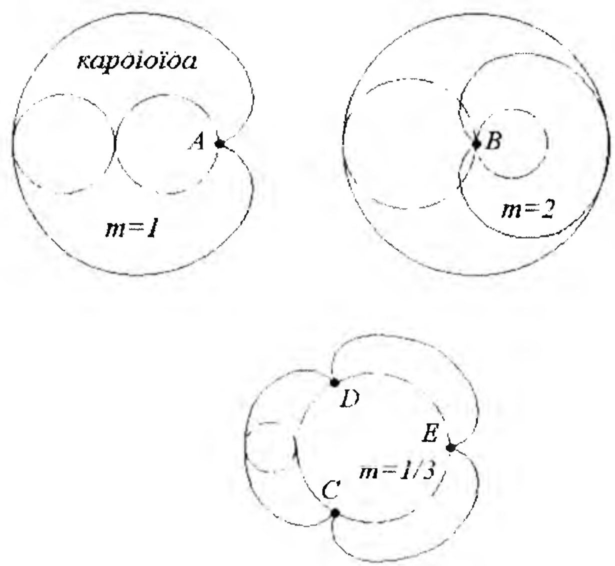
Звідси випливає, що для $m \neq \dfrac{1-2n}{4k}$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, для вектор-функції $\vec{r}(t = \{x(t); y(t)\})$ даної кривої маємо:

$$\vec{r}\,'(t_k) = \vec{0},\ \vec{r}\,''(t_k) \neq \vec{0},\ \vec{r}\,'''(t_k) \neq \vec{0},$$

Отже, на підставі загальної теорії (див. §2.3) маємо, що $p = 2$, $q = 3$, тобто точка t_k є точкою звороту 1-го роду.

Зобразимо епіциклоїди, які відповідають значенням $m = 1,\ 2,\ \dfrac{1}{3}$ (Мал. 2.23).

Точки A, B, C, D, E – точки звороту 1-го роду.



Мал. 2.23.

8. Знайти особливі точки кривої, яка задається рівнянням $F(x,y) = (y-x^2)^2 - x^5 = 0$. Визначити тип особливих точок.

Розв'язання. Для того, щоб знайти особливі точки даної кривої, знайдемо розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} F_x = 0, \\ F_y = 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

Отже,

$$F_x = -2x[2(y-x^2) + x^4], \quad F_y = 2(y-x^2).$$

Звідси випливає, що система рівнянь (2.19) має єдиний розв'язок $x = 0$, $y = 0$, тобто особливою точкою є точка

$(0;0)$. З'ясуємо, чи є ця точка подвійною особливою точкою. Для цього знаходимо

$$F_{xx} = -4xy + 12x^2 - 20x^3, \quad F_{xx}(0,0) = 0,$$

$$F_{xy} = -4x, \quad F_{yy}(0,0) = 2,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{xx}(0,0) & F_{xy}(0,0) \\ F_{yx}(0,0) & F_{yy}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Це означає, що точка $(0,0)$ є точкою звороту. Рівняння

$$F(x,y) \equiv y^2 - 2yx^2 + x^4 - x^5 = 0$$

розумітимемо як квадратне рівняння відносно y. Тоді

$$y_{1,2} = x^2 \pm \sqrt{x^4 - x^4 + x^5} = x^2 \pm \sqrt{x^5}.$$

Вказане зображення правильне за умови $x \geq 0$. У цьому випадку маємо, що крива складається з двох гілок:

$$y_1(x) = x^2 + x^2\sqrt{x}, \quad x \geq 0,$$

$$y_2(x) = x^2 - x^2\sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

Оскільки $y_1'(x) = 2x + \frac{5}{2}x^{3/2} > 0$, якщо $x > 0$, то $y_1(x)$ монотонно зростає на проміжку $(0, +\infty)$, причому $y_1(x) > 0$, якщо $x > 0$, $y_1(0) = 0$. Для функції $y_2(x)$ маємо, що

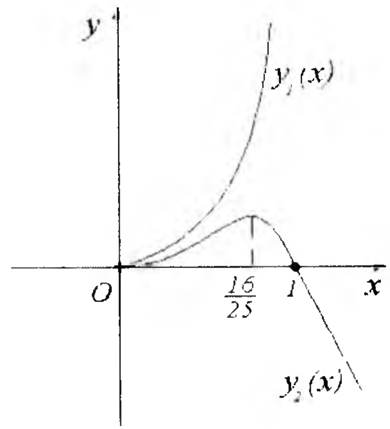
$$y_2'(x) = 2x - \frac{5}{2}x^{3/2} = x\left(2 - \frac{5}{2}\sqrt{x}\right) = 0,$$

якщо $x = 0$, $x = \dfrac{16}{25}$. Безпосередньо переконуємося в тому, що $y_2'(x) > 0$, якщо $x < \dfrac{16}{25}$ і $y_2'(x) < 0$, якщо $x > \dfrac{16}{25}$, тобто

у точці $x_0 = \dfrac{16}{25}$ функція $y_2(x)$ досягає свого максимуму ($y_2(0) = 0$). Крім того, $y_2(1) = 0$ і

$$y_2(x) = x^2\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) \to -\infty, x \to +\infty.$$

У точці $(0;0)$ функції $y_1(x)$, $y_2(x)$ мають спільну дотичну $y = 0$ ($y_1'(0) = y_2'(0) = 0$) і в досить малому (правосторонньому) околі цієї точки лежать по один бік від дотичної; для таких x маємо: $y_1(x) > 0$, $y_2(x) > 0$, $y_1(x) > y_2(x)$. Отже, точка $(0;0)$ є точкою звороту 2-го роду (див. Мал. 2.24).



Мал. 2.24.

9. Знайти гіперболу, яка вершиною дотикається до лінії $y = 1 - \cos x$ у початку координат і має найвищий порядок дотику у цій точці із заданою лінією.

Розв'язання. Виходячи з умов задачі, рівняння гіперболи шукаємо у вигляді

$$\frac{(y+c)^2}{b^2} - \frac{(x+d)^2}{a^2} = 1.$$

Введемо позначення:

$$\Phi(x,y) = \frac{(y+c)^2}{b^2} - \frac{(x+d)^2}{a^2} - 1;$$

тоді рівняння гіперболи набуває вигляду: $\Phi(x,y) = 0$. Лінію $y = 1 - \cos x$ задамо параметрично, поклавши $x = t$; тоді $y = 1 - \cos t$. Згідно з теоремою 2.9 маємо такі співвідношення для знаходження параметрів a, b, c, d:

$$\Psi(t) := \Phi(t, y(t)) \equiv \frac{(1-\cos t + c)^2}{b^2} - \frac{(t+d)^2}{a^2} - 1 = 0,$$

$$\Psi(0) = \frac{c^2}{b^2} - \frac{d^2}{a^2} - 1 = 0,$$

$$\Psi'(t) = \frac{2\sin t - \sin 2t + 2c\sin t}{b^2} - \frac{2(t+d)}{a^2} = 0,$$

$$\Psi'(0) = -\frac{2d}{a^2} = 0 \Rightarrow d = 0,$$

$$\Psi''(t) = \frac{2\cos t - 2\cos 2t + 2c\cos t}{b^2} - \frac{2}{a^2} = 0,$$

$$\Psi''(0) = \frac{2c}{b^2} - \frac{2}{a^2} = 0 \Rightarrow a^2 c = b^2,$$

$$\Psi^{(3)}(t) = \frac{-2\sin t + 4\sin 2t - 2c\sin t}{b^2} = 0,$$

$$\Psi^{(3)}(0) = 0,$$

$$\Psi^{(4)}(t) = \frac{-\cos t + 4\cos 2t - c\cos t}{b^2} = 0,$$

$$\Psi^{(4)}(0) = \frac{3-c}{b^2} = 0 \Rightarrow c = 3.$$

Таким чином, маємо, що $d = 0$, $c = 3$; $c^2 = b^2$, тобто $b^2 = 9$, $a^2 c = 9$, тоді $a^2 = 3$. Крім того, при знайдених значеннях параметрів a, b, c, d

$$\Psi^{(5)}(0) = 0, \quad \Psi^{(6)}(0) \neq 0.$$

Висновок: гіпербола

$$\frac{(y+3)^2}{9} - \frac{x^2}{3} = 1$$

має в точці $(0;0)$ з лінією $y = 1 - \cos x$ дотик 5-го порядку.

10. Знайти обвідну сім'ї кіл, побудованих, як на діаметрах, на хордах еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, паралельних вісі Oy.

Розв'язання. Прийнявши за параметр t центр кола, запишемо рівняння цієї однопараметричної сім'ї у вигляді:

$$F(x,y,t) = (x-t)^2 + y^2 - \frac{b^2}{a^2}(a^2 - t^2), \quad t \in [-a, a].$$

Тоді

$$F_t = -2(x-t) + \frac{2b^2}{a^2}t = 0,$$

звідки знаходимо, що $t = \dfrac{a^2}{a^2+b^2}x$. Підставивши це значення t в рівняння $F = 0$, одержимо рівняння дискримінантної кривої у вигляді:

$$\left(x - \frac{a^2 x}{a^2+b^2}\right)^2 + y^2 - \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - \frac{a^4 x^2}{(a^2+b^2)^2}\right) = 0,$$

або, після перетворень:

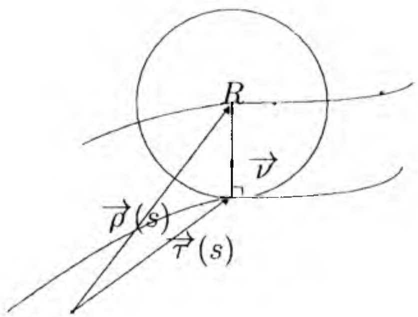
$$\frac{x^2}{a^2+b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.20}$$

Із рівнянь $F = 0$, $F_t = 0$ виразимо x та y через t:

$$x = \frac{a^2+b^2}{a^2}t, \quad y = \pm\frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - (a^2+b^2)t^2}.$$

Звідси відразу видно, що зображення для y має зміст (у множині дійсних чисел) лише при $|t| \le \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} < a$. Очевидно також, що крива (2.20) особливих точок немає. Отже, дискримінантна крива (2.20) є обвідною для частини сім'ї кіл, яка відповідає вказаним значенням параметра t. Цією обвідною є еліпс із тими ж осями симетрії, які має заданий еліпс.

11. Еволютою плоскої кривої називається геометричне місце центрів стичних кіл даної кривої. Дослідити особливості поведінки еволюти кривої в залежності від властивостей кривини кривої.



Розв'язання. Нехай γ – плоска крива, M – довільна її точка, в якій кривина відмінна від нуля. Тоді, якщо $\vec{r} = \vec{r}(s)$ – рівняння кривої γ, то вектор-функція $\vec{\rho}(s) = \vec{r}(s) + \frac{1}{k(s)}\vec{\nu}(s)$ визначає еволюту кривої γ, оскільки $R(s) = \dfrac{1}{k(s)}$ – радіус кривини кривої γ, а $\vec{\nu}$ – орт нормалі.

Якщо кривина кривої γ у всіх точках не перетворюється в нуль і $\dot{k}(s) > 0$ або $\dot{k}(s) < 0$, то еволютою такої кривої є регулярна крива без особливих точок. Справді, врахувавши другу формулу Френе, а також те, що скрут плоскої кривої

дорівнює нулю знаходимо, що

$$\frac{d\vec{\rho}(s)}{ds} = -\frac{\dot{k}(s)}{k^2(s)}\vec{\nu}(s) \neq \vec{0}.$$

Припустимо, що $\exists s_0$: $k(s_0) = 0$, але $\dot{k}(s) > 0$ або $\dot{k}(s) < 0$ для всіх $s \neq s_0$ на кривій γ. У цьому випадку вектор-функція кривої γ має наступний розклад в околі точки s_0:

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(s_0) + \Delta s\,\vec{r}(s_0) + \frac{1}{3!}\dot{k}(s_0)\Delta s^3\vec{\nu} + o(\Delta s^3),\ \Delta s = s - s_0.$$

Отже, крива в точці $M(s_0)$ має перегин. Оскільки $R(s_0) = \infty$, то при $s \to s_0$ точки еволюти прямують до нескінченності і вона розпадається на дві регулярні криві, які є еволютами частин кривої γ: $s < s_0$, $s > s_0$.

Припустимо далі, що $\exists s_0$: $k(s_0) \neq 0$, $\dot{k}(s_0) = 0$, $\ddot{k}(s_0) \neq 0$ і $\dot{k}(s)$ змінює знак при переході через s_0. У цьому випадку еволюта має особливу точку при $s = s_0$: $\dot{\vec{\rho}}(s_0) = \vec{0}$. Для того, щоб з'ясувати характер особливості знайдемо похідні в цій точці. Використовуючи формули Френе, отримаємо

$$\ddot{\vec{\rho}}(s_0) = \ddot{R}(s_0)\vec{\nu}(s_0) = -\frac{\ddot{k}(s_0)}{k^2(s_0)}\vec{\nu}(s_0) \neq \vec{0},$$

$$\dddot{\vec{\rho}}(s_0) = \dddot{R}(s_0)\vec{\nu}(s_0) - 2k\ddot{R}(s_0)\vec{r}(s_0), \quad R = \frac{1}{k}.$$

Звідси випливає, що перша відмінна від нуля похідна має номер $p = 2$, а перша наступна похідна, яка їй не колінеарна – номер $q = 3$. Згідно з класифікацією особливих точок (див. §2.3) еволюта має точку звороту першого порядку.

Зауваження 2.7. Оскільки кожна точка еволюти є центром стичного кола кривої γ, то, скориставшись формулами для координат центра такого кола, одержимо координатно-параметричні рівняння еволюти у випадку довільної параметризації кривої γ: $x = x(t)$, $y = y(t)$:

$$X = x(t) - y'(t)\frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)},$$

$$Y = y(t) + x'(t)\frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}$$

(тут X, Y – координати рухомої по еволюті точки).

Якщо крива γ задається явно рівнянням $y = y(x)$, то наведені вище формули набувають вигляду:

$$X = x - \frac{1 + {y'_x}^2}{y''_{x^2}}y'_x, \quad Y = y + \frac{1 + {y'_x}^2}{y''_{x^2}}.$$

12. Знайти еволюту астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$.

Розв'язання. Похідні y'_x та y''_{x^2} можна знайти, не розв'язуючи рівняння, за методом диференціювання неявних функцій:

$$x^{-1/3} + y^{-1/3} \cdot y'_x = 0 \text{ або } x^{1/3} \cdot y'_x + y^{1/3} = 0,$$

звідки $y'_x = -\left(\dfrac{y}{x}\right)^{1/3}$, потім знаходимо, що

$$\frac{1}{3}x^{-2/3}y'_x + \frac{1}{3}y^{-2/3}y'_x + x^{1/3}y''_{x^2} = 0.$$

Тоді

$$y''_{x^2} = -\frac{a^{2/3}}{3xy^{2/3}}y'_x = \frac{a^{2/3}}{3x^{4/3}y^{1/3}} = \left(\frac{a^2}{3x^4y}\right)^{1/3}.$$

Рівняння еволюти складемо, скориставшись формулами для еволюти у випадку, коли вихідна крива задається рівнянням $y = y(x)$ (див. приклад 11):

$$\xi = x - \frac{1 + {y'_x}^2}{y''_{x^2}}y'_x, \quad \eta = y + \frac{1 + {y'_x}^2}{y''_{x^2}}. \qquad (2.21)$$

Підставивши y'_x, y''_{x^2} в (2.21), після спрощень одержимо

$$\xi = x + 3x^{1/3}y^{2/3}, \quad \eta = y + 3x^{2/3}y^{1/3}.$$

Із цих рівнянь, разом з рівнянням самої астроїди, можна виключити x та y:

$$\xi + \eta = (x^{1/3} + y^{1/3})^3, \quad \xi - \eta = (x^{1/3} - y^{1/3})^3,$$

$$(\xi + \eta)^{2/3} + (\xi - \eta)^{2/3} = 2(x^{2/3} + y^{2/3}) = 2a^{2/3}.$$

Якщо повернути вісі координат на 45^0, то нові координати ξ_1, η_1 будуть пов'язані зі старими координатами такими формулами

$$\xi_1 = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \quad \eta_1 = -\frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}}.$$

Отже, у новій системі координат рівняння шуканої еволюти матиме вигляд

$$\xi_1^{2/3} + \eta_1^{2/3} = (2a)^{2/3},$$

тобто це знову рівняння астроїди. Таким чином, еволютою астроїди є астроїда удвоє більших розмірів, з осями, повернутими відносно попередніх на 45^0.

Побудуємо графік астроїди $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Це рівняння, взагалі кажучи, не підходить під той тип рівнянь, які ми розглядали: у кожній з точок $(\pm a; 0)$, $(0; \pm a)$ одна з частинних похідних лівої частини цього рівняння перетворюється в нескінченність. Однак, звільнивши рівняння кривої від ірраціональностей, його можна подати у вигляді

$$F(x, y) \equiv ((x^2 + y^2) - a^2)^3 + 27a^2x^2y^2 = 0.$$

У цьому представленні вказані точки є особливими. Справді,

$$F_x = 6x((x^2+y^2)-a^2)^2+54a^2xy^2, F_x(\pm a;0) = 0, F_x(0;\pm a) = 0,$$

$$F_y = 6y((x^2+y^2)-a^2)^2+54a^2x^2y, F_y(\pm a;0) = 0, F_y(0;\pm a) = 0.$$

Із рівняння кривої видно, що вона симетрична відносно координатних осей; тому далі дослідимо, наприклад, точки $(\pm a;0)$. Маємо, що

$$F_{xx} = 24x^2((x^2+y^2)-a^2)+6((x^2+y^2)-a^2)^2+54a^2y^2,$$

$$F_{xx}(\pm a;0) = 0, \quad F_{yy} = 24y^2((x^2+y^2)-a^2)+$$
$$+6((x^2+y^2)-a^2)^2+54a^2x^2, F_{yy}(\pm a;0) = 54a^4,$$
$$F_{xy} = 24xy((x^2+y^2)-a^2)+108a^2xy, F_{xy}(\pm a;0) = 0.$$

Отже,

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 54a^2 \end{vmatrix} = 0,$$

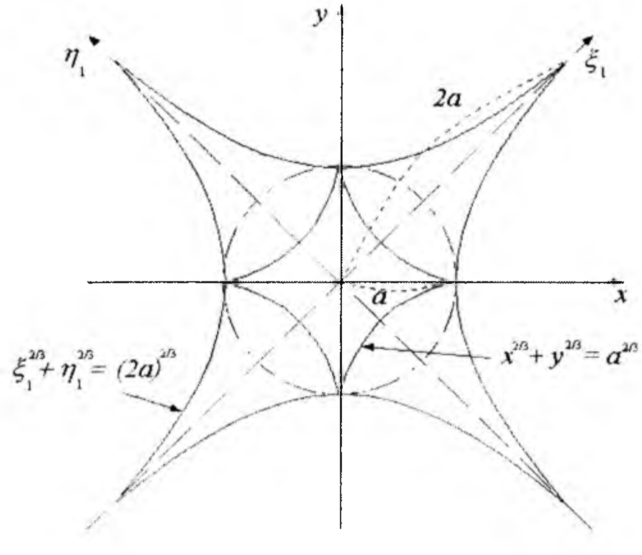
тобто точки $(\pm a;0)$ є точками звороту.

Із рівняння кривої випливає, що вона лежить у крузі $x^2+y^2 = a^2$. Розв'язавши рівняння відносно y матимемо: $y = (a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}$; продиференціювавши по x знайдемо, що

$$y'_x = -(a^{2/3}-x^{2/3})^{1/2}x^{-1/3}.$$

Звідси бачимо, що при $x = 0$ дотична вертикальна, а при $x = a$ – горизонтальна. Це означає, що всі чотири точки $(\pm a;0)$, $(0;\pm a)$ є точками звороту першого роду (див. Мал. 2.25).

Відзначимо ще одну важливу властивість астроїди. Для цього розглянемо задачу про відшукання обвідної однопараметричної сім'ї прямих, яка отримується при ковзанні прямої по координатних осях двома точками, що розміщуються одна від одної на сталій віддалі a.



Мал. 2.25.

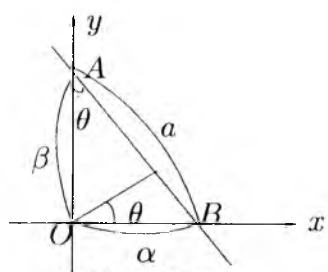
Взявши за параметр кут θ, який утворює перпендикуляр, проведений з початку координат до рухомої прямої, з віссю Ox, рівняння цієї прямої можна записати у вигляді

$$\frac{x}{\sin\theta}+\frac{y}{\cos\theta} = a, \quad \theta \neq 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}. \tag{2.22}$$

Справді, рівняння прямої AB запишемо у вигляді $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta} = 1$ (рівняння прямої у відрізках). Тоді з прямокутного трикутника OAB (див. Мал. 2.26) знаходимо, що $\alpha = a\sin\theta$, $\beta = a\cos\theta$. Отже, маємо рівняння

$$\frac{x}{a\sin\theta}+\frac{y}{a\cos\theta} = 1,$$

або (2.22).



Мал. 2.26.

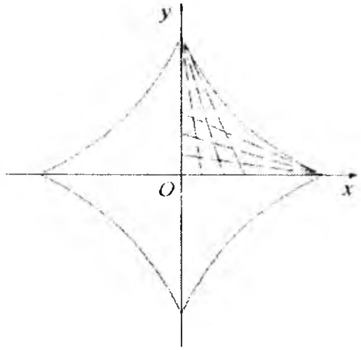
Продиференціюємо (2.22) по θ:

$$-\frac{x}{\sin^2\theta}\cos\theta + \frac{y}{\cos^2\theta}\sin\theta = 0 \text{ або } \frac{x}{\sin^3\theta} = \frac{y}{\cos^3\theta}.$$

Звідси та з (2.22) знаходимо рівняння дискримінантної кривої

$$x = a\sin^3\theta, \quad y = a\cos^3\theta. \tag{2.23}$$

(2.23) – параметричні рівняння астроїди. Якщо з дискримінантної кривої вилучити особливі точки $(\pm a; 0)$, $(0; \pm a)$, то дістанемо обвідну однопараметричної сім'ї прямих (2.22) (див. Мал. 2.27).



Мал. 2.27.

13. Якщо r – полярний радіус, а φ – полярний кут довільної точки плоскої кривої γ, то $r = r(\varphi)$ – рівняння кривої у полярних координатах (Мал. 2.28). Проведемо через точку O пряму, перпендикулярну до полярного радіуса точки M кривої γ. Нехай T і N – точки перетину побудованої прямої з дотичною і нормаллю до кривої у точці M. Відрізки OT і ON називаються відповідно полярною піддотичною і полярною піднормаллю кривої. Знайти формули, які

визначають OT і ON. Знайти плоскі криві, які перетинають під сталим кутом усі промені з вершинами у полюсі. Знайти плоскі криві зі сталою полярною піднормаллю, зі сталою полярною піддотичною.

Розв'язання. Розглянемо прямокутну систему координат, у якої полюс O є початком системи координат, промінь OM збігається з додатним променем вісі Ox, промінь ON – з додатним променем вісі Oy, де M – звичайна точка кривої $r = r(\varphi)$. Відносно цієї системи координат $M(r; 0)$ $(\varphi = 0)$. Рівняння $r = r(\varphi)$ кривої γ в полярних координатах еквівалентне параметричним рівнянням кривої $x = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = r(\varphi)\sin\varphi$ відносно прямокутної декартової системи координат з початком у полюсі. Тоді

Мал. 2.28.

$$dx = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi, \quad dy = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi.$$

У точці M $(\varphi = 0)$ маємо $dx = dr$, $dy = rd\varphi$. Нехай μ – кут між дотичною до кривої у точці M і прямою OM. Тоді $\operatorname{tg}\mu$ є кутовим коефіцієнтом дотичної до кривої у точці M. Тому

$$\operatorname{tg}\mu = \left.\frac{dy}{dx}\right|_M = r\frac{d\varphi}{dr}.$$

Ординати y_T, y_N точок T і N, в яких дотична і нормаль кривої перетинають вісь Oy, знаходимо з умов

$$\frac{y_M - y_T}{x_M - x_T} = \operatorname{tg}\mu, \quad \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = -\operatorname{ctg}\mu.$$

Оскільки $x_M = r$, $y_M = 0$, $\operatorname{tg}\mu = r\dfrac{d\varphi}{dr}$, то $y_T = -r^2\dfrac{d\varphi}{dr}$, $y_N = \dfrac{dr}{d\varphi}$. Отже,

$$OT = -r^2\frac{d\varphi}{dr}, \quad ON = \frac{dr}{d\varphi},$$

де OT і ON – величини направлених відрізків $\overrightarrow{OT}$ і $\overrightarrow{ON}$ відповідно. Зазначимо, що у проведених міркуваннях використовувалася спеціальна полярна система координат, яка відрізняється від раніше вибраної лише на сталий кут повороту полярної осі. Оскільки в отриманих формулах змінна φ входить лише у вигляді $d\varphi$, то отримані співвідношення є правильними і відносно вибраної раніше системи координат.

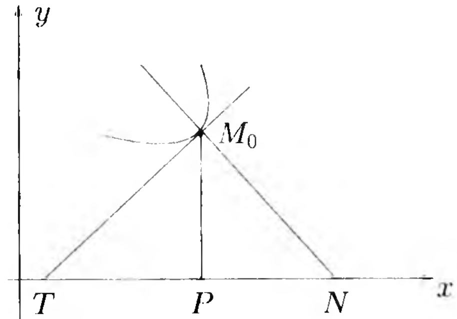
Якщо крива перетинає під сталим кутом усі промені з вершинами у полюсі, то для такої кривої $\mu = \text{const}$ і тому $r\dfrac{d\varphi}{dr} = c$, $c = \text{const}$. Отже, $r = r_0 e^{\varphi/c}$ – крива, яка є графіком логарифмічної спіралі.

Якщо плоска крива має сталу полярну піднормаль, то $\dfrac{dr}{d\varphi} = a$, $a = \text{const}$. Інтегруючи, дістанемо лінійну залежність між r та φ: $r = a\varphi + c$, $c = \text{const}$ (спіралі Архімеда).

Якщо плоска крива має сталу полярну піддотичну, то $a = -r^2\dfrac{d\varphi}{dr}$. Загальний розв'язок цього диференціального рівняння має вигляд: $r = \dfrac{1}{\frac{\varphi}{a} + c}$, $c = \text{const}$ (гіперболічні спіралі).

14. Нехай плоска крива γ задається рівнянням $F(x,y) = 0$, M_0 – звичайна точка кривої γ, T – точка перетину дотичної до кривої у точці M_0 з віссю Ox, N – точка перетину нормалі до кривої у точці

M_0 з віссю Ox, P – проекція точки M_0 на вісь Ox (Мал. 2.29). Відрізки PT і PN називаються піддотичною і піднормаллю відповідно. Знайти величини направлених відрізків піддотичної та піднормалі. Знайти криві зі сталими піднормалями та піддотичними. Знайти криві зі сталою довжиною відрізків дотичної.



Мал. 2.29.

Розв'язання. Оскільки рівняння дотичної до лінії $F(x,y) = 0$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}(y - y_0) = 0,$$

то абсциса точки T перетину дотичної з віссю Ox обчислюється за формулою

$$x_T = x_0 + \frac{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}} y_0.$$

Величина $\overline{PT}$ направленого відрізка $\overrightarrow{M_0T}$ (проекція $\overrightarrow{M_0T}$ на вісь Ox) дорівнює $x_T - x_0$, тобто $\overline{PT} = \left.\left(\dfrac{dx}{dy}\right)\right|_{M_0} y_0$.

Нормаль M_0N перпендикулярна до дотичної M_0T, тому її рівняння має вигляд

$$y - y_0 = \frac{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}}(x - x_0) \text{ або } \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}(y - y_0) = \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}(x - x_0).$$

Для абсциси точки перетину нормалі до кривої у точці M_0 з віссю Ox маємо

$$x_N - x_0 = -\frac{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}} y_0.$$

Отже, величина направленого відрізка піднормалі

$$\overline{PN} = x_N - x_0 = -\left.\left(\frac{dy}{dx}\right)\right|_{M_0} y_0.$$

Для плоских кривих із сталою піднормаллю a маємо: $a = -y\dfrac{dy}{dx}$. Інтегруючи це диференціальне рівняння знаходимо, що $ax = -\dfrac{y^2}{2} + c$, де $c = \mathrm{const}$. Отже, це параболи, для яких вісь Ox є віссю симетрії.

Вимога сталості піддотичної у всіх точках плоскої кривої має вигляд $a = y\dfrac{dx}{dy}$, $a = \mathrm{const}$. Інтегруючи це рівняння маємо, що $y = ce^{x/a}$, $c = \mathrm{const}$, тобто, шуканими кривими є показникові функції.

Для кривих, у яких $MT = a$, де a – const,

$$|y|\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = a.$$

Розглянемо ту частину кривої, для якої $y > 0$. Тоді, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{dy}{dx}$, $0 < \alpha < \pi$, то $y = a\sin\alpha$, $dy = a\cos\alpha d\alpha$, $dx = a\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}d\alpha$. Отже, $dx = a\left(\dfrac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right)d\alpha$, тому

$$x = a(\ln\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha) + c.$$

Шукана крива має параметричні рівняння

$$x = a(\ln\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha) + c, \quad y = a\sin\alpha,$$

має вісь симетрії, якою є дотична до кривої в точці $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Дослідимо криву, яка задається векторним рівняння

$$\vec{r}(t) = \{a(\ln\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha); a\sin\alpha\},$$

тобто вважаємо, що $c = 0$ (інші лінії отримуються з даної за допомогою переміщення вздовж вісі Ox паралельно вісі Oy). Для цієї кривої маємо:

$$\vec{r}\,'(t) = \left\{a\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right); a\cos\alpha\right\}, \quad \vec{r}\,'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vec{0};$$

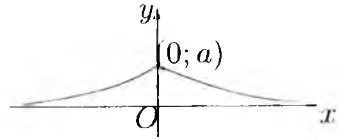
$$\vec{r}\,''(t) = \left\{-a\left(\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \cos\alpha\right); -a\sin\alpha\right\}, \vec{r}\,''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \{0; -a\} \neq \vec{0};$$

$$\vec{r}\,'''(t) = \left\{a\left(\frac{\sin^2\alpha + \cos\alpha}{\sin^3\alpha} + \sin\alpha\right); -a\cos\alpha\right\},$$

$$\vec{r}\,'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \{2a; 0\} \neq \vec{0}.$$

Внаслідок загальної класифікації особливих точок плоских кривих ($p = 2$, $q = 3$; див. §2.3) маємо, що точка $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

є точкою звороту 1-го роду. Крива називається **трактрисою**. Вісь Ox для трактриси є асимптотою (див. Мал. 2.30).



Мал. 2.30.

15. Скласти натуральні рівняння кривої $x = ct$, $y = \sqrt{2}c\ln t$, $z = ct^{-1}$, $c > 0$.

Розв'язання. Передусім знайдемо зв'язок між параметром t і натуральним параметром s. Якщо $\vec{r}(t) = \{x(t); y(t); z(t)\}$ – векторне рівняння кривої, то

$$s = \int_{t_0}^{t} |\vec{r}\,'(\tau)|d\tau \Rightarrow ds = |\vec{r}\,'(t)|dt = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt =$$

$$= \sqrt{(dx(t))^2 + (dy(t))^2 + (dz(t))^2} \Rightarrow ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

У випадку заданої кривої маємо, що

$$ds^2 = c^2\left(1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}\right)dt^2 = \frac{c^2(t^2+1)^2}{t^4}dt^2,$$

тобто

$$ds = \frac{c(t^2+1)}{t^2}dt.$$

Звідси випливає, що

$$s = c\int_{t_0}^{t} \frac{t^2+1}{t^2}dt = c\left(t - \frac{1}{t}\right) - c\left(t_0 - \frac{1}{t_0}\right).$$

Покладемо $t_0 = 1$, тоді

$$s = c\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

Із цієї рівності знаходимо t як функцію натурального параметра s:

$$t = \frac{s + \sqrt{s^2 + 4c^2}}{2c}.$$

Рівняння кривої з натуральним параметром мають вигляд:

$$x = \frac{1}{2}(s + \sqrt{s^2 + 4c^2}), \quad y = \sqrt{2}c\ln\frac{s + \sqrt{s^2 + 4c^2}}{2c},$$

$$z = \frac{2c^2}{s + \sqrt{s^2 + 4c^2}}.$$

16. Скласти рівняння дотичної та нормальної площини в довільній точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ просторової кривої, яка задається рівняннями

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \Phi(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

за умови, що $\operatorname{grad} F(M_0) \nparallel \operatorname{grad} \Phi(M_0)$ **(F та Φ – регулярні функції своїх аргументів).**

Розв'язання. Із означення градієнта функції та умов задачі випливає, що

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{pmatrix} = 2. \qquad (2.24)$$

У цьому разі принаймні один із мінорів другого порядку цієї матриці відмінний від нуля. Нехай, для визначеності,

$$\left.\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}\right|_{M_0} \neq 0.$$

Тоді, згідно з відомою з курсу математичного аналізу теоремою про неявні функції існує окіл точки M_0, в якому систему рівнянь (2.24) можна розв'язати відносно y і z: $y = f(x)$, $z = g(x)$, причому функції f і g неперервно диференційовні. Позначимо $x = t$ і запишемо векторне рівняння $\vec{r} = \{t; f(t); g(t)\}$, яким в околі точки M_0 визначається регулярна крива γ.

У довільній точці $M(t)$ цієї кривої $\vec{r}'(t) = \{1; f'(t); g'(t)\} \neq \vec{0}$, тобто $M(t)$ – її звичайна точка. Тоді згідно з теоремою 2.7 вектор $\vec{r}'(t)$ визначає єдину дотичну до кривої γ в точці M.

Запишемо рівняння дотичної до кривої γ в точці $M_0 = M(t_0)$. Зрозуміло, що для $M(t; f(t); g(t)) \in \gamma$ справджуються тотожності

$$F(t; f(t); g(t)) = 0,$$

$$\Phi(t; f(t); g(t)) = 0.$$

Продиференціювавши їх по t одержимо

$$\frac{dF}{dt} = F_x \cdot 1 + F_y \cdot f'(t) + F_z \cdot g'(t) = 0,$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Phi_x \cdot 1 + \Phi_y \cdot f'(t) + \Phi_z \cdot g'(t) = 0.$$

Останні рівності запишемо у вигляді:

$$(\operatorname{grad} F(M_0), \vec{r}'(t_0)) = 0, \quad (\operatorname{grad} \Phi(M_0), \vec{r}'(t_0)) = 0. \quad (2.25)$$

Вектори $\operatorname{grad} F(M_0)$, $\operatorname{grad} \Phi(M_0)$ не нульові і за умовою $\operatorname{grad} F(M_0) \nparallel \operatorname{grad} \Phi(M_0)$. Тоді з (2.25) випливають співвідношення

$$\operatorname{grad} F(M_0) \perp \vec{r}'(t_0), \quad \operatorname{grad} \Phi(M_0) \perp \vec{r}'(t_0).$$

Отже, $\vec{r}'(t_0) \parallel \vec{a} = [\operatorname{grad} F(M_0), \operatorname{grad} \Phi(M_0)]$. Таким чином, вектор

$$\vec{a} = \left\{ \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}_{M_0}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ \Phi_z & \Phi_x \end{vmatrix}_{M_0}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix}_{M_0} \right\} = \{A; B; C\}$$

є напрямним вектором дотичної до кривої γ в точці M_0. Позначивши координати точки, яка рухається по дотичній, через X, Y, Z, запишемо рівняння цієї дотичної у ортонормованому базисі $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

$$\frac{X - x_0}{A} = \frac{Y - y_0}{B} = \frac{Z - z_0}{C}.$$

Вектор $\vec{a}$ ортогональний до нормальної площини кривої γ у точці M_0, тому рівняння нормальної площини має вигляд

$$A(X - x_0) + B(Y - y_0) + C(Z - z_0) = 0,$$

де X, Y, Z – координати рухомої точки нормальної площини.

Як приклад запишемо рівняння дотичної до кривої, яка визначається рівняннями $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$, у довільній точці.

Дані рівняння подамо у вигляді

$$F(x, y, z) \equiv x^2 - 2az = 0, \quad \Phi(x, y, z) \equiv y^2 - 2bz = 0.$$

Тоді $\operatorname{grad} F = \{2x; 0; -2a\}$, $\operatorname{grad} \Phi = \{0; 2y; -2b\}$,

$$[\operatorname{grad} F, \operatorname{grad} \Phi] = \left\{ \begin{vmatrix} 0 & -2a \\ 2y & -2b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2a & 2x \\ -2b & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= \{4ay; 4bx; 4xy\}.$$

Отже, рівняння шуканої дотичної має вигляд:

$$\frac{X - x}{ay} = \frac{Y - y}{bx} = \frac{Z - z}{xy}.$$

17. Знайти рівняння елементів тригранника Френе кривої

$$\gamma : \quad \begin{cases} x + \operatorname{sh} x = \sin y + y, \\ z + e^z = x + \ln(1 + x) + 1 \end{cases} \qquad (2.26)$$

у точці $M_0(0;0;0)$.

Розв'язання. Введемо позначення: $\Phi(x,y,z) := x + \operatorname{sh} x - \sin y - y$, $G(x,y,z) := x + \ln(1+x) + 1 - z - e^z$ і запишемо рівняння кривої у вигляді

$$\begin{cases} \Phi(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Згідно з теоремою 2.6 знайдемо ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}_{M_0}.$$

Маємо, що $\Phi_x(M_0) = 2$, $\Phi_y(M_0) = -2$, $\Phi_z(M_0) = 0$, $G_x(M_0) = 2$, $G_y(M_0) = 0$, $G_z(M_0) = -2$. Отже,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $\operatorname{rang} A = 2$, причому мінор $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$. Отже, в околі точки M_0 відповідна система рівнянь розв'язується відносно y і z; покладемо $x = t$, тоді $y = y(t)$, $z = z(t)$. Векторне рівняння, яким визначається крива γ в околі точки M_0 має вигляд: $\vec{r}(t) = \{t; y(t), z(t)\}$.

Знайдемо вектори $\vec{r}\,'(0)$, $\vec{r}\,''(0)$. Для цього продиференціюємо рівняння системи (2.26) по t:

$$\begin{cases} 1 + \operatorname{ch} t = \cos y \cdot y'_t + y'_t, \\ z'_t + e^z \cdot z'_t = 1 + \frac{1}{1+t}. \end{cases} \tag{2.27}$$

У точці M_0 ця система набуває вигляду:

$$\begin{cases} 2 = 2y'_t(0), \\ 2 \cdot z'_t(0) = 2. \end{cases}$$

Отже, $y'_t(0) = 1$, $z'_t(0) = 1$, $\vec{r}\,'(0) = \{1;1;1\}$. Далі продиференціюємо (2.27) по t:

$$\begin{cases} 1 + \operatorname{sh} t = -\sin y \cdot (y'_t)^2 + \cos y \cdot y''_{t^2} + y''_{t^2}, \\ z''_{t^2} + e^z \cdot (z'_t)^2 + e^z \cdot z''_{t^2} = -\frac{1}{(1+t)^2}. \end{cases}$$

Звідси знаходимо, що $y''_{t^2}(0) = \dfrac{1}{2}$, $z''_{t^2}(0) = -1$. Отже, $\vec{r}\,''(0) = \{0; \frac{1}{2}; -1\}$. Вектор $\vec{r}\,'(0)$ є напрямним вектором дотичної до кривої у точці M_0, $\vec{b} := [\vec{r}\,'(0), \vec{r}\,''(0)]$ напрямний вектор бінормалі цієї кривої в точці M_0. Знайдемо координати цього вектора:

$$\vec{b} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{vmatrix} \right\} = \left\{ -\frac{3}{2}; 1; \frac{1}{2} \right\}.$$

Вектор $\vec{p} := [\vec{b}, \vec{r}\,'(0)]$ напрямний вектор головної нормалі кривої γ у точці M_0:

$$\vec{p} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3/2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}; 2; -\frac{5}{2} \right\}.$$

Маючи вказані вектори, складемо рівняння елементів тригранника Френе кривої γ у точці M_0.

Рівняння дотичної:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \Leftrightarrow x = y = z.$$

Рівняння нормальної площини:

$$x + y + z = 0$$

(вектор $\vec{r}\,'(0)$ є нормальним вектором цієї площини).

Рівняння бінормалі:

$$\frac{x}{-3/2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1/2}.$$

Рівняння стичної площини:

$$-\frac{3}{2}x + y + \frac{1}{2}z = 0 \Leftrightarrow= -3x + 2y + z = 0$$

(вектор $\overrightarrow{b}$ є нормальним вектором стичної площини).

Рівняння головної нормалі:

$$\frac{x}{1/2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-5/2}.$$

Рівняння спрямної площини:

$$\frac{1}{2}x + 2y - \frac{5}{2}z ==\Leftrightarrow x + 4y - 5z = 0$$

(вектор $\overrightarrow{p}$ є нормальним вектором спрямної площини).

18. З'ясувати, до якого класу регулярності належить лінія γ, що задається параметричними рівняннями

$$x(t) = \begin{cases} e^{1/t}, & t < 0, \\ 0, & t \geq 0; \end{cases} \quad y = t; \; z(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Знайти кривину та скрут γ.

Розв'язання. Доведемо, що γ належить до класу $C^{(\infty)}_{\mathbb{R}}$. Для цього, очевидно, досить показати, що функції $x(t)$, $y(t)$ нескінченно диференційовні в точці $t = 0$. Дослідимо на нескінченну диференційовність в точці $t = 0$ функцію $z(t)$.

Перевіримо, що $z^{(m)}(0) = 0$ для $m \in \mathbb{Z}_+$. Для цього, як відомо з курсу математичного аналізу, досить показати, що односторонні похідні $z_-^{(m)}(0)$ та $z_+^{(m)}(0)$ існують і дорівнюють нулю. Користуючись методом математичної індукції припустимо, що для деякого $m \in \mathbb{N}$ $z^{(k)}(0) = 0$ при всіх $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Врахуємо також, що для $m = 1$

$$z'_+(0) = \lim_{\Delta t \to 0+0} \frac{z(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0+0} \frac{e^{-1/\Delta t}}{\Delta t} = 0,$$

$$z'_-(0) = \lim_{\Delta t \to 0-0} \frac{z(\Delta t)}{\Delta t} = 0,$$

тобто $z'_-(0) = z'_+(0) = z'(0) = 0$. Отже, для $m = 1$ твердження є правильним. Тоді

$$z_-^{(m)}(0) = \lim_{\Delta t \to 0-0} \frac{z_-^{(m-1)}(\Delta t) - z_-^{(m-1)}(0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0-0} \frac{z_-^{(m-1)}(\Delta t)}{\Delta t} = 0,$$

бо, очевидно, $z^{(s)}(\Delta t) = 0$ для всіх $s \in \mathbb{N}$ і всіх $\Delta t < 0$.

Для відшукання границі

$$z_+^{(m)}(0) = \lim_{\Delta t \to 0+0} \frac{z^{(m-1)}(\Delta t)}{\Delta t}$$

передусім зауважимо, що при $t > 0$ функція $z^{(s)}(t)$ має вигляд $P_{s-1}(t) \cdot t^{-2s} e^{-1/t}$, $s \in \mathbb{N}$, де P_{s-1} — деякий поліном, степінь якого не перевищує $s-1$ (цей факт легко отримати за допомогою методу математичної індукції).

Нехай $m \geq 2$. Тоді

$$z_+^{(m)}(0) = \lim_{\Delta t \to 0+0} \frac{P_{m-2}(\Delta t) e^{-1/\Delta t}}{(\Delta t)^{2(m-1)}} = \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\alpha^{2(m-1)} P_{m-2}(\frac{1}{\alpha})}{e^{\alpha}},$$

де $\alpha = \dfrac{1}{\Delta t}$, звідки за допомогою правила Лопіталя знаходимо, що $z_+^{(m)}(0) = 0$, $m \geq 2$. Цим доведено, що $z(t)$ є нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією. Нескінченна диференційовність функції $x(t)$ встановлюється аналогічно. Отже, $\gamma \in C^{(\infty)}_{\mathbb{R}}$.

Знайдемо кривину кривої γ у всіх точках, які відповідають параметру $t < 0$ (якщо вона існує). У цьому випадку векторне рівняння γ є таким:

$$\overrightarrow{r}(t) = \{e^{1/t}; t; 0\}.$$

Тоді

$$\vec{r}'(t) = \{-t^{-2}e^{1/t}; 1; 0\}, \quad \vec{r}''(t) = \{t^{-4}(1+2t)e^{1/t}; 0; 0\},$$

$$|\vec{r}'(t)| = \frac{\sqrt{t^4 + e^{2t}}}{t^2}, [\vec{r}'(t), \vec{r}''(t)] = \{0; 0; -t^{-4}(1+2t)e^{1/t}\},$$

$$|[\vec{r}', \vec{r}'']| = \frac{|1+2t|e^{1/t}}{t^4},$$

$$k(t) = \frac{|[\vec{r}'(t), \vec{r}''(t)]|}{|\vec{r}'(t)|^3} = \frac{t^2|1+2t|e^{1/t}}{(t^4 + e^{2/t})^{3/2}}, \quad t < 0.$$

З останньої формули випливає, що $k(-\frac{1}{2}) = 0$.

Знайдемо кривину кривої γ у точці, яка відповідає параметру $t = 0$. Оскільки, як було встановлено раніше, $x^{(m)}(0) = z^{(m)}(0) = 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$, то

$$\vec{r}'(0) = \{x'(0); y'(0); z'(0)\} = \{0; 1; 0\},$$

$$\vec{r}''(0) = \{x''(0); y''(0); z''(0)\} = \{0; 0; 0\}, |\vec{r}'(0)| = 1,$$

$$[\vec{r}'(0), \vec{r}''(0)] = \{0; 0; 0\}, |[\vec{r}'(0), \vec{r}''(0)]| = 0, k(0) = 0.$$

Якщо $t > 0$, то параметризація γ має вигляд

$$\vec{r}'(t) = \{0; t; e^{-1/t}\}.$$

Аналогічно до попереднього знаходимо, що

$$\vec{r}'(t) = \{0; 1; t^{-2}e^{-1/t}\}, \vec{r}''(t) = \{0; 0; t^{-4}(1-2t)e^{-1/t}\},$$

$$|\vec{r}'(t)| = \frac{\sqrt{t^4 + e^{-2/t}}}{t^2}, [\vec{r}'(t), \vec{r}''(t)] = \{t^{-4}(1-2t)e^{-1/t}; 0; 0\},$$

$$|[\vec{r}'(t), \vec{r}''(t)]| = \frac{|1-2t|e^{-1/t}}{t^4}, k(t) = \frac{t^2|1-2t|e^{-1/t}}{(t^4 + e^{-2/t})^{3/2}}, t > 0.$$

Зазначимо також, що $k(\frac{1}{2}) = 0$.

Отже, у точках кривої, які відповідають значенням параметра t: $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, кривина γ рівна нулю, тобто у вказаних точках кривої скрут не існує. Знайдемо скрут кривої γ у всіх точках, за винятком вказаних.

$$t < 0: \ \vec{r}'''(t) = \{t^{-6}(1 - 2t - 6t^2)e^{1/t}; 0; 0\},$$

$$t > 0: \ \vec{r}'''(t) = \{0; 0; t^{-6}(6t^2 - 6t + 1)e^{1/t}\}.$$

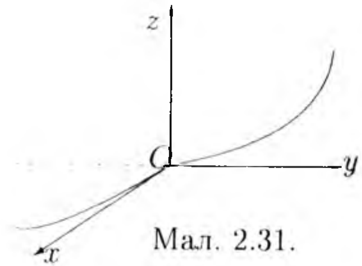
Тоді для $t > 0$

$$(\vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \vec{r}'''(t)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & t^{-2}e^{-1/t} \\ 0 & 0 & t^{-4}(1-2t)e^{-1/t} \\ 0 & 0 & t^{-6}(6t^2 - 6t + 1)e^{-1/t} \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогічно, $(\vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \vec{r}'''(t)) = 0$ для $t < 0$. Звідси випливає, що $\chi(t) = 0$ для всіх $t \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\}$.

З'ясуємо, який вигляд має дана крива. Передусім зазначимо, що для $t \le 0$ вектори $\vec{r}(t) = \{x(t); y(t); z(t)\}$ паралельні площині XOY: $(\vec{r}(t), \vec{n}) = 0$, де $\vec{n} = \{0; 0; 1\}$ — нормальний вектор площини XOY $(z = 0)$; при $t \ge 0$ вектори $\vec{r}(t)$ паралельні площині YOZ, рівняння якої має вигляд $x = 0$. Крім того, якщо $t \le 0$, то $\vec{r}(t) = \{e^{1/t}; t; 0\}$ і частину кривої γ, яка відповідає зміні параметру t на проміжку $(-\infty, 0]$ можна задати явно, поклавши $t = y$: $z = e^{1/y}$, $y \le 0$.

Аналогічно, якщо $t \ge 0$, то частина кривої γ, яка описується вектор-функцією $\vec{r}(t) = \{0; t; e^{-1/t}\}$, задається формулою $z = e^{-1/y}$, $y \ge 0$. Отже, дана крива складається з двох елементарних кривих,



Мал. 2.31.

які "склеюються" в точці $(0; 0; 0)$ гладким чином; кожна така елементарна крива є плоскою у відповідній площині

XOY і YOZ (див. Мал. 2.31), але вся крива γ не є плоскою лінією. Цей приклад ілюструє той факт, що крива, у якої скрут не визначений хоча б у одній точці, може не лежати в одній площині.

19. Перевірити, що радіус стичного кола дорівнює радіусу кривини кривої.

Розв'язання. Нехай $\vec{\rho} = \vec{\rho}(s) = \{x(s); y(s)\}$ – натуральна параметризація кривої γ, $\vec{r} = \{x; y\}$ – радіус-вектор довільної точки стичного кола, $\vec{c} = \{c_1; c_2\}$ – радіус-вектор його центра, R – його радіус. Тоді рівняння стичного кола має вигляд:

$$(\vec{r}-\vec{c}, \vec{r}-\vec{c}) = R^2 \Leftrightarrow \varphi(x,y) \equiv (x-c_1)^2+(y-c_2)^2-R^2 = 0.$$

На підставі теореми 2.9

$$\frac{d^2\varphi(x(s),y(s))}{ds^2} = 2(\dot{\vec{\rho}}(s), \dot{\vec{\rho}}(s)) - 2(\vec{\rho}(s) - \vec{c}, \ddot{\vec{\rho}}(s)) = 0.$$

Ця умова дозволяє визначити радіус стичного кола. Справді, оскільки параметризація кривої натуральна, то $|\dot{\vec{\rho}}| = 1$, і за першою формулою Френе $\ddot{\vec{\rho}} = k\vec{\nu}$. Отже,

$$1 + (\vec{\rho}(s) - \vec{c}, k\vec{\nu}) = 0, \quad 1 - k|\vec{\rho}(s) - \vec{c}| \cdot |\vec{\nu}| = 0. \quad (2.28)$$

Оскільки

$$\varphi(x(s),y(s)) = (x(s) - c_1)^2 + (y(s) - c_2)^2 - R^2 =$$

$$= (\vec{\rho}(s) - \vec{c}, \vec{\rho}(s) - \vec{c}) - R^2 = 0,$$

то $|\vec{\rho}(s) - \vec{c}| = R$. Тоді, врахувавши (2.28) знайдемо, що

$$1 - kR = 0, \quad R = \frac{1}{k},$$

що й потрібно було показати.

20. Стичною сферою кривої називається сфера, яка має з кривою дотик третього порядку. Знайти центр і радіус стичної сфери кривої $\vec{r} = \vec{r}(s)$.

Розв'язання. Якщо $\vec{a}$ – радіус-вектор центра сфери, то рівняння сфери радіуса R має вигляд $(\vec{r} - \vec{a}, \vec{r} - \vec{a}) = R^2$. Якщо замість $\vec{r}$ брати $\vec{r}(s)$ (s – значення параметра, яке відповідає точці дотику сфери та кривої), то послідовно диференціюючи тотожність

$$(\vec{r}(s) - \vec{a}, \vec{r}(s) - \vec{a}) = R^2$$

отримаємо співвідношення:

$$(\vec{r}(s) - \vec{a}, \dot{\vec{r}}(s)) = 0,$$

$$(\dot{\vec{r}}(s), \dot{\vec{r}}(s)) + (\vec{r}(s) - \vec{a}, \ddot{\vec{r}}(s)) = 0,$$

$$3(\dot{\vec{r}}(s), \ddot{\vec{r}}(s)) + (\vec{r}(s) - \vec{a}, \dddot{\vec{r}}(s)) = 0.$$

Далі, пам'ятаючи, що

$$\dot{\vec{r}}(s) = \vec{\tau}(s), \ddot{\vec{r}}(s) = k(s)\nu(s), \dddot{\vec{r}}(s) = (k(s)\nu(s))^{\cdot} =$$

$$= \dot{k}(s)\,\vec{\nu}(s) - k^2(s)\vec{\tau}(s) + k(s)\chi(s)\vec{\beta}(s)$$

і поклавши

$$\vec{r}(s) - \vec{a} = a\vec{\tau}(s) + b\vec{\nu}(s) + c\vec{\beta}(s),$$

матимемо:

$$a^2 + b^2 + c^2 = R^2,$$

$$a = 0,$$

$$1 + bk(s) = 0,$$

$$b\dot{k}(s) + ck(s)\chi(s) = 0.$$

Отже,

$$\vec{a} = \vec{r}(s) + \frac{1}{k(s)}\vec{\nu}(s) - \frac{\dot{k}(s)}{k^2(s)\chi(s)}\vec{\beta}(s) -$$

радіус-вектор центра стичної сфери,

$$R^2 = \left(\frac{1}{k(s)}\right)^2 + \left(\frac{\dot{k}(s)}{k^2(s)\chi(s)}\right)^2 -$$

радіус стичної сфери.

21. Крива називається сферичною, якщо всі точки кривої належать деякій сфері. Довести твердження: для того, щоб крива була сферичною, необхідно і досить, щоб функції $\chi(s)$ і $R(s)$, де $\chi(s)$ – скрут кривої, а $R(s)$ – радіус кривини кривої, задовольняли диференціальне рівняння

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\chi(s)}\frac{dR(s)}{ds}\right) + R(s)\chi(s) = 0.$$

Розв'язання. Оскільки $R(s) = \dfrac{1}{k(s)}$, то радіус-вектор $\vec{a}$ центра стичної сфери кривої $\vec{r} = \vec{r}(s)$ (див. приклад 20) набуває вигляду

$$\vec{a} = \vec{r}(s) + R(s)\vec{\nu}(s) + \frac{1}{\chi(s)}\frac{dR(s)}{ds}\vec{\beta}(s).$$

Знайдемо похідну по змінній s (урахувавши формули Френе):

$$\frac{d\vec{a}}{ds} = \vec{\tau}(s) + \frac{dR(s)}{ds}\vec{\nu}(s) + R(s)\chi(s)\vec{\beta}(s) - R(s)k(s)\vec{\tau}(s) +$$

$$+\frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{R}(s)}{\chi(s)}\right)\vec{\beta}(s) - \frac{\dot{R}(s)}{\chi(s)}\chi(s)\vec{\nu}(s) =$$

$$= \left(R(s)\chi(s) + \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{R}(s)}{\chi(s)}\right)\right)\vec{\beta}(s).$$

Якщо крива сферична, то у кожній її точці стична сфера одна і та ж. Тому для сферичної кривої $\vec{a} = \overrightarrow{\text{const}}$, $\dfrac{d\vec{a}}{ds} = \vec{0}$. Отже, функції $R = R(s)$ і $\chi = \chi(s)$ сферичної кривої задовольняють рівняння

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\chi(s)}\frac{dR(s)}{ds}\right) + R(s)\chi(s) = 0.$$

Навпаки, якщо для деякої кривої скрут $\chi(s)$ і радіус кривини $R(s)$ задовольняють це рівняння, то $\dfrac{d\vec{a}}{ds} = 0$ і $\vec{a} = \overrightarrow{\text{const}}$. Це означає, що центр стичної сфери у кожній точці кривої один і той же. Покажемо, що і радіус $b = b(s)$ стичної сфери сталий:

$$\frac{d}{ds}(b^2) = \frac{2\dot{R}}{\chi}\left(R\chi + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\chi}\frac{dR}{ds}\right)\right) = 0,$$

бо $R\chi + \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{\chi}\dfrac{dR}{ds}\right) = 0$. Отже, $b = \text{const}$.

22. Довести, що якщо бірегулярна лінія $\vec{r} = \vec{r}(t)$ така, що її дотична утворює сталий кут з певним напрямом, то відношення кривини до скруту цієї лінії є сталою величиною. Навпаки, якщо відношення кривини до скруту для деякої кривої є сталою величиною, то дотичні до неї утворюють сталий кут з певним напрямом. Знайти цей напрям.

Розв'язання. Нехай $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\text{const}}$ – вектор, який задає сталий напрям, тобто

$$\left(\overrightarrow{a}, \frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}\right) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{\tau}) = c = \text{const}\,, \quad \forall s.$$

Тоді $\left(\overrightarrow{a}, \frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}\right) = 0$, або $k(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{\nu}) = 0$. Для бірегулярних ліній $k \neq 0$ і тому $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{\nu}) = 0$, $\left(\overrightarrow{a}, \frac{d\overrightarrow{\nu}}{ds}\right) = 0$.

За другою формулою Френе

$$(\overrightarrow{a}, \chi\overrightarrow{\beta} - k\overrightarrow{\tau}) = 0 \Rightarrow \chi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{\beta}) - k(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{\tau}) = 0 \Rightarrow \chi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{\beta}) = kc.$$

Якщо $\chi \neq 0$, то $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{\beta}) = \frac{k}{\chi}c$. Диференціюючи останню рівність по s одержимо:

$$c\frac{d}{ds}\left(\frac{k}{\chi}\right) = \left(\overrightarrow{a}, \frac{d\overrightarrow{\beta}}{ds}\right) = -\chi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{\nu}) = 0.$$

Отже, $\frac{k}{\chi} = \text{const}$. Якщо ж $\chi = 0$, то лінія плоска і її дотичні ортогональні нормалі тієї площини, якій ця лінія належить.

Навпаки, нехай $\frac{k}{\chi} = c = \text{const}$. Покладемо $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\tau} + \frac{k}{\chi}\overrightarrow{\beta}$. Тоді

$$\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{\tau}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{\chi}\right)^2}} = \text{const}\,.$$

Крім того,

$$\frac{d\overrightarrow{a}}{ds} = \dot{\overrightarrow{\tau}} + \frac{k}{\chi}\dot{\overrightarrow{\beta}} = k\overrightarrow{\nu} + \frac{k}{\chi}(-\chi\overrightarrow{\nu}) = \overrightarrow{0}.$$

Отже, $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\text{const}}$.

23. Знайти кривину та скрут кривої

$$\gamma: \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x^2 + y^2 = 2, \end{cases} \tag{2.29}$$

у точці $M_0(1;1;1)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння кривої у вигляді

$$\begin{cases} \Phi(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

де $\Phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$, $G(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2$. Згідно з теоремою 2.6 знайдемо ранг матриці

$$\begin{pmatrix} \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}$$

у точці M_0. Маємо, що $\Phi_x(M_0) = 2$, $\Phi_y(M_0) = 2$, $\Phi_z(M_0) = 2$, $G_x(M_0) = 2$, $G_y(M_0) = 2$, $G_z(M_0) = 0$. Отже,

$$\begin{pmatrix} \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}_{M_0} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що ранг цієї матриці дорівнює 2, причому мінор $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Отже, в околі точки M_0 відповідна система рівнянь розв'язується відносно y і z; покладемо $x = t$, тоді $y = y(t)$, $z = z(t)$. Векторне рівняння, яким визначається крива в околі точки M_0 має вигляд $\overrightarrow{r}(t) = \{t; x(t); y(t)\}$.

Продиференціюємо рівняння системи (2.29) по t:

$$\begin{cases} 2t + 2y \cdot y'_t + 2z \cdot z'_t = 0, \\ 2t + 2y \cdot y'_t = 0. \end{cases} \tag{2.30}$$

У точці M_0 остання система набуває вигляду

$$\begin{cases} 1 + y'_t(1) + z'_t(1) = 0, \\ 1 + y'_t(1) = 0. \end{cases}$$

Звідси знаходимо, що $y'_t(1) = -1$, $z'_t(1) = 0$. Отже,

$$\vec{r}\,'(1) = \{1; -1; 0\}.$$

Далі продиференціюємо (2.30) по t:

$$\begin{cases} 1 + (y'_t)^2 + y \cdot y''_{t^2} + (z'_t)^2 + z''_{t^2} = 0, \\ 1 + (y'_t)^2 + y \cdot y''_{t^2} = 0. \end{cases} \qquad (2.31)$$

У точці M_0 маємо співвідношення:

$$\begin{cases} 2 + y''_{t^2}(1) + z''_{t^2}(1) = 0, \\ 2 + y''_{t^2}(1) = 0, \end{cases}$$

звідки випливає, що $y''_{t^2}(1) = -2$; $z''_{t^2}(1) = 0$. Отже,

$$\vec{r}\,''(1) = \{0; -2; 0\}.$$

Знайдемо кривину кривої γ в точці M_0:

$$|\vec{r}\,'(1)| = \sqrt{2}, [\vec{r}\,'(1), \vec{r}\,''(1)] = \left\{ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= \{0; 0; -2\}, |[\vec{r}\,'(1), \vec{r}\,''(1)]| = 2,$$

$$k(M_0) = \frac{|[\vec{r}\,'(1), \vec{r}\,''(1)]|}{|\vec{r}\,'(1)|^3} = \frac{2}{(\sqrt{2})^3} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Для того, щоб знайти скрут кривої в точці M_0, обчислимо ще $\vec{r}\,'''(1)$. Продиференціювавши (2.31) по t знайдемо, що

$$\begin{cases} 2y'_t \cdot y''_{t^2} + y'_t \cdot y''_{t^2} + y \cdot y'''_{t^3} + 2z'_t \cdot z''_{t^2} + z'''_{t^3} = 0, \\ 2y'_t \cdot y''_{t^2} + y'_t \cdot y''_{t^2} + y \cdot y'''_{t^3} = 0. \end{cases}$$

У точці M_0 маємо:

$$\begin{cases} 6 + y'''_{t^3}(1) + z'''_{t^3}(1) = 0, \\ 6 + y'''_{t^3}(1) = 0. \end{cases}$$

Тоді $y'''_{t^3}(1) = -6$, $z'''_{t^3}(1) = 0$, тобто

$$\vec{r}\,'''(1) = \{0; -6; 0\},$$

а

$$(\vec{r}\,'(1), \vec{r}\,''(1), \vec{r}\,'''(1)) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, $\chi(M_0) = 0$.

Зауважимо, що лінія γ складається з двох кіл, які одержуються при перетині сфери $x^2 + y^2 + x^2 = 3$ циліндричною поверхнею $x^2 + y^2 = 2$. Рівняння цих кіл є такими:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ z = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ z = -1. \end{cases}$$

24. Для кривої $\gamma \in C^{(3)}$ існує така лінія γ^*, що головні нормалі γ є бінормалями γ^* у відповідних точках. Довести, що кривина і скрут лінії γ задовольняють співвідношення $k = \lambda(k^2 + \chi^2)$, де $\lambda = \text{const}$.

Розв'язання. Нехай $\vec{r} = \vec{r}(s)$ – рівняння лінії γ. Тоді рівняння γ^* можна записати у вигляді

$$\vec{\rho}(s) = \vec{r}(s) + \lambda \vec{\nu}(s), \quad \vec{\nu}(s) = \vec{\beta}^*(s),$$

де $\lambda = \lambda(s)$. Звідси

$$\dot{\vec{\rho}} = \dot{\vec{r}} + \dot{\lambda}\vec{\nu} + \lambda\dot{\vec{\nu}} = \dot{\vec{r}} + \dot{\lambda}\vec{\nu} + \lambda(-k\vec{\tau} + \chi\vec{\beta}).$$

Оскільки $\dot{\vec{\rho}} \perp \vec{\beta}^* = \vec{\nu}$, то $(\dot{\vec{\rho}}, \vec{\nu}) = 0$. Тоді

$$0 = (\dot{\vec{\rho}}, \vec{\nu}) = (\vec{\tau}, \vec{\nu}) + \dot{\lambda}(\vec{\nu}, \vec{\nu}) + \lambda\chi(\vec{\beta}, \vec{\nu}) - \lambda k(\vec{\tau}, \vec{\nu}) = \dot{\lambda}.$$

Отже, $\lambda = \text{const}$, тобто

$$\dot{\vec{\rho}} = \vec{\tau} - \lambda k\vec{\tau} + \lambda\chi\vec{\beta}.$$

Звідси знаходимо, що

$$\ddot{\vec{\rho}} = \dot{\vec{\tau}} - \lambda\dot{k}\vec{\tau} - \lambda k\dot{\vec{\tau}} + \lambda\dot{\chi}\vec{\beta} + \lambda\chi\dot{\vec{\beta}} =$$

$$= -\lambda\dot{k}\vec{\tau} + (k - \lambda k^2 - \lambda\chi^2)\vec{\nu} + \lambda\dot{\chi}\vec{\beta}.$$

Оскільки $\ddot{\vec{\rho}} \perp \vec{\beta}^{*} = \vec{\nu}$, то з останнього співвідношення випливає, що

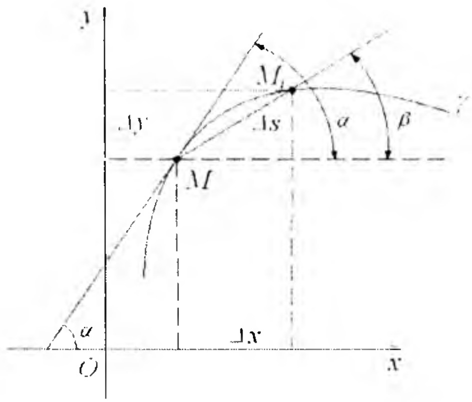
$$(k - \lambda k^2 - \lambda\chi^2)(\vec{\nu}, \vec{\nu}) = (\ddot{\vec{\rho}}, \vec{\nu}) = 0,$$

тобто $k - \lambda k^2 - \lambda\chi^2 = 0$, або $k = \lambda(k^2 + \chi^2)$, що й потрібно було довести.

25. Написати параметричні рівняння лінії γ, заданої натуральними рівняннями $k = k(s)$, $\chi = 0$.

Розв'язання. Оскільки $\chi = 0$, то лінія плоска. Нехай $x = x(s)$, $y = y(s)$ – шукана параметризація, $\alpha = \alpha(s)$ – кут, утворений дотичною до кривої γ в точці M з віссю Ox (див. Мал. 2.32). Тоді

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha.$$



Мал. 2.32.

Справді, нехай точці M відповідає параметр s, $M_1 - s + \Delta s$. Тоді

$$\text{пр}_{Ox} MM_1 = MM_1 \cdot \cos\beta, \quad \text{пр}_{Oy} MM_1 = MM_1 \cdot \sin\beta,$$

звідки $\cos\beta = \dfrac{\Delta x}{MM_1}$, $\sin\beta = \dfrac{\Delta y}{MM_1}$.

Оскільки $\overset{\smile}{MM_1} = |\Delta s|$, то ці рівності можна переписати так:

$$\cos\beta = \frac{\Delta x}{|\Delta s|}\frac{\overset{\smile}{MM_1}}{MM_1}, \quad \sin\beta = \frac{\Delta y}{|\Delta s|}\frac{\overset{\smile}{MM_1}}{MM_1}. \tag{2.32}$$

Із формули для обчислення довжини дуги кривої випливає, що $ds^2 = dx^2 + dy^2$ або $\left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2 = 1$. Тоді $MM_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$,

$$\frac{MM_1}{\overset{\smile}{MM_1}} = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{|\Delta s|} = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} \to 1, \Delta s \to 0.$$

Отже, $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{MM_1}{\overset{\smile}{MM_1}} = 1$. Якщо надати s додатного приросту Δs, то звідси, з урахуванням співвідношень (2.32) маємо, що

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha,$$

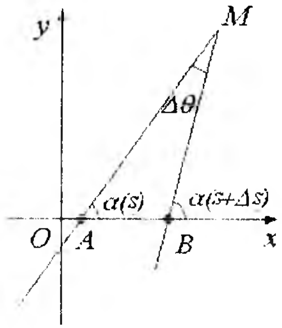
тобто

$$x(s) = \int\limits_{s_0}^{s} \cos\alpha(s)ds + x_0, \quad y(s) = \int\limits_{s_0}^{s} \sin\alpha(s)ds + y_0.$$

Крім того, $k(s) = \alpha'(s)$. Справді (див. Мал. 2.33), нехай $\Delta\theta$ – кут між дотичними до кривої γ у точках M та M_1

відповідно. Тоді з ΔAMB випливає, що

$$\Delta\theta = \pi - \alpha(s) - (\pi - \alpha(s+\Delta s)) = \alpha(s+\Delta s) - \alpha(s).$$



Мал. 2.33.

За означенням,

$$k(s) = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\alpha(s+\Delta s)-\alpha(s)}{\Delta s} = \alpha'(s). \qquad (2.38)$$

Тоді $\alpha(s) = \int\limits_{s_0}^{s} k(s)ds + \alpha_0$. Отже, маємо такі параметричні рівняння лінії γ:

$$x(s) = \int\limits_{s_0}^{s} \cos\left(\int\limits_{s_0}^{s} k(s)ds + \alpha_0\right) ds + x_0,$$

$$y(s) = \int\limits_{s_0}^{s} \sin\left(\int\limits_{s_0}^{s} k(s)ds + \alpha_0\right) ds + y_0.$$

Якщо, наприклад, $k = \mathrm{const}$, то

$$x = \frac{1}{k}\sin(k(s-s_0)+\alpha_0) + x_0,$$

$$y = -\frac{1}{k}\cos(k(s-s_0)+\alpha_0) + y_0,$$

або $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\frac{1}{k^2}$. Отже, плоскою лінією, кривина якої стала (не дорівнює нулю), є коло або його дуга.

Зауваження 2.9. Формула (2.33), взагалі кажучи, є правильною з точністю до знаку, оскільки, як відомо, $k(s) \geq 0$, $\forall s$, а $\alpha'(s)$ може набувати і від'ємні значення. Отже, в (2.33) слід писати $k(s) = |\alpha'(s)|$. Якщо вважати, що $\alpha(s)$ є неспадною функцією аргументу s, тобто $\alpha'(s) \geq 0$, то матимемо (2.33).

26. Показати, що лінія, яка задається параметричними рівняннями $x(t) = 1+3t+2t^2$, $y(t) = 2-2t+5t^2$, $z(t) = 1-t^2$ є плоскою. Знайти рівняння площини, якій вона належить.

Розв'язання. Знаходимо похідні вектор-функції

$$\vec{r}(t) = \{1+3t+2t^2; 2-2t+5t^2; 1-2t^2\}$$

у довільній точці t:

$$\vec{r}'(t) = \{3+4t; -2+10t; -2t\};$$

$$\vec{r}''(t) = \{4; 10; -2\};$$

$$\vec{r}'''(t) = \{0; 0; 0\},$$

при цьому

$$[\vec{r}'(t), \vec{r}''(t)] =$$

$$= \left\{\begin{vmatrix} -2+10t & -2t \\ 10 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2t & 3+4t \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3+4t & -2+10t \\ 4 & 10 \end{vmatrix}\right\} =$$

$$= \{4; 6; 38\}.$$

Отже, $|[\vec{r}'(t), \vec{r}''(t)]| \neq 0$, $\forall t$. Урахувавши цей факт маємо, що

$$\chi(t) = \frac{(\vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \vec{r}'''(t))}{|[\vec{r}'(t), \vec{r}''(t)]|} = 0, \forall t.$$

Це і означає, що лінія плоска. Площина, якій належить плоска лінія – стична площина. Якщо $(x(t); y(t); z(t))$ – довільно фіксована точка кривої, а $(x; y; z)$ – рухома точка стичної площини, то рівняння цієї площини має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x - x(t) & y - y(t) & z - z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x - 1 - 3t - 2t^2 & y - 2 + 2t - 5t^2 & z - 1 + t^2 \\ 3 + 4t & -2 + 10t & -2t \\ 4 & 10 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

або $2x + 3y + 19z - 27 = 0$.

Завдання для самостійної роботи

1. Показати, що якщо $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}\,'(t) = \vec{a}$, то $\lim\limits_{t \to t_0} |\vec{r}\,'(t)| = |\vec{a}|$.

2. Чи є правильним співвідношення $|\vec{r}\,'(t)| = |\vec{r}(t)|'$?

3. Нехай $\vec{r} = \vec{r}(t)$ і $t = f(\tau)$ – диференційовні функції. Довести, що $\dfrac{d\vec{r}}{d\tau} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \cdot \dfrac{dt}{d\tau}$.

4. Показати, що теорема Ролля не має місця для векторних функцій.

5. Знайти похідну функції $([\vec{r}\,', \vec{r}\,''], [\vec{r}\,', \vec{r}\,''])^{1/2}$.

6. На відрізку $[t_1; t_2]$ вектор-функція $\vec{r}(t)$ неперервна разом зі своєю похідною $\vec{r}\,'(t)$, $\vec{r} \parallel \vec{r}\,'$, причому $\vec{r}\,' \neq \vec{0}$, $\vec{r} \neq \vec{0}$. Довести, що лінія $\vec{r} = \vec{r}(t)$ є прямою.

7. Знайти годограф вектор-функції:

а) $\vec{r_1}(t) = \vec{a} + t\,\vec{b} + t^2\vec{c}$,

б) $\vec{r_2}(t) = \vec{a} + \cos t\,\vec{b} + \sin t\,\vec{c}$,

в) $\vec{r_3}(t) = \vec{a} + \operatorname{ch} t\,\vec{b} + \operatorname{sh} t\,\vec{c}$,

де $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – сталі вектори. Розглянути випадки $\vec{b} \not\parallel \vec{c}$, $\vec{b} \parallel \vec{c}$.

8. Довести, що для того, щоб вектор $\vec{r}(u, v)$ для всіх точок деякої області зміни параметрів u та v був ортогональним векторам $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ і $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$, необхідно і досить, щоб $|\vec{r}(u, v)| = \text{const}$.

9. Знайти годографи вектор-функцій:

$$\vec{r_1}(u, v) = \vec{a} + u\,\vec{b} + u^2\,\vec{c} + v\,\vec{d},$$

$$\vec{r_2}(u, v) = \vec{a} + \cos u \cos v\,\vec{b} + \cos u \sin v\,\vec{c} + \sin u\,\vec{d},$$

якщо $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ – векторні сталі і $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) \neq 0$.

10. Написати параметричні рівняння кривої

$$y^2 = 2\rho x, \quad x + y - z = 0.$$

11. Знайти радіус сфери з центром у точці $C\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$, на якій лежить крива

$$x = \frac{t}{1 + t^2 + t^4}, \quad y = \frac{t^2}{1 + t^2 + t^4}, \quad z = \frac{t^3}{1 + t^2 + t^4}.$$

12. Нехай γ – замкнена крива класу $C^{(1)}$. Довести, що для довільного вектора $\vec{a}$ знайдеться точка $M \in \gamma$, у якій дотична до γ ортогональна до $\vec{a}$.

13. Від кожної точки лінії

$$\vec{r}(t) = \{a(t - \sin t); a(1 - \cos t); 4a \sin \frac{t}{2}\}$$

на головних нормалях відкладаються відрізки довжиною $a\sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}$. Скласти рівняння геометричного місця кінців цих відрізків.

14. Довести, що крива

$$\vec{r}(t) = \{e^{t/\sqrt{2}} \cos t; e^{t/\sqrt{2}} \sin t; e^{t/\sqrt{2}}\}$$

лежить на конусі $x^2 + y^2 = z^2$. Під яким кутом вона перетинає його прямолінійні твірні?

15. Скласти рівняння дотичних до ліній:

1) $\vec{r} = \{e^t; e^{-t}; t^2\}$ при $t = 1$;
2) $\vec{r} = \{2\cos t; 2\sin t; 4t\}$ при $t = 0$;
3) $\vec{r} = \{t; t^2; t^3\}$ при $t = 1$;
4) $\vec{r} = \{a\,\mathrm{ch}\,t; a\,\mathrm{sh}\,t; ht\}$ у довільній точці;
5) $\vec{r} = \left\{\dfrac{t^4}{t}; \dfrac{t^3}{3}; \dfrac{t^2}{2}\right\}$ у довільній точці, де $t \neq 0$.

16. Знайти дотичну до лінії $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^2$, перпендикулярну до вектора $\vec{a} = \{3; 1; 1\}$.

17. Скласти рівняння дотичної до лінії $\vec{r} = \{t^2; t; e^t\}$, яка паралельна площині $x - 2y - 5 = 0$.

18. Довести, що дотичні до гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ht$ нахилені до площини XOY під одним і тим же кутом.

19. Довести, що якщо дотичні до кривої паралельні деякій площині, то крива плоска.

20. Знайти довжину дуги гвинтової лінії $\vec{r} = \{3a\cos t; 3a\sin t; 4at\}$ від точки її перетину з площиною XOY до довільної точки $M(t)$.

21. Довести, що замкнена лінія $\vec{r} = \{\cos^3 t; \sin^3 t; \cos 2t\}$ має довжину $s = 10$.

22. Знайти довжину гіперболічної гвинтової лінії $\vec{r} = \{a\,\mathrm{ch}\,t; a\,\mathrm{sh}\,t; at\}$ між точками, де $t = 0$ і $t = t_0$.

23. Знайти зображення для довжини дуги плоскої кривої, заданої рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$.

24. Знайти довжину дуги астроїди $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

25. **Циссоїдою Діоклеса** називається крива з параметричними рівняннями $x = \dfrac{a}{1+t^2}$, $y = \dfrac{a}{t^3+t}$. Довести, що циссоїда є геометричним місцем точок, симетричних вершині параболи відносно її дотичних.

26. Знайти дотичну до кривої $x = \dfrac{at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{at^2}{1+t^3}$ (**лист Декарта**), паралельну прямій $x + y = 0$.

27. Сторони прямого кута дотикаються астроїди

$$x = \frac{3}{4}R\cos\frac{t}{4} + \frac{1}{4}R\cos\frac{3t}{4}, \quad y = \frac{3}{4}R\sin\frac{t}{4} - \frac{R}{4}\sin\frac{3t}{4}.$$

Знайти геометричне місце вершин цих прямих кутів.

28. Показати, що **лемніската Бернуллі**

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

є геометричним місцем точок, симетричних центру рівносторонньої гіперболи відносно її дотичних.

29. Показати, що довжина відрізка логарифмічної спіралі $r = c \cdot a^{\varphi}$ від полюса до довільної точки дорівнює довжині полярної дотичної до спіралі в цій точці.

30. **Сферичною індикатрисою кривої** $\vec{r} = \vec{r}(t)$ називається годограф вектор-функції $\vec{r}(t) = \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}$. Знайти сферичну індикатрису гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$.

31. Знайти рівняння елементів тригранника Френе наступних кривих:

1) $\vec{r} = \{t; t^3; t^3 + 4\}$ при $t = 1$;
2) $\vec{r} = \{\sin t; \cos t; \mathrm{tg}\,t\}$ при $t = \dfrac{\pi}{4}$;
3) $\begin{cases} y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ у точці $M_0(1; 3; 4)$;
4) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = x \end{cases}$ у точці $M_0(0; 0; 1)$.

32. Знайти одиничні вектори дотичної, бінормалі та головної нормалі кривих:

1) $\vec{r} = \{t; t^2; t^3\}$ у довільній точці;
2) $\vec{r} = \{a(t - \sin t); a(1 - \cos t); 4a\cos\frac{t}{2}\}$ у довільній точці;

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ у точці $M_0(1;1;1)$;

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ у точці $M_0(1;2;2)$.

33. Скласти параметричні рівняння дотичної до лінії

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ x = y \end{cases}$$

у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

34. Скласти рівняння головної нормалі та бінормалі лінії $\vec{r} = \left\{\frac{t^4}{4}; \frac{t^3}{3}; \frac{t^2}{2}\right\}$ у довільній точці.

35. Скласти рівняння нормальної площини лінії

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1, \\ x^2 - y^2 - z^2 = 1 \end{cases}$$

у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

36. Довести, що всі нормальні площини кривої

$$\vec{r} = \{a \sin^2 t; a \sin t \cos t; a \cos t\}$$

проходять через початок координат.

37. Довести, що нормальні площини кривої

$$x = a \cos t,\ y = a \sin \alpha \sin t,\ z = a \cos \alpha \sin t$$

проходять через пряму $\begin{cases} x = 0, \\ z + y \operatorname{tg} \alpha = 0. \end{cases}$

38. Скласти рівняння головних нормалей кривих:

1) $\vec{r} = \{t; t^2; e^t\}$ при $t = 0$;

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1, \\ xy = z^2 \end{cases}$ у точці $M_0(1;1;1)$;

3) $\vec{r} = \{t \cos t; -t \sin t; at\}$ у початку координат.

39. Знайти стичну площину кривої $\vec{r} = \left\{t; \frac{t^2}{2}; \frac{t^3}{3}\right\}$, яка проходить через точку $M_0(0;0;0)$.

40. Скласти рівняння нормальної площини кривої $\vec{r} = \{t; t^2; t^3\}$ у точці $M_0(0;3;0)$.

41. Знайти головну нормаль кривої $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = t$, перпендикулярну до вектора $\vec{a} = \{1; -1; 3\}$.

42. Показати, що у точці розпрямлення двічі неперервно диференційовної плоскої кривої дотична має з кривою дотик другого порядку.

43. Знайти параболу вигляду $y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, яка з кривою $y = f(x)$ у точці $(0; f(0))$ має дотик n-го порядку.

44. Знайти порядок дотику кривих $y = \sin x$ та $y = x + 2x^3$ у точці $O(0;0)$.

45. У сім'ї кривих $\sin c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 - \cos c_4 y - c_5 y^2 - c_6 y^3 = 0$ знайти ті криві, які у точці $O(0;0)$ мають з кривою $x = t$, $y = t^2$ найвищий порядок дотику.

46. Довести, що коло $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$ і парабола $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ мають у точці $M(1;1)$ дотик третього порядку.

47. Коло, задане рівнянням $x^2 + y^2 = 5$, є стичним у точці $A(1;2)$ для параболи, вісь якої паралельна вісі ординат. Знайти рівняння цієї параболи.

48. З'ясувати характер особливих точок і написати рівняння дотичних у них для кривих:

1) $y^2 = bx^3 + ax^2$;

2) $x^3 + y^3 = xy$;

3) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

49. За яких співвідношень між a та b крива $y^2 = x^3 + ax + b$ має подвійну особливу точку?

50. З'ясувати характер особливих точок кривих:

1) $x^3 + x^2 y + y^3 + y^2 x - x^2 - y^2 = 0$;

2) $(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2 x^2 - a^4 = 0$, $a > 0$;

3) $y^2 - x^3 = 0$;

4) $y^2 - yx^4 - yx^2 + x^6 = 0$;

5) $x^4 + 2y^2 - x^2 - y^4 = 0$;
6) $y^3 = 6x^2 - x^3$;
7) $y^2 = x(x-1)^2$;
8) $(y-x)^2 = x^5$;
9) $y^2 = x^2 \dfrac{2+x}{2-x}$;
10) $9y^2 = 4x^3 - x^4$;
11) $y^2 = x^2 - x^4$;
12) $y^2 = (1-x^2)^3$;
13) $y^2(2a - x) = x^3$, $a > 0$.

51. Знайти особливі точки кривої:
1) $x = t^2$, $y = t^3$;
2) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$;
3) $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$;
4) $x = \dfrac{a}{\cos^3 t}$, $y = a \operatorname{tg}^3 t$;
5) $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$.

52. Довести, що крива, задана рівнянням $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = a^{2/3}$ є аналітичною кривою. Знайти її особливі точки. Встановити тип особливих точок.

53. Ліва вершина еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ збігається з правою вершиною гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + 4\dfrac{x}{a} + 3 = 0$. Знайти порядок дотику кривих.

54. Знайти рівняння параболи вигляду $y = x^2 + ax + b$, яка дотикається кола $x^2 + y^2 = 1$ у точці $(1;1)$.

55. Довести, що криві $y = \sin x$ та $y = x^4 - \dfrac{1}{6}x^3 + x$ мають у початку координат дотик третього порядку.

56. Знайти лінію, на якій розміщуються центри рівносторонніх гіпербол, що мають з лінією $y = f(x)$ у даній точці дотик другого порядку.

57. Знайти стичне коло гіперболи $x^2 - y^2 = 2$, яке має найменший радіус.

58. Знайти порядок дотику наступних пар кривих:

1) $x = t$, $y = t^2$ та $x^2 = 4y - 2y^2$ у точці $O(0;0)$;
2) $x = \sin t$, $y = t^2$ та $x^2 = 2y + y^2$ у точці $O(0;0)$;
3) $y = x^2 + 4x^3$ та $y = 3x^2 - 2x^4$ у точці $O(0;0)$;
4) $y = x^3 + 2x^5$ та $y = 2x^3 - x^4$ у точці $O(0;0)$;
5) $y = \sin x$ та $y = x + 2x^3$ у точці $O(0;0)$;
6) $y = \cos x - 1$ та $y = x^2$ у точці $O(0;0)$.

59. Скласти натуральні рівняння ліній:
1) $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$;
2) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$;
3) $\vec{r} = \{a(t - \sin t); a(1 - \cos t)\}$;
4) $x = a \ln \operatorname{ctg} \dfrac{t}{2} - \cos t$, $y = a \sin t$.

60. Знайти обвідну сім'ї нормалей параболи $y^2 = 4x$.

61. Знайти дискримінанту криву сім'ї півкубічних парабол:
1) $F(x,y,c) \equiv (x+c)^2 - (y+c)^3 = 0$;
2) $F(x,y,c) \equiv (x+c)^2 - y^3 = 0$.

62. Знайти дискримінанту криву сім'ї ліній:
1) $(x-c)^3 = (y+c^2)^2$;
2) $(x+c^2)^3 = (y-c)^2$;
3) $y - c = (x - c^2)^3$;
4) $(y-a)^2 - 2(x - a^2) = 0$;
5) $ax + y + b = 0$, $a^2 - b = 1$;
6) $a^2x + b^2y = 1$, $ab = 1$;
7) $(a-1)x^2 + (b-1)y^2 = -1$, $a + b = 0$.

63. Знайти обвідну сім'ї нормалей:
1) еліпса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$;
2) гіперболи $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$;
3) параболи $x = t^2$, $y = 2pt$;
4) циклоїди $x = a(1 - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

64. Довести, що якщо крива γ на площині перетинає всі криві сім'ї $\varphi(x,y) = c$, де $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 \neq 0$, під прямим кутом, то вона задовольняє рівняння $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}dx + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dy = 0$.

65. Знайти обвідну сім'ї кривих:

1) $x^2 + (y-a)^2 = r^2$, a – параметр;
2) $x + ay + 1 = 0$;
3) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, $ab = c = \text{const}$;
4) $(x-a)^2 + (y-a^2)^2 = 1$.

66. Які криві визначаються натуральними рівняннями:

1) $k(s) = \dfrac{1}{as}$; 2) $k(s) = \dfrac{a}{a^2+s^2}$; 3) $s^2 + \dfrac{1}{k^2(s)} = 16a^2$?

67. Знайти еволюти та радіуси кривини ліній:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;
2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;
3) $x^2 - 2py = 0$;
4) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$;
5) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$;
6) $y = \operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$; 7) $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$.

68. Знайти особливі точки еволюти еліпса.

69. Знайти кривину та скрут у довільній точці таких ліній:

1) $\overrightarrow{r} = \{e^t; e^{-t}; \sqrt{2}\}$;
2) $\overrightarrow{r} = \{2t; \ln t; t^2\}$;
3) $\overrightarrow{r} = \{e^t \sin t; e^t \cos t; e^t\}$;
4) $\overrightarrow{r} = \{3t - t^3; 3t^2; 3t + t^3\}$;
5) $\overrightarrow{r} = \{\cos^3 t; \sin^3 t; \cos 2t\}$;
6) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\sin\dfrac{t}{2}$.

70. Знайти кривину та скрут кривої

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1, \\ y^2 - 2x + z = 0 \end{cases}$$

у точці $M_0(1;1;1)$.

71. Довести, що лінія класу $C^{(3)}$ зі сталою кривиною є лінією Бертрана.

72. Знайти, при якому значенні h гвинтова лінія $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ht$ має найбільший скрут.

73. Довести, що крива, яка має нульову кривину у всіх своїх точках є або прямою, або відкритим відрізком прямої.

74. Знайти кривину та скрут у довільній точці таких ліній:

1) епіциклоїди $x = (a + am)\cos mt - am\cos(1+m)t$, $y = (a + am)\sin mt - am\sin(1+m)t$;
2) ланцюгової лінії $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$;
3) конхоїди $x^2y^2 = (a^2 - y^2)(b + y)^2$;
4) лемніскати $r^2 = a^2\cos 2\varphi$;
5) кардіоїди $r = a(1 + \cos\varphi)$;
6) спіралі Архімеда $r = a\varphi$;
7) астроїди $\overrightarrow{r} = \{a\cos^3 t; a\sin^3 t\}$.

75. Вершиною кривої називається точка кривої, в якій кривина набуває екстремального значення. Знайти вершину кривої $y = e^x$.

76. Довести, що лінія

$$\begin{cases} x^2 = 2az, \\ y^2 = 2bz \end{cases}$$

є плоскою.

77. Довести, що кривина кривої у точці M дорівнює кривині проекції цієї кривої на стичну площину у точці M.

78. Знайти кривину та скрут кривої Вівіані

$$x = \frac{R}{2}(1 + \cos u), \quad y = \frac{R}{2}\sin u, \quad z = \pm R\sin\frac{u}{2}.$$

Знайти її точки розпрямлення та точки сплощення.

79. Крива, віднесена до натурального параметра s, належить до класу $C^{(4)}$ і не містить точок розпрямлення. Знайти найкоротшу віддаль між дотичними цієї кривої у точках $M_0(s_0)$ і $M(s)$. Знайти найкоротшу віддаль d між головними нормалями у точках $M_0(s_0)$ і $M(s)$, обчислити $\lim\limits_{s\to s_0}\dfrac{d}{|s-s_0|}$. Знайти найкоротшу віддаль ρ між бінормалями у точках $M_0(s_0)$ і $M(s)$, обчислити $\lim\limits_{s\to s_0}\dfrac{\rho}{|s-s_0|}$.

80. Довести, що формули Френе кривої можна подати у вигляді

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=[\vec{\omega},\vec{\tau}],\quad \frac{d\vec{\nu}}{ds}=[\vec{\omega},\vec{\nu}],\quad \frac{d\vec{\beta}}{ds}=[\vec{\omega},\vec{\beta}],$$

де вектор $\vec{\omega}$ називається вектором Дарбу. Знайти вектор Дарбу.

81. Обчислити $(\dot{\vec{\beta}},\ddot{\vec{\beta}},\dddot{\vec{\beta}})$, $(\vec{\tau},\dot{\vec{\tau}},\ddot{\vec{\tau}})$, $(\vec{\beta},\dot{\vec{\beta}},\ddot{\vec{\beta}})$, $(\dot{\vec{\tau}},\ddot{\vec{\tau}},\dddot{\vec{\tau}})$, $(\vec{\nu},\dot{\vec{\nu}},\ddot{\vec{\nu}})$, $(\dot{\vec{\nu}},\ddot{\vec{\nu}},\dddot{\vec{\nu}})$.

82. Довести, що якщо крива класу $C^{(3)}$ володіє однієї із чотирьох властивостей:

1) дотичні кривої утворюють сталий кут з деяким напрямом;

2) бінормалі кривої утворюють сталий кут з деяким напрямом;

3) головні нормалі кривої паралельні деякій площині;

4) відношення кривини до скруту є сталим,

то вона володіє іншими трьома властивостями.

Крива, яка володіє однієї з цих властивостей, називається **лінією відкосу**.

83. Довести, що крива класу $C^{(5)}$ є лінією відкосу тоді і лише тоді, коли $(\dot{\vec{\beta}},\ddot{\vec{\beta}},\dddot{\vec{\beta}})=0$.

84. Довести, що крива класу $C^{(4)}$ є лінією відкосу тоді і лише тоді, коли $(\dot{\vec{\tau}},\ddot{\vec{\tau}},\dddot{\vec{\tau}})=0$.

85. Довести, що крива $x^2=3y$, $2xy=9z$ є лінією відкосу. Знайти вектор, з яким дотичні до даної кривої утворюють сталий кут.

86. Довести, що якщо кривина та скрут кривої γ пов'язані лінійною залежністю $ak+b\chi=1$, де a і b – числа, відмінні від нуля, то існує лінія γ^*, яка має з лінією γ спільні головні нормалі.

87. Скласти натуральні рівняння ліній:

1) $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=ht$;

2) $x=a\,\mathrm{ch}\,t$, $y=a\,\mathrm{sh}\,t$, $z=at$;

3) $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=t\sqrt{2}$.

Знайти кривину та скрут вказаних ліній у довільній точці.

88. Довести, що якщо між точками двох кривих γ і γ^* існує взаємно-однозначна відповідність, за якої бінормалі кривих у відповідних точках збігаються, то криві плоскі.

89. Крива γ класу $C^{(4)}$ має сталу відмінну від нуля кривину і $\chi\neq 0$. Нехай γ^* – геометричне місце її центрів кривини. Довести, що кривина лінії γ^* також стала. Знайти скрут γ^*.

90. Подерою просторової кривої по відношенню до деякої точки A називається множина основ перпендикулярів, проведених з точки A на дотичні до кривої. Знайти подеру кривої $\vec{r}=\vec{r}(t)$, $\vec{r}(t)\in C^{(1)}$, відносно початку координат.

91. Знайти подеру гвинтової лінії $\vec{r}=\{a\cos t; a\sin t; ht\}$ відносно початку координат.

Розділ 3. Теорія поверхонь в евклідовому просторі

§3.1. Елементарні поверхні. Звичайні та особливі точки поверхні

Множина точок площини називається **елементарною областю**, якщо вона топологічно еквівалентна відкритому кругу. Внутрішність квадрата, прямокутника, еліпса – приклади елементарних областей. Вся площина також є елементарною областю. Згідно з теоремою Жордана, проста плоска замкнена крива розбиває площину на дві зв'язні підмножини: обмежену і необмежену, для кожної з яких вона є межею; при цьому обмежена підмножина гомеоморфна кругу.

Розглянемо вектор-функцію $\overrightarrow{r}(u,v)$ двох скалярних аргументів, тобто вважатимемо, що множина її визначення $D(\overrightarrow{r}) \subset \mathbb{R}^2$, а множина значень $R(\overrightarrow{r}) \subset V_3$. Символом $C^{(k)}_{D(\overrightarrow{r})}$ позначимо множину всіх векторних і скалярних функцій двох скалярних аргументів, для яких у кожній точці $(u,v) \in D(\overrightarrow{r})$ існують і є неперервними усі частинні похідні до k-го порядку включано.

Означення 3.1. *Множина* Φ *точок евклідового простору, яка є годографом вектор-функції* $\overrightarrow{r}(u,v)$, *визначеної на елементарній області* G, *називається поверхнею, заданою параметризацією* $\overrightarrow{r}(u,v)$ *або векторним рівнянням* $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v)$.

Поверхня Φ є регулярною поверхнею k-го порядку, якщо її параметризація $\overrightarrow{r}(u,v) \in C^{(K)}_G$; при $k \geq 1$ поверхню називають гладкою. Зазначимо, що поверхня може допускати параметризації різних класів регулярності.

Поверхня Φ, гомеоморфна елементарній області G, називається **елементарною поверхнею**.

Означення 3.2. *Параметризація* $\overrightarrow{r}(u,v)$ *називається простою, якщо для будь-якої точки* $(u,v) \in G$ *існує такий окіл* $U_{(u,v)} \subset G$, *на якому годограф вектор-функції* $\overrightarrow{r}(u,v)$ *є елементарною поверхнею.*

Множина Φ точок простору називається **простою поверхнею**, якщо вона є зв'язною і кожна точка $M \in \Phi$ має просторовий окіл O_M такий, що $\Phi \cap O_M$ – елементарна поверхня. Останню називають поверхневим околом даної точки на простій поверхні. Іншими словами, проста поверхня – це зв'язна локально елементарна поверхня. Кожна елементарна поверхня є простою, але не навпаки. Наприклад, сфера та еліпсоїд не є елементарними поверхнями.

Проста поверхня називається **повною**, якщо границя будь-якої збіжної послідовності точок цієї поверхні також належить цій поверхні. Якщо повна поверхня обмежена, то вона називається **замкненою**. Наприклад, сфера – замкнена поверхня. Якщо ж з неї виколоти одну точку, то така сфера вже не буде повною, але стане елементарною.

Загальною поверхнею називається множина точок простору, яка є образом простої поверхні при її локально топологічному відображенні у простір. Відображення φ_1 простої поверхні Φ_1 і відображення φ_2 простої поверхні Φ_2 визначають одну і ту ж загальну поверхню Φ, якщо існує гомеоморфізм $f\colon \Phi_1 \to \Phi_2$, при якому образи відображень φ_1 і φ_2 на Φ збігаються. Відображення φ_1 і φ_2 (за умови існування гомеоморфізму f) називають різними (але еквівалентними) параметризаціями поверхні Φ. Із наведених означень випливає, що локальне дослідження поверхні зводиться до розгляду елементарної поверхні.

Повернемося до параметризації $\overrightarrow{r}(u,v)$, $(u,v) \in G$, поверхні Φ. Розкладемо вектор-функцію $\overrightarrow{r}(u,v)$ за ортонормованим базисом $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ простору V_3:

$$\overrightarrow{r}(u,v) = x(u,v)\overrightarrow{i} + y(u,v)\overrightarrow{j} + z(u,v)\overrightarrow{k}.$$

Нехай $M(u, v)$ довільна точка поверхні Φ, $(u, v) \in G$; x, y, z – декартові координати точки $M(u, v)$. Тоді

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v). \tag{3.1}$$

Ці рівняння називаються **параметричними рівняннями поверхні**, а параметри u, v – криволінійними координатами точки на поверхні.

Означення 3.3. *Точка $(u_0, v_0) \in G$ називається звичайною точкою параметризації $\vec{r}(u, v)$, якщо вектор-функція $\vec{r}(u, v)$ має в цій точці частинні похідні $\vec{r}_u(u_0, v_0) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \neq \vec{0}$, $\vec{r_v}(u_0, v_0) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \vec{0}$, причому*

$$\vec{r}_u(u_0, v_0) \nparallel \vec{r_v}(u_0, v_0). \tag{3.2}$$

Якщо точка $(u_0, v_0) \in G$ не є звичайною, то її називають особливою точкою параметризації.

Теорема 3.1. *Якщо всі точки $(u, v) \in G$ параметризації $\vec{r}(u, v) \in C_G^{(1)}$ звичайні, то ця парамеризація проста.*

Доведення. Нехай $M_0(u_0, v_0)$ - довільна точка поверхні Φ, $(u_0, v_0) \in G$, (3.1) – параметричні рівняння поверхні Φ. Зрозуміло, що функції $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ належать до класу $C_G^{(1)}$, оскільки $\vec{r} \in C_G^{(1)}$. З умови (3.2) випливає, що

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}_{M_0} = 2.$$

Отже, один з мінорів другого порядку цієї матриці відмінний від нуля. Припустимо, що

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_{M_0} \neq 0.$$

Використовуючи відому з курсу математичного аналізу теорему про існування та диференційовність неявних функцій, переконуємося в існуванні околу $U_{(u_0,v_0)} \subset G$ точки

(u_0, v_0), гомеоморфного своєму образу Ψ при відображенні, яке визначається першими двома співвідношеннями з (3.1), які розв'язуються відносно u та v:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \tag{3.3}$$

причому функції $u(x, y)$, $v(x, y) \in C_\Psi^{(1)}$. Підставивши (3.3) в третє рівняння (3.1), прийдемо до висновку, що на множині Ψ поверхня Φ задається рівнянням вигляду $z = f(x, y)$, де $f(x, y)$ – неперервна функція аргументів x, y.

Множина точок $f(\Psi) \subset \Phi$ гомеоморфна Ψ, а, отже, і множині $U_{(u_0,v_0)} \subset G$, тобто є елементарною поверхнею.

Теорема доведена.

Як і в теорії кривих природно виникає запитання: коли наперед задана система параметричних рівнянь може визначати деяку поверхню?

Відповідь на поставлене питання випливає з доведення теореми 3.1, а саме, правильним є наступне твердження.

Теорема 3.2. *Нехай регулярні функції $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ в області $G \subset \mathbb{R}^2$ задовольняють умову:*

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2.$$

Тоді система рівнянь $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ визначає гладку поверхню, яка є образом області G при локально топологічному відображенні

$$G \ni (u, v) \to (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3.$$

Параметризація поверхні рівнянням $z = f(x, y)$ відрізняється більшою наглядністю. Відповідність між точками поверхні і точками області площини XOY здійснюється при проектуванні прямими, паралельними вісі Oz.

Якщо поверхня може бути описана як множина точок, координати яких задовольняють рівняння $F(x, y, z) = 0$, то таке рівняння називається **загальним** або **неявним рівнянням поверхні**. Рівняння вигляду $z = f(x, y)$ є його частковим випадком і його називають **явним рівнянням поверхні**. Задане заздалегідь неявне рівняння не завжди визначає поверхню. Проте, правильним є наступне твердження.

Теорема 3.3. *Якщо $F(x, y, z)$ – регулярна функція змінних x, y, z, M – множина точок простору, координати яких задовольняють рівняння $F(x, y, z) = 0$, $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка множини M, в якій $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}^2 + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}^2 + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}^2 \neq 0$, то у точки M_0 існує окіл, у якому всі точки M, що йому належать, утворюють регулярну елементарну поверхню.*

Доведення. Припустимо, наприклад, що у точці M_0 $\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0} \neq 0$. Тоді за теоремою про неявну функцію існують числа $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ і регулярна функція $\varphi(x, y)$, визначена в прямокутнику $\Pi = \{(x; y) : |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \varepsilon\}$ такі, що всі точки $(x; y; \varphi(x, y))$, $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, $y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon$, задовольняють рівняння $F(x, y, z) = 0$. Розглянемо тепер поверхню Φ, яка задається рівнянням $z = \varphi(x, y)$. Точки цієї поверхні належать паралелепіпеду $Q = \{(x; y; z) : |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \varepsilon, |z - z_0| < c\}$ і вказана теорема гарантує, що в ньому немає інших точок множини M, крім точок цієї поверхні. Отже, $\Phi = M \cap Q$, що й потрібно було довести.

§3.2. Координатна сітка поверхні. Дотична площина і нормаль до поверхні

Нехай $M_0(u_0, v_0)$ – довільна точка елементарної поверхні Φ, яка задається рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in G$. Через цю точку проходять дві криві l_1 і l_2, які лежать на поверхні

Φ і визначаються рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$, $\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$ відповідно, причому u, v набувають таких значень, при яких $(u_0, v) \in G$, $(u, v_0) \in G$. Криві l_1 і l_2 називаються координатними лініями поверхні Φ u-типу і v-типу відповідно (або u-лініями та v-лініями). Нехай тепер поверхня Φ гладка, а точка M_0 – звичайна. Із геометричного змісту похідної вектор-функції $\vec{r}\,' = \vec{r}_u \cdot u' + \vec{r}_v \cdot v'$ випливає, що вона буде дотичним вектором до поверхневої кривої. Зокрема, для u-лінії $u' = 1$, $v' = 0$, для v-лінії $u' = 0$, $v' = 1$. Отже, $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ – вектор, дотичний до u-лінії в точці M_0, а вектор $\vec{r_v}(u_0, v_0)$ – вектор, дотичний до v-лінії.

Нехай $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ – параметричні рівняння поверхні Φ. Із означення 3.3 випливає, що якщо в точці M поверхні Φ

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} < 2,$$

то ця точка є особливою точкою параметризації; при цьому вектори $\vec{r}_u = \{x_u; y_u; z_u\}$, $\vec{r_v} = \{x_v; y_v; z_v\}$ у особливій точці колінеарні. Зазначимо, що особливі точки параметризації іноді не мають жодної геометричної особливості на поверхні. Наприклад, розглянемо сферу радіуса R з центром у початку координат. Якщо для точки цієї сфери за параметри взяти географічні координати u, v – широту і довготу точки, то відповідні параметричні рівняння мають вигляд: $x = R\cos u \cos v$, $y = R\cos u \sin v$, $z = R\sin u$. Така сфера має дві особливі точки – північний та південний полюси $(u = \pm\frac{\pi}{2})$.

Означення 3.4. *Множину всіх координатних ліній поверхні називають її координатною сіткою.*

Легко переконатися, що кожні дві різні координатні лінії одного типу поверхні Φ не мають спільних точок.

Розглянемо поверхневий окіл без особливих точок у даній параметризації і в ньому сім'ї координатних ліній. Ці сім'ї утворюють **правильну сітку**, якщо:

1) через кожну точку околу проходить одна і тільки одна лінія кожної сім'ї;

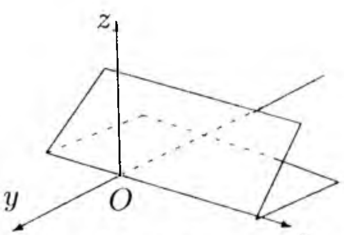
2) кожна лінія одної сім'ї перетинає кожну лінію іншої сім'ї тільки в одній точці.

У поверхневому околі з правильною координатною сіткою можна ввести до розгляду вектор

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|},$$

який називають **нормальним вектором поверхні** або **нормальним ортом**.

Наприклад, у площині XOY з параметризацією $x = u$, $y = v$, $z = 0$ координатна сітка є добре знайомою прямокутною декартовою сіткою ($\vec{r}_u = \{1;0;0\}, \vec{r}_v = \{0;1;0\}, \vec{r}_u \perp \vec{r}_v$). Ця сітка є правильною на всій площині. У той же час її полярна параметризація $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = 0$ має особливість у початку координат. Координатна сітка тут складається з променів, що виходять з початку координат (u-ліній) та концентричних кіл з центром у цій точці (v-ліній). Ця сітка не є правильною на всій площині, але буде правильною у будь-якому околі, котрий не включає початок координат.



Мал. 3.1.

Циліндрична поверхня з напрямною півкубічною параболою має параметризацію $z = u$, $y = v^2$, $z = v^3$. Точки, для яких $v = 0$, утворюють особливу лінію – вісь абсцис. Поверхня має на цій лінії геометричну особливість – ребро звороту (див. Мал. 3.1)

Означення 3.5. *Площину, що містить звичайну точку $M_0(u_0, v_0)$ гладкої поверхні Φ, визначеної рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in G$, яка паралельна векторам $\vec{r}_u(u_0; v_0)$, $\vec{r}_v(u_0; v_0)$, називають дотичною площиною до цієї поверхні в точці M_0. Пряму, яка проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини, називають нормаллю поверхні Φ у цій точці.*

Задамо довільну криву γ, що лежить на поверхні Φ, рівнянням

$$\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)), \tag{3.4}$$

де при $t \in (t_1, t_2) = T \subset \mathbb{R}$ $(u(t), v(t)) \in G$, $u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$, $t_0 \in T$, функції $u(t)$, $v(t) \in C_T^{(1)}$, $u'(t_0)$, $v'(t_0)$ не рівні нулю одночасно.

Теорема 3.4. *Крива γ в точці $M_0 \in \Phi$ має єдину дотичну, яка лежить у дотичній площині до поверхні Φ в точці M_0.*

Доведення. Оскільки M_0 – звичайна точка гладкої поверхні Φ, то γ є гладкою кривою, для якої M_0 – звичайна точка. Це випливає з рівності

$$\vec{r}_t(u(t_0), v(t_0)) = \vec{r}_u(u_0, v_0)u'(t_0) + \vec{r}_v(u_0, v_0)v'(t_0). \tag{3.5}$$

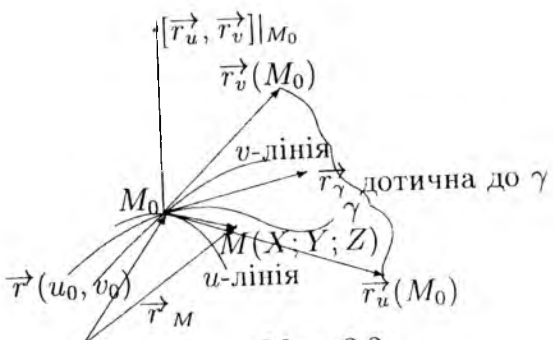
У цьому разі крива γ у точці M_0 має дотичну, яка визначається напрямним вектором $\vec{r}_\gamma = \vec{r}_t(u(t_0), v(t_0)) \neq \vec{0}$. При цьому вектори $\vec{r}_u(u_0, v_0)$, $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ є напрямними векторами дотичних до координатних ліній поверхні Φ в точці M_0. З (3.5) випливає, що вектори $\vec{r}_u(u_0, v_0)$, $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ і $\vec{r}_\gamma$ лежать в одній площині, оскільки вони лінійно залежні. Тоді дотична до кривої γ в точці M_0 лежить в дотичній площині поверхні Φ у цій точці.

Теорема доведена.

Складемо рівняння дотичної площини та нормалі поверхні Φ у точці M_0 (див. Мал. 3.2). Нехай $M(X; Y; Z)$ – довільна точка дотичної площини Φ в точці M_0 ($M \neq$

M_0), $\vec r_M = \{X;Y;Z\}$ – радіус-вектор точки M. Вектори $\overrightarrow{M_0M} = \vec r_M - \vec r(u_0,v_0)$, $\vec r_u(u_0,v_0)$, $\vec r_v(u_0,v_0)$ лежать в дотичній площині, тобто, вони є компланарними. Отже, рівняння дотичної площини можна подати у вигляді $(\vec r - \vec r(u_0,v_0), \vec r_u(u_0,v_0), \vec r_v(u_0,v_0)) = 0$, де $\vec r_M \equiv \vec r$, або у вигляді

$$(\vec r - \vec r(u_0,v_0), [\vec r_u(u_0,v_0), \vec r_v(u_0,v_0)]) = 0. \qquad (3.6)$$



Мал. 3.2.

Використовуючи координати, (3.6) запишемо у вигляді:

$$\begin{vmatrix} X - x(u_0,v_0) & Y - y(u_0,v_0) & Z - z(u_0,v_0) \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

За напрямний вектор нормалі візьмемо вектор

$$\vec p = [\vec r_u(u_0,v_0), \vec r_v(u_0,v_0)] \equiv \{A;B;C\},$$

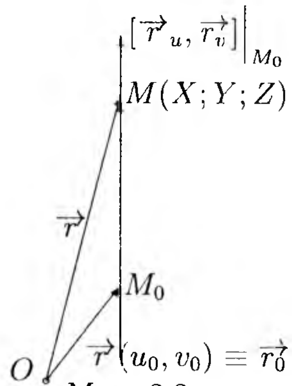
де

$$A = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}, \ B = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}, \ C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}$$

Тоді рівняння нормалі набувають вигляду:

$$\frac{X - x(u_0,v_0)}{A} = \frac{Y - y(u_0,v_0)}{B} = \frac{Z - z(u_0,v_0)}{C};$$

тут X, Y, Z – координати довільної точки нормалі (див. Мал. 3.3). Запишемо векторне рівняння нормалі. Нехай $\vec r = \{X;Y;Z\}$ – радіус-вектор довільної точки нормалі. Тоді $\vec r = \vec r_0 + \overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M} \parallel [\vec r_u, \vec r_v]\Big|_{M_0}$. Отже, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{M_0M} = \lambda[\vec r_u, \vec r_v]\Big|_{M_0}$.



Мал. 3.3.

Таким чином, векторне рівняння нормалі поверхні Φ в точці M_0 має вигляд:

$$\vec r = \vec r(u_0,v_0) + \lambda[\vec r_u, \vec r_v]\Big|_{M_0},$$

$$\lambda \in \mathbb{R},$$

або в координатах:

$$X = x(u_0,v_0) + \lambda A,$$

$$Y = y(u_0,v_0) + \lambda B,$$

$$Z = z(u_0,v_0) + \lambda C, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Нехай тепер поверхня Φ задається загальним рівнянням $F(x,y,z) = 0$, де функція F має неперервні частинні похідні по кожному з аргументів. Якщо $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ – параметричні рівняння гладкої поверхневої кривої, то $F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$. Диференціюючи цю тотожність отримаємо, що $F_x x' + F_y y' + F_z z' = 0$. Звідси випливає, що $\operatorname{grad} F = \{F_x; F_y; F_z\}$ – вектор, ортогональний до дотичного вектора $\{x'; y'; z'\}$ будь-якої поверхневої кривої. Отже, можемо зробити висновок, що градієнт поверхні в даній точці є нормальним вектором дотичної площини і напрямним вектором нормалі в цій точці. Їхні рівняння в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ поверхні відповідно мають вигляд:

$$(X - x_0)F_x\Big|_{M_0} + (Y - y_0)F_y\Big|_{M_0} + (Z - z_0)F_z\Big|_{M_0} = 0;$$

$$\frac{X-x_0}{F_x|_{M_0}}=\frac{Y-y_0}{F_y|_{M_0}}=\frac{Z-z_0}{F_z|_{M_0}}.$$

У випадку задання поверхні в явному вигляді $z=f(x,y)$ маємо $F=z-f(x,y)=0$, $\mathrm{grad}\,F=\{-f_x;-f_y;1\}$. Тоді

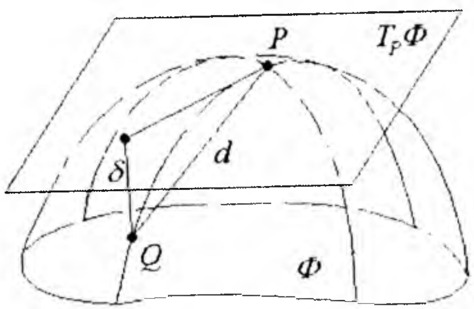
$$Z-z_0=(X-x_0)f_x|_{M_0}+(Y-y_0)f_y|_{M_0}-$$

рівняння дотичної площини,

$$\frac{X-x_0}{-f_x|_{M_0}}=\frac{Y-y_0}{-f_y|_{M_0}}=\frac{Z-z_0}{1}-$$

рівняння нормалі до поверхні в точці M_0.

Нехай Φ – регулярна поверхня з параметризацією $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, $(u,v)\in G$, P – звичайна точка поверхні Φ, $T_p\Phi$ – дотична площина поверхні в точці P. Візьмемо довільну точку $Q\in\Phi$ і позначимо через d, δ віддалі від точки Q до точки P і до площини $T_p\Phi$ відповідно (див. Мал. 3.4).



Мал. 3.4.

Теорема 3.5. *Правильним є співвідношення* $\lim\limits_{Q\to P}\dfrac{\delta}{d}=0$. *Навпаки, дотична площина є єдиною площиною з такою граничною властивістю.*

Доведення. Нехай точкам $P,Q\in\Phi$ відповідають значення параметрів (u,v), $(u+\Delta u,v+\Delta v)$, $\vec{n}$ – одиничний вектор, перпендикулярний до площини $T_p\Phi$. Віддаль d від точки $Q(u+\Delta u,v+\Delta v)$ до точки $P(u,v)$ дорівнює $|\vec{r}(u+\Delta u,v+\Delta v)-\vec{r}(u,v)|$, віддаль δ від точки Q до площини $T_p\Phi$ обчислюємо за формулою

$$\delta=|(\vec{r}(u+\Delta u,v+\Delta v)-\vec{r}(u,v),\vec{n})|.$$

За формулою Тейлора

$$\vec{r}(u+\Delta u,v+\Delta v)=\vec{r}(u,v)+\vec{r}_u(u,v)\Delta u+\vec{r}_v(u,v)\Delta v+$$
$$+\vec{\varepsilon}\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2},$$

$|\vec{\varepsilon}|\to 0$, коли $\Delta u\to 0$, $\Delta v\to 0$. Оскільки $(\vec{r}_u,\vec{n})=(\vec{r}_v,\vec{n})=0$, то

$$\frac{\delta}{d}=\frac{|(\vec{\varepsilon},\vec{n})|\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}{|\vec{r}_u(u,v)\Delta u+\vec{r}_v(u,v)\Delta v+\vec{\varepsilon}\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}|}=$$
$$=\frac{|(\vec{\varepsilon},\vec{n})|}{\left|\vec{r}_u(u,v)\frac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}+\vec{r}_v(u,v)\frac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}\right|}.$$

Точка евклідової площини, яка має прямокутні декартові координати $\xi=\dfrac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}$, $\eta=\dfrac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}$, лежить на одиничному колі. Отже, коли Δu, $\Delta v\to 0$, то точки (ξ,η) збігаються до деякої точки (ξ_0,η_0) цього кола. Оскільки вектори $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ неколінеарні, то $\vec{r}_u\cdot\xi_0+\vec{r}_v\cdot\eta_0\neq\vec{0}$. Звідси вже дістаємо (з урахуванням граничного співвідношення $\lim\limits_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}}|\vec{\varepsilon}|=0$), що

$$\lim_{Q\to P}\frac{\delta}{d}=\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}}\frac{\delta}{d}=0.$$

Навпаки, нехай для деякої площини, яка проходить через точку $P \in \Phi$ з нормальним ортом $\vec{n}$, має місце гранична властивість $\lim\limits_{Q\to P} \dfrac{\delta}{d} = 0$, тобто $\dfrac{\delta}{d} \to 0$, коли Δu і Δv незалежно прямують до нуля. Зокрема, при $\Delta u \to 0$, $\Delta v = 0$ маємо, що

$$\frac{\delta}{d} = \frac{|(\vec{r}(u+\Delta u, v) - \vec{r}(u,v), \vec{n})|}{|\vec{r}(u+\Delta u, v) - \vec{r}(u,v)|} =$$

$$= \frac{\left|\left(\frac{\vec{r}(u+\Delta u,v)-\vec{r}(u,v)}{\Delta u}, \vec{n}\right)\right|}{\left|\frac{\vec{r}(u+\Delta u,v)-\vec{r}(u,v)}{\Delta u}\right|} \to \frac{|(\vec{r}_u(u,v), \vec{n})|}{|\vec{r}_u(u,v)|}.$$

Але $\dfrac{\delta}{d} \to 0$ при $\Delta u \to 0$, $\Delta v = 0$, тобто $(\vec{r}_u(u,v), \vec{n}) = 0$. Аналогічно, при $\Delta u = 0$, $\Delta v \to 0$ доводимо, що $(\vec{r}_v(u,v), \vec{n}) = 0$. Отже, вектори $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v \perp \vec{n}$ і тому ця площина є дотичною площиною поверхні в даній точці.

Теорема доведена.

Зауваження 3.1. З теореми 3.5 випливає, що зазначена гранична властивість однозначно характеризує дотичну площину поверхні. На цій підставі цю граничну властивість іноді беруть за означення дотичної площини поверхні в точці $M \in \Phi$, а саме, такою площиною називають площину, яка містить точку M і має з поверхнею в точці M **дотик першого порядку**.

§3.3. Перша квадратична форма поверхні та її застосування

Першою квадратичною формою гладкої поверхні Φ з векторною параметризацією $\vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in G_0$, називається вираз

$$I := E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2,$$

де

$$E(u,v) = (\vec{r}_u(u,v), \vec{r}_u(u,v)), \quad F(u,v) = (\vec{r}_u(u,v), \vec{r}_v(u,v)),$$

$$G(u,v) = (\vec{r}_v(u,v), \vec{r}_v(u,v)).$$

Отже, $I = (d\vec{r}, d\vec{r}) = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv, \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) = |d\vec{r}|^2 > 0$ у кожній звичайній точці поверхні ($\vec{r}_u \neq \vec{0}, \vec{r}_v \neq \vec{0}$); I обертається в нуль лише при $du = dv = 0$.

Перша квадратична форма застосовується для знаходження довжини дуги кривої на поверхні, кута між кривими на поверхні та обчислення площі області на поверхні.

Рівнянням (3.4) задамо на поверхні Φ довільну регулярну криву γ, довжину дуги якої $\gamma(t_1, t_2)$ можемо обчислити за відомою формулою $s = \int\limits_{t_1}^{t_2} |\vec{r}'(t)|dt$. Оскільки $\vec{r}' = \vec{r}_u \cdot u' + \vec{r}_v \cdot v'$, то

$$|\vec{r}'|^2 = (\vec{r}', \vec{r}') = (\vec{r}_u \cdot u' + \vec{r}_v \cdot v', \vec{r}_u \cdot u' + \vec{r}_v \cdot v') =$$

$$= Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2.$$

Отже,

$$s = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}dt.$$

Вздовж кривої γ $du = u'dt$, $dv = v'dt$ і тому формулу для довжини дуги поверхневої кривої можна подати у вигляді $s = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{I}$. У зв'язку з цим для першої квадратичної форми використовують також позначення ds^2. Отже, для вимірювання довжин кривих на поверхні досить знати першу квадратичну форму поверхні. У зв'язку з цим кажуть, що перша квадратична форма задає метрику поверхні.

Всі геометричні об'єкти поверхні, які повністю визначаються через коефіцієнти першої квадратичної форми, називають об'єктами внутрішньої геометрії поверхні. Таким чином, довжина дуги поверхневої кривої є об'єктом її внутрішньої геометрії.

Зупинимося тепер на питанні про кут між поверхневими напрямами і поверхневими кривими. Передусім введемо поняття **напряму** на поверхні.

Означення 3.6. *Якщо поверхня Ф є годографом гладкої вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, то напрямом (d) на поверхні Ф у точці $M(u,v) \in \Phi$ називається напрям вектора $d\vec{r} = \vec{r}_u|_M du + \vec{r}_v|_M dv$.*

Надалі поверхневий напрям позначатимемо так: (d): $\{du, dv\}$. Нехай (δ): $\{\delta u, \delta v\}$ – інший поверхневий напрям у тій же точці M, який відповідає диференціалу $\delta\vec{r} = \vec{r}_u|_M \delta u + \vec{r}_v|_M \delta v$. Кутом між двома поверхневими напрямами (d), (δ) у точці $M \in \Phi$ називають кут між векторами $d\vec{r}$ та $\delta\vec{r}$. Цей кут можна знайти за формулою $\cos\varphi = \dfrac{d\vec{r}, \delta\vec{r}}{|d\vec{r}|\cdot|\delta\vec{r}|}$. Отже,

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv, \vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v)}{\sqrt{(d\vec{r}, d\vec{r})}\cdot\sqrt{(\delta\vec{r}, \delta\vec{r})}} =$$

$$= \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^+2Fdudv + Gdv^2}\cdot\sqrt{E\delta u^2 + F\delta u\delta v + G\delta v^2}} =$$

$$= \frac{I(d,\delta)}{\sqrt{I(d)}\cdot\sqrt{I(\delta)}}. \tag{3.7}$$

Будемо говорити, що крива γ на поверхні, заданої рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, в точці M має напрям (d), якщо вектор $d\vec{r} = \vec{r}_u|_M du + \vec{r}_v|_M dv$ є дотичним вектором кривої

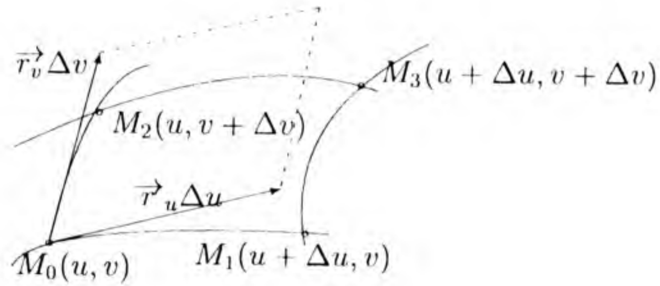
в цій точці. Рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(u_1(t), v_1(t))$ визначимо на цій поверхні ще одну гладку криву γ_1. Нехай криві γ і γ_1 мають спільну точку $M(u,v)$. **Кутом між цими кривими в точці** M називають кут між їхніми напрямами в цій точці, тобто кут між їхніми дотичними в цій точці. Отже, кут між кривими на поверхні в точці не залежить ні від параметризації поверхні, ні від параметризації кривої.

Як приклад, знайдемо кут між координатними лініями. Оскільки для них відповідно $u = t$, $v = v_0$, (d): $\{1;0\}$; $u = u_0$, $v = t$, (δ): $\{0;1\}$, то підстановка відповідних величин в (3.7) дає формулу

$$\cos\varphi = \frac{Fdudv}{\sqrt{E}|du|\sqrt{G}|dv|} = \pm\frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Отже, координатна сітка на поверхні є ортогональною тоді і тільки тоді, коли $F = 0$.

Площа поверхневої області. Припустимо, що D – область з G_0, обмежена кусково-гладким контуром, а Γ – годограф гладкої вектор-функції $\vec{r}(u,v)$ на D.



Мал. 3.5.

Означимо поняття площі області Г. Для цього розіб'ємо цю область сіткою координатних ліній на криволінійні паралелограми. Розглянемо один з них, позначивши його вершини через $M_0(u,v)$, $M_1(u+\Delta u, v)$, $M_2(u, v+\Delta v)$, $M_3(u+\Delta u, v+\Delta v)$ таким чином, щоб Δu та Δv були додатними. Замінимо цей паралелограм звичайним (плоским) паралелограмом, побудованим на направлених відрізках $\vec{r}_u\Delta u$ та $\vec{r}_v\Delta v$ з початком в точці $M_0(u,v)$, як на сторонах (див. Мал. 3.5). Зрозуміло, що останній паралелограм лежить в дотичній площині поверхні Ф у точці $M_0(u,v)$. Його площу Δs знайдемо за формулою: $\Delta s = |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\Delta u\Delta v$. З рівності

$$|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|^2 + (\vec{r}_u, \vec{r}_v)^2 = |\vec{r}_u|^2 \cdot |\vec{r}_v|^2 \sin^2\alpha +$$
$$+|\vec{r}_u|^2|\vec{r}_v|^2 \cdot \cos^2\alpha = |\vec{r}_u|^2|\vec{r}_v|^2$$

випливає, що

$$|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|^2 = |\vec{r}_u|^2|\vec{r}_v|^2 - (\vec{r}_u, \vec{r}_v)^2 = EG - F^2. \qquad (3.8)$$

Отже,

$$\Delta s = \sqrt{EG - F^2}\Delta u\Delta v.$$

Вираз $EG - F^2$ називаються **дискримінантом** першої квадратичної форми поверхні Ф. Оскільки вектори $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ лінійно-незалежні, то з нерівності Коші-Буняковського випливає, що $EG - F^2 > 0$.

Аналогічно поступимо з кожним криволінійним паралелограмом здійсненого розбиття і складемо суму площ усіх одержаних плоских паралелограмів:

$$\sum_{i=1}^{N}\Delta s_i = \sum_{i=1}^{N}(\sqrt{EG-F^2})_i\Delta u_i\Delta v_i. \qquad (3.9)$$

Означення 3.7. *Якщо існує скінченна границя суми (3.9) при $\lambda = \max\limits_{1\le i\le N}|\Delta u_i| \to 0$, $\mu = \max\limits_{1\le i\le N}|\Delta v_i| \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття області Г координатними лініями, ні від вибору параметризації поверхні Ф, то цю границю називають площею області Г, а саму область Г – квадровною.*

Оскільки $\sqrt{EG-F^2}$ – неперервна функція від u, v, то із теорії кратних інтегралів випливає, що вказана границя існує і не залежить від способу розбиття області Г на криволінійні паралелограми, причому

$$s_\Gamma = \iint\limits_D \sqrt{EG-F^2}dudv. \qquad (3.10)$$

Залишається показати, що одержана величина не залежить від вибору параметризації поверхні Ф. Для цього перейдемо до нових криволінійних координат U, V за допомогою перетворення $U = U(u,v)$, $V = V(u,v)$ (припускаємо, що ці рівняння однозначно розв'язні відносно u, v; тобто їх можна еквівалентним чином переписати у вигляді $u = u(U,V)$, $v = v(U,V)$). Розглядаючи $\vec{r}$ як функцію нових параметрів U, V, а U, V – як функції від u, v, продиференціюємо $\vec{r}$ по u, v як складну функцію:

$$\vec{r}_u = \vec{r}_U\frac{\partial U}{\partial u} + \vec{r}_V\frac{\partial V}{\partial u}, \quad \vec{r}_v = \vec{r}_U\frac{\partial U}{\partial v} + \vec{r}_V\frac{\partial V}{\partial v}.$$

Складемо векторний добуток

$$[\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v}[\vec{r}_U, \vec{r}_V] + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial v}[\vec{r}_V, \vec{r}_U] =$$
$$= \left(\frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial v}\right)[\vec{r}_U, \vec{r}_V] = \frac{\partial(U,V)}{\partial(u,v)}[\vec{r}_U, \vec{r}_V]$$

(тут $\dfrac{\partial(U,V)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial u} & \frac{\partial V}{\partial u} \\ \frac{\partial U}{\partial v} & \frac{\partial V}{\partial v} \end{vmatrix}$ – якобіан перетворення координат). Звідси, врахувавши (3.8), знаходимо, що

$$\sqrt{EG-F^2} = \left|\frac{\partial(U,V)}{\partial(u,v)}\right|\sqrt{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2},$$

де $\tilde{E}$, $\tilde{F}$, $\tilde{G}$ – коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні в криволінійних координатах U, V. Тоді вираз (3.10) набуває вигляду

$$\iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}dudv = \iint\limits_D \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}\left|\frac{\partial(U,V)}{\partial(u,v)}\right| dudv.$$

Скориставшись формулою заміни змінних в подвійному інтегралу, одержуємо рівність

$$\iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}dudv = \iint\limits_{\tilde{D}} \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}dUdV,$$

в якій $\tilde{D}$ позначає область, гомеоморфну області D при переході до нової параметризації; $\tilde{D}$ відповідає тій же області Γ поверхні Φ, що і область D в змінних u, v. Останнє співвідношення показує, що результат обчислення площі області Γ буде один і той же у довільній системі криволінійних координат на поверхні Φ.

Адитивність площі поверхні випливає з властивості адитивності подвійного інтеграла. Таким чином, при обчисленні площі поверхні можна розбивати цю поверхню на частини і для кожної з них використовувати свою параметризацію.

Зауваження 3.2. При обчисленні подвійних інтегралів використовують послідовне інтегрування. Так, для плоскої замкненої області $D = \{(u,v) : a \le u \le b, \varphi(u) \le v \le \psi(u)\}$ і для неперервної підінтегральної функції,

$$\iint\limits_D F(u,v)dudv = \int\limits_a^b du \int\limits_{\varphi(u)}^{\psi(u)} F(u,v)dv.$$

Як приклад, візьмемо площину Φ: $z = 0$ і в ній область Γ – верхню половину круга, обмеженого колом радіуса R: $x^2 + y^2 = R^2$, Тоді $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$, $\varphi(x) = 0$,

$\psi(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. У даному випадку поверхнева область Γ співпадає з відповідною плоскою областю і

$$s_\Gamma = \iint\limits_\Gamma dxdy = \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = \int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx =$$

$$= \left(\frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}\right)\Bigg|_{-R}^{R} =$$

$$= \frac{R^2}{2}(\arcsin(1) - \arcsin(-1)) = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi R^2}{2}.$$

§3.4. Друга квадратична форма поверхні. Кривина поверхневої кривої. Нормальна кривина поверхні. Індикатриса кривини поверхні

Нехай Φ – регулярна поверхня з параметризацією $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $\vec{n}(u,v)$ – одиничний вектор нормалі в точці $M(u,v)$, тобто

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r_u}, \vec{r_v}]}{|[\vec{r_u}, \vec{r_v}]|} = \frac{[\vec{r_u}, \vec{r_v}]}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Означення 3.8. *Другою квадратичною формою поверхні називається квадратична форма*

$$II := -(d\vec{r}, d\vec{n}).$$

Отже,

$$II = -(\vec{r_u}du + \vec{r}_v dv, \vec{n}_u du + \vec{n}_v dv) = (-\vec{r_u}, \vec{n}_u)du^2 +$$

$$+[(-\vec{r_u}, \vec{n}_v) + (-\vec{r_v}, \vec{n}_u)]dudv + (-\vec{r_v}, \vec{n}_v)dv^2 =$$

$$= Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2,$$

де

$$L = -(\vec{r_u}, \vec{n}_u), M = -\frac{1}{2}[(\vec{r_u}, \vec{n}_v)+(\vec{r_v}, \vec{n}_u)], N = -(\vec{r_v}, \vec{n}_v).$$

Коефіцієнти L, M, N другої квадратичної форми можна подати в іншому вигляді, якщо скористатися тим, що $\vec{n} \perp d\vec{r}$ або $(d\vec{r}, \vec{n}) = 0$. Продиференціюємо останнє співвідношення:

$$(d^2\vec{r}, \vec{n}) + (d\vec{r}, d\vec{n}) = 0.$$

Отже, $II = (d^2\vec{r}, \vec{n})$. Знайдемо $d^2\vec{r}$:

$$d^2\vec{r} = \vec{r}_{uu}du^2 + \vec{r_{uv}}dudv + \vec{r_{vu}}dudv + \vec{r_{vv}}dv^2 + \vec{r_u}d^2u + \vec{r}_v d^2v.$$

Оскільки $(\vec{r_u}, \vec{n}) = (\vec{r_v}, \vec{n}) = 0$, то

$$II = (\vec{r_{uu}}, \vec{n})du^2 + 2(\vec{r_{uv}}, \vec{n})dudv + (\vec{r_{vv}}, \vec{n})dv^2.$$

Звідси дістаємо, що

$$L = (\vec{r_{uu}}, \vec{n}) = \frac{(\vec{r_{uu}}, \vec{r_u}, \vec{r_v})}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$M = (\vec{r_{uv}}, \vec{n}) = \frac{(\vec{r_{uv}}, \vec{r_u}, \vec{r_v})}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$N = (\vec{r_{vv}}, \vec{n}) = \frac{(\vec{r_{vv}}, \vec{r_u}, \vec{r_v})}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Зокрема, якщо поверхня задана явно рівнянням $z = f(x, y)$, то

$$L = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

$$M = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

$$N = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Кривина поверхневої кривої. Нехай γ – регулярна крива на поверхні Φ, яка проходить через точку $M(u, v)$ і має в цій точці напрям (d): $\{du, dv\}$, $\vec{r} = \vec{r}(s)$ – природна параметризація кривої γ. Розглянемо скалярний добуток $(\ddot{\vec{r}}, \vec{n})$. Вектор $\ddot{\vec{r}}$ направлений по головній нормалі кривої і $|\ddot{\vec{r}}| = k$, де k – кривина кривої, $\ddot{\vec{r}} = k\vec{\nu}$, де $\vec{\nu}$ – одиничний вектор головної нормалі кривої в точці M. Тоді $(\ddot{\vec{r}}, \vec{n}) = k\cos\theta$, де θ – кут між $\vec{\nu}$ та $\vec{n}$. Оскільки $\vec{r} = \vec{r}(u(s), v(s))$, то

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r_u}\frac{du}{ds} + \vec{r_v}\frac{dv}{ds},$$

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{r_{uu}}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \vec{r_{uv}}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r_u}\frac{d^2u}{ds^2} +$$

$$+\vec{r_{vu}}\frac{dv}{ds}\frac{du}{ds} + \vec{r_{vv}}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \vec{r_v}\frac{d^2v}{ds^2}.$$

Домножимо останню рівність скалярно на $\vec{n}$, урахувавши, що $\vec{n} \perp \vec{r_u}$, $\vec{n} \perp \vec{r_v}$:

$$(\ddot{\vec{r}}, \vec{n}) = (\vec{r_{uu}}, \vec{n})\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2(\vec{r_{uv}}, \vec{n})\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + (\vec{r_{vv}}, \vec{n})\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 =$$

$$= L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{ds^2}.$$

Оскільки $ds^2 = I$, то маємо наступну формулу:

$$k\cos\theta = \frac{II}{I} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}.$$

Точка $M \in \Phi$ фіксована, тому коефіцієнти форм I, II також фіксовані. Отже, величина $k_0 = k\cos\theta$ залежить в цій точці лише від поверхневого напряму (d): $\{du, dv\}$. Величину k_0 називають **нормальною кривиною поверхні Φ у даній точці $M \in \Phi$ у заданому напрямку** (d). Таким чином, доведене наступне твердження.

Теорема 3.6 (Меньє). *Для всіх поверхневих кривих, які проходять через задану точку в даному напрямку, має місце рівність*

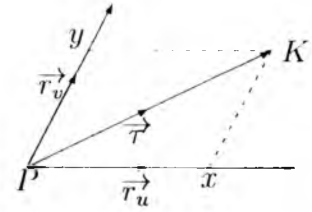
$$k \cos\theta = k_0 = \mathrm{const}\,.$$

Візьмемо, зокрема, серед усіх кривих, що проходять через дану точку $M \in \Phi$ у напрямку (d), нормальний переріз поверхні – плоску криву γ_n, яку на поверхні утворює площина, що проходить через нормаль у напрямку (d). Для цієї кривої орт головної нормалі $\vec{\nu}$ колінеарний нормальному вектору $\vec{n}$ поверхні в точці $M \in \Phi$. Отже, $\vec{\nu} = \pm\vec{n}$ і $\cos\theta = \pm 1$. Для нормального перерізу з теореми Меньє маємо $k_0 = \pm k$, де k – кривина цього перерізу. Звідси робимо висновок, що нормальна кривина поверхні в напрямку (d) з точністю до знаку дорівнює кривині відповідного перерізу. Знак плюс береться у випадку, коли $\vec{\nu} = \vec{n}$, і мінус, коли $\vec{\nu} = -\vec{n}$.

Індикатриса кривини поверхні. Відкладемо від точки $M(u, v)$ поверхні в кожному напрямку (d): $\{du, dv\}$ відрізок, рівний $\dfrac{1}{\sqrt{|k_0|}}$, де k_0 – нормальна кривина поверхні в цьому напрямку. Геометричне місце кінців цих відрізків називається **індикатрисою кривини поверхні в точці M** або **індикатрисою Дюпена**.

З'ясуємо, що представляє собою індикатриса кривини. Для цього введемо в дотичній площині до поверхні P афінну систему координат, взявши точку дотику за початок координат, прямі, які містять вектори $\vec{r_u}$, $\vec{r_v}$ – за осі координат, а самі вектори $\vec{r_u}$, $\vec{r_v}$ – за базисні вектори.

Нехай x, y – координати точки K індикатриси кривини, яка відповідає напряму $\{du, dv\}$ (див. Мал. 3.6). Тоді $x\vec{r_u} + y\vec{r_v} = \dfrac{\vec{\tau}}{\sqrt{|k_0|}}$, де $\vec{\tau}$ – орт вектора $\overrightarrow{PK}$.



Мал. 3.6.

Маємо:

$$(x\vec{r_u} + y\vec{r_v}, x\vec{r_u} + y\vec{r_v}) = Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 \equiv I.$$

З іншого боку,

$$\left(\frac{\vec{\tau}}{\sqrt{|k_0|}}, \frac{\vec{\tau}}{\sqrt{|k_0|}},\right) = \frac{1}{|k_0|}(\vec{\tau}, \vec{\tau}) = \frac{1}{|k_0|} = \frac{I}{|II|}.$$

Отже, $I = \dfrac{I}{|II|}$, тобто $|II| = 1$, або

$$|Lx^2 + 2Mxy + Ny^2| = 1 -$$

рівняння індикатриси кривини. З курсу аналітичної геометрії відомо, що останнє рівняння визначає:

а) еліпс, якщо $LN - M^2 > 0$;

б) пару спряжених гіпербол, якщо $LN - M^2 < 0$;

в) пару паралельних прямих, якщо $LN - M^2 = 0$.

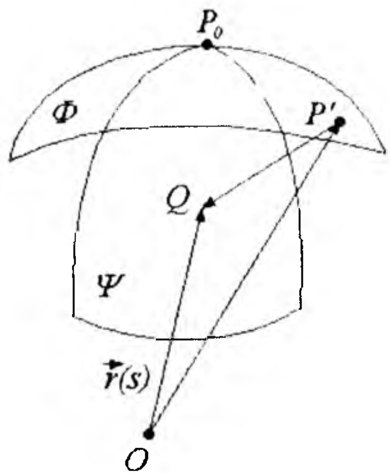
§3.5. Стичний параболоїд. Класифікація точок поверхні. Сім'ї поверхонь

Нехай Φ – регулярна поверхня, M – звичайна точка поверхні Φ, (β) – параболоїд з вершиною у точці M, віссю симетрії якого є нормаль до поверхні Φ у точці M. Якщо h – віддаль від довільної точки Q поверхні Φ до параболоїда, а d – віддаль від цієї ж точки до точки M, то параболоїд (β) називається **стичним** для поверхні Φ у точці M за умови $\lim\limits_{d\to 0}\dfrac{h}{d^2}=0$. Іншими словами, параболоїд (β) у точці M має з поверхнею Φ дотик 2-го порядку.

При дослідженні існування стичних параболоїдів важливу роль відіграє наступне твердження.

Лема 3.1. *Нехай* Φ: $z=f(x,y)$, Ψ: $F(x,y,z)=0$ – *дві регулярні поверхні із спільною неособливою точкою* P_0, P' – *близька до неї точка поверхні* Φ, h – *віддаль від точки* P' *до поверхні* Ψ. *Тоді величини* $F(x,y,f(x,y))$ *та* h *мають однаковий порядок малості, тобто* $\dfrac{F(x,y,f(x,y))}{h}\to \mathrm{const}\neq 0$, *якщо* $P'(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$.

Доведення. Згідно з означенням віддалі від точки до поверхні маємо, що $h=\min\limits_{Q\in\Psi}|P'Q|$ (див. Мал. 3.7).



Мал. 3.7.

Переконаємося, що зазначений мінімум реалізується для

точки $Q\in\Psi$ такої, що вектор $\overrightarrow{P'Q}$ є нормальним для поверхні Ψ в точці Q.

Справді, нехай $Q\in\Psi$ – та точка, де реалізується мінімум. Візьмемо на поверхні довільну регулярну криву γ: $\vec{r}=\vec{r}(t)$, яка проходить через цю точку і s – відповідне їй значення параметра. Тоді $(\overrightarrow{P'Q},\overrightarrow{P'Q})=|\overrightarrow{P'Q}|^2=|\vec{r}(s)-\overrightarrow{OP'}|^2$ і для мінімуму

$$\frac{d}{dt}|\vec{r}(t)-\overrightarrow{OP'}|^2\bigg|_{t=s}=0\Rightarrow\left(\vec{r}(s)-\overrightarrow{OP'},\frac{d\vec{r}}{dt}\bigg|_{t=s}\right)=0\Rightarrow$$

$$\vec{r}(s)-\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{QP'}\perp\frac{d\vec{r}}{dt}\bigg|_{t=s}.$$

Таким чином, дотичний вектор до кривої $\gamma\in\Psi$ у точці $Q\in\gamma$ ортогональний до вектора $\overrightarrow{P'Q}$. Оскільки $\gamma\in\Psi$ – довільна поверхнева крива, то цей вектор ортогональний дотичній площині до поверхні Ψ в точці Q; отже, він є нормальним вектором поверхні Ψ в точці Q.

Оцінимо величину h. Для цього розглянемо $\vec{\nu}$ – орт нормального вектора $\overrightarrow{P'Q}$. Координати цього орта позначимо через (ξ,η,ζ). Тоді параметричні рівняння нормалі до поверхні Ψ у точці Q можна записати у вигляді: $X=x'+\lambda\xi$, $Y=y'+\lambda\eta$, $Z=z'+\lambda\zeta$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Звідси отримуємо координати точки $Q\in\Psi$:

$$x=x'+h\xi,y=y'+h\eta,z=z'+h\zeta.$$

Розглянемо функцію $H(\lambda)\equiv F(x'+\lambda\xi,y'+\lambda\eta,z'+\lambda\zeta)$. З попередньої рівності випливає, що $H(h)=0$. Розкладемо цю функцію за формулою Маклорена:

$$H(\lambda)=H(0)+H'(0)\lambda+o(\lambda)=$$

$$=F(x',y',z')+(F_x\xi+F_y\eta+F_z\zeta)\Big|_{P'}\lambda+o(\lambda).$$

Підставляючи сюди значення $\lambda = h$, отримаємо, що

$$F(x', y', z') + (\overrightarrow{\nu}, \operatorname{grad} F)\Big|_{P'} h + o(h) = 0.$$

Коли $P' \to P_0$, то скалярний добуток $(\overrightarrow{\nu}, \operatorname{grad} F)\Big|_{P'} \to c = \pm|\operatorname{grad} F|\Big|_{P_0} \neq 0$ і $\dfrac{F(x, y, f(x, y))}{h} \to \pm c \neq 0$, що й потрібно було довести.

Якщо до класу стичних параболоїдів включити параболічні циліндри і площини, то правильним є наступне твердження.

Теорема 3.7. *У кожній звичайній точці двічі неперервно диференційовної поверхні існує единий стичний параболоїд.*

Доведення. Нехай звичайна точка M поверхні Φ є початком просторової декартової системи координат, вісь Oz якої збігається з нормаллю поверхні Φ у точці M, а дотична площина поверхні Φ у точці M збігається з координатною площиною xy. Тоді у точки M існує окіл, в якому поверхня Φ може бути задана рівняння $z = f(x, y)$, де функція $f(x, y)$ двічі неперервно диференційовна в околі точки $(0; 0)$.

Справді, нехай $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u, v)$ – деяка двічі неперервно диференційовна параметризація поверхні Φ. Оскільки M – звичайна точка поверхні, то в цій точці $[\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}] \neq \overrightarrow{0}$ і цей вектор направлений вздовж вісі Oz. Отже, визначник

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Звідси (див. доведення теореми 3.1) випливає, що поверхня Φ в околі точки M допускає задання рівнянням $z = f(x, y)$, де $f(x, y) \in C^{(2)}$. Зауважимо, що $f(0; 0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0;0)} = 0$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0;0)} = 0$, оскільки дотична площина поверхні Φ у точці M має рівняння $z = \dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0;0)} \cdot x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0;0)} \cdot y$ і збігається з координатною площиною $z = 0$.

Рівняння параболоїда (β), а також його виродження в параболічний циліндр та площину можна записати рівнянням вигляду

$$z = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2). \tag{3.11}$$

Припустимо, що у точці M існує стичний параболоїд. Доведемо, що він єдиний. Нехай (3.11) – рівняння стичного параболоїда.

Розкладаючи функцію $f(x, y)$ в околі точки $(0, 0)$ за формулою Тейлора отримаємо, що

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + (x^2 + y^2)\varepsilon(x, y),$$

де $r = f_{xx}(0, 0)$, $s = f_{xy}(0, 0)$, $t = f_{yy}(0, 0)$, функція $\varepsilon(x, y) \to 0$, коли $x, y \to 0$. Зазначимо також, що квадрат віддалі від точки Q до M має вигляд (M – початок системи координат):

$$d^2 = x^2 + y^2 + f^2(x, y).$$

Для застосування леми 3.1. візьмемо стичний параболоїд за поверхню Ψ із рівнянням

$$F(x, y, z) \equiv z - \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 0.$$

На підставі леми 3.1 величина h має порядок величини $F(x, y, f(x, y))$ (у рівняння параболоїда слід підставити координати x, y, $f(x, y)$ точки Q). Отже, $\dfrac{h}{d^2} \to 0$ тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{f(x,y)-\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)}{x^2+y^2+f^2(x,y)}\to 0,\quad Q\to M.$$

Напрям прямування $Q\to M$ може бути довільним, тобто $\frac{h}{d^2}\to 0$, коли x і y незалежно прямують до нуля. Розглянемо спочатку випадок прямування $x\to 0$, $y=0$. Взявши до уваги розклад функції $f(x,y)$ за формулою Тейлора отримаємо, що

$$\frac{\frac{1}{2}rx^2+x^2\varepsilon-\frac{1}{2}ax^2}{x^2+(\frac{1}{2}rx^2+x^2\varepsilon)^2}=\frac{\frac{1}{2}(r-a)+\varepsilon}{1+x^2(\frac{r}{2}+\varepsilon)^2}\to 0,\quad x\to 0,$$

тоді і лише тоді, коли $r=a$.

Аналогічно, випадок прямування $x=0$, $y\to 0$ дає $t=c$.

Доведемо, нарешті, що $b=s$. Для цього припустимо, що $x=y\to 0$. Тоді

$$\frac{(s-b)x^2+2x^2\varepsilon}{2x^2+f^2(x,x)}=\frac{s-b+2\varepsilon}{2+x^2(\frac{r}{2}+s+\frac{t}{2}+2\varepsilon)^2}\to 0$$

за умови $s=b$.

Таким чином, якщо стичний параболоїд в точці M існує, то він єдиний і його рівняння у вибраній системі координат має вигляд

$$z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,0)}xy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{(0,0)}y^2\right)\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2).\qquad(3.11_1)$$

Доведемо, що параболоїд (3.11_1) завжди є стичним. Для цього параболоїда маємо

$$\frac{h}{d^2}=\frac{f(x,y)-\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)}{x^2+y^2+f^2(x,y)}=$$

$$=\frac{(x^2+y^2)\varepsilon}{(x^2+y^2)\left(1+(x^2+y^2)\left[\frac{rx^2+2sxy+ty^2}{2(x^2+y^2)}+\varepsilon\right]^2\right)}.$$

Дослідимо поведінку функції $\alpha(x,y)=\dfrac{rx^2+2sxy+ty^2}{2(x^2+y^2)}$ при $x,\ y\to 0$, використавши полярні координати ρ, φ. Тоді $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $\alpha(\rho,\varphi)=r\cos^2\varphi+s\cdot\sin 2\varphi+t\sin^2\varphi$. Якщо $\cos\varphi=0$, то $x=0$ і $\frac{h}{d^2}$ набуває вигляду

$$\frac{h}{d^2}=\frac{\varepsilon}{1+\frac{ty^2}{2}+\varepsilon}\to 0,$$

якщо $y\to 0$. Якщо ж $\sin\varphi=0$, то $y=0$; тоді

$$\frac{h}{d^2}=\frac{\varepsilon}{1+\frac{rx^2}{2}+\varepsilon}\to 0$$

при $y\to 0$. При інших значеннях φ функція α, очевидно, є обмеженою. Отже,

$$\frac{h}{d^2}=\frac{\varepsilon(x,y)}{1+(x^2+y^2)(\alpha(x,y)+\varepsilon(x,y))^2}\to 0,$$

якщо $x,\ y\to 0$.

Теорема доведена.

Із граничних властивостей дотичної площини та стичного параболоїда поверхні випливає, що вони дають її наближення відповідно першого та другого порядку, які можна використати при дослідженні локальної будови поверхні. Існування та єдиність стичного параболоїда дозволяє ввести таку класифікацію точок поверхні. Звичайну точку $M\in\Phi$ регулярної поверхні Φ називають:

1. **еліптичною**, якщо стичний параболоїд у цій точці є еліптичним параболоїдом;

2. **гіперболічною**, якщо стичний параболоїд у цій точці є гіперболічним параболоїдом;

3. **параболічною**, якщо стичний параболоїд у цій точці є параболічним циліндром;

4. **точкою заокруглення (омбілічною, сферичною)**, якщо стичний параболоїд у цій точці є еліптичним параболоїдом обертання;

5. **точкою сплощення**, якщо стичний параболоїд є площиною.

Відповідно до цих випадків локальна будова поверхні має вигляд (Мал. 3.8).

Мал. 3.8.

Якщо використати формули для обчислення коефіцієнтів другої квадратичної форми у випадку явного задання поверхні Ф: $z = f(x, y)$, то у **введеній вище дотичній системі координат з початком у даній точці** $M \in \Phi$ матимемо: $L = f_{xx}(0,0) = r$, $M = f_{xy}(0,0) = s$, $N = f_{yy}(0,0) = t$. Позначимо через $\delta = LN - M^2$ **визначник другої квадратичної форми поверхні**. З іншого боку, із загальної теорії поверхонь другого порядку випливає, що визначник стичного параболоїда рівний $rt - s^2$. Таким чином, у точці $M \in \Phi$ визначники другої квадратичної форми поверхні і стичного параболоїда збігаються. Цей факт дає змогу класифікувати точки поверхні так:

1. $\delta > 0$ – еліптична точка;

2. $\delta < 0$ – гіперболічна точка;

3. $\delta = 0$, але хоча б один з коефіцієнтів відмінний від нуля – параболічна точка;

4. $L = M = N = 0$ – точка сплощення.

Отже, у дотичній системі координат рівняння стичного параболоїда набуває вигляду $z = \frac{1}{2} II(x, y)$. Якщо взяти точку (x, y) на дотичній площині, то для неї $|z|$ – віддаль до стичного параболоїда.

Зауваження 3.3. Нескладно переконатися в тому, що рівняння стичного параболоїда $z = \frac{1}{2} II(x, y)$ збереже свій вигляд у випадку, коли XMY – афінна (косокутна) система координат у дотичній площині. Зазначимо також, що стичний параболоїд і поверхня Ф у точці дотику $M \in \Phi$ для фіксованого напряму мають однакові нормальні кривини. Цей факт є наслідком того, що у початку системи координат (точці M) коефіцієнти першої та другої квадратичних форм поверхні та стичного параболоїда співпадають.

Сім'ї поверхонь. Множина поверхонь, які визначаються рівнянням $F(x, y, z, c) = 0$, де c – деяка стала (параметр сім'ї поверхонь), називається **однопараметричною сім'єю поверхонь**. Наприклад, однопараметрична сім'я сфер одиничного радіуса, центри яких належать координатній вісі Ox, має рівняння $(x - c)^2 + y^2 + z^2 = 1$. Множина **всіх** сфер складає чотирипараметричну сім'ю $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + (z - c_3)^2 = c_4^2$. **$n$-параметрична сім'я поверхонь** визначається рівнянням $F(x, y, z, c_1, \ldots, c_n) = 0$, де c_1, $\ldots$, c_n – параметри сім'ї.

Якщо $\{\Phi_\mu\}$ – однопараметрична сім'я гладких поверхонь, залежна від параметра μ, то гладка поверхня Ф називається **обвідною сім'ї поверхонь** $\{\Phi_\mu\}$, якщо вона у кожній своїй точці дотикається по крайній мірі однієї поверхні з сім'ї $\{\Phi_\mu\}$ і кожною своєю частиною дотикається нескінченної кількості поверхонь цієї сім'ї.

Якщо $F(x, y, z, c) = 0$, $a \leq \mu \leq b$, – рівняння однопараметричної сім'ї поверхонь $\{\Phi_\mu\}$, де F – неперервно диференційовна за всіма аргументами функція така, що

$|\text{grad}\, F|^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \neq 0$, то обвідна сім'ї поверхонь $\{\Phi_\mu\}$ (якщо вона існує) визначається рівняннями

$$F(x,y,z,\mu) = 0, \quad \frac{\partial F(x,y,z,\mu)}{\partial \mu} = 0$$

(у такому розумінні, що для кожної точки (x,y,z) обвідної поверхні можна вказати таке $\mu \in [a,b]$, що (x,y,z,μ) буде розв'язком системи $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \mu} = 0$).

Поверхня, яка визначається рівнянням $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \mu} = 0$ називається **дискримінантною поверхнею** сім'ї поверхонь $\{\Phi_\mu\}$. Для того, щоб знайти обвідну сім'ї поверхонь $\{\Phi_\mu\}$ потрібно знайти дискримінантну поверхню сім'ї і вилучити з неї особливі точки сім'ї поверхонь. Може трапитися, що дискримінантна поверхня складається лише з особливих точок сім'ї поверхонь. Тоді така сім'я поверхонь обвідної немає. Якщо ж сім'я поверхонь має обвідну поверхню, то вона дотикається кожної поверхні сім'ї $\{\Phi_\mu\}$ вздовж кривої, яку називають **характеристикою сім'ї поверхонь**. Характеристики утворюють на обвідній поверхні сім'ю кривих, залежну від одного параметра. Якщо однопараметрична сім'я характеристик на обвідній поверхні має обвідну, то її називають **ребром звороту** даної сім'ї поверхонь.

Рівняння

$$F(x,y,z,\mu) = 0, \quad \frac{\partial F(x,y,z,\mu)}{\partial \mu} = 0$$

при фіксованому значенні μ є рівняннями характеристики на обвідній поверхні. Обвідну поверхню сім'ї поверхонь $\{\Phi_\mu\}$ можна тепер розуміти як множину кривих-характеристик.

Ребро звороту сім'ї поверхонь визначається системою рівнянь

$$\begin{cases} F(x,y,z,\mu) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \mu}(x,y,z,\mu) = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2}(x,y,z,\mu) = 0. \end{cases}$$

Якщо існує обвідна поверхня однопараметричної сім'ї площин, то її називають **розгортною поверхнею**. Очевидно, до розгортних поверхонь відносяться циліндри, конуси.

Зауважимо, що поняття обвідної поверхні можна узагальнити на випадок двопараметричної сім'ї гладких поверхонь, яка визначається рівнянням $F(x,y,z,c_1,c_2) = 0$, де c_1, c_2 – параметри сім'ї. Обвідна такої сім'ї гладких поверхонь, якщо вона існує і $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \neq 0$, визначається рівняннями $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial c_1} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial c_2} = 0$.

§3.6. Асимптотичні напрями. Асимптотичні лінії. Спряжені напрями і сітки на поверхні

Нехай поверхня Φ задана регулярною параметризацією $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $M(u,v)$ – звичайна точка поверхні Φ. Зафіксуємо у цій точці поверхневий напрям (d): $\{du, dv\}$.

Означення 3.9. *Напрям (d) поверхні Φ у точці M називається асимптотичним, якщо нормальна кривина поверхні в точці M у цьому напрямку рівна нулю.*

Отже, напрям (d) асимптотичний тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0. \qquad (3.12)$$

Подамо (3.12) у вигляді квадратного рівняння

$$L\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2M\frac{du}{dv} + N = 0, \quad dv \neq 0,$$

відносно $\dfrac{du}{dv}$, дискримінант якого

$$D = 4M^2 - 4LN = -4(LN - M) \equiv -4\delta.$$

Звідси випливає, що в точці еліптичного типу асимптотичних напрямів немає ($\delta < 0$, $D > 0$); у точці гіперболічного типу є два асимптотичних напрямки ($\delta < 0$, $D > 0$); у точці параболічного типу – один асимптотичний напрям ($\delta = 0$, $D = 0$);у точці сплощення кожний напрям є асимптотичним.

Означення 3.10. *Лінія на поверхні називається асимптотичною, якщо її дотична пряма в кожній точці має асимптотичний напрям поверхні.*

Звідси випливає, що рівняння (3.12) є диференціальним рівнянням асимптотичних ліній.

Наприклад, якщо поверхня Ф – площина, то вона складається лише з точок сплощення, тому кожна лінія на площині є асимптотичною. Якщо на поверхні розміщується пряма, то вона є асимптотичною лінією ($k_0 = k\cos\theta$, $k = 0$ для прямої).

Наведемо геометричну ознаку асимптотичної лінії на поверхні.

Теорема 3.8. *Для того, щоб лінія γ на поверхні Ф була асимптотичною, необхідно і досить, щоб у кожній точці лінії γ дотична площина поверхні збігалась із стичною площиною лінії γ.*

Доведення. Нехай поверхнева крива є асимптотичною. Тоді за теоремою Меньє вздовж цієї кривої $k_0 = k\cos\theta = 0$, тобто $k = 0$ або $\cos\theta = 0$. У першому випадку крива є поверхневою прямою. Оскільки у прямої стична площина не

визначена, то за неї можна взяти, зокрема, дотичну площину поверхні. У другому випадку кут θ – кут між нормальним вектором поверхні $\vec{n}$ та одиничним вектором $\vec{\nu}$ бінормалі кривої – рівний $\dfrac{\pi}{2}$. Отже, $\vec{n} \perp \vec{\nu}$. Стична площина кривої у точці $M \in Ф$ містить вектори $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$. Для кожної кривої $\vec{n} \perp \vec{\tau}$, тобто $\vec{n} \perp \vec{\tau}, \vec{\nu}$. Останнє якраз свідчить про те, що стична площина кривої і дотична площина поверхні співпадають у кожній точці поверхневої кривої.

Достатність умов теореми доводиться у зворотному порядку.

З'ясуємо, за якої умови координатні u- та v-лінії на поверхні будуть асимптотичними. Підставляючи послідовно $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$ в (3.12) знайдемо, що $L = N = 0$. Навпаки, якщо для даної параметризації поверхні $L = N = 0$, то диференціальні рівняння асимптотичних кривих поверхні приймають вигляд $M\,du\,dv = 0$.

Якщо $M = 0$, то маємо випадок $L = M = N = 0$, тобто поверхня Ф – площина. Будь-яка точка площини є точкою сплощення і тому, за означенням, у ній будь-який напрям є асимптотичним. На цій підставі будь-яку криву площини вважаємо асимптотичною; зокрема, можемо вважати, що її координатна сітка складається з асимптотичних кривих.

Якщо $M \neq 0$, то із співвідношення $du\,dv = 0$ випливає, що $du = 0$ або $dv = 0$ ($u = \mathrm{const}$ або $v = \mathrm{const}$). Отже, у цьому випадку всі асимптотичні криві є координатними лініями і ми приходимо до висновку: **координатна сітка поверхні є асимптотичною тоді і тільки тоді, коли** $L = N = 0$.

Наприклад, розглянемо прямий гелікоїд – гвинтову поверхню, яка утворена рухомою прямою. Ця пряма рухається з постійною швидкістю і перетинає фіксовану пряму під прямим кутом, одночасно рівномірно обертаючись навколо неї. Якщо фіксовану пряму взяти за вісь аплікат, то параметризація прямого гелікоїда матиме вигляд: $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = hv$; $h = \mathrm{const}$. Обчислення коефіцієнтів другої квадратичної форми показують, що

$$II = -\frac{2h}{\sqrt{u^2+h^2}}dudv.$$

Отже, координатна сітка поверхні є асимптотичною і вона складається з рухомих прямих та гвинтових ліній.

Спряжені напрями і сітки на поверхні. Розглянемо регулярну поверхню Φ, задану параметризацією $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ і на ній зафіксуємо точку M. Два поверхневі напрями (d), (δ) у точці $M \in \Phi$ називаються **спряженими**, якщо прямі g_d і g_δ, що містять напрями (d) і (δ), є спряженими діаметрами індикатриси кривини в точці M. Із загальної теорії кривих другого порядку випливає умова: для того, щоб напрями (d) та (δ) були спряженими, необхідно і досить, щоб

$$Ldu\delta u + M(du\delta v + dv\delta u) + Ndv\delta v = 0. \tag{3.13}$$

Умову спряженості напрямів (d) та (δ) можна записати у більш стислому вигляді:

$$(d\vec{r}, \delta\vec{n}) = 0 \text{ або } (\delta\vec{r}, d\vec{n}) = 0.$$

Справді,

$$(d\vec{r}, \delta\vec{n}) = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv, \vec{n}_u du + \vec{n}_v \delta v) =$$

$$= (\vec{r}_u, \vec{n}_u)dudv + (\vec{r}_u, \vec{n}_v)du\delta v + (\vec{r}_v, \vec{n}_u)dv\delta u + (\vec{r}_v, \vec{n}_v)dv\delta v =$$

$$= -[Ldu\delta u + M(du\delta v + dv\delta u) + Ndv\delta v] = (\delta\vec{r}, d\vec{n}).$$

З (3.13) випливає, що асимптотичні напрями можна розглядати як самоспряжені (якщо $(d) = (\delta)$, то (3.13) перетворюється в (3.12).)

Вивчимо випадок, коли задана координатна сітка поверхні є спряженою. Оскільки координатні u, v-лінії мають відповідно поверхневі напрями $\{du, 0\}$, $\{0, \delta v\}$, то із (3.13) випливає, що $M = 0$. Навпаки, коли для даної параметризації $M = 0$, то легко бачити, що поверхневі напрями $\{du, 0\}$, $\{0, \delta v\}$ задовольняють (3.13) і координатні криві утворюють спряжену сітку. Отже, **координатна сітка поверхні є спряженою тоді і тільки тоді, коли** $M = 0$.

§3.7. Головні напрями на поверхні. Лінії кривини. Формула Ейлера. Повна і середня кривини поверхні

Нехай Φ регулярна поверхня, задана параметризацією $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $M \in \Phi$. Поверхневий напрям (d): $\{du, dv\}$ у точці M називається **головним напрямом поверхні**, якщо він є головним напрямом індикатриси кривини в цій точці. Оскільки індикатриса кривини не визначена в точках сплощення, то в таких точках вважатимемо кожний напрям головним. Із властивостей головних напрямів кривих другого порядку випливає, що в загальному випадку в даній точці поверхні існує точно два головних напрями. Виняток складають омбілічні (сферичні) точки, для яких індикатриса кривини є колом і тому в цих точках будь-який напрям є головним. Спосіб побудови індикатриси кривини говорить про те, що для головних напрямів нормальна кривина поверхні у даній точці набуває екстремальних значень. У зв'язку з цим використовують ще й таке означення головного напряму поверхні: напрям (d): $\{du, dv\}$ на поверхні Φ у точці M називається **головним**, якщо нормальна кривина поверхні у точці M у заданому напрямі досягає екстремального значення.

Згідно з означенням головних напрямів кривої другого порядку, вони є одночасно ортогональними і спряженими. Нехай (d): $\{du, dv\}$, (δ): $\{\delta u, \delta v\}$ – два ортогональні і спряжені напрями в точці $M \in \Phi$. Тоді на цих напрямах анулюються перша (умова ортогональності) і друга (умова спряженості) білінійні форми, породжені відповідними квадратичними формами:

$$I(d,\delta) = Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v \equiv (d\vec{r}, \delta\vec{r}) = 0,$$

$$II(d,\delta) = Ldu\delta u + M(du\delta v + dv\delta u) + Ndv\delta v \equiv -(d\vec{r}, \delta\vec{n}) = 0.$$

Для знаходження головних напрямів розглянемо ці два рівняння як систему лінійних рівнянь відносно невідомих δu, δv:

$$\begin{cases} (Edu + Fdv)\delta u + (Fdu + Gdv)\delta v = 0, \\ (Ldu + Mdv)\delta u + (Mdu + Ndv)\delta v = 0. \end{cases}$$

Оскільки ця лінійна система є однорідною, то її нетривіальний розв'язок існує тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} Edu + Fdv & Fdu + Gdv \\ Ldu + Mdv & Mdu + Ndv \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.14)$$

Отже, остання рівність характеризує головні напрями; її будемо називати формулою головних напрямів. Зауважимо, що розглядаючи зазначену вище лінійну систему відносно невідомих du, dv, прийдемо до формули (3.14). Співвідношенню (3.14) можна надати більш симетричний вигляд

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.15)$$

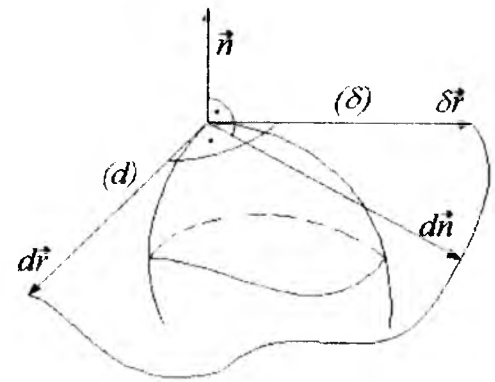
У точках сплощення $L = M = N = 0$ і тому (3.15) задовольняє будь-який поверхневий напрям, що узгоджується з означенням головних напрямів у цих точках. Крім того, у омбілічних точках, де індикатриса кривини є колом, нормальна кривина $k_0 = \dfrac{II}{I}$ однакова для всіх поверхневих

напрямів (d). Звідси випливає, що в омбілічних точках коефіцієнти першої і другої квадратичних форм пропорційні: $\dfrac{L}{E} = \dfrac{M}{F} = \dfrac{N}{G}$. Отже, в цих точках будь-який поверхневий напрям також є головним.

Нормальні кривини поверхні, які відповідають головним напрямам поверхні в даній точці, називаються **головними кривинами поверхні в цій точці**. Таким чином, головні кривини є **екстремальними серед всіх нормальних кривин поверхні в даній точці**.

Характеристику головних напрямів дає також наступне твердження.

Теорема 3.9 (Родріга). *Якщо напрям (d) є головним напрямом, то $d\vec{n} = -k_0 d\vec{r}$, де k_0 – нормальна кривина поверхні в цьому напрямі. Навпаки, якщо у напрямі (d) $d\vec{n} = \lambda d\vec{r}$, то (d) є головним напрямом.*



Доведення. Вектор $\vec{n}$ – нормальний вектор поверхні, тобто $|\vec{n}| = 1$. Тоді вектор $d\vec{n}$ ортогональний до $\vec{n}$. Нехай (δ) – інший головний напрям, ортогональний до напряму (d). Отже, вектор $d\vec{n}$ можна подати у вигляді лінійної комбінації векторів $d\vec{r}$, $\delta\vec{r}$: $d\vec{n} = \lambda d\vec{r} + \mu\delta\vec{r}$. Домножимо цю рівність скалярно на $\delta\vec{r}$ і врахуємо, що $(d\vec{n},\delta\vec{r}) = 0$ і $(d\vec{r},\delta\vec{r}) = 0$ внаслідок спряженості напрямів (d), (δ) та ортогональності цих напрямів. У результаті дістанемо, що $\mu(\delta\vec{r},\delta\vec{r}) = 0$, тобто $\mu = 0$. Отже, $d\vec{n} = \lambda d\vec{r}$ або $(d\vec{n},d\vec{r}) = \lambda(d\vec{r},d\vec{r})$. Таким чином,

$$\lambda = \frac{(d\vec{n},d\vec{r})}{(d\vec{r},d\vec{r})} \equiv -\frac{II}{I} = -k_0,$$

що й треба було довести.

Доведемо обернене твердження. Нехай напрям (d) такий, що $d\vec{n} = \lambda d\vec{r}$. Покажемо, що цей напрям є головним. Нехай (δ) – напрям, ортогональний до (d). Тоді, помноживши рівність $d\vec{n} = \lambda d\vec{r}$ скалярно на $\delta\vec{r}$ дістанемо, що $(d\vec{n},\delta\vec{r}) = 0$. Це означає, що напрями (d) і (δ) спряжені. Крім того, вони є ортогональними, отже, головними.

Теорема доведена.

Означення 3.11. *Лінією кривини на поверхні* Φ *називають таку криву, в кожній точці якої дотична до неї направлена вздовж одного з головних напрямів поверхні* Φ *в цій точці.*

Головні напрями в точці $M \in \Phi$ визначаються рівнянням (3.14), отже, має місце твердження: для того, щоб регулярна крива γ: $\vec{r} = \vec{r}(u(t),v(t))$ другого порядку на поверхні Φ була лінією кривини, необхідно і досить, щоб диференціали du, dv вздовж неї в кожній її точці задовольняли рівняння (3.14), де коефіцієнти квадратичних форм I і II взято в цій точці. Отже, (3.14) є диференціальним рівнянням, яке зводиться до двох диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{du}{dv} = f_1(u,v), \quad \frac{du}{dv} = f_2(u,v)$$

(замість $\dfrac{du}{dv}$ можна розглянути $\dfrac{dv}{du}$ в залежності від того, який з диференціалів dv або du не перетворюється в нуль). З

теорії диференціальних рівнянь відомо, що у випадку гладких функцій $f_1(u,v)$, $f_2(u,v)$ через кожну точку $M(u,v) \in \Phi$ проходить єдина інтегральна крива першого та єдина інтегральна крива другого з цих рівнянь. Таким чином, лінії кривини поверхні Φ утворюють на ній ортогональну сітку, оскільки дві лінії кривини, що містять точку M, ортогональні в цій точці. Зазначимо також, що рівняння (3.14) (або (3.15)) після перетворень можна звести до рівняння

$$(LF-ME)du^2+(LG-NE)dudv+(MG-NF)dv^2 = 0. \quad (3.16)$$

Теорема 3.10. *Для того, щоб координатна сітка поверхні* Φ, *яка не містить омбілічних точок, співпадала з її сіткою ліній кривини, необхідно і досить, щоб коефіцієнти* F *і* M *першої та другої квадратичних форм цієї поверхні тотожно дорівнювали нулю.*

Доведення. Достатність. Нехай $F(u,v) = M(u,v) = 0$. Тоді диференціальне рівняння (3.16) набуває вигляду

$$(L(u,v)G(u,v) - N(u,v)E(u,v))dudv = 0.$$

Оскільки всі три коефіцієнти рівняння (3.16) не перетворюються в нуль одночасно, то різниця $L(u,v)G(u,v) - N(u,v)E(u,v)$ в нуль не перетворюється, отже, $dudv = 0$.

Рівняннями $du = 0$ та $dv = 0$ визначається координатна сітка поверхні Φ.

Необхідність. Нехай координатні лінії поверхні Φ є її лініями кривини. Тоді вздовж них тотожно виконується рівність (3.16), яка вздовж u-кривих має вигляд $LF - ME = 0$, а вздовж v-кривих $MG - NF = 0$ відповідно. Два останні рівняння утворюють однорідну систему відносно $F(u,v)$ та $M(u,v)$. Детермінант останньої дорівнює $L(u,v)G(u,v) - N(u,v)E(u,v)$. Якщо припустити, що в деякій точці (u,v) $F(u,v)$ і $M(u,v)$ не перетворюються в нуль одночасно, то в ній повинен перетворюватися в нуль цей детермінант, що неможливо, оскільки в цій точці перетворюються в нуль всі три коефіцієнти рівняння (3.16). Теорема доведена.

Прикладом лінії кривини є будь-яка гладка лінія на сфері, оскільки на сфері будь-який поверхневий напрям є головним. Аналогічно, будь-яка плоска лінія (на площині) є лінією кривини.

Формула Ейлера. Повна і середня кривини поверхні. На регулярній поверхні Φ зафіксуємо точку P. Введемо прямокутну декартову систему координат $PXYZ$, прийнявши дотичну площину до поверхні в точці P за площину XPY, а нормаль поверхні в цій точці – за вісь PZ. Напрями осей Px, Py візьмемо такими, щоб вони співпадали з головними напрямами поверхні у точці P. Тоді в такій системі координат у деякому поверхневому околі точки P поверхня має рівняння $z = f(x,y)$, $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Для такого рівняння підрахунки дають $E(0,0) = 1$, $F(0,0) = 0$, $G(0,0) = 1$; $L(0,0) = f_{xx}(0,0) \equiv r$, $M(0,0) = f_{xy}(0,0) \equiv s$, $N(0,0) = f_{yy}(0,0) \equiv t$. Крім того, оскільки, за припущенням, поверхневі напрями $\{dx, 0\}$ та $\{0, dy\}$ у точці $P \in \Phi$ є головними, то в цій точці анулюється також середній коефіцієнт другої квадратичної форми: $s = 0$. Отже, у точці $P \in \Phi$ перша та друга квадратичні форми поверхні набувають вигляду: $I_p(d) = dx^2 + dy^2$, $II_p(d) = rdx^2 + tdy^2$. Звідси, для нормальної кривини в довільному напрямку (d): $\{dx, dy\}$ у точці $P \in \Phi$ маємо, що

$$k_0 = \frac{II_p(d)}{I_p(d)} = \frac{rdx^2 + tdy^2}{dx^2 + dy^2}.$$

Позначимо через k_1, k_2 головні кривини в точці $P \in \Phi$, які відповідають головним напрямам $\{dx, 0\}$, $\{0, dy\}$. З попередньої формули випливає, що $k_1 = r$, $k_2 = t$.

Введемо тепер до розгляду кут φ, який у точці $P \in \Phi$ утворює довільний поверхневий напрям (d): $\{dx, dy\}$ з першим головним напрямом $\{dx, 0\}$, тобто з віссю Px . Тоді з

формули (3.7) для обчислення кута між поверхневими напрямами знаходимо, що $\cos\varphi = \dfrac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$. Отже, формула для нормальної кривини поверхні в точці $P \in \Phi$ набуває вигляду

$$k_0 = r\frac{dx^2}{dx^2 + dy^2} + t\frac{dy^2}{dx^2 + dy^2} = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi.$$

Ця формула називається **формулою Ейлера для нормальних кривин поверхні**. Зокрема, в сферичних (омбілічних) точках поверхні, де всі нормальні кривини однакові, вона зводиться до тригонометричної тотожності. У точках сплощення, де, за означенням, усі нормальні кривини нульові, вона також перетворюється в тотожність. У всіх інших типах точок **формула Ейлера в даній точці дає зображення нормальної кривини в довільному поверхневому напрямку через головні кривини і кут, який утворює цей напрям з першим головним напрямом поверхні**.

Введемо до розгляду величини $K = k_1 k_2$, $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$, які відповідно називають **повною (гауссовою)** і **середньою кривинами поверхні в даній точці**. Ці величини відіграють визначну роль в диференціальній геометрії поверхні. Отримаємо формули для їх обчислення.

Для визначеності вважатимемо, наприклад, що $k_1 \geq k_2$. Тоді, як ми вже знаємо, головні кривини k_1, k_2 є в даній точці відповідно максимумом і мінімумом відношення

$$\frac{II(\xi,\eta)}{I(\xi,\eta)} = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2}{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2}.$$

Нехай $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ ті значення, які дають перший головний напрям. Тому $\forall(\xi,\eta)$: $II(\xi,\eta) - k_1 I(\xi,\eta) \leq 0$ і рівність досягатиметься саме для значень $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$. Звідси робимо висновок про те, що частинні похідні функції

$$II(\xi,\eta)-k_1I(\xi,\eta)=(L-k_1E)\xi^2+2(M-k_1F)\xi\eta+(N-k_1G)\eta^2$$

для значень $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ дорівнюють нулю. Таким чином,

$$(L-k_1E)\tilde{\xi}+(M-k_1F)\tilde{\eta}=0,$$

$$(M-k_1F)\tilde{\xi}+(N-k_1G)\tilde{\eta}=0.$$

Оскільки головні напрями завжди існують, то остання система відносно невідомих $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ має нетривіальний розв'язок, отже

$$\begin{vmatrix} L-kE & M-kF \\ M-kF & N-kG \end{vmatrix}=0, \qquad (3.17)$$

де $k=k_1$. Ця рівність має місце і у випадку, коли розглядається друга головна кривина k_2. Таким чином, головні кривини є розв'язками рівняння (3.17), яке будемо називати формулою головних кривин.

Запишемо (3.17) у розгорнутому вигляді

$$(EG-F^2)k^2-(GL+EN-2FM)k+LN-M^2=0.$$

Оскільки визначник першої квадратичної форми $EG-F^2>0$, то це квадратне рівняння можна записати у вигляді

$$k^2-\frac{GL+EN-2FM}{EG-F^2}k+\frac{LN-M^2}{EG-F^2}k=0.$$

Згідно з формулою Вієта для коренів приведеного квадратного рівняння, знаходимо шукані повну і середню кривини поверхні:

$$K=k_1k_2=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}, H=\frac{k_1+k_2}{2}=\frac{GL+EN-2FM}{2(EG-F^2)}.$$

Попереднє рівняння тепер можна записати у вигляді

$$k^2-2Hk+K=0.$$

Якщо повна і середня кривини поверхні відомі, то знаходимо головні кривини поверхні: $k_{1,2}=H\pm\sqrt{H^2-K}$. Величина H^2-K називається **ейлеровою різницею поверхні**. Оскільки головні кривини завжди існують, то ейлерова різниця невід'ємна.

Формула для повної кривини показує, що її знак співпадає зі знаком визначника $LN-M^2$ другої квадратичної форми поверхні. Звідси випливає, що: в еліптичних точках поверхні $K>0$; у гіперболічних точках $K<0$; у параболічних точках і точках сплощення $K=0$. Часто класифікацію точок поверхні визначають саме за знаком повної кривини.

Якщо середня кривина регулярної поверхні $H=0$, то така поверхня називається **мінімальною**.

§3.8. Внутрішня геометрія поверхні

Внутрішня геометрія поверхні вивчає ті властивості поверхні, які визначаються її першою квадратичною формою. Сюди, як ми бачили, належать задачі про обчислення довжини дуги кривої на поверхні, кута між кривими, площі частини поверхні. У цьому параграфі ми розглянемо ще деякі поняття, які належать до внутрішньої геометрії поверхні.

Вважатимемо, що поверхня Ф є регулярною поверхнею третього порядку.

Для зручності введемо нові позначення криволінійних координат, коефіцієнтів квадратичних форм та деяких векторів:

$$u=u^1, v=u^2, E=g_{11}, F=g_{12}=g_{21}, G=g_{22}, L=b_{11},$$

$$M=b_{12}=b_{21}, N=b_{22}, \overrightarrow{r_u}=\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_v}=\overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{r_{uu}}=\overrightarrow{r_{11}},$$

$$\overrightarrow{r_{uv}}=\overrightarrow{r_{vu}}=\overrightarrow{r_{12}}=\overrightarrow{r_{21}}, \overrightarrow{r_{vv}}=\overrightarrow{r_{22}}.$$

У нових позначеннях квадратичні форми поверхні Ф виглядають так:

$$I = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} g_{ij}du^i du^j, \quad II = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} b_{ij}du^i du^j.$$

Надалі, коли індекси i, j перебігатимуть множину $\{1,2\}$, відповідні суми писатимемо без знаку суми:

$$I = g_{ij}du^i du^j, \quad II = b_{ij}du^i du^j.$$

Взагалі, у випадку, коли в одночленному виразі деякий індекс записаний знизу і зверху, вважатимемо, що по ньому відбувається сумування в межах від одиниці до двох. Зауважимо також, що в цьому параграфі ми не будемо вказувати множину значень індексу, якщо вона містить $\{1,2\}$. Так, наприклад, формули

$$g_{ij} = (\vec{r_i}, \vec{r_j}), \quad b_{ij} = (\vec{r_{ij}}, \vec{n})$$

визначають шість коефіцієнтів квадратичних форм I та II.

Оскільки вектори $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$, $\vec{n}$ не лежать в одній площині (лінійно незалежні), то вони утворюють рухомий базис поверхні і ми можемо розкласти в ньому похідні базисних векторів (у заданій точці поверхні Ф):

$$\vec{r_{ij}} = \Gamma^1_{ij}\vec{r_1} + \Gamma^2_{ij}\vec{r_2} + a_{ij}\vec{n}. \tag{3.18}$$

Формула (3.18), фактично, містить в собі три рівності, оскільки $a_{ij} = a_{ji}$, $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Формули (3.18) є аналогами формул Френе для ліній, а базис $\{\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{n}\}$ з початком у довільній точці поверхні називається **векторним тригранником Дарбу**. Формули (3.18) називаються **дериваційними формулами Гаусса**.

Аналогічно, оскільки четвірки векторів $\{\vec{n_i}; \vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{n}\}$ у V_3 лінійно залежні, то мають місце розклади

$$\vec{n_i} = \beta^1_i\vec{r_1} - \beta^2_i\vec{r_2} + \gamma_i\vec{n}. \tag{3.19}$$

Розклад векторів $\vec{n_i}$ в (3.19) називають **дериваційними формулами Вейнгартена**. Легко бачити, що у формулах (3.19) $\gamma_i = 0$. Сукупність функцій Γ^k_{ij} називають **символами Христофеля другого роду**, а β^j_i **коефіцієнтами Вейнгартена**.

Знайдемо зображення символів Христофеля другого роду та коефіцієнтів Вейнгартена через вектори тригранника Дарбу.

Використовуючи домовленість про позначення, дериваційні формули (3.18), (3.19) можна подати у стислішій формі:

$$\vec{r_{ij}} = \Gamma^k_{ij}\vec{r_k} + a_{ij}\vec{n},$$
$$\vec{n_i} = -\beta^k_i\vec{r_k}.$$

Помножимо скалярно ці векторні рівності на вектор $\vec{r_l}$. Тоді

$$(\vec{r_l}, \vec{r_{ij}}) = \Gamma^k_{ij}(\vec{r_l}, \vec{r_k}), \quad (\vec{r_l}, \vec{n_i}) = -\beta^k_i(\vec{r_l}, \vec{r_k}),$$

або

$$\Gamma_{lij} := (\vec{r_l}, \vec{r_{ij}}) = \Gamma^k_{ij}g_{kl}, \tag{3.20}$$

$$b_{li} = \beta^k_i g_{kl}. \tag{3.20$_1$}$$

Величини $\Gamma_{lij} \equiv (\vec{r_l}, \vec{r_{ij}})$ називаються **символами Христофеля першого роду**.

Оскільки матриця коефіцієнтів першої квадратичної форми невироджена, то існує обернена матриця (g^{ij}) така, що

$$g_{kj}g^{ji} = g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = k, \\ 0, & \text{якщо } i \neq k, \end{cases}$$

або

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матричне рівняння (3.20) помножимо справа на матрицю (g^{lp}). Тоді

$$\Gamma^k_{ij} = g^{kl}\Gamma_{lij} = g^{kl}(\vec{r_l}, \vec{r_{ij}}) \qquad (3.21)$$

– формули зв'язку символів Христофеля другого роду з символами Христофеля першого роду (сумування в (3.21) проводиться по індексу $l \in \{1, 2\}$). Зауважимо, що таку ж назву мають і формули (3.20).

Якщо матричну рівність (3.21) справа помножити на матрицю (g^{lp}), то одержимо формули для коефіцієнтів Вейнгартена

$$\beta^j_i = b_{il}g^{lj} = (\vec{r_{il}}, \vec{n})g^{lj}. \qquad (3.22)$$

Оскільки $g^{11} = \dfrac{g_{22}}{\Delta}$, $g_{12} = g_{21} = -\dfrac{g_{12}}{\Delta}$, $g^{22} = \dfrac{g_{11}}{\Delta}$, $\Delta = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$, то формули (3.21), (3.22) дають зображення символів Γ^k_{ij} та β^j_i через коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні (тобто, через вектори триграника Дарбу) та через символи Христофеля першого роду.

Знайдемо зображення символів Христофеля першого роду через коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні. Оскільки

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} = (\vec{r_{ij}}, \vec{r_l}) + (\vec{r_i}, \vec{r_{lj}}),$$

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} = (\vec{r_{ji}}, \vec{r_l}) + (\vec{r_j}, \vec{r_{li}}),$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = (\vec{r_{il}}, \vec{r_j}) + (\vec{r_i}, \vec{r_{jl}}),$$

то, додавши почленно перші дві рівності і віднявши від одержаної суми третю дістанемо, що

$$\Gamma_{lij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right). \qquad (3.23)$$

Отже, символи Γ_{lij} відносяться до внутрішньої геометрії поверхні. Звідси та з формул (3.21) випливає, що символи Γ^k_{ij} також відносяться до внутрішньої геометрії поверхні.

Якщо (3.18) помножити скалярно на $\vec{n}$, то одержимо, що $a_{ij} = (\vec{r_{ij}}, \vec{n})$. Але $(\vec{r_{ij}}, \vec{n}) = b_{ij}$, тобто $a_{ij} = b_{ij}$.

Висновок: коефіцієнти розкладів (3.18) та (3.19) зображаються лише через коефіцієнти першої та другої квадратичних форм поверхні.

Для площини з параметризацією $x = u^1$, $y = u^2$, $z = 0$ обчислення дають $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b_{ij} = 0$, $\beta^j_i = 0$, $\Gamma_{lij} = 0$, $\Gamma^k_{ij} = 0$. Отже, дериваційні рівняння площини в даній параметризації мають вигляд: $\vec{r_{ij}} = \vec{0}$, $\vec{n_i} = \vec{0}$. Можна поставити питання про знаходження всіх поверхонь, які мають такі дериваційні рівняння. У даному випадку легко знайти їхній загальний розв'язок: $\vec{r}(u^1, u^2) = \vec{a_1}u^1 + \vec{a_2}u^2 + \vec{a_0}$, $\vec{n} = \dfrac{[\vec{a_1}, \vec{a_2}]}{|[\vec{a_1}, \vec{a_2}]|}$, $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_0}$ – сталі вектори. З геометричного змісту задачі випливає, що сталі вектори $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$ треба вибирати неколінеарними і тому розв'язок дає векторно-параметричне рівняння площини, для якої ці вектори будуть напрямними. Однак, у загальному випадку, не кожні наперед задані рівняння вигляду (3.18), (3.19) можуть бути дериваційними для якоїсь поверхні.

Теорема 3.11 (Гаусса). *Повна кривина поверхні Φ визначається першою квадратичною формою цієї поверхні і, отже, належить до її внутрішньої геометрії.*

Доведення. Формулу (3.23) подамо у вигляді

$$(\overrightarrow{r_l},\overrightarrow{r_{ij}})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right)$$

і продиференціюємо обидві частини цієї рівності по u^k. Тоді

$$(\overrightarrow{r_{lk}},\overrightarrow{r_{ij}})+(\overrightarrow{r_l},\overrightarrow{r_{ijk}})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{li}}{\partial u^j\partial u^k}+\frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial u^i\partial u^k}-\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^l\partial u^k}\right).$$

Оскільки ці рівності вірні при будь-яких значеннях індексів $i,\ j,\ k,\ l\in\{1,2\}$, то вірними є також рівності

$$(\overrightarrow{r_{lj}},\overrightarrow{r_{ik}})+(\overrightarrow{r_l},\overrightarrow{r_{ikj}})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{li}}{\partial u^k\partial u^j}+\frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial u^i\partial u^j}-\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u^l\partial u^j}\right).$$

Віднявши від першої рівності другу, одержимо, що

$$(\overrightarrow{r_{lk}},\overrightarrow{r_{ij}})-(\overrightarrow{r_{lj}},\overrightarrow{r_{ik}})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial u^i\partial u^k}+\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u^l\partial u^j}-\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^l\partial u^k}-\frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial u^i\partial u^j}\right).$$

Надаючи індексам допустимих значень упевнюємося в тому, що одержані рівності зводяться або до тотожностей, або до рівності

$$(\overrightarrow{r_{11}},\overrightarrow{r_{22}})-(\overrightarrow{r_{12}},\overrightarrow{r_{12}})=\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1\partial u^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2\partial u^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1\partial u^1}.$$

Використовуючи дериваційні формули (3.18) знайдемо, що

$$(\overrightarrow{r_{11}},\overrightarrow{r_{22}})-(\overrightarrow{r_{12}},\overrightarrow{r_{12}})=(\Gamma^k_{11}\overrightarrow{r_k}+b_{11}\overrightarrow{n},\Gamma^l_{22}\overrightarrow{r_l}+b_{22}\overrightarrow{n})-$$

$$-(\Gamma^k_{12}\overrightarrow{r_k}+b_{12}\overrightarrow{n},\Gamma^l_{12}\overrightarrow{r_l}+b_{12}\overrightarrow{n})=\Gamma^k_{11}\Gamma^l_{22}g_{kl}+b_{11}b_{22}-\Gamma^k_{12}\Gamma^l_{12}g_{kl}-b_{12}^2.$$

Отже,

$$b_{11}b_{22}-b_{12}^2=\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1\partial u^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2\partial u^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1\partial u^1}+(\Gamma^k_{12}\Gamma^l_{12}-\Gamma^k_{11}\Gamma^l_{22})g_{kl}.$$

Останню рівність називають формулою Гаусса. Взявши до уваги означення повної кривини поверхні та формулу для її обчислення, завершуємо доведення теореми.

Наслідок 3.1. *Деяка квадратична форма $b_{ij}du^idu^j$ є другою квадратичною формою поверхні з відомою її першою квадратичною формою $g_{ij}du^idu^j$ тоді, коли дискримінант цієї форми зображається через коефіцієнти першої квадратичної форми і їхні частинні похідні за формулою Гаусса.*

Знайдемо ще дві формули (Петерсона-Кодацці), які встановлюють зв'язок між коефіцієнтами першої та другої квадратичних форм поверхні. Для цього рівності $b_{i1}=-(\overrightarrow{r_i},\overrightarrow{n_1})$ продиференціюємо по змінній u^2, а рівності $b_{i2}=-(\overrightarrow{r_i},\overrightarrow{n_2})$ по змінній u^1. Тоді

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2}=-(\overrightarrow{r_{i2}},\overrightarrow{n_1})-(\overrightarrow{r_i},\overrightarrow{n_{12}}),$$

$$\frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1}=-(\overrightarrow{r_{i1}},\overrightarrow{n_2})-(\overrightarrow{r_i},\overrightarrow{n_{21}}).$$

Враховуючи, що $\overrightarrow{n_{12}}=\overrightarrow{n_{21}}$, отримуємо

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2}-\frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1}=-(\overrightarrow{r_{i1}},\overrightarrow{n_2})-(\overrightarrow{r_{i2}},\overrightarrow{n_1}).$$

Але, з урахування дериваційних формул поверхні,

$$(\overrightarrow{r_{i1}},\overrightarrow{n_2})-(\overrightarrow{r_{i2}},\overrightarrow{n_1})=(\Gamma^k_{i1}\overrightarrow{r_k}+b_{i1}\overrightarrow{n},\overrightarrow{n_2})-(\Gamma^k_{i2}\overrightarrow{r_k}+b_{i2}\overrightarrow{n},\overrightarrow{n_1})=$$

$$=\Gamma^k_{i1}(\overrightarrow{r_k},\overrightarrow{n_2})-\Gamma^k_{i2}(\overrightarrow{r_k},\overrightarrow{n_1})=\Gamma^k_{i2}b_{k1}-\Gamma^k_{i1}b_{k2}.$$

Тому

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2}+\Gamma^k_{i1}b_{k2}=\frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1}+\Gamma^k_{i2}b_{k1}. \qquad (3.24)$$

Формули (3.24) – формули Петерсона-Кодацці.

Основна теорема теорії поверхонь

Теорема 3.12 (Боне). *Нехай у деякій плоскій області змінних u^1, u^2 задані шість аналітичних функцій*

$$g_{ij}(u^1,u^2), b_{ij}(u^1,u^2), \{i,j\}\subset\{1,2\}, g_{12}=g_{21}, b_{12}=b_{21},$$

для яких виконані рівняння Гаусса та Петерсона-Кодацці, а також умова додатної визначеності квадратичної форми $g_{ij}du^idu^j$, тобто $g_{11}>0$, $g_{11}g_{22}-g_{12}^2>0$. Тоді в просторі існує поверхня, для якої задані функції будуть відповідно коефіцієнтами першої та другої квадратичних форм. Ця поверхня визначається однозначно, коли зафіксоване початкове положення рухомого репера.

Доведення. У подальшому для зручності використаємо скорочений запис частинних похідних: $\partial_k \equiv \dfrac{\partial}{\partial u^k}$. Згідно з дериваційними рівняннями параметризація $\vec r(u^1,u^2)$ шуканої поверхні повинна в даній області задовольняти наступну систему диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку:

$$\partial_j \vec r_i = \Gamma^k_{ij}\vec r_k + b_{ij}\vec n, \quad \partial_i \vec n = -b^j_i \vec r_j. \tag{3.25}$$

Невідомими у цій системі є чотири вектор-функції: $\vec r(u^1,u^2)$, $\vec r_i(u^1,u^2)$, $\vec n(u^1,u^2)$. Праві частини системи (3.25), згідно з відповідними формулами для коефіцієнтів дериваційних рівнянь поверхні, цілком визначаться заданими функціями g_{ij}, b_{ij}. Якщо систему (3.25) записати для координатних функцій, то відносно них, як невідомих, вона буде містити 12 лінійних диференціальних рівнянь з аналітичними коефіцієнтами. Внаслідок теореми Коші-Ковалевської, для таких систем існує розв'язок, якщо виконуються умови інтегровності, які у даному випадку мають вигляд: $\vec r_{ij}=\vec r_{ji}$, $\vec r_{ijk}=\vec r_{ikj}$, $\vec n_{ij}=\vec n_{ji}$. Перша група цих умов виконується внаслідок симетричності відповідної правої частини рівнянь (3.25). Дві наступні групи умов виконуються

внаслідок рівнянь Гаусса та Петерсона-Кодацці. Таким чином, існування розв'язку рівнянь (3.25) забезпечує теорема Коші-Ковалевської. Для отримання конкретного розв'язку потрібно вибрати початкові дані

$$\vec r(u^1_0,u^2_0)=\vec r_0, \vec r_i(u^1_0,u^2_0)=\vec r_{i,0}, \vec n(u^1_0,u^2_0)=\vec n_0, (\vec r_{i,0},\vec r_{j,0})=$$

$$=g_{ij}(u^1_0,u^2_0), (\vec r_{i,0},\vec n_0)=0, (\vec n_0,\vec n_0)=1, \vec n_0=\frac{[\vec r_{1,0},\vec r_{2,0}]}{\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\Big|_0},$$

які визначають початкове положення рухомого репера.

Розглянемо тепер поверхню Ф: $\vec r=\vec r(u^1,u^2)$, яка відповідає вибраним початковим даним, і покажемо, що для неї задані функції g_{ij}, b_{ij} будуть відповідно коефіцієнтами першої та другої квадратичних форм. З цією метою з отриманого розв'язку побудуємо скалярні добутки $(\vec r_1,\vec r_1)$, $(\vec r_1,\vec r_2)$, $(\vec r_2,\vec r_2)$, $(\vec r_1,\vec n)$, $(\vec r_2,\vec n)$, $(\vec n,\vec n)$. Внаслідок (3.25) частинні похідні цих добутків задовольняють наступну систему 12 рівнянь

$$\partial_1(\vec r_1,\vec r_1)=2(\vec r_1,\vec r_{11})=2(\vec r_1,\Gamma^k_{11}\vec r_k+b_{11}\vec n)=2\Gamma^k_{11}(\vec r_1,\vec r_k)+$$

$$+2b_{11}(\vec r_1,\vec n),$$

$$\dots\dots\dots\dots \tag{3.26}$$

$$\partial_2(\vec n,\vec n)=2(\vec n,\vec n_2)=2(\vec n,-b^j_2\vec r_j)=-2b^j_2(\vec n,\vec r_j).$$

Розглядатимемо (3.26) як самостійну систему рівнянь з частинними похідними. Безпосередня перевірка показує, що цю систему задовольняє (відповідно до нумерації невідомих) набір функцій g_{11}, g_{12}, g_{22}, 0, 0, 1. Справді, наприклад, для першого рівняння при підстановці цих функцій маємо

$$\partial_1 g_{11}=2\Gamma^2_{11}g_{11}+2\Gamma^2_{11}g_{12}+2b_{11}\cdot 0\equiv 2\Gamma^k_{11}g_{1k}=2\Gamma_{111},$$

що є тотожністю за означенням символів Христофеля 1-го роду. Аналогічно розглядаються інші рівняння. Таким чином, два набори функцій $(\vec{r_1}, \vec{r_1})$, $(\vec{r_1}, \vec{r_2})$, $(\vec{r_2}, \vec{r_2})$, $(\vec{r_1}, \vec{n})$, $(\vec{r_2}, \vec{n})$, $(\vec{n}, \vec{n})$ і g_{11}, g_{12}, g_{22}, 0, 0, 1 є розв'язками системи (3.26). Крім того, ці розв'язки задовольняють при u_0^1, u_0^2 одні і ті ж початкові дані, а тому співпадають тотожно в даній плоскій області. Отже, функції $g_{ij} = (\vec{r_i}, \vec{r_j})$ є коефіцієнтами першої квадратичної форми поверхні Φ: $\vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2)$ і $(\vec{r_1}, \vec{n}) = 0$, $(\vec{r_2}, \vec{n}) = 0$, $|\vec{n}|^2 = 1$. Тепер із системи (3.25) випливає, що

$$(\vec{r_{ij}}, \vec{n}) = \Gamma_{ij}^k(\vec{r_k}, \vec{n}) + b_{ij}(\vec{n}, \vec{n}) \Rightarrow b_{ij} = (\vec{r_{ij}}, \vec{n}),$$

тобто b_{ij} є коефіцієнтами другої квадратичної форми.

Теорема доведена.

Наслідок 3.2. *Формули Гаусса і Петерсона-Кодацці є необхідними і достатніми умовами того, що дві задані квадратичні диференціальні форми, з яких одна додатна, були б першою і другою квадратичними формами для деякої поверхні.*

Природно виникає питання про те, як зміниться поверхня, якщо для фіксованих значень u_0^1, u_0^2 змінюється початкове положення рухомого реперу. Нехай $(P_0, \vec{r}_{1,0}, \vec{r}_{2,0}, \vec{n_0})$, $(\tilde{P}_0, \tilde{\vec{r}}_{1,0}, \tilde{\vec{r}}_{2,0}, \tilde{\vec{n}}_0)$ – два таких репери і Φ: $\vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2)$, $\tilde{\Phi}$: $\tilde{\vec{r}} = \tilde{\vec{r}}(u^1, u^2)$ – відповідні їм поверхні. Зрозуміло, що один репер можна отримати з іншого переміщенням у просторі. Це випливає з того, що початковими даними однозначно фіксуються довжини реперних векторів та кути між ними. Позначимо через T ортогональний оператор, який переводить старий репер в новий: $\tilde{\vec{r}}_{i,0} = T\vec{r}_{i,0}$, $\tilde{\vec{n}}_0 = T\vec{n}_0$ і розглянемо вектор-функції

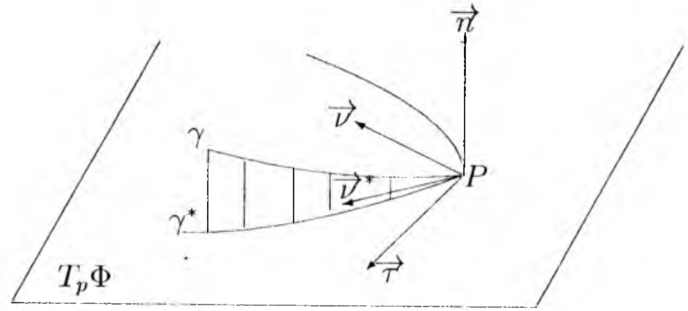
$$\tilde{\vec{r}}(u^1, u^2) = T(\vec{r}(u^1, u^2) - \vec{r}_0) + \tilde{\vec{r}}_0,\ \tilde{\vec{n}}(u^1, u^2) = T\vec{n}(u^1, u^2).$$

Ці функції також є розв'язками системи (3.25) і при фіксації

значень u_0^1, u_0^2 цей розв'язок задовольняє ті ж самі початкові дані, що і новий розв'язок $\tilde{\vec{r}}(u^1, u^2)$, $\tilde{\vec{n}}(u^1, u^2)$. Отже, ці розв'язки збігаються, а рівність $\tilde{\vec{r}}(u^1, u^2) = T(\vec{r}(u^1, u^2) - \vec{r}_0) + \tilde{\vec{r}}_0$ означає, що поверхня $\tilde{\Phi}$ отримується з поверхні Φ переміщенням (як твердого тіла) у просторі.

§3.9. Геодезійна кривина поверхневої кривої. Геодезійні криві на поверхні

Розглянемо регулярну поверхню Φ: $\vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2)$ і деяку поверхневу криву $\gamma \subset \Phi$. Зафіксуємо точку $P \in \gamma$ і проведемо дотичну площину $T_P\Phi$. Спроектуємо ортогонально на цю площину криву γ і в результаті отримаємо деяку плоску криву $\gamma^* \subset T_P\Phi$ (див. Мал. 3.9).



Мал. 3.9.

Геодезійною кривиною поверхневої кривої $\gamma \subset \Phi$ **в точці** $P \in \gamma$ називають кривину її ортогональної проекції $\gamma^* \subset T_P\Phi$ у цій точці. Геодезійну кривину позначають символом k_g. Для її знаходження розглянемо циліндричну поверхню Φ^*, яка має напрямну γ^* і твірні – перпендикуляри до дотичної площини $T_P\Phi$. Нехай $\vec{\nu}$, $\vec{\nu}^*$ – орти головних нормалей кривих γ, γ^* у точці P. Оскільки крива γ^* є напрямною кривою прямого циліндра Φ^*, то орт її головної нормалі $\vec{\nu}^*$ буде нормальним ортом цього циліндра. Зауважимо, що криві γ, γ^* мають у точці P спільний дотичний орт $\vec{\tau}$ і цей орт задає поверхневий напрям циліндра Φ^*. Нормальна кривина циліндра Φ^* у цьому напрямі є кривиною нормального перерізу γ^* із додатнім знаком, оскільки орт нормалі циліндра Φ^* співпадає з ортом головної нормалі перерізу γ^*. Застосовуючи до кривої γ, як до поверхневої кривої циліндра Φ^*, теорему Меньє, одержимо, що $k\cos(\vec{\nu}, \vec{\nu}^*) = k_g$.

З точністю до знаку $\vec{\nu}^* = \pm[\vec{n}, \vec{\tau}]$, причому знак тут залежить від напряму орта нормалі поверхні Φ. Зауважимо, що іноді геодезійній кривині приписують певний знак в залежності від знаку правої частини попередньої формули. Отже,

$$k_g = k(\vec{\nu}, \vec{\nu}^*) = \pm k(\vec{\nu}, [\vec{n}, \vec{\tau}]) = \pm k([\vec{\nu}, \vec{n}], \vec{\tau}) =$$

$$= \pm k(-[\vec{n}, \vec{\nu}], \vec{\tau}) = \pm k(-\vec{n}, [\vec{\nu}, \vec{\tau}]) = \pm k(\vec{n}, [\vec{\tau}, \vec{\nu}]) =$$

$$= \pm k(\vec{n}, \vec{\tau}, \vec{\nu}).$$

Нехай крива γ віднесена до натурального параметра і її внутрішні рівняння мають вигляд $u^i = u^i(s)$. Тоді $\dot{\vec{r}} = \vec{\tau}$, $\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{\tau}} = k\vec{\nu}$, $k_g = \pm(\vec{n}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}})$. Знак у правій частині вибирається так, щоб отримана величина була невід'ємною, тобто

$$k_g = |(\vec{n}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}})|.$$

Знайдемо тепер обчислювальну формулу для геодезійної кривини при довільній параметризації кривої: $u^i = u^i(t)$, $t = t(l)$. Тоді

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{dl} = \vec{r}\,' \cdot \dot{t}, \; \ddot{\vec{r}} = \vec{r}\,'' \cdot \dot{t}^2 + \vec{r}\,' \cdot \ddot{t}, \; \dot{t} = \frac{1}{|\vec{r}\,'|},$$

$$k_g = |(\vec{n}, \vec{r}\,' \cdot \dot{t}, \vec{r}\,'' \cdot \dot{t}^2 + \vec{r}\,' \cdot \ddot{t})| = |(\vec{n}, \vec{r}\,', \vec{r}\,'')| \cdot |\dot{t}|^3 =$$

$$= \frac{|(\vec{n}, \vec{r}\,', \vec{r}\,'')|}{|\vec{r}\,'|^3}.$$

Використовуючи в попередній формулі внутрішні рівняння, на підставі дериваційний рівнянь поверхні маємо, що

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_i u'^i, \; \vec{r}\,'' = \vec{r}_{ij}u'^i u'^j + \vec{r}_i u''^i = (\Gamma^k_{ij}\vec{r}_k + b_{ij}\vec{n})u'^i u'^j + \vec{r}_i u''^i =$$

$$\Gamma^k_{ij}u'^i u'^j \vec{r}_k + b_{ij}u'^i u'^j \vec{n} + \vec{r}_i u''^i,$$

$$(\vec{r}\,', \vec{r}\,') = |\vec{r}\,'|^2 = (\vec{r}_i u'^i, \vec{r}_j u'^j) = g_{ij}u'^i u'^j,$$

$$k_g = \frac{|(\vec{n}, \vec{r}_i u'^i, \Gamma^k_{ij}u'^i u'^j \vec{r}_k + b_{ij}u'^i u'^j \vec{n} + \vec{r}_i u''^i)|}{(g_{ij}u'^i u'^j)^{3/2}} =$$

$$= \frac{|(\vec{n}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)| \cdot |u'^1 \Gamma^2_{ij}u'^i u'^j - u'^2 \Gamma^1_{ij}u'^i u'^j + u'^1 u''^2 - u'^2 u''^1)|}{(g_{ij}u'^i u'^j)^{3/2}} =$$

$$= \sqrt{\Delta}\frac{|u'^1(u''^2 + \Gamma^2_{ij}u'^i u'^j) - u'^2(u''^1 + \Gamma^1_{ij}u'^i u'^j)|}{(g_{ij}u'^i u'^j)^{3/2}}, \Delta = g_{11}g_{22} - g^2_{12}.$$

З цієї формули випливає, що **геодезійна кривина поверхневої кривої є об'єктом внутрішньої геометрії поверхні.**

Нехай лінія γ на поверхні задана рівнянням $u^2 = f(u^1)$, $f \in C^{(2)}$. Тоді

$$f' = \frac{\dot{u}^2}{\dot{u}^1}, \quad f'' = \frac{\ddot{u}^2\dot{u}^1 - \ddot{u}^1\dot{u}^2}{(\dot{u}^1)^3},$$

$$k_g = \sqrt{\Delta}\frac{|f'' + \Gamma^2_{11} + (2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})f' + (\Gamma^2_{22} - 2\Gamma^1_{12})f'^2 - \Gamma^1_{22}f'^3|}{(g_{11} + 2g_{12}f' + g_{22}f'^2)^{3/2}}. \tag{3.27}$$

Зауважимо, що формула (3.27) широко використовується для обчислення геодезійної кривини лінії на поверхні, якщо за параметр взяти змінну u^1. Якщо лінію на поверхні зручно параметризувати змінною u^2 і подати лінію рівнянням $u^1 = f(u^2)$, то обчислювальну формулу для геодезійної кривини можна отримати з формули (3.27) заміною індексів 1 на 2 і 2 на 1:

$$k_g = \sqrt{\Delta}\frac{|f'' + \Gamma^1_{22} + (2\Gamma^1_{21} - \Gamma^2_{22})f' + (\Gamma^1_{11} - 2\Gamma^2_{21})f'^2 - \Gamma^2_{11}f'^3|}{(g_{22} + 2g_{21}f' + g_{11}f'^2)^{3/2}}.$$

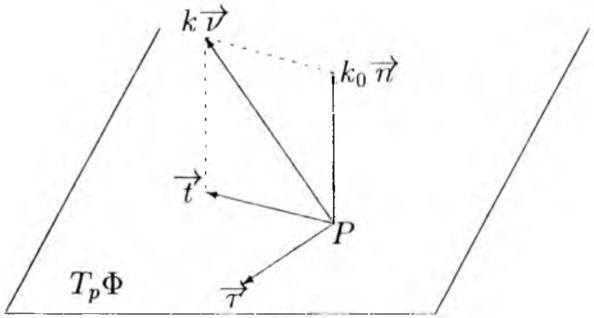
Геодезійні криві на поверхні. Геометрична ознака геодезійної кривої. Розглянемо регулярну поверхню Φ: $\vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2)$ і на ній криву $\gamma \subset \Phi$ з натуральною внутрішньою параметризацією $u^i = u^i(s)$. З формул Френе та дериваційних рівнянь поверхні випливає, що

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(u^1(s), u^2(s)), \quad \dot{\vec{r}} = \vec{\tau} = \vec{r_i} \cdot \dot{u}^i,$$

$$\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{\tau}} = k\vec{\nu} = \vec{r}_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j = (\Gamma^k_{ij}\vec{r_k} + b_{ij})\dot{u}^i\dot{u}^j + \vec{r_i} \cdot \ddot{u}^i,$$

$$k\vec{\nu} = (\ddot{u}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j)\vec{r_k} + b_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\vec{n}.$$

Вектор $\vec{t} = (\ddot{u}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j)\vec{r_k}$ називається **вектором геодезійної кривини**, а вектор $b_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\vec{n} = k_0\vec{n}$ вектором нормальної кривини поверхневої кривої $\gamma \subset \Phi$. Таким чином, для вектора кривини кривої маємо розклад $k\vec{\nu} = \vec{t} + k_0\vec{n}$ (Мал. 3.10).



Мал. 3.10.

Знайдемо довжину вектора геодезійної кривини. З побудови видно, що $\vec{t} = \lambda[\vec{\tau}, \vec{n}]$, тобто $|\vec{t}| = |\lambda|$. Домножимо

попередню векторну рівність скалярно на вектор $[\vec{\tau}, \vec{n}]$. Тоді, використовуючи кососиметричні властивості мішаного добутку знайдемо, що

$$\lambda = (\vec{t}, \vec{\tau}, \vec{n}) = ((\ddot{u}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j)\vec{r_k}, \vec{r}_l\dot{u}^l, \vec{n}) =$$

$$= (\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{n})((\ddot{u}^1 + \Gamma^1_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j)\dot{u}^2 - (\ddot{u}^2 + \Gamma^2_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j)\dot{u}^1) =$$

$$= \sqrt{\Delta}((\ddot{u}^1 + \Gamma^1_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j)\dot{u}^2 - (\ddot{u}^2 + \Gamma^2_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j)\dot{u}^1), \quad \Delta = g_{11}g_{22} - g_{12}^2.$$

Порівнюючи цю рівність з формулою для геодезійної кривини бачимо, що $|\lambda| = k_g$, тобто $k_g = |\vec{t}|$. Отже, **довжина вектора геодезійної кривини співпадає з геодезійною кривиною**.

Означення 3.12. *Лінія на поверхні називається геодезійною, якщо в кожній її точці геодезійна кривина дорівнює нулю.*

Отже, геодезійні криві характеризуються умовою

$$\ddot{u}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{u}^i \cdot \dot{u}^j = 0. \tag{3.28}$$

Оскільки параметризація кривої натуральна, то

$$(\vec{\tau}, \vec{\tau}) = 1 \Leftrightarrow (\vec{r_i}\dot{u}^i, \vec{r_j}\dot{u}^j) = 1 \Leftrightarrow g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j = 1. \tag{3.29}$$

Зведемо (3.28) до системи диференціальних рівнянь першого порядку. З цією метою введемо нову групу невідомих $\xi^i = \dot{u}^i$. Тоді з (3.28), (3.29) матимемо

$$\dot{u}^i = \xi^i, \quad \dot{\xi}^k = -\Gamma^k_{ij}\xi^i\xi^j, \tag{3.28'}$$

$$g_{ij}\xi^i\xi^j = 1. \tag{3.29'}$$

Ця система є системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку відносно невідомих функцій $u^k(s)$, $\xi^k(s)$. Для її інтегрування задамо початкові дані

$$u^k(s_0) = u^k_0, \quad \xi^k(s_0) = \xi^k_0, \quad g_{ij}(u^1_0, u^2_0)\xi^i_0\xi^j_0 = 1. \tag{3.30}$$

Вважаючи, що виконана теорема існування і єдиності розв'язків такої системи, отримаємо розв'язок $u^k(s)$, $\xi^k(s)$. Зауважимо, що для виконання цієї теореми досить виконання умови $\Gamma^k_{ij} \in C^{(1)}$. Тепер важливо переконатися в тому, що для відповідної геодезійної кривої параметризація є натуральною. Справді,

$$\frac{d}{ds}(g_{ij}\xi^i\xi^j) = \partial_k g_{ij}\xi^i\xi^j + 2g_{ij}\dot{\xi}^i\xi^j = (\Gamma_{kij} + \Gamma_{kji})\xi^k\xi^i\xi^j +$$

$$+2g_{lj}\xi^j(-\Gamma^l_{ik}\xi^i\xi^k) = 2\Gamma_{kij}\xi^i\xi^j\xi^k - 2\Gamma_{ikj}\xi^i\xi^j\xi^k \equiv 0.$$

Отже, система диференціальних рівнянь (3.28) має інтеграл $g_{ij}\xi^i\xi^j = \mathrm{const}$. Урахувавши початкові умови (3.30) знаходимо, що $g_{ij}\xi^i\xi^j = 1$.

З геометричної точки зору задання початкових умов (3.30) означає вибір на поверхні Ф точки, яка відповідає радіус-вектору $\vec{r}_0 = \vec{r}(u^1_0, u^2_0)$, та вибір поверхневого напряму $\vec{\tau}_0 = \vec{r}_i(u^1_0, u^2_0)\xi^i_0$. Взявши це до уваги, приходимо до наступного твердження.

Теорема 3.13. *Через кожну точку регулярної поверхні у даному поверхневому напрямку проходить єдина геодезійна крива цієї поверхні.*

З огляду на цю теорему можна зробити висновок про те, що **в кожній фіксованій точці поверхні сукупність всіх геодезійних кривих утворює жмуток кривих.**

Із формули $k_g = \dfrac{|(\vec{n}, \vec{r}', \vec{r}'')|}{|\vec{r}'|^3}$ випливає диференціальне рівняння геодезійних кривих при довільній параметризації кривої: $(\vec{n}, \vec{r}', \vec{r}'') = 0$, тобто

$$u''v - v''u' + (\Gamma^1_{11}u'^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma^1_{22}v'^2)v' -$$

$$-(\Gamma^2_{11}u'^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}v'^2)u' = 0.$$

Якщо ж шукане рівняння геодезійної лінії має вигляд $u^2 = f(u^1)$, то диференціальне рівняння для відшукання f є таким (див. (3.27)):

$$f'' = -\Gamma^2_{11} - (2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})f' - (\Gamma^2_{22} - 2\Gamma^1_{12})f'^2 + \Gamma^1_{22}f'^3. \quad (3.31)$$

Теорема 3.14. *Поверхнева крива є геодезійною тоді і тільки тоді, коли її стична площина у кожній звичайній точці є нормальною площиною поверхні.*

Доведення. Із диференціального рівняння $(\vec{n}, \vec{r}', \vec{r}'') = 0$ випливає, що поверхнева крива є геодезійною тоді і лише тоді, коли вздовж неї вектори $\vec{n}$, $\vec{r}'$, $\vec{r}''$ компланарні. Оскільки вектори $\vec{r}'$, $\vec{r}''$ належать стичній площині кривої, то зазначена компланарність означає, що їй належить нормальний вектор $\vec{n}$ поверхні і тому вона є також нормальною площиною поверхні.

Теорема доведена.

Як приклад, на площині візьмемо її параметризацію $x = u^1$, $y = u^2$, $z = 0$. Тоді $g_{11} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = 0$, $\Gamma_{ijk} = 0$, $\Gamma^k_{ij} = 0$ і система (3.28) набуде вигляду $\ddot{u}^k = 0$. Вона легко інтегрується: $u^k = a^k s + b^k$; a^k, b^k – const. Оскільки $\xi^k = \dot{u}^k = a^k$, $g_{ij}\xi^i\xi^j = (a^1)^2 + (a^2)^2 = 1$, то в площині рівняння геодезійних кривих при натуральній параметризації мають вигляд: $x^1 = a^1 s + b^1$, $y = a^2 s + b^2$, тобто вони є прямими, які проходять через точку (b^i) у напрямку орта (a^i).

На сфері її геодезійні криві можна знайти без інтегрування. Справді, якщо взяти нормальний переріз сфери, то в будь-якому напрямку це буде велике коло. Вздовж великого кола стична площина є нормальною площиною сфери. На підставі теореми про геометричну ознаку геодезійних кривих, великі кола є геодезійними кривими сфери. У кожній точці сфери ці криві утворюють жмуток і, отже, на підставі теореми 3.13 робимо висновок, що інших геодезійних кривих на сфері не існує.

Сформулюємо тепер без доведення відому теорему Гаусса-Боне.

Теорема 3.15. *Нехай на поверхні Φ визначено область F, обмежену кусково-гладким замкненим контуром, що складається з дуг $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, які утворюють в спільних кінцях кути $\psi_1, \ldots, \psi_n$. Тоді справджується рівність*

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} k_g ds + \sum_{k=1}^{n} (\pi - \psi_k) = 2\pi - \iint_F K d\sigma, \qquad (3.32)$$

де k_g – геодезійна кривина контура γ, K – повна кривина поверхні Φ, $d\sigma$ – елемент площі поверхні.

Наслідок 3.3. *n-кутник, утворений на поверхні геодезійними лініями, називається геодезійним n-кутником. Сума внутрішніх кутів криволінійного геодезійного n-кутника на поверхні з повною кривиною K обчислюється за формулою*

$$\psi_1 + \ldots + \psi_n = (n-2)\pi + \iint_F K d\sigma.$$

Наслідок 3.4. *Для геодезійних трикутників рівність (3.32) набуває вигляду*

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = \pi + \iint_F K d\sigma.$$

Отже, сума внутрішніх кутів геодезійного трикутника:
а) більша π на поверхні, де $K > 0$;
б) менша π на поверхні, де $K < 0$;
в) дорівнює π на поверхні, де $K = 0$.

Зазначимо, що на сфері має місце випадок а), на псевдосфері – випадок б) і на площині – випадок в).

Як відомо, властивість б) характерна для площини Лобачевського. Виявляється, що площина Лобачевського допускає ізометричне відображення на поверхню сталої від'ємної повної кривини (наприклад, псевдосферу). Цей факт вперше встановив італійський математик Бельтрамі в 1868 році, побудувавши таким чином модель площини Лобачевського.

§3.10. Сферичне зображення поверхні. Теорема Гаусса. Третя квадратична форма поверхні

Розглянемо регулярну поверхню Φ: $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$.

Означення 3.13. *Сферичним зображенням поверхні Φ називається годограф вектор-функції* $\vec{n}(u,v) = \dfrac{[\vec{r_u}, \vec{r_v}]}{|[\vec{r_u}, \vec{r_v}]|}$.

Отже, якщо S – сфера одиничного радіуса з центром у початку координат, то довільній точці $P \in \Phi$ з криволінійними координатами ставиться у відповідність точка на S з радіус-вектором $\vec{n}(u,v)$. Таке відображення ρ: $\Phi \to S$ називається **сферичним відображенням даної поверхні.**

У загальному випадку при сферичному відображенні образом поверхневої області буде сферична область, але є і винятки. Наприклад, сферичним образом площини є точка, прямого кругового циліндра – коло.

Візьмемо поверхневий напрям (d): $\{du, dv\}$, $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r_v} dv$ і відповідний йому сферичний напрям $d\vec{n} = \vec{n}_u du + \vec{n}_v dv$. Їхній скалярний добуток

$$(d\vec{r}, d\vec{n}) = -(Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2) = -II(d).$$

Отже, $d\vec{r} \perp d\vec{n} \Leftrightarrow II(d) = 0$, тобто, відповідні напрями ортогональні тоді і тільки тоді, коли поверхневий напрям (d) є асимптотичним.

Використовуючи дериваційні рівняння поверхні: $\vec{n}_i = -b_i^j \vec{r}_j$, $b_i^j = g^{jk} b_{ik}$, $g^{jk} g_{ik} = \delta_i^j$, а також формулу Гаусса

$$K = \frac{b}{\Delta} = \frac{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2},$$

знайдемо векторний добуток $[\vec{n}_u, \vec{n}_v]$:

$$[\vec{n}_u, \vec{n}_v] = [-b_1^j \vec{r}_j, -b_2^j \vec{r}_j] = [b_1^1 \vec{r}_1 + b_1^2 \vec{r}_2, b_2^1 \vec{r}_1 + b_2^2 \vec{r}_2] =$$

$$= [\vec{r}_1, \vec{r}_2](b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1) = [\vec{r}_1, \vec{r}_2](g^{1k} b_{1k} g^{2s} b_{2s} - g^{2k} b_{2k} g^{1s} b_{2s}) =$$

$$= [\vec{r}_1, \vec{r}_2]\{(g^{11} b_{11} + g^{12} b_{12})(g^{21} b_{21} + g^{22} b_{22}) - (g^{21} b_{11} + g^{22} b_{12}) \times$$

$$\times (g^{11} b_{21} + g^{12} b_{22})\} = [\vec{r}_1, \vec{r}_2](b_{11} b_{22} - b_{12}^2)(g^{11} g^{22} - (g^{12})^2) =$$

$$= \frac{b}{\Delta}[\vec{r}_1, \vec{r}_2] = K \cdot [\vec{r}_1, \vec{r}_2].$$

Як відомо, площа елементарної поверхневої області D дорівнює $d\sigma = |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| du dv$. Аналогічно, для площі її сферичного образу $\widehat{D}$: $d\widehat{\sigma} = |[\vec{n}_u, \vec{n}_v]| du dv$. Отже, $\frac{d\widehat{\sigma}}{d\sigma} = |K|$. Звідси випливає, що площу $\sigma(\widehat{D})$ сферичного образу $\widehat{D}$ поверхневої області D необхідно шукати за формулою:

$$\widehat{\sigma}(\widehat{D}) = \iint_D |K| d\sigma,$$

де $d\sigma = \sqrt{EG - F^2} du dv$ – елемент площі на Φ.

Використовуючи теорему про середнє для інтеграла $\iint_D |K| d\sigma$, дістаємо інтерпретацію модуля гауссової кривини $|K|$ у заданій точці P як границю відношення

$$|K| = \lim_{\sigma \to P} \frac{\widehat{\sigma}}{\sigma}$$

площі $\widehat{\sigma}$ на одиничній сфері S до відповідної площі σ області поверхні, коли ця область стягується до точки P (це твердження складає зміст теореми Гаусса.)

Квадратичну форму

$$III(d) \equiv (d\vec{n}, d\vec{n}) = e_{ij} du^i du^j, \quad e_{ij} = (\vec{n}_i, \vec{n}_j),$$

називають **третьою квадратичною формою поверхні**. Виявляється, що вона цілком визначається через першу і другу квадратичні форми даної поверхні.

Справді, візьмемо деяку поверхневу криву γ: $u^i = u^i(s)$ з натуральним параметром. Позначимо через $\vec{\tau}_1 \equiv \frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|}$, $\vec{\tau}_2 \equiv \frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|}$ координатні орти поверхні. Тоді для дотичного орта поверхні маємо

$$\dot{\vec{r}} \equiv \vec{\tau} = \vec{r}_u \dot{u} + \vec{r}_v \dot{v} = \sqrt{E} \dot{u} \vec{\tau}_1 + \sqrt{G} \dot{v} \vec{\tau}_2. \tag{3.32}$$

Будемо вважати, що координатна сітка поверхні складається з ліній кривини. У цьому випадку $F = M = 0$, $\vec{\tau}_1 \perp \vec{\tau}_2$. Введемо до розгляду кут θ – кут між векторами $\vec{\tau}$ та $\vec{\tau}_1$. Тоді

$$\vec{\tau} = \cos\theta \cdot \vec{\tau}_1 + \sin\theta \cdot \vec{\tau}_2 \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{E}\dot{u}, \sin\theta = \sqrt{G}\dot{v}.$$

З формул для повної та сферичної кривини

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{GL + EN - 2MF}{2(EG - F^2)}$$

випливає, що головні кривини поверхні, віднесеної до ліній кривини, обчислюються за формулою

$$k_1 = \frac{L}{E}, \quad k_2 = \frac{N}{G}.$$

Далі розглянемо криву $\widehat{\gamma}$: $\vec{n} = \vec{n}(u(s), v(s)) \subset S$, яка є сферичним зображенням кривої γ на S. Оскільки $|\vec{n}| \equiv 1$, то $\dot{\vec{n}} \perp \vec{n} \Rightarrow \dot{\vec{n}} = a_1\vec{\tau_1} + a_2\vec{\tau_2}$. З іншого боку, $\dot{\vec{n}} = \vec{n}_u\dot{u} + \vec{n}_v\dot{v}$. Тоді

$$a_1 = (\dot{\vec{n}}, \vec{\tau_1}) = \left(\vec{n}_u\dot{u} + \vec{n}_v\dot{v}, \frac{\vec{r_u}}{\sqrt{E}}\right) = \frac{-L\dot{u} - M\dot{v}}{\sqrt{E}} =$$

$$= -\frac{L}{E}\cos\theta = -k_1\cos\theta.$$

Аналогічно, $a_2 = -k_2\sin\theta$ і тому

$$\dot{\vec{n}} = -k_1\cos\theta\vec{\tau_1} - k_2\sin\theta\vec{\tau_2}. \tag{3.33}$$

Помножимо (3.32) відповідно на k_1, k_2 і додамо до (3.33). У результаті одержимо, що

$$k_1\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{n}} = (k_1 - k_2)\sin\theta\vec{\tau_2}, \quad k_2\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{n}} = (k_1 - k_2)\cos\theta\vec{\tau_1}.$$

Отже, $\dot{\vec{n}} + k_1\dot{\vec{r}} \parallel \vec{\tau_2}$, $\dot{\vec{n}} + k_2\dot{\vec{r}} \parallel \vec{\tau_1}$; тоді $(\dot{\vec{n}} + k_1\dot{\vec{r}}) \perp (\dot{\vec{n}} + k_2\dot{\vec{r}})$, тобто $(\dot{\vec{n}} + k_1\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{n}} + k_2\dot{\vec{r}}) = 0$, або

$$\left(\frac{d\vec{n}}{ds} + k_1\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d\vec{n}}{ds} + k_2\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = 0 \Rightarrow (d\vec{n} + k_1 d\vec{r}, d\vec{n} + k_2 d\vec{r}) =$$

$$= 0 \Rightarrow (d\vec{n}, d\vec{n}) + (k_1 + k_2)(d\vec{r}, d\vec{n}) + k_1k_2(d\vec{r}, d\vec{r}) = 0 \Rightarrow$$

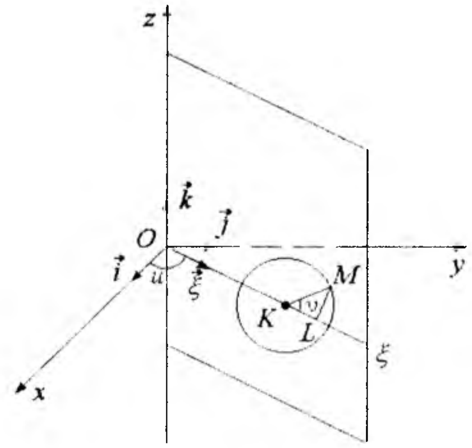
$$III(d) = 2HII(d) - K\cdot I(d).$$

Таким чином, для коефіцієнтів цих трьох форм існує залежність

$$e_{ij} = 2Hb_{ij} - kg_{ij}.$$

Приклади розв'язування задач

1. Поверхня, утворена обертанням кола навколо прямої, яка лежить у площині цього кола і його не перетинає, називається тором. Скласти параметричні рівняння тора.



Розв'язання. Якщо $a > 0$ – радіус кола (меридіана) тора як поверхні обертання, то за вісь обертання приймемо вісь аплікат, а основу перпендикуляра, опущеного з центра кола (меридіана) на вісь обертання, за початок прямокутної системи координат $(OXYZ)$. Віддаль від центра кола (меридіана) до вісі обертання називається **радіусом** тора. Цю віддаль позначимо через b. З означення тора випливає, що $b > a$. Число $\varepsilon = \frac{a}{b}$ називається **ексцентриситетом** тора. Нехай координатна вісь Ox утворює з площиною меридіана кут u, $0 \leq u < 2\pi$. Тоді координатна площина XOY перетинає площину меридіана по прямій ξ з одиничним напрямним вектором $\vec{\xi} = \cos u\cdot\vec{i} + \sin u\cdot\vec{j}$. Введемо позначення: K – центр кола (меридіана), M – довільна точка цього кола, L – ортогональна проекція точки M на пряму ξ, v – величина кута MKL, $0 \leq v < 2\pi$. Тоді з векторного трикутника OLM маємо $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LM}$. Оскільки точка M – довільна точка довільного меридіана тора, то $\overrightarrow{OM}$ є радіус-вектором довільної точки тора. Отже, тор є годографом вектор-функції $\overrightarrow{OM}$. Очевидно, що $|\overrightarrow{OL}| = b + a\cos v$, $|\overrightarrow{LM}| = |a\sin v|$ і тому $\overrightarrow{OL} = |\overrightarrow{OL}|\overrightarrow{\xi}$, $\overrightarrow{LM} = a\sin v\cdot\overrightarrow{k}$. Таким чином,

$$\overrightarrow{OM} = (b + a\cos v)(\cos u\cdot\overrightarrow{i} + \sin u\cdot\overrightarrow{j}) + a\sin v\cdot\overrightarrow{k},$$

і рівняння

$$\left[\begin{array}{l} x = (b + a\cos v)\cos u, \\ y = (b + a\cos v)\sin u, \\ z = a\sin v, \end{array}\right.$$

є параметричними рівняннями тора. Тор є годографом вектор-функції

$$\overrightarrow{r}(u, v) = b(1 + \varepsilon\cos v)\cos u\cdot\overrightarrow{i} + b(1 + \varepsilon\cos v)\sin u\cdot\overrightarrow{j} + $$
$$+ b\varepsilon\sin v\cdot\overrightarrow{k}. \qquad (3.34)$$

Якщо покласти в (3.34) $v = c = \text{const}$, то отримаємо u-лінії на торі. Вони є годографами вектор-функції

$$\overrightarrow{r}(u, c) = b(1+\varepsilon\cos c)\cos u\,\overrightarrow{i} + b(1+\varepsilon\cos c)\sin u\,\overrightarrow{j} + b\varepsilon\sin c\,\overrightarrow{k}.$$

v-лінії на торі – це його меридіани – годографи вектор-функції

$$\overrightarrow{r}(c, v) = b(1+\varepsilon\cos v)\cos c\cdot\overrightarrow{i} + b(1+\varepsilon\cos v)\sin c\cdot\overrightarrow{j} + b\varepsilon\sin v\cdot\overrightarrow{k}.$$

Зазначимо, що u-лінії на торі – це паралелі тора – кола з центрами на вісі обертання. Меридіани і паралелі тора – кола, розміщені у перпендикулярних площинах.

2. Скласти рівняння псевдосфери – поверхні обертання трактриси навколо її асимптоти та знайти її особливі точки.

Розв'язання. Параметричні рівняння трактриси мають вигляд

$$x = a(\ln\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha), \quad y = a\sin\alpha, 0 < \alpha < \pi.$$

Точка $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ на трактрисі є подвійною особливою точкою, а координатна вісь Ox – її асимптотою. Тоді параметричні рівняння поверхні, утвореної обертанням трактриси навколо вісі Ox мають вигляд

$$\begin{array}{l} x = a(\ln\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha), \\ y = a\sin\alpha\sin\beta, \\ z = a\sin\alpha\cos\beta, \quad 0 \le \beta < 2\pi. \end{array}$$

Отже, псевдосфера є годографом вектор-функції

$$\overrightarrow{r}(\alpha, \beta) = \{a(\ln\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha); a\sin\alpha\sin\beta; a\sin\alpha\cos\beta\}.$$

Знайдемо $\dfrac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\alpha}$ та $\dfrac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\beta}$:

$$\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\alpha} = \{a\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}; a\cos\alpha\sin\beta; a\cos\alpha\cos\beta\},$$

$$\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\beta} = \{0; a\sin\alpha\cos\beta; -a\sin\alpha\sin\beta\}.$$

Тоді

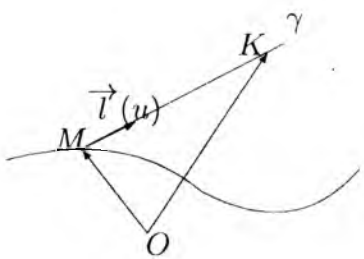
$$\left[\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\alpha}, \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\beta}\right] = \{-a^2\sin\alpha\cos\alpha; a^2\cos^2\alpha\sin\beta; a^2\cos^2\alpha\cos\beta\}.$$

Звідси випливає, що $\left.\left[\dfrac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\alpha}, \dfrac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\beta}\right]\right|_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = \overrightarrow{0}$. Годографом вектор-функції $\overrightarrow{r}\left(\dfrac{\pi}{2}, \beta\right) = \{0; a\sin\beta; \cos\beta\}$ є коло радіуса

a у площині YOZ з центром у початку координат. Це коло є особливою кривою на псевдосфері. Оскільки особлива лінія на псевдосфері утворена внаслідок обертання точки звороту меридіана (трактриси), то її називають **ребром звороту псевдосфери**.

3. Нехай $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$ – деяка крива, віднесена до параметра u, $\vec{l} = \vec{l}(u)$ – одиничний напрямний вектор прямої γ, яка перетинає задану криву. Лінійчатою поверхнею з напрямною, яка є годографом векторфункції $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$, і з твірною з напрямним вектором $\vec{l}(u)$, називається геометричне місце прямих γ. Скласти рівняння лінійчатої поверхні та знайти напрямний вектор нормалі у довільній її точці.

Розв'язання.



Якщо $\overrightarrow{OM} = \vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$, де O – полюс, а M – довільна точка напрямної, то $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MK}$, де K – довільна точка твірної γ. Точку K можна вважати довільною точкою лінійчатої поверхні, яка є годографом шуканої векторфункції $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$. Отже, рівність $\vec{r}(u,v) = \vec{\rho}(u) + v\,\vec{l}(u)$ – векторно-параметричне рівняння лінійчатої поверхні; при цьому

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \vec{\rho}\,' + v\,\vec{l}\,', \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{l}, \quad \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right] = [\vec{\rho}\,' + v\,\vec{l}\,', \vec{l}\,] =$$

$$= [\vec{\rho}\,', \vec{l}\,] + v[\vec{l}\,', \vec{l}\,], \quad v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Оскільки вектори $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ і $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ колінеарні дотичній площині

лінійчатої поверхні, то вектор $\left[\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right]$ є напрямним вектором нормалі лінійчатої поверхні у її довільній точці (u,v).

Зауваження 3.4. Рівність $u = \text{const}$ визначає на лінійчатій поверхні довільну прямолінійну твірну. Вздовж твірної $u = \text{const}$ вектори $[\vec{\rho}\,', \vec{l}\,]\Big|_{u=\text{const}}$, $[\vec{l}\,', \vec{l}\,]\Big|_{u=\text{const}}$ є векторними сталими. Прямолінійна твірна лінійчатої поверхні, вздовж якої векторні сталі $[\vec{\rho}\,', \vec{l}\,]\Big|_{u=\text{const}}$, $[\vec{l}\,', \vec{l}\,]\Big|_{u=\text{const}}$ колінеарні, називається **торсовою**. Лінійчата поверхня, усі твірні якої торсові, називається **торсом**. **Скісною** лінійчатою поверхнею називається така лінійчата поверхня, усі твірні якої не торсові.

4. Скласти рівняння лінійчатої поверхні, твірні якої паралельні площині $y - z = 0$ і перетинають параболи $y^2 = 2px$, $z = 0$ та $z^2 = -2px$, $y = 0$. Чи є ця лінійчата поверхня торсом?

Розв'язання. Довільна твірна шуканої лінійчатої поверхні перетинає параболу γ_1: $y^2 = 2px$, $z = 0$ у точці $M_1(\frac{u^2}{2p}; u; 0)$, а параболу γ_2: $z^2 = -2px$, $y = 0$ у точці $M_2(-\frac{w^2}{2p}; 0; w)$. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \left\{-\dfrac{w^2+u^2}{2p}; -u; w\right\}$ є напрямним вектором прямолінійної твірної, якщо він колінеарний площині $y - z = 0$. Умова колінеарності має вигляд $-u - w = 0$. Отже,

$$\vec{l}(u) = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|} = \left\{-\frac{u}{\sqrt{u^2+2p^2}}; -\frac{p}{\sqrt{u^2+2p^2}}; -\frac{p}{\sqrt{u^2+2p^2}}\right\}.$$

Приймемо γ_1 за напрямну; тоді (див. приклад 3)

$$\vec{r}(u,v) = \left\{\frac{u^2}{2p}; u; 0\right\} +$$

$$+v\left\{-\frac{u}{\sqrt{u^2+2p^2}};-\frac{p}{\sqrt{u^2+2p^2}};-\frac{p}{\sqrt{u^2+2p^2}}\right\}\equiv$$

$$\equiv\vec{\rho}(u)+v\vec{l}(u)=$$

$$=\left\{\frac{u^2}{2p}-\frac{uv}{\sqrt{u^2+2p^2}};u-\frac{vp}{\sqrt{u^2+2p^2}};-\frac{vp}{\sqrt{u^2+2p^2}}\right\}.$$

Таким чином, шукана лінійчата поверхня має такі параметричні рівняння:

$$x=\frac{u^2}{2p}-\frac{uv}{\sqrt{u^2+2p^2}},\quad y=u-\frac{vp}{\sqrt{u^2+2p^2}},\quad z=-\frac{vp}{\sqrt{u^2+2p^2}}.$$

Якщо виключити параметри u та v, то отримаємо рівняння $y^2-z^2=2px$, яке визначає гіперболічний параболоїд з вершиною у початку координат та віссю симетрії Ox.

Оскільки $\vec{\rho}(u)=\left\{\frac{u^2}{2p};u;0\right\}$, то $\vec{\rho}'=\left\{\frac{u}{p};1;0\right\}$, а $\vec{l}'=\{-2p;u;u\}\frac{p}{(u^2+2p^2)^{3/2}}$. При $u=c=\text{const}$ маємо:

$$[\vec{\rho}',\vec{l}]\Big|_{u=c}=\{-p;c;0\}\frac{1}{\sqrt{c^2+2p^2}},$$

$$[\vec{l}',\vec{l}]\Big|_{u=c}=\left\{0;-\frac{p}{c^2+2p^2};\frac{p}{c^2+2p^2}\right\}.$$

Вектори $[\vec{\rho}',\vec{l}]\Big|_{u=c}$ та $[\vec{l}',\vec{l}]\Big|_{u=c}$ не колінеарні, отже, гіперболічний параболоїд є скісною лінійчатою поверхнею.

5. Довести, що лінійчата поверхня, утворена дотичними вздовж довільної гладкої кривої, є торсом.

Розв'язання. Нехай γ – довільна гладка крива, яка є годографом вектор-функції $\vec{\rho}=\vec{\rho}(u)$. Тоді її можна віднести до натурального параметра u, і, отже, $|\vec{\rho}'|=1$. Рівняння лінійчатої поверхні дотичних вздовж γ набуває вигляду

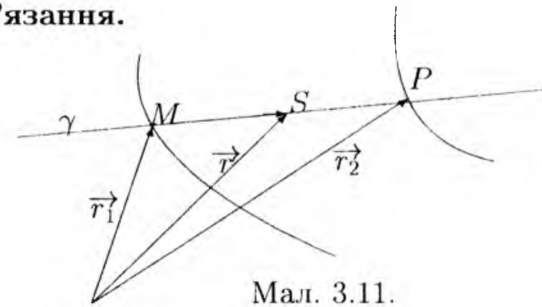
$$\vec{r}=\vec{r}(u,v)=\vec{\rho}(u)+v\vec{\rho}'(u).$$

Вздовж довільної прямолінійної твірної $u=c=\text{const}$ вектори $[\vec{\rho}',\vec{\rho}']\Big|_{u=c}=\vec{0}$ і $[\vec{\rho}'',\vec{\rho}']\Big|_{u=c}$ колінеарні і тому ця твірна торсова.

Зауваження 3.5. Торси, утворені дотичними до гладких кривих, називаються **тангенційними**. Можна показати, що до торсів відносяться лише циліндричні та конічні поверхні, площини та тангенційні торси. Лінійчаті поверхні, які містять торсові і не торсові твірні, називаються **загальними лінійчатими поверхнями.**

6. Циліндроїдом називається поверхня, утворена прямими, які паралельні деякій площині і які перетинають задані криві (напрямні). Скласти рівняння циліндроїда, якщо його напрямними є параболи $y^2=2px$, $z=0$ та $z^2=-2px$, $y=0$, а твірні паралельні площині $y-z=0$.

Розв'язання.



Мал. 3.11.

Нехай M, P – точки, в яких пряма γ перетинає задані параболи, S – довільна точка цієї прямої (див. Мал.

3.11). Із означення циліндроїда випливає, що для того, щоб скласти рівняння цієї поверхні, досить знати закон зміни радіус-вектора $\overrightarrow{r}$ точок $S \in \gamma$, тобто знати векторно-параметричне рівняння прямої γ.

Нехай $\overrightarrow{r_1}$, $\overrightarrow{r_2}$ – радіус-вектор точок M, P відповідно (точка M належить параболі $y^2 = 2px$, $z = 0$; точка P належить параболі $z^2 = 2px$, $y = 0$). Тоді $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{MS}$. Напрямний вектор $\overrightarrow{MS}$ прямої γ колінеарний вектору $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$, тобто $\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{MS} = \lambda \overrightarrow{MP} = \lambda(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1})$. Таким чином,

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} + \lambda(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}), \quad \lambda \in \mathbb{R}, -$$

векторно-параметричне рівняння прямої γ (або шуканого циліндроїда).

Запишемо параметричні рівняння парабол:

$$\overrightarrow{r_1} = \left\{\frac{u^2}{2p}; u; 0\right\}, \quad \overrightarrow{r_2} = \left\{-\frac{v^2}{2}; 0; v\right\}.$$

Тоді

$$\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} = \left\{-\frac{u^2 + v^2}{2p}; -u; v\right\}.$$

Згідно з умовою, вектор $\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$ колінеарний площині $y - z = 0$, тобто, ортогональний нормальному вектору $\overrightarrow{a} = \{0; 1; -1\}$ цієї площини. Отже,

$$0 = (\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{a}) = -u - v,$$

або $v = -u$. Тоді $\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} = \left\{-\frac{u^2}{p}; -u; -u\right\}$, а рівняння циліндроїда набуває вигляду

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} + \lambda(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}) = \frac{u^2}{2p}\overrightarrow{i} + u\overrightarrow{j} - \lambda\left(\frac{u^2}{p}\overrightarrow{i} + u\overrightarrow{j} + u\overrightarrow{k}\right) =$$

$$= \frac{u^2}{2p}(1 - 2\lambda)\overrightarrow{i} + u(1 - \lambda)\overrightarrow{j} - \lambda u\overrightarrow{k},$$

тобто

$$x = \frac{u^2}{2p}(1 - 2\lambda), \quad y = u(1 - \lambda), \quad z = -\lambda u.$$

Із останніх співвідношень виключимо параметри u, λ:

$$y^2 = (u - \lambda u)^2 = u^2 - 2\lambda u^2 + \lambda^2 u^2,$$

$$y^2 - z^2 = u^2 - 2\lambda u^2 = u^2(1 - 2\lambda),$$

$$2px = u^2(1 - 2\lambda).$$

Звідси дістаємо, що $y^2 - z^2 = 2px$ – рівняння циліндроїда в декартових координатах. Отже, у даному випадку шукана поверхня – гіперболічний параболоїд.

7. З'ясувати, чи є на торі особливі точки.

Розв'язання. Центр тора буде особливою точкою на торі, якщо припустити, що $a = b$. Справді, при $a = b$ маємо $\varepsilon = 1$ і

$$\overrightarrow{r_u} = \{-b(1 + \cos v)\sin u; b(1 + \cos v)\cos u; b\sin v\};$$

$$\overrightarrow{r_v} = \{-b\sin v\cos u; -b\sin v\sin u; b\cos v\}.$$

Тому

$$[\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}] = \{b^2(\cos u\cos v + \cos u\cos^2 v + \sin u\sin^2 v);$$

$$b^2(\sin u\cos v + \sin u\cos^2 v - \cos u\sin^2 v); b^2\sin v(1 + \cos v)\}.$$

Отже, $[\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}]\Big|_{\substack{u=0\\v=\pi}} = \overrightarrow{0}$. Початок координат на торі з ексцентриситетом, який рівний одиниці, є точкою самодотику поверхні тора.

8. Знайти обвідну та ребро звороту сім'ї сфер сталого радіуса R, центри яких належать колу $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$.

Розв'язання. Запишемо параметричні рівняння заданого кола: $x = r\cos\mu$, $y = r\sin\mu$, $z = 0$. Тоді рівняння однопараметричної сім'ї сфер має вигляд

$$(x - r\cos\mu)^2 + (y - r\sin\mu)^2 + z^2 = R^2.$$

Розглянемо функцію

$$\varphi(x, y, z, \mu) = (x - r\cos\mu)^2 + (y - r\sin\mu)^2 + z^2 - R^2.$$

Рівняння дискримінантної поверхні сім'ї сфер

$$\begin{cases} (x - r\cos\mu)^2 + (y - r\sin\mu)^2 + z^2 = R^2, \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

після виключення параметра сім'ї α при $R < r$ зводиться до вигляду

$$(R^2 - x^2 - y^2 - z^2 - r^2)^2 = 4r^2(x^2 + y^2).$$

Це рівняння тора. Якщо ексцентриситет тора $\varepsilon \in (0, 1)$, то тор особливих точок немає. Отже, обвідною вказаної сім'ї сфер буде тор. За умови $R > r$ ребро звороту сім'ї сфер вироджується у пару точок $(0; 0; \pm\sqrt{R^2 - r^2})$. Якщо $R = r$, то ребро вироджується в точку $(0; 0; 0)$. При $R < r$ ребро звороту не існує.

9. Знайти обвідну поверхню і характеристики сім'ї кругових циліндрів сталого радіуса r

$$(x - \mu)^2 + y^2 = r^2.$$

Розв'язання. Нехай $\varphi(x, y, z, \mu) = (x - \mu)^2 + y^2 - r^2$. Тоді $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\mu} = -2(x - \mu)$. Рівняння дискримінантної поверхні має вигляд

$$\begin{cases} (x - \mu)^2 + y^2 = r^2, \\ x = \mu, \end{cases} \quad \text{або } y^2 - r^2 = 0.$$

Це пара площин $y = \pm r$, паралельних координатній площині XOZ. Знайдемо особливі точки сім'ї циліндрів:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2(x - \mu) = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

Особливих точок немає. Отже, дискримінантна поверхня збігається з обвідною.

Характеристиками цієї сім'ї циліндрів є прямі $\begin{cases} x = c, \\ y = r, \end{cases}$ $\begin{cases} x = c, \\ y = -r, \end{cases}$ які належать обвідній і паралельні координатній вісі Oz (вісі симетрії кругових циліндрів сім'ї). Ребра звороту ця сім'я циліндрів не має, оскільки $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2} = 2 \neq 0$.

10. Знайти характеристики та ребро звороту однопараметричної сім'ї стичних площин заданої кривої.

Розв'язання. Якщо $\vec{r} = \vec{r}(s)$ – рівняння заданої кривої γ, то рівняння стичної площини кривої γ у її довільній точці $M(s)$ має вигляд

$$(\vec{X} - \vec{r}(s), \vec{\beta}(s)) = 0,$$

де $\vec{X}$ – радіус-вектор довільної точки стичної площини. Очевидно, що сукупність стичних площин кривої γ утворює однопараметричну сім'ю площин. Для отримання інформації про характеристики сім'ї стичних площин вздовж γ, розглянемо систему

$$\begin{cases} (\vec{X} - \vec{r}(s), \vec{\beta}(s)) = 0, \\ (\vec{X} - \vec{r}(s), \dot{\vec{\beta}}(s)) - (\dot{\vec{r}}(s), \vec{\beta}(s)) = 0. \end{cases}$$

Оскільки $\dot{\vec{r}}(s) \perp \vec{\beta}(s)$, то $(\dot{\vec{r}}(s), \vec{\beta}(s)) = 0$ і $(\vec{X} - \vec{r}(s), k\vec{\nu}) = 0$. Отже, вектор $\vec{X} - \vec{r}(s)$ для всіх s вздовж кривої γ перпендикулярний до $\vec{\beta}(s)$ та $\vec{\nu}(s)$. Тому він колінеарний вектору $\vec{\tau}(s)$. Таким чином, характеристиками сім'ї стичних площин просторової (не плоскої) кривої є дотичні прямі до кривої γ.

Приєднаємо до розглянутої системи рівнянь рівняння, отримане диференціюванням тотожності $(\vec{X} - \vec{r}(s), \vec{\nu}(s)) = 0$:

$$(\vec{X} - \vec{r}(s), \chi(s)\vec{\beta}(s) - k(s)\vec{\tau}(s)) = 0.$$

Звідси випливає, що $(\vec{X} - \vec{r}(s), \vec{\tau}(s)) = 0$, бо $k(s) \neq 0$. Тому $\vec{X} - \vec{r}(s) = \vec{0}$, тобто ребром звороту сім'ї стичних площин вздовж просторової кривої є сама ця просторова крива.

11. Довести, що обвідною однопараметричної сім'ї площин є область або на циліндрічній поверхні, або на конічній поверхні, або на тангенційному торсі.

Розв'язання. Розглянемо рівняння сім'ї площин у вигляді $(\vec{r}(u, v), \vec{n}(\mu)) + a(\mu) = 0$, де $|\vec{n}(\mu)| = 1$, функції $\vec{n}(\mu)$ та $a(\mu)$ двічі неперервно диференційовні і $\dfrac{d\vec{n}}{d\mu} \neq \vec{0}$, $\dfrac{d^2\vec{n}}{d\mu^2} \neq \vec{0}$ (μ – параметр сім'ї площин).

Обвідна цієї сім'ї площин визначається рівнянням

$$(\vec{r}, \vec{n}) + a = 0, \quad \left(\vec{r}, \frac{d\vec{n}}{d\mu}\right) + \frac{da}{d\mu} = 0.$$

При фіксованому μ ці рівняння визначають пряму $b(\mu)$. Отже, обвідна поверхня однопараметричної сім'ї площин утворюється прямою $b(\mu)$.

Розглянемо площини

$$(\vec{r}, \vec{n}) + a = 0, \quad \left(\vec{r}, \frac{d\vec{n}}{d\mu}\right) + \frac{da}{d\mu} = 0, \quad \left(\vec{r}, \frac{d^2\vec{n}}{d\mu^2}\right) + \frac{d^2a}{d\mu^2} = 0,$$

перші дві з яких визначають обвідну сім'ї площин.

Якщо ця трійка площин не має спільних точок при жодному значенні μ, то $(\vec{n}, \vec{b}) = 0$, $\left(\dfrac{d\vec{n}}{d\mu}, \vec{b}\right) = 0$, $\left(\dfrac{d^2\vec{n}}{d\mu^2}, \vec{b}\right) = 0$, де $\vec{b} = \vec{b}(\mu)$ – одиничний напрямний вектор прямої $b(\mu)$. Внаслідок диференціювання цих тотожностей маємо $\left(\dfrac{d\vec{n}}{d\mu}, \vec{b}\right) + \left(\vec{n}, \dfrac{d\vec{b}}{d\mu}\right) = 0$, $\left(\dfrac{d^2\vec{n}}{d\mu^2}, \vec{b}\right) + \left(\dfrac{d\vec{n}}{d\mu}, \dfrac{d\vec{b}}{d\mu}\right) = 0$. Отже, $\left(\vec{n}, \dfrac{d\vec{b}}{d\mu}\right) = 0$ і $\left(\dfrac{d\vec{n}}{d\mu}, \dfrac{d\vec{b}}{d\mu}\right) = 0$. Оскільки $\left(\dfrac{d\vec{b}}{d\mu}, \vec{b}\right) = 0$, то $\dfrac{d\vec{b}}{d\mu} = \vec{0}$ і вектор-функція $\vec{b} = \vec{b}(\mu)$ не залежить від μ. У цьому випадку всі прямі $b(\mu)$ паралельні між собою і тому обвідна буде областю на циліндричній поверхні.

Якщо ж розглядувана трійка площин утворює власну в'язку з центром у деякій точці S при всіх заданих значеннях μ, то всі прямі $b(\mu)$ містять точку S і тому обвідна є областю на конічній поверхні.

Якщо ця трійка площин перетинається у точці $S(\mu)$, розміщення якої у просторі суттєво залежить від μ (у розумінні, що якщо $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OS}(\mu)$ – радіус-вектор точки S, то $\dfrac{d\overrightarrow{OS}(\mu)}{d\mu} \neq \vec{0}$), то

$$(\overrightarrow{OS}, \vec{n}) + a = 0, \quad \left(\overrightarrow{OS}, \frac{d\vec{n}}{d\mu}\right) + \frac{da}{d\mu} = 0,$$

$$\left(\overrightarrow{OS}, \frac{d^2\vec{n}}{d\mu^2}\right) + \frac{d^2a}{d\mu^2} = 0.$$

Диференціюючи першу рівність і враховуючи другу, дістанемо, що $\left(\frac{d\overrightarrow{OS}(\mu)}{d\mu}, \overrightarrow{n}\right) = 0$. Диференціюючи другу рівність і використовуючи третю, знайдемо, що $\left(\frac{d\overrightarrow{OS}(\mu)}{d\mu}, \frac{d\overrightarrow{n}}{d\mu}\right) = 0$. Отже, вектор $\frac{d\overrightarrow{OS}(\mu)}{d\mu}$ колінеарний вектору $\left[\overrightarrow{n}, \frac{d\overrightarrow{n}}{d\mu}\right]$.

Оскільки пряма $b(\mu)$ проходить через точку $S(\mu)$ і перпендикулярна векторам $\overrightarrow{n}$ і $\frac{d\overrightarrow{n}}{d\mu}$, то вона паралельна вектору $\frac{d\overrightarrow{OS}}{d\mu}$ і тому дотикається до кривої $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OS}(\mu)$. Ця крива буде ребром звороту обвідної поверхні, а обвідна поверхня є тангенційним торсом.

Зауваження 3.6. Обвідна поверхня однопараметричної сім'ї площин називається **розгортною поверхнею**. До розгортних поверхонь окрім циліндрів, конусів та тангенційних торсів можна віднести площини, оскільки площина є тангенційним торсом деякої гладкої плоскої кривої цієї ж площини. На площину можна дивитися також, як на циліндричну або конічну поверхню з прямолінійною напрямною.

12. Знайти на сфері радіуса R довжину кола, яке одержується при перетині цієї сфери площиною $z = h$, $0 < h < R$.

Розв'язання. Знайдемо першу квадратичну форму сфери. Для цього задамо її параметрично:

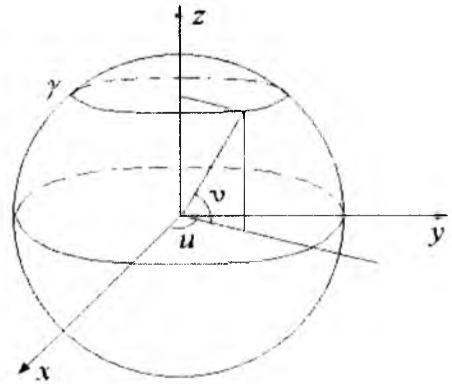
$$\begin{aligned} x &= R\cos u\cos v, \\ y &= R\sin u\cos v, \\ z &= R\sin v, \qquad 0 \le u < 2\pi, -\tfrac{\pi}{2} \le v \le \tfrac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{3.35}$$

Отже, векторна параметризація сфери має вигляд:

$$\overrightarrow{r}(u, v) = \{R\cos u\cos v; R\sin u\cos v; R\sin v\}.$$

Тоді

$$\overrightarrow{r_u} = \{-R\sin u\cos v; R\cos u\cos v; 0\},$$
$$\overrightarrow{r_v} = \{-R\cos u\sin v; -R\sin u\sin v; R\cos v\}.$$



Знаходимо коефіцієнти першої квадратичної форми заданої поверхні:

$$E = (\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_u}) = R^2\sin^2 u\cos^2 v + R^2\cos^2 u\cos^2 v = R^2\cos^2 v,$$

$$F = (\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}) = R\sin u\cos u\cos v\sin v - R\sin u\cos u\cos v\sin v = 0,$$

$$G = (\overrightarrow{r_v}, \overrightarrow{r_v}) = R^2\cos^2 u\sin^2 v + R^2\sin^2 u\sin^2 v + R^2\cos^2 v =$$
$$= R^2\sin^2 v + R^2\cos^2 v = R^2.$$

Отже,

$$ds^2 = R^2\cos^2 v du + R^2 dv.$$

Для того, щоб знайти внутрішнє рівняння кола, у рівняння площини $z = h$ підставимо замість z його значення із рівняння сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, врахувавши при цьому параметризацію (3.35):

$$z^2 = R^2 - x^2 - y^2 = R^2 - R^2 \cos^2 v = R^2 \sin^2 v;$$

тобто

$$R \sin v = h. \tag{3.36}$$

Якщо вважати, що коло γ задається рівнянням $u = u(t)$, $v = v(t)$, то з (3.36) випливає, що $v(t) \equiv c = \mathrm{const}$, тобто $dv = 0$, а $u(t) \equiv u$, $0 \leq u < 2\pi$. Отже, на колі γ перша квадратична форма ds^2 має вигляд:

$$ds^2 = R^2 \cos^2 v du.$$

Оскільки $v \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то з (3.36) дістаємо, що $v = \arcsin \frac{h}{R}$, $0 < \frac{h}{R} < 1$. Довжину кола γ обчислюємо за формулою $S = \int\limits_{\gamma} \sqrt{ds^2}$, тобто

$$S = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \cos^2 v} du = R \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin \frac{h}{R})} du =$$

$$= 2\pi R \sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}}.$$

13. Обчислити величину кута між лініями $v = 2u$ та $v = -2u$ на поверхні, яка має першу квадратичну форму $ds^2 = du^2 + dv^2$.

Розв'язання. Для розв'язання задачі скористаємося формулою

$$\cos\alpha = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + dv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \cdot \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}, \tag{3.37}$$

де α – кут між векторами $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ та $\delta\vec{r} = \vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v$, $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ – векторне рівняння поверхні (інакше, α – кут між напрямами (d): $\{du; dv\}$ та (δ): $\{\delta u; \delta v\}$).

Нехай γ_1 – лінія на поверхні, яка визначається рівнянням $v = 2u$; γ_2 – лінія, яка визначається рівнянням $v = -2u$. Очевидно, що $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{M\}$, де точка M має криволінійні координати $u = 0$, $v = 0$. Із рівнянь ліній γ_1 та γ_2 випливає, що напрям (d) в точці M характеризується тим, що $dv = 2du$. У випадку лінії γ_2 маємо, що $\delta v = -2\delta u$. Із вигляду першої квадратичної форми поверхні випливає, що $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$. Тоді формула (3.37) набуває вигляду

$$\cos\alpha = \frac{du\delta u + dv\delta v}{\sqrt{du^2 + dv^2}\sqrt{\delta u^2 + \delta v^2}} = \frac{-3du\delta u}{\sqrt{5du^2}\sqrt{5\delta u^2}} =$$

$$= -\frac{3}{5}\frac{du}{|du|}\frac{\delta u}{|\delta u|} = \pm\frac{3}{5}$$

Отже, $\alpha = \arccos\frac{3}{5}$ або $\alpha = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) = \pi - \arccos\frac{3}{5}$.

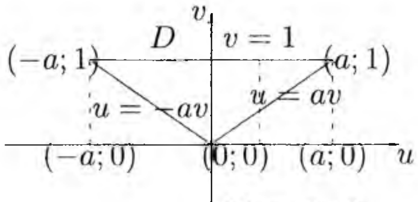
14. Знайти площу, периметр та внутрішні кути криволінійного трикутника на поверхні з першою квадратичною формою $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$, обмеженого лініями $u = \pm av$, $v = 1$, $a > 0$.

Розв'язання. Площу криволінійного трикутника знайдемо, скориставшись формулою

$$S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} dudv$$

де D – область зміни параметрів u, v, яка відповідає області (криволінійному трикутнику) на поверхні. Вершини криволінійного трикутника на поверхні мають криволінійні координати: $(0;0)$; $(a;1)$; $(-a;1)$. Отже, область D – плоский трикутник (див. Мал. 3.12). Тоді

$$S=\int_0^a\int_{\frac{u}{a}}^1\sqrt{u^2+a^2}dudv+\int_{-a}^0\int_{-\frac{u}{a}}^1\sqrt{u^2+a^2}dudv\equiv J_1+J_2.$$



Мал. 3.12.

Обчислимо J_1 звівши цей інтеграл до повторних:

$$J_1=\int_0^a\left(1-\frac{u}{a}\right)\sqrt{u^2+a^2}du=\int_0^a\sqrt{u^2+a^2}du-\frac{1}{a}\int_0^a u\sqrt{u^2+a^2}du\equiv$$

$$\equiv J_1^1+J_1^2.$$

Для того, щоб обчислити J_1^1, здійснимо заміну змінної інтегрування: $u=a\,\mathrm{sh}\,t$, $du=a\,\mathrm{ch}\,t$,

$$J_1^1=\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})}a\sqrt{a^2\,\mathrm{sh}^2\,t+a^2}\,\mathrm{ch}\,tdt=a^2\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})}\mathrm{ch}^2\,tdt=$$

$$=\frac{a^2}{4}\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})}(e^{2t}+2+e^{-2t})dt=\frac{a^2}{8}[(1+\sqrt{2})^2-1+4\ln(1+\sqrt{2})-$$

$$-(1+\sqrt{2})^2+1]=\frac{a^2}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

Крім того,

$$J_1^2=-\frac{1}{a}\int_0^a u\sqrt{u^2+a^2}du=-\frac{1}{3a}(u^2+a^2)^{3/2}\Big|_0^a=-\frac{a^2}{3}(2^{3/2}-1).$$

Отже,

$$J_1=\frac{a^2}{2}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{a^2}{3}(2^{3/2}-1).$$

Аналогічно знаходимо, що

$$J_2=-\frac{a^2}{2}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{a^2}{3}(1-2^{3/2}).$$

Тоді маємо, що

$$S=\frac{2a^2}{3}(2^{3/2}-1).$$

Знайдемо тепер внутрішні кути криволінійного трикутника. Через γ_1, γ_2, γ_3 позначимо лінії на поверхні, які відповідно задаються рівняннями (у криволінійних координатах): $u=av$, $u=-av$, $v=1$. Тоді у напрямку γ_1 маємо: $du=-adv$, у напрямку γ_2: $\delta u=a\delta v$. Нехай α кут між цими напрямами; отже,

$$\cos\alpha=\frac{du\delta u+(u^2+a^2)dv\delta v}{\sqrt{du^2+(u^2+a^2)dv^2}\cdot\sqrt{\delta u^2+(u^2+a^2)\delta v^2}}=$$

$$=\frac{-a^2dv\delta v+(u^2+a^2)dv\delta v}{\sqrt{a^2dv^2+(u^2+a^2)dv^2}\cdot\sqrt{a^2\delta v^2+(u^2+a^2)\delta v^2}}=$$

$$=\frac{u^2dv\delta v}{|dv|\sqrt{u^2+2a^2}\cdot|\delta v|\sqrt{u^2+2a^2}}=\frac{u^2dv\delta v}{(u^2+2a^2)|dv|\cdot|\delta v|}.$$

Вказані напрями розглядаються у точці $u=0$, $v=0$. Отже, з останнього співвідношення при $u=0$ дістаємо, що $\cos\alpha=0$, тобто $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$.

Нехай β – кут між напрямами вздовж γ_1 та γ_3. Тоді

$$\cos\beta = \frac{du\delta u}{\sqrt{du^2 + \frac{u^2+a^2}{a^2}du^2} \cdot |\delta u|} = \frac{du\delta u}{|du|\sqrt{1 + \frac{u^2+a^2}{a^2}} \cdot |\delta u|} =$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{u^2+a^2}{a^2}}}.$$

У вершині криволінійного трикутника, яка має криволінійні координати $u = a$, $v = 1$ з останньої формули знаходимо, що $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Аналогічно знаходимо третій внутрішній кут заданого криволінійного трикутника: $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Очевидно, що сума внутрішніх кутів цього криволінійного трикутника строго більша за π.

Обчислимо периметр криволінійого трикутника. Очевидно, що внутрішні рівняння сторін трикутника є такими:

$$\gamma_1 : \quad v = t, u = at, 0 \le t \le 1,$$

$$\gamma_2 : \quad v = t, u = -at, 0 \le t \le 1,$$

$$\gamma_3 : \quad v = 1, u = t, -a \le t \le a.$$

Отже,

$$S_{\gamma_1} = \int_0^1 \sqrt{I} = \int_0^1 \sqrt{a^2 + (a^2t^2 + a^2)}dt = a\int_0^1 \sqrt{2 + t^2}dt =$$

$$= a\sqrt{2}\ln(1 + \sqrt{2}).$$

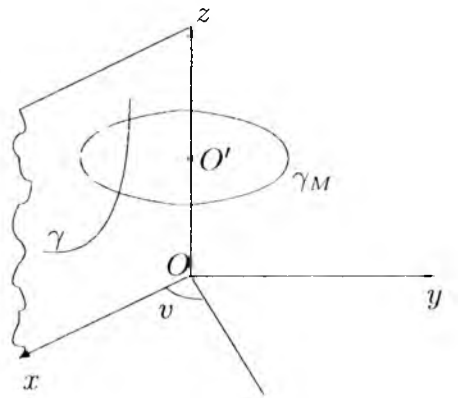
$S_{\gamma_1} = S_{\gamma_2}$,

$$S_{\gamma_3} = \int_{-a}^{a} \sqrt{I} = \int_{-a}^{a} \sqrt{du^2 + (u^2 + a^2)dv^2} = \int_{-a}^{a} \sqrt{du^2} = 2\int_0^a dt = 2a$$

Таким чином,

$$P = S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2} + S_{\gamma_3} = 2a\sqrt{2}\ln(a+\sqrt{2}) + 2a = 2a\sqrt{2}(\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

15. Поверхня, утворена обертанням плоскої кривої γ навколо деякої прямої (вісі обертання), яка лежить у тій же площині, що й сама крива, називається поверхнею обертання. Скласти параметричні рівняння поверхні, утвореної обертанням навколо вісь Oz гладкої кривої γ, розміщеної в площині XOZ. Знайти всі мінімальні поверхні у вказаному класі поверхонь обертання.



Розв'язання. Вважаємо, що крива γ у системі координат ZOX задається параметричними рівняннями $z = u$, $x = f(u)$, $f \in C^{(2)}$, $f > 0$. Нехай v – кут, на який повернулася крива γ навколо вісі Oz. У той час, коли величина кута v змінюється на проміжку $[0, 2\pi)$, точка $M \in \gamma$ описує коло γ_M з центром у точці $O' \in Oz$, яке лежить у площині, перпендикулярній до вісі Oz. Позначимо $\Phi = \bigcup\limits_{M\in\gamma} \gamma_M$. Координати x, y, z точки M зображаються через u, v формулами:

$$x = f(u)\cos v, \quad y = f(u) sinv, \quad z = u.$$

Отже, множина Φ – годограф вектор-функції

$$\vec{r} = \{f(u)\cos v; f(u)\sin v; u\}.$$

Для того, щоб описати всі мінімальні поверхні обертання, необхідно знайти середню кривину поверхні як функцію аргументів u, v. Це, в свою чергу, вимагає відшукання першої та другої квадратичних форм поверхні обертання, а також головних кривин поверхні.

Отже, знайдемо першу квадратичну форму. Маємо:

$$\vec{r_u} = \{x_u; y_u; z_u\} = \{f'(u)\cos v; f'(u)\sin v; 1\},$$

$$\vec{r_v} = \{x_v; y_v; z_v\} = \{-f(u)\sin v; f(u)\cos v; 0\},$$

$$E = (\vec{r_u}, \vec{r_u}) = 1 + f'^2(u), \quad F = (\vec{r_u}, \vec{r_v}) = 0,$$

$$G = (\vec{r_v}, \vec{r_v}) = f^2(u),$$

тобто

$$I = (1 + f'^2(u))du^2 + f^2(u)dv^2,$$

причому $\sqrt{EG - F^2} = f(u)\sqrt{1 + f'^2(u)}$.

Знайдемо другу квадратичну форму:

$$\vec{r_{uu}} = \{f''(u)\cos v; f''(u)\sin v; 0\},$$

$$\vec{r_{uv}} = \{-f'(u)\sin v; f'(u)\cos v; 0\},$$

$$\vec{r_{vv}} = \{-f(u)\cos v; -f(u)\sin v; 0\},$$

$$L = \frac{(\vec{r_{uu}}, \vec{r_u}, \vec{r_v})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{f\sqrt{1 + f'^2}} \begin{vmatrix} f''\cos v & f''\sin v & 0 \\ f'\cos v & f'\sin v & 1 \\ -f\sin v & f\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{f''}{\sqrt{1 + f'^2}},$$

$$M = \frac{(\vec{r_{uv}}, \vec{r_u}, \vec{r_v})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{f\sqrt{1 + f'^2}} \begin{vmatrix} -f'\sin v & f'\cos v & 0 \\ f'\cos v & f'\sin v & 1 \\ -f\sin v & f\cos v & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$N = \frac{(\vec{r_{vv}}, \vec{r_u}, \vec{r_v})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{f\sqrt{1 + f'^2}} \begin{vmatrix} -f\cos v & -f\sin v & 0 \\ f'\cos v & f'\sin v & 1 \\ -f\sin v & f\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{f}{\sqrt{1 + f'^2}}.$$

Як відомо, головні кривини знаходимо з рівняння

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0,$$

яке у даному випадку набуває вигляду

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{f''}{\sqrt{1 + f'^2}} - k(1 + f'^2) & 0 \\ 0 & \dfrac{f}{\sqrt{1 + f'^2}} - kf^2 \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$f^2(1 + f'^2)k^2 - \left(\frac{f^2 f''}{\sqrt{1 + f'^2}} - f\sqrt{1 + f'^2}\right)k - \frac{ff''}{1 + f'^2} = 0.$$

Для того, щоб застосувати теорему Вієта, останнє рівняння (відносно k) запишемо у вигляді:

$$k^2 - \left(\frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}} - \frac{1}{f\sqrt{1 + f'^2}}\right)k - \frac{f''}{f(1 + f'^2)^2} = 0.$$

Звідси знаходимо, що

$$k_1 = \frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}}, \quad k_2 = -\frac{1}{f\sqrt{1+f'^2}}.$$

Отже,

$$2H = k_1 + k_2 = -\frac{1+f'^2 - ff''}{f(1+f'^2)^{3/2}}.$$

Для відшукання всіх мінімальних поверхонь обертання (у вказаному класі поверхонь), досить знайти функцію f із диференціального рівняння $1 + f'^2 - ff'' = 0$ $(H = 0)$, де $x = f(z)$ – рівняння кривої γ. Це рівняння можна подати у вигляді

$$\frac{f'f''}{1+f'^2} = \frac{f'}{f}.$$

Отже,

$$\frac{1}{2}(\ln(1+f'^2))' = (\ln f)'.$$

Звідси, після інтегрування знаходимо, що

$$f = a\sqrt{1+f'^2}, \quad a = \mathrm{const}\,,$$

або

$$\frac{f'}{\sqrt{\frac{f^2}{a^2}-1}} = 1, \quad \frac{f}{|a|} > 1.$$

Останнє диференціальне рівняння запишемо у вигляді

$$\left(\ln\left(\frac{f}{a} + \sqrt{\frac{f^2}{a^2}-1}\right)\right)' = \frac{1}{a}.$$

Справді, безпосередньо знаходимо, що

$$\left(\ln\left(\frac{f}{a} + \sqrt{\frac{f^2}{a^2}-1}\right)\right)' = \frac{\frac{f'}{a} + \frac{ff'}{a^2\sqrt{\frac{f^2}{a^2}-1}}}{\frac{f}{a} + \sqrt{\frac{f^2}{a^2}-1}} =$$

$$= \frac{f'}{a\sqrt{\frac{f^2}{a^2}-1}} \frac{\frac{f}{a} + \sqrt{\frac{f^2}{a^2}-1}}{\frac{f}{a} + \sqrt{\frac{f^2}{a^2}-1}} = \frac{f'}{a\sqrt{\frac{f^2}{a^2}-1}}.$$

Таким чином,

$$\ln\left(\frac{f}{a} + \sqrt{\frac{f^2}{a^2}-1}\right) = \frac{z}{a}, \quad \frac{f}{a} + \sqrt{\frac{f^2}{a^2}-1} = e^{z/a},$$

тобто

$$f(z) = \frac{a}{2}(e^{z/a} + e^{-z/a}) = a \operatorname{ch}\frac{z}{a}$$

(при останньому інтегруванні ми знехтували сталою інтегрування, оскільки вона означає лише паралельне переміщення поверхні паралельно осі обертання). Отже, крива γ за допомогою якої утворилася поверхня, є ланцюговою лінією $\operatorname{ch}\frac{z}{a}$. Відповідна поверхня обертання називається **катеноїдом**.

Зауваження 3.7. Середню кривину поверхні можна знайти також за формулою

$$H = \frac{EN + LG - 2MF}{2(EG - F^2)},$$

не обчислюючи безпосередньо головні кривини k_1, k_2.

16. На параболоїді $z = axy$ знайти криві, які перетинають під прямим кутом його прямолінійні твірні.

Розв'язання. Прямолінійні твірні параболоїда $z = axy$ задаються рівняннями $x = \mathrm{const}$, $y = \mathrm{const}$. Розглянемо лінії $x = c = \mathrm{const}$. Їхні напрямні мають вигляд $\{0; \delta y\}$. Нехай напрям шуканої кривої (d): $\{dx, dy\}$. Оскільки кут α між вказаними лініями, за умовою, рівний $\frac{\pi}{2}$, тобто $\cos\alpha = 0$, то згідно з формулою для обчислення $\cos\alpha$, маємо, що

$$Ed x\delta x + F(dx\delta y + \delta x dy) + Gdy\delta y = Fdx\delta y + Gdy\delta y = 0,$$

або
$$Fdx + Gdy = 0.$$
Для даної поверхні $z_x = ay$, $z_y = ax$, тобто
$$E = 1 + a^2y^2, \quad F = a^2xy, \quad G = 1 + a^2x^2.$$
Отже, маємо диференціальне рівняння
$$a^2xydx + (1 + a^2x^2)dy = 0,$$
яке подамо у вигляді
$$\frac{a^2x}{1 + a^2x^2} = -\frac{dy}{y}.$$
Інтегруючи, знаходимо, що $y^2(1 + a^2x^2) = c_1$, $c_1 = \text{const}$. Аналогічно, для другої сім'ї маємо $x^2(1 + a^2y^2) = c_2$, $c_2 = \text{const}$.

17. Знайти ортогональні проекції сім'ї ліній $u+v = \text{const}$ на сфері
$$x = R\cos u\cos v, \quad y = R\cos u\sin v, \quad z = R\sin u, \quad R > 0.$$

Розв'язання. Якщо на поверхні в точці задано два напрями (d): $\{du; dv\}$ та (δ): $\{\delta u; \delta v\}$, то умова ортогональності цих напрямів має вигляд $(d\vec{r}, \delta\vec{r}) = 0$, тобто
$$Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v = 0.$$
Нехай напрям дотичних до заданої сім'ї ліній – це напрям (δ): $\{\delta u; \delta v\}$. Цей напрям знаходимо із співвідношення
$$\varphi_u\delta u + \varphi_v\delta v = 0, \tag{3.38}$$
де $\varphi(u, v) = u + v - c$. У даному випадку (3.38) набуває вигляду $\delta u + \delta v = 0$, тобто $\delta u = -\delta v$. Отже, умова ортогональності є такою:
$$-Edu\delta v + F(du\delta v - dv\delta v) + Gdv\delta v = 0,$$
або
$$-Edu\delta v + F\delta v(du - dv) + Gdv\delta v = 0,$$
$$-Edu + F(du - dv) + Gdv = 0$$
($\delta v \neq 0$, бо інакше і $\delta u = 0$). Знайдемо E, F, G для сфери:
$$\vec{r}(u, v) = \{R\cos u\cos v; R\cos u\sin v; R\sin u\},$$
$$\vec{r_u} = \{-R\sin u\cos v; -R\sin u\sin v; R\cos u\},$$
$$\vec{r_v} = \{-R\cos u\sin v; -R\cos u\cos v; 0\}.$$
Звідси знаходимо, що $E = R^2$, $F = 0$, $G = R^2\cos^2 u$. Отже, диференціальне рівняння для ортогональних траєкторій має вигляд:
$$-R^2du + R^2\cos udv = 0 \Rightarrow \cos^2 udv = du \Rightarrow dv = \frac{du}{\cos^2 u}.$$
Таким чином, рівняння ортогональних траєкторій у криволінійних координатах є таким:
$$v = \operatorname{tg} u + c_1,$$
де c_1 – довільна стала.

18. Знайти головні напрями, головні кривини та лінії кривини поверхні, яка задається координатно-параметричними рівняннями
$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = av, \quad a > 0.$$

Розв'язання. Напрям (d): $\{du; dv\}$ на поверхні в точці є головним тоді і лише тоді, коли параметри du, dv перетворюють в нуль визначник (квадратичну форму)

$$\begin{vmatrix} Edu + Fdv & Fdu + Gdv \\ Ldu + Mdv & Mdu + Ndv \end{vmatrix}. \qquad (3.39)$$

Отже, передусім знайдемо E, F, G, L, M, N – коефіцієнти першої та другої квадратичних форм. Оскільки

$$\vec{r}(u,v) = \{u\cos v; u\sin v; av\},$$

то

$$\vec{r}_u = \{\cos v; \sin v; 0\}, \quad \vec{r_v} = \{-u\sin v; u\cos v; a\},$$

$$\overrightarrow{r_{uu}} = \{0; 0; 0\}, \vec{r}_{uv} = \{-\sin v; \cos v; 0\},$$

$$\vec{r}_{vv} = \{-u\cos v; -u\sin v; 0\},$$

$$E = (\vec{r_u}, \vec{r_u}) = 1, F = (\vec{r_u}, \vec{r_v}) = 0, G = (\vec{r_v}, \vec{r_v}) = u^2 + a^2,$$

$$EG - F^2 = u^2 + a^2,$$

$$L = \frac{(\overrightarrow{r_{uu}}, \vec{r_u}, \vec{r_v})}{\sqrt{EG - F^2}} = 0,$$

$$M = \frac{(\overrightarrow{r_{uv}}, \vec{r_u}, \vec{r_v})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} \begin{vmatrix} -\sin v & \cos v & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}},$$

$$N = \frac{(\overrightarrow{r_{vv}}, \vec{r_u}, \vec{r_v})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} \begin{vmatrix} -u\cos v & -u\sin v & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix} = 0.$$

Підставимо E, F, G, L, M, N у визначник (3.39) і прирівняємо його нуля:

$$\begin{vmatrix} du & (u^2 + a^2)dv \\ -\frac{adv}{\sqrt{u^2+a^2}} & -\frac{adu}{\sqrt{u^2+a^2}} \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.40)$$

Розкривши у лівій частині співвідношення (3.40) визначник, дістаємо рівняння для відшукання головних напрямів:

$$(du)^2 - (u^2 + a^2)(dv)^2 = 0, \qquad (3.41)$$

або

$$\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = u^2 + a^2.$$

Звідси знаходимо, що

$$\left(\frac{du}{dv}\right)_1 = \sqrt{u^2 + a^2}, \quad \left(\frac{du}{dv}\right)_2 = -\sqrt{u^2 + a^2}.$$

Отже, перший головний напрям – це напрям вектора

$$\vec{a}_1 = \{\sqrt{u^2 + a^2}dv; dv\} = \{\sqrt{u^2 + a^2}; 1\}dv.$$

Другий головний напрям – це напрям вектора

$$\vec{a}_2 = \{-\sqrt{u^2 + a^2}dv; dv\} = \{-\sqrt{u^2 + a^2}; 1\}dv.$$

Головні кривини обчислюємо за формулами

$$k_1 + k_2 = \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}, \quad k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Якщо у ці формули підставити знайдені значення E, F, G, L, M, N, то дістанемо такі співвідношення:

$$k_1 + k_2 = 0, \quad k_1 k_2 = -\frac{a^2}{(u^2 + a^2)^2}.$$

Отже, $k_2 = -k_1$, тобто

$$k_1 = \frac{a}{u^2 + a^2}, \quad k_2 = -\frac{a}{u^2 + a^2}$$

(тут враховано, що за означенням головних кривин $k_1 \geq k_2$).

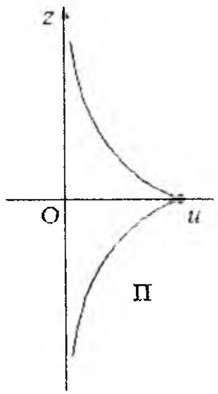
Диференціальне рівняння лінії кривини має вигляд (3.40) або (3.41). Після інтегрування (3.41) знаходимо, що

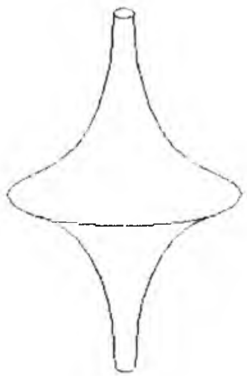
$$v = c_1 - \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}),$$

$$v = c_2 + \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}),$$

де c_1, c_2 – довільні сталі.

19. Нехай Φ – псевдосфера – поверхня обертання трактриси навколо вісі Oz. Перевірити, що псевдосфера – поверхня сталої від'ємної повної кривини.





Розв'язання. Псевдосфера відноситься до поверхонь обертання, які отримуються при обертанні кривої γ (навколо вісі Oz). Ця крива лежить у деякій площині П, що містить вісь Oz і у цій площині задається рівнянням $z = f(u)$,

$0 < u \leq u_0$, $f \in C^{(2)}$. Тоді декартові координати x, y, z точки M такої поверхні зображаються через криволінійні координати u, φ; $0 \leq \varphi < 2\pi$, так:

$$x = u\cos\varphi, \quad y = u\sin\varphi, \quad z = f(u).$$

Повна кривина поверхні обчислюється за формулою

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Безпосередньо знаходимо, що

$$G = 1 + f'^2(u), F = 0, G = u^2, EG - F^2 = u^2(1 + f'^2(u)),$$

$$L = \frac{uf''(u)}{u\sqrt{1 + f'^2(u)}}, M = 0, N = \frac{u^2 f'(u)}{u\sqrt{1 + f'^2(u)}}.$$

Тоді

$$K = \frac{f'(u)f''(u)}{u(1 + f'^2(u))^2}. \tag{3.42}$$

Параметричні рівняння трактриси у площині П такі:

$$z = a(\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t), \quad u = a\sin t, \quad a = \text{const} > 0.$$

Отже,

$$z'_t = \frac{a\cos^2 t}{\sin t}, \quad u'_t = a\cos t.$$

Звідси випливають співвідношення:

$$f'(u) = \frac{z'_t}{u'_t} = \operatorname{ctg} t, \quad f''(u) = \frac{df'(u)}{du} = \frac{\frac{d}{dt}f'(u)}{u'_t} = -\frac{1}{a\sin^2 t\cos t}.$$

Урахувавши (3.42) знаходимо, що

$$K = -\frac{\operatorname{ctg} t}{a^2\sin^3 t\cos t(1 + \operatorname{ctg}^2 t)^2} = -\frac{1}{a^2}.$$

20. У точці $M_0(1;1;1)$ поверхні $xyz = 1$ знайти напрям, спряжений до напряму вектора $\vec{a} = \{1; -2; 1\}$.

Розв'язання. Задамо векторно-параметричне рівняння поверхні $xyz = 1$. Для цього покладемо $x = u$, $y = v$; тоді $z = \frac{1}{uv}$, $u \neq 0$, $v \neq 0$,

$$\vec{r}(u, v) = \{u; v; \frac{1}{uv}\}, \tag{3.43}$$

при цьому точка M_0 має криволінійні координати $u = 1$, $v = 1$.

Нагадаємо, що напрям на поверхні в точці M_0 визначається вектором $dr|_{M_0} = r_u|_{M_0}du + r_v|_{M_0}dv$. Якщо на поверхні в заданій точці є два напрями (d): $\{du; dv\}$ та (δ): $\{\delta u; \delta v\}$, то умовою їхньої спряженості є умова:

$$Ldu\delta u + M(du\delta v + dv\delta u) + Ndv\delta v = 0.$$

З'ясуємо, чи задає вектор $\vec{a}$ на поверхні в точці M_0 певний напрям (наприклад (δ)), тобто перевіримо, чи справджується рівність $\vec{a} = \delta\vec{r}|_{M_0}$ або

$$\vec{a} = \delta\vec{r}|_{M_0} = \vec{r_u}|_{M_0}\delta u + \vec{r_v}|_{M_0}\delta v.$$

З (3.43) випливає, що

$$\vec{r_u} = \{1; 0; -\frac{1}{u^2v}\}, \quad \vec{r_u}|_{M_0} = \{1; 0; -1\},$$

$$\vec{r_v} = \{0; 1; -\frac{1}{uv^2}\}, \quad \vec{r_v}|_{M_0} = \{0; 1; -1\}.$$

Отже,

$$\vec{a} = \{1; -2; 1\} = \{1; 0; -1\}\delta u + \{0; 1; -1\}\delta v = \{\delta u; \delta v; -\delta u - \delta v\},$$

тобто $\delta u = 1$, $\delta v = -2$, $\delta u - \delta v = 1$. Таким чином, вектор $\vec{a}$ дійсно визначає напрям (δ) на поверхні в точці M_0.

Для того, щоб відшукати напрям (d), знайдемо коефіцієнти першої та другої квадратичних форм поверхні в точці M_0:

$$E = (\vec{r_u}, \vec{r_u}) = 1 + \frac{1}{u^4v^2}, \quad E(M_0) = 2,$$

$$F = (\vec{r_u}, \vec{r_v}) = \frac{1}{u^3v^3}, \quad F(M_0) = 1,$$

$$G = (\vec{r_v}, \vec{r_v}) = 1 + \frac{1}{u^2v^4}, \quad G(M_0) = 2, \quad (EG - F^2)(M_0) = 3,$$

$$\vec{r_{uu}} = \{0; 0; \frac{2}{u^3v}\}, \quad \vec{r_{uu}}|_{M_0} = \{0; 0; 2\},$$

$$\vec{r_{uv}} = \{0; 0; \frac{1}{u^2v^2}\}, \quad \vec{r_{uv}}|_{M_0} = \{0; 0; 1\},$$

$$\vec{r_{vv}} = \{0; 0; \frac{2}{uv^3}\}, \quad \vec{r_{vv}}|_{M_0} = \{0; 0; 2\},$$

$$L(M_0) = \frac{(\vec{r_{uu}}|_{M_0}, \vec{r}_u|_{M_0}, \vec{r}_v|_{M_0})}{\sqrt{(EG - F^2)(M_0)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$M(M_0) = \frac{(\vec{r_{uv}}|_{M_0}, \vec{r}_u|_{M_0}, \vec{r}_v|_{M_0})}{\sqrt{(EG - F^2)(M_0)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$N(M_0) = \frac{(\vec{r_{vv}}|_{M_0}, \vec{r}_u|_{M_0}, \vec{r}_v|_{M_0})}{\sqrt{(EG - F^2)(M_0)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Тоді умова спряженості набуває вигляду:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}du + \frac{1}{\sqrt{3}}(-2du + dv) - \frac{4}{\sqrt{3}}dv = 0,$$

або $-3dv = 0$, тобто $dv = 0$. Отже, напрям (d) визначається параметрами du, 0. Звідси дістаємо, що

$$d\vec{r}|_{M_0} = \vec{r_u}|_{M_0}du + \vec{r_v}|_{M_0}dv = \vec{r_u}|_{M_0}du = \{1; 0; -1\}du.$$

Відповідь: напрям вектора $\overrightarrow{b} = \{1; 0; -1\}$ є спряженим до напряму вектора $\overrightarrow{a} = \{1; -2; 1\}$ у точці $M_0(1; 1; 1)$ поверхні $xyz = 1$.

21. Довести, що якщо асимптотична лінія γ на поверхні Φ є лінією кривини, то нормаль до поверхні Φ вздовж γ – сталий вектор, а повна кривина поверхні Φ в точках лінії γ рівна нулю.

Розв'язання. Оскільки лінія γ є лінією кривини на поверхні Φ, то за теоремою Родріга вздовж цієї кривої

$$d\overrightarrow{n} = -k_1 d\overrightarrow{r}, \tag{3.44}$$

де k_1 – одна із головних кривин, а, отже, і нормальна кривина поверхні вздовж γ. Лінія γ є одночасно і асимптотичною, тому $k_1 = 0$. Звідси випливає, що повна кривина поверхні вздовж лінії γ $K = k_1 k_2 = 0$, а рівняння (3.44) набуває вигляду

$$d\overrightarrow{n} = \overrightarrow{0}.$$

Отже, $\overrightarrow{n}|_\gamma = \overrightarrow{c} \equiv \overrightarrow{\text{const}}$.

22. Параболоїд $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$ перетинається площинами $x + y = c$, де $c = \text{const}$. Знайти сім'ю ліній, спряжених з даними перетинами.

Розв'язання. Задамо параметризацію даної поверхні, поклавши $x = u$, $y = v$; тоді векторне рівняння параболоїда є таким:

$$\overrightarrow{r}(u, v) = \{u; v; \frac{u^2}{2a} + \frac{v^2}{2b}\}.$$

Знайдемо коефіцієнти L, M, N другої квадратичної форми поверхні:

$$\overrightarrow{r_u} = \{1; 0; \frac{u}{a}\}, \overrightarrow{r_v} = \{0; 1; \frac{v}{b}\}, E = 1 + \frac{u^2}{a^2}, F = \frac{uv}{ab}, G = 1 + \frac{v^2}{a^2},$$

$$\Delta = EG - F^2 = 1 + \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}, \overrightarrow{r_{uu}} = \{0; 0; \frac{1}{a}\}, \overrightarrow{r_{uv}} = \{0; 0; 0\},$$

$$\overrightarrow{r_{vv}} = \{0; 0; \frac{1}{b}\}.$$

Тоді

$$L = \frac{(\overrightarrow{r_{uu}}, \overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v})}{\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 1 & 0 & \frac{u}{a} \\ 0 & 1 & \frac{v}{b} \end{vmatrix} = \frac{1}{a\sqrt{1 + \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}}},$$

$$M = \frac{(\overrightarrow{r_{uv}}, \overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v})}{\sqrt{\Delta}} = 0, \text{ бо } \overrightarrow{r_{uv}} = \overrightarrow{0},$$

$$N = \frac{(\overrightarrow{r_{vv}}, \overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v})}{\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ 1 & 0 & \frac{u}{a} \\ 0 & 1 & \frac{v}{b} \end{vmatrix} = \frac{1}{b\sqrt{1 + \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}}}.$$

Рівняння лінії перетину в криволінійних координатах має вигляд

$$\varphi(u, v) \equiv u + v + c = 0.$$

Напрям (d): $\{du; dv\}$ вздовж цієї лінії характеризується тим, що $du = -dv$, бо

$$d\varphi \doteq \varphi_u du + \varphi_v dv = du + dv = 0.$$

Напрям, спряжений до напряму (d), позначимо через (δ): $\{\delta u; \delta v\}$. Як відомо, умовою спряженості двох сімей ліній на поверхні є умова

$$L du\delta u + M(du\delta v + dv\delta u) + N dv\delta v = 0. \tag{3.45}$$

Підставляючи L, M, N в (3.45) (врахувавши при цьому співвідношення $du = -dv$) знайдемо, що

$$-\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}}} \left(\frac{dv\delta u}{a} - \frac{dv\delta v}{b} \right) = 0,$$

бо $\dfrac{\delta u}{a} - \dfrac{\delta v}{b} = 0$. Інтегруючи, маємо: $\dfrac{u}{a} - \dfrac{v}{b} = c_1$. Оскільки $u = x$, $v = y$, то рівняння сім'ї ліній, спряжених із заданими перетинами, є такими:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c_1, \quad c_1 = \text{const}.$$

23. Довести, що лінії, які задаються диференціальним рівнянням $du^2 = (a^2 + u^2)dv^2$, утворюють на поверхні $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$ ортогональну сітку.

Розв'язання. Сітка ліній на поверхні, яка визначається напрямами (d): $\{du; dv\}$ та (δ): $\{\delta u; \delta v\}$ є ортогональною тоді і лише тоді, коли

$$Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v = 0,$$

або

$$E\frac{du}{dv}\frac{\delta u}{\delta v} + F\left(\frac{du}{dv} + \frac{\delta u}{\delta v}\right) + G = 0. \tag{3.46}$$

Знайдемо коефіцієнти першої квадратичної форми. Отже,

$$\vec{r} = \{u\cos v; u\sin v; av\}, \vec{r_u} = \{\cos v; \sin v; 0\},$$

$$\vec{r_v} = \{-u\sin v; u\cos v; a\}, E = (\vec{r_u}, \vec{r_u}) = \cos^2 v + \sin^2 v = 1,$$

$$F = (\vec{r_u}, \vec{r_v}) = 0, G = (\vec{r_v}, \vec{r_v}) = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + a^2 = \\ = a^2 + u^2.$$

З рівняння $du^2 = (a^2+u^2)dv^2$ маємо, що $\dfrac{du}{dv} = \pm\sqrt{a^2+u^2}$, тобто $\dfrac{du}{dv} = \sqrt{a^2+u^2}$, $\dfrac{\delta u}{\delta v} = -\sqrt{a^2+u^2}$. Підставивши $\dfrac{du}{dv}$, $\dfrac{\delta u}{\delta v}$ у ліву частину (3.46) одержимо, що

$$\sqrt{a^2+u^2}(-\sqrt{a^2+u^2}) + u^2 + a^2 = 0.$$

Отже, диференціальне рівняння $du^2 = (a^2+u^2)dv^2$ визначає ортогональну сітку на заданій поверхні.

24. Знайти кривину лінії перетину поверхні $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ площиною $3x - 4y + z = 0$ у точці $M_0(1;1;1)$.

Розв'язання. Очевидно, що дану поверхню (конус) можна записати параметрично так:

$$\left[\begin{array}{l} x = u\cos v, \quad u \geq 0, v \in [0, 2\pi), \\ y = u\sin v, \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}u. \end{array}\right. \tag{3.47}$$

Іншими словами, поверхня $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ є годографом вектор-функції $\vec{r} = \{u\cos v; u\sin v; \frac{\sqrt{2}}{2}u\}$. Знайдемо криволінійні координати точки M_0, скориставшись співвідношеннями (3.47): $u\cos v = 1$, $u\sin v = 1$, $\dfrac{u}{\sqrt{2}} = 1$. Звідси дістаємо, що $u = \sqrt{2}$, $v = \dfrac{\pi}{4}$.

Опишемо лінію перетину поверхні із заданою площиною. Для цього у рівняння площини підставимо $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ із (3.47); в результаті дістанемо рівняння лінії перетину в криволінійних координатах:

$$3u\cos v - 4u\sin v + \frac{\sqrt{2}}{2}u = 0.$$

Введемо позначення

$$\varphi(u,v) := 3u\cos v - 4u\sin v + \frac{\sqrt{2}}{2}u$$

і знайдемо напрям $\{du; dv\}$ в точці M_0 із співвідношення

$$\varphi_u du + \varphi_v dv = 0,$$

яке в даному випадку має вигляд

$$(3\cos v - 4\sin v + \frac{\sqrt{2}}{2})du + (-3u\sin v - 4u\cos v)dv = 0.$$

У точці $M(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4})$ дістаємо, що

$$0 \cdot du - 7dv = 0,$$

тобто $dv = 0$.

Знайдемо першу та другу квадратичні форми даної поверхні в точці $M_0(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4})$:

$$\vec{r_u} = \{\cos v; \sin v; \frac{\sqrt{2}}{2}\}; \quad \vec{r_u}\Big|_{M_0} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\},$$

$$\vec{r_v} = \{-u\sin v; u\cos v; 0\}; \quad \vec{r_v}\Big|_{M_0} = \{-1; 1; 0\},$$

$$\vec{r_{uu}} = \{0; 0; 0\}; \quad \vec{r_{uu}}\Big|_{M_0} = \{0; 0; 0\},$$

$$\vec{r_{uv}} = \{-\sin v; \cos v; 0\}; \quad \vec{r_{uv}}\Big|_{M_0} = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right\},$$

$$\vec{r_{vv}} = \{-u\cos v; -u\sin v; 0\}; \quad \vec{r_{vv}}\Big|_{M_0} = \{-1; -1; 0\}.$$

Отже, $E(M_0) = \frac{3}{2}$; $F(M_0) = 0$, $G(M_0) = 2$. Тоді

$$I(M_0) = \frac{3}{2}du^2 + 2dv^2.$$

Знайдемо коефіцієнти L, M, N другої квадратичної форми в точці M_0:

$$L(M_0) = \frac{(\vec{r_{uu}}|_{M_0}, \vec{r_u}|_{M_0}, \vec{r_v}|_{M_0})}{\sqrt{E(M_0)G(M_0) - F^2(M_0)}} = 0,$$

$$M(M_0) = \frac{(\vec{r_{uv}}|_{M_0}, \vec{r_u}|_{M_0}, \vec{r_v}|_{M_0})}{\sqrt{E(M_0)G(M_0) - F^2(M_0)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$N(M_0) = \frac{(\vec{r_{vv}}|_{M_0}, \vec{r_u}|_{M_0}, \vec{r_v}|_{M_0})}{\sqrt{E(M_0)G(M_0) - F^2(M_0)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = $$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Отже, $II(M_0) = \sqrt{\frac{2}{3}}dv^2$.

Якщо θ – кут між головною нормаллю кривої та нормаллю поверхні в точці M_0, то, як відомо,

$$k\cos\theta = \frac{II(M_0)}{I(M_0)} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}dv^2}{\frac{3}{2}du^2 + 2dv^2}\Bigg|_{dv=0} = 0.$$

Переконаємося в тому, що $\cos\theta \neq 0$. Безпосередньо знаходимо координати нормального вектора $[\vec{r_u}, \vec{r_v}]$ поверхні в точці M_0:

$$[\vec{r_u}, \vec{r_v}]\Big|_{M_0} = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right\}.$$

Площина $3x - 4y + z = 0$ є стичною для лінії перетину, $\vec{n} = \{3; -4; 1\}$ – її нормальний вектор. Очевидно, що $\vec{n} \not\parallel [\vec{r_u}, \vec{r_v}]\Big|_{M_0}$, тобто вектор $[\vec{r_u}, \vec{r_v}]\Big|_{M_0}$ не ортогональний до цієї площини. Отже, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, тобто $\cos\theta \neq 0$. Звідси дістаємо, що $k = 0$.

25. Знайти омбілічні точки на еліптичному параболоїді

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}\right), \quad 0 < q < p, \qquad (3.48)$$

повну та середню кривину цієї поверхні.

Розв'язання. Нагадаємо, що в омбілічних точках будь-який дотичний до поверхні напрям є головним. Омбілічні точки характеризуються пропорційністю коефіцієнтів другої та першої квадратичних форм, тобто співвідношеннями

$$\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}. \tag{3.49}$$

Отже, знайдемо величини E, F, G, L, M, N. Задана поверхня є графіком функції $z=f(x,y)$, де $f(x,y)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}\right)$. Тому знайдемо зображення для першої, другої квадратичних форм, повної та середньої кривин у загальному випадку. Векторне рівняння поверхні тоді є таким: $\vec{r}=\{x;y;f(x,y)\}$, Отже,

$$\vec{r}_x=\{1;0;f_x\},\ \vec{r}_y=\{0;1;f_y\},\ \vec{r}_{xx}=\{0;0;f_{xx}\},$$

$$\vec{r}_{xy}=\{0;0;f_{xy}\},\ \vec{r}_{yy}=\{0;0;f_{yy}\}.$$

Звідси знаходимо, що

$$I\equiv ds^2=(1+f_x^2)dx^2+2f_xf_ydxdy+(1+f_y^2)dy^2,$$

$$II\equiv(d^2\vec{r},\vec{n})=\frac{f_{xx}dx^2+2f_{xy}dxdy+f_{yy}dy^2}{1+f_x^2+f_y^2},$$

$$K=\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{1+f_x^2+f_y^2},\quad H=\frac{(1+f_x^2)f_{xx}-2f_xf_yf_{xy}+(1+f_y^2)f_{yy}}{1+f_x^2+f_y^2}. \tag{3.50}$$

Використовуючи ці формули, у випадку еліптичного параболоїда (3.48) маємо, що

$$E=\frac{x^2+p^2}{p^2},\quad F=\frac{xy}{pq},\quad G=\frac{y^2+q^2}{q^2},$$

$$L=\frac{1}{p\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}}},\quad M=0,\quad N=\frac{1}{q\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}}}.$$

Звідси та з (3.49) дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{1}{p\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}}}=a\dfrac{x^2+p^2}{p^2},\\[2ex] \dfrac{1}{q\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}}}=a\dfrac{y^2+q^2}{q^2},\\ xy=0,\end{cases}$$

де a — коефіцієнт пропорційності. Очевидно, що ця система рівнянь еквівалентна такій системі:

$$\begin{cases}\frac{x^2+p^2}{p}=\frac{y^2+q^2}{q},\\ xy=0.\end{cases}$$

Якщо $x=0$, то y знаходимо з рівняння $py^2=p^2q-pq^2$. Отже, $y^2=q(p-q)$, $y=\pm\sqrt{q(p-q)}$. Якщо припустити, що $y=0$, то для відшукання x маємо рівняння $x^2=p(q-p)$. Згідно з умовою задачі $q<p$, тобто $q-p<0$. Отже, останнє співвідношення неможливе. Це означає, що $y\neq 0$. Таким чином, на еліптичному параболоїді (3.48) є дві омбілічні точки: $(0;\sqrt{q(p-q)};\frac{p-q}{2})$, $(0;-\sqrt{q(p-q)};\frac{p-q}{2})$.

З формул (3.50) випливає, що

$$K=\frac{1}{pq\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}}},\quad H=\frac{q\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)+p\left(1+\frac{y^2}{q^2}\right)}{pq\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}}}.$$

26. Довести, що якщо асимптотичні лінії поверхні перетинаються під сталим кутом, то повна кривина поверхні пропорційна квадрату середньої кривини.

Розв'язання. За координатну сітку на поверхні візьмемо сітку, яка складається з асимптотичних ліній. Нехай α — кут між асимптотичними лініями. Тоді, як відомо,

$\cos\alpha = \pm\frac{F}{\sqrt{EG}}$, а $L = N = 0$ на всій поверхні. Отже, формули для відшукання повної та середньої кривин поверхні набувають вигляду:

$$K = \frac{-M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{-FM}{EG - F^2}.$$

Звідси знаходимо, що

$$H^2 = \frac{F^2M^2}{(EG - F^2)^2}, \quad \frac{M^2}{EG - F^2} = -K.$$

Тоді

$$H^2 = \frac{-F^2K}{EG - F^2} = -\frac{K}{\frac{EG}{F^2} - 1} = -\frac{K}{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1}.$$

Отже,

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 - \frac{K}{H^2} = \frac{H^2 - K}{H^2}, \quad \cos\alpha = \frac{H^2}{H^2 - K}.$$

Врахувавши останнє співвідношення знайдемо, що $K\cos^2\alpha = H^2(\cos^2\alpha - 1)$, тобто $K = -\operatorname{tg}^2\alpha \cdot H^2$, що й потрібно було довести.

27. Поверхня (коноїд) задається рівнянням $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$. Знайти: 1) функцію $f(\frac{x}{y})$ так, щоб проекція однієї з асимптотичних ліній на площину XOY була колом, рівняння якого має вигляд $x^2 + y^2 = ay$; 2) функцію f так, щоб коноїд перетинав площину $y = 1$ по лінії кривини.

Розв'язання. 1) Уведемо нові змінні (параметризацію): $\frac{x}{y} = u$, $y = v$; тоді векторне рівняння поверхні є таким

$$\vec{r} = \{uv; v; f(u)\}.$$

Для того, щоб скласти диференціальне рівняння асимптотичних ліній заданої поверхні, знайдемо коефіцієнти першої та другої квадратичних форм цієї поверхні:

$$\vec{r_u} = \{v; 0; f'(u)\}, \quad \vec{r_v} = \{u; 1; 0\}, \quad \vec{r_{uu}} = \{0; 0; f''(u)\},$$

$$\vec{r_{uv}} = \{1; 0; 0\}, \quad \vec{r_{vv}} = \{0; 0; 0\}, \quad E = (\vec{r_u}, \vec{r_u}) = v^2 + f'^2(u),$$

$$F = (\vec{r_u}, \vec{r_v}) = uv, \quad G = (\vec{r_v}, \vec{r_v}) = 1 + u^2,$$

$$EG - F^2 \equiv \Delta = v^2 + (1 - u^2)f'^2(u);$$

$$L = \frac{1}{\Delta}(\vec{r_{uu}}, \vec{r_u}, \vec{r_v}) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & 0 & f''(u) \\ v & 0 & f'(u) \\ u & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{vf''(u)}{\Delta},$$

$$M = \frac{1}{\Delta}(\vec{r_{uv}}, \vec{r_u}, \vec{r_v}) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & 0 & f'(u) \\ u & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{f'(u)}{\Delta},$$

$N = 0$, бо $r_{vv} = \{0; 0; 0\}$. Отже, диференціальне рівняння асимптотичних ліній набуває вигляду:

$$vf''(u)du^2 - 2f'(u)dudv = 0,$$

або

$$vf''(u)du = 2f'(u)dv, \quad \frac{f''(u)}{f'(u)}du = 2\frac{dv}{v}.$$

Звідси знаходимо, що

$$v^2 = cf'(u). \tag{3.51}$$

Якщо повернутися до змінних x, y, то (3.51) перетворюється в рівняння вигляду

$$y^2 = cf'\left(\frac{x}{y}\right), \quad c = \text{const} \neq 0. \tag{3.52}$$

Це рівняння можна розуміти як диференціальне рівняння проекцій асимптотичних ліній поверхні $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$ на координатну площину XOY (воно не містить z). Таким чином, задача звелася до відшукання такої функції $f\left(\frac{x}{y}\right)$, щоб рівняння (3.52) було еквівалентним рівнянню

$$x^2 + y^2 = ay. \tag{3.53}$$

У змінних u, v рівняння кола (3.53) набуває вигляду:

$$v = \frac{a}{1+u^2}. \tag{3.54}$$

Отже, тотожними мають бути рівняння (3.51) та (3.54). Тоді для відшукання функції f маємо рівняння:

$$f'(u) = \frac{a^2}{c(1+u^2)^2}, \quad c \neq 0.$$

Зінтегрувавши останнє рівняння та перейшовши до змінних x, y знайдемо, що

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{a^2}{2c}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \frac{xy}{x^2+y^2}\right) + c_1, \quad c \neq 0.$$

2) диференціальним рівнянням лінії кривини є рівняння

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0,$$

або, щодо ліній кривини коноїда,

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ v^2 + f'^2(u) & uv & 1+u^2 \\ \frac{vf''(u)}{\Delta} & -\frac{f'(u)}{\Delta} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(-\frac{f'}{\Delta}(v^2 + f'^2) - \frac{uv^2}{\Delta}f''\right)du^2 - \left(-\frac{f'}{\Delta}dv^2 + \frac{vf''}{\Delta}dudv\right) \times$$
$$\times(1+u^2) = 0.$$

Останнє рівняння запишемо в змінних x, y і врахуємо умову $y = 1$:

$$-[f'(x)(1+f'^2)(x) + xf''(x)]dx^2 = 0$$

або

$$xf''(x) = -(1+f'^2(x))f'(x).$$

Покладемо $f'(x) = p(x)$; тоді маємо такі еквівалентні диференціальні рівняння:

$$xp'(x) = -(1+p^2(x))p(x), \quad x\frac{dp}{dx} = -(1+p^2)p, \quad \frac{dx}{x} = -\frac{dp}{(1+p^2)p}.$$

Інтегруючи, знаходимо, що $x^2 = c^2\left(1 + \frac{1}{p^2}\right)$. Звідси

$$p(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{c}{\sqrt{x^2 - c^2}},$$

тобто

$$f(x) = c\ln|x + \sqrt{x^2 - c^2}| + c_1, \quad c, c_1 - \text{const}.$$

28. Довести, що якщо дві поверхні перетинаються вздовж лінії, яка є лінією кривини на кожній з них, то ці поверхні перетинаються під сталим кутом вздовж цієї лінії.

Розв'язання. Нехай γ – лінія, вздовж якої перетинаються поверхні Φ_1 та Φ_2, M – довільна точка на γ, $\vec{n}_1\Big|_M$, $\vec{n}_2\Big|_M$ – одиничні вектори нормалей поверхонь Φ_1 та Φ_2 у точці M відповідно, $\alpha = \alpha(M)$ – кут між $\vec{n}_1\big|_M$, $\vec{n}_2\big|_M$, $T_M(\Phi_1)$ – дотична площина до поверхні Φ_1 у точці M, $T_M(\Phi_2)$ – дотична площина до поверхні Φ_2 у точці M. Для доведення вказаної властивості досить переконатися в тому, що $\cos\alpha = \text{const}$. Маємо, що

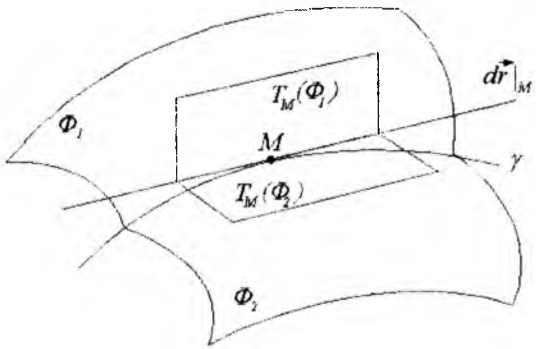
$$\left(\vec{n}_1\big|_M, \vec{n}_2\big|_M\right) = \left|\vec{n}_1\big|_M\right| \cdot \left|\vec{n}_2\big|_M\right| \cos\alpha = \cos\alpha.$$

Тоді

$$d(\cos\alpha) = d\left(\vec{n}_1\big|_M, \vec{n}_2\big|_M\right) = \left(d\vec{n}_1\big|_M, \vec{n}_2\big|_M\right) + \left(\vec{n}_1\big|_M, d\vec{n}_2\big|_M\right).$$

Оскільки в кожній точці γ (зокрема, і в точці M) кожний її напрям є головним, то внаслідок теореми Родріга

$$d\vec{n}_1\big|_M = \lambda_1 d\vec{r}\big|_M, \quad d\vec{n}_2\big|_M = \lambda_2 d\vec{r}\big|_M.$$



Отже,

$$d(\cos\alpha) = \lambda_1\left(d\vec{r}\big|_M, \vec{n}_2\big|_M\right) + \lambda_2\left(\vec{n}_1\big|_M, d\vec{r}\big|_M\right).$$

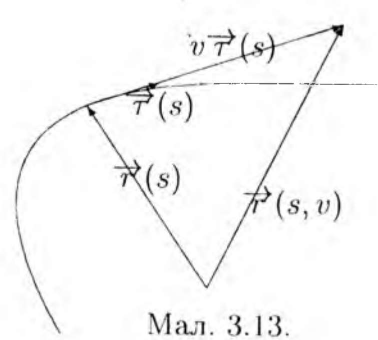
Оскільки $d\vec{r}\big|_M \in T_M(\Phi_1) \cap T_M(\Phi_2)$, то $\vec{n}_1\big|_M \perp d\vec{r}\big|_M$, $\vec{n}_2\big|_M \perp d\vec{r}\big|_M$, тобто $d(\cos\alpha) = 0$, $\cos\alpha = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$.

29. Знайти повну кривину поверхні, утвореної дотичними до лінії $\vec{r} = \vec{r}(s)$, де s – натуральний параметр.

Розв'язання. Оскільки поверхня утворена дотичними до лінії $\vec{r} = \vec{r}(s)$, то її векторне рівняння має вигляд (див. Мал. 3.13):

$$\vec{\rho}(s,v) = \vec{r}(s) + v\vec{\tau}(s), \quad v \neq 0,$$

де $\vec{\tau}(s)$ – одиничний вектор дотичної. Повна кривина K поверхні обчислюється за формулою



Мал. 3.13.

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

тому знайдемо, передусім, коефіцієнти першої та другої квадратичних форм заданої поверхні:

$$\vec{r}_s = \dot{\vec{r}} + v\dot{\vec{\tau}} = \vec{\tau} + vk\vec{\nu} = \{1; vk; 0\},$$

$$\vec{r}_v = \vec{\tau} = \{1; 0; 0\},\ \vec{r}_{ss} = \dot{\vec{\tau}} + v\dot{k}\vec{\nu} + vk\dot{\vec{\nu}} = k\vec{\nu} + v\dot{k}\vec{\nu} +$$

$$+ vk(-k\vec{\tau} + \chi\vec{\beta}) = -vk^2\vec{\tau} + (k + v\dot{k})\vec{\nu} + vk\chi\vec{\beta} =$$

$$= \{-vk^2; k + v\dot{k}; vk\chi\},\ \vec{r}_{sv} = k\vec{\nu} = \{0; k; 0\},\ \vec{r}_{vv} = \vec{0}.$$

Отже,

$$E = (\vec{r}_s, \vec{r}_s) = 1 + v^2k^2,\ F = (\vec{r}_s, \vec{r}_v) = 1,\ G = (\vec{r}_v, \vec{r}_v) = 1,$$

$$\Delta = EG - F^2 = v^2k^2,$$

$$L = \frac{(\vec{r}_{ss}, \vec{r}_s, \vec{r}_v)}{\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} = \begin{vmatrix} -vk^2 & k + v\dot{k} & vk\chi \\ 1 & vk & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{v^2 k^2 \chi}{|v| k^2} = \chi |v|, \quad v \neq 0,$$

$$M = \frac{(\vec{r}_{sv}, \vec{r}_s, \vec{r}_v)}{\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} = \begin{vmatrix} 0 & k & 0 \\ 1 & vk & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$N = \frac{(\vec{r}_{vv}, \vec{r}_s, \vec{r}_v)}{\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} = 0,$$

бо $\vec{r}_{vv} = \vec{0}$.

Таким чином, $LN - M^2 = 0$, тобто $K = 0$.

30. Нехай $\vec{r} = \vec{r}(s)$ – просторова крива, s – натуральний параметр, $\vec{\beta}(s)$ – одиничний вектор бінормалі. Поверхня, яка задається рівняння

$$\vec{r}(s, \lambda) = \vec{r}(s) + \lambda \vec{\beta}(s), \tag{3.55}$$

називається поверхнею бінормалі. Знайти середню кривину такої поверхні.

Розв'язання. Оскільки середня кривина обчислюється за формулою

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)},$$

де E, F, G, L, M, N – коефіцієнти першої та другої квадратичних форм, то обчислимо їх для поверхні, яка визначається рівнянням (3.55). Урахувавши формули Френе знайдемо, що

$$\vec{r}_s = \dot{\vec{r}} + v\dot{\vec{\beta}} = \vec{\tau} + \lambda(-\chi \vec{\nu}) = \vec{\tau} - \lambda \chi \vec{\nu}, \vec{r}_\lambda = \vec{\beta},$$

$$\vec{r}_{ss} = \dot{\vec{\tau}} - \lambda \dot{\chi} \vec{\nu} - \lambda \chi \dot{\vec{\nu}} = k\vec{\nu} - \lambda \dot{\chi} \vec{\nu} - \lambda \chi (\chi \vec{\beta} - k \vec{\tau}) =$$

$$= \lambda k \chi \vec{\tau} + (k - \lambda \dot{\chi}) \vec{\nu} - \lambda \chi^2 \vec{\beta},$$

$$\vec{r}_{s\lambda} = -\chi \vec{\nu} = \vec{r}_{\lambda s}, \vec{r}_{\lambda\lambda} = \vec{0}$$

(тут k – кривина, χ – скрут кривої). Отже,

$$E = (\vec{r}_s, \vec{r}_s) = (\vec{\tau} - \lambda\chi\vec{\nu}, \vec{\tau} - \lambda\chi\vec{\nu}) = |\vec{\tau}|^2 - 2\lambda\chi(\vec{\tau}, \vec{\nu}) +$$

$$+ \lambda^2\chi^2 |\vec{\nu}|^2 = 1 + \lambda^2\chi^2, F = (\vec{r}_s, \vec{r}_\lambda) = (\vec{\tau} - \lambda\chi\vec{\nu}, \vec{\beta}) =$$

$$= (\vec{\tau}, \vec{\beta}) - \lambda\chi(\vec{\nu}, \vec{\beta}) = 0, G = (\vec{r}_\lambda, \vec{r}_\lambda) = (\vec{\beta}, \vec{\beta}) = |\vec{\beta}|^2 = 1,$$

$$EG - F^2 = 1 + \lambda^2\chi^2,$$

$$L = \frac{(\vec{r}_{ss}, \vec{r}_s, \vec{r}_\lambda)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} = \begin{vmatrix} \lambda k \chi & k - \lambda\dot{\chi} & -\lambda\chi^2 \\ 1 & -\lambda\chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{-k\lambda^2\chi^2 - k + \lambda\dot{\chi}}{\sqrt{1 + \lambda^2\chi^2}} = \lambda \frac{\dot{\chi}}{\sqrt{1 + \lambda^2\chi^2}} - k\sqrt{1 + \lambda^2\chi^2},$$

$$M = \frac{(\vec{r}_{s\lambda}, \vec{r}_s, \vec{r}_\lambda)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2\chi^2}} = \begin{vmatrix} 0 & -\chi & 0 \\ 1 & -\lambda\chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\chi}{\sqrt{1 + \lambda^2\chi^2}},$$

$$N = 0,$$

оскільки $\vec{r}_{\lambda\lambda} = \vec{0}$. Тоді

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda\dot{\chi}}{(1 + \lambda^2\chi^2)^{3/2}} - \frac{K}{\sqrt{1 + \lambda^2\chi^2}} \right).$$

31. Нехай поверхня Φ задається векторним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. На нормалях до поверхні Φ в одному напрямі відкладемо відрізки довжиною a. Кінці відкладених відрізків опишуть поверхню Φ*,

"паралельну" поверхні Ф. Знайти зображення коефіцієнтів першої квадратичної форми поверхні Φ^* через коефіцієнти першої та другої квадратичних форм поверхні Ф.

Розв'язання. Знайдемо, наприклад, зображення коефіцієнта F^* через коефіцієнти першої та другої квадратичних форм поверхні Ф. Векторне рівняння поверхні Φ^* має вигляд $\vec{r}^* = \vec{r} + a\vec{n}$. Тоді

$$\vec{r}_u^{\,*} = \vec{r}_u + a\vec{n}_u, \quad \vec{r}_v^{\,*} = \vec{r}_v + a\vec{n}_v;$$

$$F^* = (\vec{r}_u^{\,*}, \vec{r}_u^{\,*}) = (\vec{r}_u, \vec{r}_v) + a(\vec{r}_u, \vec{n}_v) + a(\vec{n}_u, \vec{r}_v) + a^2(\vec{n}_u, \vec{n}_v) =$$
$$= F - 2aM + a^2(\vec{n}_u, \vec{n}_v).$$

Для того, щоб знайти зображення скалярного добутку $(\vec{n}_u, \vec{n}_v)$ через коефіцієнти першої та другої квадратичних форм поверхні Ф, скористаємося дериваційними формулами Вейнгартена:

$$\vec{n}_i = b_i^j \vec{r}_j, \quad b_i^j = b_{ik}g^{jk}, \quad g^{jk}g_{ik} = \delta_i^j.$$

Отже,

$$\vec{n}_1 \equiv \vec{n}_u = -[(b_{11}g^{11} + b_{12}g^{12})\vec{r_1} + (b_{11}g^{21} + b_{12}g^{22})\vec{r_2}],$$

$$\vec{n}_2 \equiv \vec{n}_v = -[(b_{21}g^{11} + b_{22}g^{12})\vec{r_1} + (b_{21}g^{21} + b_{22}g^{22})\vec{r_2}].$$

Звідси випливає, що

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = (b_{11}g^{11} + b_{12}g^{12})(b_{21}g^{11} + b_{22}g^{12})g_{11} + (b_{11}g^{11} + b_{12}g^{12}) \times$$
$$\times (b_{21}g^{21} + b_{22}g^{22})g_{12} + (b_{11}g^{21} + b_{12}g^{22})(b_{21}g^{11} + b_{22}g^{12})g_{12} +$$
$$+ (b_{11}g^{21} + b_{12}g^{22})(b_{21}g^{21} + b_{22}g^{22})g_{22},$$

де

$$g_{11} = (\vec{r_1}, \vec{r_1}), g_{12} = g_{21} = (\vec{r_1}, \vec{r_2}), g_{22} = (\vec{r_2}, \vec{r_2}),$$

$$u \equiv u^1, v \equiv u^2.$$

Тоді, з урахуванням співвідношень $g^{jk}g_{ik} = \delta_i^j$ знаходимо, що

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 2[(b_{11}g^{11} + b_{12}g^{12})b_{21} + (b_{11}g^{21} + b_{12}g^{22})b_{22}].$$

Оскільки

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{\Delta}, g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{\Delta}, g^{22} = \frac{g_{11}}{\Delta}, \Delta = g_{11}g_{22} - g_{12}^2,$$

то

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{2}{\Delta}(GLM - FM^2 - FLN + EMN) =$$

$$= \frac{2}{\Delta}(GLM - 2FM^2 + FM^2 - FLN + EMN) =$$

$$= 2\left(F\frac{M^2 - LN}{\Delta} + 2M\frac{LG - 2FM + EN}{2\Delta}\right) = 2(2MH - KF),$$

де K – повна кривина поверхні Ф, H – середня кривина поверхні Ф. Отже,

$$F^* = F - 2aM + 2a^2(2MH - KF) = (1 - 2a^2K)F + 2a(2a^2H - 1)M.$$

Інші формули встановлюються аналогічно.

32. Однопараметрична сім'я ліній на поверхні задається диференціальним рівнянням $\dfrac{dv}{du} = f(u, v)$. Знайти формулу, яка визначає кут між цими та спряженими до них лініями. На якій поверхні кожна спряжена сітка є ортогональною?

Розв'язання. Умова спряженості напрямів (d): $\{du; dv\}$ та (δ): $\{\delta u; \delta v\}$, як відомо, має вигляд

$$Ldu\delta u + M(du\delta v + dv\delta u) + Ndv\delta v = 0,$$

або

$$L + M\left(\frac{dv}{du} + \frac{\delta v}{\delta u}\right) + N\frac{dv}{du}\frac{\delta v}{\delta u} = 0. \qquad (3.56)$$

Якщо однопараметрична сім'я ліній на поверхні задається диференціальним рівнянням $\frac{dv}{du} = f(u,v)$, то підставивши в (3.56) замість $\frac{dv}{du}$ функцію f, знайдемо ще одне диференціальне рівняння

$$\frac{\delta v}{\delta u} \equiv f_1 = -\frac{L + Mf}{M + Nf},$$

яке визначає напрям (δ), спряжений до напряму (d). Тоді кут між прямими (d) та (δ) знаходимо за формулою

$$\cos\theta = \frac{Edu\delta u + F(f + f_1)du\delta u + Gff_1du\delta u}{\sqrt{Edu^2 + 2Ffdu^2 + Gf^2du^2}\cdot\sqrt{E\delta u^2 + 2Ff_1\delta u^2 + Gf_1^2\delta u^2}} =$$

$$= \pm\frac{E + F(f + f_1) + Gff_1}{\sqrt{E + 2Ff + Gf^2}\cdot\sqrt{E + 2Ff_1 + Gf_1^2}}.$$

Зокрема, якщо поверхня віднесена до ліній кривини ($F = M = 0$), то формула набуває вигляду:

$$\cos\theta = \pm\frac{E - Gf\frac{L}{fN}}{\sqrt{E + Gf^2}\cdot\sqrt{E^2 + G\frac{L^2}{f^2N^2}}} =$$

$$= \pm\frac{EN - GL}{\sqrt{E + Gf^2}\cdot\sqrt{N^2f^2E + GL^2}}|f|.$$

Отже, сітка ортогональна (при довільному f) тільки тоді, коли $EN - GL = 0$ або $\frac{E}{L} = \frac{G}{N}$ ($L \neq 0$, $N \neq 0$). Це співвідношення характеризує сферу (враховуючи співвідношення $F = M = 0$).

33. З'ясувати, який геометричний зміст мають визначник та слід матриці коефіцієнтів Вейнгартена.

Розв'язання. Нагадаємо, що для коефіцієнтів Вейнгартена правильним є зображення: $\beta_i^j = b_{il}g^{lj}$, де b_{il} – коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні, а g^{lj} утворюють матрицю (g^{lj}), обернену до матриці (g_{lj}), яка складається з коефіцієнтів першої квадратичної форми поверхні, причому

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{\Delta},\quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{\Delta},\quad g^{22} = \frac{g_{11}}{\Delta},\quad \Delta = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 -$$

дискримінант першої квадратичної форми поверхні. Тоді

$$\det(\beta_i^j) = \det(b_{il})\det(g^{lj}) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22}\end{vmatrix} =$$

$$= (b_{11}b_{22} - b_{12}^2)\begin{vmatrix} \frac{g_{22}}{\Delta} & -\frac{g_{12}}{\Delta} \\ -\frac{g_{21}}{\Delta} & \frac{g_{11}}{\Delta}\end{vmatrix} = \frac{(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}{\Delta^2} =$$

$$= \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K.$$

Крім того,

$$\mathrm{spur}(\beta_i^j) = \beta_1^1 + \beta_2^2 = b_{1k}g^{k1} + b_{2k}g^{k2} =$$

$$= b_{11}g^{11} + b_{12}g^{21} + b_{21}g^{12} + b_{22}g^{22} = b_{11}\frac{g_{22}}{\Delta} - 2b_{12}\frac{g_{12}}{\Delta} + b_{22}\frac{g_{11}}{\Delta} =$$

$$= \frac{b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11}}{\Delta} = 2H.$$

Отже, визначник матриці коефіцієнтів Вейнгартена – це повна кривина поверхні, а слід цієї матриці – подвійна середня кривина поверхні.

34. Знайти формулу для обчислення скруту асимптотичної лінії поверхні.

Розв'язання. Нехай поверхня задається параметризацією $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$. За координатні лінії на поверхні візьмемо її асимптотичні лінії. Тоді

$$L = N = 0, \quad K = -\frac{M^2}{EG - F^2}.$$

Скрут асимптотичної u-лінії ($v = \text{const}$) обчислюємо за формулою

$$\chi(u) = \frac{(\vec{r_u}, \vec{r_{uu}}, \vec{r}_{uuu})}{|[\vec{r_u}, \vec{r_{uu}}]|^2} = \frac{(\vec{r_u}, [\vec{r_{uu}}, \vec{r}_{uuu}])}{|[\vec{r_u}, \vec{r_{uu}}]|^2}.$$

За допомогою деривайційних формул Гаусса знаходимо, що

$$\vec{r_{uu}} = \Gamma^1_{11}\vec{r_u} + \Gamma^2_{11}\vec{r_v} = \Gamma^i_{11}\vec{r_i},$$

$$\vec{r}_{uuu} = (\Gamma^1_{11})_u\vec{r_u} + \Gamma^1_{11}\vec{r_{uu}} + (\Gamma^2_{11})_u\vec{r_v} + \Gamma^2_{11}(\Gamma^1_{12}\vec{r_u} + \Gamma^2_{12}\vec{r_v} +$$

$$+ b_{12}\vec{n}) = \left(\frac{\partial \Gamma^i_{11}}{\partial u} + \Gamma^k_{11}\Gamma^i_{1k}\right)\vec{r_i} + \Gamma^2_{11}b_{11}\vec{n}, \vec{r_1} \equiv \vec{r_u}, \vec{r_2} \equiv \vec{r_v},$$

$$i \in \{1,2\}, k \in \{1,2\}.$$

Тоді

$$[\vec{r_{uu}}, \vec{r}_{uuu}] = [\Gamma^1_{11}\vec{r_u} + \Gamma^2_{11}\vec{r_v}, \left(\frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial u} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{12}\right)\vec{r_u} +$$

$$+ \left(\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial u} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{12}\right)\vec{r_v} + \Gamma^2_{11}b_{12}\vec{n}] =$$

$$= \Gamma^1_{11}\left(\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial u} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{12}\right)[\vec{r_u}, \vec{r_v}] + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{11}b_{12}[\vec{r_u}, \vec{n}] +$$

$$+ \Gamma^2_{11}\left(\frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial u} + (\Gamma^1_{11})^2 + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{12}\right)[\vec{r_v}, \vec{r_u}] + (\Gamma^2_{11})^2 b_{12}[\vec{r_v}, \vec{n}].$$

Звідси вже знаходимо, що

$$(\vec{r_u}, [\vec{r_{uu}}, \vec{r}_{uuu}]) = (\Gamma^2_{11})^2 b_{12}(\vec{r_u}, [\vec{r_v}, \vec{n}]) =$$

$$= (\Gamma^2_{11})^2 b_{12}([\vec{r_u}, \vec{r_v}], \vec{n}) = (\Gamma^2_{11})^2 M|[\vec{r_u}, \vec{r_v}]|$$

(тут враховано, що $\vec{n} = \frac{[\vec{r_u}, \vec{r_v}]}{|[\vec{r_u}, \vec{r_v}]|}$). Крім того,

$$[\vec{r_u}, \vec{r_{uu}}] = [\vec{r_u}, \Gamma^1_{11}\vec{r_u} + \Gamma^2_{11}\vec{r_v}] = \Gamma^2_{11}[\vec{r_u}, \vec{r_v}],$$

$$|[\vec{r_u}, \vec{r_v}]| = \sqrt{EG - F^2}, |[\vec{r_u}, \vec{r_{uu}}]|^2 = (\Gamma^2_{11})^2(EG - F^2).$$

Підставимо одержані співвідношення у формулу для обчислення скруту:

$$\chi(u) = \frac{(\Gamma^2_{11})^2 M|[\vec{r_u}, \vec{r_v}]|}{(\Gamma^2_{11})^2|[\vec{r_u}, \vec{r_v}]|^2} = \frac{M}{|[\vec{r_u}, \vec{r_v}]|} = \frac{M}{\sqrt{EG - F^2}} =$$

$$= \sqrt{-K}\operatorname{sgn} M.$$

Якщо вважати, що асимптотична лінія є v-лінією ($u = \text{const}$), то аналогічно знаходимо, що

$$\chi(v) = -\frac{M}{\sqrt{EG - F^2}} = -\sqrt{-K}\operatorname{sgn} M.$$

35. Довести, що поверхня з першою квадратичною формою

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(u^2 + v^2 + c^2)^2}$$

має сталу повну кривину.

Розв'язання. Повну кривину поверхні обчислимо за формулою

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

У даному випадку $E = G = \dfrac{1}{(u^2+v^2+c^2)^2}$, $F = 0$, $EG - F^2 = \dfrac{1}{(u^2+v^2+c^2)^4}$. Для обчислення $LN - M^2$ скористаємося формулою Гаусса:

$$LN - M^2 = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v \partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u \partial u} + \Gamma^i_{12}\Gamma^j_{12}g_{ij} - \Gamma^\alpha_{11}\Gamma^\beta_{22}g_{\alpha\beta},$$

$g_{11} = E$, $g_{12} = F$, $g_{22} = G$, Γ^j_{jk} – символи Христофеля 2-го роду, $\Gamma^i_{jk} = g^{il}\Gamma_{ljk}$, (g^{il}) – матриця, обернена до матриці $\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, Γ_{ljk} – Христофелі 1-го роду, які обчислюються за формулами

$$\Gamma_{ljk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l}\right).$$

Отже,

$$\Gamma_{111} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} = -\frac{2u}{(u^2+v^2+c^2)^3},$$

$$\Gamma_{112} = \Gamma_{121} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} = -\frac{2v}{(u^2+v^2+c^2)^3},$$

$$\Gamma_{122} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \equiv -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{2u}{(u^2+v^2+c^2)^3},$$

$$\Gamma_{211} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \equiv -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{2v}{(u^2+v^2+c^2)^3},$$

$$\Gamma_{212} = \Gamma_{221} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} = -\frac{2u}{(u^2+v^2+c^2)^3},$$

$$\Gamma_{222} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v} = -\frac{2v}{(u^2+v^2+c^2)^3}.$$

Оскільки $g^{11} = \dfrac{g_{22}}{\Delta}$, $g^{12} = g^{21} = -\dfrac{g_{12}}{\Delta}$, $g^{22} = \dfrac{g_{11}}{\Delta}$, $\Delta = EG - F^2$, то

$$g^{11} = g^{22} = (u^2+v^2+c^2)^2, \quad g^{12} = g^{21} = 0.$$

Перейдемо до обчислення Христофелів 2-го роду:

$$\Gamma^1_{jk} = g^{1l}\Gamma_{ljk} = g^{11}\Gamma_{1jk} + g^{12}\Gamma_{2jk},$$

$$\Gamma^2_{jk} = g^{2l}\Gamma_{ljk} = g^{21}\Gamma_{1jk} + g^{22}\Gamma_{2jk}.$$

Отже,

$$\Gamma^1_{11} = g^{11}\Gamma_{111} + g^{12}\Gamma_{211} = g^{11}\Gamma_{111} = -\frac{2u}{u^2+v^2+c^2},$$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = g^{11}\Gamma_{112} + g^{12}\Gamma_{212} = g^{11}\Gamma_{112} = -\frac{2v}{u^2+v^2+c^2},$$

$$\Gamma^1_{22} = g^{11}\Gamma_{122} + g^{12}\Gamma_{222} = g^{11}\Gamma_{122} = \frac{2u}{u^2+v^2+c^2},$$

$$\Gamma^2_{11} = g^{21}\Gamma_{111} + g^{22}\Gamma_{211} = g^{22}\Gamma_{211} = \frac{2v}{u^2+v^2+c^2},$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = g^{21}\Gamma_{112} + g^{22}\Gamma_{212} = g^{22}\Gamma_{212} = -\frac{2u}{u^2+v^2+c^2},$$

$$\Gamma^2_{22} = g^{21}\Gamma_{122} + g^{22}\Gamma_{222} = g^{22}\Gamma_{222} = -\frac{2v}{u^2+v^2+c^2}.$$

Знайдемо ще частинні похідні $\dfrac{\partial^2 E}{\partial v^2}$, $\dfrac{\partial^2 G}{\partial u^2}$:

$$\frac{\partial E}{\partial v} = -4(u^2+v^2+c^2)^{-3}v;\ \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} = -4\frac{u^2-5v^2+c^2}{(u^2+v^2+c^2)^4};$$

Аналогічно,

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} = -4\frac{v^2-5u^2+c^2}{(u^2+v^2+c^2)^4}.$$

Формула Гаусса у даному випадку набуває вигляду:

$$LN - M^2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v \partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u \partial u} + (\Gamma^1_{12}\Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22})g_{11} +$$

$$+(\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22})g_{22} = \frac{2(u^2 - 5v^2 + c^2)}{(u^2+v^2+c^2)^4} + \frac{2(v^2 - 5u^2 + c^2)}{(u^2+v^2+c^2)^4} +$$

$$+\frac{4(u^2+v^2)}{(u^2+v^2+c^2)^4} + \frac{4(u^2+v^2)}{(u^2+v^2+c^2)^4} = \frac{4c^2}{(u^2+v^2+c^2)^4}.$$

Тоді

$$K = \frac{4c^2(u^2+v^2+c^2)^4}{(u^2+v^2+c^2)^4} = 4c^2 = \text{const}\,.$$

Отже, поверхня має сталу повну кривину.

36. Показати, що геодезійна кривина лінії на поверхні є узагальненням поняття кривини плоскої лінії.

Розв'язання. Нехай лінія γ на поверхні задана рівнянням $u^2 = f(u^1)$. Тоді

$$f' = \frac{\dot u^2}{\dot u^1}, \quad f'' = \frac{\ddot u^2 \dot u^1 - \ddot u^1 \dot u^2}{(\dot u^1)^3}$$

і

$$k_g = \sqrt{\Delta}\times$$

$$\times\frac{|f'' + \Gamma^2_{11} + (2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})f' + (\Gamma^2_{22} - 2\Gamma^1_{12})(f')^2 - \Gamma^1_{22}(f')^3|}{(g_{11} + 2g_{12}f' + g_{22}(f')^2)^{3/2}}, \tag{3.57}$$

$$\Delta = g_{11}g_{22} - g^2_{12}.$$

Якщо лінія плоска, то за поверхню, до якої вона належить, візьмемо площину. Віднесемо цю площину до прямокутних декартових координат x, y. Тоді $ds^2 = dx^2 + dy^2$ і

тому $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = 0$. Отже, $\Gamma^k_{ij} = 0$ і формула (3.57) для геодезійної кривини плоскої лінії набуває вигляду

$$k_g = \frac{|f''|}{(1+(f')^2)^{3/2}} -$$

формула для кривини плоскої лінії.

37. Довести, що якщо координатна сітка поверхні утворена лініями кривини, то формули Петерсона-Кодацці набувають вигляду

$$\frac{\partial L}{\partial v} = H\frac{\partial E}{\partial v}, \quad \frac{\partial N}{\partial u} = H\frac{\partial G}{\partial u},$$

де H – середня кривина поверхні.

Розв'язання. Оскільки $E \equiv g_{11}$, $F \equiv g_{12} = g_{21}$, $G \equiv g_{22}$, $u \equiv u^1$, $v \equiv u^2$, $L \equiv b_{11}$, $M \equiv b_{12} = b_{21}$, $N \equiv b_{22}$ і поверхня віднесена до сітки ліній кривини, то $g_{12} = 0$, $b_{12} = 0$ і $g^{12} = g^{21} = 0$.

Запишемо першу формулу Петерсона-Кодацці (при $i = 1$):

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} = \Gamma^1_{12}b_{11} - \Gamma^2_{11}b_{22} = g^{1k}\Gamma_{k12}b_{11} - g^{2k}\Gamma_{k11}b_{22} = g^{11}b_{11}\Gamma_{112} -$$

$$-g^{22}b_{22}\Gamma_{211} = \frac{g_{22}b_{11}}{\Delta}\Gamma_{112} - \frac{g_{11}b_{22}}{\Delta}\Gamma_{211} =$$

$$= \frac{1}{2\Delta}(g_{22}b_{11} + g_{11}b_{22})\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}, \quad \Delta = g_{11}g_{22} - g^2_{12}.$$

Отже,

$$\frac{\partial L}{\partial v} = H\frac{\partial E}{\partial v}.$$

Друга формула Петерсона-Кодацці (при $i = 2$) набуває вигляду

$$\frac{\partial N}{\partial u} = H\frac{\partial G}{\partial u}.$$

38. Знайти геодезійні лінії та повну кривину півплощини Пуанкаре, тобто півплощини $v > 0$ з метрикою

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}.$$

Розв'язання. З вигляду метрики випливає, що

$$E = g_{11} = \frac{1}{v^2}, F = g_{12} = 0, G = g_{22} = \frac{1}{v^2}, \Delta = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \frac{1}{v^4}.$$

Отже,

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{\Delta} = v^2, g^{12} = -\frac{g_{12}}{\Delta} = 0, g^{22} = \frac{g_{11}}{\Delta} = v^2.$$

Далі обчислюємо символи Христофеля:

$$\Gamma^1_{11} = 0,\ \Gamma^1_{12} = -\frac{1}{v},\ \Gamma^1_{22} = 0,\ \Gamma^2_{11} = \frac{1}{v},\ \Gamma^2_{12} = 0,\ \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{v}.$$

Оскільки $g_{12} = 0$, $\dfrac{\partial^2 g_{22}}{(\partial u^1)^2} = 0$, то формула Гаусса набуває вигляду:

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{(\partial u^2)^2} + (\Gamma^1_{12})^2 g_{11} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}g_{22}.$$

Отже,

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = -\frac{1}{v^4}.$$

Звідси знаходимо повну кривину півплощини Пуанкаре:

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = -1.$$

Знайдемо тепер геодезійні лінії на півплощині Пуанкаре. Будемо шукати їх у вигляді $v = f(u)$. Рівняння геодезійної лінії знайдемо з умови рівності нулю геодезійної кривини:

$$f'' + \Gamma^2_{11} + (2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})f' + (\Gamma^2_{22} - 2\Gamma^1_{12})f'^2 - \Gamma^1_{22}f'^3 = 0.$$

У даному випадку це рівняння набуває вигляду

$$f'' + \frac{1}{v} + \frac{1}{v}f'^2 = 0,$$

або, оскільки $v = f$,

$$f'' + \frac{f'^2}{f} = -\frac{1}{f}.$$

Домноживши це рівняння на f дістанемо, що

$$ff'' + f'^2 = -1.$$

тобто $(ff')' = -1$. Інтегруючи це рівняння знаходимо, що

$$ff' = -u + u_0,$$

де u_0 – стала інтегрування. Тоді

$$\frac{fdf}{du} = -(u - u_0), \quad fdf + (u - u_0)du = 0.$$

Звідси

$$f^2 + (u - u_0)^2 = a^2,$$

тобто

$$v^2 + (u - u_0)^2 = a^2.$$

Отже, геодезійні лінії на півплощині Пуанкаре – це сім'я кіл з центрами у точках $(u_0; 0)$ та радіусами a.

Розглянемо також вертикальні прямі $u = u_0$. Якщо підставити параметричні рівняння цих прямих $\vec{\rho}(s) = \{u_0; s\}$ у рівняння

$$\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} = 0,$$

то переконаємося в тому, що лінії $u = u_0$, $v > 0$ також є геодезійними.

39. Нехай поверхня

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v); \quad u_1 < u < u_2, \quad v_1 < v < v_2,$$

має першу квадратичну форму $ds^2 = du^2 + B^2(u,v)dv^2$. Обчислити площу сферичного образу цієї поверхні.

Розв'язання. З цієї метою передусім обчислимо повну кривину поверхні за формулою

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

У даному випадку маємо, що $g_{11} = 0$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = B^2$. Тоді $g^{11} = 1$, $g^{12} = g^{21} = 0$, $g^{22} = \frac{1}{B^2}$. Для обчислення виразу $b_{11}b_{22} - b_{12}^2$ скористаємося формулою Гаусса. Для її застосування необхідно знайти коефіцієнти Христофеля Γ_{ij}^k поверхні. З формули

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right)$$

дістаємо

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \Gamma_{12}^1 = 0, \Gamma_{22}^1 = -B \cdot B_u, \Gamma_{11}^2 = 0, \Gamma_{12}^2 = \frac{B_u}{B}, \Gamma_{22}^2 = \frac{B_v}{B}.$$

Підставимо значення коефіцієнтів Христофеля у формулу Гаусса:

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 g_{22} =$$

$$= -\frac{2B_u^2 + 2B \cdot B_{uu}}{2} + \frac{B_u^2}{B^2} \cdot B^2 = -B \cdot B_{uu}$$

(інші доданки рівні нулю, оскільки $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^\alpha = 0$). Отже, $K = -\frac{B_{uu}}{B}$. Таким чином,

$$\sigma^* = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} |K| d\sigma = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} |K|\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}dudv =$$

$$= \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} |B_{uu}|dudv$$

(тут σ^* – площа сферичного образу заданої поверхні).

40. Нехай поверхня Φ, задана регулярною параметризацією $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, має першу квадратичну форму $ds^2 = du^2 + B^2(u)dv^2$. Знайти геодезійні лінії поверхні Φ.

Розв'язання. Рівняння геодезійної лінії шукатимемо у вигляді $u^2 = f(u^1)$, $u^1 = u$, $u^2 = v$, використовуючи умову рівності нулю геодезійної кривини k_g. Прирівнявши вираз для геодезійної кривини до нуля (див. (3.31)), знайдемо диференціальне рівняння, необхідне і достататнє для того, щоб рівняння $u^2 = f(u^1)$ визначало геодезійну лінію:

$$f'' = -\Gamma_{11}^2 - (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)f' + (-\Gamma_{22}^2 + 2\Gamma_{12}^1)f'^2 + \Gamma_{22}^1 f'^3.$$

Урахувавши явний вигляд символів Христофеля знаходимо, що

$$f'' = -\frac{2B'}{B}f' - B'Bf'^3.$$

Домножимо це рівняння на B^2. Тоді

$$B^2 f'' + 2B \cdot B'f' = -B' \cdot B^3 f'^3, \quad (B^2 f')' + (B^2 f')^3 \frac{B'}{B^3} = 0,$$

тобто

$$\frac{d(B^2 f')}{(B^2 f')^3} + \frac{dB}{B^3} = 0.$$

Інтегруючи і домножуючи на -2 знаходимо, що

$$\frac{1}{(B^2 f')^2} + \frac{1}{B^2} = c^2,$$

де c^2 – додатна стала інтегрування. Звідси $f' = \pm\dfrac{1}{B\sqrt{c^2B^2-1}}$. Таким чином,

$$v = f(u) = \pm\int\limits_0^u \frac{du}{B\sqrt{c^2B^2-1}} + c_1.$$

41. На поверхні введемо систему координат $u \equiv u^1$, $v \equiv u^2$ так, щоб координатні u-лінії були геодезійними і ортогональними до v-ліній. Таку систему координат на поверхні називають напівгеодезійною. Довести, що поверхню можна віднести до напівгеодезійної параметризації безліччю способів та знайти її першу квадратичну форму в цій параметризації.

Розв'язання. Загальний розв'язок диференціального рівняння геодезійних ліній залежить від двох сталих інтегрування, тобто сім'я геодезійних на поверхні двопараметрична. Тому через довільну фіксовану точку поверхні проходить безліч геодезійних ліній. Якщо деяку з них прийняти за координатну u-лінію, то вздовж неї $v \equiv u^2 = \text{const}$, $f(u^1) = \text{const}$, $f' = f'' = 0$ і тому рівняння (3.31) набуває вигляду $\Gamma^2_{11} = 0$. u-лінія проходить через довільну точку поверхні, тому $\Gamma^2_{11} = 0$ і $g_{12} = 0$ відносно побудованої параметризації в будь-якій точці поверхні. Очевидно, що умови $\Gamma^2_{11} = 0$, $g_{12} = 0$ є і достатніми для того, щоб координатні u-лінії були геодезійними і ортогональними до v-ліній. Оскільки

$$\Gamma^2_{11} = g^{21}\Gamma_{111} + g^{22}\Gamma_{211} = g^{22}\Gamma_{211} = \frac{g_{11}}{\Delta}\Gamma_{211} = 0,$$

$$\Delta = g_{11}g_{22} - g^2_{12} = g_{11}g_{22} > 0,$$

то $\Gamma_{211} = 0$ або $\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = 0$. Тому перша квадратична форма поверхні, віднесена до напівгеодезійної параметризації, має

вигляд

$$ds^2 = E(u)du^2 + G(u,v)dv^2.$$

Але $E(u) > 0$, $G(u,v) > 0$, тому, після введення нової змінної перша квадратична форма набуває простішого вигляду:

$$ds^2 = du^2 + G(u,v)dv^2.$$

42. Знайти повну кривину поверхні, віднесеної до напівгеодезійної параметризації.

Розв'язання. Якщо поверхня віднесена до напівгеодезійної системи криволінійних координат, то

$$g_{11} = 1, g_{12} = g_{21} = 0, g_{22} = G(u,v) \equiv G.$$

Отже,

$$\Delta = g_{11}g_{22} - g^2_{12} = G, g^{11} = 1, g^{12} = 0, g^{22} = \frac{1}{G},$$

$$\Gamma_{111} = \Gamma_{112} = 0, \Gamma_{122} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \Gamma_{211} = 0, \Gamma_{212} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},$$

$$\Gamma_{222} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}, \Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12} = 0, \Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \Gamma^2_{11} = 0,$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}, \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial v}.$$

За формулою Гаусса маємо

$$b \equiv b_{11}b_{22} - b^2_{12} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + G\left(\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2.$$

Тому

$$K = \frac{b}{\Delta} = \left(\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2G}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}.$$

Цю формулу можна подати ще так:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

43. Знайти першу квадратичну форму поверхні сталої повної кривини K.

Розв'язання. Нехай Φ – поверхня сталої повної кривини K і M – довільна звичайна точка на цій поверхні. В околі точки M введемо напівгеодезійну параметризацію, взявши за u-лінію довільну геодезійну лінію поверхні, яка проходить через точку M. Тоді (див. приклад 42) перша квадратична форма поверхні Φ набуває вигляду $ds^2 = du^2 + G(u,v)dv^2$. Можна вважати, що $G(0,v) = 1$ і $\frac{\partial G}{\partial u}(0,v) = 0$. Шукана функція $G \equiv G(u,v)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} + K\sqrt{G} = 0.$$

Функція $\sqrt{G}$ відносно змінної u при сталій кривині K є розв'язком лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами. Розв'язки такого рівняння відомі:

$$\sqrt{G} = \begin{cases} c_1 \cos(\sqrt{K}u) + c_2 \sin(\sqrt{K}u), & \text{якщо } K > 0, \\ c_1 + c_2 u, & \text{якщо } K = 0, \\ c_1 \operatorname{ch}(\sqrt{-K}u) + c_2 \operatorname{sh}(\sqrt{-K}u), & \text{якщо } K < 0, \end{cases}$$

де c_1, c_2 – довільні сталі, не залежні від u. За початковими умовами задачі знаходимо, що $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. Отже,

$$\sqrt{G} = \begin{cases} \cos(\sqrt{K}u), & \text{якщо } K > 0, \\ 1, & \text{якщо } K = 0, \\ \operatorname{ch}(\sqrt{-K}u), & \text{якщо } K < 0. \end{cases}$$

Значить, вигляд першої квадратичної форми поверхні сталої повної кривини K залежить від значення та знаку сталої K:

$$ds^2 = \begin{cases} du^2 + \cos^2(\sqrt{K}u), & \text{якщо } K > 0, \\ du^2 + dv^2, & \text{якщо } K = 0, \\ du^2 + \operatorname{ch}^2(\sqrt{-K}u)dv^2, & \text{якщо } K < 0. \end{cases}$$

Зауважимо, що поверхня сталої додатної повної кривини локально ізометрична сфері радіуса $\frac{1}{\sqrt{K}}$; поверхня нульової повної кривини локально ізометрична евклідовій площині; поверхня від'ємної сталої повної кривини локально ізометрична псевдосфері (площині Лобачевського).

Завдання для самостійної роботи

1. Скласти рівняння поверхні, яка утворюється півпрямими, що виходять з точки $(a; b; c)$ і перетинають параболу

$$z = 0, \quad y^2 = 2px.$$

2. Скласти параметричні рівняння еліпсоїда та еліптичного параболоїда.

3. Скласти рівняння циліндра з напрямною $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$ і твірними, паралельними вектору $\vec{a}$.

4. Скласти рівняння конуса з вершиною у початку системи координат і напрямною $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$.

5. Скласти параметричні рівняння циліндра з напрямною $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ і твірними, паралельними вісі Oz.

6. Скласти рівняння поверхні, яка утворюється при обертанні прямої $x = az$, $y = 0$ навколо вісі Oz.

7. Записати рівняння поверхні, утвореної дотичними до лінії $y^2 = x$, $x^2 = z$.

8. Скласти рівняння лінійчатої поверхні, твірні якої перпендикулярні до вектора $\vec{n}$ і перетинають пряму $\vec{r} = \vec{a} + u\vec{b}$ та лінію $\vec{\rho} = \vec{\rho}(v)$.

9. Скласти рівняння лінійчатої поверхні, твірні якої перетинають лінії $\vec{r_1} = \vec{r_1}(u)$, $\vec{r_2} = \vec{r_2}(u)$ і перпендикулярні до вектора $\vec{n}$.

10. Довести, що якщо через точку P поверхні проходить пряма, яка лежить на поверхні, то дотична площина поверхні в точці P містить дану пряму.

11. Скласти рівняння дотичної площини до сфери

$$x = a\cos v\sin u, \quad y = a\cos v\cos u, \quad z = a\sin v$$

у точці $(a; 0; 0)$.

12. Знайти рівняння дотичної площини у довільній точці прямого гелікоїда, заданого рівнянням $\vec{r} = \{u\cos v; u\sin v; hv\}$.

13. Довести, що якщо гладка поверхня Ф і площина α мають тільки одну спільну точку P, то площина α є дотичною площиною поверхні Ф у точці P.

14. Скласти рівняння нормалі псевдосфери

$$x = a\sin v\cos v, \quad y = a\sin u\sin v, \quad z = a\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2} + a\cos u$$

у довільній точці і знайти орт нормалі.

15. Довести, що нормалі поверхні

$$x = \varphi(u)\cos v, \quad y = \varphi(u)\sin v, \quad z = \psi(u)$$

перетинають вісь Oz.

16. Скласти рівняння дотичної площини поверхні $xy^2 + z^2 = 8$ у точці $(1; 2; 2)$. Знайти орт нормалі в цій точці.

17. Знайти поверхню, утворену нормалями поверхні $y = x\operatorname{tg} z$ вздовж прямої $y = x$, $z = \dfrac{\pi}{4}$ (гіперболічний параболоїд).

18. Довести, що всі дотичні площини поверхні, заданої рівнянням $z = x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, проходять через початок координат.

19. Довести, що якщо поверхня дотикається площини вздовж деякої лінії, то кожна точка цієї лінії є або параболічною точкою, або точкою сплощення.

20. Довести, що якщо пряма має з поверхнею другого порядку дотик другого порядку, то ця пряма належить поверхні.

21. Довести, що крива $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = 2t$ лежить на поверхні $x^2 + y^2 = e^z$ і її стична площина збігається з дотичною площиною поверхні.

22. Довести твердження: якщо всі нормалі поверхні перетинають деяку пряму, то поверхня є поверхнею обертання.

23. Довести, що якщо всі нормалі поверхні проходять через одну і ту ж точку, то поверхня є сферою або областю на сфері.

24. Нехай Ф – поверхня, P – точка на Ф, α – дотична площина у точці P. Довести твердження:

1) якщо точка P – еліптичного типу, то точки поверхні Ф, близькі до P, розміщені по один бік площини α;

2) якщо точка P – гіперболічного типу, то знайдуться точки поверхні Ф, близькі до P, які розміщені по різні боки площини α.

25. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі поверхні, утвореної бінормалями лінії $\vec{\rho} = \vec{\rho}(s)$.

26. Знайти точки на торі

$$\vec{\rho} = \{(R + r\cos u)\cos v; (R + r\cos u)\sin v; r\sin u\},$$

у яких нормаль паралельна вектору $\vec{a} = \{l; m; n\}$.

27. Знайти дотичні площини поверхні $z = x^4 - 2xy^3$, перпендикулярні до вектора $\vec{a} = \{-2; 6; 1\}$. Знайти точку дотику. Скласти рівняння нормалі в точці $(0; -1; 0)$.

28. Поверхня Ф утворена бінормалями лінії γ. Довести, що в точках лінії γ дотична площина до Ф збігається зі спрямною площиною лінії γ, а нормаль до поверхні є головною нормаллю лінії γ.

29. Скласти рівняння стичної площини кривої перетину сфери $x^2+y^2+z^2=9$ з гіперболічним циліндром $x^2-y^2=3$ у точці $(2;1;2)$.

30. Визначити порядок дотику прямої $x=-3+4t$, $y=0$, $z=2t$ з поверхнею $x^2+y^2-2z^2-2xz-yz+4xy+3x-5y=0$ у точці $(-3;0;0)$.

31. Визначити порядок дотику кривої $z=axy$, $axz=y+1$ з поверхнею $ax=zy$ у точці $(0;-1;0)$.

32. Знайти обвідну сім'ї сфер $x^2+y^2-(z-c)^2=1$.

33. Знайти обвідну і ребро звороту сім'ї сфер, які проходять через початок координат і їхні центри належать кривій $\vec{r}(t)=\{t^3;t^2;t\}$.

34. Показати, що сім'я поверхонь, яка визначається рівнянням $\varphi(x,y,z)=\mu$, де φ – регулярна функція змінних x, y, z, не має обвідної.

35. Знайти обвідну і характеристики сім'ї площин, віддалених від заданої прямої на віддаль h.

36. Знайти обвідну та характеристики сім'ї кругових циліндрів сталого радіуса:

а) $(x-C)^2+y^2=r^2$; б) $(x-C)^2+(y-C)^2=r^2$.

37. Знайти перші квадратичні форми поверхонь другого порядку:

1) $x^2+y^2+z^2=r^2$; 2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$; 4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$;

5) $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$; 6) $\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2z$;

7) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$; 8) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

9) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$; 10) $y^2=2px$.

38. Знайти перші квадратичні форми поверхонь:

1) $\vec{r}=\vec{\rho}(s)+v\vec{a}$;

2) $\vec{r}=v\vec{\rho}(s)$;

3) $\vec{r}=\vec{\rho}(s)+\vec{\nu}(s)\cos\varphi+\vec{\beta}(s)\sin\varphi$;

4) $\vec{r}=\vec{\rho}(s)+v\vec{\tau}(s)$;

5) $\vec{r}=\vec{\rho}(s)+v\vec{\nu}(s)$;

6) $\vec{r}=\vec{\rho}(s)+v\vec{\beta}(s)$.

39. Обчислити першу квадратичну форму поверхні, утвореної обертанням кривої $x=f(u)$, $z=\varphi(u)$ навколо вісі Oz. Розглянути часткові випадки:

1) $f(u)=R+r\cos u$, $\varphi(s)=\sin u$ (тор);

2) $f(u)=s\sin u$, $\varphi(u)=a\left(\ln\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}+\cos u\right)$ (псевдосфера);

3) $f(u)=a\operatorname{ch}u$, $\varphi(u)=c\operatorname{sh}u$ (однопорожнинний гіперболоїд обертання).

40. Знайти кут між координатними лініями $x=x_0$, $y=y_0$ на поверхні $z=axy$.

41. Довести, що на поверхні

$$x=u(3v^2-u^2-\frac{1}{3}),\quad y=v(3u^2-v^2-\frac{1}{3}),\quad z=2uv$$

координатні лінії ортогональні.

42. Знайти кут між лініями $u+v=0$, $u-v=0$ на поверхні

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=av.$$

43. Знайти кут між лініями $u+v=0$ та $u=\operatorname{tg}v$ на поверхні $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=u+v$.

44. Знайти кут між лініями $u+v=0$, $u-v=0$ на поверхні $x=\operatorname{ch}u\cos v$, $y=\operatorname{ch}u\sin v$, $z=u$.

45. На поверхні з першою квадратичною формою $ds^2=du^2+dv^2$ знайти кут між лініями $2u=v$ та $2u=-v$.

46. Знайти кут між лініями $v=u+1$ та $v=3-u$ на поверхні $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=u^2$.

47. На прямому гелікоїді $\vec{r} = \{u\cos v; u\sin v; hv\}$ знайти лінії, які ділять навпіл кути між координатними лініями.

48. Знайти периметр та внутрішні кути криволінійного трикутника, обмеженого лініями $u = \pm v^2$, $v = 2$ на поверхні

$$\vec{r} = \{u\cos v; u\sin v; 2v\}.$$

49. Обчислити площу чотирикутника, розміщеного на гелікоїді $\vec{r} = \{au\cos v; au\sin v; hv\}$ і обмеженого кривими $u = 0$, $u = \frac{h}{a}$, $v = 0$, $v = 1$.

50. На поверхні з першою квадратичною формою $ds^2 = du^2 + \frac{1}{4}\operatorname{sh}^2 u dv^2$ знайти довжину дуги кривої $2u = v$ між точками $P_1(u_1; v_1)$ і $P_2(u_2; v_2)$.

51. Знайти довжину лінії $v = \ln\operatorname{tg}\frac{u}{2}$ на поверхні

$$x = \sin u\cos v, \quad y = \sin u\sin v, \quad z = \ln\operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u$$

між точками $P_1(u_1; v_1)$ та $P_2(u_2; v_2)$.

52. Знайти другу квадратичну форму поверхонь:

1) $\vec{r} = \{r\cos u\cos v; r\sin u\cos v; r\sin v\}$;
2) $\vec{r} = \{(R + r\cos u)\cos v; (R + r\cos u)\sin v; r\sin u\}$;
3) $\vec{r} = \{v\cos u; v\sin u; ku\}$;
4) $\vec{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{a}$;
5) $\vec{r} = v\vec{\rho}(s)$.

53. Знайти нормальну кривину параболоїда $z = ax^2 - by^2$ у точці $P(0;0)$ у напрямку $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$.

54. Знайти кривину нормального перетину поверхні $y = \frac{1}{2}x^2$ у точці $M(2;2;4)$ та в напрямку дотичної до лінії $y = \frac{1}{2}x^2$, $z = x^2$.

55. Знайти кривину лінії перетину поверхні $z = xy$ площиною $x + y + z - 3 = 0$ у точці $M(1;1;1)$.

56. Знайти кривину лінії перетину поверхні $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ площиною $2x - y + z = 0$ у точці $(0;0;0)$.

57. На поверхні $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$ знайти кривину нормального перетину у точці $M(u = 1, v = 1)$ та у напрямку дотичної до лінії $v = u^2$.

58. Довести, що при будь-якій параметризації площини її друга квадратична форма тотожно рівна нулю.

59. Довести, що при довільній параметризації сфери її перша квадратична форма пропорційна другій.

60. Знайти середню та повну кривини параболоїда $z = axy$ у точці $(0;0;0)$.

61. Знайти головні кривини поверхні $z = a(x^2 + y^2)$ у точці $(0;0;0)$.

62. Обчислити середню кривину катеноїда

$$z = a\operatorname{ch}\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a}}, \quad a > 0.$$

63. Визначити тип точок: 1) еліпсоїда; 2) гіперболоїдів; 3) параболоїдів; 4) циліндрів; 5) конусів.

64. Знайти області точок еліптичного, гіперболічного і параболічного типів на торі.

65. Визначити тип точок на поверхнях:

1) $z = a^2x^4 + b^2y^4$; 2) $z = x^4 + y^4 + x^2y^2$; 3) $y = x^4$.

66. Знайти повну і середню кривини поверхні, утвореної головними нормалями заданої лінії.

67. Задана поверхня обертання

$$\vec{r}(x, v) = \{x; f(x)\cos v; f(x)\sin v\}, \quad f(x) > 0.$$

Підібрати функцію f так, щоб середня кривина $H = 0$ на всій поверхні.

68. Знайти асимптотичні лінії поверхні $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

69. Знайти лінії кривини поверхні $e^{-z} = \cos x \cdot \cos y$.

70. Довести, що для поверхні, утвореної головними нормалями просторової лінії γ, лінія γ є асимптотичною лінією.

71. Довести, що якщо у деякій точці поверхні середня кривина рівна нулю, то асимптотичні напрями у тій точці перпендикулярні.

72. Знайти асимптотичні лінії поверхні $z = f(x) - f(y)$ та визначити функцію f так, щоб отримані дві сім'ї асимптотичних ліній були ортогональними.

73. Довести, що лінія $x = \dfrac{2}{1+t}$, $y = \dfrac{2}{1-t}$, $z = t$ є асимптотичною лінією на поверхні $z = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2}$.

74. Довести, що якщо лінія кривини плоска, то площина, в якій вона лежить, перетинає поверхню під сталим кутом.

75. Знайти асимптотичні лінії на поверхні $x = \operatorname{ch} u \cos v$, $y = \operatorname{ch} u \sin v$, $z = u$.

76. Знайти асимптотичні лінії на поверхні, утвореної прямою, яка переміщуючись паралельно площині XOY перетинає вісь Oz та лінію $x = u$, $y = u^2$, $z = u^3$.

77. Знайти асимптотичні лінії поверхні $z = xy^3 - yx^3$, які проходять через точку $M(1;2;6)$.

78. Знайти асимптотичні лінії поверхні $z = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

79. Знайти асимптотичні лінії поверхні $z = y\varphi(x) + \psi(x)$.

80. Знайти асимптотичні лінії поверхонь:

1) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = \dfrac{6}{u}$;

2) $\vec{r} = \{u\cos v; u\sin v; f(u)\}$;

3) $\vec{r} = \{(1+u)\cos v; (1-u)\sin v; u\}$;

4) $x = 3u + 3v$, $y = 3u^2 + 3v^2$, $z = 2u^3 + 2v^3$;

5) $x = \dfrac{v}{\operatorname{ch} u}$, $y = \dfrac{uv}{\operatorname{ch} u}$, $z = \operatorname{arctg} v$;

6) $z = \dfrac{1}{x^2+y^2}$;

7) $z = y\cos x$;

8) $x^2y^2z + x^2 - y^2 = 0$;

9) $z^4 = x^2 + y^2$;

10) $z = x \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{2} y \ln(x^2+y^2)$.

81. Поверхня називається мінімальною, якщо її середня кривина тотожно рівна нулю. Довести, що поверхня, відмінна від площини, мінімальна тоді і тільки тоді, коли її асимптотична сітка ортогональна.

82. Знайти скрут асимптотичних ліній, розміщених на поверхнях:

1) $z = \dfrac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$;

2) $\vec{r} = \{u\cos v; u\sin v; f(u)\}$;

3) $\vec{r} = \{u\cos v; u\sin v; hv\}$.

83. Знайти скрут асимптотичних ліній на поверхні, утвореній головними нормалями неплоскої кривої.

84. Знайти спряжену сім'ю ліній до сім'ї ліній v на поверхні

$$x = u\cos v, \quad y = u^2\sin v, \quad z = hv.$$

85. Задана поверхня $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = 2uv$ і сім'я ліній $u^2 - cv^2 = c$. Знайти диференціальне рівняння спряженої сім'ї.

86. Задана поверхня $x = \alpha(u)$, $y = \beta(v)$, $z = \gamma(u) + \varepsilon(v)$. Довести, що лінії u та v утворюють спряжену сітку, причому кожна з цих ліній плоска.

87. Знайти лінії кривини поверхні $x = u^2+v^2$, $y = u^2-v^2$, $z = v$.

88. Знайти лінії кривини поверхні $e^{-z} = \cos x \cdot \cos y$.

89. Довести, що прямолінійна твірна скісної лінійчатої поверхні не може бути лінією кривини.

90. На поверхні $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ знайти сім'ю ліній, спряжену до сім'ї $y = \text{const}$.

91. Знайти лінії, спряжені до сім'ї ліній $u + v = c$ на поверхні $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$.

92. Знайти лінії кривини на довільній циліндричній поверхні, довільній конічній поверхні.

93. Знайти лінії кривини гіперболічного параболоїда, заданого рівнянням

$$\vec{r} = \{\sqrt{p}(u+v); \sqrt{q}(u-v); 2uv\}.$$

94. Знайти параметричні рівняння ліній кривини та асимптотичних ліній поверхні Ф: $x = u(3v^2 - u^2 - \frac{1}{3})$, $y = v(3u^2 - v^2 - \frac{1}{3})$, $z = 2uv$, які проходять через точку $M_0(u = 0, v = 0)$.

95. Нехай γ – плоска крива на поверхні Ф і у всіх точках лінії γ нормалі до Ф перпендикулярні до площини цієї кривої. Довести, що γ є лінією кривини на Ф і у всіх точках лінії γ повна кривина поверхні рівна нулю.

96. Довести, що якщо нормалі до поверхні Ф вздовж деякої її лінії γ паралельні, то всі точки лінії γ є параболічними точками поверхні.

97. Довести, що сферичне зображення плоскої лінії кривини поверхні є колом або частиною кола.

98. Довести, що якщо одна із головних кривин поверхні Ф стала і відмінна від нуля, то поверхня Ф є обвідною однопараметричної сім'ї сфер постійного радіуса.

99. Довести, що на поверхні від'ємної повної кривини лінії кривини у кожній точці ділять навпіл кути між асимптотичними лініями, які проходять через цю точку.

100. Знайти лінії кривини поверхонь:

1) $x(x^2 + y^2 + z^2) - 2a(x^2 + y^2) = 0$;

2) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$;

3) $x^2 + y^2 + z^2 = xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$, де f – довільна функція класу $C^{(2)}$.

101. Чому рівна геодезійна кривина аисмтпотичної лінії поверхні?

102. Знайти геодезійну кривину ліній кривини поверхні.

103. Лінія перетину двох поверхонь є геодезійною на обох поверхнях. Довести, що ця лінія є прямою.

104. Довести, що кожна плоска геодезійна лінія є лінією кривини поверхні.

105. Показати, що кожна геодезійна лінія перетинає прямолінійні твірні циліндра під сталим кутом.

106. Знайти геодезійну кривину гвинтової лінії

$$\vec{r}(v) = \{a\cos v; a\sin v; hv\}:$$

а) на гелікоїді $x = bu\cos v$, $y = bu\sin v$, $z = hv$;

б) на циліндрі $x = a\cos v$, $y = a\sin v$, $z = u$.

107. Знайти символи Христофеля гелікоїда

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = hv.$$

108. Координатна сітка на поверхні складається з ліній кривини. Написати рівняння Петерсона-Кодацці.

109. Знайти площу сферичного образу еліптичного параболоїда.

110. Знайти сферичний образ тора.

111. Нехай T – трикутник з площею S на псевдосфері, сторони якого є геодезійними лініями псевдосфери. Повна кривина псевдосфери $K = -a^2$. Знайти суму внутрішніх кутів трикутника T.

112. На площині з метрикою

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{ch}^2 u dv^2, \quad -\infty < u < +\infty, -\infty < v < +\infty,$$

T – трикутник, утворений геодезійними в цій же метриці, має площу S. Знайти суму його внутрішніх кутів.

113. Знайти величину $\iint\limits_{\Phi} |K| ds$, де K – повна кривина поверхні Φ, dS – елемент площі Φ, якщо Φ: а) еліпсоїд; б) еліптичний параболоїд; в) тор.

114. Написати дериваційні рівняння Вейнгартена для поверхні $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

115. Що являє собою поверхня, для якої матриця коефіцієнтів Вейнгартена одинична?

116. Записати дериваційні рівняння Гаусса-Вейнгартена для поверхні $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$.

117. Знайти геодезійну кривину кола радіуса r, яке належить сфері радіуса $R > r$.

118. Довести, що кожна пряма на поверхні є її геодезійною лінією.

119. Чи існує поверхня, для якої квадратичні форми

$$\varphi_1 = \frac{2dudv}{\sqrt{1+u^2+v^2}}, \quad \varphi_2 = (1+v^2)du^2 + 2uvdudv + (1+u^2)dv^2$$

є основними квадратичними формами?

Вказівка: скористатися теоремою Боне.

120. Знайти поверхню, для якої квадратичні форми $\varphi_1 = du^2 + dv^2$ і $\varphi_2 = 0$ були б основними квадратичними формами за початковими умовами

$$\vec{r}(u=0, v=0) = \vec{j}, \quad \left.\frac{\partial r}{\partial u}\right|_{\substack{u=0,\\ v=0}} = \vec{i}, \quad \left.\frac{\partial r}{\partial v}\right|_{\substack{u=0,\\ v=0}} = \vec{k}.$$

Розділ 4. Елементи тензорного числення

Поняття тензора відноситься до лінійної алгебри, хоча тензори широко використовуються в аналітичній геометрії, кристалографії, механіці суцільних середовищ, фізиці напівпровідників, диференціальному численні. Тут ми наведемо алгебраїчний підхід до визначення поняття тензора та розглянемо елементи тензорного аналізу.

§4.1. Ковектори, спряжений простір

Нехай V_n – n-вимірний векторний простір над полем $\mathbb{R}$.

Означення 4.1. *Ковектором простору V_n називається лінійна форма, задана на V_n, тобто лінійне відображення (лінійний функціонал) ω: $V_n \to \mathbb{R}$.*

Символом V_n' позначимо множину всіх ковекторів простору V_n. Введемо лінійні операції над ковекторами:

$$\forall \{\omega, \xi\} \subset V_n' \ \forall \vec{v} \in V_n : \ (\omega + \xi)(\vec{v}) := \omega(\vec{v}) + \xi(\vec{v});$$

$$\forall \omega \in V_n' \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall \vec{v} \in V_n : \ (\alpha\omega)(\vec{v}) := \alpha\omega(\vec{v}).$$

Легко бачити, що V_n' є також лінійним простором; при цьому V_n' називається **спряженим** або **двоїстим простором** для V_n.

Нехай

$$\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\} - \tag{4.1}$$

базис простору V_n. Для кожного набору чисел $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ побудуємо ковектор $\omega \in V_n'$, поклавши

$$\omega(\vec{e}_i) := \alpha_i, \quad \forall \vec{v} = \sum_i v^i \vec{e}_i \in V_n :$$

$$\omega(\vec{v}) := \sum_i v^i \omega(\vec{e}_i) = \sum_i v^i \alpha_i.$$

Внаслідок цієї конструкції виберемо n ковекторів $\omega^1, \ldots, \omega^n$, поклавши

$$\omega^j(\vec{e}_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{4.2}$$

Ковектор ω^i ставить у відповідність вектору $\vec{v} = \sum_i v^i \vec{e}_i$ його i-ту координату v^i.

Теорема 4.1. *Ковектори $\omega^1, \ldots, \omega^n$, які визначаються рівністю (4.2), утворюють базис у просторі V_n'. Розмірності просторів V_n та V_n' співпадають.*

Доведення. Передусім переконаємося в тому, що набір ковекторів $\omega^1, \ldots, \omega^n$ утворює лінійно незалежну систему. Нехай $\sum_i \beta_i \omega^i = 0$. Потрібно довести, що $\beta_i = 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Застосуємо цей ковектор до вектора $\vec{e}_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$0 = \Big(\sum_i \beta_i \omega^i\Big)(\vec{e}_j) = \sum_i \beta_i \omega^i(\vec{e}_j) = \beta_j, \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Нехай тепер ω – довільний ковектор. Застосуємо його до векторів базису (4.1); в результаті дістанемо набір із n чисел: $\omega(\vec{e}_i) = \alpha_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Доведемо, що ковектор $\omega' = \sum_i \alpha_i \omega^i$ співпадає з ω:

$$\omega'(\vec{e}_j) = \Big(\sum_i \alpha_i \omega^i\Big)(\vec{e}_j) = \sum_i \alpha_i \omega^i(\vec{e}_j) = \sum_i \alpha_i \delta_j^i = \alpha_j,$$

$$j \in \{1, \ldots, n\},$$

тобто $\omega'(\vec{e}_j) = \omega(\vec{e}_j)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Отже, $\omega = \omega'$. Це означає, що ковектори $\omega^1, \ldots, \omega^n$ породжують весь простір V_n'.

Означення 4.2. *Базис $\omega^1, \ldots, \omega^n$ простору ковекторів V_n' називається взаємним до базису (4.1) простору векторів V_n.*

З'ясуємо, як змінюються ковектори взаємного базису, а також координати ковекторів при заміні базису (4.1). Нехай $\{\vec{e}\,'_1, \ldots, \vec{e}\,'_n\}$ – інший базис у V_n, пов'язаний із базисом (4.1) матрицею переходу

$$(\alpha_i^j) = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \ldots & \alpha_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \ldots & \alpha_n^n \end{pmatrix},$$

тобто

$$\vec{e}\,'_j = \sum_i \alpha_j^i \vec{e}_i, \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Нехай $\omega'^1, \ldots, \omega'^n$ – відповідний взаємний базис у V_n', тобто $\omega'^i(\vec{e}\,'_j) = \delta_j^i$ і $\omega'^i = \sum_j \beta_j^i \omega^j$. Тоді

$$\delta_j^i = \omega'^i(\vec{e}\,'_j) = \sum_k \beta_k^i \omega^k \Big(\sum_s \alpha_j^s \vec{e}_s\Big) = \sum_{k,s} \beta_k^i \alpha_j^s \omega^k(\vec{e}_s) =$$

$$= \sum_{k,s} \beta_k^i \alpha_j^s \delta_s^k = \sum_k \beta_k^i \alpha_j^k.$$

Отже, $\sum_k \beta_k^s \alpha_j^k = \delta_j^i$. Це означає, що матриця (β_k^i) є оберненою до матриці (α_j^k). Таким чином, якщо базис (4.1) замінити новим базисом з матрицею переходу (α_j^i), то відповідні взаємні базиси пов'язані співвідношенням $\omega'^i = \sum_j \beta_j^i \omega^j$, де (β_j^i) – матриця, обернена до матриці (α_j^i).

Зауваження 4.1. *Починаючи з простору V_n' можна будувати новий простір $(V_n')' := V_n''$. Виявляється, що $V_n'' \simeq V_n$, тобто V_n'' ізоморфний простору V_n.*

§4.2. Тензори на векторному просторі

Означення 4.3. *Тензором типу (r,s), $\{r,s\} \subset \mathbb{Z}_+$, на векторному просторі V_n називається відображення*

$$T: \underbrace{V_n \times \ldots \times V_n}_{r} \times \underbrace{V'_n \times \ldots \times V'_n}_{s} \to \mathbb{R},$$

лінійне по кожному аргументу (якщо інші аргументи фіксовані).

Відображення

$$(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \xi^1, \ldots, \xi^s) \to T(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \xi^1, \ldots, \xi^s) \in \mathbb{R}$$

називають ще полілінійним відображенням ($\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r \in V_n$: $\xi^1, \ldots, \xi^s \in V'_n$). Число $r+s$ називають **валентністю** тензора, r — **коваріантністю**, s — **контраваріантністю**. Тензори типу (r,r) називають **афінорами**, типу $(r,0)$ або $(0,s)$, $r \neq 0$, $s \neq 0$, — **чистими**, типу (r,s) — **змішаними**.

Наприклад, ковектор ω: $V_n \to \mathbb{R}$ — лінійне відображення, тобто це тензор типу $(1,0)$; вектор $\vec{v} \in V_n$ внаслідок зауваження 4.1 можна ототожнити з ковектором на V'_n, тобто $\vec{v}$: $V'_n \to \mathbb{R}$ — лінійне відображення або тензор типу $(0,1)$; будь-яка білінійна форма s: $V_n \times V_n \to \mathbb{R}$ — тензор типу $(2,0)$.

Символом $T^s_r(V_n)$ позначимо множину всіх тензорів типу (r,s) на векторному просторі V_n. Як показують наведені вище приклади, $T^0_1(V_n) = V'_n$, $T^1_0(V_n) = V_n$.

Використовуючи базиси (4.1), (4.2) побудуємо базис у просторі $T^s_r(V_n)$. Нехай $\Omega^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$ — тензор типу (r,s), який діє на набори векторів та ковекторів базисів (4.1) та (4.2) за правилом:

$$\Omega^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}(\vec{e}_{k_1}, \ldots, \vec{e}_{k_r}, \omega^{l_1}, \ldots, \omega^{l_s}) = \delta^{i_1}_{k_1} \ldots \delta^{i_r}_{k_r} \delta^{l_1}_{j_1} \ldots \delta^{l_s}_{j_s}.$$

Доведемо, що тензори $\Omega^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$ — лінійно незалежні. Нехай

$$\sum \alpha^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r} \Omega^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} = 0.$$

Цю лінійну комбінацію застосуємо до довільного набору векторів та ковекторів базисів (4.1) і (4.2):

$$0 = \sum \alpha^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r} \Omega^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}(\vec{e}_{k_1}, \ldots, \vec{e}_{k_r}, \omega^{l_1}, \ldots, \omega^{l_s}) =$$

$$= \sum \alpha^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r} \delta^{i_1}_{k_1} \ldots \delta^{i_r}_{k_r} \delta^{l_1}_{j_1} \ldots \delta^{l_s}_{j_s} = \alpha^{l_1\ldots l_s}_{k_1\ldots k_r}.$$

Отже, вказані тензори утворюють базис у просторі $T^s_r(V_n)$. Оскільки кожний із $r+s$ індексів перебігає незалежно один від одного n значень, то кількість таких тензорів дорівнює n^{r+s}, тобто розмірність простору $T^s_r(V_n)$ дорівнює n^{r+s}.

Нехай $T \in T^s_r(V_n)$. Числа

$$T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r} := T(\vec{e}_{i_1}, \ldots, \vec{e}_{i_r}, \omega^{j_1}, \ldots, \omega^{j_s}) \in \mathbb{R}$$

називаються **координатами** (або **компонентами**) тензора T в базисі $\vec{e}_1$, …, $\vec{e}_n$ та взаємному базисі ω^1, …, ω^n. **Задання тензора рівносильне заданню всіх його компонент в деякому базисі**. Справді, нехай $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\} \subset V_n$, $\{\xi^1, \ldots, \xi^s\} \subset V'_n$, $\vec{v}_i = v^j_i \vec{e}_j \equiv \sum\limits_j v^j_i \vec{e}_j$, $\xi^k = \xi^k_j \omega^j \equiv \sum\limits_j \xi^k_j \omega^j$, $i \in \{1, \ldots, r\}$, $k \in \{1, \ldots, s\}$. Тоді

$$T(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \xi^1, \ldots, \xi^s) = T(v^{i_1}_1 \vec{e}_{i_1}, \ldots, v^{i_r}_r \vec{e}_{i_r}, \xi^1_{j_1}\omega^{j_1}, \ldots, \xi^s_{j_s}\omega^{j_s}) =$$

$$= v^{i_1}_1 \ldots v^{i_r}_r \xi^1_{j_1} \ldots \xi^s_{j_s} T(\vec{e}_{i_1}, \ldots, \vec{e}_{i_r}, \omega^{j_1}, \ldots, \omega^{j_s}) =$$

$$= T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r} v^{i_1}_1 \ldots v^{i_r}_r \xi^1_{j_1} \ldots \xi^s_{j_s}.$$

Зокрема, значення тензора на довільному наборі аргументів однозначно визначається компонентами цього тензора та координатами аргументів у фіксованому базисі.

Встановимо зв'язок між компонентами тензора в різних базисах. Нехай $\alpha = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, $\beta = \{\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_n\}$ — два базиси простору V_n, $\{e^1, \ldots, e^n\}$ і $\{\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n\}$ — взаємні їм базиси у просторі V'_n відповідно, $C = (c^i_j)$ – матриця переходу від базису α до базису β, $D = (d^i_j)$ – обернена до неї матриця. Тоді, за означенням матриці переходу,

$$\vec{\varepsilon}_i = c^j_i \vec{e}_j, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Для довільного $\vec{v} \in V_n$ маємо, що $v = v^i \vec{e}_i$. З іншого боку, $\vec{v} = \tilde{v}^j \vec{\varepsilon}_j = \tilde{v}^j (c^i_j \vec{e}_i) = (\tilde{v}^j c^i_j) \vec{e}_i$; отже, $(v^i - \tilde{v}^j c^i_j)\vec{e}_i = \vec{0}$. Внаслідок лінійної незалежності базисних векторів маємо, що $v^i = c^i_j \tilde{v}^j$, або $\tilde{v}^j = d^j_i v^i$. Тоді $\varepsilon^j(\vec{v}) = d^j_i e^i(\vec{v})$, тобто

$$\varepsilon^j = d^j_i e^i, \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Нехай тепер T – тензор типу (r, s) на V_n, $T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}$ та $\tilde{T}^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}$ – його компоненти в базисах α та β відповідно. Тоді, згідно з означенням компонент тензора,

$$\begin{aligned}
\tilde{T}^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} &= T(\vec{\varepsilon}_{i_1}, \ldots, \vec{\varepsilon}_{i_r}, \varepsilon^{j_1}, \ldots, \varepsilon^{j_s}) = \\
&= T(c^{p_1}_{i_1} \vec{e}_{p_1}, \ldots, c^{p_r}_{i_r} \vec{e}_{p_r}, d^{j_1}_{q_1} e^{q_1}, \ldots, d^{j_s}_{q_s} e^{q_s}) = \\
&= c^{p_1}_{i_1} \ldots c^{p_r}_{i_r} d^{j_1}_{q_1} \ldots d^{j_s}_{q_s} T(\vec{e}_{p_1}, \ldots, \vec{e}_{p_r}, e^{q_1}, \ldots, e^{q_s}) = \\
&= c^{p_1}_{i_1} \ldots c^{p_r}_{i_r} d^{j_1}_{q_1} \ldots d^{j_s}_{q_s} T^{q_1 \ldots q_s}_{p_1 \ldots p_r}.
\end{aligned}$$

Таким чином, при заміні базису компоненти тензора T змінюються за законом

$$\tilde{T}^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} = c^{p_1}_{i_1} \ldots c^{p_r}_{i_r} d^{j_1}_{q_1} \ldots d^{j_s}_{q_s} T^{q_1 \ldots q_s}_{p_1 \ldots p_r}. \tag{4.3}$$

Правильним є наступне твердження.

Теорема 4.2. *Нехай кожному базису простору V_n відповідає набір чисел $T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}$, які при зміні базису змінюються за законом (4.3). Тоді існує єдиний тензор T типу (r, s), компоненти якого в довільному фіксованому базисі збігаються з відповідними елементами набору чисел, який відповідає цьому базису.*

Доведення. Зафіксуємо базис $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ простору V_n. Нехай $\{T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}\}$ – відповідний набір чисел. Задамо відображення T: $\underbrace{V_n \times \ldots \times V_n}_{r} \times \underbrace{V'_n \times \ldots \times V'_n}_{s} \to \mathbb{R}$ формулою

$$T(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \xi^1, \ldots, \xi^s) = T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} v^{i_1}_1 \ldots v^{i_r}_r \xi^1_{j_1} \ldots \xi^s_{j_s}, \tag{4.4}$$

$\vec{v}_i = v^j_i \vec{e}_j$, $\xi_k = \xi^k_j \omega^j$, $i \in \{1, \ldots, r\}$, $k \in \{1, \ldots, s\}$, $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ – взаємний базис до базису $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$. Очевидно, що це відображення є лінійним по кожному аргументу, тобто є тензором типу (r, s). Очевидно також, що компоненти цього тензора в заданому базисі збігаються з відповідними числами набору $\{T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}\}$, оскільки, внаслідок (4.4),

$$\begin{aligned}
T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} &= T(\vec{e}_{i_1}, \ldots, \vec{e}_{i_r}, \omega^{j_1}, \ldots, \omega^{j_s}) = \\
&= T^{q_1 \ldots q_s}_{p_1 \ldots p_r} \delta^{p_1}_{i_1} \ldots \delta^{p_r}_{i_r} \delta^{j_1}_{q_1} \ldots \delta^{j_s}_{q_s} = T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}.
\end{aligned}$$

Це твердження є правильним не лише в заданому, але і в довільному іншому базисі. Справді, при заміні базиса, за доведеним, компоненти тензора T змінюються за законом (4.4), а елементи набору $\tau = \{T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}\}$ змінюються за цим же законом внаслідок умови теореми. Отже, якщо набір компонент тензора T співпадає з набором τ в деякому базисі, то ці набори співпадають в довільному базисі.

З урахуванням доведеної теореми маємо альтернативне означення тензора.

Означення 4.4. *Тензором типу (r, s) на векторному просторі V_n називається набір чисел $\{T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}\}$, який відповідає кожному базису простору і який змінюється при зміні базису за законом (4.3).*

Означення 4.3 та 4.4 еквівалентні. Зазначимо, що означення 4.4 є менш наглядним, ніж означення 4.3, але тим не менше є історично першим означенням тензора і на теперішній час також широко використовується в прикладних питаннях математики.

§4.3. Операції над тензорами

Введемо позначення: $T(V_n) = \bigcup\limits_{r=0}^{\infty}\bigcup\limits_{s=0}^{\infty} T_r^s(V_n)$. Визначимо у множині $T(V_n)$ наступні операції.

1. Додавання тензорів. Нехай $\{T_1, T_2\} \subset T_r^s(V_n)$. Сумою тензорів T_1, T_2 називається відображення

$$T_1 + T_2 : \underbrace{V_n \times \ldots \times V_n}_{r} \times \underbrace{V_n' \times \ldots \times V_n'}_{s} \to \mathbb{R},$$

яке визначається формулою

$$(T_1 + T_2)(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \xi^1, \ldots, \xi^s) =$$

$$= T_1(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \xi^1, \ldots, \xi^s) + T_2(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \xi^1, \ldots, \xi^s)$$

$(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r \in V_n; \xi^1, \ldots, \xi^s \in V_n')$. Безпосередньо перевіряємо, що відображення $T_1 + T_2$ є лінійним по кожному аргументу, тобто є тензором типу (r, s). Множина $T_r^s(V_n)$ відносно введеної в ній операції додавання тензорів задовольняє всі аксіоми абелевої групи. Перевіримо, наприклад, властивість комутативності операції додавання:

$$(T_2 + T_1)(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \xi^1, \ldots, \xi^s) = T_2(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \xi^1, \ldots, \xi^s) +$$

$$+ T_1(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \xi^1, \ldots, \xi^s) = T_1(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \xi^1, \ldots, \xi^s) +$$

$$+ T_2(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \xi^1, \ldots, \xi^s) = (T_1 + T_2)(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \xi^1, \ldots, \xi^s).$$

Запишемо операцію додавання тензорів у термінах їхніх компонент. Нехай $\{(T_1)_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s}\}$, $\{(T_2)_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s}\}$ – набори компонент тензорів T_1, T_2 відповідно у фіксованому базисі $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$. Тоді

$$(T_1 + T_2)_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s} = (T_1 + T_2)(\vec{e}_{i_1}, \ldots, \vec{e}_{i_r}, e^{j_1}, \ldots, e^{j_s}) =$$

$$= T_1(\vec{e}_{i_1}, \ldots, \vec{e}_{i_r}, e^{j_1}, \ldots, e^{j_s}) + T_2(\vec{e}_{i_1}, \ldots, \vec{e}_{i_r}, e^{j_1}, \ldots, e^{j_s}) =$$

$$= (T_1)_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s} + (T_2)_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s}$$

(тут $\{e^1, \ldots, e^n\}$ – базис у просторі V_n', взаємний до базису $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$). Отже,

$$(T_1 + T_2)_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s} = (T_1)_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s} + (T_2)_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s}.$$

Операція додавання тензорів поширюється на всю множину $T(V_n)$. Нехай $\{T_1, T_2\} \subset T(V_n)$. Для визначеності вважатимемо, наприклад, що $T_1 \in T_r^s(V_n)$, $T_2 \in T_p^q(V_n)$. Покладемо, за означенням,

$$T_1 + T_2 = \begin{cases} T_1 + T_2 & \text{у вказаному вище розумінні, якщо } p = r, q = s; \\ 0, & \text{у інших випадках.} \end{cases}$$

Очевидно, що введена операція зберігає вказані вище властивості, тобто множина $T(V_n)$ зберігає відносно неї структуру абелевої групи.

2. Множення на скаляр. Нехай $\lambda \in \mathbb{R}$, $T \in T(V_n)$. Припустимо, для визначеності, що $T \in T_r^s(V_n)$. Визначимо відображення

$$\lambda T : \underbrace{V_n \times \ldots \times V_n}_{r} \times \underbrace{V_n' \times \ldots \times V_n'}_{s} \to \mathbb{R}$$

формулою

$$(\lambda T)(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \xi^1, \ldots, \xi^s) = \lambda T(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \xi^1, \ldots, \xi^s);$$

$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r \in V_n$; $\xi^1, \ldots, \xi^s \in V_n'$. Як і раніше, безпосередньо перевіряємо, що відображення λT лінійне по кожному аргументу, тобто є тензором типу (r, s), а також те, що абелева група $T(V_n)$ відносно введеної операції множення на скаляр набуває структури лінійного простору, в якому підгрупи $T_r^s(V_n)$ є підпросторами, причому

$$T(V_n) = \oplus_{r=0}^{\infty} \oplus_{s=0}^{\infty} T_r^s(V_n).$$

Як і у випадку операції додавання тензорів безпосередньо перевіряємо, що операція множення на скаляр у термінах компонент тензора записується так:

$$(\lambda T)^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} = \lambda \cdot T^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}; \quad \lambda \in \mathbb{R}, T \in T^s_r(V_n).$$

3. Тензорний добуток. Нехай $\{T_1, T_2\} \subset T(V_n)$. Припустимо, для визначеності, що $T_1 \in T^s_r(V_n)$, $T_2 \in T^q_p(V_n)$. Тензорним добутком тензорів T_1, T_2 називається відображення

$$T_1 \otimes T_2 : \underbrace{V_n \times \ldots \times V_n}_{r+p} \times \underbrace{V'_n \times \ldots \times V'_n}_{s+q} \to \mathbb{R},$$

яке визначається формулою

$$(T_1 \otimes T_2)(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{v}_{r+1}, \ldots, \vec{v}_{r+p}, \xi^1, \ldots, \xi^s, \xi^{s+1}, \ldots, \xi^{s+q}) =$$

$$= T_1(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \xi^1, \ldots, \xi^s) \cdot T_2(\vec{v}_{r+1}, \ldots, \vec{v}_{r+p}, \xi^{s+1}, \ldots, \xi^{s+q});$$

$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{r+p} \in V_n$; $\xi^1, \ldots, \xi^{s+q} \in V'_n$. У випадку, коли хоча б один із тензорів є скаляром (елементом простору $\mathbb{R} := T^0_0(V_n)$), покладемо, за означенням, $T_1 \otimes T_2 = T_1 \cdot T_2$. Безпосередньо перевіряємо, що відображення $T_1 \otimes T_2$ є лінійним по кожному аргументу, тобто тензором типу $(r+p, s+q)$. Операція тензорного добутку у термінах компонент тензорів записується так:

$$(T_1 \otimes T_2)^{j_1 \dots j_{s+q}}_{i_1 \dots i_{r+p}} = (T_1)^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} \cdot (T_2)^{j_{s+1} \dots j_{s+q}}_{i_{r+1} \dots i_{r+p}}.$$

Ця операція володіє також властивістю білінійності та властивістю асоціативності, тобто:

1) $\forall \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}\ \forall \{T_1, T_2, T_3\} \subset T(V_n)$:

$$(\alpha T_1 + \beta T_2) \otimes T_3 = \alpha T_1 \otimes T_3 + \beta T_2 \otimes T_3;$$

2) $\forall \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}\ \forall \{T_1, T_2, T_3\} \subset T(V_n)$:

$$T_1 \otimes (\alpha T_2 + \beta T_3) = \alpha T_1 \otimes T_2 + \beta T_1 \otimes T_3;$$

3) $\forall \{T_1, T_2, T_3\} \subset T(V_n)$:

$$(T_1 \otimes T_2) \otimes T_3 = T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3).$$

Крім того, для всіх $T \in T(V_n)$: $1 \otimes T \equiv 1 \cdot T = T$. Вказані властивості означають, що $T(V_n)$ має структуру асоціативної алгебри з одиницею над полем $\mathbb{R}$.

Важливою властивістю тензорної алгебри скінченновимірного лінійного простору є те, що в ній визначена ще одна важлива операція, яка називається **згорткою тензорів**.

4. Згортка. Нехай $T \in T^s_r(V_n) \subset T(V_n)$. Зафіксуємо $\{i, j\} \subset \{1, \ldots, n\}$, а також базис $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ простору V_n. Задамо відображення

$$C^j_i T : \underbrace{V_n \times \ldots \times V_n}_{r-1} \times \underbrace{V'_n \times \ldots \times V'_n}_{s-1} \to \mathbb{R}$$

формулою

$$C^j_i T(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{r-1}, \xi^1, \ldots, \xi^{s-1}) =$$

$$= T(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{e}_k, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_{r-1}, \xi^1, \ldots, \xi^{j-1}, e^k, \xi^j, \ldots, \xi^{s-1}).$$

Відображення $C^j_i T$ є лінійним по кожному аргументу, тобто є тензором типу $(r-1, s-1)$. Цей тензор називається **згорткою тензора по i-му та j-му аргументам** (або **індексам** при альтернативному означенні тензора). Отже, при згортуванні тензора ототожнюється пара індексів, один з яких – верхній, інший – нижній. По цим індексам (після ототожнення – по одному) здійснюється сумування. У результаті згортки отримуємо тензор, валентність якого на 2 менша за валентність вихідного тензора. При цьому кількість як верхніх, так і нижніх індексів зменшується на одиницю. Для ілюстрації цієї операції скористаємося альтернативним означенням тензора. Розглянемо, наприклад, 5-ти валентний тензор $T = \{T^{lk}_{ikj}\}$ і згорнемо цей тензор по 2-му нижньому та 2-му верхньому індексах. В результаті одержимо тензор $C_2^2T = \{T_{ij}^l\}$, де $T_{ij}^l = \sum\limits_k T_{ikj}^{lk}$.

§4.4. Симетричні та кососиметричні тензори. Операції симетріювання та альтернування. Зовнішній добуток

Нехай $T_*(V_n) = \oplus_{r=0}^{+\infty} T_r^0(V_n) \subset T(V_n)$. Очевидно, $T_*(V_n)$ є підалгеброю тензорної алгебри $T(V_n)$. Справді, нехай T_1, $T_2 \in T_*(V_n)$ — тензори типів $(r_1, 0)$, $(r_2, 0)$ відповідно. Тоді $T_1 \otimes T_2 \in T_{r_1+r_2}^0(V_n) \subset T_*(V_n)$, тобто $T_*(V_n)$ замкнена відносно операції тензорного множення. Підалгебра $T_*(V_n)$ називається **коваріантною тензорною алгеброю**. Аналогічно, $T^*(V_n) = \oplus_{s=0}^{+\infty} T_0^s(V_n) \subset T(V_n)$ є підалгеброю тензорної алгебри $T(V_n)$, яка називається **контраваріантною тензорною алгеброю**. Властивості коваріантної та контраваріантної алгебр цілком ідентичні, тому для визначеності будемо розглядати коваріантну тензорну алгебру.

Символом S_r позначимо групу підстановок порядку r.

Індексом підстановки $\sigma \in S_r$ називається число $\varepsilon(\sigma)$, рівне одиниці для парної та мінус одиниці для непарної підстановок.

Лема 4.1. *Відображення $\varepsilon: S_r \to \{1; -1\}$, яке зіставляє підстановці $\sigma \in S_r$ її індекс $\varepsilon(\sigma)$, є гомоморфізмом, тобто*

$$\forall \{\sigma, \tau\} \subset S_r: \ \varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\tau). \tag{4.5}$$

Доведення. Доведення полягає у безпосередній перевірці того, що у всіх чотирьох можливих випадках співвідношень між парностями підстановок $\{\sigma, \tau\} \subset S_r$ виконується рівність (4.5).

Нехай $T \in T_r^0(V_n)$, $\sigma \in S_r$. Задамо відображення σT: $\underbrace{V_n \times \ldots \times V_n}_{r} \to \mathbb{R}$ формулою

$$\sigma T(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r) = T(\vec{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{v}_{\sigma(r)}); \quad \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r \in V_n.$$

Означення 4.5. *Тензор $T \in T_p^0(V_n)$ називається симетричним, якщо*

$$\forall \sigma \in S_p: \ \sigma T = T.$$

Тензор $T \in T_0^p(V_n)$ називається кососиметричним, якщо

$$\forall \sigma \in S_p: \ \sigma T = \varepsilon(\sigma) T.$$

Очевидно, симетричність тензора рівносильна тому, що значення цього тензора не зміниться при перестановці довільної пари його аргументів. Кососиметричність тензора рівносильна тому, що значення цього тензора змінює знак при перестановці довільної пари його аргументів. Це безпосередньо випливає з того, що $\forall \sigma \in S_r$: $\varepsilon(\sigma) = (-1)^N$, де N кількість транспозицій, у композицію яких розкладається ця підстановка.

Кожному тензору $T = \{T_{i_1 \ldots i_r}\} \subset T_r^0(V_n)$ можна зіставити у відповідність симетричний тензор $T_1 = \{T_{(i_1 \ldots i_r)}\}$ за правилом

$$T_{(i_1 \ldots i_r)} = \frac{1}{r!} \sum T_{i_1 \ldots i_r},$$

де сума справа береться по всім перестановкам індексів i_1, $\ldots$, i_r. Тензор $\{T_{(i_1 \ldots i_r)}\}$ симетричний по індексах i_1, $\ldots$, i_r, тобто його компоненти не змінюють своєї величини при перестановці довільної пари індексів із вказаного набору. Операція, яка приводить до тензора $T_1 = \{T_{(i_1 \ldots i_r)}\}$ називається **симетріюванням** тензора $T = \{T_{i_1 \ldots i_r}\}$. Наприклад, нехай задано тензор $T = \{T_{ijk}\}$. Тоді набір

$$T_{(ijk)} = \frac{1}{3!}(T_{ijk} + T_{jik} + T_{ikj} + T_{kij} + T_{kji} + T_{jki})$$

визначає тензор $T_1 = \{T_{(ijk)}\}$, симетричний по індексах i, j, k.

Якщо здійснюється симетріювання по певній підмножині індексів, то ці індекси беруться у круглі дужки; індекси, які не беруть участь у симетріюванні, виділяються вертикальними рисками. Наприклад, розглянемо тензор $T = \{T_{ijklms}\}$ і утворимо тензор $T_1 = \{T_{i(j|k|lm)s}\}$, де

$$T_{i(j|k|lm)s} = \frac{1}{3!}(T_{ijklms}+T_{ilkmjs}+T_{imkjls}+T_{ilkjms}+T_{ijkmls}+T_{imkljs}).$$

Тензор T_1 симетричний по індексах j, l, m.

Операція альтернування полягає в тому, що кожному тензору $T = \{T_{i_1\ldots i_r}\}$ ставиться у відповідність кососиметричний тензор $T_2 = \{T_{[i_1\ldots i_r]}\}$ за правилом

$$T_{[i_1\ldots i_r]} = \frac{1}{r!}\left(\sum\nolimits_1 T_{i_1\ldots i_r} - \sum\nolimits_2 T_{i_1\ldots i_r}\right),$$

де перша сума береться по всіх парних перестановках індексів i_1, ..., i_r, друга – по всіх непарних. Якщо альтернування здійснюється по певній підмножині індексів, то ці індекси беруться у квадратні дужки; індекси, які не беруть участь у альтернуванні, також виділяються вертикальними рисками. Наприклад, нехай $T = \{T_{ijklms}\}$ – шестивалентний тензор типу $(6,0)$, тоді тензор $T_2 = \{T_{i[j|k|lm]s}\}$ має вигляд:

$$T_{i[j|k|lm]s} = \frac{1}{3!}(T_{ijklms}+T_{ilkmjs}+T_{imkjls}-T_{ilkjms}-T_{ijkmls}-T_{imkljs}).$$

Тензор T_2 кососиметричний по індексах j, m, l, тобто його компоненти змінюють знаки при перестановці довільної пари індексів j, m, l.

Відмітимо дві важливі властивості кососиметричних тензорів.

1) **При ототожненні хоча б двох індексів кососиметричний тензор перетворюється в нуль.**

Справді, нехай $T = \{T_{i_1\ldots i_r}\}$ – кососиметричний тензор, у якого $i_1 = i_2$. Тоді

$$T_{i_1i_1i_3\ldots i_r} = -T_{i_1i_1i_3\ldots i_r}.$$

Отже, $T_{i_1i_1i_3\ldots i_r} = 0$.

2) **Якщо валентність r кососиметричного тензора $T \in T_r^0(V_n)$ більша за розмірність простору V_n, то такий тензор дорівнює нулю.**

Справді, у цьому випадку аргументи тензора T пов'язані лінійною залежністю, і, отже, один з них лінійно виражається через інші, наприклад, $\vec{v}_1 = \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_2\vec{v}_3 + \ldots + \alpha_r\vec{v}_r$, $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_r\} \subset V_n$, $\{\alpha_2,\ldots,\alpha_r\} \subset \mathbb{R}$. Тоді, врахувавши властивість лінійності T по першому аргументу дістаємо, що

$$T(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_r) = T(\alpha_2\vec{v}_2+\alpha_2\vec{v}_3+\ldots+\alpha_r\vec{v}_r,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_r) =$$

$$= \alpha_2T(\vec{v}_2,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_r)+\alpha_3T(\vec{v}_3,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\ldots,\vec{v}_r)+\alpha_rT(\vec{v}_2,\vec{v}_3,\ldots,\vec{v}_r,\vec{v}_r).$$

За властивістю 1) $T = 0$.

Зауваження 4.2. Симетріювання та альтернування тензорів можна компактно описати за допомогою операторів симетріювання та альтернування S та Alt відповідно. Якщо $T \in T_r^0(V_n)$, S_r – група підстановок порядку r, $\sigma \in S_r$, то

$$ST = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r}\sigma T, \quad AltT = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r}\varepsilon(\sigma)\sigma T;$$

при цьому ST – симетричний тензор, $AltT$ – кососиметричний тензор.

Символом $\Lambda_r(V_n)$ позначимо сукупність всіх кососиметричних тензорів типу $(r;0)$; $\Lambda(V_n) := \otimes_{r=0}^{\infty}\Lambda_r(V_n)$, $\Lambda_0(V_n) = \mathbb{R}$. Введемо в $\Lambda(V_n)$ бінарну операцію "$\wedge$", поклавши

$$T_1 \wedge T_2 = \frac{(r+s)!}{r!s!}Alt(T_1\otimes T_2), \quad T_1 \in \Lambda_r(V_n), T_2 \in \Lambda_s(V_n).$$

Ця операція називається **операцією зовнішнього множення**.

Операція зовнішнього множенні володіє властивостями:

1) $(T_1 + T_2) \wedge T_3 = T_1 \wedge T_3 + T_2 \wedge T_3$,
2) $T_1 \wedge (T_2 + T_3) = T_1 \wedge T_2 + T_1 \wedge T_3$,
3) $(T_1 \wedge T_2) \wedge T_3 = T_1 \wedge (T_2 \wedge T_3)$,
4) $1 \wedge T \equiv 1 \cdot T = T$.

Перші дві властивості безпосередньо випливають із відповідних властивостей операції тензорного множення та лінійності оператора альтернування. Наприклад,

$$(T_1 + T_2) \wedge T_3 = \frac{(r+s)!}{r!s!} Alt((T_1 + T_2) \otimes T_3) =$$

$$= \frac{(r+s)!}{r!s!} Alt(T_1 \otimes T_3 + T_2 \otimes T_3) = \frac{(r+s)!}{r!s!} Alt(T_1 \otimes T_3) +$$

$$+ \frac{(r+s)!}{r!s!} Alt(T_2 \otimes T_3) = T_1 \wedge T_3 + T_2 \wedge T_3.$$

Властивість 3) пропонуємо читачеві довести самостійно, скориставшись при цьому прикладом 7 (див. приклади розв'язування задач).

З властивостей 1) – 4) випливає, що $\Lambda(V_n)$ має структуру асоціативної алгебри з одиницею. Цю алгебру називають ще **зовнішньою коваріантною алгеброю**. Аналогічно визначається **зовнішня контраваріантна алгебра** $\Lambda^*(V_n) = \oplus_{r=0}^{\infty} \Lambda^r(V_n)$, $\Lambda^r(V_n) = T_0^r(V_n)$.

§4.5. Тензорні поля на многовидах

У попередніх параграфах вивчалися тензори на векторному просторі V_n. Важливою особливістю цього простору є те, що він є прикладом n-вимірного евклідового простору, в якому можна побудувати єдину систему координат у всьому

просторі. У зв'язку з цим тензор у такому просторі визначається набором чисел, який змінюється при зміні базису за законом (4.3). Однак, клас топологічних просторів, для яких можна побудувати єдину систему координат у всьому просторі, є досить вузьким. У той час можна виділити значний клас топологічних просторів - топологічних многовидів – які узагальнюють поняття лінії та поверхні та є математичними моделями багатьох реальних об'єктів, у яких можливо будувати системи координат у деякому околі кожної точки. Такі простори мають локальну будову простору $\mathbb{R}^n$.

Отже, нехай M – гладкий многовид розмірності n, $T_x M$ – дотичний простір у точці $x \in M$, тобто клас гладких кривих на M, дотичних між собою в точці x (або, інакше, дотичний простір в точці $x \in M$ – це дотичний вектор до многовиду M у точці x). Задання локальної карти в околі точки x дозволяє ототожнити дотичний вектор з набором із n чисел і ввести лінійні операції над дотичними векторами як операції над наборами із n чисел. Зауважимо також, що якщо многовид M є поверхнею в $\mathbb{R}^3$, то замість локальної карти розглядається параметризація поверхні; тоді парою чисел, які відповідають дотичному вектору, є його координати у рухомому базисі.

Означення 4.6. *Тензорним полем типу (r, s), $\{r, s\} \subset \mathbb{Z}_+$, на гладкому многовиді M називається полілінійне відображення R, яке кожній точці $x \in M$ ставить у відповідність тензор R_x типу (r, s) на векторному просторі $T_x M$, тобто відображення*

$$R_x : \underbrace{T_x M \times \ldots \times T_x M}_{r} \times \underbrace{T'_x M \times \ldots \times T'_x M}_{s} \to \mathbb{R},$$

де $T'_x M$ – спряжений простір для $T_x M$.

Операції над тензорами на векторному просторі V_n переносяться на тензорні поля. А саме, якщо R і S – тензорні поля на M одного типу, то їхньою сумою називається тензорне поле $R+S$ того ж типу, яке визначається за правилом $(R+S)_x = R_x + S_x$ (у правій частині цієї рівності стоїть сума тензорів на векторному просторі T_xM). Якщо f – функція на M, то можна визначити добуток fR, поклавши $(fR)_x = f(x)R_x$. Нарешті, для тензорного поля R типу (r,s) і тензорного поля S типу (p,q) тензорний добуток $R \otimes S$ визначається за правилом $(R\otimes S)_x = R_x \otimes S_x$; $R \otimes S$ є тензорним полем типу $(r+p, s+q)$.

Візьмемо локальну карту (U,φ) на M, точку $x \in M$ і позначимо символом $[\gamma]$ клас еквівалентних кривих, який визначається кривою γ, що проходить через точку x. При вибраній локальній карті кожному класу $[\gamma]$ однозначно відповідає дотичний вектор, тобто набір із n чисел. Таким чином, виникає відображення $\theta_\varphi\colon T_xM \to V_n$, яке, як відомо, є бієктивним. Базис у T_xM, який відповідає базису $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\} \subset V_n$ при відображенні θ_φ називають **рухомим базисом** і позначають $\{\vec{e}_{1x}, \ldots, \vec{e}_{nx}\}$. Вектори $\vec{e}_{1x}, \ldots, \vec{e}_{nx}$ визначаються в кожній точці $x \in U$, де (U,φ) – локальна карта, за правилом $\theta_\varphi(\vec{e}_{ix}) = \vec{e}_i$, $i \in \{1,\ldots,n\}$. Для цього базису будується взаємний базис $\omega_x^1, \ldots, \omega_x^n$ у просторі T'_xM. Ковектори ω_x^i визначаються рівністю $\omega_x^i(\vec{e}_{jx}) = \delta_j^i$. Як і в §4.2, базис $\{\vec{e}_{1x}, \ldots, \vec{e}_{nx}\}$ визначає в просторі $T_r^s(T_xM)$ тензорів типу (r,s) на T_xM базис, який позначимо

$$\Omega_{j_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r}(x), \quad 1 \le i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s \le n.$$

Означення 4.7. *Функції на U, які визначаються рівністю*

$$R_{j_1\ldots j_r}^{i_1\ldots i_s} = R(\vec{e}_{j_1x}, \ldots, \vec{e}_{j_rx}, \omega_x^{i_1}, \ldots, \omega_x^{i_s}),$$

називаються складовими тензорного поля R типу (r,s) на гладкому многовиді M відносно локальної карти (U,φ).

Значення тензорного поля R у точках з U зображаються

через складові за формулою

$$R_x = \sum_{i_1,\ldots,i_s,j_1,\ldots,j_r} R_{j_1\ldots j_r}^{i_1\ldots i_s}(x)\Omega_{i_1\ldots i_s}^{j_1\ldots j_r}(x). \tag{4.6}$$

Якщо вважати в (4.6) точку $x \in U$ змінною, то це співвідношення можна записати у вигляді

$$R|_U = \sum_{i_1,\ldots,i_s,j_1,\ldots,j_r} R_{j_1\ldots j_r}^{i_1\ldots i_s}\Omega_{i_1\ldots i_s}^{j_1\ldots j_r},$$

де $R_{j_1\ldots j_r}^{i_1\ldots i_s}$ – функції на U.

Нехай (V,ψ) – інша локальна карта на M, $U \bigcap V \ne \emptyset$, $\vec{e}_{1x'}, \ldots, \vec{e}_{nx'}$ – відповідні векторні поля рухомого базису.

Тоді, як відомо [11],

$$\vec{e}_{ix} = \sum_j \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\vec{e}_{jx'}, \tag{4.7}$$

де $x^{j'} = x^{j'}(x^1, \ldots, x^n) := x^{j'}(x^i)$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, – диффеоморфізм заміни координат. Для матриці $\left(\dfrac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\right)$ оберненою є матриця $\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\right)$, де $x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{n'}) := x^i(x^{j'})$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, – обернений диффеоморфізм.

Нехай $\{R_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s}\}$ і $\{'R_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s}\}$ – складові тензорного поля R відносно карт (U,φ) та (V,ψ) відповідно. Тоді згідно з правилом (4.7) заміни рухомого базису та означенням складових дістаємо, що

$$'R_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s} = \frac{\partial x^{k_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{k_r}}{\partial x^{i'_r}} \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j'_s}}{\partial x^{l_s}} R_{k_1\ldots k_r}^{l_1\ldots l_s}. \tag{4.8}$$

Формула (4.8) встановлює зв'язок між складовими тензорного поля R на перетині $U \bigcap V$ областей локальних карт.

Зазначимо, що формула (4.3) є частковим випадком (4.8), оскільки у векторному просторі V_n перехід від одного базису до іншого здійснюється за допомогою лінійного перетворення. У цьому випадку матриця Якобі $\left(\dfrac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\right)$ співпадає з матрицею переходу від одного базису до іншого у просторі V_n.

Враховуючи (4.8) можна навести таке означення тензорного поля (еквівалентне означенню 4.6).

Означення 4.8. *Нехай*

$$\{R^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}(x^1,\ldots,x^n)\},\quad 1\le i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s\le n,\qquad(4.9)$$

набір n^{r+s} функцій від x^1, ..., x^n. Сукупність функцій (4.9) називається тензором (тензорним полем) типу (r,s) на гладкому многовиді M, якщо при перетворенні системи координат ці функції змінюються за законом (4.8).

Означення 4.9. *Тензорне поле на M, а також на відкритій підмножині $A\subset M$ називається гладким, якщо його складові відносно довільної локальної карти є гладкими функціями.*

Теорема 4.3. *Тензорне поле T на відкритій підмножині $A\subset M$ гладке тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x\in A$ знайдеться локальна карта (U,φ) на M, $x\in U$, відносно якої складові T є гладкими функціями.*

Як наслідок теореми дістаємо твердження, що векторні поля $\vec{e}_{1x}$, ..., $\vec{e}_{nx}$, а також ковекторні поля ω^1_x, ..., ω^n_x у області U локальної карти (U,φ) є гладкими.

Операції суми тензорних полів, добутку тензорного поля на гладку функцію і тензорного добутку тензорних полів, застосовні до гладких тензорних полів, приводять до гладких тензорів.

Якщо $T=\{T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}\}$ – гладкий тензор на гладкому многовиді, то існують похідні тензора $\dfrac{\partial T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^i}$, які, взагалі кажучи, тензор не утворюють, тобто при переході від системи координат із змінними x^1, ..., x^n до іншої системи координат із змінними $x^{1'}$, ..., $x^{n'}$ похідні компонент $T^{j'_1\ldots j'_q}_{i'_1\ldots i'_p}$ по змінних $x^{i'}$ не є лінійними однорідними функціями похідних $\dfrac{\partial T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^i}$. Однак із компонент $T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ та їхніх похідних можна конструювати величини, які будуть вже тензорами. Прикладом таких величин є **коваріантні похідні тензора**. Для того, щоб їх одержати, візьмемо сукупність функцій $a^k_{ij}(x^1,\ldots,x^n)$, симетричних за нижніми індексами, які задовольняють умову: при переході до нової системи координат ці функції перетворюються за формулами

$$a^{k'}_{i'j'}=\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}a^k_{ij}+\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}.\qquad(4.10)$$

Тоді можна безпосередньо перевірити, що функції

$$T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p,i}=\frac{\partial T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^i}+a^{j_1}_{l_1}T^{lj_2\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}+\ldots+a^{j_q}_{l_i}T^{j_1\ldots j_{q-1}l}_{i_1\ldots i_p}-$$

$$-a^l_{ii_1}T^{j_1\ldots j_q}_{li_1\ldots i_p}-\ldots-a^l_{ii_p}T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_{p-1}l}\qquad(4.11)$$

утворюють тензор валентності $p+q+1$, $p+1$ разів коваріантний і q разів контраваріантний. При цьому, за означенням, індекси i_1, ..., i_p, j_1, ..., j_q після множення ставляться на місце індекса l, а індекс i на останнє місце.

Індекс i координати, по якій здійснюється диференціювання, відділяється від інших індексів комою. Аналогічно, друга коваріантна похідна позначається символом $T^{\cdots}_{\ldots,ij}$, третя – символом $T^{\cdots}_{\ldots,ijk}$ і т.д.

Нехай $\{g_{ij}\}$ – невироджений ($|g_{ij}|\neq 0$), симетричний, двічі коваріантний тензор. Тоді системою рівнянь $g_{ij}g^{ik}=\delta^k_j$ визначається двічі контраваріантний тензор $\{g^{ij}\}$ (див.

приклад 16). Функції

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right), \quad \Gamma^l_{ij} = g^{lk}\Gamma_{kij},$$

називаються символами Христофеля 1-го та 2-го роду відповідно.

Якщо перейти від координат $x^1, \ldots, x^n$ до координат $x^{1'}$, $\ldots$, $x^{n'}$, то

$$g_{ik}(x'_1, \ldots, x'_n) = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} g_{jl}(x^1, \ldots, x^n).$$

Диференціюючи останнє співвідношення знайдемо,що

$$'\Gamma_{kij} = \Gamma_{lmp}\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^p}{\partial x^{j'}} + g_{lm}\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}},$$

$$'\Gamma^l_{ij} = \Gamma^k_{mp}\frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^p}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}},$$

тобто символи Христофеля тензори не утворюють, але вони задовольняють умову (4.10), тобто за допомогою цих символів, використовуючи (4.11), можна будувати тензори. Наприклад, з (4.11) для тензорів валентності 2 випливають співвідношення:

$$T^j_{i,k} = \frac{\partial T^j_i}{\partial x^k} + T^p_i\Gamma^j_{pk} - T^j_p\Gamma^p_{ik},$$

$$T_{ij,k} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - T_{pj}\Gamma^p_{ik} - T_{ip}\Gamma^p_{jk},$$

$$T^{ij}_{,k} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} + T^{pj}\Gamma^i_{pk} + T^{ip}\Gamma^j_{pk}.$$

Коваріантне диференціювання суми та тензорного добутку тензорів підпорядковується тим же законам, що і звичайне диференціювання:

$$(T + U)_{,i} = T_{,i} + U_{,i},$$

$$(T \otimes U)_{,i} = T_{,i} \otimes U + T \otimes U_{,i}.$$

Приклади розв'язування задач

1. Довести, що векторний добуток векторів є тензором на векторному просторі V_3. Знайти тип цього тензора.

Розв'язування. Нагадаємо, що векторним добутком називається бінарна операція, визначена в просторі V_3, яка зіставляє парі векторів $\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset V_3$ вектор $\vec{z} = [\vec{x}, \vec{y}] \in V_3$. Вектор $\vec{z}$ ортогональний до кожного з цих векторів, утворює з ними праву трійку векторів, $|\vec{z}| = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{x}$ і $\vec{y}$. Ця операція лінійна по кожному аргументу. Зафіксуємо два базиси $\alpha = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, $\beta = \{\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_n\}$ у просторі V_3. Позначимо

$$[\vec{e}_i, \vec{e}_j] = P^k_{ij}\vec{e}_k, \quad [\vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_j] = \tilde{P}^k_{ij}\vec{\varepsilon}_k. \tag{4.13}$$

Отже, операція векторного добутку визначає набір дійсних чисел $\{P^k_{ij}\}$, які відповідають кожному базису простору V_3 і які є коефіцієнтами розкладу попарних векторних добутків векторів базису за цим базисом. З'ясуємо, як змінюються ці набори при зміні базису. З урахуванням (4.13) маємо, що

$$\tilde{P}^k_{ij}c^h_k\vec{e}_h = \tilde{P}^k_{ij}\vec{\varepsilon}_k = [\vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_j] = [c^a_i\vec{e}_a, c^b_j\vec{e}_b] = c^a_ic^b_j[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = c^a_ic^b_jP^h_{ab}\vec{e}_h.$$

Із лінійної незалежності базисних векторів випливає рівність $\tilde{P}^k_{ij}c^h_k = c^a_ic^b_jP^h_{ab}$. Домноживши обидві частини цієї рівності на d^q_h та просумувавши по індексу h дістанемо, що $\tilde{P}^k_{ij}\delta^q_k = d^q_hc^a_ic^b_jP^h_{ab}$, або $\tilde{P}^q_{ij} = c^a_ic^b_jq^q_hP^h_{ab}$. Згідно з теоремою 4.2 цей набір однозначно визначає тензор T типу (2, 1) на V_3, компоненти якого в даному базисі збігаються з відповідними елементами набору $\{P^k_{ij}\}$, який відповідає цьому базису.

Якщо $\vec{x}$, $\vec{y} \in V_3$, $u \in V'_3$, то

$$T(\vec{x}, \vec{y}, u) = T^k_{ij}x^iy^ju_k = P^k_{ij}x^iy^ju_k = P^k_{ij}x^iy^ju(\vec{e}_k) =$$

$$= u(P^k_{ij}\vec{e}_kx^iy^j) = u([\vec{e}_i, \vec{e}_j]x^iy^j) = u([x^i\vec{e}_i, y^j\vec{e}_j]) = u([\vec{x}, \vec{y}]).$$

Оскільки при фіксованому базисі, наприклад α, задання набору $\{P_{ij}^k\}$ визначає задання векторного добутку за формулою $[\vec{x}, \vec{y}] = [\vec{e}_i, \vec{e}_j]x^i x^j = P_{ij}^k x^i y^j \vec{e}_k$; $\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset V_3$, а задання тензора рівносильно заданню його компонент, **векторний добуток і тензор T можна ототожнити.**

2. Нехай L: $V_n \to V_n$ – довільний лінійний оператор. З'ясувати, чи є L тензором на V_n.

Розв'язання. Зафіксуємо два базиси $b = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, $\beta \in \{\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}^n\}$ у просторі V_n. Нехай $A_b = (a_i^j)$, $A_\beta = (\tilde{a}_i^j)$ – матриці цього оператора в заданих базисах відповідно. Із лінійної алгебри відомо, що ці матриці пов'язані співвідношенням

$$A_\beta = C^{-1} A_b C,$$

де C – матриця переходу від базису $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ до базису $\{\varepsilon_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_n\}$. За означенням добутку матриць $\tilde{a}_i^j = d_k^j a_p^k c_i^p$, або $\tilde{a}_i^j = c_i^p d_k^j a_p^k$. Таким чином, фіксація лінійного оператора L визначає набір чисел $\{a_i^j\} \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, які відповідають кожному базису простору V_n і при зміні базису змінюються за формулами (4.3) (при $r = 1$, $s = 1$). За теоремою 4.2 цей набір однозначно визначає тензор T типу (1, 1) на V_n, компоненти якого в даному базисі збігаються з відповідними елементами матриці цього лінійного оператора в цьому базисі. Якщо $\vec{x} \in V_n$, $u \in V_n'$ – довільні елементи, то

$$T(\vec{x}, u) = T_i^j x^i u_j = a_i^j x^i u_j = a_i^j x^i u(\vec{e}_j) = u(a_i^j x^i \vec{e}_j) =$$

$$= u(L(\vec{x})^j \vec{e}_j) = u(L(\vec{x})).$$

Оскільки при фіксованому базисі задання лінійного оператора рівносильне заданню його матриці, а задання тензора – заданню його компонент, лінійний оператор L і тензор T однозначно визначають один одного і, отже, можуть бути ототожнені.

3. Довести, що операція згортки C_i^j довільного тензора $T \in T_s^r(V_n)$ не залежить від вибору базису, тобто це відображення визначається внутрішнім чином.

Розв'язання. Нагадаємо, що відображення C_i^j: $T_r^s(V_n) \to T_{r-1}^{s-1}(V_n)$ визначається формулою

$$C_i^j T(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{r-1}, \xi^1, \ldots, \xi^{s-1}) =$$

$$= T(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{e}_k, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_{r-1}, \xi^1, \ldots, \xi^{j-1}, e^k, \xi^j, \ldots, \xi^{s-1}), \tag{4.14}$$

де $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ – деякий базис простору V_n, $\{e^1, \ldots, e^n\}$ – взаємний базис, $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{r-1}\} \subset V_n$, $\{\xi^1, \ldots, \xi^{s-1}\} \subset V_n'$. Нехай $\{\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_n\}$ – інший базис простору V_n, $\{\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n\}$ – взаємний до нього базис. Відносно цієї пари формула (4.14) визначає тензор $\tilde{C}_i^j T$:

$$\tilde{C}_i^j T(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{r-1}, \xi^1, \ldots, \xi^{s-1}) =$$

$$= T(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{e}_k, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_{r-1}, \xi^1, \ldots, \xi^{j-1}, e^k, \xi^j, \ldots, \xi^{s-1}) =$$

$$= T(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, c_k^p \vec{e}_p, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_{r-1}, \xi^1, \ldots, \xi^{j-1}, d_q^k e^q, \xi^j, \ldots, \xi^{s-1}) =$$

$$= c_k^p d_q^k T(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{e}_p, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_{r-1}, \xi^1, \ldots, \xi^{j-1}, e^q, \xi^j, \ldots, \xi^{s-1}) =$$

$$= \delta_q^p T(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{e}_p, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_{r-1}, \xi^1, \ldots, \xi^{j-1}, e^q, \xi^j, \ldots, \xi^{s-1}) =$$

$$= T(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{e}_q, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_{r-1}, \xi^1, \ldots, \xi^{j-1}, e^q, \xi^j, \ldots, \xi^{s-1}) =$$

$$= C_i^j T(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{r-1}, \xi^1, \ldots, \xi^{s-1}).$$

Оскільки це співвідношення є правильним для довільних елементів $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{r-1} \in V_n$; $\xi^1, \ldots, \xi^{s-1} \in V_n'$, то $\tilde{C}_i^j T = C_i^j T$.

4. Нехай $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ – базис простору V_n, $\{e^1, \ldots, e^n\}$ – взаємний до нього базис у просторі V_n',

$$e_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} = e^{i_1} \otimes \ldots e^{i_r} \otimes \vec{e}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{j_s},$$

$$\{i_1,\ldots,i_r\}\subseteq\{1,\ldots,n\};\ \{j_1,\ldots,j_s\}\subseteq\{1,\ldots,n\}. \qquad (4.15)$$

Перевірити, що кожний тензор $T\in T^r_s(V_n)$ є лінійною комбінацією тензорів (4.15).

Розв'язання. Нехай $\{T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}\}$ – компоненти тензора T у базисі $\{\vec e_1,\ldots,\vec e_n\}$. Побудуємо лінійну комбінацію $\tilde T=\{T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}e^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\}$. Очевидно, що тензор $\tilde T$ має тип (r,s). Знайдемо компоненти цього тензора у базисі $\{\vec e_1,\ldots,\vec e_n\}$:

$$\tilde T^{q_1\ldots q_s}_{p_1\ldots p_r}=\tilde T(\vec e_{p_1},\ldots,\vec e_{p_r},e^{q_1},\ldots,e^{q_s})=$$

$$=T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}e^{i_1}\otimes\ldots\otimes e^{i_r}\otimes\vec e_{j_1}\otimes\ldots\otimes\vec e_{j_s}(\vec e_{p_1},\ldots,\vec e_{p_r},e^{q_1},\ldots,e^{q_s})=$$

$$=T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}e^{i_1}(\vec e_{p_1})\ldots e^{i_r}(\vec e_{p_r})\vec e_{j_1}(e^{q_1})\ldots\vec e_{j_s}(e^{q_s})=$$

$$=T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}e^{i_1}(\vec e_{p_1})\ldots e^{i_r}(\vec e_{p_r})e^{q_1}(\vec e_{j_1})\ldots e^{q_s}(\vec e_{j_s})=$$

$$=T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}\delta^{i_1}_{p_1}\ldots\delta^{i_r}_{p_r}\delta^{q_1}_{j_1}\ldots\delta^{q_s}_{j_s}=T^{q_1\ldots q_s}_{p_1\ldots p_r}.$$

Таким чином, компоненти тензорів T і $\tilde T$ у базисі $\{\vec e_1,\ldots,\vec e_n\}$ збігаються. Отже, $T=\tilde T$.

5. Довести, що на векторному просторі V_n з точністю до числового множника існує лише один кососиметричний тензор валентності n типу $(n,0)$.

Розв'язання. Нехай T – довільний кососиметричний тензор валентності n типу $(n,0)$. Зафіксуємо у просторі V_n довільний базис $\{\vec e_1,\ldots,\vec e_n\}$ і нехай $T=\{T_{i_1\ldots i_n}\}$, де $T_{i_1\ldots i_n}=T(\vec e_{i_1},\ldots,\vec e_{i_n})$, тобто

$$T(\vec v_1,\ldots,\vec v_n)=\sum T_{i_1\ldots i_n}v_1^{i_1}\ldots v_n^{i_n},\quad \vec v_k=v_k^j\vec e_j,$$

$$k\in\{1,\ldots,n\},\ \ j\in\{1,\ldots,n\}.$$

Із означення кососиметричного тензора та властивості 1 (див. §4.4) випливає співвідношення

$$T(\vec e_{i_1},\ldots,\vec e_{i_n})=\delta_{i_1\ldots i_n}T(\vec e_1,\ldots,\vec e_n),$$

тобто

$$T_{i_1i_2\ldots i_n}=\delta_{i_1i_2\ldots i_n}T_{12\ldots n},\quad T_{12\ldots n}=T(\vec e_1,\ldots\vec e_n).$$

Отже, у даному базисі тензор T допускає зображення у вигляді

$$T(\vec v_1,\ldots,\vec v_n)=\sum\delta_{i_1i_2\ldots i_n}T_{12\ldots n}v_1^{i_1}\ldots v_n^{i_n}=T_{12\ldots n}\cdot\Delta,$$

де Δ – визначник, складений з координат аргументів (векторів $\vec v_1$, …, $\vec v_n$):

$$\Delta=\sum\delta_{i_1i_2\ldots i_n}v_1^{i_1}v_2^{i_2}\ldots v_n^{i_n}=\begin{vmatrix} v_1^1 & v_1^2 & \ldots & v_1^n\\ v_2^1 & v_2^2 & \ldots & v_2^n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ v_n^1 & v_n^2 & \ldots & v_n^n\end{vmatrix}.$$

Якщо коефіцієнти $T_{12\ldots n}=0$, то тензор T дорівнює нулю. Якщо $T_{12\ldots n}\neq0$, то $T\neq0$ за умови, що аргументи тензора T лінійно незалежні. Припустимо, що $T\neq0$ і нехай $Q\in T^0_n(V_n)$ – інший тензор, відмінний від нуля. Тоді, згідно з попереднім,

$$Q(\vec v_1,\ldots,\vec v_n)=Q_{12\ldots n}\cdot\Delta=\beta\cdot T(\vec v_1,\ldots,\vec v_n),$$

де $\beta=\dfrac{Q_{12\ldots n}}{T_{12\ldots n}}$. Отже, $Q=\beta T$, що й потрібно було довести.

6. Нехай задано тензор $T=\{T_{i_1\ldots i_r}\}\in T^0_r(V_n)$. Довести, що

$$T_{[[i_1\ldots i_r]]}=T_{[i_1\ldots i_r]}.$$

Розв'язання. Якщо $r=1$, то, очевидно, $T[[i_1]]=T_{[i_1]}$. Якщо $r=2$, то

$$T_{[[i_1i_2]]}=\frac{1}{2!}(T_{[i_1i_2]}-T_{[i_2i_1]})=\frac{1}{2!}\Big(\frac{1}{2!}(T_{i_1i_2}-T_{i_2i_1})-\frac{1}{2!}(T_{i_2i_1}-T_{i_1i_2})\Big)=$$

$$= \frac{1}{2!}(T_{i_1 i_2} - T_{i_2 i_1}) = T_{[i_1 i_2]}.$$

У загальному випадку скористаємося співвідношенням

$$T_{[i_1 \dots i_r]} = \frac{1}{r!}\Big(\sum\nolimits_1 T_{i_1 \dots i_r} - \sum\nolimits_2 T_{i_1 \dots i_r}\Big) = \frac{1}{r!}\sum \delta^{j_1 j_2 \dots j_r}_{1\, 2\, \dots\, r} T_{j_1 j_2 \dots j_r},$$

де сума справа береться по всіх індексах $j_1, j_2, \dots, j_r$, кожний із яких незалежно від інших перебігає всі значення від 1 до r; $\delta^{j_1 j_2 \dots j_r}_{1\, 2\, \dots\, r} = 1$, якщо $j_1 j_2 \dots j_r$ – парна перестановка чисел 1, 2, …, r; $\delta^{j_1 j_2 \dots j_r}_{1\, 2\, \dots\, r} = -1$, якщо $j_1 j_2 \dots j_r$ – непарна перестановка набору 1, 2, …, r; $\delta^{j_1 j_2 \dots j_r}_{1\, 2\, \dots\, r} = 0$, якщо серед значень $j_1, j_2, \dots, j_r$ є пара однакових. Тоді

$$T_{[[i_1 \dots i_r]]} = \frac{1}{r!}\sum \delta^{j_1 j_2 \dots j_r}_{1\, 2\, \dots\, r} T_{[i_1 i_2 \dots i_r]}. \tag{4.16}$$

Тут у сумі, написаній справа, всі складові однакові і кожна складова дорівнює $T_{[i_1 \dots i_r]}$. Справді, внаслідок косої симетрії по будь-якій парі верхніх індексів величин $\delta^{j_1 \dots j_r}_{1\, \dots\, r}$ та косої симетрії по будь-якій парі індексів альтернації $T_{[i_1 \dots i_r]}$, у кожному доданку суми (4.16) можна поміняти місцями довільну пару індексів у наборі $j_1, \dots, j_r$; при цьому доданки не змінюються. Отже, у всіх доданках, не змінюючи їх, можна привести індекси до натурального розміщення. Оскільки $\delta^{1\, 2\, \dots\, r}_{1\, 2\, \dots\, r} = 1$, то кожний доданок зводиться до $T_{[i_1 \dots i_r]}$. Кількість всіх доданків у сумі (4.16) дорівнює $r!$, тому із (4.16) випливає співвідношення

$$T_{[[i_1 \dots i_r]]} = T_{[i_1 \dots i_r]}.$$

7. Нехай $T_1 \in T^0_r(V_n)$, $T_2 \in T^0_p(V_n)$. Довести, що

$$Alt(Alt\, T_1 \otimes T_2) = Alt(T_1 \otimes Alt\, T_2) = Alt(T_1 \otimes T_2).$$

Розв'язання. Передусім зазначимо, що групу підстановок S_r можна вважати підгрупою групи S_{r+p}, якщо ототожнити підстановку $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(r) \end{pmatrix} \in S_r$ з підстановкою

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r & r+1 & \dots & r+p \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(r) & r+1 & \dots & r+p \end{pmatrix} \in S_{r+p}.$$

Тоді

$$\sigma(T_1 \otimes T_2)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{r+p}) = (T_1 \otimes T_2)(\vec{v}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{v}_{\sigma(r+p)}) =$$

$$= (T_1 \otimes T_2)(\vec{v}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{v}_{\sigma(r)}, \vec{v}_{r+1}, \dots, \vec{v}_{r+p}) =$$

$$= T_1(\vec{v}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{v}_{\sigma(r)}) \cdot T_2(\vec{v}_{r+1}, \dots, \vec{v}_{r+p}) =$$

$$= \sigma T_1(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r) \cdot T_2(\vec{v}_{r+1}, \dots, \vec{v}_{r+p}) = (\sigma T_1 \otimes T_2)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{r+p}).$$

Звідси дістаємо, що

$$\sigma(T_1 \otimes T_2) = \sigma T_1 \otimes T_2, \quad \sigma \in S_r. \tag{4.17}$$

Аналогічно, вклавши групу підстановок S_p у групу S_{r+p} шляхом ототожнення підстановки $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & p \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(p) \end{pmatrix} \in S_p$ з підстановкою

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r & r+1 & \dots & r+p \\ 1 & \dots & r & r+\sigma(1) & \dots & r+\sigma(p) \end{pmatrix} \in S_{r+p},$$

одержимо, що

$$\sigma(T_1 \otimes T_2) = T_1 \otimes \sigma T_2, \quad \sigma \in S_p. \tag{4.18}$$

Урахувавши (4.17), знайдемо, що

$$Alt\, T_1 \otimes T_2 = \Big(\frac{1}{r!}\sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon(\sigma)\sigma T_1\Big) \otimes T_2 =$$

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon(\sigma) \sigma T_1 \otimes T_2 = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon(\sigma) \sigma(T_1 \otimes T_2) =$$

$$= Alt(T_1 \otimes T_2).$$

Звідси та з попереднього прикладу (приклад 6) випливає, що

$$Alt(Alt\,(T_1 \otimes T_2)) = Alt(T_1 \otimes T_2) = Alt(Alt\,T_1 \otimes T_2).$$

Аналогічно, врахувавши (4.18) одержимо співвідношення

$$Alt(T_1 \otimes Alt\,T_2)) = Alt(T_1 \otimes T_2).$$

8. Нехай $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ – деякий базис простору V_n, $\{e^1, \ldots, e^n\}$ – взаємний до нього базис у просторі V_n'. Перевірити, що

$$e^1 \wedge \ldots \wedge e^n(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = \det(v_j^i),$$

де $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ – довільний набір векторів простору V_n, v_j^i – i-та координата вектора $\vec{v}_j$, $\{i, j\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

Розв'язання. Із означення зовнішнього добутку випливає, що $e^1 \wedge \ldots \wedge e^n$ – n-ковектор на V_n. Обчислимо його значення на наборі векторів $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V_n$:

$$e^1 \wedge \ldots \wedge e^n(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = n! Alt(e^1 \otimes \ldots \otimes e^n)(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \sigma(e^1 \otimes \ldots \otimes e^n)(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(e^1 \otimes \ldots \otimes e^n)(\vec{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{v}_{\sigma(n)}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) e^1(\vec{v}_{\sigma(1)}) \ldots e^n(\vec{v}_{\sigma(n)}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) v^1_{\sigma(1)} \ldots v^n_{\sigma(n)} = \det(v_j^i),$$

де v_j^i – i-та координата вектора $\vec{v}_j$; тобто матриця (v_j^i) розмірності $n \times n$ своїми стовпцями має координати векторів $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ у базисі $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$.

Зауваження 4.3. Оскільки у просторі V_n існує система з лінійно незалежних векторів $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$, то $\det(v_j^i)$ для такої системи векторів відмінний від нуля. Отже, n-ковектор $e^1 \wedge \ldots \wedge e^n$ на V_n відмінний від нуля.

9. Нехай $\{u, v\} \subset V_n'$ – довільні ковектори. Довести, що

$$u \wedge v = -v \wedge u; \quad \forall u \in V_n: \ \ u \wedge u = 0.$$

Розв'язання. Якщо $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V_n$, то

$$u \wedge v(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 2Alt(u \otimes v)(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon(\sigma) \sigma(u \otimes v)(\vec{v}_1, \vec{v}_2) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_2} (u \otimes v)(\vec{v}_{\sigma(1)}, \vec{v}_{\sigma(2)}) = u(\vec{v}_1)v(\vec{v}_2) - u(\vec{v}_2)v(\vec{v}_1).$$

Звідси випливає, що $u \wedge v(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = -v \wedge u(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, тобто $u \wedge v = -v \wedge u$. Зокрема, якщо $u = v$, то $u \wedge u = -u \wedge u$, тобто $u \wedge u = 0$.

10. Довести, що система векторів $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\} \subset V_n$ лінійно залежна тоді і лише тоді, коли $\vec{v}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{v}_r = \vec{0}$.

Розв'язання. 1. Нехай система векторів $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ лінійно залежна. Тоді $\lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_r \vec{v}_r = \vec{0}$, де числові коефіцієнти $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ не всі рівні нулю. Без обмеження загальності вважатимемо, що $\lambda_r \neq 0$. Тоді $\vec{v}_r = \mu_1 \vec{v}_1 + \ldots + \mu_{r-1} \vec{v}_{r-1}$, де $\mu_1 = -\lambda_i / \lambda_r$, $i \in \{1, \ldots, r-1\}$. Отже,

$$\vec{v}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{v}_r = \vec{v}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{v}_{r-1} \wedge (\mu_1 \vec{v}_1 + \ldots + \mu_{r-1} \vec{v}_{r-1}) =$$

$$= \mu_1(\vec{v}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{v}_{r-1} \wedge \vec{v}_1) + \ldots + \mu_{r-1}(\vec{v}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{v}_{r-1} \wedge \vec{v}_{r-1}) = \vec{0}$$

внаслідок прикладу 9.

2. Навпаки, нехай $\vec{v}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{v}_r = \vec{0}$. Припустимо, що система векторів $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ лінійно незалежна і доповнимо її до базису $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ простору V_n. Тоді і подавно

$$\vec{v}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{v}_n = (\vec{v}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{v}_r) \wedge (\vec{v}_{r+1} \wedge \ldots \wedge \vec{v}_n) = \vec{0},$$

що суперечить зауваженню 4.3. Отже, система векторів $\{\vec{v}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{v}_r\}$ лінійно залежна.

11. Нехай задано тензор

$$T = \{T_1^{11}, T_1^{12}, T_1^{21}, T_1^{22}, T_2^{11}, T_2^{12}, T_2^{21}, T_2^{22}\} \equiv \{T_i^{jl}\} \in T_1^2(V_1).$$

Згорнути цей тензор за нижнім та другим верхнім індексом.

Розв'язання. T є тензором типу $(1;2)$; в результаті згортки (ототожнення вказаних індексів) одержимо тензор $C_1^2 T = \{T_i^{ji} = T^j,\ j \in \{1,2\}\} \in T_0^1(V_1)$ (сумування здійснюємо по індексу $i \in \{1,2\}$), де

$$T^1 = T_1^{11} + T_2^{12}, \quad T^2 = T_1^{21} + T_2^{22}.$$

12. Нехай задано тензори $T = \{a_1^1; a_1^2; a_2^1; a_2^2\} \in T_1^1(V_2)$, $Q = \{b^1; b^2\} \in T_0^1(V_2)$. Знайти тензорний добуток $T \otimes Q$.

Розв'язання. Для задання тензора досить знати його компоненти у просторі $T_1^2(V_2)$, яких повинно бути $2^{2+1} = 8$. Для знаходження цих компонент скористаємося співвідношенням, яке визначає тензорний добуток тензорів у термінах їхніх компонент:

$$(S_1 \otimes S_2)_{i_1 \ldots i_{r+p}}^{j_1 \ldots j_{s+q}} = (S_1)_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s} \cdot (S_2)_{i_{r+1} \ldots i_{r+p}}^{j_{s+1} \ldots j_{s+q}}.$$

Отже,

$$T \otimes Q = \{c_1^{11}, c_1^{21}, c_2^{11}, c_2^{21}, c_1^{12}, c_1^{22}, c_2^{12}, c_2^{22}\},$$

де

$$c_1^{11} = a_1^1 b^1, \quad c_1^{21} = a_1^2 b^1, \quad a_2^1 b^1 = c_2^{11}, \quad a_2^2 b^1 = c_2^{21},$$

$$a_1^1 b^2 = c_1^{12}, \quad a_1^2 b^2 = c_1^{22}, \quad a_2^1 b^2 = c_2^{12}, \quad a_2^2 b^2 = c_2^{22},$$

$T \otimes Q$ – тензор типу (1, 2).

13. Нехай Φ – регулярна поверхня, яка задається параметризацією $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in G$. Перевірити, що коефіцієнти першої та другої квадратичних форм утворюють коваріантні симетричні тензори.

Розв'язання. Введемо позначення $u = u^1$, $u = u^2$ і з'ясуємо, як змінюються частинні похідні $\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}$, $i \in \{1, 2\}$. вектор-функції $\vec{r}$ при переході від криволінійних координат u^1, u^2 до інших координат $u^{1'}$, $u^{2'}$. Нехай

$$u^{1'} = u^{1'}(u^1, u^2), \quad u^{2'} = u^{2'}(u^1, u^2). \tag{4.19}$$

Вважаємо, що функції $u^{1'}$, $u^{2'}$ неперервно диференційовні в G і в області G визначник

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u^{1'}}{\partial u^1} & \frac{\partial u^{1'}}{\partial u^2} \\ \frac{\partial u^{2'}}{\partial u^1} & \frac{\partial u^{2'}}{\partial u^2} \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля. У цьому випадку рівняння (4.19) розв'язуються відносно u^1, u^2: $u^1 = u^1(u^{1'}, u^{2'})$, $u^2 = u^2(u^{1'}, u^{2'})$ і, як відомо, в деякій області G', яка відповідає G,

$$J' = \begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial u^{1'}} & \frac{\partial u^1}{\partial u^{2'}} \\ \frac{\partial u^2}{\partial u^{1'}} & \frac{\partial u^2}{\partial u^{2'}} \end{vmatrix} = \frac{1}{J} \neq 0.$$

Отже, маємо, що

$$\vec{r}_{i'} := \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^{i'}} = \frac{\partial u^j}{\partial u^{i'}}\vec{r}_j, \quad \vec{r}_i = \frac{\partial u^{j'}}{\partial u^i}\vec{r}_{j'}, \quad 1 \le i, j \le 2. \tag{4.20}$$

Нагадаємо, що перша квадратична форма поверхні має вигляд

$$I = E(du^1)^2 + 2F du^1 du^2 + G(du^2)^2,$$

де

$$E := g_{11} = (\vec{r}_1, \vec{r}_1),\ F := g_{12} = g_{21} = (\vec{r}_1, \vec{r}_2),\ G := g_{22} = (\vec{r}_2, \vec{r}_2).$$

Тоді

$$g_{i'j'} = (\vec{r}_{i'}, \vec{r}_{j'}) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^{i'}}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^{j'}}\right) = \left(\frac{\partial u^k}{\partial u^{i'}}\vec{r}_k, \frac{\partial u^l}{\partial u^{j'}}\vec{r}_l\right) =$$

$$= (\vec{r}_k, \vec{r}_l)\frac{\partial u^k}{\partial u^{i'}}\frac{\partial u^l}{\partial u^{j'}} = g_{kl}\frac{\partial u^k}{\partial u^{i'}}\frac{\partial u^l}{\partial u^{j'}}.$$

Отже, функції $g_{ij}(u^1, u^2)$, $1 \le i, j \le 2$, при перетворенні локальних координат змінюються за законом (4.8), тобто вони утворюють тензор типу $(2, 0)$. Оскільки $g_{12} = g_{21}$, то тензор, який визначається сукупністю функцій $\{g_{ij}\}$, є симетричним і називається **першим основним (метричним) тензором поверхні.**

З'ясуємо тепер, як змінюються другі частинні похідні вектор-функції $\vec{r}$ при заміні змінних. Врахувавши (4.20) знайдемо, що

$$\vec{r}_{i'j'} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^{i'}\partial u^{j'}} = \frac{\partial}{\partial u^{i'}}(\vec{r}_{j'}) = \frac{\partial}{\partial u^{i'}}\left(\frac{\partial u^k}{\partial u^{j'}}\vec{r}_k\right).$$

Введемо позначення: $\dfrac{\partial u^i}{\partial u^{j'}} = D^i_{j'}$. Тоді

$$\vec{r}_{i'j'} = \frac{\partial u^l}{\partial u^{i'}}\frac{\partial}{\partial u^l}\left(\frac{\partial u^k}{\partial u^{j'}}\vec{r}_k\right) = D^l_{i'}\frac{\partial}{\partial u^l}\left(\vec{r}_k \cdot D^k_{j'}\right) =$$

$$= \vec{r}_{kl}D^k_{j'}D^l_{i'} + \vec{r}_k D^l_{i'}\frac{\partial}{\partial u^l}D^k_{j'}. \tag{4.21}$$

Для того, щоб утворити з цих величин тензор, необхідно позбутися другого доданку у правій частині співвідношення (4.21). Для цього досить домножити всі ці величини скалярно на інваріантний вектор (тобто вектор, який не змінюється при переході від однієї криволінійної системи координат до іншої), ортогональний до векторів $\vec{r}_i$, $i \in \{1, 2\}$. Таким вектором є одиничний вектор нормалі $\vec{n} = \dfrac{[\vec{r}_1, \vec{r}_2]}{|[\vec{r}_1, \vec{r}_2]|}$. Його інваріантність випливає з таких співвідношень:

$$[\vec{r}_{1'}, \vec{r}_{2'}] = [\vec{r}_i, \vec{r}_j]D^i_{1'}D^j_{2'} =$$

$$= [\vec{r}_1, \vec{r}_2] \cdot D^1_{1'} \cdot D^2_{2'} + [\vec{r}_2, \vec{r}_1] \cdot D^2_{1'} \cdot D^1_{2'} = [\vec{r}_1, \vec{r}_2] \cdot J'.$$

Отже, $|[\vec{r}_{1'}, \vec{r}_{2'}]| = |[\vec{r}_1, \vec{r}_2]| \cdot |J'|$. Змінюючи у разі необхідності нумерацію нових змінних будемо мати $J' > 0$; тоді

$$\vec{n}' = \vec{n}. \tag{4.22}$$

Перемножимо скалярно ліві і праві частини співвідношень (4.21) та (4.22); в результаті дістанемо, що

$$(\vec{r}_{i'j'}, \vec{n}') = (\vec{r}_{lk}, \vec{n})D^l_{i'}D^k_{j'} = (\vec{r}_{lk}, \vec{n})\frac{\partial u^l}{\partial u^{i'}}\frac{\partial u^k}{\partial u^{j'}}.$$

Отже, функції

$$\beta_{ij} = (\vec{r}_{ij}, \vec{n}) = \frac{(\vec{r}_{ij}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|[\vec{r}_1, \vec{r}_2]|}, \quad 1 \le i, j \le 2,$$

утворюють симетричний тензор типу $(2, 0)$, який називають **другим метричним тензором поверхні**. Цей тензор породжує диференціальний інваріант — другу квадратичну форму поверхні:

$$II = L(du^1)^2 + 2M du^1 du^2 + N(du^2)^2,$$

$$L = b_{11}, \quad M = b_{12} = b_{21}, \quad N = b_{22}.$$

14. Нехай $T = \{T_i\}$ – тензор типу (1, 0) на гладкому многовиді M із системою координат $x^1, \ldots, x^n$. Сукупність функцій $\left\{\dfrac{\partial T_i}{\partial x^j} - \dfrac{\partial T_j}{\partial x^i}\right\}$ називається ротором векторного поля і позначається символом $\operatorname{rot} T$. Довести, що $\operatorname{rot} T$ – кососиметричний тензор типу (2, 0) на многовиді M.

Розв'язання. Розглянемо перетворення координат

$$x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n), \quad i \in \{1, \ldots, n\};$$

нехай $\tilde{T}_j$ – компоненти тензора T в координатах $z^1, \ldots, z^n$. Тоді

$$\tilde{T}_k = T_i \frac{\partial x^i}{\partial z^k}, \quad (\operatorname{rot} T)_{ij} = \frac{\partial T_i}{\partial x^j} - \frac{\partial T_j}{\partial x^i},$$

$$(\operatorname{rot} \tilde{T})_{kl} = \frac{\partial \tilde{T}_k}{\partial z^l} - \frac{\partial \tilde{T}_l}{\partial z^k} = \frac{\partial}{\partial z^l}\left(T_i \frac{\partial x^i}{\partial z^k}\right) - \frac{\partial}{\partial z^k}\left(T_j \frac{\partial x^j}{\partial z^l}\right) =$$
$$= \frac{\partial T_i}{\partial z^l}\frac{\partial x^i}{\partial z^k} - T_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^l \partial z^k} - \frac{\partial T_j}{\partial z^k}\frac{\partial x^j}{\partial z^l} + T_i \frac{\partial^2 x^j}{\partial z^k \partial z^l} =$$
$$= \left(\frac{\partial T_i}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial z^l}\right)\frac{\partial x^i}{\partial z^k} - \left(\frac{\partial T_j}{\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial z^k}\right)\frac{\partial x^j}{\partial z^l}$$

(не сумуються лише індекси k, l). Позначимо у першому доданку p через j, а у другому q через l. В результаті дістанемо, що

$$\frac{\partial T_i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial z^l}\frac{\partial x^i}{\partial z^k} - \frac{\partial T_j}{\partial z^i}\frac{\partial x^i}{\partial z^k}\frac{\partial x^j}{\partial z^l} = \left(\frac{\partial T_i}{\partial x^j} - \frac{\partial T_j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial x^i}{\partial z^k}\frac{\partial x^j}{\partial z^l} =$$
$$= (\operatorname{rot} T)_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial z^k}\frac{\partial x^j}{\partial z^l}.$$

Отже, сукупність функцій $\{(\operatorname{rot} T)_{ij}\}$ при перетворенні координат змінюється за законом (4.8) і вона визначає тензор $\operatorname{rot} T$ типу (2, 0). Кососиметричність цього тензора очевидна.

15. Нехай M – гладкий n-вимірний многовид із системою координат, яка кожній точці многовиду ставить у відповідність координати $x^1, \ldots, x^n$, $T = \{T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}\}$ – тензорне поле на M. Довести, що сукупність функцій $T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r, p} = \dfrac{\partial T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}}{\partial x^p}$ також є тензором (тензоним полем) на M при довільній лінійній заміні координат

$$x^i = a^i_j z^j, \quad a^i_j = \text{const},$$
$$z^i = b^i_j x^j, \quad b^i_j a^j_k = \delta^i_k.$$

Розв'язання. Для лінійних перетворень правильними є співвідношення

$$\frac{\partial x^i}{\partial z^j} = a^i_j = \text{const}, \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^j \partial z^k} = 0,$$
$$\frac{\partial z^i}{\partial x^j} = b^i_j = \text{const}, \quad a^i_j b^j_k = \delta^i_k.$$

Із означення тензора випливає, що при перетворенні системи координат T змінюється за законом (див. (4.8)): $'T = \{'T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}\}$, де

$$'T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} = \frac{\partial x^{k_1}}{\partial z^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^{k_r}}{\partial z^{i_r}} \frac{\partial z^{j_1}}{\partial x^{l_1}} \ldots \frac{\partial z^{j_s}}{\partial x^{l_s}} T^{l_1 \ldots l_s}_{k_1 \ldots k_r} =$$
$$= a^{k_1}_{i_1} \ldots a^{k_r}_{i_r} b^{j_1}_{l_1} \ldots b^{j_s}_{l_s} T^{l_1 \ldots l_s}_{k_1 \ldots k_r}. \tag{4.23}$$

Оскільки $a^i_j = \text{const}$, $b^i_j = \text{const}$, то при диференціюванні формули (4.23) дістаємо співвідношення:

$$'T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r,q} = \frac{\partial\, 'T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}}{\partial z^q} = \frac{\partial T^{l_1\dots l_s}_{k_1\dots k_r}}{\partial z^q} a^{k_1}_{i_1}\dots a^{k_r}_{i_r} b^{j_1}_{l_1}\dots b^{j_s}_{l_s} =$$

$$= \frac{\partial T^{l_1\dots l_s}_{k_1\dots k_r}}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial z^q} a^{k_1}_{i_1}\dots a^{k_r}_{i_r} b^{j_1}_{l_1}\dots b^{j_s}_{l_s} = T^{l_1\dots l_s}_{k_1\dots k_r,p} a^p_q a^{k_1}_{i_1}\dots a^{k_r}_{i_r} b^{j_1}_{l_1}\dots b^{j_s}_{l_s}.$$

Останнє співвідношення і є законом перетворення тензора.

Зауваження 4.4. При доведенні вказаної властивості істотно використано співвідношення $\dfrac{\partial^2 x^k}{\partial z^q \partial z^j} = 0$. Розглянемо, наприклад, тензор T_i типу (1, 0). При загальній заміні координат $x^i = x^i(z^1, \dots, z^n)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, де $\dfrac{\partial^2 x^k}{\partial z^q \partial z^j} \neq 0$ маємо, що

$$'T_{i,q} = \frac{\partial\, 'T_i}{\partial z^q} = \frac{\partial}{\partial z^q}\left(T_k \frac{\partial x^k}{\partial z^i}\right) = \frac{\partial T_k}{\partial z^q}\frac{\partial x^k}{\partial z^i} + T_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial z^q \partial z^i} =$$

$$= \frac{\partial T_k}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial z^q}\frac{\partial x^k}{\partial z^i} + T_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial z^q \partial z^j} = T_{k,p}\frac{\partial x^p}{\partial z^q}\frac{\partial x^k}{\partial z^i} + T_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial z^q \partial z^j} \neq \tilde{T}_{i,q}.$$

Доданок $T_k \dfrac{\partial^2 x^k}{\partial z^q \partial z^j}$ не має тензорного характеру. Якщо заміна координат лінійна, то

$$'T_{i,q} = T_{k,p}\frac{\partial^p x^k}{\partial z^q}\frac{\partial x^k}{\partial z^i} = T_{k,p} a^p_q a^k_i;$$

отже, $\dfrac{\partial T_i}{\partial x^p} = T_{ip}$ – коваріантний тензор типу (2, 0).

16. Довести, що якщо $\{a_{ij}\}$ – невироджений ($|a_{ij}| \neq 0$), симетричний ($a_{ij} = a_{ji}$), двічі коваріантний тензор, то об'єкт, який визначається системою рівнянь

$a_{ij}a^{ik} = \delta^k_j$, є симетричним двічі контраваріантним тензором.

Розв'язання. Передусім зазначимо, що набір $\{\delta^k_j\}$ визначає тензор типу (1, 1), оскільки

$$\delta^{k'}_{j'} = \lambda^j_{j'}\lambda^{k'}_k \delta^k_j. \tag{4.24}$$

Тоді, з урахуванням (4.24), із співвідношень $a_{i'j'}a^{i'k'} = \delta^{k'}_{j'}$ дістаємо, що

$$a_{ij}\lambda^i_{i'}\lambda^j_{j'}a^{i'k'} = \lambda^p_{j'}\lambda^{k'}_k \delta^k_p,$$

$$a^{i'k'} = a^{ij}\lambda^{i'}_i \lambda^{j'}_j \lambda^p_{j'}\lambda^{k'}_k \delta^k_p = \lambda^{i'}_i \lambda^{k'}_j a^{ij}.$$

Отже, набір $\{a^{ik}\}$ змінюється за законом, який визначає тензор типу (0, 2), що й потрібно було довести.

17. Перевірити, що коваріантна похідна від першого матричного тензора $\{g_{ij}\}$ поверхні рівна нулю.

Розв'язання. Згідно з означенням коваріантної похідної

$$g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - g_{lj}\Gamma^l_{ki} - g_{il}\Gamma^l_{jk}.$$

Оскільки $\Gamma^l_{ij} = g^{lk}\Gamma_{kij}$, $g_{ij}g^{ik} = \delta^k_j$, то, скориставшись зображенням символів Христофеля 1-го роду знайдемо, що

$$g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - g_{lj}g^{lp}\Gamma_{pki} - g_{il}g^{lp}\Gamma_{pjk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \Gamma_{jki} - \Gamma_{ijk} =$$

$$= \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\right) = 0.$$

18. Задана поверхня обертання

$$x = u^1 \cos u^2, \quad y = u^1 \sin u^2, \quad z = f(u^1), \quad f \in C^{(2)}.$$

Знайти коваріантні похідні коефіцієнтів другої квадратичної форми.

Розв'язання. Відомо (див. приклад 13), що коефіцієнти $\{b_{ij}\}$ другої квадратичної форми утворюють тензор (другий метричний тензор поверхні). Отже, для обчислення коваріантних похідних від b_{ij} скористаємося формулами (4.12), які у даному випадку мають вигляд:

$$b_{ij,k} = \frac{b_{ij}}{\partial u^k} - b_{pj}\Gamma^p_{ik} - b_{ip}\Gamma^p_{jk}, \tag{4.25}$$

де Γ^l_{ij} – Христофелі 2-го роду. Для того, щоб знайти Γ^l_{ij}, обчислимо коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні $\{g_{ij}\}$ (вони, як відомо, утворюють невироджений, симетричний, коваріантний тензор валентності 2), потім, за допомогою цього тензора знайдемо симетричний контраваріантний тензор $\{g^{ij}\}$ валентності 2, Христофелі 1-го роду, і, нарешті, Христофелі 2-го роду.

Оскільки параметризація поверхні має вигляд

$$\vec{r} = \{u^1 \cos u^2; u^1 \sin u^2; f(u^1)\},$$

то легко бачити, що

$$g_{11} = (\vec{r}_1, \vec{r}_1) = 1 + f'^2(u^1), \quad g_{12} = g_{21} = (\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0,$$

$$g_{22} = (\vec{r}_2, \vec{r}_2) = (u^1)^2.$$

Тензор $\{g^{ij}\}$ знаходимо із системи (див. приклад 16)

$$g_{ij}g^{ik} = \delta^k_j \Leftrightarrow \begin{cases} g_{11}g^{1k} + g_{21}g^{2k} = \delta^k_1, \\ g_{12}g^{1k} + g_{22}g^{2k} = \delta^k_2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g_{11}g^{11} + g_{21}g^{21} = 1, \\ g_{12}g^{11} + g_{22}g^{21} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} g_{11}g^{12} + g_{21}g^{22} = 0, \\ g_{12}g^{12} + g_{22}g^{22} = 1, \end{cases}$$

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{\Delta}, g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{\Delta}, g^{22} = \frac{g_{11}}{\Delta}, \Delta = g_{11}g_{22} - g_{12}^2.$$

У даному випадку маємо, що

$$\Delta = (u^1)^2(1 + f'^2(u^1)), \quad g^{11} = \frac{1}{1 + f'^2(u^1)},$$

$$g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{22} = \frac{1}{(u^1)^2}.$$

Христофелі 1-го роду Γ_{kij} обчислюємо за формулами

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\Big).$$

Отже,

$$\Gamma_{111} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}\Big) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} = f'(u^1)f''(u^1).$$

$$\Gamma_{112} = \Gamma_{121} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}\Big) = 0.$$

$$\Gamma_{122} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\Big) = -u^1.$$

$$\Gamma_{211} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\Big) = 0.$$

$$\Gamma_{212} = \Gamma_{221} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}\Big) = 0.$$

$$\Gamma_{222} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}\Big) = 0.$$

Христофелі 2-го роду Γ^l_{ij} знаходимо за допомогою формул

$$\Gamma^l_{ij} = g^{l1}\Gamma_{1ij} + g^{l2}\Gamma_{2ij}.$$

Отже,

$$\Gamma^1_{11} = g^{11}\Gamma_{111} + g^{12}\Gamma_{211} = \frac{f'(u^1)f''(u^1)}{1 + f'^2(u^1)},$$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = g^{11}\Gamma_{112} + g^{12}\Gamma_{212} = 0,$$

$$\Gamma^1_{22} = g^{11}\Gamma_{122} + g^{12}\Gamma_{222} = -\frac{u^1}{1+f'^2(u^1)},$$

$$\Gamma^2_{11} = g^{21}\Gamma_{111} + g^{22}\Gamma_{211} = 0,$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = g^{21}\Gamma_{112} + g^{22}\Gamma_{212} = 0,$$

$$\Gamma^2_{22} = g^{21}\Gamma_{122} + g^{22}\Gamma_{222} = 0.$$

Потрібно ще мати вигляд коефіцієнтів 2-ої квадратичної форми b_{ij}:

$$b_{11} = \frac{(\vec{r}_{11}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & f''(u^1) \\ \cos u^2 & \sin u^2 & f'(u^1) \\ -u^1 \sin u^2 & u^1 \cos u^2 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{(u^1)^2(1+f'^2(u^1))}} =$$

$$= \frac{u^1 f''(u^1)}{|u^1|\sqrt{1+f'^2(u^1)}},$$

$$b_{12} = b_{21} = \frac{(\vec{r}_{12}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = \frac{\begin{vmatrix} -\sin u^2 & \cos u^2 & 0 \\ \cos u^2 & \sin u^2 & f'(u^1) \\ -u^1 \sin u^2 & u^1 \cos u^2 & 0 \end{vmatrix}}{|u^1|\sqrt{1+f'^2(u^1)}} = 0,$$

$$b_{22} = \frac{(\vec{r}_{22}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = \frac{\begin{vmatrix} -u^1 \cos u^2 & -u^1 \sin u^2 & 0 \\ \cos u^2 & \sin u^2 & f'(u^1) \\ -u^1 \sin u^2 & u^1 \cos u^2 & 0 \end{vmatrix}}{|u^1|\sqrt{1+f'^2(u^1)}} =$$

$$= \frac{(u^1)^2 f'(u^1)}{|u^1|\sqrt{1+f'^2(u^1)}}.$$

Нарешті, коваріантні похідні коефіцієнтів другої квадратичної форми обчислюємо за формулами (4.25). Для $u^1 > 0$ маємо, що

$$b_{11,1} = \frac{\partial b_{11}}{\partial u^1} - b_{p1}\Gamma^p_{11} - b_{1p}\Gamma^p_{11} = \frac{\partial b_{11}}{\partial u^1} - 2[b_{11}\Gamma^1_{11} - b_{12}\Gamma^2_{11}] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{f''(u^1)}{\sqrt{1+f'^2(u^1)}} - \frac{2f'(u^1)(f''(u^1))^2}{(1+f'^2(u^1))^{3/2}}\right) =$$

$$= \frac{f'''(u^1)(1+f'^2(u^1)) - f'(u^1)(f''(u^1))^2}{(1+f'^2(u^1))^{3/2}},$$

$$b_{11,2} = \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} - b_{p1}\Gamma^p_{12} - b_{1p}\Gamma^p_{12} = \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} - 2[b_{11}\Gamma^1_{12} - b_{12}\Gamma^2_{12}] = 0,$$

$$b_{12,1} = \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} - b_{p2}\Gamma^p_{11} - b_{1p}\Gamma^p_{21} =$$

$$= \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} - b_{12}\Gamma^1_{11} - b_{22}\Gamma^2_{11} - b_{11}\Gamma^1_{21} - b_{12}\Gamma^2_{21} = 0,$$

$$b_{21,1} = b_{12,1} = 0,$$

$$b_{12,2} = \frac{\partial b_{12}}{\partial u^2} - b_{p2}\Gamma^p_{12} - b_{1p}\Gamma^p_{22} = \frac{\partial b_{12}}{\partial u^2} - b_{12}\Gamma^1_{12} - b_{22}\Gamma^2_{12} -$$

$$-b_{11}\Gamma^1_{22} - b_{11}\Gamma^2_{22} = \frac{u^1 f''(u^1)}{(1+f'^2(u^1))^{3/2}},$$

$$b_{21,2} = b_{12,2},$$

$$b_{22,1} = \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} - b_{p2}\Gamma^p_{21} - b_{2p}\Gamma^p_{21} = \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} - 2[b_{21}\Gamma^1_{21} - b_{22}\Gamma^2_{21}] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{u^1 f'(u^1)}{\sqrt{1+f'^2(u^1)}}\right) =$$

$$= \frac{(f'(u^1) + u^1 f''(u^1))(1+f'^2(u^1)) - u^1 f'(u^1) f''(u^1)}{(1+f'^2(u^1))^{3/2}},$$

$$b_{22,2} = \frac{\partial b_{22}}{\partial u^2} - b_{p2}\Gamma^p_{22} - b_{2p}\Gamma^p_{22} = \frac{\partial b_{22}}{\partial u^2} - 2[b_{21}\Gamma^1_{22} - b_{22}\Gamma^2_{22}] = 0.$$

Випадок $u^1 < 0$ розглядається аналогічно.

Завдання для самостійної роботи

1. Перевірити, що мішаний добуток векторів є тензором типу (3, 0).

2. Нехай $T_1 \in \Lambda_r(V_n)$, $T_2 \in \Lambda_s(V_n)$. Довести, що

$$T_1 \wedge T_2 = (-1)^{rs} T_2 \wedge T_1.$$

3. Нехай $\vec{v} \in V_n$, $\omega \in V'_n$. Охарактеризувати тензор $\vec{v} \otimes w$.

4. Нехай $L_1 = L(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r)$, $L_2 = L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_r)$ - два r-вимірні підпростори простору V_n. Довести, що

$$(L_1 = L_2) \Leftrightarrow (\hat{a}_1 \wedge \ldots \wedge \hat{a}_r = \lambda \vec{v}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{v}_r,\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

5. Довести, що якщо тензор $\{T_{ijk}\}$ симетричний відносно індексів i, j, то

$$T_{(ijk)} = \frac{1}{3}(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij}).$$

6. Довести, що якщо тензор $\{T_{ijk}\}$ кососиметричний відносно індексів i, j, то

$$T_{[ijk]} = \frac{1}{3}(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij}).$$

7. Довести, що послідовне виконання операцій симетріювання і альтернування тензора за наміченою парою індексів зводить його до нульового тензора.

8. Записати формули перетворення координат двовалентного афінора, чистого тензора.

9. Перевірити, що операція тензорного добутку тензорів володіє властивістю білінійності та властивістю асоціативності.

10. Довести, що символи Кронекера утворюють тензор типу (1, 1).

11. Довести, що середня кривина поверхні є тензором типу (0, 0).

12. Чи утворює тензор градієнт будь-якої гладкої функції?

13. Що представляє собою поверхня, для якої: а) $g^{kl}b_{ik} = \delta^l_i$; б) $\Gamma^k_{ij} = 0$?

14. Показати, що величини

$$R^i_{jkl} := \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^m_{jl}\Gamma^i_{mk} - \Gamma^m_{jk}\Gamma^i_{ml}$$

утворюють тензор типу (3, 1). Тензор $R_2 = \{R^i_{jkl}\}$ називається **тензором Рімана другого роду**.

15. Довести, що тензор Рімана другого роду володіє властивостями:

а) $R^i_{jkl} = R^i_{kjl}$;

б) $R^i_{jkl} = -R^i_{jlk}$.

16. Тензор R_1, який має компоненти $\{g_{im}R^m_{jkl} = R_{ijkl}\}$ називається **тензором Рімана першого роду** ($\{g_{im}\}$ – перший метричний тензор). Довести, що тензор Рімана першого роду володіє властивостями:

а) $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$;

б) $R_{ijkl} = -R_{jikl}$;

в) $R_{ijkl} = R_{klij}$;

г) $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$.

17. Тензор $R_{ij} := R^l_{ijl}$ називається **тензором Річчі**. Показати, що $R_{[ij]} = 0$.

18. Показати, що коваріантна похідна від символа Кронекера дорівнює нулеві.

19. Переконатися, що коваріантне диференціювання суми, різниці і добутку тензорів здійснюється за правилами звичайного диференціювання.

20. Довести, що символи Христофеля 2-го роду Γ^i_{kl} є тензорами лише при лінійних перетвореннях локальних координат.

21. Довести, що середня кривина поверхні H визначається формулою $H = \frac{1}{2} g^{ij} b_{ij}$, $\{g^{ij}\}$ – двічі контраваріантний метричний тензор, який визначається системою рівнянь $g_{ij} g^{ik} = \delta^k_j$, $\{g_{ij}\}$ – перший метричний тензор, $\{b_{ij}\}$ – другий метричний тензор.

22. Знайти поверхні, на яких виконуються рівності $b_{ij,k} = 0$.

23. Тензор $g^{ik} R_{ki}$, де R_{ki} – тензор Річчі, називається скалярною кривиною ріманового простору. Довести, що скалярна кривина поверхні тривимірного евклідового простору збігається з подвоєною повною кривиною поверхні.

24. Нехай $x^{i'} = a^{i'}(x^i)$ – перетворення координат. Функція J називається відносним інваріантом ваги k, якщо

$$J' = \left| \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right|^k J.$$

Нехай a_{ij}, a^{ij}, a^j_i – двовалентні тензори. Довести, що $|a_{ij}|$, $|a^{ij}|$ – відносні інваріантні ваги 2, $|a^j_i|$ – інваріант з вагою $k = 0$.

25. Нехай $g_{ij}(x^k)$ – симетричний тензор. Довести, що квадратична форма $g_{ij} dx^i dx^j$ інваріантна відносно довільного перетворення координат.

26. Довести, що якщо $a_{ij} u^i u^j$ – інваріант перетворення $x^{i'} = \lambda^{i'}_i u^i$, а a_{ij} – симетричний об'єкт відносно цього ж перетворення, то a_{ij} – тензор, тобто $a_{i'j'} = \lambda^i_{i'} \lambda^j_{j'} a_{ij}$, $\lambda^i_{i'} \lambda^{j'}_i = \delta^{j'}_{i'}$.

27. Рангом двовалентного тензора називають ранг визначника, складеного із компонент цього тензора. Довести, що ранг двовалентного тензора інваріантний відносно перетворення координат.

28. Задано перетворення системи координат

$$x' = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Знаючи компоненти тензорів у системі координат xy, знайти їхні компоненти в системі $x'y'$:

1) T_1: $a_{11} = x^2 + y^2$, $a_{12} = x$, $a_{21} = y$, $a_{22} = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$;

2) T_2: $a^1_1 = x$, $a^2_1 = x + y$, $a^1_2 = x - y$, $a^2_2 = y$;

3) T_3: $a^1 = xy$, $a^2 = \dfrac{x}{y}$;

4) T_4: $a_1 = x + y$, $a_2 = x - y$;

5) T_5: $a^1_{11} = x$, $a^1_{12} = y$, $a^1_{21} = x + y$, $a^1_{22} = x - y$, $a^2_{11} = x^2$;

6) T_6: $a_{11} = \sin x$, $a_{12} = \cos x$, $a_{21} = \dfrac{1}{\sin x}$, $a_{22} = \dfrac{1}{\cos x}$;

7) T_7: $a_{11} = e^x$, $a_{12} = e^{-x}$, $a_{21} = x$, $a_{22} = y$.

29. Знайти тензорний добуток тензорів T_1, T_2, якщо

а) T_1: $b^1_1 = x^2$, $b^2_1 = y$, $b^1_2 = x$, $b^2_2 = y^2$;
 T_2: $b_{21} = x$, $b_{22} = y$, $b_{12} = x - y$, $b_{11} = y$;

б) T_1: $d^2_1 = x^3$, $d^1_2 = y^3$, $d^1_1 = x^2$, $d^2_2 = y^2$;
 T_2: $d^2 = x$, $d^1 = y$.

30. Тензор T задано компонентами

$T^{11}_1 = x^1 + (x^2)^2$, $T^{12}_1 = x^1 + x^2$, $T^{21}_1 = x^1 x^2$, $T^{22}_1 = 1$, $T^{11}_2 = x^2 + (x^1)^2$, $T^{12}_2 = x^1 - x^2$, $T^{21}_2 = \dfrac{x^1}{x^2}$, $T^{22}_2 = 0$.

Згорнути тензор T по нижньому та першому верхньому індексу.

31. Тензор T: $T^1_{11} = \sin x^1 + \cos x^2$, $T^1_{12} = x^1$, $T^1_{21} = (x^1)^2$, $T^1_{22} = x^1 x^2$, $T^2_{11} = \sin x^1 - \cos x^2$, $T^2_{12} = x^2$, $T^2_{21} = (x^2)^2$, $T^2_{22} = \dfrac{x^1}{x^2}$, симетріювати за нижніми індексами, альтернувати за тими ж індексами.

32. Якщо a_{ij} – компоненти тензора, a і b – інваріанти і $ba_{ij} + ca_{ji} = 0$, то або $b = -c$ і $\{a_{ij}\}$ – симетричний тензор, або $b = c$, а $\{a_{ij}\}$ – кососиметричний тензор. Довести це твердження.

Список літератури

1. *Кованцов М.І.* Диференціальна геометрія. – Київ: Вища школа, 1973. – 276 с.

2. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. – М.: Гостехиздат, 1950. – 428 с.

3. *Погорелов А.В.* Дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1969. – 176 с.

4. *Фиников С.П.* Дифференциальная геометрия. – М.: Изд-во МГУ, 1961. – 158 с.

5. *Норден А.П.* Краткий курс дифференциальной геометрии. – М.: Физматгиз, 1958. – 244 с.

6. *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* Курс дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Изд-во МГУ, 1980. - 440 с.

7. *Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Элементы дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Наука, 1987. – 432 с.

8. *Теплінський Ю.В.* Лекції з диференціальної геометрії. – Кам'янець-Подільський державний педагогічний університет, 1999. – 148 с.

9. *Лейко С.Г.* Диференціальна геометрія. – Одеса: "Астро-Принт", 1999. – 114 с.

10. *Кованцов Н.И., Зражевская Г.М., Кочаровский В.Г., Михайловский В.И.* Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ. Сборник задач. - К.: Вища школа, 1982. – 375 с.

11. Дифференциальная геометрия. Учебное пособие для мат. спец. вузов / Под редакцией А.С.Феденко. – Минск: Изд-во БГУ, 1982. – 256 с.

12. *Розендорн Э.Р.* Задачи по дифференциальной геометрии. – М.: Физматгиз, 1971. – 63 с.

13. *Васильев А.М., Соловьев Ю.П.* Дифференциальная геометрия: Методические указания. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – 120 с.

14. *Щербаков Р.Н., Лучинин А.А.* Краткий курс дифференциальной геометрии. – Томск: Изд-во Томского университета, 1974 – 248 с.

15. *Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. – М.: Наука, 1970. – 528 с.

16. *Базылев В.Т., Дуничев К.И.* Геометрия. – Ч. 2. – М.: Просвещение, 1975. – 368 с.

17. *Кириченко В.Ф., Арсеньева О.Е.* Введение в современную геометрию. - Тверь, Тверской гос. университет, 1997. – 117 с.

Навчальне видання

Городецький В.В., Мартинюк О.В.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ

В ТЕОРЕМАХ І ЗАДАЧАХ

Навчальний посібник

Дизайн обкладинки ***Сенько І.Р.***

Реєстраційне свідоцтво ДК №891 від 08.04.2002 р.

Підписано до друку 13.06.2006. Формат 60 x 84/16.
Папір офсетний. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 21,9.
Обл.-вид. арк. 23,5. Зам. 50-п. Тираж 300.
Друкарня видавництва "Рута" Чернівецького національного університету
58012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2