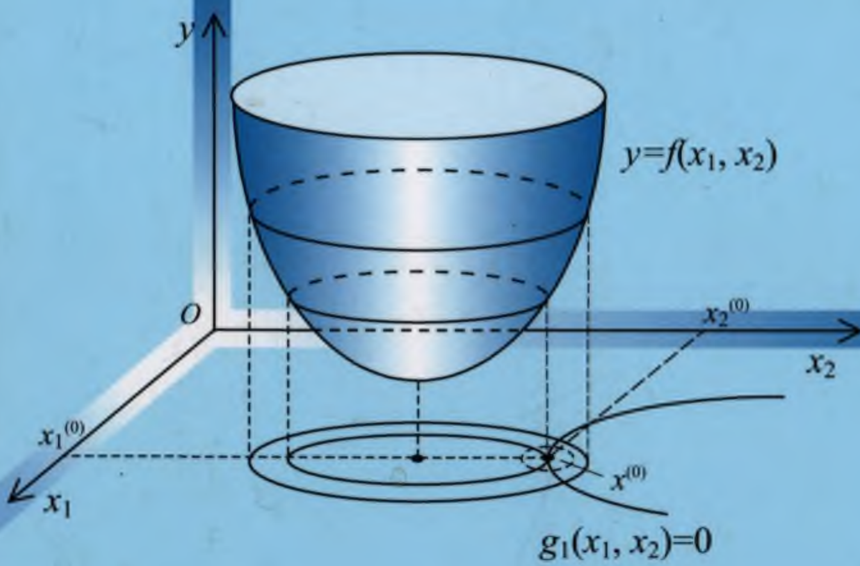
М.І. ЖАЛДАК
Ю.В. ТРИУС

ОСНОВИ ТЕОРІЇ І МЕТОДІВ ОПТИМІЗАЦІЇ



БРАМА–УКРАЇНА · 2005

М.І. ЖАЛДАК, Ю.В. ТРИУС

ОСНОВИ ТЕОРІЇ І МЕТОДІВ ОПТИМІЗАЦІЇ

Навчальний посібник
для студентів математичних спеціальностей
вищих навчальних закладів

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

ЧЕРКАСИ
БРАМА-УКРАЇНА
2005

ББК 22.18
УДК 519.6:378.1
Ж 24

Рецензенти:

В. І. Діскант – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Черкаського державного технологічного університету

В. М. Соловйов – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри економічної кібернетики Криворізького економічного інституту Київського національного економічного університету

Жалдак М.І., Триус Ю.В.
Основи теорії і методів оптимізації: Навчальний посібник. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 608 с.

У посібнику викладено основи теорії і методів оптимізації. Зокрема розглядаються класичні методи знаходження екстремумів функції однієї і багатьох змінних, метод множників Лагранжа; основні поняття опуклого аналізу: опуклі множини і функції та їх властивості, поняття субградієнта і субдиференціала опуклої функції; необхідні і достатні умови екстремуму; елементи теорії двоїстості в опуклому програмуванні; наближені методи одновимірної оптимізації для унімодальних функцій; чисельні методи безумовної та умовної оптимізації; непрямі і прямі методи стохастичного програмування; загальні принципи побудови керованих систем оптимізації; основні можливості використання деяких систем комп'ютерної математики та обробки даних для розв'язування екстремальних задач.

Навчальний посібник призначений для студентів вищих навчальних закладів 3-4 рівнів акредитації, які навчаються за освітніми напрямами: математика, прикладна математика, комп'ютерні науки, комп'ютерна інженерія, і буде корисним при вивченні курсів з теорії і методів оптимізації, дослідження операцій та відповідних спецкурсів, викладачам, які читають ці курси, а також аспірантам, які займаються проблемами розв'язування оптимізаційних задач, що виникають в економіці, техніці, управлінні, на виробництві, у соціальній сфері.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів (лист №14/18.2-867 від 22.04.2004 р.)

ISBN 966-8756-04-5

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Діяльність людини при розв'язуванні різноманітних проблем майже завжди спрямована на відшукання найкращого, або, як кажуть, оптимального рішення. Щоб знайти найкращу із можливостей, доводиться розв'язувати задачі на знаходження максимуму чи мінімуму, тобто найбільших чи найменших значень певних величин. Обидва ці поняття — максимум і мінімум об'єднуються єдиним терміном «екстремум». Тому задачі на відшукання максимуму чи мінімуму називаються екстремальними задачами. Дослідження різних типів екстремальних задач і методів їх розв'язування складають основу одного з найважливіших розділів математичної науки — теорії оптимізації.

При вивченні проблем, пов'язаних з постановкою, аналізом і розв'язуванням екстремальних задач, можна виділити кілька основних моментів:

— формалізація поставленої задачі;

— визначення умов існування розв'язку формалізованої задачі;

— формулювання необхідних, а по можливості і достатніх, умов екстремуму;

— розробка точних і наближених методів розв'язування різних класів екстремальних задач.

В даному посібнику подаються основи теорії і методів оптимізації у систематизованій і доступній формі.

У першому розділі «Вступ до оптимізації» дається короткий історичний огляд розвитку теорії оптимізації, розглядаються деякі старовинні екстремальні задачі, а також оптимізаційні задачі, що виникають в економіці, техніці та управлінні. Досить детально вивчається питання формалізації екстремальних задач, наведені загальна постановка задачі оптимізації, класифікація екстремальних задач за кількома ознаками, аналізуються умови існування розв'язків, при цьому досліджується випадок, коли цільова функція напівнеперервна, формулюється і доводиться теорема Вейєрштраса для цього випадку. Значна увага в першому розділі приділяється класичним методам знаходження екстремумів функції однієї і багатьох змінних, зокрема розглядається метод множників Лагранжа для класичної задачі на умовний екстремум. Розділ містить багато демонстраційних прикладів, завдань для самостійного виконання, переважна більшість яких має практичний зміст.

У другому розділі «Теоретичні основи оптимізації» подані поняття функціонального аналізу, які необхідні для розуміння подальшого матеріалу, а також основні поняття опуклого аналізу: опуклі множини та їх властивості, теореми відокремлення, опуклі функції та їх властивості, поняття субградієнта і субдиференціала опуклої функції, субдиференціал опуклої функції, наведено достатню кількість прикладів і рисунків для кращого розуміння матеріалу, розглядаються питання, пов'язані з обчисленням субдиференціалів та субдиференціалів опуклих функцій, а також дано короткий огляд основних класів негладких неопуклих функцій.

У третьому розділі «Необхідні і достатні умови екстремуму» вивчаються диференціальні умови оптимальності в задачах математичного програмування, зокрема принцип оптимальності Лагранжа, а також необхідні і достатні умови екстремуму в задачах опуклої оптимізації, формулюється і доводиться теорема Куна-Таккера як в диференціальній, так і в недиференціальній формах, розглядаються елементи теорії двоїстості в опуклому програмуванні.

У четвертому розділі «Чисельні методи оптимізації» розглядаються:

— наближені методи одновимірної оптимізації для унімодальних функцій, зокрема, методи дихотомії, золотого перерізу, Фібоначчі, парабол, а також деякі методи глобальної одновимірної мінімізації (метод перебору, метод ламаних);

— чисельні методи безумовної оптимізації, зокрема, градієнтний метод та його модифікації, метод Ньютона та його модифікації, метод спряжених градієнтів, субградієнтний метод та його модифікації, монотонні методи опуклої оптимізації і методи усереднення субградієнтів;

— чисельні методи умовної оптимізації, зокрема, метод проекції градієнта, метод умовного градієнта, метод можливих напрямів, метод штрафних функцій;

— деякі непрямі і прямі методи стохастичного програмування, зокрема методи проекції стохастичних квазіградієнтів і стохастичної апроксимації;

— деякі загальні підходи щодо формалізації задач оптимізації, вибору найбільш ефективних методів для розв'язування конкретних задач, їх чисельній реалізації за допомогою комп'ютера та аналізу одержаних результатів;

— загальні принципи побудови діалогових систем оптимізації;

— основні можливості використання деяких систем комп'ютерної математики та електронних таблиць для розв'язування екстремальних задач.

При поданні матеріалу значна увага приділяється геометричній інтерпретації основних понять і тверджень, спрощенню доведень теорем (але не за рахунок зниження рівня строгості), добору задач практичного змісту, пошуку коректних схем подання алгоритмів, за допомогою яких реалізуються як аналітичні, так і чисельні методи оптимізації.

Особливістю сучасного етапу розвитку методів розв'язування екстремальних задач є їх орієнтація на використання комп'ютера, що дозволяє вивчати і застосовувати на практиці чисельні методи, які раніше не могли бути реалізовані в зв'язку з великими обчислювальними витратами. Чисельні методи, які розглядаються в посібнику, подані так, що їх порівняно легко можна перекласти на одну з мов програмування високого рівня і реалізувати на комп'ютері.

Посібник містить значну кількість демонстраційних прикладів, завдання для самостійного виконання, розв'язування яких, як правило, передбачає використання засобів комп'ютерної математики, зокрема таких програмних засобів, як Advanced Grapher, GRAN1, Derive, Maple, Mathcad, Mathematica, Matlab тощо. Ці системи мають зручний інтерфейс, реалізують багато стандартних і спеціальних математичних операцій і функцій, мають потужні графічні засоби, деякі з них мають вбудовані мови програмування, засоби підготовки математичних текстів до друку, дозволяють імпортувати дані для використання в інших програмах (текстових і графічних редакторах, електронних таблицях) та експортувати з них дані для подальшого опрацювання.

У посібнику не нав'язується той чи інший програмний продукт для розв'язування екстремальних задач геометричними, аналітичними або чисельними методами. Викладачі і студенти у цьому питанні мають визначатися самі з урахуванням власних позицій і уподобань, наявного програмного і апаратного забезпечення, специфічних умов, в яких перебігає навчальний процес. Разом з тим майбутнім фахівцям в галузі математики, інформатики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій необхідно володіти кількома альтернативними програмними засобами комп'ютерної математики. Це обумовлено насамперед тим, що часто потрібно вміти обирати найбільш придатні системи для розв'язування тих чи інших задач, знати їх переваги і недоліки, а також вміти порівнювати результати, одержані за допомогою різних систем і, тим самим, збільшувати імовірність прийняття правильного рішення.

Для розуміння теоретичного матеріалу посібника необхідні знання початків математичного аналізу, лінійної алгебри і теорії імовірностей, а для використання засобів інформаційно-комунікаційних технологій при розв'язуванні практичних завдань необхідні основні вміння працювати з операційною системою однієї з платформ Windows або Unix, програмним забезпеченням загального призначення і вказаними вище проблемно-орієнтованими програмними засобами, а також навички будувати описи програм однією з мов програмування високого рівня (Pascal, C, C++) та реалізовувати їх за допомогою відповідної системи програмування.

Включений до посібника матеріал дещо відрізняється від традиційного, який розглядається у навчальній літературі з методів оптимізації. Зокрема деякі класичні розділи математичного програмування такі, як лінійне і квадратичне програмування, окремо не подані і розглядаються у контексті опуклого програмування. Це пов'язано з обмеженнями на обсяг посібника, а також з наявністю в достатній кількість літератури, де детально розглядаються ці питання. Крім того, малося на меті більше уваги приділити сучасним основам теорії і методів розв'язування задач оптимізації, які мало представлені у навчальній літературі, зокрема субдиференціальному і субдиференціальному численням, їх узагальненням на більш широкі класи негладких неопуклих функцій, елементам теорії необхідних умов оптимальності для задач негладкої оптимізації, чисельним методам комбінованого типу, до яких відносяться методи з усередненням.

Посібник повністю присвячено скінченновимірним задачам оптимізації, що обумовлено кількома причинами:

— по-перше, скінченновимірні задачі з одного боку є найбільш вивченими, досить багатими на ідеї та теоретичні і практичні результати, які можуть слугувати «моделлю» для більш загальних задач оптимізації, а з іншого боку реальні оптимізаційні задачі є, як правило, скінченновимірними і комп'ютерні засоби їх розв'язування потребують саме цієї властивості;

— по-друге, у посібнику зроблено спробу подати матеріал так чином, щоб він був зрозумілим і корисним як студентам-математикам, так і студентам-програмістам.

З останнім пов'язано й те, що деякі твердження у посібнику наведені без доведення, певну частину теоретичного матеріалу винесено на самостійне вивчення у вигляді вправ і творчих завдань. З іншого боку, у посібнику немає строгих алгоритмів і готових текстів відповідних програм, не розглядаються складні обчислювальні аспекти реалізації чисельних методів, але наведені схеми методів і алгоритмів можна описати однією з мов програмування і реалізувати їх за допомогою комп'ютера.

У посібнику наведено досить широкий список наукової і навчальної літератури, який може бути використаний при потребі поглибити знання з теоретичних питань та різноманітних застосувань теорії оптимізації.

Матеріал посібника апробовано в навчальному процесі при читанні курсу «Математичні методи оптимізації» і спецкурсів з проблем оптимізації майбутнім вчителям математики та інформатики у Національному педагогічному університеті імені М.П. Драгоманова та студентам-математикам і майбутнім інженерам-програмістам у Черкаському національному університеті імені Богдана Хмельницького.

Посібник буде корисним студентам вищих навчальних закладів, які навчаються за освітніми напрямами: математика, прикладна математика, комп'ютерні науки і комп'ютерна інженерія при вивченні курсів з теорії і методів оптимізації, дослідження операцій та відповідних спецкурсів, викладачам, які читають ці курси, а також аспірантам, які займаються проблемами розв'язування оптимізаційних задач, що виникають в економіці, техніці, управлінні, на виробництві, у соціальній сфері.

Автори

Розділ 1

ВСТУП ДО ОПТИМІЗАЦІЇ

«У світі не відбувається нічого, в чому не було б видно суть якого-небудь максимуму чи мінімуму».

Леонард Ейлер

§1. Короткий огляд історії розвитку теорії оптимізації

Проблеми відшукання найкращого серед деякої множини варіантів люди розв'язують майже завжди. Такий найкращий варіант називають оптимальним. Слово «*оптимальний*» походить від латинського *optimus*, що значить – найкращий, досконалий. Щоб знайти оптимальний серед множини різних варіантів, доводиться розв'язувати задачі на знаходження максимуму чи мінімуму певних показників, тобто найбільших чи найменших значень деяких величин. Обидва ці поняття – *максимум* (*maximum*) і *мінімум* (*minimum*) об'єднуються єдиним терміном «*екстремум*» (від латинського *extremum* – крайній). Задачі на відшукання максимуму чи мінімуму певних величин називаються *екстремальними задачами*. Методи дослідження та розв'язування різних типів екстремальних задач складають основу *теорії оптимізації*.

З розвитком виробництва в умовах обмеженості ресурсів Землі стають актуальними задачі оптимального використання корисних копалин, енергії, матеріалів, робочого часу, управління фізичними, хімічними, біологічними, технологічними, економічними та іншими складними процесами. До таких задач можна віднести, наприклад, задачі організації виробництва з метою отримання максимального прибутку при заданих обмеженнях на ресурси, задачі управління системою гідростанцій і водосховищ з метою отримання максимальної кількості електроенергії, задачу про космічний політ з однієї точки простору в іншу якнайшвидше або з найменшими витратами енергії, задачу про швидке нагрівання або охолодження металу до заданої температури і багато інших. Потреби самої математики привели до необхідності дослідження таких екстремальних задач, як задачі найкращого наближення функцій, оптимального вибору параметрів обчислювальних процесів або вузлів інтерполювання, наближене розв'язування систем нелінійних рівнянь та нерівностей і т.д.

Дослідження задач на екстремум почалось понад 2500 років тому. Найдавнішою серед екстремальних задач вважають класичну ізопериметричну задачу: *серед плоских замкнених кривих заданої довжини знайти криву, яка охоплює найбільшу площу.* Цю проблему досліджували грецькі філософи ще в п'ятому столітті до н.е., про неї писав великий Арістотель. Задачі на екстремум зустрічаються в «Початках» Евкліда, в творах Архімеда, Герона, Аполлонія та інших античних математиків і філософів.

В епоху Відродження (14-16 ст.), коли значно активізувалась наукова діяльність, задачі на знаходження екстремумів привертають увагу багатьох вчених. Першими були спроби пояснити закон заломлення світла. Ще в другому столітті до н. е. Птолемей робив спроби визначити його експериментально, але успіху не досяг. Закон заломлення світла встановив у сімнадцятому столітті голландський астроном, фізик і математик Віллеброрд Снелліус. Питання про фізичні принципи закону заломлення світла з'ясував великий французький математик П'єр Ферма, відкривши так званий *екстремальний принцип*, який пізніше було названо його ім'ям: *у неоднорідному середовищі світло поширюється вздовж такої траєкторії, що час на подолання шляху від однієї точки до іншої мінімальний.* З того часу ідея «екстремальних принципів» стає однією з центральних у всьому природознавстві. Згідно з цими принципами істинний рух механічної системи, світла, електрики, рідини, газу і т. п. можна виділити з довільної сукупності допустимих рухів так, що при цьому досягається мінімім чи максимум деякої величини.

Довгий час (до другої половини сімнадцятого століття) не існувало ніяких загальних прийомів розв'язування задач на екстремум. Прагнення їх знайти в значній мірі стимулювало створення математичного аналізу. Перший загальний метод дослідження задач на екстремум відкрив П. Ферма (близько 1630 р.). Сучасною мовою його можна сформулювати так: *у точці екстремуму деякої функції однієї змінної похідна дорівнює нулеві, тому екстремуми слід шукати серед коренів похідної.* Цей результат включено зараз до шкільного курсу математики під назвою «*теорема Ферма*». Фактично Ферма описав цей прийом лише для алгебраїчних многочленів. У загальному вигляді його вперше отримав видатний англійський фізик, механік, астроном і математик Ісаак Ньютон (60-ті роки 17 ст.). Потім його перевідкрив відомий німецький математик, фізик і філософ Готфрід Вільгельм Лейбніц і вперше опублікував у знаменитій статті, з якої починається історія математичного аналізу. Примітним є початок назви статті Лейбніца: «*Новий метод знаходження найбільших і найменших величин...*». У 18 столітті зусиллями швейцарського математика, фізика, механіка і астронома Леонарда Ейлера та французького математика і механіка Жозефа Луі Лагранжа, були розроблені методи розв'язування екстремальних задач з цільовими

функціями від кількох змінних без обмежень на аргументи та з обмеженнями типу рівностей. Основним серед таких методів є *метод множників Лагранжа*, який зараз входить до програми кожного математичного курсу вищих навчальних закладів. Пізніше ці дослідження були доповнені методами розв'язування задач, в яких обмеження на аргументи задаються як рівностями, так і нерівностями. Розділ прикладної математики, де розглядаються проблеми, пов'язані з такими задачами, одержав назву *математичного програмування*.

Пошуки шляхів розв'язування конкретних практичних екстремальних задач, що виникали у геометрії, фізиці, механіці, привели до створення нового розділу математичного аналізу, який одержав назву *варіаційного числення*. Почалось з того, що в першому науковому журналі «*Акта Ерудиторум*» за червень 1696 р. було розміщено замітку відомого швейцарського математика, учня і послідовника Г. В. Лейбніца – Іоганна Бернуллі. Замітка мала назву «*Нова задача, до розв'язування якої запрошуються математики*». Задача формулювалась так: «*У вертикальній площині дано дві точки A і B. Визначити шлях AMB, спускаючись яким під дією власної ваги, тіло M, починаючи рух з точки A, дійде до точки B за найменший проміжок часу*». Розв'язок цієї задачі, за словами Г. В. Лейбніца, «настільки чудової і досі невідомої», було дано самим І. Бернуллі, а також Г. В. Лейбніцем, Якобом Бернуллі і ще одним анонімним автором, у якому знавці, за словами І. Бернуллі, «*ex unge leonem*» (за кігтями впізнають лева) відразу впізнали І. Ньютона. Крива найшвидшого спуску або *брахістохрона* виявилась *циклоїдою*. Саме із задачі про брахістохрону почалась історія класичного варіаційного числення. Загальні методи розв'язування задач варіаційного числення були розроблені у 18 столітті Л. Ейлером і Ж. Лагранжем. Над теорією варіаційного числення вчені працювали більше двох століть. Окрім необхідних умов першого порядку (рівнянь Ейлера-Лагранжа) були знайдені необхідні і достатні умови другого порядку для двох типів екстремумів – сильного і слабкого (А. Лежандр, К. Якобі, К. Вейєрштрасс), запропонований новий підхід до розв'язування варіаційних проблем (теорія Гамільтона-Якобі), побудована *теорія поля* (А. Кнезер, Д. Гільберт).

До середини 30-х років 20 століття більшість вчених вважали, що проблематика задач на екстремум практично вичерпана. Все змінилося, коли в 1939 році до професора Л. В. Канторовича прийшли на консультацію представники фанерного тресту і запропонували його увазі кілька задач, що виникли у них на виробництві. При математичній формалізації задач виявилось, що вони зводяться до знаходження екстремуму лінійної функції на множині точок многогранника. Перебрати всі вершини многогранника було майже неможливо через їх велику кількість. Л. В. Канторович дослідив такі задачі та запропонував метод для їх розв'язування [54], заклавши основи нового напряму в теорії екстремальних задач. Цей напрям отримав назву *лінійного програмування.* Термін «лінійне програмування» з'явився в середині 40-х років 20 століття в працях Т. Ч. Купманса. Для прикладу сформулюємо в загальному вигляді дві задачі, що відносяться до задач лінійного програмування: *транспортну задачу* та *задачу про оптимальний план виробництва продукції*.

Транспортна задача. Нехай деякий продукт знаходиться на кількох базах і цей продукт потрібно доставити до кількох магазинів. Відомі запаси продукту на базах, потреби в ньому кожного магазина, а також вартість перевезень продукту між базами і магазинами. Необхідно скласти такий план перевезень (вказати, яку кількість продукту потрібно перевезти з кожної бази до кожного магазину), щоб сумарна вартість перевезень була мінімальною.

Задача про оптимальний план виробництва продукції. Підприємство виробляє продукцію кількох типів. Задані витрати на одиницю продукції кожного типу, прибуток від її реалізації, об'єми наявних ресурсів та обмеження на об'єми виробництва кожного типу продукції. Необхідно скласти такий план виробництва, який з врахуванням обмежень на ресурси і об'єми випуску кожного типу продукції забезпечував би найбільший загальний прибуток.

Окремі праці, що стосувались питань лінійного програмування, з'являлись і раніше. Наприклад, в 1931 році в Угорщині було надруковано статтю Е. Егерварі, яка була присвячена проблемі вибору – окремому випадку транспортної задачі. На основі результатів цієї статті пізніше було розроблено ефективний метод розв'язування транспортної задачі, який одержав назву *угорського методу.*

Перша праця, де розглядались загальні питання лінійного програмування і викладені основні ідеї *методу послідовного поліпшення плану* для невироджених задач лінійного програмування, була надрукована Дж. Б. Данцігом у 1949 році. Метод Данціга увійшов в математику під назвою *симплексний метод*. У 1956 році Дж. Б. Данціг, Л. Р. Форд і Д. Р. Фалкерсон на основі угорського методу знайшли загальний метод розв'язування задач лінійного програмування, який лише в незначних деталях відрізнявся від методу, запропонованого Л. В. Канторовичем.

Значний внесок у дослідження загальної задачі лінійного програмування зробив відомий американський математик і фізик Джон фон Нейман, який встановив, що будь-яку матричну гру двох осіб з нульовою сумою можна подати у вигляді задачі лінійного програмування і навпаки.

Методи лінійного програмування знайшли широке використання на практиці. Зокрема за розробку математичних методів та їх впровадження в економіку Л. В. Канторовичу разом з американським економістом Т. Ч. Купмансом у 1975 році була присуджена Нобелевська премія.

У 40-х роках 20 століття теорія екстремальних задач пережила своє друге народження. Створення теорії лінійного програмування дало поштовх розвиткові інших розділів теорії оптимізації, насамперед – *опуклого аналізу* і *нелінійного програмування.*

Опуклий аналіз – спеціальний розділ математики, де вивчаються опуклі множини і функції. Початки опуклого аналізу закладені Т. Мінковським на межі 19 і 20 століть, але період найбільш активного розвитку опуклого аналізу і опуклої оптимізації припадає на 50-70-ті роки 20 століття. На сучасному етапі математична теорія опуклої оптимізації набула закінчених рис: побудована теорія субдиференціального числення, на її основі встановлені необхідні і достатні умови екстремуму, розроблена теорія складності задач опуклого програмування та створено ефективні чисельні методи їх розв'язування (див., наприклад, [52], [74], [75], [85], [90], [112], [118]).

Початок робіт з нелінійного програмування покладено дослідженнями американських вчених Г. Куна і А. Таккера, які в роботі [127] узагальнили класичний принцип Ейлера-Лагранжа для гладких екстремальних задач з обмеженнями-рівностями на випадок задачі опуклого програмування з обмеженнями-нерівностями. Цей розділ теорії екстремальних задач широко застосовується для розв'язування різноманітних проблем, які виникають в економіці, техніці, природознавстві.

Останнім часом математичне програмування розвивається у напрямі дослідження все більш спеціальних класів екстремальних задач (у відповідності до потреб різноманітних застосувань), розробки чисельних методів, які долають негладкість, неопуклість, яристість, розривність цільових функцій, а також враховують багатоекстремальність, можливу нечітку і стохастичну природу оптимізаційних задач (див., наприклад, [8], [9], [28], [31], [37], [42], [44], [47], [58], [70], [71], [77], [80], [87], [97], [100], [109], [111], [114], [120], [121], [124], [126], [130], [132], [136]).

Значний внесок у розвиток зазначених напрямів теорії оптимізації зробили також українські вчені: В. М. Глушков, В. С. Міхалевич, Ю. М. Єрмольєв, Б. М. Пшеничний, Н. З. Шор та ін. (див., наприклад, [26], [37], [38], [69]-[71], [85]-[88], [111]).

Багато задач оптимізації пов'язано з управлінням різноманітними процесами, приладами, системами. Наприклад, візок, рухається прямолінійно без тертя на горизонтальних рейках і управляється зовнішньою силою, яку можна змінювати в заданих межах. Потрібно зупинити візок у визначеному положенні за найкоротший час. Ця задача називається найпростішою *задачею про швидкодію* в автоматичному регулюванні.

Особливість постановки технічних екстремальних задач полягає в тому, що діючі сили поділяються на два типи: одні з них – нерегульовані сили природи (наприклад, сила тяжіння), інші – регульовані (наприклад, сила тяги). Крім того, існують обмеження на управляючі дії, пов'язані з технічними характеристиками систем.

Значна кількість подібних задач виникла в хімічній промисловості, у військовій справі, космонавтиці і т.д. При цьому виявилося, що методів варіаційного числення не досить для розв'язування цих задач. У кінці сорокових і на початку п'ятидесятих років 20 століття зусиллями Л. С. Понтрягіна та його учнів знайдено формалізацію цілого класу задач, що охоплювали більшість актуальних проблем техніки, а потім була побудована теорія цього класу задач (див., наприклад, [83]). Вона отримала назву *теорії оптимального управління*. Основним результатом цієї теорії є *принцип максимуму Понтрягіна*, який встановлює необхідні умови оптимальності в задачах такого класу. Цікаво відмітити, що перша задача, яка відноситься до оптимального управління, була поставлена І. Ньютоном у «Математичних початках натуральної філософії» (1687 р.) ще до задачі про брахістохрону.

Так сформувалися основні розділи сучасної теорії екстремальних задач: математичне програмування, варіаційне числення та теорія оптимального управління.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке екстремальна задача?
2. Що вивчає теорія оптимізації?
3. Як формулюється ізопериметрична задача?
4. У чому полягає сутність екстремального принципу П. Ферма?
5. У чому полягає сутність загального методу дослідження функцій на екстремум, сформульованого П. Ферма?
6. Як виникло варіаційне числення?
7. Яку роль зіграли роботи Г. Лейбніца, Ж. Лагранжа, К. Вейєрштрасса, Л. Ейлера у розвитку теорії екстремальних задач?
8. Як формулюється транспортна задача і задача про оптимальний план виробництва продукції?
9. Що таке лінійне програмування?
10. Яку роль зіграли роботи Л. В. Канторовича і Дж. Данціга у розвитку теорії і методів лінійного програмування?
11. Яку роль зіграли роботи Г. Куна і А. Таккера у розвитку теорії нелінійного програмування?
12. Хто з українських вчених зробив вагомий внесок у розвиток сучасної теорії і методів оптимізації?
13. Хто був засновником теорії оптимального управління?

§2. Деякі старовинні екстремальні задачі

«Найпрекраснішим тілом є куля, а найпрекраснішою плоскою фігурою – коло».

Піфагор

В історії розвитку математики задачі на знаходження екстремумів гравали важливу роль. У геометрії, алгебрі, фізиці в різні часи було поставлено і розв'язано велику кількість цікавих екстремальних задач. Наведемо деякі з них.

Задача Дідони. Згідно з оповіданням римського поета Вергілія «Енеїда» ця подія відбулася в 9 столітті до нашої ери. Фінікійська царівна Дідона, рятуючись від переслідувань свого брата, пішла на захід вздовж берегів Середземного моря шукати собі притулок. На узбережжі нинішньої Туніської затоки Дідона повела переговори з місцевим ватажком Ярбом про продаж землі, що їй сподобалась. Запросила вона землі небагато – стільки, скільки можна оточити бичачою шкірою. Царівні вдалося умовити Ярба. Тоді Дідона порізала шкіру бика на дрібні стрічки, зв'язала їх і оточила велику територію, на якій заснувала фортецю, а біля неї місто Карфаген. Цей епізод дає привід замислитись над питанням: скільки ж землі можна оточити бичачою шкірою? В сучасному математичному формулюванні ця проблема виглядає так:

серед замкнених плоских кривих, заданої довжини, знайти таку, яка охоплює найбільшу площу.

Цю задачу і називають *задачею Дідони* або *класичною ізопериметричною задачею* (ізопериметричні фігури – це фігури, які мають однаковий периметр). Крива, яка є її розв'язком, – коло. Вергілій при описі дій Дідони використав дієслово «*circumdare*» (оточувати), яке містить корінь «*circus*» (коло). Отже, можна припустити, що класичну ізопериметричну задачу сама Дідона розв'язала правильно.

Багато істориків вважають, що це перша екстремальна задача, яка обговорювалася в науковій літературі. Разом з ізопериметричними властивостями кола античні геометри відзначали ізопіфанні властивості кулі (тобто властивість сфери охоплювати найбільший об'єм серед усіх фігур, які мають однакову площу поверхні).

Задача Евкліда. У знаменитих «Початках» давньогрецького математика Евкліда (4 ст. до н. е.) міститься лише одна задача на відшукання максимуму, яка в сучасному формулюванні виглядає так:

у даний трикутник ABC вписати паралелограм $ADEF$ $(EF \| AB, DE \| CA)$ найбільшої площі.

Виявляється, що таким є паралелограм, у якого вершини D, E і F – середини відповідних сторін трикутника (рис. 2.1).

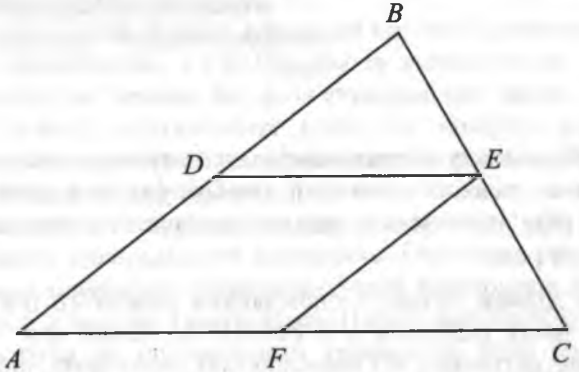


Рис. 2.1.

Задача Герона. *Дано дві точки A і B з одного боку від прямої l. Потрібно знайти на прямій l точку D таку, щоб сума відстаней від A до D і від D до B була найменшою.*

Автором цієї задачі вважають Герона Олександрійського. Вона була вміщена у його творі «Про дзеркала» (1 ст. до н. е.). Розв'язком задачі Герона є точка D перетину прямої AB_1 з прямою l, де B_1 – точка, симетрична до точки B відносно прямої l (рис. 2.2).

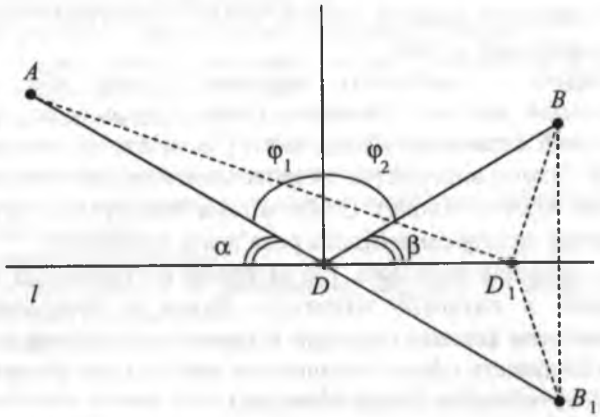


Рис. 2.2.

Дійсно, для будь-якої точки $D_1 \neq D$ має місце співвідношення:

$$|AD_1|+|D_1B|=|AD_1|+|D_1B_1|>|AB_1|=|AD|+|DB|.$$

Зауважимо, що точка D має таку властивість: кут α дорівнює куту β, а також кут φ_1 дорівнює куту φ_2, тобто кут падіння променя AD α дорівнює куту відбивання β.

Задача Штейнера. *У площині трикутника знайти точку, сума відстаней від якої до вершин трикутника мінімальна.*

Ця задача зустрічається у творі італійського математика Вінченцо Вівіані «Про максимальні і мінімальні значення» (1659 р.), який вважається першою працею, спеціально присвяченою проблемам оптимізації. Задачею цікавились багато відомих математиків 17 століття: Б. Кавальєрі, Н. Торрічеллі, П. Ферма. У 19 столітті цією та іншими подібними задачами займався німецький геометр Якоб Штейнер, тому їх часто називають проблемами Штейнера.

Розв'язком поставленої задачі є *точка Торрічеллі* (за ім'ям одного з авторів розв'язку), тобто точка, з якої всі сторони трикутника видно під кутом 120 градусів (рис. 2.3). Якщо трикутник має кут, який не менше 120 градусів, то точка Торрічеллі є вершиною цього кута.

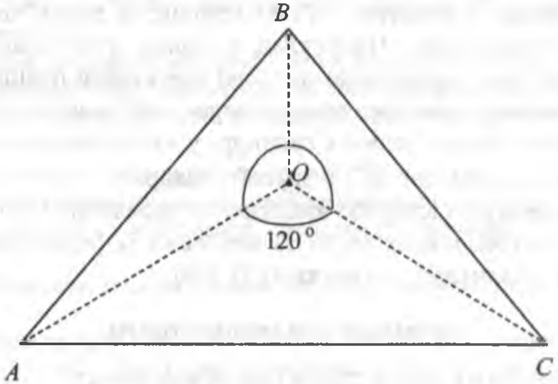


Рис. 2.3.

Узагальненням проблеми Штейнера є така задача: *для n точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$, заданих на площині, знайти точку A таку, щоб величина $|A_1A|+|A_2A|+\ldots+|A_nA|$ була мінімальною*. Ця задача має велике практичне значення для побудови найкоротшої мережі ліній (електропередач, телекомунікацій). Для випадку, коли дані точки є вершинами опуклого чотирикутника, розв'язок цієї задачі елементарний: шуканою точкою буде точка перетину діагоналей, але при $n=5$ розв'язок задачі вже не можна одержати явно. Для відшукання наближеного розв'язку узагальненої проблеми Штейнера можна скористатися різними чисельними методами.

Задача Тартальї. В одному з творів італійського математика Нікколо Тартальї, відомого як людина, що одна з перших навчилася розв'язувати рівняння третього степеня, була поставлена задача:

розділити число 8 на дві такі частини, щоб добуток їх добутку на їх різницю був максимальним.

Автором задачі дана така відповідь: «*Число 8 треба поділити навпіл, квадрат цієї половини, збільшений на третю частину цього квадрату, повинен дорівнювати квадрату різниці обох частин*». Отже, якщо позначити шукані числа через a і b, то для різниці $a - b$ Тарталья дав такий вираз: $(a-b)^2 = (8:2)^2 + (8:2)^2 : 3 = 64/3$, тобто $a - b = 8/\sqrt{3}$. Звідси, з урахуванням співвідношення $a + b = 8$, маємо $a = 4 + 4/\sqrt{3}$, $b = 4 - 4/\sqrt{3}$. Це і є розв'язок задачі.

Задачі Кеплера. Один з найвидатніших вчених 17 століття німецький астроном і математик Іоганн Кеплер у своїй книзі «Нова стереометрія винних бочок», яка вийшла у 1615 році, запропонував перші загальні правила розв'язування екстремальних задач, які потім описали П. Ферма, І. Ньютон і Г. В. Лейбніц, а також дав розв'язок кількох конкретних задач. Наприклад, *у задану кулю вписати циліндр найбільшого об'єму.* З цією задачею тісно пов'язаний планіметричний її варіант: *у задане коло вписати прямокутник найбільшої площі.*

Розв'язком першої задачі є циліндр, у якого відношення діаметра основи до висоти дорівнює $\sqrt{2}$, а другої – квадрат.

Більш детально з історією виникнення наведених і багатьох інших старовинних екстремальних задач та методами їх розв'язування можна ознайомитися, наприклад, за книгами [3], [46].

Запитання для самоконтролю

1. Як формулюється задача Дідони і що є її розв'язком?
2. Як формулюється задача Евкліда і що є її розв'язком?
3. Як формулюється задача Герона і що є її розв'язком?
4. Як формулюється задача Штейнера і що є її розв'язком?
5. Як формулюється узагальнена проблема Штейнера?
6. Як формулюється задача Тартальї і що є її розв'язком?
7. Як формулюються задачі Кеплера і що є їх розв'язками?

Вправи для самостійного виконання

1. Використовуючи ідею розв'язування задачі Герона, розв'язати такі задачі:

1.1. Дано кут і точка C всередині нього. Знайти точки A і B на сторонах кута такі, щоб периметр трикутника ABC був найменшим.

1.2. Дано кут і дві точки C і D всередині нього. Знайти точки A і B на сторонах кута такі, щоб сума довжин $|CA|+|CB|+|BD|$ була найменшою.

1.3. Нехай є три міста - A, B, C. Треба вказати таке місце D, щоб сума довжин прямих ділянок шосе, які з'єднують D з A, B і C була найменшою.

2. За допомогою геометричних методів розв'язати такі задачі:

2.1. Дано кут і точку всередині нього. Треба провести через цю точку пряму, яка відтинає від кута трикутник найменшої площі.

2.2. Дано кут і точку M всередині нього. Необхідно провести через цю точку пряму, яка відтинає від кута трикутник з найменшим периметром.

2.3. Знайти трикутник заданого периметру, який має найбільшу площу.

2.4. Довести, що квадрат має найбільшу площу серед усіх прямокутників, які мають однаковий периметр.

2.5. У дане коло вписати даний кут так, щоб площа, обмежена його сторонами і дугою, на яку він спирається, була найбільшою.

2.6. У даний прямокутний трикутник вписати прямокутник з вершиною у вершині прямого кута і найменшою діагоналлю.

3. Використовуючи співвідношення між середнім геометричним і середнім арифметичним n чисел $x_1, x_2, ..., x_n$: $\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$, де $x_i \ge 0, i = \overline{1,n}$, розв'язати такі задачі:

3.1. Знайти максимум добутку трьох чисел, якщо їх сума стала.

3.2. Знайти максимальну площу прямокутного трикутника, якщо сума довжин катетів стала.

3.3. Серед усіх трикутників, які мають задану площу, знайти трикутник найменшого периметра.

3.4. Дано дві паралельні прямі і точку, яка лежить між ними і є вершиною прямого кута прямокутного трикутника. Дві інші вершини трикутника лежать на цих паралельних прямих. Як треба розмістити трикутник, щоб його площа була найменшою.

3.5. У задану кулю вписати конус найбільшого об'єму.

3.6. У заданий конус вписати циліндр найбільшого об'єму.

4. Використовуючи властивості квадратного тричлена, знайти розв'язки задач:

4.1. Розкласти додатне число k на два доданки так, щоб їх добуток був найбільшим.

4.2. Дано квадрат $ABCD$. На кожній з його сторін відкладено рівні відрізки $AA' = BB' = CC' = DD'$. При якому розміщенні точки A' площа чотирикутника $A'B'C'D'$ буде найменшою?

4.3. Два тіла рухаються вздовж сторін прямого кута із сталими швидкостями v_1 і v_2 м/сек у напрямі до його вершини. На початку руху перше тіло перебуває на відстані a метрів, а друге – b метрів від вершини. Через який час від початку руху відстань між тілами буде найменшою?

4.4. На площині дано три точки A, B і C, що не лежать на одній прямій. Знайти на прямій BC таку точку M, сума квадратів відстаней якої від точок A, B і C буде найменшою.

4.5. Два кораблі, що перебувають у відкритому морі на одному меридіані і відстань між якими S км, починають рухатися одночасно: північніший – строго на схід з швидкістю v_1 км/год, а південніший – строго на північ з швидкістю v_2 км/год. Через який час відстань між ними буде мінімальною і чому вона дорівнює?

4.6. Знайти найбільшу площу перерізу трикутної піраміди $ABCD$ площиною, яка паралельна до ребер BC і AD, якщо $BC = a$, $AB = c$, $AD = b$, а кут між ребрами BC і AD дорівнює α.

§3. Основні етапи розв'язування екстремальних задач

У загальному випадку реальну екстремальну задачу за допомогою інтуїтивного, випадкового або евристичного вибору значень відповідних величин розв'язати практично неможливо, при цьому помилка може занадто дорого коштувати. Тому в цій ситуації на допомогу приходять потужні математичні методи та засоби сучасних комп'ютерних технологій, які дозволяють досить точно і ефективно розв'язати поставлену задачу.

Розглянемо основні етапи розв'язування реальних екстремальних задач з використанням математичних методів і комп'ютерних технологій.

1. Постановка задачі в реальних об'єктах. При постановці будь-якої практичної задачі вона спочатку формулюється в змістовних (реальних) термінах тієї галузі людської діяльності, де задача виникла. При цьому чітко виділяється мета, яку необхідно досягти в результаті розв'язання задачі, визначаються структурні і функціональні елементи, які відповідають сформульованій меті, виявляються найбільш важливі якісні та кількісні характеристики цих елементів і взаємозв'язки між ними.

2. Постановка задачі в математичних об'єктах (побудова математичної моделі). Якщо поставлену задачу не вдається розв'язати безпосередньо у тій формі, в якій вона сформульована, можна спробувати зробити це за допомогою математичних методів. Для цього потрібно описати умову задачі замість мови реальних об'єктів мовою математичних об'єктів (формальною мовою). Процес побудови такого опису називають *формалізацією* або побудовою *математичної моделі*. Він починається з введення *символічних позначень* для тих характеристик об'єкту дослідження, які є найбільш суттєвими. Далі, на основі введених символічних позначень, описуються *екзогенні величини*, тобто ті величини, які задані поза моделлю і значення яких відомі заздалегідь. Потім описуються *ендогенні величини* (змінні, параметри), тобто ті величини, значення яких визначаються під час обрахунків у межах моделі і не задаються безпосередньо в умові задачі.

Конкретні цілі, поставлені в задачі, описуються за допомогою *цільової функції*, максимум чи мінімум якої треба знайти, а обмеження, що відтворюють, як правило, нестачу відповідних ресурсів або умови, за яких відбувається певний процес, визначають деяку множину значень величин, від яких залежить цільова функція і які задовольняють всі умови задачі. Ця множина значень утворює *допустиму множину* задачі. Якщо цілі, поставлені в задачі, описуються однією функцією, то задача називається *однокритеріальною*, в протилежному випадку — *багатокритеріальною*.

3. Класифікація одержаної формальної (математичної) задачі і вибір методу для її розв'язування. Після побудови математичної моделі необхідно визначити, до якого типу моделей (математичних задач) вона

належить. Якщо одержана після формалізації математична задача відноситься до певного класу, то метод для її розв'язування обирається, як правило, з уже існуючих методів. У протилежному випадку необхідно:

– дослідити властивості цільової функції, зокрема на неперервність і диференційовність;

– визначити умови існування розв'язку задачі при заданих обмеженнях;

– встановити необхідні, а по можливості і достатні, умови глобального або локального екстремуму;

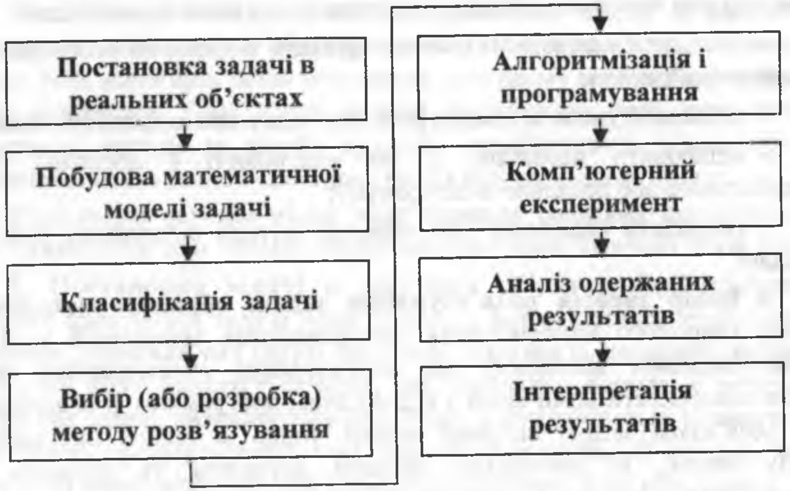
– розробити аналітичні або чисельні методи відшукання розв'язку задачі.

4. Вибір засобів розв'язування задачі обраним методом. В умовах широкого використання інформаційних технологій у різних сферах людської діяльності для розв'язування оптимізаційної задачі можна використати комп'ютер з відповідним програмним забезпеченням, щоб розв'язати задачу на рівні моделі. Якщо ж такого програмного засобу немає, то необхідно скласти алгоритм за обраним або розробленим методом і описати відповідну програму однією з мов програмування. У такому випадку цей етап розв'язування задачі називають етапом *алгоритмізації і програмування*. Після створення програми її треба протестувати на контрольних задачах, розв'язки яких відомі заздалегідь.

5. Проведення обчислень, зокрема на комп'ютері (комп'ютерний експеримент), одержання результатів в математичних об'єктах та їх аналіз. Після налагодження і тестування програми треба провести обчислення при реальних вхідних даних (провести *комп'ютерний експеримент*). При цьому аналіз результатів комп'ютерного експерименту є обов'язковим, оскільки в процесі розв'язування задачі можуть бути одержані результати, які або не задовольняють її умови, або взагалі є некоректними. Причиною тому може бути неадекватно побудована математична модель поставленої задачі, або невдало обраний метод її розв'язування, або логічні помилки при алгоритмічній чи програмній реалізації методу. У такому випадку необхідно повернутися на відповідний етап і виправити ситуацію.

6. Інтерпретація результатів у реальних об'єктах. Після одержання математичного розв'язку задачі здійснюється його аналіз. Якщо аналіз одержаних результатів показав їх адекватність умовам поставленої задачі, то необхідно з'ясувати реальний зміст цих результатів і сформулювати їх мовою відповідної предметної галузі (інтерпретувати) таким чином, щоб вони були зрозумілі людині, яка буде використовувати ці результати. На цьому процес розв'язування реальної оптимізаційної задачі завершується.

Схематично процес розв'язування практичних екстремальних задач за допомогою комп'ютера має такий вигляд:



Перш ніж розглянути процес побудови математичних моделей на прикладах формалізації конкретних екстремальних задач, зупинимося на деяких поняттях, які грають ключову роль в моделюванні взагалі і математичному моделюванні зокрема. До таких понять відносяться поняття *системи* і *моделі*. Коротко розглянемо їх сутність.

Однією з характерних особливостей сучасної науки і техніки є широке використання ідей системних досліджень, системного підходу і загальної теорії систем. В їх основі лежить поняття системи, яке має багато різних тлумачень, що обумовлено різноманітністю проблем і об'єктів дослідження.

При цьому найбільш поширеним є розуміння *системи* як сукупності елементів (об'єктів), які зв'язані між собою певними відношеннями, утворюють єдине ціле і призначені для досягнення спільної мети.

Таке поняття системи відносне, оскільки як елементи, що входять до її складу, так і зв'язки між ними можуть бути агреговані в більш великі утворення або розділені на менші.

Можливі різні способи класифікації систем у залежності від обраного критерію. З точки зору природи елементів, які входять до складу систем, вони поділяються на *матеріальні* та *ідеальні*.

Матеріальні системи – це системи, які складаються з матеріальних елементів, що пов'язані між собою певними відношеннями. Вони бувають відносно простими і відносно складними. Прості системи складаються, як правило, з однорідних елементів, а в більш складних системах елементи групуються в підсистеми. Прикладами матеріальних систем є автомобіль, комп'ютер, виробниче підприємство.

Ідеальні системи — це такі системи, елементами яких є ідеальні об'єкти (поняття, ідеї), які зв'язані певними відношеннями. Прикладом ідеальної системи є система понять певної науки, зокрема математики. На відміну від матеріальних систем ідеальні системи виникають лише завдяки діяльності людини.

Під *моделлю* будемо розуміти матеріальну, знакову або уявну (мислену) систему, що відтворює, імітує чи відображає принципи внутрішньої організації або функціонування, певні властивості, ознаки чи характеристики об'єкта дослідження (оригіналу), безпосереднє вивчення якого неможливе, ускладнене або недоцільне, і може в пізнавальному процесі замінити об'єкт дослідження з метою одержання нових знань про нього.

Термін «*модель*» походить від латинського *modulus* (міра, мірило, зразок). За своєю природою моделі поділяються на

– *фізичні*, що мають ідентичну з оригіналом природу;

– *аналогові*, природа яких відмінна від природи оригіналу, однак математичні формалізації, що їх описують, еквівалентні;

– *знакові* – формули, схеми, графіки та ін.;

– *уявні* (мислені) – умоглядні конструкції, чуттєво-наочні образи тощо, які виникають в уяві людини.

Відношення «модель – оригінал» не природне, а зумовлене процесом пізнання, і питання про їхнє співвідношення, ступінь подібності, адекватності є одним із найважливіших і найскладніших у процесі застосування моделей у науковому пізнанні.

Добре побудована модель, як правило, доступніша для досліджень, ніж реальний об'єкт. Деякі об'єкти взагалі не можуть бути вивчені безпосередньо: неможливий, наприклад, експеримент з економікою країни або з планетами Сонячної системи. Взагалі, модель потрібна для того, щоб:

– зрозуміти, як влаштований конкретний об'єкт: яка його будова, основні властивості, закони розвитку та взаємозв'язки з оточуючим середовищем;

– навчитися управляти об'єктом (або процесом) та визначати найкращі засоби управління при заданих цілях і критеріях;

– прогнозувати прямі та опосередковані наслідки реалізації заданих засобів та форм впливу на об'єкт.

Моделювання можна умовно об'єднати в дві великі групи: *матеріальне* (*предметне*) та *ідеальне* (*абстрактне*) моделювання.

До матеріальних відносяться такі способи моделювання, при яких дослідження ведеться на основі моделі, яка відтворює основні геометричні, фізичні, динамічні та функціональні характеристики об'єкту, що вивчається. Основними видами матеріального моделювання є *фізичне* та *аналогове моделювання*.

Фізичним прийнято називати моделювання, при якому реальному об'єкту співставляється його збільшена або зменшена копія з перенесенням властивостей процесів та явищ, які досліджуються, на модель на основі теорії подібності.

Аналогове моделювання базується на аналогії процесів та явищ, які мають різну фізичну природу, але однаково описуються формально (одними й тими ж математичними формулами, логічними схемами і т.п.).

Від матеріального моделювання принципово відрізняється *ідеальне моделювання*, яке базується не на матеріальній аналогії об'єкта і моделі, а на аналогії ідеальній, мисленній. Ідеальне моделювання носить теоретичний характер. Розрізняють два види ідеального моделювання: *інтуїтивне* та *знакове*.

Під *інтуїтивним* розуміють моделювання, яке базується на інтуїтивному уявленні про об'єкт дослідження, який не піддається формалізації або не потребує її. Так, наприклад, життєвий досвід кожної людини може вважатися його інтуїтивною моделлю оточуючого світу.

Знаковим називається моделювання, в якому використовуються моделі у вигляді знакових об'єктів будь-якого виду: схеми, графіки, формули, набори символів і т.д.

Важливим видом знакового моделювання є *математичне моделювання*, при якому дослідження об'єкта здійснюється за допомогою моделі, що описується формальною мовою – мовою математики.

Математична модель являє собою систему математичних залежностей і відношень, які описують певні властивості, ознаки чи характеристики реальних об'єктів, процесів, явищ, що досліджуються, і відображають принципи їх внутрішньої організації або функціонування.

Математична модель дозволяє звести розв'язування реальної задачі до розв'язування математичної задачі, що дає можливість застосовувати добре вивчені і розроблені математичні методи.

Модель повинна правильно відтворювати досліджувані властивості об'єкта, задовільняти ті ж закономірності, що й реальний об'єкт. Тому найбільш складним і відповідальним при формалізації поставленої задачі є визначення тих характеристик об'єкта дослідження, які підлягають формалізації і включенню до математичної моделі, а також з'ясування зв'язків між ними.

Математичні моделі внаслідок їх відносної простоти перш за все допомагають зрозуміти закономірності перебігу процесу, встановити якісні та кількісні характеристики стану процесу і на основі цих характеристик прогнозувати подальший його розвиток, тобто поведінку найбільш важливих у даному процесі величин, без проведення натурних експериментів, які потребують великих матеріальних витрат, а іноді просто неможливі.

Швидкий розвиток і поширення засобів інформаційних технологій, зокрема, персональних комп'ютерів, відкриває нові перспективи використання математичного моделювання, що в свою чергу обумовлює розвиток чисельних методів дослідження різноманітних процесів і явищ, у тому числі й методів оптимізації.

Будь-яка математична модель повинна задовольняти дві основні вимоги:

1. *Адекватність реальному об'єкту.* Модель повинна відображати найбільш суттєві зв'язки між величинами, що характеризують реальний об'єкт, враховувати властивості середовища, в якому перебігає процес, що досліджується, відомості про початковий стан процесу, давати можливість передбачати майбутні стани процесу.

2. *Розв'язуваність моделі.* Модель не повинна бути занадто складною, забезпечувати можливість одержувати потрібні відомості в прийнятний час і з прийнятними витратами. При цьому бажано мати розв'язок в аналітичному або чисельному поданні. Суттєві результати тут може дати обчислювальний експеримент над моделлю.

Серед математичних моделей можна виділити кілька типів. Якщо в моделі коефіцієнти, невідомі змінні, взаємозв'язки між ними не залежать від часу, то модель називається *статичною*, в протилежному випадку – *динамічною*. В залежності від виду цільової функції і обмежень математичні моделі поділяють на *лінійні* – цільова функція лінійна і обмеження задачі описуються лінійними функціями, і *нелінійні* – в протилежному випадку. Якщо до моделі входять випадкові величини, то вона називається *стохастичною*, в протилежному випадку – *детермінованою*. Якщо невідомі змінні, які входять до моделі, дискретні, тобто можуть набувати значення лише із деякої дискретної множини, то модель називається *дискретною*.

Запитання для самоконтролю

1. Які основні етапи розв'язування задач оптимізації можна виділити?
2. У чому полягає формалізація практичної задачі?
3. Що таке цільова функція і допустима множина?
4. Яка екстремальна задача називається однокритеріальною, а яка – багатокритеріальною?
5. Які дії необхідно виконати після формалізації при одержанні задачі, що не відноситься до жодного з відомих класів екстремальних задач?
6. Що таке система? Які системи називають матеріальними, а які – ідеальними?
7. Що називають моделлю деякого об'єкта, процесу, явища?
8. Які основні типи моделей і види моделювання існують?
9. Що таке математична модель і які її основні властивості?
10. Які типи математичних моделей існують?

§4. Постановка задачі оптимізації та основні поняття

Екстремальна задача в математичному поданні є задачею відшукання екстремуму (мінімуму чи максимуму) деякої функції $f(x)$ на деякій множині X. Надалі будемо розглядати скінченновимірні екстремальні задачі, тобто задачі, в яких множина X належить евклідовому простору R^n, при цьому значення функції $f(x)$ належать множині дійсних чисел $R^1 = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$.

Серед екстремальних задач виділяють задачі мінімізації і задачі максимізації.

Задача мінімізації записується у вигляді

$$f(x) \to \min, \ x \in X \qquad (4.1)$$

або

$$\min_{x \in X} f(x),$$

де функція $f(x)$ називається *цільовою функцією*, X – *допустимою множиною*, а будь-який елемент $x \in X$ – *допустимою точкою* цієї множини.

Якщо $X \neq \varnothing$, то задача (4.1) називається *сумісною*, в протилежному випадку – *несумісною*.

Якщо $X = R^n$, то задача (4.1) називається задачею *без обмежень* на змінні або *задачею безумовної мінімізації*, у протилежному випадку – задачею *з обмеженнями* на змінні або *задачею умовної мінімізації*.

Формалізація екстремальної задачі полягає в точному визначенні її основних елементів: функції $f(x)$ і множини X.

Цільова функція $f(x)$, яку часто називають також *критерієм якості* або *критерієм ефективності*, являє собою математичний опис мети, досягнення якої вимагається при розв'язуванні реальної задачі. Допустима множина X визначає умови, за яких перебігає процес, що досліджується, і яким має задовільняти розв'язок задачі.

О з н а ч е н н я 4.1. Точка $x^* \in X$ називається *розв'язком задачі* (4.1) або *точкою глобального мінімуму*, якщо

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in X. \qquad (4.2)$$

О з н а ч е н н я 4.2. Точка $x^* \in X$ називається *точкою локального мінімуму* або *локальним розв'язком* задачі (4.1), якщо існує число $\varepsilon > 0$ таке, що

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in X \cap U_\varepsilon(x^*), \qquad (4.3)$$

де $U_\varepsilon(x^*)$ – ε-окіл точки x^* (слово «локальний» походить від латинського слова *lokalis* – «місцевий»).

О з н а ч е н н я 4.3. Якщо в (4.2) і (4.3) нерівність виконується як строга при $x \neq x^*$, то x^* називається відповідно *точкою строгого глобального* чи *строгого локального мінімуму*.

Точка глобального мінімуму завжди є точкою локального мінімуму, але не навпаки. Наприклад, на рис. 4.1 x^* – точка строгого глобального і локального мінімуму; x' – точка нестрогого локального мінімуму.

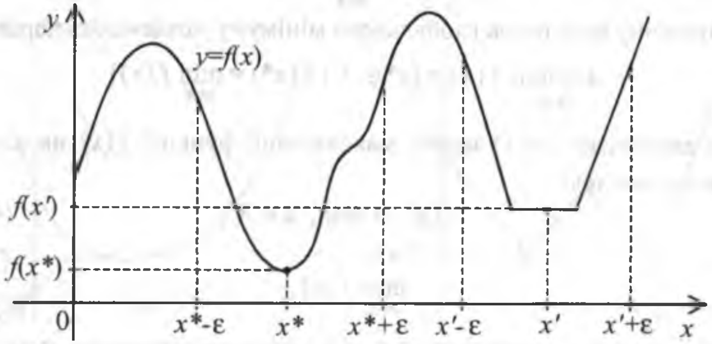


Рис. 4.1.

Існують функції, для яких будь-яка точка локального мінімуму є водночас і точкою глобального мінімуму. До таких функцій відносяться, наприклад, опуклі донизу функції.

Функція $f(x)$ називається *опуклою донизу* (або просто *опуклою*), якщо для будь-яких двох точок x_1 і x_2 з області її визначення справджується нерівність:

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

для всіх $\alpha \in [0;1]$.

В геометричному тлумаченні це означає, що для будь-яких x_1 і x_2 графік опуклої функції $f(x)$ між точками $(x_1, f(x_1))$ і $(x_2, f(x_2))$ лежить не вище від хорди, що сполучає ці точки (рис. 4.2).

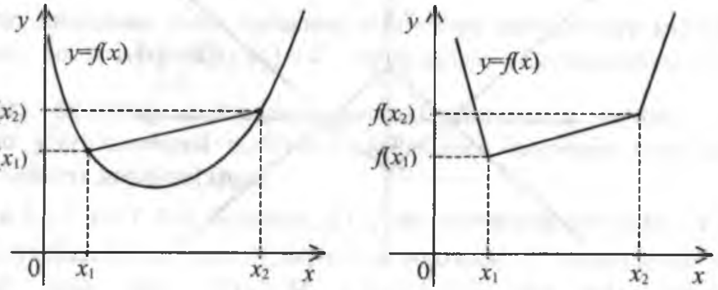


Рис. 4.2.

Той факт, що точка $x^* \in X$ є точкою глобального мінімуму функції $f(x)$ на множині X, записують у вигляді

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x),$$

або

$$x^* = \arg\min_{x \in X} f(x).$$

Множину всіх точок глобального мінімуму позначають через

$$\mathop{Arg\min}_{x \in X} f(x) = \{x^* \in X \mid f(x^*) = \min_{x \in X} f(x)\}.$$

За аналогією з (4.1) задачу максимізації функції $f(x)$ на множині X записують у вигляді

$$f(x) \to \max,\ x \in X, \tag{4.4}$$

або

$$\max_{x \in X} f(x).$$

Замінюючи в означеннях 4.1–4.3 слово «мінімум» на «максимум» і знак нерівностей в (4.2) і (4.3) на протилежний, одержимо відповідні поняття *точок глобального і локального максимуму, точок строгого глобального і строгого локального максимуму* для задачі (4.4).

Легко бачити, що задача максимізації (4.4) еквівалентна задачі

$$-f(x) \to \min,\ x \in X,$$

у тому розумінні, що множина глобальних і локальних, строгих або нестрогих розв'язків цих задач співпадають, при цьому має місце співвідношення

$$\max_{x \in X} f(x) = -\min_{x \in X}(-f(x))$$

(рис. 4.3). Тому надалі розглядатиметься в основному задача (4.1).

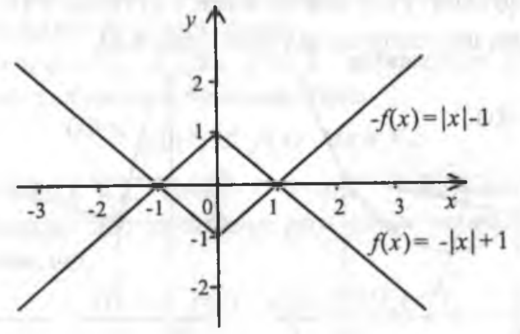


Рис. 4.3.

В залежності від властивостей допустимої множини X і цільової функції $f(x)$ множина всіх точок глобального мінімуму $\mathop{Arg\min}_{x \in X} f(x)$ може бути скінченною, нескінченною або порожньою.

Наприклад, на рис. 4.4 а) $X = R^1$, $\mathop{Arg\min}_{x \in X} f(x) = \{x^*\}$; на рис. 4.4 б) $X = R^1$, $\mathop{Arg\min}_{x \in X} f(x) = \{x_1^*, x_2^*\}$; на рис. 4.5 а) $X = R^1$, $\mathop{Arg\min}_{x \in X} f(x) = [x_1^*;\ x_2^*]$, на рис. 4.5 б) $X = (0; +\infty)$, $\mathop{Arg\min}_{x \in X} f(x) = \varnothing$.

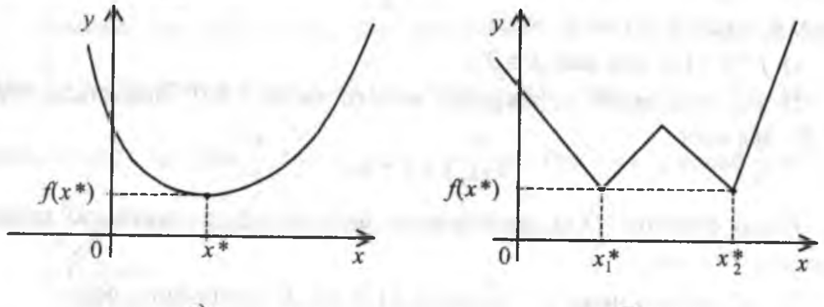


Рис. 4.4.

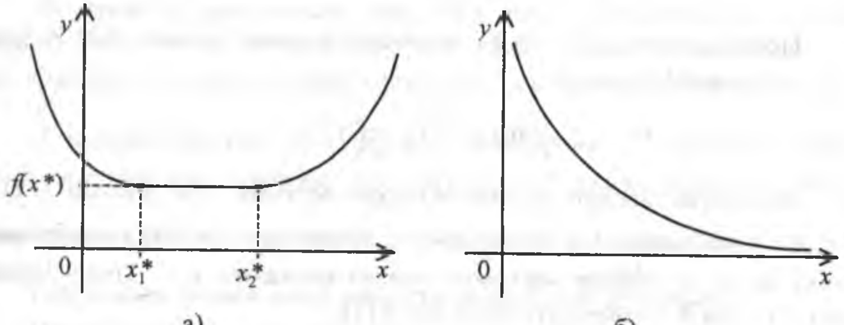


Рис. 4.5.

У тих випадках, коли множина всіх точок глобального мінімуму є порожньою, тобто $\mathop{Arg\min}_{x \in X} f(x) = \varnothing$, природним узагальненням поняття найменшого значення (мінімуму) функції є поняття нижньої межі. Відповідно узагальненням поняття найбільшого значення (максимуму) функції є поняття верхньої межі.

О з н а ч е н н я 4.4. Функція $f(x)$, визначена на множині $X \subseteq R^n$, називається *обмеженою знизу* (*зверху*) на множині X, якщо існує дійсне число M таке, що $f(x) \ge M$ ($f(x) \le M$) для всіх $x \in X$. У протилежному випадку функція $f(x)$ називається *необмеженою знизу* (*зверху*). Функція $f(x)$, обмежена на множині $X \subseteq R^n$ як знизу, так і зверху, називається *обмеженою* на множині X.

Очевидно, що функція $f(x)$ обмежена на множині $X \subseteq R^n$ тоді і тільки тоді, коли існує дійсне число $M \geq 0$ таке, що $|f(x)| \leq M$ для всіх $x \in X$.

Означення 4.5. Нехай функція $f(x)$ обмежена знизу на множині $X \subseteq R^n$. Тоді дійсне число f^* називається *точною нижньою межею* функції $f(x)$ на X, якщо

1) $f^* \leq f(x)$ для всіх $x \in X$;

2) для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться точка $x_\varepsilon \in X$, для якої

$$f(x_\varepsilon) < f^* + \varepsilon.$$

Якщо функція $f(x)$ необмежена знизу на X, то нижньою межею вважають $f^* = -\infty$.

Точну нижню межу f^* функції $f(x)$ на X позначають через

$$\inf_{x \in X} f(x).$$

Послідовність $\{x^{(k)}\} \subset X$ називається *мінімізуючою* для функції $f(x)$ на множині X, якщо

$$\lim_{k \to \infty} f(x^{(k)}) = \inf_{x \in X} f(x).$$

Аналогічно вводяться поняття *точної верхньої межі функції* $f(x)$ на $X \subseteq R^n$ і *максимізуючої* послідовності. Якщо функція $f(x)$ необмежена зверху на X, то точною верхньою межею вважають $+\infty$. Точну верхню межу $f(x)$ на X позначають через $\sup\limits_{x \in X} f(x)$.

Нехай функція $f(x)$ в точці $x^* \in X$ набуває найменшого значення на множині X. Тоді за означенням 4.1

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x) = \inf_{x \in X} f(x).$$

У цьому випадку кажуть, що функція $f(x)$ досягає своєї точної нижньої межі.

Необхідно підкреслити, що $\inf\limits_{x \in X} f(x)$ і $\sup\limits_{x \in X} f(x)$ завжди існують, однак $\min\limits_{x \in X} f(x)$ і $\max\limits_{x \in X} f(x)$ існують не завжди (див. рис. 4.5 б).

З існування точної нижньої межі випливає також існування мінімізуючої послідовності.

Приклад 4.1. Нехай $f(x) = \dfrac{\pi}{x}$, $X = [1; +\infty)$. Довести, що множина $\operatorname{Arg}\min\limits_{x \in X} f(x) = \varnothing$ і $\inf\limits_{x \in X} f(x) = 0$.

Доведення. Припустимо, що $\operatorname{Arg}\min\limits_{x \in X} f(x) \neq \varnothing$, тобто існує хоча б одна точка $x^* \in X$ мінімуму функції $f(x)$ на X. Візьмемо довільну точку $x > x^*$. Тоді $x \in X$ і $f(x^*) = \dfrac{\pi}{x^*} \geq \dfrac{\pi}{x} = f(x)$, тобто точка x^* не є точкою мінімуму $f(x)$ на множині X. Одержана суперечність доводить, що $\operatorname{Arg}\min\limits_{x \in X} f(x) = \varnothing$.

Доведемо, що $\inf\limits_{x \in X} f(x) = 0$. Для довільного $x \in X$ виконується нерівність $f(x) = \dfrac{\pi}{x} > 0$. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і $x_\varepsilon > \max\left(\dfrac{\pi}{\varepsilon}, \pi\right)$. Тоді $x_\varepsilon \in X$ і $0 < f(x_\varepsilon) < \varepsilon$. Дійсно, при $\varepsilon \geq 1$ $x_\varepsilon > \max\left(\dfrac{\pi}{\varepsilon}, \pi\right) = \pi$ і $f(x_\varepsilon) = \dfrac{\pi}{x_\varepsilon} < \varepsilon$. При $\varepsilon < 1$ $x_\varepsilon > \max\left(\dfrac{\pi}{\varepsilon}, \pi\right) = \dfrac{\pi}{\varepsilon}$ і $f(x_\varepsilon) = \dfrac{\pi}{x_\varepsilon} < \varepsilon$. Таким чином, для довільних $x \in X$ маємо:

1) $f(x) > 0$;

2) для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує точка $x_\varepsilon \in X$, для якої $f(x_\varepsilon) < 0 + \varepsilon$, звідки за означенням 4.5 $\inf\limits_{x \in X} f(x) = 0$.

На практиці розрізняють два типи задач мінімізації. В задачах першого типу шукають точні або наближені значення величини f^* незалежно від того, буде множина $\operatorname{Arg}\min\limits_{x \in X} f(x)$ порожньою чи ні.

В задачах другого типу разом з величиною f^* шукають точку $x^* \in X$, яка належить множині $\operatorname{Arg}\min\limits_{x \in X} f(x)$ або досить близька до неї. У цьому випадку природно вимагати, щоб $f^* > -\infty$ і $\operatorname{Arg}\min\limits_{x \in X} f(x) \neq \varnothing$.

Розглянемо *геометричну інтерпретацію* задач оптимізації.

Нехай задана функція $f(x)$, визначена на R^n.

Означення 4.6. *Лінією* (*поверхнею*) *рівня* функції $f(x)$ називається множина точок

$$l_\alpha = \{x \in R^n | f(x) = \alpha, \alpha \in R^1\}.$$

З поняттям лінії рівня пов'язане поняття *лебегової множини*:

$$L_\alpha = \{x \in R^n | f(x) \leq \alpha, \alpha \in R^1\}.$$

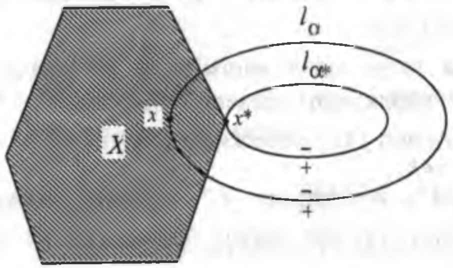
Розглянемо двовимірну задачу мінімізації:

$$f(x) \to \min, x \in X \subset R^2, x = (x_1, x_2). \qquad (4.5)$$

Щоб відобразити характер зміни функції $f(x)$ біля лінії рівня $l_\alpha = \{x \in R^n | f(x) = \alpha, \alpha \in R^1\}$, будемо ставити знак «+» з того боку лінії, де функція набуває значень, більших від α, і знак «-» з іншого боку (рис. 4.6). В геометричному тлумаченні задача (4.5) зводиться до відшукання такого числа $\alpha^* \in R^1$, що

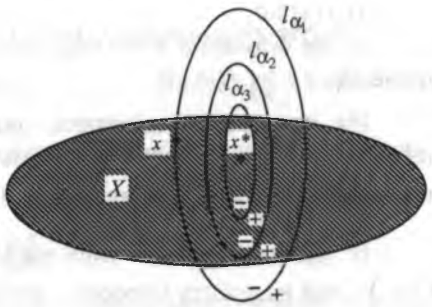
$$\alpha^* = \min_{\alpha \in A} \alpha, \qquad (4.6)$$

де $A = \{\alpha \in R^1 | l_\alpha \cap X \neq \varnothing\}$, тобто α^*– мінімальне серед усіх значень α таких, що множина точок, які належать одночасно лінії рівня l_α і множині X, непорожня. Будь-яка точка $x^* \in l_{\alpha^*} \cap X$ є розв'язком задачі (4.6), а $\alpha^* = f(x^*)$ – мінімальним значенням функції $f(x)$ на множині X. При цьому точка x^* може знаходитись на межі множини X (рис. 4.6) або бути внутрішньою точкою множини X (рис. 4.7). У випадку, коли при $\forall \alpha \leq \alpha_0$ $A \neq \varnothing$, покладають $\alpha^* = -\infty$ (рис. 4.8).



$\alpha > \alpha^*$

Рис. 4.6.



$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$

Рис. 4.7.

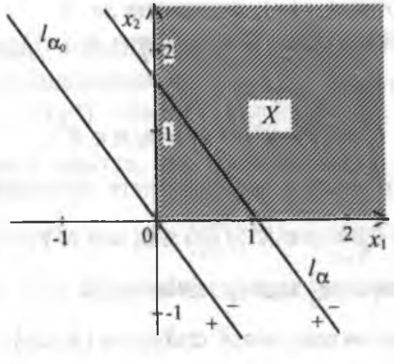


Рис. 4.8.

Іноді геометричне подання екстремальної задачі можна використати для її розв'язування.

П р и к л а д 4.2. Нехай в задачі (4.5) допустимою є множина

$$X = \{x \in R^2 | \ |x_i| \leq 1, \ i = 1,2\},$$

а цільова функція має вигляд

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + x_2^2.$$

Лінія рівня (рис. 4.9) для цієї функції при $\alpha > 0$ є коло радіуса $\sqrt{\alpha}$ з центром в точці (2, 0), при $\alpha = 0$ лінія рівня вироджується в точку (2, 0), при $\alpha < 0$ лінії рівня не існує (порожня множина). Очевидно, l_{α^*} – це коло, яке дотикається до квадрата в точці (1, 0). Таким чином розв'язком задачі мінімізації функції $f(x_1, x_2)$ на множині X є точка $x^* = (1, 0)$, а $\alpha^* = f(x^*) = 1$.

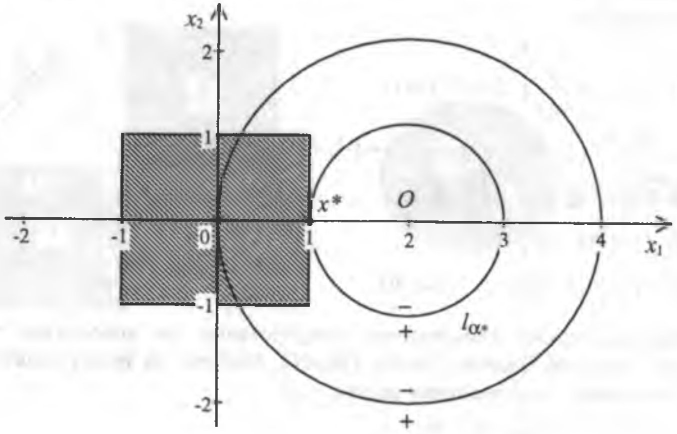


Рис. 4.9.

Запитання для самоконтролю

1. Як формально записується задача мінімізації (максимізації) функції на заданій множині?
2. Які точки називаються точками локального і глобального мінімуму (максимуму) функції?
3. Як зв'язані між собою задачі мінімізації та максимізації?
4. Яка функція називається обмеженою знизу (зверху) на множині?
5. Що таке точна нижня (верхня) межа функції на множині?
6. Яка послідовність точок називається мінімізуючою для заданої функції на множині?
7. Що таке лінія (поверхня) рівня функції?
8. У чому полягає сутність геометричної інтерпретації задачі оптимізації?

Вправи для самостійного виконання

1. Довести, що множина точок мінімуму функції $f(x)$ на множині X порожня, і знайти $f^* = \inf\limits_{x \in X} f(x)$:

1) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $X = R^1$;

2) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$, $X = (-\infty; 5)$;

3) $f(x) = x \sin x$, $X = R^1$;

4) $f(x) = \ln x$, $X = (0; 1]$;

5) $f(x) = \mathrm{arctg}\, x$, $X = (-\infty; -1]$.

2. Довести, що множина точок максимуму функції $f(x)$ на множині X порожня, і знайти $f^* = \sup\limits_{x \in X} f(x)$:

1) $f(x) = -\dfrac{1}{\ln x}$, $X = (1; +\infty)$;

2) $f(x) = (x-1)^3 - 3(x-1)$, $X = (-1; +\infty)$;

3) $f(x) = \mathrm{tg}\, x$, $X = [-\pi; \pi]$;

4) $f(x) = e^x$, $X = [0; +\infty)$;

5) $f(x) = \mathrm{arcctg}\, x$, $X = (-\infty; 0]$.

3. Використовуючи геометричну інтерпретацію, за допомогою програмних засобів типу Advanced Grapher, Derive, GRAN1, Mathcad чи інших знайти розв'язки (можливо наближені) екстремальних задач:

1) $-\cos^2 x \to \max$, $X = R^1$;

2) $|x - x^2| \to \min$, $X = [-1; 2]$;

3) $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \to \min$, $X = (0{,}1; 1]$;

4) $\dfrac{e^x}{x^2} \to \min$, $X = (0; 3]$;

5) $\sqrt[3]{x} - \dfrac{x^2}{5} + \sin(3x - 1) \to \min$, $X = [-5; 5]$;

6) $2x_1 - x_2 \to \max$, $x_1^2 + x_2^2 \le 1$, $x_1 - x_2 \le 0$, $x_1 + x_2 \le -1$;

7) $(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \to \min$, $x_1^2 + x_2^2 \ge 9$, $x_1 \ge 2$, $x_2 \ge 0$;

8) $\ln x_1 - x_2 \to \max$, $x_1^2 + x_2^2 \le 4$, $x_1 > 0$, $x_1 - x_2 \le 2$;

9) $x_1 + \sqrt{x_2} \to \min$, $x_1 + x_2 \ge 1$, $x_1^2 + x_2^2 = 1$;

10) $x_1 - x_2 \to \min$, $x_1 + x_2 \ge 1{,}5$, $0 \le x_1 \le 3$, $0 \le x_2 \le 2$.

4. На рис. 4.10 вказати множини $\mathop{Arg\min}\limits_{x \in X} f(x)$ і $\mathop{Arg\max}\limits_{x \in X} f(x)$ (якщо вони існують) і намалювати відповідно лінії рівня $l_{\alpha_{\min}}$ і $l_{\alpha_{\max}}$.

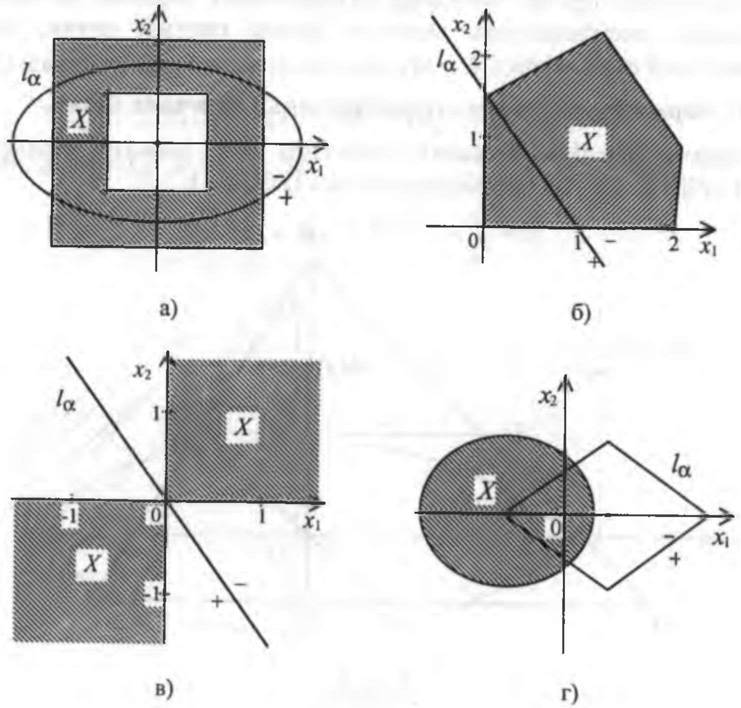


Рис. 4.10.

§5. Приклади екстремальних задач та їх формалізація

Розглянемо процес побудови математичних моделей на прикладах формалізації екстремальних задач з різних галузей науки, техніки, виробництва й економіки.

1. Формалізація деяких геометричних і фізичних задач.

Задача Евкліда. У даний трикутник ABC вписати паралелограм $ADEF$ ($EF \| AB$, $DE \| CA$) найбільшої площі (рис. 5.1).

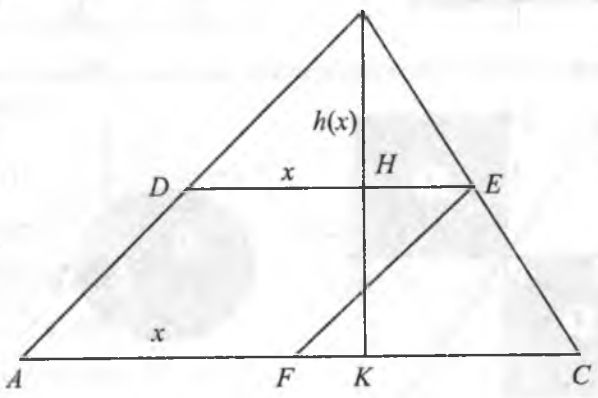


Рис. 5.1.

З подібності трикутників DBE і ABC маємо

$$\frac{h(x)}{H} = \frac{x}{b}, \tag{5.1}$$

де x – довжина сторони DE трикутника DBE і паралелограма $ADEF$, H – довжина висоти BK триукутника ABC, $h(x)$ – довжина висоти трикутника DBE, b – довжина сторони AC . Площа паралелограма $ADEF$ дорівнює $S = (H - h(x))x$. Із співвідношення (5.1) маємо $h(x) = \frac{Hx}{b}$, тому

$$S = \left(H - \frac{Hx}{b} \right) x = \frac{H(b-x)}{b} x.$$

Таким чином, одержуємо таку формалізацію задачі Евкліда:

$$f(x) = \frac{H(b-x)}{b} x \to \max$$

за умови, що $x \in X$, де $X = \{x \in R^1 \mid x \in [0; b]\}$.

Задача Аполлонія. На площині знайти відстань від заданої точки M з координатами (m_1, m_2) до еліпса, заданого рівнянням

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

Очевидною формалізацією задачі (рис. 5.2) є:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 \to \min$$

за умови, що $x = (x_1, x_2) \in X$, де

$$X = \left\{ (x_1, x_2) \in R^2 \;\middle|\; \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

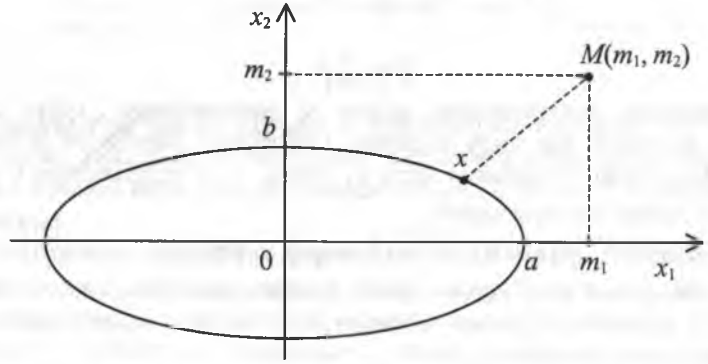


Рис. 5.2.

Планіметрична задача Кеплера. У задане коло вписати прямокутник найбільшої площі.

Доберемо систему координат так, щоб осі координат були паралельні до сторін прямокутника, а початок координат співпадав з точкою перетину його діагоналей (рис. 5.3).

Коло радіуса r описується рівнянням $x_1^2 + x_2^2 = r^2$. Нехай x_1, x_2 – координати тієї вершини прямокутника $ABCD$, яка лежить у першій координатній чверті (вершина C). Тоді площа прямокутника $ABCD$ дорівнює $S = 4x_1x_2$ і одержуємо таку формалізацію задачі:

$$f(x_1, x_2) = 4x_1x_2 \to \max$$

за умов

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - r^2 = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2) = x_1 \geq 0,$$
$$f_3(x_1, x_2) = x_2 \geq 0.$$

Зауважимо, що нерівності $x_1 \geq 0$ і $x_2 \geq 0$ можна опустити.

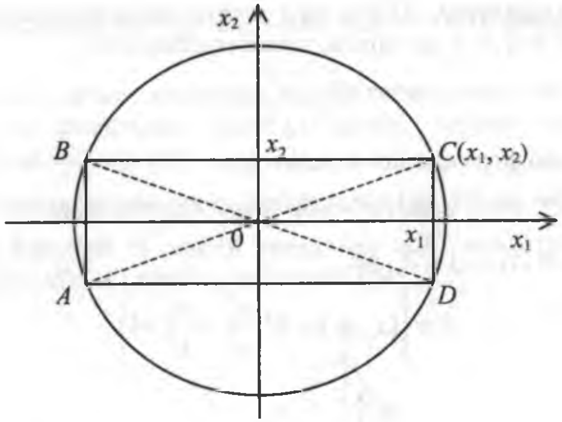


Рис. 5.3.

Одержана екстремальна задача є двовимірною, тобто цільова функція залежить від двох змінних. Спробуємо зменшити розмірність задачі. Виразивши з рівняння кола x_2 через x_1 і підставивши у цільову функцію, одержимо таку задачу

$$f(x) = 4x\sqrt{r^2 - x^2} \to \max, \quad 0 \le x \le r.$$

Отже, одну й ту ж задачу можна формалізувати по-різному. Від того, наскільки вдало побудована математична модель задачі, дуже часто залежить успіх її розв'язування.

Задача Штейнера. У площині трикутника знайти точку, сума відстаней від якої до вершин трикутника мінімальна.

Розмістимо заданий трикутник на координатній площині так, як показано на рис. 5.4.

Очевидно, що цільова функція задачі має вигляд:

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{(a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2} +$$

$$+ \sqrt{(b_1 - x_1)^2 + (b_2 - x_2)^2} + \sqrt{(c_1 - x_1)^2 + (c_2 - x_2)^2}$$

або в скороченій формі

$$f(x) = |x - A| + |x - B| + |x - C|,$$

де $|x - A|, |x - B|, |x - C|$ – відповідно відстані від шуканої точки $x \in R^2$ до вершин трикутника *ABC*. Тоді задача має таку формалізацію:

$$f(x) = |x - A| + |x - B| + |x - C| \to \min, \ x \in R^2.$$

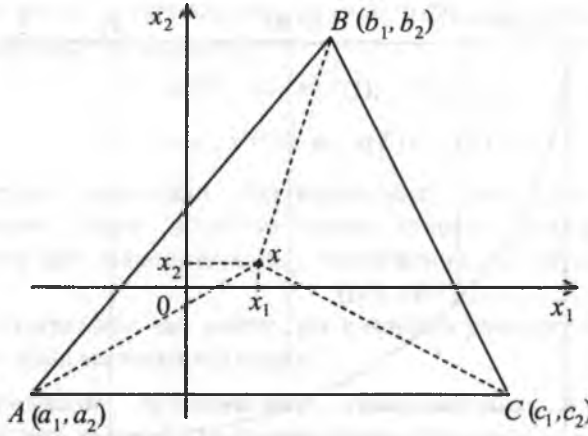


Рис. 5.4.

Задача про брахістохрону. У вертикальній площині дано дві точки *A* і *B*, які не лежать на одній прямій. Визначити шлях, спускаючись яким під дією власної ваги, тіло *M*, починаючи рух з точки *A*, досягне точки *B* найшвидше.

Розглянемо традиційну формалізацію цієї задачі. Доберемо систему координат так, щоб вісь абсцис була горизонтальна, а вісь ординат напрямлена вниз. Без обмеження загальності, можна вважати, що точка *A* співпадає з початком координат. Нехай точка *B* має координати (x_1, y_1), $x_1 > 0$, $y_1 > 0$ (рис. 5.5) і шукана крива лінія *l*, яка з'єднує точки *A* і *B*, має рівняння $y = f(x)$, де функція $f(x)$ неперервно диференційовна на проміжку $[0; x_1]$.

Очевидно, на кінцях відрізка $[0; x_1]$ функція $f(x)$ повинна задовольняти умови $f(0) = 0$, $f(x_1) = y_1$.

Як відомо, швидкість v тіла *M* в точці з координатами $(x, f(x))$ (якщо тіло без початкової швидкості і тертя спускається вздовж кривої *l*) не залежить від форми кривої *l* в інтервалі $(0; x)$, а залежить лише від ординати $f(x)$, при цьому ця швидкість дорівнює

$$v = \sqrt{2gf(x)},$$

де g – прискорення вільного падіння. Тоді час *dt*, який потрібен для подолання ділянки шуканої кривої від точки $(x, f(x))$ до точки $(x + dx, f(x) + dy)$, дорівнює

$$dt = \frac{dl}{v},$$

де $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$ – довжина кривої *l* на цій ділянці.

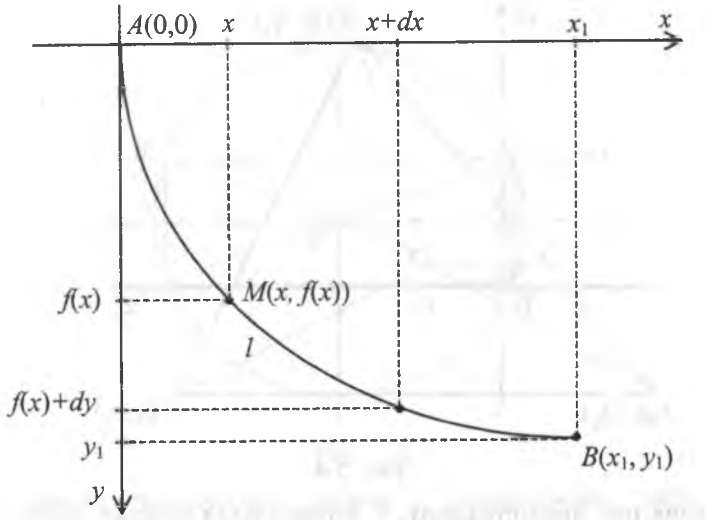


Рис. 5.5.

Щоб знайти найменший час T на подолання шляху від A до B, треба мінімізувати інтеграл

$$T=\int_0^{x_1}\frac{dl}{v}=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+(f'(x))^2}}{\sqrt{2gf(x)}}dx$$

при умовах $f(0)=0,\ f(x_1)=y_1$. Отже, одержуємо формалізацію задачі про брахістохрону:

$$T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+(f'(x))^2}{f(x)}}dx\to\inf,\ \ f(0)=0,\ \ f(x_1)=y_1.$$

Задача про швидкодію. Візок, що рухається прямолінійно без тертя на горизонтальних рейках, управляється зовнішньою силою, яку можна змінювати в заданих межах. Потрібно зупинити візок у визначеному положенні за найкоротший час.

Нехай маса візка m, його початкова координата x_0, початкова швидкість v_0, а зупинити візок потрібно в точці $x=0$ якомога швидше. Зовнішню силу (силу тяги) позначимо через u, а біжучу координату візка – через $x(t)$. Тоді за законом Ньютона

$$u = mx''(t).$$

Обмеження на тягу задамо у вигляді $u\in[u_1,u_2]$. Звідси математична модель задачі має такий вигляд:

$$T\to\inf,\quad u=mx''(t),\ u\in[u_1,u_2],$$

$$x(0)=x_0,\ x'(0)=v_0,\ x(T)=x'(T)=0.$$

Наведені приклади підтверджують, що для формалізації екстремальної задачі потрібно точно описати функцію, яку треба мінімізувати (або максимізувати), і обмеження, які обумовлені змістом задачі.

Слід зауважити, що майже для кожної із розглянутих задач можна побудувати різні математичні моделі.

2. Приклади виробничих, технологічних і економічних екстремальних задач та їх формалізація. Розглянемо кілька прикладів реальних задач з різних галузей діяльності людини, математичні моделі яких є екстремальними задачами і які дають змогу продемонструвати широкі можливості застосування теорії оптимізації на практиці.

Задача про оптимальний план виробництва продукції. Підприємство виробляє продукцію n видів і для її виготовлення використовується m видів ресурсів. Позначимо через a_{ij} витрати i-го виду ресурсів $(1\le i\le m)$ на виробництво одиниці продукції j-го виду $(1\le j\le n)$, через b_i – наявні ресурси i-го виду $(1\le i\le m)$, c_j – прибуток, що одержує підприємство від реалізації одиниці продукції j-го виду $(1\le j\le n)$, а через d_j, D_j – задані нижню і верхню межі обсягів виробництва j-го виду продукції.

Необхідно скласти такий план $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ виробництва продукції, щоб при наявних ресурсах задовольнити задані обмеження на випуск кожного виду продукції і в той же час забезпечити якомога більший загальний прибуток.

Математична модель задачі має вигляд:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max,$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i,\ \ i=\overline{1,m},$$

$$d_j\le x_j\le D_j,\ \ j=\overline{1,n}.$$

П р и к л а д 5.1. Для виробництва столів і шаф меблева фабрика використовує необхідні матеріальні та людські ресурси. Норми витрат ресурсів на один виріб даного виду, прибуток від реалізації одного виробу та загальна кількість наявних ресурсів наведені в наступній таблиці:

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальна кількість ресурсів
	Стіл	Шафа	
Дерево (м^2):			
I виду	2	3	282
II виду	3	5	447
Трудомісткість (людино-годин)	4	5	480
Прибуток від реалізації одного виробу (грн)	18	26	

Визначити скільки столів і шаф у межах наявних ресурсів необхідно виготовити, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним.

Побудуємо математичну модель задачі. Нехай x_1 – кількість столів, а x_2 – кількість шаф, яку планує виготовити меблева фабрика з метою одержання максимального прибутку. Тоді цільова функція задачі, яка визначає загальний прибуток від реалізації x_1 столів і x_2 шаф, буде мати вигляд

$$f(x_1, x_2) = 18x_1 + 26x_2,$$

а обмеження на матеріальні та людські ресурси запишуться так:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 282, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 447, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 480, \end{cases}$$

оскільки не можна використати ресурсів більше, ніж їх є на фабриці. При цьому, враховуючи умову задачі, відзначаємо, що величини x_1 і x_2 повинні бути невід'ємними цілими числами, тобто

$$x_1 \ge 0, x_1 \in Z,$$

$$x_2 \ge 0, x_2 \in Z.$$

Остаточно математична модель поставленої задачі має вигляд:

$$f(x_1, x_2) = 18x_1 + 26x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 282, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 447, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 480, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_1 \in Z,$$

$$x_2 \ge 0, x_2 \in Z.$$

Транспортна задача. Запаси деякого однорідного продукту розподілені на кількох базах постачання і цей продукт потрібно доставити до кількох пунктів призначення. Відома вартість перевезень продукту між базами постачання і пунктами призначення. Задача полягає в тому, щоб визначити, яку кількість продукту потрібно перевезти з кожної бази постачання до кожного пункту призначення, щоб забезпечити їх потреби і сумарна вартість перевезень була мінімальною.

Нехай:

m – кількість баз постачання;

n – кількість пунктів призначення;

a_i – кількість одиниць продукту на i-й базі постачання ($1 \le i \le m$);

b_j – потреба j-го пункту призначення ($1 \le j \le n$) в продукті (в тих же одиницях);

c_{ij} – вартість перевезення одиниці продукту з i-ї бази постачання до j-го пункту призначення.

Позначимо через x_{ij} – кількість одиниць продукту, яку заплановано перевезти з i-ї бази постачання до j-го пункту призначення. Тоді вартість перевезення продукту дорівнює

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

і її потрібно мінімізувати. При цьому на змінні x_{ij} накладаються такі обмеження:

а) $x_{ij} \ge 0$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$;

б) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, $1 \le j \le n$ (слід повністю задовольнити потреби всіх пунктів призначення);

в) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i$, $1 \le i \le m$ (з будь-якої бази не можна вивезти продукту більше від наявного там запасу).

П р и к л а д 5.2. У трьох пунктах постачання зосереджений однорідний вантаж в обсязі 420 т, 380 т і 400 т. Цей вантаж необхідно перевезти в три пункти призначення відповідно в обсязі 260 т, 520 т і 420 т. Вартості перевезення (в грн) однієї тони вантажу з кожного пункту постачання до кожного пункту призначення є відомими величинами і задаються матрицею

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Знайти план перевезень, який забезпечує вивезення наявного в пунктах постачання вантажу і завезення його до пунктів призначення в необхідній кількості при мінімальній загальній вартості перевезень.

Для транспортної задачі її умову зручно подавати у табличній формі:

Пункти постачання	Пункти призначення			Запаси (т)
	B1	B2	B3	
A1	2	4	3	420
A2	7	5	8	380
A3	6	9	7	400
Потреби (т)	260	520	420	

Побудуємо математичну модель цієї задачі. Позначимо через x_{ij} – кількість одиниць вантажу, яку заплановано перевезти з A_i-го пункту постачання до B_j-го пункту призначення, де $i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,3}$. Тоді план перевезень можна записати у вигляді матриці

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix},$$

при цьому загальна вартість перевезення вантажу буде дорівнювати

$$f(X)=2x_{11}+4x_{12}+3x_{13}+7x_{21}+5x_{22}+8x_{23}+6x_{31}+9x_{32}+7x_{33}$$

і її потрібно мінімізувати.

За умовою задачі необхідно вивезти весь вантаж з пунктів постачання, тому план перевезень повинен задовольняти такі умови

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=420, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=380, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=400, \end{cases}$$

а оскільки, крім того, необхідно повністю задовольнити потреби пунктів призначення, то план перевезень повинен також задовольняти умови

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=260, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=520, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=420. \end{cases}$$

Враховуючи те, що за планом вантаж може бути перевезено з A_i-го пункту постачання до B_j-го пункту призначення або ні, то на змінні x_{ij} накладається умова:

$$x_{ij}\ge 0,\ i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,3}.$$

Задача про сплав. Металургійному підприємству потрібно виплавити новий сплав, що містить m хімічних елементів у відповідному співвідношенні $a_i\%$ $(1\le i\le m)$. Припустимо, що у розпорядженні підприємства є n різних сплавів, кожний j-й сплав містить $s_{ij}\%$ i-го хімічного елементу $(1\le j\le n,\ 1\le i\le m)$ і може бути використаний для виробництва нового сплаву. Ціна одного кілограма j-го сплаву дорівнює c_j грн $(1\le j\le n)$. Завдання полягає у тому, щоб визначити, яку кількість кожного сплаву потрібно витратити на кожний кілограм нового сплаву, щоб він був найдешевшим?

Позначивши шукані величини через x_j, маємо таку цільову функцію

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j,$$

яку треба мінімізувати при такій системі обмежень

$$\sum_{j=1}^{n}s_{ij}x_j=a_i,\ 1\le i\le m,\ x_j\ge 0,\ 1\le j\le n.$$

Приклад 5.3. У хімічній лабораторії заводу потрібно виплавити новий сплав, що містить 30% свинцю, 25% цинку і 45% олова. Для цього використовують чотири сплави, вхідні дані про які наведено в таблиці:

Елементи	Вміст елементів у сплавах (%)			
	Сплав 1	Сплав 2	Сплав 3	Сплав 4
Свинець	24	15	36	42
Цинк	26	45	18	38
Олово	50	40	46	20
Ціна 1 кг сплаву (грн)	60	80	40	50

Визначити, яку кількість кожного сплаву потрібно витратити на кожний кілограм нового сплаву, щоб він був найдешевшим?

Задача про призначення. Нехай для виконання n різних робіт на деякому підприємстві виділено n працівників, причому за кожною роботою можна закріпити лише одного працівника. Відома ефективність c_{ij} виконання i-ї роботи j-м працівником, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$. Завдання полягає в такому закріпленні працівників за роботами, щоб загальна ефективність виконання робіт була б найбільшою.

Якщо ввести змінні x_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$, які визначаються формулою

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{якщо } i\text{ - та робота закріплена за } j\text{ - м працівником,}\\ 0, & \text{у протилежному випадку,}\end{cases}$$

то математична модель задачі буде такою: треба знайти максимум лінійної форми

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ i=\overline{1,n},$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\ j=\overline{1,n},$$

$$x_{ij}\in\{0,1\},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Цільова функція виражає загальну ефективність виконання робіт. Перше обмеження задачі означає, що за кожною i-ю роботою закріплений один працівник, а друге обмеження – кожний j-й працівник закріплений за однією роботою.

Задача розміщення програмних модулів у багаторівневій пам'яті комп'ютера. Нехай є m програмних модулів для побудови алгоритмів розв'язування задач певного класу, a_i – об'єм (число стандартних слів) пам'яті, необхідний для розміщення i-го програмного модуля, $i=\overline{1,m}$, p_i – частота його використання. Система реалізована на комп'ютері, пам'ять якого складається з n рівнів, b_j – об'єм пам'яті j-го рівня, $j=\overline{1,n}$, t_j – час вибирання слова стандартної довжини з пам'яті j-го рівня. Необхідно так розмістити програмні модулі в багаторівневій пам'яті комп'ютера, щоб мінімізувати середній час розв'язування задач заданого класу.

Якщо ввести змінні x_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$, які визначаються формулою

$$x_{ij}=\begin{cases}1, \text{ якщо } i\text{ - ий програмний модуль розміщений в пам'яті } j\text{- го рівня},\\ 0, \text{ у протилежному випадку.}\end{cases}$$

Тоді математична модель задачі буде такою:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_j a_i p_i x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1,\ i=\overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i x_{ij} \le b_j,\ j=\overline{1,n},$$

$$x_{ij}\in\{0,1\},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Перше обмеження задачі означає, що i-й модуль програми може розміщуватися лише в одному з j-х рівнів пам'яті, а друге – об'єм пам'яті, який займають програмні модулі, розміщені в j-му рівні, не перевищує об'єму пам'яті j-го рівня.

Задача про розкрій матеріалу. Припустимо, що деякий напівфабрикат (рулони, дошки, прути тощо) фіксованого розміру, який надходить на виробництво, треба розкроїти на відповідні заготовки потрібних розмірів. Відомо, що кожну одиницю матеріалу можна розкроїти одним із можливих способів розкрою. При цьому використання того чи іншого способу розкрою одиниці матеріалу зумовлює відповідні відходи матеріалу. Задача полягає в такому виборі способу розкрою кожної одиниці матеріалу, щоб була заготовлена потрібна кількість заготовок кожного типу і водночас сумарна величина відходів матеріалу була б найменшою.

Складемо математичну модель задачі. Для цього введемо такі величини:

- m – число типів заготовок;
- n – число способів розкрою одиниці матеріалу;
- a_{ij} – число заготовок i-го типу, що одержується при розкрої одиниці матеріалу j-м способом, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$;
- b_i – число потрібних заготовок i-го типу, $i=\overline{1,m}$;
- r_j – величина відходів при розкрої одиниці матеріалу j-м способом, $j=\overline{1,n}$;
- x_j – число одиниць матеріалу, що планується розкроїти j-м способом, $j=\overline{1,n}$, (шукані величини).

Тоді математична модель задачі буде такою: треба знайти мінімум лінійної функції

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} r_j x_j$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i,\ i=\overline{1,m},$$

$$x_j\ge 0,\ x_j\in Z,\ j=\overline{1,n}.$$

Розглянемо процес формалізації задачі про розкрій матеріалу на конкретному прикладі.

П р и к л а д 5.4. З прутів довжиною 5,5 м треба нарізати 100 заготовок довжиною 2 м, 200 заготовок довжиною 1,5 м і 300 заготовок довжиною 0,8 м так, щоб сумарна величина відходів матеріалу була найменшою.

Розглянемо всі можливі способи розкрою одиниці матеріалу довжиною 5,5 м та визначимо, скільки одиниць кожного типу заготовок і яка величина відходів матеріалу одержуються при кожному способі розкрою:

Номер способу розкрою	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Число заготовок довжиною 2 м	2	2	1	1	1	0	0	0	0
Число заготовок довжиною 1,5 м	1	0	2	1	0	3	2	1	0
Число заготовок довжиною 0,8 м	0	1	0	2	4	1	3	5	6
Величина відходів (м)	0	0,7	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0	0,7

Якщо позначати через x_j, $j=\overline{1,9}$, кількість одиниць матеріалу, що планується розкроїти j-м способом, то математична модель задачі буде такою:

$$f(x)=0{,}7x_2+0{,}5x_3+0{,}4x_4+0{,}3x_5+0{,}2x_6+0{,}1x_7+0{,}7x_9\to\min$$

за умов

$$\begin{cases}2x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5 = 100,\\ x_1+2x_3+x_4+3x_6+2x_7+x_8 = 200,\\ x_2+2x_4+4x_5+x_6+3x_7+5x_8+6x_9 = 300,\end{cases}$$

$$x_j\ge 0,\ x_j\in Z,\ j=\overline{1,9}.$$

Задача про собівартість продукції. Для виготовлення n видів продукції підприємство використовує m типів технологічного обладнання. Кожен з видів продукції повинен пройти обробку на кожному з типів обладнання. Час обробки кожного j-го виробу ($j=\overline{1,n}$) на i-му обладнанні ($i=\overline{1,m}$) дорівнює t_{ij} годин. Витрати, пов'язані з виробництвом одного виробу j-го виду, дорівнюють c_j грн ($j=\overline{1,n}$). Обладнання i-го типу підприємство може використовувати не більше b_i годин ($i=\overline{1,m}$).

Необхідно визначити, скільки виробів кожного виду треба виготовити підприємству, щоб середня собівартість одного виробу була мінімальною.

П р и м і т к а. Собівартість продукції визначається як відношення загальних витрат на її виробництво до кількості виготовленої продукції.

Припустимо, що підприємство виготовить x_j – виробів j-го виду ($j=\overline{1,n}$), тоді математична модель задачі буде такою:

$$f(x)=\frac{\sum_{j=1}^{n}c_jx_j}{\sum_{j=1}^{n}x_j}\to\min$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n}t_{ij}x_j\le b_i,\, i=\overline{1,m},\quad x_j\ge 0,\, j=\overline{1,n},$$

де $\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$ – загальні витрати на виробництво продукції, а $\sum_{j=1}^{n}x_j$ – загальний обсяг виготовленої продукції, при цьому $\sum_{j=1}^{n}x_j\ne 0$.

П р и к л а д 5.5. Для виготовлення двох видів продукції P_1 і P_2 підприємство використовує три типи технологічного обладнання. Кожен з видів продукції повинен пройти обробку на кожному з типів обладнання. Тривалість обробки кожного з виробів на обладнанні певного типу наведено у таблиці, в якій також вказані витрати, пов'язані з виробництвом одного виробу кожного виду:

Тип обладнання	Тривалість обробки одного виробу (годин)	
	P_1	P_2
1	2	8
2	1	2
3	12	4
Витрати на виробництво одного виробу (грн)	22	35

Обладнання відповідного типу підприємство може використовувати не більше 24, 36 і 40 годин.

Необхідно визначити скільки виробів кожного виду треба виготовити підприємству, щоб середня собівартість одного виробу була мінімальною.

Задача пошуку. Треба знайти об'єкт, який знаходиться в одному з n районів з ймовірностями $p_1,p_2,\dots,p_n$ відповідно. Для пошуку об'єкта відведено загальний ресурс часу T. Відомо, що при пошуку в i-му районі протягом часу t_i, $i=\overline{1,n}$, ймовірність відшукання об'єкту (за умови, що він там є) дорівнює $1-e^{-\alpha_i t_i}$, де $\alpha_i>0$ – задане число. Необхідно так розподілити час пошуку по районах, щоб максимізувати ймовірність відшукання об'єкту.

Враховуючи формулу повної ймовірності, одержимо таку математичну модель задачі

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}p_i(1-e^{-\alpha_i t_i})\to\max,$$

$$\sum_{i=1}^{n}t_i\le T,$$

$$t_i\ge 0,\; i=\overline{1,n}.$$

Задача про вибір оптимальної структури автоматизованої системи управління (АСУ). Нехай АСУ містить n вузлів і призначена для розв'язування m задач. Затрати ресурсів на розв'язування i-ї задачі в j-му вузлі становлять величину a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, а ресурси, що є в j-му вузлі – величину b_j. Структура АСУ визначається матрицею $(x_{ij})_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}}$, де $x_{ij}=1$, якщо i-та задача розв'язується в j-му вузлі, і $x_{ij}=0$ – в протилежному випадку. Необхідно обрати таку структуру АСУ, для якої сумарні витрати на розв'язування задач будуть мінімальними.

Математична модель задачі має такий вигляд

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_{ij}\to\min,$$

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_{ij}\le b_j,\; j=\overline{1,n},$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\; i=\overline{1,m},$$

$$x_{ij}\in\{0,1\},\; i=\overline{1,m},\; j=\overline{1,n}.$$

Обмеження-нерівності говорять про те, що витрати в кожному j-му вузлі не можуть перевищувати наявних ресурсів, а обмеження-рівності – про те, що АСУ повинна розв'язувати всі m задач, які покладені на неї.

Задача про завантаження обладнання. Нехай на підприємстві є m верстатів, на яких можна виготовляти n типів деталей. Час виготовлення однієї деталі j-го типу ($j=\overline{1,n}$) на i-му верстаті ($i=\overline{1,m}$) становить величину t_{ij} годин, а ресурс часу роботи i-го верстату дорівнює b_i годин. Підприємство має замовлення на виготовлення деталей j-го типу в кількості c_j штук ($j=\overline{1,n}$).

Задача полягає в розподілі завдань між верстатами так, щоб виконати замовлення і загальний час роботи всіх верстатів був мінімальним.

Якщо через x_{ij} позначити кількість деталей j-го типу ($j=\overline{1,n}$), яку треба виготовити на i-му верстаті ($i=\overline{1,m}$), то одержимо таку задачу: мінімізувати лінійну форму

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_{ij}$$

при обмеженнях на ресурси часу використання верстатів

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_{ij} \le b_i,\ i=\overline{1,m},$$

на виконання замовлення

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = c_j,\ j=\overline{1,n},$$

за умов

$$x_{ij} \ge 0,\ x_{ij} \in Z,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

П р и к л а д 5.6. У механічному цеху є три металорізальні верстати M_1, M_2, M_3, на яких можна виготовляти два типи деталей D_1 і D_2. Час виготовлення деталей на кожному з верстатів (у годинах), ресурс часу використання верстатів і планове завдання вказані в таблиці.

Тип верстатів	Витрати часу на обробку однієї деталі (годин)		Ресурс часу (годин)
	D_1	D_2	
M_1	2	3	2000
M_2	1	4	2500
M_3	3	1	3000
Необхідна кількість деталей	200	400	

Задача полягає в розподілі завдань між верстатами так, щоб виконати замовлення і загальний час використання всіх верстатів був мінімальним.

Задача про раціон. На тваринницькій фермі для відгодівлі худоби використовуються деякі види кормів (грубі, соковиті, концентрати тощо), які містять необхідні поживні речовини (протеїни, жири, мінеральні речовини тощо) у певній кількості. Відомо, скільки одиниць кожної

поживної речовини міститься у кожному виді кормів, мінімальна добова потреба у кожній поживній речовині при відгодівлі худоби, а також вартість одиниці кожного виду кормів. Задача полягає в тому, щоб скласти добовий раціон для відгодівлі худоби такий, який задовольнить мінімальні потреби в поживних речовинах, а загальна вартість раціону буде найменшою.

Нехай:

m – кількість поживних речовин, які містяться в кормах;

n – кількість видів кормів, які використовуються для відгодівлі худоби;

a_{ij} – кількість одиниць i-ї поживної речовини, яка міститься в одиниці корму j-го виду, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$;

b_i – мінімальна добова потреба в i-й поживній речовині, $i=\overline{1,m}$;

c_j – вартість одиниці корму j-го виду, $j=\overline{1,n}$.

Якщо через x_j позначити кількість одиниць корму j-го виду, що планується використати в добовому раціоні, то математична модель задачі буде такою: треба знайти мінімум лінійної функції

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i,\ i=\overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}.$$

П р и к л а д 5.7. Для збереження здоров'я і працездатності людина повинна споживати за добу певну кількість корисних речовин, наприклад, білків, жирів, вуглецю, води і вітамінів. Вміст цих інгредієнтів у різних видах їжі P_j, $j=\overline{1,n}$, різний. Обмежимося для простоти двома видами їжі. Вміст вказаних речовин, вартість 1 кг їжі певного виду наведено в таблиці.

Корисні речовини	Вміст корисних речовин у 1 кг їжі		Мінімальна добова норма (кг)
	P_1	P_2	
Жири	0,1	0,5	0,1
Білки	0,3	0,1	0,2
Вуглець	0,2	0,3	0,15
Вода	0,3	0,1	1
Вітаміни	0,1	0	0,1
Вартість (грн)	2	3	

Яким чином треба організувати харчування, щоб вартість його була найменшою, але організм людини одержував би не менше мінімальної добової норми корисних речовин всіх видів?

Формалізація більш складних задач, що виникають на практиці, як правило, є досить специфічною проблемою, при розв'язуванні якої необхідно враховувати різноманітні фактори, зокрема, фізичні, технічні, природні, а також робити певні припущення і гіпотези.

Запитання для самоконтролю

1. Як записати математичні моделі задач Евкліда, Аполлонія, планіметричної задачі Кеплера, задачі Штейнера і як виглядає їх геометрична інтерпретація?
2. Як записати математичні моделі задач про брахістохрону і про швидкодію?
3. Які виробничі та економічні задачі можна віднести до задач оптимізації і як записати їх математичні моделі?
4. Які технічні задачі можна віднести до задач оптимізації і як записати їх математичні моделі?

Вправи для самостійного виконання

1. Формалізувати задачу Герона і стереометричну задачу Кеплера.
2. Побудувати математичні моделі задач, наведених у прикладах 5.3, 5.5-5.7.
3. Побудувати математичні моделі задач:

3.1. Для перевезення вантажу використовуються машини типу «Камаз» і «Краз». Вантажопідйомність машин відповідно становить 5 т і 8 т. За один рейс «Камаз» витрачає 1,5 кг мастильних матеріалів і 40 л палива, «Краз» – відповідно 2 кг і 50 л. На автобазі є 150 кг мастильних матеріалів і 1000 л палива. Витрати на експлуатацію одного «Камаза» становлять 100 грн за один рейс, а на один «Краз» – 150 грн. Треба перевезти 160 т вантажу. Скільки необхідно використати «Камазів» і «Кразів» для перевезення всього вантажу, щоб експлуатаційні витрати були мінімальними?

3.2. Кондитерська фабрика для виготовлення двох видів карамелі «Барбарис» і «Лапки» використовує три види сировини: цукор, патоку і фруктове пюре. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво 1 т карамелі даного виду наведено в таблиці. В ній також вказана загальна кількість сировини кожного виду, що може бути використана фабрикою, та наведено прибуток від реалізації 1 т карамелі даного виду.

Знайти план виготовлення карамелі, який забезпечує максимальний прибуток від її реалізації.

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на одну тону карамелі		Загальна кількість сировини (т)
	«Барбарис»	«Лапки»	
Цукор	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,3	600
Фруктове пюре	0,1	0,1	120
Прибуток від реалізації 1 т карамелі (грн)	112	126	

3.3. Для виготовлення двох видів виробів А і В використовується токарне, фрезерне та шліфувальне обладнання. Норми затрат часу для кожного типу обладнання на один виріб кожного виду наведені в таблиці. В тій же таблиці вказаний загальний фонд робочого часу кожного з типів обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу.

Тип обладнання	Норми витрат часу на виготовлення однієї деталі (годин)		Загальний фонд робочого часу (годин)
	Виріб А	Виріб В	
Фрезерне	10	8	168
Токарне	5	10	180
Шліфувальне	6	12	144
Прибуток від реалізації одного виробу (грн)	14	18	

Знайти план виготовлення деталей, який забезпечує максимальний прибуток від її реалізації.

3.4. Для перевезення пасажирів між двома населеними пунктами автопарком використовуються автобуси типу «ЛАЗ» і «Ікарус». Кількість пасажирів, яку можуть за один рейс перевезти ці автобуси, відповідно становить 36 і 42. За один рейс «ЛАЗ» витрачає 2,5 кг мастильних матеріалів і 45 л палива, «Ікарус» – відповідно 2 кг і 55 л. В автопарку є 250 кг мастильних матеріалів і 1400 л палива. Витрати на експлуатацію одного «ЛАЗа» за один рейс становлять 12 грн, а на одного «Ікаруса» – 17 грн. Треба перевезти не менше 500 пасажирів, при цьому кількість працюючих «ЛАЗів» у автопарку не більше 8, а «Ікарусів» не більше 10. Скільки «ЛАЗів» та «Ікарусів» необхідно використати автопарку, щоб перевезти всіх пасажирів і експлуатаційні витрати за наявних ресурсів були мінімальними?

3.5. На трьох елеваторах є зерно в обсязі 4200 т, 3800 т і 4000 т. Це зерно необхідно перевезти до трьох заводів з виготовлення борошна відповідно в обсязі 2600 т, 5200 т і 4200 т. Вартості перевезення однієї тони зерна з кожного елеватора до кожного заводу (в грн.) задані в таблиці.

Пункти постачання	Пункти призначення		
	Завод 1	Завод 2	Завод 3
Елеватор 1	2	4	3
Елеватор 2	7	5	8
Елеватор 3	6	9	7

Знайти план перевезень, який забезпечить вивезення наявного на елеваторах зерна і завезення його в необхідній кількості на заводи з виготовлення борошна при мінімальній загальній вартості перевезень.

3.6. Поліграфічне підприємство може здійснювати випуск друкованої продукції за трьома технологіями: Т1 – традиційна типографська, Т2 – за допомогою різографа, Т3 – офсетний друк. Види і витрати ресурсів задані в таблиці. Визначити план використання технологій друкування, який забезпечить максимальний випуск продукції при заданих обмеженнях на ресурси.

Ресурси	Норми витрат ресурсів на виготовлення одного виробу друкованої продукції			Обсяг наявних ресурсів
	Т1	Т2	Т3	
Трудові ресурси (люд./год.)	1,5	0,5	1	1400
Папір (кг)	0,5	1	0,8	2600
Фарба (кг)	0,3	0,2	0,1	320
Електроенергія (квт/год.)	35	40	45	3000
Продуктивність технологій (шт/год)	300	400	350	

3.7. Арматурний цех заводу залізобетонних виробів одержує прут довжиною 7м. У таблиці задано виробничу програму.

Номер заготовки	Довжина заготовки (м)	Потрібна кількість (шт)
1	3,2	200
2	2,8	400
3	2,1	600
4	1,2	500

Скласти план розкрою вихідного матеріалу з найменшими відходами.

3.8. Нафтопереробний завод одержує чотири напівфабрикати: 400 тис. л алкілату, 250 тис. л крекінг-бензину, 350 тис. л бензину прямої перегонки і 100 тис. л ізопентолу. У результаті змішування цих чотирьох компонентів у різних пропорціях утворюються три сорти авіаційного бензину: марки А-2:3:5:2; В-3:1:2:1 і С-2:2:1:3 відповідно. Прибуток від реалізації 1 тис. л вказаних сортів бензину дорівнює: А – 120 грн, В –100 грн, С –150 грн.

Визначити план виготовлення бензинів різних сортів, при якому досягається максимальний прибуток від реалізації всієї продукції.

3.9. Будівельна дільниця кар'єру має екскаватори чотирьох типів, які повинні виконувати чотири види робіт. Продуктивність машин різного типу за кожним видом роботи наведено в таблиці.

Тип екскаватора	Вид робіт			
	1	2	3	4
1	0,2	0,6	1,4	0,5
2	0,9	0,8	0,6	0,6
3	1,0	0,2	0,6	0,3
4	0,4	1,0	1,0	0,8

Розподілити екскаватори за видами робіт, забезпечивши максимальну продуктивність будівельної дільниці.

3.10. На трьох групах обладнання необхідно виготовити вироби чотирьох видів А, Б, В, Г. Встановлено план: виробів типу А треба виготовити 2000 шт., Б –1000 шт., В – 200 шт., Г – 250 шт. Дані про собівартість кожного виробу наведено в таблиці.

Скласти план завантаження обладнання, при якому мінімізується час виконання виробничої програми, а також скласти план завантаження, при якому мінімізуються витрати на виконання виробничої програми.

Обладнання	Собівартість одного виробу (грн)				Час на виготовлення одного виробу (хв)				Фонд часу (хв)
	А	Б	В	Г	А	Б	В	Г	
1	3,5	1,4	0,8	1,4	4	6	2,5	4	38000
2	1,7	2,2	1,5	1,7	2,5	3	1,5	2	26000
3	2,6	4,5	6,0	5,6	3,5	1,5	1,0	3	12000

3.11. На два міських вокзали прибуло 40 гарнітурів меблів, по 20 комплектів на кожний вокзал. Всі меблі треба доставити в три магазини, при цьому в перший і третій магазини по 10 гарнітурів, а у другий – 20 гарнітурів. Відомо, що вартість доставки одного гарнітура з першого вокзалу до магазинів становить 15 грн, 20 грн і 10 грн відповідно, а з другого – 10 грн, 10 грн і 25 грн. Скласти такий план перевезень, при якому їх загальна вартість буде найменшою.

3.12. Страхова компанія має філії в містах A_i, $i = 1, 2, 3$. В кожному місті працює a_i, $i = 1, 2, 3$, страхових агентів. Фірма збирається провести рекламну компанію своєї діяльності, для чого необхідно направити агентів до інших міст B_j, $j = 1, 2, 3, 4$, у кількості b_j, $j = 1, 2, 3, 4$, відповідно. Вартість проїзду для одного агента з міста A_i до міста B_j складає c_{ij} грн і подана в таблиці, де також наведені дані для a_i, $i = 1, 2, 3$ і b_j, $j = 1, 2, 3, 4$. Скласти математичну модель задачі і знайти план поїздок страхових агентів, який задовольняє потреби рекламної компанії і має найменшу вартість.

Пункти від'їзду	Пункти призначення				Штат агентів (a_i)
	В1	В2	В3	В4	
А1	2	4	7	9	12
А2	5	1	8	12	6
А3	11	6	4	3	10
Потреби (b_j)	10	8	4	6	

3.13. Плодоконсервний завод виготовляє п'ять видів фруктового соку: березово-яблучний, грушево-яблучний, сливово-грушевий, грушево-яблучно-сливовий, березово-грушевий. Прибуток від реалізації одного літру соку, норми витрат сировини та її запаси наведені в таблиці.

Види сировини	Витрати сировини на 1 л соку					Запаси сировини на сезон (т)
	Березово-яблучний	Грушево-яблучний	Сливово-грушевий	Грушево-яблучно-сливовий	Березово-грушевий	
Березовий концентрат (л)	0,8				0,7	10
Яблука (кг)	1,6	1,4		0,9		50
Груші (кг)		1,7	1,6	1,1	1,3	40
Слива (кг)			1,6	1,2		20
Прибуток від реалізації 1 л соку (грн)	0,33	0,45	0,4	0,38	0,29	

Як необхідно спланувати виробництво соку, щоб забезпечити максимальний прибуток від реалізації виготовленої продукції?

3.14. Кредитний банк може вкласти кошти у чотири різні інноваційні проекти протягом трьох років. Відомі максимальний обсяг капіталовкладень банку за роками (млн грн), орієнтовний розподіл коштів між проектами за роками (млн грн), а також очікувані прибутки від реалізації кожного проекту після трьох років інвестування (відповідні дані наведено у таблиці). Передбачається, що кожний обраний проект має бути реалізований за трирічний термін. Необхідно здійснити розподіл капіталовкладень між проектами так, щоб забезпечити банку отримання максимального сумарного прибутку від реалізації обраних проектів.

Роки інвестування	Орієнтовний розподіл коштів між проектами за роками (млн грн)				Максимальний обсяг капіталовкладень за роками (млн грн)
	Проект 1	Проект 2	Проект 3	Проект 4	
1	9	6	8	12	30
2	5	8	7	9	25
3	10	7	11	8	28
Очікуваний прибуток за три роки (млн грн)	60	45	55	58	

3.15. На підприємстві продукція виготовляється на двох видах обладнання. Попит на продукцію становить 200 одиниць. Витрати на виробництво одиниці продукції (у грн) на обладнанні кожного виду залежить від обсягів такого виробництва і визначається такими співвідношеннями: $4x_1 + 5x_1^2$ – для першого виду обладнання і $2x_2 + 3x_2^2$ – для другого виду обладнання, де x_1 і x_2 – обсяг виробництва продукції відповідно на першому і другому видах обладнання.

Знайти оптимальний план виробництва продукції на кожному виді обладнання, який за умови задоволення попиту потребує найменших витрат.

4. За допомогою одного з математичних пакетів Mathcad, Matlab, Maple, Mathematica, або редактора електронних таблиць MS Excel розв'язати задачі з прикладів 5.1-5.7 та задачі 3.1-3.15 (див. §40). Зробити аналіз одержаних результатів і, у разі необхідності, внести зміни до вхідних даних.

5. Побудувати математичні моделі задач у загальному вигляді:

5.1. У двох населених пунктах розташовані цегляні заводи, на які з двох кар'єрів постачається пісок. Потреба заводів у піску відома і не перевищує продуктивності кар'єрів, яка теж відома. Крім того, відома вартість перевезення однієї тони піску з кожного кар'єру до кожного заводу. Спланувати постачання заводів піском так, щоб загальні витрати на перевезення піску були найменшими.

5.2. На початку робочого дня з автобусного парку на лінію виходить x_1 автобусів, через годину до них приєднується x_2 автобусів, а ще через годину – додатково x_3 автобусів. Кожен автобус працює на маршруті безперервно 8 годин. Мінімальна необхідна кількість автобусів на лінії в j-у годину робочого дня дорівнює b_j, $j = \overline{1,10}$. Перевищення цієї кількості призводить до перевитрат протягом j-ї години у розмірі c_j грн на кожен додатковий автобус. Визначити кількість автобусів x_1, x_2, x_3, які повинні виходити на маршрут у перші години робочого дня, так, щоб перевитрати протягом всього робочого дня були мінімальними.

5.3. Взуттєва фабрика виготовляє n різних моделей взуття і використовує при цьому m видів шкіряних заготовок. На виготовлення однієї пари j-ої моделі необхідно a_{ij} м^2 шкіряних заготовок i-го виду, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, а всього може їх бути використано b_i м^2, $i = \overline{1,m}$. Витрати на виробництво однієї пари взуття j-ої моделі становлять c_j грн, а прибуток від реалізації дорівнює d_j грн, $j = \overline{1,n}$. Передбачається, що підприємство може виготовити різні моделі у будь-яких співвідношеннях. Знайти план випуску взуття різних моделей, який забезпечує максимальну рентабельність взуттєвої фабрики.

Примітка. Рентабельність виробництва визначається як відношення прибутку від реалізації виготовленої продукції до загальних витрат на виробництво всієї продукції.

6. Сформулювати реальну економічну, виробничу або технічну оптимізаційну задачу і побудувати її математичну модель. Розв'язати сформульовану задачу за допомогою одного з математичних пакетів Mathcad, Matlab, Maple, Mathematica, або редактора електронних таблиць MS Excel. Зробити аналіз одержаних результатів і, у разі необхідності, внести зміни до вхідних даних.

§6. Основні класи екстремальних задач

Проаналізуємо властивості цільових функцій та способи подання і властивості допустимих множин деяких формальних моделей екстремальних задач, які наведено у попередньому параграфі. Зокрема, в задачі про оптимальний план виробництва продукції, транспортній задачі, задачах про сплав, призначення, розкрій матеріалу, завантаження обладнання цільові функції лінійні, а в задачах Евкліда, Аполлонія, Кеплера, про собівартість, пошуку – нелінійні диференційовні, або не всюди диференційовні (задача Штейнера). На змінні або не накладалися обмеження (задача Штейнера), або накладалися (у всіх інших задачах). При цьому обмеження були у вигляді нерівностей чи рівнянь (лінійних і нелінійних) або їх систем, а також включень (задачі Евкліда, Аполлонія). Зауважимо, що поділ обмежень на рівності або нерівності досить умовний, оскільки рівність виду $g(x) = 0$ еквівалентна двом нерівностям $g(x) \le 0$ і $-g(x) \le 0$, а нерівність виду $g(x) \le 0$ можна замінити рівністю $g(x) + t = 0$ і включенням $t \in R_+^1 = \{t \in R^1 | t \ge 0\}$. Проте при дослідженні конкретних задач, а також при розгляді теоретичних питань поділ обмежень на окремі типи має певний сенс.

Навіть неповний аналіз формальних моделей екстремальних задач показує, що класифікацію задач оптимізації можна проводити за кількома ознаками в залежності від типу і властивостей цільової функції, способів подання і властивостей допустимої множини.

Розглянемо найбільш важливі для теорії і практики класи екстремальних задач.

1. Без урахування специфіки цільової функції $f(x)$ задачі оптимізації поділяються на два класи: задачі безумовної оптимізації та задачі умовної оптимізації.

Задача

$$f(x) \to \min(\max),\ x \in X \qquad (6.1)$$

називається *задачею безумовної мінімізації* (*максимізації*), якщо $X = R^n$, тобто якщо задача має вигляд

$$f(x) \to \min(\max),\ x \in R^n.$$

Серед чисельних методів безумовної оптимізації найбільш розповсюдженими є: метод покоординатного спуску, симплексний метод, градієнтні методи, метод Ньютона та його модифікації, метод спряжених градієнтів.

Задача (6.1) називається *задачею умовної мінімізації* (*максимізації*), якщо X – власна підмножина простору R^n, тобто X – непорожня підмножина R^n, яка не співпадає з R^n.

Для розв'язування задач умовної оптимізації використовують, зокрема, метод проекції градієнта, метод умовного градієнта, метод можливих напрямів, метод штрафних функцій.

У курсі математичного аналізу вивчається так звана *класична задача на умовний екстремум*:

задача (6.1), в якій допустима множина X визначається системою скінченної кількості рівнянь

$$X = \{x \in R^n \mid g_i(x) = 0, i = \overline{1,m}\}.$$

Цю задачу часто записують у вигляді

$$f(x) \to \min(\max), \tag{6.2}$$

$$g_i(x) = 0, i = \overline{1,m}, \tag{6.3}$$

тобто явно вказують не саму допустиму множину, а систему рівнянь, яка її визначає.

Як правило, для розв'язування задачі (6.2), (6.3), за умов, що всі функції $f(x)$, $g_i(x)$ $(i = \overline{1,k})$ і всі частинні похідні першого порядку цих функцій неперервні в деякому паралелепіпеді P, використовується *метод множників Лагранжа*.

Одним з найважливіших класів задач умовної оптимізації, який є узагальненням класичної задачі на умовний екстремум, є задачі *математичного програмування*:

задача (6.1), в якій допустима множина X має вигляд

$$X = \{x \in P \mid g_i(x) \le 0, i = \overline{1,k}; g_i(x) \ge 0, i = \overline{k+1,m}; g_i(x) = 0, i = \overline{m+1,s}\},$$

тобто визначається системою скінченної кількості нерівностей і рівнянь, які розглядаються, взагалі кажучи, на деякій множині $P \subset R^n$. Задачу математичного програмування можна записати і в іншому вигляді

$$f(x) \to \min(\max), \tag{6.4}$$

$$g_i(x) \le 0, i = \overline{1,k}, \tag{6.5}$$

$$g_i(x) \ge 0, i = \overline{k+1,m}, \tag{6.6}$$

$$g_i(x) = 0, i = \overline{m+1,s}, \tag{6.7}$$

$$x \in P. \tag{6.8}$$

Умови типу $g_i(x) \le 0$, $g_i(x) \ge 0$ називаються *обмеженнями-нерівностями*, умови типу $g_i(x) = 0$ – *обмеженнями-рівностями*, а обидва ці типи умов – *функціональними обмеженнями*, умова $x \in P$ називається *прямим обмеженням*.

Деякі з перелічених типів умов при формалізації конкретних задач можуть бути відсутніми. При цьому те чи інше подання задачі обумовлюється метою дослідження. Однак слід зауважити, що чим детальніше описані функціональні обмеження задачі, тим краще можна вивчити її властивості.

Прямі обмеження задачі, як правило, мають досить «просту» структуру. Наприклад, це можуть бути такі множини:

а) координатний паралелепіпед

$$P = \{x \in R^n \mid a_j \le x_j \le b_j, j = \overline{1,n}\},$$

при цьому не виключена можливість, що при деяких j $a_j = -\infty$ або $b_j = +\infty$;

б) $P = R^n_+$ – невід'ємний ортант у просторі R^n, тобто $a_j = 0$, $b_j = +\infty$ при будь-яких j ($j = \overline{1,n}$);

в) $P = R^n$ – евклідовий n-вимірний простір.

У залежності від специфіки цільової функції $f(x)$ та функцій $g_i(x)$ ($i = \overline{1,s}$) в (6.4)-(6.8), серед задач математичного програмування виділяють відповідні класи задач.

Якщо в задачі математичного програмування (6.4)-(6.8) цільова функція лінійна і допустима множина визначається системою лінійних рівнянь і нерівностей, то вона називається *задачею лінійного програмування*, тобто

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min(\max), \tag{6.9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,k}, \tag{6.10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, i = \overline{k+1,m}, \tag{6.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{m+1,s}, \tag{6.12}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,r}, r \le n, \tag{6.13}$$

де $c_j \in R^1$, $a_{ij} \in R^1$, $b_i \in R^1$ $(i = \overline{1,s}, j = \overline{1,n})$ – задані числа.

Задача лінійного програмування виду (6.9)-(6.13) називається *загальною*.

Задачі лінійного програмування виду

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{6.14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, i = \overline{1,s} \tag{6.15}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,n}, \tag{6.16}$$

і

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \to \max, \qquad (6.17)$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le b_i,\ i=\overline{1,s}, \qquad (6.18)$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}, \qquad (6.19)$$

називають *стандартними задачами*.

Задачі (6.14)-(6.16) і (6.17)-(6.19) називають *симетричними* задачами лінійного програмування.

Якщо в задачі лінійного програмування є лише обмеження-рівності, тобто

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \to \min(\max), \qquad (6.20)$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j = b_i,\ i=\overline{1,s}, \qquad (6.21)$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}, \qquad (6.22)$$

то вона називається *канонічною* задачею.

Зауважимо, що реальні задачі лінійного програмування можуть містити обмеження виду $d_j \le x_j \le D_j$ для всіх або деяких $j\ (j=\overline{1,n})$.

Основним методом розв'язування задач цього класу є *симплекс-метод*, ідея якого полягає в тому, щоб спочатку знайти якусь вершину многогранника *X*, а потім від неї перейти до іншої вершини, в якій значення функції не більше для задачі мінімізації (не менше для задачі максимізації), ніж у попередній, і таким чином за скінченну кількість кроків буде знайдено розв'язок задачі лінійного програмування або з'ясовано, що вона не має розв'язків. Дослідженню задач лінійного програмування і методам їх розв'язування присвячена значна кількість робіт (див., наприклад, [1], [6], [18], [23], [29], [36], [38], [51], [57], [65], [96], [99], [106], [108], [113], [115]).

Якщо цільова функція $f(x)$ чи функції $g_i(x)$ в задачі (6.4)-(6.8) нелінійні, то задача математичного програмування називається задачею *нелінійного програмування*.

Серед задач нелінійного програмування найбільш важливими і добре вивченими є задачі квадратичного і опуклого програмування.

Задача мінімізації (максимізації) квадратичної функції виду

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_ix_j+\sum_{j=1}^{n}d_jx_j, \qquad (6.23)$$

на множині $X \subset R^n$, яка визначається системою лінійних рівнянь і нерівностей, де $C=(c_{ij})_{i=\overline{1,n},\,j=\overline{1,n}}$ – симетрична невід'ємно (недодатно) визначена матриця розмірності $n\times n$ з дійсними елементами, $d_j \in R^1$, $j=\overline{1,n}$, називається задачею *квадратичного програмування*.

Задача мінімізації (6.4)-(6.8) називається *задачею опуклого програмування*, якщо функції $f(x)$, $g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, опуклі, функції $g_i(x)$, $i=\overline{m+1,s}$ лінійні, а множина *P* опукла.

Задача мінімізації (6.1) називається *задачею опуклої мінімізації*, якщо функція $f(x)$ опукла, а *X* – довільна опукла множина. Задача опуклої мінімізації має таку важливу особливість: *будь-яка точка локального мінімуму є водночас і точкою глобального мінімуму*. Ця властивість має велике значення не лише для теорії, але й для методів оптимізації.

Зауважимо, що задачі лінійного і квадратичного програмування є окремими випадками задачі опуклого програмування.

Дослідженню різних класів задач нелінійного програмування і методам їх розв'язування присвячені, наприклад, роботи [1], [5], [7], [10], [17]-[19], [22], [31], [35], [36], [38], [48], [50]-[53], [57], [61], [68], [73]-[75], [81], [82], [89], [93], [98], [99], [104], [107], [113], [117]-[120], [123]-[127], [129]-[133], [136].

Важливою властивістю цільової функції в задачах оптимізації є її диференційовність. Якщо в задачі (6.1) цільова функція $f(x)$ диференційовна на множині X, то вона називається задачею *диференційовної* або *гладкої оптимізації*, в протилежному випадку, тобто коли існують точки, в яких цільова функція недиференційовна, – задачею *недиференційовної* або *негладкої* оптимізації.

Прикладами задач гладкої оптимізації є задачі лінійного та квадратичного програмування.

Оскільки в загальному випадку опукла функція не всюди диференційовна, тоді й загальна задача опуклої мінімізації є задачею негладкої оптимізації. Для розв'язування задач негладкої безумовної опуклої мінімізації використовують, зокрема, субградієнтні і ε-субградієнтні методи, а для задач негладкої умовної опуклої мінімізації – метод проекції субградієнта.

Останнім часом теорія негладкої оптимізації швидко розвивається, досліджено досить широкі класи функцій, які є негладкими, наприклад, опукло-вгнуті функції ([31], [89], [100]), квазіопуклі функції ([7], [44], [45], [55], [117], [124], [130]), квазідиференційовні в різних розуміннях функції ([31], [33], [58], [86]), слабо опуклі [76], напівгладкі ([132], [133]), узагальнено диференційовні функції [71] та інші.

Серед прикладних задач оптимізації важливе місце займають також задачі дискретного, цілочислового, дробово-лінійного, параметричного і стохастичного програмування.

Задача (6.1) називається задачею *дискретної мінімізації* (*максимізації*), якщо або допустима множина $X \subset R^n$ – дискретна, або множини значень деяких координат допустимих точок $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ дискретні. При цьому *дискретною* називається множина, яка містить лише ізольовані точки, тобто точки, досить малі околи яких не містять інших точок цієї множини. Дискретна множина у евклідовому просторі скінченна або зчисленна.

Часто допустима множина задачі дискретної оптимізації має вигляд

$$X = \{x \in D \mid g_i(x) \le 0, i = \overline{1,k};\ g_i(x) = 0, i = \overline{k+1,m}\}, \qquad (6.24)$$

де $D = D_1 \times \ldots \times D_n$, при цьому $D_j \subseteq Z$ для $j \in J$, J – деяка підмножина множини $\{1,2,\ldots,n\}$, Z – множина цілих чисел, і $D_j = R^1$ для $j \notin J$.

Задача (6.1) з допустимою множиною X у вигляді (6.24) називається задачею *дискретного програмування*, а коли всі невідомі змінні x_j $(j = 1,\ldots,n)$ можуть набувати лише цілочислових значень – *задачею цілочислового програмування.* Необхідність використання умов цілочисельності обумовлена, зокрема, тим, що в практичних задачах багато ресурсів виробництва можуть бути визначені кількісно лише цілими числами (літаки, машини, верстати і т.п).

Серед загальних методів розв'язування задач дискретного програмування можна виділити три основні: *метод відтинання, метод гілок і меж, метод динамічного програмування.* Дослідженню різних класів задач цілочислового програмування, дискретної оптимізації та методам їх розв'язування присвячені, наприклад, роботи [4], [11], [12], [15], [64], [65], [84], [94], [98], [99].

Задача мінімізації (максимізації) цільової функції, що є відношенням двох лінійних функцій, тобто

$$f(x) = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j},$$

де $c_j \in R^1$, $d_j \in R^1$, $j = \overline{1,n}$, $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \ne 0$, на допустимій множині X, яка визначається так само, як і в задачі лінійного програмування, називається *задачею дробово-лінійного програмування.*

Для розв'язування задач цього класу, як правило, використовується симплекс-метод, оскільки їх можна звести до задачі лінійного програмування (див., наприклад, [1], [64]).

Якщо цільова функція задачі математичного програмування або функції, які визначають допустиму множину, залежать від деяких параметрів, то таку задачу називають задачею *параметричного програмування* (див., наприклад, [38], [65], [99]).

Якщо цільова функція задачі математичного програмування або функції, які визначають допустиму множину, залежать від деяких випадкових величин, то таку задачу називають *задачею стохастичного програмування.* Такі задачі виникають при плануванні у ситуаціях з невизначеністю і ризиком. Основні особливості цього класу задач пов'язані з відсутністю повної інформації про цільову функцію і функції обмежень, про їхні похідні, з негладким характером цих функцій.

Прикладом формалізації задачі стохастичного програмування є така задача:

знайти мінімум (максимум) функції

$$f(x,\omega)$$

при обмеженнях

$$g_i(x,\omega) \le 0, i = \overline{1,m},$$

$$x \in X,$$

де X – деяка підмножина простору R^n, $\omega \in \Omega$ – елемент деякої множини елементарних подій Ω, на якій задано ймовірнісний простір (Ω, Σ, P), де Σ – σ-алгебра підмножин множини Ω, тобто сукупність подій, яка містить вірогідну подію Ω, неможливу подію $\varnothing$ і замкнена відносно операцій переходу до протилежної події, зчисленного об'єднання і зчисленного перетину множин з Σ, P – ймовірнісна міра на вимірному просторі (Ω, Σ).

Для розв'язування задач стохастичного програмування використовуються

– *непрямі* методи, які грунтуються, в основному, на застосуванні необхідних умов екстремуму, на заміні стохастичної екстремальної задачі детермінованим аналогом – задачею нелінійного програмування, розв'язок якої можна отримати відомими методами;

– *прямі* методи: *метод стохастичної апроксимації*, який зовнішньо нагадує класичні процедури пошуку кореня або екстремуму, *метод стохастичних квазіградієнтів* (*стохастичний квазіградієнт* – випадковий напрям, який є статистичною оцінкою градієнтів або їхніх аналогів для негладких функцій).

Проблемам стохастичного програмування присвячено значну кількість робіт (див., наприклад, [16], [28], [29], [37], [70], [74], [77], [114], [116]).

2. *Задача класичного варіаційного числення* полягає в знаходженні мінімуму функціоналу виду

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \qquad (6.25)$$

при обмеженнях:

$$M_i(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0,\ i = \overline{1,k}, \qquad (6.26)$$

$$\Psi_j(x(t_0), x(t_1)) = 0,\ j = \overline{1,s}, \qquad (6.27)$$

де

$x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, – вектор-функція з простору $C^1([t_0, t_1], R^n)$ неперервно-диференційовних *n*-вимірних вектор-функцій;

$\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), ..., \dot{x}_n(t))$, при цьому $\dot{x}_i(t) = \dfrac{dx_i(t)}{dt}$, $(i = \overline{1,n})$;

$L(t, x(t), \dot{x}(t))$, $M_i(t, x(t), \dot{x}(t))$ $(i = \overline{1,k})$ – диференційовні функції від $2n+1$ змінної;

$\Psi_j(x(t_0), x(t_1))$, $(j = \overline{1,s})$ – диференційовні функції від $2n$ змінних.

Рівняння (6.26) називаються *диференціальними зв'язками*, а умови (6.27) – *граничними умовами*.

Задача мінімізації функціонала (6.25) при обмеженнях (6.26), (6.27) називається *задачею Лагранжа*.

Задача

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \min, x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$$

називається *найпростішою векторною задачею класичного варіаційного числення*, а при $n = 1$ – *найпростішою задачею класичного варіаційного числення*.

Зауважимо, що функціонал (6.25) може мати інший вигляд, а тому існують інші задачі варіаційного числення (див., наприклад, [3], [59]). Нагадаємо, що *функціонал* – це відображення деякого векторного простору X в R^1.

Методи мінімізації функціоналу виду (6.25) без обмежень дещо схожі на класичні методи дослідження на екстремум функцій багатьох змінних. В них використовуються необхідні умови екстремуму, які в загальному випадку являють собою систему нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку (рівняння Ейлера). Функції, які задовольняють необхідні умови екстремуму, називаються *екстремалями*. За змістом термін «екстремаль» подібний до терміну «стаціонарна точка» в математичному аналізі.

При розв'язуванні задач варіаційного числення використовують метод невизначених множників Лагранжа, а також наближені методи, за якими знаходять розв'язок з наперед заданою точністю. Серед наближених методів найбільш відомими є методи Рітца, Гальоркіна, анторовича.

3. Одним із найпоширеніших класів екстремальних задач, які мають вагоме практичне значення, є *задачі оптимального управління.* Вони пов'язані, наприклад, з механікою польотів космічних апаратів, з роботою електроприводів, хімічних і ядерних реакторів, з питаннями віброзахисту і амортизації, математичною економікою тощо.

Розглянемо постановку однієї з найпростіших задач цього класу.

Нехай рух об'єкту, що підлягає управлінню, описується системою диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = f(x, u, t), \qquad (6.28)$$

де $x = (x_1, ..., x_n)$ – вектор координат об'єкту, які називають також *фазовими координатами*, $f = (f_1, ..., f_n)$ – задана вектор-функція, $u = (u_1, ..., u_m)$ – *вектор управління*, або просто *управління*, t – незалежна змінна (час).

У рівняннях (6.28) вектори x, u є функціями від часу t, при цьому $t \in [t_0, t_1]$, де $[t_0, t_1]$ – проміжок часу, на якому відбувається управління об'єктом. На управління, як правило, накладається умова

$$u(t) \in U(t),\ t \in [t_0, t_1], \qquad (6.29)$$

де $U(t)$ – задана множина в R^m при кожному $t \in [t_0, t_1]$.

Управлінням називають кусково-неперервну на відрізку $[t_0, t_1]$ m-вимірну вектор-функцію u (тобто функцію, яка має скінченну кількість точок розриву першого роду), неперервну справа в точках розриву і неперервну в точці t_1. Управління називається *допустимим*, якщо воно задовольняє обмеження (6.29).

Слід зауважити, що обмежитися розглядом тільки неперервних управлінь виявляється неможливим, оскільки за їх допомогою важко моделювати моменти перемикання управлінь, наприклад, для вмикання або вимикання двигунів, відокремлення ступенів ракети, при повертанні керма і т.д.

Якщо вектор-функція $x(t)$ задовольняє систему (6.28) при заданому управлінні $u(t)$ на $[t_0, t_1]$, то вона називається *фазовою траєкторією*.

Говорять, що допустиме управління $u(t)$ на $[t_0, t_1]$ переводить фазову точку з положення x^0 в положення x^1, якщо відповідний йому розв'язок $x(t)$ системи рівнянь (6.28), який задовольняє початкову умову $x(t_0) = x^0$, визначений на усьому відрізку $[t_0, t_1]$ і проходить в момент часу t_1 через точку x^1, тобто задовольняє також кінцеву умову $x(t_1) = x^1$.

Задача оптимального управління полягає в тому, щоб серед усіх допустимих управлінь $u = u(t)$, що переводять фазову точку із положення x^0 в положення x^1, знайти таке управління $u^*(t)$ і відповідну йому фазову траєкторію $x^*(t)$, що є розв'язком системи рівнянь (6.28) з початковими умовами $x(t_0) = x^0$, які мінімізують функціонал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)\, dt. \tag{6.30}$$

Ця задача називається *задачею Лагранжа*. Управління $u^*(t)$, яке є розв'язком поставленої задачі, називається *оптимальним управлінням*, яке відповідає переходу об'єкта з положення x^0 в положення x^1, а відповідна фазова траєкторія $x^*(t)$ – *оптимальною траєкторією*.

Важливим частинним випадком поставленої вище екстремальної задачі є випадок, коли $f_0(x(t), u(t), t) = 1$. Тоді функціонал (6.30) має вигляд:

$$I = t_1 - t_0,$$

і оптимальність управління $u(t)$ означає, що час переходу об'єкта з положення x^0 в положення x^1 повинен бути найменшим. Цю задачу називають задачею про *оптимальну швидкодію*.

В основу багатьох методів розв'язування задач оптимального управління покладено *принцип максимуму Л. С. Понтрягіна* (див., наприклад, [83]), який визначає необхідні умови оптимальності для цього класу задач. За допомогою цього принципу, використовуючи множники Лагранжа, задачу оптимального управління можна звести до деякої спеціальної крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь.

Одним із методів розв'язування цієї задачі є також метод *динамічного програмування* (див., наприклад [11]), що грунтується на *принципові оптимальності Р. Беллмана*, який може бути сформульований так: *оптимальне управління в будь-який момент часу не залежить від попередніх станів системи і визначається тільки метою управління і станом системи в даний момент*.

Відомості про теорію і методи розв'язування задач оптимального управління можна знайти, наприклад, в [3], [14], [15], [34], [35], [67], [68], [72], [102].

Запитання для самоконтролю

1. Яка задача називається задачею безумовної (умовної) мінімізації?
2. Що являє собою класична задача на умовний екстремум і які методи її розв'язування існують?
3. Що являє собою задача математичного програмування?
4. Які існують основні класи задач математичного програмування?
5. Які існують основні класи задач лінійного програмування?
6. Які задачі серед задач нелінійного програмування є найбільш вивченими?
7. Яку особливість має задача опуклої оптимізації?
8. Які задачі називають задачами гладкої (негладкої) оптимізації?
9. Які функції, крім опуклих і вгнутих, відносяться до негладких функцій?
10. Що являє собою задача дробово-лінійного програмування?
11. Які задачі називають задачами дискретного програмування і які основні методи їх розв'язування?
12. Які задачі називають задачами параметричного програмування?
13. Що являють собою задачі стохастичного програмування і які основні методи їх розв'язування?
14. Що являють собою задачі варіаційного числення?
15. Що являють собою задачі оптимального управління?

Вправи для самостійного виконання

1. Визначати до якого класу екстремальних задач належать задачі, наведені у прикладах §5.
2. Для задач із завдань 3 і 5 §5 визначати до якого класу екстремальних задач вони належать.

§7. Умови існування розв'язків екстремальних задач

Перш ніж приступати до розв'язування вже формалізованої екстремальної задачі, необхідно визначити умови існування розв'язку цієї задачі при заданих обмеженнях.

1. Спочатку розглянемо питання про існування розв'язку екстремальної задачі для задачі мінімізації функції однієї змінної $f(x)$ на деякій множині $X \subseteq R^1$:

$$f(x) \to \min, \; x \in X. \qquad (7.1)$$

Припустимо, що X непорожня множина і містить більше, ніж одну точку, оскільки тільки в цьому випадку задача (7.1) має сенс.

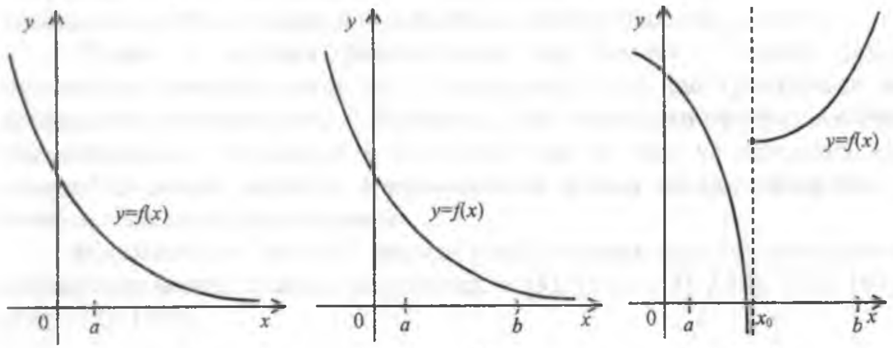
Якщо множина X скінченна, то розв'язок задачі існує і може бути знайдений методом послідовного перебору всіх точок множини X і визначення серед них точки x^*, яка задовольняє умову: $f(x^*) \le f(x)$ для будь-яких $x \in X$.

Якщо множина X нескінченна, тоді задача (7.1) може не мати розв'язку, тобто $\underset{x\in X}{Arg\min} f(x) = \varnothing$.

Нехай $f(x)$ – монотонно спадна функція на необмеженій множині $X = \{x \in R^1 | x \ge a\}$, тобто $f(x_1) > f(x_2)$ для будь-яких x_1, x_2 з X таких, що $x_1 < x_2$ (рис.7.1 а), тоді точки мінімуму цієї функції на множині X не існує.

Нехай $f(x)$ – монотонно спадна функція на незамкненій множині $X = \{x \in R^1 \,|\, x \in [a;b)\}$ (рис.7.1 б).

Оскільки монотонно спадна функція не досягає своєї нижньої межі на незамкненій множині $[a;b)$, то не існує точки $x^* \in X$, яка задовольняє умову: $f(x^*) \le f(x)$ для будь-яких $x \in X$.



а) б) в)

Рис. 7.1.

З наведених прикладів видно, що якщо множина X не є замкненою і обмеженою, то задача (7.1) може не мати розв'язку.

Нехай функція $f(x)$ на замкненій і обмеженій множині

$$X = \{x \in R^1 \,|\, x \in [a;b]\},$$

має точку розриву другого роду $x_0 \in X$, причому $f(x) \to -\infty$ при $x \to x_0 - 0$ (рис. 7.1 в) чи $x \to x_0 + 0$. У даному випадку точки мінімуму функції $f(x)$ на множині X також не існує.

Отже, екстремальна задача (7.1) не завжди має розв'язок, але відома теорема Вейєрштрасса в багатьох випадках гарантує існування розв'язку цієї задачі.

Т е о р е м а 7.1. *Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на замкненому проміжку $[a;b]$, то вона досягає на цьому проміжку своїх найменшого і найбільшого значень.*

Доведення цієї теореми можна знайти, наприклад, в [60, т. I] і [105].

З теореми Вейєрштрасса випливає такий наслідок.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на всій числовій прямій. Тоді, якщо

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$$

то розв'язок задачі без обмежень:

$$f(x) \to \min, \;\; x \in R^1$$

існує.

2. Перш ніж розглянути умови існування розв'язку екстремальної задачі для функції багатьох змінних, наведемо необхідні означення і теореми.

О з н а ч е н н я 7.1. *Метричним простором* називається довільна множина X деяких елементів (їх називають також точками) така, що для будь-яких двох елементів $x \in X, y \in X$ визначене дійсне число $\rho(x,y)$ – *відстань* між точками x і y, яке задовольняє такі умови (*аксіоми метрики*):

1) $\rho(x,y) \ge 0$, причому $\rho(x,y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = y$;

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (*аксіома симетрії*);

3) $\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$ для довільних x, y, z з X (*аксіома трикутника*).

Наведемо приклади метричних просторів.

П р и к л а д 7.1. Множина дійсних чисел з відстанню

$$\rho(x,y) = |x - y|$$

є метричним простором, який позначається R або R^1.

П р и к л а д 7.2. Множина впорядкованих наборів з n дійсних чисел, тобто множина n-вимірних векторів (точок) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з дійсними координатами $x_i\ (i=\overline{1,n})$, в якій відстань між двома точками $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ і $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ визначається за формулою

$$\rho(x,y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\dots+(y_n-x_n)^2},$$

є метричним простором. Цей простір називається n-вимірним *арифметичним евклідовим простором* і позначається R^n.

Відстань $\rho(x,y)$ в R^n можна також виразити через евклідову норму.

Означення 7.2. *Нормою* вектора x з R^n називається число

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2},$$

при цьому мають місце такі властивості:

1) $\|x\|\geq 0$ для будь-яких $x\in R^n$ і $\|x\|=0$ тільки тоді, коли $x=O_n$, де $O_n=(0,0,\dots,0)$ – нуль-вектор у просторі R^n;

2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$, для $\forall\alpha\in R^1$ (*однорідність норми*);

3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (*нерівність трикутника*).

Відстань між двома точками x і y в просторі R^n через норму визначається за формулою

$$\rho(x,y)=\|y-x\|.$$

Приклад 7.3. Множина n-вимірних векторів з відстанню

$$\rho_0(x,y)=\max_{1\leq i\leq n}|y_i-x_i|$$

є метричним простором і позначається R_0^n.

Приклад 7.4. Множина n-вимірних векторів з відстанню

$$\rho_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|y_i-x_i|$$

є метричним простором і позначається R_1^n.

У прикладах 7.2, 7.3, 7.4 розглядалася одна й та сама множина. Вводячи по-різному відстань між елементами множини, одержуємо три різні метричні простори.

Приклад 7.5. Множина всіх неперервних дійсних функцій, визначених на відрізку $[a;b]$ з відстанню

$$\rho(f,g)=\max_{a\leq x\leq b}|g(x)-f(x)|$$

є метричним простором і позначається $C[a;b]$. Цей простір називається простором *неперервних функцій з чебишовською метрикою*.

Означення 7.3. Нехай точка $O\in R^n$ і r – деяке додатне число. Множина точок

$$\overline{S}(O,r)=\{x\in R^n|\rho(x,O)\leq r\}$$

називається n-вимірною *замкненою кулею* радіуса r з центром в точці O, а множина точок

$$S(O,r)=\{x\in R^n\,|\,\rho(x,O)<r\},$$

називається n-вимірною *відкритою кулею* радіуса r з центром в точці O.

Відкрита куля радіуса $\varepsilon>0$ з центром в точці O називається ε-*околом* точки O.

Нехай X – деяка множина точок простору R^n.

Означення 7.4. Точка x називається *внутрішньою точкою* множини X, якщо існує ε-окіл точки x, який повністю лежить у множині X.

Множина всіх внутрішніх точок множини X утворює *внутрішність* цієї множини і позначається int X:

$$\operatorname{int}X=\{x\in R^n|S(x,\varepsilon)\subset X\ \ \forall\varepsilon>0\}.$$

Означення 7.5. Множина X називається *відкритою*, якщо всі її точки внутрішні, тобто якщо $X=\operatorname{int}X$.

Означення 7.6. Точка x називається *граничною точкою* множини X, якщо будь-який ε–окіл точки x містить нескінченну множину точок з множини X.

Множина всіх граничних точок множини X утворює *замикання* цієї множини і позначається $\overline{X}$.

Множина X називається *замкненою*, якщо вона містить всі свої граничні точки, тобто якщо $X=\overline{X}$.

Означення 7.7. Точка $x\in X$ називається *ізольованою* точкою цієї множини, якщо існує ε-окіл точки x, який не містить жодної точки множини X, відмінної від точки x.

Означення 7.8. Точка x називається *межовою* точкою множини X, якщо будь-який ε-окіл точки x містить як точки множини X, так і точки, які їй не належать. Множина всіх межових точок множини X називається *межею* цієї множини і позначається FrX.

Зауважимо, що якщо множина X не містить ізольованих точок, то

$$\mathrm{Fr}X=\overline{X}\setminus\operatorname{int}X.$$

З означень 7.6 і 7.8 випливає, що межова і гранична точки множини можуть як належати цій множині, так і не належати їй.

Означення 7.9. Множина X називається *обмеженою*, якщо існує куля скінченного радіуса, що містить всі точки множини X.

Використовуючи поняття норми в R^n, можна дати таке означення обмеженої множини: множина X називається *обмеженою*, якщо існує таке дійсне число $0\leq K$, що $\|x\|<K$ для будь-якого $x\in X$.

Можна показати, що для двох обмежених множин їх перетин, об'єднання, сума, різниця є також обмеженою множиною. Більше того, перетин двох множин, серед яких тільки одна обмежена, є обмеженою множиною.

Означення 7.10. Нехай кожному натуральному числу k поставлено у відповідність точку $x^{(k)} \in R^n$ (не обов'язково різні для різних k). Тоді множина точок простору R^n $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}, ...$ називається *послідовністю точок простору* R^n і позначається $\{x^{(k)}\}$.

Послідовність точок $\{y^{(m)}\}$ називається *підпослідовністю послідовності* $\{x^{(k)}\}$, якщо для будь-якого m існує таке натуральне число k_m, що $y^{(m)} = x^{(k_m)}$, причому $k_{m_1} < k_{m_2}$ тоді і тільки тоді, коли $m_1 < m_2$. Підпослідовність $\{y^{(m)}\}$ в цьому випадку позначається також $\{x^{(k_m)}\}$.

Означення 7.11. Точка x називається *границею послідовності точок* $\{x^{(k)}\}$, якщо

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x^{(k)}, x) = 0.$$

При цьому пишуть $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ або $x^{(k)} \to x$ при $k \to \infty$.

Означення 7.12. Послідовність точок $\{x^{(k)}\}$, яка має границю x, називається *збіжною* до точки x (або просто збіжною).

Послідовність точок $\{x^{(k)}\}$, яка не є збіжною, називається *розбіжною*.

Теорема 7.2. *Для того щоб послідовність точок* $\{x^{(k)}\}$, *де* $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}) \in R^n$, $k = 1, 2, ...$, *збігалась до точки* $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, *необхідно і достатньо, щоб* $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ *для будь-якого* $i = \overline{1,n}$.

Зауваження. Можна показати, що з теореми 7.2 і властивостей границь числових послідовностей випливає, що якщо послідовність точок $\{x^{(k)}\} \subset R^n$, $k = 1, 2, ...$, має границю, то ця границя єдина, і що будь-яка підпослідовність збіжної послідовності збігається до тієї ж границі, що й вся послідовність.

Означення 7.13. Границя будь-якої збіжної підпослідовності даної послідовності називається її *частковою границею*.

Теорема 7.3. *Для того, щоб точка x була граничною для множини X, необхідно і достатньо, щоб в X існувала послідовність попарно різних точок, яка збігається до x.*

Означення 7.14. Послідовність точок $\{x^{(k)}\}$ метричного простору X називається *фундаментальною*, якщо $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$ таке, що $\forall n > N_\varepsilon$ і будь-якого натурального числа m виконується нерівність

$$\rho(x^{(n)}, x^{(n+m)}) < \varepsilon.$$

За *критерієм Коші* для того щоб послідовність $\{x^{(k)}\}$ була збіжною, необхідно і достатньо, щоб вона була фундаментальною.

Означення 7.15. Якщо у метричному просторі X будь-яка фундаментальна послідовність має границю, то цей простір називається *повним*.

Можна показати, що всі метричні простори, розглянуті в прикладах 7.1–7.5, є повними (див., наприклад, [59]).

Будь-яку підмножину X_1 метричного простору X можна розглядати як самостійний метричний простір, якщо для будь-яких двох точок з X_1 зберігати те означення відстані, яке було введене в X.

Лема 7.1. *Будь-яка замкнена підмножина X_1 повного метричного простору X є також повним метричним простором.*

Означення 7.16. Послідовність точок $\{x^{(k)}\}$ простору R^n називається *обмеженою*, якщо існує число $r > 0$ таке, що для будь-якого $k = 1, 2, ...$ $\rho(x^{(k)}, O_n) \le r$, де $O_n = (0, 0, ..., 0)$ – початок координат у просторі R^n.

Теорема 7.4 (Больцано-Вейєрштрасса). *З будь-якої обмеженої послідовності точок простору R^n можна виділити збіжну підпослідовність.*

Означення 7.17. Множина $X \subset R^n$ називається *компактом* або *компактною множиною*, якщо для будь-якої послідовності точок $\{x^{(k)}\} \subset X$ можна виділити збіжну підпослідовність, границя якої належить цій множині.

Відомо, що в евклідовому просторі множина компактна тоді і тільки тоді, коли вона замкнена і обмежена.

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині $X \subset R^n$, $x^{(0)}$ – гранична точка множини X.

Означення 7.18. Число A називається *границею функції* $f(x)$ на множині X при $x \to x^{(0)}$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всіх $x \in X \cap S(x^{(0)}, \delta)$, $x \ne x^{(0)}$.

Цей факт позначається так $\lim\limits_{x\to x^{(0)},\, x\in X} f(x) = A$.

Означення 7.19. Функція $f(x)$, визначена на множині $X \subset R^n$, називається *неперервною* в точці $x^{(0)} \in X$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $|f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon$ для всіх $x \in X \cap S(x^{(0)}, \delta)$.

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині $X \subset R^n$ і $x^{(0)} \in X$ – гранична точка множини X.

Тоді означення 7.18 еквівалентне умові:

$$\lim_{x \to x^{(0)},\, x \in X} f(x) = f(x^{(0)}),$$

тобто границя функції $f(x)$ на множині X при $x \to x^{(0)}$ співпадає із значенням функції в точці $x^{(0)}$.

Можна дати ще одне еквівалентне означення неперервності функції в точці: якщо для будь-якої послідовності точок $\{x^{(k)}\} \to x^{(0)}$ при $k \to +\infty$, де $x^{(k)} \in X$ при будь-яких k, відповідна послідовність значень функції $\{f(x^{(k)})\}$ збігається до $f(x^{(0)})$.

Функція, неперервна в кожній точці множини X, називається *неперервною на цій множині.*

У просторі R^n важливим є поняття скалярного добутку.

О з н а ч е н н я 7.20. *Скалярним добутком* двох векторів $x \in R^n$, $y \in R^n$ називається дійсне число $\langle x, y\rangle$, що визначається за формулою

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j .$$

Скалярний добуток має такі властивості:

1) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ – *комутативність*;

2) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ – *асоціативність* множення на число $\alpha \in R^1$;

3) $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$ – *дистрибутивність*.

З означення скалярного добутку випливає, що

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle},$$

при цьому має місце нерівність Коші-Буняковського:

$$|\langle x, y\rangle| \le \| x \| \cdot \| y \|, \tag{7.2}$$

або

$$\left| \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \right| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2} .$$

Можна показати, що скалярний добуток є неперервною функцією, тобто, якщо $\{x^{(k)}\} \to x$ і $\{y^{(k)}\} \to y$ при $k \to +\infty$, то $\langle x^{(k)}, y^{(k)}\rangle \to \langle x, y\rangle$.

3. Сформулюємо умови існування екстремумів для функції багатьох змінних в n-вимірному евклідовому просторі.

Т е о р е м а 7.5 (Вейєрштрасса). *Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на компактній множині X, то вона досягає на цій множині своїх найменшого і найбільшого значень.*

Доведення цієї теореми можна знайти, наприклад, в [60, т. I].

Н а с л і д о к. *Нехай функція $f(x)$ неперервна при будь-якому $x \in R^n$. Тоді якщо*

$$f(x) \to +\infty \quad \text{при} \quad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \to \infty,$$

тобто $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$, *то розв'язок задачі* $f(x) \to \min,\ x \in R^n$ *існує.*

Умови теореми Вейєрштрасса можна дещо послабити. Для цього розглянемо ще кілька означень і теорем.

О з н а ч е н н я 7.21. Числова послідовність $\{x^{(k)}\}$ називається *обмеженою знизу* (*зверху*), якщо існує дійсне число m (M) таке, що $x^{(k)} \ge m$ ($x^{(k)} \le M$) для всіх $k = 1, 2, \ldots$.

Якщо числова послідовність $\{x^{(k)}\}$ необмежена знизу (зверху), то існує підпослідовність $\{x^{(k_m)}\}$ така, що

$$\lim_{m \to \infty} x^{(k_m)} = -\infty \quad (\lim_{m \to \infty} x^{(k_m)} = +\infty).$$

О з н а ч е н н я 7.22. Найменша часткова границя обмеженої знизу числової послідовності $\{x^{(k)}\}$ називається *нижньою границею* цієї послідовності і позначається $\underline{\lim}_{k \to \infty} x^{(k)}$.

Найбільша часткова границя обмеженої зверху числової послідовності $\{x^{(k)}\}$ називається *верхньою границею* цієї послідовності і позначається $\overline{\lim}_{k \to \infty} x^{(k)}$.

У тому випадку, коли $\{x^{(k)}\}$ необмежена знизу або зверху, то за означенням покладають відповідно

$$\underline{\lim}_{m \to \infty} x^{(k)} = -\infty \quad \text{і} \quad \overline{\lim}_{m \to \infty} x^{(k)} = +\infty.$$

Мають місце наступні твердження (див., наприклад, [60, т. I]).

Т е о р е м а 7.6. *Будь-яка числова послідовність має найменшу і найбільшу часткову границю.*

Т е о р е м а 7.7. *Для того щоб числова послідовність $\{x^{(k)}\}$ мала границю a, тобто мала місце рівність $\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = a$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\underline{\lim}_{k \to \infty} x^{(k)} = \overline{\lim}_{k \to \infty} x^{(k)} = a . \tag{7.3}$$

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині X.

О з н а ч е н н я 7.23. Функція $f(x)$, визначена на множині X, називається *напівнеперервною знизу* в точці $x^{(0)} \in X$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що виконується нерівність

$$f(x) \geq f(x^{(0)}) - \varepsilon \qquad (7.4)$$

для всіх точок $x \in X \bigcap S(x^{(0)}, \delta)$.

О з н а ч е н н я 7.24. Функція $f(x)$, визначена на множині X, називається *напівнеперервною зверху* в точці $x^{(0)} \in X$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що виконується нерівність

$$f(x) \leq f(x^{(0)}) + \varepsilon$$

для всіх точок $x \in X \bigcap S(x^{(0)}, \delta)$.

Можна показати, що функція $f(x)$ напівнеперервна знизу в точці $x^{(0)} \in X$, якщо для будь-якої послідовності $\{x^{(k)}\} \subset X$, яка збігається до $x^{(0)}$, має місце співвідношення

$$f(x^{(0)}) \leq \varliminf_{k \to \infty} f(x^{(k)}). \qquad (7.5)$$

Відповідно функція $f(x)$ напівнеперервна зверху в точці $x^{(0)} \in X$, якщо для будь-якої послідовності $\{x^{(k)}\} \subset X$, яка збігається до $x^{(0)}$, має місце співвідношення

$$f(x^{(0)}) \geq \varlimsup_{k \to \infty} f(x^{(k)}).$$

Функція неперервна в точці $x^{(0)} \in X$ тоді і тільки тоді, коли вона в цій точці напівнеперервна і знизу, і зверху.

Поняття напівнеперервності функції в точці узагальнює поняття неперервності внаслідок відмови від двосторонньої нерівності

$$f(x^{(0)}) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x^{(0)}) + \varepsilon$$

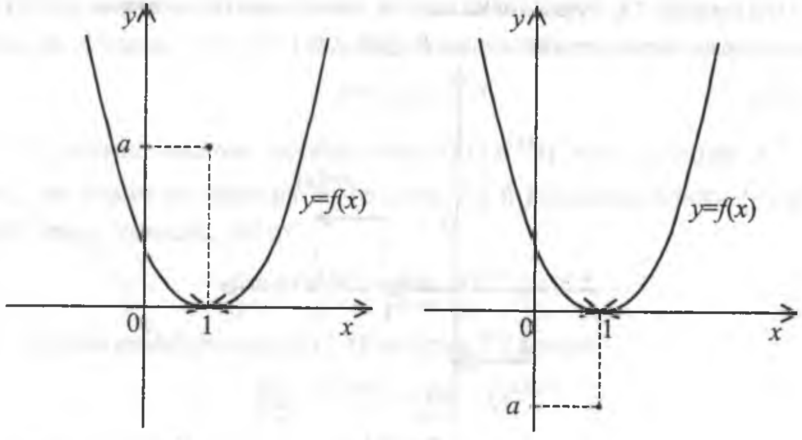
для значень функції в δ–околі точки $x^{(0)} \in X$.

Розглянемо кілька прикладів напівнеперервних функцій та правила їх побудови.

П р и к л а д 7.6. Нехай задана функція

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1), & x \in (-\infty; 1) \bigcup (1; +\infty), \\ a, & x = 1. \end{cases}$$

Тоді при $a > 0$ така функція буде напівнеперервною зверху в точці $x_0 = 1$ (рис. 7.2 а), при $a < 0$ – напівнеперервною знизу в цій точці (рис. 7.2 б), а при $a = 0$ – неперервною на R^1.



а) б)

Рис. 7.2.

П р и к л а д 7.7. Нехай задана функція (рис. 7.3)

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in (-\infty; 0), \\ a, & x = 0, \\ x, & x \in (0; +\infty). \end{cases}$$

Тоді при $a = a_1 \leq 0$ вона буде напівнеперервною знизу в точці $x^{(0)} = 0$, при $a = a_2 \geq 1$ – напівнеперервною зверху в цій же точці, а при $a = a_3 \in (0; 1)$ – ні та, ні друга.

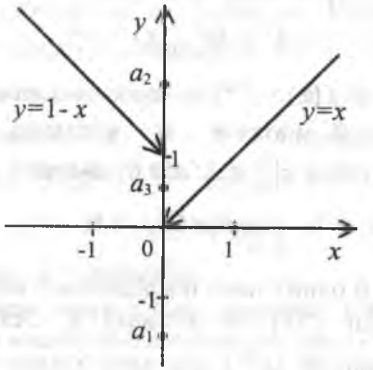


Рис. 7.3.

Функція $f(x)$ називається *напівнеперервною знизу на множині* X, якщо умова (7.4) виконується для будь-якої точки $x \in X$, тобто якщо функція $f(x)$ напівнеперервна знизу в будь-якій точці множини X.

Функція $f(x)$ називається *напівнеперервною зверху на множині* X, якщо функція $f(x)$ напівнеперервна зверху в будь-якій точці множини X.

П р и к л а д 7.8. Функція «ціла частина числа», яка має позначення $f(x)=[x]$, – напівнеперервна зверху в кожній точці з R^1 (рис. 7.4).

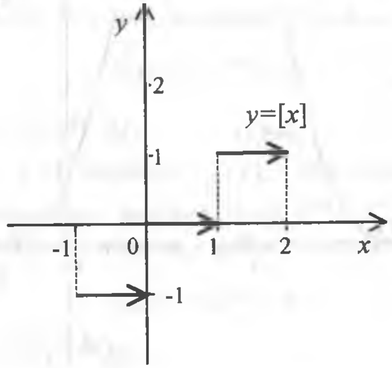


Рис. 7.4.

З а у в а ж е н н я. Можна показати, що:

1) якщо, функція $f(x)$ напівнеперервна знизу, то функція $-f(x)$ напівнеперервна зверху;

2) якщо збільшити (зменшити) значення $f(x)$ неперервної функції в якій-небудь точці $x^{(0)}$ з її області визначення, то одержимо напівнеперервну зверху (знизу) функцію в цій точці.

П р и м і т к а. Ці зауваження надають можливість будувати приклади напівнеперервних функцій.

Т е о р е м а 7.8. *Нехай X – компакт, а функція $f(x)$ визначена, обмежена і напівнеперервна знизу на X. Тоді*

$$f^*=\inf_{x\in X} f(x)>-\infty$$

і множина $X^*=\{x\in X | f(x)=f^*\}$ непорожня і компактна.

Д о в е д е н н я. В множині X візьмемо довільну мінімізуючу послідовність $\{x^{(k)}\}$, тобто $x^{(k)}\in X$ для будь-якого $k=1,2,\ldots$ і

$$\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)})=f^*. \qquad (7.6)$$

Існування хоча б однієї такої послідовності випливає з означення 4.5 нижньої межі функції $f(x)$ на множині X. Оскільки X – компактна множина, то послідовність $\{x^{(k)}\}$ має хоча б одну граничну точку і всі її граничні точки належать множині X. Візьмемо довільну граничну точку $x^*\in X$ цієї послідовності. Тоді існує підпослідовність $\{x^{(k_m)}\}$, яка збігається до точки x^*: $\lim_{m\to\infty} x^{(k_m)}=x^*$. З напівнеперервності знизу функції $f(x)$ в точці x^* для підпослідовності $\{x^{(k_m)}\}$ маємо (див. (7.5))

$$f(x^*)\le \varliminf_{m\to\infty} f(x^{(k_m)}). \qquad (7.7)$$

Згідно умови 1) означення 4.5 нижньої межі f^* функції $f(x)$ на множині X маємо $f^*\le f(x)$ для будь-яких $x\in X$, звідки

$$f^*\le f(x^*). \qquad (7.8)$$

Оскільки числова послідовність $\{f(x^{(k)})\}$ має границю f^* (див. (7.6)), то згідно зауваження до теореми 7.2 її підпослідовність $\{f(x^{(k_m)})\}$ має ту саму границю, тобто

$$\lim_{m\to\infty} f(x^{(k_m)})=\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)})=f^*.$$

Згідно співвідношення (7.3) теореми 7.7 маємо

$$\varliminf_{m\to\infty} f(x^{(k_m)})=\lim_{k\to\infty} f(x^{(k_m)}).$$

Враховуючи останні дві рівності, одержуємо

$$\varliminf_{m\to\infty} f(x^{(k_m)})=\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)})=f^*. \qquad (7.9)$$

Тоді з (7.7) – (7.9) випливає, що $f^*\le f(x^*)\le f^*$, тобто

$$f^*=f(x^*). \qquad (7.10)$$

Оскільки функція $f(x)$ обмежена, то $f(x^*)=f^*>-\infty$. Крім того, $x^*\in X$, тому $X^*\ne\varnothing$.

Доведемо, що множина X^* – компакт. Якщо X^* складається із скінченної кількості точок, то це очевидно. Нехай X^* – нескінченна множина. Візьмемо довільну послідовність $\{x_*^{(k)}\}\subset X^*\subset X$. Оскільки X – компакт, то існує підпослідовність $\{x_*^{(k_m)}\}\subset X$, яка збігається до деякої точки $x^*\in X$. Покажемо, що $x^*\in X^*$. Справді, $\{x_*^{(k)}\}$ – мінімізуюча послідовність, оскільки $f(x_*^{(k)})=f^*$ для всіх $k=1,2,\ldots$. Тому (див. (7.8) і (7.10)) $\lim_{k\to\infty} f(x_*^{(k)})=f^*=f(x^*)$, тобто $x^*\in X^*$. Таким чином, компактність множини X^* доведено.

П р и м і т к а. Можна показати (див., наприклад, [18], стор. 65), що в умовах теореми 7.8 для будь-якої мінімізуючої послідовності $\lim_{k\to\infty}\rho(x^{(k)},X^*)=0$.

Компактність множини X в умові теореми 7.8 є досить жорсткою. Часто на практиці $X=R^n$ або $X=\{x\in R^n \mid x_i\ge 0, i=\overline{1,n}\}$, які не є компактними. Наведемо твердження, в яких компактність множини X не обов'язкова, але $f(x)$, крім напівнеперевності знизу, задовольняє деякі додаткові умови.

Т е о р е м а 7.9. *Нехай X – непорожня замкнена множина з R^n, функція $f(x)$ – визначена, обмежена і напівнеперервна знизу на X і для деякої фіксованої точки $x^{(0)} \in X$ множина Лебега*

$$L_{f(x^{(0)})} = \{x \in X^n \mid f(x) \le f(x^{(0)})\}$$

обмежена. Тоді $f^* = \inf_{x \in X} f(x) > -\infty$, множина $X^* = \{x \in X | f(x) = f^*\}$ непорожня, компактна і будь-яка мінімізуюча послідовність $\{x^{(k)}\} \subset L_{f(x^{(0)})}$ збігається до X^*.

Т е о р е м а 7.10. *Нехай X – непорожня замкнена множина з R^n, функція $f(x)$ визначена, обмежена і напівнеперервна знизу на X і для будь-якої послідовності $\{x^{(k)}\} \subset X$ такої, що $\lim_{k\to\infty} \| x^{(k)} \| = +\infty$ (якщо такі $x^{(k)}$ існують), має місце співвідношення*

$$\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = +\infty.$$

Тоді $f^* = \inf_{x \in X} f(x) > -\infty$, множина $X^* = \{x \in X | f(x) = f^*\}$ непорожня, компактна і будь-яка мінімізуюча послідовність $\{x^{(k)}\} \subset X$ збігається до X^*.

Доведення теорем 7.9 і 7.10 можна знайти, наприклад, у [18].

Теорема Вейєрштрасса як для неперервної, так і для напівнеперервної знизу функції, а також теореми 7.9 і 7.10, лише доводять існування екстремальних точок при певних умовах, які задовольняють цільова функція $f(x)$ і допустима множина X, але не вказують на методи знаходження цих точок.

Запитання для самоконтролю

1. За яких умов існує розв'язок задачі мінімізації функції однієї змінної на проміжку?
2. Що називається метричним простором?
3. Що називається нормою вектора в просторі R^n?
4. Як записати нерівність Коші-Буняковського?
5. Яка функція називається неперервною в точці (на множині)?
6. Яка множина називається компактною?
7. За яких умов існує розв'язок задачі мінімізації функції багатьох змінних на множині?
8. Яка функція називається напівнеперервною знизу (зверху) в точці (на множині)?
9. За яких умов існує розв'язок задачі мінімізації напівнеперервної знизу функції на множині?

§8. Класичний метод знаходження екстремумів функції однієї змінної

Класичними називають такі методи знаходження точок екстремуму функції, які грунтуються на диференціальному численні.

При вивченні екстремальних задач будь-якого класу важливе місце займають питання про *умови оптимальності* або *умови екстремуму*. Вони складають основу якісних методів теорії оптимізації, за допомогою яких вивчаються властивості екстремальних задач і які використовуються при побудові та обгрунтуванні чисельних методів розв'язування цих задач, а у деяких випадках для отримання явного розв'язку екстремальної задачі.

Розрізняють необхідні і достатні умови екстремуму. *Необхідними* є умови, яким повинна задовольняти точка, яка є розв'язком екстремальної задачі. *Достатніми* є умови, з яких випливає, що знайдена точка є точкою екстремуму певного типу (точкою мінімуму чи максимуму).

1. Нехай функція $f(x)$ визначена в точці $x_0 \in R^1$ і в деякому її околі. Кажуть, що функція $f(x)$ *зростає* в точці x_0, якщо існує таке число $\delta > 0$, що $f(x) < f(x_0)$ для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ і $f(x_0) < f(x)$ для всіх $x \in (x_0; x_0 + \delta)$.

Кажуть, що функція $f(x)$ *спадає* в точці x_0, якщо існує таке число $\delta > 0$, що $f(x) > f(x_0)$ для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ і $f(x_0) > f(x)$ для всіх $x \in (x_0; x_0 + \delta)$.

Отже, точки зростання і спадання функції $f(x)$ характеризуються тим, що при досить малому відхиленні від точки зростання вліво приріст функції набуває від'ємного значення, а при відхиленні вправо – додатнього, і навпаки при відхиленні вліво від точки спадання приріст функції набуває додатнього значення, а при відхиленні вправо –від'ємного.

Т е о р е м а 8.1. *Нехай функція $f(x)$ визначена і диференційовна в точці x_0. Тоді якщо $f'(x_0) > 0$, то функція $f(x)$ зростає в точці x_0, якщо ж $f'(x_0) < 0$, то функція $f(x)$ спадає в точці x_0.*

Т е о р е м а 8.2. *Нехай функція $f(x)$ визначена і диференційовна на інтервалі $(a; b)$. Тоді якщо $f'(x) > 0$ для всіх $x \in (a; b)$, то функція $f(x)$ строго монотонно зростає на $(a; b)$, якщо ж $f'(x) < 0$ для всіх $x \in (a; b)$, то функція $f(x)$ строго монотонно спадає на $(a; b)$.*

Т е о р е м а 8.3. *Для того щоб функція $f(x)$, визначена і диференційовна на інтервалі $(a; b)$, монотонно зростала (спадала) на цьому інтервалі, необхідно і достатньо, щоб $f'(x) \ge 0$ ($f'(x_0) \le 0$) для всіх $x \in (a; b)$.*

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці $x_0 \in R^1$ і в деякому її околі.

Означення 8.1. Точку x_0 називають *точкою локального мінімуму* функції $f(x)$, якщо існує таке число $\delta > 0$, що $f(x_0) \le f(x)$ для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

Точку x_0 називають *точкою строгого локального мінімуму* функції $f(x)$, якщо існує таке число $\delta > 0$, що $f(x_0) < f(x)$ для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ і $x \ne x_0$.

Означення 8.2. Точку x_0 називають *точкою локального максимуму* функції $f(x)$, якщо існує таке число $\delta > 0$, що $f(x_0) \ge f(x)$ для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

Точку x_0 називають *точкою строгого локального максимуму* функції $f(x)$, якщо існує таке число $\delta > 0$, що $f(x_0) > f(x)$ для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ і $x \ne x_0$.

З розглянутих означень видно, що наявність екстремуму функції $f(x)$ в точці x_0 визначається тим, яких значень функція набуває в точці і поблизу неї. Такі властивості функції $f(x)$ називають *локальними* на відміну від глобальних властивостей функції на деякій множині X, яка є підмножиною області визначення цієї функції.

Слід зауважити, що кінцеві точки замкненого проміжка, який є областю визначення деякої функції $f(x)$, не можуть бути точками локального екстремуму згідно наведених означень, оскільки не існує числа $\delta > 0$ такого, що всі точки $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ належать області визначення розглядуваної функції, де x_0 – кінцева точка проміжка.

Теорема 8.4 (Ферма). *Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому проміжку $[a; b]$, який містить точку x_0 ($a < x_0 < b$), і диференційовна в цій точці. Тоді, якщо точка x_0 є точкою локального екстремуму (мінімуму або максимуму) цієї функції, то*

$$f'(x_0) = 0.$$

Точки $x \in (a; b)$, для яких $f'(x) = 0$, називаються *стаціонарними*.

Стаціонарні точки функції $f(x)$ разом з кінцевими точками проміжка $[a; b]$, де вона визначена, і точками цього проміжка, в яких вона не є диференційовною, називаються *критичними* («підозрілими» на екстремум).

Співвідношення $f'(x_0) = 0$ є лише необхідною умовою для того, щоб точка x_0 була точкою локального екстремуму функції $f(x)$. Воно дає можливість відібрати стаціонарні точки, але не дає підстав стверджувати, що в цих точках функція справді має екстремум. Для цього потрібно робити додаткові дослідження.

Теорема 8.5 (достатня умова строгого локального мінімуму). *Нехай функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і диференційовна в деякому околі цієї точки. Якщо $f'(x) < 0$ в інтервалі $(x_0 - \delta; x_0)$ і $f'(x) > 0$ в інтервалі $(x_0; x_0 + \delta)$ для деякого $\delta > 0$, то точка x_0 є точкою строгого локального мінімуму функції $f(x)$.*

Теорема 8.6 (достатня умова строгого локального максимуму). *Нехай функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і диференційовна в деякому околі цієї точки. Якщо $f'(x) > 0$ в інтервалі $(x_0 - \delta; x_0)$ і $f'(x) < 0$ в інтервалі $(x_0; x_0 + \delta)$ для деякого $\delta > 0$, то точка x_0 є точкою строгого локального максимуму функції $f(x)$.*

Сформулюємо також достатні умови строгого екстремуму функції в термінах значень похідних вищих порядків в стаціонарній точці.

Теорема 8.7. *Нехай функція $f(x)$ визначена в деякій точці x_0 і нехай в цій точці функція $f(x)$ має похідні до порядку n включно, при цьому*

$$f^{(i)}(x_0) = 0,\ i = \overline{1, n-1},\ f^{(n)}(x_0) \ne 0.$$

Тоді якщо n – парне число, то функція $f(x)$ має в точці x_0 строгий локальний екстремум, а саме строгий локальний мінімум при $f^{(n)}(x_0) > 0$ і строгий локальний максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Якщо n – непарне число, то функція не має в точці x_0 екстремуму, ця точка є точкою зростання при $f^{(n)}(x_0) > 0$ і спадання при $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Наслідок. *Якщо $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \ne 0$, то при $f''(x_0) > 0$ точка x_0 є точкою строгого локального мінімуму, а при $f''(x_0) < 0$ – точкою строгого локального максимуму функції $f(x)$.*

Доведення теорем 8.1-8.7 можна знайти, наприклад, в [60, т. I] і [105].

Враховуючи теореми Вейєрштрасса і Ферма, а також наведені достатні умови екстремуму, можна дати *загальне правило* відшукання розв'язків одновимірних задач оптимізації:

щоб знайти найменше (найбільше) значення функції $f(x)$, яка визначена і неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційовна в інтервалі

$(a; b)$, *за винятком, можливо, скінченного числа точок, і має скінченне число точок, в яких* $f'(x)=0$, *потрібно*:

1) *знайти всі стаціонарні точки функції* $f(x)$, *тобто знайти корені рівняння* $f'(x)=0$;

2) *за допомогою достатніх умов екстремуму визначити, які з стаціонарних точок є точками локального мінімуму (максимуму)*;

3) *знайти значення функції* $f(x)$ *у точках локального мінімуму (максимуму)*;

4) *визначити точки, в яких функція* $f(x)$ *не має похідної першого порядку, і знайти в цих точках (якщо вони існують) значення функції*;

5) *знайти значення функції* $f(x)$ *в кінцевих точках проміжка* $[a; b]$: $f(a)$ *і* $f(b)$;

6) *серед усіх знайдених таким чином значень функції* $f(x)$ *вибрати найменше (найбільше)*.

2. Скористаємось загальним правилом відшукання розв'язків одновимірних задач оптимізації для знаходження розв'язків деяких старовинних задач, формалізація яких звелася до знаходження екстремумів функції однієї змінної (див. §2).

П р и к л а д 8.1. В задачі Евкліда цільова функція

$$f(x)=\frac{H(b-x)}{b}\cdot x$$

неперервна і всюди диференційовна на компактній множині $[0;b]$, тому розв'язок задачі існує і його треба шукати серед критичних точок.

Із співвідношення $f'(x)=\frac{H(b-2x)}{b}=0$ знаходимо єдину стаціонарну точку $x_0=\frac{b}{2}$. Знайдемо другу похідну функції: $f''(x)=\frac{-2H}{b}$. Оскільки $f''(x)<0$ при довільних x, то $x_0=\frac{b}{2}$ є точкою локального максимуму. Значення функції $f(x)$ в цій точці дорівнює $\frac{H}{4}$. Знайдемо значення функції $f(x)$ в кінцевих точках проміжка $[0;b]$: $f(0)=0$, $f(b)=0$. Таким чином, найбільшого значення цільова функція досягає в точці $x^*=\frac{b}{2}$. Це означає, що в шуканому паралелограмі $ADEF$ (див. рис. 5.1) точка F є серединою відрізка AC. Саме цей факт і був встановлений Евклідом.

З а у в а ж е н н я. Цей же результат випливає з того, що квадратний тричлен $f(x)=\frac{H}{b}(b-x)x=-\frac{H}{b}x^2+Hx$ має два дійсні корені $x_1=0$, $x_2=b$, гілки параболи $y=-\frac{H}{b}x^2+Hx$ напрямлені вниз, а тому найбільшого значення квадратний тричлен, що розглядається, набуває посередині між коренями, тобто в точці $x^*=\frac{b}{2}$.

П р и к л а д 8.2. В планіметричній задачі Кеплера цільова функція

$$f(x)=4x\sqrt{r^2-x^2}$$

неперервна на проміжку $[0;r]$ і диференційовна в інтервалі $(0;r)$, тому розв'язок задачі треба шукати серед критичних точок.

Знайдемо стаціонарні точки функції $f(x)$ в інтервалі $(0;r)$. Маємо $f'(x)=4\sqrt{r^2-x^2}-\frac{4x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}=0$. Звідки $-2x^2+r^2=0$ для $x\in(0;r)$. Оскільки $x\in(0;r)$, то на цьому проміжку є тільки одна стаціонарна точка $x_0=\frac{r}{\sqrt{2}}$.

Визначимо, чи є одержана точка точкою локального екстремуму. Для цього проаналізуємо знак першої похідної $f'(x)$ в околі знайденої точки. Легко бачити, що зліва від точки x_0 $f'(x)>0$, а справа $f'(x)<0$, тобто точка x_0 є точкою локального максимуму. Значення функції $f(x)$ в цій точці дорівнює $2r$.

Знайдемо значення функції $f(x)$ в кінцевих точках проміжка $[0;r]$: $f(0)=0, f(r)=0$. Таким чином, найбільшого значення цільова функція досягає в точці $x^*=\frac{r}{\sqrt{2}}$. У цьому випадку, як випливає з формалізації задачі, шуканий прямокутник (див. рис. 5.3) є квадратом.

З а у в а ж е н н я. Якщо цільову функцію $f(x)$ задачі подати у вигляді $f(x)=4\sqrt{x^2(r^2-x^2)}$, то аналогічно до міркувань, наведених у зауваженні до прикладу 8.1, одержимо, що вираз $x^2(r^2-x^2)$ набуває найбільшого значення коли $x^2=\frac{r^2}{2}$, тобто коли $x=\frac{r}{\sqrt{2}}$.

П р и к л а д 8.3. Для задачі Тартальї: *розділити число 8 на дві такі частини, щоб добуток їх добутку на їх різницю був максимальним*, спочатку побудуємо формальну модель задачі. Позначимо через x меншу з двох частин, тоді $0\le x\le 4$ і $8-x$ – більше число, а їх різниця дорівнює $8-2x$. Отже треба знайти максимум функції

$$f(x)=x(8-x)(8-2x)$$

за умови

$$0\le x\le 4.$$

Функція $f(x)$ неперервна, всюди диференційовна на компакті $[0;4]$, тому розв'язок задачі існує і його треба шукати серед критичних точок.

Знайдемо стаціонарні точки функції $f(x)$. Для цього знайдемо її похідну і прирівняємо до нуля: $f'(x)=(2x^3-24x^2+64x)'=6x^2-48x+64=0$. Це рівняння має два дійсні корені: $x_1=4-\frac{4}{\sqrt{3}}$, $x_2=4+\frac{4}{\sqrt{3}}$, при цьому другий корінь не задовольняє обмеження задачі ($x_2>4$). Визначимо, чи є точка $x_1=4-\frac{4}{\sqrt{3}}$ точкою локального екстремуму. Для цього знайдемо другу похідну функції $f(x)$ і її значення в цій точці: $f''(x)=12x-48$, $f''(x_1)=\frac{-48}{\sqrt{3}}<0$. Отже точка x_1 є точкою локального максимуму. Знайдемо значення функції $f(x)$ в точці $x_1=4-\frac{4}{\sqrt{3}}$: $f(x_1)=\frac{256\sqrt{3}}{9}$, а також значення функції $f(x)$ в кінцевих точках проміжка $[0;4]$: $f(0)=0, f(4)=0$. Отже, найбільшого значення функція $f(x)$ досягає в точці $x^*=4-\frac{4}{\sqrt{3}}$. Це означає, що число 8 треба поділити на дві частини так, щоб менше число дорівнювало $4-\frac{4}{\sqrt{3}}$, а більше $4+\frac{4}{\sqrt{3}}$. Саме таку відповідь дав автор задачі.

Запитання для самоконтролю

1. В чому полягає суть необхідних і достатніх умов екстремуму?
2. Яка функція називається спадною (зростаючою) в точці?
3. Що називається точкою локального і строгого локального мінімуму (максимуму) для функції однієї змінної?
4. Як формулюються необхідні умови екстремуму для функції однієї змінної?
5. Які точки називають стаціонарними, а які критичними?
6. Як формулюються достатні умови екстремуму в термінах першої похідної?
7. Як формулюються достатні умови екстремуму в термінах другої похідної?
8. Як формулюються достатні умови екстремуму в термінах похідних вищих порядків?
9. В чому полягає загальне правило відшукання найбільших і найменших значень функції на відрізку?

§9. Класичний метод знаходження екстремумів функції багатьох змінних

Перед тим, як розглянути класичний метод відшукання розв'язків багатовимірної задачі оптимізації, сформулюємо необхідні і достатні умови екстремуму функції багатьох змінних.

1. Нехай функція $y=f(x)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ визначена в деякому околі точки $x^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)\in R^n$.

Т е о р е м а 9.1 (Ферма). *Якщо функція* $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$ *в точці* $x^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ *має локальний екстремум і диференційовна в ній, то*

$$f'(x^*)=O_n, \tag{9.1}$$

де $f'(x^*)=\left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1},...,\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n}\right)$ *– градієнт функції* $f(x)$ *в точці* x^*, $O_n=(0,0,...,0)\in R^n$ *– нуль-вектор в* R^n.

Д о в е д е н н я. Нехай для визначеності точка x^* є точкою локального мінімуму функції $f(x)$. Згідно означення диференційовності функції $f(x)$ в точці x^* для будь-якого вектора $g\in R^n$ має місце рівність

$$f(x^*+\alpha g)-f(x^*)=\alpha\langle f'(x^*),g\rangle+o(\alpha), \tag{9.2}$$

де $\frac{o(\alpha)}{\alpha}\to 0$ при $\alpha\to 0$.

Оскільки x^* – точка локального мінімуму, то при всіх досить малих $\alpha\in R^1$

$$f(x^*+\alpha g)-f(x^*)\geq 0.$$

З урахуванням цієї нерівності після ділення рівності (9.2) на $\alpha>0$ і переходу до границі при $\alpha\to 0$, одержуємо

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{f(x^*+\alpha g)-f(x^*)}{\alpha}=\langle f'(x^*),g\rangle\geq 0.$$

Для виконання умови

$$\langle f'(x^*),g\rangle\geq 0 \tag{9.3}$$

при довільному $g\in R^n$ (а значить і при $g=-f'(x^*)$) необхідно, щоб виконувалась умова (9.1). У протилежному випадку з (9.3) одержимо

$$\langle f'(x^*),-f'(x^*)\rangle=-\|f'(x^*)\|^2>0,$$

що неможливо.

Ця теорема є необхідною умовою екстремуму першого порядку.

Точки, в яких градієнт функції дорівнює нулеві, називають *стаціонарними* або *точками можливого екстремуму* цієї функції.

Згідно теорми Ферма, для того щоб знайти точки можливого екстремуму функції $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, треба розв'язати систему рівнянь

$$\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_j} = 0, \; j = \overline{1, n}.$$

Для формулювання необхідних умов екстремуму другого порядку і достатніх умов екстремуму нагадаємо деякі факти з лінійної алгебри.

О з н а ч е н н я 9.1. Функція виду

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \, ,$$

де a_{ij} – числа з R^1 і $a_{ij} = a_{ji}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ називається *квадратичною формою* від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Числа $a_{ij} \in R^1$ називаються *коефіцієнтами квадратичної форми*, а складена з цих коефіцієнтів симетрична матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}}$$

називається *матрицею квадратичної форми* $Q(x_1, \ldots, x_n)$.

Визначники

$$\delta_1 = a_{11}, \; \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \; \delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

називаються *кутовими мінорами* матриці A.

У матричному поданні квадратична форма має вигляд

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \langle Ax, x \rangle .$$

О з н а ч е н н я 9.2. Квадратична форма $Q(x_1, \ldots, x_n)$ називається *додатно визначеною*, якщо вона набуває додатних значень для будь-яких значень змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які одночасно не дорівнюють нулеві, тобто

$$\langle Ax, x \rangle > 0$$

для будь-яких $x \in R^n$, крім $x = (0, 0, \ldots, 0)$.

Зазначимо, що $Q(0, 0, \ldots, 0) = 0$.

О з н а ч е н н я 9.3. Квадратична форма $Q(x_1, \ldots, x_n)$ називається *від'ємно визначеною*, якщо вона набуває від'ємних значень для будь-яких значень змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які одночасно не дорівнюють нулеві, тобто $\langle Ax, x \rangle < 0$ для будь-яких $x \in R^n$, крім $x = (0, 0, \ldots, 0)$.

Наприклад, $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2$ – додатно визначена квадратична форма, оскільки $Q(x_1, x_2) > 0$ в усіх точках $(x_1, x_2) \in R^2$, крім точки (0, 0).

Квадратична форма називається *знаковизначеною*, якщо вона є або додатно визначеною, або від'ємно визначеною.

О з н а ч е н н я 9.4. Квадратична форма $Q(x_1, \ldots, x_n)$ називається *невід'ємно* (*недодатно*) *визначеною*, якщо вона набуває невід'ємних (недодатніх) значень для будь-яких значень змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, але при цьому значення нуль набуває не тільки при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Квадратична форма називається *квазізнаковизначеною*, якщо вона є або невід'ємно визначеною, або недодатно визначеною.

Наприклад, квадратична форма $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ – квазізнаковизначена (невід'ємно визначена), оскільки в усіх точках $(x_1, x_2) \in R^2$ $Q(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 \geq 0$, але $Q(x_1, x_2) = 0$ не тільки в точці (0, 0), а й у всіх точках прямої $x_1 = -x_2$.

Квадратична форма $Q(x_1, \ldots, x_n)$ називається *знакозмінною*, якщо вона набуває як додатних, так і від'ємних значень.

Наприклад, $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$ – знакозмінна квадратична форма, оскільки вона набуває як додатних, так і від'ємних значень: $Q(1, 0) = 1 > 0$, $Q(0, 1) = -1 < 0$.

Має місце *критерій Сільвестра*:

1) *для того щоб квадратична форма $Q(x_1, \ldots, x_n)$ була додатно визначеною, необхідно і достатньо, щоб всі кутові мінори її матриці були додатні*:

$$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \ldots, \delta_n > 0;$$

2) *для того щоб квадратична форма $Q(x_1, \ldots, x_n)$ була від'ємно визначеною, необхідно і достатньо, щоб знаки кутових мінорів її матриці чергувались таким чином*:

$$\delta_1 < 0, \delta_2 > 0, \delta_3 < 0, \delta_4 > 0, \ldots .$$

Доведення критерія Сільвестра можна знайти, наприклад, в [101].

У математичному програмуванні часто використовуються відповідні поняття знаковизначеності для симетричних матриць. Так симетрична матриця

$$A=(a_{ij})_{i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}},$$

де $a_{ij}=a_{ji}, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}$, називається *додатно визначеною*, якщо квадратична форма

$$\langle Ax,x\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j>0$$

для будь-яких значень змінних $x_1,x_2,...,x_n$, які одночасно не дорівнюють нулеві. Відповідно формулюється і критерій Сільвестра.

Другий диференціал функції $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$, де $x_1,x_2,...,x_n$ – незалежні змінні, в точці $x^{(0)}\in R^n$ можна подати у вигляді

$$d^2y|_{x=x^{(0)}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i\partial x_j}dx_idx_j .$$

Цей вираз показує, що другий диференціал функції $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$ в точці $x^{(0)}$ є квадратичною формою від змінних $dx_1,...,dx_n$, де частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i\partial x_j}$ (коефіцієнти квадратичної форми) задовольняють умову

$$\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_j\partial x_i},\ i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}, i\neq j . \qquad (9.4)$$

Матриця других частинних похідних функції $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$ в точці $x^{(0)}\in R^n$

$$f''(x^{(0)})=\left(\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}}$$

називається *матрицею Гессе* або *гессіаном*.

Зауважимо, що умова (9.4) виконується, коли мішані частинні похідні другого порядку, як функції від $x_i, i=\overline{1,n}$, є неперервними в точці $x^{(0)}$ (див., наприклад, [105]).

Т е о р е м а 9.2. *Нехай функція $f(x)$ двічі диференційовна в точці $x^*\in R^n$. Якщо точка x^*– точка локального мінімуму (максимуму) функції $f(x)$ на R^n, то матриця других частинних похідних $f''(x^*)$ функції $f(x)$ в точці x^* невід'ємно (недодатно) визначена, тобто*

$$\langle f''(x^*)g,g\rangle\geq 0 \quad (\langle f''(x^*)g,g\rangle\leq 0) \qquad (9.5)$$

при всіх $g\in R^n$.

Д о в е д е н н я. Нехай для визначеності x^*– точка локального мінімуму $f(x)$. Тоді для всіх досить малих значеннях $\alpha\in R^1$ маємо

$$f(x^*+\alpha g)-f(x^*)\geq 0. \qquad (9.6)$$

Оскільки $f(x)$ двічі диференційовна в точці x^*, то при будь-яких $g\in R^n$ має місце рівність

$$f(x^*+\alpha g)-f(x^*)=\alpha\langle f'(x^*),g\rangle+\frac{1}{2}\alpha^2\langle f''(x^*)g,g\rangle+o(\alpha^2),$$

де $\frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2}\to 0$ при $\alpha\to 0$. Звідси, враховуючи (9.1) і (9.6), одержуємо

$$\frac{1}{2}\alpha^2\langle f''(x^*)g,g\rangle+o(\alpha^2)\geq 0$$

при будь-яких $g\in R^n$ і досить малих значеннях α.

Поділивши цю нерівність на α^2 і перейшовши до границі при $\alpha\to 0$, одержуємо (9.5).

Ця теорема є необхідною умовою екстремуму другого порядку.

Т е о р е м а 9.3 (достатні умови екстремуму). *Нехай функція $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$ визначена, неперервна і має неперервні частинні похідні першого і другого порядків в околі деякої стаціонарної точки $x^*\in R^n$ даної функції. Тоді якщо другий диференціал $d^2y|_{x=x^*}$ функції $y=f(x)$ в точці x^* є додатно (від'ємно) визначеною квадратичною формою від змінних $dx_1,...,dx_n$, то функція $y=f(x)$ має в точці x^* строгий локальний мінімум (максимум).*

Д о в е д е н н я. Нехай для визначеності другий диференціал $d^2y|_{x=x^*}$ функції $y=f(x)$ в точці x^* є додатно визначеною квадратичною формою від змінних $dx_1,...,dx_n$. Тоді за означенням 9.2 маємо

$$\langle f''(x^*)g,g\rangle>0$$

при всіх $g\in R^n$, $g\neq O_n$. Звідси випливає існування такого числа $M>0$, що

$$\langle f''(x^*)g,g\rangle\geq M\|g\|^2>0 \qquad (9.7)$$

для будь-якого $g\in R^n$.

Розглянемо точки виду $x=x^*+\alpha g$, де $\alpha=\|x-x^*\|$, $g=\frac{x-x^*}{\alpha}$. Тоді, з урахуванням того, що x^*– стаціонарна точка, а також того, що функція $f(x)$ двічі диференційовна в точці x^* і $\|g\|=1$, для досить малих α будемо мати

$$f(x^*+\alpha g)-f(x^*)=\frac{1}{2}\alpha^2\langle f''(x^*)g,g\rangle+o(\alpha^2)\geq$$

$$\geq\frac{1}{2}\alpha^2 M\|g\|^2+o(\alpha^2)=\frac{\alpha^2}{2}M+o(\alpha^2)=\alpha^2\left(\frac{M}{2}+\frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2}\right). \tag{9.8}$$

Оскільки $\frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2}\to 0$ при $\alpha\to 0$, то існує δ-окіл x^*

$$S_\delta(x^*)=\{x\in R^n \mid \|x-x^*\|<\delta\},$$

в якому $\frac{M}{2}+\frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2}>0$ для будь-яких $x\in S_\delta(x^*)$. Тому при будь-яких $x\in S_\delta(x^*)$ і $x\neq x^*$ з (9.8) одержуємо, що $f(x)-f(x^*)>0$, тобто точка x^* є точкою строгого локального мінімуму функції $f(x)$.

Зауваження.

1. Можна показати, що якщо $d^2y|_{x=x^*}$ є знакозмінною квадратичною формою, то в точці x^* функція $y=f(x)$ не має локального екстремуму (див., наприклад, [105]).

2. Якщо $dy|_{x=x^*}=0$, а $d^2y|_{x=x^*}$ є квазізнаковизначеною квадратичною формою, то функція $y=f(x)$ може мати в точці x^* локальний екстремум, а може й не мати. В цьому випадку треба додатково досліджувати поведінку функції в околі точки x^*, користуючись означенням точок локального екстремуму або властивостями похідних більш високих порядків. Наприклад, легко перевірити, що для кожної з функцій $y=x_1^4+x_2^4$ і $y=x_1^3x_2^3$ в точці $x^{(0)}=(0,0)$ виконується умова $dy|_{x=x^{(0)}}=0$, тобто точка $x^{(0)}$ – стаціонарна для обох цих функцій, і їх другі диференціали в точці $x^{(0)}=(0,0)$ також дорівнюють 0 ($d^2y|_{x=x^{(0)}}=0$), тобто є квазізнаковизначеними квадратичними формами. Але при цьому перша функція має в точці $x^{(0)}=(0,0)$ локальний мінімум (оскільки $y=x_1^4+x_2^4>0$ $\forall x\in R^2,\ x\neq x^{(0)}$), а друга функція в точці $x^{(0)}=(0,0)$ не має екстремуму, оскільки $y=x_1^3x_2^3$ у будь-якому околі точки $x^{(0)}=(0,0)$ набуває значень як більших від нуля, так і менших від нуля.

Розглянемо окремо достатні умови екстремуму для функції двох змінних.

Нехай функція $y=f(x_1,x_2)$ визначена, неперервна і має неперервні частинні похідні першого і другого порядку в околі деякої стаціонарної точки $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)})$ даної функції.

Введемо позначення:

$$a_{11}=\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_1^2},\ a_{12}=\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_1\partial x_2},$$

$$a_{21}=\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_2\partial x_1},\ a_{22}=\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_2^2},$$

при цьому, згідно припущення, $a_{12}=a_{21}$.

З теореми 9.3 і критерія Сільвестра випливає таке твердження:

1) *якщо* $\delta_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$, *то в точці* $x^{(0)}$ *функція* $y=f(x_1,x_2)$ *має строгий локальний екстремум: мінімум при* $\delta_1=a_{11}>0$ *і максимум при* $\delta_1=a_{11}<0$;

2) *якщо* $\delta_2<0$, *то в точці* $x^{(0)}$ *функція* $y=f(x_1,x_2)$ *не має екстремуму;*

3) *якщо* $\delta_2=0$, *то в точці* $x^{(0)}$ *функція* $y=f(x_1,x_2)$ *може мати локальний екстремум, а може й не мати його.*

2. Сформулюємо *загальне правило* відшукання розв'язків багатовимірної задачі безумовної оптимізації, коли цільова функція $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$ визначена, неперервна і диференційовна в усіх точках простору R^n:

щоб знайти глобальний мінімум (максимум) функції $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$ *на всьому просторі* R^n, *потрібно:*

1) *знайти всі стаціонарні точки функції* $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$, *тобто розв'язати систему рівнянь*

$$\frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_j}=0,\ \ j=\overline{1,n}; \tag{9.9}$$

2) *якщо система* (9.9) *не має розв'язків, то функція* $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$ *не має екстремумів; якщо система* (9.9) *має розв'язки, то провести додаткове дослідження і визначити, які з стаціонарних точок є точками локального мінімуму (максимуму), при цьому, якщо цільова функція має неперервні частинні похідні першого і другого порядків в околі стаціонарної точки, то для такого дослідження можна використати достатні умови екстремуму;*

3) *знайти значення функції* $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$ *у точках локального мінімуму (максимуму) (якщо такі точки існують);*

4) *серед усіх знайдених значень функції* $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$ *вибрати найменше (найбільше).*

Приклад 9.1. Знайти найменше значення функції

$$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_1x_2+x_2^2+x_1-x_2+1$$

у просторі R^2.

Знайдемо стаціонарні точки функції $f(x_1,x_2)$. Для цього потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}=2x_1+x_2+1=0;\\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}=x_1+2x_2-1=0.\end{cases}$$

Легко бачити, що стаціонарною є лише точка $x^{(0)}=(-1,1)$.

Визначимо, чи є ця точка екстремальною. Для цього знайдемо частинні похідні другого порядку та їх значення в точці $x^{(0)}=(-1,1)$:

$$a_{11}=\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_1^2}=2,\ a_{12}=\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_1\partial x_2}=1,$$

$$a_{21}=\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_2\partial x_1}=1,\ a_{22}=\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_2^2}=2.$$

Оскільки $\delta_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=2\cdot 2-1^2=3>0$, то точка $x^{(0)}=(-1,1)$ є точкою екстремуму, а оскільки $a_{11}>0$, то в цій точці досягається локальний мінімум, який дорівнює $f(-1,1)=0$. Оскільки для заданої функції у просторі R^2 інших точок, підозрілих на екстремум, немає, то точка $x^{(0)}=(-1,1)$ є і точкою глобального мінімуму функції $f(x_1,x_2)$ у просторі R^2.

При розв'язуванні задач умовної оптимізації, коли допустима множина X є підмножиною простору R^n, знайти точки екстремуму значно складніше, навіть коли множина X компактна.

Формально загальне правило розв'язування задач умовної оптимізації можна одержати з попереднього правила, замінивши пункт 4 на такий:

знайти найменше (найбільше) значення цільової функції на межі множини X і серед усіх знайдених значень вибрати найменше (найбільше).

Однак класичними методами це вдається зробити лише у випадках, коли множина X має досить просту структуру.

П р и к л а д 9.2. Знайти найбільше значення функції

$$f(x_1,x_2)=-x_1^3+3x_1^2x_2-x_2^4$$

у замкненому трикутнику, обмеженому прямими $x_1=7$, $x_2=0$, $x_1=x_2$, тобто в множині X, яка визначається системою нерівностей $x_1\le 7$, $x_2\ge 0$, $x_1\ge x_2$.

Оскільки задана функція $f(x_1,x_2)$ неперервна на всьому просторі R^2, а множина X – компакт (рис. 9.1), то розв'язок задачі існує і його слід шукати серед критичних точок (стаціонарних точок і точок межі множини X).

Знайдемо стаціонарні точки функції. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}=-3x_1^2+6x_1x_2=0,\\[2mm] \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2}=\ 3x_1^2-4x_2^3=\ 0.\end{cases}$$

Додавши перше рівняння до другого, одержимо еквівалентну систему

$$\begin{cases}-3x_1^2+6x_1x_2=0,\\ 6x_1x_2-4x_2^3=0,\end{cases}\ \text{або}\ \begin{cases}-3x_1(x_1-2x_2)=0,\\ 2x_2(3x_1-2x_2^2)=0.\end{cases}$$

Розв'язуючи останню систему рівнянь, знаходимо дві стаціонарні точки: $M_1(0,0)$ і $M_2(6,3)$.

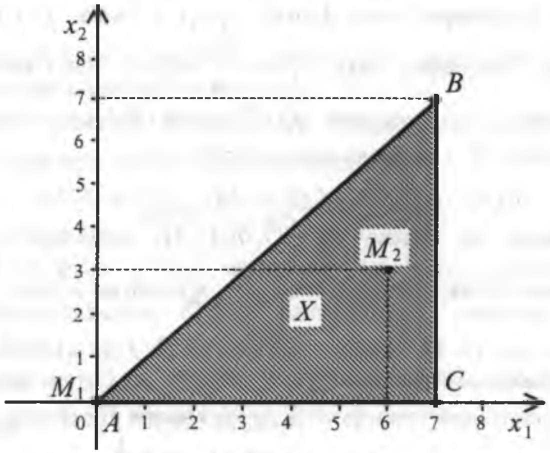


Рис. 9.1.

Визначимо, які з стаціонарних точок є точками локального екстремуму. Оскільки точка $M_1(0,0)$ є межевою точкою, то треба досіджувати лише точку $M_2(6,3)$. Для цього знайдемо частинні похідні другого порядку даної функції:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2}=-6x_1+6x_2,\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2\partial x_1}=6x_1,\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2}=-12x_2^2.$$

Вони неперервні в будь-якій точці з R^2, тому можна скористатися достатніми умовами екстремуму.

В точці $M_2(6,3)$ маємо $a_{11}=-18$, $a_{12}=a_{21}=36$, $a_{22}=-108$ і $\delta_2=648>0$. Оскільки $a_{11}=-18<0$, то точка M_2 є точкою локального максимуму цільової функції і $f(6;3)=27$.

Тепер знайдемо найбільше значення функції $f(x_1,x_2)=3x_1^2x_2-x_1^3-x_2^4$ на межі допустимої множини X.

Межа складається з трьох відрізків AB, BC, AC. Знайдемо найбільші значення функції $f(x_1,x_2)$ на кожному з них (зрозуміло що вони існують). Для точок $(x_1,x_2)\in AC$ маємо: $x_2=0$, $x_1\in[0;7]$, $f(x_1,0)=-x_1^3$.

Знайдемо найбільше значення функції $f_1(x_1)=-x_1^3$ на відрізку [0; 7]. Для цього визначимо стаціонарні точки функції $f_1(x_1)$ з умови $f_1'(x_1)=-3x_1^2=0$.

Звідси маємо одну стаціонарну точку: $x_1^{(0)}=0$. Оскільки точка $x_1^{(0)}$ – кінець відрізка [0; 7], то вона не є точкою локального екстремуму, але в ній функція $f_1(x_1)$ набуває найбільшого значення на цьому відрізку: $f_1(x_1^{(0)})=0$, тому, що в інших точках цього відрізка функція $f_1(x_1)$ набуває від'ємних значень. Отже, на відрізку AC=[(0, 0); (7, 0)] найбільшого значення, рівного 0, функція $f(x_1,x_2)$ набуває в точці A (0, 0).

Для точок $(x_1, x_2) \in BC$ маємо: $x_1 = 7, x_2 \in [0; 7],\ f(7, x_2) = 147x_2 - x_2^4 - 343$.

Знайдемо найбільше значення функції $f_2(x_2) = f(7, x_2)$ при $x_2 \in [0; 7]$. Для цього визначимо стаціонарні точки функції $f_2(x_2)$ з умови $f_2'(x_2) = 147 - 4x_2^3 = 0$. Звідси маємо одну стаціонарну точку: $x_2^{(0)} = \sqrt[3]{\dfrac{147}{4}} \in (0; 7)$, яка є точкою локального максимуму функції $f_2(x_2)$, оскільки $f_2''(x_2^{(0)}) = -12(x_2^{(0)})^2 < 0$. Знайдемо значення функції $f_2(x_2)$ в точці $x_2^{(0)}$ і на кінцях відрізка [0; 7]:

$$f_2(x_2^{(0)}) \approx 23{,}548, \quad f_2(0) = -343, \quad f_2(7) = -1715.$$

Таким чином, на відрізку BC=[(7, 0); (7, 7)] найбільшого значення, яке наближено дорівнює 23,548, цільова функція $f(x_1, x_2)$ набуває в точці $\left(7, \sqrt[3]{\dfrac{147}{4}}\right)$.

Для точок $(x_1, x_2) \in AB$ маємо: $x_2 = x_1, x_1 \in [0; 7],\ f(x_1, x_1) = 2x_1^3 - x_1^4$.

Знайдемо найбільше значення функції $f_3(x_1) = f(x_1, x_1)$ на відрізку [0; 7]. Для цього визначимо стаціонарні точки функції $f_3(x_1)$ з умови $f_3'(x_1) = 6x_1^2 - 4x_1^3 = 0$.

Звідси маємо дві стаціонарні точки: $x_1^{(0)} = 0,\ x_1^{(1)} = \dfrac{3}{2} \in (0; 7)$. Точка $x_1^{(0)}$ – кінець відрізка [0; 7] і $f_3(x_1^{(0)}) = 0$. Точка $x_1^{(1)}$ є точкою локального максимуму функції $f_3(x_1)$ на відрізку [0; 7], оскільки $f_3''(x_1^{(1)}) = -9 < 0$. Знайдемо значення функції $f_3(x_1)$ в точках $x_1 = x_1^{(1)}$ і $x_1 = 7$: $f_3(x_1^{(1)}) = \dfrac{27}{16} \approx 1{,}6875;\ \ f_3(7) = -1715$.

Звідси випливає, що найбільшого значення, яке наближено дорівнює 1,6875, на відрізку AB=[(0, 0); (7, 7)] функція $f(x_1, x_2)$ набуває в точці $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.

Проаналізувавши одержані результати, робимо висновок, що найбільшого значення, яке дорівнює 27, на допустимій множині X цільова функція $f(x_1, x_2)$ набуває у внутрішній точці цієї множини $M_2(6, 3)$.

Запитання для самоконтролю

1. Якими є необхідні умови екстремуму для функції багатьох змінних?
2. Що називається квадратичною формою? Які квадратичні форми існують?
3. Що стверджує критерій Сільвестра?
4. Якими є достатні умови екстремуму для функції від двох і багатьох змінних?
5. В чому полягає загальне правило відшукання найбільших і найменших значень функції від багатьох змінних у всьому просторі і на компактній множині ?

§10. Методи розв'язування класичної задачі на умовний екстремум

В математичному аналізі традиційно розглядається так звана *класична задача на умовний екстремум*:

знайти екстремуми функції $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при умові, що її аргументи зв'язані між собою співвідношеннями

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,\ i = \overline{1,k}, \tag{10.1}$$

де функції $f(x),\ g_i(x), i = \overline{1,k}$, визначені на деякій відкритій множині $M \subseteq R^n$. Співвідношення (10.1) називаються *умовами зв'язку* або *рівняннями зв'язку*.

Позначимо через X множину точок $x \in M$, в яких всі функції $g_i(x), i = \overline{1,k}$, набувають значення нуль:

$$X = \{x \in M \mid g_i(x) = 0,\ i = \overline{1,k}\}.$$

Означення 10.1 Точка $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \in X$ називається *точкою локального умовного мінімуму* функції $y = f(x)$ відносно рівнянь зв'язку (10.1), якщо існує такий окіл точки $x^{(0)}$, що для будь-якої точки $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ цього околу, координати якої задовольняють рівняння (10.1), виконується нерівність $f(x^{(0)}) \le f(x)$.

Значення функції $y = f(x)$ в точці локального умовного мінімуму $x^{(0)}$ називають *локальним умовним мінімумом* цієї функції відносно рівнянь зв'язку (10.1), тобто це найменше значення функції по відношенню не до всіх точок із деякого околу точки $x^{(0)}$, а лише до тих із них, які задовольняють умови зв'язку (10.1) (рис. 10.1).

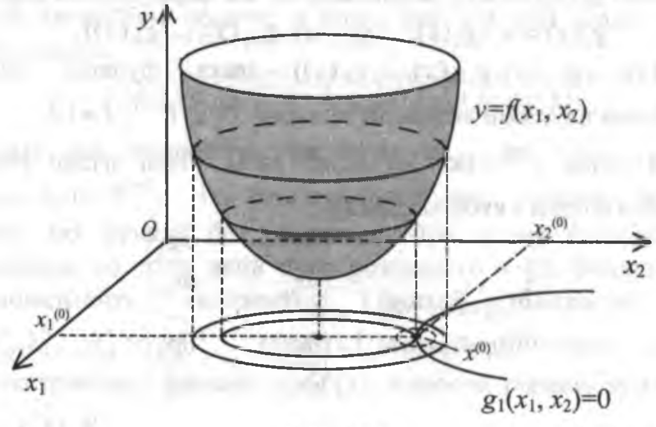


Рис. 10.1.

Аналогічно визначаються *точка локального умовного максимуму* функції $y = f(x)$ відносно рівнянь зв'язку (10.1) і *локальний умовний максимум* цієї функції.

1. У тих випадках, коли в класичній задачі на умовний екстремум які-небудь k змінних, наприклад перші $x_1, x_2, ..., x_k$, можна виразити через інші змінні $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$, подавши систему рівнянь (10.1) в еквівалентному вигляді

$$x_i = \varphi_i(x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n),\ i = \overline{1,k}, \qquad (10.2)$$

то поставлену задачу на умовний екстремум можна звести до задачі на знаходження безумовного екстремуму функції

$$y = f(\varphi_1(x_{k+1}, ..., x_n), ..., \varphi_k(x_{k+1}, ..., x_n), x_{k+1}, ..., x_n) = F(x_{k+1}, ..., x_n). \qquad (10.3)$$

Такий метод називається *методом виключення частини змінних* або *методом Якобі*.

Сформулюємо умови, за яких подання виду (10.2) можливе (див., наприклад, [60], т. 2, стор. 31-63).

Припустимо, що:

1) функції $f(x)$, $g_i(x), i = \overline{1,k}$, мають неперервні частинні похідні першого порядку на відкритій множині M;

2) $k \le n$ і ранг матриці Якобі $\left(\dfrac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}\right)_{i=\overline{1,k},\ j=\overline{1,n}}$ в кожній точці множини M дорівнює k.

Зазначені умови визначають той факт, що функції системи (10.1) $g_i(x), i = \overline{1,k}$, незалежні в будь-якому околі кожної точки $x \in M$, тобто для жодної функції $g_i(x), i = \overline{1,k}$, на множині M не існує подання виду

$$g_i(x) = \psi_i(g_1(x), ..., g_{i-1}(x), g_{i+1}(x), ..., g_k(x)),$$

де $\psi_i(g_1(x), ..., g_{i-1}(x), g_{i+1}(x), ..., g_k(x))$ – деяка функція неперервно диференційовна на деякій відкритій множині $D_i \subseteq R^{k-1}$, $i = \overline{1,k}$.

Нехай точка $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \in M$. Тоді згідно умови 2, в точці $x^{(0)}$ хоча б один з якобіанів виду

$$\frac{\partial(g_1, g_2, ..., g_k)}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k})} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_{i_1}} & \dots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_{i_k}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial g_k}{\partial x_{i_1}} & \dots & \dfrac{\partial g_k}{\partial x_{i_k}} \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля.

Припустимо для визначеності, що в точці $x^{(0)}$

$$\frac{\partial(g_1, g_2, ..., g_k)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_k)} \ne 0.$$

Тоді в силу теореми про неявні функції систему рівнянь (10.1) в деякому околі точки $x^{(0)} \in M$ можна розв'язати відносно змінних $x_1, x_2, ..., x_k$, тобто має місце подання (10.2), де $\varphi_i(x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n)$, $i = \overline{1,k}$, – неперервно диференційовні функції, визначені за системою (10.1).

За таких умов функція (10.3) від змінних $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$ є визначеною і неперервно диференційовною в деякому околі точки $\bar{x}^{(0)} = (x_{k+1}^{(0)}, x_{k+2}^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$.

З того, що умови (10.1) і (10.2) рівносильні, випливає твердження:

точка $x^{(0)}$ є точкою локального умовного екстремуму для функції $y = f(x)$ відносно рівнянь зв'язку (10.1) тоді і тільки тоді, коли точка $\bar{x}^{(0)}$ є точкою локального екстремуму для функції $F(x_{k+1}, ..., x_n)$ виду (10.3).

Отже за допомогою методу виключення частини змінних, який заснований на існуванні розв'язків системи рівнянь зв'язку (10.1), питання про відшукання умовних екстремумів функції $f(x)$ зводиться до відшукання безумовних екстремумів функції виду (10.3).

Однак цей підхід має обмежене застосування, оскільки на практиці відшукання розв'язків системи (10.1) в явному вигляді є часто неможливим або занадто складним. Тому розглянемо більш загальний підхід до розв'язування задачі відшукання умовних екстремумів диференційовної функції, який має назву *метод множників Лагранжа*.

2. Суть методу множників Лагранжа розв'язування класичної задачі на умовний екстремум полягає в тому, що для цієї задачі будується *функція Лагранжа*

$$L(x, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \lambda_1 g_1(x) + ... + \lambda_k g_k(x), \qquad (10.4)$$

яка залежить від змінних $x_1, ..., x_n, \lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k$, де $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$, $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k) \in R^{k+1}$, і розв'язується вже задача відшукання екстремумів цієї функції без обмежень. При цьому використовується підхід, подібний до того, який було розглянуто в §9. Виявляється, що точка локального екстремуму функції Лагранжа $L(x, \lambda)$ $(x_1^*, ..., x_n^*, \lambda_0^*, \lambda_1^*, ..., \lambda_k^*) \in R^{n+k+1}$ містить координати точки локального умовного екстремуму функції $y = f(x)$ відносно рівнянь зв'язку (10.1): $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*) \in R^n$.

Розглянемо обгрунтування методу множників Лагранжа.

Припустимо, що функції $f(x),\ g_i(x), i=\overline{1,k}$, визначені і диференційовні на деякій відкритій множині $M \subseteq R^n$.

Знайдемо частинні похідні першого порядку функції $L(x,\lambda)$ за змінними $x_1,\dots,x_n,\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_k$:

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_j}=\lambda_0\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j},\ \ j=\overline{1,n};$$

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_0}=f(x_1,\dots,x_n); \tag{10.5}$$

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_i}=g_i(x_1,\dots,x_n),\ \ i=\overline{1,k}.$$

Т е о р е м а 10.1 (правило множників Лагранжа). *Нехай функції* $f(x),\ g_i(x),\ i=\overline{1,k}$, *мають неперервні частинні похідні першого порядку на множині M. Якщо точка* $x^*=(x_1^*,\dots,x_n^*)\in M$ *є точкою локального умовного екстремуму функції* $f(x)$ *при обмеженнях* (10.1), *то існують числа* $\lambda_0^*,\lambda_1^*,\dots,\lambda_k^*$, *які одночасно не дорівнюють нулеві і такі, що всі частинні похідні першого порядку функції Лагранжа* $L(x,\lambda)$ *за змінними* $x_j\ (j=\overline{1,n})$ *в точці* x^* *дорівнюють нулеві, тобто*

$$\frac{\partial L(x^*,\lambda^*)}{\partial x_j}=\lambda_0^*\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^*\frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j}=0,\ \ j=\overline{1,n}, \tag{10.6}$$

де $\lambda^*=(\lambda_0^*,\lambda_1^*,\dots,\lambda_k^*)\in R^{k+1}$.

Ця теорема є необхідною умовою локального умовного екстремуму функції $f(x)$ відносно рівнянь зв'язку (10.1) в термінах функції Лагранжа. Доведення теореми 10.1 при $\lambda_0^*=1$ можна знайти, наприклад, в [60], т. 2, стор. 66-68.

Числа $\lambda_0^*,\lambda_1^*,\dots,\lambda_k^*$ в теоремі 10.1 називаються *множниками Лагранжа.*

Нехай

$f'(x)=\left(\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1},\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2},\dots,\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)$ – *градієнт* функції $f(x)$ в точці $x\in R^n$,

$g_i'(x)=\left(\dfrac{\partial g_i(x)}{\partial x_1},\dfrac{\partial g_i(x)}{\partial x_2},\dots,\dfrac{\partial g_i(x)}{\partial x_n}\right)$ – *градієнт* функції $g_i(x)$ в точці $x\in R^n$, $i=\overline{1,k}$.

Умова (10.6) означає, що градієнти функцій $f(x),\ g_i(x), i=\overline{1,k}$, в точці x^* лінійно залежні. Якщо при цьому градієнти $g_i'(x^*), i=\overline{1,k}$, лінійно незалежні (*умова регулярності*), то $\lambda_0^*\neq 0$.

Розглянемо геометричну інтерпретацію умови (10.6), коли цільова функція $f(x)$ і функції обмежень $g_i(x), i=\overline{1,k}$, залежать від двох змінних і має місце умова регулярності. Якщо є одне рівняння зв'язку $g_1(x_1,x_2)=0$, тоді умова (10.6) означає, що вектори $f'(x^*)$, $g_1'(x^*)$ повинні бути колінеарними (рис. 10.2). З рисунку 10.2 також видно, що допустима точка $x^{(0)}$, в якій умова (10.6) не виконується, не може бути розв'язком задачі, оскільки з цієї точки можна зміститися вздовж лінії $g_1(x_1,x_2)=0$ так, що значення цільової функції $f(x)$ зменшиться порівняно з $f(x^{(0)})$.

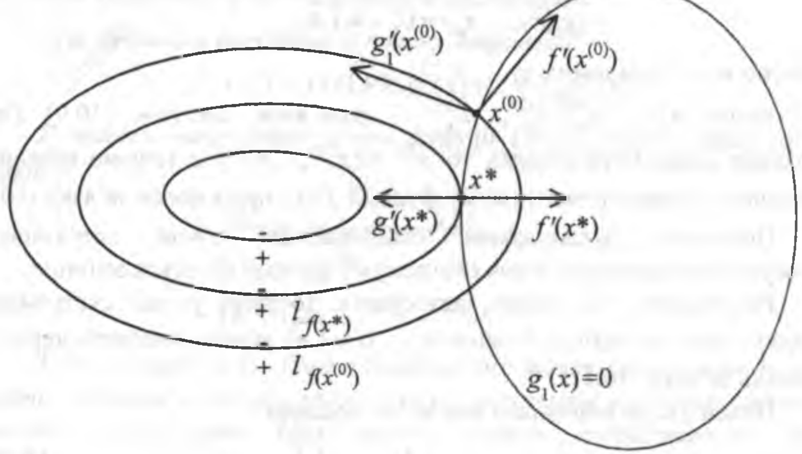


Рис. 10.2.

Будь-яка точка $x^{(0)}\in M$, що задовольняє умову (10.6) при деяких $\lambda_0^{(0)},\lambda_1^{(0)},\dots,\lambda_k^{(0)}$, одночасно не рівних нулеві, а також *умову допустимості*

$$g_i(x^{(0)})=0,\ \ i=\overline{1,k}, \tag{10.7}$$

називається *стаціонарною точкою* класичної задачі на умовний екстремум.

Таким чином, стаціонарні точки визначаються системою виду (10.6), (10.7), яка складається з $n+k$ рівнянь із $n+k+1$ невідомими $x_1,\dots,x_n,\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_k$. Але фактично в цій системі невідомих також $n+k$, оскільки λ_0 може набувати, взагалі кажучи, лише двох значень: $\lambda_0=0$ або $\lambda_0=1$ (якщо поділити всі множники Лагранжа на $\lambda_0\neq 0$).

Якщо $\lambda_0 = 0$, то рівняння (10.6) відображають лише виродженість системи обмежень.

Якщо виконується умова регулярності, то задача зводиться до випадку $\lambda_0 = 1$ і можна обмежитися розглядом *регулярної функції Лагранжа*:

$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + ... + \lambda_k g_k(x), \qquad (10.8)$$

де $\lambda = (1, \lambda_1, ..., \lambda_k)$.

Тоді для відшукання стаціонарних точок функції $f(x)$ при умовах зв'язку (10.1) треба розв'язати систему з $n+k$ рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_k)}{\partial x_i} = 0, \ i = \overline{1,n}, \\ g_i(x_1,...,x_n) = 0, \ i = \overline{1,k}, \end{cases} \qquad (10.9)$$

відносно $n+k$ невідомих $x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_k$.

Якщо $x_1^{(0)},...,x_n^{(0)},\lambda_1^{(0)},...,\lambda_k^{(0)}$ – розв'язок системи (10.9) (таких розв'язків може бути кілька), то $x^{(0)} = (x_1^{(0)},...,x_n^{(0)})$ є точкою можливого локального умовного екстремуму функції $f(x)$ при умовах зв'язку (10.1).

Подальше дослідження стаціонарних точок пов'язано із застосуванням достатніх умов екстремуму функції багатьох змінних.

Розглянемо, як можна застосувати достатні умови екстремуму у випадку, коли які-небудь k змінних x_i $(i = \overline{1,n})$ можна виразити через інші з рівнянь зв'язку (10.1).

Нехай для визначеності має місце подання

$$x_i = \varphi_i(\bar{x}), \ i = \overline{1,k}, \qquad (10.10)$$

де $\bar{x} = (x_{k+1}, x_{k+2},...,x_n)$ і $k < n$.

З урахуванням (10.8) і (10.10) побудуємо функцію

$$F(x_{k+1},...,x_n) = L(\varphi_1(\bar{x}),...,\varphi_k(\bar{x}),x_{k+1},...,x_n,\lambda_1^{(0)},...,\lambda_k^{(0)}), \qquad (10.11)$$

яка фактично залежить від змінних $x_{k+1}, x_{k+2},...,x_n$, і знайдемо її другий диференціал за цими змінними в точці $\bar{x}^{(0)} = (x_{k+1}^{(0)},...,x_n^{(0)})$:

$$d^2F|_{\bar{x}=\bar{x}^{(0)}} = \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial^2 L(\bar{x}^{(0)},\lambda^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j, \qquad (10.12)$$

де $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)},...,\lambda_k^{(0)})$ – відповідний набір множників Лагранжа, $dx_{k+1},...,dx_n$ – диференціали незалежних змінних.

Якщо вираз $d^2F|_{\bar{x}=\bar{x}^{(0)}}$ буде квадратичною формою від $dx_{k+1},...,dx_n$ і ця квадратична форма додатно визначена, то в точці $\bar{x}^{(0)} = (x_{k+1}^{(0)},...,x_n^{(0)})$ функція $F(\bar{x})$ має локальний мінімум, а функція $f(x)$ в точці $x^{(0)} = (x_1^{(0)},...,x_n^{(0)})$ має локальний умовний мінімум при умовах зв'язку (10.1). Якщо квадратична форма $d^2F|_{\bar{x}=\bar{x}^{(0)}}$ буде від'ємно визначена, то в точці $\bar{x}^{(0)} = (x_{k+1}^{(0)},...,x_n^{(0)})$ функція $F(\bar{x})$ має локальний максимум, а функція $f(x)$ в точці $x^{(0)} = (x_1^{(0)},...,x_n^{(0)})$ має локальний умовний максимум при умовах зв'язку (10.1). Якщо квадратична форма $d^2F|_{\bar{x}=\bar{x}^{(0)}}$ знакозмінна, то в точці $x^{(0)}$ функція $f(x)$ не має умовного екстремуму.

Сказане дає змогу сформулювати загальне привило пошуку розв'язків класичної задачі на умовний екстремум:

1) *побудувати регулярну функцію Лагранжа*:

$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + ... + \lambda_k g_k(x);$$

2) *знайти стаціонарні точки функції* $L(x,\lambda)$, *розв'язавши систему рівнянь*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_k)}{\partial x_j} = 0, \ j = \overline{1,n}, \\ g_i(x_1,...,x_n) = 0, \ i = \overline{1,k}; \end{cases}$$

3) *перевірити, які серед стаціонарних точок (якщо вони існують) будуть точками умовного екстремуму і визначити характер одержаних умовних екстремумів (для цього можна скористатися другим диференціалом* (10.12) *функції виду* (10.11));

4) *знайти значення цільової функції* $f(x)$ *в точках умовного мінімуму і максимуму (якщо вони існують) і вибрати серед них найменше і найбільше*.

З а у в а ж е н н я. При розв'язуванні задач, для яких відомо або легко з'ясувати, що цільова функція в стаціонарних точках може досягати тільки мінімальних або максимальних значень (наприклад, для опуклої або вгнутої функції), крок 3 правила відшукання розв'язків класичної задачі на умовний екстремум можна опустити.

П р и к л а д 10.1. При яких значеннях діаметра основи d см і висоти h см циліндрична банка, об'єм якої дорівнює 54π см^3, має найменшу поверхню.

Спочатку формалізуємо задачу. Оскільки повна площа поверхні циліндричної банки визначається формулою

$$S = 2S_{\text{осн.}} + S_{\text{б.п.}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = \frac{\pi d^2}{2} + \pi dh,$$

де $S_{осн.}$ – площа основи, $S_{б.п.}$ – площа бічної поверхні, то поставлена задача зводиться до відшукання умовного мінімуму функції

$$S(d,h)=\frac{\pi d^2}{2}+\pi dh$$

при умові зв'язку

$$V=\frac{\pi d^2 h}{4}=54\pi \quad \text{або} \quad d^2h-216=0.$$

Складемо регулярну функцію Лагранжа для одержаної задачі:

$$L(d,h,\lambda)=\frac{\pi d^2}{2}+\pi dh+\lambda(d^2h-216).$$

Знайдемо стаціонарні точки цієї функції, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(d,h,\lambda)}{\partial d}=\pi d+\pi h+2\lambda dh=0, \\ \dfrac{\partial L(d,h,\lambda)}{\partial h}=\pi d+\lambda d^2=0, \\ \dfrac{\partial L(d,h,\lambda)}{\partial \lambda}=d^2h-216=0. \end{cases}$$

Оскільки діаметр d банки не може дорівнювати нулю, то з другого рівняння одержуємо, що $\lambda^{(0)}=-\dfrac{\pi}{d}$. Підставляючи значення $\lambda^{(0)}$ в перше рівняння, одержуємо $\pi(d-h)=0$, тобто $d=h$. Тоді з третього рівняння системи одержимо $d^3=216$, звідки $d=6$. Таким чином, є одна стаціонарна точка $x^{(0)}=(d^{(0)},h^{(0)})=(6,6)$.

Враховуючи умову зв'язку, маємо $h=\dfrac{216}{d^2}$. Тому для подальшого дослідження точки $x^{(0)}$ розглянемо функцію виду (10.11)

$$F(d)=\frac{\pi d^2}{2}+\pi d\frac{216}{d^2}-\frac{\pi}{d}\left(d^2\frac{216}{d^2}-216\right)=\frac{\pi d^2}{2}+\pi\frac{216}{d},$$

яку одержуємо з функції Лагранжа $L(d,h,\lambda)$ при $\lambda=\lambda^{(0)}=-\pi/d$.

Оскільки функція $F(d)$ залежить від однієї змінної, то для встановлення характеру екстремуму в точці $\bar{x}^{(0)}=d^{(0)}$ знайдемо значення другої похідної функції $F(d)$ в точці $d^{(0)}=6$. Маємо:

$$F'(d)=\pi d-\frac{216\pi}{d^2};\; F''(d)=\pi+\frac{432\pi}{d^3};\; F''(6)=3\pi>0,$$

тобто точка $\bar{x}^{(0)}=d^{(0)}=6$ є точкою мінімуму функції $F(d)$, а значить $x^{(0)}=(d^{(0)},h^{(0)})=(6,6)$ є точкою розв'язком поставленої задачі. Таким чином, при значеннях діаметра основи d=6 см і висоти h=6 см циліндрична банка, об'єм якої дорівнює 54π см^3, має найменшу поверхню: $S(6,6)=54\pi$ см^2.

Запитання для самоконтролю

1. Як формулюється класична задача на умовний екстремум?
2. Яка точка називається точкою локального умовного мінімуму (максимуму)?
3. У чому полягає метод виключення частини змінних для розв'язування класичної задачі на умовний екстремум?
4. У чому полягає суть методу множників Лагранжа?
5. Що являє собою функція Лагранжа для класичної задачі на умовний екстремум?
6. Як формулюється теорема про необхідні умови екстремуму в термінах функції Лагранжа?
7. У чому полягає умова регулярності для класичної задачі на умовний екстремум?
8. У чому полягає суть геометричної інтерпретації необхідної умови екстремуму для класичної задачі на умовний екстремум?
9. Яка точка називається стаціонарною точки для класичної задачі на умовний екстремум?
10. Що являє собою регулярна функція Лагранжа?
11. У чому полягає загальне правило пошуку розв'язків класичної задачі на умовний екстремум?

Вправи для самостійного виконання

За допомогою класичних методів знаходження екстремумів, розглянутих у §§8–10, а також використовуючи для відповідних графічних побудов і розрахунків програмні засоби типу Advanced Grapher, Derive, GRAN1, Mathcad чи інші, розв'язати наступні екстремальні задачі.

1. Відрізок заданої довжини переміщується так, що його кінці ковзають вздовж сторін прямого кута. При якому положенні цього відрізка:

а) площа трикутника, який відтинається, буде найбільшою?

б) периметр трикутника буде найменшим?

2. Посудина циліндричної форми наповнена водою. Висота шару води h. З отвору (розмірами його можна знехтувати), розташованого на висоті x, тече вода. При якому x дальність струменя води буде найбільшою?

П р и м і т к а. Швидкість рідини, що витікає з отвору, за законом Торрічеллі дорівнює $\sqrt{2gy}$, де y – глибина розміщення отвору, g – прискорення вільного подання).

3. Якими повинні бути розміри закритої коробки з квадратною основою за умови, що її об'єм повинен дорівнювати V і на її виготовлення потрібно витратити найменшу кількість матеріалу?

4. Стадіон являє собою прямокутне поле з областями у вигляді півкруга, які приєднані до двох його протилежних сторін. Периметр стадіону повинен бути рівним P. Знайти його найбільшу можливу площу.

5. Відкриту коробку виготовляють з прямокутного листа жерсті розміром $a\times b$, для чого вирізають рівні квадрати в кутах і згинають жерсть вздовж ліній вирізу. Які квадрати потрібно вирізати, щоб одержати коробку найбільшого об'єму?

6. Художникові потрібно заґрунтувати прямокутне полотно під картину таким чином: зелений прямокутник оточується блакитною смугою. Потрібно, щоб площа

зеленого прямокутника була рівна 12 дм^2, а ширина смуги — 1 дм з боків і 2 дм зверху і знизу. Якими повинні бути розміри картини, щоб загальна її площа була найменшою?

7. Людина, що гуляє у лісі, знаходиться за 5 км від прямолінійної дороги, яка вважається нескінченно довгою, і за 13 км від дому, який стоїть біля дороги. Людина може рухатися із швидкістю 3 км за годину лісом і 5 км за годину дорогою. Спочатку вона іде по прямій лінії до дороги, а потім дорогою до дому. Знайти мінімальний час, за який людина може дістатися до дому.

8. Селянин хоче розчистити поле у вигляді прямокутної ділянки, до однієї з сторін якої приєднується ділянка у формі півкруга. Прямокутна ділянка буде відведена під сіно, яке дає прибуток у 5 одиниць вартості на 1 м^2, а ділянка у формі півкруга буде засіяна гречкою, яка дає прибуток у 6 одиниць вартості на 1 м^2. Периметр поля повинен бути рівним 800 м. Як селянин повинен спланувати поле, щоб одержати найбільший прибуток?

9. Потрібно виготовити конічну лійку з твірною, довжина якої 20 см. Яка повинна бути висота лійки, щоб її об'єм був найбільшим?

10. Колода довжиною в 20 м має форму зрізаного конуса, діаметри основ якого рівні відповідно 2 м і 1 м. Потрібно виготовити з колоди брус з квадратним поперечним перерізом, вісь якого співпадала б з віссю колоди і об'єм якого був би найбільшим. Якими повинні бути розміри бруса?

11. Розкласти додатне число a на три додатних доданки так, щоб добуток їх був найбільшим.

12. Подати додатне число a у вигляді добутку чотирьох додатних множників так, щоб їх сума була найменшою.

13. Знайти найменше значення повної поверхні прямокутного паралелепіпеда і його лінійні розміри при заданому об'ємі V.

14. Знайти прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму при заданій поверхні S.

15. (Стереометрична задача Кеплера). У кулю радіуса r вписати циліндр найбільшого об'єму.

16. Палатка має форму циліндра з конічним дахом. При яких співвідношеннях між лінійними розмірами палатки для її виготовлення знадобиться найменша кількість матеріалу, якщо задано внутрішній об'єм палатки?

17. (Частинний випадок задачі Аполлонія). На еліпсі з півосями $a=2$ і $b=3$ знайти точки, які найменш віддалені від точки з координатами $x=-2$, $y=-2$.

18. При яких розмірах відкрита циліндрична ванна з півкруговим поперечним перерізом має найбільшу місткість, якщо її поверхня рівна 3π м^2.

19. Нехай x, y, z – невід'ємні дійсні числа такі, що $x+y+z=1$. Довести, що

$$0 \le xy + yz + xz - 2xyz \le \frac{7}{27}.$$

20. Знайти прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму, який можна вписати в еліпсоїд з півосями a, b і c.

21. Використовуючи необхідні і достатні умови локального мінімуму, розв'язати задачі безумовної оптимізації:

1) $f(x)=x_1^2+x_2^2-x_1x_2 \to \min,\ x\in R^2$;

2) $f(x)=x_1^3+x_2^3-5x_1x_2 \to \min,\ x\in R^2$;

3) $f(x)=x_1^3+x_2^3-x_1^2-2x_1x_2-x_2^2 \to \min,\ x\in R^2$;

4) $f(x)=x_1x_2+\dfrac{1}{2(x_1+x_2)} \to \min,\ x\in R^2$;

5) $f(x)=\sin(x_1+x_2)-\sin x_1-\sin x_2 \to \min,\ x\in R^2$;

6) $f(x)=e^{\frac{x_1}{4}}(3x_1+2x_2) \to \min(\max),\ x\in R^2$;

7) $f(x)=10\ln x_1+x_1x_2^2-x_2^3 \to \min(\max),\ x\in R^2$

8) $f(x)=e^{-(x_1-x_1x_2+x_2)}(x_1+x_2) \to \min(\max),\ x\in R^2$;

9) $f(x)=2x_1^2+x_2^2-x_1x_2-x_1x_3+2x_3 \to \min,\ x\in R^3$;

10) $f(x)=x_1x_2^2x_3^3(1-x_1-2x_2-3x_3) \to \min(\max),\ x\in R^3$.

22. Довести, що функція

$$f(x)=e^{x_1+2x_2}(x_1^2-x_2^2)$$

в точці $(x_1,x_2)=\left(\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)$ має локальний мінімум.

23. Довести, що функція

$$f(x)=x_1x_2x_3(1-x_1-x_2-x_3)$$

в точці $(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ має локальний максимум.

24. Дослідити функції на умовний екстремум:

1) $f(x_1,x_2)=x_1$ при $x_2-x_1^{3/2}=0$;

2) $f(x_1,x_2)=x_1^m+x_2^m$ $(m=2,3,4)$ при $x_1+x_2=2$ $(x_1\ge 0, x_2\ge 0)$;

3) $f(x_1,x_2)=x_1x_2$ при $x_1^2+x_2^2=2a^2$, $a=1,2,3$;

4) $f(x_1,x_2)=e^{x_1x_2}$ при $x_1+x_2=a$, $a=1,2,3$;

5) $f(x_1,x_2)=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ при $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{1}{a^2}$, $a=1,2,3$;

6) $f(x_1,x_2)=\cos^2 x_1+\cos^2 x_2$ при $x_2-x_1=\dfrac{\pi}{4}$;

7) $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$ при $0\le x_1\le 1$, $0\le x_2\le 1$;

8) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2+x_3$ при $x_1x_2x_3=8$ і $\dfrac{x_1x_2}{x_3}=12$;

9) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3$ при $x_1+x_2+x_3=5$ і $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=8$;

10) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3x_2^2x_3$ при $x_1+x_2-x_3=4$ і $x_1-x_2-x_3=16$.

Розділ 2

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ОПТИМІЗАЦІЇ

У даному розділі розглядаються основи *опуклого аналізу* – розділу математики, в якому вивчаються опуклі множини і опуклі функції та їх властивості. Поняття і факти опуклого аналізу відіграють фундаментальну роль в теорії і чисельних методах оптимізації, а також знаходять широке застосування в інших галузях прикладної математики, зокрема: теорії ігор, дослідженні операцій, математичній економіці та ін. Наведені у розділі відомості про опуклі множини та опуклі функції, субдиференційне та ε - субдиференційне числення широко використовуються у наступних розділах.

§11. Опуклі множини

Означення 11.1. Множина $X \subset R^n$ називається *опуклою*, якщо разом з будь-якими двома своїми точками x і y вона містить і відрізок $[x,y]$, що з'єднує ці точки (рис. 11.1), тобто $[x,y] \subset X$, де

$$[x,y] = \{z \in R^n \mid z = \lambda x + (1-\lambda)y,\ \lambda \in [0;1]\}.$$

На рис. 11.1 а) зображені опуклі множини, на рис. 11.1 б) – неопуклі.

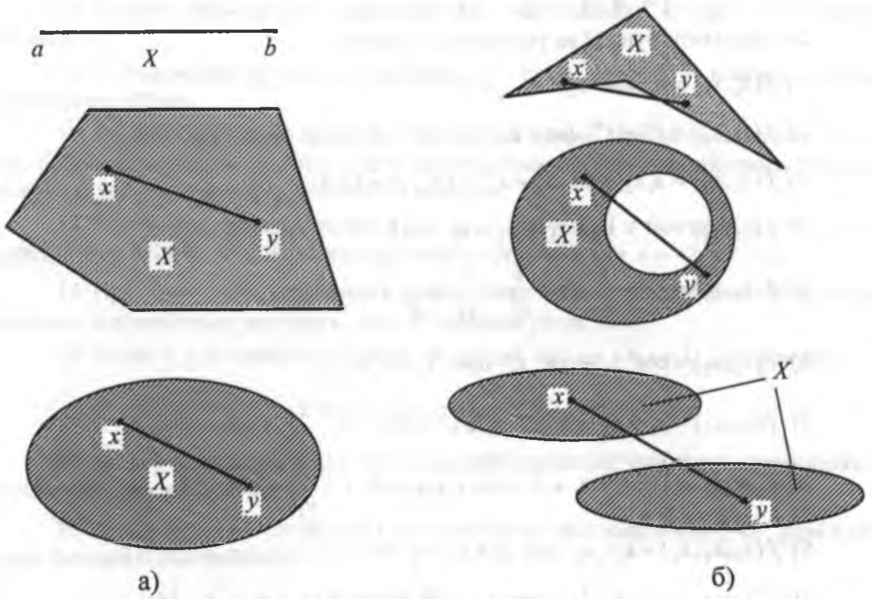


Рис.11.1.

Примітка. Порожня множина вважається опуклою, але існують твердження про опуклі множини, які не мають місця для порожньої множини. У таких випадках при формулюванні тверджень будемо зазначати, що задана множина непорожня.

На числовій прямій опуклими множинами є, наприклад, одноточкові множини, інтервал, півінтервал, відрізок, півпряма і сама пряма. На площині опуклими множинами є, наприклад, області, що знаходяться між двома паралельними прямими, всередині еліпса, над параболою, вітки якої напрямлені вгору. У тривимірному просторі опуклими множинами є, наприклад, області всередині циліндра, тетраедра, куба, кулі, двогранного кута, півпростір по один бік від деякої площини, весь простір R^3.

У просторі R^n опуклими множинами є, наприклад, одноточкові множини, весь простір R^n, а також:

– *куля* радіуса $r > 0$ з центром в точці $x^{(0)} \in R^n$:

$$\bar{S}(x^{(0)}, r) = \{x \in R^n \mid \rho(x^{(0)}, x) \le r\};$$

– *відкрита куля* радіуса $r > 0$ з центром в точці $x^{(0)} \in R^n$:

$$S(x^{(0)}, r) = \{x \in R^n \mid \rho(x^{(0)}, x) < r\};$$

– *пряма*, що проходить через точку $x^{(0)} \in R^n$ у напрямі вектора $h \in R^n$:

$$l(h, x^{(0)}) = \{x \in R^n \mid x = x^{(0)} + \alpha h, \alpha \in R^1\};$$

– *промінь*, що виходить з точки $x^{(0)} \in R^n$ у напрямі вектора $h \in R^n$:

$$l^+(h, x^{(0)}) = \{x \in R^n \mid x = x^{(0)} + \alpha h, \alpha \ge 0\};$$

– *гіперплощина* з нормаллю $g \in R^n$:

$$H(g,c) = \{x \in R^n \mid \langle g, x \rangle = c\}, \text{ де } c = \text{const};$$

– *гіперплощина*, яка проходить через точку $x^{(0)} \in R^n$, з нормаллю $g \in R^n$:

$$H(g, x^{(0)}) = \{x \in R^n \mid \langle g, x - x^{(0)} \rangle = 0\};$$

– *півпростори*, породжені гіперплощиною $H(x^{(0)}, g)$:

$$H^+(g, x^{(0)}) = \{x \in R^n \mid \langle g, x - x^{(0)} \rangle \ge 0\};$$

$$H^-(g, x^{(0)}) = \{x \in R^n \mid \langle g, x - x^{(0)} \rangle \le 0\};$$

– *многогранник* (поліедр) – обмежена множина, яка є перетином скінченної кількості півпросторів.

Наведемо деякі властивості опуклих множин.

Л е м а 11.1. *Нехай I – довільна, скінченна або нескінченна, множина індексів, M_i, $i \in I$, – опуклі множини з R^n. Тоді їх перетин*

$$M = \bigcap_{i \in I} M_i$$

також опукла множина.

Д о в е д е н н я. Візьмемо дві довільні точки x і y з множини $M = \bigcap_{i \in I} M_i$ і покажемо, що $[x, y] \subset M$. Дійсно, за означенням перетину множин точки x і y належать кожній опуклій множині M_i $(i \in I)$, при цьому згідно означення 11.1 для будь-якої точки виду $z = \lambda x + (1-\lambda) y$, де $\lambda \in [0; 1]$, має місце включення $z \in M_i$ для всіх $i \in I$. Тоді

$$z \in \bigcap_{i \in I} M_i = M \ ,$$

а значить множина M опукла.

Л е м а 11.2. *Якщо M_1 і M_2 опуклі множини з R^n, c_1, c_2 – довільні дійсні числа, то множина*

$$M = c_1 M_1 + c_2 M_2 = \{c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} \in R^n \mid x^{(1)} \in M_1, x^{(2)} \in M_2\}$$

також опукла.

Д о в е д е н н я. Візьмемо дві довільні точки x і y з множини $M = c_1 M_1 + c_2 M_2$, при цьому:

$$x = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)}, \text{ де } x^{(1)} \in M_1,\ x^{(2)} \in M_2,$$

$$y = c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)}, \text{ де } y^{(1)} \in M_1,\ y^{(2)} \in M_2.$$

Розглянемо точки виду

$$z = \lambda x + (1-\lambda) y, \text{ де } \lambda \in [0;1].$$

Тоді

$$z = \lambda (c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)}) + (1-\lambda)(c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)}) =$$

$$= c_1 (\lambda x^{(1)} + (1-\lambda) y^{(1)}) + c_2 (\lambda x^{(2)} + (1-\lambda) y^{(2)}).$$

Оскільки множини M_1 і M_2 опуклі, то $\lambda x^{(1)} + (1-\lambda) y^{(1)} \in M_1$ і $\lambda x^{(2)} + (1-\lambda) y^{(2)} \in M_2$. Тоді $z \in M$, а значить множина M – опукла.

Н а с л і д о к. *Якщо M_1 і M_2 опуклі множини з R^n, то множини*

$$M_1 + M_2 = \{z \in R^n | z = x + y,\ x \in M_1,\ y \in M_2\},$$

$$M_1 - M_2 = \{z \in R^n | z = x - y,\ x \in M_1,\ y \in M_2\} \text{ – опуклі.}$$

Л е м а 11.3. *Замикання і внутрішність опуклої множини опуклі.*

Д о в е д е н н я. Нехай $X \subset R^n$ – опукла множина. Якщо $x \in \overline{X}$, $y \in \overline{X}$, тоді, як слідує з означення 7.6 граничної точки множини, існують послідовності точок $\{x^{(k)}\} \subset X$, $\{y^{(k)}\} \subset X$ такі, що

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x, \quad \lim_{k \to \infty} y^{(k)} = y.$$

Розглянемо точки виду

$$z^{(k)} = \lambda x^{(k)} + (1-\lambda) y^{(k)} \ (\lambda \in [0; 1]).$$

З опуклості множини X випливає, що $z^{(k)} \in X$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тоді

$$z = \lambda x + (1-\lambda) y = \lim_{k \to \infty} (\lambda x^{(k)} + (1-\lambda) y^{(k)}) \in \overline{X}.$$

Якщо множина $\operatorname{int} X = \varnothing$, то вона вважається опуклою множиною.

Нехай $\operatorname{int} X \neq \varnothing$ і $x^{(1)}, x^{(2)}$ – довільні точки з $\operatorname{int} X$. Оскільки $x^{(1)} \in \operatorname{int} X$ і $x^{(2)} \in \operatorname{int} X$, то існує деяке $\delta > 0$ таке, що

$$S(x^{(1)}, \delta) = \{x \in R^n \mid \| x - x^{(1)} \| < \delta\} \subset X,$$

$$S(x^{(2)}, \delta) = \{x \in R^n \mid \| x - x^{(2)} \| < \delta\} \subset X$$

(рис. 11.2). Покажемо, що довільна точка виду $x^{(0)} = \lambda_0 x^{(1)} + (1-\lambda_0) x^{(2)}$, де $\lambda_0 \in (0; 1)$, належить $\operatorname{int} X$. Для цього досить показати, що

$$S(x^{(0)}, \delta) = \{x \in R^n \mid \| x - x^{(0)} \| < \delta\} \subset X.$$

Візьмемо довільну точку $y^{(0)} \in S(x^{(0)}, \delta)$. Тоді

$$y^{(1)} = x^{(1)} + (y^{(0)} - x^{(0)}) \in S(x^{(1)}, \delta), \quad y^{(2)} = x^{(2)} + (y^{(0)} - x^{(0)}) \in S(x^{(2)}, \delta)$$

(рис . 11.2), оскільки

$$\| y^{(1)} - x^{(1)} \| = \| x^{(1)} + (y^{(0)} - x^{(0)}) - x^{(1)} \| = \| y^{(0)} - x^{(0)} \| < \delta$$

і

$$\| y^{(2)} - x^{(2)} \| = \| x^{(2)} + (y^{(0)} - x^{(0)}) - x^{(2)} \| = \| y^{(0)} - x^{(0)} \| < \delta.$$

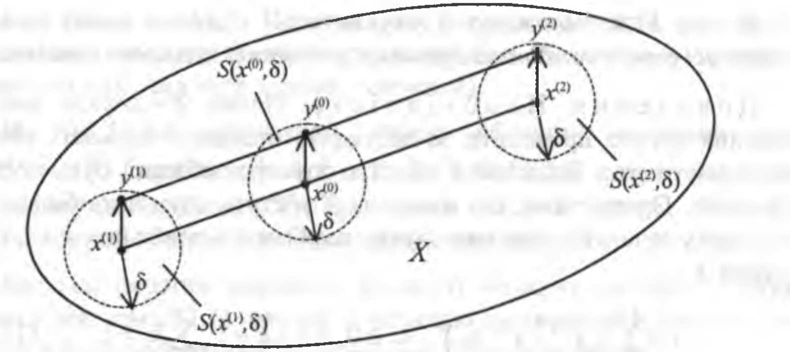


Рис. 11.2.

Розглянемо точку z виду $z=\lambda_0 y^{(1)}+(1-\lambda_0)y^{(2)}$, $\lambda_0\in(0;1)$, яка належить опуклій множині X, бо $y^{(1)}\in X$ і $y^{(2)}\in X$. Але

$$z=\lambda_0(x^{(1)}+(y^{(0)}-x^{(0)}))+(1-\lambda_0)(x^{(2)}+(y^{(0)}-x^{(0)}))=$$

$$=\lambda_0 x^{(1)}+(1-\lambda_0)x^{(2)}+(y^{(0)}-x^{(0)})=x^{(0)}+(y^{(0)}-x^{(0)})=y^{(0)},$$

тобто $y^{(0)}\in X$. Оскільки $y^{(0)}$ – довільна точка з $S(x^{(0)},\delta)$, тоді і весь окіл $S(x^{(0)},\delta)$ належить опуклій множині X, тобто $x^{(0)}\in \operatorname{int}X$ для будь-якого $\lambda_0\in(0;1)$. Враховуючи, що $x^{(1)}\in\operatorname{int}X$, $x^{(2)}\in\operatorname{int}X$, одержуємо

$$x^{(0)}=\lambda_0 x^{(1)}+(1-\lambda_0)x^{(2)}\in\operatorname{int}X$$

для будь-якого $\lambda_0\in[0;1]$. Отже $\operatorname{int}X$ – опукла множина, що й треба було довести.

О з н а ч е н н я 11.2. Нехай $x^{(1)},x^{(2)},\dots,x^{(m)}$ – точки з простору R^n. Точка виду

$$x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x^{(i)}$$

називається

1) *лінійною комбінацією точок* $x^{(i)}$, якщо λ_i – будь-які числа з R^1, $i=\overline{1,m}$;

2) *афінною комбінацією точок* $x^{(i)}$, якщо $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$, $\lambda_i\in R^1$, $i=\overline{1,m}$;

3) *конічною комбінацією точок* $x^{(i)}$, якщо $\lambda_i\ge 0$, $i=\overline{1,m}$;

4) *опуклою комбінацією точок* $x^{(i)}$, якщо $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$, $\lambda_i\ge 0$, $i=\overline{1,m}$.

Л е м а 11.4. *Множина X опукла тоді і тільки тоді, коли вона містить всі опуклі комбінації будь-якої скінченної кількості своїх точок.*

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай X – опукла множина. Доведення зручно проводити за індукцією стосовно кількості точок. За означенням опукла множина X містить опуклі комбінації будь-яких двох своїх точок. Припустимо, що множина X містить опуклі комбінації будь-яких k своїх точок. Розглянемо опуклу комбінацію довільних $k+1$ точок з множини X:

$$x=\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i x^{(i)},\ x^{(i)}\in X,\ \lambda_i\ge 0,\ i=\overline{1,k+1},\ \sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i=1. \qquad (11.1)$$

Якщо $\lambda_{k+1}=1$, то $\lambda_i=0, i=\overline{1,k}$, і тоді опукла комбінація (11.1) очевидно належить X.

Якщо $\lambda_{k+1}=0$, то за припущенням опукла комбінація (11.1) належить X.

Нехай $\lambda_{k+1}\in(0;1)$. Тоді

$$1-\lambda_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i>0. \qquad (11.2)$$

Розглянемо точку

$$x=(1-\lambda_{k+1})y+\lambda_{k+1}x^{(k+1)}, \qquad (11.3)$$

де

$$y=\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}}x^{(1)}+\frac{\lambda_2}{1-\lambda_{k+1}}x^{(2)}+\ldots+\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}}x^{(k)}.$$

З урахуванням (11.2)

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}=\frac{1}{1-\lambda_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$$

і тоді згідно припущення $y\in X$. Тому з (11.3) і опуклості множини X випливає, що $x\in X$.

Д о с т а т н і с т ь. Якщо множина X містить всі опуклі комбінації будь-якої скінченної кількості своїх точок, то вона містить, зокрема, опуклі комбінації будь-яких двох своїх точок і, отже, є опуклою.

Н а с л і д о к. *Якщо точки $x^{(1)},x^{(2)},\dots,x^{(m)}$ належать опуклій множині $X\subset R^n$, то множина X містить всі опуклі комбінації цих точок.*

О з н а ч е н н я 11.3. Перетин всіх опуклих множин, які містять деяку довільну множину X, називається *опуклою оболонкою* множини X і позначається coX (від англ. *convex* – опуклий).

На рис. 11.3 а) зображено опуклу оболонку множини точок $X=\{x^{(1)},\dots,x^{(6)}\}$, при цьому $X\subset coX$; на рис. 11.3 б) зображено опуклу оболонку опуклої множини X, при цьому $coX=X$; на рис. 11.3 в), г) зображено опуклі оболонки не опуклих множин, при цьому $X\subset coX$.

Оскільки перетин довільної кількості опуклих множин – опукла множина (див. лему 11.1), то coX є опуклою множиною. Крім того, coX міститься в будь-якій опуклій множині, яка містить множину X.

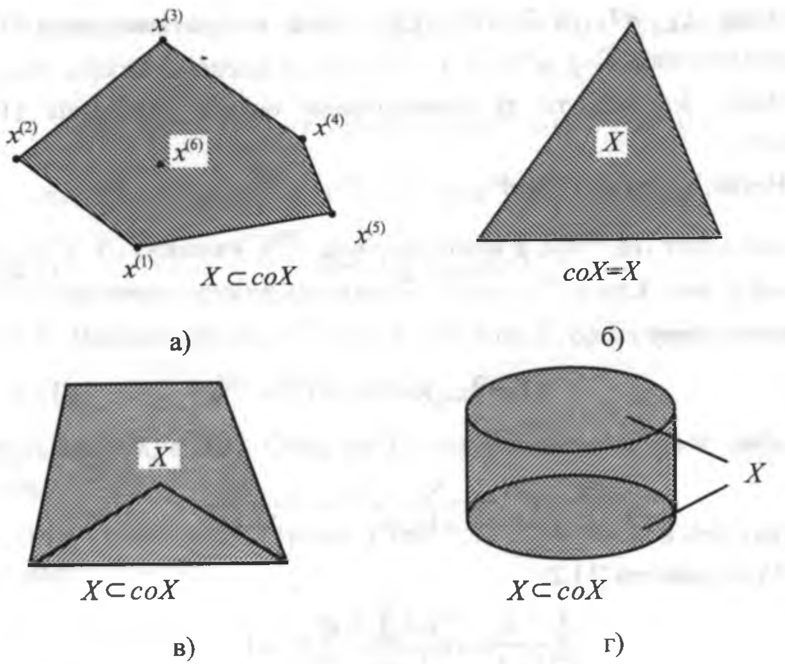


Рис. 11.3.

Л е м а 11.5. *Опукла оболонка множини X складається з тих і тільки тих точок, які є опуклими комбінаціями скінченної кількості точок з* X.

Д о в е д е н н я. Нехай Y – множина всіх точок, які є опуклими комбінаціями будь-якої скінченної кількості точок з X. Треба довести, що $coX = Y$.

Оскільки за означенням опуклої оболонки $X \subset coX$ і coX – опукла множина, то згідно леми 11.4 coX містить всі опуклі комбінації будь-якої скінченної кількості своїх точок і, зокрема, точок з множини X. Отже $Y \subseteq coX$.

Покажемо, що Y – опукла множина. Нехай $y \in Y, z \in Y$, тобто

$$y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y^{(i)},$$

де $y^{(i)} \in X$, $\alpha_i \ge 0$, $i = \overline{1,m}$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$,

$$z = \sum_{i=1}^{k} \beta_i z^{(i)},$$

де $z^{(i)} \in X$, $\beta_i \ge 0$, $i = \overline{1,k}$, $\sum_{i=1}^{k} \beta_i = 1$.

Розглянемо точки виду

$$u = \lambda y + (1-\lambda) z, \text{ де } \lambda \in [0;1].$$

Тоді

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda \alpha_i y^{(i)} + \sum_{i=1}^{k} (1-\lambda) \beta_i z^{(i)},$$

де

$$\lambda \alpha_i \ge 0, i = \overline{1,m}, (1-\lambda)\beta_i \ge 0, i = \overline{1,k},$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda \alpha_i + \sum_{i=1}^{k} (1-\lambda)\beta_i = \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{k} \beta_i = \lambda + (1-\lambda) = 1.$$

Звідси слідує, що точка u є опуклою комбінацією точок

$$y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(m)}, z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(k)}$$

з множини X, а тому належить множині Y при всіх $\lambda \in [0;1]$. Отже Y – опукла множина, яка містить X. Але coX за означенням належить всім опуклим множинам, які містять в собі X, і тому $coX \subseteq Y$. Враховуючи раніше доведене включення $Y \subseteq coX$, робимо висновок, що $coX = Y$.

З цього твердження незрозуміло, опуклою комбінацією скількох точок з множини X може бути подана довільна точка x з coX. Однак виявляється, що в просторі R^n для одержання множини coX досить обмежитися розглядом опуклих комбінацій не більш ніж $n+1$ точок з X. Цей факт, відомий як *теорема Каратеодорі*, є одним з найважливіших у скінченновимірному опуклому аналізі.

Для доведення теореми Каратеодорі потрібні деякі відомості з лінійної алгебри.

О з н а ч е н н я 11.4. Вектори $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$ з простору R^n називаються *лінійно незалежними*, якщо рівність

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^{(i)} = O_n$$

має місце тоді і тільки тоді, коли всі коефіцієнти $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1,m}$, де $O_n = (0, 0, \ldots, 0)$ – нуль-вектор в R^n.

О з н а ч е н н я 11.5. Вектори $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$ з простору R^n називаються *лінійно залежними*, якщо знайдуться числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, не всі рівні нулеві, тобто $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 > 0$, і такі, що

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^{(i)} = O_n.$$

Як відомо, у просторі R^n може бути не більше ніж n лінійно незалежних векторів.

Л е м а 11.6. *Для системи лінійно залежних векторів $x^{(1)},x^{(2)},...,x^{(m)}$ з R^n при $m \ge n+2$ знайдуться числа α_i, $i=\overline{1,m}$, не всі рівні нулеві і такі, що*

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x^{(i)} = O_n \quad і \quad \sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 0.$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо в просторі R^{n+1} систему векторів $\bar{x}^{(i)}=(1,x_1^{(i)},x_2^{(i)},...,x_n^{(i)})$, $i=\overline{1,m}$, $m \ge n+2$. Оскільки в R^{n+1} будь-які n+2 вектори лінійно залежні, то існують числа α_i, $i=\overline{1,m}$, такі, що $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2>0$ і

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i \bar{x}^{(i)} = O_{n+1}, \tag{11.4}$$

де O_{n+1} – нуль-вектор у просторі R^{n+1}. З (11.4) випливає, що

$$\alpha_1(1,x_1^{(1)},x_2^{(1)},...,x_n^{(1)})+...+\alpha_m(1,x_1^{(m)},x_2^{(m)},...,x_n^{(m)})=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i,\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_1^{(i)},...,\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_n^{(i)}\right)=O_{n+1},$$

тобто

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 0 \quad і \quad \sum_{i=1}^{m}\alpha_i x^{(i)} = O_n,$$

що й треба було довести.

Т е о р е м а 11.1 (Каратеодорі). *Нехай X – довільна непорожня множина з R^n. Тоді будь-яку точку опуклої оболонки множини X можна подати у вигляді опуклої комбінації не більш ніж n+1 точок з множини X.*

Д о в е д е н н я. Візьмемо довільну точку $x \in coX$. Тоді, згідно леми 11.5, існує деяке натуральне число m таке, що має місце подання

$$x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x^{(i)},\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1,\ \lambda_i \ge 0,\ x^{(i)}\in X,\ i=\overline{1,m}. \tag{11.5}$$

Без обмеження загальності можна вважати, що всі $\lambda_i>0$. Треба довести, що в (11.5) $m \le n+1$, тобто число ненульових доданків в (11.5) можна зменшити, якщо $m>n+1$ Припустимо, що $m \ge n+2$. Тоді вектори $x^{(i)}$, $i=\overline{1,m}$, лінійно залежні і тому згідно леми 11.6 існують такі числа $\alpha_i, i=\overline{1,m}$, що $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2>0$ і

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=0,\ \sum_{i=1}^{m}\alpha_i x^{(i)}=O_n. \tag{11.6}$$

З цих співвідношень випливає, що серед чисел $\alpha_i, i=\overline{1,m}$, обов'язково є як додатні, так і від'ємні (принаймні по одному). Покладемо

$$\beta=\min_{i\in I}\frac{\lambda_i}{\alpha_i}, \tag{11.7}$$

де I – множина індексів i, для яких $\alpha_i>0$. При цьому нехай мінімум в (11.7) досягається при $i=i_0$, тобто $\beta=\frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}}$. Розглянемо числа виду $\bar{\lambda}_i=\lambda_i-\beta\alpha_i$, $i=\overline{1,m}$. Покажемо, що $\bar{\lambda}_i \ge 0$ для будь-якого $i=\overline{1,m}$. Дійсно, при $\alpha_i \le 0$ це очевидно, а при $\alpha_i>0$ це випливає з вибору числа β, оскільки $\frac{\lambda_i}{\alpha_i}-\frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}}>0$ для будь-яких $i=\overline{1,m}$ і таким чином $\lambda_i-\frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}}\alpha_i>0$. При цьому $\bar{\lambda}_{i_0}=\lambda_{i_0}-\beta\alpha_{i_0}=0$. Тоді з урахуванням (11.6) із співвідношень

$$x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x^{(i)}-\beta O_n=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x^{(i)}-\beta\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x^{(i)}=\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i-\beta\alpha_i)x^{(i)}=\sum_{i=1}^{m}\bar{\lambda}_i x^{(i)}, \tag{11.8}$$

$$\bar{\lambda}_i\ge 0,\ x^{(i)}\in X,\ i=\overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m}\bar{\lambda}_i=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i-\beta\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$$

випливає, що $x \in coX$ і в опуклій комбінації (11.8) принаймні один доданок дорівнює нулеві (доданок з номером i_0). Таким чином, точку $x \in coX$ можна подати як опуклу комбінацію вже не більш ніж $m-1$ точок з множини X. Таке зменшення можливе доти, поки $m \ge n+2$. Звідси і випливає твердження теореми.

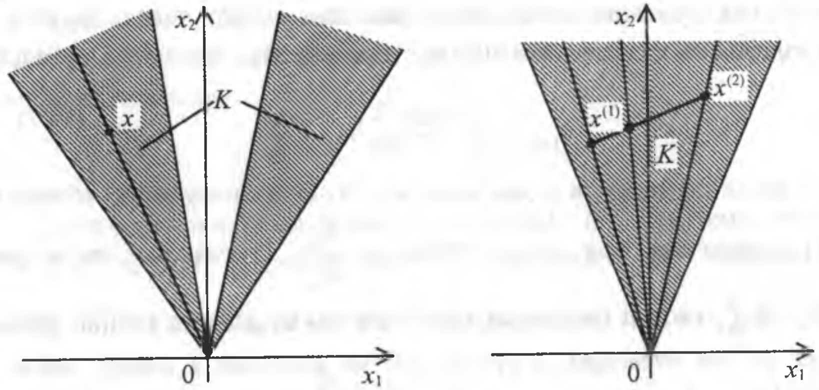
З а у в а ж е н н я. Коли мінімум в (11.7) досягається для кількох номерів i, тоді нульових доданків в опуклій комбінації (11.8) буде більше, ніж один. У цьому випадку може бути, що $m \le n+1$.

О з н а ч е н н я 11.6. Множина $K \subset R^n$ називається:

– *конусом*, якщо для будь-яких $x \in K$ і $\lambda \ge 0$ $\lambda x \in K$, тобто якщо множина K разом з будь-якою своєю точкою містить промінь, який проходить через неї і має вершину в початку координат (рис. 11.4 а);

– *опуклим конусом*, якщо K одночасно є конусом і опуклою множиною (рис. 11.4 б).

Можна показати, що множина $K \subset R^n$ буде опуклим конусом, якщо для будь-яких $x^{(1)}\in K, x^{(2)}\in K$ і $\lambda_1\ge 0,\ \lambda_2\ge 0$ $\lambda_1 x^{(1)}+\lambda_2 x^{(2)}\in K$.



а) б)

Рис. 11.4

Нехай $X \subset R^n$ – замкнена опукла множина і $x^{(0)} \in X$. Розглянемо множину

$$K(x^{(0)}) = \{y \in R^n \mid y = \lambda(x - x^{(0)}),\ \lambda > 0,\ x \in X\},$$

при цьому $O_n \in K(x^{(0)})$, оскільки $y = O_n$ при $x = x^{(0)}$.

Означення 11.7. Замикання $\bar{K}(x^{(0)})$ множини $K(x^{(0)})$ називається *конусом можливих напрямів* множини X в точці $x^{(0)}$ (рис. 11.5).

Конус можливих напрямів множини X в точці $x^{(0)}$ будемо позначати $\Gamma(x^{(0)})$.

Можна показати (див., наприклад, [31], стор. 31), що якщо $X \subset R^n$ – замкнена опукла множина, то $K(x^{(0)})$ – опуклий конус, а $\Gamma(x^{(0)})$ – замкнений опуклий конус.

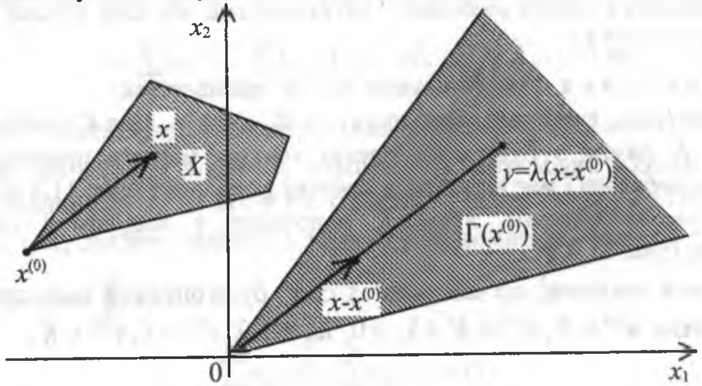


Рис. 11.5.

Означення 11.8. Нехай $K \subset R^n$ – конус. Множина всіх точок $y \in R^n$, що задовольняють нерівність $\langle x, y \rangle \geq 0$ для будь-яких $x \in K$, називається *спряженим конусом* до конуса K і позначається K^*, тобто

$$K^* = \{y \in R^n \mid \langle x, y \rangle \geq 0\ \ \forall x \in K\}.$$

Для опуклого конуса K такого, що $K \neq R^n$, спряжений конус K^* являє собою множину променів, які утворюють з кожним променем даного конуса K кут не більший, ніж прямий (рис. 11.6).

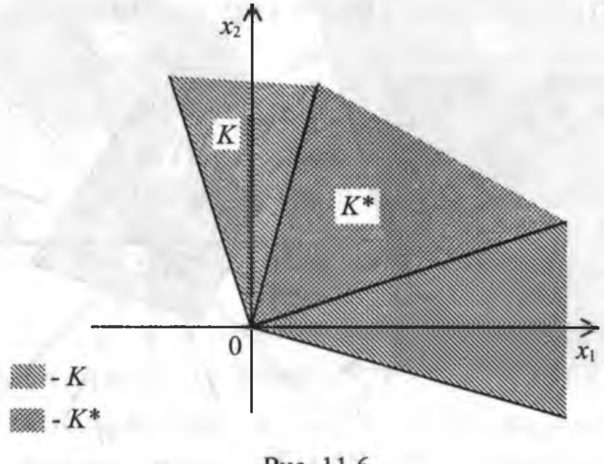


Рис. 11.6.

Лема 11.7. *Якщо множина $K \subset R^n$ – конус, то $K^* \subset R^n$ є замкненим опуклим конусом.*

Доведення. Спочатку доведемо замкненість K^*. Нехай послідовність $\{y^{(k)}\}$ складається з точок, що належать конусу K^*, і має границю $\lim\limits_{k \to \infty} y^{(k)} = y$. Покажемо, що точка $y \in K^*$, тобто що $\langle x, y \rangle \geq 0$ $\forall x \in K$. Оскільки $y^{(k)} \in K^*$, то $\langle x, y^{(k)} \rangle \geq 0$ $\forall x \in K$. Переходячи в цій нерівності до границі при $k \to \infty$ і використовуючи властивість неперервності скалярного добутку (у даному випадку, неперервність лінійної функції), одержуємо, що

$$\lim_{k \to \infty} \langle x, y^{(k)} \rangle = \langle x, y \rangle \geq 0\ \forall x \in K.$$

Для доведеня опуклості K^* візьмемо дві довільні точки $y^{(1)} \in K^*$, $y^{(2)} \in K^*$ і розглянемо довільну точку, яка є їх опуклою комбінацією:

$$y = \lambda_1 y^{(1)} + \lambda_2 y^{(2)},\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Оскільки $\langle x, y^{(1)}\rangle \geq 0 \ \ \forall x \in K$ і $\langle x, y^{(2)}\rangle \geq 0 \ \ \forall x \in K$, то

$$\langle x, y\rangle = \langle x, \lambda_1 y^{(1)} + \lambda_2 y^{(2)}\rangle = \lambda_1 \langle x, y^{(1)}\rangle + \lambda_2 \langle x, y^{(2)}\rangle \geq 0 \ \ \forall x \in K,$$

тобто $y \in K^*$.

П р и к л а д 11.1.

1. Якщо $K = R^n$, то $K^* = \{O_n\}$.
2. Якщо $K = \{O_n\}$, то $K^* = R^n$.
3. Якщо $K = \{x \in R^2 | x = (x_1, x_2), x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$, то $K^* = K$ (рис. 11.7 а).
4. Якщо $\Gamma(x^{(0)})$ - конус можливих напрямів множини $X \subset R^n$ в точці $x^{(0)}$ і $x^{(0)} \in \operatorname{int} X$, то $\Gamma(x^{(0)}) = K(x^{(0)}) = R^n$ і $\Gamma^*(x^{(0)}) = \{O_n\}$ (рис. 11.7. б).

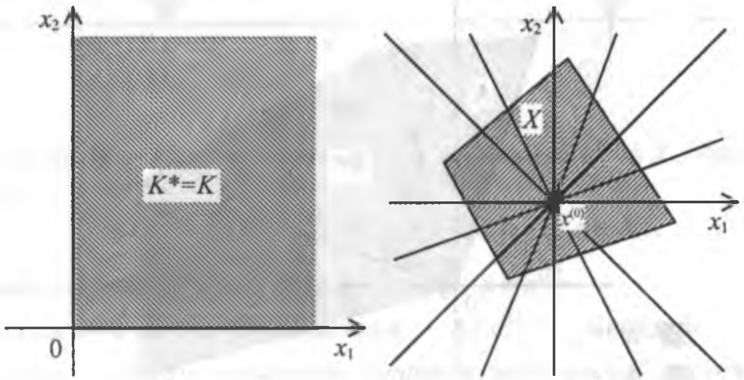


Рис. 11.7.

О з н а ч е н н я 11.9. Нехай $X \subset R^n$. Перетин всіх опуклих конусів з R^n, які містять множину X, називається *конічною оболонкою* множини X і позначається *coneX* (рис. 11.8).

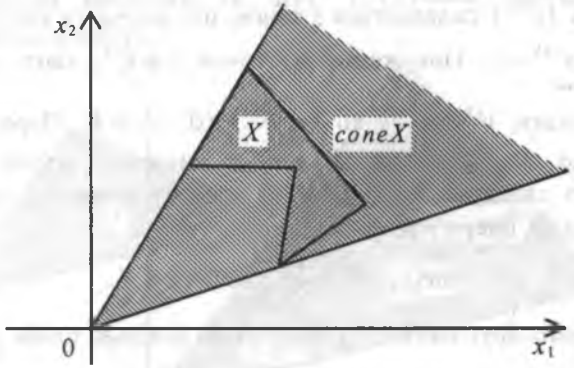
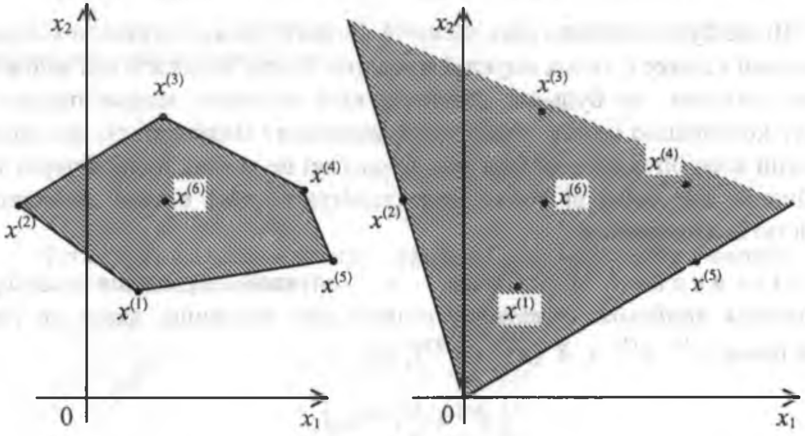


Рис. 11.8.

Зрозуміло, що конічна оболонка є опуклим конусом.

О з н а ч е н н я 11.10. Нехай $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}$ – точки з простору R^n. Опукла оболонка цих точок називається *опуклим многогранником* натягнутим на ці точки (рис. 11.9 а)), а їх конічна оболонка – *многогранним конусом* (рис. 11.9 б)).



а) б)

Рис. 11.9.

О з н а ч е н н я 11.11. Нехай $x^{(0)}, x^{(1)}, ..., x^{(m)}$ – точки з простору R^n такі, що система векторів $\{x^{(i)} - x^{(0)}\}, i = 1, 2, ..., m$, лінійно незалежна. Опукла оболонка точок $x^{(0)}, x^{(1)}, ..., x^{(m)}$ називається m-вимірним *симплексом*, натягнутим на вказані точки, і позначається S_m або $S_m(x^{(0)}, x^{(1)}, ..., x^{(m)})$.

Точки $x^{(0)}, x^{(1)}, ..., x^{(m)}$ – називаються *вершинами симплекса*. Наприклад, при $m = 0$ симплекс являє собою одну точку, при $m = 1$ – відрізок, при $m = 2$ – трикутник, при $m = 3$ – тетраедр (рис. 11.10).

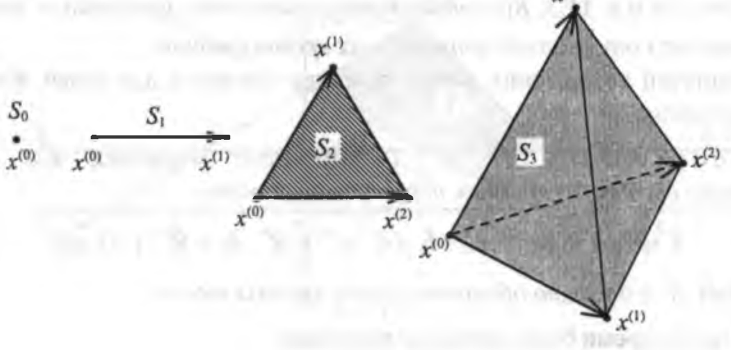


Рис. 11.10.

Симплекс є частинним випадком опуклого многогранника і згідно леми 11.5 його можна подати у вигляді

$$S_m = \{x \in R^n \mid x = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i x^{(i)},\ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ x^{(i)} \in X,\ i = \overline{0,m}\}.$$

Вище було показано (див. лему 11.4), що будь-яка опукла комбінація скінченної кількості точок опуклої множини також належить цій множині. Постає питання: чи будь-які точки опуклої множини можна подати як опуклу комбінацію інших точок з цієї множини? Виявляється, що досить широкий клас опуклих множин має точки, які не можна подати через такі комбінації, але саме ці точки характеризують такі опуклі множини і повністю їх визначають.

Означення 11.12. Точка x опуклої множини $X \subset R^n$ називається *крайньою* (*кутовою*) точкою цієї множини, якщо не існує таких точок $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ з X $(x^{(1)} \neq x^{(2)})$, що

$$\frac{1}{2}x^{(1)} + \frac{1}{2}x^{(2)} = x.$$

Геометрично це означає, що крайня точка опуклої множини не може бути серединою відрізка, кінці якого належать цій множині. Наприклад, вершини симплекса є його крайніми точками. Не будь-яка опукла множина має крайні точки. Прикладом такої множини є півпростір

$$H^-(0,p) = \{x \in R^n | \langle p, x \rangle \leq 0,\ p \in R^n\}.$$

Але компактні опуклі множини повністю характеризуються своїми крайніми точками.

Для компактних опуклих множин мають місце теореми (див., наприклад [6]):

Теорема 11.2. *Опукла оболонка компактної множини є компакт.*

Теорема 11.3. *Будь-яка опукла компактна множина в просторі R^n співпадає з опуклою оболонкою своїх крайніх точок.*

Наступні твердження мають важливе значення для задач лінійного програмування.

Теорема 11.4. *Нехай X – обмежена множина, яка задана скінченною системою лінійних нерівностей, тобто*

$$X = \{x \in R^n | \langle a^{(i)}, x \rangle - b_i \leq 0,\ a^{(i)} \in R^n,\ b_i \in R^1,\ i = \overline{1,m}\}.$$

Тоді X є опуклою оболонкою своїх крайніх точок.

З цієї теореми безпосередньо випливає

Теорема 11.5. *Обмежена множина, кожна точка якої є розв'язком скінченної системи лінійних нерівностей, являє собою опуклий многогранник.*

Для ілюстрації останніх двох тверджень розглямемо приклад.

Приклад 11.2. Побудувати множину X, задану системою лінійних нерівностей, і знайти її крайні точки:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ -x_1 - 2x_2 \leq -4, \\ -x_2 + 1 \leq 0. \end{cases}$$

Розв'язування. Спочатку замінимо в нерівностях системи знаки нерівностей знаками рівностей:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, & (1) \\ -2x_1 + 3x_2 = 6, & (2) \\ -x_1 - 2x_2 = -4, & (3) \\ -x_2 + 1 = 0, & (4) \end{cases}$$

і побудуємо відповідні прямі (рис. 11.11). Далі знайдемо півплощини, які визначаються відповідними нерівностями, та їх перетин. Таким чином, одержимо опуклу множину X, що обмежена чотирикутником з вершинами $A(0,2), B(1{,}8; 3{,}2), C(4,1), D(2,1)$, які є крайніми точками множини X.

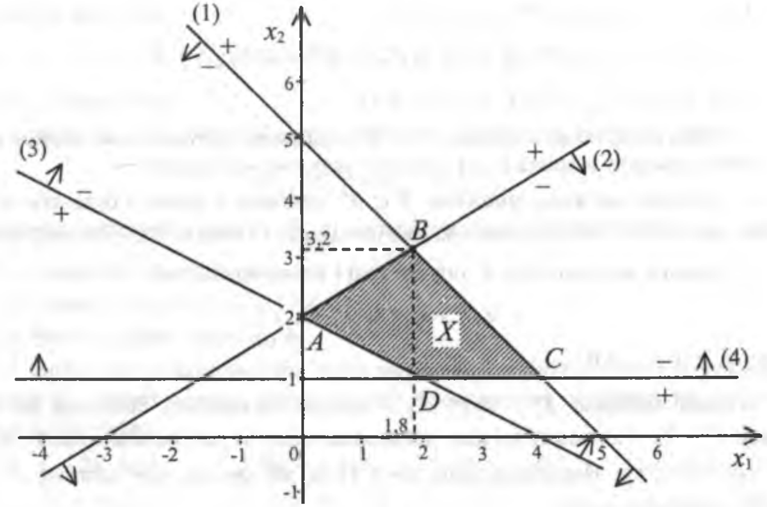


Рис. 11.11.

Запитання для самоконтролю

1. Що вивчає опуклий аналіз?
2. Яка множина називається опуклою?
3. Що називається сумою двох множин?
4. Що називається лінійною, афінною, конічною і опуклою комбінацією точок?
5. Що називається опуклою оболонкою множини?
6. Як формулюється теорема Каратеодорі?
7. Що називається конусом, опуклим конусом, конусом можливих напрямів, спряженим конусом, конічною оболонкою, опуклим многогранником, многогранним конусом, симплексом?
8. Яка точка опуклої множини називається крайньою?
9. Які властивості мають компактні опуклі множини?

Вправи для самостійного виконання

1. Довести, що множина X опукла:

1) $X = \{(x_1,x_2)\in R^2 \mid -a \le x_1 \le a,\ -b \le x_2 \le b,\ a>0,\ b>0\}$;

2) $X = \{(x_1,x_2)\in R^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \le r^2,\ r>0\}$.

2. Скориставшись, де це можливо і необхідно, програмними засобами типу Advanced Grapher, GRAN1 тощо для відповідних графічних побудов, з'ясувати, чи є опуклими множини:

1) $X = \{(x_1,x_2)\in R^2 \mid x_1 - x_2 \le 3,\ x_1^2 + x_2^2 \le 9\}$;

2) $X = \{(x_1,x_2)\in R^2 \mid x_2 \ge x_1 - 3\}$;

3) $X = \{(x_1,x_2)\in R^2 \mid x_1 x_2 < 1,\ x_1 > 0,\ x_2 > 0\}$;

4) $X = \{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x_3 \ge x_1^2 + x_2^2\}$;

5) $X = \{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 < 2,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\}$;

6) $X = \{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ge 4\}$.

3. Навести приклад множини $X \subset R^1$, яка разом з будь-якими своїми точками x, y містить середину відрізка $[x,y]$, але не є опуклою множиною.

4. Довести, що якщо множина $X \subset R^n$ замкнена і разом з будь-якими своїми точками x, y містить також і середину відрізка $[x,y]$, то вона є опуклою множиною.

5. Довести, що множина X опукла тоді і тільки тоді, коли

$$\lambda_1 X + \lambda_2 X = (\lambda_1 + \lambda_2) X$$

при всіх $\lambda_1 \ge 0$ і $\lambda_2 \ge 0$.

6. Нехай множина X_1 – круг, X_2 – квадрат на площині. Зобразити на площині множину $X_1 + X_2$. Розглянути всі можливі випадки відносно розміщення множин X_1 і X_2.

П р и м і т к а. Нагадаємо (див. лему 11.2), що сумою двох множин $X_1 \subseteq R^n$ і $X_2 \subseteq R^n$ є множина виду

$$X = X_1 + X_2 = \{x \in R^n \mid x = x^{(1)} + x^{(2)},\ x^{(1)} \in X_1,\ x^{(2)} \in X_2\}.$$

7. Зобразити множину $X_1 + X_2$, якщо

$$X_1 = \{(x_1,x_2)\in R^2 \mid x_1 \ge 0, x_2 = 0\},\ X_2 = \{(x_1,x_2)\in R^2 \mid x_2 \ge e^{x_1}\},$$

і з'ясувати чи буде вона замкненою.

8. Довести, що конічна оболонка множини $X \subset R^n$ складається з тих і тільки тих точок, які є конічними комбінаціями скінченної кількості точок з X.

9. Нехай X – опукла множина. Показати, що

$$coneX = \{y \in R^n \mid y = \lambda x,\ \lambda \ge 0,\ x \in X\}.$$

10. Нехай $X_1, X_2, ..., X_m$ – довільні множини з R^n. Показати, що

$$\sum_{i=1}^{m} coX_i = co\left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right) \text{ і } \sum_{i=1}^{m} coneX_i = cone\left(\bigcup_{i=1}^{m} X_i\right).$$

11. Для опуклих конусів, які зображені на рис. 11.12 побудувати спряжені конуси.

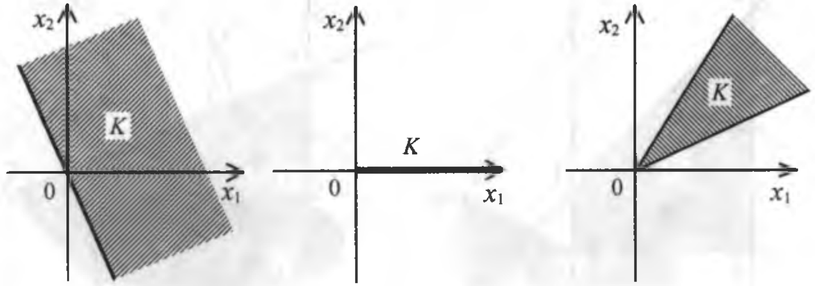


Рис. 11.12.

12. Дано множини $K_1 = \{(x_1,0)\in R^2 \mid x_1 \ge 0\}$, $K_2 = \{(0,x_2)\in R^2 \mid x_2 \ge 0\}$.
Знайти множини

а) $K_1 + K_2$; б) $(K_1 + K_2)^*$; в) K_1^* і K_2^*; г) $K_1^* \cap K_2^*$

і порівняти їх між собою.

13. Нехай K_1 і K_2 – опуклі конуси. Довести, що $K_1 + K_2$ опуклий конус і

$$(K_1 + K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*.$$

14. Довести, що якщо X – замкнена опукла множина і $x^{(0)} \in X$, то $\Gamma(x^{(0)})$ і $\Gamma^*(x^{(0)})$ – замкнені опуклі конуси.

15. Довести теореми 11.2 – 11.4.

16. Знайти крайні точки круга.

17. Побудувати множини розв'язків даних систем лінійних нерівностей і знайти координати їх крайніх точок, скориставшись програмними засобами типу Advanced Grapher, GRAN1 тощо:

$$1)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 6, \\ -x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 3, \\ 2x_1 - 0{,}1x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases} \quad 4)\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \ge 0, \\ x_1 + 4x_2 \ge 0, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 0, \end{cases} \quad 6)\ \begin{cases} 2x_1 - 7x_2 \ge 0, \\ -x_1 + x_2 \ge 0, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 0, \end{cases} \quad 7)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 12, \end{cases} \quad 8)\ \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \ge 31, \\ x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 18, \end{cases}$$

$$9)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 12, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 7x_1 + 4x_2 \ge 25, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases} \quad 10)\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \ge 3, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 11, \\ 2x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases} \quad 11)\ \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 10, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases} \quad 12)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 10x_1 + 9x_2 \le 90, \\ 6x_1 - 5x_2 \le 30, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

18. За даними многокутниками (рис. 11.13) відтворити відповідні системи лінійних нерівностей:

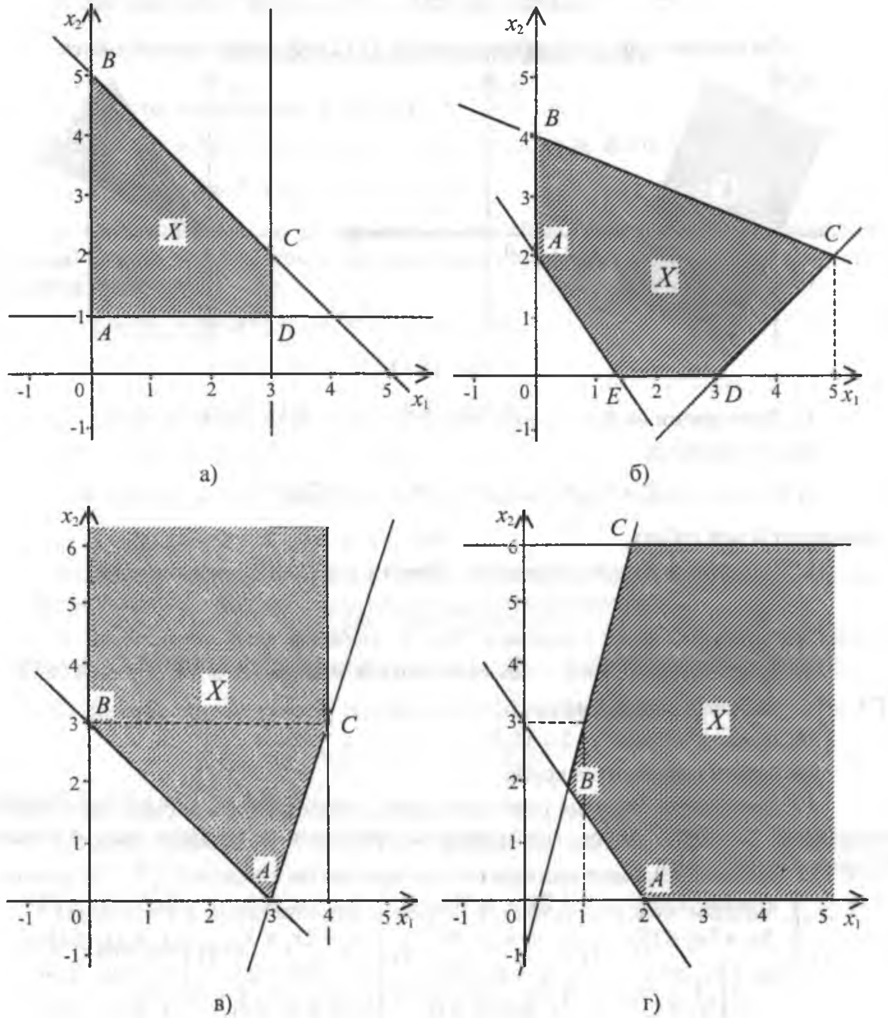


Рис. 11.13.

§12. Проекція точки на множину

При розробці теоретичних положень опуклого аналізу та при побудові і дослідженні чисельних методів умовної оптимізації широко використовується поняття проекції точки на множину.

О з н а ч е н н я 12.1. *Проекцією* точки $x^{(0)} \in R^n$ на множину $X \subset R^n$ називається точка $p = P_X(x^{(0)}) \in X$ така, що для будь-яких $x \in X$ виконується умова

$$\| p - x^{(0)} \| \le \| x - x^{(0)} \|,$$

тобто точка, яка є найближчою до $x^{(0)}$ серед усіх точок з множини X (рис. 12.1 а).

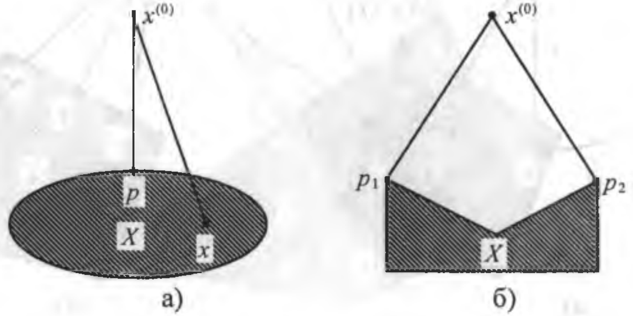


Рис. 12.1.

Зрозуміло, що якщо $x^{(0)} \in X$, то $p = x^{(0)}$. Проекція точки на множину, взагалі кажучи, визначається неоднозначно (рис. 12.1 б). Крім того, проекція точки на множину (наприклад відкриту) не завжди існує.

Величину

$$\rho(x^{(0)}, X) = \inf_{x \in X} \| x - x^{(0)} \| \qquad (12.1)$$

називають *відстанню* від точки $x^{(0)}$ до множини X.

Якщо проекція точки на множину існує, то з означення 12.1 і (12.1) випливає, що

$$\rho(x^{(0)}, X) = \| P_X(x^{(0)}) - x^{(0)} \|. \qquad (12.2)$$

Т е о р е м а 12.1. *Для будь-якої замкненої множини $X \subset R^n$ і будь-якої точки $x^{(0)} \in R^n$ існує точка $p \in X$, яка є проекцією $x^{(0)}$ на множину X. Якщо множина X опукла, то точка p єдина.*

Д о в е д е н н я. Якщо $x^{(0)} \in X$, то, як було відмічено, $p = x^{(0)}$ і $\rho(x^{(0)}, X) = 0$.

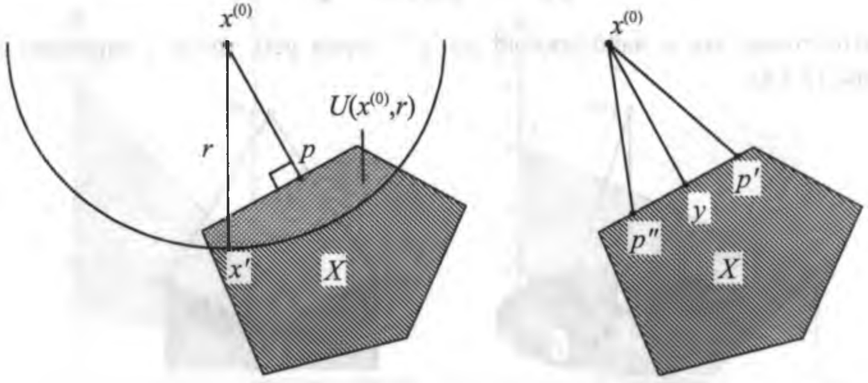
Нехай точка $x^{(0)} \notin X$. Розглянемо довільну точку $x' \in X$, число $r = \| x' - x^{(0)} \|$ і множину

$$U(x^{(0)}, r) = \{x \in X \mid \| x - x^{(0)} \| \le r\}.$$

Ця множина непорожня, оскільки їй належить точка x', а також замкнена і обмежена, як перетин замкненої множини X і замкненої обмеженої множини

$$S(x^{(0)}, r) = \{x \in R^n \mid \| x - x^{(0)} \| \le r\}$$

(рис. 12.2 а), тобто множина $U(x^{(0)}, r)$ є компактом в R^n.



а) б)

Рис. 12.2.

Тоді за теоремою Вейєрштрасса неперервна функція $f(x) = \| x - x^{(0)} \|$ на множині $U(x^{(0)}, r)$ має точку мінімуму p. Зрозуміло, що точка p буде також точкою мінімуму функції $f(x)$ на всій множині X. Таким чином, проекція точки $x^{(0)}$ на X існує і співпадає з точкою p.

Для доведення єдиності проекції у випадку, коли множина X опукла, припустимо, що існують точки $p' \in X$, $p'' \in X$ такі, що $p' \ne p''$ і

$$\| p' - x^{(0)} \| = \| p'' - x^{(0)} \| = \rho(x^{(0)}, X).$$

Оскільки множина X опукла, то точка $y = \frac{1}{2}p' + \frac{1}{2}p''$, яка є серединою відрізка $[p', p'']$, належить X. Точки $x^{(0)}, p', p''$ містяться в одній площині. При цьому, згідно припущення, точки $x^{(0)}, p', p''$ утворюють рівнобічний трикутник з вершиною в точці $x^{(0)}$, основою $[p', p'']$ і висотою $[x^{(0)}, y]$ (рис. 12.2 б). Звідси:

$$\| x^{(0)} - y \| < \rho(x^{(0)}, X),$$

що суперечить означенню відстані від точки до множини.

Т е о р е м а 12.2. *Для того, щоб точка $p \in X$ була проекцією точки $x^{(0)} \in R^n$ на опуклу замкнену множину X, необхідно і достатньо, щоб для всіх $x \in X$ виконувалась нерівність*

$$\langle x - p, p - x^{(0)} \rangle \ge 0. \qquad (12.3)$$

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай точка p – проекція точки $x^{(0)}$ на множину X. Візьмемо довільну точку $x \in X$ і розглянемо її проекцію y на промінь

$$l^+(x^{(0)}, p - x^{(0)}) = \{z \in R^n \mid z = x^{(0)} + \lambda(p - x^{(0)}), \lambda \ge 0\}$$

(рис. 12.3).

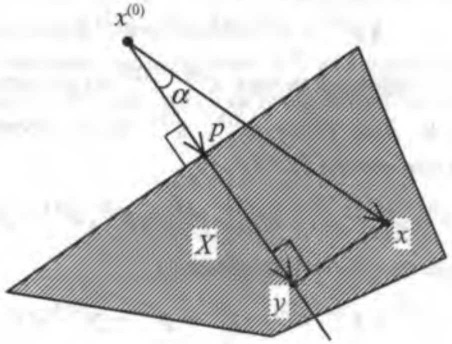


Рис. 12.3.

З трикутника $x^{(0)}xy$, враховуючи властивості скалярного добутку, для векторів $x - x^{(0)}$ і $p - x^{(0)}$ маємо (рис. 12.3)

$$\langle x - x^{(0)}, p - x^{(0)} \rangle = \| x - x^{(0)} \| \cdot \| p - x^{(0)} \| \cos\alpha =$$

$$= \| x - x^{(0)} \| \cdot \| p - x^{(0)} \| \frac{\| y - x^{(0)} \|}{\| x - x^{(0)} \|} = \| p - x^{(0)} \| \cdot \| y - x^{(0)} \|.$$

Звідси

$$\| y - x^{(0)} \| = \frac{\langle x - x^{(0)}, p - x^{(0)} \rangle}{\| p - x^{(0)} \|},$$

при цьому $\| y - x^{(0)} \| \ge \| p - x^{(0)} \|$. Тоді $\langle x - x^{(0)}, p - x^{(0)} \rangle \ge \| p - x^{(0)} \|^2$ або

$$\langle (x - p) + (p - x^{(0)}), p - x^{(0)} \rangle = \langle x - p, p - x^{(0)} \rangle + \| p - x^{(0)} \|^2 \ge \| p - x^{(0)} \|^2.$$

Звідси $\langle x - p, p - x^{(0)} \rangle \ge 0$ для будь-яких $x \in X$.

9 — 5-481

Достатність. Нехай для точки $x^{(0)} \in R^n$ і всіх $x \in X$ має місце нерівність (12.3). Тоді для будь-якого $x \in X$ маємо

$$\| x - x^{(0)} \|^2 = \| (x-p) + (p - x^{(0)}) \|^2 = \| x - p \|^2 +$$

$$+ 2\langle x - p, p - x^{(0)} \rangle + \| p - x^{(0)} \|^2 \geq \| p - x^{(0)} \|^2,$$

тобто згідно означення 12.1 точка p – проекція точки $x^{(1)}$ на X.

Зауваження. Геометрично нерівність (12.3) означає, що вектори $x-p$ для всіх $x \in X$, $x \neq p$, утворюють з вектором $p - x^{(0)}$ кут, не більший від прямого.

Теорема 12.3. *Нехай X – замкнена опукла множина в R^n. Тоді для будь-яких точок $x^{(1)} \in R^n$, $x^{(2)} \in R^n$ має місце нерівність*

$$\| p^{(1)} - p^{(2)} \| \leq \| x^{(1)} - x^{(2)} \|, \qquad (12.4)$$

де $p^{(1)} \in X$, $p^{(2)} \in X$ – проекції точок $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ на множину X відповідно.

Доведення. Для точок $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ та їх проекцій $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ на множину X згідно нерівності (12.3)

$$\langle p^{(2)} - p^{(1)}, p^{(1)} - x^{(1)} \rangle \geq 0, \ \langle p^{(2)} - p^{(1)}, x^{(2)} - p^{(2)} \rangle \geq 0.$$

Додавши ці дві нерівності, одержимо

$$\langle p^{(2)} - p^{(1)}, x^{(2)} - x^{(1)} + p^{(1)} - p^{(2)} \rangle \geq 0.$$

Звідси

$$\langle p^{(2)} - p^{(1)}, x^{(2)} - x^{(1)} \rangle - \langle p^{(2)} - p^{(1)}, p^{(2)} - p^{(1)} \rangle \geq 0,$$

або

$$\langle p^{(2)} - p^{(1)}, x^{(2)} - x^{(1)} \rangle \geq \| p^{(2)} - p^{(1)} \|^2. \qquad (12.5)$$

З іншого боку, в силу нерівності Коші-Буняковського

$$0 \leq \langle p^{(2)} - p^{(1)}, x^{(2)} - x^{(1)} \rangle \leq \| p^{(2)} - p^{(1)} \| \cdot \| x^{(2)} - x^{(1)} \|. \qquad (12.6)$$

Тоді з (12.5) і (12.6) одержимо

$$\| p^{(2)} - p^{(1)} \|^2 \leq \| p^{(2)} - p^{(1)} \| \cdot \| x^{(2)} - x^{(1)} \|$$

для будь-яких точок $x^{(1)} \in R^n$, $x^{(2)} \in R^n$. Поділивши цю нерівність на $\| p^{(2)} - p^{(1)} \| \neq 0$, одержимо

$$\| p^{(2)} - p^{(1)} \| \leq \| x^{(2)} - x^{(1)} \|.$$

Для $\| p^{(2)} - p^{(1)} \| = 0$ нерівність (12.4) очевидна. Отже, нерівність (12.5) виконується для будь-яких точок $x^{(1)} \in R^n$, $x^{(2)} \in R^n$. Що й треба було довести.

Задача знаходження проекції точки на множину в загальному випадку є задачею умовної мінімізації нелінійної функції (див. (12.1) і (12.2)), розв'язування якої є досить складною проблемою. Тому чисельні методи оптимізації, в яких використовується процедура пошуку проекції точки на множину, доцільно застосовувати тоді, коли допустима множина X має досить просту структуру. До таких множин відносяться, наприклад, гіперплощина, куля, паралелепіпед, замкнений півпростір. Проекція точки на такі множини може бути знайдена в явному вигляді з геометричних міркувань.

Приклад 12.1. Нехай

$$H(g,c) = \{ x \in R^n \mid \langle g, x \rangle = c \}$$

гіперплощина з нормаллю $g \neq O_n$, де $c = const$. Треба знайти проекцію довільної точки $x^{(0)} \notin H(g,c)$ на цю гіперплощину в явному вигляді.

З геометричних міркувань проекцію точки $x^{(0)}$ на гіперплощину $H(g,c)$ (рис. 12.4) будемо шукати у вигляді $y = x^{(0)} - \alpha g$, тобто як точку прямої, що проходить через точку $x^{(0)}$ і колінеарна до g.

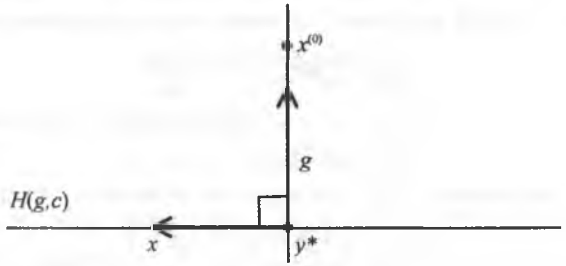


Рис. 12.4.

Визначимо α з умови, що $y \in H(g,c)$:

$$\langle g, y \rangle = \langle g, x^{(0)} - \alpha g \rangle = \langle g, x^{(0)} \rangle - \alpha \| g \|^2 = c.$$

Звідси маємо $\alpha^* = \dfrac{\langle g, x^{(0)} \rangle - c}{\| g \|^2}$ і $y^* = x^{(0)} - \alpha^* g$. Доведемо, що знайдена таким чином точка y^* дійсно є проекцією точки $x^{(0)}$ на $H(g,c)$. Для цього скористаємося теоремою 12.2, тобто покажемо, що

$$\langle x - y^*, y^* - x^{(0)} \rangle \geq 0$$

для будь-яких $x \in H(g,c)$. Зауважимо, що для проекції p точки $x^{(0)}$ на гіперплощину $H(g,c)$ має місце рівність $\langle x - p, p - x^{(0)} \rangle = 0$, тобто вектори $x - p$ для всіх $x \in X$ утворюють з вектором $p - x^{(0)}$ прямий кут. Враховуючи вираз для y^*, одержимо

$$\langle x - y^*, x^{(0)} - \alpha^* g - x^{(0)} \rangle = \langle x - y^*, -\alpha^* g \rangle = \alpha^* \langle y^* - x, g \rangle = \alpha^* (\langle g, y^* \rangle - \langle g, x \rangle)$$

і оскільки обидві точки x, y^* належать $H(g,c)$, то $\langle x - y^*, x^{(0)} - y^* \rangle = \alpha^* (c - c) = 0$, що й треба було довести.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається проекцією точки на множину?
2. Які властивості має проекція точки на замкнену і опуклу множини?
3. Як формулюється критерій існування проекції точки на множину і в чому полягає сутність його геометричної інтерпретації?

Вправи для самостійного виконання

1. З'ясувати, чи буде мати місце нерівність (12.3), якщо множина X неопукла?

2. Для довільної точки $y \in R^n$ довести наступні твердження:

1) якщо $X = \{x \in R^n \mid \| x - x^{(0)} \| \le r\}$ – куля радіуса $r > 0$ з центром в точці $x^{(0)}$, то проекція p точки $y \notin X$ на множину X визначається співвідношенням

$$p = x^{(0)} + r\frac{y - x^{(0)}}{\| y - x^{(0)} \|};$$

2) якщо $X = \{x \in R^n \mid a_j \le x_j \le b_j,\ j = \overline{1,n}\}$ – n-вимірний паралелепіпед, де $a_j < b_j$ – деякі числа з R^1, $j = \overline{1,n}$, то проекція $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \notin X$ на множину X визначається співвідношенням

$$p_i = \begin{cases} a_j, & x_j^{(0)} < a_j, \\ x_j^{(0)}, & a_j \le x_j^{(0)} \le b_j, \quad j = \overline{1,n}; \\ b_j, & x_j^{(0)} > b_j, \end{cases}$$

3) якщо $X = \{x \in R^n \mid x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}\}$ – невід'ємний ортант в R^n, то проекція $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \notin X$ на множину X являє собою вектор

$$p = (\max(0; x_1^{(0)}), \max(0; x_2^{(0)}), \dots, \max(0; x_n^{(0)}));$$

4) якщо $X = H^-(g,c) = \{x \in R^n | \langle g,x \rangle \le c\}$ – замкнений півпростір в R^n, де $c = const \in R^1$, то проекція p точки $x^{(0)} \notin X$ на множину X визначається співвідношенням

$$p = x^{(0)} - \frac{(\langle g, x^{(0)} \rangle - c)}{\| g \|^2} g;$$

5) якщо $X = \{x \in R^n \mid Ax = b\}$ – множина розв'язків системи лінійних рівнянь, де $A = \{a_{ij}\}_{i=\overline{1,m},\, j=\overline{1,n}}$ – прямокутна матриця розмірності $m \times n$, рядки якої лінійно незалежні, при цьому $m < n$ (оскільки при $m = n$ множина X складається з однієї точки), то проекція p точки $x^{(0)} \notin X$ на множину X визначається співвідношенням

$$p = x^{(0)} - A^T (AA^T)^{-1} (Ax^{(0)} - b).$$

§13. Теореми відокремлення

Коли є дві опуклі множини, які не перетинаються, тоді виникає припущення про існування такої гіперплощини, що ці множини будуть знаходитися по різні боки від неї, тобто що множини можуть бути відокремлені одна від одної деякою гіперплощиною. Твердження такого роду об'єднуються під назвою теорем відокремлення. Вони відіграють важливу роль в опуклому аналізі, є потужним інструментом дослідження властивостей опуклих множин і функцій, а також широко використовуються в теорії необхідних умов екстремуму.

Означення 13.1. Нехай X і Y – дві непорожні множини в R^n. Говорять, що множини X і Y *відокремлені*, якщо існує ненульовий вектор $g \in R^n$ і число $c \in R^1$ такі, що має місце умова

$$\langle g,x \rangle \le c \le \langle g,y \rangle \quad \forall x \in X,\ \forall y \in Y. \tag{13.1}$$

Умову (13.1) можна замінити однією з умов:

$$\langle g, x - y \rangle \le 0 \quad \forall x \in X, \forall y \in Y \tag{13.2}$$

або

$$\sup_{x \in X} \langle g,x \rangle \le c \le \inf_{y \in Y} \langle g,y \rangle.$$

Нагадаємо, що множина виду

$$H(g,c) = \{x \in R^n | \langle g,x \rangle = c\},$$

де $g \ne O_n$, $c = const$, називається *гіперплощиною*, а множини

$$H^-(g,c) = \{x \in R^n | \langle g,x \rangle \le c\},$$

$$H^+(g,c) = \{x \in R^n | \langle g,x \rangle \ge c\} -$$

півпросторами (замкненими), що породжені цією гіперплощиною.

Тоді відокремлення множин X і Y означає, що їх можна розмістити в різних півпросторах, що породжені деякою гіперплощиною $H(g,c) = \{x \in R^n | \langle g,x \rangle = c\}$, тобто $X \subset H^-(g,c)$, а $Y \subset H^+(g,c)$ (чи навпаки $X \subset H^+(g,c)$, а $Y \subset H^-(g,c)$) (рис. 13.1 а–д). При цьому говорять, що гіперплощина $H(g,c)$ *відокремлює* множини X і Y, а саму гіперплощину називають *відокремлюючою*.

Зауваження.

1. В означенні 13.1 замість умови (13.1) можна використовувати умову

$$\langle g,x \rangle \ge c \ge \langle g,y \rangle \quad \forall x \in X,\ \forall y \in Y$$

(в залежності від напряму вектора g). Але для визначенності надалі будемо використовувати умову (13.1), оскільки в протилежному випадку можна взяти вектор $g' = -g$ замість вектора g і число $c' = -c$ замість числа c, а відокремлюючу гіперплощину подати у вигляді

$$H(g',c') = \{x \in R^n | \langle g',x \rangle = c'\}.$$

2. Враховуючи попереднє зауваження, легко бачити що, якщо гіперплощина $H(g,c)=\{x\in R^n \mid \langle g,x\rangle = c\}$ відокремлює множини X і Y, то гіперплощина $H(\alpha g,\alpha c)=\{x\in R^n \mid \langle \alpha g,x\rangle=\alpha c\}$, де $\alpha\neq 0$, також відокремлює ці множини. Тому при необхідності можна вважати, що $\| g\|=1$.

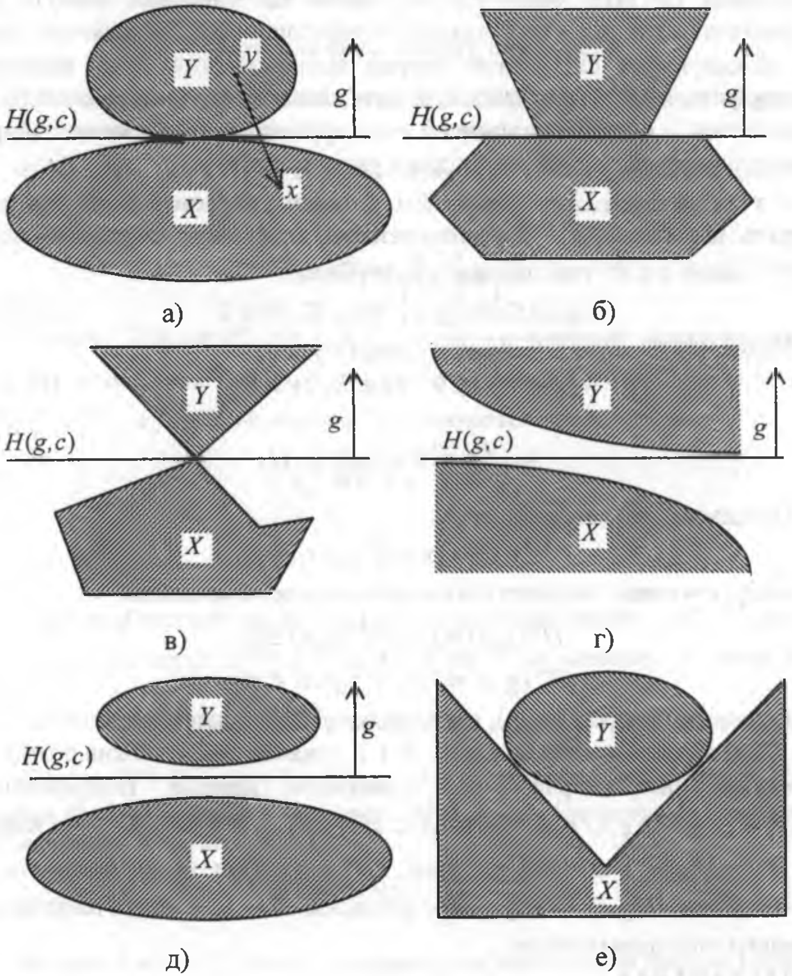


Рис. 13.1.

Відомо що, якщо гіперплощина $H(g,c)=\{x\in R^n | \langle g,x\rangle = c\}$ проходить через деяку точку $x^{(0)}\in R^n$, то $c=\langle g,x^{(0)}\rangle$ і, таким чином, гіперплощина $H(g,c)\}$ є множиною виду

$$H(g,x^{(0)})=\{x\in R^n | \langle g,x-x^{(0)}\rangle=0\}.$$

Нехай X – непорожня множина в R^n, а $Y=\{y^{(0)}\}$ – одноточкова множина в R^n. Тоді нерівність (13.1) набуває вигляду

$$\langle g,x\rangle \le c \le \langle g,y^{(0)}\rangle \quad \forall x\in X$$

і гіперплощина $H(g,y^{(0)})$ *відокремлює* множину X і точку $y^{(0)}$, при цьому

$$\langle g,x-y^{(0)}\rangle \le 0 \quad \forall x\in X. \qquad (13.3)$$

О з н а ч е н н я 13.2. Нехай X і Y – дві непорожні множини в R^n. Говорять, що множини X і Y *строго відокремлені*, якщо існує ненульовий вектор $g\in R^n$ і число $c\in R^1$ такі, що

$$\langle g,x\rangle < c < \langle g,y\rangle \;\; \forall x\in X, \forall y\in Y. \qquad (13.4)$$

Отже, X і Y строго відокремлені, якщо множина X міститься у відкритому півпросторі $\operatorname{int} H^-(g,c)$, а множина Y у відкритому півпросторі $\operatorname{int} H^+(g,c)$ (рис. 13.1 г, д). При цьому відповідну гіперплощину $H(g,c)$ називають *строго відокремлюючою*.

Умову (13.4) можна замінити умовою:

$$\langle g,x-y\rangle < 0 \; \forall x\in X, \forall y\in Y. \qquad (13.5)$$

О з н а ч е н н я 13.3. Нехай X і Y – дві непорожні множини в R^n. Говорять, що множини X і Y *сильно відокремлені*, якщо існує ненульовий вектор $g\in R^n$ і число $c\in R^1$ такі, що має місце умова

$$\sup_{x\in X}\langle g,x\rangle < c < \inf_{y\in Y}\langle g,y\rangle. \qquad (13.6)$$

При цьому відповідну гіперплощину $H(g,c)$ називають *сильно відокремлюючою* (рис. 13.1 д). Сильна відокремленість означає, що множини X і Y знаходяться на ненульовій відстані від гіперплощини, яка їх відокремлює, а також одна від одної.

Якщо множина Y є одноточковою множиною, тобто $Y=\{y^{(0)}\}$, то умова (13.6) набуває вигляду

$$\sup_{x\in X}\langle g,x\rangle < c < \langle g,y^{(0)}\rangle. \qquad (13.7)$$

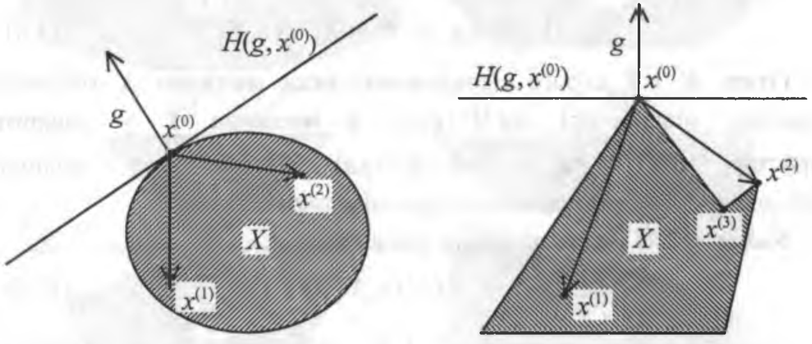
В такому разі говорять, що множина X і точка $y^{(0)}$ сильно відокремлені.

Якщо дві опуклі множини X і Y не перетинаються, то існує гіперплощина, яка їх відокремлює (цей факт буде доведено дещо пізніше). Але для двох довільних множин подібне твердження не має місця (рис. 13.1 е).

Т е о р е м а 13.1. *Нехай X – опукла множина з R^n. Тоді для будь-якої точки $x^{(0)} \notin \operatorname{int} X$ існує гіперплощина, яка відокремлює множину X і точку $x^{(0)}$. Якщо точка $x^{(0)} \notin \overline{X}$, то множина X сильно відокремлена від точки $x^{(0)}$.*

Доведення теореми можна знайти, наприклад, у [18].

О з н а ч е н н я 13.4. *Опорною гіперплощиною* до множини $X \subset R^n$ в точці $x^{(0)} \in X$ називається гіперплощина $H(g,x^{(0)})$, яка проходить через точку $x^{(0)}$ і відокремлює цю точку від множини X (рис. 13.2), тобто має місце нерівність $\langle g, x - x^{(0)} \rangle \le 0 \ \forall x \in X$.



а) б)

Рис. 13.2.

Як видно з рис. 13.2 б), не в кожній точці довільної множини існує опорна гіперплощина (точки $x^{(1)}$ і $x^{(3)}$). Наступна теорема визначає умови існування опорної гіперплощина для опуклих множин.

Т е о р е м а 13.2. *Якщо $X \subset R^n$ – замкнена опукла множина і $x^{(0)}$ – межова точка множини X, то в цій точці існує опорна гіперплощина до множини X.*

Ця теорема є безпосереднім наслідком теореми 13.1.

З а у в а ж е н н я. Якщо X – замкнена опукла множина з R^n і точка $x^{(0)} \in Fr X$, то в ній існує або одна (рис. 13.2 а), або більш ніж одна опорна до X гіперплощина (рис. 13.3). З рис. 13.3 видно, що якщо g_1 і g_2 є нормалями опорних до X гіперплощин, $g_1 \ne g_2$, то будь-який вектор $g = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2$, $\alpha_1 \ge 0$, $\alpha_2 \ge 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$, який знаходиться «між» векторами g_1 і g_2, є нормаллю деякої опорної гіперплощини, і таких гіперплощин безліч. Взагалі, якщо $\langle g_1, x - x^{(0)} \rangle \le 0$ і $\langle g_2, x - x^{(0)} \rangle \le 0 \ \forall x \in X$, то і $\langle \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, x - x^{(0)} \rangle \le 0$ при довільних $x \in X$, $\alpha_1 \ge 0$, $\alpha_2 \ge 0$, тобто якщо $H(g_1, x^{(0)})$ і $H(g_2, x^{(0)})$ опорні гіперплощини до множини X в точці $x^{(0)} \in Fr X$, то і $H(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, x^{(0)})$ опорна гіперплощина при довільних невід'ємних α_1, α_2, $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$.

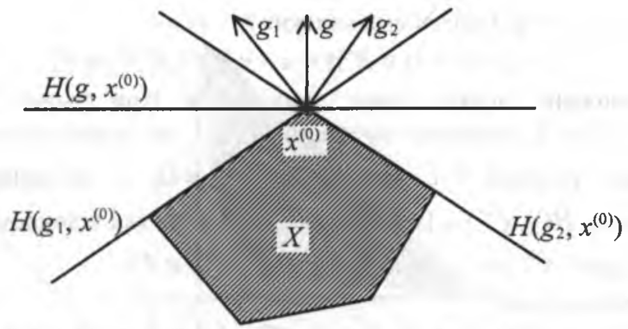


Рис. 13.3.

Наведемо одну властивість множин, яка буде потрібною для доведення наступної теореми.

Л е м а 13.1. *Нехай X і Y – деякі множини з R^n і множина X компактна, а Y замкнена. Тоді множина*

$$Z = X - Y = \{z \in R^n \mid z = x - y \ \forall x \in X, \forall y \in Y\}$$

замкнена.

Д о в е д е н н я. Нехай $z^{(0)}$ – деяка гранична точка множини Z. Тоді згідно теореми 7.3 існує послідовність $\{z^{(k)}\} \subset Z$, яка збігається до $z^{(0)}$. Оскільки $z^{(k)} \in Z$ ($k = 1,2,\ldots$), то знайдуться точки $x^{(k)} \in X$ і $y^{(k)} \in Y$ такі, що $z^{(k)} = x^{(k)} - y^{(k)}$. Згідно умови теореми X – компактна множина, тому знайдеться підпослідовність $\{x^{(k_m)}\}$ послідовності точок $\{x^{(k)}\} \subset X$, яка збігається до деякої точки $x^{(0)} \in X$. Тоді

$$y^{(k_m)} = x^{(k_m)} - z^{(k_m)} \to y^{(0)} = x^{(0)} - z^{(0)} \text{ при } k \to \infty$$

і $y^{(0)}$ належить замкненій множині Y. Таким чином, для точки $z^{(0)}$ маємо подання $z^{(0)} = x^{(0)} - y^{(0)}$, де $x^{(0)} \in X$, $y^{(0)} \in Y$. Це означає, що $z^{(0)} \in Z$.

З а у в а ж е н н я. Компактність множини X в умові леми є обов'язковою, оскільки сума (різниця) двох замкнених множин, навіть опуклих, не завжди є замкненою множиною.

Т е о р е м а 13.3. *Нехай X, Y – опуклі множини з R^n, які не мають спільних точок ($X \cap Y = \varnothing$). Тоді існує гіперплощина*

$$H(g,c) = \{u \in R^n \mid \langle g, u \rangle = c\},$$

яка відокремлює множини X і Y, а також їх замикання $\overline{X}$ і $\overline{Y}$. Якщо $\overline{X}$ і $\overline{Y}$ мають спільну межову точку $x^{(0)}$, то $c = \langle g, x^{(0)} \rangle$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо множину

$$Z = X - Y = \{z \in R^n | z = x - y, \forall x \in X, \forall y \in Y\}.$$

Ця множина опукла (див. лему 11.2). При цьому нуль-вектор $O_n = (0, 0, ..., 0) \notin Z$, оскільки множини X і Y не мають спільних точок. Тоді згідно теореми 13.1 для точки $x^{(0)} = O_n$ і множини Z існує гіперплощина $H(g, x^{(0)}) = \{x \in R^n | \langle g, x - x^{(0)} \rangle = 0\}$, яка відокремлює $x^{(0)}$ від Z, тобто $\langle g, z - x^{(0)} \rangle = \langle g, z - O_n \rangle = \langle g, z \rangle \le 0 \ \ \forall z \in Z$.

Це означає, що

$$\langle g, z \rangle = \langle g, x - y \rangle \le 0 \ \ \forall x \in X, \forall y \in Y \ \text{ або } \ \langle g, x \rangle \le \langle g, y \rangle \ \ \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

Звідси $\sup\limits_{x \in X} \langle g, x \rangle \le \inf\limits_{y \in Y} \langle g, y \rangle$ і $H(g, c) = \{u \in R^n \mid \langle g, u \rangle = c\}$ відокремлює множини X і Y, де c – довільне число, яке задовольняє нерівність

$$\sup_{x \in X} \langle g, x \rangle \le c \le \inf_{y \in Y} \langle g, y \rangle.$$

Покажемо, що та сама гіперплощина $H(g, c)$ відокремлює і множини $\overline{X}$, $\overline{Y}$. Дійсно, візьмемо довільні точки $x \in \overline{X}, y \in \overline{Y}$. Тоді існують послідовності $\{x^{(k)}\} \subset X$, $\{y^{(k)}\} \subset Y$ такі, що $x^{(k)} \to x$, $y^{(k)} \to y$ при $k \to \infty$. Використовуючи попередні міркування, маємо

$$\langle g, x^{(k)} \rangle \le c \le \langle g, y^{(k)} \rangle, \ k = 1, 2, \ldots.$$

Звідси при $k \to \infty$ одержуємо $\langle g, x \rangle \le c \le \langle g, y \rangle$ для довільних $x \in \overline{X}$ і $y \in \overline{Y}$, тобто множини $\overline{X}$, $\overline{Y}$ відокремлені. Якщо множини $\overline{X}$, $\overline{Y}$ мають спільну точку $x^{(0)} \in \overline{X} \cap \overline{Y}$, то з останньої нерівності маємо $c = \langle g, x^{(0)} \rangle$.

Сформулюємо теорему про сильне відокремлення двох опуклих множин (див., наприклад, [18], стор. 201).

Т е о р е м а 13.4. *Нехай X, Y – опуклі замкнені множини з R^n і принаймні одна з них обмежена. Якщо множини X і Y не мають спільних точок ($X \cap Y = \varnothing$), то існує гіперплощина, яка сильно відокремлює множини X і Y.*

Н а с л і д о к. *Нехай X і Y – опуклі замкнені множини і принаймні одна з них обмежена. Якщо множни X і Y не мають спільних внутрішніх точок ($\operatorname{int} X \cap \operatorname{int} Y = \varnothing$), то існує гіперплощина, яка відокремлює ці множини.*

З а у в а ж е н н я. Вимога обмеженості принаймні однієї множини в умові теореми 13.4 є істотною. Так, наприклад, для множин

$$X = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_2 = 0\}, \ Y = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0, x_2 \ge x_1^{-1}\}$$

замкнених і опуклих, але не обмежених (рис. 13.4), не існує гіперплощини (прямої), яка б сильно відокремлювала ці множини. Проте знайдеться гіперплощина (пряма) H, яка відокремлює множини X і Y. Це пряма $x_2 = 0$, тобто $H = X$.

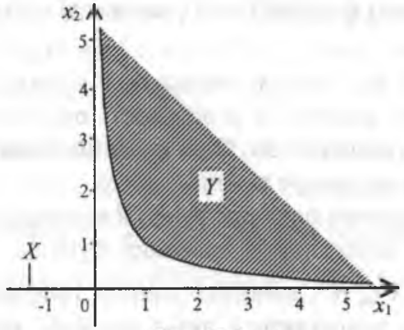


Рис. 13.4.

Запитання для самоконтролю

1. Які дві множини називають відокремленими, строго відокремленими і сильно відокремленими?
2. Що називається відокремлюючою гіперплощиною?
3. Яка гіперплощина називається опорною гіперплощиною до множини в заданій точці?
4. Як формулюються умови існування опорної гіперплощини до опуклої множини?
5. Як формулюються теореми про відокремлення двох множин?

Вправи для самостійного виконання

1. Довести теореми 13.1, 13.2, 13.4 і її наслідок.

2. Побудувати:

а) гіперплощину, яка відокремлює множину $X = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1 > 0, x_2 \ge x_1^{-1}\}$ і точку $x^{(0)} = (5, 0)$;

б) опорну гіперплощину до множини $X = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid e^{x_1} + 2 \le x_2\}$ в точці $x^{(0)} = (0, 3)$;

в) опорну гіперплощину до множини $X = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid \ln(x_1 + 1) \ge x_2\}$ в точці $x^{(0)} = (0, 0)$.

3. Побудувати всі опорні гіперплощини до опуклого конуса, який є перетином півплощин $P_1 = \{x \in R^2 \mid x_1 - 3x_2 \le 0\}$, $P_2 = \{x \in R^2 \mid 5x_1 + 2x_2 \ge 0\}$.

4. Довести, що будь-яка опорна гіперплощина до опуклого конуса проходить через початок координат.

5. Довести, що для непорожньої компактної опуклої множини X будь-яка опорна до неї гіперплощина містить принаймні одну крайню точку множини X.

6. Довести, що якщо X – замкнена множина, $\operatorname{int} X \ne \varnothing$, і в кожній точці її межі існує опорна гіперплощина, то множина X опукла. Проілюструвати геометрично важливість умови $\operatorname{int} X \ne \varnothing$.

П р и м і т к а. Доведення зручно проводити методом від супротивного.

7. Довести, що якщо в деякій межовій точці опуклої множини існують дві різні опорні гіперплощини, то їх в цій точці безліч.

8. Навести приклади двох опуклих замкнених множин, сума (різниця) яких не є замкненою множиною.

§14. Опуклі функції та їх основні властивості

Опуклі функції, як і опуклі множини, є одним з основних об'єктів вивчення в опуклому аналізі. Із властивості опуклості випливає багато інших важливих властивостей опуклих функцій, таких, як неперервність, диференційовність за напрямом та інші.

Щоб при дослідженні опуклих функцій можна було використовувати властивості опуклих множин, для довільної функції $f(x)$, яка визначена на деякій множині $X \subseteq R^n$, введемо поняття графіка і надграфіка. При цьому надалі будуть розглядатися лише функції, які є скінченними на області визначення, тобто набувають скінченних значень в будь-яких точках області визначення.

Означення 14.1. *Графіком* функції $f(x)$, яка визначена на множині X, називається множина

$$G_f = \{(x,\alpha) \in R^{n+1} \mid x \in X, \alpha \in R^1,\ \alpha = f(x)\}.$$

Означення 14.2. *Надграфіком* функції $f(x)$, яка визначена на множині X, називається множина

$$epi f = \{(x,\alpha) \in R^{n+1} \mid x \in X, \alpha \in R^1,\ \alpha \ge f(x)\}$$

(рис. 14.1).

Означення 14.3. *Підграфіком* функції $f(x)$, яка визначена на множині X, називається множина

$$hypo f = \{(x,\alpha) \in R^{n+1} \mid x \in X, \alpha \in R^1,\ \alpha \le f(x)\}$$

(рис. 14.1).

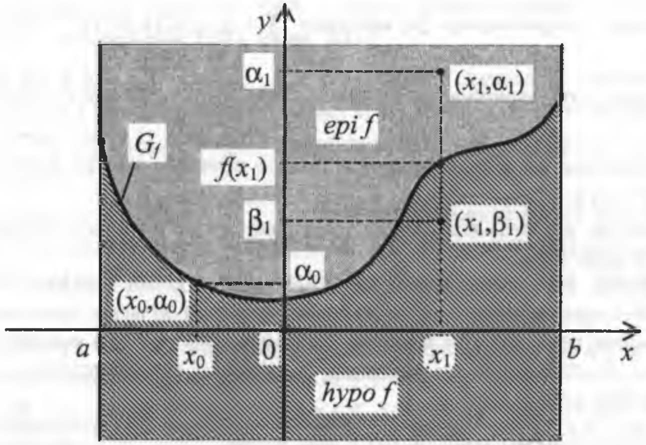


Рис. 14.1.

На рисунку 14.1 множина $X = [a;b]$, $\alpha_0 = f(x_0)$, тому точка $(x_0,\alpha_0) \in G_f$ і $(x_0,\alpha_0) \in epi f$, $\alpha_1 > f(x_1)$, тому точка $(x_1,\alpha_1) \in epi\ f$, $\beta_1 < f(x_1)$, тому точка $(x_1,\beta_1) \in hypo\ f$.

Нехай на опуклій множині $X \subset R^n$ визначена функція $f(x)$.

Означення 14.3. Функція $f(x)$ називається *опуклою* на X, якщо для будь-яких точок $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$ виконується нерівність

$$f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}) \le \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda) f(x^{(2)}) \qquad (14.1)$$

для всіх $\lambda \in [0;1]$.

Геометрично опуклість функції $f(x)$ означає, що будь-яка точка довільної хорди графіка $f(x)$ розміщена не нижче відповідної точки самого графіка (рис. 14.2).

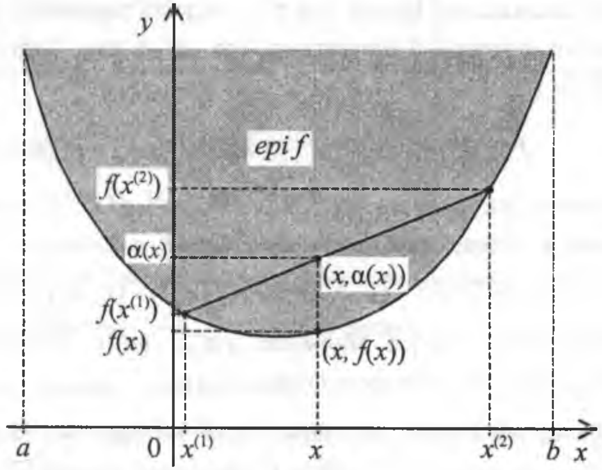


Рис. 14.2.

На рисунку 14.2 для будь-якої точки

$$x = \lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)},\ \lambda \in [0;1],$$

$$\alpha(x) = \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda) f(x^{(2)}) \ge f(x) = f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}).$$

Лема 14.1. *Функція $f(x)$, яка визначена на опуклій множині X, опукла тоді і тільки тоді, коли epi f є опуклою множиною.*

Доведення. Необхідність. Нехай функція $f(x)$ опукла на X. Треба довести, що *epi f* – опукла множина. Візьмемо дві довільні точки $y^{(1)} = (x^{(1)}, \alpha_1) \in epi\, f$, $y^{(2)} = (x^{(2)}, \alpha_2) \in epi\, f$, де $x^{(1)} \in X$, $\alpha_1 \geq f(x^{(1)})$, $x^{(2)} \in X$, $\alpha_2 \geq f(x^{(2)})$, і розглянемо точку

$$y = \lambda y^{(1)} + (1-\lambda) y^{(2)} = \lambda(x^{(1)}, \alpha_1) + (1-\lambda)(x^{(2)}, \alpha_2) =$$
$$= (\lambda x^{(1)} + (1-\lambda) x^{(2)},\ \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2),$$

де $\lambda \in [0;1]$. З опуклості функції $f(x)$ маємо

$$f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}) \leq \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda) f(x^{(2)}) \leq \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2.$$

Позначимо $x = \lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}$, $\alpha = \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2$. Тоді з останньої нерівності випливає, що $f(x) \leq \alpha$. Це означає, що точка $y = (x, \alpha)$ належить множині $epi\, f$ для будь-яких $y^{(1)} = (x^{(1)}, \alpha_1) \in epi\, f$, $y^{(2)} = (x^{(2)}, \alpha_2) \in epi\, f$ і $\lambda \in [0;1]$, тобто $epi\, f$ – опукла множина.

Д о с т а т н і с т ь. Нехай $epi\, f$ – опукла множина. Доведемо, що $f(x)$ – опукла функція. Припустимо, що це не так. Тоді існують точки $x^{(1)} \in X, x^{(2)} \in X, x^{(1)} \neq x^{(2)}$ і число $\lambda' \in [0;1]$ такі, що

$$f(\lambda' x^{(1)} + (1-\lambda')x^{(2)}) > \lambda' f(x^{(1)}) + (1-\lambda') f(x^{(2)}).$$

З іншого боку, точки $(x^{(1)}, f(x^{(1)})), (x^{(2)}, f(x^{(2)}))$ належать $epi\, f$. Але, як слідує з попередньої нерівності, точка

$$(x', \alpha') = (\lambda' x^{(1)} + (1-\lambda')x^{(2)},\ \lambda' f(x^{(1)}) + (1-\lambda') f(x^{(2)}))$$

не належить $epi\, f$, тобто множина $epi\, f$ не є опуклою. Одержана суперечність доводить опуклість функції $f(x)$.

О з н а ч е н н я 14.4. Функція $f(x)$ називається *вгнутою* на X, якщо для будь-яких точок $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$ виконується нерівність

$$f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}) \geq \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda) f(x^{(2)})$$

для всіх $\lambda \in [0;1]$. Легко бачити, що функція $f(x)$ вгнута, якщо функція $-f(x)$ опукла. Зрозуміло, що для вгнутої функції $f(x)$ множина *hypo* f є опуклою.

О з н а ч е н н я 14.5. Функція $f(x)$ називається *строго опуклою* на X, якщо для будь-яких точок $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$ таких, що $x^{(1)} \neq x^{(2)}$, виконується нерівність

$$f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}) < \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda) f(x^{(2)})$$

для всіх $\lambda \in (0;1)$.

На рисунку 14.3 а) показано строго опуклу функцію, а на рисунку 14.3 б) – нестрого опуклу.

Функція $f(x)$ називається *строго вгнутою* на X, якщо для будь-яких точок $x^{(1)} \in X$, $x^{(2)} \in X$ таких, що $x^{(1)} \neq x^{(2)}$, виконується нерівність

$$f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}) > \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda) f(x^{(2)})$$

для всіх $\lambda \in (0;1)$.

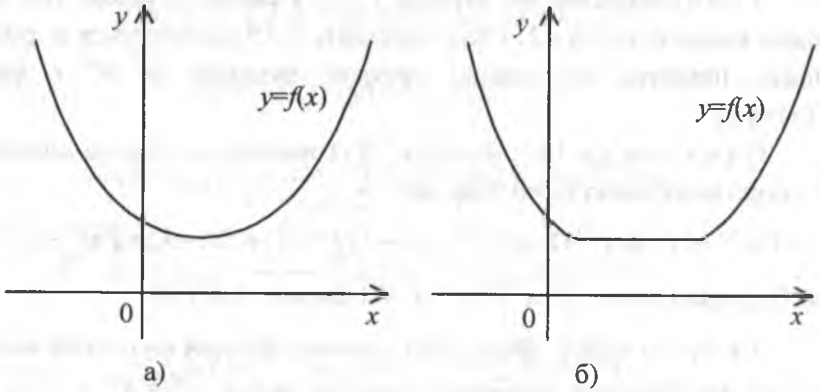


Рис. 14.3.

Наприклад, опуклими на R^1 є функції $y = x^2$, $y = e^x$, $y = |x|$, функція $y = \sin x$ опукла на проміжку $[\pi; 2\pi]$. Функція $y = \ln x$ вгнута на проміжку $(0; +\infty)$, а функція $y = \cos x$ вгнута на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Лінійна функція $y = \langle a, x \rangle + b$, де $a, x \in R^n$, $b \in R^1$, є одночасно і опуклою, і вгнутою на R^n.

П р и к л а д 14.1. Використовуючи означення 14.3, довести, що функція $y = x^2$ є опуклою на R^1.

Для функції $f(x) = x^2$ маємо

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2 = \lambda^2 x_1^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2 + (1-\lambda)^2 x_2^2, \quad (14.2)$$

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) = \lambda x_1^2 + (1-\lambda) x_2^2. \quad (14.3)$$

Оцінимо різницю між (14.2) і (14.3):

$$\lambda^2 x_1^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 - \lambda x_1^2 - (1-\lambda)x_2^2 =$$
$$= \lambda(\lambda-1)x_1^2 - 2\lambda(\lambda-1)x_1 x_2 + \lambda(\lambda-1)x_2^2 = \lambda(\lambda-1)(x_1 - x_2)^2 \leq 0 \quad (14.4)$$

для всіх $\lambda \in [0;1]$ і будь-яких $x_1 \in R^1$, $x_2 \in R^1$, тобто для $f(x) = x^2$ має місце нерівність (14.1). Отже функція $y = x^2$ – опукла. Ця функція є і строго опуклою, оскільки рівність в (14.4) при $\lambda \in (0;1)$ має місце тільки тоді, коли $x_1 = x_2$.

О з н а ч е н н я 14.6. Функція $f(x)$ називається *сильно опуклою* на X, якщо існує число $m>0$ таке, що

$$f(\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)})\le\lambda f(x^{(1)})+(1-\lambda)f(x^{(2)})-$$
$$-\lambda(1-\lambda)m\| x^{(1)}-x^{(2)}\|^2 \qquad (14.5)$$

для будь-яких точок $x^{(1)}\in X,\ x^{(2)}\in X$ і для всіх $\lambda\in[0;1]$.

З (14.4) випливає, що функція $y=x^2$ є сильно опуклою. При цьому можна вважати, що $m=1$, і тоді нерівність (14.5) виконується як рівність. Можна показати, що сильно опуклою функцією в R^n є функція $f(x)=\|x\|^2$.

О з н а ч е н н я 14.7. Функція $f(x)$ називається *сильно вгнутою* на X, якщо існує число $m>0$ таке, що

$$f(\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)})\ge\lambda f(x^{(1)})+(1-\lambda)f(x^{(2)})+\lambda(1-\lambda)m\| x^{(1)}-x^{(2)}\|^2$$

для будь-яких точок $x^{(1)}\in X,\ x^{(2)}\in X$ і для всіх $\lambda\in[0;1]$.

Т е о р е м а 14.1. *Якщо $f(x)$ – опукла функція на опуклій множині X, то для будь-якої скінченної кількості точок $x^{(i)}\in X$, $i=\overline{1,m}$, має місце нерівність*

$$f\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x^{(i)}\right)\le\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f(x^{(i)}), \qquad (14.6)$$

де $\lambda_i\ge 0,\ i=\overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$.

Нерівність (14.6) називається *нерівністю Єнсена.*

Д о в е д е н н я теореми 14.1 зручно проводити за методом математичної індукції стосовно кількості точок. При $m=1$ маємо $\lambda_1=1$ і

$$f(\lambda_1 x^{(1)})=\lambda_1 f(x^{(1)})=f(x^{(1)}).$$

Припустимо, що нерівність (14.6) має місце при $m=k$, де $k>1$. Розглянемо точку

$$z=\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i x^{(i)},\ x^{(i)}\in X,\ \lambda_i\ge 0,\ i=\overline{1,k+1},\ \sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i=1.$$

Ця точка належить множині X як опукла комбінація точок $x^{(i)}\in X, i=\overline{1,k+1}$. Якщо $\lambda_{k+1}=1$, то $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_k=0$ і в (14.6) має місце рівність. Нехай $\lambda_{k+1}\in[0;1)$. Подамо точку z у вигляді

$$z=(1-\lambda_{k+1})y+\lambda_{k+1}x^{(k+1)},$$

де

$$y=\frac{1}{1-\lambda_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x^{(i)}\in X,$$

оскільки $x^{(i)}\in X, i=\overline{1,k}$, і $\frac{1}{1-\lambda_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$.

Тоді з опуклості функції $f(x)$ та індуктивного припущення маємо

$$f(z)=f\left(\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i x^{(i)}\right)=f\left((1-\lambda_{k+1})y+\lambda_{k+1}x^{(k+1)}\right)\le$$
$$\le(1-\lambda_{k+1})f(y)+\lambda_{k+1}f(x^{(k+1)})=$$
$$=(1-\lambda_{k+1})f\left(\frac{1}{1-\lambda_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x^{(i)}\right)+\lambda_{k+1}f(x^{(k+1)})\le$$
$$\le(1-\lambda_{k+1})\frac{1}{1-\lambda_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f(x^{(i)})+\lambda_{k+1}f(x^{(k+1)})=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f(x^{(i)})+\lambda_{k+1}f(x^{(k+1)})=\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i f(x^{(i)}),$$

що й треба було довести.

Т е о р е м а 14.2. *Нехай множина X опукла і $\operatorname{int}X\ne\varnothing$. Тоді опукла функція $f(x)$, визначена на опуклій множині X, неперервна в кожній внутрішній точці цієї множини.*

Д о в е д е н н я. Візьмемо довільну точку $x^{(0)}\in\operatorname{int}X$. Згідно означення 7.18 неперервності функції в точці $x^{(0)}$ з множини $\operatorname{int}X$ потрібно довести, що для будь-якого $\varepsilon>0$ існує число $\delta_0=\delta_0(\varepsilon)>0$ таке, що

$$|f(x)-f(x^{(0)})|<\varepsilon$$

або

$$-\varepsilon<f(x)-f(x^{(0)})<\varepsilon \qquad (14.7)$$

для будь-яких точок $x\in S(x^{(0)},\delta_0)\subset X$.

Спочатку доведемо, що має місце права частина нерівності (14.7).

За означенням внутрішньої точки існує ρ-окіл точки $x^{(0)}$ такий, що $S(x^{(0)},\rho)\subset X$, де $\rho>0$. Позначимо через $e^{(1)},e^{(2)},...,e^{(n)}$ одиничні базисні вектори простору R^n. Тоді, враховуючи опуклість множини X, для точок

$$x^{(0)}+\delta e^{(j)},\ \delta\in[0;\rho),\ j=\overline{1,n},$$

має місце подання

$$x^{(0)}+\delta e^{(j)}=\left(1-\frac{\delta}{\rho}\right)x^{(0)}+\frac{\delta}{\rho}(x^{(0)}+\rho e^{(j)}). \qquad (14.8)$$

В силу опуклості функції $f(x)$ для точок виду 14.8 одержуємо

$$f(x^{(0)}+\delta e^{(j)})\le\left(1-\frac{\delta}{\rho}\right)f(x^{(0)})+\frac{\delta}{\rho}f(x^{(0)}+\rho e^{(j)}).$$

Звідки випливає, що

$$f(x^{(0)}+\delta e^{(j)})-f(x^{(0)})\le\frac{\delta}{\rho}(f(x_0+\rho e^{(j)})-f(x^{(0)})) \qquad (14.9)$$

для всіх $j=\overline{1,n}$ і $\delta\in[0;\rho)$.

Аналогічно можна показати, що мають місце нерівності

$$f(x^{(0)}-\delta e^{(j)})-f(x^{(0)})\le\frac{\delta}{\rho}(f(x_0-\rho e^{(j)})-f(x^{(0)})) \qquad (14.10)$$

для всіх $j=\overline{1,n}$ і $\delta\in[0;\rho)$.

З (14.9) і (14.10) випливає, що для будь-якого $\varepsilon>0$ існує число $\delta_1\in(0;\rho)$ (можливо досить мале) таке, що виконуються нерівності

$$f(x^{(0)}+\delta e^{(j)})-f(x^{(0)})\le\frac{\delta_1}{\rho}\varepsilon_1<\varepsilon, \qquad (14.11)$$

$$f(x^{(0)}-\delta e^{(j)})-f(x^{(0)})\le\frac{\delta_1}{\rho}\varepsilon_1<\varepsilon \qquad (14.12)$$

для всіх $\delta\in(0;\delta_1)$ і $j=\overline{1,n}$, де

$$\varepsilon_1=\max_{1\le j\le n}\{f(x_0+\rho e^{(j)})-f(x^{(0)}),f(x_0-\rho e^{(j)})-f(x^{(0)})\}.$$

Візьмемо довільний вектор $g=(g_1,g_2,...,g_n)\in R^n$ і розкладемо його за базисними векторами $e^{(j)}$, $j=1,n$, наступним чином:

$$g=\sum_{j=1}^{n}g_je^{(j)}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}ng_je^{(j)}.$$

Тоді для точок

$$x^{(0)}+g=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x^{(0)}+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}ng_je^{(j)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}(x^{(0)}+ng_je^{(j)}),$$

враховуючи опуклість функції $f(x)$ і нерівність Єнсена, будемо мати

$$f(x^{(0)}+g)=f\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}(x^{(0)}+ng_je^{(j)})\right)\le\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}f(x^{(0)}+ng_je^{(j)}). \quad (14.13)$$

Оцінимо різницю $f(x^{(0)}+g)-f(x^{(0)})$, коли вектор g задовольняє умову $\|g\|<\delta_0$, де $\delta_0=\frac{\delta_1}{n}$, $\delta_1\in(0;\rho)$ – число, одержане у попередніх міркуваннях.

Віднявши від обох частин нерівності (14.13) $f(x^{(0)})$, з урахуванням (14.11) та (14.12) і того, що при $\|g\|<\delta_0$ має місце умова $|ng_j|<\delta_1$, $j=\overline{1,n}$, одержимо

$$f(x^{(0)}+g)-f(x^{(0)})\le\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}f(x^{(0)}+ng_je^{(j)})-f(x^{(0)})=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}f(x^{(0)}+ng_je^{(j)})-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}f(x^{(0)})=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(f(x^{(0)}+ng_je^{(j)})-f(x^{(0)})\right)<\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon=\frac{1}{n}n\varepsilon=\varepsilon,$$

тобто

$$f(x^{(0)}+g)-f(x^{(0)})<\varepsilon \qquad (14.14)$$

для будь-яких векторів $g\in R^n$ таких, що $\|g\|<\delta_0$. Інакше кажучи, нерівність (14.14) має місце для всіх точок $x^{(0)}+g\in S(x^{(0)},\delta_0)\subset X$.

Для доведення лівої частини нерівності (14.7) скористаємося опуклістю функції $f(x)$:

$$f(x^{(0)})=f\left(\frac{1}{2}(x^{(0)}+g)+\frac{1}{2}(x^{(0)}-g)\right)\le\frac{1}{2}f(x^{(0)}+g)+\frac{1}{2}f(x^{(0)}-g).$$

Домноживши останню нерівність на 2, враховуючи (14.14) для векторів $-g$, $\|-g\|<\delta_0$, одержуємо

$$f(x^{(0)})-f(x^{(0)}+g)\le f(x^{(0)}-g)-f(x^{(0)})<\varepsilon$$

або

$$-\varepsilon<f(x^{(0)}+g)-f(x^{(0)}). \qquad (14.15)$$

Отже, враховуючи (14.14) і (14.15), для будь-якого $\varepsilon>0$ існує число $\delta_0=\delta_0(\varepsilon)>0$ таке, що має місце нерівність (14.7) для всіх точок $x\in S(x^{(0)},\delta_0)\subset X$, тобто функція $f(x)$ неперервна в точці $x^{(0)}\in\operatorname{int}X$.

Н а с л і д о к 1. *Опукла функція* $f(x)$, *визначена на відкритій опуклій множині* X, *неперервна на цій множині.*

Н а с л і д о к 2. *Будь-яка опукла функція, визначена на* R^n, *неперервна в усіх точках простору* R^n.

Наведена теорема гарантує неперервність опуклої функції лише у внутрішніх точках області її визначення.

Наприклад, функція

$$f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ якщо } x>0, \\ 1, \text{ якщо } x=0, \end{cases}$$

(рис. 14.4) є опуклою на множині $X=[0;+\infty)$, але не є неперервною на цій множині, оскільки в точці $x=0$ вона має розрив.

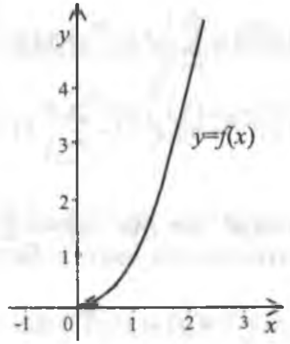


Рис. 14.4.

Л е м а 14.2. *Для будь-якої опуклої функції* $f(x)$, *визначеної на опуклій множині* X, *і будь-якої точки* $x^{(0)}\in X$ *лебегова множина*

$$L_{f(x^{(0)})}=\{x\in X | f(x)\le f(x^{(0)})\}$$

непорожня і опукла.

Д о в е д е н н я. Множина $L_{f(x^{(0)})}$ непорожня, оскільки вона містить точку $x^{(0)}$.

Для доведення опуклості множини $L_{f(x^{(0)})}$ досить показати, що якщо дві довільні точки x,y належать $L_{f(x^{(0)})}$, то і точки виду $z=\lambda x+(1-\lambda)y$ належать $L_{f(x^{(0)})}$ при всіх $\lambda\in[0;1]$. З опуклості множини X випливає, що $z\in X$. Враховуючи опуклість функції $f(x)$ на X, для точок $x\in L_{f(x^{(0)})}$, $y\in L_{f(x^{(0)})}$ маємо

$$f(z)=f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\le$$
$$\le\lambda f(x^{(0)})+(1-\lambda)f(x^{(0)})=f(x^{(0)}),$$

тобто $z\in L_{f(x^{(0)})}$.

Нехай g – вектор із R^n, $\|g\|\le K<+\infty$, X – непорожня опукла множина, $x^{(0)}\in X$, існує $\alpha_0>0$ таке, що $x^{(0)}+\alpha_0 g\in X$.

О з н а ч е н н я 14.8. Функція $f(x)$, визначена на множині X, називається *диференційовною в точці* $x^{(0)}$ *за напрямом* g, якщо існує скінченна границя

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial g}=\lim_{\alpha\to+0}\frac{f(x^{(0)}+\alpha g)-f(x^{(0)})}{\alpha}. \qquad (14.16)$$

Число $\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial g}$ називається *похідною функції* $f(x)$ *в точці* $x^{(0)}$ *за напрямом* g. Ця похідна характеризує «швидкість» зміни функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$ за напрямом g.

З означення 14.8 випливає, що

$$f(x^{(0)}+\alpha g)=f(x^{(0)})+\alpha\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial g}+o(x^{(0)},g,\alpha), \qquad (14.17)$$

де $\frac{o(x^{(0)},g,\alpha)}{\alpha}\to 0$ при $\alpha\to+0$.

Якщо функція $f(x)$ в точці $x^{(0)}$ диференційовна за будь-яким напрямом $g\in R^n$, то кажуть, що вона *диференційовна в точці* $x^{(0)}$ *за напрямами.*

О з н а ч е н н я 14.9. Функція $f(x)$, визначена на множині X такій, що $\operatorname{int}X\ne\varnothing$, називається *диференційовною в точці* $x^{(0)}\in\operatorname{int}X$, якщо існує такий вектор $g(x^{(0)})\in R^n$, що

$$f(x^{(0)}+\alpha v)=f(x^{(0)})+\alpha\langle v,g(x^{(0)})\rangle+o(x^{(0)},v,\alpha)$$

при будь-яких $v\in R^n$, $\|v\|=1$, де $\frac{o(x^{(0)},v,\alpha)}{\alpha}\to 0$ при $\alpha\to 0$ рівномірно по v.

З (14.17) і означення 14.9 випливає, що якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці $x^{(0)}$, то вона диференційовна в цій точці за будь-яким напрямом g ($\|g\|=1$), при цьому має місце рівність

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial g}=\langle g,g(x^{(0)})\rangle. \qquad (14.18)$$

Треба зауважити, що з диференційовності функції в деякій точці за напрямами не випливає неперервність функції в цій точці, якщо простір R^n має розмірність $n \geq 2$.

У випадку диференційовності в точці $x^{(0)}$ функція $f(x)$ має частинні похідні першого порядку в цій точці, при цьому

$$g(x^{(0)}) = \operatorname{grad} f(x^{(0)}),$$

де

$\operatorname{grad} f(x^{(0)}) = \left(\dfrac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_n} \right)$ – *градієнт* функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$.

Градієнт функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$ будемо позначати $f'(x^{(0)})$.

Якщо $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – кути, які утворює вектор g ($\| g \| = 1$) з осями координат, то має місце подання

$$g = \cos\alpha_1 e^{(1)} + \dots + \cos\alpha_n e^{(n)} = (\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_n),$$

де $e^{(i)}$, $i = \overline{1,n}$, – одиничні базисні вектори в R^n і при цьому $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \dots + \cos^2\alpha_n = 1$. Тоді з урахуванням (14.18) для диференційовної в точці $x^{(0)}$ функції $f(x)$

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial g} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \cos\alpha_i .$$

З (14.18) видно, що величина

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial g} = \| g(x^{(0)}) \| \cdot \| g \| \cdot \cos(g(x^{(0)}), g)$$

набуває найбільшого значення коли $\cos(g(x^{(0)}), g) = 1$, тобто коли вектори g і $g(x^{(0)}) = f'(x^{(0)})$ однаково напрямлені. Отже градієнт функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$ вказує напрям найшвидшого зростання функції в цій точці, а вектор $-f'(x^{(0)})$, протилежно напрямлений до градієнта (*антиградієнт*), вказує напрям найшвидшого спадання функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$. Ця властивість градієнта (антиградієнта) широко використовується при побудові чисельних методів оптимізації.

П р и к л а д 14.2. Для функції $f(x) = 3x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_2^2$ знайти похідну в точці $x^{(0)} = (1, -1)$ за напрямом від точки $(0, 1)$ до точки $(3, 5)$.

Оскільки задана функція $f(x)$ диференційовна в точці $x^{(0)}$, то для знаходження похідної цієї функції в точці $x^{(0)}$ за напрямом $v = (3, 5) - (0, 1) = (3, 4)$ скористаємось співвідношенням (14.18), при цьому в якості вектора g, який повинен задовольняти умову $\| g \| = 1$, треба взяти ветор $g = \dfrac{v}{\|v\|}$ і покласти

$$g(x^{(0)}) = f'(x^{(0)}) = \left(\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} \right).$$

Тоді маємо

$$g = \frac{v}{\|v\|} = \frac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{(3,4)}{5} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right);$$

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} = 6x_1^{(0)} + 6x_2^{(0)} = 6 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) = 0; \quad \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_2} = 6x_1^{(0)} - 8x_2^{(0)} = 6 \cdot 1 - 8 \cdot (-1) = 14;$$

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial g} = \langle g, f'(x^{(0)}) \rangle = \left\langle \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right), (0, 14) \right\rangle = \frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{4}{5} \cdot 14 = \frac{56}{5}.$$

Перш ніж розглянути диференційовність за напрямом опуклої функції на опуклій множині доведемо допоміжне твердження.

Л е м а 14.3. *Нехай функція $f(\alpha)$ визначена на множині $A \subset R^1$ і опукла на цій множині. Тоді функція*

$$h(\alpha) = \frac{f(\alpha) - f(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0}$$

при $\alpha > \alpha_0$, де $\alpha_0 \in \operatorname{int} A$, монотонно не спадає із зростанням $\alpha \in A$ і обмежена знизу на $A_0 = \{\alpha \in A \mid \alpha > \alpha_0\}$.

Д о в е д е н н я. Нехай $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2$, де $\alpha_1 \in A$, $\alpha_2 \in A$. Тоді має місце подання

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \lambda(\alpha_2 - \alpha_0),$$

де

$$0 < \lambda = \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_2 - \alpha_0} < 1.$$

З опуклості функції $f(\alpha)$ випливає, що

$$f(\alpha_1) = f(\alpha_0 + \lambda(\alpha_2 - \alpha_0)) = f(\lambda\alpha_2 + (1-\lambda)\alpha_0) \leq$$
$$\leq \lambda f(\alpha_2) + (1-\lambda) f(\alpha_0) = \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_2 - \alpha_0} f(\alpha_2) + \left(1 - \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_2 - \alpha_0} \right) f(\alpha_0) =$$
$$= \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_2 - \alpha_0} (f(\alpha_2) - f(\alpha_0)) + f(\alpha_0).$$

Звідси

$$f(\alpha_1) - f(\alpha_0) \leq \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_2 - \alpha_0} (f(\alpha_2) - f(\alpha_0))$$

або

$$\frac{f(\alpha_1) - f(\alpha_0)}{\alpha_1 - \alpha_0} \leq \frac{f(\alpha_2) - f(\alpha_0)}{\alpha_2 - \alpha_0},$$

тобто

$$h(\alpha_1) \leq h(\alpha_2).$$

Отже, функція $h(\alpha)$ монотонно не спадає із зростанням $\alpha \in A$ $(\alpha > \alpha_0)$.

Доведемо обмеженість функції $h(\alpha)$ знизу на множині A_0. Візьмемо $\alpha' \in A$ таке, що $\alpha' < \alpha_0$ (існування α' випливає з умови $\alpha_0 \in \operatorname{int} A$). Тоді аналогічно до попереднього при $\alpha > \alpha_0 > \alpha'$ маємо

$$h(\alpha_0) = \frac{f(\alpha_0) - f(\alpha')}{\alpha_0 - \alpha'} \le \frac{f(\alpha) - f(\alpha')}{\alpha - \alpha'} = h(\alpha),$$

тобто функція $h(\alpha)$ обмежена знизу на A_0.

Т е о р е м а 14.3. *Опукла функція $f(x)$, яка визначена на опуклій множині X, в кожній внутрішній точці $x^{(0)}$ цієї множини має похідну за будь-яким напрямом $g \in R^n$, $\| g \| \le K < +\infty$.*

Д о в е д е н н я. Згідно означення диференційовності функції за напрямами треба довести, що існує скінченна границя

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial g} = \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(x^{(0)} + \alpha g) - f(x^{(0)})}{\alpha},$$

при будь-якому $g \in R^n$, $\| g \| \le K < +\infty$.

Оскільки $x^{(0)} \in \operatorname{int} X$, то при деякому фіксованому $g \in R^n$ існує число $\delta > 0$ таке, що інтервал $(x^{(0)} - \delta g; x^{(0)} + \delta g) \subset X$. Нехай $\overline{\alpha} \in (0;\delta)$. Розглянемо функцію

$$h(\alpha) = \frac{f(x^{(0)} + \alpha g) - f(x^{(0)})}{\alpha}$$

для $\alpha \in (0;\overline{\alpha})$, яка згідно леми 14.3 монотонно не спадає і обмежена знизу на $(0;\overline{\alpha})$. Тоді існує скінченна границя $\lim\limits_{\alpha \to +0} h(\alpha) = \dfrac{\partial f(x^{(0)})}{\partial g}$, що й треба було довести.

Н а с л і д о к 1. *Опукла функція, яка визначена на опуклій замкненій множині X, в кожній точці $x^{(0)} \in X$ має похідну за будь-яким напрямом $g \in \Gamma(x^{(0)})$, де $\Gamma(x^{(0)})$ – конус можливих напрямів множини X в точці $x^{(0)} \in X$* (див. §11).

Н а с л і д о к 2. *В умовах теореми має місце рівність*

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial g} = \inf_{\alpha > 0} \frac{f(x^{(0)} + \alpha g) - f(x^{(0)})}{\alpha}. \qquad (14.19)$$

Це твердження випливає з властивостей функції $h(\alpha)$, розглянутої в теоремі 14.3.

Розглянемо деякі найпростіші операції над опуклими функціями, які не виводять з класу опуклих функцій.

Л е м а 14.4. *Нехай $f_1(x),\dots,f_m(x)$ – опуклі функції на опуклій множині X, $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ – невід'ємні дійсні числа. Тоді функція*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x)$$

опукла на X.

Д о в е д е н н я. Візьмемо дві довільні точки $x^{(1)} \in X$, $x^{(2)} \in X$. Тоді для опуклих функцій $f_i(x), i = \overline{1,m}$,

$$f_i(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}) \le \lambda f_i(x^{(1)}) + (1-\lambda) f_i(x^{(2)})$$

при $\lambda \in [0;1]$. Домноживши ці нерівності на $\alpha_i \ge 0$, $i = \overline{1,m}$, і склавши їх, одержимо

$$f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}) \le \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x^{(1)}) + (1-\lambda)\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x^{(2)}) =$$

$$= \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda) f(x^{(2)}),$$

що й доводить опуклість функції $f(x)$.

З а у в а ж е н н я. Легко перевірити, що функція $f(x)$ буде строго опуклою, якщо хоча б одна з функцій $f_i(x)$ строго опукла і $\alpha_i > 0$. Відповідно $f(x)$ буде сильно опуклою, якщо хоча б одна з функцій $f_i(x)$ сильно опукла і $\alpha_i > 0$.

Л е м а 14.5. *Нехай $X \in R^n$ – опукла множина, Y – довільна множина деякого простору R^m, функція $\phi(x,y)$, яка визначена на множині $X \times Y$, опукла по x на X при кожному фіксованому $y \in Y$ і обмежена зверху по y на Y при кожному $x \in X$. Тоді функція*

$$f(x) = \sup_{y \in Y} \phi(x,y)$$

опукла на X.

Д о в е д е н н я. Для довільних точок $x^{(1)} \in X$, $x^{(2)} \in X$ і $\forall \lambda \in [0;1]$ в силу опуклості функції $\phi(x,y)$ по x на X має місце

$$f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}) = \sup_{y \in Y} \phi(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}, y) \le$$

$$\le \sup_{y \in Y} \left[\lambda \phi(x^{(1)}, y) + (1-\lambda)\phi(x^{(2)}, y)\right] \le \lambda \sup_{y \in Y} \phi(x^{(1)}, y) +$$

$$+ (1-\lambda) \sup_{y \in Y} \phi(x^{(2)}, y) = \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda) f(x^{(2)}).$$

Н а с л і д о к 1. *Якщо функції* $f_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, *опуклі на* X, *то функція*

$$f(x)=\max_{1\le i\le m} f_i(x)$$

також опукла на X.

Н а с л і д о к 2. *Нехай функція* $f_1(x)$ *опукла на опуклій множині* X, *тоді функція*

$$f(x)=\max\{0, f_1(x)\}$$

також опукла на X.

Л е м а 14.6. *Нехай* $f(x)$ – *опукла функція на опуклій множині* $X\subseteq D(f)\subseteq R^n$, *функція від однієї змінної* $g(y)$ – *опукла і неспадна на множині* $Y\subseteq E(f)\subseteq R^1$. *Тоді функція* $g(f(x))$ *опукла на* X.

Д о в е д е н н я. Для довільних точок $x^{(1)}\in X$, $x^{(2)}\in X$ і $\forall\lambda\in[0;1]$ в силу опуклості функції $f(x)$ і неспадання функції $g(y)$ маємо

$$g(f(\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}))\le g(\lambda f(x^{(1)})+(1-\lambda)f(x^{(2)})). \quad (14.20)$$

З опуклості функції $g(y)$ одержуємо

$$g(\lambda f(x^{(1)})+(1-\lambda)f(x^{(2)}))\le \lambda g(f(x^{(1)}))+(1-\lambda)g(f(x^{(2)})). \quad (14.21)$$

Враховуючи (14.20) і (14.21), маємо нерівність

$$g(f(\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}))\le \lambda g(f(x^{(1)}))+(1-\lambda)g(f(x^{(2)})),$$

тобто $g(f(x))$ – опукла функція.

Н а с л і д о к 1. *Нехай* $f(x)$ – *вгнута функція на опуклій множині* $X\subseteq D(f)\subseteq R^n$, *функція від однієї змінної* $g(y)$ – *опукла і не зростає на множині* $Y\subseteq E(f)\subseteq R^1$. *Тоді функція* $g(f(x))$ *опукла на* X.

Н а с л і д о к 2. *Якщо функція* $f(x)$ *опукаі і невід'ємна на опуклій множині* $X\subseteq D(f)\subseteq R^n$, *то функція* $F(x)=(f(x))^p$ *опукла на* X *при будь-яких* $p\ge 1$ *і* $p\le 0$.

Н а с л і д о к 3. *Якщо функція* $f(x)$ *опукла на опуклій множині* $X\subseteq D(f)\subseteq R^n$, *то функція* $F(x)=(\max\{0, f(x)\})^p$ *опукла на* X *при будь-яких* $p\ge 1$.

Н а с л і д о к 4. *Якщо функція* $f(x)$ *опукла і від'ємна на опуклій множині* $X\subseteq D(f)\subseteq R^n$, *то функції*

$$F_1(x)=-\frac{1}{f(x)},\ F_2(x)=(\max\{-\ln(-f(x)),0\})^p$$

опуклі на X *при будь-яких* $p\ge 1$.

Леми 14.4, 14.5 і 14.6 дають можливість утворювати нові опуклі функції із раніше визначених опуклих функцій.

Наприклад, функція $f(x)=x^2+\max\{e^x,-x\}$ буде опуклою на R^1 як сума двох опуклих функцій $f_1(x)=x^2$ і $f_2(x)=\max\{e^x,-x\}$ (оскільки функції $y=e^x$, $y=-x$ опуклі).

Розглянемо деякі екстремальні властивості опуклих функцій.

Т е о р е м а 14.4. *Якщо функція* $f(x)$ *визначена і опукла на* R^n, *то будь-яка точка локального мінімуму функції* $f(x)$ *є одночасно і точкою глобального мінімуму на* R^n.

Д о в е д е н н я. Нехай x^* – точка локального мінімуму функції $f(x)$ на R^n. Тоді існує δ-окіл $S_\delta(x^*)$ точки x^*, для всіх точок якого виконується нерівність $f(x^*)\le f(x)$. Візьмемо довільну точку $x^{(0)}\in R^n$, $x^{(0)}\ne x^*$. Розглянемо точки виду $z=\lambda x^{(0)}+(1-\lambda)x^*$, де $0<\lambda<\min\left(\frac{\delta}{\|x^{(0)}-x^*\|},1\right)$, і покажемо, що вони належать $S_\delta(x^*)$. Дійсно, якщо $x^{(0)}\in S_\delta(x^*)$, то $\frac{\delta}{\|x^{(0)}-x^*\|}>1$, $0<\lambda<1$ і $z\in S_\delta(x^*)$ в силу опуклості множини $S_\delta(x^*)$. Якщо $x^{(0)}\notin S_\delta(x^*)$, то $\frac{\delta}{\|x^{(0)}-x^*\|}<1$ і $0<\lambda<\frac{\delta}{\|x^{(0)}-x^*\|}$. У цьому випадку маємо

$$\|z-x^*\|=\|\lambda x^{(0)}+(1-\lambda)x^*-x^*\|=\lambda\|x^{(0)}-x^*\|<\frac{\delta}{\|x^{(0)}-x^*\|}\|x^{(0)}-x^*\|=\delta,$$

тобто $z\in S_\delta(x^*)$. Враховуючи опуклість функції $f(x)$, одержуємо

$$f(x^*)\le f(z)=f(\lambda x^{(0)}+(1-\lambda)x^*)\le \lambda f(x^{(0)})+(1-\lambda)f(x^*)=$$
$$=\lambda f(x^{(0)})-\lambda f(x^*)+f(x^*).$$

Звідси $\lambda f(x^*)\le\lambda f(x^{(0)})$, або, враховуючи, що $\lambda>0$, $f(x^*)\le f(x^{(0)})$. Оскільки точка $x^{(0)}\in R^n$ довільна, то точка x^* є точкою глобального мінімуму функції $f(x)$ на R^n.

Розглянемо множину

$$X^*=Arg\min_{x\in R^n} f(x)=\{x^*\in R^n \mid f(x^*)=\min_{x\in R^n} f(x)\},$$

яка є множиною точок глобального мінімуму функції $f(x)$ на R^n. Як вже відмічалось (див. §4), для довільної функції ця множина може бути порожньою, скінченною або нескінченною. Позначимо через f^* значення функції $f(x)$ в точці $x^*\in X^*$.

Т е о р е м а 14.5. *Множина точок глобального мінімуму* X^* *опуклої функції* $f(x)$ *на* R^n *опукла. Якщо функція* $f(x)$ *строго опукла на* R^n, *то множина* X^* *містить одну точку.*

Д о в е д е н н я. Візьмемо дві довільні точки з множини X^*: $x_1^* \in X^*$, $x_2^* \in X^*$,

при цьому $f(x_1^*) = f(x_2^*) = f^*$. Розглянемо точку

$$z = \lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^*,$$

де $\lambda \in [0; 1]$. Тоді, враховуючи опуклість функції $f(x)$, маємо

$$f(z) = f(\lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^*) \le \lambda f(x_1^*) + (1-\lambda)f(x_2^*) = \lambda f^* + (1-\lambda)f^* = f^*.$$

Звідси і з означення множини X^* випливає, що будь-яка точка $z = \lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^* \in X^*$ при $\lambda \in [0; 1]$, тобто X^* – опукла множина.

Доведемо другу частину теореми. Нехай $f(x)$ – строго опукла на R^n функція. Припустимо, що мінімум цієї функції досягається у двох різних точках $x_1^* \in X^*$, $x_2^* \in X^*$, $x_1^* \ne x_2^*$. З опуклості множини X^* і строгої опуклості функції $f(x)$ випливає, що при будь-яких $\lambda \in (0; 1)$

$$f^* = f(\lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^*) < \lambda f(x_1^*) + (1-\lambda)f(x_2^*) = f^*,$$

що неможливо. Отримана суперечність доводить єдиність точки глобального мінімуму строго опуклої функції $f(x)$.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається графіком, надграфіком і підграфіком функції?
2. Яка функція називається опуклою, строго опуклою, сильно опуклою функцією?
3. Яка функція називається вгнутою, строго вгнутою, сильно вгнутою функцією?
4. Які властивість має надграфік опуклої функції?
5. Що являє собою нерівність Єнсена?
6. Як формулюється теорема про неперервність опуклої функції?
7. Яку властивість має лебегова множини опуклої функції?
8. Яка функція називається диференційовною в точці за напрямом?
9. Яка функція називається диференційовною в точці?
10. Який напрям визначає градієнт (антиградієнт) функції в точці?
11. Як формулюється теорема про існування похідної за напрямом для опуклої функції?
12. Які з операцій над опуклими функціями не виводять з класу опуклих функцій?
13. Які екстремальні властивості має опукла функція?

Вправи для самостійного виконання

1. Довести наслідки з теореми 14.3 і лем 14.5, 14.6.

2. Нехай функції $y = f(x)$ і $x = g(y)$ є однозначними і взаємно оберненими функціями від однієї змінної на множинах $X \subseteq D(f) \subseteq R^1$, $Y \subseteq E(f) \subseteq R^1$ відповідно. Довести, що:
   1) якщо функція $f(x)$ – опукла і зростаюча на X, то $g(y)$ – вгнута і зростаюча на Y функція;
   2) якщо функція $f(x)$ – опукла і спадна на X, то $g(y)$ – опукла і спадна на Y функція;
   3) якщо функція $f(x)$ – вгнута і спадна на X, то $g(y)$ – вгнута і спадна на Y функція.

3. Довести, що твердження теореми 14.4 має місце і у випадку, коли функція $f(x)$ опукла на довільній опуклій множині $X \subset R^n$.

4. Використовуючи властивості операцій над опуклими функціями, довести опуклість функцій на заданій множині і переконатись в цьому за допомогою геометричних побудов, скориставшись програмними засобами типу Advanced Grapher, Derive, GRAN1, Mathcad тощо:
   1) $f_1(x) = 4e^{0,3x} - 5\ln x$, $X = (0; 5)$;
   2) $f_2(x) = \max\{x+4;\ 3x^2 - 2x + 1;\ 5 - 2x\}$, $X = [-5; 5]$;
   3) $f_3(x) = e^x + \max\{|x-3|; |x+3|\}$, $X = (-5; 4)$
   4) $f_4(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$, $X = (0; 5)$;
   5) $f_5(x) = 2|x| + |x-1| + 0{,}5|x+2|$, $X = R^1$;
   6) $f_6(x) = -x^{-1} + 2^{x^2+x-2}$, $X = (-3; 0)$.

5. Враховуючи опуклість функції $f(x) = -\ln x$ на $(0; +\infty)$ і нерівність Єнсена, довести класичне співвідношення між середнім арифметичним і середнім геометричним $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ge \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$.

6. Довести, що якщо функція $f(x)$ – опукла на опуклій множині $X \subset R^n$, а функція $l(x)$ – лінійна на X, то функція $g(x) = \alpha f(x) - l(x)$ опукла при $\alpha > 0$.

7. Для функції $f(x) = x_1^2 x_2^2 x_3^2$ знайти похідну в точці $A(-1, 2, 1)$ за напрямом, що йде від цієї точки до точки $B(1, 0, 1)$.

8. Знайти похідну функції $f(x) = 4x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_2^3$ в точці $x^{(0)} = (2, 1)$ за напрямом, який утворює з віссю абсцис кут 120°.

9. Знайти похідну функції $f(x) = x_1^2 x_2 - x_1 x_2 x_3 + x_3^2$ в точці $x^{(0)} = (1, 1, 1)$ за напрямом, який утворює з осями координат кути 45°, 60°, 60° відповідно.

10. Знайти похідну функції $f(x) = \ln(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1)$ в точці $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ за напрямом, який утворює з осями координат рівні кути.

11. Знайти похідну функції $f(x) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2}$ в довільній точці $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ за напрямом, який йде від цієї точки до початку координат, де $a \ne 0, b \ne 0, c \ne 0$.

§15. Критерії опуклості диференційовних функцій

Розглянемо деякі критерії опуклості, а також критерії строгої і сильної опуклості диференційовних функцій, які на практиці дозволяють значно простіше встановити опуклість функції, ніж це можна зробити за допомогою означень 14.3, 14.5, 14.6.

Теорема 15.1. *Функція $f(x)$, диференційовна на відкритій опуклій множині $X \subset R^n$, опукла на цій множині тоді і тільки тоді, коли для будь-яких точок $x \in X$, $y \in X$, $x \neq y$ виконується нерівність*

$$f(y) - f(x) \geq \langle f'(x), y - x \rangle. \tag{15.1}$$

Доведення. Необхідність. Нехай функція $f(x)$ опукла на X. Тоді для будь-яких $x \in X$, $y \in X$, $x \neq y$ і всіх $\lambda \in (0;1)$

$$z = \lambda y + (1-\lambda)x = x + \lambda(y - x) \in X,$$

$$f(\lambda y + (1-\lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x)$$

або

$$f(x + \lambda(y - x)) \leq f(x) + \lambda(f(y) - f(x)). \tag{15.2}$$

Покладемо

$$g = \frac{y - x}{\| y - x \|}, \quad \alpha = \lambda \| y - x \| > 0.$$

Тоді з нерівності (15.2)

$$f(x + \alpha g) - f(x) \leq \lambda(f(y) - f(x))$$

або, враховуючи, що $\lambda = \alpha \| y - x \|^{-1} \neq 0$,

$$\| y - x \| \frac{f(x + \alpha g) - f(x)}{\alpha} \leq f(y) - f(x).$$

Переходячи до границі при $\alpha \to +0$, з урахуванням (14.16) одержуємо

$$\frac{\partial f(x)}{\partial g} \| y - x \| \leq f(y) - f(x). \tag{15.3}$$

Враховуючи (14.18) і диференційовність функції $f(x)$ на X, з (15.3) маємо

$$\langle f'(x), g \rangle \| y - x \| = \langle f'(x), (y - x) \| y - x \|^{-1} \rangle \| y - x \| =$$

$$\langle f'(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x)$$

для будь-яких $x \in X$, $y \in X$, $x \neq y$.

Достатність. Нехай має місце нерівність (15.1). Розглянемо точки виду $z = \lambda y + (1-\lambda)x$, які належать X при будь-яких $x \in X$, $y \in X$ і $\lambda \in [0;1]$. Тоді

$$f(y) - f(z) \geq \langle f'(z), y - z \rangle$$

і

$$f(x) - f(z) \geq \langle f'(z), x - z \rangle.$$

Домноживши ці нерівності відповідно на λ і $(1-\lambda)$ та додавши отримані нерівності, одержимо

$$\lambda(f(y) - f(z)) + (1-\lambda)(f(x) - f(z)) \geq \lambda \langle f'(z), y - z \rangle + (1-\lambda) \langle f'(z), x - z \rangle$$

або

$$\lambda f(y) + (1-\lambda) f(x) - f(z) \geq \langle f'(z), \lambda(y - z) \rangle +$$
$$+ \langle f'(z), (1-\lambda)(x - z) \rangle = \langle f'(z), \lambda(y - z) + (1-\lambda)(x - z) \rangle =$$
$$= \langle f'(z), \lambda y + (1-\lambda)x - z \rangle = \langle f'(z), O_n \rangle = 0,$$

тобто

$$f(z) = f(\lambda y + (1-\lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x)$$

для будь-яких $x \in X$, $y \in X$ і $\lambda \in [0;1]$. Отже, функція $f(x)$ опукла на множині X.

З'ясуємо геометричний зміст теореми 15.1 (рис. 15.1). Нагадаємо, що графік лінійної функції

$$l(x) = \langle f'(x^{(0)}), x - x^{(0)} \rangle + f(x^{(0)})$$

називається *дотичною гіперплощиною* до графіка функції $f(x)$ в точці $(x^{(0)}, f(x^{(0)}))$. Тоді співвідношення (15.1) означає, що точки графіка функції $f(x)$ містяться не нижче точок дотичної гіперплощини $l(x)$ в будь-якій точці $(x, f(x))$.

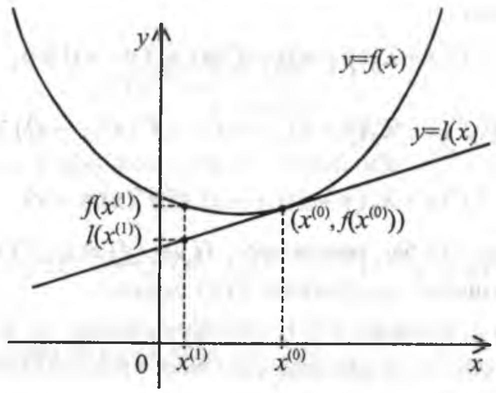


Рис. 15.1.

Спираючись на попередню теорему, можна одержати інший критерій опуклості диференційовних функцій в термінах перших похідних.

Т е о р е м а 15.2. *Функція $f(x)$, диференційовна на відкритій опуклій множині $X \subset R^n$, опукла на цій множині тоді і тільки тоді, коли для будь-яких точок $x \in X$, $y \in X$, $x \neq y$, виконується нерівність*

$$\langle f'(y) - f'(x), y - x \rangle \geq 0. \qquad (15.4)$$

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай функція $f(x)$ опукла на X. Тоді для будь-яких $x \in X$, $y \in X$, $x \neq y$, згідно теореми 15.1, мають місце нерівності

$$f(y) - f(x) \geq \langle f'(x), y - x \rangle,$$

$$f(x) - f(y) \geq \langle f'(y), x - y \rangle.$$

Додавши їх, одержуємо

$$0 \geq \langle f'(x), y - x \rangle - \langle f'(y), y - x \rangle = \langle f'(x) - f'(y), y - x \rangle$$

або

$$\langle f'(y) - f'(x), y - x \rangle \geq 0.$$

Д о с т а т н і с т ь. Нехай $f(x)$ диференційовна на X функція і для будь-яких точок $x \in X$, $y \in X$, $x \neq y$, виконується нерівність (15.4). Згідно теореми про середнє значення, якщо функція $f(x)$ диференційовна на відкритій опуклій множині $X \subseteq R^n$ і $x \in X$, $y \in X$, то існує таке число $\lambda_0 \in (0;1)$, що має місце рівність (*формула Лагранжа*)

$$f(y) - f(x) = \langle f'(x + \lambda_0(y - x)), y - x \rangle, \qquad (15.5)$$

при цьому точка $x + \lambda_0(y - x) \in X$.

З (15.4) маємо

$$\langle f'(x + \lambda_0(y - x)) - f'(x), \lambda_0(y - x) \rangle \geq 0,$$

звідки

$$\lambda_0(\langle f'(x + \lambda_0(y - x)), y - x \rangle - \langle f'(x), y - x \rangle) \geq 0$$

або

$$\langle f'(x + \lambda_0(y - x)), y - x \rangle \geq \langle f'(x), y - x \rangle.$$

Враховуючи (15.5), одержимо $f(y) - f(x) \geq \langle f'(x), y - x \rangle$. Згідно теореми 15.1 це означає, що функція $f(x)$ опукла.

Н а с л і д о к. *Функція $f(x)$, диференційовна на відкритій опуклій множині $X \subset R^1$, опукла на цій множині тоді і тільки тоді, коли її похідна $f'(x)$ не спадає на X.*

Твердження, аналогічні до теорем 15.1 і 15.2, мають місце для строго і сильно опуклих функцій.

Т е о р е м а 15.3. *Функція $f(x)$, диференційовна на відкритій опуклій множині $X \subset R^n$, строго опукла на цій множині тоді і тільки тоді, коли для будь-яких точок $x \in X$, $y \in X$, $x \neq y$, виконується будь-яка з умов*

$$f(y) - f(x) > \langle f'(x), y - x \rangle; \qquad (15.6)$$

$$\langle f'(y) - f'(x), y - x \rangle > 0. \qquad (15.7)$$

Т е о р е м а 15.4. *Функція $f(x)$, диференційовна на опуклій множині $X \subset R^n$, сильно опукла з константою $m > 0$ на X тоді і тільки тоді, коли для будь-яких точок $x \in X$, $y \in X$, виконується нерівність*

$$f(y) - f(x) \geq \langle f'(x), y - x \rangle + m\| y - x \|^2. \qquad (15.8)$$

Т е о р е м а 15.5. *Функція $f(x)$, неперервно диференційовна на опуклій множині $X \subset R^n$, сильно опукла з константою $m > 0$ на X тоді і тільки тоді, коли для будь-яких точок $x \in X$, $y \in X$, виконується нерівність*

$$\langle f'(y) - f'(x), y - x \rangle \geq 2m\| y - x \|^2. \qquad (15.9)$$

З а у в а ж е н н я. Твердження теорем 15.1 - 15.5 переносяться і на випадок вгнутих, строго і сильно вгнутих функцій, при цьому при формулюванні відповідних теорем знаки «$\leq$», «$<$» замінюються відповідно на знаки «$\geq$», «$>$».

Розглянемо тепер критерії опуклості для двічі диференційовних функцій.

Нехай функція $f(x)$ визначена на відкритій множині $X \subset R^n$. Функція $f(x)$ називається *двічі диференційовною* в точці $x^{(0)} \in X$, якщо матриця

$$f''(x^{(0)}) = \left(\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=\overline{1,n}}$$

існує, симетрична і при всіх $g \in R^n$ таких, що $x^{(0)} + g \in X$, має місце рівність

$$f(x^{(0)} + g) = f(x^{(0)}) + \langle f'(x^{(0)}), g \rangle + \frac{1}{2}\langle f''(x^{(0)}) \cdot g, g \rangle + o(\| g \|^2),$$

де $o(\| g \|^2)$ – числова функція така, що $\lim\limits_{\|g\| \to 0} \frac{o(\| g \|^2)}{\| g \|^2} = 0$.

Якщо функція $f(x)$ двічі диференційовна на відкритій опуклій множині $X \subset R^n$ і $x \in X$, $y \in X$, то існує таке число $\lambda_0 \in (0;1)$, яке залежить від x і y, що

$$f(y) - f(x) = \langle f'(x), y - x\rangle + \frac{1}{2}\langle f''(x + \lambda_0(y-x)) \cdot (y-x), y-x\rangle \quad (15.10)$$

(*формула Тейлора*).

Т е о р е м а 15.6. *Двічі диференційовна на відкритій опуклій множині $X \subset R^n$ функція $f(x)$ опукла на X тоді і тільки тоді, коли матриця других похідних невід'ємно визначена на X, тобто*

$$\langle f''(x) \cdot g, g\rangle \geq 0 \quad (15.11)$$

для будь-яких $x \in X$ і $g \in R^n$.

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай функція $f(x)$ опукла і двічі диференційовна на множині X. Візьмемо довільну точку $x \in X$ і вектор $g \in R^n$. Оскільки множина X відкрита, то знайдеться число $\alpha_0 > 0$ таке, що $x + \alpha g \in X$ для будь-якого $\alpha \in [0;\alpha_0]$. За теоремою 15.1

$$f(x+\alpha g) - f(x) \geq \langle f'(x), (x+\alpha g) - x\rangle =$$
$$= \langle f'(x), \alpha g\rangle = \alpha\langle f'(x), g\rangle$$

або

$$f(x+\alpha g) - f(x) - \alpha\langle f'(x), g\rangle \geq 0$$

для будь-якого $\alpha \in [0;\alpha_0]$.

Тоді при $y = x + \alpha g$ за (15.10) $\langle f''(x + \lambda_0 \alpha g) \cdot g, g\rangle \geq 0 \quad \forall \alpha \in [0;\alpha_0]$, де $\lambda_0 \in (0;1)$. Звідси і з умов теореми при $\alpha \to +0$ випливає, що

$$\langle f''(x) \cdot g, g\rangle \geq 0.$$

Оскільки $x \in X$ і $g \in R^n$ довільні, то матриця $f''(x)$ невід'ємно визначена для будь-якого $x \in X$.

Д о с т а т н і с т ь. Нехай функція $f(x)$ двічі диференційовна на X і $f''(x)$ – невід'ємно визначена матриця. Тоді для довільних точок $x \in X, y \in X$, враховуючи формулу Тейлора, для деякого $\lambda_0 \in (0;1)$, маємо

$$f(y) - f(x) - \langle f'(x), y - x\rangle =$$
$$= \frac{1}{2}\langle f''(x + \lambda_0(y-x))(y-x), y-x\rangle \geq 0$$

тобто

$$f(y) - f(x) \geq \langle f'(x), y - x\rangle$$

для довільних точок $x \in X$, $y \in X$. За теоремою 15.1 це означає, що функція $f(x)$ опукла на X.

Н а с л і д о к. *Двічі диференційовна на відкритій опуклій множині $X \subset R^1$ функція $f(x)$ опукла на X тоді і тільки тоді, коли її друга похідна $f''(x)$ невід'ємна на X, тобто $f''(x) \geq 0$ для будь-яких $x \in X$.*

Аналогічно можна довести, що для сильно опуклих функцій має місце

Т е о р е м а 15.7. *Нехай $f(x)$ – двічі диференційовна функція на опуклій множині $X \subset R^n$, при цьому $\operatorname{int} X \neq \varnothing$. Функція $f(x)$ сильно опукла з константою $m > 0$ на множині X тоді і тільки тоді, коли*

$$\langle f''(x)g, g\rangle \geq 2m\|g\|^2$$

для будь-яких $x \in X$ і $g \in R^n$.

Для строго опуклих функцій має місце

Т е о р е м а 15.8. *Нехай $f(x)$ – двічі диференційовна функція на відкритій опуклій множині $X \subset R^n$. Для того, щоб функція $f(x)$ була строго опуклою на X, достатньо, щоб матриця других похідних була додатно визначена на X, тобто*

$$\langle f''(x) \cdot g, g\rangle > 0 \quad (15.12)$$

для будь-яких $x \in X$ і $g \in R^n$, $g \neq O_n$.

Іншими словами, якщо $f''(x)$ додатно визначена на X, то $f(x)$ строго опукла на цій множині, але обернене твердження місця не має. Пояснимо це на прикладі.

П р и к л а д 15.1. Розглянемо функцію

$$f(x) = x^4, \; x \in X = R^1.$$

Використовуючи другу умову теореми 15.3, покажемо, що функція $f(x)$ строго опукла. Для функції від однієї змінної $f(x) = x^4$ маємо

$$\langle f'(y) - f'(x), y - x\rangle = (4y^3 - 4x^3)(y-x) = 4(y-x)^2(y^2 + x^2 + xy) > 0$$

для будь-яких $x \in R^1$, $y \in R^1$, $x \neq y$. Дійсно, оскільки $x \neq y$, то $(y-x)^2 > 0$ і значення виразу $y^2 + x^2 + xy$ теж більші від 0 тому, що

$$y^2 + x^2 + xy = \frac{1}{2}(y^2 + x^2) + \frac{1}{2}(y^2 + x^2 + 2xy) = \frac{1}{2}(y^2 + x^2) + \frac{1}{2}(y+x)^2.$$

Отже, функція $f(x)$ строго опукла на R^1, але при цьому $f''(x) = 12x^2$ в точці $x = 0$ дорівнює нулеві, тобто не є додатною.

Л е м а 15.1. *Нехай A – симетрична матриця порядку n і $b \in R^n$. Квадратична функція*

$$f(x)=\frac{1}{2}\langle A\cdot x,x\rangle+\langle b,x\rangle$$

опукла на R^n тоді і тільки тоді, коли матриця A невід'ємно визначена.

Д о в е д е н н я. Легко бачити, що $f''(x)=A$. Тоді твердження безпосередньо випливає з теореми 15.6.

Теореми 15.6 і 15.8 разом з критерієм Сільвестра є досить зручним апаратом для перевірки опуклості функцій.

П р и к л а д 15.2. З'ясувати, чи є функція

$$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-\cos(x_1-x_2)$$

опуклою в просторі R^2.

Оскільки функція $f(x)$ двічі диференційовна, то матриця других похідних існує і має вигляд

$$f''(x)=\begin{pmatrix}2+\cos(x_1-x_2) & -\cos(x_1-x_2)\\ -\cos(x_1-x_2) & 2+\cos(x_1-x_2)\end{pmatrix}.$$

Знайдемо кутові мінори цієї матриці:

$$\Delta_1=2+\cos(x_1-x_2),\ \Delta_2=4+4\cos(x_1-x_2).$$

Таким чином, для будь-яких точок $x\in R^2$ $\Delta_1>0$, $\Delta_2\ge 0$ (оскільки $|\cos(x_1-x_2)|\le 1$), тобто матриця $f''(x)$ невід'ємно визначена на R^2. Тому функція $f(x)$ опукла за теоремою 15.6.

Запитання для самоконтролю

1. Як формулюються критерії опуклості, строгої опуклості та сильної опуклості диференційовних функцій?
2. Як формулюються критерії опуклості та сильної опуклості двічі диференційовних функцій?
3. Як формулюється достатня умова строгої опуклості двічі диференційовних функцій?
4. Як формулюється критерій опуклості квадратичної функції?

Вправи для самостійного виконання

1. Довести теореми 15.3, 15.4, 15.5, 15.7 і наслідки до теорем 15.1 і 15.6.

2. За критеріями опуклості диференційовної функції від однієї змінної довести, що функція $f(x)$ опукла:

1) $f(x)=x^p$, якщо $x\ge 0$ і $1\le p<+\infty$;
2) $f(x)=-x^p$, якщо $x\ge 0$ і $0\le p\le 1$;
3) $f(x)=x^p$, якщо $x>0$ і $-\infty<p\le 0$;
4) $f(x)=e^{\alpha x}$, якщо $-\infty<\alpha<+\infty$;
5) $f(x)=-\ln x$, якщо $x>0$;
6) $f(x)=x\ln x$, якщо $x>0$.

3. За критеріями опуклості для двічі диференційовних функцій встановити, які із заданих функцій $f(x)$ опуклі, і перевірити результати за допомогою графічних побудов, скориставшись програмними засобами типу Advanced Grapher, Derive, GRAN-3D, Mathcad тощо:

1) $f(x)=2x_1^2+x_2^2+\sin(x_1+x_2)$ на R^2;
2) $f(x)=4x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+8x_1-3x_2-1$ на R^2;
3) $f(x)=\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}-2$ на R^2;
4) $f(x)=x_1^4+x_2^4+x_1^2+x_2^2+x_1x_2-3$ на R^2;
5) $f(x)=e^{x_1^2+x_2^2}$ на R^2;
6) $f(x)=x_1^2x_2^2$ на R^2;
7) $f(x)=x_1^3+2x_2^3+3x_1x_2$ на R^2;
8) $f(x)=\ln(x_1^2+x_2^2+1)$ на R^2.

4. У просторі R^2 знайти множину, на якій функція $f(x)$ опукла:

1) $f(x)=\cos(x_1+x_2)$;
2) $f(x)=x_1^2+2x_2^2-\sin(x_1-x_2)-5$;
3) $f(x)=\dfrac{x_1^2}{x_2}$;
4) $f(x)=x_1^2+x_2^2+e^{x_1+x_2}-10$;
5) $f(x)=10x_1^2+10x_2^2+8x_1x_2$.

Скориставшись програмними засобами типу Advanced Grapher, Derive, GRAN1, Mathcad тощо, виконати побудови ліній рівня заданих функцій.

5. Для квадратичної функції $f(x)=\frac{1}{2}\langle A\cdot x,x\rangle+\langle b,x\rangle$, де A – симетрична матриця порядку n і $b\in R^n$, довести, що

а) $f'(x)=\langle A,x\rangle+b$;
б) $f''(x)=A$;
в) квадратична функція сильно опукла на R^n тоді і тільки тоді, коли матриця A додатно визначена.

6. Для квадратичних функцій $f(x)$ знайти матрицю A, вектор b, $f'(x^{(0)})$ та $f''(x^{(0)})$ в заданій точці $x^{(0)}$ і з'ясувати, чи є функції $f(x)$ опуклими:

1) $f(x)=x_1^2+5x_1x_2+3x_2^2+4x_1-6x_2$, $x^{(0)}=(0,0)$;
2) $f(x)=3x_1^2-9x_1x_2+30x_2^2-7x_1+4x_2$, $x^{(0)}=(1,-2)$;
3) $f(x)=2x_1^2+4x_2^2+6x_3^2+4x_1x_2-2x_2x_3-x_1-x_2$, $x^{(0)}=(1,1,1)$;
4) $f(x)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+x_1x_2+2x_2x_3$, $x^{(0)}=(0,2,0)$;
5) $f(x)=2x_1^2+6x_1x_2+x_2^2-2x_2x_3+4x_3^2+3x_2-5x_3$, $x^{(0)}=(0,2,0)$.

7. Визначити, при яких значеннях $a,b,c\in R^1$ квадратична функція $f(x)=ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2$ опукла в R^2.

8. Визначити, при яких значеннях $a\in R^1$ функція $f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+ax_1x_2$ опукла в R^3.

§16. Субградієнт і субдиференціал опуклої функції та їх властивості

Важливим для опуклого аналізу є вивчення властивостей опуклих функцій в точках, в яких вони недиференційовні, оскільки саме ці точки часто є екстремальними. Тому необхідно мати умови екстремуму в таких точках, а також вміти вибирати в них напрям спадання опуклої функції при побудові чисельних методів оптимізації.

У геометричному тлумаченні, якщо опукла функція $f(x)$ не має неперервної похідної, то не в усіх точках до графіка функції $y=f(x)$ існує дотична гіперплощина, тобто множина *epi f* має зломи (рис. 16.1).

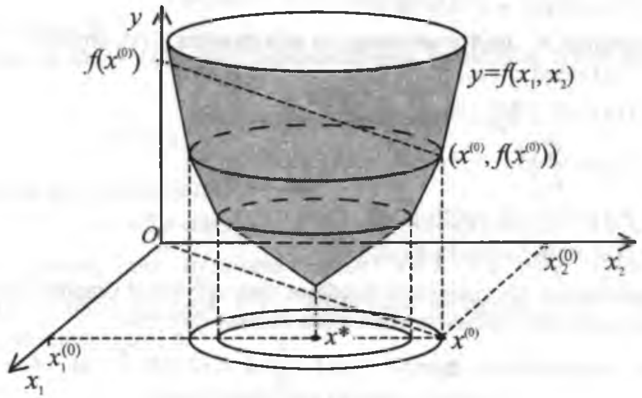


Рис. 16.1.

На рисунку 16.1 показано приклад, коли не існує дотичної гіперплощини до графіка функції $y=f(x_1,x_2)$ в точці $(x^{(0)},f(x^{(0)}))$, але є нескінченна множина опорних гіперплощин до *epi f* у цій точці.

Подібно до того, як дотична гіперплощина до графіка функції $f(x)$ характеризується градієнтом цієї функції в точці, кожна опорна гіперплощина до *epi f* характеризується деяким вектором, який отримав назву *субградієнта* (*узагальненого градієнта*).

1. Нехай функція $f(x)$ визначена і скінченна на R^n, тобто $f(x)>-\infty$ і $f(x)<+\infty$ $\forall x\in R^n$.

О з н а ч е н н я 16.1. Вектор $g(x^{(0)})\in R^n$ називається *субградієнтом* функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$, якщо при будь-яких $x\in R^n$

$$f(x)-f(x^{(0)})\geq\langle g(x^{(0)}),x-x^{(0)}\rangle. \qquad (16.1)$$

Нерівність (16.1) означає (рис. 16.2), що графік функції $y=f(x)$

$$G_f=\{(x,y)\in R^{n+1}|x\in R^n,\,y\in R^1,\,y=f(x)\}$$

лежить не нижче графіка лінійної функції

$$l_0(x)=f(x^{(0)})+\langle g(x^{(0)}),x-x^{(0)}\rangle,$$

при цьому обидва графіки мають спільну точку

$$(x^{(0)},f(x^{(0)}))=(x^{(0)},l(x^{(0)})).$$

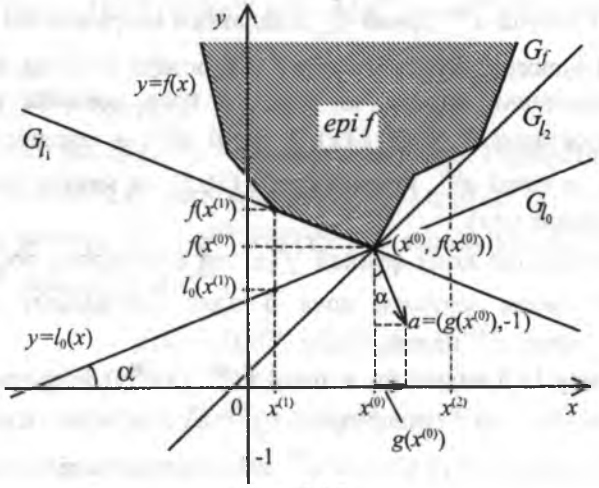


Рис. 16.2.

Крім того, графік функції $l_0(x)$

$$G_{l_0}=\{(x,y)\in R^{n+1}|x\in R^n,\,y\in R^1,\,y=l_0(x)\}$$

є опорною гіперплощиною до множин G_f і *epi f* в точці $(x^{(0)},f(x^{(0)}))$, при цьому гіперплощина G_{l_0} визначається вектором $a=(g(x^{(0)}),-1)\in R^{n+1}$, тобто $G_{l_0}=H(a,(x^{(0)},f(x^{(0)})))$, де

$$H(a,(x^{(0)},f(x^{(0)})))=\{(x,y)\in R^{n+1}\,|\,\langle(g(x^{(0)}),-1),(x,y)-(x^{(0)},f(x^{(0)}))\rangle=0\}=$$
$$=\{(x,y)\in R^{n+1}\,|\,\langle g(x^{(0)}),x-x^{(0)}\rangle=y-f(x^{(0)})\}$$

(рис. 16.2).

Дійсно, з нерівності (16.1) і означення 14.2 множини *epi f* при $y\geq f(x)$ маємо

$$\langle g(x^{(0)}),x-x^{(0)}\rangle\leq f(x)-f(x^{(0)})\leq y-f(x^{(0)}),$$

або

$$\langle g(x^{(0)}),x-x^{(0)}\rangle+(-1)y-(-1)f(x^{(0)})\leq 0\quad\forall x\in R^n,$$

де $y\geq f(x)$.

Звідси

$$\langle (g(x^{(0)}),-1),(x,y)-(x^{(0)},f(x^{(0)}))\rangle \le 0 \;\; \forall (x,y)\in epi\,f\,.$$

Отже, за означенням 13.4 G_{l_0} є опорною гіперплощиною до $epi\,f$ в точці $(x^{(0)},f(x^{(0)}))$ і, тим самим, до множини G_f.

Для функції числового аргументу напрям субградієнта характеризується тангенсом кута нахилу, який утворює опорна до графіка функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$ пряма G_{l_0} з додатним напрямом осі абсцис (див. рис. 16.2). З іншого боку, субградієнт у просторі R^1 – це вектор на осі абсцис, направлений вправо чи вліво, а його довжина характеризує швидкість зростання функції $l_0(x)$ в точці $x^{(0)}$, а швидкість зростання функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$, як випливає з (16.1), не менша, ніж швидкість зростання функції $l_0(x)$.

Зауважимо, що коли функції $f(x)$ не є опуклою, то не в кожній точці $x\in R^n$ може існувати хоча б один субградієнт цієї функції (наприклад в точці $x^{(2)}$ на рис. 16.2).

З рисунку 16.2 видно, що в точці $(x^{(0)},f(x^{(0)}))$ існують різні опорні гіперплощини до $epi\,f$ (наприклад G_{l_1} і G_{l_2}), а, отже, існують й різні субградієнти функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$, які визначають ці гіперплощини.

О з н а ч е н н я 16.2. Множина всіх субградієнтів функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}\in R^n$ називається *субдиференціалом* функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$ і позначається $\partial f(x^{(0)})$, тобто

$$\partial f(x^{(0)})=\{g\in R^n \,|\, f(x)-f(x^{(0)})\ge \langle g,x-x^{(0)}\rangle \;\forall x\in R^n\}\,. \quad (16.2)$$

Т е о р е м а 16.1. *Нехай задана функція $f(x)$, яка визначена на R^n, $x^{(0)}\in R^n$ і в деякій точці $x^{(0)}\in R^n$ існує субдиференціал $\partial f(x^{(0)})\neq\varnothing$. Тоді множина $\partial f(x^{(0)})$ опукла і замкнена.*

Д о в е д е н н я. Якщо $\partial f(x^{(0)})$ містить лише один субградієнт, то теорема доведена. Нехай існують вектори $g^{(1)}\in\partial f(x^{(0)})$, $g^{(2)}\in\partial f(x^{(0)})$. Доведемо спочатку опуклість множини $\partial f(x^{(0)})$ в цьому випадку. Згідно означення 16.1

$$f(x)-f(x^{(0)})\ge\langle g^{(1)},x-x^{(0)}\rangle \;\;\forall x\in R^n\,,$$

$$f(x)-f(x^{(0)})\ge\langle g^{(2)},x-x^{(0)}\rangle \;\;\forall x\in R^n\,.$$

Візьмемо довільне $\lambda\in[0;1]$, домножимо першу нерівність на λ, другу – на $(1-\lambda)$ і додамо отримані нерівності. Тоді

$$\lambda f(x)-\lambda f(x^{(0)})+(1-\lambda)f(x)-(1-\lambda)f(x^{(0)})\ge$$

$$\ge\langle\lambda g^{(1)},x-x^{(0)}\rangle+\langle(1-\lambda)g^{(2)},x-x^{(0)}\rangle \;\;\forall x\in R^n$$

або

$$f(x)-f(x^{(0)})\ge\langle\lambda g^{(1)}+(1-\lambda)g^{(2)},x-x^{(0)}\rangle \;\;\forall x\in R^n,$$

тобто вектор $g=\lambda g^{(1)}+(1-\lambda)g^{(2)}\in\partial f(x^{(0)})$ для будь-яких $\lambda\in[0;1]$. Отже, множина $\partial f(x^{(0)})$ – опукла.

Доведемо, що $\partial f(x^{(0)})$ – замкнена множина. Припустимо, що це не так. Тоді знайдеться послідовність $\{g^{(k)}\}\subset\partial f(x^{(0)})\;(k=1,2,...)$, яка збігається до вектора $g^{(0)}$ і $g^{(0)}\notin\partial f(x^{(0)})$. У такому разі існує хоча б одна точка $\bar{x}\in R^n$ така, що $\bar{x}\neq x^{(0)}$ і

$$f(\bar{x})-f(x^{(0)})<\langle g^{(0)},\bar{x}-x^{(0)}\rangle$$

або

$$f(\bar{x})-f(x^{(0)})+\varepsilon=\langle g^{(0)},\bar{x}-x^{(0)}\rangle\,, \quad (16.3)$$

де $\varepsilon>0$ – деяке число.

Оскільки для кожного $g^{(k)}, k=1,2,...,$ має місце нерівність

$$f(\bar{x})-f(x^{(0)})\ge\langle g^{(k)},\bar{x}-x^{(0)}\rangle\,, \quad (16.4)$$

то віднявши від нерівності (16.4) рівність (16.3), одержимо

$$-\varepsilon\ge\langle g^{(k)}-g^{(0)},\bar{x}-x^{(0)}\rangle$$

або

$$0<\varepsilon\le\langle g^{(0)}-g^{(k)},\bar{x}-x^{(0)}\rangle\le\| g^{(0)}-g^{(k)}\|\cdot\|\bar{x}-x^{(0)}\| \;\;\forall k=1,2,...\,.$$

Звідси випливає, що для будь-якого $k=1,2,...$

$$0<\varepsilon\|\bar{x}-x^{(0)}\|^{-1}\le\| g^{(0)}-g^{(k)}\|,$$

але це суперечить збіжності послідовності $\{g^{(k)}\}$ до $g^{(0)}$ при $k\to+\infty$. Отже, $g^{(0)}\in\partial f(x^{(0)})$, тобто множина $\partial f(x^{(0)})$ – замкнена.

2. З вище сказаного видно, що поняття субградієнта і субдиференціала існує не лише для опуклих функцій, але саме для цих функцій, як буде показано далі, ці поняття є природними і надзвичайно важливими.

Л е м а 16.1. *Нехай функція* $f(x)$ *визначена і опукла на* R^n. *Тоді* $epi\, f$ *– непорожня опукла і замкнена множина.*

Д о в е д е н н я. Оскільки G_f – графік функції $f(x)$ є непорожньою підмножиною $epi\, f$, то і множина $epi\, f$ також непорожня.

Опуклість множини $epi\, f$ доведена в лемі 14.1.

Доведемо замкненість $epi\, f$. Нехай є послідовність точок $\{(x^{(k)},\alpha_k)\} \subset epi\, f$, $k = 1, 2, ...$, з простору R^{n+1} така, що

$$(x^{(k)},\alpha_k) \to (x^{(0)},\alpha_0) \text{ при } k \to +\infty,$$

де $x^{(k)} \in R^n$, $\alpha_k \in R^1$, $k = 0, 1, 2, ...$. З неперервності опуклої функції $f(x)$ в усіх точках простору R^n (див. наслідок 2 теореми 14.2) і означення $epi\, f$ випливає, що

$$\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f(x^{(0)}) \text{ і } \alpha_k \ge f(x^{(k)}) \quad \forall k = 1, 2, ...$$

Тоді

$$\alpha_0 = \lim_{k\to\infty} \alpha_k \ge \lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f(x^{(0)}),$$

тобто $\alpha_0 \ge f(x^{(0)})$. Отже точка $(x^{(0)},\alpha_0) \in epi\, f$, що й треба було довести.

Т е о р е м а 16.2. *Для того, щоб функція* $f(x)$, *визначена на* R^n, *була опуклою, необхідно і достатньо, щоб вона мала непорожній субдиференціал в усіх точках* R^n.

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай $f(x)$ опукла на R^n. Візьмемо довільну точку $x^{(0)} \in R^n$ і покажемо, що $\partial f(x^{(0)}) \ne \varnothing$. Розглянемо надграфік функції $f(x)$ на R^n і його межову точку $(x^{(0)}, f(x^{(0)}))$. Тоді для непорожньої опуклої і замкненої множини $epi\, f$ (див. лему 16.1) і точки $(x^{(0)}, f(x^{(0)}))$, згідно теореми 13.2 про опорну гіперплощину, існує такий ненульовий вектор $a = (g,c) \in R^{n+1}$, де $g \in R^n, c \in R^1$,

$$\| a \|^2 = \| g \|^2 + c^2 > 0, \tag{16.5}$$

що

$$\langle (g,c),(x,\alpha) - (x^{(0)}, f(x^{(0)})\rangle \le 0$$

для будь-яких $(x,\alpha) \in epi\, f$, або, враховуючи властивості скалярного добутку,

$$\langle g, x - x^{(0)} \rangle + c(\alpha - f(x^{(0)})) \le 0 \tag{16.6}$$

для будь-яких $(x,\alpha) \in epi\, f$.

Звідси при $x = x^{(0)}$ маємо

$$c(\alpha - f(x^{(0)})) \le 0 \;\; \forall \alpha \ge f(x^{(0)}),$$

тобто $c \le 0$. Якщо $c = 0$, то з (16.6) одержуємо

$$\langle g, x - x^{(0)} \rangle \le 0 \;\; \forall x \in R^n,$$

що можливо лише при $g = O_n$ в силу того, що $x^{(0)}$ є внутрішньою точкою відкритої множини R^n. Але це суперечить умові (16.5). Отже, $c < 0$. Покладемо в (16.6) $\alpha = f(x)$. Тоді, враховуючи те, що $c < 0$, маємо

$$\langle g, x - x^{(0)} \rangle - |c| (f(x) - f(x^{(0)})) \le 0,$$

або

$$f(x) - f(x^{(0)}) \ge \langle |c|^{-1} g, x - x^{(0)} \rangle \quad \forall x \in R^n,$$

тобто вектор $g^{(0)} = |c|^{-1} g \in \partial f(x^{(0)})$. Отже, множина $\partial f(x^{(0)})$ непорожня для довільної точки $x^{(0)} \in R^n$.

Д о с т а т н і с т ь. Нехай для деякої функції $f(x)$ субдиференціал $\partial f(x) \ne \varnothing$ при всіх $x \in R^n$. Покажемо, що функція $f(x)$ опукла на R^n. Візьмемо довільні точки $x^{(1)} \in R^n$, $x^{(2)} \in R^n$ і число $\lambda \in [0;1]$. Розглянемо точки виду

$\bar{x} = \lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} \in R^n$. Нехай вектор $g = g_{\bar{x}} \in \partial f(\bar{x})$.

Тоді
$$f(x^{(1)}) - f(\bar{x}) \ge \langle g, x^{(1)} - \bar{x} \rangle,$$
$$f(x^{(2)}) - f(\bar{x}) \ge \langle g, x^{(2)} - \bar{x} \rangle.$$

Домножимо першу з цих нерівностей на λ, а другу – на $(1-\lambda)$ і додамо їх. Тоді

$$\lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda) f(x^{(2)}) - f(\bar{x}) \ge \langle g, \bar{x} - \bar{x} \rangle = 0$$

або, враховуючи вираз для $\bar{x}$,

$$\lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda) f(x^{(2)}) \ge f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)})$$

при будь-яких $x^{(1)} \in R^n$, $x^{(2)} \in R^n$ і $\lambda \in [0;1]$. Отже, функція $f(x)$ опукла на R^n.

Т е о р е м а 16.3. *Для опуклої функції* $f(x)$, *визначеної на* R^n, *субдиференціал* $\partial f(x^{(0)})$ *для будь-якої точки* $x^{(0)} \in R^n$ *є непорожньою опуклою замкненою і обмеженою множиною.*

Доведення. Те, що $\partial f(x^{(0)})$ – непорожня множина, випливає з попередньої теореми. Опуклість і замкненість множини $\partial f(x^{(0)})$ доведено в теоремі 16.1.

Доведемо обмеженість субдиференціалу $\partial f(x^{(0)})$. Візьмемо деяке $\delta > 0$ і розглянемо замкнену кулю

$$\bar{S}(x^{(0)},\delta) = \{x \in R^n \mid \| x - x^{(0)} \| \le \delta\} \subset R^n .$$

Оскільки функція $f(x)$ – визначена і опукла на R^n, то в силу її неперервності в усіх точках простору R^n і теореми Вейєрштрасса (теорема 7.5), на компактній множині $\bar{S}(x^{(0)},\delta)$ вона набуває свого найбільшого значення, тобто існує $f^* < \infty$ таке, що

$$f^* = \sup_{x \in \bar{S}(x^{(0)},\delta)} f(x). \tag{16.7}$$

Візьмемо довільний субградієнт $g^{(0)} \in \partial f(x^{(0)})$ такий, що $g^{(0)} \ne O_n$, і покладемо

$$\bar{x} = x^{(0)} + z^{(0)} \in \bar{S}(x^{(0)},\delta), \text{ де } z^{(0)} = \delta \| g^{(0)} \|^{-1} g^{(0)}.$$

Тоді, враховуючи (16.7), з (16.1) одержуємо

$$f^* - f(x^{(0)}) \ge f(\bar{x}) - f(x^{(0)}) \ge \langle g^{(0)}, \bar{x} - x^{(0)} \rangle = \langle g^{(0)}, z^{(0)} \rangle = \delta \| g^{(0)} \|,$$

або

$$\| g^{(0)} \| \le \delta^{-1}(f^* - f(x^{(0)})) < \infty .$$

Ця нерівність має місце для довільного вектора $g^{(0)} \in \partial f(x^{(0)})$, тому субдиференціал є обмеженою множиною.

Встановимо тепер зв'язок між похідною за напрямом і субдиференціалом опуклої функції.

Теорема 16.4. *Нехай опукла функція $f(x)$ визначена і скінченна на R^n. Для довільної точки $x^{(0)} \in R^n$ вектор $g \in R^n$ є субградієнтом функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$ тоді і тільки тоді, коли*

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial v} \ge \langle g,v \rangle \tag{16.8}$$

для будь-якого вектора $v \in R^n$, $\| v \| = 1$.

Доведення. Необхідність. Нехай існує вектор $g \in \partial f(x^{(0)})$, тобто має місце нерівність (16.1). Для довільної точки $x^{(0)} \in R^n$ розглянемо множину

$$U(x^{(0)},\delta) = \{x \in R^n \mid x = x^{(0)} + \alpha v,\ 0 < \alpha \le \delta\ \forall v \in R^n,\ \| v \| = 1\} =$$
$$= \bar{S}(x^{(0)},\delta) \setminus \{x^{(0)}\} \subset R^n ,$$

де $\delta > 0$. Тоді для всіх точок $x \in U(x^{(0)},\delta)$

$$f(x^{(0)} + \alpha v) - f(x^{(0)}) \ge \langle g, x^{(0)} + \alpha v - x^{(0)} \rangle = \alpha \langle g,v \rangle .$$

Поділимо цю нерівність на $\alpha > 0$. Тоді

$$\frac{f(x^{(0)} + \alpha v) - f(x^{(0)})}{\alpha} \ge \langle g,v \rangle .$$

Перейшовши до границі в останній нерівності при $\alpha \to +0$, одержимо нерівність (16.8).

Достатність. Нехай для деякого вектора $g \in R^n$ має місце (16.8). Доведемо, що $g \in \partial f(x^{(0)})$. Згідно (14.19) і (16.8) для будь-якого вектора $v \in R^n$ має місце нерівність

$$\inf_{\alpha > 0} \frac{f(x^{(0)} + \alpha v) - f(x^{(0)})}{\alpha} \ge \langle g,v \rangle$$

тобто

$$f(x^{(0)} + \alpha v) - f(x^{(0)}) \ge \alpha \langle g,v \rangle \ \forall \alpha > 0 .$$

Тоді для всіх точок $x = x^{(0)} + \alpha v, \alpha > 0, \forall v \in R^n$ маємо

$$f(x) - f(x^{(0)}) \ge \langle g, \alpha v \rangle = \langle g, x^{(0)} + \alpha v - x^{(0)} \rangle = \langle g, x - x^{(0)} \rangle .$$

Очевидно, що для точки $x^{(0)}$ ця нерівність також має місце. Отже, вектор $g \in \partial f(x^{(0)})$.

Враховуючи теореми 16.3 і 16.4, можна показати, що для довільної точки $x^{(0)} \in R^n$ і будь-якого фіксованого $v \in R^n, \| v \| = 1$, має місце співвідношення:

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial v} = \max_{g \in \partial f(x^{(0)})} \langle g,v \rangle . \tag{16.9}$$

Означення 16.3. Вектор $v \in R^n$ називається *напрямом спадання (зростання)* функції $f(x)$ в точці $x^{(0)} \in R^n$, якщо

$$f(x^{(0)} + \alpha v) < f(x^{(0)}) \quad (f(x^{(0)} + \alpha v) > f(x^{(0)}))$$

при всіх досить малих $\alpha > 0$.

Л е м а 16.2. *Якщо опукла функція $f(x)$, визначена на R^n, у деякому напрямі спадає, то в протилежному напрямі вона зростає.*

Д о в е д е н н я. Нехай в точці $x^{(0)} \in R^n$ функція $f(x)$ спадає в напрямі вектора $v \in R^n$, $\| v \| = 1$, тобто має місце нерівність

$$f(x^{(0)} + \alpha v) < f(x^{(0)}) \qquad (16.10)$$

при всіх досить малих $\alpha > 0$.

В силу опуклості функції $f(x)$, враховуючи нерівність (16.10), маємо

$$f(x^{(0)}) = f(2^{-1}(x^{(0)} - \alpha v) + 2^{-1}(x^{(0)} + \alpha v)) \le$$

$$\le 2^{-1} f(x^{(0)} - \alpha v) + 2^{-1} f(x^{(0)} + \alpha v) < 2^{-1} f(x^{(0)} - \alpha v) + 2^{-1} f(x^{(0)}).$$

Звідси

$$2^{-1} f(x^{(0)}) < 2^{-1} f(x^{(0)} - \alpha v), \text{ тобто } f(x^{(0)}) < f(x^{(0)} - \alpha v),$$

тобто в напрямі $-v$ функція $f(x)$ зростає.

З а у в а ж е н н я. Лему 16.2 можна довести, використовуючи співвідношення (16.9).

Л е м а 16.3. *Для опуклої функції $f(x)$, яка визначена на R^n, має місце подання:*

$$f(x) = \max_{\bar{x} \in R^n} (f(\bar{x}) + \langle g(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle), \qquad (16.11)$$

де $g(x)$ – довільний субградієнт із $\partial f(x)$, тобто опукла функція може бути подана як максимум лінійних функцій.

Д о в е д е н н я. Оскільки для довільного $\bar{x} \in R^n$ і будь-якого субградієнта $g(x)$ з $\partial f(x)$

$$f(x) \ge f(\bar{x}) + \langle g(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \quad \forall x \in R^n,$$

то

$$f(x) \ge \sup_{\bar{x} \in R^n} (f(\bar{x}) + \langle g(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle) \quad \forall x \in R^n. \qquad (16.12)$$

З іншого боку, оскільки при $\bar{x} = x$

$$f(\bar{x}) + \langle g(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle = f(x),$$

то очевидне співвідношення

$$\sup_{\bar{x} \in R^n} (f(\bar{x}) + \langle g(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle) \ge f(x) \quad \forall x \in R^n.$$

Звідси та з (16.12) випливає, що

$$f(x) = \sup_{\bar{x} \in R^n} (f(\bar{x}) + \langle g(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle) \quad \forall x \in R^n. \qquad (16.13)$$

Найбільше значення в (16.13) досягається при $\bar{x} = x$, тому має місце (16.11).

Т е о р е м а 16.5. *Нехай опукла функція $f(x)$ визначена на R^n. Якщо $f(x)$ диференційовна в точці $x^{(0)} \in R^n$, то*

$$\partial f(x^{(0)}) = \{ f'(x^{(0)}) \},$$

тобто субдиференціал $\partial f(x^{(0)})$ складається з єдиного вектора $f'(x^{(0)})$– градієнта функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$.

Д о в е д е н н я. Для опуклої функції $f(x)$, диференційовної в точці $x^{(0)} \in R^n$, згідно теореми 15.1 для $\forall x \in R^n$, $x \ne x^{(0)}$ має місце нерівність

$$f(x) - f(x^{(0)}) \ge \langle f'(x^{(0)}), x - x^{(0)} \rangle.$$

Оскільки ця нерівність виконується і для $x = x^{(0)}$, то за означенням 16.1

$$f'(x^{(0)}) \in \partial f(x^{(0)}).$$

Нехай тепер деякий вектор $g = (g_1, g_2, ..., g_n) \in \partial f(x^{(0)})$, тобто

$$f(x) - f(x^{(0)}) \ge \langle g, x - x^{(0)} \rangle \quad \forall x \in R^n. \qquad (16.14)$$

Розглянемо функцію

$$h(x) = f(x) - f(x^{(0)}) - \langle g, x - x^{(0)} \rangle,$$

яка є диференційовною в точці $x^{(0)} \in R^n$, при цьому з (16.14) випливає, що $h(x) \ge 0$ при $\forall x \in R^n$. Крім того, $h(x^{(0)}) = 0$, тобто $x^{(0)}$ є точкою мінімуму функції $h(x)$ на множині R^n. Оскільки

$$h'(x^{(0)}) = \left(\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} - g_1, ..., \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_n} - g_n \right) = f'(x^{(0)}) - g,$$

то згідно необхідної умови екстремуму (див. теорему 9.1)

$$h'(x^{(0)}) = f'(x^{(0)}) - g = O_n,$$

тобто $f'(x^{(0)}) = g$.

Означення 16.4. Нехай задано дві множини $X \subseteq R^n$ і $Y \subseteq R^m$. Відображення $M(x)$, яке переводить кожну точку $x \in X$ у деяку непорожню підмножину множини Y, називається *многозначним* або *точково-множинним відображенням* X в $\Pi(Y)$, де $\Pi(Y)$ – сукупність всіх непорожніх підмножин множини Y, тобто

$$M: X \to \Pi(Y).$$

Означення 16.5. Нехай $X \subseteq R^n$, $Y \subseteq R^m$. Многозначне відображення $M: X \to \Pi(Y)$ називається:

1) *обмеженим* на X, якщо для будь-якої обмеженої підмножини $A \subset X$ існує обмежена підмножина $B \subset Y$ така, що $M(x) \subset B$ для всіх $x \in A$;

2) *замкненим*, якщо для будь-якого $x \in X$ з умов

$$x^{(k)} \in X,\ y^{(k)} \in M(x^{(k)}),\ k = 1,2,...,\ x^{(k)} \to x \in X,\ y^{(k)} \to y \in Y$$

випливає, що $y \in M(x)$;

3) *опуклозначним*, якщо $M(x)$ – опукла множина при будь-якому $x \in X$.

Нехай опукла функція $f(x)$ визначена і скінченна на R^n. Тоді для відкритої опуклої множини $X \subseteq R^n$ згідно теореми 16.3 в будь-якій точці $x \in X$ існує непорожній субдиференціал $\partial f(x) \subset R^n$. При цьому природньо виникає многозначне відображення

$$\partial f: X \to \Pi(R^n),$$

яке називається *субдиференціальним відображенням.*

На основі теореми 16.3 можна показати, що це відображення має згадані вище властивості, тобто має місце

Лема 16.4. *Нехай $f(x)$ – опукла функція на відкритій опуклій множині $X \subset R^n$. Тоді її субдиференціальне відображення $\partial f: X \to \Pi(R^n)$ є замкненим, обмеженим і опуклозначним.*

Однією з важливих властивостей опуклих функцій є те, що вони належать до класу ліпшицевих функцій.

Нехай $X \subseteq R^n$. Говорять, що функція $f: X \to R^1$ задовольняє умову Ліпшиця з константою K на множині X, якщо для будь-яких $x^{(1)} \in X, x^{(2)} \in X$

$$| f(x^{(2)}) - f(x^{(1)}) | \le K \| x^{(2)} - x^{(1)} \|. \qquad (16.15)$$

Означення 16.6. Функція $f(x)$, яка визначена на множині X і задовольняє умову Ліпшиця (16.15) на цій множині, називається *ліпшицевою функцією* з константою K.

Для функцій дійсної змінної умова Ліпшиця є вимогою «не дуже швидкого» зростання або спадання функції на множині X.

Не важко переконатись в тому, що функція, яка має таку властивість в околі деякої точки, не обов'язково диференційовна в цій точці і не обов'язково має похідні за напрямами.

Теорема 16.6. *Опукла функція $f(x)$, яка визначена на R^n, ліпшицева на будь-якій опуклій обмеженій множині $X \subset R^n$.*

Доведення. Візьмемо дві довільні точки $x^{(1)} \in X, x^{(2)} \in X$. Згідно означення субдиференціала функції $f(x)$ в точці $x^{(1)}$ маємо

$$f(x^{(2)}) - f(x^{(1)}) \ge \langle g, x^{(2)} - x^{(1)} \rangle, \qquad (16.16)$$

де $g \in \partial f(x^{(1)})$.

З нерівності Коші-Буняковського одержуємо

$$-\| g \| \cdot \| x^{(2)} - x^{(1)} \| \le \langle g, x^{(2)} - x^{(1)} \rangle \le \| g \| \cdot \| x^{(2)} - x^{(1)} \|. \qquad (16.17)$$

В силу леми 16.4 і означення обмеженої множини знайдеться таке число $K < +\infty$, що $\| g \| \le K$ для будь-якого $g \in \partial f(x)$ і будь-якого $x \in X$. Тоді з (16.17) маємо

$$\langle g, x^{(2)} - x^{(1)} \rangle \ge -K \| x^{(2)} - x^{(1)} \|.$$

Звідси з урахуванням (16.16)

$$f(x^{(2)}) - f(x^{(1)}) \ge -K \| x^{(2)} - x^{(1)} \|. \qquad (16.18)$$

З означення субдиференціала функції $f(x)$ в точці $x^{(2)}$ після аналогічних міркувань одержуємо

$$f(x^{(1)}) - f(x^{(2)}) \ge -K \| x^{(1)} - x^{(2)} \|$$

або

$$f(x^{(2)}) - f(x^{(1)}) \le K \| x^{(2)} - x^{(1)} \|.$$

З останньої нерівності і нерівності (16.18) маємо нерівність

$$| f(x^{(2)}) - f(x^{(1)}) | \le K \| x^{(2)} - x^{(1)} \|,$$

яка виконується для довільних точок $x^{(1)} \in X, x^{(2)} \in X$, тобто опукла функція $f(x)$ ліпшицева на множині X.

Важливою особливістю задач опуклої безумовної оптимізації є те, що для них необхідні умови екстремуму є також і достатніми.

Теорема 16.7. *Для того, щоб опукла функція $f(x)$ у точці $x^* \in R^n$ набувала свого найменшого значення, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$O_n \in \partial f(x^*). \tag{16.19}$$

Доведення. Необхідність. З того, що точка x^* – точка мінімуму функції $f(x)$ на R^n, слідує

$$f(x) - f(x^*) \geq 0 \quad \forall x \in R^n$$

або

$$f(x) - f(x^*) \geq \langle O_n, x - x^* \rangle \quad \forall x \in R^n,$$

тобто виконується умова (16.19).

Достатність. З умови (16.19) випливає, що нуль-вектор O_n є субградієнтом функції $f(x)$ в точці x^*, тобто

$$f(x) - f(x^*) \geq \langle O_n, x - x^* \rangle = 0 \quad \forall x \in R^n.$$

Отже x^* – точка мінімуму функції $f(x)$ на R^n. Що й треба було довести.

Зауваження. Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці $x^* \in R^n$, то згідно теореми 16.5 $\partial f(x^*) = \{f'(x^*)\}$ і тоді умова (16.19) співпадає з класичною умовою

$$f'(x^*) = O_n.$$

Запитання для самоконтролю

1. Що називається субградієнтом функції?
2. Що називається субдиференціалом функції?
3. Які властивості має субдиференціал опуклої функції?
4. Який зв'язок існує між похідною за напрямом і субдиференціалом опуклої функції?
5. Який вектор називається напрямом спадання (зростання) функції в точці?
6. Що являє собою субдиференціал опуклої диференційовної функції?
7. Яке відображення називається многозначним?
8. Яке відображення називається субдиференціальним?
9. Які властивості має субдиференціальне відображення для опуклої функції?
10. Яка функція називається ліпшицевою?
11. Як формулюються необхідні і достатні умови екстремуму в точці для опуклої функції?

§17. Операції над субдиференціалами

Як було показано в §14, операції множення на додатну константу, додавання і взяття максимуму не виводять із класу опуклих функцій. Тому природно виникає питання, як обчислити субдиференціал функції, яка отримана в результаті виконання вказаних операцій над деякими опуклими функціями, якщо відомі субдиференціали цих функцій? Теореми, наведені нижче, дають відповідь на це запитання. Але для їх доведення потрібні деякі допоміжні твердження.

Лема 17.1. *Нехай X і Y довільні множини з R^n. Якщо має місце співвідношення*

$$\sup_{x \in X} \langle x, z \rangle = \sup_{y \in Y} \langle y, z \rangle \tag{17.1}$$

для будь-яких $z \in R^n$, то

$$\overline{X} = \overline{Y}.$$

Наслідок. *Якщо X і Y – замкнені опуклі множини, то* (17.1) *еквівалентно співвідношенню*

$$X = Y.$$

Доведення цієї леми можна провести методом від супротивного, використовуючи теорему 13.1 (про відокремлюючу гіперплощину) і теорему 11.1 (Каратеодорі).

Лема 17.2. *Якщо $X \subset R^n$ – обмежена замкнена множина, то coX – обмежена замкнена опукла множина.*

Лема 17.3. *Якщо $X_i \subset R^n$ – опуклі множини, $i \in I = \{1,2,\ldots,m\}$, то*

$$co\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, x = \sum_{i \in I} \lambda_i x^{(i)},\ x^{(i)} \in X_i,\ \lambda_i \geq 0,\ i \in I,\ \sum_{i \in I} \lambda_i = 1 \right\},$$

де $x^{(i)}$ деякі точки з множин X_i, $i \in I$.

Доведення лем 17.1, 17.2 і 17.3 можна знайти, наприклад, в [31].

Теорема 17.1. *Нехай $f(x) = \alpha f_0(x)$, де $f_0(x)$ – опукла на R^n функція і $\alpha > 0$. Тоді для будь-якої точки $x^{(0)} \in R^n$*

$$\partial f(x^{(0)}) = \alpha \partial f_0(x^{(0)}), \tag{17.2}$$

де

$$\alpha \partial f_0(x^{(0)}) = \{ g \in R^n \mid g = \alpha g_0,\ g_0 \in \partial f_0(x^{(0)}) \}.$$

Д о в е д е н н я. Для доведення (17.2) треба показати, що мають місце такі включення:

$$\begin{aligned} &\partial f(x^{(0)}) \subset \alpha \partial f_0(x^{(0)}), \\ &\partial f(x^{(0)}) \supset \alpha \partial f_0(x^{(0)}). \end{aligned} \tag{17.3}$$

Доведемо перше включення в (17.3). Для будь-якого вектора $g \in \partial f(x^{(0)})$ маємо

$$f(x) - f(x^{(0)}) \geq \langle g, x - x^{(0)} \rangle \ \forall x \in R^n$$

або

$$\alpha f_0(x) - \alpha f_0(x^{(0)}) \geq \langle g, x - x^{(0)} \rangle \ \forall x \in R^n.$$

Поділивши останню нерівність на $\alpha > 0$, будемо мати

$$f_0(x) - f_0(x^{(0)}) \geq \langle \alpha^{-1} g, x - x^{(0)} \rangle$$

для будь-яких $x \in R^n$ і $g \in \partial f(x^{(0)})$, тобто вектор $\alpha^{-1} g \in \partial f_0(x^{(0)})$. Звідси випливає, що $g \in \alpha \partial f_0(x^{(0)})$, і тоді $\partial f(x^{(0)}) \subset \alpha \partial f_0(x^{(0)})$.

Аналогічно можна довести і друге включення в (17.3).

Т е о р е м а 17.2. *Нехай $f_1(x)$ і $f_2(x)$ – опуклі на R^n функції і*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

тоді для будь-яких $x \in R^n$ має місце співвідношення:

$$\partial f(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x), \tag{17.4}$$

де

$$\partial f_1(x) + \partial f_2(x) = \{g \in R^n \mid g = g_1 + g_2, g_1 \in \partial f_1(x), g_2 \in \partial f_2(x)\}.$$

Д о в е д е н н я. Згідно леми 14.4 функція $f(x)$ – опукла на R^n при, цьому (див. (16.9)) для будь-яких $v \in R^n$, $\| v \| = 1$ і $x \in R^n$ має місце співвідношення:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial v} = \max_{g \in \partial f(x)} \langle g, v \rangle. \tag{17.5}$$

З іншого боку, в силу структури функції $f(x)$, маємо

$$\frac{\partial f(x)}{\partial v} = \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(x + \alpha v) - f(x)}{\alpha} = \lim_{\alpha \to +0} \frac{f_1(x + \alpha v) - f_1(x)}{\alpha} +$$

$$+ \lim_{\alpha \to +0} \frac{f_2(x + \alpha v) - f_2(x)}{\alpha} = \frac{\partial f_1(x)}{\partial v} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial v}. \tag{17.6}$$

Але згідно (16.9)

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial v} = \max_{g_1 \in \partial f_1(x)} \langle g_1, v \rangle, \quad \frac{\partial f_2(x)}{\partial v} = \max_{g_2 \in \partial f_2(x)} \langle g_2, v \rangle.$$

Звідси, а також із (17.5) та (17.6), одержуємо

$$\max_{g \in \partial f(x)} \langle g, v \rangle = \max_{g_1 \in \partial f_1(x)} \langle g_1, v \rangle + \max_{g_2 \in \partial f_2(x)} \langle g_2, v \rangle = \max_{w \in D(x)} \langle w, v \rangle, \tag{17.7}$$

де

$$D(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x) = \{w \in R^n | w = g_1 + g_2,\ g_1 \in \partial f_1(x),\ g_2 \in \partial f_2(x)\}.$$

Оскільки рівність (17.7) виконується для будь-яких $v \in R^n$, $\| v \| = 1$, а множини $\partial f(x)$ і $D(x)$ замкнені і опуклі, то згідно наслідку леми 17.1 співвідношення (17.7) еквівалентне співвідношенню (17.4).

Узагальненням і наслідком теорем 17.1 і 17.2 є наступне твердження.

Т е о р е м а 17.3. *Нехай $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ – опуклі функції на R^n і $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ – невід'ємні числа. Тоді для будь-яких $x \in R^n$ субдиференціал функції*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x)$$

має вигляд

$$\partial f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \partial f_i(x).$$

Н а с л і д о к. *Якщо функції $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ – опуклі та диференційовні на R^n і $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ – невід'ємні числа, то для будь-яких $x \in R^n$ субдиференціал функції*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x)$$

має вигляд

$$\partial f(x) = \{f'(x)\},\ де\ f'(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i'(x).$$

Т е о р е м а 17.4. *Нехай $f_i(x)$ $(i \in I = \{1, 2, \ldots, m\})$ – опуклі функції на R^n і*

$$f(x) = \max_{i \in I} f_i(x).$$

Тоді має місце співвідношення:

$$\partial f(x) = co\left(\bigcup_{i \in R(x)} \partial f_i(x) \right), \tag{17.8}$$

де

$$R(x) = \{i \in I \mid f(x) = f_i(x)\}.$$

Д о в е д е н н я. Згідно наслідку 1 леми 14.5 функція $f(x)$ – опукла на R^n, при цьому (див. (16.9)) для будь-яких $v \in R^n$, $\|v\|=1$ і $x \in R^n$ має місце співвідношення:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial v} = \max_{g \in \partial f(x)} \langle g, v \rangle. \qquad (17.9)$$

З іншого боку, в силу диференційовності функцій $f_i(x)$ $(i \in I = \{1,2,...,m\})$ за напрямами при фіксованих x і v маємо

$$f(x+\alpha v) = f(x) + \alpha \frac{\partial f(x)}{\partial v} + o(\alpha) = \max_{i \in I}\left(f_i(x) + \alpha \frac{\partial f_i(x)}{\partial v} + o_i(\alpha) \right), \qquad (17.10)$$

де

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{o(\alpha)}{\alpha} = 0, \ \lim_{\alpha \to +0} \frac{o_i(\alpha)}{\alpha} = 0 \ \ \forall i \in I.$$

При досить малих $\alpha > 0$, з урахуванням (17.10) і того, що $f(x) = f_i(x) \ \ \forall i \in R(x)$, будемо мати

$$f(x+\alpha v) = \max_{i \in R(x)} f_i(x+\alpha v) = \max_{i \in R(x)}\left(f_i(x) + \alpha \frac{\partial f_i(x)}{\partial v} + o_i(\alpha) \right) =$$

$$= \max_{i \in R(x)}\left(f(x) + \alpha \frac{\partial f_i(x)}{\partial v} + o_i(\alpha) \right) = f(x) + \alpha \max_{i \in R(x)} \frac{\partial f_i(x)}{\partial v} + o(\alpha),$$

де $\lim\limits_{\alpha \to +0} \frac{o(\alpha)}{\alpha} = 0$, $o(\alpha) \in [\underline{o}(\alpha), \overline{o}(\alpha)]$, $\underline{o}(\alpha) = \min\limits_{i \in R(x)} o_i(\alpha)$, $\overline{o}(\alpha) = \max\limits_{i \in R(x)} o_i(\alpha)$.

Звідси маємо

$$\frac{f(x+\alpha v) - f(x)}{\alpha} = \max_{i \in R(x)} \frac{\partial f_i(x)}{\partial v} + \frac{o(\alpha)}{\alpha}.$$

Переходячи в цій рівності до границі при $\alpha \to +0$ і враховуючи співвідношення (16.9) для опуклих функцій $f_i(x)$ $(i \in I = \{1,2,\ldots,m\})$, одержуємо

$$\frac{\partial f(x)}{\partial v} = \max_{i \in R(x)} \frac{\partial f_i(x)}{\partial v} = \max_{i \in R(x)} \max_{g^{(i)} \in \partial f_i(x)} \langle g^{(i)}, v \rangle = \max_{g \in D(x)} \langle g, v \rangle,$$

де

$$D(x) = co\left(\bigcup_{i \in R(x)} \partial f_i(x) \right).$$

Звідси і з (17.9) випливає, що

$$\max_{g \in \partial f(x)} \langle g, v \rangle = \max_{g \in D(x)} \langle g, v \rangle. \qquad (17.11)$$

Оскільки це співвідношення має місце для всіх $v \in R^n$, то в силу замкненості і опуклості множин $\partial f(x)$, $D(x)$ (див. лему 17.2 і теорему 16.3) і згідно наслідку леми 17.1 рівність (17.11) еквівалентна співвідношенню $\partial f(x) = D(x)$, тобто має місце (17.8).

Враховуючи опуклість множин $\partial f_i(x)$ $(i \in R(x))$, згідно леми 17.3 маємо

$$D(x) = co\left(\bigcup_{i \in R(x)} \partial f_i(x) \right) =$$

$$= \left\{ g \in R^n \,\middle|\, g = \sum_{i \in R(x)} \lambda_i g^{(i)},\ g^{(i)} \in \partial f_i(x),\ \lambda_i \geq 0,\ i \in R(x),\ \sum_{i \in R(x)} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Н а с л і д о к. *Якщо функції $f_i(x)$ $(i \in I = \{1,2,\ldots,m\})$ – опуклі і диференційовні на R^n, то для функції $f(x) = \max\limits_{i \in I} f_i(x)$ має місце співвідношення:*

$$\partial f(x) = co\left(\bigcup_{i \in R(x)} f_i'(x) \right), \qquad (17.12)$$

де $R(x) = \{i \in I \mid f(x) = f_i(x)\}$.

Більш детально про властивості субдиференціала, наведені та інші правила субдиференціювання опуклих функцій, а також різноманітні узагальнення понять субградієнта і субдиференціала та їх застосування можна знайти, наприклад, в [31], [33], [58], [70], [71], [77], [86], [90], [95], [98], [111], [124].

Розглянемо приклади обчислення субдиференціалів не всюди диференційовних опуклих функцій.

П р и к л а д 17.1. Знайти субдиференціал функції $f(x) = |x|$ для будь-якої точки $x \in R^1$.

Подамо функцію $f(x)$ у вигляді:

$$f(x) = |x| = \max\{f_1(x); f_2(x)\},$$

де $f_1(x) = -x$, $f_2(x) = x$.

Функції $f_1(x) = -x$, $f_2(x) = x$ лінійні, а тому і опуклі. Отже функція $f(x)$ згідно наслідку леми 14.5 також опукла (рис. 17.1).

Оскільки $f_1(x)$, $f_2(x)$ диференційовні в будь-якій точці $x \in R^1$, то для відшукання $\partial f(x)$ будемо використовувати співвідношення (17.12). Тоді

$$\partial f(x) = co\left(\bigcup_{i \in R(x)} f_i'(x) \right),$$

де

$$f_1'(x) = -1,\ f_2'(x) = 1,\ R(x) = \begin{cases} \{1\}, & x < 0, \\ \{1; 2\}, & x = 0, \\ \{2\}, & x > 0. \end{cases}$$

Отже, при $x<0$ $\partial f(x)=\{f_1'(x)\}=\{-1\}$, при $x>0$ $\partial f(x)=\{f_2'(x)\}=\{1\}$, а при $x=0$ $\partial f(0)=co\{f_1'(0),f_2'(0)\}=co\{-1;1\}=\lambda(-1)+(1-\lambda)(1),\ \lambda\in[0;1]$, тобто

$$\partial f(x)=\begin{cases}\{-1\}, & x<0,\\ [-1;1], & x=0,\\ \{1\}, & x>0.\end{cases}$$

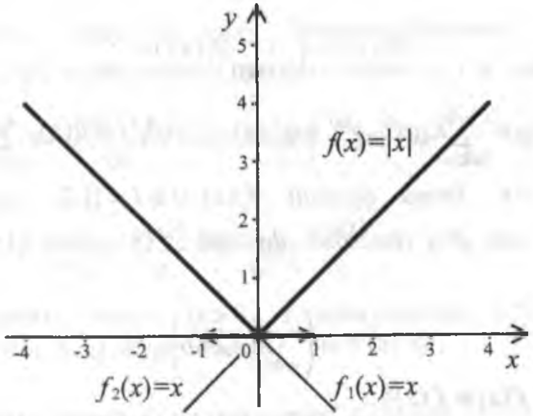


Рис. 17.1.

Зауважимо, що точка $x=0$ є точкою мінімуму функції $f(x)$ на R^1, при цьому $0\in\partial f(0)$.

П р и к л а д 17.2. Обчислити субдиференціал функції $f(x)=|x+1|+|x-1|$ для будь-якої точки $x\in R^1$.

Функція $f(x)$ є сумою двох опуклих на R^1 функцій $f_1(x)=|x+1|$ і $f_2(x)=|x-1|$, тому, згідно леми 14.4, вона також опукла на R^1 (рис. 17.2).

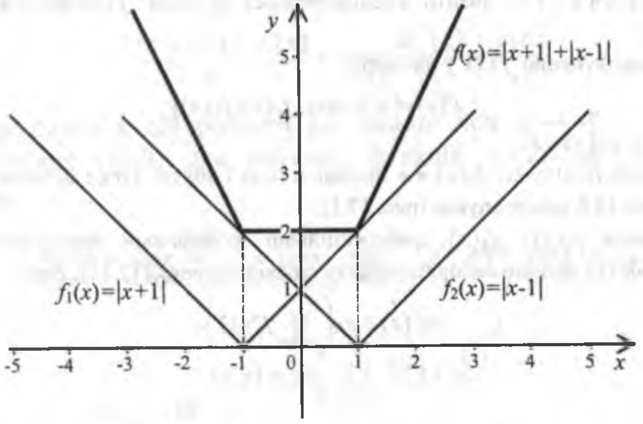


Рис. 17.2.

У свою чергу

$$f_1(x)=\max\{-x-1;\ x+1\},\ f_2(x)=\max\{-x+1;\ x-1\}.$$

Тоді для функцій $f_1(x), f_2(x)$, аналогічно до попереднього прикладу, маємо

$$\partial f_1(x)=\begin{cases}\{-1\}, & x<-1,\\ [-1;\ 1], & x=-1,\\ \{1\}, & x>-1,\end{cases}\quad \partial f_2(x)=\begin{cases}\{-1\}, & x<1,\\ [-1;\ 1], & x=1,\\ \{1\}, & x>1.\end{cases}$$

Згідно теореми 17.2

$$\partial f(x)=\partial f_1(x)+\partial f_2(x),$$

тобто

$$\partial f(x)=\begin{cases}\{-2\}, & x<-1,\\ [-2;\ 0], & x=-1,\\ \{0\}, & -1<x<1,\\ [0;\ 2], & x=1,\\ \{2\}, & x>1.\end{cases}$$

Зауважимо, що для функції $f(x)$ множиною точок мінімуму є множина $X^*=[-1;\ 1]$, при цьому $0\in\partial f(x)\ \forall x\in[-1;\ 1]$.

П р и к л а д 17.3. Знайти субдиференціал функції

$$f(x)=\max\{x^2;\ x\}$$

для будь-якої точки $x\in R^1$.

Згідно леми 14.5 функція $f(x)$ опукла на R^1 (рис. 17.3). Тоді з урахуванням диференційовності функцій $f_1(x)=x^2$ і $f_2(x)=x$ на R^1 і співвідношення (17.12)

$$\partial f(x)=co\left(\bigcup_{i\in R(x)} f_i'(x)\right),$$

де $f_1'(x)=2x,\ f_2'(x)=1\ \forall x\in R^1$,

$$R(x)=\begin{cases}\{1\}, & x<0,\\ \{1;\ 2\}, & x=0,\\ \{2\}, & 0<x<1,\\ \{1;\ 2\}, & x=1,\\ \{1\}, & x>1.\end{cases}$$

Тоді

$$\partial f(x)=\begin{cases}\{2x\}, & x<0,\\ [0;\ 1], & x=0,\\ \{1\}, & 0<x<1,\\ [1;\ 2], & x=1,\\ \{2x\}, & x>1.\end{cases}$$

Зауважимо, що точка $x=0$ є точкою мінімуму функції $f(x)$ на R^1, при цьому $0\in\partial f(0)$.

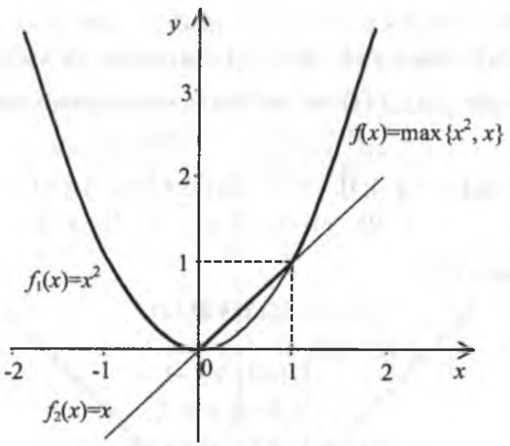


Рис. 17.3.

П р и к л а д 17.4. Нехай $h(x)$ – опукла на R^n функція і

$$f(x)=\max\{0;\, h(x)\}.$$

Знайти $\partial f(x)$ для будь-якого $x\in R^n$.

Для всіх $x\in R^n$ таких, що $h(x)>0$, маємо $f(x)=h(x)$ і $\partial f(x)=\partial h(x)$. Для всіх $x\in R^n$ таких, що $h(x)<0$, маємо $f(x)=0$ і $\partial f(x)=\{O_n\}$. Якщо $h(x)=0$, то $f(x)=0$ і

$$\partial f(x)=co\{O_n;\, \partial h(x)\}=\{w\in R^n | w=\lambda v+(1-\lambda)O_n,\ v\in\partial h(x),\ \lambda\in[0;1]\}=\lambda\partial h(x),$$

де $\lambda\in[0;1]$.

Отже

$$\partial f(x)=\begin{cases}\{O_n\}, & h(x)<0,\\ \lambda\partial h(x),\ \lambda\in[0;1], & h(x)=0,\\ \partial h(x), & h(x)>0.\end{cases}$$

Звідси видно, що коли в деякій точці $x^{(0)}\in R^n$ $h(x^{(0)})=0$, то за субградієнт функції $f(x)$ в цій точці можна взяти $w=O_n$ або довільний вектор $w\in\partial h(x^{(0)})$.

П р и к л а д 17.5. Нехай $x=(x_1,\dots,x_n)\in R^n$ і

$$f(x)=\max_{i=\overline{1,n}}|x_i|.$$

Знайти $\partial f(x)$ для будь-якого $x\in R^n$.

Зрозуміло, що $f(x)$ – опукла на R^n функція. Позначимо $f_i(x)=|x_i|$ $(i=\overline{1,n})$. З прикладу 17.1 випливає, що

$$\partial f_i(x)=\begin{cases}\{-e^{(i)}\}, & x_i<0,\\ co\{-e^{(i)},e^{(i)}\}, & x_i=0,\quad \forall i=\overline{1,n},\\ \{e^{(i)}\}, & x_i>0,\end{cases}$$

де $e^{(i)}=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)\in R^n$ – i-й одиничний орт.

Тоді згідно теореми 17.2 для функції $f(x)$ субдиференціал має вигляд

$$\partial f(x)=co\left(\bigcup_{i\in R(x)}\partial f_i(x)\right)=co\{g^{(i)}|\ i\in R(x)\},$$

де $R(x)=\{i\in\{1,\dots,n\}\,|\,f(x)=|x_i|\}$, $g^{(i)}=\begin{cases}-e^{(i)},\ x_i\le 0,\\ e^{(i)},\ x_i\ge 0.\end{cases}$

При цьому в точці $x=O_n$, яка є точкою мінімуму функції $f(x)$, маємо

$$O_n\in\partial f(O_n)=co\left\{\bigcup_{i=\overline{1,n}}\{e^{(i)},-e^{(i)}\}\right\}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Як обчислити субдиференціали функцій, які одержані в результаті виконання наступних операцій:
   – множення опуклої функції на додатній множник;
   – додавання двох опуклих функцій;
   – взяття максимуму від скінченної кількості опуклих функцій?
2. Чому дорівнює субдиференціал лінійної невід'ємної комбінації скінченної кількості опуклих функцій?

Вправи для самостійного виконання

1. Довести леми 17.1 -17.3 і теорему 17.3.

2. Нехай функція $f_0(x)$ – опукла на R^n. Довести наступні правила субдиференціювання:

а) якщо $f(x)=f_0(x+x^{(0)})$, то $\partial f(x)=\partial f_0(x+x^{(0)})$, де $x^{(0)}\in R^n$ – деяка фіксована точка;

б) якщо $f(x)=f_0(\alpha x)$, $\alpha>0$, то $\partial f(x)=\alpha\partial f_0(\alpha x)$.

3. Для заданих опуклих функцій знайти субдиференціали і похідні за напрямами в будь-якій точці області визначення:

1) $f(x)=|x-3|,\ x\in R^1$;
2) $f(x)=|4x-5|+|3x+2|, x\in R^1$;
3) $f(x)=\max\{x^4; x^2+1\},\ x\in R^1$;
4) $f(x)=\max\{|x|;\ |x-2|\},\ x\in R^1$;
5) $f(x)=\max\{e^x;\ x+2\},\ x\in R^1$;
6) $f(x)=x_1^2+5x_1x_2+3x_2^2+4x_1-6x_2,\ x\in R^2$;
7) $f(x)=|x_1+x_2|+|x_1-x_2|,\ x\in R^2$;
8) $f(x)=\sqrt{x_1^2+x_2^2},\ x\in R^2$;
9) $f(x)=|\langle a,x\rangle-b|,\ a\in R^n, x\in R^n, b\in R^1$;
10) $f(x)=\max\{0;\langle a,x\rangle\},\ a,x\in R^n$.

4. Довести, що для функції $f(x)=\|x\|, x\in R^n$, $\partial f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\|x\|},\ x\ne O_n,\\ \bar{S}(O_n,1), x=O_n,\end{cases}$

де $\bar{S}(O_n,1)=\{g\in R^n\,|\,\|g\|\le 1\}$.

§18. ε-субдиференціал опуклої функції

При розробці чисельних методів розв'язування задач мінімізації недиференційовних опуклих функцій широко використовується поняття ε-субградієнта, яке в багатьох випадках виявляється більш зручним, ніж поняття субградієнта. Це пов'язано з тим, що, по-перше, задача обчислення окремих ε-субградієнтів функції виявляється, взагалі кажучи, більш простішою, ніж обчислення субградієнтів, а по-друге, обрання в якості напряму руху анти-ε-субградієнта в ітераційних методах в деяких випадках гарантує зменшення значення цільової функції на величину не меншу, ніж $\varepsilon\,(\varepsilon \geq 0)$, що забезпечує прискорення збіжності методу. Значну роль в теорії і методах недиференційовної опуклої оптимізації відіграють більш широкі аналітичні властивості ε-субдиференціалу, зокрема при обґрунтуванні збіжності до стаціонарної точки монотонних процесів ε-субградієнтного типу.

Нехай функція $f(x)$ визначена і *скінченна* на R^n, тобто $f(x) > -\infty$ і $f(x) < +\infty \ \forall x \in R^n$. Зафіксуємо точку $x^{(0)} \in R^n$ і число $\varepsilon\ (\varepsilon \geq 0)$.

Означення 18.1. Вектор $g(x^{(0)}) \in R^n$ називається ε-*субградієнтом* функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$, якщо при будь-яких $x \in R^n$

$$f(x) - f(x^{(0)}) \geq \langle g(x^{(0)}), x - x^{(0)} \rangle - \varepsilon. \qquad (18.1)$$

Нерівність (18.1) означає (рис. 18.1), що графік функції $f(x)$

$$G_f = \{(x,y) \in R^{n+1} \mid x \in R^n,\ y \in R^1,\ y = f(x)\}$$

лежить не нижче графіка G_{l_0} лінійної функції

$$l_0(x) = \langle g(x^{(0)}), x - x^{(0)} \rangle + f(x^{(0)}) - \varepsilon,$$

де

$$G_{l_0} = \{(x,y) \in R^{n+1} \mid x \in R^n,\ y \in R^1,\ y = l_0(x)\},$$

при цьому G_{l_0} проходить через точку $(x^{(0)}, f(x^{(0)}) - \varepsilon)$.

Гіперплощина G_{l_0} визначається вектором $a_0 = (g(x^{(0)}), -1) \in R^{n+1}$ (рис. 18.1), тобто

$$G_{l_0} = H(a_0, (x^{(0)}, f(x^{(0)}) - \varepsilon)) =$$

$$= \{(x,y) \in R^{n+1} \mid x \in R^n, \langle (g(x^{(0)}), -1), (x,y) - (x^{(0)}, f(x^{(0)}) - \varepsilon) \rangle = 0\} =$$

$$= \{(x,y) \in R^{n+1} \mid x \in R^n, y = \langle (g(x^{(0)}), x - x^{(0)} \rangle + f(x^{(0)}) - \varepsilon\},$$

і відокремлює множину $epi\,f$ і точку $(x^{(0)}, f(x^{(0)}) - \varepsilon)$ (див. §13).

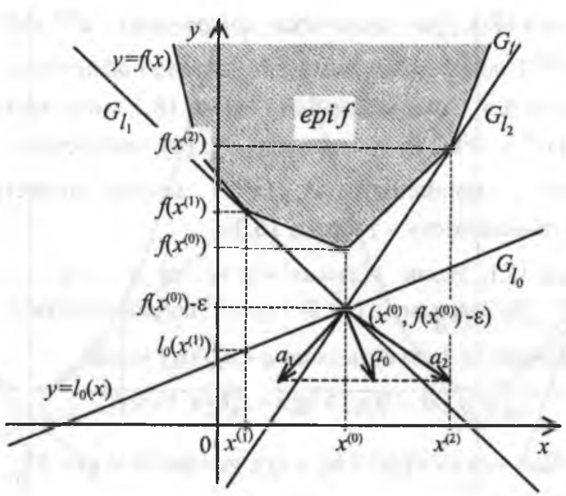


Рис. 18.1.

Як видно з рис. 18.1, окрім G_{l_0} можуть існувати й інші гіперплощини, які відокремлюють множину $epi\,f$ і точку $(x^{(0)}, f(x^{(0)}) - \varepsilon)$ (наприклад G_{l_1} і G_{l_2}), а, отже можуть існувати й інші ε-субградієнти функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$, які визначають ці гіперплощини.

Означення 18.2. Множина всіх ε-субградієнтів функції $f(x)$ в точці $x^{(0)} \in R^n$ називається ε-*субдиференціалом* функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$ і позначається $\partial f_\varepsilon(x^{(0)})$, тобто

$$\partial_\varepsilon f(x^{(0)}) = \{g \in R^n \mid f(x) - f(x^{(0)}) \geq \langle g, x - x^{(0)} \rangle - \varepsilon \ \forall x \in R^n\}. \ (18.2)$$

Зауваження 1. З рис. 18.1 видно, що будь-який вектор $a = \lambda a_1 + (1-\lambda) a_2$, де $\lambda \in [0;1]$ і вектори $a_1 = (g_1, -1) \in R^{n+1}$, $g_1 \in \partial f_\varepsilon(x^{(0)})$, $a_2 = (g_2, -1) \in R^{n+1}$, $g_2 \in \partial f_\varepsilon(x^{(0)})$, визначають відповідно гіперплощини G_{l_1} і G_{l_2}, визначає гіперплощину, яка відокремлює множину $epi\,f$ і точку $(x^{(0)}, f(x^{(0)}) - \varepsilon)$. При цьому будь-який вектор $g = \lambda g_1 + (1-\lambda) g_2 \in \partial_\varepsilon f(x^{(0)})$, де $\lambda \in [0;1]$. Крім того, враховуючи геометричну інтерпретацію поняття субградієнта (див. означення 16.1 і рис. 16.1), можна зробити висновок, що $g_1 \in \partial f(x^{(1)})$ і $g_2 \in \partial f(x^{(2)})$, оскільки G_{l_1} і G_{l_2} є опорними гіперплощинами до множини $epi\,f$ відповідно в точках $(x^{(1)}, f(x^{(1)}))$ і $(x^{(2)}, f(x^{(2)}))$.

З означення 18.2 безпосередньо випливає наступне твердження.

Лема 18.1. *Якщо* $f(x)$ *– опукла і скінченна на* R^n *функція, то*

1) *при* $\varepsilon \geq 0$ $\partial f(x) \subset \partial_\varepsilon f(x)$;

2) *при* $\varepsilon = 0$ $\partial_\varepsilon f(x) = \partial f(x)$;

3) *при* $0 \leq \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ $\partial_{\varepsilon_2} f(x) \subset \partial_{\varepsilon_1} f(x)$.

Т е о р е м а 18.1. *Для будь-яких фіксованих* $x^{(0)} \in R^n$ *і* $\varepsilon\ (\varepsilon \geq 0)$ *множина* $\partial f_\varepsilon(x^{(0)})$ *непорожня, замкнена, опукла і обмежена.*

Д о в е д е н н я. Оскільки згідно леми 18.1 має місце включення $\partial f(x^{(0)}) \subset \partial_\varepsilon f(x^{(0)})\ \ \forall \varepsilon \geq 0$, то множина $\partial_\varepsilon f(x)$ непорожня.

Опуклість і замкненість $\partial_\varepsilon f(x^{(0)})$ можна довести аналогічно теоремі 16.1, а обмеженість – теоремі 16.3.

П р и к л а д 18.1. Нехай $f(x) = ax^2 + bx + c$, де $a > 0$, b, c – деякі фіксовані числа з R^1, $x \in R^1$. Для довільних $\varepsilon\ (\varepsilon \geq 0)$ і $x_0 \in R^1$ потрібно знайти $\partial_\varepsilon f(x_0)$.

Згідно означення 18.2 для будь-якого $g \in \partial_\varepsilon f(x_0)$ маємо

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle g, x - x_0 \rangle - \varepsilon\ \ \forall x \in R^1,$$

тобто

$$ax^2 + bx + c - (ax_0^2 + bx_0 + c) \geq gx - gx_0 - \varepsilon \quad \forall x \in R^1,$$

або

$$ax^2 + (b - g)x - ax_0^2 + (b - g)x_0 - \varepsilon \geq 0 \quad \forall x \in R^1.$$

Враховуючи властивості квадратного тричлена при $a > 0$, для того щоб остання нерівність мала місце при $\forall x \in R^1$, потрібно, щоб виконувалась умова

$$D = (b - g)^2 + 4a(ax_0^2 + (b - g)x_0 - \varepsilon) \leq 0.$$

Звідси маємо

$$(b - g + 2ax_0)^2 \leq 4a\varepsilon$$

або

$$|b - g + 2ax_0| \leq 2\sqrt{a\varepsilon}.$$

Визначивши з останньої нерівності g, будемо мати

$$2ax_0 + b - 2\sqrt{a\varepsilon} \leq g \leq 2ax_0 + b + 2\sqrt{a\varepsilon}.$$

Це означає, що будь-який вектор виду $g = 2ax_0 + b + d$, де $|d| \leq 2\cdot\sqrt{a\varepsilon}$, є ε-субградієнтом функції $f(x) = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$. Отже для заданої функції $f(x)$ і довільних $\varepsilon\ (\varepsilon \geq 0)$, $x_0 \in R^1$

$$\partial_\varepsilon f(x_0) = \{g \in R^1\ |\ g = 2ax_0 + b + d,\ d \in R^1,\ |d| \leq 2\sqrt{a\varepsilon}\}.$$

Покладемо, наприклад, $a = 1, b = c = 0$, тобто $f(x) = x^2$, і $\varepsilon = 0{,}25$. Тоді, враховуючи будову множини $\partial_\varepsilon f(x)$, маємо:

a) при $x_0 = 0$ $\partial_\varepsilon f(0) = \{g \in R^1\ |\ g = d,\ |d| \leq 1\}$, тобто для будь-якого $g \in \partial_\varepsilon f(0)$ $g \in [-1; 1]$, де $[-1; 1] = \lambda(-1) + (1 - \lambda)(1) = co\{-1; 1\}$, $\lambda \in [0; 1]$ (рис. 18.2);

b) при $x_0 = 1$ $\partial_\varepsilon f(1) = \{g \in R^1\ |\ g = 2 + d,\ |d| \leq 1\}$, тобто для будь-якого $g \in \partial_\varepsilon f(1)$ $g \in [1; 3]$, де $[1; 3] = \lambda(1) + (1 - \lambda)(3) = co\{1; 3\}$, $\lambda \in [0; 1]$ (рис. 18.3);

c) при $x_0 = -1$ $\partial_\varepsilon f(-1) = \{g \in R^1\ |\ g = -2 + d,\ |d| \leq 1\}$, тобто для будь-якого $g \in \partial_\varepsilon f(-1)$ $g \in [-3; -1]$, де $[-3; -1] = \lambda(-3) + (1 - \lambda)(-1) = co\{-3; -1\}$, $\lambda \in [0; 1]$ (рис. 18.4).

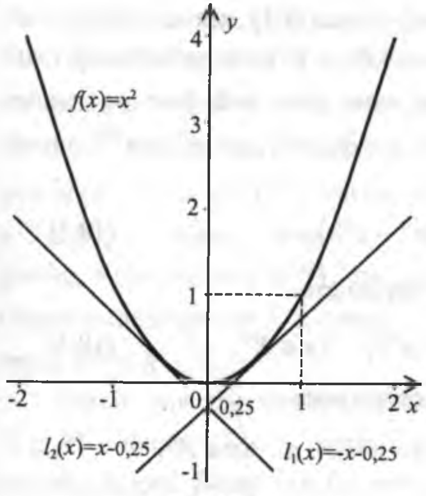


Рис. 18.2.

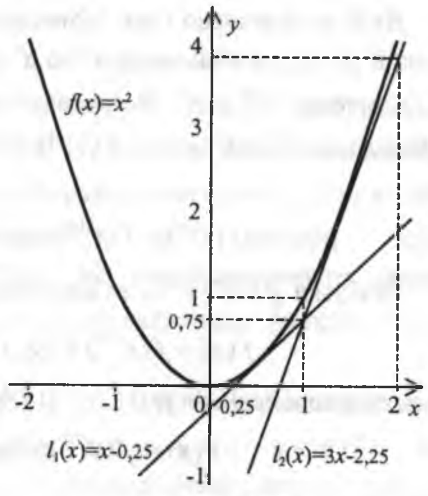


Рис. 18.3.

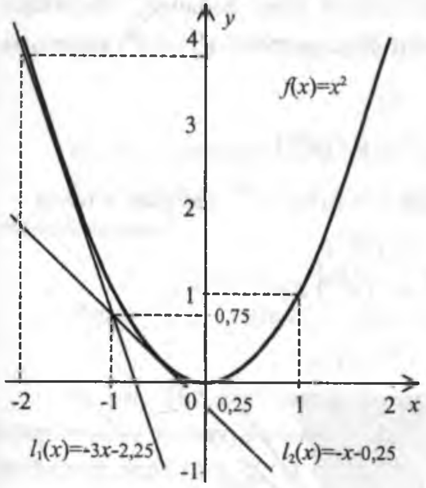


Рис. 18.4.

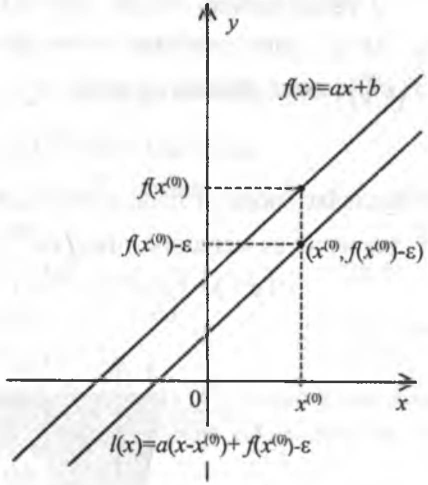


Рис. 18.5.

П р и к л а д 18.2. Нехай $f(x) = \langle a, x \rangle + b$, де $a \in R^n$, $b \in R^1, x \in R^n$. Для довільних $\varepsilon\ (\varepsilon \geq 0)$ і $x^{(0)} \in R^n$ знайти $\partial_\varepsilon f(x^{(0)})$.

Для довільного ε–субградієнта $g \in \partial_\varepsilon f(x^{(0)})$ маємо

$$\langle a, x \rangle + b - \langle a, x^{(0)} \rangle - b \geq \langle g, x - x^{(0)} \rangle - \varepsilon\ \ \forall x \in R^n.$$

Звідси $\langle a, x - x^{(0)} \rangle \geq \langle g, x - x^{(0)} \rangle - \varepsilon\ \ \forall x \in R^n$ або $\langle a - g, x - x^{(0)} \rangle \geq -\varepsilon\ \ \forall x \in R^n$. Для того щоб остання нерівність виконувалась для будь-яких $x \in R^n$, потрібно щоб виконувалась умова $a = g$. Тому при довільних $\varepsilon\ (\varepsilon \geq 0)$ $\partial_\varepsilon f(x^{(0)}) = \partial f(x^{(0)}) = \{a\}$. На рис. 18.5 подано геометричну інтерпретацію одержаного результату при $a \in R^1$, $b \in R^1$, $x \in R^1$.

Як було відмічено (див. зауваження 1 і рис. 18.1), деякий субградієнт функції $f(x)$ у деякій точці $x^{(1)} \in R^n$ може бути ε-субградієнтом функції $f(x)$ в точці $x^{(0)} \in R^n$. Встановимо, за яких умов цей факт має місце. Зафіксуємо $x^{(0)} \in R^n$ і ε $(\varepsilon \ge 0)$. Нехай $g \in \partial f(x^{(1)})$, де $x^{(1)} \ne x^{(0)}$, такий, що

$$f(x^{(1)}) - f(x^{(0)}) \ge \langle g, x^{(1)} - x^{(0)} \rangle - \varepsilon. \quad (18.3)$$

Оскільки $g \in \partial f(x^{(1)})$, то має місце нерівність

$$f(x) - f(x^{(1)}) \ge \langle g, x - x^{(1)} \rangle \quad \forall x \in R^n. \quad (18.4)$$

Тоді, додавши нерівності (18.3) і (18.4), одержуємо

$$f(x) - f(x^{(0)}) \ge \langle g, x - x^{(0)} \rangle - \varepsilon \quad \forall x \in R^n,$$

тобто $g \in \partial_\varepsilon f(x^{(0)})$.

З геометричної точки зору встановлений факт означає, що вектор $g(x^{(1)}) \in R^n$, який є субградієнтом функції $f(x)$ в точці $x^{(1)} \in R^n$ належить $\partial_\varepsilon f(x^{(0)})$, якщо лінійна функція

$$l(x) = \langle g(x^{(1)}), x - x^{(1)} \rangle + f(x^{(1)}),$$

яка визначає опорну гіперплощину до $epi\,f$ в точці $x^{(1)}$, набуває в точці $x^{(0)}$ значення не меншого, ніж $f(x^{(0)}) - \varepsilon$, тобто

$$l(x^{(0)}) = \langle g(x^{(1)}), x^{(0)} - x^{(1)} \rangle + f(x^{(1)}) \ge f(x^{(0)}) - \varepsilon$$

(рис. 18.6).

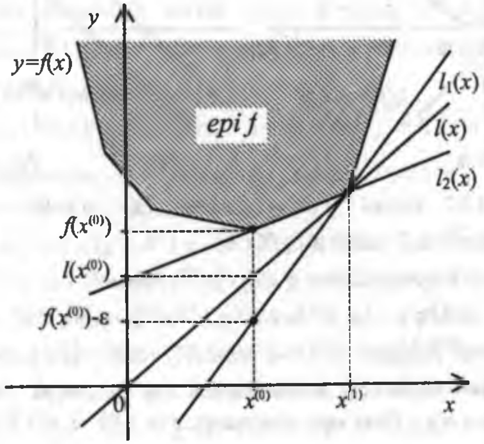


Рис. 18.6.

Подані на рис. 18.6 лінійні функції

$$l_1(x) = \langle g_1, x - x^{(1)} \rangle + f(x^{(1)}) \quad \text{і} \quad l_2(x) = \langle g_2, x - x^{(1)} \rangle + f(x^{(1)}),$$

які визначають опорні гіперплощини до $epi\,f$ в точці $x^{(1)}$, набувають в точці $x^{(0)}$ значень не менших, ніж $f(x^{(0)}) - \varepsilon$, тобто відповідні вектори $g_1 \in \partial f(x^{(1)})$ і $g_2 \in \partial f(x^{(1)})$ також є ε-субградієнтами функції $f(x)$ в точці $x^{(0)} \in R^n$. Крім того, очевидно, що вектори виду $g = \lambda g_1 + (1-\lambda) g_2 \in \partial f(x^{(1)})$, де $\lambda \in [0; 1]$, які також визначають опорні гіперплощини до $epi\,f$ в точці $x^{(1)}$, є ε-субградієнтами функції $f(x)$ в точці $x^{(0)} \in R^n$.

Нехай для фіксованих $x^{(0)} \in R^n$ і ε $(\varepsilon \ge 0)$ визначено множину $\widetilde{X} \subseteq R^n$ точок $\widetilde{x}$, в яких існують субградієнти $g \in \partial f(\widetilde{x})$, що задовольняють умову (18.3), тобто є ε-субградієнтами функції $f(x)$ в точці $x^{(0)} \in R^n$, і розглянемо множину $B_\varepsilon f(x^{(0)})$ всіх таких субградієнтів:

$$B_\varepsilon f(x^{(0)}) = \{ g \in R^n \mid g \in \partial f(\widetilde{x}), \widetilde{x} \in \widetilde{X},$$
$$f(\widetilde{x}) - f(x^{(0)}) \ge \langle g, \widetilde{x} - x^{(0)} \rangle - \varepsilon \}. \quad (18.5)$$

Можна показати (див, наприклад, [31]), що має місце

Т е о р е м а 18.2. *Для опуклої на R^n функції $f(x)$ має місце співвідношення*

$$\partial_\varepsilon f(x^{(0)}) = \overline{B_\varepsilon f(x^{(0)})}. \quad (18.6)$$

Якщо $f(x)$ – сильно опукла функція на R^n, то

$$\partial_\varepsilon f(x^{(0)}) = B_\varepsilon f(x^{(0)}). \quad (18.7)$$

На рис. 18.7 для гладкої опуклої функції $f(x)$ на R^1 подано геометричну інтерпретацію будови множини $B_\varepsilon f(x^{(0)})$ і співвідношення (18.7). Зокрема, для лінійних функцій $l_1(x)$ і $l_2(x)$ таких, що

$$l_1(x) = \langle g_1, x - \widetilde{x}_1 \rangle + f(\widetilde{x}_1) \quad \text{і} \quad l_1(x) = \langle g_1, x - x^{(0)} \rangle + f(x^{(0)}) - \varepsilon, \quad \text{де } g_1 \in \partial f(\widetilde{x}_1),$$
$$l_2(x) = \langle g_2, x - \widetilde{x}_2 \rangle + f(\widetilde{x}_2) \quad \text{і} \quad l_2(x) = \langle g_2, x - x^{(0)} \rangle + f(x^{(0)}) - \varepsilon, \text{ де } g_2 \in \partial f(\widetilde{x}_2),$$

маємо, з одного боку

$$l_1(x^{(0)}) = \langle g_1, x^{(0)} - \widetilde{x}_1 \rangle + f(\widetilde{x}_1) \ge f(x^{(0)}) - \varepsilon, \text{ тобто } g_1 \in B_\varepsilon f(x^{(0)}),$$
$$l_2(x^{(0)}) = \langle g_2, x^{(0)} - \widetilde{x}_2 \rangle + f(\widetilde{x}_2) \ge f(x^{(0)}) - \varepsilon, \text{ тобто } g_2 \in B_\varepsilon f(x^{(0)}),$$

а з іншого

$$l_1(x) = \langle g_1, x - x^{(0)} \rangle + f(x^{(0)}) - \varepsilon \le f(x) \ \ \forall x \in R^1, \text{ тобто } g_1 \in \partial_\varepsilon f(x^{(0)}),$$
$$l_2(x) = \langle g_2, x - x^{(0)} \rangle + f(x^{(0)}) - \varepsilon \le f(x) \ \ \forall x \in R^1, \text{ тобто } g_2 \in \partial_\varepsilon f(x^{(0)}).$$

Роль множини $\widetilde{X}$ в (18.5) виконує множина точок відрізка $[\widetilde{x}_1; \widetilde{x}_2]$, оскільки для будь-якої точки $\widetilde{x} \in [\widetilde{x}_1; \widetilde{x}_2]$ існує субградієнт $\widetilde{g} \in \partial f(\widetilde{x})$, для якого виконується умова

$l(x^{(0)}) = \langle \tilde{g}, x^{(0)} - \tilde{x} \rangle + f(\tilde{x}) \geq f(x^{(0)}) - \varepsilon$, тобто $\tilde{g} \in B_\varepsilon f(x^{(0)})$. Крім того, має місце подання $\tilde{g} = \tilde{\lambda} g_1 + (1 - \tilde{\lambda}) g_2 \in \partial_\varepsilon f(x^{(0)})$, де $\tilde{\lambda} \in [0; 1]$.

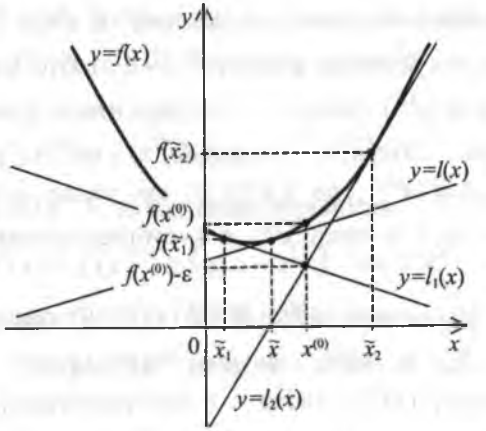


Рис. 18.7.

З урахуванням означень 18.1 і 18.2 та теореми 18.2 можна показати, що має місце наступне твердження

Л е м а 18.2. *Нехай* $f(x)$ *– опукла і скінченна на* R^n *функція. Тоді*

1) *для фіксованої точки* $x^{(0)} \in R^n$, *довільних* $\tilde{x} \in R^n$ *і* $g \in \partial f(\tilde{x})$ *існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що* $g \in \partial_\varepsilon f(x^{(0)})$, *при цьому*

$$f(\tilde{x}) - f(x^{(0)}) \geq \langle g, \tilde{x} - x^{(0)} \rangle - \varepsilon;$$

2) *якщо задано* $\tilde{x} \in R^n$, $g \in \partial f(\tilde{x})$, $\varepsilon \geq 0$, *то існує точка* $x^{(0)} \in R^n$ *така, що* $g \in \partial_\varepsilon f(x^{(0)})$;

3) *якщо задано* $x^{(0)} \in R^n$ *і* $\varepsilon \geq 0$, *то існують* $\tilde{x} \in R^n$ *і* $g \in \partial f(\tilde{x})$ *такі, що* $g \in \partial_\varepsilon f(x^{(0)})$ *і*

$$f(\tilde{x}) - f(x^{(0)}) \geq \langle g, \tilde{x} - x^{(0)} \rangle - \varepsilon;$$

4) *для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує* $\delta > 0$ *таке, що, якщо* $\| \tilde{x} - x^{(0)} \| < \delta$ *і* $g \in \partial f(\tilde{x})$, *то* $g \in \partial_\varepsilon f(x^{(0)})$.

Розглянемо деякі правила ε-субдиференціювання.

Т е о р е м а 18.3. *Нехай* $f(x) = \alpha f_0(x)$, *де* $\alpha > 0$, $f_0(x)$ *- опукла і скінченна на* R^n *функція. Тоді для будь-яких* $x^{(0)} \in R^n$ *і* $\varepsilon \geq 0$ *має місце співвідношення*

$$\partial_\varepsilon f(x^{(0)}) = \alpha \partial_{\alpha^{-1}\varepsilon} f_0(x^{(0)}).$$

Т е о р е м а 18.4. *Якщо* $f_i(x), i \in I = \{1, 2, ..., m\}$, *– опуклі і скінченні на* R^n *функції, то для довільних* $x^{(0)} \in R^n$, $\varepsilon_i \geq 0, i \in I$

$$\partial_\varepsilon \left(\sum_{i=1}^{m} f_i(x^{(0)}) \right) = \bigcup_{\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i = \varepsilon,\ \varepsilon \geq 0} \left[\sum_{i=1}^{m} \partial_{\varepsilon_i} f_i(x^{(0)}) \right].$$

Н а с л і д о к 1. *Якщо* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, *де* $f_1(x)$, $f_2(x)$ *– опуклі і скінченні на* R^n *функції, то для довільних* $x^{(0)} \in R^n$, $\varepsilon_1 \geq 0$, $\varepsilon_2 \geq 0$ *має місце співвідношення*

$$\partial_\varepsilon f(x^{(0)}) = \bigcup_{\substack{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon \\ \varepsilon_1 \geq 0,\ \varepsilon_2 \geq 0}} \left[\partial_{\varepsilon_1} f_1(x^{(0)}) + \partial_{\varepsilon_2} f_2(x^{(0)}) \right].$$

Н а с л і д о к 2. *Якщо* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, *де* $f_1(x)$ *– опукла і скінченна на* R^n *функція, а* $f_2(x) = \langle a, x \rangle + b$, $a \in R^n, b \in R^1$, *то для довільних* $x^{(0)} \in R^n$, $\varepsilon \geq 0$ *має місце співвідношення*

$$\partial_\varepsilon f(x^{(0)}) = \partial_\varepsilon f_1(x^{(0)}) + \partial f_2(x^{(0)}).$$

П р и м і т к а. При доведенні наслідка 2 використовується співвідношення $\partial_\varepsilon f_2(x^{(0)}) = \partial f_2(x^{(0)}) = \{a\}$ (див. приклад 18.2).

Нехай $f_i(x), i \in I = \{1, 2, ..., m\}$, – опуклі і скінченні на R^n функції і

$$f(x) = \max_{i \in I} f_i(x).$$

Зафіксуємо $x^{(0)} \in R^n, \varepsilon \geq 0$ і побудуємо множину

$$K_\varepsilon(x^{(0)}) = \left\{ g \in R^n \;\middle|\; g = \sum_{i \in I_1} \lambda_i g^{(i)},\ \lambda_i > 0,\ \sum_{i \in I_1} \lambda_i = 1,\ I_1 \subset I, \right.$$

$$g^{(i)} \in \partial_{\lambda_i^{-1}\varepsilon_i} f_i(x^{(0)}), \sum_{i \in I_1} \varepsilon_i + \varepsilon_0 = \varepsilon,\ \varepsilon_i \geq 0,$$

$$\left. \varepsilon_0 \geq 0,\ \sum_{i \in I_1} \lambda_i f_i(x^{(0)}) \geq f(x^{(0)}) - \varepsilon_0 \right\}. \quad (18.8)$$

Т е о р е м а 18.5. *Нехай* $f_i(x), i \in I = \{1,2,...,m\}$, *– опуклі і скінченні на* R^n *функції. Тоді для функції*

$$f(x) = \max_{i \in I} f_i(x)$$

при фіксованих $x^{(0)} \in R^n, \varepsilon \geq 0$ *має місце подання*

$$\partial_\varepsilon f(x^{(0)}) = \overline{K_\varepsilon(x^{(0)})}.$$

Доведення теорем 18.3-18.5 можна знайти, наприклад в [31].

П р и к л а д 18.3 ([31]). Нехай $x \in R^1$, $f(x) = |x|$, $\varepsilon \geq 0$. Для довільного фіксованого $x^{(0)} \in R^1$ знайти $\partial_\varepsilon f(x^{(0)})$.

Оскільки $f(x) = \max\{-x,\ x\}$, то $f(x) = \max_{i=1,2} f_i(x)$, де $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$. Для лінійних функцій згідно прикладу 18.2 маємо

$$\partial_\varepsilon f_1(x^{(0)}) = \partial f_1(x^{(0)}) = \{1\} \quad \forall \varepsilon \geq 0, \qquad (18.9)$$
$$\partial_\varepsilon f_2(x^{(0)}) = \partial f_2(x^{(0)}) = \{-1\} \quad \forall \varepsilon \geq 0.$$

У (18.8) множиною $I_1 \subset I = \{1; 2\}$ може бути:

$$1)\ I_1 = \{1\};\ 2)\ I_1 = \{2\};\ 3)\ I_1 = \{1; 2\}.$$

Тому з (18.9) і (18.8)

$$K_\varepsilon = K_1 \cup K_2 \cup K_3, \qquad (18.10)$$

де

$$K_1 = \{g \in R^1 \mid g = 1,\ x^{(0)} \geq |x^{(0)}| - \varepsilon_0,\ \varepsilon_0 \in [0; \varepsilon]\},$$
$$K_2 = \{g \in R^1 \mid g = -1,\ -x^{(0)} \geq |x^{(0)}| - \varepsilon_0,\ \varepsilon_0 \in [0; \varepsilon]\},$$
$$K_3 = \{g \in R^1 \mid g = \lambda(1) + (1-\lambda)(-1) = 2\lambda - 1,\ \lambda \in (0; 1),$$
$$\lambda x^{(0)} + (1-\lambda)(-x^{(0)}) \geq |x^{(0)}| - \varepsilon_0,\ \varepsilon_0 \in [0; \varepsilon]\}.$$

Якщо $x^{(0)} > 0$, то $|x^{(0)}| = x^{(0)}$, і тому

$$K_1 = \{1\},$$
$$K_2 = \begin{cases} \{-1\}, 0 < x^{(0)} \leq 0{,}5\varepsilon, \\ \varnothing,\ \ x^{(0)} > 0{,}5\varepsilon, \end{cases}$$
$$K_3 = \{g \in R^1 \mid g = 2\lambda - 1,\ \lambda \in (0; 1),\ \lambda \geq 1 - \frac{\varepsilon_0}{2x^{(0)}},\ \varepsilon_0 \in [0; \varepsilon]\}.$$

Звідси

$$\partial_\varepsilon f(x^{(0)}) = \overline{K_\varepsilon(x^{(0)})} = \begin{cases} [1 - \frac{\varepsilon}{x^{(0)}};\ 1], & x^{(0)} > 0{,}5\varepsilon, \\ [-1;\ 1], & 0 \leq x^{(0)} \leq 0{,}5\varepsilon. \end{cases} \qquad (18.11)$$

Якщо $x^{(0)} < 0$, то $|x^{(0)}| = -x^{(0)}$ і тому, аналогічно до попереднього,

$$K_1 = \begin{cases} \{1\}, 0 > x \geq -0{,}5\varepsilon, \\ \varnothing,\ x < -0{,}5\varepsilon, \end{cases}$$
$$K_2 = \{-1\},$$
$$K_3 = \{g \in R^1 \mid g = 2\lambda - 1,\ \lambda \in (0; 1),\ \lambda \leq -\frac{\varepsilon_0}{2x^{(0)}},\ \varepsilon_0 \in [0; \varepsilon]\}.$$

Звідси

$$\partial_\varepsilon f(x^{(0)}) = \overline{K_\varepsilon(x^{(0)})} = \begin{cases} [-1;\ 1], & 0 \geq x^{(0)} \geq -0{,}5\varepsilon, \\ [-1;\ -1 - \frac{\varepsilon}{x^{(0)}}], & x^{(0)} < -0{,}5\varepsilon. \end{cases} \qquad (18.12)$$

З (18.11) і (18.12) остаточно одержуємо

$$\partial_\varepsilon f(x^{(0)}) = \begin{cases} [1 - \frac{\varepsilon}{x^{(0)}};\ 1], & x^{(0)} > 0{,}5\varepsilon, \\ [-1;\ 1], & |x^{(0)}| \leq 0{,}5\varepsilon, \\ [-1;\ -1 - \frac{\varepsilon}{x^{(0)}}], & x^{(0)} < -0{,}5\varepsilon. \end{cases}$$

О з н а ч е н н я 18.3. Нехай $f(x)$ – опукла і скінченна функція на R^n, $\varepsilon \geq 0$, $x^{(0)} \in R^n$. Величину

$$\frac{\partial_\varepsilon f(x^{(0)})}{\partial v} = \max_{g \in \partial_\varepsilon f(x^{(0)})} \langle g, v \rangle$$

називають ε*-похідною функції* $f(x)$ *в точці* $x^{(0)}$ *за напрямом* $v \in R^n$.

Можна показати (див., наприклад, [31]), що має місце співвідношення:

$$\frac{\partial_\varepsilon f(x^{(0)})}{\partial v} = \inf_{\alpha > 0} \frac{f(x^{(0)} + \alpha v) - f(x^{(0)}) + \varepsilon}{\alpha}, \qquad (18.13)$$

яке при $\varepsilon = 0$ співпадає із співвідношенням (14.19).

Якщо існує напрям $v^{(0)} \in R^n$ такий, що

$$\frac{\partial_\varepsilon f(x^{(0)})}{\partial v^{(0)}} < 0,$$

то згідно (18.13) знайдеться $\alpha_0 > 0$, при якому

$$f(x^{(0)} + \alpha_0 v^{(0)}) < f(x^{(0)}) - \varepsilon,$$

тобто при заданому $\varepsilon > 0$ значення функції $f(x)$ у напрямі $v^{(0)}$ може бути зменшене не менше, ніж на ε у порівнянні з $f(x^{(0)})$.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається ε-субдиференціалом і ε-субградієнтом опуклої функції в точці?
2. Які властивості має ε-субдиференціал?
3. У чому полягає сутність геометричної інтерпретації поняття ε-субградієнта опуклої функції в точці?
4. Які основні співвідношення використовуються для обчислення ε-субдиференціалів?
5. Що називається ε-похідною функції в точці за напрямом?
6. Який напрям при заданому $\varepsilon > 0$ гарантує зменшення значення функції не менше, ніж на ε?

Вправи для самостійного виконання

1. Довести леми 18.1 і 18.3 і дати їх геометричну інтерпретацію.

2. Скориставшись графічними побудовами, знайти ε-субдиференціал таких функцій:

1) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\notin[-1;1],\\ 1, & x\in[-1;1],\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} |x|, & x\notin[-1;1],\\ 1, & x\in[-1;1],\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} 1, & x\le 1,\\ x^3, & x>1,\end{cases}$

4) $f(x)=10^k\,|x|,\ k\in\{0;1;2;3;4;5;6\}$,

в точках $x^{(0)}\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$ для значень $\varepsilon\in\{0{,}25;0{,}5;1;2\}$.

Використовуючи графічні побудови, переконатися, що для заданих функцій мають місце співвідношення:

а) $\partial_{\varepsilon_2}f(x^{(0)})\subset\partial_{\varepsilon_1}f(x^{(0)})$, якщо $\varepsilon_2<\varepsilon_1$;

б) $\partial f(x^{(0)})\subset\partial_{\varepsilon}f(x^{(0)})$, якщо $\varepsilon>0$.

В кожній заданій точці при кожному із заданих значень ε з'ясувати, виконується чи ні умова $0\in\partial_{\varepsilon}f(x^{(0)})$.

Якщо умова $0\in\partial_{\varepsilon}f(x^{(0)})$ не виконується, то визначити найменше значення ε, при якому вказана умова буде виконуватися.

Якщо умова $0\in\partial_{\varepsilon}f(x^{(0)})$ виконується, то вказати множину значень $\varepsilon>0$, при яких вказана умова не буде виконуватися.

3. Для функції

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases} |x_1|+|x_2|, & |x_1|+|x_2|\ge 1,\\ 1, & |x_1|+|x_2|\le 1,\end{cases}$$

де $(x_1,x_2)\in R^2$, знайти ε-субдиференціали в точках

$$x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)})\in\{(0,-3);(0,-2);(0,-1);(0,0);(0,1);(0,2);(0,3)\}$$

для значень $\varepsilon\in\{0{,}25;0{,}5;1;2\}$.

Знайти також субдиференціали заданої функції у вказаних точках.

Переконатися, що у вказаних точках $\partial f(x_1^{(0)},x_2^{(0)})\subset\partial_{\varepsilon}f(x_1^{(0)},x_2^{(0)})$ при $\varepsilon>0$, а також, що $\partial_{\varepsilon_2}f(x_1^{(0)},x_2^{(0)})\subset\partial_{\varepsilon_1}f(x_1^{(0)},x_2^{(0)})$ при $\varepsilon_2<\varepsilon_1$.

В кожній заданій точці $(x_1^{(0)},x_2^{(0)})\in R^2$ при кожному із заданих значень ε з'ясувати, виконується чи ні умова

$$(0,0)\in\partial_{\varepsilon}f(x_1^{(0)},x_2^{(0)}).$$

Якщо умова $(0,0)\in\partial_{\varepsilon}f(x_1^{(0)},x_2^{(0)})$ не виконується, то визначити множину значень $\varepsilon>0$, при яких вказана умова буде виконуватися.

Виконати відповідні графічні побудови.

Переконатися, що у вказаних точках при вказаних значеннях $\varepsilon>0$

$$\partial_{\varepsilon}f_1(x_1^{(0)},x_2^{(0)})\subset\partial_{\varepsilon}f(x_1^{(0)},x_2^{(0)}),$$

де $f_1(x_1,x_2)=\begin{cases} |x_1|, & |x_1|\ge 1,\\ 1, & |x_1|\le 1.\end{cases}$

4. Показати, що якщо $f(x)\ge m$ при будь-яких $x\in R^n$, то для того, щоб виконувалась умова

$$O_n\in\partial_{\varepsilon}f(x^{(0)}),$$

необхідно і достатньо покласти $\varepsilon\ge f(x^{(0)})-m$.

Виконати відповідні графічні побудови для випадків $x\in R^1$ та $x\in R^2$.

5. Знайти ε-субдиференціал вказаних функцій у вказаних точках $x^{(0)}$:

а) $f(x)=|x+1|+3x-2, x\in R^1$, $x^{(0)}\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$;

б) $f(x)=\delta(x-a)^2$, де $\delta>0$, $a\in R^n$ – фіксовані, $x\in R^n$, в точках $x^{(0)}=(0,0,\ldots,0)$, $x^{(0)}=(1,0,\ldots,0)$, $x^{(0)}=a$;

в) $f(x)=\langle Ax,x\rangle+\langle b,x\rangle$, де $x\in R^n$, $b\in R^n$, A – симетрична додатно визначена матриця $n\times n$, $x^{(0)}=(0,0,\ldots,0)$, $x^{(0)}=(1,1,\ldots,1)$.

6. Дано функцію

$$f(x)=x_1^2+x_2^2.$$

Враховуючи лему 18.2,

а) знайти $\varepsilon>0$ таке, що для точок $x^{(0)}=(2,2)$, $\tilde{x}=(1{,}5,2)$ і $g\in\partial f(\tilde{x})$ буде $g\in\partial_{\varepsilon}f(x^{(0)})$;

б) знайти хоча б одну точку $\tilde{x}\in R^2$ таку, що для $\varepsilon=0{,}5$ і точки $x^{(0)}=(0,1)$ існує $g\in\partial f(\tilde{x})$ і $g\in\partial_{\varepsilon}f(x^{(0)})$;

в) при $\delta=0{,}15$ довести, що для $g\in\partial f(1{,}1,0{,}9)$ існує $\varepsilon>0$ таке, що $g\in\partial_{\varepsilon}f(1,1)$.

7. Нехай $x\in R^1$ і задано функцію

$$f(x)=\begin{cases} 3-2x, & x\le 1,\\ x^{-1}, & x\ge 1.\end{cases}$$

Для довільної точки $x^{(0)}\in R^1$ знайти $\partial f(x^{(0)})$. Показати, що $0\in\partial_{0{,}5}f(2)$ і $0\in\overline{B_{0{,}5}f(2)}$, але $0\notin B_{0{,}5}f(2)$.

П р и м і т к а. Цей приклад ілюструє, що замикання в теоремі 18.2 є необхідним.

§19. Деякі класи неопуклих недиференційовних функцій

На практиці часто виникають екстремальні задачі, в яких цільові функції і/або функції обмежень є неопуклими негладкими функціями.

Розглянемо деякі найбільш відомі класи негладких функцій, які або за своїми екстремальними властивостями близькі до опуклих функцій, або для яких існує деяке узагальнення субдиференціала опуклої функції, що дає можливість досліджувати ці функції та будувати методи знаходження їх локальних екстремумів.

При узагальненні поняття субдиференціала в основному використовуються два підходи. Перший полягає в тому, що локальна апроксимація функції в точці здійснюється з використанням величини, яка відрізняється від похідної за напрямом, але забезпечує лінеаризацію за допомогою операції взяття максимуму або мінімуму. В другому підході зберігається похідна за напрямом в класичному розумінні, але змінюється спосіб лінеаризації функції в точці.

Вивченню різних класів неопуклих негладких функцій присвячені роботи В. Ф. Дем'янова, Л. В. Васильєва, А. В. Рубінова [31], [33], Б. Н. Пшеничного [86], Ф. Кларка [58], Є. А. Нурмінського [77], В. С. Міхалевича, А. М. Гупала, В. І. Норкіна [71], Н. З. Шора [110], Р. Міффліна [132], [133] та інших.

1. Квазіопуклі функції. До опуклих функцій за екстремальними властивостями найбільш близькими є квазіопуклі функції. Хоча ці функції не є одноекстремальними, вони мають властивості, використання яких дозволяє розв'язувати задачі мінімізації таких функцій.

Вперше квазіопуклі функції були використані в нелінійному програмуванні Л. В. Канторовичем [55]. Досить детальне дослідження квазіопуклих екстремальних задач і можливостей їх використання в економіко-математичному моделюванні проведено в роботі [117]. Методам мінімізації квазіопуклих функцій присвячені роботи [124], [131], [44], [45].

Означення 19.1. Функція $f(x)$, визначена і скінченна на опуклій множині $X \subset R^n$, називається *квазіопуклою* на X, якщо для будь-яких точок $x^{(1)} \in X$, $x^{(2)} \in X$ і чисел $\lambda \in [0;1]$, виконується нерівність

$$f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}) \le \max\{f(x^{(1)}), f(x^{(2)})\}. \qquad (19.1)$$

Якщо при $\lambda \in (0;1)$, $x^{(1)} \ne x^{(2)}$ нерівність (19.1) строга, то функція $f(x)$ називається *строго квазіопуклою* на X.

На рис. 19.1 і 19.2 подано приклади графіків квазіопуклих функцій, на рис. 19.3 – приклади графіків строго квазіопуклих функцій, а на рис. 19.4 – не квазіопуклих функцій.

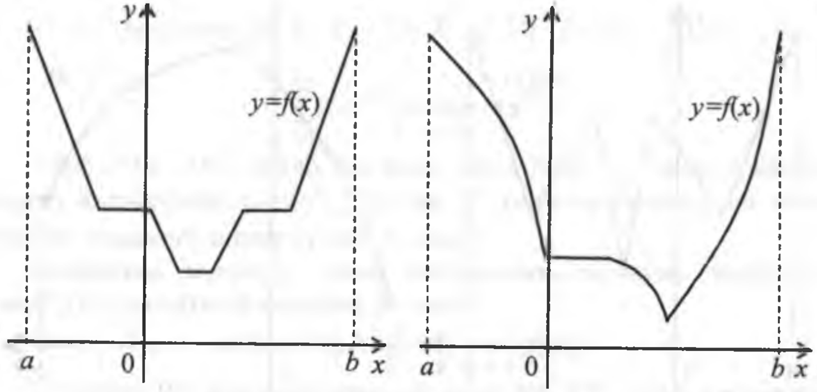


Рис. 19.1.

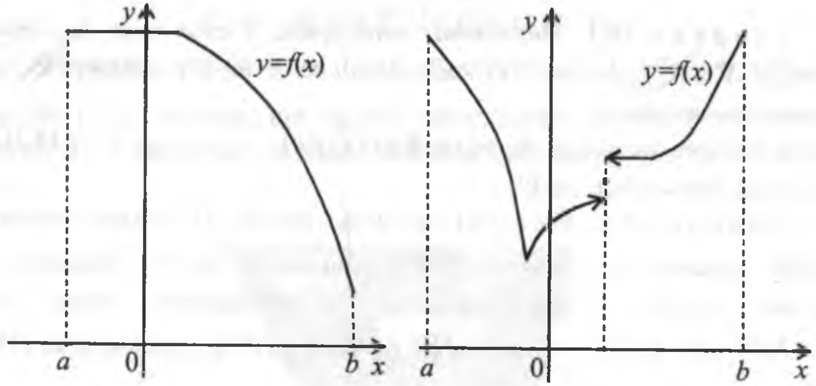


Рис. 19.2.

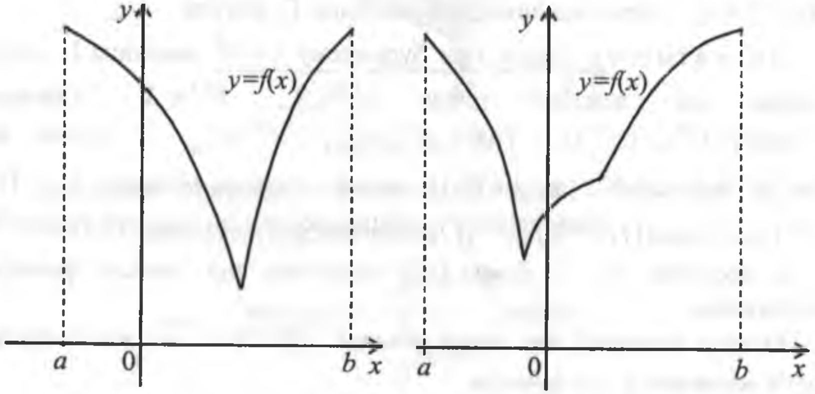


Рис. 19.3.

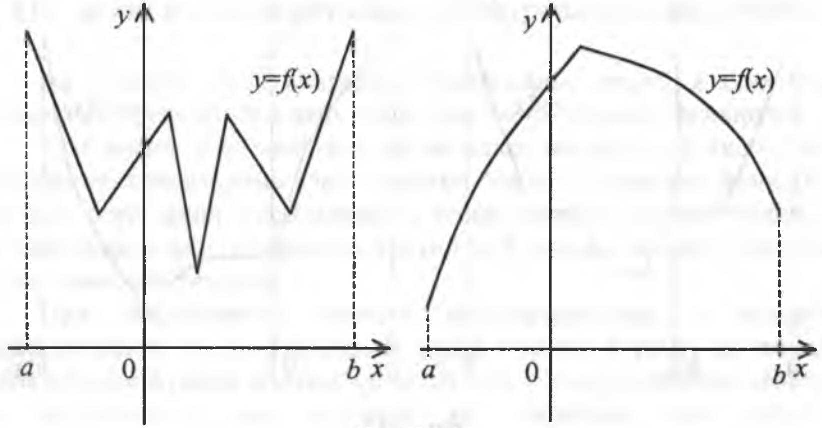


Рис. 19.4.

Т е о р е м а 19.1. *Визначена, неперервна і скінченна на опуклій множині $X \subset R^n$ функція $f(x)$ квазіопукла на X тоді і тільки тоді, коли лебегова множина*

$$L_c = \{x \in X \mid f(x) \le c\} \qquad (19.2)$$

опукла при будь-якому $c \in R^1$.

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай $f(x)$ квазіопукла на опуклій множині X функція. Зафіксуємо число $c \in R^1$. Візьмемо дві довільні точки $x^{(1)} \in L_c$, $x^{(2)} \in L_c$ і розглянемо точку виду $x^{(0)} = \lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} \in X$, де $\lambda \in [0;1]$. Тоді з (19.1), враховуючи (19.2), маємо

$$f(x^{(0)}) = f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}) \le \max\{f(x^{(1)}), f(x^{(2)})\} \le c,$$

тобто $x^{(0)} \in L_c$. Звідси випливає, що множина L_c опукла.

Д о с т а т н і с т ь. Нехай при будь-якому $c \in R^1$ множина L_c опукла. Візьмемо дві довільні точки $x^{(1)} \in X$, $x^{(2)} \in X$. Покладемо $c_0 = \max\{f(x^{(1)}), f(x^{(2)})\}$. Тоді $x^{(1)} \in L_{c_0}$, $x^{(2)} \in L_{c_0}$ і точки виду $x^{(0)} = \lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}$, де $\lambda \in [0;1]$, також належать множині L_{c_0}. Тобто $f(x^{(0)}) \le c_0 = \max\{f(x^{(1)}), f(x^{(2)})\}$, а отже виконується умова (19.1).

З теореми 19.1 і леми 14.2 випливає, що опукла функція є квазіопуклою.

Можна показати, що якщо функції $f_i(x)$ $(i = \overline{1,m})$ квазіопуклі на опуклій множині X, то функція

$$f(x) = \max_{i=\overline{1,m}} f_i(x)$$

також квазіопукла на X.

З (19.1) випливає, що якщо $x^{(i)} \in X$, $\alpha_i \ge 0$ $(i = \overline{1,m})$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, то

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^{(i)}\right) \le \max_{i=\overline{1,m}} f(x^{(i)}).$$

З рис. 19.1 і 19.2 видно, що якщо деяка точка є точкою локального мінімуму квазіопуклої функції $f(x)$ на X, то це не означає, що вона є і точкою глобального мінімуму цієї функції.

Позначимо множину точок глобального мінімуму квазіопуклої функції $f(x)$ на опуклій множині X через

$$X^* = \{x^* \in X \mid f(x^*) = \inf_{x \in X} f(x)\}.$$

З теореми 19.1 безпосередньо випливає, що X^* – опукла множина.

Нехай функція $f(x)$ квазіопукла на R^n. Покладемо

$$F(x) = \inf\{\alpha \in R^1 \mid (x, \alpha) \in co\ epi\ f\}.$$

Очевидно, що функція $F(x)$ опукла на R^n і $\inf_{x \in R^n} F(x) = \inf_{x \in R^n} f(x)$ (рис. 19.5). Це означає, що задача знаходження мінімуму квазіопуклої функції $f(x)$ зводиться до задачі знаходження мінімуму опуклої функції $F(x)$.

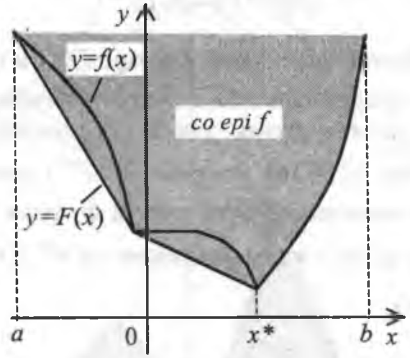


Рис. 19.5.

Важливим прикладом квазіопуклої задачі оптимізації є задача найкращої рівномірної дробово-лінійної апроксимації

$$\max_{t \in [c,d]} \left| a_0(t) - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i a_i(t)}{\sum_{i=1}^{n} x_i b_i(t)} \right| \to \min_{x \in R^n},$$

де $a_0(t)$, $a_i(t)$, $b_i(t)$ $(i = \overline{1,n})$ – неперервні на відрізку $[c,d]$ функції, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$.

2. Опукло-вгнуті функції. Особливий клас задач гладкої і негладкої оптимізації становлять задачі відшукання сідлових точок опукло-вгнутих функцій, до яких зводяться багато задач, що виникають в техніці, економіці, теорії ігор, математичному програмуванні. Дослідженню таких функцій та методам пошуку їх сідлових точок присвячені роботи [27], [31], [89], [100] та інші.

Нехай задана скінченна вгнута функція $f(x)$ на R^n, тобто для неї має місце нерівність

$$f(\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)})\geq \lambda f(x^{(1)})+(1-\lambda)f(x^{(2)})$$

для будь-яких $x^{(1)}\in R^n$, $x^{(2)}\in R^n$, $\lambda\in[0;1]$ (див. §14).

Множина

$$\overline{\partial f(x^{(0)})}=\{\,g\in R^n \mid f(x)-f(x^{(0)})\leq\langle g,x-x^{(0)}\rangle \ \ \forall x\in R^n\,\}$$

називається *супердиференціалом* функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$, а елемент $g\in\overline{\partial f(x^{(0)})}$ називається *суперградієнтом* $f(x)$ в точці $x^{(0)}$. Оскільки функція $F(x)=-f(x)$ є опуклою, то зрозуміло що

$$\overline{\partial f(x^{(0)})}=-\partial F(x^{(0)}),$$

де $\partial F(x^{(0)})$ – субдиференціал опуклої функції $F(x)$ в точці $x^{(0)}$ (див. §16).

Тому для супердиференціалів і суперградієнтів мають місце твердження, аналогічні до тверджень для субдиференціалів і субградієнтів опуклих функцій (див. §§14-16). Зокрема $\overline{\partial f(x^{(0)})}$ непорожня, опукла, замкнена і обмежена множина. Також вгнута функція $f(x)$, визначена на R^n, диференційовна за будь-яким напрямом $v\in R^n$, $\|v\|=1$, в будь-якій точці $x^{(0)}\in R^n$, причому

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial v}=\min_{g\in\overline{\partial f(x^{(0)})}}\langle g,v\rangle. \qquad (19.2)$$

Нехай задано евклідові простори R^n, R^m і скінченна на множині $S=S_1\times S_2\subset R^{n+m}$ функція $f(z)=f(x,y)$, де $S_1\subset R^n$, $S_2\subset R^m$ – опуклі відкриті множини, $z=(x,y)\in R^{n+m}$, $x\in S_1$, $y\in S_2$.

О з н а ч е н н я 19.2. Функція $f(x,y)$ називається *опукло-вгнутою* на S, якщо вона опукла по x на S_1 при кожному фіксованому $y\in S_2$ і вгнута по y на S_2 при кожному фіксованому $x\in S_1$.

Прикладом гладкої опукло-вгнутої функції є функція $f(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$, де $a\neq 0$, $b\neq 0$. Графіком цієї функції є поверхня, що має назву *гіперболічний параболоїд*.

Лініями рівня для даної функції

$$l_h=\{(x,y)\in R^2 | f(x,y)=h\}$$

при $h>0$ є гіперболи $\dfrac{x^2}{a_0^2}-\dfrac{y^2}{b_0^2}=1$ з півосями $a_0=a\sqrt{h}$, $b_0=b\sqrt{h}$,

при $h<0$ – гіперболи $\dfrac{x^2}{a_0^2}-\dfrac{y^2}{b_0^2}=-1$ з півосями $a_0=a\sqrt{-h}$, $b_0=b\sqrt{-h}$,

при $h=0$ – прямі $y=\pm\dfrac{b}{a}x$, які є асимптотами відповідних гіпербол.

Враховуючи сказане, можна побудувати «карту» ліній рівня гіперболічного параболоїда (рис. 19.6), за якою можна уявити його просторову форму (рис. 19.7).

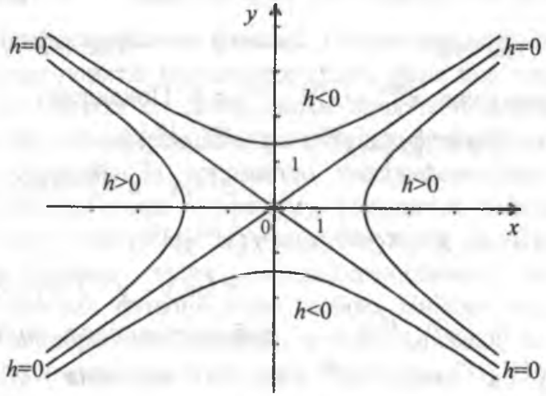


Рис. 19.6.

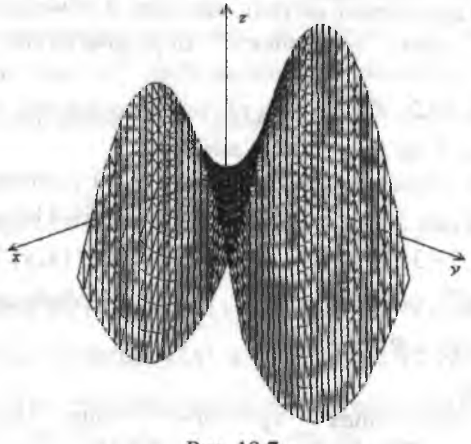
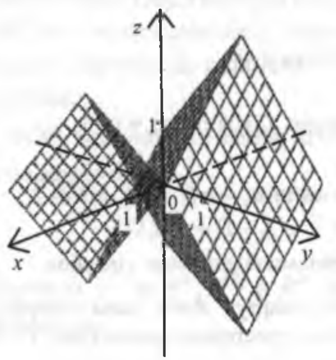


Рис. 19.7.

Прикладом негладкої опукло-вгнутої функції є функція $f(x,y)=|x|-|y|$, графік якої зображено на рис. 19.8, а «карту» ліній рівня на рис. 19.9.



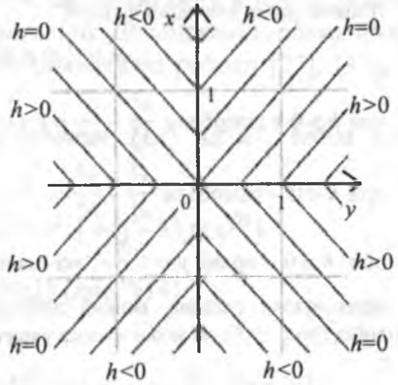


Рис. 19.8. Рис. 19.9.

Нехай задано точку $z^{(0)}=(x^{(0)},y^{(0)})\in S$. Покладемо

$$\partial f_x(x^{(0)},y^{(0)})=\{v\in R^n \mid f(x,y^{(0)})-f(x^{(0)},y^{(0)})\geq \geq\langle v,x-x^{(0)}\rangle\ \forall x\in S_1\},\quad (19.3)$$

$$\partial f_y(x^{(0)},y^{(0)})=\{w\in R^n \mid f(x^{(0)},y)-f(x^{(0)},y^{(0)})\leq \leq\langle w,y-y^{(0)}\rangle\ \forall y\in S_2\}.\quad (19.4)$$

Множина $\partial f_x(x^{(0)},y^{(0)})$ – субдиференціал опуклої функції $f_1(x)=f(x,y^{(0)})$ в точці $x^{(0)}\in S_1$, а множина $\partial f_y(x^{(0)},y^{(0)})$ – супердиференціал вгнутої функції $f_2(y)=f(x^{(0)},y)$ в точці $y^{(0)}\in S_2$.

Ці множини непорожні, опуклі, замкнені й обмежені (див. §14).

Розглянемо деякі властивості опукло-вгнутих функцій (див., наприклад, [31]).

Т е о р е м а 19.2. *Якщо $f(x,y)$ – опукло-вгнута на S функція, то вона неперервна на S за сукупністю змінних.*

Н а с л і д о к. *Опукло-вгнута функція $f(x,y)$ є ліпшицевою на будь-якій множині $Z=X\times Y$, де $X\subset S_1$, $Y\subset S_2$ і X, Y – опуклі обмежені множини.*

Т е о р е м а 19.3. *Опукло-вгнута функція $f(x,y)$ диференційовна в точці $z^{(0)}=(x^{(0)},y^{(0)})\in S=S_1\times S_2$ за будь-яким напрямом $g^{(0)}=(g^{(1)},g^{(2)})\in R^n\times R^m$ причому*

$$\frac{\partial f(z^{(0)})}{\partial g}=\max_{v\in\partial f_x(x^{(0)},y^{(0)})}\langle g^{(1)},v\rangle+\min_{w\in\partial f_y(x^{(0)},y^{(0)})}\langle g^{(2)},w\rangle.\quad (19.5)$$

О з н а ч е н н я 19.3. Точка $z^*=(x^*,y^*)\in Z=X\times Y$ називається *сідловою* точкою функції $f(x,y)$ на $Z=X\times Y\subset S$, $S=S_1\times S_2\subset R^{n+m}$, якщо

$$f(x^*,y)\leq f(x^*,y^*)\leq f(x,y^*)\quad (19.6)$$

для всіх $x\in X\subset S_1$ і $y\in Y\subset S_2$.

Наприклад, для функцій $f(x,y)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, і $f(x,y)=|x|-|y|$ сідловою точкою є точка $(x^*,y^*)=(0,0)$ (див. рис. 19.7 і 19.8 відповідно).

Т е о р е м а 19.4. *Для того, щоб точка $z^*=(x^*,y^*)\in Z=X\times Y$ була сідловою точкою опукло-вгнутої функції $f(x,y)$ на Z, необхідно і достатньо, щоб*

$$O_n\in\partial f_x(x^*,y^*)\ \text{і}\ O_m\in\partial f_y(x^*,y^*),$$

де $O_n\in R^n$, $O_m\in R^m$ – нуль-вектори у відповідних просторах.

3. Квазідиференційовні функції. Розглянемо клас функцій, для яких істотну роль грає поняття квазідиференціала, тісно пов'язане з похідною за напрямами. Це поняття є узагальненням поняття похідної і градієнта для гладких функцій, субдиференціала для опуклих функцій і супердиференціала для вгнутих функцій. За допомогою квазідиференціала досить просто описуються необхідні умови екстремуму, знаходяться напрями найшвидшого спуску і підйому, тим самим відкривається шлях до побудови чисельних методів розв'язування задач квазідиференційовної оптимізації. Клас квазідиференційовних функцій являє собою лінійний простір, замкнений відносно всіх алгебраїчних операцій, а також операцій взяття скінченного поточкового максимуму і мінімуму (див., наприклад, [31], [33]).

Нехай $S\subset R^n$ – відкрита множина.

О з н а ч е н н я 19.4. Скінченна і визначена на S функція $f(x)$ називається *квазідиференційовною* в точці $x^{(0)}\in S$, якщо вона диференційовна в точці $x^{(0)}$ за будь-яким напрямом $g\in R^n$ і якщо існують опуклі компактні множини $\underline{\partial} f(x^{(0)})\subset R^n$ і $\overline{\partial} f(x^{(0)})\subset R^n$ такі, що

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial g}=\lim_{\alpha\to+0}\frac{f(x^{(0)}+\alpha g)-f(x^{(0)})}{\alpha}=\max_{v\in\underline{\partial} f(x^{(0)})}\langle g,v\rangle+\min_{w\in\overline{\partial} f(x^{(0)})}\langle g,w\rangle.\quad (19.7)$$

Пара множин $Df(x^{(0)})=[\underline{\partial} f(x^{(0)}),\ \overline{\partial} f(x^{(0)})]$ називається *квазідиференціалом* функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}\in S$, а множини $\underline{\partial} f(x^{(0)})$ і $\overline{\partial} f(x^{(0)})$ – відповідно субдиференціалом і супердиференціалом функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}\in S$.

Нехай $X \subset S$. Якщо функція $f(x)$ квазідиференційовна в кожній точці $x \in X$, то вона називається *квазідиференційовною* на множині X.

Наведемо приклади квазідиференційовних функцій (див., наприклад, [31], [33]):

1) функція $f(x)$, скінченна і неперервно диференційовна на $S \subset R^n$, квазідиференційовна на S, причому за квазідиференціал в точці $x^{(0)} \in S$ можна взяти

$$Df(x^{(0)}) = [f'(x^{(0)}), O_n], \tag{19.8}$$

тобто $\underline{\partial f(x^{(0)})} = \{f'(x^{(0)})\}$, $\overline{\partial f(x^{(0)})} = O_n$;

2) функція $f(x)$, скінченна і опукла на опуклій відкритій множині $S \subset R^n$, квазідиференційовна в будь-якій точці $x^{(0)} \in S$, причому за квазідиференціал можна взяти

$$Df(x^{(0)}) = [\partial f(x^{(0)}), O_n], \tag{19.9}$$

тобто $\underline{\partial f(x^{(0)})} = \partial f(x^{(0)})$ – субдиференціал опуклої функції $f(x)$ в точці $x^{(0)} \in S$, $\overline{\partial f(x^{(0)})} = \{O_n\}$;

3) функція $f(x)$, скінченна і вгнута на відкритій опуклій множині $S \subset R^n$, квазідиференційовна в будь-якій точці $x^{(0)} \in S$, причому за квазідиференціал можна взяти

$$Df(x^{(0)}) = [O_n, \overline{\partial f(x^{(0)})}], \tag{19.10}$$

де $\overline{\partial f(x^{(0)})}$ – супердиференціал вгнутої функції $f(x)$ в точці $x^{(0)} \in S$;

4) опукло-вгнута функція $f(x)$ задана і скінченна на множині $S = S_1 \times S_2 \subset R^{n+m}$, де $S_1 \subset R^n$, $S_2 \subset R^m$ – відкриті опуклі множини, квазідиференційовна в будь-якій точці $z^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)}) \in S$, $x^{(0)} \in S_1$, $y^{(0)} \in S_2$, причому

$$Df(x^{(0)}) = [\underline{\partial f(x^{(0)})}, \overline{\partial f(x^{(0)})}], \tag{19.11}$$

де $\underline{\partial f(x^{(0)})} = [\partial f_x(x^{(0)}, y^{(0)}), O_m]$, $\overline{\partial f(x^{(0)})} = [O_n, \partial f_y(x^{(0)}, y^{(0)})]$ (див. (19.9), (19.10) відповідно).

Розглянемо деякі властивості квазідиференційовних функцій і основні формули *квазідиференціального числення*.

Т е о р е м а 19.5. *Якщо функції* $f_1(x)$ *і* $f_2(x)$ *квазідиференційовні в точці* $x^{(0)} \in S$, *то функція* $f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ *при* $\alpha_1 \in R^1$ *і* $\alpha_2 \in R^1$ *також квазідиференційовна в точці* $x^{(0)} \in S$, *причому*

$$Df(x^{(0)}) = [\underline{\partial f(x^{(0)})}, \overline{\partial f(x^{(0)})}], \tag{19.12}$$

де

$$\underline{\partial f(x^{(0)})} = \alpha_1 \underline{\partial f_1(x^{(0)})} + \alpha_2 \underline{\partial f_2(x^{(0)})},$$

$$\overline{\partial f(x^{(0)})} = \alpha_1 \overline{\partial f_1(x^{(0)})} + \alpha_2 \overline{\partial f_2(x^{(0)})}.$$

Н а с л і д о к. *Якщо функції* $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ *квазідиференційовні в точці* $x^{(0)} \in S$, *то і функція* $f(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x)$, *де* $\alpha_i \in R^1$, $i = \overline{1,k}$, *також квазідиференційовна в точці* $x^{(0)} \in S$.

Т е о р е м а 19.6. *Якщо функції* $f_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, *квазідиференційовні в точці* $x^{(0)} \in S$, *то функція*

$$f(x) = \max_{i=\overline{1,m}} f_i(x)$$

також квазідиференційовна в точці $x^{(0)}$, *причому*

$$Df(x^{(0)}) = [\underline{\partial f(x^{(0)})}, \overline{\partial f(x^{(0)})}], \tag{19.13}$$

де

$$\underline{\partial f(x^{(0)})} = co\left\{ \underline{\partial f_k(x^{(0)})} - \sum_{\substack{i \in R(x^{(0)}) \\ i \neq k}} \overline{\partial f_i(x^{(0)})} \;\middle|\; k \in R(x^{(0)}) \right\},$$

$$\overline{\partial f(x^{(0)})} = \sum_{k \in R(x^{(0)})} \overline{\partial f_k(x^{(0)})},$$

$$R(x^{(0)}) = \{ i \mid f(x^{(0)}) = f_i(x^{(0)}), i = \overline{1,m} \}.$$

З а у в а ж е н н я. Запис виду $co\{ A_k(x^{(0)}) \mid k \in R(x^{(0)}) \}$ в теоремі 19.6 означає

$$co\left\{ \bigcup_{k \in R(x^{(0)})} \{A_k(x^{(0)})\} \right\}.$$

Т е о р е м а 19.7. *Якщо функції* $f_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, *квазідиференційовні в точці* $x^{(0)} \in S$, *то функція*

$$f(x) = \min_{i=\overline{1,m}} f_i(x)$$

також квазідиференційовна в точці $x^{(0)}$, *причому*

$$Df(x^{(0)}) = [\underline{\partial f(x^{(0)})}, \overline{\partial f(x^{(0)})}], \tag{19.14}$$

де

$$\underline{\partial} f(x^{(0)}) = \sum_{k\in Q(x^{(0)})} \underline{\partial f_k(x^{(0)})},$$

$$\overline{\partial f(x^{(0)})} = co\left\{ \overline{\partial f_k(x^{(0)})} - \sum_{\substack{i\in Q(x^{(0)})\\ i\neq k}} \underline{\partial f_i(x^{(0)})} \;\middle|\; k\in Q(x^{(0)}) \right\},$$

$$Q(x^{(0)}) = \{i \mid f(x^{(0)}) = f_i(x^{(0)}),\, i=\overline{1,m}\}.$$

З а у в а ж е н н я. Запис виду $co\{\, A_k(x^{(0)}) \mid k\in Q(x^{(0)})\,\}$ в теоремі 19.7 означає

$$co\left\{ \bigcup_{k\in Q(x^{(0)})} \{A_k(x^{(0)})\} \right\}.$$

З теорем 19.6 і 19.7 випливає

Н а с л і д о к. *Якщо функції* $f_{ij}(x), i\in I=\{1,...,N\}, j\in J_i=\{1,...,N_i\}$, *квазідиференційовні в точці* $x^{(0)}\in S$, *то і функція*

$$f(x) = \max_{i\in I}\min_{j\in J_i} f_{ij}(x) \qquad (19.15)$$

також квазідиференційовна в точці $x^{(0)}$.

Для компактного запису формул для квазідиференціалів добутку і частки квазідиференційовних функцій будемо використовувати наступні визначення для операцій множення на дійсне число і додавання для пари множин.

Нехай $D=[A,B]$ – пара множин з R^n. Тоді

$$\alpha D = \begin{cases} [\alpha A, \alpha B], \alpha\geq 0, \\ [\alpha B, \alpha A], \alpha<0, \end{cases}$$

якщо $D_1=[A_1,B_1]$, $D_2=[A_2,B_2]$, то

$$D_1+D_2=[A_1+A_2, B_1+B_2].$$

Т е о р е м а 19.8. *Якщо функції* $f_1(x)$ *і* $f_2(x)$ *квазідиференційовні в точці* $x^{(0)}\in S$, *то і функція*

$$f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$$

також квазідиференційовна в точці $x^{(0)}$, *причому*

$$Df(x^{(0)}) = D(f_1(x^{(0)})\cdot f_2(x^{(0)})) =$$

$$= f_1(x^{(0)})Df_2(x^{(0)}) + f_2(x^{(0)})Df_1(x^{(0)}). \qquad (19.16)$$

Т е о р е м а 19.9. *Якщо функції* $f_1(x)$ *і* $f_2(x)$ *квазідиференційовні в точці* $x^{(0)}\in S$, *функція* $f_2(x)$ *неперервна в околі точки* $x^{(0)}$ *і* $f_2(x^{(0)})\neq 0$, *то і функція*

$$f(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

квазідиференційовна в точці $x^{(0)}$, *причому*

$$Df(x^{(0)}) = D\left(\frac{f_1(x^{(0)})}{f_2(x^{(0)})}\right) = \frac{f_2(x^{(0)})Df_1(x^{(0)}) - f_1(x^{(0)})Df_2(x^{(0)})}{(f_2(x^{(0)}))^2}. \qquad (19.17)$$

Вирази (19.16) і (19.17) є узагальненням звичайних формул диференціального числення.

Т е о р е м а 19.10. *Нехай функції* $f_i(x): R^n\to R^1$, $i=\overline{1,m}$, *квазідиференційовні в точці* $x^{(0)}\in R^n$, *функція* $F: R^m\to R^1$ *– неперервно диференційовна на деякій множині* $\Omega\subset R^m$. *Для точки* $x^{(0)}\in R^n$ *визначимо*

$$Y(x^{(0)}) = (f_1(x^{(0)}), f_2(x^{(0)}),..., f_m(x^{(0)})),$$

і припустимо, що $Y(x_0)\in\Omega$.

Тоді функція

$$f(x)=F(f_1(x), f_2(x),..., f_m(x))$$

квазідиференційовна в точці $x^{(0)}$.

П р и к л а д 19.1. Нехай

$$f(x_1,x_2)=\min\{f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2)\},$$

де $f_1(x_1,x_2)=|x_1|+|x_2|$, $f_2(x_1,x_2)=|x_1|-|x_2|$. Довести, що функція $f(x_1,x_2)$ квазідиференційовна на R^2 і знайти її квазідиференціал в точці $x^{(0)}=(0,0)$.

Функція $f_1(x_1,x_2)$ – квазідиференційовна, оскільки вона опукла як сума двох опуклих на R^2 функцій $f_{11}(x_1,x_2)=|x_1|$ і $f_{12}(x_1,x_2)=|x_2|$ (див. лему 14.4). Функція $f_2(x_1,x_2)$ – квазідиференційовна на R^2 як сума двох квазідиференційовних функцій $f_{21}(x_1,x_2)=|x_1|$, яка опукла, і $f_{22}(x_1,x_2)=-|x_2|$, яка вгнута, (див. теорему 19.5). Тоді функція $f(x_1,x_2)$ – квазідиференційовна на R^2 за теоремою 19.7, при цьому квазідиференціал цієї функції в точці $x^{(0)}\in R^2$ має вигляд (див. (19.14)):

$$Df(x^{(0)}) = [\underline{\partial f(x^{(0)})}, \overline{\partial f(x^{(0)})}],$$

де

$$\underline{\partial f(x^{(0)})} = \underline{\partial f_1(x^{(0)})} + \underline{\partial f_2(x^{(0)})}, \qquad (19.18)$$

і оскільки $Q(x^{(0)})=\{i \mid f(x^{(0)})=f_1(x^{(0)})=f_2(x^{(0)})=0\}=\{1;2\}$, то

$$\overline{\partial f(x^{(0)})} = co\{(\overline{\partial f_1(x^{(0)})} - \underline{\partial f_2(x^{(0)})}) \cup (\overline{\partial f_2(x^{(0)})} - \underline{\partial f_1(x^{(0)})})\}. \qquad (19.19)$$

Знайдемо спочатку $\underline{\partial f(x^{(0)})}$ за співвідношенням (19.18). Для цього знайдемо $\underline{\partial f_1(x^{(0)})}$ і $\underline{\partial f_2(x^{(0)})}$. Оскільки функція $f_1(x_1,x_2)$ квазідиференційовна в точці $x^{(0)} \in R^2$, то за теоремою 19.5 $\underline{\partial f_1(x^{(0)})} = \underline{\partial f_{11}(x^{(0)})} + \underline{\partial f_{12}(x^{(0)})}$, при цьому в силу опуклості функцій $f_{11}(x_1,x_2) = |\, x_1 \,|$ і $f_{12}(x_1,x_2) = |\, x_2 \,|$ маємо

$\underline{\partial f_{11}(x^{(0)})} = \partial f_{11}(x^{(0)})$ – субдиференціал $f_{11}(x_1,x_2)$ в точці $x^{(0)} \in R^2$,

$\underline{\partial f_{12}(x^{(0)})} = \partial f_{12}(x^{(0)})$ – субдиференціал $f_{12}(x_1,x_2)$ в точці $x^{(0)} \in R^2$.

Тоді, враховуючи результати прикладу 17.1, одержимо

$$\underline{\partial f_{11}(x^{(0)})} = \partial f_{11}(x^{(0)}) = co\{(-1,0);(1,0)\},$$

$$\underline{\partial f_{12}(x^{(0)})} = \partial f_{12}(x^{(0)}) = co\{(0,-1);(0,1)\}.$$

Звідси

$$\underline{\partial f_1(x^{(0)})} = \underline{\partial f_{11}(x^{(0)})} + \underline{\partial f_{12}(x^{(0)})} = co\{(-1,0);(1,0)\} + co\{(0,-1);(0,1)\} - \quad (19.20)$$

квадрат з вершинами $A_{11} = (1,1)$, $A_{12} = (1,-1)$, $A_{13} = (-1,-1)$, $A_{14} = (-1,1)$ (рис. 19.10 а).

Функція $f_2(x_1,x_2)$ квазідиференційовна в точці $x^{(0)} \in R^2$, тому за теоремою 19.5 $\underline{\partial f_2(x^{(0)})} = \underline{\partial f_{21}(x^{(0)})} + \underline{\partial f_{22}(x^{(0)})}$. Оскільки для опуклої функції $f_{21}(x_1,x_2) = |\, x_1 \,|$ $\underline{\partial f_{21}(x^{(0)})} = \partial f_{21}(x^{(0)}) = \partial f_{11}(x^{(0)}) = co\{(-1,0);(1,0)\}$, а для вгнутої функції $f_{22}(x_1,x_2) = -|\, x_2 \,|$ $\underline{\partial f_{22}(x^{(0)})} = \{O_2\}$ (див. (19.10)), то

$$\underline{\partial f_2(x^{(0)})} = \underline{\partial f_{21}(x^{(0)})} + \{O_2\} = co\{(-1,0);(1,0)\} - \quad (19.21)$$

відрізок $[A_{21}; A_{22}]$ (рис. 19.10 а). Отже, з урахуванням (19.20) і (19.21), маємо

$$\underline{\partial f(x^{(0)})} = \underline{\partial f_1(x^{(0)})} + \underline{\partial f_2(x^{(0)})} = co\{(-1,0);(1,0)\} + co\{(0,-1);(0,1)\} + co\{(-1,0);(1,0)\} -$$

прямокутник $A_1A_2A_3A_4$, де $A_1 = (2,1)$, $A_2 = (2,-1)$, $A_3 = (-2,-1)$, $A_4 = (-2,1)$ (рис.19.10 а).

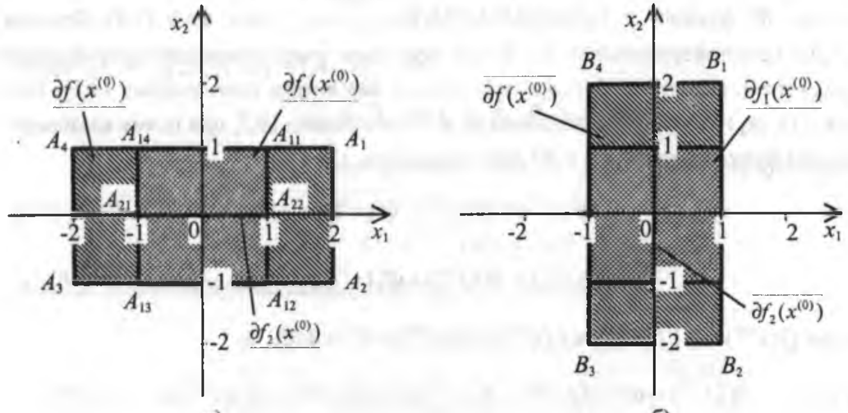


Рис. 19.10.

Тепер знайдемо $\overline{\partial f(x^{(0)})}$ за співвідношенням (19.19). Для цього знайдемо $\overline{\partial f_1(x^{(0)})}$ і $\overline{\partial f_2(x^{(0)})}$. Оскільки функція $f_1(x)$ – опукла, то згідно з (19.9) маємо

$$\overline{\partial f_1(x^{(0)})} = \{O_2\}. \quad (19.22)$$

Оскільки функція $f_{21}(x_1,x_2) = |\, x_1 \,|$ опукла, а $f_{22}(x_1,x_2) = -f_{12}(x_1,x_2) = -|\, x_2 \,|$ вгнута функція, то

$$\overline{\partial f_2(x^{(0)})} = \{O_2\} - \overline{\partial f_{22}(x^{(0)})} = -(-\underline{\partial f_{12}(x^{(0)})}) = \underline{\partial f_{12}(x^{(0)})} = co\{(0,-1);(0,1)\}. \quad (19.23)$$

Далі, з (19.22) і (19.21), в силу того, що $-co\{(-1,0);(1,0)\} = co\{(-1,0);(1,0)\}$, маємо

$$\overline{\partial f_1(x^{(0)})} - \underline{\partial f_2(x^{(0)})} = co\{(-1,0);(1,0)\}. \quad (19.24)$$

Враховуючи (19.23) і (19.20), маємо

$$\overline{\partial f_2(x^{(0)})} - \underline{\partial f_1(x^{(0)})} = co\{(0,-1);(0,1)\} - \left(co\{(-1,0);(1,0)\} + co\{(0,-1);(0,1)\}\right) =$$

$$= co\{(0,-1);(0,1)\} + \left(co\{(-1,0);(1,0)\} + co\{(0,-1);(0,1)\}\right) -$$

(19.25)

прямокутник $B_1B_2B_3B_4$, де $B_1 = (1,2)$, $B_2 = (1,-2)$, $B_3 = (-1,-2)$, $B_4 = (-1,2)$ (рис. 19.10 б).

Оскільки з (19.24) і (19.25) випливає, що

$$(\overline{\partial f_1(x^{(0)})} - \underline{\partial f_2(x^{(0)})}) \subset (\overline{\partial f_2(x^{(0)})} - \underline{\partial f_1(x^{(0)})}),$$

то

$$\overline{\partial f(x^{(0)})} = co\{(\overline{\partial f_1(x^{(0)})} - \underline{\partial f_2(x^{(0)})}) \cup (\overline{\partial f_2(x^{(0)})} - \underline{\partial f_1(x^{(0)})})\} = \overline{\partial f_2(x^{(0)})} - \underline{\partial f_1(x^{(0)})} -$$

прямокутник $B_1B_2B_3B_4$.

Квазідиференціал $Df(x^{(0)})$ функції $f(x_1,x_2) = \min\{f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2)\}$ в точці $x^{(0)} = (0,0)$ зображено на рис. 19.11, при цьому її графік співпадає з графіком функції $f_2(x_1,x_2) = |\, x_1 \,| - |\, x_2 \,|$ (див рис. 19.8).

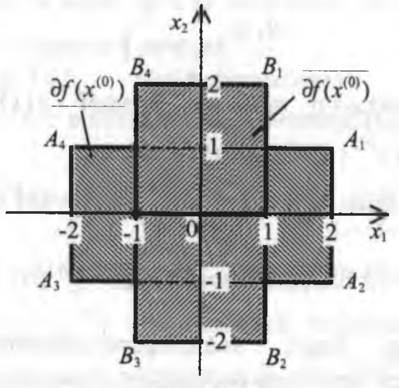


Рис. 19.11.

Для квазідиференційовної на R^n функції $f(x)$ мають місце наступні твердження (див., наприклад, [31]).

Т е о р е м а 19.11. *Для того, щоб функція $f(x)$ досягала в точці $x^* \in R^n$ свого найменшого значення на R^n, необхідно, щоб*

$$-\overline{\partial f(x^*)} \subset \underline{\partial f(x^*)}. \qquad (19.26)$$

Т е о р е м а 19.12. *Для того щоб функція $f(x)$ досягала в точці $x^{**} \in R^n$ свого найбільшого значення на R^n, необхідно, щоб*

$$-\underline{\partial f(x^{**})} \subset \overline{\partial f(x^{**})}. \qquad (19.27)$$

О з н а ч е н н я 19.5. Точка $x^* \in R^n$, яка задовольняє умову (19.26) називається inf-*стаціонарною* точкою функції $f(x)$ на R^n, а точка $x^{**} \in R^n$, яка задовольняє умову (19.27) називається sup-*стаціонарною* точкою функції $f(x)$ на R^n.

Нехай $x^{(0)} \in R^n$ не є inf-стаціонарною точкою. Напрям

$$g_0 = -\frac{v_0 + w_0}{\| v_0 + w_0 \|}$$

є *напрямом найшвидшого спуску* квазідиференційовної функції $f(x)$ в точці $x^{(0)} \in R^n$, де $v_0 \in \underline{\partial f(x^{(0)})}$ і $w_0 \in \overline{\partial f(x^{(0)})}$ добираються так, що

$$\max_{w \in \overline{\partial f(x^{(0)})}} \min_{v \in \underline{\partial f(x^{(0)})}} \| v + w \| = \min_{v \in \underline{\partial f(x^{(0)})}} \| v + w_0 \| = \| v_0 + w_0 \|.$$

Нехай точка $x^{(0)} \in R^n$ не є sup-стаціонарною точкою. Напрям

$$g_1 = \frac{v_1 + w_1}{\| v_1 + w_1 \|}$$

є *напрямом найшвидшого підйому* функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$, де $v_1 \in \underline{\partial f(x^{(0)})}$ і $w_1 \in \overline{\partial f(x^{(0)})}$ добираються так, що

$$\max_{v \in \underline{\partial f(x_0)}} \min_{w \in \overline{\partial f(x_0)}} \| v + w \| = \min_{w \in \overline{\partial f(x_0)}} \| v_1 + w \| = \| v_1 + w_1 \|.$$

Зауважимо, що як напрям g_0, так і напрям g_1, можуть бути не єдині в точці $x^{(0)}$.

Для широкого класу квазідиференційовних функцій можна алгоритмізувати процес перевірки необхідних умов екстремуму і знаходження напрямів найшвидшого спуску і підйому. Це дає змогу будувати чисельні методи пошуку екстремумів квазідиференційовних функцій.

4. Функції, диференційовні за Кларком. У роботах відомого канадського математика Френка Кларка (див., наприклад, [58]) поняття градієнта і субдиференціала узагальнені для довільних локально ліпшицевих функцій, побудована струнка теорія субдиференціального числення, яка знайшла широкі застосування при дослідженні негладких функцій, а також при розв'язуванні задач оптимізації.

Нехай задана функція $f: R^n \to R^1$ і точка $x^{(0)} \in R^n$. Говорять, що $f(x)$ є *ліпшицевою* в околі точки $x^{(0)}$ (*локально ліпшицевою* в точці $x^{(0)}$) функцією, якщо існують такі константа $K > 0$ і число $\varepsilon > 0$, що

$$| f(x') - f(x'') | \le K \| x' - x'' \| \qquad (19.28)$$

для будь-яких точок x', x'' з ε-околу $S_\varepsilon(x^{(0)}) = \{x \in R^n \mid \| x - x^{(0)} \| < \varepsilon\}$ точки $x^{(0)}$.

Можна переконатися, що такі функції не обов'язково диференційовні в точці $x^{(0)}$ і навіть не обов'язково мають класичні похідні за напрямами.

Для ліпшицевої функції $f(x)$ в околі заданої точки $x^{(0)} \in R^n$ і довільного вектора $g \in R^n$ покладемо

$$\frac{\partial_{Cl} f(x^{(0)})}{\partial g} = \lim_{\delta \to 0} \sup_{\substack{\| x - x^{(0)} \| \le \delta \\ 0 < \lambda \le \delta}} \frac{f(x^{(0)} + \lambda g) - f(x^{(0)})}{\lambda}. \qquad (19.29)$$

Права частина цього відношення є обмеженою величиною, оскільки згідно умови Ліпшиця (19.28) для всіх досить близьких до $x^{(0)}$ точок x і досить малих λ вона обмежена зверху величиною $K \| g \|$.

Цю величину називають *верхньою субпохідною* (або *похідною Кларка*) функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$ за напрямом $g \in R^n$, а функцію $f(x)$ – *диференційовною за Кларком* в точці $x^{(0)}$.

О з н а ч е н н я 19.6. *Субдиференціалом Кларка* локально ліпшицевої функції $f(x)$ в точці $x^{(0)} \in R^n$ називається множина

$$\partial_{Cl} f(x^{(0)}) = \left\{ v \in R^n \;\middle|\; \frac{\partial_{Cl} f(x^{(0)})}{\partial g} \ge \langle v, g \rangle \;\; \forall g \in R^n \right\}. \qquad (19.30)$$

Елементи $\partial_{Cl} f(x^{(0)})$ називають *субградієнтами Кларка*. Можна показати [58], що $\partial_{Cl} f(x^{(0)})$ – непорожній опуклий компакт в R^n і для будь-якого $g \in R^n$ має місце співвідношення $\dfrac{\partial_{Cl} f(x^{(0)})}{\partial g} = \max_{v \in \partial_{Cl} f(x^{(0)})} \langle v, g \rangle$.

Існує кілька еквівалентних способів визначення субдиференціала Кларка. Один з них заснований на *теоремі Радемахера* [136] про те, що локально ліпшицева функція диференційовна майже скрізь, тобто за виключенням множини точок міри 0 (за мірою Лебега).

Нехай Ω_f множина точок з $S_\varepsilon(x^{(0)})$, в яких функція диференційовна. В [58] показано, що

$$\partial_{Cl} f(x^{(0)}) = co\{v \in R^n \mid \exists \{x^{(k)}\} : x^{(k)} \to x^{(0)}, x^{(k)} \in \Omega_f, f'(x^{(k)}) \to v\}, \tag{19.31}$$

де $f'(x^{(k)})$ – градієнт функції $f(x)$ в точці $x^{(k)} \in \Omega_f$.

Це означає, що $\partial_{Cl} f(x^{(0)})$ є опуклим замиканням множини векторів виду

$$v = \lim_{k\to\infty} f'(x^{(k)}),$$

де $\{x^{(k)}\}$ – послідовність точок, що збігається до $x^{(0)}$ і така, що $f(x)$ диференційовна в кожній точці $x^{(k)}$ околу точки $x^{(0)}$.

Субдиференціал Кларка і диференційовні за Кларком функції мають багато важливих властивостей.

Зокрема, якщо $f(x)$ – опукла і локально ліпшицева функція, то субдиференціал Кларка $\partial_{Cl} f(x^{(0)})$ в точці $x^{(0)} \in R^n$ співпадає з субдиференціалом функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$, тобто

$$\partial_{Cl} f(x^{(0)}) = \partial f(x^{(0)}) = \{g \in R^n \mid f(x) - f(x^{(0)}) \geq \langle g, x - x^{(0)}\rangle \ \forall x \in S_\varepsilon(x^{(0)})\},$$

а похідна Кларка за напрямом (19.29) для кожного вектора $g \in R^n$ співпадає з похідною за напрямом в класичному розумінні, тобто

$$\frac{\partial_{Cl} f(x^{(0)})}{\partial g} = \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial g} = \lim_{\lambda\to+0} \frac{f(x^{(0)} + \lambda g) - f(x^{(0)})}{\lambda}.$$

Точково-множинне відображення $x^{(0)} \to \partial_{Cl} f(x^{(0)})$ є замкненим, тобто якщо $g(x^{(k)}) \in \partial_{Cl} f(x^{(k)})$, $x^{(k)} \to x^{(0)}$, $g(x^{(k)}) \to g^{(0)}$ при $k \to +\infty$, то $g^{(0)} \in \partial_{Cl} f(x^{(0)})$.

Т е о р е м а 19.13. *Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ локально ліпшицеві, то функції*

$$f_3(x) = f_1(x) + f_2(x),\ f_4(x) = f_1(x) - f_2(x),\ f_5(x) = f_1(x) \cdot f_2(x),$$

також є локально ліпшицеві.

Розглянемо основні формули субдиференціального за Кларком числення.

Т е о р е м а 19.14. *Якщо функція $f(x)$ скінченна і ліпшицева в околі точки $x^{(0)}$, то для будь-якого числа $\alpha \in R^1$ має місце рівність*

$$\partial_{Cl}(\alpha f(x^{(0)})) = \alpha \partial_{Cl} f(x^{(0)}).$$

Т е о р е м а 19.15. *Якщо $f_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, – ліпшицеві в околі точки $x^{(0)}$ функції, то має місце включення*

$$\partial_{Cl}\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x^{(0)})\right) \subset \sum_{i=1}^m \alpha_i \partial_{Cl} f_i(x^{(0)}).$$

Т е о р е м а 19.16 (Lebourg [127]) (про середнє значення). *Нехай точки x', x'' належать опуклій множині $X \subset R^n$. Тоді існують точка $x^{(0)} = x' + \lambda(x'' - x')$, $\lambda \in (0;1)$ і субградієнт Кларка $g^{(0)} \in \partial_{Cl} f(x^{(0)})$ такі, що*

$$f(x'') - f(x') = \langle g^{(0)}, x'' - x'\rangle.$$

Т е о р е м а 19.17. *Нехай функції $f_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, є ліпшицевими в околі точки $x^{(0)}$. Тоді функція*

$$f(x) = \max_{i=\overline{1,m}} f_i(x)$$

є також ліпшицевою в околі точки $x^{(0)}$ функцією і має місце включення

$$\partial_{Cl} f(x^{(0)}) \subset co\{\partial_{Cl} f_i(x^{(0)}) \mid i \in R(x^{(0)})\}, \tag{19.32}$$

де $R(x^{(0)}) = \{i \mid f(x^{(0)}) = f_i(x^{(0)}), i = \overline{1,m}\}$.

Т е о р е м а 19.18. *Нехай $f_i : R^n \to R^1$, $i = \overline{1,m}$, $F : R^m \to R^1$ – ліпшицеві в околі точки $x^{(0)} \in R^n$ функції. Визначимо*

$$f(x) = F(f_1(x),\dots,f_m(x)),\ Y(x^{(0)}) = (f_1(x^{(0)}), f_2(x^{(0)}),\dots,f_m(x^{(0)})),$$

$$G(x^{(0)}) = co\{g \in R^n \mid g = [g^{(1)} g^{(2)} \dots g^{(m)}]w\},$$

де $g^{(i)} \in \partial_{Cl} f_i(x^{(0)})$, $i = \overline{1,m}$, $w \in \partial_{Cl} F(Y(x^{(0)}))$, $[g^{(1)} g^{(2)} \dots g^{(m)}]$ – матриця розмірності $n \times m$, яка утворена з вектор-стовпців $g^{(i)} \in R^n$, $i = \overline{1,m}$.

Тоді складна функція $f(x) = F(f_1(x),\dots,f_m(x))$ є ліпшицевою в околі точки $x^{(0)} \in R^n$ і має місце включення

$$\partial_{Cl} f(x^{(0)}) \subset G(x^{(0)}). \tag{19.33}$$

Т е о р е м а 19.19. *Якщо диференційовна за Кларком функція $f(x)$ в точці x^* досягає локального мінімуму або локального максимуму, то*

$$O_n \in \partial_{Cl} f(x^*).$$

5. Узагальнено диференційовні функції. Розглянемо ще один клас неопуклих негладких функцій, який одержав назву узагальнено диференційовних функцій (див., наприклад, [71]). Функції цього класу задовольняють локальну умову Ліпшиця, не мають, взагалі кажучи, похідних за напрямами, але майже скрізь диференційовні.

Означення 19.7. Функція $f: R^n \to R^1$ називається *узагальнено диференційовною* в точці $x^{(0)} \in R^n$, якщо в деякому околі точки $x^{(0)}$ визначено напівнеперервне зверху в $x^{(0)}$ многозначне відображення G_f, що його значення $G_f(x)$ $(x \in R^n)$ є непорожньою, обмеженою, опуклою, замкненою множиною і в околі точки $x^{(0)}$ має місце подання

$$f(x) = f(x^{(0)}) + \langle g, x - x^{(0)} \rangle + o(x^{(0)}, x, g),$$

де $g \in G_f(x)$, а функція $o(x^{(0)}, x, g)$ задовольняє умову

$$\lim_{k\to\infty} \frac{o(x^{(0)}, x^{(k)}, g^{(k)})}{\| x^{(k)} - x^{(0)} \|} = 0$$

для будь-яких послідовностей $x^{(k)} \to x^{(0)}$, $x^{(k)} \neq x^{(0)}$, $g^{(k)} \in G_f(x^{(k)})$.

Функція називається *узагальнено диференційовною в області*, якщо вона узагальнено диференційовна в будь-якій точці цієї області. Вектори $g \in G_f(x)$ називаються *псевдоградієнтами* (*узагальненими градієнтами*) функції f в точці x.

Наведемо твердження, які визначають основні властивості узагальнено диференційовних функцій (див., наприклад, [71]).

Теорема 19.20. *Узагальнено диференційовні функції локально ліпшицеві.*

Теорема 19.21. *Неперервно диференційовні функції узагальнено диференційовні, а їх градієнти можна брати в якості псевдоградієнтів.*

Означення 19.8 [76]. Неперервна функція $f: R^n \to R^1$, називається *слабо опуклою*, якщо для будь-якого $x^{(0)} \in R^n$ існує непорожня множина $G(x^{(0)})$ таких векторів $g \in R^n$, які називаються *квазіградієнтами*, що для всіх $g \in G(x^{(0)})$ виконується нерівність

$$f(x) \geq f(x^{(0)}) + \langle g, x - x^{(0)} \rangle + r(x^{(0)}, x),$$

де $\dfrac{r(x^{(0)}, x)}{\| x - x^{(0)} \|} \to 0$, коли $\| x - x^{(0)} \| \to 0$ і точки $x^{(0)}$, x належать деякій замкненій обмеженій множині.

Легко бачити, що опуклі функції є і слабо опуклими, при цьому $r(x^{(0)}, x) \equiv 0$. Відомо (див., наприклад, [77]), що множина квазіградієнтів $G(x^{(0)})$ непорожня, обмежена, опукла і замкнена, а многозначне відображення $G: x^{(0)} \to G(x^{(0)})$ напівнеперервне зверху. Слабо опуклі функції мають похідні за напрямами.

Теорема 19.22. *Опуклі і слабо опуклі функції узагальнено диференційовні, а їх субградієнти і квазіградієнти відповідно можна брати в якості псевдоградієнтів цих функцій.*

Означення 19.9 [132]. Функція $f: R^n \to R^1$ називається *напівгладкою*, якщо:

а) вона локально ліпшицева;

б) для будь-якого $x^{(0)} \in R^n$, будь-яких послідовностей $x^{(k)} \to x^{(0)}$ $((x^{(k)} - x^{(0)}) / \| x^{(k)} - x^{(0)} \| \to d)$ і $g^{(k)} \in \partial_{Cl} f(x^{(k)})$ існує границя скалярних добутків

$$\lim_{k\to\infty} \langle g^{(k)}, d \rangle,$$

де $\partial_{Cl} f(x^{(k)})$ – субдиференціал Кларка функції $f(x)$ в точці $x^{(k)} \in R^n$.

Легко бачити, що для одного й того ж напряму d всі скалярні добутки $\langle g^{(k)}, d \rangle$ в означенні 19.9 мають одну й ту саму границю.

Використовуючи умову б) означення 19.9 і теорему 19.16 про середнє, можна показати, що напівгладкі функції мають похідну за напрямом d і

$$\lim_{k\to\infty} \langle g^{(k)}, d \rangle = \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial d}.$$

Теорема 19.23. *Напівгладкі функції є й узагальнено диференційовними, а їх субградієнти за Кларком можна брати в якості псевдоградієнтів.*

Означення 19.10. Функція $f: R^n \to R^1$ називається *узагальнено диференційовною у вузькому розумінні* в деякій області $S \subset R^n$, якщо вона узагальнено диференційована в цій області і має похідну за будь-яким напрямом в кожній точці $x \in S$.

Теорема 19.24. *Як класи узагальнено диференційовні у вузькому розумінні функції і напівгладкі функції співпадають.*

Відмінність між цими класами полягає лише у способі визначення узагальнених градієнтів.

Теорема 19.25. *Нехай $f_i: R^n \to R^1$, $i = \overline{1,m}$, узагальнено диференційовні функції на R^n, G_{f_i} – їх псевдоградієнтні відображення. Тоді функція максимуму*

$$f(x) = \max_{i=\overline{1,m}} f_i(x)$$

узагальнено диференційовна на R^n *і для довільної точки* $x^{(0)} \in R^n$

$$G_f(x^{(0)}) = co\{g \in R^n \mid g \in G_{f_i}(x^{(0)}), i \in R(x^{(0)})\}, \qquad (19.34)$$

де $R(x^{(0)}) = \{i \mid f(x^{(0)}) = f_i(x^{(0)}), i = \overline{1,m}\}$.

Т е о р е м а 19.26. *Нехай* $f_i : R^n \to R^1$, $i = \overline{1,m}$, $F : R^m \to R^1$ *узагальнено диференційовні функції на* R^n. *Тоді складна функція*

$$f(x) = F(f_1(x),...,f_m(x)),$$

також узагальнено диференційовна на R^n *і*

$$G_f(x) = co\{g \in R^n \mid g = [g^{(1)}g^{(2)}...g^{(m)}]w\}, \qquad (19.35)$$

де $[g^{(1)}g^{(2)}...g^{(m)}]$ *– матриця розмірності* $n \times m$, *яка утворена з вектор-стовпців* $g^{(i)} \in G_{f_i}(x)$, $i = \overline{1,m}$, $w \in G_F(Y(x))$, $Y(x) = (f_1(x),...,f_m(x))$.

Н а с л і д о к 1. *Функція мінімуму*

$$f(x) = \min_{i=\overline{1,m}} f_i(x)$$

узагальнено диференційовна і для довільної точки $x^{(0)} \in R^n$

$$G_f(x^{(0)}) = co\{g \in R^n \mid g \in G_{f_i}(x^{(0)}), i \in Q(x^{(0)})\}, \qquad (19.36)$$

де $Q(x^{(0)}) = \{i \mid f(x^{(0)}) = f_i(x^{(0)}), i = \overline{1,m}\}$.

Н а с л і д о к 2. *Функція модуля узагальнено диференційовної функції* $f(x)$

$$h(x) = |f(x)| = \max\{f(x); -f(x)\}$$

узагальнено диференційовна.

Н а с л і д о к 3. *Нехай задано задачу математичного програмування*

$$f(x) \to \min, \qquad (19.37)$$

$$g_i(x) \le 0, i = \overline{1,k}, \qquad (19.38)$$

де $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, *цільова функція* $f(x)$ *і функції-обмеження* $g_i(x)$, $i = \overline{1,k}$, *узагальнено диференційовні.*

Функція Лагранжа задачі (19.37), (19.38)

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x),$$

де $\lambda_i \ge 0$, $i = \overline{1,k}$, *узагальнено диференційовна за сукупністю змінних* x_j, $j = \overline{1,n}$, λ_i, $i = \overline{1,k}$.

Н а с л і д о к 4 [77]. *Вгнуті і слабо вгнуті функції узагальнено диференційовні, а їх супердградієнти і квазіградієнти відповідно можна брати в якості псевдоградієнтів цих функцій.*

Т е о р е м а 19.27. *Для узагальнено диференційовної функції* $f : R^n \to R^1$ *має місце узагальнена теорема Лагранжа про скінченний приріст*:

$$f(x) - f(x^{(0)}) = \langle g, x - x^{(0)} \rangle,$$

де $g \in G_f(x^{(0)} + \lambda(x - x^{(0)}))$, $\lambda \in (0;1)$.

Можна показати (див., наприклад, [71]), що для однієї і тієї ж узагальнено диференційовної функції існує ціле сімейство псевдоградієнтних відображень, які задовольняють означенню 19.7. Однак серед них є мінімальне щодо включення відображення, яке співпадає з субдиференціальним відображенням Кларка цієї функції. У зв'язку з цим формули (19.34), (19.27) обчислення псевдоградієнтів складних функцій задають лише деякі, не обов'язково мінімальні, псевдоградієнтні відображення. Саме тому в цих формулах має місце рівність, а не включення, на відміну від відповідних формул (19.32), (19.33) субдиференційовних за Кларком функцій. Але як, відмічається в [71], неоднозначність задання псевдоградієнтних відображень не заважає їх застосуванню як в теоретичних питаннях, так і при побудові чисельних методів пошуку екстремумів узагальнено диференційовних функцій.

Підсумовуючи сказане, зазначимо, що:

– неперервно диференційовні, опуклі і вгнуті, слабо опуклі і слабо вгнуті, напівгладкі функції є узагальнено диференційовними функціями, а їх градієнти, субградієнти, супердградієнти, квазіградієнти і узагальнені градієнти відповідно є і псевдоградієнтами;

– клас узагальнено диференційовних функцій замкнений відносно скінченних операцій взяття максимуму, мінімуму і суперпозиції;

– для складних узагальнено диференційовних функцій існує числення псевдоградієнтів.

Запитання для самоконтролю

1. Яка функція називається квазіопуклою (строго квазіопуклою)?
2. Яка функція називається опукло-вгнутою?
3. Яка точка називається сідловою точкою опукло-вгнутої функції?
4. Що таке супердиференціал?
5. Що таке супердградієнт?
6. Які класи квазідиференційовних функцій існують?
7. Що таке квазідиференціал?
8. Яка функція називається квазідиференційовної функцією в точці (на множині)?

9. Відносно яких операцій замкнений клас квазідиференційовних функцій?
10. Яка точка називається inf-стаціонарною (sup-стаціонарною) точкою квазідиференційовної функції?
11. Який вектор називається напрямом найшвидшого спуску (підйому) для класу квазідиференційовних функцій?
12. Які функції називаються локально ліпшицевими в точці?
13. Що таке верхня субпохідна (або похідна Кларка)?
14. Яка функція називається диференційовною за Кларком в точці?
15. Що називається субдиференціалом Кларка?
16. Що таке субградієнт Кларка?
17. Які функції називаються узагальнено диференційовними в точці (в області)?
18. Що називається псевдоградієнтом (узагальненим градієнтом) узагальнено диференційовної функції в точці?
19. Яка функція називається слабо опуклою?
20. Яка функція називається напівгладкою?
21. Яка функція називається узагальнено диференційовною у вузькому розумінні?
22. Які класи функцій входять до класу узагальнено диференційовних функцій?
23. Відносно яких операцій замкнений клас узагальнено диференційовних функцій?

Вправи для самостійного виконання

1. Показати, що

1) $f_1(x)=\begin{cases}0,\ x\in R\setminus R_+,\\ -x^n,\ x\in R_+,\ n\in N,\ n\geq 2\end{cases}$ – квазіопукла функція,

2) $f_2(x)=-x^n,\ x\in R_+,\ n\in N,\ n\geq 2$ – строго квазіопукла функція,

3) $f_3(x)=-(x_1+1)^2+1,\ x\in R_+^2$ – строго квазіопукла функція,

4) $f_4(x)=ax+b,\ x\in R^1,\ a<0,\ b\in R^1$ – строго квазіопукла функція.

2. Довести, що якщо функція $f(x)$ опукла на множині S, а функція $g(x)$ лінійна на S, то функція $h(x)=-\dfrac{f(x)}{g(x)}$ – квазіопукла на множині $\Omega=\{x\in S\mid g(x)>0\}$.

3. Для опукло-вгнутих функцій $f(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$, де $a\neq 0$, $b\neq 0$, і $f(x,y)=|x|-|y|$ знайти $\partial f_x(x,y)$, $\partial f_y(x,y)$ і в точці $(x^*,y^*)=(0;0)$ перевірити твердження теореми19.4.

4. Використовуючи формулу (19.7), довести, що якщо $Df(x^{(0)})$ є квазідиференціалом квазідиференційовної функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$, то пара множин

$$A(x^{(0)})=[\underline{\partial}f(x^{(0)})+B,\overline{\partial}f(x^{(0)})-B],$$

де $B\subset R^n$ – довільний опуклий компакт, також є квазідиференціалом функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$.

5. Для функції з наслідку теореми 19.5 визначити квазідиференціал $Df(x^{(0)})$.

6. Для функції (19.16) з наслідку теорем 19.6 і 19.7 визначити квазідиференціал $Df(x^{(0)})$.

7. Знайти квазідиференціали наступних функцій в точці $x^{(0)}=(0,0)$ ([31]):

1) $f(x_1,x_2)=|x_1|+|x_2|$;

2) $f(x_1,x_2)=|x_1|-|x_2|$;

3) $f(x_1,x_2)=|x_2|-|x_1|$;

4) $f(x_1,x_2)=\max\{|x_1|-|x_2|;|x_2|-|x_1|\}$;

5) $f(x_1,x_2)=\max\{|x_1|+|x_2|;|x_1|-|x_2|\}$;

6) $f(x_1,x_2)=\min\{|x_1|+|x_2|;|x_2|-|x_1|\}$;

7) $f(x_1,x_2)=|x_1+x_2|$;

8) $f(x_1,x_2)=||x_1|+x_2|$;

9) $f(x_1,x_2)=(1+x_1)(1+|x_1+x_2|)$;

10) $f(x_1,x_2)=1+|x_1|+x_2$;

11) $f(x_1,x_2)=(1+|x_1|+x_2)^2$;

12) $f(x_1,x_2)=1+|x_1|-|x_2|$;

13) $f(x_1,x_2)=(1+|x_1|+x_2)(1+|x_1|-|x_2|)$;

14) $f(x_1,x_2)=(1+|x_1|-|x_2|)^{-1}$, де $1+|x_1|-|x_2|\neq 0$;

15) $f(x_1,x_2)=(1+|x_1|+x_2)/(1+|x_1|-|x_2|)$, де $1+|x_1|-|x_2|\neq 0$.

Дати геометричну інтерпретацію одержаних результатів і за допомогою засобів комп'ютерної математики побудувати графіки заданих функцій.

8. Користуючись поданням (19.31) субдиференціала Кларка і теоремою 19.7, знайти $\partial_{Cl}f(x^{(0)})$ функції $f(x_1,x_2)=\max\{\min\{x_1;-x_2\},x_2-x_1\}$ в точці $x^{(0)}=(0,0)$.

9. Показати [71], що диференційовна в кожній точці функція $f(x)=x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

1) не є узагальнено диференційовною в точці $x^{(0)}=0$;
2) є локально ліпшицевою;
3) не є неперервно диференційовною в точці $x^{(0)}=0$.

10. Показати [71], що локально ліпшицева функція

$$f(x)=\max_k\left(\frac{1}{2\cdot 3^k}-\left|x-\frac{1}{3^k}\right|\right),\ \text{де}\ k=0,1,\dots,$$

не є узагальнено диференційовною в точці $x^{(0)}=0$, тобто операція взяття максимуму для зчисленної множини функцій виводить з класу узагальнено диференційовних функцій.

Розділ 3

НЕОБХІДНІ І ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ

Про важливу роль необхідних і достатніх умов оптимальності в теорії і методах розв'язування екстремальних задач вже відмічалось у попередніх розділах. Зокрема були наведені деякі результати для задач безумовної мінімізації (§§8, 9, 16) і класичної задачі на умовний екстремум (§10) та їх застосування для розв'язування цих класів задач. У цьому розділі розглядаються елементи теорії необхідних і достатніх умов екстремуму для задачі умовної оптимізації у загальній постановці, а також для деяких задач математичного програмування.

Перші результати в теорії умов оптимальності пов'язані з теоремою Ферма для мінімізації функцій в n-вимірному просторі і правилом Лагранжа для мінімізації функцій при наявності рівнянь зв'язку. Наступним етапом розвитку цієї теорії було створення загальної теорії лінійного і опуклого програмування. Центральне місце в ній належить теоремі Куна-Таккера [127], яка визначає необхідні умови екстремуму і є основою для цілого ряду методів розв'язування задач математичного програмування. Пізніше диференціальна форма теореми Куна-Таккера була застосована для задач неопуклого програмування, що дозволило сформулювати для цих задач відповідні умови екстремуму. Під час розробки необхідних умов екстремуму для задач лінійного і опуклого програмування було знайдено загальний принцип, який полягає в тому, що якщо у даній точці існує напрям, який не виводить із допустимої множини задачі, і цільова функція в цьому напрямі спадає, то така точка не може бути точкою мінімуму. На основі цього принципу були побудовані необхідні умови для широкого класу екстремальних задач.

§20. Необхідні умови мінімуму в задачах умовної оптимізації

Будемо розглядати задачу відшукання мінімуму неперервної функції $f(x)$ на множині $X \subset R^n$, де X є підмножиною області визначення заданої функції ($X \subset D(f)$):

$$f(x) \to \min,\ x \in X. \qquad (20.1)$$

Якщо допустима множина X – непорожній компакт, то задача (20.1) згідно теореми 7.5 (Вейєрштрасса) має розв'язок і в геометричному тлумаченні зводиться до відшукання такої точки (точок) множини X, через яку проходить гіперповерхня найнижчого рівня в порівнянні із

рівнями для інших точок $x \in X$, при цьому шукана точка може бути як внутрішньою точкою множини X (рис. 20.1), так і знаходитись на її межі (рис. 20.2).

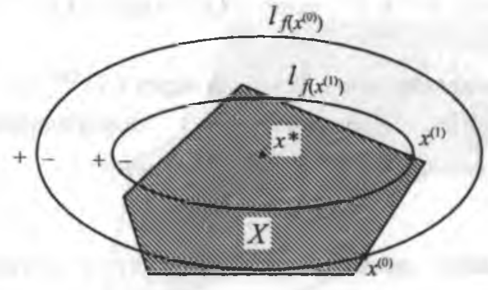


Рис. 20.1.

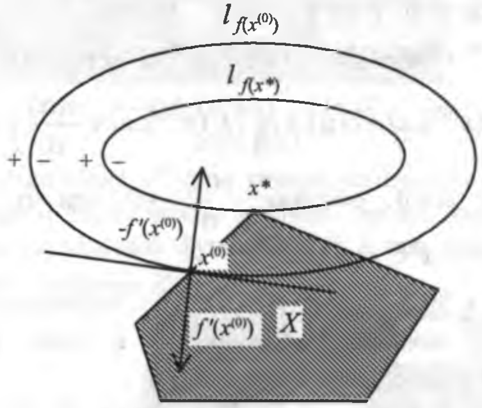


Рис. 20.2.

Нагадаємо, що *гіперповерхнею* (лінією або поверхнею) рівня функції $f(x)$, яка проходить через деяку точку $x^{(0)} \in R^n$, є множина

$$l_{f(x^{(0)})} = \{x \in R^n | f(x) = f(x^{(0)})\}.$$

Якщо функція $f(x)$ – диференційовна в точці $x^{(0)}$, то градієнт $f'(x^{(0)})$ функції в цій точці (за умови, що $f'(x^{(0)}) \neq O_n$) ортогональний до гіперплощини, дотичної до гіперповерхні рівня $l_{f(x^{(0)})}$ в точці $x^{(0)}$, і є напрямом найшвидшого зростання функції $f(x)$ в цій точці, при цьому антиградієнт $-f'(x^{(0)})$ є напрямом найшвидшого спадання (рис. 20.2).

1. Необхідні умови локального мінімуму в термінах можливих напрямів.

О з н а ч е н н я 20.1. Вектор $u \in R^n$ називається *напрямом спадання* функції $f(x)$ в точці $x^{(0)} \in R^n$, якщо $f(x^{(0)} + \alpha u) < f(x^{(0)})$ для будь-яких досить малих $\alpha > 0$.

Позначимо множину таких векторів через $U(x^{(0)}, f)$.

Л е м а 20.1. *Нехай функція $f(x)$ диференційовна в точці $x^{(0)} \in D(f)$. Якщо вектор $u \in R^n$ задовольняє мову*

$$\langle f'(x^{(0)}), u \rangle < 0, \qquad (20.2)$$

то він є напрямом спадання функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$, тобто $u \in U(x^{(0)}, f)$.

Д о в е д е н н я. Нехай виконується умова (20.2). Тоді з диференційовності функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$ маємо

$$f(x^{(0)} + \alpha u) - f(x^{(0)}) = \langle f'(x^{(0)}), \alpha u \rangle + o(\alpha) =$$

$$= \alpha \langle f'(x^{(0)}), u \rangle + o(\alpha) = \alpha \left(\langle f'(x^{(0)}), u \rangle + \frac{o(\alpha)}{\alpha} \right) < 0$$

при досить малих $\alpha > 0$, оскільки $\dfrac{o(\alpha)}{\alpha} \to 0$ при $\alpha \to 0$. Тому, за означенням 20.1, $u \in U(x^{(0)}, f)$.

О з н а ч е н н я 20.2. Вектор $v \in R^n$ *називається вектором можливого напряму* відносно множини X в точці $x^{(0)} \in X$, якщо $x^{(0)} + \alpha v \in X$ при будь-яких досить малих $\alpha > 0$.

Позначимо множину таких векторів через $V(x^{(0)}, X)$.

Т е о р е м а 20.1. *Якщо точка x^* є точкою локального мінімуму функції $f(x)$ на множині $X \subset D(f)$, то*

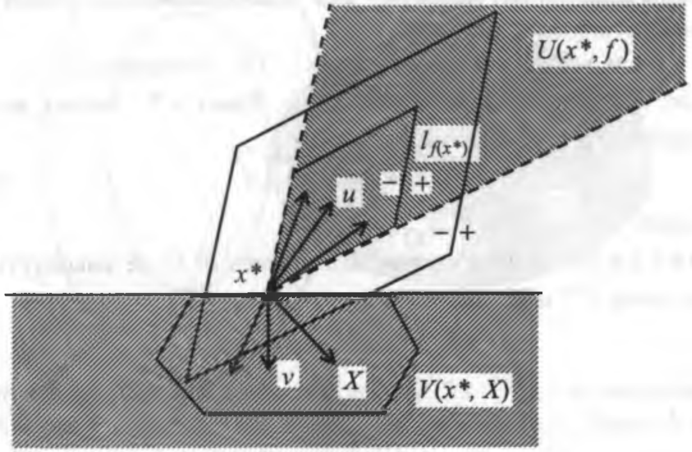
$$U(x^*, f) \cap V(x^*, X) = \varnothing. \qquad (20.3)$$

Д о в е д е н н я. Припустимо, що умова (20.3) не виконується, тобто існує такий вектор $u \in R^n$, що $f(x^* + \alpha u) < f(x^*)$ і $x^* + \alpha u \in X$ при будь-яких досить малих $\alpha > 0$.

Тоді в будь-якому як завгодно малому околі точки x^* існує точка $x^{(0)} \in X$ виду $x^{(0)} = x^* + \alpha_0 u \in X$, $\alpha_0 > 0$, така, що $f(x^{(0)}) < f(x^*)$, що суперечить означенню точки локального мінімуму функції $f(x)$ на множині X.

Ця теорема є необхідною умовою локального мінімуму задачі (20.1). Її зміст полягає в тому, що із точки $x^* \in X$, яка є точкою локального

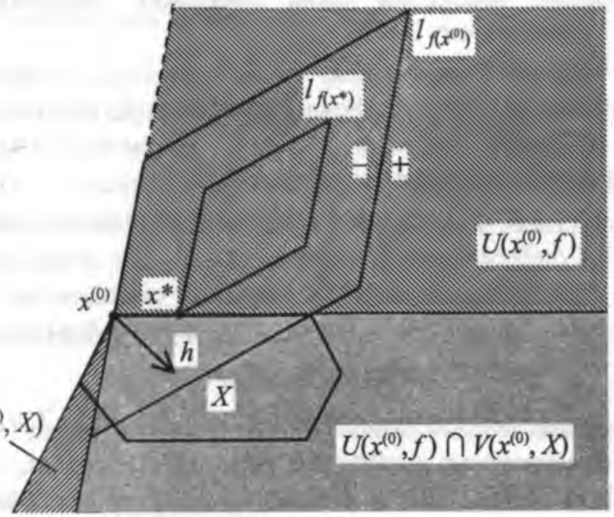
мінімуму задачі (20.1), не можна зробити навіть досить малий крок у напрямі якого-небудь вектора так, щоб зменшити значення цільової функції $f(x)$ і при цьому залишитися в межах допустимої множини X (рис. 20.3).



$U(x^*, f) \cap V(x^*, X) = \varnothing$

Рис. 20.3.

Навпаки, якщо точка $x^{(0)}$ не є точкою локального мінімуму, то існує вектор h, у напрямі якого можна зробити досить малий крок так, щоб зменшити значення цільової функції $f(x)$ і при цьому залишитися в межах допустимої множини X (рис. 20.4).



$h \in U(x^{(0)}, f) \cap V(x^{(0)}, X)$

Рис. 20.4.

Зауважимо, що в теоремі 20.1 ніяких умов на функцію $f(x)$ і множину X не накладалось, тобто вона може бути застосована до широкого кола задач умовної оптимізації.

2. Необхідні умови мінімуму для задачі диференційовної умовної оптимізації на опуклій множині.

Т е о р е м а 20.2. *Нехай функція $f(x)$ диференційовна в точці $x^* \in X$, де $X \subset D(f)$ – опукла множина. Якщо x^* – точка локального мінімуму функції $f(x)$ на множині X, то*

$$\langle f'(x^*), x - x^* \rangle \ge 0 \qquad (20.4)$$

при будь-яких $x \in X$.

Д о в е д е н н я. Припустимо, що умова (20.4) не виконується. Тоді існує така точка $x^{(0)} \in X$, що

$$\langle f'(x^*), x^{(0)} - x^* \rangle < 0 .$$

Покладемо $h = x^{(0)} - x^*$. Тоді згідно леми 20.1 напрям h є напрямом спадання функції $f(x)$ в точці x^*, тобто $h \in U(x^*, f)$. З іншого боку, в силу опуклості множини X для будь-якого $\lambda \in [0; 1]$ маємо

$$x^* + \lambda h = x^* + \lambda(x^{(0)} - x^*) = \lambda x^{(0)} + (1-\lambda)x^* \in X ,$$

тобто h є можливим напрямом відносно множини X в точці x^*: $h \in V(x^*, X)$. Таким чином, в точці $x^* \in X$ має місце співвідношення

$$U(x^*, f) \bigcap V(x^*, X) \ne \varnothing,$$

що суперечить необхідній умові локального мінімуму на множині $X \subset D(f)$ (див. теорему 20.1).

Ця теорема є необхідною умовою локального мінімуму в задачі умовної мінімізації диференційовної функції на опуклій множині.

Легко бачити, що коли $x^* \in \operatorname{int} X$, то умова (20.4) еквівалентна класичній необхідній умові екстремуму $f'(x^*) = O_n$.

Т е о р е м а 20.3. *Нехай функція $f(x)$ опукла на опуклій множині $X \subset D(f)$ і диференційовна в точці $x^* \in X$. Для того щоб у точці x^* функція $f(x)$ набувала свого найменшого значення на множині X, необхідно і достатньо, щоб при будь-яких $x \in X$ виконувалась умова*

$$\langle f'(x^*), x - x^* \rangle \ge 0 . \qquad (20.5)$$

Доведення теореми безпосередньо випливає з теорем 15.1, 14.4 і 20.2.

У геометричному тлумаченні умова (20.5) означає, що ненульовий градієнт функції $f(x)$ у точці локального мінімуму на опуклій множині X утворює нетупий кут з вектором, який напрямлений з точки x^* в будь-яку точку $x \in X$ (рис. 20.5).

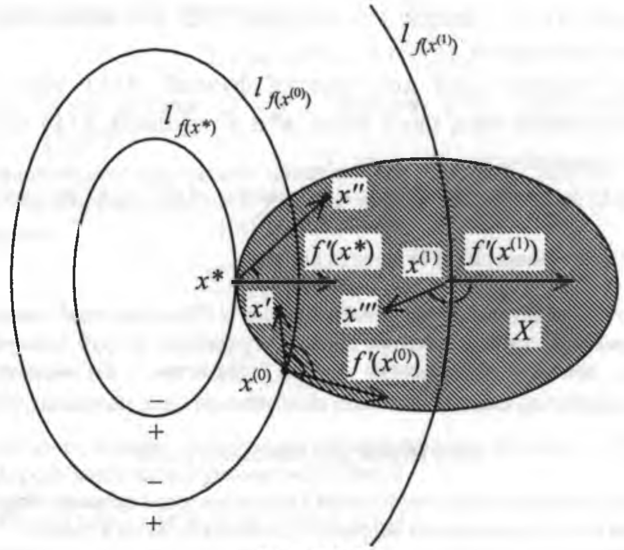


Рис. 20.5.

На рис. 20.5 у точках $x^{(0)} \in X$, $x^{(1)} \in X$, які не є точками локального мінімуму на множині X, умова (20.5) не виконується.

Т е о р е м а 20.4. *Нехай $X \subset D(f)$ – замкнена опукла множина, $f(x)$ – диференційовна функція на X. Для того щоб у точці $x^* \in X$ функція $f(x)$ набувала свого найменшого значення на множині X, необхідно, щоб виконувалась умова*

$$x^* = P_X(x^* - hf'(x^*)) \qquad (20.6)$$

при будь-яких $h > 0$, де $P_X(x^* - hf'(x^*))$ – проекція точки $x^* - hf'(x^*)$ на множину X.

Якщо $f(x)$ – опукла функція на X, то умова (20.6) є і достатньою умовою того, що у точці $x^* \in X$ функція $f(x)$ набуває свого найменшого значення на множині X.

Д о в е д е н н я. Згідно теореми 12.2, враховуючи (20.6), для точки $x^* - hf'(x^*)$ має місце нерівність

$$\langle x - x^*, (x^* - hf'(x^*)) - x^* \rangle \le 0$$

для будь-яких $x \in X$. З цієї нерівності одержуємо

$$-h\langle x - x^*, f'(x^*) \rangle \le 0,$$

оскільки $h > 0$, або

$$\langle x - x^*, f'(x^*) \rangle \ge 0 \qquad (20.7)$$

для будь-яких $x \in X$. Звідси і з теореми 20.2 випливає справедливість першої частини теореми.

Згідно теореми 20.3 для опуклої функції $f(x)$ умова (20.7) є і достатньою умовою того, що у точці $x^* \in X$ функція $f(x)$ набуває свого найменшого значення на множині X.

Примітка. Якщо розглянути відображення $A: R^n \to R^n$ за правилом

$$Ax = P_X(x - hf'(x)),$$

де $h = const \neq 0$, то умова (20.6) буде мати вигляд

$$x^* = Ax^*,$$

тобто точка x^* – *нерухома точка відображення* A. При побудові чисельних методів умовної оптимізації, зокрема метода проекції градієнта, будуть визначені умови на функцію $f(x)$, при яких відображення A буде стискаючим, і для визначення точки x^* можуть бути використані властивості такого відображення (див., наприклад, [30], [40], [59]).

Запитання для самоконтролю

1. Як розвивалась теорія необхідних і достатніх умов оптимальності?
2. Який вектор називається напрямом спадання функції в точці?
3. Який вектор називається вектором можливого напряму відносно множини в заданій точці?
4. Як формулюються необхідні умови локального мінімуму в термінах можливих напрямів?
5. Як формулюються необхідні умови мінімуму для задачі диференційовної умовної мінімізації?
6. Як формулюються необхідні умови мінімуму для задачі диференційовної умовної мінімізації в термінах проекції точки на множину?

Вправи для самостійного виконання

1. Довести, що коли $x^* \in \operatorname{int} X$, то умова (20.4) еквівалентна умові $f'(x^*) = O_n$.

2. Довести теорему 20.3.

3. Нехай множина X має вигляд

$$X = \{x \in R^n | a_i \le x_i \le b_i,\ i = \overline{1,n}\},$$

де $-\infty < a_i < b_i < +\infty$, $i = \overline{1,n}$, функція $f(x)$ диференційовна в точці $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in X$.

Довести, що якщо x^* – точка локального мінімуму функції $f(x)$ на множині X, то умова (20.4) еквівалентна умові: для кожного $i = \overline{1,n}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = 0, & \text{при } a_i < x_i^* < b_i, \\ \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} \ge 0, & \text{при } x_i^* = a_i, \\ \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} \le 0, & \text{при } x_i^* = b_i. \end{cases}$$

4. Нехай множина X має вигляд

$$X = \{x \in R^n | x_i \ge 0, i = \overline{1,k}\},$$

де $0 \le k \le n$ ($k = 0$ означає $X = R^n$), функція $f(x)$ диференційовна в точці $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in X$.

Використовуючи результати попереднього завдання, довести, що якщо x^* – точка локального мінімуму функції $f(x)$ на множині X, то умова (20.4) еквівалентна сукупності умов:

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} \ge 0,\ x_i^* \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = 0,\ i = \overline{1,k},$$

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = 0,\ i = \overline{k+1,n}.$$

5. Використовуючи геометричну інтерпретацію, теорему 20.2 та результати завдань 3 і 4, розв'язати задачі умовної мінімізації:

1) $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 \to \min,\ x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid 0 \le x_1 \le 2;\ x_2 \ge 1\}$;

2) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2 \to \min,\ x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid 3 \le x_1 \le 6;\ -1 \le x_2 \le 1\}$;

3) $f(x_1, x_2) = ax_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \to \min,\ x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid 2 \le x_1 \le 3;\ 3 \le x_2 \le 4\}$, $a \in R^1$;

4) $f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 \to \min,\ x \in X$,

а) $X = \{x \in R^2 \mid x_1 \ge 0\}$,

б) $X = \{x \in R^2 \mid x_2 \ge 0\}$,

в) $X = \{x \in R^2 \mid x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0\}$,

де $a \in R^1, b \in R^1, c \in R^1$ такі, що $a > 0$, $4ac - b^2 > 0$.

Для унаочнення скористатися програмними засобами типу Advanced Grapher, Derive, GRAN1, Mathcad чи іншими.

§21. Умови оптимальності в задачі умовної опуклої недиференційовної оптимізації

1. Нехай в задачі

$$f(x) \to \min, \ x \in X$$

$f(x)$ – опукла функція, визначена і скінченна на деякій відкритій опуклій множині $M \subset R^n$, а $X \subset M$ – опукла замкнена множина.

Візьмемо довільну точку $x^{(0)} \in X$ і розглянемо множину

$$K(x^{(0)}) = \{v \in R^n | v = \lambda(x - x^{(0)}), \lambda > 0, x \in X\}.$$

Множина $\Gamma(x^{(0)}) = \overline{K(x^{(0)})}$ називається *конусом можливих напрямів* множини X в точці $x^{(0)}$. Множина

$$\Gamma^*(x^{(0)}) = \{w \in R^n \,|\, \langle v, w\rangle \ge 0 \ \ \forall v \in \Gamma(x^{(0)})\}$$

є *спряженим конусом* до конуса $\Gamma(x^{(0)})$.

Як вже відмічалось (див. §11), $K(x^{(0)})$ є опуклим конусом, а $\Gamma(x^{(0)})$, $\Gamma^*(x^{(0)})$ – опуклі замкнені конуси.

Лема 21.1. *Якщо* $\Gamma(x^{(0)})$ *– конус можливих напрямів замкненої опуклої множини* X *в точці* $x^{(0)} \in X$, *то має місце подання*

$$\Gamma^*(x^{(0)}) = \{w \in R^n \,|\, \langle w, x - x^{(0)}\rangle \ge 0 \ \ \forall x \in X\}. \qquad (21.1)$$

Доведення. Згідно означення спряженого конуса множина $\Gamma^*(x^{(0)})$ складається з векторів w таких, що

$$\langle w, v\rangle \ge 0,$$

де $v \in \Gamma(x^{(0)})$.

Оскільки $v = \lambda(x - x^{(0)}), \lambda > 0$, то остання нерівність еквівалентна нерівності

$$\langle w, \lambda(x - x^{(0)})\rangle = \lambda\langle w, x - x^{(0)}\rangle \ge 0 \ \ \forall x \in X$$

або

$$\langle w, x - x^{(0)}\rangle \ge 0 \ \ \forall x \in X.$$

Що й треба було довести.

В геометричному тлумаченні подання (21.1) конуса $\Gamma^*(x^{(0)})$ означає, що він складається з променів, які утворюють нетупий кут з будь-яким вектором виду $x - x^{(0)}$, де $x \in X$, (рис. 21.1).

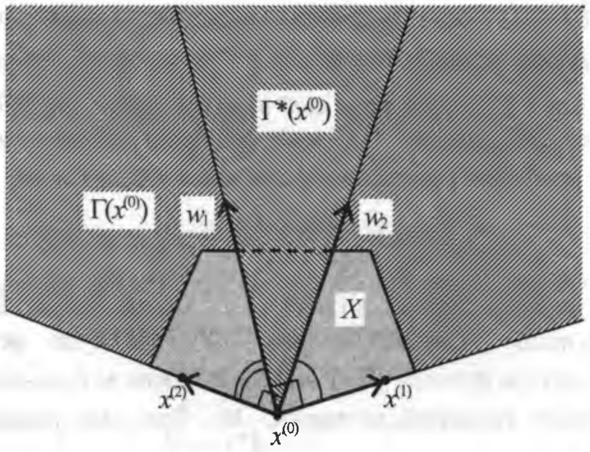


Рис. 21.1.

Щоб надалі розрізняти субдиференціал (ε-субдиференціал) опуклої функції $f(x)$ на опуклій множині $X \subset R^n$ і субдиференціал (ε-субдиференціал) на R^n, введемо такі позначення:

$\partial^X f(x^{(0)})$ – *субдиференціал* функції $f(x)$ на множині $X \subset R^n$ в точці $x^{(0)} \in X$:

$$\partial^X f(x^{(0)}) = \{g \in R^n | f(x) - f(x^{(0)}) \ge \langle g, x - x^{(0)}\rangle \ \forall x \in X\};$$

$\partial^X_\varepsilon f(x^{(0)})$ – ε-*субдиференціал* функції $f(x)$ на множині $X \subset R^n$ в точці $x^{(0)} \in X$ ($\varepsilon \ge 0$):

$$\partial^X_\varepsilon f(x^{(0)}) = \{g \in R^n | f(x) - f(x^{(0)}) \ge \langle g, x - x^{(0)}\rangle - \varepsilon \ \ \forall x \in X\};$$

$\partial f(x^{(0)})$ – *субдиференціал* функції $f(x)$ на R^n в точці $x^{(0)}$:

$$\partial f(x^{(0)}) = \{g \in R^n | f(x) - f(x^{(0)}) \ge \langle g, x - x^{(0)}\rangle \ \forall x \in R^n\};$$

$\partial_\varepsilon f(x^{(0)})$ – ε-*субдиференціал* функції $f(x)$ на R^n в точці $x^{(0)}$:

$$\partial_\varepsilon f(x^{(0)}) = \{g \in R^n | f(x) - f(x^{(0)}) \ge \langle g, x - x^{(0)}\rangle - \varepsilon \ \ \forall x \in R^n\}.$$

Множини $\partial^X f(x^{(0)})$ і $\partial^X_\varepsilon f(x^{(0)})$ також називають відповідно *умовним субдиференціалом* і *умовним* ε-*субдиференціалом* функції $f(x)$ на множині $X \subset R^n$ в точці $x^{(0)} \in X$ (див., наприклад, [31], [95]). Вектор $g \in \partial^X f(x^{(0)})$ називають *умовним субградієнтом*, а вектор $g \in \partial^X_\varepsilon f(x^{(0)})$ – *умовним* ε-*субградієнтом* функції $f(x)$ на множині $X \subset R^n$ в точці $x^{(0)} \in X$.

Нехай $f(x)$ – опукла функція, визначена і скінченна на деякій відкритій опуклій множині $M \subset R^n$.

Т е о р е м а 21.1. *Для того щоб в точці $x^* \in X$, де $X \subset M$ – опукла замкнена множина, функція $f(x)$ набувала свого найменшого значення на множині X, необхідно і достатньо, щоб виконувалась мова*

$$\min_{v \in \Gamma(x^*), \|v\|=1} \frac{\partial f(x^*)}{\partial v} \geq 0. \tag{21.2}$$

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай точка $x^* \in X$ – точка мінімуму функції $f(x)$ на множині X. Як було встановлено в теоремі 14.3, опукла функція $f(x)$ диференційовна за будь-яким напрямом в кожній точці відкритої множини M. Тоді для кожного вектора $v \in \Gamma(x^*)$, $\|v\|=1$ існує похідна за напрямом в точці $x^* \in X$ $\frac{\partial f(x^*)}{\partial v}$ і при цьому має місце співвідношення (див. (14.17) §14)

$$f(x^* + \alpha v) = f(x^*) + \alpha \frac{\partial f(x^*)}{\partial v} + o(\alpha), \tag{21.3}$$

де $\frac{o(\alpha)}{\alpha} \to 0$ при $\alpha \to +0$.

Припустимо, що умова (21.2) не виконується. Тоді, оскільки $\Gamma(x^*) = \overline{K(x^*)}$, існує вектор

$$v^{(0)} \in K(x^*) = \{v \in R^n \mid v = \lambda(x - x^*), \lambda > 0, x \in X\}, \ \|v^{(0)}\|=1$$

такий, що

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial v^{(0)}} = -t < 0, \text{ де } t > 0.$$

Звідси, з врахуванням (21.3), маємо

$$f(x^* + \alpha v^{(0)}) = f(x^*) - \alpha t + o(\alpha). \tag{21.4}$$

При досить малих $\alpha > 0$ $x^* + \alpha v^{(0)} \in X$. Тоді з (21.4) випливає існування такого $\alpha_0 > 0$, що

$$f(x^* + \alpha v^{(0)}) < f(x^*)$$

при будь-якому $\alpha \in (0; \alpha_0]$. Але це суперечить тому, що $x^* \in X$ – точка мінімуму функції $f(x)$ на множині X. Одержана суперечність доводить необхідність умови (21.2).

Д о с т а т н і с т ь. Нехай виконується умова (21.2). В точці $x^* \in X$ для будь-якого фіксованого $v \in R^n$, $\|v\|=1$ (див. (16.9) §16) має місце співвідношення

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial v} = \max_{g \in \partial f(x^*)} \langle g, v \rangle, \tag{21.5}$$

де $\partial f(x^*)$ – субдиференціал функції $f(x)$ в точці $x^* \in X$.

З означення $\partial f(x^*)$ для будь-яких $x \in X$ таких, що $x \neq x^*$, маємо

$$f(x) \geq f(x^*) + \max_{g \in \partial f(x^*)} \langle g, x - x^* \rangle. \tag{21.6}$$

Покладемо $v(x) = \frac{x - x^*}{\|x - x^*\|}$. Тоді з нерівності (21.6), враховуючи співвідношення (21.5), випливає, що

$$f(x) \geq f(x^*) + \frac{\partial f(x^*)}{\partial v(x)} \|x - x^*\|.$$

Звідси та з (21.2) маємо

$$f(x) \geq f(x^*) + \|x - x^*\| \min_{v \in \Gamma(x^*), \|v\|=1} \frac{\partial f(x^*)}{\partial v} \geq f(x^*) \ \forall x \in X,$$

тобто $x^* \in X$ – точка мінімуму функції $f(x)$ на множині X.

З а у в а ж е н н я. Зазначимо, що в співвідношенні (21.2) мінімум $\frac{\partial f(x^*)}{\partial v}$ при $v \in \Gamma(x^*)$, $\|v\|=1$, досягається. Дійсно, враховуючи співвідношення (21.5), функція

$$F(v) = \frac{\partial f(x^*)}{\partial v} = \max_{g \in \partial f(x^*)} \langle g, v \rangle$$

є опуклою за v на опуклій компактній множині $V = \{v \in R^n \mid v \in \Gamma(x^*), \|v\|=1\}$ (див. лему 14.5 §14), скінченною і неперервною за v, а отже досягає на V свого мінімуму.

Т е о р е м а 21.2. *Для того щоб опукла функція $f(x)$ в точці $x^* \in X$, де $X \subset M$ – опукла замкнена множина, набувала свого найменшого значення на множині X, необхідно і достатньо, щоб існував субградієнт $g^{(0)} \in \partial f(x^*)$ такий, що*

$$\langle g^{(0)}, x - x^* \rangle \geq 0 \tag{21.7}$$

для будь-яких $x \in X$.

Доведення. Необхідність. Нехай $x^* \in X$ – точка мінімуму опуклої функції $f(x)$ на опуклій замкненій множині X. Тоді згідно теореми 21.1 має місце співвідношення (21.2) і для будь-якого вектора $v \in \Gamma(x^*), \|v\|=1$, виконується нерівність

$$\max_{g \in \partial f(x^*)} \langle g, v \rangle \geq 0.$$

Покладемо

$$v = \frac{\lambda(x - x^*)}{\|x - x^*\|} \in \Gamma(x^*),\ \lambda > 0,\ \text{де}\ x \in X \setminus \{x^*\}.$$

Тоді

$$\max_{g \in \partial f(x^*)} \left\langle g, \frac{\lambda(x - x^*)}{\|x - x^*\|} \right\rangle = \frac{\lambda}{\|x - x^*\|} \langle g^{(0)}, x - x^* \rangle \geq 0 \quad (21.8)$$

для будь-яких $x \in X \setminus \{x^*\}$.

З (21.8) одержуємо $\langle g^{(0)}, x - x^* \rangle \geq 0\ \forall x \in X$.

Достатність. Нехай є вектор $g^{(0)} \in \partial f(x^*)$, для якого виконується умова (21.7). Тоді за означенням субградієнта функції $f(x)$ в точці $x^* \in X$ і з врахуванням (21.7), маємо

$$f(x) - f(x^*) \geq \langle g^{(0)}, x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X$$

або

$$f(x) - f(x^*) \geq 0 \quad \forall x \in X,$$

тобто x^* – точка мінімуму функції $f(x)$ на множині X. Що й треба було довести.

Наслідок. *Якщо опукла функція $f(x)$ диференційовна в точці $x^* \in X$, де $X \subset M$ – опукла замкнена множина, то для того, щоб в точці x^* функція $f(x)$ набувала свого найменшого значення на множині X, необхідно і достатньо, щоб*

$$\langle f'(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X$$

(див. теорему 20.2).

На рис. 21.2 подано геометричну інтерпретацію теореми 21.2, де в точці $x^* \in X$ опукла функція $f(x)$ набуває свого найменшого значення на множині X, при цьому існує вектор $g^{(0)} \in \partial f(x^*)$ такий, що $\langle g^{(0)}, x - x^* \rangle \geq 0$ для будь-яких $x \in X$. В точці x', яка не є точкою мінімуму функції $f(x)$ на X, такого вектора не існує, при цьому $\partial f(x') = \{g\}$.

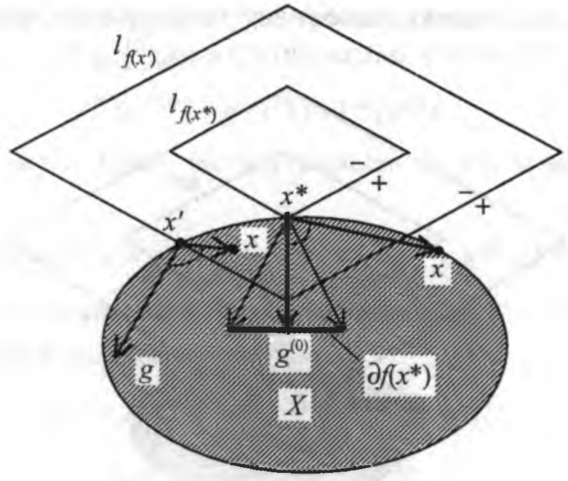


Рис. 21.2.

Теорема 21.3. *Для того щоб опукла функція $f(x)$ в точці $x^* \in X$, де $X \subset M$ – опукла замкнена множина, набувала свого найменшого значення на множині X, необхідно і достатньо, щоб*

$$\partial f(x^*) \cap \Gamma^*(x^*) \neq \varnothing. \quad (21.9)$$

Доведення. Необхідність. Нехай $x^* \in X$ – точка мінімуму опуклої функції $f(x)$ на опуклій замкненій множині $X \subset D(f)$. Згідно теореми 21.2 існує субградієнт $g^{(0)} \in \partial f(x^*)$ такий, що має місце нерівність (21.7). Тоді в силу леми 21.1 $g^{(0)} \in \Gamma^*(x^*)$, тобто має місце співвідношення (21.9).

Достатність. Нехай виконується (21.9). З урахуванням леми 21.1 це значить, що знайдеться хоча б один субградієнт $g^{(0)} \in \partial f(x^*)$, який задовольняє умову (21.7). Тоді

$$f(x) - f(x^*) \geq \langle g^{(0)}, x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X,$$

тобто x^* – точка мінімуму функції $f(x)$ на множині X.

Наслідок. *Якщо $X = R^n$, то тоді умова* (21.9) *еквівалентна умові*

$$O_n \in \partial f(x^*)$$

(див. теорему 16.7).

Дійсно, при $X = R^n$ конус $\Gamma^*(x^*) = \{O_n\}$ і тоді з (21.9) маємо $\partial f(x^*) \cap \{O_n\} \neq \varnothing$, тобто $O_n \in \partial f(x^*)$, що й треба було довести.

На рис. 21.3 подано геометричну інтерпретацію теореми 21.3, де $g^{(1)} \in \partial f(x^*)$, $g^{(2)} \in \partial f(x^*)$ такі, що $\partial f(x^*) = co\{g^{(1)}, g^{(2)}\}$.

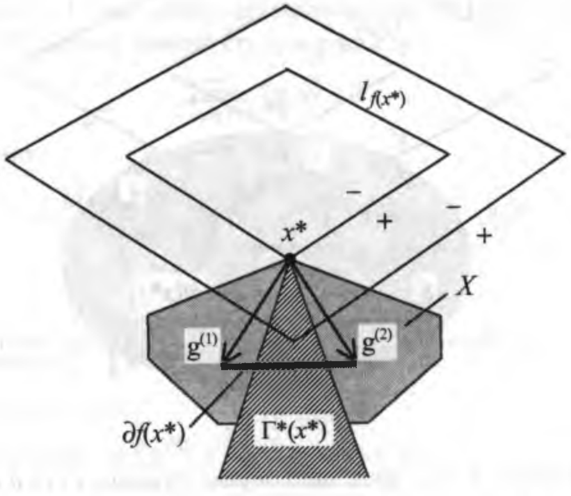


Рис. 21.3.

На рис. 21.4 в точці $x^{(0)} \in X$, яка не є точкою мінімуму функції $f(x)$ на множині X, умова (21.9) не виконується, при цьому $\partial f(x^{(0)}) = \{f'(x^{(0)})\}$.

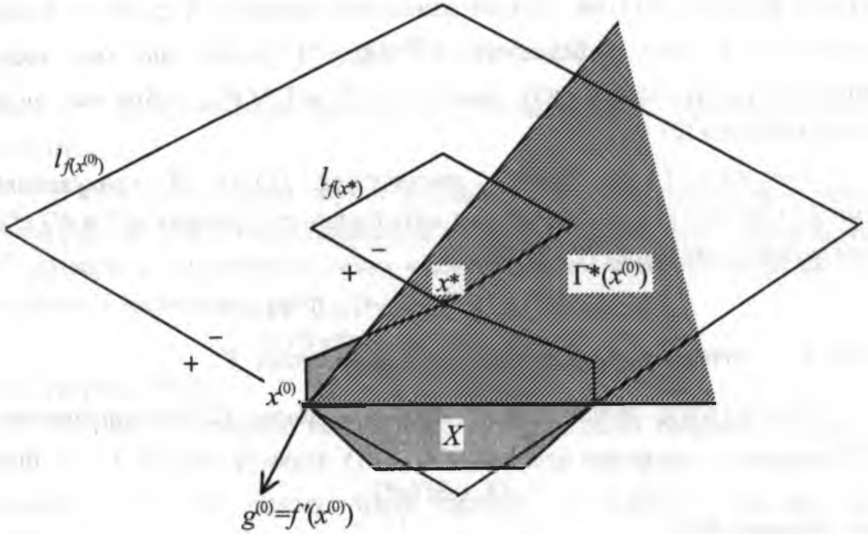


Рис. 21.4.

Л е м а 21.2. *Якщо функція $f(x)$ визначена і опукла на R^n, $X \subset R^n$ – опукла множина і $x^{(0)} \in X$, то*

$$\partial^X f(x^{(0)}) = \partial f(x^{(0)}) - \Gamma^*(x^{(0)}). \qquad (21.10)$$

Д о в е д е н н я. Праву частину рівності (21.10) позначимо через $D(x^{(0)})$, тобто

$$D(x^{(0)}) = \{g \in R^n \mid g = g^{(1)} - g^{(2)},\ g^{(1)} \in \partial f(x^{(0)}),\ g^{(2)} \in \Gamma^*(x^{(0)})\}$$

З урахуванням означення субдиференціалу $\partial f(x^{(0)})$ і подання (21.1) для $\Gamma^*(x^{(0)})$ мають місце нерівності

$$f(x) - f(x^{(0)}) \ge \langle g^{(1)}, x - x^{(0)} \rangle \ \ \forall x \in R^n,$$

$$\langle g^{(2)}, x - x^{(0)} \rangle \ge 0 \ \ \forall x \in X.$$

Додавши ці нерівності, одержуємо

$$f(x) - f(x^{(0)}) + \langle g^{(2)}, x - x^{(0)} \rangle \ge \langle g^{(1)}, x - x^{(0)} \rangle \ \ \forall x \in X$$

або

$$f(x) - f(x^{(0)}) \ge \langle g^{(1)} - g^{(2)}, x - x^{(0)} \rangle \ \ \forall x \in X.$$

Отже будь-який вектор $g = g^{(1)} - g^{(2)} \in \partial f^X(x^{(0)})$, тобто

$$D(x^{(0)}) \subset \partial^X f(x^{(0)}). \qquad (21.11)$$

Тепер візьмемо довільний вектор $g \in \partial f^X(x^{(0)})$. Тоді

$$f(x) - f(x^{(0)}) \ge \langle g, x - x^{(0)} \rangle \ \ \forall x \in X$$

або

$$f(x) - f(x^{(0)}) + \langle -g, x - x^{(0)} \rangle \ge 0 \ \ \forall x \in X. \qquad (21.12)$$

Покладемо

$$h(x) = f(x) + l(x),$$

де

$$l(x) = \langle -g, x - x^{(0)} \rangle - f(x^{(0)}).$$

Функція $h(x)$ опукла на X, як сума опуклої функції $f(x)$ і лінійної функції $l(x)$. З (21.12) випливає, що $h(x) \ge 0 \ \forall x \in X$, при цьому $h(x^{(0)}) = 0$, тобто точка $x^{(0)} \in X$ є точкою мінімуму функції $h(x)$ на множині X. Тоді згідно теореми 21.3

$$\partial h(x^{(0)}) \cap \Gamma^*(x^{(0)}) \ne \varnothing. \qquad (21.13)$$

Знайдемо $\partial h(x^{(0)})$. Використовуючи властивості субдиференціалу (див. теорему 17.2), маємо

$$\partial h(x^{(0)}) = \partial f(x^{(0)}) + \partial l(x^{(0)}) = \partial f(x^{(0)}) + l'(x^{(0)}) =$$

$$= \partial f(x^{(0)}) - \{g\}. \qquad (21.14)$$

З (21.13) і (21.14) слідує, що існують вектори $g^{(0)} \in \partial f(x^{(0)})$ і $w^{(0)} \in \Gamma^*(x^{(0)})$ такі, що $g^{(0)} - g = w^{(0)}$, тобто вектор $g = g^{(0)} - w^{(0)} \in D(x^{(0)})$. Звідси

$$\partial^X f(x^{(0)}) \subset D(x^{(0)}). \qquad (21.15)$$

Враховуючи (21.11) і (21.15), одержуємо (21.10).

Н а с л і д о к. *Якщо* $x^{(0)} \in \operatorname{int} X$, *а функція* $f(x)$ *опукла на* R^n, *то*

$$\partial^X f(x^{(0)}) = \partial f(x^{(0)}). \qquad (21.16)$$

Дійсно, оскільки для $x^{(0)} \in \operatorname{int} X$ $\Gamma(x^{(0)}) = R^n$ і $\Gamma^*(x^{(0)}) = \{O_n\}$, тоді з (21.10) слідує (21.16).

Отже, умовний субдиференціал функції $f(x)$ у внутрішніх точках множини X співпадає з субдиференціалом функції $f(x)$.

Т е о р е м а 21.4. *Для того щоб опукла функція* $f(x)$ *в точці* $x^* \in X$ *набувала свого найменшого значення на опуклій замкненій множині* $X \subset R^n$, *необхідно і достатньо, щоб*

$$O_n \in \partial^X f(x^*). \qquad (21.17)$$

Доведення цієї теореми можна провести аналогічно до доведення теореми 16.7. При цьому теорема 16.7 є наслідком теореми 21.4, оскільки, якщо $X = R^n$, то має місце рівність (21.16) і тоді

$$O_n \in \partial f(x^*).$$

Використовуючи подання 21.10, дамо геометричну інтерпретацію множини $\partial^X f(x^*)$ для функції $f(x)$ і множини X, що зображені на рис. 21.3, і перевіримо справедливість включення (21.17).

Для спрощення побудов будемо вважати, що $x^* = O_2$. Спочатку побудуємо множину $-\Gamma^*(x^*)$ (рис. 21.5), а потім, за означенням суми двох множин, побудуємо множину

$$\partial^X f(x^*) = \partial f(x^*) + (-\Gamma^*(x^*)).$$

З рис. 21.5 видно, що має місце включення $O_2 \in \partial^X f(x^*)$.

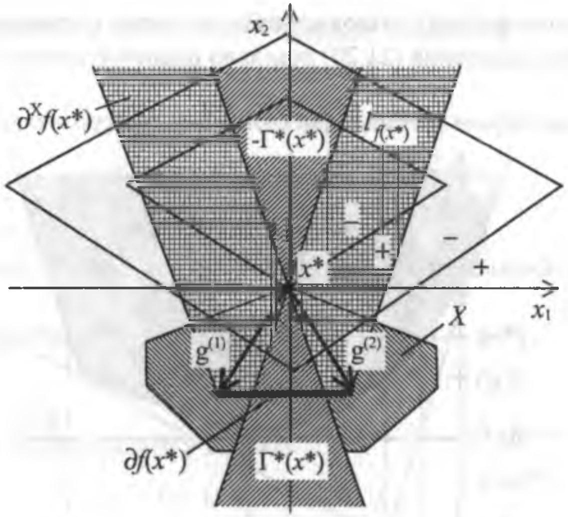


Рис. 21.5.

О з н а ч е н н я 21.1. Нехай $\varepsilon \geq 0$. Точка $x_\varepsilon \in X$ називається ε-*стаціонарною* точкою функції $f(x)$ на опуклій множині X, якщо

$$O_n \in \partial_\varepsilon^X f(x_\varepsilon). \qquad (21.18)$$

Л е м а 21.3. *Співвідношення* (21.18) *еквівалентне нерівності*

$$0 \leq f(x_\varepsilon) - f^* \leq \varepsilon \text{ або } f^* \geq f(x_\varepsilon) - \varepsilon, \qquad (21.19)$$

де $f^* = \inf_{x \in X} f(x)$.

Д о в е д е н н я. З означення ε-стаціонарної точки маємо, що включення (21.18) еквівалентне співвідношенню

$$f(x) - f(x_\varepsilon) \geq \langle O_n, x - x_\varepsilon \rangle - \varepsilon \; \forall x \in X$$

або

$$f(x) - f(x_\varepsilon) \geq -\varepsilon \quad \forall x \in X.$$

Звідси

$$f(x) - f(x_\varepsilon) \geq f^* - f(x_\varepsilon) \geq -\varepsilon \quad \forall x \in X, \text{ або } \; f^* \geq f(x_\varepsilon) - \varepsilon,$$

тобто має місце (21.19).

Зауважимо, що коли $X = R^n$, то точка $x_\varepsilon \in R^n$ називається ε-*стаціонарною* точкою функції $f(x)$ на R^n, якщо

$$O_n \in \partial_\varepsilon f(x_\varepsilon),$$

або, що те саме,

$$0 \leq f(x_\varepsilon) - f^* \leq \varepsilon, \text{ тобто } f^* \geq f(x_\varepsilon) - \varepsilon \qquad (21.20)$$

де $f^* = \inf_{x \in R^n} f(x)$.

16 — 5-481

Для геометричної інтерпретації поняття ε-стаціонарної точки (рис. 21.6) співвідношення (21.20) доцільно подати у такому вигляді

$$f(x_\varepsilon) \le f^* + \varepsilon .$$

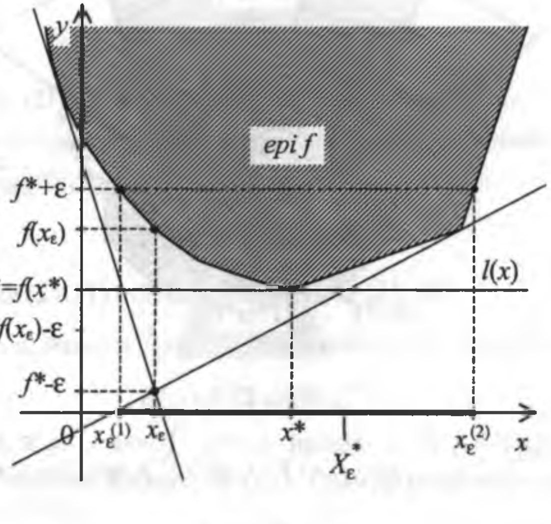


Рис. 21.6.

На рис. 21.6 x^* – точка мінімуму функції $f(x)$ на R^1, при цьому $f^* = f(x^*)$, множина

$$X_\varepsilon^* = \{x_\varepsilon \in R^1 \mid f^* \ge f(x_\varepsilon) - \varepsilon,\ \varepsilon \ge 0\} =$$

$$= \{x_\varepsilon \in R^1 \mid f(x_\varepsilon) \le f^* + \varepsilon,\ \varepsilon \ge 0\}$$

є множиною ε-стаціонарних точок функції $f(x)$ на R^1 при фіксованому $\varepsilon \ge 0$, причому для кожного $x_\varepsilon \in X_\varepsilon^*$ виконується умова $0 \in \partial_\varepsilon f(x_\varepsilon)$. Дійсно, оскільки $0 \in \partial f(x^*)$, то субградієнт $g = 0$ функції $f(x)$ в точці x^* є ε-субградієнтом функції $f(x)$ в точці x_ε ($g \in \partial_\varepsilon f(x_\varepsilon)$), бо лінійна функція

$$l(x) = \langle 0, x - x^* \rangle + f(x^*) ,$$

яка визначає опорну пряму (гіперплощину) до множини $epi\, f$ в точці x^*, набуває в точці x_ε значення не меншого ніж $f(x_\varepsilon) - \varepsilon$, тобто

$$l(x_\varepsilon) = \langle 0, x_\varepsilon - x^* \rangle + f(x^*) \ge f(x_\varepsilon) - \varepsilon$$

(див. §18).

2. На практиці в задачі умовної опуклої мінімізації

$$f(x) \to \min,\ x \in X \qquad (21.21)$$

множину X часто задають системою нерівностей, наприклад,

$$X = \{x \in R^n \mid h_i(x) \le 0,\ i = \overline{1,m}\} , \qquad (21.22)$$

де $h_i(x)$ – опуклі на R^n функції при всіх $i = \overline{1,m}$.

Множина X, яка визначена таким чином, очевидно є опуклою множиною.

Якщо покласти

$$h(x) = \max_{i=\overline{1,m}} h_i(x) ,$$

то множину X можна подати у вигляді

$$X = \{x \in R^n | h(x) \le 0\} , \qquad (21.23)$$

при цьому в силу властивостей опуклих функцій (див. наслідок леми 14.5) функція $h(x)$ опукла на R^n (рис. 21.7).

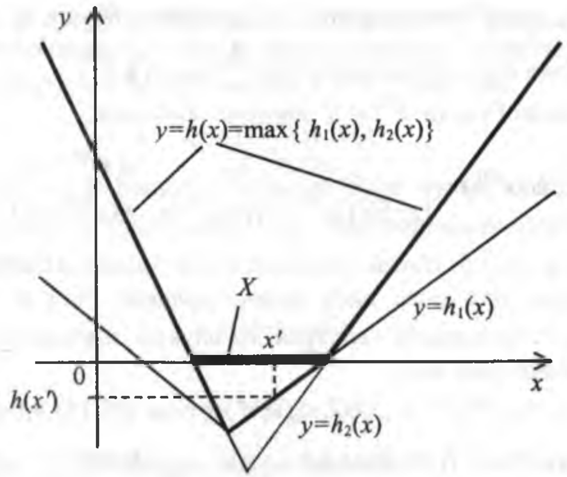


Рис. 21.7.

Нехай в задачі (21.21) множина X задана у вигляді (21.23), де $h(x)$ – опукла скінченна на R^n функція.

Означення 21.2. Множина X в задачі (21.21), (21.23) *задовольняє умову регулярності Слейтера*, якщо існує точка $\bar{x} \in R^n$ така, що

$$h(\bar{x}) < 0 . \qquad (21.24)$$

Розглянемо субдиференціал функції $h(x)$ на R^n в точці $x^{(0)} \in R^n$:

$$\partial h(x^{(0)}) = \{v \in R^n | h(x) - h(x^{(0)}) \geq \langle v, x - x^{(0)} \rangle \ \forall x \in R^n\}.$$

Л е м а 21.4. *Якщо множина X задовольняє умову Слейтера і в точці $x^{(0)} \in R^n$ $h(x^{(0)}) = 0$, то*

$$O_n \notin \partial h(x^{(0)}).$$

Д о в е д е н н я. Дійсно, якщо виконується умова регулярності Слейтера, то існує така точка $\bar{x} \in R^n$, що $h(\bar{x}) < 0$, і тоді точка $x^{(0)}$ не є точкою мінімуму функції $h(x)$ на R^n, бо $h(x^{(0)}) = 0 > h(\bar{x})$. Тому згідно теореми 16.7 $O_n \notin \partial h(x^{(0)})$.

Можна показати (див., наприклад, [31], стор. 135-136), що для будь-якого $x^{(0)} \in X$, де X – опукла множина виду (21.23), має місце подання

$$\Gamma^*(x^{(0)}) = \begin{cases} \{O_n\}, & h(x^{(0)}) < 0, \\ -cone(\partial h(x^{(0)})), & h(x^{(0)}) = 0, \end{cases} \qquad (21.25)$$

де

$$cone(\partial h(x^{(0)})) = \{w \in R^n | w = \lambda v, \ v \in \partial h(x^{(0)}), \lambda \geq 0\} - \qquad (21.26)$$

конічна оболонка опуклої множини $\partial h(x^{(0)})$ (див § 11).

Для довільної точки $x^{(0)} \in X$ введемо множину

$$G(x^{(0)}) = \begin{cases} \partial f(x^{(0)}), & h(x^{(0)}) < 0, \\ co\{\partial f(x^{(0)}) \cup \partial h(x^{(0)})\}, & h(x^{(0)}) = 0. \end{cases} \qquad (21.27)$$

Т е о р е м а 21.5. *Нехай множина X має вигляд* (21.23) *і задовольняє умову Слейтера. Для того щоб опукла функція $f(x)$ в точці $x^* \in X$ набувала свого найменшого значення на опуклій замкненій множині X, необхідно і достатньо, щоб*

$$O_n \in G(x^*). \qquad (21.28)$$

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай $x^* \in X$ – точка мінімуму функції $f(x)$ на множині $X \subset R^n$. Тоді згідно теореми 21.3

$$\partial f(x^*) \cap \Gamma^*(x^*) \neq \varnothing. \qquad (21.29)$$

Звідси випливає, що існують такі вектори $g \in \partial f(x^*)$ і $w \in \Gamma^*(x^*)$, що

$$g = w \quad \text{або} \quad g - w = O_n. \qquad (21.30)$$

Якщо $h(x^*) < 0$, то з урахуванням (21.25) $\Gamma^*(x^*) = \{O_n\}$, $w = O_n$ і тоді з (21.30) випливає, що $g = O_n$, тобто

$$O_n \in \partial f(x^*) = G(x^*).$$

Нехай $h(x^*) = 0$. Оскільки множина X задовольняє умову Слейтера, то з (21.25) маємо, що

$$\Gamma^*(x^*) = -cone(\partial h(x^*)).$$

Тому знайдуться число $\lambda \geq 0$ і субградієнт $v \in \partial h(x^*)$ такі, що $w = -\lambda v \in \Gamma^*(x^*)$. Звідси і з (21.30) одержуємо $g + \lambda v = O_n$.

Помножимо цю рівність на $\frac{1}{1+\lambda} > 0$, тоді $\frac{1}{1+\lambda} g + \frac{\lambda}{1+\lambda} v = O_n$.

Оскільки $\frac{1}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda} = 1$, $\frac{1}{1+\lambda} > 0$, $\frac{\lambda}{1+\lambda} \geq 0$, то

$$O_n = \frac{1}{1+\lambda} g + \frac{\lambda}{1+\lambda} v \in co\{\partial f(x^*) \cup \partial h(x^*)\},$$

тобто має місце (21.28).

Д о с т а т н і с т ь. Нехай виконується умова (21.28). Якщо $h(x^*) < 0$, то $G(x^*) = \partial f(x^*)$ і $O_n \in \partial f(x^*)$, тобто x^* – точка мінімуму функції $f(x)$ на множині X і згідно теореми 21.3 виконується умова (21.29). Нехай $h(x^*) = 0$. Включення (21.28) в цьому випадку означає, що існують вектори $g \in \partial f(x^*)$, $v \in \partial h(x^*)$ і число $\lambda \in [0; 1]$ такі, що

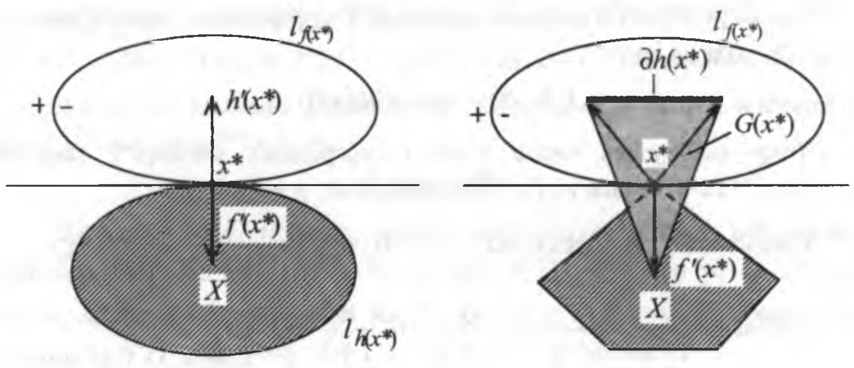
$$\lambda g + (1 - \lambda) v = O_n. \qquad (21.31)$$

Число λ в цій рівності не може бути нулем, оскільки в умовах теореми $O_n \notin \partial h(x^{(0)})$ (див. лему 21.4). Тоді, поділивши рівність (21.31) на $\lambda \neq 0$, одержуємо

$$g = -\frac{1-\lambda}{\lambda} v.$$

Але в силу (21.25) вектор $w = g = -\alpha v \in \Gamma^*(x^*)$, де $\alpha = -\frac{1-\lambda}{\lambda} > 0$, і тоді має місце (21.29). Звідси, згідно теореми 21.3, x^* – точка мінімуму функції $f(x)$ на множині X.

Геометричну інтерпретацію умови (21.28) при $h(x^*) = 0$ подано на рис. 21.8 і 21.9 На рис. 21.8 а) $O_2 \in G(x^*)$, де функції $f(x)$ та $h(x)$ диференційовні в точці x^*, $G(x^*) = co\{f'(x^*); h'(x^*)\}$; на рис. 21.8 б) $O_2 \in G(x^*)$, де функція $f(x)$ диференційовна в точці x^*, а $h(x)$ – ні, $G(x^*) = co\{f'(x^*) \cup \partial h(x^*)\}$. На рис. 21.9 $O_2 \in G(x^*)$, де функції $f(x)$ та $h(x)$ недиференційовні в точці x^*, $G(x^*) = co\{\partial f(x^*) \cup \partial h(x^*)\}$.



а) б)

Рис. 21.8.

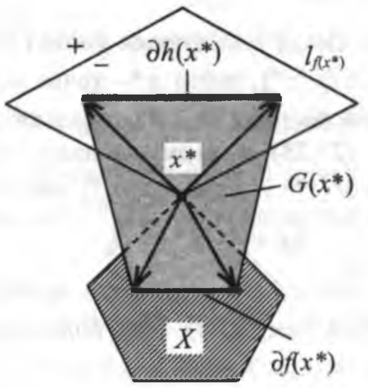


Рис. 21.9.

Запитання для самоконтролю

1. Що являють собою умовний субдиференціал і умовний ε-субдиференціал опуклої функції в точці?
2. У чому полягає відмінність умовного субдиференціалу від субдиференціалу опуклої функції в точці?
3. Як формулюються необхідні і достатні умови мінімуму для задачі умовної опуклої недиференційовної оптимізації?
4. Яка точка називається ε-стаціонарною точкою функції $f(x)$ на опуклій множині X?
5. У чому полягає умова регулярності Слейтера для допустимої множини в задачі опуклого програмування?
6. Як формулюються необхідні і достатні умови мінімуму для задачі опуклого програмування?

Вправи для самостійного виконання

1. Довести теорему 21.4.

2. Використовуючи подання 21.10, дати геометричну інтерпретацію множини $\partial^X f(x^{(0)})$ для функції $f(x)$ і множини X, що зображені на рис. 21.4.

П р и м і т к а. Для спрощення побудови вважати, що на рис. 21.4 $x^{(0)} = (0, 0)$.

3. Нехай задано функції

$$h_1(x) = |x-2|-3\,;\; h_2(x) = 0{,}5|x|-2\,;\; h_3(x) = -\ln x\,.$$

Треба

1) побудувати множину

$$X_1 = \{x \in R^n \,|\, h_i(x) \le 0,\; i = \overline{1,3}\}\,;$$

2) побудувати функцію

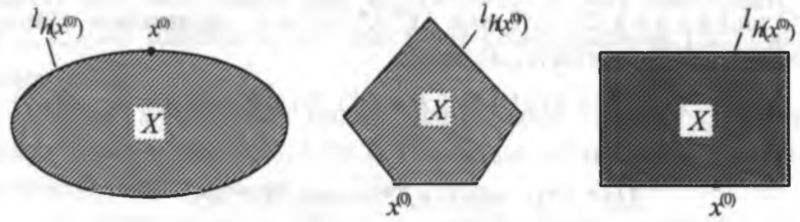
$$h(x) = \max_{i=1,3} h_i(x)$$

і множину

$$X_2 = \{x \in R^n \,|\, h(x) \le 0\}\,;$$

3) порівняти множини X_1 і X_2.

4. Довести, що має місце подання виду (21.25) і дати його геометричну інтерпретацію для випадків, зображених на рис. 21.10:



а) б) в)

Рис. 21.10.

5. Дати геометричну інтерпретацію умови (21.28) для випадку, зображеного на рис. 21.11:

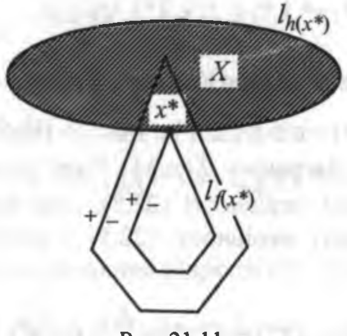


Рис. 21.11.

§22. Теорема Куна-Таккера

Розглянемо умови оптимальності для задачі опуклого програмування виду

$$f(x) \to \min,\ x \in X, \tag{22.1}$$

де

$$X = \{x \in P \mid g_i(x) \le 0,\ i = \overline{1,k}\}, \tag{22.2}$$

P – задана опукла множина з R^n, функції $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1,k}$, визначені і опуклі на P.

Введемо *функцію Лагранжа* задачі (22.1), (22.2)

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x), \tag{22.3}$$

де $x \in P$, а змінні λ_i, $i = \overline{1,k}$, які називаються *множниками Лагранжа*, належать множині

$$\Lambda = \{\lambda \in R^k \mid \lambda = (\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_k),\ \lambda_i \ge 0,\ i = \overline{1,k}\}. \tag{22.4}$$

О з н а ч е н н я 22.1. Точка $(x^*,\lambda^*) \in P \times \Lambda$ називається *сідловою точкою* функції Лагранжа (22.3), якщо

$$L(x^*,\lambda) \le L(x^*,\lambda^*) \le L(x,\lambda^*) \quad \forall x \in P,\ \forall \lambda \in \Lambda, \tag{22.5}$$

тобто якщо

$$L(x^*,\lambda^*) = \min_{x \in X} L(x,\lambda^*) = \max_{\lambda \in \Lambda} L(x^*,\lambda).$$

Л е м а 22.1. *Для того щоб точка $(x^*,\lambda^*) \in P \times \Lambda$ була сідловою точкою функції Лагранжа (22.3), необхідно і достатньо, щоб виконувались наступні умови:*

$$L(x^*,\lambda^*) \le L(x,\lambda^*) \ \forall x \in P, \tag{22.6}$$

$$x^* \in X \ \ і \ \ \lambda_i^* g_i(x^*) = 0,\ i = \overline{1,k}. \tag{22.7}$$

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай $(x^*,\lambda^*) \in P \times \Lambda$ – сідлова точка функції Лагранжа $L(x,\lambda)$. Тоді умова (22.6) являє собою праву частину подвійної нерівності (22.5). Для одержання умови (22.7) перепишемо ліву частину нерівності (22.5) з урахуванням виду функції Лагранжа (22.3):

$$f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x^*) \le f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* g_i(x^*) \ \ \forall \lambda \in \Lambda. \tag{22.8}$$

Звідси маємо

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i^* - \lambda_i) g_i(x^*) \ge 0 \ \ \forall \lambda \in \Lambda. \tag{22.9}$$

Покажемо, що $x^* \in X$. Візьмемо точку $\lambda' = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_i', \dots, \lambda_k^*)$, де $\lambda_i' = \lambda_i^* + 1$ при довільному фіксованому $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. З означення множини Λ і того, що $\lambda^* \in \Lambda$, випливає $\lambda' \in \Lambda$. З (22.9) при $\lambda = \lambda'$ одержуємо $(-1)(g_i(x^*)) \ge 0$, тобто $g_i(x^*) \le 0$. В силу довільності вибору $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ маємо

$$g_i(x^*) \le 0 \ \ \forall i = \overline{1,k}, \tag{22.10}$$

а це означає, що $x^* \in X$.

Візьмемо точку $\lambda^0 = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_i^0, \dots, \lambda_k^*)$, де $\lambda_i^0 = 0$ при довільному фіксованому $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Така точка $\lambda^0 \in \Lambda$, тому з (22.9) при $\lambda = \lambda^0$ одержуємо

$$\lambda_i^* g_i(x^*) \ge 0. \tag{22.11}$$

Але $\lambda_i^* \ge 0$ і згідно (22.10) $g_i(x^*) \le 0 \ \forall i = \overline{1,k}$, тому нерівність (22.11) має зміст лише при $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$. В силу довільності вибору $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ одержуємо, що має місце співвідношення (22.7) для будь-якого $i = \overline{1,k}$.

Д о с т а т н і с т ь. Нехай для деякої точки $(x^*,\lambda^*) \in P \times \Lambda$ виконуються умови (22.6) і (22.7). Покажемо, що точка (x^*,λ^*) є сідловою точкою функції Лагранжа $L(x,\lambda)$.

З (22.6) випливає права частина подвійної нерівності (22.5). За умовою (22.7) $x^* \in X$, тобто $g_i(x^*) \le 0,\ i = \overline{1,k}$. Тоді для всіх тих $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, для яких $g_i(x^*) = 0$,

$$(\lambda_i^* - \lambda_i) g_i(x^*) = 0 \tag{22.12}$$

при будь-якому $\lambda_i \ge 0$.

Якщо $g_i(x^*) < 0$ при деякому $i \ (i = \overline{1,k})$, то з рівності (22.7) маємо $\lambda_i^* = 0$. Тому для таких i

$$(\lambda_i^* - \lambda_i) g_i(x^*) = -\lambda_i g_i(x^*) \ge 0$$

при будь-якому $\lambda_i \ge 0$.

Додаючи до цих нерівностей рівності (22.12), одержуємо

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i^* - \lambda_i) g_i(x^*) \ge 0 \ \ \forall \lambda \in \Lambda.$$

Звідси

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i g_i(x^*) \le \sum_{i=1}^{k}\lambda_i^* g_i(x^*) \ \ \forall\lambda\in\Lambda .$$

Додавши до обох частин цієї нерівності $f(x^*)$, одержимо нерівність (22.8), яка є лівою частиною (22.5). Отже, точка $(x^*,\lambda^*)\in P\times\Lambda$ задовольняє умову (22.5), тобто є сідловою точкою функції Лагранжа $L(x,\lambda)$.

З'ясуємо тепер, яким чином пов'язані між собою сідлова точка функції Лагранжа і розв'язки задачі (22.1), (22.2).

Т е о р е м а 22.1. *Нехай* $(x^*,\lambda^*)\in P\times\Lambda$ *– сідлова точка функції Лагранжа* $L(x,\lambda)$ *виду* (22.3). *Тоді точка* $x^*\in P$ *є розв'язком задачі* (22.1), (22.2).

Д о в е д е н н я. З умови (22.7) леми 22.1 слідує, що $x^*\in X$ і

$$L(x^*,\lambda^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i^* g_i(x^*) = f(x^*) .$$

Тоді нерівність (22.6) набуває вигляду

$$f(x^*) \le L(x,\lambda^*) = f(x) + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i^* g_i(x) \ \ \forall x\in P . \qquad (22.13)$$

Зокрема, (22.13) має місце і для $x\in X$. Але $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^* g_i(x)\le 0 \ \ \forall x\in X$, бо $g_i(x)\le 0$ і $\lambda_i^*\ge 0 \ \ \forall i=\overline{1,k}$, а значить $\lambda_i^* g_i(x)\le 0 \ \ \forall i=\overline{1,k}$. Тому з (22.13) випливає, що

$$f(x^*) \le L(x,\lambda^*) \le f(x) \ \ \forall x\in X ,$$

тобто x^* – точка мінімуму функції $f(x)$ на множині X.

П р и м і т к и.

1. З теореми 22.1 безпосередньо випливає співвідношення

$$f(x^*) = \min_{x\in X} f(x) = L(x^*,\lambda^*) .$$

2. Лему 22.1 і теорему 22.1 доведено без будь-яких обмежень на функції $f(x)$, $g_i(x)$, $i=\overline{1,k}$, і множину P, зокрема, припущення про опуклість цих функцій і множини P, яке зроблено при формулюванні задачі (22.1), (22.2), не було використано.

Виникає питання, чи для будь-якої задачі (22.1), (22.2) функція Лагранжа має сідлову точку?

Як видно з теореми 22.1, у випадку коли

$$X^* = \{x^*\in X \mid f(x^*) = \min_{x\in X} f(x)\} = \varnothing ,$$

функція Лагранжа поставленої задачі не має сідлової точки. Навіть в задачах опуклого програмування (22.1), (22.2), коли $X^*\ne\varnothing$, в загальному випадку функція Лагранжа може не мати сідлової точки.

П р и к л а д 22.1. Нехай

$$f(x) = -x \to \min , \ x\in X ,$$

де $X = \{x\in P \mid x^2\le 0\}$, $P = \{x\in R^n \mid x\ge 0\}$.

Тут множина P опукла, функції $f(x)=-x$, $g(x)=x^2$ опуклі на P і множина X містить одну точку $x=0$ (рис. 22.1). Таким чином,

$$f(0) = \min_{x\in X} f(x) = 0, \ \ X^* = \{0\} .$$

Легко перевірити за допомогою означення сідлової точки або леми 22.1, що функція Лагранжа

$$L(x,\lambda) = -x + \lambda x^2 ,$$

де $\lambda\ge 0$, $x\ge 0$, не має сідлової точки.

Дійсно, припустимо що існує точка $(x^*,\lambda^*)=(0,\lambda^*)$, де $\lambda^*\ge 0$, така, що виконується умова

$$L(0,\lambda) \le L(0,\lambda^*) \le L(x,\lambda^*) \ \ \forall x\ge 0, \forall\lambda\ge 0 .$$

Тоді $0\le 0\le -x+\lambda^*\cdot x^2$ або $-x+\lambda^*\cdot x^2\ge 0$. Остання нерівність повинна виконуватись для будь-яких $x\ge 0$. Розв'яжемо цю нерівність відносно x спочатку при $\lambda>0$, з урахуванням того, що $x\ge 0$:

$$x(\lambda^* x - 1)\ge 0 \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \lambda^*\cdot x - 1\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\ge \dfrac{1}{\lambda^*} \end{cases},$$

тобто розв'язком нерівності є $x\ge\dfrac{1}{\lambda^*}$, але це суперечить означенню 22.3 сідлової точки, оскільки нерівність $-x+\lambda^*\cdot x^2\ge 0$ повинна виконуватися при будь-яких $x\ge 0$, а не лише для $x\ge\dfrac{1}{\lambda^*}$. І у випадку, коли $\lambda^*=0$, умова $-x\ge 0$ виконується лише при $x=0$. Одержана суперечність і доводить відсутність сідлової точки функції $L(x,\lambda)$.

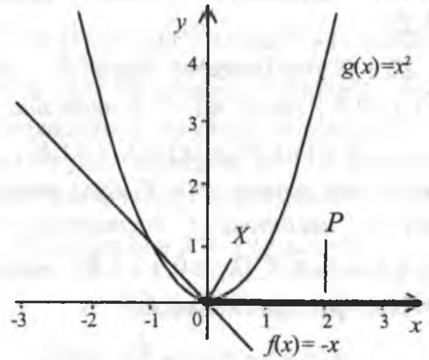


Рис. 22.1.

Таким чином, для існування сідлової точки на задачу (22.1), (22.2), крім умови опуклості множини P і функцій $f(x)$, $g_i(x)$, $i=\overline{1,k}$, повинні накладатись додаткові умови. Умови існування сідлової точки функції Лагранжа для задачі (22.1), (22.2) визначаються *теоремою Куна-Таккера*. Крім того, ця теорема дає необхідні і достатні умови оптимальності в задачі (22.1), (22.2) і є узагальненням правила множників Лагранжа для випадку задачі опуклого програмування.

О з н а ч е н н я 22.2. Обмеження $g_i(x)\le 0$ з (22.2) називається *регулярним* на множині P, якщо існує точка $x^{(i)}\in P$ така, що

$$g_i(x^{(i)})<0. \qquad (22.14)$$

Множина X в (22.2) називається *регулярною*, якщо всі обмеження $g_i(x)\le 0,\ i=\overline{1,k}$, є регулярними на множині P.

Якщо P – опукла множина, функції $g_i(x), i=\overline{1,k}$, опуклі на P, а множина X в (22.2) регулярна, то існує точка $\bar{x}\in P$, для якої

$$g_i(\bar{x})<0\ \ \forall i=\overline{1,k}. \qquad (22.15)$$

Справді, покладемо

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x^{(i)},$$

де $\alpha_i\ge 0, i=\overline{1,k}, \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1$, а точки $x^{(i)}$, $i=\overline{1,k}$, задовольняють (22.14). Тоді в силу нерівності Єнсена для опуклих функцій $g_i(x)$, $i=\overline{1,k}$, має місце

$$g_i(\bar{x})=g\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x^{(i)}\right)\le\sum_{i=1}^{k}\alpha_i g_i(x^{(i)})<0\ \ \forall i=\overline{1,k},$$

тобто виконується умова (22.15).

Умову (22.15) називають *умовою регулярності Слейтера* (див. означення 21.2).

Т е о р е м а 22.2 (Куна-Таккера). *Нехай P – опукла множина з R^n, функції $f(x)$, $g_i(x), i=\overline{1,k}$, опуклі на P, а множина*

$$X=\{x\in P\,|\,g_i(x)\le 0,\ i=\overline{1,k}\},$$

регулярна. Для того, щоб точка $x^*\in X$ була точкою мінімуму функції $f(x)$ на множині X, необхідно і достатньо, щоб існував вектор $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_k^*)\in\Lambda=\{\lambda\in R^k\,|\,\lambda_i\ge 0, i=\overline{1,k}\}$ такий, що пара (x^*,λ^*) була б сідловою точкою функції Лагранжа

$$L(x,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i g_i(x),$$

на множині $P\times\Lambda$.

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай x^* – точка мінімуму функції $f(x)$ на множині X. Доведення буде ґрунтуватися на теоремі 13.3 відокремлення двох спеціально побудованих опуклих множин і критерієві існування сідлової точки (лема 22.1).

У просторі R^{k+1} введемо дві множини

$$A=\{a\in R^{k+1}\,|\,a=(a_0,a_1,\ldots,a_k), \exists x\in P, a_0\ge f(x), a_i\ge g_i(x), i=\overline{1,k},\},$$

$$B=\{b\in R^{k+1}\,|\,b=(b_0,b_1,\ldots,b_k), b_0<f(x^*), b_i<0, i=\overline{1,k}\}.$$

Покажемо, що $A\cap B=\varnothing$. Візьмемо довільну точку $a\in A$. Тоді знайдеться точка $x\in P$ така, що

$$a_0\ge f(x),\ a_i\ge g_i(x),\ i=\overline{1,k}.$$

Можливо, що $x\in X$. Тоді $a_0\ge f(x)\ge f(x^*)$ і зрозуміло, що $a\notin B$. Якщо $x\in P\setminus X$, то знайдеться номер i, $i=\overline{1,k}$, такий, що $g_i(x)>0$. Тоді $a_i\ge g_i(x)>0$ і знову $a\notin B$. Отже $A\cap B=\varnothing$.

Тепер покажемо що A і B – опуклі множини. Наприклад, доведемо, що множина A опукла. Нехай $a^{(1)}$, $a^{(2)}$ – довільні точки з A. Тоді існують точки $x^{(1)}\in P$, $x^{(2)}\in P$ такі, що

$$a_0^{(1)}\ge f(x^{(1)}),\ a_0^{(2)}\ge f(x^{(2)}),\ a_i^{(1)}\ge g_i(x^{(1)}),\ a_i^{(2)}\ge g_i(x^{(2)}),\ i=\overline{1,k}.$$

Візьмемо довільне $\alpha\in[0;1]$ і покладемо

$$a_\alpha=\alpha a^{(1)}+(1-\alpha)a^{(2)},\ \ x_\alpha=\alpha x^{(1)}+(1-\alpha)x^{(2)}.$$

З опуклості множини P випливає, що $x_\alpha\in P$. З опуклості функцій $f(x)$ і $g_i(x), i=\overline{1,k}$, випливає:

$$f(x_\alpha)\le\alpha f(x^{(1)})+(1-\alpha)f(x^{(2)})\le\alpha a_0^{(1)}+(1-\alpha)a_0^{(2)},$$

$$g_i(x_\alpha)\le\alpha g_i(x^{(1)})+(1-\alpha)g_i(x^{(2)})\le\alpha a_i^{(1)}+(1-\alpha)a_i^{(2)},\ i=\overline{1,k}.$$

Це означає, що $a_\alpha\in A$ для будь-якого $\alpha\in[0;1]$, тобто A – опукла множина. Аналогічно доводиться опуклість множини B.

Отже, маємо дві опуклі множини, які не перетинаються. Тоді за теоремою 13.3 (відокремлення) існує гіперплощина

$$H(g,c)=\{u\in R^{k+1}\,|\,\langle g,u\rangle=c\}$$

з нормаллю $g=(\lambda_0^*,\lambda_1^*,\ldots,\lambda_k^*)\ne O_{k+1}$, яка відокремлює множини A і B, а також множини A і

$$\overline{B}=\{b\in R^{k+1}|b=(b_0,b_1,\ldots,b_k),\ b_0\le f(x^*),\ b_i\le 0, i=\overline{1,k}\}.$$

Тоді має місце нерівність (див. означення 13.1)

$$\langle g,b\rangle = \sum_{i=0}^{k}\lambda_i^* b_i \le c \le \langle g,a\rangle = \sum_{i=0}^{k}\lambda_i^* a_i \qquad (22.16)$$

для будь-яких $a \in A,\ b \in \overline{B}$.

Зауважимо, що точка

$$u = (f(x^*), \underbrace{0,...,0}_{k}) \in A \cap \overline{B}.$$

Дійсно, з того, що x^* – точка мінімуму функції $f(x)$ на X, маємо $u_0 = f(x^*)$, $u_i = 0 \ge g_i(x^*)$, $i = \overline{1,k}$, тобто $u \in A$, а включення $u \in \overline{B}$ очевидне. Тоді згідно теореми 13.3 число c в (22.16) дорівнює

$$c = \langle g,u\rangle = \lambda_0^* f(x^*)$$

і співвідношення (22.16) буде мати такий вигляд

$$\lambda_0^* b_0 + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i^* b_i \le \lambda_0^* f(x^*) \le \lambda_0^* a_0 + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i^* a_i \qquad (22.17)$$

для будь-яких $a \in A,\ b \in \overline{B}$.

Візьмемо точку $b' = (f(x^*)-1, 0, ..., 0) \in \overline{B}$. З лівої частини подвійної нерівності (22.17) для точки b' маємо

$$\lambda_0^*(f(x^*)-1) \le \lambda_0^* f(x^*).$$

Звідси випливає, що $\lambda_0^* \ge 0$. Для точок виду

$$b' = (f(x^*), 0, ..., \underset{i}{-1}, ..., 0) \in \overline{B},\ i = \overline{1,k},$$

з (22.17) маємо

$$\lambda_0^* f(x^*) - \lambda_i^* \le \lambda_0^* f(x^*),$$

тобто $\lambda_i^* \ge 0, i = \overline{1,k}$. Отже, доведено існування деякого вектора $\lambda^* = (\lambda_1^*,...,\lambda_k^*) \in \Lambda$ такого, що $\lambda_i^* \ge 0,\ i = \overline{1,k}$, а також числа $\lambda_0^* \ge 0$.

Тепер, використовуючи лему 22.1, покажемо, що пара (x^*,λ^*) є сідловою точкою функції Лагранжа.

Розглянемо точки

$$a^{(i)} = (f(x^*), 0, ..., 0, g_i(x^*), 0, ..., 0),\ i = \overline{1,k},$$

які, очевидно, належать $A \cap \overline{B}$.

Підставивши ці точки в (22.17) замість точок a і b, одержуємо

$$\lambda_0^* f(x^*) + \lambda_i^* g_i(x^*) \le \lambda_0^* f(x^*) \le \lambda_0^* f(x^*) + \lambda_i^* g_i(x^*)$$

для всіх $a^{(i)},\ i = \overline{1,k}$.

Звідси

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0 \quad \forall i = \overline{1,k}, \qquad (22.18)$$

тобто виконується умова (22.14) в лемі 22.1.

Покажемо, що $\lambda_0^* > 0$. Згідно умови регулярності множини X існує точка $\overline{x} \in X$ така, що

$$g_i(\overline{x}) < 0 \quad \forall i = \overline{1,k}, \qquad (22.19)$$

тоді для точки $\overline{a} = (f(\overline{x}), g_1(\overline{x}),..., g_k(\overline{x})) \in A$ з (22.17) маємо

$$\lambda_0^* f(x^*) \le \lambda_0^* f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i^* g_i(\overline{x}). \qquad (22.20)$$

Припустимо, що $\lambda_0^* = 0$. Оскільки вектор $g = (\lambda_0^*, \lambda_1^*,...,\lambda_k^*) \ne O_{k+1}$, то $\lambda_i^*, i = \overline{1,k}$, не всі рівні нулю, тобто $\lambda^* \ne O_k$. Тоді, враховуючи (22.19), з (22.20) маємо

$$0 \le \sum_{i=1}^{k}\lambda_i^* g_i(\overline{x}) < 0.$$

Одержана суперечність доводить, що $\lambda_0^* > 0$.

Зауважимо, що нерівність (22.17) і всі наступні міркування будуть правильними, якщо (22.17) поділити на $\lambda_0^* > 0$, тобто в (22.17) можна покласти $\lambda_0^* = 1$.

Візьмемо довільну точку $x \in P$. Тоді відповідна точка $a = (f(x), g_1(x),..., g_k(x)) \in A$. Підставляючи цю точку в праву частину нерівності (22.17), з урахуванням того, що $\lambda_0^* = 1$, одержуємо

$$f(x^*) \le f(x) + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i^* g_i(x) = L(x,\lambda^*) \quad \forall x \in P. \qquad (22.21)$$

Враховуючи (22.18), маємо $f(x^*) = L(x^*,\lambda^*)$. Звідси і з (22.21) випливає, що

$$L(x^*,\lambda^*) \le L(x,\lambda^*) \quad \forall x \in P,$$

тобто виконується умова (22.6) леми 22.1. Отже, пара (x^*,λ^*) – сідлова точка функції Лагранжа $L(x,\lambda)$.

Достатність безпосередньо випливає з теореми 22.1.

Розглянуті поняття і твердження, зокрема теорема Куна-Таккера, мають місце і для більш загальних задач опуклого програмування (див., наприклад, [18], [90], [98]).

Т е о р е м а 22.3. *Нехай*

1) *P – опукла множина з* R^n, $\operatorname{int} P \neq \varnothing$;

2) *функції* $f(x)$, $g_i(x)$, $i=\overline{1,k}$, *опуклі на* P;

3) $g_i(x)=\langle a^{(i)},x\rangle+b_i$, $i=\overline{k+1,m}$, *– лінійні функції, де* $a^{(i)}\in R^n$, $b_i\in R^1$, $i=\overline{k+1,m}$;

4) *множина* X *має вигляд*

$$X=\{x\in P \mid g_i(x)\le 0,\ i=\overline{1,k},\ g_i(x)=\langle a^{(i)},x\rangle+b_i\le 0,\ i=\overline{k+1,s},$$

$$g_i(x)=\langle a^{(i)},x\rangle+b_i=0,\ i=\overline{s+1,m}\};$$

5) *існує така точка* $\bar{x}\in \operatorname{int}P\cap X$, *що* $g_i(\bar{x})<0$ $\forall i=\overline{1,k}$.

Для того, щоб точка $x^*\in X$ *була точкою мінімуму функції* $f(x)$ *на множині* X, *необхідно і достатньо, щоб існував вектор* $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\dots,\lambda_m^*)\in\Lambda=\{\lambda\in R^m \mid \lambda_i\ge 0,\ i=\overline{1,s}\}$ *такий, що пара* (x^*,λ^*) *була б сідловою точкою функції Лагранжа*

$$L(x,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)$$

на множині $P\times\Lambda$.

В цій теоремі не виключена можливість, коли відсутні деякі з обмежень $g_i(x)\le 0$ або $g_i(x)=0$.

Доведення теореми 22.3 спирається на більш тонкі теореми відокремлення множин, ніж теорема 13.3. Його можна знайти, наприклад, в [98].

З а у в а ж е н н я. Наслідком теореми 22.3 є висновок про те, що для будь-якої задачі лінійного програмування, яка має розв'язок, її функція Лагранжа завжди має сідлову точку.

Запитання для самоконтролю

1. Що являє собою функція Лагранжа для задачі опуклого програмування?
2. Яка точка називається сідловою точкою функції Лагранжа?
3. Як формулюються необхідні і достатні умови того, що деяка точка є сідловою точкою функції Лагранжа?
4. Як пов'язані між собою розв'язок задачі опуклого програмування і сідлова точка функції Лагранжа цієї задачі?
5. У чому полягає умова регулярності для множини, яка задається системою нерівностей?
6. Як формулюється теорема Куна-Таккера в термінах сідлової точки функції Лагранжа?

Вправи для самостійного виконання

1. Довести, що множина B в теоремі 22.2 (Куна-Таккера) опукла.

2. Для задачі неопуклого програмування

$$f(x)=x^3\to\min, x\in X,$$

де $X=\{x\in P \mid -x^3-1\le 0\}$, $P=\{x\in R^1 \mid x\le 1\}$, показати, що функція Лагранжа має єдину сідлову точку $(x^*,\lambda^*)=(-1,1)$ на множині $P\times\Lambda$, $\Lambda=\{\lambda\in R^1 \mid \lambda\ge 0\}$.

3. Для задачі

$$f(x)=-x+1\to\min,\ x\in X,$$

де $X=\{x\in P \mid 0{,}5x-1\le 0\}$, $P=\{x\in R^1 \mid 0\le x\le 5\}$, побудувати функцію Лагранжа і знайти її сідлову точку, використовуючи карту ліній рівня цієї функції (рис. 22.2).

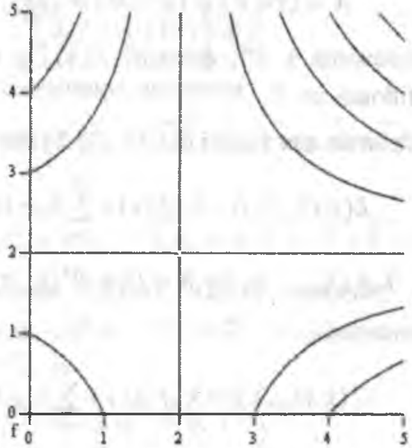


Рис. 22.2.

4. Використовуючи для геометричних побудов програмні засоби типу Derive, GRAN1, Maple, Matlab, Mathcad, Mathematica тощо, розв'язати задачі:

4.1. Побудувати карту ліній рівня і графік функції $f(x,y)=\dfrac{(x-1)^2}{2}-\dfrac{(y+1)^2}{3}$ на R^2 та знайти її сідлову точку.

4.2. З'ясувати, чи має функція $f(x,y)=\sin(x,y)$ на множині $X=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2-1\le 0\}$ сідлову точку, і якщо має, знайти її.

4.3. Для задачі

$$f(x)=-0{,}5x\to\min,\ x\in X,$$

де $X=\{x\in P \mid x-2\le 0\}$, $P=\{x\in R^1 \mid x\ge 0\}$, знайти її розв'язок, побудувати для неї функцію Лагранжа і знайти її сідлову точку.

4.4. Для задачі

$$f(x)=(x-1)^2\to\min,\ x\in X,$$

де $X=\{x\in P \mid x^2-5x+6\le 0\}$, $P=\{x\in R^1 \mid 0\le x\le 5\}$, знайти її розв'язок, побудувати функцію Лагранжа і знайти її сідлову точку.

§23. Диференціальна і субдиференціальна форми теореми Куна-Таккера та її узагальнення

Розглянемо теорему Куна-Таккера в дещо інших формах, які не використовують поняття сідлової точки але передбачають виконання деяких додаткових умов.

1. Нехай в задачі опуклого програмування

$$f(x) \to \min, \quad x \in X, \tag{23.1}$$

$$X = \{x \in P \mid g_i(x) \le 0, i = \overline{1,k}\}, \tag{23.2}$$

де P – опукла множина з R^n, функції $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1,k}$, визначені, опуклі і диференційовні на P.

Функція Лагранжа для задачі (23.1), (23.2) має такий вигляд

$$L(x,(\lambda_0,\lambda)) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x),$$

де $x \in P$, $\lambda_0 \ge 0$, $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_k) \in \Lambda = \{\lambda \in R^k \mid \lambda_i \ge 0, i = \overline{1,k}\}$.

Введемо позначення

$$L'_x(x,(\lambda_0,\lambda)) = \lambda_0 f'(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g'_i(x) \tag{23.3}$$

для вектора, координатами якого є частинні похідні функції Лагранжа за змінними x_j:

$$\frac{\partial L(x,(\lambda_0,\lambda))}{\partial x_j} = \lambda_0 \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}, \; j = \overline{1,n}. \tag{23.4}$$

О з н а ч е н н я 23.1. Вектор $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_k^*) \in \Lambda$ називається *вектором Куна-Таккера* задачі (23.1), (23.2), якщо

$$f^* \le f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* g_i(x) = L(x,(1,\lambda^*)) \;\; \forall x \in P, \tag{23.5}$$

де $f^* = \inf\limits_{x \in X} f(x)$.

Вектори Куна-Таккера існують для досить широкого класу задач опуклого програмування, при цьому умови їх існування співпадають з умовами регулярності множин X в задачах виду (23.1), (23.2). Для доведення цього факту наведемо деякі важливі твердження.

Т е о р е м а 23.1 (Фана). *Нехай X – опукла множина в R^n, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ – опуклі функції на X, $f_{k+1}(x), f_{k+2}(x), \dots, f_m(x)$ – лінійні функції на R^n.*

Якщо система

$$f_i(x) < 0, \; i = \overline{1,k}, \tag{23.6}$$

$$f_i(x) = 0, \; i = \overline{k+1,m} \tag{23.7}$$

не має розв'язків на X, тоді існують числа $\lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0, \dots, \lambda_k \ge 0, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m$, які одночасно не дорівнюють нулеві і такі, що

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \ge 0 \;\; \forall x \in X. \tag{23.8}$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо множини

$$U = \{u \in R^m \mid f_i(x) \le u_i, \; i = \overline{1,k}, \; f_i(x) = u_i, \; i = \overline{k+1,m}\}$$

при деякому $x \in X$,

$$V = \{v \in R^m \mid v_i < 0, \; i = \overline{1,k}, \; v_i = 0, \; i = \overline{k+1,m}\}.$$

Несумісність системи (23.6), (23.7) означає, що $U \cap V = \varnothing$. Припустимо, що це не так, тобто $U \cap V \ne \varnothing$. Тоді існує точка $u^{(0)} \in U \cap V$ така, що при деякому $x^{(0)} \in X$

$$f_i(x^{(0)}) \le u_i^{(0)} < 0, \; i = \overline{1,k},$$

$$f_i(x^{(0)}) = u_i^{(0)} = 0, \; i = \overline{k+1,m},$$

тобто точка $x^{(0)} \in X$ є розв'язком системи (23.6), (23.7), що суперечить умовам теореми.

Можна показати, що множини U і V опуклі. Тоді згідно теореми 13.3 існує гіперплощина, яка відокремлює множини U і V, а також їх замикання $\overline{U} = U$ і $\overline{V}$, тобто існує ненульовий вектор $\lambda \in R^m$ такий, що

$$\langle \lambda, u \rangle \ge c \ge \langle \lambda, v \rangle \;\; \forall u \in U, \forall v \in \overline{V}$$

або

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \ge c \ge \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \;\; \forall u \in U, \forall v \in \overline{V},$$

де $c \in R^1$. З урахуванням того, що $v_i = 0, i = \overline{k+1,m}$, маємо

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \ge c \;\; \forall u \in U, \tag{23.9}$$

$$c \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \quad \forall v_i \leq 0, i = \overline{1,k}. \qquad (23.10)$$

З нерівності (23.10) при $v_i = 0, i = \overline{1,k}$, безпосередньо випливає, що $c \geq 0$, а також при $v_i \to -\infty, i = \overline{1,k}$, одержуємо, що $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_k \geq 0$.

Тепер доведемо, що має місце нерівність (23.8). Для будь-якого $x \in X$ розглянемо вектор $u \in R^m$ з координатами $u_i = f_i(x), i = \overline{1,m}$. Зрозуміло, що $u \in U$. Підставляючи цей вектор у (23.9), з урахуванням того, що $c \geq 0$, маємо $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \geq 0 \ \forall x \in X$, тобто виконується (23.8).

Т е о р е м а 23.2. *Нехай X – опукла множина в R^n, $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_k(x)$ – опуклі функції на X. Якщо система*

$$f_0(x) < 0, \qquad (23.11)$$

$$f_i(x) < 0, \ i = \overline{1,k} \qquad (23.12)$$

не має розв'язків на X, а її підсистема (23.12) *має розв'язки, тоді існують числа $\lambda_0 > 0, \lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_k \geq 0$ такі, що*

$$\lambda_0 f_0(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x) \geq 0 \ \forall x \in X. \qquad (23.13)$$

Д о в е д е н н я. Згідно теореми 23.1 існують числа $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_k \geq 0$, які одночасно не дорівнюють нулеві і такі, що виконується (23.13). Припустимо, що $\lambda_0 = 0$. У цьому випадку серед чисел λ_i, $i = \overline{1,k}$, є додатні. Тоді для точки $x^{(0)} \in X$, яка є розв'язком системи (23.12), маємо $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x^{(0)}) < 0$. Але це суперечить (23.13), де $\lambda_0 = 0$. Отже, $\lambda_0 > 0$.

З а у в а ж е н н я. У співвідношенні (23.13) можна вважати $\lambda_0 = 1$. Для цього досить всі його доданки поділити на $\lambda_0 > 0$.

Наступна теорема визначає умови існування вектора Куна-Таккера для задачі (23.1), (23.2).

Т е о р е м а 23.3. *Нехай в задачі* (23.1), (23.2) *існує точка $\bar{x} \in P$ така, що $g_i(\bar{x}) < 0$ при будь-яких $i = \overline{1,k}$. Тоді вектор Куна-Таккера $\lambda^* \in \Lambda$ існує.*

Д о в е д е н н я. Якщо $f^* = \inf_{x \in X} f(x) = -\infty$, то умова

$$f^* \leq f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* g_i(x)$$

виконується при всіх $\lambda^* \in \Lambda$.

Нехай $f^* > -\infty$. Розглянемо систему

$$f(x) - f^* < 0, \qquad (23.14)$$

$$g_i(x) < 0, \ i = \overline{1,k}, \qquad (23.15)$$

на множині P.

Ця система задовольняє умови теореми 23.2, оскільки нерівність (23.14) не виконується при будь-якому $x \in P$, а система (23.15) має розв'язок $\bar{x} \in P$. Тому, враховуючи зауваження до теореми 23.2, існують числа $\lambda_0^* = 1$, $\lambda_1^* \geq 0, \ldots, \lambda_k^* \geq 0$ такі, що має місце співвідношення

$$\lambda_0^*(f(x) - f^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* g_i(x) \geq 0 \ \forall x \in P$$

або

$$f^* \leq f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* g_i(x) \ \forall x \in P.$$

З а у в а ж е н н я. Якщо існує точка $x^* \in P$, яка є розв'язком задачі (23.1), (23.2), тобто $f^* = f(x^*) = \min_{x \in X} f(x)$, то існування вектора Куна-Таккера λ^* випливає безпосередньо з умови існування сідлової точки $(x^*, \lambda^*) \in P \times \Lambda$ для функції Лагранжа.

Т е о р е м а 23.4 (Куна-Таккера в диференціальній формі).

Нехай в задачі (23.1), (23.2) *P – опукла множина в R^n, функції $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1,k}$, опуклі на P і диференційовні в точці $x^* \in P$, множина X регулярна.*

Для того, щоб точка $x^* \in P$ була точкою мінімуму функції $f(x)$ на множині X, необхідно і достатньо, щоб існував вектор $\lambda^* \in \Lambda$ такий, що при $\lambda_0^* = 1$ виконувались би умови

$$\langle L_x'(x^*, (\lambda_0^*, \lambda^*)), x - x^* \rangle \geq 0 \ \ \forall x \in P, \qquad (23.16)$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \ i = \overline{1,k}. \qquad (23.17)$$

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай точка $x^* \in P$ є точкою мінімуму функції $f(x)$ на множині X. Розглянемо таку систему лінійних нерівностей відносно x:

$$\langle f'(x^*), x - x^* \rangle < 0, \qquad (23.18)$$

$$\langle g_i'(x^*), x - x^* \rangle < 0, \ i \in I(x^*) \ \forall x \in P, \qquad (23.19)$$

де $I(x^*) = \{i \in \{1,2,\ldots,k\} | g_i(x^*) = 0\}$.

Покажемо, що система (23.18), (23.19) не має розв'язків на множині P. Припустимо, що це не так, тобто існує точка $\bar{x} \in P$, яка є розв'язком цієї системи.

Покладемо $h = \bar{x} - x^*$. З нерівності (23.18) і леми 20.1 випливає, що h є напрямом спадання функції $f(x)$ в точці x^*, тобто $h \in U(x^*, f)$. З іншого боку, для будь-якого $i \in I(x^*)$ із (23.19) і леми 20.1 випливає, що $h \in U(x^*, g_i)$, тобто

$$g_i(x^* + \alpha h) < g_i(x^*) = 0$$

при будь-яких досить малих $\alpha > 0$.

Крім того, для $i \in \{1,...,k\} \setminus I(x^*)$ $g_i(x^*) < 0$, тобто $g_i(x^* + \alpha h) < 0$ при будь-яких α, досить малих за абсолютною величиною. Отже, $x^* + \alpha h \in X$ при будь-яких досить малих $\alpha > 0$, тобто вектор h – можливий напрям відносно множини X в точці x^*: $h \in V(x^*, X)$. Тоді

$$h \in U(x^*, f) \cap V(x^*, X),$$

тобто

$$U(x^*, f) \cap V(x^*, X) \neq \varnothing.$$

Але це неможливо, оскільки x^* – точка мінімуму функції $f(x)$ на множині X (див. теорему 20.1). Одержана суперечність доводить, що система (23.18), (23.19) не має розв'язків на P. Тоді за теоремою 23.1 існують числа $\lambda_0^* \geq 0$, $\lambda_i^* \in R^1$, $i \in I(x^*)$, які одночасно не дорівнюють нулеві і такі, що

$$\lambda_0^* \langle f'(x^*), x - x^* \rangle + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i^* \langle g_i'(x^*), x - x^* \rangle =$$

$$= \langle \lambda_0^* f'(x^*) + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i^* g_i'(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in P. \qquad (23.20)$$

Покажемо, що нерівність (23.20) еквівалентна умовам (23.16), (23.17). Покладемо $\lambda_i^* = 0$ для $i \in \{1,...,k\} \setminus I(x^*)$. Тоді для будь-яких $i = \overline{1,k}$ $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$, тобто має місце (23.17). Звідси з урахуванням (23.20) одержуємо

$$0 \leq \langle \lambda_0^* f'(x^*) + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i^* g_i'(x^*), x - x^* \rangle =$$

$$= \langle \lambda_0^* f'(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* g_i'(x^*), x - x^* \rangle =$$

$$= \langle L_x'(x^*, (\lambda_0^*, \lambda^*)), x - x^* \rangle \quad \forall x \in P,$$

тобто має місце (23.16). Оскільки за умовою множина X регулярна, то згідно зауваження до теореми 23.2 $\lambda_0^* = 1$.

Д о с т а т н і с т ь. За умовою теореми функція Лагранжа

$$L(x, (\lambda_0^*, \lambda^*)) = \lambda_0^* f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* g_i(x),$$

де $\lambda_0^* = 1$, $\lambda_i^* \geq 0, i = \overline{1,k}$, опукла на множині P в силу властивостей операцій над опуклими функціями $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1,k}$. Тоді з умови (23.16) згідно теореми 20.3 випливає, що точка x^* – точка мінімуму функції $L(x, (\lambda_0^*, \lambda^*))$ на P, тобто

$$L(x^*, (\lambda_0^*, \lambda^*)) \leq L(x, (\lambda_0^*, \lambda^*)) \quad \forall x \in P.$$

З урахуванням цього, а також структури множини X і (23.17), для будь-якого $x \in X$ маємо

$$f(x^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* g_i(x^*) = L(x^*, (\lambda_0^*, \lambda^*)) \leq$$

$$\leq L(x, (\lambda_0^*, \lambda^*)) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* g_i(x) \leq f(x) \quad \forall x \in P.$$

Отже, точка x^* – точка мінімуму функції $f(x)$ на X або є розв'язком задачі (23.1), (23.2).

В умовах теореми обмеження-нерівності $g_i(x) \leq 0$ з індексами $i \in I(x^*) = \{i = 1, ..., k \mid g_i(x^*) = 0\}$ називаються *активними* в точці $x^* \in X$, а інші обмеження – *пасивними*.

Умова (23.17) називається умовою *доповнюючої нежорсткості.* Вона означає, що множники Лагранжа (Куна-Таккера), які відповідають пасивним обмеженням-нерівностям, повинні бути рівними нулю, тобто $\lambda_i^* = 0, i \in \{1, \ldots, k\} \setminus I(x^*)$.

Як було показано в теоремі 23.4, з умови (23.20) випливають умови (23.16) і (23.17). Навпаки, від умов (23.16), (23.17) можна перейти до (23.20).

Геометричний зміст теореми Куна-Таккера в диференціальній формі полягає у тому, що в точці $x^* \in X$, яка є локальним розв'язком задачі (23.1), (23.2), існує ненульовий вектор

$$L_x'(x^*, (\lambda_0^*, \lambda^*)) = \lambda_0^* f'(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* g_i'(x^*),$$

де $\lambda_i^* \geq 0, i = \overline{0,k}$, який є конічною комбінацією (див. означення 11.2) градієнта цільової функції і градієнтів функцій-обмежень, такий, що з векторами $x - x^*$ при будь-яких $x \in P$ утворює нетупий кут (рис. 23.1).

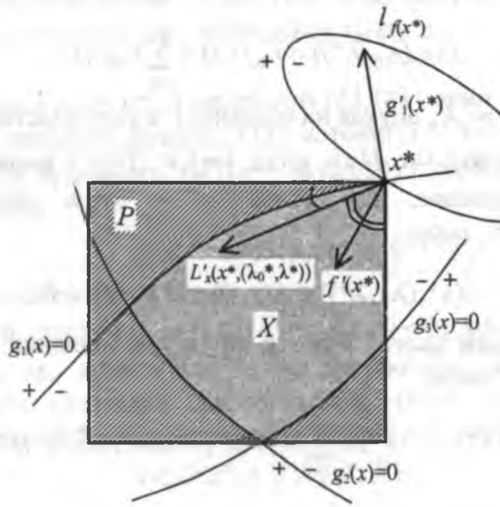


Рис. 23.1.

2. Розглянемо необхідні і достатні умови оптимальності в задачі опуклого програмування, коли цільова функція і функції обмежень не обов'язково диференційовні.

Т е о р е м а 23.5 (Куна-Таккера в субдиференціальній формі).

Нехай функції $f(x)$, $g_i(x)$, $i=\overline{1,k}$, *опуклі на відкритій опуклій множині* $Q \subseteq R^n$, *яка містить опуклу множину* P, *і множина*

$$X = \{x \in P \,|\, g_i(x) \le 0,\ i=\overline{1,k}\}$$

регулярна.

Для того, щоб точка $x^* \in P$ *була точкою мінімуму функції* $f(x)$ *на множині* X, *необхідно і достатньо, щоб існували вектори*

$$\lambda^* = (\lambda_1^*,\dots,\lambda_k^*) \ne O_k,\ \lambda_i^* \ge 0,\ i=\overline{1,k},$$

$$v_0 \in \partial f(x^*),\ v_i \in \partial g_i(x^*),\ i=\overline{1,k},$$

і число $\lambda_0^* > 0$ *такі, що*

$$\langle \lambda_0^* v_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i^* v_i,\ x - x^* \rangle \ge 0\ \ \forall x \in P, \qquad (23.21)$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0,\ \ i=\overline{1,k}. \qquad (23.22)$$

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай $x^* \in P$ є точкою мінімуму функції $f(x)$ на множині X. Тоді згідно теореми 21.5

$$O_n \in G(x^*),$$

де

$$G(x^*) = \begin{cases} \partial f(x^*), & g(x^*) < 0, \\ co\{\partial f(x^*) \cup \partial g(x^*)\}, & g(x^*) = 0, \end{cases}$$

$\partial f(x^*)$ – субдиференціал функції $f(x)$ в точці $x^* \in Q$, $g(x) = \max_{i=\overline{1,k}} g_i(x)$, при цьому згідно теореми 17.4 субдиференціал функції $g(x)$ має такий вигляд

$$\partial g(x^*) = co\left(\bigcup_{i \in I(x^*)} \partial g_i(x^*) \right) =$$

$$= \left\{ v \in R^n \,\middle|\, v = \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i v_i,\ \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \ge 0,\ v_i \in \partial g_i(x^*),\ i \in I(x^*) \right\},$$

де $I(x^*) = \{i \in \{1,2,\dots,k\} \,|\, g(x^*) = g_i(x^*) = 0\}$.

Зауважимо, що умова (22.14) регулярності множини X співпадає з умовою Слейтера (21.24) для цієї множини. Дійсно, якщо існує точка $\bar{x} \in P$ така, що $g_i(\bar{x}) < 0\ \ \forall i=\overline{1,k}$, то

$$g(\bar{x}) = \max_{i=\overline{1,k}} g_i(\bar{x}) < 0.$$

Нехай в точці $x^* \in X$ $g(x^*) < 0$. Тоді, враховуючи структуру множини $G(x^*)$, одержимо $O_n \in \partial f(x^*)$. Розглянемо вектор

$$w = \lambda_0^* v_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i^* v_i,$$

де $v_0 = O_n, \lambda_0^* = 1, v_i \in \partial g_i(x^*)$ – довільний субградієнт функції $g_i(x)$ в точці x^*, $\lambda_i^* = 0, i=\overline{1,k}$. Зрозуміло, що $w = O_n$, і тоді має місце (23.21) для $\forall x \in P$, а також виконується умова (23.22).

Нехай тепер в точці $x^* \in X$ $g(x^*) = 0$. Тоді

$$O_n \in co\{\partial f(x^*) \cup \partial g(x^*)\},$$

тобто існують вектори $v_0 \in \partial f(x^*)$, $v_i \in \partial g_i(x^*)$, $i=\overline{1,k}$, і числа $\lambda_0^* \ge 0, \lambda_i^* \ge 0, i \in I(x^*)$, $\lambda_0^* + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i^* = 1$ такі, що

$$O_n = \lambda_0^* v_0 + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i^* v_i,$$

при цьому $\lambda_0^* \ne 0$, оскільки згідно леми 21.4 $O_n \notin \partial g(x^*)$ при $g(x^*) = 0$. Покладемо $\lambda_i^* = 0$ для $i \in \{1,2,\dots,k\} \setminus I(x^*)$. Тоді вектор

$$w = \lambda_0^* v_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i^* v_i = O_n$$

і тому має місце (23.21) при $\forall x \in P$. Крім того, оскільки $g_i(x^*) = 0 \ \forall i \in I(x^*)$, а для $i \in \{1,2,...,k\} \setminus I(x^*)$ $\lambda_i^* = 0$, то $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$ для всіх $i = \overline{1,k}$, тобто має місце (23.22).

Д о с т а т н і с т ь. В умовах теореми функція Лагранжа

$$L(x,(\lambda_0^*,\lambda^*)) = \lambda_0^* f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* g_i(x)$$

опукла на множині Q і згідно теореми 17.3 вектор

$$w = \lambda_0^* v_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* v_i$$

є субградієнтом функції $L(x,(\lambda_0^*,\lambda^*))$ в точці $x^* \in P$, де $v_0 \in \partial f(x^*)$, $v_i \in \partial g_i(x^*)$, $i = \overline{1,k}$, при цьому $\lambda_0^* > 0$ в силу регулярності множини X. Тоді з умови (23.21) і теореми 21.2 випливає, що x^* – точка мінімуму функції $L(x,(\lambda_0^*,\lambda^*))$ на множині P, тобто

$$L(x^*,(\lambda_0^*,\lambda^*)) \le L(x,(\lambda_0^*,\lambda^*)) \ \ \forall x \in P.$$

З урахуванням цього, а також структури множини X і (23.22), для $\forall x \in X$ маємо

$$\lambda_0^* f(x^*) = \lambda_0^* f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* g_i(x^*) = L(x^*,(\lambda_0^*,\lambda^*)) \le$$

$$\le L(x,(\lambda_0^*,\lambda^*)) = \lambda_0^* f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* g_i(x) \le \lambda_0^* f(x)$$

або, оскільки $\lambda_0^* > 0$,

$$f(x^*) \le f(x) \ \ \forall x \in X,$$

тобто x^* – точка мінімуму функції $f(x)$ на множині X.

П р и м і т к а. Якщо функції $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1,k}$, диференційовні в точці x^* і опуклі на відкритій множині Q, то згідно теореми 16.5 співвідношення (23.21) переходить у (23.16), тобто твердження теорем 23.5 і 23.4 у даному випадку співпадають.

3. Сформулюємо необхідні умови оптимальності для більш широкого класу задач, ніж задача опуклої умовної мінімізації (23.1), (23.2), зокрема для диференційовної задачі математичного програмування, які узагальнюють теорему 23.4.

Розглянемо задачу

$$f(x) \to \min, \ \ x \in X, \tag{23.23}$$

$$X = \{x \in P \mid g_i(x) \le 0, i = \overline{1,m}, \ g_i(x) = 0, i = \overline{m+1,k}\}. \tag{23.24}$$

Будемо вважати, що

$$f^* = \min_{x \in X} f(x) > -\infty, \quad X^* = \{x^* \in X \mid f(x^*) = f^*\} \ne \varnothing.$$

Для дослідження задачі (23.23), (23.24) побудуємо загальну функцію Лагранжа

$$L(x,(\lambda_0,\lambda)) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x), \tag{23.25}$$

де

$$x = (x_1, x_1, ..., x_n) \in P, \quad \lambda_0 \ge 0, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k) \in \Lambda,$$

$$\Lambda = \{\lambda \in R^k \mid \lambda_i \ge 0, i = \overline{1,m}, \ \lambda_i \in R^1, i = \overline{m+1,k}\}.$$

Як і раніше (див. (23.3)) введемо позначення

$$L'_x(x,(\lambda_0,\lambda)) = \lambda_0 f'(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g'_i(x) \tag{23.26}$$

для вектора, координати якого є частинні похідні функції Лагранжа (23.25) за змінними x_j, $j = \overline{1,n}$.

Т е о р е м а 23.6. *Нехай в задачі* (23.23), (23.24) *множина* P *опукла, функції* $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, *диференційовні в точці* $x^* \in X$, *функції* $g_i(x)$, $i = \overline{m+1,k}$, *неперервно диференційовні в деякому околі точки* x^*.

Якщо x^* – *точка локального мінімуму функції* $f(x)$ *на множині* X *виду* (23.24), *то існують число* λ_0^* *і вектор* $\lambda^* = (\lambda_1^*, ..., \lambda_m^*, \lambda_{m+1}^*, ..., \lambda_k^*) \in \Lambda$ *такі, що*

$$(\lambda_0^*, \lambda^*) \ne O_{k+1}, \ \ \lambda_i^* \ge 0, \ \ i = \overline{0,m}, \tag{23.27}$$

$$\langle L'_x(x^*,(\lambda_0^*,\lambda^*)), x - x^* \rangle = \langle \lambda_0^* f'(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* g'_i(x^*), x - x^* \rangle \ge 0 \tag{23.28}$$

для будь-яких $x \in P$ *і*

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{23.29}$$

Доведення теореми 23.6 можна знайти, наприклад, у [18] і [98].

У цій теоремі можливі випадки, коли $P = R^n$, або відсутні обмеження-нерівності ($m = 0$), або відсутні обмеження-рівності ($m = k$), або взагалі відсутні функціональні обмеження ($m = k = 0$).

Зауважимо, що коли $P = R^n$ або $x^* \in \operatorname{int} P \neq \varnothing$, то умова (23.28) має вигляд

$$L'_x(x^*, (\lambda^*_0, \lambda^*)) = \lambda^*_0 f'(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda^*_i g'_i(x^*) = O_n . \qquad (23.30)$$

Дійсно, оскільки у першому випадку множина векторів $x - x^*, x \in P$ співпадає з R^n, а у другому – містить деякий ε-окіл точки x^*, то скалярний добуток в (23.28) може бути лише рівним нулеві, що можливо за умови, коли має місце (23.30). Будь-яка точка $x^* \in X$, яка задовольняє умови (23.27)-(23.29), називається *стаціонарною точкою* цієї задачі. Теорема 23.6, яка називається *принципом Лагранжа*, стверджує, що при зазначених в ній умовах будь-яка точка, яка є локальним розв'язком задачі (23.23), (23.24), є стаціонарною точкою цієї задачі. Ця теорема узагальнює відомі необхідні умови оптимальності, зокрема, для задачі безумовної мінімізації (див. теорему 9.1), для класичної задачі на умовний екстремум (див. теорему 10.1), для задачі (20.1) умовної мінімізації (див. теорему 20.2).

Множники Лагранжа $\lambda^*_0, \lambda^*_i, i = \overline{1,k}$ в теоремі 23.6, взагалі кажучи, визначені з точністю до константи, тобто, якщо пара (λ^*_0, λ^*), де $\lambda^* \in \Lambda$, задовольняє умови (23.27)-(23.29), то при будь-якому $t > 0$ пара $(t\lambda^*_0, t\lambda^*)$ має такі ж самі властивості.

Якщо в точці $x^* \in X$ $\lambda^*_0 > 0$, то задачу (23.23), (23.24) називають *невиродженою* в цій точці. В цьому випадку можна покласти $t = \dfrac{1}{\lambda^*_0}$ і тоді в теоремі 23.6 можна без обмеження загальності розглядати два варіанти: $\lambda^*_0 = 1$ або $\lambda^*_0 = 0$. Умови, які в межах теореми 23.6 забезпечують виконання $\lambda^*_0 = 1$, називають *умовами регулярності*, а саму задачу (23.23), (23.24) і відповідну функцію Лагранжа називають *регулярними*.

Якщо в точці $x^* \in X$ $\lambda^*_0 = 0$, то задачу (23.23), (23.24) називають *виродженою* в цій точці.

Невиродженість задачі (23.23), (23.24) в точці $x^* \in X$ гарантується, наприклад, коли $P = R^n$ і градієнти $g'_i(x^*), i \in I(x^*) = \{i \mid g_i(x^*) = 0\}$, тобто градієнти функцій, що відповідають активним обмеженням-нерівностям, лінійно незалежні. Дійсно, з умов доповнюючої нежорсткості (23.29) випливає, що $\lambda^*_i = 0$ при $g_i(x^*) < 0$, і умова (23.30) буде мати вигляд

$$\lambda^*_0 f'(x^*) + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda^*_i g'_i(x^*) = O_n . \qquad (23.31)$$

Якщо б у (23.31) $\lambda^*_0 = 0$, то в силу лінійної незалежності $g'_i(x^*)$, $i \in I(x^*)$ було б $\lambda^*_i = 0$, $i \in I(x^*)$. Тоді, враховуючи те, що для пасивних обмежень-нерівностей $\lambda^*_i = 0$, $i \in \{1, \ldots, k\} \setminus I(x^*)$, було б $\lambda^*_i = 0$ $\forall i = \overline{1,k}$, а це суперечить умові $(\lambda^*_0, \lambda^*) \neq O_{k+1}$ в теоремі 23.6.

Розглянемо геометричний зміст принципу Лагранжа для випадку, коли задача (23.23), (23.24) регулярна ($\lambda^*_0 = 1$), $P = R^n$ і обмеження-рівняння відсутні ($m = k$). Тоді, враховуючи (23.31), умова (23.28) матиме вигляд

$$-f'(x^*) = \sum_{i \in I(x^*)} \lambda^*_i g'_i(x^*),\ \lambda^*_i \geq 0,\ i \in I(x^*), \qquad (23.32)$$

тобто антиградієнт цільової функції є конічною комбінацією (див. означення 11.2) градієнтів $g'_i(x)$ функцій $g_i(x)$, $i \in I(x^*)$, що відповідають активним обмеженням-нерівностям в точці $x^* \in X$.

На рис. 23.2 в точці x^*, яка є розв'язком відповідної задачі, активними є перше і третє обмеження, тобто $I(x^*) = \{1; 3\}$, і антиградієнт цільової функції $-f'(x^*)$ належить конусу, натягнутому на градієнти $g'_1(x^*), g'_3(x^*)$, тобто має місце (23.32). При цьому вектори $g'_1(x^*), g'_3(x^*)$ лінійно незалежні.

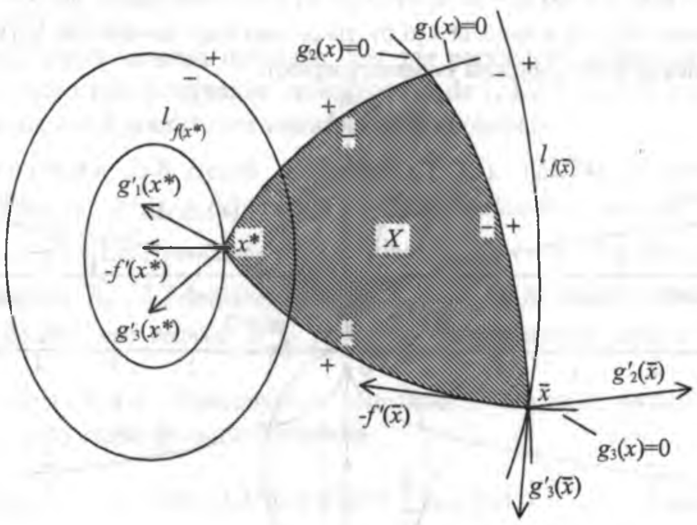


Рис. 23.2.

Точка $\bar{x} \in X$ на рис. 23.2, в якій не виконується співвідношення (23.32) для $I(\bar{x}) = \{2; 3\}$, не є розв'язком задачі, оскільки з неї можна рухатися, зменшуючи значення цільової функції і залишаючись у множині X.

Розглянемо приклад виродженої задачі математичного програмування.

П р и к л а д 23.1. Нехай задано задачу

$$f(x_1,x_2)=2x_1^2+x_2^2+3x_2 \to \min,\ x\in X,$$

де $X=\{x\in R^2 \mid g_1(x)=x_1-x_2^3\le 0;\ g_2(x)=-x_1-x_2^3\le 0;\ g_3(x)=x_2-1\le 0\}$.

За допомогою графічного методу знайти точку $x^*\in X$, яка є розв'язком заданої задачі, і перевірити в ній виконання умов оптимальності.

На рис. 23.3 зображено допустиму множину X і лінію рівня цільової функції в точці $x^*=(0,0)$, яка є розв'язком задачі. Активними обмеженнями-нерівностями в цій точці є $g_1(x)\le 0$ і $g_2(x)\le 0$, тобто $I(x^*)=\{1,2\}$. При цьому

$$f'(x^*)=(0,3),\quad g_1'(x^*)=(1,0),\quad g_2'(x^*)=(-1,0).$$

Оскільки в цій задачі $P=R^2$ і відсутні обмеження-рівності, то в точці $x^*\in X$ повинна виконуватись умова

$$\lambda_0^* f'(x^*)+\lambda_1^* g_1'(x^*)+\lambda_2^* g_2'(x^*)=O_n, \qquad (23.33)$$

де $(\lambda_0^*,\lambda_1^*,\lambda_2^*)\ne(0,0,0)$ і $\lambda_0^*\ge 0, \lambda_1^*\ge 0, \lambda_2^*\ge 0$.

Але, як видно з рис. 23.3, рівність (23.33) можлива лише при $\lambda_0^*=0, \lambda_1^*=0, \lambda_2^*=0$ або $\lambda_0^*=0,\ \lambda_1^*=t,\ \lambda_2^*=-t,\ t>0$. Отже задача, що розглядається, є виродженою $(\lambda_0^*=0)$ в точці $x^*=(0,0)$. Це сталося тому, що вектори $g_1'(x^*), g_2'(x^*)$ лінійно залежні, тобто порушена умова регулярності.

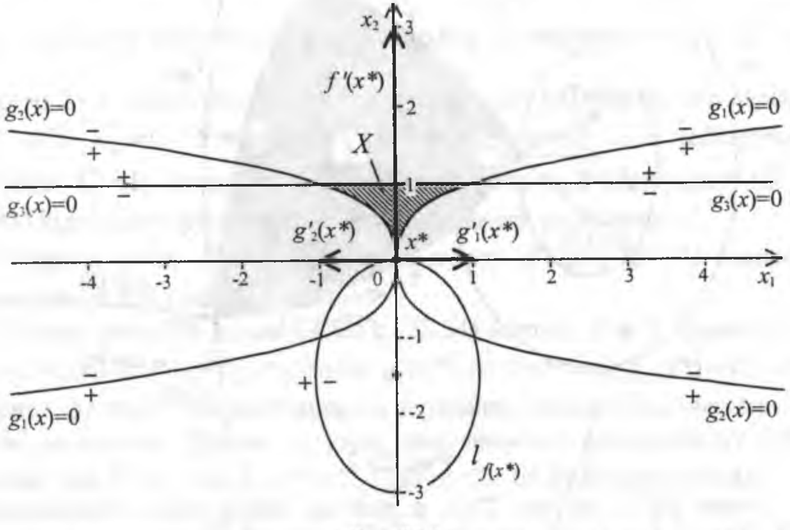


Рис. 23.3.

На жаль умову регулярності, яку забезпечує лінійна незалежність градієнтів $g_i'(x^*)$, $i\in I(x^*)$, перевірити важко, оскільки необхідно знати саму точку локального мінімуму $x^*\in X$, яку власне треба знайти.

Більш зручні умови регулярності вдається визначити для задачі математичного програмування з опуклими обмеженнями-нерівностями і лінійними обмеженнями-рівностями. Зокрема, для цього випадку має місце наступна теорема (див., наприклад, [98]).

Т е о р е м а 23.7. *Нехай в задачі* (23.23), (23.24) *множина* P *опукла, функції* $f(x)$, $g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, *диференційовні в точці* $x^*\in X$, *функції* $g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, *опуклі на* P, *а функції* $g_i(x)$, $i=\overline{m+1,k}$, *лінійні. Нехай додатково виконується хоча б одна з наступних умов*:

1) *обмеження-рівності відсутні та існує точка* $\bar{x}\in P$, *що* $g_i(\bar{x})<0$ *при будь-яких* $i=\overline{1,m}$;
2) *множина* P *є многогранником, функції* $g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, *лінійні*;
3) *множина* P *є многогранником, функції* $g_i(x)$, $i=\overline{r+1,m}$, *де* $0<r\le m$, *лінійні та існує точка* $\bar{x}\in X$ *така, що* $g_i(\bar{x})<0$, $i=\overline{1,r}$.

Якщо точка x^* – *локальний розв'язок задачі* (23.23), (23.24), *то існує вектор* $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,...,\lambda_k^*)\in\Lambda$ *такий, що при* $\lambda_0^*=1$ *виконуються умови* (23.27)-(23.29).

У наступній теоремі показано, що для регулярної диференційовної задачі опуклого програмування співвідношення (23.27)-(23.29) є не лише необхідними, але й достатніми умовами оптимальності.

Т е о р е м а 23.8. *Нехай в задачі* (23.23), (23.24) *множина* P *опукла, функції* $f(x)$, $g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, *диференційовні в точці* $x^*\in X$, *функції* $g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, *опуклі на* P, *а функції* $g_i(x)$, $i=\overline{m+1,k}$, *лінійні.*

Якщо при $\lambda_0^*=1$ *і деякому* $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,...,\lambda_k^*)\in\Lambda$ *виконуються умови* (23.28), (23.29), *то точка* x^*– *розв'язок* (*глобальний*) *задачі* (23.23), (23.24).

Д о в е д е н н я. Враховуючи властивості опуклих функцій (див. лему 14.4), регулярна функція Лагранжа

$$L(x,(1,\lambda^*))=f(x)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^* g_i(x) \qquad (23.34)$$

є опуклою за x на P. Тоді згідно теореми 23.6 з умови (23.28) випливає, що x^* – точка мінімуму функції (23.34) на множині P, тобто

$$L(x^*,(1,\lambda^*))\le L(x,(1,\lambda^*))\quad \forall x\in P.$$

Звідси з урахуванням співвідношень (23.29) і того, що $g_i(x)=0,\ i=\overline{m+1,k}$, для $\forall x\in X$ маємо

$$f(x^*)=f(x^*)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^* g_i(x^*)=L(x^*,(1,\lambda^*))\le L(x,(1,\lambda^*))=$$

$$=f(x)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^* g_i(x)\le f(x),$$

тобто x^* – точка глобального мінімуму функції $f(x)$ на множині X.

Теорема 23.8 є безпосереднім узагальненням теореми 23.4. На практиці, коли множина P має просту структуру, наприклад є n – вимірним паралелепіпедом або невід'ємним ортантом, зручно користуватися умовою (23.28) в конкретизованому вигляді.

Л е м а 23.1. *Якщо множина P в задачі* (23.23), (23.24) *має вигляд*

$$P=\{x\in R^n \mid a_j\le x_j\le b_j,\ j=\overline{1,n}\},\tag{23.35}$$

де $-\infty<a_j<b_j<+\infty,\ j=\overline{1,n}$, то умова (23.28) *еквівалентна умові*:

для будь-якого $j=\overline{1,n}$

$$\frac{\partial L(x^*,(\lambda_0^*,\lambda^*))}{\partial x_j}=0,\ \text{якщо}\quad a_j<x_j^*<b_j,$$

$$\frac{\partial L(x^*,(\lambda_0^*,\lambda^*))}{\partial x_j}\ge 0,\ \text{якщо}\ \ x_j^*=a_j,\tag{23.36}$$

$$\frac{\partial L(x^*,(\lambda_0^*,\lambda^*))}{\partial x_j}\le 0,\ \text{якщо}\ \ x_j^*=b_j.$$

Л е м а 23.2. *Якщо множина P в задачі* (23.23), (23.24) *має вигляд*

$$P=\{x\in R^n \mid x_j\ge 0,\ j=\overline{1,r}\},\tag{23.37}$$

де $1\le r\le n$, то умова (23.28) *еквівалентна наступним умовам*:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L(x^*,(\lambda_0^*,\lambda^*))}{\partial x_j}\ge 0,\quad x_j^*\frac{\partial L(x^*,(\lambda_0^*,\lambda^*))}{\partial x_j}=0,\quad j=\overline{1,r},\\ &\frac{\partial L(x^*,(\lambda_0^*,\lambda^*))}{\partial x_j}=0,\quad j=\overline{r+1,n}.\end{aligned}\tag{23.38}$$

4. Наведені основи теорії умов оптимальності іноді дають можливість розв'язувати нескладні задачі умовної мінімізації в явному вигляді.

Нехай задана задача (23.23), (23.24). На основі принципу Лагранжа сформулюємо загальне правило її розв'язування:

1. Дослідити поставлену задачу на регулярність;
2. Побудувати функцію Лагранжа (23.25);
3. Записати умови оптимальності (23.27)-(23.29) у вигляді, що відповідають поставленій задачі;
4. Розв'язати одержану систему рівнянь і нерівностей та знайти серед розв'язків стаціонарні точки задачі;
5. Дослідити одержані стаціонарні точки на оптимальність і знайти серед них розв'язок задачі.

З а у в а ж е н н я:

1. Перед тим, як розпочинати розв'язувати конкретну задачу її необхідно звести до виду (23.23), (23.24). Наприклад, якщо поставлена задача є задачею максимізації, то її необхідно замінити на еквівалентну задачу мінімізації, обравши цільовою функцією $-f(x)$. Якщо серед обмежень-нерівностей є обмеження виду $g_i(x)\ge 0$, то їх треба замінити на $-g_i(x)\le 0$. Також треба визначити, які обмеження вважаються функціональними, а які прямими, включивши останні до опису множини P.

2. Для встановлення регулярності можна скористатися теоремою 23.7.

3. Якщо одержана задача виявиться регулярною, то на другому етапі треба будувати регулярну функцію Лагранжа.

4. Якщо в задачі (23.23), (23.24) множина $P=R^n$, або має вигляд (23.35), або (23.37), то при запису необхідних умов оптимальності слід скористатися відповідно умовами (23.30), (23.36), (23.38), які еквівалентні умові (23.28).

Наприклад, якщо P має вигляд (23.37), то система, яка характеризує стаціонарні точки задачі (23.23), (23.24), буде мати вигляд:

$$\begin{gathered}x_j\ge 0,\quad \frac{\partial L(x,(\lambda_0,\lambda))}{\partial x_j}\ge 0,\quad x_j\frac{\partial L(x,(\lambda_0,\lambda))}{\partial x_j}=0,\quad j=\overline{1,r};\\ \frac{\partial L(x,(\lambda_0,\lambda))}{\partial x_j}=0,\quad j=\overline{r+1,n};\\ \lambda_i\ge 0,\ g_i(x)\le 0,\ \lambda_i g_i(x)=0,\ i=\overline{1,m};\\ g_i(x)=0,\ i=\overline{m+1,k};\\ \lambda_0\ge 0,\ (\lambda_0,\lambda)\ne O_{k+1},\end{gathered}\tag{23.39}$$

причому для регулярної задачі останню умову можна замінити на $\lambda_0=1$.

5. Розв'язання системи типу (23.39) є досить складною задачею і розв'язати її точно вдається досить рідко. Наближено її можна розв'язати, зокрема, за допомогою математичних пакетів Maple, Matlab, Mathcad, Mathematica.

6. Дослідження одержаних розв'язків системи на оптимальність є також складною задачею, яку можна розв'язати шляхом вивчення властивостей цільової функції в околі цих точок, або скористатися достатніми умовами оптимальності (див., наприклад, [98]), які у свою чергу досить громіздкі. Якщо ж задача (23.23), (23.24) є задачею опуклої оптимізації, то згідно теорем 23.4 або 23.8 можна зробити безпосередній висновок про розв'язок поставленої задачі.

7. Іноді (для n=2 або n=3) за допомогою геометричних міркувань можна визначити стаціонарні точки задачі (23.23), (23.24), а потім дослідити їх на оптимальність за допомогою умов типу (23.39).

8. В інших випадках варто скористатися спеціальними методами розв'язування задач умовної оптимізації і математичного програмування. Деякі з них будуть розглянуті у розділі 4, при цьому їх реалізація, як правило, вимагає використання комп'ютера.

П р и к л а д 23.2. Нехай дано задачу опуклого програмування

$$f(x_1,x_2) = 4(x_1+1)^2 + x_2^2 \to \min,$$

$$\begin{cases} g_1(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4 \le 0, \\ g_2(x_1,x_2) = x_1 - x_2 - 2 \le 0, \\ g_3(x_1,x_2) = -x_1 - x_2 + 1 \le 0. \end{cases}$$

З рис. 23.4 видно, що розв'язком задачі є точка $x^* = (0,1)$. Доведемо це, використовуючи теорему 23.4. Легко бачити, що задача задовольняє умову Слейтера, тому можна записати регулярну функцію Лагранжа

$$L(x,\lambda) = 4(x_1+1)^2 + x_2^2 + \lambda_1(x_1^2 + 4x_2^2 - 4) + \lambda_2(x_1 - x_2 - 2) + \lambda_3(-x_1 - x_2 + 1).$$

Оскільки функції $f(x)$, $g_i(x), i = \overline{1,3}$, опуклі і диференційовні на $P = R^2$, а множина X регулярна, то для того щоб $x^* = (0,1)$ була точкою мінімуму функції $f(x)$ на множині X, згідно теореми 23.4 достатньо, щоб існував вектор $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*)$ $(\lambda_i^* \ge 0,\ i = \overline{1,3})$ такий, що виконуються умови (23.16), (23.17). Враховуючи те, що $P = R^2$, умова (23.16) замінюється умовою (23.30). Тоді одержуємо таку систему

$$\begin{cases} 8(x_1+1) + 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ 2x_2 + 8\lambda_1 x_2 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1(x_1^2 + 4x_2^2 - 4) = 0, \\ \lambda_2(x_1 - x_2 - 2) = 0, \\ \lambda_3(-x_1 - x_2 + 1) = 0. \end{cases} \qquad (23.40)$$

В точці $x^* = (0,1)$ обмеження $g_1(x) \le 0$, $g_3(x) \le 0$ є активними, а обмеження $g_2(x) \le 0$ – пасивне, тому $\lambda_2 = 0$. Підставляючи координати точки x^* в перші два рівняння системи (23.40), одержимо систему рівнянь відносно λ_1, λ_3:

$$\begin{cases} 8 - \lambda_3 = 0, \\ 2 + 8\lambda_1 - \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Звідки $\lambda_1 = \frac{3}{4} \ge 0$, $\lambda_3 = 8 \ge 0$. Таким чином, існує вектор $\lambda^* = \left(\frac{3}{4}, 0, 8\right)$, який задовольняє умови теореми 23.4, тобто точка $x^* = (0,1)$ дійсно є розв'язком задачі, що розглядається.

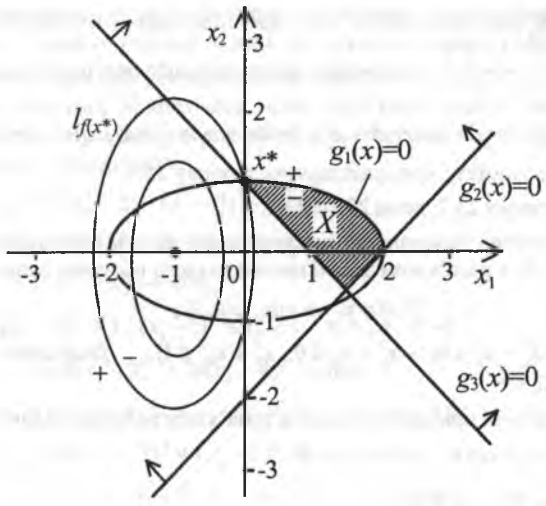


Рис. 23.4.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається вектором Куна-Таккера?
2. Як формулюється теорема Фана?
3. Як формулюється теорема, яка визначає умови існування вектора Куна-Таккера для задачі опуклого програмування?
4. Як формулюється теорема Куна-Таккера в диференціальній формі?
5. Які обмеження називаються активними в точці, а які – пасивними?
6. Що являє собою умова доповнюючої нежорсткості і що вона означає?
7. Як формулюється теорема Куна-Таккера в субдиференціальній формі?
8. Як формулюється принцип Лагранжа для задачі математичного програмування і який його геометричний зміст?
9. У чому полягає правило знаходження розв'язків задачі математичного програмування на основі принципу Лагранжа?

Вправи для самостійного виконання

1. Показати, що множини U і V в теоремі 23.1 (Фана) опуклі.

2. На прикладі системи нерівностей

$$f_0(x) = x < 0,$$

$$f_1(x) = x^2 < 0$$

на R^1 перевірити, що умова існування розв'язку системи (23.12) в теоремі 23.2 є істотною.

3. Довести теорему 23.4, використовуючи поняття сідлової точки і відповідні твердження.

4. Використовуючи геометричну інтерпретацію задачі, перевірити гіпотезу про те, що точка $x^* = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ є розв'язком задачі опуклого програмування

$$f(x_1,x_2) = x_2 \to \min,\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0,\ -x_1 + x_2^2 \le 0,\ x_1 + x_2 \ge 0.$$

Довести цю гіпотезу, використовуючи теорему 23.4.

5. Довести теорему 23.7, леми 23.1 і 23.2.

6. Використовуючи геометричну інтерпретацію задачі, перевірити гіпотезу про те, що точка $x^* = (0, 0)$ є розв'язком задачі математичного програмування

$$f(x) = x_2 \to \min,\ x \in X,$$

де $X = \{x \in R^2 \mid -x_1^3 + x_2 \le 0;\ -x_1^3 - x_2 \le 0;\ x_1^2 + x_2{}^2 \le 1\}$. Дослідити задачу на виродженість в точці x^*.

7. Використовуючи принцип Лагранжа, розв'язати наступні задачі:

1) $f(x_1,x_2) = x_1 + \cos x_2 \to \min,\ x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid -x_1 \le 0\}$;

2) $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \to \min,\ x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid -x_1 \le 0; x_1{}^2 - x_2 \le 0; x_2 - 2x_1^2 \le 0\}$;

3) $f(x_1,x_2) = (x_1+2)^2 + x_2{}^2 \to \min,\ x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid x_1{}^2 + 4x_2{}^2 \le 4; 2x_1{}^2 - x_2 - 2 \le 0; -x_1 + x_2 \le 1\}$;

4) $f(x_1,x_2) = \sin(x_1+x_2) - \sin x_1 - \sin x_2 \to \min(\max),\ x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_1 + x_2 \le 2\pi\}$;

5) $f(x_1,x_2) = |x_1| + |x_2 - 1| \to \min,\ x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid 1 \le x_1 \le 2; -1 \le x_2 \le 1\}$;

6) $f(x_1,x_2) = |x_1 - 2| + |x_2| \to \min,\ x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid x_1{}^2 + x_2{}^2 \le 1\}$;

7) $f(x_1,x_2) = x_1{}^2 + 2x_2{}^2 \to \max,\ x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid x_1 - x_2{}^2 \ge 0; x_1{}^2 + x_2{}^2 \le 1\}$;

8) $f(x_1,x_2) = (x_1-1)^2 + (x_2+1)^2 \to \min,\ x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid x_1{}^2 + x_2{}^2 \le 1; x_1 + x_2 = 0\}$;

9) $f(x_1,x_2) = (x_1-1)^2 + 2x_2{}^2 \to \min, x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid x_1{}^4 - 4x_1{}^3 + 4x_1{}^2 + 1 - x_2 \le 0; x_2 \le 2\}$;

10) $f(x_1,x_2) = 2\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \to \max,\ x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_1 + x_2 \le 1\}$.

Дати геометричну інтерпретацію одержаним результатам. Використовуючи програму GRAN1, знайти наближені розв'язки вказаних задач графічно.

8. За допомогою програмних засобів типу Derive, GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D, Maple, Matlab, Mathcad, Mathematica тощо розв'язати задачі графічним методом, а потім перевірити результати, використовуючи теореми Куна-Таккера, Лагранжа та конкретні умови оптимальності:

1) $f(x_1,x_2) = (x_1-2) + (x_2-3)^2 \to \min$,

$x_1^2 + 2x_2^2 \le 4,\ 2x_1^2 + x_2 \le 3,\ x_1 \ge x_2$;

2) $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \to \min$,

$x_1^2 + (x_2+1)^2 \le 1,\ (x_1-1)^2 + x_2^2 \ge 1,\ \ x_1 + 2x_2 \ge -2$;

3) $f(x_1,x_2) = 5(x_1-3)^2 + 10(x_2-4)^2 \to \max$,

$x_1 + x_2 \le 6,\ x_1 - x_2 \le 1,\ x_1 - x_2 \ge -3,\ \ 2x_1 + x_2 \ge 4$;

4) $f(x_1,x_2) = 10(x_1-2)^2 + (x_2-2)^2 \to \max$,

$2x_1 + x_2 \ge 2,\ x_1 - x_2 \ge 0,\ x_1 - 3x_2 \le 2,\ x_1 + 4x_2 \le 6$;

5) $f(x_1,x_2) = (x_1-2)^2 + 4x_2 + 1 \to \min$,

$2x_1 + 3x_2 \ge 2,\ x_1 - x_2 \ge -5,\ 3x_1 - x_2 \le 2,\ 5x_1 + 4x_2 \le 8$.

9. Розв'язати задачу

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 \to \min,\ x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_1 + x_2 \ge 1$$

при довільних значеннях a, b і c з множини дійсних чисел. Звернути увагу на випадок, коли $a \ge 0$, $c \ge 0$, $4ac \ge b^2$ (випадок опуклості цільової функції).

10. Знайти точки локального мінімуму і максимуму функції

$$f(x) = \frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}bx_2^2$$

на множині

$$X = \{x \in R^2 \mid x_1^3 - x_2^3 \le 1; x_1^2 + x_2^2 \ge 1\},$$

де $a > 0, b > 0, a > b$.

Дати геометричну інтерпретацію і переконатися у правильності одержаних результатів.

11. Знайти розв'язки задач:

1) $f(x) = \sum_{j=1}^{n}(x_j - a_j)^2 \to \min,\ \sum_{j=1}^{n} x_j \le 1, x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}$, де $a_j \in R^1,\ j = \overline{1,n}$;

2) $f(x) = \sum_{j=1}^{n}(x_j - a_j)^2 \to \min,\ \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \le 1, \sum_{j=1}^{n} x_j = 0$, де $a_j \in R^1,\ j = \overline{1,n}$;

3) $f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j\sqrt{x_j} \to \max,\ \ \sum_{j=1}^{n} x_j \le 1,\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}$, де $a_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}$.

§24. Двоїстість в задачі опуклого програмування

Будь-якій задачі математичного програмування можна поставити у відповідність так звану двоїсту задачу. Між цими задачами існують тісні зв'язки, вивчення яких складає предмет *теорії двоїстості*. Ця теорія пов'язана з теорією умов оптимальності, а також є джерелом різноманітних методів розв'язування екстремальних задач.

1. Розглянемо основи теорії двоїстості на прикладі задачі опуклого програмування.

О з н а ч е н н я 24.1. *Двоїстою* до задачі

$$f(x) \to \min,\ x \in X, \tag{24.1}$$

$$X = \{x \in P \mid g_i(x) \le 0,\ i = \overline{1,k}\},$$

де P – опукла множина з R^n, функції $f(x)$, $g_i(x), i = \overline{1,k}$, визначені і опуклі на P, називається задача

$$\varphi(\lambda) \to \max,\quad \lambda \in Y, \tag{24.2}$$

де

$$\varphi(\lambda) = \inf_{x \in P} L(x,\lambda) = \inf_{x \in P}\left(f(x) + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i g_i(x)\right),$$

$$Y = \{\lambda \in \Lambda \mid \varphi(\lambda) > -\infty\},$$

$$\Lambda = \{\lambda \in R^k \mid \lambda = (\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_k),\ \lambda_i \ge 0,\ i = \overline{1,k}\}.$$

При цьому задача (24.1) називається *прямою*. Множники Лагранжа $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ називають *двоїстими змінними*.

Припустимо, що $Y \ne \varnothing$. Позначимо через

$$f^* = \inf_{x \in X} f(x),\quad X^* = \{x^* \in X \mid f(x^*) = f^*\},$$

$$\varphi^* = \sup_{\lambda \in Y}\varphi(\lambda),\quad \Lambda^* = \{\lambda^* \in \Lambda \mid \varphi(\lambda^*) = \varphi^*\},$$

де X^* – множина розв'язків прямої задачі (24.1), а Λ^* – множина розв'язків двоїстої задачі (24.2).

П р и м і т к а. Двоїсту задачу можна записати у вигляді

$$\varphi(\lambda) \to \max,\quad \lambda \in \Lambda,$$

припускаючи тим самим, що функція $\varphi(\lambda)$ може набувати нескінченного значення $-\infty$. Тоді пряма задача буде мати вигляд

$$F(x) \to \min,\quad x \in P,$$

де

$$F(x) = \sup_{\lambda \in \Lambda} L(x,\lambda) = \begin{cases} f(x), & x \in X, \\ +\infty, & x \in P \setminus X. \end{cases}$$

Формально покладемо $f^* = +\infty$, якщо $X = \varnothing$, тобто якщо $\sup\limits_{\lambda \in \Lambda} L(x,\lambda) = +\infty$ при будь-яких $x \in P$; $\varphi^* = -\infty$, якщо $Y = \varnothing$, тобто якщо $\inf\limits_{x \in P} L(x,\lambda) = -\infty$ при будь-яких $\lambda \in \Lambda$. Тоді можна записати

$$f^* = \inf_{x \in P}\sup_{\lambda \in \Lambda} L(x,\lambda),\quad \varphi^* = \sup_{\lambda \in \Lambda}\inf_{x \in P} L(x,\lambda). \tag{24.3}$$

Таким чином, пряма і двоїста задачі визначаються симетрично відносно функції Лагранжа $L(x,\lambda)$ прямої задачі, тобто щоб одержати двоїсту задачу, досить переставити операції $\inf\limits_{x}$ і $\sup\limits_{\lambda}$ над цією функцією. Однак для зручності надалі будемо користуватися несиметричною формою запису (24.1) і (24.2) відповідно для прямої і двоїстої задач.

За означенням 24.1 можна побудувати двоїсту задачу для довільної задачі математичного програмування. При цьому відмітимо, що двоїста задача (24.2) рівносильна задачі опуклого програмування незалежно від того, чи була пряма задача задачею опуклого програмування чи ні. Дійсно, функція $L(x,\lambda)$ лінійна відносно λ, тому згідно леми 14.5 функція

$$-\varphi(\lambda) = \sup_{x \in P}(-L(x,\lambda))$$

опукла на опуклій множині Λ і множина Y також опукла, оскільки для будь-яких $\lambda^{(1)} \in \Lambda$, $\lambda^{(2)} \in \Lambda$ і $\alpha \in [0;1]$ з умов $\varphi(\lambda^{(1)}) > -\infty$ і $\varphi(\lambda^{(2)}) > -\infty$ випливає, що $\varphi(\alpha\lambda^{(1)} + (1-\alpha)\lambda^{(2)}) > -\infty$, тобто $\alpha\lambda^{(1)} + (1-\alpha)\lambda^{(2)} \in Y$. Тоді задача (24.2), записана у вигляді

$$-\varphi(\lambda) \to \inf,\ \lambda \in \Lambda,$$

є задачею опуклого програмування. Завдяки цьому на практиці буває доцільним спочатку досліджувати не саму задачу (24.1), а двоїсту до неї (коли вона простіша, ніж пряма), а потім повернутися до прямої задачі, користуючись наступними твердженнями.

Т е о р е м а 24.1. *Для будь-яких* $x \in X$ *і* $\lambda \in \Lambda$ *має місце нерівність*

$$f(x) \ge \varphi(\lambda). \tag{24.4}$$

При цьому, якщо $X \ne \varnothing, Y \ne \varnothing$, *то*

$$f^* \ge \varphi^*. \tag{24.5}$$

Д о в е д е н н я. Для будь-яких $x \in X$ і $\lambda \in \Lambda$ маємо

$$f(x) \ge f(x) + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i g_i(x) = L(x,\lambda) \ge \inf_{x' \in P} L(x',\lambda) = \varphi(\lambda),$$

тобто виконується (24.4). Звідси безпосередньо випливає і (24.5).

Однією з центральних проблем теорії двоїстості є пошук умов, при яких екстремальні значення прямої і двоїстої задач співпадають, тобто $f^*=\varphi^*$, або з урахуванням (24.3)

$$\inf_{x\in P}\sup_{\lambda\in\Lambda} L(x,\lambda)=\sup_{\lambda\in\Lambda}\inf_{x\in P} L(x,\lambda).$$

Ця рівність називається *співвідношенням двоїстості*.

Т е о р е м а 24.2 (двоїстості). *Нехай множина X в задачі* (24.1) *задовольняє умову регулярності. Якщо $f^*>-\infty$, зокрема, якщо пряма задача має розв'язок, то множина розв'язків двоїстої задачі* (24.2) *непорожня і співпадає з множиною векторів Куна-Таккера задачі* (24.1). *При цьому має місце співвідношення двоїстості*

$$f^*=\varphi^*. \tag{24.6}$$

Д о в е д е н н я. Нехай $\lambda^*\in\Lambda$ – вектор Куна-Таккера задачі (24.1), який існує згідно теореми 23.3. Тоді з нерівності (23.5) в означенні вектора Куна-Таккера маємо:

$$f^*\le\inf_{x\in P} L(x,\lambda^*)=\varphi(\lambda^*)\le\varphi^*.$$

Оскільки $f^*>-\infty$, то і $\varphi(\lambda^*)>-\infty$, тобто $\lambda^*\in Y$. Порівнюючи останню нерівність і нерівність (24.4), одержуємо (24.6). При цьому $\varphi(\lambda^*)=\varphi^*$, тобто λ^* – розв'язок задачі (24.2). Таким чином, будь-який вектор Куна-Таккера задачі (24.1) є розв'язком задачі (24.2). Тоді, використовуючи співвідношення (23.20), маємо

$$f^*=\varphi^*=\varphi(\lambda^*)=\inf_{x\in P} L(x,\lambda^*),$$

тобто виконується умова (23.5), і, таким чином, λ^* – вектор Куна-Таккера задачі (24.1).

З цієї теореми випливає інше важливе твердження теорії двоїстості.

Т е о р е м а 24.3. *Нехай множина X в задачі* (24.1) *задовольняє умову регулярності. Якщо допустима множина Y двоїстої задачі* (24.2) *непорожня, то двоїста задача має розв'язок. Якщо $Y=\varnothing$, то, $f^*=-\infty$.*

Д о в е д е н н я. Якщо $Y\ne\varnothing$, то $f^*\ge\varphi^*>-\infty$ в силу теореми 24.1. Тоді, згідно теореми 24.2, задача (24.2) має розв'язок.

Якщо $Y=\varnothing$, то, згідно теореми 24.2, випадок $f^*>-\infty$ неможливий.

Т е о р е м а 24.4 (Куна-Таккера у формі двоїстості).

Нехай множина X в задачі (24.1) *задовольняє умову регулярності. Для того, щоб точка $x^*\in X$ була розв'язком задачі* (24.1), *необхідно і достатньо, щоб існував вектор $\lambda^*\in\Lambda$ такий, що виконується співвідношення двоїстості*:

$$f(x^*)=\varphi(\lambda^*), \tag{24.7}$$

яке рівносильне умовам

$$L(x^*,\lambda^*)=\min_{x\in P} L(x,\lambda^*), \tag{24.8}$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*)=0,\ i=\overline{1,k}. \tag{24.9}$$

Множина векторів $\lambda^*\in\Lambda$, яка задовольняє (24.7), *співпадає з множиною розв'язків двоїстої задачі* (24.2) *або ж з множиною векторів Куна-Таккера прямої задачі* (24.1).

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай $x^*\in X$ – розв'язок задачі (24.1). Тоді, згідно теореми 24.2, задача (24.2) має розв'язок, і будь-який її розв'язок λ^* задовольняє умову

$$f(x^*)=f^*=\varphi^*=\varphi(\lambda^*),$$

тобто має місце (24.7).

Д о с т а т н і с т ь. Нехай існує вектор $\lambda^*\in\Lambda$ такий, що виконується рівність (24.7). Тоді для будь-якого $x\in X$, використовуючи нерівність (24.4) з теореми 24.1, одержуємо

$$f(x^*)=\varphi(\lambda^*)\le f(x),$$

тобто x^* – розв'язок задачі (24.1).

Аналогічно для будь-якого $\lambda\in Y$ маємо

$$\varphi(\lambda^*)=f(x^*)\ge\varphi(\lambda),$$

тобто λ^* – розв'язок задачі (24.2).

Доведемо, що рівність (24.7) еквівалентна умовам (24.8), (24.9).

Нехай має місце (24.7). Тоді, за означенням функції $\varphi(\lambda)$, маємо

$$f(x^*)=\varphi(\lambda^*)\le f(x)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^* g_i(x) \tag{24.10}$$

для будь-яких $x\in P$.

Підставляючи в (24.10) $x=x^*$, одержуємо

$$f(x^*)\le f(x^*)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^* g_i(x^*)$$

або

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^* g_i(x^*)\ge 0.$$

Але $x^*\in X$, тому $g_i(x^*)\le 0$ і з урахуванням того, що $\lambda_i^*\ge 0$, $i=\overline{1,k}$, одержуємо

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^* g_i(x^*)=0, \tag{24.11}$$

тобто виконується (24.9).

З (24.11) з урахуванням означення функції Лагранжа слідує

$$L(x^*,\lambda^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* g_i(x^*) = f(x^*). \qquad (24.12)$$

Тому (24.10) можна записати у вигляді

$$L(x^*,\lambda^*) \le L(x,\lambda^*) \quad \forall x \in P.$$

Це те саме, що й (24.8).

Нехай тепер виконуються умови (24.8), (24.9). З (24.9) випливає (24.11), а тому і (24.12).

Тоді (24.8) набуває вигляду

$$L(x^*,\lambda^*) = f(x^*) = \min_{x\in P} L(x,\lambda^*) = \varphi(\lambda^*),$$

тобто виконується (24.7).

Т е о р е м а 24.5. *Для того, щоб виконувались умови*

$$X^* \ne \varnothing,\ \lambda^* \ne O_k,\ f^* = \varphi^*, \qquad (24.13)$$

необхідно і достатньо, щоб функція Лагранжа

$$L(x,\lambda),\ x \in P,\ \lambda \in \Lambda$$

мала сідлову точку на $P \times \Lambda$.

Множина $S \subset P \times \Lambda$ *сідлових точок функції* $L(x,\lambda)$ *на* $P \times \Lambda$ *співпадає з множиною* $X^* \times \Lambda^*$, *тобто* $S = X^* \times \Lambda^*$.

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай виконуються умови (24.13). Тоді для довільних $x^* \in X^*$ і $\lambda^* \in \Lambda^*$ маємо, згідно теореми 24.4, що $f(x^*) = \varphi(\lambda^*)$ і виконуються умови (24.8), (24.9), які, в свою чергу, в силу леми 22.1, свідчать про те, що пара (x^*,λ^*) є сідловою точкою функції Лагранжа $L(x,\lambda)$ на множині $P \times \Lambda$ в термінах означення 22.1. Тим самим показано, що

$$X^* \times \Lambda^* \subset S. \qquad (24.14)$$

Д о с т а т н і с т ь. Нехай $(x^*,\lambda^*) \in P \times \Lambda$ – сідлова точка функції $L(x,\lambda)$ на $P \times \Lambda$. Згідно (22.5) це означає, що

$$L(x^*,\lambda) \le L(x^*,\lambda^*) \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Звідси маємо

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} L(x^*,\lambda) = F(x^*) = f(x^*) = L(x^*,\lambda^*). \qquad (24.15)$$

Крім того,

$$L(x^*,\lambda^*) \le L(x,\lambda^*) \quad \forall x \in P,$$

тому

$$L(x^*,\lambda^*) = \inf_{x\in P} L(x,\lambda^*) = \varphi(\lambda^*).$$

Звідси і з (24.15) випливає, що

$$f(x^*) = f^* = \varphi(\lambda^*) = \varphi^*,$$

тобто має місце (24.13). Крім того, показано, що

$$S \subset X^* \times \Lambda^*,$$

звідки, враховуючи (24.14), маємо, що

$$S = X^* \times \Lambda^*.$$

П р и м і т к и:

1. У випадку, коли функції $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1,k}$, в задачі (24.1) диференційовні в точці $x^* \in P$, умова (24.8) рівносильна умові (23.16) при $\lambda_0^* = 1$ в теоремі 23.4, а умови (24.9) і (23.17) співпадають. Таким чином, теорема 24.4, як і теорема 23.5, є узагальненням теореми 23.4 на випадок недиференційовних функцій.

2. При доведенні теорем 24.4 і 24.5 (як і леми 22.1) ніде не використовувалось те, що функції $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1,k}$, опуклі, і опуклість множини P. Це означає, що ці теореми мають місце для більш широкого класу функцій $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1,k}$, і множини P.

3. Використання теореми 24.4 є корисним у випадках, коли вдається знайти розв'язок λ^* двоїстої задачі. Тоді пошук розв'язків прямої задачі зводиться до пошуку розв'язків рівняння (24.7) або системи (24.8), (24.9) на множині X. В першу чергу це стосується задачі лінійного програмування, оскільки для неї двоїсту задачу можна записати у явному вигляді.

2. Розглянемо, як загальна теорія двоїстості застосовується до стандартної задачі лінійного програмування (див. задачу (6.6)). Для зручності запишемо цю задачу у вигляді (24.1):

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,\ x \in X, \qquad (24.16)$$

де

$$X = \{x \in P \mid g_i(x) = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le 0,\ i = \overline{1,k}\}, \qquad (24.17)$$

$$P = \{x \in R^n \mid x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}\}, \qquad (24.18)$$

c_j, b_i, a_{ij} – задані дійсні числа, $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,n}$.

Враховуючи означення 24.1, покажемо, що двоїстою до задачі (24.16)-(24.18) є також стандартна задача лінійного програмування.

Для цього побудуємо регулярну функцію Лагранжа для задачі (24.16), (24.17):

$$L(x,\lambda)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(c_j-\sum_{i=1}^{k}\lambda_ia_{ij})x_j+\sum_{i=1}^{k}\lambda_ib_i, \quad (24.19)$$

де $x\in P,\lambda\in\Lambda=\{\lambda\in R^k\mid\lambda_i\geq 0,\ i=\overline{1,k}\}$.

Визначимо, за яких умов функція

$$\varphi(\lambda)=\inf_{x\in P}L(x,\lambda)>-\infty.$$

Враховуючи умову $x_j\geq 0,\ j=\overline{1,n}$, з (24.19) легко бачити, що при $c_j-\sum_{i=1}^{k}\lambda_ia_{ij}\geq 0$ $\varphi(\lambda)=\inf_{x\in P}L(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{k}b_i\lambda_i>-\infty$, якщо ж $c_j-\sum_{i=1}^{k}\lambda_ia_{ij}<0$, то $\varphi(\lambda)=\inf_{x\in P}L(x,\lambda)=-\infty$. Тоді маємо

$$\varphi(\lambda)=\inf_{x\in P}L(x,\lambda)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{k}b_i\lambda_i, & \lambda\in Y,\\ -\infty, & \lambda\in\Lambda\setminus Y,\end{cases}$$

де

$$Y=\{\lambda\in\Lambda\mid\sum_{i=1}^{k}\lambda_ia_{ij}\leq c_j,\ j=\overline{1,n}\}.$$

Звідси, згідно означення 24.1, двоїстою до задачі (24.16)-(24.18) є така стандартна задача лінійного програмування:

$$\varphi(\lambda)=\sum_{i=1}^{k}b_i\lambda_i\to\max, \quad (24.20)$$

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_ia_{ij}\leq c_j,\ j=\overline{1,n},\ \lambda_i\geq 0,\ i=\overline{1,k}. \quad (24.21)$$

Л е м а 24.1. *Двоїстою до задачі* (24.20), (24.21) *є задача* (24.16)-(24.18).

Д о в е д е н н я. Подамо задачу (24.20), (24.21) у вигляді задачі мінімізації:

$$-\varphi(\lambda)=\sum_{i=1}^{k}(-b_i)\lambda_i\to\min,$$

$$\sum_{i=1}^{k}(-a'_{ji})\lambda_i\geq -c_j,\ j=\overline{1,n},$$

$$\lambda_i\geq 0,\ i=\overline{1,k},$$

де $a'_{ji}=a_{ij}$.

Тоді двоїстою до цієї задачі буде задача:

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j\to\max,$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_j(-a'_{ji})\leq(-b_i),\ i=\overline{1,k},$$

$$x_j\geq 0,\ j=\overline{1,n}$$

або

$$f(x)=-F(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\min,$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geq b_i,\ i=\overline{1,k},$$

$$x_j\geq 0,\ j=\overline{1,n},$$

а це і є задача (24.16)-(24.18).

П р и м і т к и:

1. Лема 24.1 говорить про те, що задача лінійного програмування породжує пару взаємодвоїстих задач, тобто задачу (24.20), (24.21) можна вважати прямою, а задачу (24.16)-(24.18) двоїстою до неї і навпаки.

2. У загальному випадку для задачі математичного програмування властивість взаємодвоїстості не має місця. Дійсно, оскільки двоїста задача, як було показано у попередньому пункті, є завжди задачею опуклого програмування, то двоїста до двоїстої задачі також буде задачею опуклого програмування незалежно від того, якою була пряма задача.

Для задачі лінійного програмування (24.16)-(24.18) мають місце твердження, які відповідають теоремам 24.2–24.5 і є їх безпосередніми наслідками. Сформулюємо, наприклад, аналог теореми 24.4, яка дає змогу розв'язувати задачу лінійного програмування за допомогою двоїстої задачі.

Т е о р е м а 24.6. *Нехай множина* X *в* (24.17) *задовольняє умову регулярності. Для того, щоб точки* $x^* \in X$, $\lambda^* \in Y$ *були розв'язками задач* (24.16)-(24.18) *і* (24.20), (24.21) *відповідно, необхідно і достатньо, щоб мало місце співвідношення двоїстості*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{k} b_i \lambda_i^*, \qquad (24.22)$$

яке рівносильне умовам

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* a_{ij} - c_j \right) = 0, \; j = \overline{1,n}, \qquad (24.23)$$

$$\lambda_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \; i = \overline{1,k}. \qquad (24.24)$$

П р и к л а д 24.1. За допомогою двоїстої задачі знайти розв'язок задачі лінійного програмування

$$f(x) = 5x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 \to \min, \qquad (24.25)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 \geq 2, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \geq 3, \end{cases} \qquad (24.26)$$

$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1,4}. \qquad (24.27)$$

Ця задача є стандартною задачею лінійного програмування, тому двоїста до неї задача, згідно (24.20), (24.21) має вигляд

$$\varphi(\lambda) = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \to \max, \qquad (24.28)$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 \leq 5, \\ -3\lambda_1 - \lambda_2 \leq -2, \\ -\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 \leq 4, \end{cases} \qquad (24.29)$$

$$\lambda_1 \geq 0, \; \lambda_2 \geq 0. \qquad (24.30)$$

З геометричної інтерпретації задачі (24.28)-(24.30) (рис. 24.1) видно, що її розв'язком є точка перетину прямих $-\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 4$, тобто точка $\lambda^* = (1{,}5;\, 2{,}5)$. В цій точці перше і друге функціональні обмеження задачі (24.28)-(24.30) виконуються як строгі нерівності і є пасивними обмеженнями, а третє і четверте – активними. Тоді, згідно теореми 24.6 (див. (24.22)), розв'язок задачі (24.25)-(24.27) повинен задовольняти умову $x_1^* = x_2^* = 0$. При цьому з урахуванням умови (24.23) і того, що $\lambda_1 = 1{,}5 > 0$ і $\lambda_2 = 2{,}5 > 0$, для x_3^*, x_4^* маємо систему

$$\begin{cases} -x_3 + x_4 = 2, \\ x_3 + x_4 = 3, \end{cases}$$

де $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$.

Розв'язком цієї системи є $x_3 = 0{,}5$ і $x_4 = 2{,}5$. Отже, точка $x^* = (0;\, 0;\, 0{,}5;\, 2{,}5)$ – розв'язок задачі (24.25)-(24.27), при цьому $f(x^*) = \varphi(\lambda^*) = 10{,}5$.

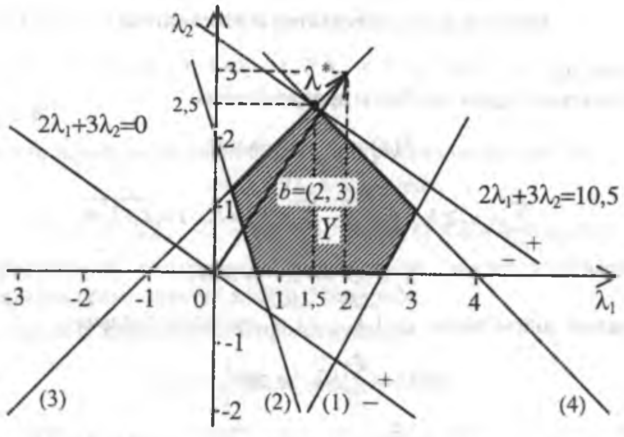


Рис. 24.1.

П р и м і т к а. Вище розглянуто, як загальна теорія двоїстості застосовується для стандартної задачі лінійного програмування, але ця теорія має місце і для інших видів задач лінійного програмування: загальної і канонічної (див. §6).

Наведені в цьому параграфі результати теорії двоїстості свідчать, що паралельний розгляд прямої і двоїстої до неї задач оптимізації, з одного боку, дає важливі теоретичні результати, з іншого є джерелом різноманітних методів оптимізації для задач лінійного і нелінійного програмування. Звідси, зокрема, походять двоїстий симплекс-метод і метод одночасного розв'язування прямої і двоїстої задач для задачі лінійного програмування та інші. Більш детально з теорією двоїстості та її застосуваннями в теорії лінійного і нелінійного програмування можна ознайомитися, наприклад, в [1], [6], [27], [38], [65], [82], [88], [98], [108].

Запитання для самоконтролю

1. Що вивчає теорія двоїстості?
2. Яка задача називається двоїстою до задачі математичного програмування?
3. Коли пряму задачу і двоїсту до неї називають симетричними?
4. У чому полягає центральна проблема теорії двоїстості?
5. Що являє собою співвідношення двоїстості?
6. Чи завжди двоїста задача є задачею опуклого програмування?
7. Як формулюється теорема двоїстості?
8. Як формулюється теорема Куна-Таккера у формі двоїстості?
9. За яких умов доцільно спочатку досліджувати не саму задачу математичного програмування, а двоїсту до неї?
10. Як до стандартної задачі лінійного програмування побудувати двоїсту задачу?
11. Як формулюється теорема двоїстості для стандартної задачі лінійного програмування?
12. Чи має місце властивість взаємодвоїстості для задачі математичного програмування у загальному випадку?

Вправи для самостійного виконання

1. Показати, що:

а) для загальної задачі лінійного програмування

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \ge b_i,\quad i=\overline{1,k},\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j = b_i,\quad i=\overline{k+1,m},$$

$$x_j \ge 0,\quad j=\overline{1,s}\ (s\le n),$$

де c_j, b_i, a_{ij} – задані дійсні числа, $i=\overline{1,k}$, $j=\overline{1,n}$, двоїстою є задача

$$\varphi(\lambda)=\sum_{i=1}^{m}b_i\lambda_i \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij} \le c_j,\ j=\overline{1,s},\quad \sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij} = c_j,\ j=\overline{s+1,n},\ \lambda_i\ge 0,\ i=\overline{1,k};$$

б) для канонічної задачі лінійного програмування

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \to \min,\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j = b_i,\quad i=\overline{1,m},\quad x_j\ge 0,\ j=\overline{1,n}$$

двоїстою є задача

$$\varphi(\lambda)=\sum_{i=1}^{m}b_i\lambda_i \to \max,\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij} \le c_j,\ j=\overline{1,n}.$$

2. Для всіх типів задач лінійного програмування

а) записати прямі і двоїсті до них задачі у векторно-матричній формі;

б) сформулювати основні теореми теорії двоїстості;

в) довести лему 24.1 і теорему 24.6.

3. Для задачі опуклого програмування

$$f(x)=\| x\|^2 \to \min, x\in X,$$

де

$$X=\{x\in P \mid g(x)=\| x\|^2-1\le 0\},\ P=R^n,$$

показати, що властивість взаємодвоїстості не має місця.

4. За допомогою двоїстої задачі знайти розв'язки задач лінійного програмування:

1) $f(x)=4x_1+x_2+3x_3+2x_4 \to \min$,

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5\ge 0,\ x_1-x_2+x_3-x_4-x_5\ge 1,\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,5}$;

2) $f(x)=10x_1-x_2+2x_3\to \min$,

$x_1+x_2-x_3\le 1,\ 3x_1+4x_2+2x_3=6,\ x_1\ge 0, x_2\ge 0$;

3) $f(x)=x_1+5x_2+x_3+10x_4+x_5+3x_6\to \min$,

$-x_1+2x_2+x_3+x_4\ge 2,\ x_1+2x_2-x_3+3x_4-x_5-x_6\ge 3,\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,6}$;

4) $f(x)=x_1+2x_2+3x_3+4x_4\to \min$,

$x_1+x_2\ge 2,\ x_1+x_2+x_3\ge 3,\ x_1+x_2+x_3+x_4\ge 4,\ x_1\ge 1,\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4}$,

(результат узагальнити на випадок, коли кількість невідомих і нерівностей дорівнює n $(n>4)$);

5) $f(x)=x_1+x_2+x_3\to \min$,

$$ax_1+x_2+x_3\ge b_1,\ x_1+ax_2+x_3\ge b_2,\ x_1+x_2+ax_3\ge b_3,$$

де $a,b_1,b_2,b_3\in R^1$.

5. Двоїста задача до задачі лінійного програмування має вигляд

$$\varphi(\lambda)=2\lambda_1+\lambda_2\to \max,$$

$$2\lambda_1-\lambda_2\le 2,\ -\lambda_1+3\lambda_2\le 3,\ -\lambda_1+\lambda_2\le 2,\ \lambda_1+\lambda_2\le 3.$$

Використовуючи геометричну інтерпретацію, знайти розв'язок даної задачі, побудувати для неї пряму задачу і знайти її розв'язок.

6. Дано задачу квадратичного програмування:

$$f(x)=\frac{1}{2}\langle Cx,x\rangle+\langle d,x\rangle\to \min, \tag{24.31}$$

$$\langle a_i,x\rangle\le b_i,\ i=\overline{1,k},\ \langle a_i,x\rangle=b_i,\ i=\overline{k+1,m}, \tag{24.32}$$

де C – невід'ємно визначена симетрична матриця розмірності $n\times n$, d, $a_i\ (i=\overline{1,m})$ – задані вектори з простору R^n, $b_i\in R^1\ (i=\overline{1,m})$ – задані числа.

Для цієї задачі

1) записати функцію Лагранжа $L(x,\lambda)$;

2) знайти $L'_x(x,\lambda)$;

3) використовуючи теорему 23.4, сформулювати необхідні і достатні умови екстремуму;

4) побудувати двоїсту задачу;

5) для випадку, коли C – додатно визначена симетрична матриця розмірності $n\times n$,

а) показати, що

$$\varphi(\lambda)=-\frac{1}{2}\langle [AC^{-1}A^T]\lambda,\lambda\rangle-\langle AC^{-1}d+b,\lambda\rangle-\frac{1}{2}\langle C^{-1}d,d\rangle;$$

б) довести, що коли в задачі (24.31), (24.32) $X\ne\varnothing$, тоді двоїста задача до неї

$$\varphi(\lambda)\to \max,\ \lambda\in\Lambda,$$

має розв'язок λ^* і при цьому

$$x^*=-C^{-1}(d+\lambda^* A),$$

де x^* – розв'язок задачі (24.30), (24.31).

7. Використовуючи результати попередньої задачі, розв'язати задачі квадратичного програмування:

1) $f(x)=4x_1^2+3x_2^2+2x_3^2+x_4^2-1\to \min$,

$x_1+x_2+x_3+x_4\le -1$;

2) $f(x)=x_1^2-4x_1x_2+x_2^2-3x_1-2x_2\to \min$,

$x_1+x_2\le 1,\ 2x_1-x_2\le 0$;

3) $f(x)=(x_1-1)^2+x_2^2+(x_3+1)^2\to \min$,

$x_1+x_2+x_3\le -1,\ x_1+2x_2+3x_3\le -1$.

Одержані результати перевірити, розв'язавши задачі за допомогою математичних пакетів Maple, Matlab, Mathcad, Mathematica тощо.

Розділ 4

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

На сьогодні розроблено і досліджено досить велику кількість чисельних методів оптимізації, кожний з яких має свої переваги і недоліки при їх застосуванні для розв'язування конкретних екстремальних задач. Це цілком природно, оскільки задачі, що виникають у реальному житті, досить різноманітні і кожна з них має певні особливості. Як образно сказано в роботі [31, стор. 10] «у дракона оптимізації багато голів і проти кожної з них потрібен свій меч».

Складність розв'язування задачі оптимізації визначається її розмірністю, властивостями цільової функції, а також властивостями і кількістю обмежень. При цьому методи, розроблені для розв'язування того чи іншого класу задач, часто бувають корисними для розв'язування більш складних задач. Так, наприклад, методи одновимірної оптимізації широко використовуються при розв'язуванні багатовимірних задач; у методах умовної оптимізації часто використовуються ідеї методів безумовної оптимізації або вони є модифікацією таких методів; методи розв'язування задач лінійного програмування використовуються при розв'язуванні задач нелінійного програмування і т. д.

Нижче будуть розглянуті лише деякі з найбільш відомих методів, які часто використовуються на практиці при розв'язуванні задач як диференційовної, так і недиференційовної оптимізації.

§25. Наближені методи одновимірної мінімізації

Необхідність дослідження задач одновимірної оптимізації та розробка чисельних методів їх розв'язування обумовлена, по-перше, тим, що цей клас екстремальних задач є зручною моделлю для розробки і теоретичного дослідження ефективності методів багатовимірної оптимізації, а по-друге, тим, що в багатьох методах відшукання екстремуму багатовимірних задач використовується одновимірна оптимізація. Класичні методи одновимірної мінімізації (див. §8) мають досить обмежені застосування, оскільки обчислення похідних в практичних задачах не завжди можливе. Наприклад, якщо значення функції $f(x)$ визначаються в результаті спостережень чи деякого фізичного експерименту, то часто отримати відомості про її похідну важко або взагалі неможливо, зокрема коли функція недиференційовна. Але навіть у тих випадках, коли похідну все ж таки вдається обчислити, відшукання коренів рівняння $f'(x)=0$ і визначення інших точок, підозрілих на екстремум, може бути пов'язане з серйозними труднощами. Тому важливо мати такі методи пошуку екстремумів функції $f(x)$, які не вимагають обчислення похідних і є більш зручними для реалізації на комп'ютері.

Якщо про цільову функцію $f(x)$ відомо лише, що вона є неперервною на заданій множині X, то для знаходження точки глобального мінімуму, взагалі кажучи, необхідно досліджувати цю функцію в усіх точках множини X. Але оскільки мова йде про відшукання деякого наближення точки мінімуму, то функцію досліджують лише у скінченній кількості точок. Різні способи вибору такої сукупності точок визначають і різні методи одновимірної мінімізації.

В обчислювальній математиці розроблено багато ефективних методів для наближеного розв'язування задач одновимірної мінімізації, орієнтованих на різні класи функцій, які зустрічаються при розв'язуванні прикладних задач. У більшості наближених методів одновимірної мінімізації в процесі їх реалізації генерується послідовність відрізків $[a_n;b_n]\subseteq X$ $(n=0,1,2,...)$, що стягуються до однієї з точок локального мінімуму $x^*\in X$ цільової функції $f(x)$. Однак гарантувати належність точки x^* відрізкові $[a_n;b_n]$ для деякого $n>0$ можна лише для певного класу функцій, що мінімізуються на множині X.

Далі розглянемо кілька найбільш поширених методів одновимірної мінімізації на класі функцій, у яких всі точки локального мінімуму є точками глобального мінімуму.

1. Унімодальні функції та їх властивості. Нехай функція $f(x)$ визначена на множині $X\subseteq R^1$ і приймає на цій множині скінченні значення.

О з н а ч е н н я 25.1. Функція $f(x)$ називається *унімодальною* на відрізку $[a;b]\subset X$, якщо вона неперервна на $[a;b]$ і існують точки x_1 і x_2 $(a\le x_1\le x_2\le b)$ такі, що

1) якщо $a<x_1$, то на відрізку $[a;x_1]$ $f(x)$ строго монотонно спадає;
2) якщо $x_2<b$, то на відрізку $[x_2;b]$ $f(x)$ строго монотонно зростає;
3) якщо $x'\in[x_1;x_2]$, то $f(x')=f^*=\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$.

На рис. 25.1 подано графіки функцій, які є унімодальними, а на рис. 25.2 – графіки функцій, які не є унімодальними. Згідно означення 25.1 відрізки $[a;x_1]$, $[x_2;b]$ є відрізками монотонності, а відрізок $[x_1;x_2]$ є відрізком сталості функції $f(x)$. Як видно з рис. 25.1, для унімодальних функцій можливі випадки, коли один або два з відрізків $[a;x_1]$, $[x_1;x_2]$, $[x_2;b]$ вироджуються в точку.

З означення 25.1 випливає, що для унімодальних функцій точки локального мінімуму є точками глобального мінімуму, при цьому множина точок мінімуму $X^* = [x_1; x_2]$ (рис.25.1). Очевидно, що опуклі на проміжку $[a; b] \subset X$ функції є унімодальними на цьому проміжку.

Якщо в означенні 25.1 $x_1 = x_2$, то функція $f(x)$ називається *строго унімодальною* на відрізку $[a; b] \subset X$ (рис. 25.1 а), г)).

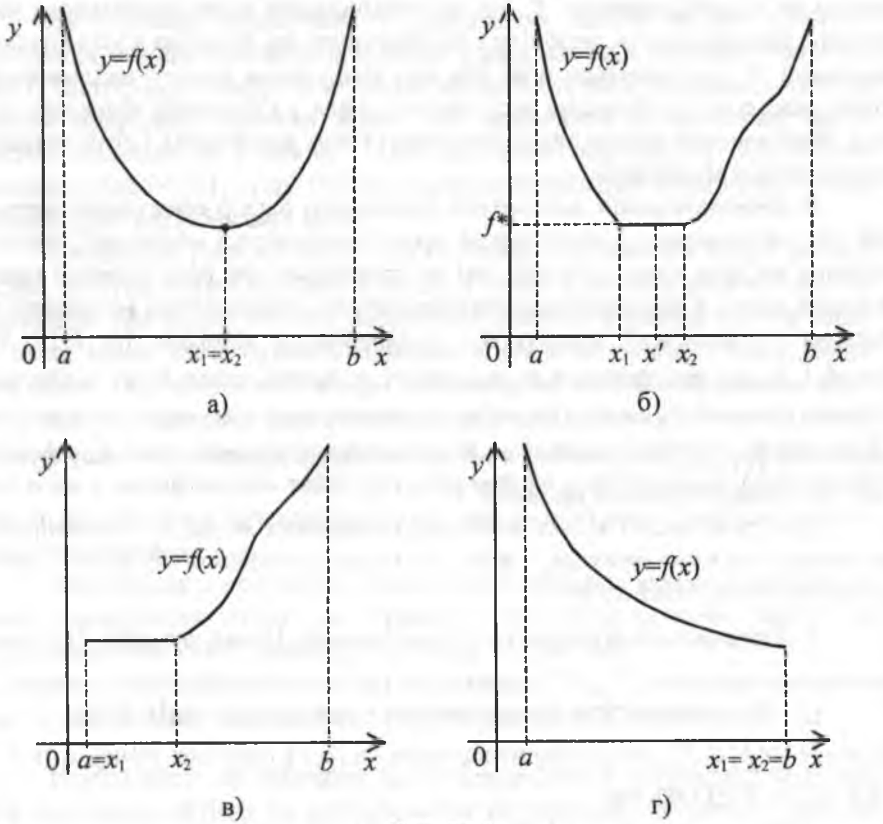


Рис. 25.1.

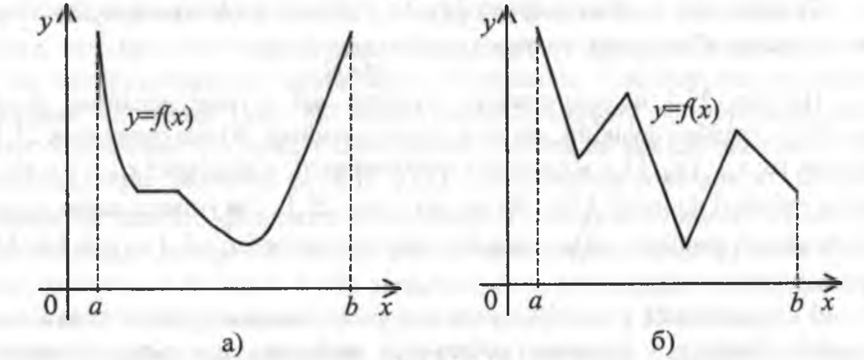


Рис. 25.2.

З означення строго унімодальної функції випливає, що така функція не містить ділянок сталості і в неї єдина точка локального мінімуму. Очевидно, що строго і сильно опуклі функції є строго унімодальними.

Для класу унімодальних функцій мають місце наступні твердження.

Л е м а 25.1. *Якщо функція $f(x)$ унімодальна на відрізку $[a; b]$, то вона унімодальна і на відрізку $[c; d] \subseteq [a; b]$.*

Л е м а 25.2. *Нехай функція $f(x)$ унімодальна на відрізку $[a; b]$ і $a \le x_1 < x_2 \le b$. Тоді*

1) якщо $f(x_1) < f(x_2)$, то $X^* \subset [a; x_2]$, а якщо $f(x_1) > f(x_2)$, то $X^* \subset [x_1; b]$;

2) якщо $f(x_1) = f(x_2)$, то $X^* \cap [x_1; x_2] \ne \varnothing$, тобто відрізок $[x_1; x_2]$ містить принаймні одну точку $x^* \in X^*$.

Н а с л і д о к. *Якщо $f(x_1) \le f(x_2)$, то існує точка $x^* \in X^*$ така, що $x^* \in [a; x_2]$, а якщо $f(x_1) \ge f(x_2)$, то $x^* \in [x_1; b]$.*

На практиці для перевірки унімодальності диференційовних на відрізку $[a; b]$ функцій використовують наступні твердження.

Л е м а 25.3. *Якщо функція $f(x)$ диференційовна на $[a; b]$ і $f'(x)$ не спадає при всіх $x \in [a; b]$, то $f(x)$ – унімодальна на $[a; b]$.*

Л е м а 25.4. *Якщо $f(x)$ – двічі диференційовна функція на $[a; b]$ і $f''(x) \ge 0$ при всіх $x \in [a; b]$, то $f(x)$ – унімодальна на $[a; b]$.*

П р и к л а д 25.1. Довести, що функція

$$f(x) = \ln(1 + x^2) - \sin x$$

унімодальна на відрізку $[0; \pi/4]$.

Оскільки функція $f(x)$ двічі диференційована, то знайдемо спочатку першу похідну

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - \cos x,$$

а потім другу

$$f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} + \sin x = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} + \sin x.$$

Оскільки $\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} > 0$ і $\sin(x) > 0$ для всіх $x \in [0; \pi/4]$, то $f''(x) \ge 0$ при $x \in [0; \pi/4]$, а тому $f(x)$ – унімодальна на цьому відрізку згідно леми 25.4.

З а у в а ж е н н я. Леми 25.3 і 25.4 є достатніми умовами опуклості диференційовних і двічі диференційовних функцій відповідно (див. наслідки теорем 15.1 і 15.6).

Методи мінімізації унімодальних функцій та аналіз ефективності таких методів відіграють значну роль, оскільки унімодальні функції часто зустрічаються при розв'язуванні практичних задач. Крім того, припущення про унімодальність функції $f(x)$ в околі деякої точки мінімуму $x^* \in X^*$ є досить природним (див. рис. 25.2). Тому відшукання такого околу, який називається відрізком локалізації точки мінімуму, є важливим попереднім етапом розв'язування задачі одновимірної мінімізації.

2. Пошук відрізка локалізації точки мінімуму. На практиці важливим етапом розв'язування задачі одновимірної мінімізації

$$f(x) \to \min, \; x \in X, \tag{25.1}$$

де $f(x)$ – унімодальна на $X \subseteq R^1$ функція, є знаходження *відрізка локалізації точки мінімуму*, тобто відрізка, який містить принаймні одну точку $x^* \in X^*$, де X^* – множина розв'язків задачі (25.1). Особливо це актуально, коли $X = R^1$, або $X = [a; +\infty)$, або $X = (-\infty; b]$.

Припустимо, що задача (25.1) має розв'язок, тобто існує непорожня множина

$$X^* = \{x^* \,|\, f(x^*) = \min_{x \in X} f(x)\}.$$

Враховуючи лему 25.2, можна побудувати скінченний процес, який дозволяє знайти відрізок $[a; b] \subseteq X$ локалізації точки мінімуму. Розглянемо один з варіантів такого процесу для випадку, коли $X = R^1$ і в довільній початковій точці $x_0 \in X$ невідомий напрям спадання функції $f(x)$. Починаючи з точки $x_0 \in X$, спочатку визначається напрям спадання функції $f(x)$ (якщо він існує), а потім процес продовжується доти, поки не буде пройдена хоча б одна точка мінімуму цільової функції. Ознакою цього є те, що значення функції в новій точці буде більше ніж у попередній. Якщо в процесі роботи буде одержано дві сусідні точки, в яких значення функції рівні, то в якості відрізка локалізації визначається відрізок з кінцями в цих точках. Згідно означення 25.1 такий відрізок містить принаймні одну точку $x^* \in X^*$. Це дає змогу уникнути зациклювання процесу, якщо множина X містить необмежений проміжок сталості цільової функції. В результаті реалізації процесу будуть отримані точки a, b – кінці відрізка, який містить принаймні одну точку $x^* \in X^*$, і значення функції $f(x)$ в цих точках: f_a і f_b.

Розглянемо схему алгоритму пошуку відрізка локалізації точки мінімуму унімодальної на $X = R^1$ функції $f(x)$.

Нехай задані довільне початкове наближення $x_0 \in R^1$ і величина $h > 0$, а також знайдено $f_0 = f(x_0)$.

К р о к 0. Знайти $\bar{x} := x_0 + h$ і обчислити $\bar{f} := f(\bar{x})$.

К р о к 1. Якщо $\bar{f} < f_0$, то покласти $x_1 := \bar{x}$, $f_1 := \bar{f}$ і перейти до виконання кроку 6.

К р о к 2. Якщо $\bar{f} = f_0$, то покласти $x_2 := \bar{x}$, $f_2 := \bar{f}$, і перейти до виконання кроку 9.

К р о к 3. Покласти $h := -h$, знайти $\tilde{x} := x_0 + h$ і обчислити $\tilde{f} := f(\tilde{x})$.

К р о к 4. Якщо $\tilde{f} < f_0$, то покласти $x_1 := \tilde{x}$, $f_1 := \tilde{f}$ і перейти до виконання кроку 6.

К р о к 5. Якщо $\tilde{f} = f_0$, то покласти $x_2 := \tilde{x}$, $f_2 := \tilde{f}$ і перейти до виконання кроку 9, інакше покласти $a := \tilde{x}$, $f_a := \tilde{f}$, $b := \bar{x}$, $f_b := \bar{f}$ і перейти до виконання кроку 10.

К р о к 6. Покласти $x_2 := x_1 + h$ і обчислити $f_2 := f(x_2)$.

К р о к 7. Якщо $f_2 < f_1$, то покласти $x_0 := x_1$, $f_0 := f_1$, $x_1 := x_2$, $f_1 := f_2$ і перейти до виконання кроку 6.

К р о к 8. Якщо $f_2 = f_1$, то покласти $x_0 := x_1$, $f_0 := f_1$.

К р о к 9. Якщо $h > 0$, то покласти $a := x_0$, $f_a := f_0$, $b := x_2$, $f_b := f_2$, інакше покласти $a := x_2$, $f_a := f_2$, $b := x_0$, $f_b := f_0$.

К р о к 10. Вивести a, b, f_a, f_b.

Кінець.

З а у в а ж е н н я:

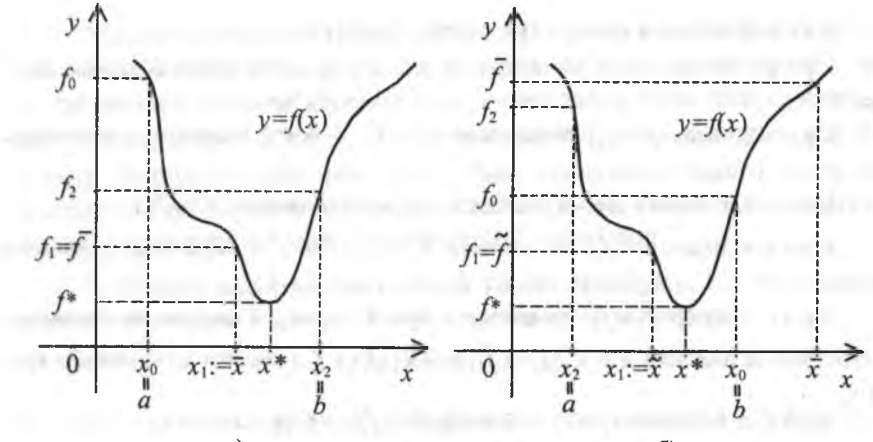
1. Кроки 0, 1, 3, 4 алгоритму визначають напрям спадання функції $f(x)$ (якщо він існує), а кроки 2, 5 одразу визначають відрізок локалізації принаймні однієї точки мінімуму функції $f(x)$.

2. Схему алгоритму можна модифікувати для випадків, коли $X = (-\infty; b]$ або $X = [a; +\infty)$.

Дамо геометричну інтерпретацію схеми алгоритму спочатку для випадку, коли $X^* = \{x^*\}$.

На рис. 25.3 а) зображено випадок, коли на початку процесу для точки $\bar{x} := x_0 + h$ виконується умова $\bar{f} < f_0$, тобто початковий напрям є напрямом спадання функції $f(x)$, тому покладається $x_1 := \bar{x}$, $f_1 := \bar{f}$. Потім знаходиться точка $x_2 := x_1 + h$ і обчислюється $f_2 := f(x_2)$. Оскільки $f_2 > f_1$ і $h > 0$, то покладається $a := x_0$, $f_a := f_0$, $b := x_2$, $f_b := f_2$ і процес завершується.

На рис. 25.3 б) зображено випадок, коли на початку процесу для точки $\bar{x} := x_0 + h$ виконується умова $\bar{f} > f_0$, тобто початковий напрям не є напрямом спадання функції $f(x)$. Тому покладається $h := -h$, знаходиться $\tilde{x} := x_0 + h$ і обчислюється $\tilde{f} := f(\tilde{x})$. В новій точці $\tilde{x}$ виконується умова $\tilde{f} < f_0$, тому покладається $x_1 := \tilde{x}$, $f_1 := \tilde{f}$, знаходиться точка $x_2 := x_1 + h$ і обчислюється $f_2 := f(x_2)$. Оскільки $f_2 > f_1$ і $h < 0$, то покладається $a := x_2$, $f_a := f_2$, $b := x_0$, $f_b := f_0$ і процес завершується.

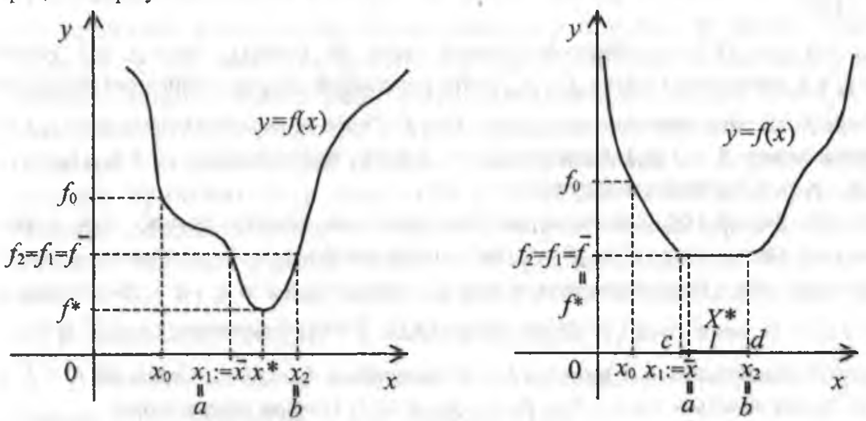


а) б)

Рис. 25.3.

На рис. 25.4 а) зображено випадок, коли на початку процесу для точки $\bar{x} := x_0 + h$ виконується умова $\bar{f} < f_0$, тобто початковий напрям є напрямом спадання функції $f(x)$, тому покладається $x_1 := \bar{x}$, $f_1 := \bar{f}$. Потім знаходиться точка $x_2 := x_1 + h$ і обчислюється $f_2 := f(x_2)$. Оскільки $f_2 = f_1$, то покладається $x_0 := x_1$, $f_0 := f_1$, а потім, враховуючи, що $h > 0$, покладається $a := x_0$, $f_a := f_0$, $b := x_2$, $f_b := f_2$ і процес завершується.

На рис. 25.4 б) зображено випадок, коли $X^* = [c; d]$. На початку процесу для точки $\bar{x} := x_0 + h$ виконується умова $\bar{f} < f_0$, тобто початковий напрям є напрямом спадання функції $f(x)$, тому покладається $x_1 := \bar{x}$, $f_1 := \bar{f}$. Потім знаходиться точка $x_2 := x_1 + h$ і обчислюється $f_2 := f(x_2)$. Оскільки $f_2 = f_1$, то покладається $x_0 := x_1$, $f_0 := f_1$, а потім, враховуючи, що $h > 0$, покладається $a := x_0$, $f_a := f_0$, $b := x_2$, $f_b := f_2$ і процес завершується.



а) б)

Рис. 25.4.

3. Метод дихотомії. Найпростішим наближеним методом, в якому використовується лише інформація про значення цільової функції в точках допустимої множини, є метод *поділу відрізка навпіл* (або *метод дихотомії*).

Нехай функція $f(x)$ унімодальна на відрізку $[a;b]$. У процесі роботи методу дихотомії будується послідовність вкладених відрізків

$$[a;b] \supset [a_1;b_1] \supset [a_2;b_2] \supset ... \supset [a_{n-1};b_{n-1}] \supset [a_n;b_n],$$

кожен з яких містить хоча б одну точку мінімуму x^* функції $f(x)$ на $[a;b]$.

Нехай задані числа $\varepsilon > 0$ (необхідна точність визначення точки x^*) і $\delta \in \left(0; \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$.

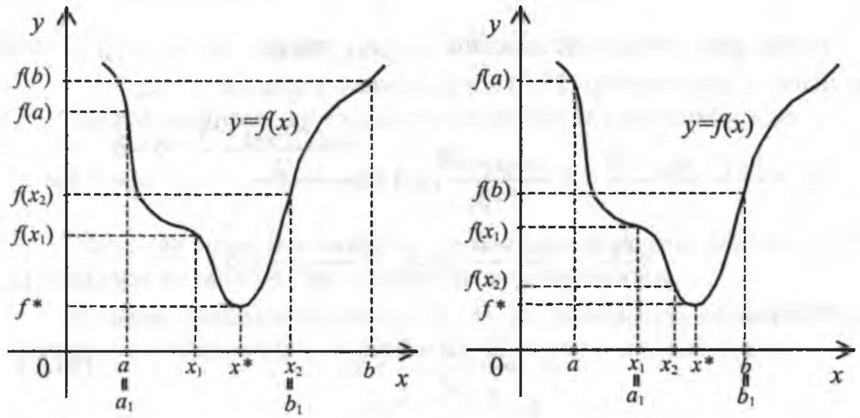
Пошук точки мінімуму функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ починається з вибору двох точок $x_1 \in [a;b]$, $x_2 \in [a;b]$ за правилом:

$$x_1 = \frac{a+b-\delta}{2}, \quad x_2 = \frac{a+b+\delta}{2}.$$

Точки x_1, x_2 розміщені симетрично відносно середини відрізка $[a;b]$ і при малих δ ділять відрізок $[a;b]$ майже навпіл (звідси назва методу).

Перехід від відрізка $[a;b]$ до відрізка $[a_1;b_1]$ відбувається так:

якщо $f(x_1) \le f(x_2)$, то покладають $a_1 = a$, $b_1 = x_2$ (рис. 25.5 а), в протилежному випадку $a_1 = x_1$, $b_1 = b$ (рис. 25.5 б).



а) б)

Рис. 25.5.

В силу унімодальності функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ зрозуміло, що відрізок $[a_1;b_1]$ має хоча б одну спільну точку з множиною X^* точок мінімуму функції $f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 25.5, 25.6) і його довжина Δ_1 визначається співвідношенням

$$\Delta_1 = \Delta_1' = \Delta_1'' = \frac{b-a+\delta}{2},$$

де $\Delta_1' = b_1 - a_1 = b - \frac{a+b-\delta}{2}$, $\Delta_1'' = b_1 - a_1 = \frac{a+b+\delta}{2} - a$.

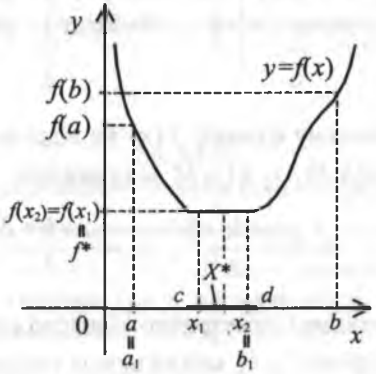


Рис. 25.6.

Надалі для визначення Δ_1 будемо використовувати співвідношення

$$\Delta_1 = \frac{b-a+\delta}{2} = \frac{b-a-\delta}{2} + \delta. \qquad (25.2)$$

Нехай вже отриманий відрізок $[a_k;b_k]$ такий, що $[a_k;b_k]\bigcap X^* \neq \varnothing$, при цьому з врахуванням (25.2) його довжина дорівнює

$$\Delta_k = \frac{b_{k-1}-a_{k-1}-\delta}{2} + \delta = \frac{\Delta_{k-1}-\delta}{2} + \delta = \frac{\frac{b_{k-2}-a_{k-2}-\delta}{2} + \delta - \delta}{2} + \delta =$$

$$= \frac{b_{k-2}-a_{k-2}-\delta}{2^2} + \delta = \ldots = \frac{b-a-\delta}{2^k} + \delta.$$

Отже,

$$\Delta_k = \frac{b-a-\delta}{2^k} + \delta. \qquad (25.3)$$

Якщо $\Delta_k < \varepsilon$, то задача розв'язана із заданою точністю ε і за наближення до деякої точки x^* множини X^* можна взяти точку $\bar{x} = a_k$,

якщо $f(a_k) \le f(b_k)$, або $\bar{x} = b_k$, якщо $f(a_k) > f(b_k)$, а значення $f(\bar{x})$ буде наближенням для $f^* = f(x^*) = \min\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$.

З а у в а ж е н н я. На практиці часто за наближення точки мінімуму функції $f(x)$ на $[a;b]$ беруть точку $\bar{x} = \frac{a_k+b_k}{2}$ з меншою ніж в попередньому випадку похибкою, яка не перевищує

$$\frac{b_k-a_k}{2} = \frac{b-a-\delta}{2^{k+1}} + \frac{\delta}{2}.$$

Якщо ж величина $\Delta_k \ge \varepsilon$, то визначаються точки

$$x_1 = \frac{a_k+b_k-\delta}{2}, \quad x_2 = \frac{a_k+b_k+\delta}{2}$$

і обчислюються значення $f(x_1)$ і $f(x_2)$.

Якщо $f(x_1) \le f(x_2)$, то покладають $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_2$, інакше $a_{k+1} = x_1$, $b_{k+1} = b_k$.

Згідно з (25.3) довжина отриманого відрізка $[a_{k+1};b_{k+1}]$ дорівнює

$$\Delta_{k+1} = b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b-a-\delta}{2^{k+1}} + \delta$$

і $[a_{k+1};b_{k+1}]\bigcap X^* \neq \varnothing$. Після чого повторюється перевірка умови $\Delta_{k+1} < \varepsilon$ і т.д.

Оскільки кожен крок методу дихотомії вимагає обчислення значення функції $f(x)$ у двох точках, то для досягнення потрібної точності ε за k кроків ($\Delta_k < \varepsilon$), необхідно зробити $n = 2k$ обчислень значень функції, при цьому з (25.3) маємо

$$\Delta_k = b_k - a_k = \frac{b-a-\delta}{2^k} + \delta < \varepsilon. \qquad (25.4)$$

Звідси випливає, що число кроків методу задовольняє умову

$$k > \log_2 \frac{b-a-\delta}{\varepsilon - \delta}.$$

Часто на практиці число n можливих обчислень значень функції $f(x)$ задане заздалегідь і його перебільшення небажане.

В цьому випадку нерівність (25.4) дає можливість оцінити точність отриманого наближення ε після $n = 2k$ обчислень значень функції:

$$\varepsilon < \frac{b-a-\delta}{2^{\frac{n}{2}}} + \delta.$$

Розглянемо схему алгоритму, що відповідає описаному методу дихотомії, в результаті реалізації якого будуть отримані точка $\bar{x}$ – наближений розв'язок задачі і значення функції $f(x)$ в цій точці – $\bar{f}$. Величини $\bar{x}$, $\bar{f}$ визначаються з метою подальшого їх використання в методах багатовимірної мінімізації, коли метод дихотомії буде застосовуватися як допоміжний.

Нехай задано відрізок $[a;b]$, де функція $f(x)$ унімодальна, $\varepsilon > 0$ таке, що $b-a \geq \varepsilon$, і $\delta \in (0; \varepsilon/2)$.

К р о к 1. Знайти точки $x_1 := \dfrac{a+b-\delta}{2}$, $x_2 := \dfrac{a+b+\delta}{2}$ і обчислити $f_1 := f(x_1)$, $f_2 := f(x_2)$.

К р о к 2. Якщо $f_1 \leq f_2$, то покласти $a := a$, $b := x_2$, $\bar{x} := a$, $\bar{f} := f_1$, інакше $a := x_1$, $b := b$, $\bar{x} := b$, $\bar{f} := f_2$.

К р о к 3. Якщо $b-a < \varepsilon$, то перейти до виконання кроку 4, в протилежному випадку перейти до виконання кроку 1.

К р о к 4. Вивести $\bar{x}$, $\bar{f}$.

Кінець.

З а у в а ж е н н я:

1. Величина δ в методі дихотомії добирається в залежності від кількості ймовірних десяткових знаків при обчисленні аргументу x і не може бути меншою за машинний нуль конкретної ЕОМ, яка використовується при розв'язуванні задачі.

2. Метод дихотомії без змін можна застосовувати для мінімізації функцій, які не є унімодальними. Однак у цьому випадку не можна гарантувати, що отриманий розв'язок буде досить хорошим наближенням до точки глобального мінімуму функції $f(x)$.

3. На кроці 4 можна покласти $\bar{x} := \dfrac{a+b}{2}$, $\bar{f} := f(\bar{x})$ і вивести одержані результати.

4. Метод золотого перерізу. Для розв'язування задачі (25.1) мінімізації унімодальної функції на заданому відрізку розглянемо метод, який за своєю структурою є досить простим і дозволяє розв'язати задачу з необхідною точністю при меншій кількості обчислень значень функції порівняно з методом дихотомії. В основу цього методу покладено властивості золотого перерізу відрізка. Поділ відрізка на дві нерівні частини так, що відношення довжини всього відрізка до довжини його більшої частини дорівнює відношенню довжини більшої частини до довжини меншої частини відрізка називається *золотим перерізом* цього відрізка.

Визначимо точки, які здійснюють золотий переріз заданого відрізка $[a;b]$. Очевидно, що таких точок буде дві (рис. 25.7 а).

а) б)

Рис. 25.7.

Згідно означення золотого перерізу, можна скласти два рівняння відносно невідомих u і v відповідно:

$$\frac{b-a}{b-u} = \frac{b-u}{u-a}, \tag{25.5}$$

$$\frac{b-a}{v-a} = \frac{v-a}{b-v}. \tag{25.6}$$

Розв'язки рівнянь (25.5) і (25.6) будемо шукати у вигляді:

$$u = a + x, \quad v = a + y,$$

де $0 < x < (b-a)$ і $0 < y < (b-a)$ (рис. 25.7 б).

Одержуємо два квадратних рівняння

$$x^2 - 3(b-a)x + (b-a)^2 = 0,$$

$$y^2 + (b-a)y - (b-a)^2 = 0,$$

коренями яких є

$$x_1 = \frac{(3-\sqrt{5})}{2}(b-a) \quad \text{і} \quad x_2 = \frac{(3+\sqrt{5})}{2}(b-a),$$

$$y_1 = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}(b-a) \quad \text{і} \quad y_2 = \frac{(\sqrt{5}+1)}{2}(b-a).$$

Оскільки $a + x_2 > b$ і $a + y_2 > b$, то золоті перерізи визначаються точками

$$u = a + x_1 = a + \frac{(3-\sqrt{5})}{2}(b-a) \approx a + 0{,}381966011 \cdot (b-a), \tag{25.7}$$

$$v = a + y_1 = a + \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}(b-a) \approx a + 0{,}618033989 \cdot (b-a). \tag{25.8}$$

Ці точки розташовані симетрично відносно середини відрізка $[a;b]$ і $a < u < v < b$, при цьому шукане відношення між довжинами відрізків у золотому перерізі, наприклад, з (25.5) і (25.7) дорівнює

$$\frac{b-a}{b-u} = \frac{b-a}{b - \left(a + \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}(b-a)\right)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618034. \tag{25.9}$$

Точка u називається *першою* точкою золотого перерізу, а точка v – *другою*.

Можна показати, що точка u є в свою чергу другою точкою золотого перерізу відрізка $[a;v]$. Дійсно, із означення золотого перерізу і формул (25.7), (25.8) маємо нерівність $v-u<u-a$ і рівність $u-a=b-v$. Тоді, враховуючи (25.6) і (25.9),

$$\frac{v-a}{u-a}=\frac{\sqrt{5}+1}{2},\ \frac{u-a}{v-u}=\frac{x_1}{y_1-x_1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2},\ \text{тобто}\ \frac{v-a}{u-a}=\frac{u-a}{v-u}.$$

Аналогічно можна показати, що точка v є першою точкою золотого перерізу відрізка $[u;b]$.

Знаючи одну з точок золотого перерізу відрізка $[a;b]$, іншу можна знайти за однією з формул:

$$u=a+b-v \quad \text{або} \quad v=a+b-u.$$

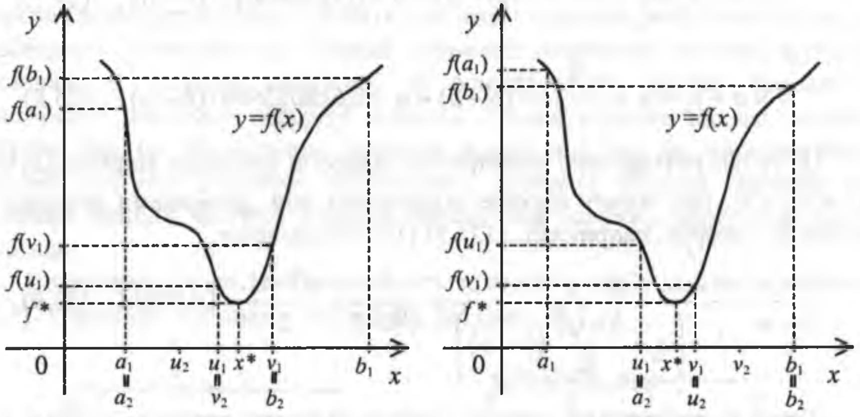
Використовуючи розглянуті властивості золотого перерізу, можна запропонувати такий метод мінімізації унімодальної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$.

Нехай $\varepsilon>0$ – задана точність відшукання точки мінімуму. Покладемо на першому кроці $a_1=a,\ b_1=b$, знайдемо точки u_1 і v_1, наприклад, за формулами

$$u_1=a_1+\frac{(3-\sqrt{5})}{2}(b_1-a_1),\quad v_1=a_1+b_1-u_1, \qquad (25.10)$$

і обчислимо значення функції $f(x)$ у цих точках: $f(u_1),\ f(v_1)$.

Якщо $f(u_1)\le f(v_1)$ (рис. 25.8 а)), то покласти $a_2=a_1,\ b_2=v_1,\ v_2=u_1$, $f(v_2)=f(u_1)$, знайти $u_2=a_2+b_2-v_2$ і обчислити $f(u_2)$.



а) б)

Рис. 25.8.

Якщо $f(u_1)>f(v_1)$ (рис 27.2 б)), то покласти $a_2=u_1,\ b_2=b_1,\ u_2=v_1$, $f(u_2)=f(v_1)$, знайти $v_2=a_2+b_2-u_2$ і обчислити $f(v_2)$.

В силу унімодальності функції $f(x)$ на $[a;b]$, відрізок $[a_2;b_2]$ має хоча б одну спільну точку з множиною X^* точок мінімуму $f(x)$ на $[a;b]$. При цьому довжина відрізка $[a_2;b_2]$ дорівнює

$$b_2-a_2=\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}(b-a).$$

Дійсно, при $f(u_1)\le f(v_1)$ $\ a_2=a_1,\ b_2=v_1$ і тоді

$$b_2-a_2=v_1-a_1=a_1+\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}(b_1-a_1)-a_1=\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}(b-a),$$

а при $f(u_1)>f(v_1)$ $\ a_2=u_1,\ b_2=b_1$ і тоді

$$b_2-a_2=b_1-u_1=b_1-\left(a_1+\frac{(3-\sqrt{5})}{2}(b_1-a_1)\right)=\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}(b-a).$$

Нехай вже визначений відрізок $[a_n;b_n]$, знайдені точки u_n, v_n, значення $f(u_n),\ f(v_n)$, при цьому $[a_n;b_n]\cap X^*\ne\varnothing$ і

$$\Delta_n=b_n-a_n=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n-1}(b-a). \qquad (25.11)$$

Якщо $b_n-a_n<\varepsilon$, то процес обчислень закінчується і за наближений розв'язок задачі беруть точку $\bar{x}=u_n$, якщо $f(u_n)\le f(v_n)$, або $\bar{x}=v_n$, якщо $f(u_n)>f(v_n)$, при цьому похибка наближення $\bar{x}\in[a_n;b_n]$, з урахуванням (25.11), не перевищує величину

$$\Delta g=\max\{b_n-u_n, v_n-a_n\}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_n-a_n)=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n(b-a)<\varepsilon. \ (25.12)$$

Якщо ж $b_n-a_n\ge\varepsilon$, то при $f(u_n)\le f(v_n)$ потрібно покласти $a_{n+1}=a_n,\ b_n=v_n,\ v_{n+1}=u_n,\ f(v_{n+1})=f(u_n)$, знайти $u_{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}-v_{n+1}$ і обчислити $f(u_{n+1})$, а інакше покласти $a_{n+1}=u_n,\ b_{n+1}=b_n,\ u_{n+1}=v_n$, $f(u_{n+1})=f(v_n)$, знайти $v_{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}-u_{n+1}$ і обчислити $f(v_{n+1})$.

Після цього треба повторити перевірку умови $b_{n+1}-a_{n+1}<\varepsilon$ і т. д.

Як видно з опису методу, на кожному його кроці (окрім першого) обчислюється лише одне значення функції $f(x)$ (на відміну від методу дихотомії). Кількість кроків n методу золотого перерізу, яка забезпечує задану точність наближення до деякої точки $x^*\in X^*$, задовільняє нерівність (див. (25.12))

$$n \ge \frac{\ln\left(\dfrac{\varepsilon}{b-a}\right)}{\ln\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}} \approx -2{,}078087 \cdot \ln\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right).$$

Розглянемо схему алгоритму, що відповідає описаному методу золотого перерізу. Нехай задано відрізок $[a;b]$, де функція $f(x)$ унімодальна, і $\varepsilon > 0$ таке, що $b-a \ge \varepsilon$.

К р о к 1. Знайти точки $u := a + \frac{(3-\sqrt{5})}{2}(b-a)$, $v := a+b-u$ і обчислити $f_u := f(u)$, $f_v := f(v)$.

К р о к 2. Якщо $f_u \le f_v$, то покласти $a := a$, $b := v$, $\bar{x} := u$, $\bar{f} := f(u)$, $v := u$, $f_v := f_u$, знайти $u := a+b-v$ і обчислити $f_u := f(u)$; інакше покласти $a := u$, $b := b$, $\bar{x} := v$, $\bar{f} := f(v)$, $u := v$, $f_u := f_v$, знайти $v := a+b-u$ і обчислити $f_v := f(v)$.

К р о к 3. Якщо $b-a < \varepsilon$, то перейти до виконання кроку 4, інакше перейти до виконання кроку 2.

К р о к 4. Вивести $\bar{x}, \bar{f}$.

Кінець.

З а у в а ж е н н я. Чисельна реалізація описаного методу золотого перерізу, призводить до того, що він стає практично незастосовним навіть при невеликих n. Це пов'язано з тим, що значення $\sqrt{5}$ в комп'ютері обчислюється наближено і вже перші точки ітераційного процесу (див. (25.10)) будуть знайдені з деякою похибкою, яка при збільшенні n досить швидко накопичується, а це призводить до того, що порушується властивість симетричності методу.

Розглянемо схему алгоритму модифікованого методу золотого перерізу, за яким у випадку порушення симетричності методу, а, точніше, коли на деякому кроці n буде $v_n < u_n$, для поточного відрізка $[a_n; b_n]$ перевизначається золотий переріз за формулами (25.10), що забезпечує його практичну застосовність до розв'язування задач одновимірної мінімізації та перевагу перед методом дихотомії за кількістю обчислень значень функції $f(x)$ при заданій точності ε.

Нехай задано $[a;b]$, де функція $f(x)$ унімодальна, і $\varepsilon > 0$ таке, що $b-a \ge \varepsilon$.

К р о к 0. Знайти точки $u := a + \frac{(3-\sqrt{5})}{2}(b-a)$, $v := a+b-u$ і обчислити $f_u := f(u)$, $f_v := f(v)$.

К р о к 1. Якщо $f_u \le f_v$, то покласти $a := a$, $b := v$, $\bar{x} := u$, $\bar{f} := f_u$, $v := u$, $f_v := f_u$, знайти $u := a+b-v$ і обчислити $f_u := f(u)$; інакше покласти $a := u$, $b := b$, $\bar{x} := v$, $\bar{f} := f(v)$, $u := v$, $f_u := f_v$, знайти $v := a+b-u$ і обчислити $f_v := f(v)$.

К р о к 2. Якщо $u \ge v$, то знайти $u := a + \frac{(3-\sqrt{5})}{2}(b-a)$, $v := a+b-u$ і обчислити $f_u := f(u)$, $f_v := f(v)$.

К р о к 3. Якщо $b-a < \varepsilon$, то перейти на виконання кроку 4, інакше перейти до виконання кроку 1.

К р о к 4. Вивести $\bar{x}, \bar{f}$.

Кінець.

З а у в а ж е н н я:

1. На кроці 4, як і в методі дихотомії, можна покласти $\bar{x} := \frac{a+b}{2}$, $\bar{f} := f(\bar{x})$ і вивести одержані результати.

2. Розглянуту схему методу золотого перерізу можна застосовувати на практиці і для більш широкого класу неперервних функцій, але отриманий при цьому розв'язок може виявитися далеким від точки глобального мінімуму.

5. Метод Фібоначчі. У тих випадках, коли обчислення значень функції пов'язане з певними труднощами, важливого значення набувають найбільш економні методи, за якими можна розв'язати задачу мінімізації з потрібною точністю при якомога меншій кількості обчислень значень функції, яку мінімізують. Розглянемо один з таких методів, який є одним з найбільш ефективних для класу унімодальних функцій і тісно пов'язаний із числами Фібоначчі (див., наприклад, [18]).

Як відомо, числа Фібоначчі визначаються співвідношеннями:

$$F_1 = F_2 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2},\ i = 3, 4, 5, \ldots . \qquad (25.13)$$

Наведемо кілька перших чисел Фібоначчі:
$F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$, $F_9 = 34$, $F_{10} = 55$, $F_{11} = 89$, $F_{12} = 144$, $F_{13} = 233$, $F_{14} = 377$, $F_{15} = 610, \ldots$, $F_{20} = 6765, \ldots$, $F_{25} = 75025$.

За методом індукції можна довести, що n-те число Фібоначчі можна подати у вигляді:

$$F_n = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}},\quad n = 1, 2, \ldots .$$

Цю формулу називають формулою *Біне*. При досить великому n

$$F_n \approx \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}, \qquad (25.14)$$

тобто числа Фібоначчі із зростанням n зростають досить швидко.

Нехай $f(x)$ – унімодальна на відрізку $[a;b]$ функція і задано число n обчислень значень цієї функції, яке повинно забезпечити необхідну точність відшукання наближення деякої точки x^* мінімуму функції $f(x)$ на $[a;b]$. Метод Фібоначчі, як і метод золотого перерізу, відноситься до класу *симетричних методів* і визначається заданням на відрізку $[a;b]$ двох точок, симетричних відносно його середини (рис. 25.9):

$$u = a + \frac{F_n}{F_{n+2}}(b-a) \ \text{ і } \ v = a+b-u = a + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}(b-a).$$

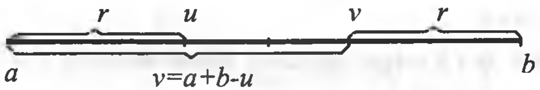


Рис. 25.9.

Далі на кожному кроці методу вибирається точка, симетрична відносно середини поточного відрізка локалізації до точки, яка лежить всередині цього відрізка і знайдена на попередньому кроці.

Розглянемо перші кроки методу Фібоначчі. Нехай $a_1 = a$, $b_1 = b$. Знайдемо $u_1 = a_1 + \frac{F_n}{F_{n+2}}(b_1 - a_1)$, $v_1 = a_1 + b_1 - u_1$, де F_n, F_{n+2} – відповідні числа Фібоначчі при заданому n, які знаходяться за допомогою рекурентного співвідношення (25.13) або за формулою Біне.

Якщо $f(u_1) \le f(v_1)$, то наступним відрізком локалізації є відрізок $[a_2; b_2]$, де $a_2 = a_1$, $b_2 = v_1$. У цьому випадку точка u_1 буде визначати точку $v_2 \in [a_2; b_2]$, тобто $v_2 = u_1$, а точка $u_2 = a_2 + b_2 - v_2$. Крім того легко перевірити, що $v_2 = a_2 + \frac{F_n}{F_{n+1}}(b_2 - a_2)$.

Якщо ж $f(u_1) > f(v_1)$, то наступним відрізком локалізації є відрізок $[a_2; b_2]$, де $a_2 = u_1$, $b_2 = b_1$. У цьому випадку точка v_1 буде визначати точку $u_2 \in [a_2; b_2]$, тобто $u_2 = v_1$, а точка $v_2 = a_2 + b_2 - u_2$. Крім того, легко перевірити, що $u_2 = a_2 + \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}(b_2 - a_2)$.

За методом індукції можна показати, що на k-му кроці методу Фібоначчі буде отримана трійка a_k, x_k, b_k, яка локалізує хоча б одну точку x^* з множини X^* точок мінімуму функції $f(x)$ і така, що

$$\Delta_k = b_k - a_k = \frac{F_{n-k+3}}{F_{n+2}}(b-a), \; 1 \le k \le n, \qquad (25.15)$$

$a_1 = a$, $b_1 = b$, а точка x_k, $a_k < x_k < b_k$, для якої

$$f(x_k) = \min_{i=\overline{1,k}} \{f(u_i), f(v_i)\},$$

співпадає з однією з точок

$$u_k = a_k + \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+3}}(b_k - a_k) = a_k + \frac{F_{n-k+1}}{F_{n+2}}(b-a), \qquad (25.16)$$

$$v_k = a_k + \frac{F_{n-k+2}}{F_{n-k+3}}(b_k - a_k) = a_k + \frac{F_{n-k+2}}{F_{n+2}}(b-a),$$

які розташовані на відрізку $[a_k; b_k]$ симетрично відносно його середини. При $k = n$ процес закінчується. В цьому випадку згідно формул (25.13), (25.15), (25.16) довжина відрізка $[a_n; b_n]$ дорівнює

$$\Delta_n = b_n - a_n = \frac{2}{F_{n+2}}(b-a), \qquad (25.17)$$

а точки

$$u_n = a_n + \frac{F_1}{F_{n+2}}(b-a), \quad v_n = a_n + \frac{F_2}{F_{n+2}}(b-a)$$

співпадають ($F_1 = F_2 = 1$) і є серединою відрізка $[a_n; b_n]$.

За наближений розв'язок задачі пошуку точки x^* мінімуму функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ приймають точку $x_n = u_n = v_n$. При цьому похибка наближення $x_n \in [a_n; b_n]$, з урахуванням (25.17), не перевищує величину

$$\frac{b-a}{F_{n+2}}.$$

З а у в а ж е н н я. Після k кроків методу Фібоначчі відношення довжини відрізка локалізації $\Delta_k = b_k - a_k$ (див. (25.15)) до довжини більшого відрізка $\delta_k = v_k - a_k = \frac{F_{n-k+2}}{F_{n+2}}(b-a)$ (див. (25.16)), дорівнює $\frac{\Delta_k}{\delta_k} = \frac{F_{n-k+3}}{F_{n-k+2}}$. Тоді, враховуючи (25.14), при досить великих n маємо

$$\frac{\Delta_k}{\delta_k} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Крім того, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+2}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, тобто при досить великому n початкові точки u_1, v_1 методів Фібоначчі та золотого перерізу практично співпадають (див. (25.7), (25.8)).

Це зауваження свідчить про тісний зв'язок між методами Фібоначчі та золотого перерізу. Детальний порівняльний аналіз цих методів можна знайти, наприклад, у [18].

Розглянемо схему алгоритму, що відповідає описаному методу Фібоначчі. Нехай задано $n > 0$ – число обчислень значень функції $f(x)$ і відрізок $[a; b]$, на якому ця функція унімодальна.

К р о к 0. Покласти $k := 1$.

К р о к 1. Обчислити F_n, F_{n+2}, знайти точки

$$u := a + \frac{F_n}{F_{n+2}}(b-a), \quad v := a + b - u$$

і значення $f_u := f(u)$, $f_v := f(v)$.

К р о к 2. Якщо $f_u \le f_v$, то покласти $a := a$, $b := v$, $\bar{x} := u$, $\bar{f} := f(u)$, $v := u$, $f_v := f_u$, знайти $u := a + b - v$ і обчислити $f_u := f(u)$; інакше покласти $a := u$, $b := b$, $\bar{x} := v$, $\bar{f} := f(v)$, $u := v$, $f_u := f_v$, знайти $v := a + b - u$ і обчислити $f_v := f(v)$.

К р о к 3. Якщо $k = n$, то перейти на виконання кроку 4, інакше покласти $k := k+1$ перейти до виконання кроку 2.

К р о к 4. Вивести $\bar{x}, \bar{f}$.

Кінець.

З а у в а ж е н н я.

1. Числа Фібоначчі F_n, F_{n+2} при заданому n на кроці 1 знаходяться за допомогою рекурентного співвідношення (25.13) або за формулою Біне.

2. Якщо задана точність обчислень результату $\varepsilon > 0$, то з (25.17) випливає, що число n в методі Фібоначчі треба вибирати з умови $\dfrac{b-a}{F_{n+2}} < \varepsilon$.

3. При практичній реалізації методу Фібоначчі, треба мати на увазі, що число $\dfrac{F_n}{F_{n+2}}$, взагалі кажучи, є нескінченним дробом, тому перша точка u_1 буде знайдена наближено. В зв'язку з цим похибка у визначенні цієї точки, як правило, призводить до швидкого зростання похибки на наступних ітераціях методу, і вже при не дуже великих n симетричність методу порушується.

Розглянемо схему методу Фібоначчі, в якому у випадку порушення симетричності методу, а, точніше, коли на деякому кроці k буде $v_k < u_k$, точка u_k для поточного відрізка $[a_k; b_k]$ обчислюється за рекурентним співвідношенням (25.16), а точка v_k – за формулою $v_k := a_k + b_k - u_k$, що забезпечує практичну застосовність методу до розв'язування задач одновимірної мінімізації.

Нехай задано $n > 0$ – число обчислень значень функції $f(x)$ і відрізок $[a; b]$, на якому ця функція унімодальна.

К р о к 0. Покласти $k := 1$.

К р о к 1. Знайти числа Фібоначчі F_n, F_{n+2}, точки

$$u := a + \frac{F_n}{F_{n+2}}(b-a), \; v := a + b - u$$

і обчислити $f_u := f(u)$, $f_v := f(v)$.

К р о к 2. Якщо $f_u \le f_v$, то покласти $a := a$, $b := v$, $\bar{x} := u$, $\bar{f} := f_u$, $v := u$, $f_v := f_u$, знайти $u := a + b - v$ і обчислити $f_u := f(u)$; інакше покласти $a := u$, $b := b$, $\bar{x} := v$, $\bar{f} := f(v)$, $u := v$, $f_u := f_v$, знайти $v := a + b - u$ і обчислити $f_v := f(v)$.

К р о к 3. Покласти $k := k+1$.

К р о к 4. Якщо $u \ge v$ і $k < n$, то знайти числа Фібоначчі F_{n-k+1}, F_{n-k+3}, точки

$$u := a + \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+3}}(b-a), \; v := a + b - u$$

і обчислити $f_u := f(u)$, $f_v := f(v)$.

К р о к 5. Якщо $k = n$, то перейти на виконання кроку 6, інакше перейти до виконання кроку 2.

К р о к 6. Вивести $\bar{x}, \bar{f}$.

Кінець.

З а у в а ж е н н я. Описану схему методу Фібоначчі можна застосовувати на практиці і для більш широкого класу неперервних функцій, але отриманий при цьому розв'язок може виявитися далеким від точку глобального мінімуму.

6. Метод парабол. Часто функцію $f(x)$, точку мінімуму якої потрібно знайти, зручно апроксимувати многочленом, наприклад, другого степеня. Тоді за наближене значення точки мінімуму функції $f(x)$ доцільно взяти точку мінімуму цього многочлена. Оскільки графік многочлена другого степеня є параболою, то такий метод називають *методом парабол*. Цей метод дає хороші результати при мінімізації гладких строго унімодальних функцій, тому що в досить малому околі точки мінімуму графіки таких функцій досить «близькі» до параболи.

Нехай $f(x)$ унімодальна на $[a; b]$ функція.

О з н а ч е н н я 25.2. Трійка чисел x_0, x_1, x_2, таких що $a \le x_0 < x_1 < x_2 \le b$, називається *вдалою*, якщо

$$f(x_1) \le \min\{f(x_0), f(x_2)\} \text{ і } f(x_1) < \max\{f(x_0), f(x_2)\}.$$

Остання умова означає, що точки $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ не лежать на прямій, паралельній до осі абсцис. Зауважимо, що для строго унімодальної функції така ситуація неможлива.

З означення вдалої трійки випливає, що точка x^* мінімуму строго унімодальної функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ міститься всередині відрізка $[x_0, x_2]$ (рис. 25.10).

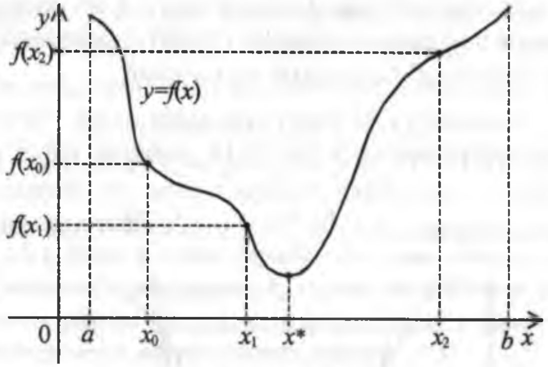


Рис. 25.10.

Нехай задано три точки x_0, x_1, x_2, які задовольняють умову $a = x_0 < x_1 < x_2 = b$ і утворюють вдалу трійку. При цьому відомі значення функції $f(x)$ в цих точках $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$.

Існують різні способи побудови інтерполяційного многочлена другого степеня $P_2(x)$, значення якого в точках x_0, x_1, x_2 збігаються з значеннями функції $f(x)$, тобто

$$P_2(x_i) = f(x_i), \; i = \overline{0,2} \tag{25.18}$$

(див., наприклад, [30], [40]).

Будемо будувати многочлен $P_2(x)$ у вигляді

$$P_2(x) = a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_1(x - x_0) + a_0. \qquad (25.19)$$

Коефіцієнти a_0, a_1, a_2 визначимо так, щоб виконувалась умова (25.18). Для цього підставимо в (25.19) замість x значення x_0, x_1, x_2 і одержимо:

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

$$a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Підставивши знайдені значення коефіцієнтів a_0, a_1, a_2 в (25.19), матимемо:

$$P_2(x) = \left(\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right) \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{x_2 - x_1} + $$

$$+ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0). \qquad (25.20)$$

Оскільки задана трійка чисел x_0, x_1, x_2 є вдалою, то можна показати, що коефіцієнт при старшому члені многочлена (25.20) додатній.

Визначивши похідну многочлена (25.20) і прирівнявши її до нуля, одержуємо, що мінімум $P_2(x)$ досягається в точці

$$\bar{x} = \frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{(f(x_1) - f(x_0))(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}{2((f(x_1) - f(x_0))(x_2 - x_0) - (f(x_2) - f(x_0))(x_1 - x_0))}, \quad (25.21)$$

при цьому можна показати, що $\frac{x_0 + x_1}{2} \le \bar{x} \le \frac{x_1 + x_2}{2}$ (рис. 25.11).

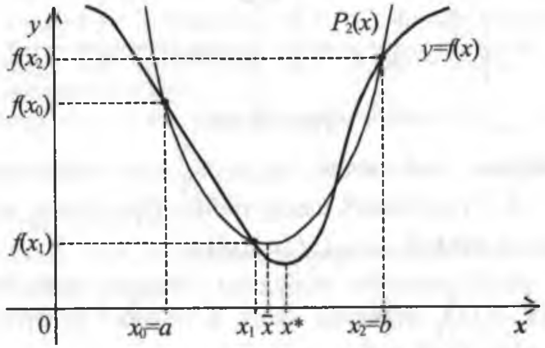


Рис. 25.11.

Далі із точок $x_0, x_1, x_2, \bar{x}$ треба вибрати нову вдалу трійку x_0, x_1, x_2 і повторити обчислення за формулою (25.21) і т.д.

Можливий випадок, коли $\bar{x} = x_1$ (рис. 25.12). Тоді нову вдалу трійку вибирають серед точок

$$x_0, \bar{x} = \frac{x_0 + x_1}{2}, x_1, x_2 \quad \text{або} \quad x_0, x_1, \bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}, x_2.$$

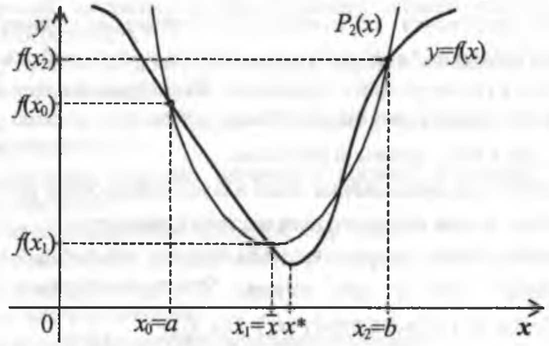


Рис. 25.12.

Закінчити пошук наближеного значення точки мінімуму функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ можна, якщо виконується одна з умов $|x_1 - \bar{x}| < \varepsilon$ чи $|x_2 - \bar{x}| < \varepsilon$, при цьому наближено можна покласти $x^* \approx \bar{x}$, $f(x^*) \approx f(\bar{x})$.

Метод парабол доцільно застосовувати після того, як знайдено відрізок локалізації $[a; b]$ точки мінімуму функції $f(x)$ досить малої довжини. Наприклад, такий відрізок може бути отриманий після k кроків методу дихотомії або золотого перерізу. Чисельні експерименти показують, що якщо функція $f(x)$ добре апроксимується параболою в околі точки мінімуму, то метод парабол виявляється більш ефективним, ніж інші методи мінімізації.

З а у в а ж е н н я. Якщо в методі парабол початкова трійка точок x_0, x_1, x_2 не є вдалою, то точка мінімуму $\bar{x}$ многочлена $P_2(x)$, яка знаходиться за формулою (25.21), може бути за межами відрізка $[x_0; x_2]$, який містить точку мінімуму функції $f(x)$, і метод буде збігатися до точки, яка не є точкою мінімуму $f(x)$.

Для знаходження початкової вдалої трійки x_0, x_1, x_2 на відрізку $[a; b]$ локалізації точки мінімуму строго унімодальної функції $f(x)$ можна запропонувати наступну процедуру. При цьому будемо вважати, що точка мінімуму $f(x)$ не співпадає з одним з кінців відрізка $[a; b]$.

К р о к 0. Покласти $k := 1$, $x_0 := a$, $x_2 := b$, $x_1 := \frac{a+b}{2}$ і обчислити $f_0 := f(x_0)$, $f_1 := f(x_1)$, $f_2 := f(x_2)$.

К р о к 1. Якщо $f_1 \le \min\{f_0, f_2\}$, то перейти до виконання кроку 4.

К р о к 2. Якщо $f_1 > f_0$, то покласти $x_1 := x_0 + \frac{b-a}{2^{k+1}}$, $f_1 := f(x_1)$, $k := k+1$ і перейти до виконання кроку 1.

К р о к 3. Якщо $f_1 > f_2$, то покласти $x_1 := x_2 - \frac{b-a}{2^{k+1}}$, $f_1 := f(x_1)$, $k := k+1$ і перейти до виконання кроку 1.

К р о к 4. Вивести вдалу трійку: x_0, x_1, x_2.

Кінець.

П р и м і т к а. Якщо точка x^* мінімуму $f(x)$ співпадає з одним з кінців відрізка $[a; b]$ (тобто вдалої трійки на $[a; b]$ не існує), то точка x_1 буде наближатися до відповідного кінця відрізка з геометричною швидкістю. Якщо при деякому k буде виконана умова $x_1 - x_0 < \varepsilon$, то можна покласти $x^* := x_0$, $f^* := f_0$, а якщо $x_2 - x_1 < \varepsilon$, то $x^* := x_2$, $f^* := f_2$, де $\varepsilon > 0$ – досить мале число.

В методі парабол для знаходження нової вдалої трійки серед точок $x_0, x_1, x_2, \bar{x}$, після їх упорядкування, можна запропонувати наступну процедуру.

Нехай знайдено точки x_0, x_1, x_2, $x_3 \in [a;b]$ такі, що $a \le x_0 < x_1 < x_2 < x_3 \le b$, і відомі значення функції $f(x)$ у цих точках: $f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3)$, причому $f(x_1) \le \min\{f(x_0), f(x_3)\}$ і $f(x_2) \le \min\{f(x_0), f(x_3)\}$.

Оскільки функція $f(x)$ строго унімодальна, то при $f(x_1) < f(x_2)$ вдалою буде трійка x_0, x_1, x_2, а при $f(x_1) > f(x_2)$ вдалою буде трійка x_1, x_2, x_3 і треба покласти $x_0 := x_1$, $x_1 := x_2$, $x_2 := x_3$. Якщо ж $f(x_1) = f(x_2)$, то $x^* \in [x_1; x_2]$ і будь-яка з трійок x_0, x_1, x_2 чи x_1, x_2, x_3 буде вдалою. При цьому доцільно вибрати ту трійку, якій відповідає менший з відрізків $[x_0; x_2]$ або $[x_1; x_3]$.

Наведемо схему алгоритму, що відповідає описаному методу парабол, з процедурою визначення нової вдалої трійки на кожному його кроці.

Нехай задані відрізок $[a;b]$ локалізації точки мінімуму функції $f(x)$, вдала трійка x_0, x_1, x_2 така, що $a \le x_0 < x_1 < x_2 \le b$, і досить мале число $\varepsilon > 0$.

К р о к 0. Обчислити $f_0 := f(x_0)$, $f_1 := f(x_1)$, $f_2 := f(x_2)$.

К р о к 1. Знайти точку $\bar{x} = \frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{(f_1 - f_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}{2((f_1 - f_0)(x_2 - x_0) - (f_2 - f_0)(x_1 - x_0))}$ і обчислити $\bar{f} := f(\bar{x})$.

К р о к 2. Якщо $|\bar{x} - x_1| < \varepsilon$ або $|\bar{x} - x_2| < \varepsilon$, то покласти $x^* := \bar{x}$, $f^* := \bar{f}$ і перейти до виконання кроку 5.

К р о к 3. Якщо $\bar{x} < x_1$, то покласти $x_3 := x_2$, $f_3 := f_2$, $x_2 := x_1$, $f_2 := f_1$, $x_1 := \bar{x}$, $f_1 := \bar{f}$ і перейти до виконання кроку 4, інакше якщо $\bar{x} > x_1$, то покласти $x_3 := x_2$, $f_3 := f_2$, $x_2 := \bar{x}$, $f_2 := \bar{f}$ і перейти до виконання кроку 4, інакше $x_3 := x_2$, $f_3 := f_2$, $x_2 := x_1$, $f_2 := f_1$, $x_1 := \frac{x_0 + x_1}{2}$, $f_1 := f(x_1)$.

К р о к 4. Якщо $f_1 > f_2$, то покласти $x_0 := x_1$, $f_0 := f_1$, $x_1 := x_2$, $f_1 := f_2$, $x_2 := x_3$, $f_2 := f_3$ і перейти до виконання кроку 1, інакше новою вдалою трійкою є x_0, x_1, x_2 і треба перейти до виконання кроку 1.

К р о к 5. Вивести x^*, f^*.

Кінець.

З а у в а ж е н н я. Крок 3 наведеної схеми упорядковує точки x_0, x_1, x_2 і $\bar{x}$, а крок 4 визначає нову вдалу трійку x_0, x_1, x_2 серед упорядкованих точок x_0, x_1, x_2, x_3.

Запитання для самоконтролю

1. Чим визначається складність розв'язування задачі оптимізації?
2. Чим обумовлена необхідність дослідження задач одновимірної оптимізації та розробка чисельних методів їх розв'язування?
3. Які функції називаються унімодальними (строго унімодальними) і яка їх головна особливість?
4. У чому полягає суть методів пошуку відрізка локалізації точки мінімуму для унімодальної функції?
5. У чому полягає суть методу дихотомії, які рекурентні співвідношення в ньому використовуються?
6. Чому дорівнює довжина поточного відрізка локалізації після n ітерацій методу дихотомії?
7. Що називається золотим перерізом відрізка?
8. У чому полягає суть методу золотого перерізу, які рекурентні співвідношення в ньому використовуються?
9. Що таке числа Фібоначчі?
10. Як можна наближено обчислити числа Фібоначчі?
11. У чому полягає суть методу Фібоначчі, які рекурентні співвідношення в ньому використовуються?
12. Які методи одновимірної мінімізації називаються симетричними?
13. У чому полягає суть методу парабол, які рекурентні співвідношення в ньому використовуються?

Вправи для самостійного виконання

1. Довести леми 25.1 і 25.2 і дати їм геометричну інтерпретацію.
2. Показати, що стала на відрізку $[a; b]$ функція є унімодальною.
3. Довести, що функція опукла на відрізку $[a; b]$ унімодальна на цьому відрізку.
4. Довести, що строго і сильно опуклі функції на відрізку $[a; b]$ строго унімодальні на цьому відрізку.
5. Знайти всі точки локального екстремуму функції $f(x) = |||x^2 - 1| - 2| - 1|$ на $X = R^1$ і визначити, на яких відрізках ця функція унімодальна. Для побудови графіка функції скористатись програмними засобами типу Advanced Grapher, Derive, GRAN1, Mathcad тощо.
6. Скориставшись програмними засобами типу Advanced Grapher, Derive, GRAN1, Mathcad тощо, з'ясувати, на яких відрізках будуть унімодальними наступні функції:

1) $f(x) = e^x$;

2) $f(x) = (x-1)^2 + 2$;

3) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$;

4) $f(x) = \cos x$;

5) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < -1, \\ 1, & x \in [-1;1], \\ x^2, & x > 1. \end{cases}$

7. Довести, що функція $f(x)$ унімодальна на відрізку $[a;b]$, і перевірити одержані результати за допомогою графічних побудов, використавши програмні засоби типу Advanced Grapher, Derive, GRAN1, Mathcad тощо:

1) $f(x)=x^4-10x^3+36x^2+5x$, $[a;b]=[3;5]$;

2) $f(x)=x^2-3x+x\ln x$, $[a;b]=[1;2]$;

3) $f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^2-8x+12$, $[a;b]=[0;2]$;

4) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\sin x$, $[a;b]=[0;1]$;

5) $f(x)=x^2-2x+e^{-x}$, $[a;b]=[-1;2]$.

8. При яких значеннях $k\neq 0$ функція $f(x)=kx^3-3x^2+x-5$ буде унімодальною на відрізку $[a;b]=[1;2]$? Для побудови графіка функції при різних значеннях параметра k, скористатись програмними засобами типу Advanced Grapher, Derive, GRAN1, Mathcad тощо.

9. Побудувати схему алгоритму пошуку відрізка локалізації для випадків, коли $X=[a;+\infty)$ і $X=(-\infty;b]$. Однією з мов програмування описати програми, які відповідають побудованим схемам.

10. За допомогою розроблених програм знайти відрізки локалізації заданих функцій:

1) $f(x)=\frac{x^2}{2}-3\cos(x-1)+1$, при $x_0=-5$;

2) $f(x)=|x|+|x-1|-2$, при $x_0=-1$;

3) $f(x)=\begin{cases}-(x+2)^3+2, & x<-1,\\ 1, & x\in[-1;1],\\ (x-2)^3+2, & x>1,\end{cases}$ при $x_0=-2$;

4) $f(x)=\begin{cases}1, & x<1,\\ x^2, & x\geq 1,\end{cases}$ при $x_0=2$;

5) $f(x)=|x+1|+|x-1|$, при $x_0=-3$.

Одержані результати перевірити за допомогою графічних побудов, скориставшись програмними засобами типу Advanced Grapher, Derive, GRAN1, Mathcad тощо.

11. Довести, що при досить великих n число Фібоначчі

$$F_n\approx\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

12. Для методу Фібоначчі показати, що

а) якщо $u=a+\frac{F_n}{F_{n+2}}(b-a)$ і $v=a+b-u$, то $v=a+\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}(b-a)$;

б) якщо $a_1=a$, $b_1=b$, $u_1=a_1+\frac{F_n}{F_{n+2}}(b_1-a_1)$, $v_1=a_1+b_1-u_1$, то для відрізка $[a_2,b_2]$ при $a_2=a_1$, $b_2=v_1$ точка $v_2\in[a_2,b_2]$ і

$$v_2=u_1=a_1+\frac{F_n}{F_{n+2}}(b_1-a_1)=a_2+\frac{F_n}{F_{n+1}}(b_2-a_2),$$

а при $a_2=u_1$, $b_2=b_1$ точка $u_2\in[a_2,b_2]$ і $u_2=v_1=a_1+b_1-u_1=a_2+\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}(b_2-a_2)$;

в) для $k=\overline{1,n}$ мають місце співвідношення

$$u_k=a_k+\frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+3}}(b_k-a_k),\ v_k=a_k+\frac{F_{n-k+2}}{F_{n-k+3}}(b_k-a_k).$$

13. Довести, що якщо трійка чисел x_0,x_1,x_2 є вдалою, то коефіцієнт при старшому члені многочлена (25.20) додатній.

14. Показати, що точка мінімуму многочлена (25.20) $\bar{x}$, яка визначається співвідношенням (25.21), задовольняє умову $\frac{x_0+x_1}{2}\leq\bar{x}\leq\frac{x_1+x_2}{2}$.

15. Побудувати інтерполяційний многочлен $P_2(x)$ у вигляді

а) $P_2(x)=a_2(x-x_2)(x-x_1)+a_1(x-x_2)+a_0$,

б) $P_2(x)=a_2(x-x_1)(x-x_2)+a_1(x-x_1)+a_0$

і дослідити коефіцієнти при старших степенях одержаних многочленів. Знайти точки мінімуму цих многочленів і порівняти одержані результати.

16. Дати геометричну інтерпретацію випадку, коли многочлен $P_2(x)$ будується за точками x_0,x_1,x_2, які не є вдалою трійкою. Визначити, де розташовується в цьому випадку точка мінімуму $\bar{x}$ многочлена $P_2(x)$, яка знаходиться за формулою (25.21).

17. Використовуючи розглянуті схеми алгоритмів, що відповідають методам дихотомії, золотого перерізу, Фібоначчі і парабол, однією з мов програмування описати програми їх реалізації.

18. За допомогою програм для комп'ютера, які відповідають методам дихотомії, золотого перерізу, Фібоначчі і парабол, знайти наближений розв'язок задачі одновимірної мінімізації функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ з точністю $\varepsilon=10^{-4}$ і $\varepsilon=10^{-8}$:

1) $f(x)=3x^4+5x^3-10x^2+6x$, $[a;b]=[-4;2]$;

2) $f(x)=x^6-3x^2+5x+1$, $[a;b]=[-2;0]$;

3) $f(x)=x^4+4x^3-3x^2-36x+45$, $[a;b]=[1;2]$;

4) $f(x)=4(3-x)^{\frac{2}{3}}+2x^3$, $[a;b]=[0;2]$;

5) $f(x)=(x-1)^2+(x-2)^4$, $[a;b]=[0;3]$;

6) $f(x)=x^4-2x^2+3x+1$, $[a;b]=[-2;2]$;

7) $f(x)=\lg x+\sin x$, $[a;b]=[2;7]$;

8) $f(x)=2x\lg(x+2)+x^3-6$, $[a;b]=[-1{,}99;2]$;

9) $f(x)=\left|\dfrac{x}{\ln x}-2x^3\right|$, $[a;b]=[1{,}1;3]$;

10) $f(x)=(x-4)^2+\ln x$, $[a;b]=[3;5]$;

11) $f(x)=10x\lg x-x^3+x^2$, $[a;b]=[0{,}1;2]$;

12) $f(x)=e^{2x}+\dfrac{3}{(x+2)}$, $[a;b]=[-1;1]$;

13) $f(x)=x^5-6x^3+12x^2-3x+1$, $[a;b]=[-1;2]$;

14) $f(x)=(x-1)^4-3x^2$, $[a;b]=[-4;-1]$;

15) $f(x)=3x^2+4x-\cos^2 x$, $[a;b]=[-2;1]$;

16) $f(x)=x\sin 3x-\cos 2x$, $[a;b]=[1;3]$;

17) $f(x)=\sin(0{,}2x-1)+(0{,}1x-5)^6$, $[a;b]=[40;60]$;

18) $f(x)=x^2-3x+4\cos x$, $[a;b]=[-3;5]$;

19) $f(x)=e^{-2x}+0{,}5x^4$, $[a;b]=[0;1]$;

20) $f(x)=2\sqrt{1+x^2}+e^{-x}$, $[a;b]=[0;1]$;

21) $f(x)=0{,}5e^x+x^3-2x$, $[a;b]=[-0{,}5;1]$;

22) $f(x)=\dfrac{\cos 3x}{x}$, $[a;b]=[2;4]$;

23) $f(x)=0{,}5\cos x-\sqrt{10x-x^2}$, $[a;b]=[0;10]$;

24) $f(x)=5x\ln(x+1)-2x^3$, $[a;b]=[-0{,}5;1]$;

25) $f(x)=3x^3-2(x+1)(\ln(x+1)+2)$, $[a;b]=[0;1{,}5]$.

Для кожного методу визначити: N_k – кількість виконаних ітерацій, N_f – кількість обчислень значень цільової функції, x^* – наближене значення точки мінімуму, f^* – наближене значення мінімуму цільової функції $f(x)$. Одержані результати подати у вигляді таблиці і порівняти їх:

№	Назва методу	$\varepsilon=10^{-4}$				$\varepsilon=10^{-8}$			
		N_k	N_f	x^*	f^*	N_k	N_f	x^*	f^*
1.	Дихотомії								
2.	Золотого перерізу								
3.	Фабоначчі								
4.	Парабол								

Для заданих функцій за допомогою одного з програмних засобів Advanced Grapher, Derive, GRAN1, Mathcad чи інших побудувати їх графіки і знайти точки мінімуму на вказаних відрізках. Порівняти результати з розв'язками, одержаними за наближеними методами одновимірної мінімізації.

§26. Методи пошуку глобального мінімуму функції однієї змінної

Розглянуті методи одновимірної мінімізації використовуються для пошуку точок глобального мінімуму унімодальних функцій. Але якщо ці методи застосувати до неперервних функцій, які не є унімодальними на заданому відрізку, то вони дають можливість отримати лише точку, яка знаходиться в околі точки якого-небудь локального мінімуму функції, що досліджується. В зв'язку з цим такі методи часто називають *локальними методами* одновимірної мінімізації.

Задача знаходження глобального екстремуму багатоекстремальної функції однієї змінної значно складніша, ніж задача мінімізації унімодальної функції. Інтуїтивно зрозуміло, що коли відома кількість локальних мінімумів цільової функції, то для певних класів функцій можна запропонувати методи, які за допомогою локальних методів мінімізації дозволять знайти наближене значення точки глобального мінімуму. Нажаль, у загальному випадку локальні методи мінімізації хоча й безумовно корисні для пошуку глобального мінімуму, але їх застосування призводить до значних обчислювальних витрат. Тому розробка спеціальних ефективних методів пошуку глобального мінімуму широкого класу функцій є важливою проблемою.

Для класу ліпшицевих функцій розроблені методи, які дозволяють будувати мінімізуючі послідовності і отримувати наближений розв'язок задачі одновимірної мінімізації із заданою точністю. До таких методів можна віднести *методи пасивного* і *послідовного перебору, метод ламаних, методи стохастичної апроксимації, інформаційно-статистичні методи.* Досить детальний опис і аналіз цих та деяких інших методів можна знайти, наприклад, в [18], [43], [97], [98].

Розглянемо найбільш відомі і популярні методи пошуку глобального мінімуму ліпшицевих функцій.

1. Постановка задачі. Як вже відмічалося (див. §4), розрізняють два типи задач мінімізації:

1) знайти точне або наближене значення $f^*=\inf\limits_{x\in X} f(x)$ незалежно від того, чи порожня множина X^* точок мінімуму $f(x)$ на X, чи ні;

2) разом з величиною f^* знайти і точку $x^*\in X^*$, коли $X^*\neq\varnothing$.

Нехай задана функція $f(x)$, яка на проміжку $[a;b]$ задовольняє умову Ліпшиця з константою $K>0$:

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le K|x_1-x_2| \qquad (26.1)$$

для будь-яких $x_1\in[a;b]$ і $x_2\in[a;b]$.

Умова Ліпшиця має простий геометричний зміст, який полягає в тому, що для будь-яких точок $x_1 \in [a;b]$, $x_2 \in [a;b]$, $x_1 \neq x_2$ модуль кутового коефіцієнта (тангенса кута нахилу)

$$|k| = \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|}$$

хорди, яка сполучає дві точки $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ графіка функції $f(x)$, не перевищує константу K.

З умови (26.1) випливає, що $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, і тому згідно теореми 7.5 (теореми Вейєрштрасса) множина X^* точок мінімуму $f(x)$ на $[a;b]$ непорожня, тобто існує точка $x^* \in X^*$ така, що $f(x^*) = f^*$.

З курсу математичного аналізу відомо, що диференційовна на $[a;b]$ функція $f(x)$, яка має обмежену похідну $f'(x)$ на цьому відрізку, є ліпшицевою з константою

$$K = \sup_{x \in [a;b]} |f'(x)|.$$

Для розв'язування задачі першого типу розглянемо методи, які будемо позначати M_n і сутність яких полягає у виборі набору точок $x_1, x_2, ..., x_n$ таких, що

$$a \leq x_1 < x_2 < ... < x_n \leq b,$$

обчисленні значень функції в цих точках $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ і визначенні величини

$$F^* = \min_{i=\overline{1,n}} f(x_i),$$

яка є певним наближенням до f^*.

Введемо величину

$$\Delta(f, M_n) = \min_{i=\overline{1,n}} f(x_i) - f^* = F^* - f^*,$$

яку будемо називати *похибкою методу* M_n при мінімізації функції $f(x)$ на $[a;b]$. Очевидно, що $\Delta(f, M_n) \geq 0$.

Говорять, що для мінімізації функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ задано

а) *пасивний метод* M_n, якщо всі n точок $x_1, x_2, ..., x_n$ вибираються за певним правилом до початку обчислень і далі не змінюються;

б) *послідовний метод* M_n, якщо точки $x_1, x_2, ..., x_n$ вибираються послідовно, окремими наборами, причому при виборі кожного наступного набору враховуються результати попередніх обчислень.

З наведених означень видно, що пасивний метод є частинним випадком послідовного методу, коли всі n точок вибираються одразу в першому наборі.

2. Метод рівномірного перебору. Найпростішим пасивним методом є метод *рівномірного перебору*, в якому набір точок $x_1, x_2, ..., x_n$ добирається за правилом

$$x_1 = a + \frac{h}{2}, x_2 = x_1 + h, ..., x_{i+1} = x_i + h = x_1 + ih, ...,$$

$$x_{n-1} = x_1 + (n-2)h, \quad x_n = \min\{x_1 + (n-1)h; b\}, \qquad (26.2)$$

де $h > 0$ – крок методу.

Визначимо похибку цього методу $\Delta(f, M_n)$. Нехай $x^* \in [a;b]$ – точка глобального мінімуму функції $f(x)$ на $[a;b]$. Оскільки згідно (26.2) $|x_{i+1} - x_i| = h, i = \overline{1, n-1}$, $|x_1 - a| = \frac{h}{2}$ і $|x_n - b| \leq h$, то серед точок x_i, $i = \overline{1,n}$, знайдеться точка $\bar{x}_i$ така, що $|\bar{x}_i - x^*| \leq \frac{h}{2}$. Враховуючи (26.1), маємо

$$0 \leq \Delta(f, M_n) = F^* - f^* \leq f(\bar{x}_i) - f(x^*) \leq K|\bar{x}_i - x^*| \leq K\frac{h}{2}.$$

Для того щоб розв'язати задачу мінімізації першого типу з точністю $\varepsilon > 0$, тобто щоб мала місце нерівність $\Delta(f, M_n) < \varepsilon$, крок h в методі (26.2) необхідно вибирати з умови $h = \frac{2\varepsilon}{K}$. При цьому кількість обчислень n повинна визначатись за умовою

$$x_{n-1} < b - \frac{h}{2} \leq x_1 + (n-1)h.$$

Прикладом методу рівномірного перебору (26.2) є метод, в якому крок $h = \frac{b-a}{n}$, тоді

$$x_1 = a + \frac{1}{2n}(b-a), \ x_2 = a + \frac{3}{2n}(b-a), ..., \ x_n = a + \frac{2n-1}{2n}(b-a).$$

При цьому $\Delta(f, M_n) \leq K\frac{b-a}{2n}$. Якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то n вибирається з умови

$$n \geq \frac{K(b-a)}{2\varepsilon}.$$

3. Метод послідовного перебору. Розглянемо досить простий, але більш економний щодо кількості обчислень значень функції $f(x)$, ніж метод рівномірного перебору, метод *послідовного перебору*, в якому вибір точки x_i при $i > 2$ відбувається з урахуванням значень функції в попередніх точках $x_1, ..., x_{i-1}$.

Покладемо

$$x_1 = a + \frac{h}{2}, \ldots, x_{i+1} = x_i + h + \frac{f(x_i) - F_i}{K}, \; i = \overline{1, n-2},$$

$$x_n = \min\left\{x_{n-1} + h + \frac{f(x_{n-1}) - F_{n-1}}{K}; b\right\}, \qquad (26.3)$$

де

$$h = \frac{2\varepsilon}{K}, \;\; F_i = \min_{j=\overline{1,i}} f(x_j),$$

а кількість обчислень n визначається за умовою

$$x_{n-1} < b - \frac{h}{2} \le x_{n-1} + h + \frac{f(x_{n-1}) - F_{n-1}}{K}.$$

Перед тим, як довести теорему про те, що описаний метод послідовного перебору розв'язує задачу відшукання наближеного значення $f^* = \inf_{x \in X} f(x)$ з наперед заданою точністю $\varepsilon > 0$ на класі ліпшицевих функцій, розглянемо деяку допоміжну функцію та її властивості.

Нехай функція $f(x)$ є ліпшицевою на $[a; b]$. Зафіксуємо довільну точку $x_0 \in [a; b]$ і визначимо функцію

$$g(x, x_0) = -K\,|x - x_0| + f(x_0), \qquad (26.4)$$

яка залежить від змінної $x \in [a; b]$. Ця функція є кусково-лінійною на $[a; b]$ і її графік являє собою ламану лінію $A_0B_0C_0$ (рис. 26.1), яка складається з двох відрізків A_0B_0 і B_0C_0, що мають відповідно кутові коефіцієнти $+K$ і $-K$. На рис 26.1 $tg\alpha = K$, а $tg\beta = -K$. Крім того, в силу умови (26.1) маємо

$$-K\,|x - x_0| \le f(x) - f(x_0) \le K\,|x - x_0|$$

для будь-яких $x \in [a; b]$. З лівої частини цієї подвійної нерівності випливає, що

$$g(x, x_0) = -K\,|x - x_0| + f(x_0) \le f(x) \qquad (26.5)$$

для будь-яких $x \in [a; b]$, причому $g(x_0, x_0) = f(x_0)$. Це означає, що графік функції $f(x)$ лежить вище ламаної $g(x, x_0)$ при будь-яких $x \in [a; b]$ і має з нею спільну точку $(x_0, f(x_0))$ (рис. 26.1).

Т е о р е м а 26.1. *Для методу послідовного перебору* (26.3) *виконується умова*

$$F_n - f^* \le \varepsilon,$$

де $F_n = \min_{i=\overline{1,n}} f(x_i)$, $\varepsilon > 0$ *– точність розв'язування задачі першого типу мінімізації функції* $f(x)$ *на* $[a; b]$.

Д о в е д е н н я. З урахуванням (26.3) і (26.5) для всіх точок

$$x \in \left[x_i; x_i + \frac{h}{2} + \frac{f(x_i) - F_i}{K}\right], \; i = \overline{1, n},$$

має місце нерівність

$$f(x) \ge f(x_i) - K\,|x - x_i| \ge f(x_i) - K\left(\frac{h}{2} + \frac{f(x_i) - F_i}{K}\right) =$$

$$= f(x_i) - \frac{Kh}{2} - f(x_i) + F_i = F_i - \varepsilon \ge F_n - \varepsilon.$$

Аналогічно для всіх точок

$$x \in \left[x_i - \frac{h}{2}; x_i\right], \; i = \overline{1, n},$$

також одержуємо, що $f(x) \ge F_n - \varepsilon$.

Оскільки система відрізків $\left[x_i - \frac{h}{2}; x_i + \frac{h}{2} + \frac{f(x_i) - F_i}{K}\right]$, $i = \overline{1, n}$, покриває весь відрізок $[a; b]$, то з попередніх нерівностей випливає, що при будь-яких $x \in [a; b]$, у тому числі і при $x = x^*$, $F_n - f(x) \le \varepsilon$, тобто $F_n - f^* \le \varepsilon$. Що й треба було довести.

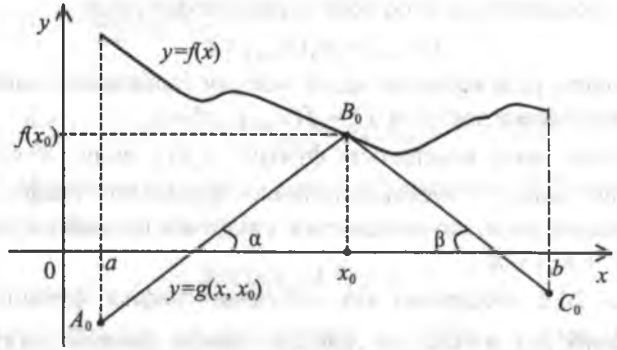


Рис. 26.1.

4. Метод ламаних. Розглянемо метод, який, на відміну від методів рівномірного і послідовного перебору, дає можливість розв'язувати задачу пошуку глобального мінімуму як першого, так і другого типів. Цей метод використовує властивість графіка кусково-лінійної функції $g(x, x_0)$ (див. (26.4), (26.5), рис. (26.1)) і має назву *метод ламаних.*

Даний метод починається з довільної точки $x_0 \in [a; b]$, відносно якої утворюється кусково-лінійна функція

$$p_0(x) = g(x, x_0) = -K\,|x - x_0| + f(x_0).$$

Наступна точка x_1 визначається з умов

$$p_0(x_1) = \min_{x\in[a;b]} g(x, x_0),\ x_1 \in [a;b],$$

при цьому $x_1 = a$ або $x_1 = b$ (див. рис 26.1). Далі утворюється нова функція

$$p_1(x) = \max_{x\in[a;b]} \{g(x, x_1),\ p_0(x)\},$$

де

$$g(x, x_1) = -K\,|x - x_1| + f(x_1),$$

і чергова точка x_2 шукається з умов

$$p_1(x_2) = \min_{x\in[a;b]} p_1(x),\ x_2 \in [a;b]$$

і т. д.

Нехай вже знайдені точки $x_0, x_1, ..., x_n$ $(n \ge 1)$. Тоді утворюється функція

$$p_n(x) = \max\{g(x, x_n),\ p_{n-1}(x)\} = \max_{i=0,n} g(x, x_i) \qquad (26.6)$$

і визначається точка x_{n+1} з умов

$$p_n(x_{n+1}) = \min_{x\in[a;b]} p_n(x),\ x_{n+1} \in [a;b]. \qquad (26.7)$$

Якщо мінімум функції $p_n(x)$ досягається в кількох точках, то за x_{n+1} можна взяти будь-яку з них.

Процес продовжується доти, поки не виконається умова

$$f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1}) < \varepsilon,$$

де $\varepsilon > 0$ – точність розв'язування задачі пошуку глобального мінімуму. При цьому можна наближено покласти $f^* \approx f(x_{n+1}),\ x^* \approx x_{n+1}$.

Розглянемо деякі властивості функції $p_n(x)$ виду (26.6) на $[a;b]$. Зрозуміло, що вона є кусково-лінійною функцією, графіком якої є неперервна ламана лінія, що складається з відрізків прямих з кутами нахилу до вісі абсцис $+K$ і $-K$.

На рис. 26.2 зображено хід побудови графіка функції $p_n(x)$ за методом ламаних для $n = \overline{0,2}$, де $A_0B_0C_0$ – графік функції $p_0(x) = g(x, x_0)$, B_1C_1 – графік функції $g(x, x_1)$, $B_1D_1B_0C_0$ – графік функції $p_1(x)$, $A_2B_2C_2$ – графік функції $g(x, x_2)$, $B_1D_2B_2E_2B_0C_0$ – графік функції $p_2(x)$, а наступне наближення x_3 є абсцисою точки E_2.

Можна показати, що $p_n(x)$ задовольняє умову Ліпшиця на $[a;b]$ з тією ж константою K, що й функція $f(x)$. Крім того, мають місце нерівності

$$p_{n-1}(x) \le p_n(x),\ \forall x \in [a;b],\ i = 1, 2, ..., \qquad (26.8)$$

$$p_n(x) \le f(x),\ \forall x \in [a;b],\ i = 0, 1, ..., \qquad (26.9)$$

які свідчать про те, що кожна функція $p_n(x)$ обмежує знизу функцію $f(x)$ (є її точною *мінорантою*).

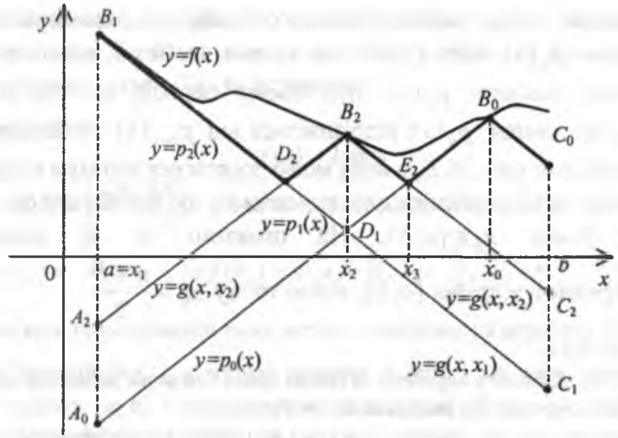


Рис. 26.2.

Наведемо теорему про збіжність методу ламаних.

Т е о р е м а 26.2. *Нехай $f(x)$ – довільна ліпшицева функція на $[a;b]$. Тоді послідовність точок $\{x_n\}$, одержана за допомогою методу ламаних, така, що*

1) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} p_n(x_{n+1}) = f^*,$

при цьому має місце оцінка

$$0 \le f(x_{n+1}) - f^* \le f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1}),\ n = 0, 1, 2, ...; \qquad (26.10)$$

2) $\{x_n\}$ *збігається до однієї з точок x^* множини X^* точок мінімуму $f(x)$ на $[a;b]$, тобто*

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, X^*) = 0.$$

Доведення теореми можна знайти, наприклад, у [18]. Ця теорема свідчить про те, що за допомогою методу ламаних можна одержати розв'язок задачі мінімізації ліпшицевих функцій як першого, так і другого типів. При цьому з оцінки (26.10) випливає, що коли

$$f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1}) < \varepsilon, \text{ то } 0 \le f(x_{n+1}) - f^* < \varepsilon,$$

тобто за методом ламаних поставлену задачу можна розв'язати із точністю $\varepsilon > 0$ через скінченну кількість кроків, а отже можна покласти $f^* \approx f(x_{n+1})$ і, з урахуванням другого твердження теореми 26.2, $x^* \approx x_{n+1}$.

Метод ламаних не вимагає унімодальності цільової функції, більше того, вона може бути багатоекстремальною.

На кожному кроці методу ламаних необхідно мінімізувати кусково-лінійну функцію $p_n(x)$ виду (26.6), що можна зробити, простим перебором відомих вершин ламаної $p_n(x)$, при цьому перебір істотно спрощується завдяки тому, що ламана $p_n(x)$ відрізняється від $p_{n-1}(x)$ не більше ніж двома новими точками (див. рис. 26.2), в яких може досягатися мінімум в задачі (26.7).

До переваг методу ламаних слід віднести те, що він збігається, починаючи з довільної точки $x_0 \in [a; b]$. На практиці за x_0 можна брати, наприклад, середину відрізка $[a; b]$, тобто точку $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$.

Зауваження.

1. Метод послідовного перебору за своєю ідеєю близький до методу ламаних, але він більш зручний і економічний при реалізації на комп'ютері.

2. До недоліків методу ламаних, так само як і методів рівномірного і послідовного переборів, треба віднести те, що для їх реалізації необхідно знати константу Ліпшиця K. Крім того, при чисельній реалізації методу ламаних із збільшенням числа кроків n зростає об'єм пам'яті комп'ютера, необхідний для збереження координат вершин ламаної $p_n(x)$.

Запитання для самоконтролю

1. Чим визначається складність пошуку глобального мінімуму функції однієї змінної?
2. Які методи називають пасивними, а які – послідовними?
3. У чому полягає суть методу рівномірного перебору, які рекурентні співвідношення в ньому використовуються?
4. У чому полягає суть методу послідовного перебору, які рекурентні співвідношення в ньому використовуються?
5. У чому полягає суть методу ламаних, які рекурентні співвідношення в ньому використовуються?
6. Які недоліки мають методи ламаних, рівномірного і послідовного переборів?

Вправи для самостійного виконання

1. Довести, що якщо функція $f(x)$ задовольняє умову Ліпшиця на відрізку $[a; b]$, то вона неперервна на цьому відрізку.

2. Довести, що диференційовна на $[a; b]$ функція $f(x)$, яка має обмежену похідну $f'(x)$ на цьому відрізку, є ліпшицевою з константою

$$K = \sup_{x\in[a;b]} |f'(x)|.$$

3. Довести, що якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і на кожному відрізку $[a_i; a_{i+1}]$, $i = \overline{1,m}$, де $a_1 = a$, $a_{m+1} = b$, задовольняє умову Ліпшиця з константою $K_i > 0$, то $f(x)$ задовольняє умову Ліпшиця на всьому відрізку $[a; b]$ з константою $K = \max\limits_{i=\overline{1,m}} K_i$.

4. Показати, що якщо функція $f(x)$ задовольняє умову Ліпшиця на відрізку $[a; b]$ з константою $K > 0$, то модуль кутового коефіцієнта будь-якої хорди або дотичної до графіка функції $f(x)$ не перевищує K.

5. Для функції

$$f(x) = 2\sin x$$

на відрізку $[a; b] = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ визначити константу Ліпшиця $K > 0$ і побудувати функцію $g(x, x_0) = -K\,|x - x_0| + f(x_0)$ при $x_0 = 0$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $x_0 = \pi$.

6. З'ясувати геометричний зміст методу послідовного перебору (26.3).

7. Для функції $p_n(x)$ в методі ламаних довести, що вона задовольняє умову Ліпшиця на відрізку $[a; b]$ з тією ж самою константою $K > 0$, що й функція $f(x)$, і мають місце нерівності (26.8), (26.9).

8. Довести теорему 26.2.

9. Для функції

$$f(x) = 0{,}5x^4 - 2x^2 + 1$$

на відрізку $[a; b] = [-2; 3]$ виконати три кроки методу ламаних, починаючи з точок $x_0 = -2$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$.

10. З'ясувати, як перебігає процес обчислень за методом ламаних при мінімізації функцій $f(x) = c$, $f(x) = cx + d$, де $c \in R^1$, $d \in R^1$, на деякому відрізку $[a; b] \subset R^1$.

11. Однією з мов програмування описати програми, які реалізують методи рівномірного і послідовного переборів та метод ламаних.

12. Для функцій із завдання 6 §25 за допомогою програмних засобів типу Derive, GRAN1, Mathcad чи інших визначити відрізки $[a; b] \subset D(f)$, на яких функції мають кілька точок локального мінімуму. Побудувати графіки цих функцій і знайти точки глобального мінімуму на визначених відрізках.

13. За допомогою програм для комп'ютера, які реалізують методи рівномірного і послідовного переборів та метод ламаних (див. завдання 11), для функцій $f(x)$ із завдання 6 §25 на відрізках $[a; b] \subset D(f)$, визначених у завданні 12, знайти наближені значення точок глобального мінімуму з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, $\varepsilon = 10^{-8}$. Результати порівняти з результатами, одержаними графічним способом.

14. За допомогою програм для комп'ютера, які реалізують методи рівномірного і послідовного переборів та метод ламаних, для функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ знайти наближені значення точок глобального мінімуму з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, $\varepsilon = 10^{-8}$:

1) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}$, $[a; b] = [1; 6]$;

2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $[a; b] = [2; 13]$;

3) $f(x) = x\sin x - 2\cos 3x$, $[a; b] = [-3; 3]$;

4) $f(x) = \sin x + \sin 2x$, $[a; b] = [0; 6]$;

5) $f(x) = x^6 - 6x^2 + 4x - 1$, $[a; b] = [-2; 2]$;

6) $f(x) = \left| e^x + \frac{x^3}{3} - 2x^2 \right|$, $[a; b] = [-2; 4]$;

7) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 6} - \sqrt[3]{x^2}$, $[a; b] = [-3; 3]$;

8) $f(x) = 2\sin(2^x + 3)$, $[a; b] = [0; 4]$;

9) $f(x) = e^{-0,1x}\sin(4x + 1)$, $[a; b] = [1; 5]$;

10) $f(x) = \frac{2\sin\cos 3x}{x} + \frac{1}{2}x$, $[a; b] = [1; 6]$;

11) $f(x) = \sin x + \sin\left(\frac{2}{3}x\right)$, $[a; b] = [3,1; 20,4]$;

12) $f(x) = \sin x + \sin\left(\frac{10}{3}x\right) + \ln x - 0,84x + 3$, $[a; b] = [2,7; 7,5]$;

13) $f(x) = \sum_{i=1}^{5} i\sin((i+1)x + i)$, $[a; b] = [-10; 10]$;

14) $f(x) = (x + \sin x)e^{-x^2}$, $[a; b] = [-10; 10]$;

15) $f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n}\left(a_i \sin\frac{\pi i}{2}x + b_i \cos\frac{\pi i}{2}x\right)$, $x \in [-10; 10]$,

де коефіцієнти a_i, b_i – випадкові числа, рівномірно розподілені в інтервалі $[-1; 1]$, $n = 4, ..., 14$;

16) $f(x) = \sum_{i=1}^{10}\left((a_i(x - b_i))^2 + c_i\right)^{-1}$, $x \in [0; 10]$,

де коефіцієнти a_i, b_i, c_i – випадкові числа, рівномірно розподілені в таких інтервалах: $1 \le a_i \le 3$; $0 \le b_i \le 10$; $0,1 \le c_i \le 0,3$ (*функції Шекеля*).

П р и м і т к а. Функції 11-16 часто використовуються для тестування глобальних методів одновимірної оптимізації (див., наприклад, [43], [97]).

15. Для функцій із завдання 14 за допомогою програмних засобів типу Advanced Grapher, Derive, GRAN1, Mathcad чи інших побудувати графіки і знайти точки глобального мінімуму на вказаних відрізках. Одержані результати порівняти з результатами, одержаними за допомогою чисельних методів.

16. Для неперервно диференційовної функції $f(x)$ на $[a; b]$ з скінченною кількістю точок локального мінімуму запропонувати конструктивний метод пошуку точки глобального мінімуму за допомогою локальних методів мінімізації і реалізувати його на комп'ютері. Провести апробацію запропонованого методу на функціях із завдання 14 з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, $\varepsilon = 10^{-8}$ і порівняти обчислювальні витрати з витратами методів перебору та методу ламаних.

§27. Початкові відомості про чисельні методи багатовимірної оптимізації

У попередніх розділах були розглянуті методи розв'язування багатовимірних екстремальних задач, які ґрунтувалися на необхідних і достатніх умовах оптимальності або на їх геометричній інтерпретації.

Часто задачу

$$f(x) \to \min,\ x \in X \tag{27.1}$$

з тих чи інших міркувань доводиться розв'язувати чисельно. При цьому з урахуванням умов оптимальності задачу (27.1) можна звести до деякої іншої задачі, для розв'язування якої вдається скористатися відповідними чисельними методами. Наприклад, для розв'язування задачі (27.1) при $X = R^n$, коли $f(x)$ диференційовна функція, можна скористатися чисельними методами розв'язування системи рівнянь $f'(x) = O_n$. Однак на практиці більш ефективними є методи, розроблені спеціально для розв'язування задач оптимізації певного класу (див. §4), оскільки вони дозволяють більш повно врахувати специфіку цих задач.

1. Чисельні методи розв'язування задач оптимізації базуються, як правило, на наближеному обчисленні значень цільової функції, значень функцій, які визначають допустиму множину точок, значень похідних (частинних похідних) цих функцій або їх аналогів. На основі отриманих результатів будується наближення до розв'язку задачі – шуканої точки мінімуму x^* або, якщо така точка не єдина, до однієї з точок множини точок мінімуму X^*. Іноді будується наближення до мінімального значення цільової функції

$$f^* = \min_{x \in X} f(x).$$

Методи, які використовують відомості лише про значення цільової функції, називаються *методами нульового порядку*; методи, які використовують також відомості про значення похідних (частинних похідних) першого порядку або їх аналогів, – *методами першого порядку*; методи, які використовують, крім того, відомості про похідні (частинні похідні) другого порядку, – *методами другого порядку*.

Методи, які використовуються для розв'язування задач виду

$$f(x) \to \min,\ x \in R^n,$$

називаються *методами безумовної мінімізації*, а методи, які використовуються для розв'язування задач виду

$$f(x) \to \min,\ x \in X,$$

де $X \subset R^n$, називаються *методами умовної мінімізації*.

Найбільш відомими методами безумовної мінімізації є: *метод покоординатного спуску* і *симплексний метод* (не слід плутати з симплекс-методом розв'язування задачі лінійного програмування), які відносяться до методів нульового порядку, *градієнтні* і *субградієнтні методи*, *метод спряжених градієнтів*, які відносяться до методів першого порядку, *метод Ньютона* та його модифікації, які відносяться до методів другого порядку.

Серед методів умовної мінімізації найбільш відомими є: *методи проекції градієнта* і *субградієнта*, *метод можливих напрямів*, *метод умовного градієнта*, *методи штрафних функцій*.

Найбільш розповсюдженими наближеними методами безумовної та умовної оптимізації є так звані *методи послідовних наближень* або *ітераційні* (від англ. *iterate* – повторювати) методи, в яких будується послідовність точок

$$x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \dots,$$

пов'язаних між собою співвідношенням:

$$x^{(k+1)} = R(x^{(k)}),\ k = 0, 1, \dots,$$

де R – деяке правило, за допомогою якого точці $x^{(k)}$ ставиться у відповідність нова точка $x^{(k+1)}$. Прикладом такого правила є співвідношення

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h_k g^{(k)}, \qquad (27.2)$$

де $h_k \in R^1$, $g^{(k)} \in R^n$, $k = 0, 1, \dots$.

В (27.2) вектор $g^{(k)}$ визначає *напрям руху* в точці $x^{(k)}$, а параметр h_k – *довжину кроку вздовж напряму* $g^{(k)}$. При цьому вибір $g^{(k)}$ і h_k здійснюється, як правило, на основі результатів, отриманих на попередніх кроках ітераційного процесу.

Конкретний ітераційний метод виду (27.2) визначається:

– *початковим наближенням* $x^{(0)}$;

– правилом вибору вектора $g^{(k)}$;

– правилом вибору *крокового множника* h_k;

– умовою зупинки ітераційного процесу.

Частіше за все назва ітераційного методу мінімізації визначається способом вибору $g^{(k)}$, а його різноманітні варіанти пов'язані з різними способами вибору h_k.

Багато ітераційних методів мінімізації відносяться до *методів спуску*. В цих методах напрям руху на кожному кроці ітераційного процесу вибирається з числа напрямів спадання функції, що мінімізується. Нагадаємо (див. §20), що вектор g є *напрямом спадання* функції $f(x)$ в точці x, якщо $f(x+hg) < f(x)$ при всіх досить малих $h > 0$. Множину всіх напрямів спадання функції $f(x)$ в точці x, як і раніше, будемо позначати через $U(x,f)$. Таким чином, якщо будь-яке досить мале зміщення з точки x у напрямі вектора g призводить до зменшення значення функції $f(x)$, то $g \in U(x,f)$. При цьому для диференційовної функції $f(x)$, якщо вектор g задовольняє умову

$$\langle f'(x), g \rangle < 0, \qquad (27.3)$$

то $g \in U(x,f)$ (див. лему 20.1), і навпаки, якщо $g \in U(x,f)$, то має місце (27.3).

Геометрично умова (27.3) означає, що вектор g утворює з градієнтом функції $f(x)$ в точці x тупий кут.

Метод (27.2) називається *методом спуску*, якщо вектор $g^{(k)}$ є напрямом спадання функції $f(x)$ в кожній точці $x^{(k)}$:

$$g^{(k)} \in U(x^{(k)}, f),\ k = 0, 1, \dots,$$

а число h_k додатне і таке, що

$$f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)}),\ k = 0, 1, \dots. \qquad (27.4)$$

Зауважимо, що методи послідовних наближень виду (27.2), в яких значення цільової функції на кожному кроці менше, ніж на попередньому, тобто при будь-яких $k = 0, 1, \dots$ виконується умова (27.4), називають *монотонними*, а ті, в яких умова (27.4) порушується хоча б для одного k – *немонотонними*.

Серед чисельних методів мінімізації можна умовно виділити *скінченні* і *нескінченні* методи. *Скінченними* називають методи, що гарантують відшукання розв'язку задачі за скінченну кількість кроків. Скінченні методи вдається побудувати лише для деяких спеціальних типів задач оптимізації, наприклад, задач лінійного і квадратичного програмування. Для нескінченних методів як завгодно точне наближення до розв'язку гарантується лише при $k \to \infty$.

2. Важливою характеристикою нескінченних методів є *збіжність*. Будемо говорити, що метод (27.2) *збігається*, якщо $x^{(k)} \to x^*$ при $k \to \infty$, де x^* – розв'язок задачі (27.1). Якщо $f(x^{(k)}) \to f^*$, де $f^* = \inf_{x \in X} f(x)$, при $k \to \infty$, то кажуть, що метод (27.2) *збігається за значеннями цільової функції*, при цьому послідовність $\{x^{(k)}\}$ називають *мінімізуючою*. Мінімізуюча послідовність може не збігатися до точки мінімуму.

У випадку, коли множина $X^* \subset X$ розв'язків задачі (27.1) містить більше, ніж одну точку, то під збіжністю методу розуміють збіжність послідовності $\rho(x^{(k)}, X^*)$ до нуля, де послідовність $\{x^{(k)}\}$ породжена ітераційним методом і $\rho(x^{(k)}, X^*) = \inf\{\rho(x^{(k)}, x^*) | x^* \in X^*\}$ – відстань від точки $x^{(k)}$ до множини X^*.

Метод називається *збіжним до множини* $X^* \subset X$ *за відстанню*, якщо для будь-якої породженої цим методом послідовності $\{x^{(k)}\}$ виконується умова

$$\lim_{k \to \infty} \rho(x^{(k)}, X^*) = 0.$$

Ефективність методу, що збігається, можна охарактеризувати за допомогою поняття *швидкості збіжності*.

Нехай $x^{(k)} \to x^*$ при $k \to \infty$. Говорять, що послідовність $\{x^{(k)}\}$ збігається до x^* *лінійно* (з *лінійною швидкістю* або з *швидкістю геометричної прогресії*), якщо існують такі константи $q \in (0; 1)$ і k_0, що

$$\| x^{(k+1)} - x^* \| \le q \| x^{(k)} - x^* \| \tag{27.5}$$

при $k \ge k_0$.

Говорять, що послідовність $\{x^{(k)}\}$ збігається до x^* *надлінійно* (з *надлінійною швидкістю*), якщо

$$\| x^{(k+1)} - x^* \| \le q_k \| x^{(k)} - x^* \|, \tag{27.6}$$

де $q_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Якщо існують такі константи $C > 0$ і k_0, що

$$\| x^{(k+1)} - x^* \| \le C \| x^{(k)} - x^* \|^2 \tag{27.7}$$

при $k \ge k_0$, то говорять, що послідовність $\{x^{(k)}\}$ збігається до x^* з *квадратичною* швидкістю.

Умови, за яких метод збігається, і оцінка швидкості збіжності є досить важливими характеристиками обраного методу оптимізації. Так, наприклад, вимоги, які накладаються в теоремі про збіжність на цільову функцію або обмеження задачі, визначають область застосовності методу. Часто в теоремах про збіжність в явному вигляді формулюються вимоги до початкового наближення $x^{(0)}$. Аналіз швидкості збіжності дає кількісну і якісну характеристику методу оптимізації. Але встановити (оцінити) швидкість збіжності досить непросто і вдається не завжди.

При реалізації конкретного обчислювального процесу нескінченний метод необхідно доповнити *умовою зупинки*. На практиці часто використовуються такі умови зупинки нескінченних ітераційних методів:

$$\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| \le \varepsilon_1, \tag{27.8}$$

$$| f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)}) | \le \varepsilon_2, \tag{27.9}$$

$$\| f'(x^{(k+1)}) \| \le \varepsilon_3, \tag{27.10}$$

де $\varepsilon_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$ – досить малі числа.

До початку обчислень вибирається одна з умов (27.8)–(27.10) і відповідне їй досить мале додатне число ε_i, яке називається *точністю обчислень*. Обчислення припиняються після $(k+1)$-го кроку, якщо вперше задовольняється умова зупинки. Іноді використовуються критерії, що передбачають одночасне виконання двох із умов (27.8)–(27.10) або всіх трьох умов. Зауважимо, що критерій (27.10) можна використовувати лише для розв'язування задач безумовної диференційовної оптимізації. Його виконання означає, що в точці $x^{(k+1)}$ з точністю ε_3 виконується умова стаціонарності.

Однак виконання вказаних критеріїв та інших подібних їм евристичних умов зупинки ітераційних методів у більшості випадків не гарантує досягнення необхідної точності розв'язку задачі (27.1).

3. Велику групу нескінченних ітераційних методів пошуку розв'язків задач безумовної і умовної оптимізації утворюють *методи випадкового пошуку*. Ці методи характеризуються тим, що вони генерують послідовність точок $\{x^{(k)}\}$ за правилом:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h_k \xi, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{27.11}$$

де $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ – деяка реалізація n-вимірної випадкової величини ξ з відомим законом розподілу ймовірностей. Наприклад, координати ξ_j, $j = \overline{1, n}$, випадкового вектора ξ можуть бути незалежними випадковими величинами з рівномірним розподілом ймовірностей на проміжку $[-1; 1]$. В цьому випадку метод випадкового пошуку, як і багато інших, вимагає наявності датчика (генератора) випадкових чисел, звернувшись до якого у будь-який момент можна одержати яку-небудь реалізацію n-вимірного випадкового вектора ξ із заданим законом розподілу ймовірностей. Такі генератори, взагалі кажучи псевдовипадкових чисел, оформляються, як правило, у вигляді процедур або функцій, які входять до складу стандартних бібліотек мов програмування або спеціалізованих програм, наприклад для опрацювання статистичних даних.

Змінюючи в (27.11) правила вибору крокового множника h_k і напряму руху ξ, можна одержати різні варіанти методів випадкового пошуку. Серед них варто відзначити *метод з поверненням при невдалому кроці*, *метод найкращої проби*, *метод статистичного градієнта*.

Якщо закон розподілу ймовірностей випадкового вектора ξ не залежить від номера ітерації, то такий пошук називають *випадковим пошуком «без навчання»*. В цих методах не аналізуються результати, одержані на попередніх ітераціях, і тому не використовуються напрями руху, які більш перспективні щодо спадання (зростання) цільової функції, і тому процес збігається до розв'язку поставленої задачі оптимізації досить повільно.

Методи випадкового пошуку можна зробити більш ефективними, якщо на кожній ітерації враховувати результати, накопичені при відшуканні розв'язку на попередніх ітераціях, і перебудовувати ймовірнісні властивості пошуку так, щоб напрями руху ξ були більш перспективними щодо спадання (зростання) цільової функції і ставали більш ймовірними. Методи випадкового пошуку, в яких використовуються результати попередніх обчислень в процесі пошуку розв'язку в залежності від конкретних особливостей цільової функції, називають *методами випадкового пошуку «з навчанням»*. Для методів «з навчанням» ітераційний процес зручніше записувати у вигляді

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h_k \xi^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \qquad (27.12)$$

що підкреслює залежність випадкового вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ від номера ітерації k. Прикладами методів випадкового пошуку «з навчанням» мінімізації функції на R^n є *метод «покоординатного навчання»* і *метод неперервного «самонавчання»*. Таким чином, на різних етапах методу випадкового пошуку «з навчанням» доводиться мати справу з реалізаціями випадкового вектора ξ з різними законами розподілу ймовірностей. На початку пошуку закон розподілу ймовірностей випадкового вектора $\xi = \xi^{(0)}$ обирається з врахуванням апріорних даних про цільову функцію. Якщо такі дані відсутні, то пошук зазвичай починається з випадкового вектора $\xi^{(0)} = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)})$, компоненти якого $\xi_j^{(0)}$, $j = \overline{1, n}$, є незалежними випадковими величинами з рівномірними розподілами ймовірностей на відрізку $[-1; 1]$. Для «навчання» методу в процесі пошуку часто беруть сімейство випадкових векторів $\xi = \xi(\omega)$, які залежать від параметра $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, і при переході від k-ї ітерації до $(k+1)$-ї ітерації значення параметра ω_k замінюється новим значенням ω_{k+1} з урахуванням результатів випадкового пошуку.

З різними підходами щодо побудови методів випадкового пошуку можна познайомитися, наприклад, у роботах [18], [28], [57], [77], [82], [103]. Деякі із зазначених вище методів та їх окремі модифікації будуть розглянуті у наступних параграфах.

4. Нехай задача (27.1) є багатоекстремальною, тобто її цільова функція має хоча б одну точку локального мінімуму, яка відрізняється від точки глобального мінімуму. Тоді за допомогою згаданих вище методів мінімізації вдається знайти, взагалі кажучи, лише наближення до деякої точки локального мінімуму поставленої задачі. Тому їх називають *локальними методами мінімізації*.

Для розв'язування багатоекстремальних задач можна використовувати як локальні методи, так і *глобальні методи мінімізації*, тобто методи які знаходять наближення до розв'язку задачі (27.1). У першому випадку можна діяти, наприклад, за такою схемою:

1) допустиму множину X поділити на скінченну кількість підмножин X_i, які не перетинаються і повністю покривають множину X, тобто $X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, де $I = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ – множина індексів, m – кількість підмножин X_i, і кожна з підмножин X_i містить лише одну точку локального мінімуму;

2) вибираючи на кожній підмножині X_i, $i \in I$, початкове наближення за допомогою того чи іншого локального методу мінімізації, знайти наближення точки мінімуму цільової функції на відповідній підмножині;

3) порівнявши між собою результати, одержані на кожній з підмножин X_i, знайти точку, в якій цільова функція досягає найменшого значення. Одержану точку можна вважати деяким наближенням точки глобального мінімуму цільової функції на множині X.

Нажаль, такий підхід при розв'язуванні складних практичних задач є занадто трудомістким, оскільки для одержання прийнятного розв'язку задачі необхідно множину X ділити на досить велику кількість підмножин, щоб добитися унімодальності цільової функції на кожній з них. Крім того, якщо множина X має досить складну топологію, вдало виконати поділ вдається дуже рідко, при цьому, як правило, поділ буде задовольняти або умову $X \subset (\bigcup_{i \in I} X_i)$, або умову $X \supset (\bigcup_{i \in I} X_i)$. Це може призвести до того, що знайдений наближений розв'язок буде досить далеко від шуканої точки глобального мінімуму.

Тому важливого значення набуває проблема розробки методів глобальної мінімізації для багатоекстремальних задач. Як показує досвід, побудувати ефективні чисельні методи глобальної мінімізації вдається лише для деякого досить вузького класу задач, коли на цільову функцію і допустиму множину накладені певні досить жорсткі обмеження. Наприклад функція $f(x)$ повинна задовольняти умову Ліпшиця:

$$| f(x^{(2)}) - f(x^{(1)}) | \leq K \| x^{(2)} - x^{(1)} \| \text{ для будь-яких } x^{(1)} \in X, x^{(2)} \in X,$$

де $K = const > 0$ – константа Ліпшиця, а допустима множина X є n – вимірним паралелепіпедом, тобто

$$X = \{x \in R^n \mid a_j \le x_j \le b_j,\ j = \overline{1,n}\},$$

де $a_j < b_j$, $j = \overline{1,n}$, або множина X є n-вимірною кулею заданого радіуса r з визначеним центром $X^{(0)}$:

$$X = \overline{S}(X^{(0)}, r) = \{x \in R^n \mid \rho(x, X^{(0)}) \le r\}, \text{ де } r > 0.$$

Деякі підходи до побудови глобальних методів мінімізації аналогічні тим, які були використані при побудові методів розв'язування задач одновимірної мінімізації (метод рівномірного перебору, метод послідовного перебору, метод мінорант (метод ламаних)) (див. §26). Деякі методи глобальної мінімізації для розв'язування задач безумовної і умовної мінімізації функцій від однієї і багатьох змінних можна знайти, наприклад, в [18], [43], [97].

Запитання для самоконтролю

1. Які методи називають чисельними методами розв'язування задач оптимізації?
2. Які методи називаються методами нульового порядку?
3. Які методи називаються методами першого порядку?
4. Які методи називаються методами другого порядку?
5. Які методи називають методами безумовної мінімізації, а які – умовної мінімізації?
6. Які методи називаються методами послідовних наближень і яка їх особливість?
7. Які ітераційні методи мінімізації називають методами спуску?
8. Які ітераційні методи мінімізації називають монотонними, а які – немонотонними?
9. Які чисельні методи мінімізації називають скінченними, а які – нескінченними?
10. Які чисельні методи називаються збіжними?
11. Яка послідовність точок називається мінімізуючою?
12. Що таке швидкість збіжності послідовності і яка вона буває?
13. Які умови зупинки використовують в нескінченних ітераційних методах?
14. Що розуміють під точністю обчислень?
15. Які чисельні методи мінімізації називають методами випадкового пошуку і в чому їх особливість?
16. Які задачі мінімізації називають багатоекстремальними?
17. Які методи називають локальними методами мінімізації, а які глобальними?
18. Як можна використати локальні методи мінімізації для розв'язування багатоекстремальних задач і які при цьому виникають труднощі?

§28. Методи спуску першого і нульового порядків

Розглянемо найбільш відомі методи першого і нульового порядків, які відносяться до методів спуску і загальна схема яких була наведена у попередньому параграфі.

1. Градієнтні методи. Нехай в n-вимірному евклідовому просторі R^n розглядається задача відшукання мінімуму диференційовної на R^n функції $f(x)$:

$$f(x) \to \min, x \in R^n, \tag{28.1}$$

тобто задача безумовної диференційовної мінімізації.

Для наближеного відшукання розв'язку задачі (28.1) часто використовують ітераційні методи виду:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h_k g^{(k)}, \tag{28.2}$$

де $g^{(k)} \in R^n$ – вектор, який є нарямом спадання функції $f(x)$ в точці $x^{(k)}$, h_k – параметр, величина якого визначає довжину кроку вздовж напряму $g^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Вибираючи в (28.2) за напрям спадання $g^{(k)}$ антиградієнт функції $f(x)$ в точці $x^{(k)}$, тобто вектор $g^{(k)} = -f'(x^{(k)})$, одержуємо ітераційний метод виду

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - h_k f'(x^{(k)}),\ h_k > 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{28.3}$$

або, в координатній формі,

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - h_k \frac{\partial f(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})}{\partial x_i},\ i = \overline{1,n},\ h_k > 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Цей вибір обумовлений наступними міркуваннями.

Якщо функція $f(x)$ диференційовна на R^n, то в околі деякої точки $x^{(k)}$ згідно формули Тейлора має місце подання:

$$f(x) - f(x^{(k)}) = \langle f'(x^{(k)}), x - x^{(k)} \rangle + o(\| x - x^{(k)} \|). \tag{28.4}$$

Припустимо, що точка $x^{(k)}$ не є стаціонарною, тобто $\| f'(x^{(k)}) \| \ne 0$. Для визначення точки $x^{(k+1)}$ будемо мінімізувати лінійну частину приросту $f(x) - f(x^{(k)})$, тобто функцію

$$F(x) = \langle f'(x^{(k)}), x - x^{(k)} \rangle,$$

на кулі $\overline{S}(x^{(k)}, r) = \{x \in R^n \mid \| x - x^{(k)} \| \le r\}$, де $r > 0$ – досить мале число.

З нерівності Коші-Буняковського (див. (7.2)) випливає

$$-\| f'(x^{(k)})\| \, \| x-x^{(k)} \| \le \langle f'(x^{(k)}), x-x^{(k)} \rangle \le \| f'(x^{(k)})\| \, \| x-x^{(k)} \|.$$

Тоді для всіх $x \in \bar{S}(x^{(k)}, r)$ маємо

$$\langle f'(x^{(k)}), x-x^{(k)} \rangle \ge -\| f'(x^{(k)})\| \, \| x-x^{(k)} \| \ge -r \| f'(x^{(k)})\|.$$

Візьмемо точку $\bar{x} = x^{(k)} - rf'(x^{(k)}) \| f'(x^{(k)}) \|^{-1} \in \bar{S}(x^{(k)}, r)$. Для неї маємо

$$\langle f'(x^{(k)}), \bar{x}-x^{(k)} \rangle = \langle f'(x^{(k)}), -rf'(x^{(k)}) \| f'(x^{(k)}) \|^{-1} \rangle = -r \| f'(x^{(k)})\|.$$

Тобто на кулі $\bar{S}(x^{(k)}, r)$ мінімум функції $F(x)$ досягається в точці $x^{(k+1)} = \bar{x}$. Отже, при фіксованій довжині кроку, тобто при $h_k = \| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| = r$, мінімум лінійної частини подання (28.4) досягається тоді, коли напрям руху $g^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ співпадає з напрямом антиградієнта функції $f(x)$ в точці $x^{(k)}$, тобто з напрямом $-f'(x^{(k)})$.

Ітераційні процеси, в яких напрям руху на кожному кроці співпадає з антиградієнтом (для задачі мінімізації) або градієнтом (для задачі максимізації) цільової функції, називаються *градієнтними методами.* Ці методи відрізняються один від одного способами вибору кроку h_k в (28.3). Розглянемо деякі з найбільш відомих градієнтних методів.

Метод найшвидшого спуску. Так називається метод виду (28.3), на кожній ітерації якого кроковий множник h_k обирається з умови досягнення мінімуму функції $f(x)$ у напрямі руху, тобто

$$f(x^{(k)} - h_k f'(x^{(k)})) = \min_{h>0} f(x^{(k)} - hf'(x^{(k)})). \quad (28.5)$$

Геометрична інтерпретація методу найшвидшого спуску в R^2 подана на рис. 28.1.

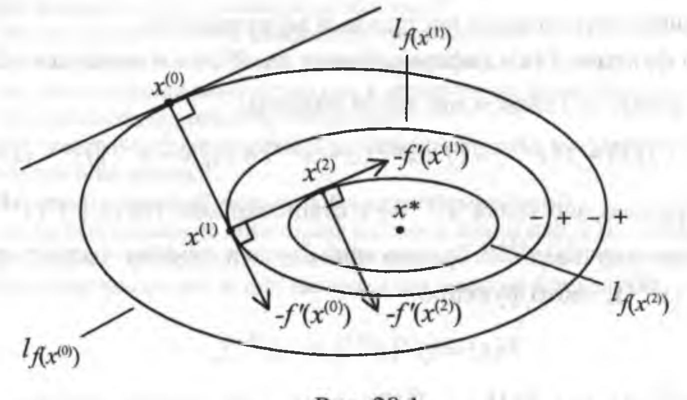


Рис. 28.1.

Для методу найшвидшого спуску характерним є те, що напрям руху із точки $x^{(k)}$ дотикається поверхні (лінії) рівня в точці $x^{(k+1)}$ і послідовність точок

$$x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$$

зигзагоподібно наближається до точки мінімуму x^* цільової функції $f(x)$, причому ланки цього зигзагу ортогональні між собою. Дійсно, оскільки кроковий множник h_k обирається з умови (28.5) мінімізації за h функції

$$F(h) = f(x^{(k)} - hf'(x^{(k)})),$$

то, використовуючи правило диференціювання складної функції від багатьох змінних $f(x_1(h), x_2(h), \ldots, x_n(h))$, (див., наприклад, [105], стор. 386-387), можна показати, що

$$\frac{dF(h_k)}{dh} = -\langle f'(x^{(k+1)}), f'(x^{(k)}) \rangle = 0. \quad (28.6)$$

Отже, напрями руху на двох послідовних ітераціях методу найшвидшого спуску взаємно ортогональні.

Розглянемо за яких умов метод найшвидшого спуску збігається до розв'язку задачі (28.1).

Т е о р е м а 28.1. *Якщо функція $f(x)$ обмежена знизу і її градієнт задовольняє умову Ліпшиця:*

$$\| f'(x) - f'(y) \| \le K \| x-y \| \quad (28.7)$$

при будь-яких $x \in R^n$, $y \in R^n$, де $K > 0$, то при довільній початковій точці $x^{(0)} \in R^n$ для методу (28.3), (28.5) *буде*

$$\lim_{k \to \infty} \| f'(x^{(k)}) \| = 0.$$

Д о в е д е н н я. Згідно теореми Лагранжа про середнє для будь-яких $x \in R^n$

$$f(x) - f(x^{(k)}) = \langle f'(x_s^{(k)}), x-x^{(k)} \rangle,$$

де $x_s^{(k)} = x^{(k)} + \theta(x-x^{(k)})$ – деяка внутрішня точка відрізка $[x^{(k)}; x]$ при $\theta \in (0; 1)$. Цю рівність можна подати у вигляді:

$$f(x) - f(x^{(k)}) = \langle f'(x_s^{(k)}) - f'(x^{(k)}) + f'(x^{(k)}), x-x^{(k)} \rangle =$$

$$= \langle f'(x_s^{(k)}) - f'(x^{(k)}), x-x^{(k)} \rangle + \langle f'(x^{(k)}), x-x^{(k)} \rangle. \quad (28.8)$$

Розглянемо довільну точку виду

$$x = x^{(k)} - hf'(x^{(k)}),$$

де $h > 0$. Тоді, враховуючи те, що $x - x^{(k)} = -hf'(x^{(k)})$, і використовуючи (28.7) та подання точки $x_s^{(k)}$, з (28.8) одержуємо

$$f(x) - f(x^{(k)}) = -h\langle f'(x_s^{(k)}) - f'(x^{(k)}), f'(x^{(k)})\rangle -$$

$$-h\langle f'(x^{(k)}), f'(x^{(k)})\rangle \le hK \| x_s^{(k)} - x^{(k)} \| \| f'(x^{(k)}) \| - \qquad (28.9)$$

$$-h\| f'(x^{(k)})\|^2 = h0K \| x - x^{(k)} \| \| f'(x^{(k)}) \| - h \| f'(x^{(k)})\|^2 \le$$

$$\le h^2 K \| f'(x^{(k)})\|^2 - h\| f'(x^{(k)})\|^2.$$

Розглянемо функцію від однієї змінної

$$\varphi(h) = h^2 K \| f'(x^{(k)})\|^2 - h\| f'(x^{(k)})\|^2.$$

Легко бачити, що мінімум цієї функції досягається в точці $h_{\min} = \dfrac{1}{2K}$, причому

$$\varphi(h_{\min}) = -\frac{\| f'(x^{(k)})\|^2}{4K}.$$

Оскільки величина $h^2 K \| f'(x^{(k)})\|^2$ є верхньою оцінкою значення виразу $-h\langle f'(x_s^{(k)}) - f'(x^{(k)}), f'(x^{(k)})\rangle$, то значення h_k, яке задовольняє (28.5), буде не менше $h_{\min}$ і при цьому з урахуванням (28.9)

$$f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)}) \le -\frac{\| f'(x^{(k)})\|^2}{4K}. \qquad (28.10)$$

Отже при будь-якому k

$$f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)}) < 0$$

(за умови, що $\| f'(x^{(k)})\|^2 \ne 0$), тобто послідовність $\{f(x^{(k)})\}$ є спадною. Оскільки функція $f(x)$ за умовою теореми обмежена знизу, то послідовність $\{f(x^{(k)})\}$ збіжна. Тоді

$$f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)}) \to 0 \text{ при } k \to \infty. \qquad (28.11)$$

З (28.10) випливає, що

$$\| f'(x^{(k)})\|^2 \le \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k+1)})}{4K}.$$

Звідси з урахуванням (28.11) маємо, що $\lim\limits_{k\to\infty} \| f'(x^{(k)})\| = 0$.

Клас функцій, які задовольняють умови теореми 28.1, досить широкий. Такі функції взагалі можуть не мати точок екстремуму, можуть мати локальні мінімуми, сідлові точки. Теорема 28.1 показує, що метод найшвидшого спуску є збіжним за значеннями цільової функції $f(x)$ або до точної нижньої межі цієї функції $\inf\limits_{x\in R^n} f(x)$, або ж до значення $f(x)$ в деякій стаціонарній точці. Збіжність послідовності $\{x^{(k)}\}$ до стаціонарної точки (якщо така існує) також має місце. Однак встановити швидкість збіжності методу при таких вимогах, які накладаються на функцію $f(x)$ в теоремі 28.1, важко. Але це можна зробити при більш жорстких вимогах до гладкості і опуклості функції $f(x)$.

Т е о р е м а 28.2. *Нехай $f(x)$ – двічі неперервно диференційовна функція, причому її матриця других похідних задовольняє умови*

$$d\| y\|^2 \le \langle f''(x)y, y\rangle \le D\| y\|^2 \qquad (28.12)$$

при будь-яких $x \in R^n$, $y \in R^n$, де d і D – деякі числа такі, що $0 < d < D$, а послідовність $\{x^{(k)}\}$ визначається за методом (28.3), (28.5). *Тоді при довільній початковій точці $x^{(0)} \in R^n$ послідовність $\{x^{(k)}\}$ збігається до точки мінімуму x^* функції $f(x)$ з швидкістю геометричної прогресії:*

$$f(x^{(k)}) - f(x^*) \le q^k (f(x^{(0)}) - f(x^*)), \qquad (28.13)$$

$$\| x^{(k)} - x^*\| \le C \cdot q^{\frac{k}{2}}, \qquad (28.14)$$

де $0 < C < \infty$ – константа, $q \in (0;1)$.

Д о в е д е н н я. Насамперед відмітимо, що функція $f(x)$, яка завольняє (28.12), є сильно опуклою з константою $m = \dfrac{d}{2}$ (див. означення 14.6), при цьому точка мінімуму x^* існує і єдина. Оскільки $f'(x^*) = O_n$, то з формули Тейлора з додатковим членом у формі Лагранжа одержуємо:

$$f(x) - f(x^*) = \frac{1}{2}\langle f''(x^* + \theta(x - x^*))(x - x^*), x - x^*\rangle,$$

де $\theta \in (0;1)$.

Звідси, в силу (28.12), маємо

$$\frac{d}{2}\| x - x^*\|^2 \le f(x) - f(x^*) \le \frac{D}{2}\| x - x^*\|^2. \qquad (28.15)$$

Застосувавши критерій сильної опуклості функції (див. теорему 15.5) при $m=\frac{d}{2}$ і нерівність Коші-Буняковського, одержуємо

$$f(x^*)-f(x)\geq\langle f'(x),x^*-x\rangle+\frac{d}{2}\|x^*-x\|^2\geq$$

$$\geq-\|f'(x)\|\|x-x^*\|+\frac{d}{2}\|x^*-x\|^2. \qquad (28.16)$$

Звідси, враховуючи ліву частину подвійної нерівності (28.15), маємо

$$\frac{d}{2}\|x-x^*\|^2\leq f(x)-f(x^*)\leq\|f'(x)\|\|x-x^*\|-\frac{d}{2}\|x-x^*\|^2,$$

що при $x\neq x^*$ приводить до оцінки

$$\|x-x^*\|\leq\frac{\|f'(x)\|}{d}.$$

З правої частини (28.15) маємо

$$\|x-x^*\|^2\geq\frac{2}{D}(f(x)-f(x^*)).$$

Враховуючи одержані оцінки, з (28.16) одержуємо

$$f(x)-f(x^*)\leq\frac{\|f'(x)\|^2}{d}-\frac{d}{D}(f(x)-f(x^*)).$$

Тоді

$$\|f'(x)\|^2\geq d\left(1+\frac{d}{D}\right)(f(x)-f(x^*)). \qquad (28.17)$$

В умовах теореми аналогічним шляхом, як одержано і нерівність (28.10), можна одержати оцінку

$$f(x^{(k+1)})-f(x^{(k)})\leq-\frac{\|f'(x^{(k)}\|^2}{2D}.$$

Тоді

$$f(x^{(k+1)})-f(x^{(k)})=(f(x^{(k+1)})-f(x^*))+(f(x^*)-f(x^{(k)}))\leq-\frac{\|f'(x^{(k)}\|^2}{2D}$$

або

$$f(x^{(k+1)})-f(x^*)\leq-\frac{\|f'(x^{(k)})\|^2}{2D}+(f(x^{(k)})-f(x^*)).$$

Звідси, використовуючи нерівність (28.17), одержуємо

$$f(x^{(k+1)})-f(x^*)\leq-\frac{d\left(1+\frac{d}{D}\right)}{2D}(f(x^{(k)})-f(x^*))+(f(x^{(k)})-f(x^*))$$

або

$$f(x^{(k+1)})-f(x^*)\leq\left(1-\frac{d\left(1+\frac{d}{D}\right)}{2D}\right)(f(x^{(k)})-f(x^*)). \qquad (28.18)$$

Позначимо

$$q=1-\frac{d\left(1+\frac{d}{D}\right)}{2D}.$$

Враховуючи єдиність точки мінімуму x^*, при будь-яких $x^{(k+1)}\neq x^*$, $x^{(k)}\neq x^*$ маємо $f(x^{(k+1)})-f(x^*)>0$ і $f(x^{(k)})-f(x^*)>0$. Тоді з нерівності (28.18) випливає, що $q>0$. Крім того, оскільки $0<d<D$, то величина $\frac{d\left(1+\frac{d}{D}\right)}{2D}=\frac{dD+d^2}{2D^2}\in(0;1)$ і $q<1$. Тоді

$$f(x^{(k+1)})-f(x^*)\leq q(f(x^{(k)})-f(x^*)),$$

де $0<q<1$.

Звідси одержуємо

$$f(x^{(k+1)})-f(x^*)\leq q(f(x^{(k)})-f(x^*))\leq$$

$$\leq q^2(f(x^{(k-1)})-f(x^*))\leq\ldots\leq q^{k+1}(f(x^{(0)})-f(x^*)),$$

тобто має місце (28.13).

Нерівність (28.14) безпосередньо виводиться з (28.15) і (28.13):

$$\|x^{(k)}-x^*\|\leq\left(\frac{2}{d}\right)^{\frac{1}{2}}(f(x^{(k)})-f(x^*))^{\frac{1}{2}}\leq C\cdot q^{\frac{k}{2}},$$

де

$$C=\left(\frac{2}{d}\right)^{\frac{1}{2}}(f(x^{(0)})-f(x^*))^{\frac{1}{2}}.$$

З а у в а ж е н н я. В [88] показано, що знаменник геометричної прогресії в нерівностях (28.13), (28.14) можна одержати більш точно:

$$q=\frac{D-d}{D+d},$$

при цьому

$$f(x^{(k)})-f(x^*)\le\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^{2k}(f(x^{(0)})-f(x^*)),$$

$$\|x^{(k)}-x^*\|\le C\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^{k},$$

де $C=\left(\frac{D}{d}\right)^{\frac{1}{2}}\|x^{(0)}-x^*\|$.

Розглянемо схему алгоритму роботи за методом найшвидшого спуску (28.3), (28.5).

Нехай задані досить мале число $\varepsilon>0$ і довільне початкове наближення $x^{(0)}\in R^n$.

К р о к 0. Покласти $k:=0$ і знайти вектор $f'(x^{(k)})$.

К р о к 1. Якщо $\|f'(x^{(k)})\|<\varepsilon$, то $x^{(k)}$ – наближений розв'язок задачі (28.1), покласти $x^*:=x^{(k)}$, $f^*:=f(x^{(k)})$ і перейти до виконання кроку 4, інакше перейти до виконання кроку 2.

К р о к 2. Знайти точку

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-h_kf'(x^{(k)}),$$

де h_k таке, що

$$f(x^{(k)}-h_kf'(x^{(k)}))=\min_{h>0}f(x^{(k)}-hf'(x^{(k)})),$$

обчислити $f(x^{(k+1)})$ і знайи вектор $f'(x^{(k+1)})$.

К р о к 3. Якщо $\|f'(x^{(k+1)})\|<\varepsilon$ або $\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|<\varepsilon$, то наближеним розв'язком задачі (28.1) вважати точку $x^{(k+1)}$, покласти $x^*:=x^{(k+1)}$, $f^*:=f(x^{(k+1)})$, $k:=k+1$ і перейти до виконання кроку 4, інакше покласти $k:=k+1$ і перейти до виконання кроку 2.

К р о к 4. Вивести: x^*,f^*,k.

Кінець.

У методі найшвидшого спуску на кожній ітерації необхідно розв'язувати допоміжну задачу одновимірної мінімізації (28.5), що, на перший погляд, ускладнює його реалізацію і застосування. Але, як показують чисельні експерименти, метод найшвидшого спуску дає виграш за кількістю операцій, оскільки забезпечує рух з найвигіднішим кроком, який можна знаходити з наперед заданою точністю одним з відомих наближених методів одновимірної мінімізації нульового порядку (див. §25), при цьому обчислюються тільки значення цільової функції. Зауважимо, що у градієнтних методах основний час витрачається на обчислення градієнтів цільової функції.

Для деяких класів функцій значення параметра h_k, яке є розв'язком задачі (28.5), можна знайти в явному вигляді.

Л е м а 28.1. *Нехай задана квадратична функція*

$$f(x)=\frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle+\langle b,x\rangle,$$

де A – симетрична, додатно визначена квадратна матриця порядку $n\times n$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)^T$, $b=(b_1,b_2,...,b_n)^T$. Тоді розв'язком задачі одновимірної мінімізації $\min_{h\in R}f(x^{(k)}+hg^{(k)})$ є значення h_k, яке дорівнює

$$h_k=-\frac{\langle Ax^{(k)}+b,g^{(k)}\rangle}{\langle Ag^{(k)},g^{(k)}\rangle}, \tag{28.19}$$

де $x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},...,x_n^{(k)})^T$, $g^{(k)}=(g_1^{(k)},g_2^{(k)},...,g_n^{(k)})^T$.

Д о в е д е н н я. Враховуючи властивості скалярного добутку, для функції $f(x)$ при $x=x^{(k)}+hg^{(k)}$, маємо

$$f(x^{(k)}+hg^{(k)})=\frac{1}{2}\langle A(x^{(k)}+hg^{(k)}),x^{(k)}+hg^{(k)}\rangle+\langle b,x^{(k)}+hg^{(k)}\rangle=$$

$$=\frac{1}{2}\langle Ag^{(k)},g^{(k)}\rangle h^2+\langle Ax^{(k)}+b,g^{(k)}\rangle h+\frac{1}{2}\langle Ax^{(k)}+b,x^{(k)}\rangle.$$

Звідси, оскільки згідно означення додатно визначеної матриці $\langle Ag^{(k)},g^{(k)}\rangle>0$, маємо, що точкою мінімуму квадратного тричлена

$$F(h)=\frac{1}{2}\langle Ag^{(k)},g^{(k)}\rangle h^2+\langle Ax^{(k)}+b,g^{(k)}\rangle h+\frac{1}{2}\langle Ax^{(k)}+b,x^{(k)}\rangle$$

відносно змінної h є

$$h_k=-\frac{\langle Ax^{(k)}+b,g^{(k)}\rangle}{\langle Ag^{(k)},g^{(k)}\rangle},$$

тобто має місце (28.19).

Зауважимо, що коли вектор $g^{(k)}$ є напрямом спадання функції $f(x)$ в точці $x^{(k)}$, то згідно леми 20.1 і того, що $f'(x^{(k)})=Ax^{(k)}+b$, маємо $\langle Ax^{(k)}+b,g^{(k)}\rangle=\langle f'(x^{(k)}),g^{(k)}\rangle<0$. Тоді з (28.19)

$$h_k=-\frac{\langle f'(x^{(k)}),g^{(k)}\rangle}{\langle Ag^{(k)},g^{(k)}\rangle}\ge0. \tag{28.20}$$

Якщо $g^{(k)}=-f'(x^{(k)})$, то з (28.20) одержуємо

$$h_k=\frac{\|Ax^{(k)}+b\|^2}{\langle A(Ax^{(k)}+b),Ax^{(k)}+b\rangle}\ge0.$$

Градієнтний метод з поділом кроку. В теоретичних дослідженнях градієнтних методів та при їх практичній реалізації крім правила (28.5) використовують також інші способи вибору параметра h_k, при цьому, як правило, цей вибір повинен забезпечувати виконання нерівності

$$f(x^{(k)} - h_k f'(x^{(k)})) < f(x^{(k)}) . \qquad (28.21)$$

Виконання цієї нерівності на кожній ітерації градієнтного методу можна досягти при досить малому значенні парамертра h_k, але це може привести до великої кількості ітерацій, необхідних для знаходження розв'язку задачі (28.1) із заданою точністю. З іншого боку, значне збільшення крокового можника h_k може викликати несподіване зростання функції $f(x)$ і, як наслідок, порушення нерівності (28.21), або може привести до «блукання» поблизу точки мінімуму.

Розглянемо один адаптивний спосіб відшукання параметра h_k, який одержав назву *поділ кроку*. Цей спосіб на кожному кроці ітераційного методу (28.3) забезпечує виконання умови

$$f(x^{(k)} - h_k f'(x^{(k)})) - f(x^{(k)}) \le -\lambda h_k \| f'(x^{(k)}) \|^2, \qquad (28.22)$$

($\lambda \in (0;1)$ – довільно обрана константа), яка більш жорстка, ніж умова (28.21), але забезпечує збіжність послідовності $\{x^{(k)}\}$ до стаціонарної точки функції $f(x)$ в умовах теореми 28.1.

До початку ітераційного процесу виду (28.3) вибираються деякі довільні константи $h > 0$, $\lambda \in (0;1)$ і довільна точка $x^{(0)}$. На k-ій ітерації ($k = 0, 1, 2, ...$) для знаходження параметра h_k використовується наступна процедура.

Визначається точка

$$\bar{x} = x^{(k)} - hf'(x^{(k)}) \qquad (28.23)$$

і обчислюється $f(\bar{x}) = f(x^{(k)} - hf'(x^{(k)}))$. Якщо виконується умова

$$f(\bar{x}) - f(x^{(k)}) \le -\lambda h \| f'(x^{(k)}) \|^2, \qquad (28.24)$$

то покладається $h_k := h$, $x^{(k+1)} := \bar{x}$, $k := k+1$ і процес (28.3) продовжується далі. Якщо умова (28.24) не виконується, то відбувається зменшення параметра h шляхом множення його на число $\lambda \in (0;1)$ (поділ кроку) і знаходиться нова точка $\bar{x}$ виду (28.23). Потім перевіряється виконання умови (28.24) і т.д. Ця процедура повторюється доти, поки не виконається умова (28.24). Але вона не може бути нескінченною, оскільки антиградієнт $-f'(x^{(k)})$ є напрямом спадання функції $f(x)$. Перше значення h, для якого виконається (28.24), і приймається за h_k.

Наведений спосіб вибору крокового множника h_k в градієнтному методі (28.3) потребує певного обґрунтування.

Для градієнтного методу з вибором параметра h_k за правилом (28.22), крім теореми 28.1, має місце і теорема 28.2 (див., наприклад, [88]), але при цьому знаменник прогресії q в (28.13), (28.14) дорівнює:

$$q = 1 - \lambda \bar{h} d \left(1 + \frac{d}{D} \right), \qquad (28.25)$$

де $\bar{h}$ таке, що $h_k \le \bar{h} = \dfrac{2(1-\lambda)}{D}$ для будь-якого $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Можна показати, що саме при таких h_k виконується умова (28.22). Крім того, з (28.25) випливає, що мінімальне значення $q_{\min}$ досягається при $\lambda = \dfrac{1}{2}$. Тоді $q_{\min} = 1 - \dfrac{d}{2D}\left(1 + \dfrac{d}{D}\right)$. Тобто в градієнтному методі з поділом кроку доцільно покладати $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

Градієнтний метод з постійним кроком. Процедура перевірки умови (28.22) на кожній ітерації є досить трудомісткою. Але якщо відомі деякі параметри, що характеризують глобальні властивості функції $f(x)$, то метод (28.3) можна виконувати з постійним параметром h_k на всіх ітераціях, при якому цільова функція $f(x)$ буде монотонно спадати. Так, наприклад, коли відома константа Ліпшиця K функції $f(x)$, то можна покласти

$$h_k = \bar{h} = \frac{1-\lambda}{K}$$

(див., наприклад, [88]).

Якщо відома рівномірна по x оцінка зверху максимального власного числа D матриці других похідних $f''(x)$ для будь-яких $x \in R^n$, то виконання нерівності (28.22) забезпечується вибором параметра h_k на всіх ітераціях за формулою:

$$h_k = \bar{h} = \frac{2(1-\lambda)}{D}.$$

Трудомісткість градієнтних методів з постійним кроком є мінімальною, оскільки на кожній ітерації не треба виконувати ніяких додаткових обчислень, крім знаходження градієнта $f'(x^{(k)})$. Однак при розв'язуванні практичних задач значення констант K і D, як правило, невідомі, що робить ці методи практично незастосовними.

З а у в а ж е н н я. До переваг градієнтних методів відносяться простота і можливість використання для мінімізації досить різних за характером функцій. Але через повільну збіжність ці методи рідко застосовуються для розв'язування складних задач мінімізації, зокрема з складною топографічною структурою поверхонь рівня цільових функцій. Тому були розроблені і далі розробляються методи з більш високою швидкістю збіжності. Градієнтні ж методи часто використовуються в комбінації з іншими більш ефективними методами на початковому етапі розв'язування задачі. Таке комбінування доцільно робити тоді, коли початкове наближення знаходиться досить далеко від точки мінімуму цільової функції, а кроки вздовж антиградієнта дозволяють значно зменшити значення цільової функції.

Яристий метод. Для сильно опуклих двічі неперервно диференційовних функцій за величини d, D в теоремі 28.2 можна брати відповідно найменше і найбільше власні числа матриці $f''(x)$. Якщо числа d і D мало відрізняються одне від одного (матриця $f''(x)$ добре обумовлена), то в (28.13) і (28.14) знаменник геометричної прогресії q – мале число, а швидкість збіжності градієнтних методів досить висока. Якщо ж $\frac{d}{D} << 1$ (матриця $f''(x)$ погано обумовлена), то q близьке до одиниці, і градієнтні методи збігається повільно. Цей факт у геометричному тлумаченні означає, що поверхні (лінії) рівня функції $f(x)$ мають «яристу» структуру і напрям вектора $-f'(x^{(k)})$ може сильно відхилятися від напряму на точку мінімуму x^* (рис. 28.2). У таких випадках траєкторія спуску градієнтними методами характеризується досить швидким спуском на «дно яру» і потім повільним зигзагоподібним рухом вздовж «яру» до точки мінімуму x^*.

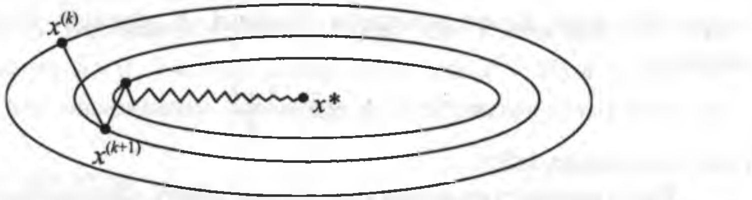


Рис. 28.2.

Для мінімізації функцій з складною топографічною структурою поверхонь (ліній) рівня, зокрема «яристих» функцій, використовують деякі евристичні, тобто інтуїтивні, не обгрунтовані строго, підходи.

Одним з ефективних методів прискорення збіжності градієнтних методів є метод, ідея якого була запропонована І. М. Гельфандом на початку 60-х років 20 століття, і який в літературі називається *яристим методом*. Розглянемо деякі варіанти цього методу.

Нехай $y^{(0)}$, $\bar{y}^{(0)}$ – дві довільні близькі точки, наприклад, $\| y^{(0)} - \bar{y}^{(0)} \| < \delta$, де $\delta > 0$ – досить мале число (рис. 28.3). З точки $y^{(0)}$ робиться звичайний градієнтний спуск і після однієї або кількох ітерацій одержується точка $x^{(0)}$. Теж саме робиться для точки $\bar{y}^{(0)}$ і одержується

точка $\bar{x}^{(0)}$. Точки $x^{(0)}, \bar{x}^{(0)}$ лежать, як правило, в околі «дна яру». Обравши за напрям руху вектор $x^{(0)} - \bar{x}^{(0)}$ або вектор $\bar{x}^{(0)} - x^{(0)}$, в залежності від того, який з них є напрямом спадання цільової функції $f(x)$, з точки $x^{(0)}$ робиться так званий «яристий крок». В результаті одержується точка $y^{(1)}$, яка, взагалі кажучи, знаходиться на «схилі яру». В її околі вибирається точка $\bar{y}^{(1)}$ і процедура повторюється. Правило одержання точки $y^{(1)}$ можна записати в аналітичному вигляді:

$$y^{(1)} = x^{(0)} + h_0 sign(f(x^{(0)}) - f(\bar{x}^{(0)})) \frac{\bar{x}^{(0)} - x^{(0)}}{\| \bar{x}^{(0)} - x^{(0)} \|}, \qquad (28.26)$$

де $h_0 > 0$ – «яристий крок».

На рис. 28.3 зображено початок ітераційного процесу яристого методу, коли при знаходженні точок $x^{(k)}, \bar{x}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, робиться один крок методу найшвидшого спуску.

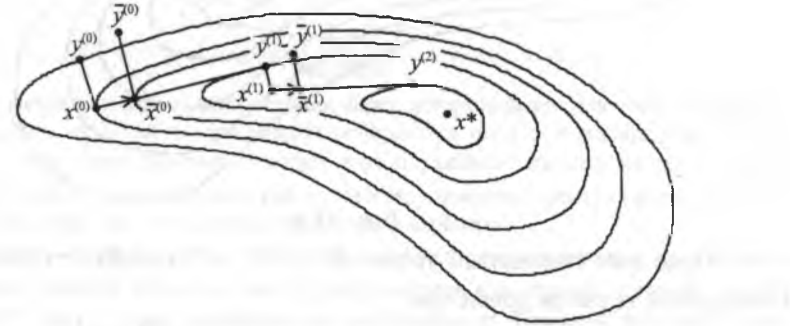


Рис. 28.3.

В описаному варіанті яристого методу процедура вибору точок $\bar{y}^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) строго не визначена, але від неї певною мірою залежить його ефективність. Одним з варіантів вибору точок $\bar{y}^{(k)}$ може бути такий:

$$\bar{y}^{(k)} = \left(y_1^{(k)} \pm \frac{\delta}{2\sqrt{n}}, \ldots, y_n^{(k)} \pm \frac{\delta}{2\sqrt{n}} \right), \qquad (28.27)$$

при цьому $\| y^{(k)} - \bar{y}^{(k)} \| = \frac{\delta}{2}$, тобто точка $\bar{y}^{(k)}$ належить δ-околу точки $y^{(k)}$.

При практичній реалізації процедури вибору точок $\bar{y}^{(k)}$ за правилом (28.27) треба попередньо провести дослідження і визначитися, чи брати знак «+», чи знак «–», а також вирішити, чи змінювати величину δ, чи залишати її сталою для будь-яких $k = 0, 1, 2, \ldots$.

У [18] розглянуто варіант яристого методу, в якому початок процесу співпадає з початком попереднього методу, але на наступних ітераціях вибір точок $\bar{y}^{(k)}$, $k = 1,2,\ldots$, не відбувається.

Нехай $\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}$ – дві довільні близькі точки, з яких робиться спуск за допомогою якого-небудь градієнтного методу і одержуються точки $x^{(0)}, x^{(1)}$ на «дні яру» (рис. 28.4). Далі знаходиться точка $\bar{x}^{(2)}$ за таким правилом:

$$\bar{x}^{(2)} = x^{(1)} + \bar{h}_1 sign(f(x^{(0)}) - f(x^{(1)}))\frac{x^{(1)} - x^{(0)}}{\| x^{(1)} - x^{(0)} \|},$$

де $\bar{h}_1 > 0$ – «яристий крок». З точки $\bar{x}^{(2)}$, яка, взагалі кажучи, знаходиться на «схилі яру», робиться один крок методу найшвидшого спуску і визначається наступна точка $x^{(2)}$ на «дні яру».

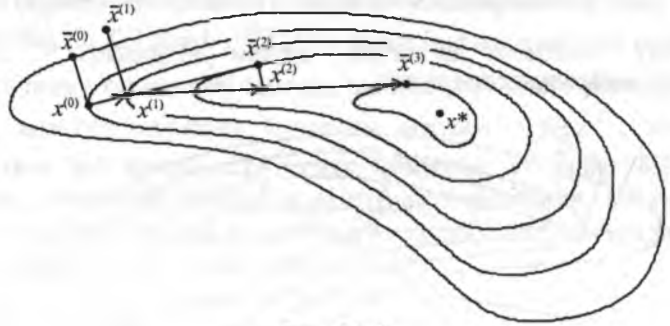


Рис. 28.4.

Якщо вже побудовані точки $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ $(k \geq 2)$, то точка $\bar{x}^{(k+1)}$ знаходиться за таким правилом:

$$\bar{x}^{(k+1)} = x^{(k)} + \bar{h}_k sign(f(x^{(k-1)}) - f(x^{(k)}))\frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|}, \quad (28.28)$$

з якої робиться один крок методу найшвидшого спуску і визначається наступна точка «дна яру» $x^{(k+1)}$, і т.д. Ітераційний процес продовжується доти, поки не виконається або умова $\| \bar{x}^{(k+1)} - x^{(k)} \| < \varepsilon$, або умова $\| f'(\bar{x}^{(k+1)}) \| < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – досить мале число.

З а у в а ж е н н я. «Яристий крок» $\bar{h}_k$ в (28.28), від правильності вибору якого істотно залежить швидкість збіжності методу, може бути як сталою величиною для будь-яких k, так і змінюватися, в залежності від поворотів «яру». В першому випадку добір треба робити емпірично з врахуванням відомостей про цільову функцію, які одержуються в процесі роботи за методом. В другому – треба намагатися регулювати цей параметр так, щоб по можливості швидше проходити прямолінійні ділянки на «дні яру», а на крутих поворотах «яру» запобігати відхиленню від його «дна». Один з способів вибору яристого кроку, який певним чином враховує «кривину дна яру», наведено в [18].

2. Методи нульового порядку. При розв'язуванні практичних задач часто зустрічаються випадки, коли функція, що мінімізується, або недиференційовна взагалі, або диференційовна, але обчислення похідних досить трудомістке. Більше того, в багатьох задач оптимізації єдині дані, які можна отримати про цільову функцію, є її значення. В таких випадках цілком природно використовувати методи, які вимагають лише обчислення значень цільової функції, тобто методи нульового порядку. Розглянемо два методи, які є типовими представниками методів цього класу: *метод покоординатного спуску* і *симплексний метод*.

Метод покоординатного спуску. Ідея методу покоординатного спуску полягає в тому, що відбувається спуск вздовж ламаної лінії, яка утворюється з відрізків прямих, паралельних до осей координат (рис. 28.5).

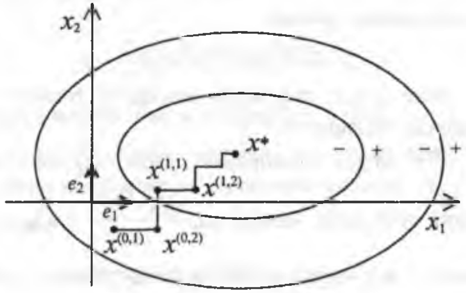


Рис. 28.5.

Цей метод є одним з найпростіших серед детермінованих способів визначення напряму спуску, оскільки за цей напрям вибирається один з координатних векторів $\pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_n$, внаслідок чого в кожній точці ітераційного процесу змінюється лише одна координата. Існують численні варіанти методу покоординатного спуску (див., наприклад, [18], [57], [73]). Розглянемо один з таких варіантів.

Ітераційний процес методу покоординатного спуску складається з «внутрішніх» і «зовнішніх» ітерацій. Одна зовнішня ітерація містить n внутрішніх ітерацій, на яких по черзі відбувається спуск паралельно до осей координат. Опишемо початкову зовнішню ітерацію. Нехай $x^{(0,1)} = (x_1^{(0,1)}, x_2^{(0,1)}, \ldots, x_n^{(0,1)})$ – початкове наближення, де перший верхній індекс визначає номер зовнішньої ітерації, а другий – номер тієї координати, за якою відбувається спуск. Наступна точка внутрішньої ітерації визначається за формулою

$$x^{(0,2)} = x^{(0,1)} + h_{0,1} g^{(0,1)},$$

де $g^{(0,1)} = e_1$ або $g^{(0,1)} = -e_1$, при цьому за напрям руху $g^{(0,1)}$ обирається той з двох напрямів e_1 або $-e_1$, який є напрямом спадання цільової функції в точці $x^{(0,1)}$. Крок h_{01} добирається так, щоб було $f(x^{(0,2)}) < f(x^{(0,1)})$. Після чого наступна внутрішня ітерація відбувається при $g^{(0,2)} = e_2$ або $g^{(0,2)} = -e_2$ і т.д. Після n внутрішніх ітерацій знаходиться точка $x^{(1,1)}$ (див. рис. 28.5), яка визначається за формулою

$$x^{(1,1)} = x^{(0,n)} + h_{0,n} g^{(0,n)},$$

де $g^{(0,n)} = e_n$ або $g^{(0,n)} = -e_n$.

Нехай на k-й зовнішній ітерації відбувається спуск за j-ю координатою. Тоді рекурентна формула, яка визначає наступне наближення до точки мінімуму, має такий вигляд:

$$x^{(k,j+1)} = x^{(k,j)} + h_{k,j} g^{(k,j)}, \tag{28.29}$$

де $g^{(k,j)} = e_j$ або $g^{(k,j)} = -e_j$, $j = \overline{1,n}$, $k = 0,1,2,...$, або, в координатній формі,

$$x_i^{(k,j+1)} = x_i^{(k,j)}, \qquad i \neq j,$$
$$x_i^{(k,j+1)} = x_i^{(k,j)} + h_{k,j} g_i^{(k,j)}, \quad i = j,$$

де $g_i^{(k,j)} = 1$ або $g_i^{(k,j)} = -1$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, $k = 0, 1, 2, ...$, при цьому крок $h_{k,j}$ вибирається так, щоб виконувалась умова

$$f(x^{(k,j+1)}) < f(x^{(k,j)}). \tag{28.30}$$

Після того, як стане $j = n$, лічильник зовнішніх ітерацій k збільшується на одиницю, а індекс j набуває значення 1.

Якщо в точці $x^{(k,j)}$ жоден з напрямів e_j або $-e_j$ не є напрямом спадання цільової функції (це може бути коли, наприклад, $\frac{\partial f(x^{(k,j)})}{\partial x_j} = 0$), то при $j < n$ індекс j збільшується на одиницю і відбувається наступна внутрішня ітерація, коли ж $j = n$, тоді лічильник зовнішніх ітерацій k збільшується на одиницю, а індексу j надається значення 1 і процес продовжується.

Для того, щоб на k-й зовнішній ітерації при поточному j визначити, який з напрямів e_j чи $-e_j$ є напрямом спадання цільової функції, можна скористатися *правилом парної проби*, яке полягає в тому, щоб знайти дві пробні точки $y^{(1)} = x^{(k,j)} + \alpha e_j$, $y^{(2)} = x^{(k,j)} - \alpha e_j$, де $\alpha > 0$ – довжина пробного кроку (досить мале число), а потім в якості вектора $g^{(k,j)}$ в (28.29) взяти вектор

$$g^{(k,j)} = sign(f(y^{(2)}) - f(y^{(1)})) \cdot e_j.$$

Величина кроку $h_{k,j}$ в (28.29), що задовольняє умову (28.30), добирається за одним з правил, описаних в пункті 1 цього параграфа. При цьому, якщо $h_{k,j} = h = const$, то маємо *покоординатний спуск з постійним кроком*. Якщо ж $h_{k,j}$ добирається з умови

$$f(x^{(k,j)} + h_{k,j} g^{(k,j)}) = \min_{h>0} f(x^{(k,j)} + h g^{(k,j)}), \tag{28.31}$$

то одержуємо покоординатний аналог методу найшвидшого спуску, який називається методом *Гаусса-Зейделя*.

Сформулюємо умови збіжності методу покоординатного спуску (28.29), (28.30).

Нехай $X_{0,1}^* = X_{0,1} \cap X^*$, де множина $X_{0,1} = \{x \in R^n \mid f(x) \leq f(x^{(0,1)})\}$, а $X^* = \{x^* \in R^n \mid f'(x^*) = O_n\}$ – множина стаціонарних точок функції $f(x)$. Будемо вважати, що крок $h_{k,j}$ в точці $x^{(k,j)}$ добирається так, що виконується умова

$$f(x^{(k,j)} + h_{k,j} g^{(k,j)}) \leq (1 - \lambda_{k,j}) f(x^{(k,j)}) + \lambda_{k,j} w_{k,j}, \tag{28.32}$$

де $j = \overline{1,n}$, $k = 0, 1, 2, ...$, $w_{k,j} = \inf_{h \geq 0} f(x^{(k,j)} + h g^{(k,j)})$, $\lambda_{k,j} \in (0; 1)$ – параметр, який характеризує точність розв'язку задачі одновимірної мінімізації (28.31).

Т е о р е м а 28.3. *Нехай функція $f(x)$ диференційовна і обмежена знизу на множині $X_{0,1}$, а її градієнт задовольняє умову Ліпшиця:*

$$\| f'(x) - f'(y) \| \leq K \| x - y \|$$

для будь-яких $x \in R^n, y \in R^n$, де $K > 0$. Якщо множина $X_{0,1}^*$ – непорожня і послідовність точок $\{x^{(k,j)}\}$, яка генерується за методом (28.29) *з вибором кроку за правилом* (28.31), (28.32), *така, що*

$$\lim_{k \to \infty} \| x^{(k,j+1)} - x^{(k,j)} \| = 0, \tag{28.33}$$

то

$$\lim_{k \to \infty} \rho(x^{(k,j)}, X_{01}^*) = 0.$$

Доведення теореми можна знайти, наприклад, в [57].

З а у в а ж е н н я. В [57] також показано, що умова (28.33) виконується, якщо функція $f(x)$ не є сталою на обмеженій замкненій множині $X_{0,1}$, а для послідовності $\{x^{(k,j)}\}$ виконується умова

$$[x^{(k,j)}; x^{(k,j+1)}] \subset X_{0,1}$$

і

$$f(x^{(k,j)}) \geq f(y) \geq f(x^{(k,j+1)}) \quad \forall y \in [x^{(k,j)}; x^{(k,j+1)}]$$

при $j = \overline{1,n}$, $k = 0, 1, 2, ...$.

Симплексний метод. Досить ефективною в методах нульового порядку виявилась стратегія пошуку локального екстремуму функції багатьох змінних за допомогою симплексу. Цей підхід покладено в основу так званого *симплексного методу*, який було запропоновано американськими вченими Спендлі, Текстом, Хімсвортом і розвинуто у роботах Нелдера і Міда (див., наприклад, [135]). Процедура симплексного пошуку базується на використанні правильного або неправильного симплексу (див. означення 11.11) для знаходження напряму руху до екстремальної точки. Ідея методу при розв'язуванні задачі мінімізації полягає у порівнянні значень цільової функції в $n+1$ вершині симплекса, визначенні серед них таких точок, де функція набуває найбільшого і найменшого значень, визначенні за їх допомогою напряму спадання цільової функції і одержанні нової точки, яка стає новою вершиною симплекса замість «найгіршої» вершини, тобто вершини з найбільшим значенням цільової функції. Після побудови нового симплекса перевіряються умови зупинки ітераційного процесу і якщо вони виконуються, то за наближений розв'язок береться «найкраща» вершина симплексу, тобто вершина з найменшим значенням цільової функції, у протилежному випадку пошук продовжується. При цьому будується послідовність симплексів, які у загальному випадку можуть мати різну форму, і значення цільової функції у вершинах цих симплексів стають все менші і менші. Розміри симплексів також зменшуються і самі вони стягуються до точки локального мінімуму. Для прискорення збіжності симплексного методу при знаходженні нової вершини використовуються такі основні операції: *відбиття*, *розтягування*, *стискання* і *зменшення* (*редукція*).

Розглянемо одну із схем алгоритму роботи за симплексним методом для розв'язування задачі мінімізації і дамо її геометричну інтерпретацію.

Задати досить мале число $\varepsilon > 0$ і довільну початкову вершину симплексу $X^{(1)} \in R^n$.

К р о к 1. (*Побудова початкового симплекса*). Знайти решту n точок симплекса за правилом:

$$X^{(i)} = X^{(1)} + \lambda e_{i-1},\ i = \overline{2, n+1},$$

де $e_{i-1} = (0, ..., \underset{i-1}{1}, ..., 0)$ – одиничний базисний вектор в R^n, $\lambda > 0$ – довжина кроку, і обчислити значення цільової функції у вершинах симплекса:

$$f^{(1)} = f(X^{(1)}), f^{(2)} = f(X^{(2)}), ..., f^{(n+1)} = f(X^{(n+1)}).$$

К р о к 2. (*Упорядкування вершин симплекса*). Серед вершин симплексу визначити

$X^{(b)}$ – вершину, в якій цільова функція набуває найменшого значення серед усіх інших вершин симплекса, тобто $f^{(b)} = \min\limits_{i=\overline{1,n+1}} f^{(i)}$ (назвемо цю вершину *найкращою* (від англ. best – найкращий)), де b – порядковий номер відповідної вершини симплекса;

$X^{(w)}$ – вершину в якій цільова функція набуває найбільшого значення серед усіх інших вершин симплекса, тобто $f^{(w)} = \max\limits_{i=\overline{1,n+1}} f^{(i)}$ (назвемо цю вершину *найгіршою* (від англ. worse – найгірший)), де w – порядковий номер відповідної вершини симплекса;

$X^{(g)}$ – вершину, в якій цільова функція набуває найбільшого значення серед усіх вершин за виключенням вершини $X^{(w)}$, тобто $f^{(g)} = \max\limits_{i=\overline{1,n+1},\, i\neq w} f^{(i)}$ (назвемо цю вершину *корисною* (наступною за найгіршою) (від англ. good – гарний, корисний)), де g – порядковий номер відповідної вершини симплекса.

К р о к 3. (*Знаходження центру ваги*). Знайти центр ваги всіх вершин симплекса, за виключенням найгіршої вершини $X^{(w)}$:

$$X_m = \frac{1}{n} \sum_{i=\overline{1,n+1},\, i\neq w} X^{(i)},$$

і обчислити $f_m = f(X_m)$.

К р о к 4. (*Відбиття*). Знайти точку виду:

$$X_r = X_m + \alpha(X_m - X^{(w)}),$$

де $\alpha > 0$ – *коефіцієнт відбиття* (рис. 28.6), і обчислити $f_r = f(X_r)$.

Якщо $f_r < f^{(g)}$, то перейти до виконання кроку 5, інакше, тобто коли $f_r \geq f^{(g)}$, при виконанні умови $f_r < f^{(w)}$ в симплексі замінити найгіршу точку $X^{(w)}$ на точку X_r (рис. 28.6), покласти $f^{(w)} = f_r$ і перейти до виконання кроку 8 (перевірка умови зупинки для нового симплексу), інакше перейти до виконання кроку 6.

К р о к 5. (*Розтягування*). Якщо $f^{(b)} < f_r$, то знайдена точка краща, ніж точки $X^{(w)}$ і $X^{(g)}$, але гірша за точку $X^{(b)}$, тому в симплексі замінити найгіршу точку $X^{(w)}$ на точку X_r, покласти $f^{(w)} = f_r$ і перейти до виконання кроку 8, інакше, оскільки обраний напрям $X_m - X^{(w)}$ є напрямом спадання цільової функції, виконати розтягування в цьому напрямі з коефіцієнтом $\beta > \alpha$, тобто знайти точку X_l виду

$$X_l = X_m + \beta(X_m - X^{(w)}), \tag{28.34}$$

та обчислити $f_l = f(X_l)$.

Якщо $f_l < f^{(b)}$, то в симплексі замінити найгіршу точку $X^{(w)}$ на точку X_l (рис. 28.7), покласти $f^{(w)} = f_l$ і перейти до виконання кроку 8, інакше в симплексі замінити точку $X^{(w)}$ на точку X_r, покласти $f^{(w)} = f_r$ і перейти до виконання кроку 8.

К р о к 6. (*Стискання*). Якщо $f_r \geq f^{(g)}$ і $f_r \geq f^{(w)}$, то можливо зроблено занадто великий крок у напрямі $X_m - X^{(w)}$, і тому варто виконати процедуру стискання симплексу, яка полягає у наступному: знайти точки

$$X_u = \gamma X_m + (1-\gamma) X^{(w)},$$

$$X_v = \gamma X_m + (1-\gamma) X_r,$$

які належать відрізкам $X^{(w)}X_r$ і $X_m X_r$ відповідно (рис. 28.8), де $\gamma \in (0;1)$ – *коефіцієнт стискання*. Серед точок X_u і X_v визначити таку точку X_c, в якій цільова функція набуває меншого значення, тобто $f(X_c) = \min\{f(X_u), f(X_v)\}$, і покласти $f_c = f(X_c)$. Якщо $f(X_u) = f(X_v)$, то в якості точки X_c можна обрати будь-яку з точок X_u і X_v.

Якщо $f_c < f^{(w)}$, то в симплексі замінити точку $X^{(w)}$ на точку X_c, покласти $f^{(w)} = f_c$ і перейти до виконання кроку 8.

К р о к 7. (*Зменшення* або *редукція*). Якщо $f_c \geq f^{(w)}$, то виконати процедуру зменшення симплексу до найкращої точки $X^{(b)}$, яка полягає у тому, щоб замінити всі точки симплекса, крім точки $X^{(b)}$, на нові точки за правилом (рис. 28.9):

$$X^{(i)} = (1-\eta) X^{(i)} + \eta X^{(b)} = X^{(i)} + \eta(X^{(b)} - X^{(i)}),\ i = \overline{1, n+1},\ i \neq b,$$

які належать відрізкам $X^{(i)}X^{(b)}$, де $\eta \in (0;1)$ – *коефіцієнт редукції*, обчислити значення $f^{(i)}$, $i = \overline{1, n+1}$, $i \neq b$, цільової функції у вершинах нового симплексу і перейти до виконання кроку 8.

К р о к 8. (*Перевірка умов зупинки*). Знайти середнє квадратичне відхилення значень цільової функції у вершинах симплекса

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1} (f^{(i)} - \bar{f})^2}{n+1}},$$

де

$$\bar{f} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1} f^{(i)}}{n+1},$$

і величину

$$\delta = \max_{i=\overline{1,n},\, i\neq b} \| X^{(i)} - X^{(b)} \|.$$

Якщо $\sigma < \varepsilon$ і $\delta < \varepsilon$, то це означає, що всі значення $f^{(i)}, i = \overline{1, n+1}$, досить близькі і вершини симплексу знаходяться в δ-околі точки $X^{(b)}$, тому можна покласти $x^* \approx X^{(b)}$, $f^* \approx f^{(b)}$ і завершити роботу, інакше перейти до виконання кроку 2.

Кінець.

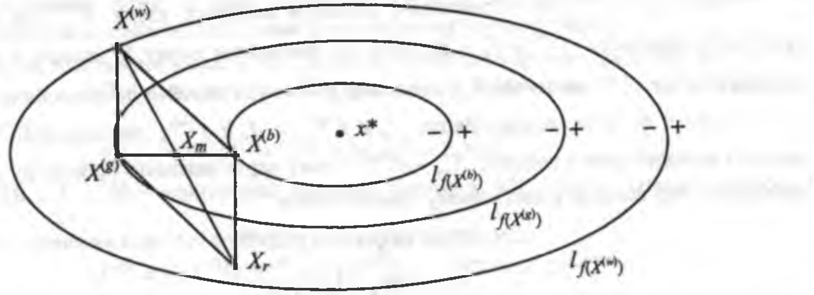


Рис. 28.6.

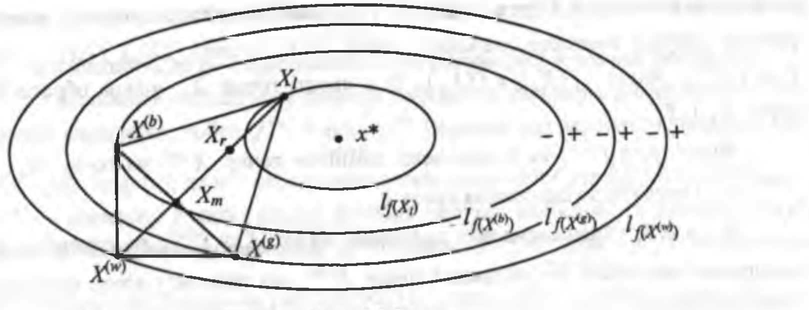


Рис. 28.7.

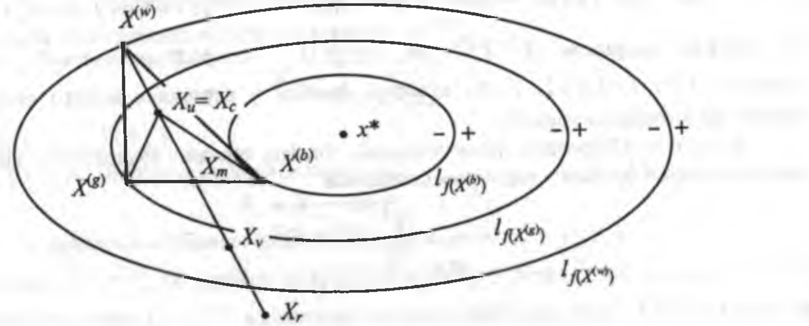


Рис. 28.8.

Зауваження.

1. На кроці 1 можна використовувати й інші способи побудови початкового симплексу, при цьому треба, щоб вершини $X^{(b)}, X^{(g)}, X^{(w)}$ були різними, а також бажано щоб виконувалась умова $f(X^{(b)}) < f(X^{(g)}) < f(X^{(w)})$.

2. На кроці 4 відбувається відбиття вершини $X^{(w)}$ відносно центру ваги X_m грані симплексу, яка лежить проти цієї вершини, оскільки природно припустити, що цільова функція буде спадати у напрямі $X_m - X^{(w)}$, бо значення цільової функції у напрямах $X^{(g)} - X^{(w)}$ і $X^{(b)} - X^{(w)}$ спадають (рис. 28.6).

3. З урахуванням попереднього зауваження замість співвідношення (28.34) для визначення точки X_l можна скористатися іншим правилом, наприклад

$$X_l = \arg\min_{h>1} f(X_m + h(X_m - X^{(w)})) . \qquad (28.35)$$

4. На кроці 8 для спрощення процедури зупинки ітераційного процесу можна шукати одну з величин σ або δ і перевіряти одну з умов $\sigma < \varepsilon$ або $\delta < \varepsilon$.

5. Параметри методу $\lambda, \alpha, \beta, \gamma, \eta$ можна покласти, наприклад, рівними: $\lambda = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 0.5$, $\eta = 0.5$, які добре себе зарекомендували при чисельній реалізації методу.

6. Результати чисельних експериментів показують, що симплексний метод є надійним при мінімізації не дуже яристих функцій і одним з найефективніших при $n \le 6$. Завдяки цьому він використовується в багатьох математичних пакетах, зокрема в пакеті Matlab, для розв'язування задач безумовної оптимізації.

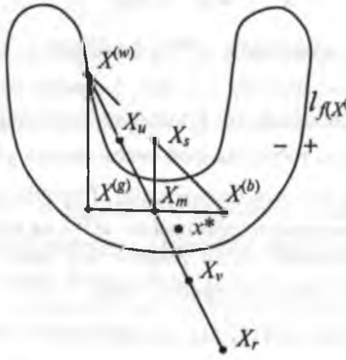


Рис. 28.9.

Примітка. На рис. 28.9 показано результат операції стягування, при цьому вершинами нового зменшеного симплекса є точки X_m, X_s, $X^{(b)}$.

На рис. 28.10 показано продовження процесу побудови симплексів, який розпочато на рис. 28.7, за описаною схемою симплексного методу з параметрами методу $\lambda = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.5$, $\eta = 0.5$, при цьому симплекс S_2 одержано в результаті розтягування початкового симплексу S_1, S_3 – в результаті стискання S_2, S_4 – в результаті відбиття S_3, S_5 – в результаті стискання S_4, симплекс S_6 – в результаті стискання S_5.

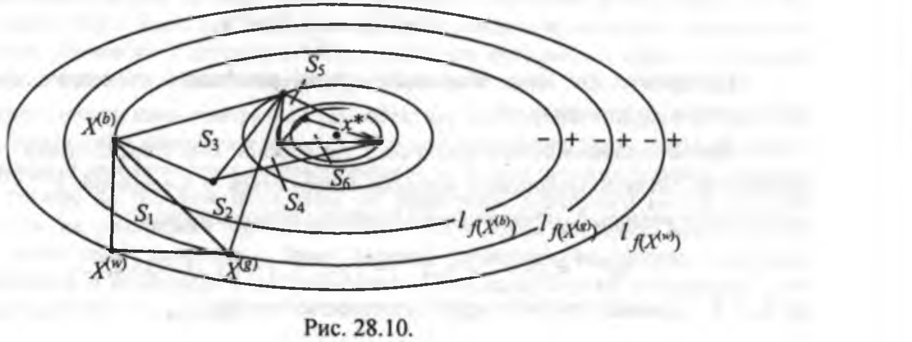


Рис. 28.10.

Описаний симплексний метод та його численні модифікації відносяться до методів *нелокальної лінійної апроксимації*. За допомогою симплексів також можна будувати методи нелокальної нелінійної апроксимації. До таких методів відноситься, наприклад, *метод баріцентричних координат*, який є методом квадратичної апроксимації (див., наприклад, [82]).

3. Методи випадкового пошуку. Розглянемо деякі з методів випадкового пошуку для розв'язуваня задачі (28.1) безумовної мінімізації, коли цільова функція не обов'язково диференційовна на R^n.

Метод випадкового покоординатного спуску. За цим методом на відміну від класичного методу покоординатного спуску генерується послідовність точок $\{x^{(k)}\}$ за правилом:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h_k g^{(k)},$$

де $x^{(0)}$ – довільне початкове наближення, $g^{(k)}$ з ймовірністю 0.5 дорівнює e_j або $-e_j$, при цьому параметр j набуває значень $1, 2, ..., n$ з однаковою ймовірністю при будь-якому $k = 0,1,2,...$, а кроковий множник h_k обирається так само, як і в звичайному методі покоординатного спуску, тобто так щоб виконувалась умова (28.30).

Метод з поверненням при невдалому кроці. Ітераційний процес цього методу починається з довільного початкового наближення $x^{(0)}$ і на кожній k-й ітерації методу за допомогою датчика випадкових чисел генерується деяка реалізація випадкового вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, визначається пробна точка $y = x^{(k)} + h\xi$, де $h = const > 0$ – досить мале число. Якщо $f(y) < f(x^{(k)})$, то зроблений крок вважається вдалим і покладається $x^{(k+1)} = y$, інакше зроблений крок вважається невдалим і покладається $x^{(k+1)} = x^{(k)}$. Якщо виявиться, що $x^{(k)} = x^{(k+1)} = ... = x^{(k+N)}$ при досить великому N, то точку $x^{(k)}$ вважають наближенням до точки мінімуму задачі (28.1) з точністю h.

Метод найкращої проби. Цей метод, як і попередній, починається з довільного початкового наближення $x^{(0)}$ і на кожній k-й ітерації методу за допомогою датчика випадкових векторів генеруються s реалізацій $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, ..., \xi^{(s)}$ випадкового вектора ξ і обчислюються значення цільової функцій $f(x)$ в точках $y^{(i)} = x^{(k)} + h\xi^{(i)}, i = \overline{1,s}$, де $h = const > 0$ – досить мале число. За наступне наближення береться точка $x^{(k+1)} = y^{(i_0)} = x^{(k)} + h\xi^{(i_0)}$, де індекс i_0 визначається з умови

$$f(y^{(i_0)}) = \min_{i=1,s} f(y^{(i)}).$$

Зауважимо, що при збільшенні числа реалізацій s напрям руху $\xi^{(i_0)}$ наближається до антиградієнта.

Метод статистичного градієнта. На кожній k-й ітерації цього методу за допомогою датчика випадкових векторів генеруються s реалізацій $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, ..., \xi^{(s)}$ випадкового вектора ξ, обчислюються прирости цільової функції

$$\Delta f_i^{(k)} = f(x^{(k)} + \alpha_k \xi^{(i)}) - f(x^{(k)}),\ i = \overline{1,s},\ k = 0,1,2,...,$$

де $\alpha_k > 0$ – довжина пробного кроку, утворюється вектор

$$g^{(k)} = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{i=1}^{s} \Delta f_i^{(k)} \xi^{(i)} \qquad (28.36)$$

і знаходиться точка

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + hg^{(k)},$$

де $h = const > 0$.

Вектор $g^{(k)}$, який визначається співвідношенням (28.36), називається *статистичним градієнтом*.

Зауважимо, що якщо в методі статистичного градієнта покласти $s = n$ і вектори $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, ..., \xi^{(s)}$ не є випадковими, а співпадають відповідно з векторами $e_i = (0, ..., 0, \underset{i}{1}, 0, ..., 0)$, $i = \overline{1,n}$, то описаний метод перетворюється на *різницевий аналог градієнтного методу з постійним кроком*, який в координатній формі визначається співвідношеннями

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - h\frac{f(x^{(k)} + \alpha_k \xi^{(i)}) - f(x^{(k)})}{\alpha_k},\ i = \overline{1,n},\ k = 0,1,2,....$$

При цьому для збіжності обох методів необхідно виконання умови $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$.

З а у в а ж е н н я.

1. Найбільш часто в методах випадкового пошуку випадковий вектор ξ вважають рівномірно розподіленим на одиничній сфері простору R^n, тобто $\|\xi\| = 1$.

2. На практиці методи випадкового пошуку використовуються в сукупності з деякими евристичними прийомами з метою прискорення процесу мінімізації. Зокрема для цього використовуються різні правила вибору параметрів h, α_k, s.

3. Умови збіжності методів випадкового пошуку можна знайти, наприклад, в роботі [57]. Зазначимо лише, що вони у більшості випадків вимагають досить жорстких умов щодо цільової функції, зокрема виконання умови Ліпшиця для її градієнта в будь-якій точці простору R^n, при цьому оскільки послідовності точок $\{x^{(k)}\}$, що генеруються цими методами, є випадковими, то для них використовуються поняття збіжності для послідовностей випадкових векторів (див. означення 38.4).

4. У розглянутих методах випадкового пошуку вважалося, що закон розподілу випадкового вектора ξ не залежить від номера ітерації, тому такий пошук називають *випадковим пошуком «без навчання»*. Методи випадкового пошуку, в яких враховуються результати, отримані в процесі пошуку розв'язку в залежності від конкретних особливостей цільової функції, називають *методами випадкового пошуку «з навчанням»* [18]. Ці методи займають проміжне місце між методами випадкового пошуку «без навчання» і детермінованими методами нульового і першого порядків розв'язування задач безумовної мінімізації, які були розглянуті у цьому параграфі.

Важко сказати щось конкретне щодо ефективності методів випадкового пошуку, але вони виявляються корисними при розв'язуванні практичних задач, оскільки мають деякі специфічні переваги перед детермінованими методами першого порядку, зокрема вони не чутливі до похибок обчислень, не вимагають диференційовності цільової функції, з їх використанням можна відслідковувати точки мінімуму, коли цільова функція змінюється повільно. Тому методи випадкового пошуку доцільно використовувати в комбінації з детермінованими методами спуску, утворюючи, тим самим, так звані *гібридні методи*.

Запитання для самоконтролю

1. Чим обумовлений вибір антиградієнта в якості напряму руху у методах спуску?
2. Які методи називають градієнтними?
3. Який градієнтний метод називається методом найшвидшого спуску?
4. Яку властивість мають напрями руху на двох послідовних ітераціях методу найшвидшого спуску?
5. За яких умов послідовність точок, отримана за методом найшвидшого спуску, збігається до розв'язку задачі безумовної мінімізації?
6. За яких умов послідовність точок, отримана за методом найшвидшого спуску, збігається до розв'язку задачі безумовної мінімізації з швидкістю геометричної прогресії?
7. Для яких функцій можна знайти кроковий множник в методі найшвидшого спуску в явному вигляді і чому він дорівнює?
8. Які правила вибору крокового множника використовуються в градієнтних методах?
9. Яким чином можна підвищити швидкість збіжності послідовності точок, отриманих за градієнтними методами, при мінімізації функцій, поверхні (лінії) рівня яких мають яристу структуру?
10. У чому полягає сутність яристого методу і які рекурентні співвідношення в ньому використовуються?
11. До якого класу методів відносяться метод покоординатного спуску і симплексний метод?
12. У чому полягає сутність методу покоординатного спуску і які рекурентні співвідношення в ньому використовуються?
14. В чому полягає сутність операцій відбиття, розтягування, стискання і стягування в симплексному методі?
16. В чому полягає ідея методів випадкового пошуку?
17. Які підходи використовуються при побудові методів випадкового пошуку?
18. Що таке статистичний градієнт і які основні співвідношення використовуються в методі статистичного градієнта?
19. Які переваги і які недоліки мають методи випадкового пошуку у порівнянні з детермінованими методами?

Вправи для самостійного виконання

1. Показати, що в методі найшвидшого спуску (28.2), (28.3) виконується умова
$$\langle f'(x^{(k+1)}), f'(x^{(k)})\rangle = 0.$$

2. Для градієнтного методу з поділом кроку довести теореми, аналогічні теоремам 28.1 і 28.2.

3. Для квадратичної функції $f(x_1,x_2)=100x_1^2+x_1x_2+x_2^2-x_1+x_2$:

а) знайти найменше і найбільше власні числа d і D матриці $f''(x)$, визначити число обумовленості цієї матриці $\frac{d}{D}$ і з'ясувати, чи лінії рівня заданої функції мають яристу структуру, чи ні;

б) в точці $x^{(0)}=(1,1)$ обчислити градієнт функції $f(x)$ і порівняти напрям антиградієнта $-f'(x^{(0)})$ з напрямом $x^*-x^{(0)}$, де точка $x^*=(0,-0{,}5)$ – є точкою мінімуму $f(x)$, тобто знайти скалярний добуток $\langle -f'(x^{(0)}), x^*-x^{(0)}\rangle$;

в) зробити перші два кроки методу найшвидшого спуску, починаючи з точки $x^{(0)}=(1,1)$, використавши для визначення параметра h_k формулу (28.19), і зобразити їх геометрично.

4. Однією з мов програмування описати програми, які реалізують метод найшвидшого спуску і градієнтний метод з поділом кроку.

5. Для заданих квадратичних функцій:

а) знайти найменше і найбільше власні числа d і D матриці $f''(x)$, визначити число обумовленості цієї матриці $\frac{d}{D}$ і з'ясувати, чи лінії рівня заданої функції мають яристу структуру, чи ні;

б) знайти наближений розв'язок задачі мінімізації квадратичної функції $f(x)$ з точністю $\varepsilon=10^{-4}$, $\varepsilon=10^{-8}$, використовуючи створені, відповідно до завдання 4, програми і починаючи ітераційний процес з точки $x^{(0)}$:

1) $f(x_1,x_2)=10x_1^2+4x_1x_2+x_2^2-2x_1+x_2$, $x^{(0)}=(0,0)$;
2) $f(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1x_2+3x_2^2+x_1-4x_2$, $x^{(0)}=(1,1)$;
3) $f(x_1,x_2)=5x_1^2+x_1x_2+25x_2^2-4x_1+6x_2$, $x^{(0)}=(-2,1)$;
4) $f(x_1,x_2)=40x_1^2+20x_1x_2+30x_2^2-10x_1+x_2$, $x^{(0)}=(0,2)$;
5) $f(x_1,x_2)=4x_1^2-7x_1x_2+5x_2^2+3x_1-x_2$, $x^{(0)}=(1,2)$;
6) $f(x_1,x_2)=2x_1^2+3x_1x_2+15x_2^2-6x_1+11x_2$, $x^{(0)}=(0,0)$;
7) $f(x_1,x_2)=6x_1^2-14x_1x_2+10x_2^2+12x_1+9x_2$, $x^{(0)}=(-1,1)$;
8) $f(x_1,x_2)=x_1^2-x_1x_2+8x_2^2-2x_1+x_2$, $x^{(0)}=(4,-1)$;
9) $f(x_1,x_2)=5x_1^2+6x_1x_2+7x_2^2+8x_1-9x_2$, $x^{(0)}=(1,1)$;
10) $f(x_1,x_2)=3x_1^2-8x_1x_2+13x_2^2-x_1+17x_2$, $x^{(0)}=(2,-1)$.

6. Використовуючи класичні методи, знайти точки мінімуму квадратичних функцій із завдання 5 і порівняти їх з наближеними розв'язками, які одержані за методом найшвидшого спуску і градієнтним методом з поділом кроку.

За допомогою програмних засобів типу Derive, GRAN1, Mathcad чи інших для даних функцій побудувати лінії рівня і визначити, які з них мають яристу структуру.

7. Однією з мов програмування описати програму для реалізації яристого методу, в основі якого лежить рекурентне співвідношення (28.28), при цьому «яристий» крок h_k для знаходження точки $\bar{x}^{(k+1)}$, $k=1,2,\ldots$, повинен визначатися за правилом поділу кроку, а точка $x^{(k+1)}$ повинна визначатися за допомогою одного кроку методу найшвидшого спуску (28.2), (28.3), де задача (28.3) повинна наближено розв'язуватися одним з методів одновимірної мінімізації (див. §25). Ітераційний процес завершувати при виконанні однієї з умов $\| \bar{x}^{(k+1)}-x^{(k)}\| < \varepsilon$ або $\| f'(\bar{x}^{(k+1)})\| < \varepsilon$.

8. Довести теорему 28.3. збіжності для методу покоординатного спуску.

9. Однією з мов програмування описати програму, яка реалізує метод Гаусса-Зейделя (покоординатного спуску). За допомогою програми розв'язати задачі 1-10 із завдання 5 з точністю $\varepsilon=10^{-4}$, $\varepsilon=10^{-8}$ і порівняти результати з результатами, одержаними за допомогою градієнтних методів.

10. Запропонувати процедуру побудови початкового симплексу в симплексному методі, яка відрізняється від наведеної в схемі методу на кроці 1.

11. Для випадків, зображених на рис. 28.6, 28.8, 28.9, побудувати п'ять наступних симплексів за описаною схемою симплексного методу при $\lambda=1$, $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=0{,}5$, $\eta=0{,}5$.

12. Використовуючи описану схему симплексного методу при $\lambda=1$, $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=0{,}5$, $\eta=0{,}5$, знайти перші 10 симплексів для мінімізації функції

$$f(x_1,x_2)=x_1^2-x_1x_2+x_2^2-4x_1-x_2,$$

якщо першою вершиною початкового симплексу є точка $X^{(1)}=(0,0)$, і виконати відповідні геометричні побудови. Лінію рівня $l_{f(X^{(1)})}$ подано на рис. 28.11, при цьому $x^*=(3,2)$, $f(x^*)=-7$.

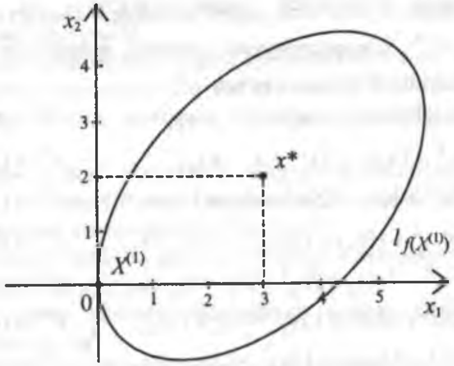


Рис. 28.11.

13. Однією з мов програмування описати програму, яка реалізує симплексний метод, і за її допомогою при $\lambda=1$, $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=0{,}5$, $\eta=0{,}5$ знайти точки мінімуму заданих функцій з точністю $\varepsilon=10^{-8}$:

1) $f(x_1,x_2)=x_1^3+x_2^3-3x_1-3x_2+5$, $\quad X^{(1)}=(1,2)$;

2) $f(x_1,x_2)=x_1^2x_2+x_1x_2^2-3x_1x_2$, $\quad X^{(1)}=(0,0)$;

3) $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-x_1x_2+x_1-2x_2+1$, $\quad X^{(1)}=(0,0)$;

4) $f(x_1,x_2)=(x_1-x_2)/(x_1^2+x_2^2+2)$, $\quad X^{(1)}=(0,0)$.

5) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+x_2x_3-7x_2-4x_3$, $\quad X^{(1)}=(1,1,1)$;

6) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)-x_1(x_2+x_3-x_4)+x_2x_3-$
$-3x_1-8x_2-5x_3-9x_4$, $\quad X^{(1)}=(1,1,1,1)$.

Для заданих функцій провести чисельний експеримент при значеннях параметрів λ, α, β, γ, η, які відрізняються від заданих в умові задачі.

14. Реалізувати симплексний метод, у якому точка X_l на кроці 5 знаходиться за допомогою співвідношення (28.35) (на основі одного з методів одновимірної мінімізації (див. §25)). Розв'язати за його допомогою задачі із завдання 13 і результати порівняти з результатами, одержаними за симплексним методом на основі співвідношення (28.34).

15. За допомогою одного з математичних пакетів Mathcad, Matlab, Maple, Mathematica тощо розв'язати задачі із завдання 13 і результати порівняти з результатами, одержаними за симплексним методом.

16. Провести чисельний експеримент з метою дослідження ефективності методу найшвидшого спуску, градієнтного методу з поділом кроку, яристого методу, методу покоординатного спуску, симплексного методу на задачах, які часто використовуються для тестування чисельних методів безумовної мінімізації (див., наприклад, [49], [82], [104]):

1) $f(x_1,x_2)=(x_1-x_2)^2+\frac{1}{9}(x_1+x_2-10)^2$ – опукла функція, лінії рівня якої являють собою витягнуті еліпси, вісі яких повернуті на 45° відносно осей координат (рис. 28.12), $x^*=(5;5)$, $f(x^*)=0$, початкові наближення:

а) $x^{(0)}=(0;-1)$, б) $x^{(0)}=(0;0)$, в) $x^{(0)}=(-1{,}5;-1)$;

2) $f(x_1,x_2)=(x_1{}^4-3)^2+x_2{}^4$ – неопукла функція з двома точками мінімуму, лінії рівня якої подано на рис. 28.13, $x_1{}^*=(\sqrt[4]{3};0)$, $x_2{}^*=(-\sqrt[4]{3};0)$, $f(x_1{}^*)=f(x_2{}^*)=0$, початкові наближення: а) $x^{(0)}=(0;0)$, б) $x^{(0)}=(0{,}001;100)$, в) $x^{(0)}=(-10;10)$;

3) *функція Розенброка* (Rosenbrock) $f(x_1,x_2)=100(x_2-x_1{}^2)^2+(1-x_1)^2$ – неопукла одноекстремальна функція, лінії рівня якої являють собою сильно викривлений яр параболічного виду (рис. 28.14), $x^*=(1;1)$, $f(x^*)=0$, початкові наближення: а) $x^{(0)}=(0;0)$, б) $x^{(0)}=(-1{,}2;1)$, в) $x^{(0)}=(-1{,}9;2)$;

4) *функція Хіммельблау* (Himmelblau) $f(x_1,x_2)=100(x_2-x_1{}^3)^2+(1-x_1)^2$ – неопукла одноекстремальна функція, дно яру якої задається кубічною параболою (рис. 28.15), $x^*=(1;1)$, $f(x^*)=0$, початкові наближення:

а) $x^{(0)}=(-1;2)$, б) $x^{(0)}=(1;0)$, в) $x^{(0)}=(1{,}6;6)$;

5) $f(x_1,x_2)=10^{-4}(x_1-3)^2-(x_2-x_1)+e^{20(x_2-x_1)}$ – опукла функція, лінії рівня якої являють собою сильно асимптотичну долину, $x^*\approx(3;2{,}850214)$, $f(x^*)\approx0{,}1997866137$, початкові наближення:

а) $x^{(0)}=(0;-1)$, б) $x^{(0)}=(0;0)$, $x^{(0)}=(-1{,}5;-1)$;

6) *функція Пауелла* (Powell)

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+10x_2)^2+5(x_3-x_4)^2+(x_2-2x_3)^4+10(x_1-x_4)^4 -$$

опукла функція з лінійним яром, $x^*=(0;0;0;0)$, $f(x^*)=0$, початкові наближення:

а) $x^{(0)}=(3;-1;0;1)$, б) $x^{(0)}=(5;5;5;5)$, в) $x^{(0)}=(10;10;10;-10)$;

7) *функція Вуда* (Wood)

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=100(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2+90(x_4-x_3^2)^2+(1-x_3)^2+$$
$$+10{,}1\left((x_2-1)^2+(x_4-1)^2\right)+19{,}8(x_2-1)(x_4-1) -$$

неопукла одноекстремальна функція з викривленим яром, $x^*=(1;1;1;1)$, $f(x^*)=0$, початкові наближення:

а) $x^{(0)}=(-3;-1;-3;-1)$, б) $x^{(0)}=(-5;5;-5;5)$, $x^{(0)}=(10;10;10;10)$.

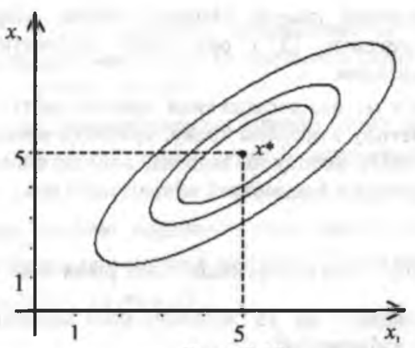


Рис. 28.12.

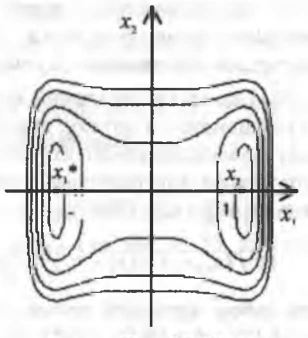


Рис. 28.13.

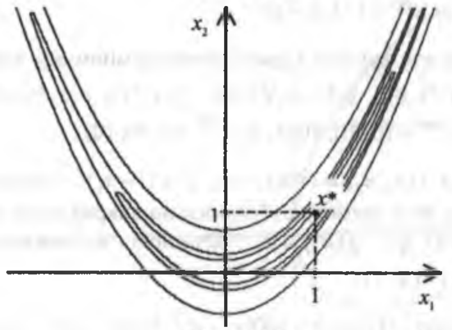


Рис. 28.14.

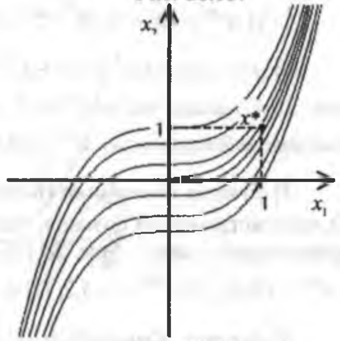


Рис. 28.15.

Наближені розв'язки шукати з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, $\varepsilon = 10^{-8}$. При цьому для кожного методу визначити такі параметри: N_k – кількість кроків, N_f – кількість обчислень значень цільової функції $f(x)$ (враховуючи кількість обчислень при розв'язуванні допоміжних задач), N_g – кількість обчислень градієнта цільової функції $f(x)$, $\delta = \|x^* - \bar{x}\|$, де x^* – розв'язок задачі, $\bar{x}$ – наближений розв'язок задачі із заданою точністю ε. Результати оформити у вигляді порівняльної таблиці:

№	Метод	$\varepsilon = 10^{-4}$				$\varepsilon = 10^{-8}$			
		N_k	N_f	N_g	δ	N_k	N_f	N_g	δ
1.	МНС								
2.	ГМПК								
3.	ЯМ								
4.	ПКС			–				–	
5.	СМ			–				–	

П р и м і т к а. МНС – метод найшвидшого спуску, ГМПК – градієнтний метод з поділом кроку, ЯМ – яристий метод, ПКС – метод покоординатного спуску, СМ – симплексний метод.

З а у в а ж е н н я. Для деяких функцій зазначені методи можуть збігатися до точок, які не є точками мінімуму.

17. Однією з мов програмування описати програми, які реалізують методи випадкового пошуку, і провести за їх допомогою чисельний експеримент щодо розв'язування задач із завдання 16. Результати порівняти з результатами, одержаними за детермінованими методами першого і нульового порядків.

§29. Метод Ньютона та його модифікації

Якщо цільова функція $f(x)$ в задачі безумовної мінімізації двічі неперервно диференційовна і частинні похідні першого та другого порядків обчислюються досить просто, то для відшукання розв'язків цієї задачі доцільно застосовувати методи мінімізації, які використовують квадратичну частину розкладу функції $f(x)$ в ряд Тейлора. Такі методи називають *методами другого порядку*, вони, як правило, не «реагують» на яристу структуру поверхонь рівня цільової функції і є більш ефективними, ніж градієнтні методи. Це обумовлено тим, що квадратична функція локально точніше апроксимує функцію $f(x)$, ніж лінійна.

1. Класичний метод Ньютона. Послідовність точок $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots$, яка генерується за методом Ньютона, будується, виходячи з наступних міркувань.

Нехай функція $f(x)$ опукла і двічі диференційовна на R^n, причому матриця $f''(x)$ невироджена на R^n. Тоді в околі точки $x^{(k)}$ має місце подання

$$f(x) = f(x^{(k)}) + \langle f'(x^{(k)}), x - x^{(k)} \rangle + \\ + \frac{1}{2}\langle f''(x^{(k)})(x - x^{(k)}), x - x^{(k)} \rangle + o(\| x - x^{(k)} \|^2), \quad (29.1)$$

де

$$x = (x_1, \dots, x_n)^T,\ x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T,\ f'(x^{(k)}) = \left(\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_n} \right)^T.$$

Для визначення наступної точки $x^{(k+1)}$ ітераційного процесу методу Ньютона цільову функцію $f(x)$, враховуючи подання (29.1), апроксимують квадратичною формою

$$f_k(x) = f(x^{(k)}) + \langle f'(x^{(k)}), x - x^{(k)} \rangle + \frac{1}{2}\langle f''(x^{(k)})(x - x^{(k)}), x - x^{(k)} \rangle. \quad (29.2)$$

Покажемо, що ця функція є опуклою. Неважко перевірити, що матриця других похідних функції $f_k(x)$ співпадає з відповідною матрицею функції $f(x)$ в точці $x^{(k)}$, тобто $f_k''(x) = f''(x^{(k)})$ для будь-яких $x \in R^n$. Оскільки за умовою $f(x)$ опукла функція, то згідно критерію опуклості (див. теорему 15.6) матриця $f''(x)$ є невід'ємно визначеною. Отже за цим критерієм і функція $f_k(x)$ є також опуклою.

Розглянемо тепер задачу мінімізації опуклої функції $f_k(x)$ виду (29.2) на R^n. Як відомо така функція має єдину точку мінімуму, а необхідна і достатня умова оптимальності для неї має вигляд (див. зауваження до теореми 16.7):

$$f_k'(x) = f'(x^{(k)}) + f''(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = O_n .$$

Розв'язавши одержану систему лінійних рівнянь у матричному вигляді та прийнявши знайдену точку мінімуму за $x^{(k+1)}$, будемо мати:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (f''(x^{(k)}))^{-1} f'(x^{(k)}) . \qquad (29.3)$$

Це співвідношення і визначає ітераційний процес методу Ньютона в його класичній формі. Якщо елементи матриці $(f''(x^{(k)}))^{-1}$ позначити через $\varphi_{ij}(x_1^{(k)},...,x_n^{(k)})$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$, то метод (29.3) можна записати у координатній формі:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_1^{(k)},...,x_n^{(k)}) \frac{\partial f(x_1^{(k)},...,x_n^{(k)})}{\partial x_j}, \ i=\overline{1,n}. \qquad (29.4)$$

Отже, метод Ньютона є методом послідовного пошуку точок мінімуму квадратичних апроксимуючих функцій виду (29.2). Геометричну інтерпретацію ітераційного процесу цього методу для мінімізації опуклої функції від однієї змінної подано на рис. 29.1, де у початковій точці $x^{(0)}$ графік функції $f(x)$ апроксимується параболою, яка є графіком функції $f_0(x)$, а в якості наближення $x^{(1)}$ обирається точка, яка є точкою мінімуму функції $f_0(x)$ (абсциса вершини параболи). Потім в точці $x^{(1)}$ графік функції $f(x)$ апроксимується параболою, яка є графіком функції $f_1(x)$, а в якості наближення $x^{(2)}$ обирається точка, яка є точкою мінімуму функції $f_1(x)$ і т.д.

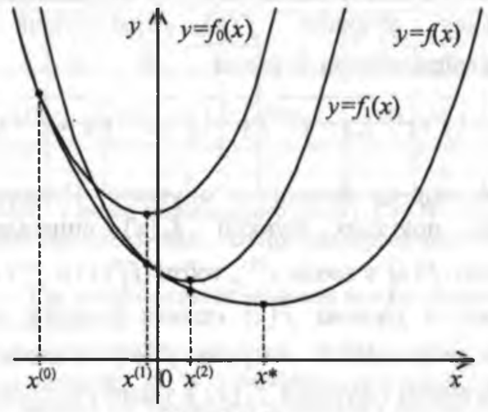


Рис. 29.1.

Приклад 29.1. За допомогою класичного методу Ньютона знайти точку мінімуму функції

$$f(x_1,x_2) = 3x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2$$

при $x^{(0)} = (0,\, 0)^T$.

Оскільки за критерієм Сільвестра (див. §9) гессіан заданої функції є додатно визначеною симетричною матрицею порядку 2×2 $\forall x \in R^n$:

$$f''(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}, \ \delta_1 = 6 > 0,\ \delta_2 = 6\cdot 8 - (-3)(-3) = 39 > 0,$$

то ця функція є строго опуклою функцією (див. теорему 15.7).

Більше того, функція є квадратичною, тому що

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(6x_1^2 - 6x_1x_2 + 8x_2^2) - 2x_1 + x_2 = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle,$$

де $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$, $b = (-2,\, 1)^T$.

Для того, щоб знайти наступну точку ітераційного процесу $x^{(1)}$ за співвідношенням (29.3), тобто

$$x^{(1)} = x^{(0)} - (f''(x^{(0)}))^{-1} f'(x^{(0)}),$$

необхідно знайти $f'(x^{(0)})$ і $(f''(x^{(0)}))^{-1}$:

$$f'(x^{(0)}) = (6x_1 - 3x_2 - 2,\, -3x_1 + 8x_2 + 1)^T\big|_{x^{(0)}} = (-2,\, 1)^T,$$

$$(f''(x^{(0)}))^{-1} = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{39} & \frac{3}{39} \\ \frac{3}{39} & \frac{6}{39} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$x^{(1)} = (0,\, 0)^T - \begin{pmatrix} \frac{8}{39} & \frac{3}{39} \\ \frac{3}{39} & \frac{6}{39} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3},\, 0\right)^T, \text{ при цьому } f(x^{(1)}) = -\frac{1}{3} < f(x^{(0)}) = 0 .$$

Оскільки

$$f'(x^{(1)}) = (6x_1 - 3x_2 - 2,\, -3x_1 + 8x_2 + 1)^T\big|_{x^{(1)}} = (0,\, 0)^T,$$

то згідно необхідної і достатньої умови мінімуму опуклої функції (див. зауваження до теореми 16.7) точка $x^{(1)}$ є точкою мінімуму функції $f(x_1,x_2)$.

На рис. 29.2 подано геометричну інтерпретацію розв'язування задачі з прикладу 29.1. При цьому показано як відрізняються напрями руху з точки $x^{(0)}$ за методом Ньютона $(-(f''(x^{(0)}))^{-1} f'(x^{(0)}) = -A^{-1}f'(x^{(0)}))$ і за градієнтним методом $(-f'(x^{(0)}))$. Рис. 29.2 наштовхує на гіпотезу про те, що послідовні наближення, одержані за методом Ньютона, збігаються швидше до розв'язку, ніж за градієнтними методами, зокрема за методом найшвидшого спуску.

Зауваження. В розглянутому прикладі точку мінімуму квадратичної функції було знайдено за один крок за методом Ньютона не випадково. Можна показати, що для будь-якої квадратичної функції за методом Ньютона точка мінімуму знаходиться за один крок з довільного початкового наближення $x^{(0)} \in R^n$.

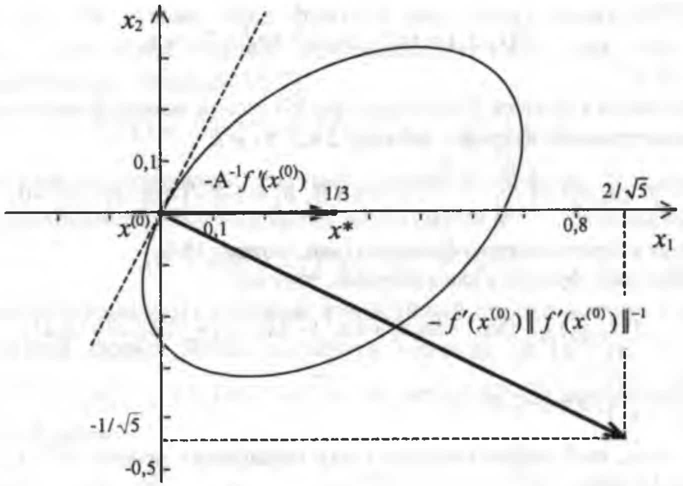


Рис. 29.2.

Умови збіжності методу Ньютона та його швидкість збіжності визначає наступна теорема.

Т е о р е м а 29.1. *Нехай функція* $f(x)$ *двічі диференційовна, сильно опукла з константою* $m>0$ *на* R^n, *її матриця других похідних задовольняє умову Ліпшиця*:

$$\| f''(x)-f''(y)\| \le K\| x-y\|$$

для будь-яких $x\in R^n$, $y\in R^n$, *де* $K>0$, *і початкова точка* $x^{(0)}$ *така, що*

$$\| f'(x^{(0)}\| \le \frac{8m^2}{K}.$$

Тоді послідовність точок $\{x^{(k)}\}$, *яка генерується за методом* (29.3), *збігається до точки мінімуму* x^* *з квадратичною швидкістю:*

$$\| x^{(k)}-x^*\| \le \frac{4mq^{2^k}}{K},$$

де $q\in(0;1)$.

Доведення цієї теореми можна знайти, наприклад, в [98].

Зазначимо, що традиційною умовою закінчення ітераційного процесу в методах Ньютона є виконання умови $\| f'(x^{(k)})\| < \varepsilon$, де $\varepsilon>0$ – досить мале число.

Аналіз рекурентного співвідношення (29.3) і умов теореми 29.1 показує, що основними недоліками методу Ньютона є:

– обчислення на кожному кроці ітераційного процесу матриці $f''(x^{(k)})$ та знаходження оберненої до неї матриці;

– процес може бути розбіжним, якщо цільова функція не є сильно опуклою і початкове наближення знаходиться досить далеко від точки мінімуму.

Тому використання класичного методу Ньютона на практиці не завжди доцільне. Для подолання наведених недоліків розроблені численні модифікації методу Ньютона, які спрямовані на те, щоб зберегти високу швидкість збіжності, але зменшити трудомісткість обчислень і послабити вимоги до вибору початкового наближення.

2. Узагальнений метод Ньютона. Розглянемо метод Ньютона, в якому рекурентне співвідношення має вигляд:

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-h_k(f''(x^{(k)}))^{-1}f'(x^{(k)}), \qquad (29.5)$$

де $h_k>0$.

Цей метод називають *узагальненим методом Ньютона* або *методом Ньютона з регулюванням кроку*.

Параметр h_k в (29.5) добирається, як і в градієнтних методах, так, щоб забезпечити спадання цільової функції на кожній ітерації. Найбільш поширеними є два способи вибору величини h_k.

Перший з них пов'язаний з вибором параметра h_k, який задовольняє нерівність:

$$f(x^{(k)}+h_k p^{(k)})-f(x^{(k)})\le \varepsilon h_k\langle f'(x^{(k)}),p^{(k)}\rangle, \qquad (29.6)$$

де $p^{(k)}=-(f''(x^{(k)}))^{-1}f'(x^{(k)})$ – напрям спуску, $\varepsilon\in(0;2^{-1})$ – деяке число.

Якщо нерівність (29.6) виконується при $h_k=1$, то покладається $k:=k+1$ і відбувається наступна ітерація методу. Якщо нерівність (29.6) не виконується при $h_k=1$, то крок зменшується (наприклад за правилом $h_k=\lambda h_k$, $\lambda\in(0;1)$) доти, поки умова (29.6) не виконається.

Другий спосіб визначення кроку h_k полягає в мінімізації функції

$$F(h)=f(x^{(k)}-h(f''(x^{(k)}))^{-1}f'(x^{(k)}))$$

за $h>0$, тобто h_k визначається з умови

$$f(x^{(k)}+h_k p^{(k)})=\min_{h>0} f(x^{(k)}+hp^{(k)}), \qquad (29.7)$$

де $p^{(k)}=-(f''(x^{(k)}))^{-1}f'(x^{(k)})$.

Збіжність послідовних наближень за методом Ньютона з регулюванням кроку за способами (29.6), (29.7) визначається наступною теоремою.

Т е о р е м а 29.2. *Нехай функція $f(x)$ двічі диференційовна на R^n і її матриця других похідних задовольняє умови:*

$$\| f''(x) - f''(y) \| \le K \| x - y \|,$$

$$d \| y \|^2 \le \langle f''(x) y, y \rangle \le D \| y \|^2$$

для будь-яких $x \in R^n, y \in R^n$, де $K > 0$ – стала Ліпшиця, $0 < d \le D$.

Тоді послідовність точок $\{x^{(k)}\}$, яка генерується за методом (29.5) *з вибором кроку за правилами* (29.6) *або* (29.7), *незалежно від початкового наближення $x^{(0)}$ збігається до точки мінімуму x^* з квадратичною швидкістю, при цьому мають місце оцінки:*

$$\| x^{(k+1)} - x^* \| \le \frac{K}{d} \| x^{(k)} - x^* \|^2 \quad (\textit{для } (29.6)),$$

$$\| x^{(k+1)} - x^* \| \le \frac{K}{d} \sqrt{\frac{D}{d}} \| x^{(k)} - x^* \|^2 \quad (\textit{для } (29.7)).$$

Доведення цієї теореми можна знайти, наприклад, в [88]. Там же показано, що якщо матриця $f''(x)$ не задовольняє умову Ліпшиця, то збіжність послідовних наближень за методом Ньютона з регулюванням кроку надлінійна.

З а у в а ж е н н я. Функції, які задовольняють другу умову теореми, обмежені знизу і мають єдину точку мінімуму x^*. Зокрема такими є сильно опуклі двічі неперервно диференційовні функції.

Узагальнений метод Ньютона часто застосовується на практиці. За його допомогою долається один з недоліків методу Ньютона, пов'язаний з необхідністю відшукання хорошого початкового наближення.

3. Модифікації узагальненого методу Ньютона. Для подолання трудомісткості обчислень за методом Ньютона в багатьох його модифікаціях матриця $f''(x)$ замінюється на кожному кроці ітераційного процесу деякими наближеними аналогами. Найбільш простий підхід полягає в тому, щоб лише в початковій точці $x^{(0)}$ обчислити матрицю $f''(x)$, знайти до неї обернену і на всіх інших ітераціях замість матриці $(f''(x^{(k)}))^{-1}$ використовувати матрицю $(f''(x^{(0)}))^{-1}$. Тоді за модифікованим методом Ньютона з регулюванням кроку послідовні наближення одержуються так:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - h_k (f''(x^{(0)}))^{-1} f'(x^{(k)}). \tag{29.8}$$

Очевидно, що якщо матриця $f''(x)$ додатно визначена, то ітераційний процес (29.8) є однією з модифікацій градієнтного методу і збігається незалежно від початкового наближення $x^{(0)}$ з швидкістю геометричної прогресії (див. теорему 28.2).

Інша модифікація методу Ньютона пов'язана з тим, що матриця $(f''(x))^{-1}$ обчислюється не на кожній ітерації, як в методі (29.5), а один раз через певну кількість кроків s:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - h_k (f''(x^{(m)}))^{-1} f'(x^{(k)}), \tag{29.9}$$

де $m = s\left[\frac{k}{s}\right]$, при цьому число s добирається емпірично (див., наприклад, [73]).

4. Квазіньютонівські методи. Більш перспективними у плані зменшення трудомісткості обчислень за методами Ньютона є так звані *квазіньютонівські методи*, в яких будується апроксимація матриці $(f''(x^{(k)}))^{-1}$ на основі даних про градієнти $f'(x^{(k)})$, $f'(x^{(k-1)}), \dots, f'(x^{(0)})$ (див., наприклад, [82], [98]). Розглянемо загальний підхід до побудови такого класу методів.

Нехай функція $f(x)$ двічі диференційовна, а ітераційний процес будується за правилом

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - h_k H_k f'(x^{(k)}). \tag{29.10}$$

У співвідношенні (29.10) матриця H_k добирається так, щоб вона в деякому розумінні апроксимувала матрицю $(f''(x^{(k)}))^{-1}$. Зауважимо, що в силу диференційовності функції $f'(x)$ на R^n має місце рівність

$$f'(x^{(k)}) - f'(x^{(k+1)}) = f''(x^{(k+1)})(x^{(k)} - x^{(k+1)}) + o(\| x^{(k)} - x^{(k+1)} \|).$$

Звідси, припускаючи, що $f''(x^{(k+1)})$ невироджена, з точністю до членів більш високого порядку малості у порівнянні з $\| x^{(k)} - x^{(k+1)} \|$ маємо

$$(f''(x^{(k+1)}))^{-1}(f'(x^{(k+1)}) - f'(x^{(k)})) \approx x^{(k+1)} - x^{(k)}. \tag{29.11}$$

При цьому, якщо $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$ – квадратична функція, де A – симетрична додатно визначена матриця порядку $n \times n$, то, як відомо, $f'(x) = Ax + b$, $f''(x) = A$ і (29.11) перетворюється в точну рівність

$$(f''(x^{(k+1)}))^{-1} \Delta y^{(k)} = \Delta x^{(k)},$$

де $\Delta y^{(k)} = f'(x^{(k+1)}) - f'(x^{(k)})$, $\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$.

Тому природно вимагати, щоб для матриці H_{k+1}, яка апроксимує $(f''(x^{(k+1)}))^{-1}$, виконувалась умова

$$H_{k+1} \Delta y^{(k)} = \Delta x^{(k)}. \tag{29.12}$$

Ця умова носить назву *квазіньютонівської*. Вона лежить в основі цілого ряду методів апроксимації матриці $(f''(x^{(k+1)}))^{-1}$. Один з конкретних способів добору матриці H_{k+1}, який забезпечує виконання умови (29.12), полягає в тому, що наближення до матриці $(f''(x^{(k)}))^{-1}$ на кожному кроці ітераційного процесу (29.10) визначається за формулою

$$H_{k+1} = H_k + \Delta H_k, \qquad (29.13)$$

де

$$\Delta H_k = \frac{(\Delta x^{(k)} - H_k \Delta y^{(k)})(\Delta x^{(k)} - H_k \Delta y^{(k)})^T}{\langle \Delta x^{(k)} - H_k \Delta y^{(k)}, \Delta y^{(k)} \rangle}. \qquad (29.14)$$

На початку ітераційного процесу за H_0 можна взяти довільну додатно визначену симетричну матрицю, але на практиці часто береться одинична матриця, тобто $H_0 = E$.

Величину кроку h_k в квазіньютонівських методах типу (29.10) найчастіше добирають з умови одновимірної мінімізації функції $f(x)$ вздовж обраного напряму, тобто

$$f(x^{(k)} - h_k H_k f'(x^{(k)})) = \min_{h>0} f(x^{(k)} - h H_k f'(x^{(k)})). \qquad (29.15)$$

Іноді величина кроку h_k добирається як і в класичному методі Ньютона, тобто $h_k \equiv 1$, або як в градієнтному методі з поділом кроку.

Існують й інші способи добору матриці ΔH_k у співвідношенні (29.13) (див., наприклад, [98], [104], [119]). Так Р. Флетчер і М. Пауелл в [119] розглядають ΔH_k, яке визначається формулою

$$\Delta H_k = \frac{\Delta x^{(k)} (\Delta x^{(k)})^T}{\langle \Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)} \rangle} - \frac{H_k \Delta y^{(k)} (\Delta y^{(k)})^T H_k}{\langle H_k \Delta y^{(k)}, \Delta y^{(k)} \rangle}. \qquad (29.16)$$

Квазіньютонівські методи називають ще *методами змінної метрики*. Ця назва пояснюється тим, що будь-яка симетрична додатно визначена матриця H_k задає скалярний добуток $\langle x, y \rangle_k = \langle H_k x, y \rangle$ і, пов'язану з ним, метрику. Тоді лінійна частина в поданні (29.1) має вигляд

$$f(x) = f(x^{(k)}) + \langle f'(x^{(k)}), x - x^{(k)} \rangle = f(x^{(k)}) + \langle H_k H_k^{-1} f'(x^{(k)}), x - x^{(k)} \rangle =$$

$$= f(x^{(k)}) + \langle H_k^{-1} f'(x^{(k)}), x - x^{(k)} \rangle_k,$$

і тому вектор $H_k^{-1} f'(x^{(k)})$ можна розглядати як градієнт функції $f(x)$ в точці $x^{(k)}$ у просторі зі скалярним добутком $\langle x, y \rangle_k = \langle H_k x, y \rangle$. Отже, метод (29.10) являє собою узагальнення градієнтного методу на випадок простору із змінною метрикою.

П р и к л а д 29.2. Знайти точку мінімуму функції з прикладу 29.1 за допомогою квазіньютонівських методів (29.10), (29.13), (29.14) і (29.10), (29.13), (29.16) з вибором кроку за правилом (29.15) з початкової точки $x^{(0)} = (0, 0)^T$.

Як було показано, функція

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 3x_1 x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2$$

є квадратичною функцією з додатно визначеною симетричною матрицею A порядку 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix},$$

при цьому $x^* = \left(\frac{1}{3}, 0\right)^T$ і $f(x^*) = -\frac{1}{3}$.

Спочатку розв'яжемо поставлену задачу за методом (29.10), (29.13), (29.14), (29.15). Для знаходження наступної точки ітераційного процесу $x^{(1)}$ скористаємось співвідношенням:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - h_0 H_0 f'(x^{(0)}),$$

де $H_0 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f'(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_0 = \arg\min_{h>0} f(x^{(0)} - h H_0 f'(x^{(0)}))$. Оскільки $f(x)$ – квадратична функція, то згідно (28.20) $h_0 = -\frac{\langle f'(x^{(0)}), g^{(0)} \rangle}{\langle A g^{(0)}, g^{(0)} \rangle}$, де $g^{(0)} = -H_0 f'(x^{(0)})$. Тоді, враховуючи що $H_0 = E$, перший крок квазіньютонівського методу співпадає з кроком методу найшвидшого спуску. Отже маємо:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + h_0 g^{(0)},$$

$$g^{(0)} = -H_0(-2, 1)^T = (2, -1)^T, \quad h_0 = -\frac{\langle (-2, 1)^T, (2б -1)^T \rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle} = \frac{5}{44}.$$

Звідси

$$x^{(1)} = (0, 0)^T + \frac{5}{44}(2, -1)^T = \left(\frac{5}{22}, -\frac{5}{44}\right)^T.$$

Для знаходження наступної точки $x^{(2)}$ скористаємось співвідношенням:

$$x^{(2)} = x^{(1)} - h_1 H_1 f'(x^{(1)}),$$

де, враховуючи (29.13), (29.14),

$$H_1 = H_0 + \Delta H_0, \quad \Delta H_0 = \frac{(\Delta x^{(0)} - H_0 \Delta y^{(0)})(\Delta x^{(0)} - H_0 \Delta y^{(0)})^T}{\langle \Delta x^{(0)} - H_0 \Delta y^{(0)}, \Delta y^{(0)} \rangle},$$

$$\Delta y^{(0)} = f'(x^{(1)}) - f'(x^{(0)}), \ \Delta x^{(0)} = x^{(1)} - x^{(0)}, \ h_1 = -\frac{\langle f'(x^{(1)}), g^{(1)} \rangle}{\langle A g^{(1)}, g^{(1)} \rangle}, \ g^{(1)} = -H_1 f'(x^{(1)}).$$

Виконавши відповідні операції, одержуємо:

$$f'(x^{(1)})=\left(6\cdot\frac{5}{22}-3\cdot\left(-\frac{5}{44}\right)-2,\ -3\frac{5}{22}+8\cdot\left(-\frac{5}{44}\right)+1\right)^T=\left(-\frac{13}{44},-\frac{26}{44}\right)^T,$$

$$\Delta y^{(0)}=f'(x^{(1)})-f'(x^{(0)})=\left(-\frac{13}{44},-\frac{26}{44}\right)^T-(-2,1)^T=\left(\frac{75}{44},-\frac{70}{44}\right)^T,$$

$$\Delta x^{(0)}=x^{(1)}-x^{(0)}=\left(\frac{10}{44},\frac{-5}{44}\right)^T-(0,\,0)^T=\left(\frac{10}{44},\frac{-5}{44}\right)^T,$$

$$\Delta H_0=\begin{pmatrix}-\frac{13}{29} & \frac{13}{29}\\ \frac{13}{29} & -\frac{13}{29}\end{pmatrix},\quad H_1=H_0+\Delta H_0=\begin{pmatrix}\frac{16}{29} & \frac{13}{29}\\ \frac{13}{29} & \frac{16}{29}\end{pmatrix},$$

$$g^{(1)}=-H_1f'(x^{(1)})=\left(\frac{13\cdot 42}{29\cdot 44},\frac{13\cdot 45}{29\cdot 44}\right)^T,\quad h_1=-\frac{\langle f'(x^{(1)}),g^{(1)}\rangle}{\langle Ag^{(1)},g^{(1)}\rangle}=\frac{29}{3\cdot 39}.$$

Тоді $x^{(2)}=x^{(1)}+h_1g^{(1)}=\left(\frac{1}{3},\,0\right)^T$, тобто точка $x^{(2)}=x^*$.

Процес розв'язування поставленої задачі за методом (29.10), (29.13), (29.16), (29.15) аналогічний до попереднього методу за виключенням правила знаходження матриці H_k.

Легко бачити, що точка $x^{(1)}$ співпадає з відповідною точкою, одержаною за попереднім методом:

$$x^{(1)}=(0,0)^T+\frac{5}{44}(2,-1)^T=\left(\frac{5}{22},-\frac{5}{44}\right)^T.$$

Для знаходження наступної точки ітераційного процесу $x^{(2)}$ скористаємось співвідношенням:

$$x^{(2)}=x^{(1)}-h_1H_1f'(x^{(1)}),$$

де, враховуючи (29.16),

$$H_1=H_0+\Delta H_0,\quad \Delta H_0=\frac{\Delta x^{(0)}(\Delta x^{(0)})^T}{\langle\Delta x^{(0)},\Delta y^{(0)}\rangle}-\frac{H_0\Delta y^{(0)}(\Delta y^{(0)})^TH_0}{\langle H_0\Delta y^{(0)},\Delta y^{(0)}\rangle}.$$

Виконавши відповідні операції, одержуємо:

$$\Delta H_0=\begin{pmatrix}-\frac{2054}{11\cdot 421} & \frac{4199}{22\cdot 421}\\ \frac{4199}{22\cdot 421} & -\frac{8023}{44\cdot 421}\end{pmatrix},\quad H_1=H_0+\Delta H_0=\begin{pmatrix}\frac{2577}{11\cdot 421} & \frac{4199}{22\cdot 421}\\ \frac{4199}{22\cdot 421} & \frac{10321}{44\cdot 421}\end{pmatrix},$$

$$g^{(1)}=-H_1f'(x^{(1)})=\left(\frac{13\cdot 14}{421},\frac{13\cdot 15}{421}\right)^T,\quad h_1=-\frac{\langle f'(x^{(1)}),g^{(1)}\rangle}{\langle Ag^{(1)},g^{(1)}\rangle}=\frac{421}{39\cdot 44},$$

$$x^{(2)}=x^{(1)}+h_1g^{(1)}=\left(\frac{1}{3},\,0\right)^T.$$

Як бачимо, в обох випадках розв'язок було одержано за два кроки, при цьому точки ітераційного процесу $x^{(1)},x^{(2)}$ співпали. Цей результат не є випадковим. Можна показати, що для квадратичних функцій з симетричною додатно визначеною матрицею за розглянутими квазіньютонівськими методами при будь-якому початковому наближені $x^{(0)}\in R^n$ генерується одна й та сама послідовність $x^{(1)},x^{(2)},\dots,x^{(n)}$, при цьому

$x^{(n)}=x^*=\arg\min_{x\in R^n}f(x)$, тобто за цими методами можна розв'язати задачу мінімізації квадратичної функції за n кроків. Крім того, матриці H_k, що одержуються за формулами (29.14) і (29.16), є симетричними, додатно визначеними і $H_n=A^{-1}$ (див., наприклад, [88]).

Зауваження. Для неквадратичних функцій зазначені властивості квазіньютонівських методів не мають місця, але при певних умовах на цільову функцію можна показати, що для них мають місце

$$H_k\to f''(x^{(k)})^{-1},\ x^{(k)}\to x^*\ \text{при}\ k\to\infty.$$

Зокрема, якщо цільова функція $f(x)$ двічі неперервно диференційовна і сильно опукла на R^n, то при будь-якому початковому наближенні $x^{(0)}\in R^n$ послідовність точок $\{x^{(k)}\}$, яка генерується за квазіньютонівськими методами (29.10), (29.13), (29.14) і (29.10), (29.13), (29.16) з вибором кроку за правилом (29.15), збігається до $x^*=\arg\min_{x\in R^n}f(x)$. При цьому, якщо для будь-яких $x\in R^n$ таких, що $f(x)\le f(x^{(0)})$, виконуються нерівності

$$\left|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i\partial x_j}\right|\le M\|x-x^*\|$$

при деякому $M>0$, то $x^{(k)}\to x^*$ при $k\to\infty$ із надлінійною швидкістю.

Більш детально з розглянутими та іншими квазіньютонівськими методами, а також загальними підходами до їх побудови, можна ознайомитися, наприклад, за [82], [88].

Послідовні наближення за квазіньютонівськими методами є ефективними при розв'язуванні задач безумовної диференційовної оптимізації, мають досить високу швидкість збіжності і не вимагають обчислення матриць других похідних та обернених до них. Але при розв'язуванні задач великої розмірності ці методи вимагають значних ресурсів комп'ютера для зберігання і обчислення на кожному кроці ітераційного процесу (29.10) матриць H_k.

Запитання для самоконтролю

1. У чому полягає сутність класичного методу Ньютона і які рекурентні співвідношення в ньому використовуються?
2. За яких умов класичний метод Ньютона збігається до розв'язку задачі безумовної мінімізації з квадратичною швидкістю?
3. Які основні недоліки класичного методу Ньютона?
4. Які підходи використовуються для подолання недоліків класичного методу Ньютона?
5. У чому полягає сутність квазіньютонівських методів і чому їх називають методами змінної метрики?
6. За яких умов квазіньютонівські методи мають перевагу перед іншими методами першого порядку?
7. Які основні недоліки квазіньютонівських методів?

Вправи для самостійного виконання

1. Довести, що в класичному методі Ньютона (29.3), якщо матриця $f''(x^{(k)})$ додатно визначена і $f'(x^{(k)}) \neq O_n$, то напрям $-(f''(x^{(k)}))^{-1} f'(x^{(k)})$ є напрямом спадання функції $f(x)$ в точці $x^{(k)}$.

2. Показати, що точка мінімуму довільної квадратичної функції знаходиться за класичним методом Ньютона (29.3) за один крок, починаючи з довільного початкового наближення $x^{(0)} \in R^n$.

3. Мінімізувати квадратичні функції із завдання 5 §28, виконавши один крок за класичним методом Ньютона. Дати геометричну інтерпретацію одержаних результатів.

4. Довести теореми 29.1 і 29.2.

5. Показати, що в квазіньютонівських методах матриці H_k, що одержуються за формулами (29.14) і (29.16), є симетричними, додатно визначеними і $H_n = A^{-1}$.

6. Показати, що за квазіньютонівським методом (29.10), (29.13), (29.14) з вибором кроку за правилом (29.15) задача мінімізації квадратичної функції розв'язується за n кроків з довільного початкового наближення $x^{(0)} \in R^n$.

7. Мінімізувати квадратичні функції із завдання 5 §28, виконавши два кроки за квазіньютонівським методом (29.10), (29.13), (29.14) з вибором кроку за правилом (29.15). Дати геометричну інтерпретацію одержаних результатів.

8. Однією з мов програмування описати програми, які реалізують:
– класичний метод Ньютона (КМН);
– узагальнений метод Ньютона (29.5) (УМН) з вибором кроку за правилом (29.7);
– модифікований узагальнений метод Ньютона (МУМН) (29.9) з вибором кроку за правилом (29.7);
– квазіньютонівський метод (КНМ) (29.10), (29.13), (29.14) з вибором кроку за правилом (29.15).

П р и м і т к а. Для розв'язування задач одновимірної мінімізації (29.7) і (29.15) скористатися методом дихотомії або іншим методом (за вибором) (див. §25). Для одержання оберненої матриці в методах Ньютона можна скористатися методом Жордана-Гаусса (див., наприклад, [40]).

9. За допомогою розроблених відповідно до завдання 8 програм знайти наближений розв'язок задачі мінімізації функції $f(x)$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, $\varepsilon = 10^{-8}$, починаючи ітераційний процес з точки $x^{(0)}$ і закінчуючи його при виконанні умови $\| f'(x^{(k)}) \| < \varepsilon$:

1) $f(x_1,x_2) = 6\sqrt{x_1^2 + 4x_2^2} + 5x_1^2$, $\quad x^{(0)} = (2, 2)$;

2) $f(x_1,x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 + e^{x_1^2 + x_2^2} - 2x_1 + x_2$, $\quad x^{(0)} = (1, 1)$;

3) $f(x_1,x_2) = x_1^2 + e^{2x_1^2 + x_2^2} + x_1 - x_2$, $\quad x^{(0)} = (1, -1)$;

4) $f(x_1,x_2) = x_1^4 + 3x_2^4 + \sqrt{2x_1^2 + x_2^2 + 1} - 4x_1 + 6x_2$, $\quad x^{(0)} = (1, 1)$;

5) $f(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 3\sin(x_1 + x_2)$, $\quad x^{(0)} = (-2, 1)$;

6) $f(x_1,x_2) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + \cos(x_1 - x_2)$, $\quad x^{(0)} = (2, 2)$;

7) $f(x_1,x_2) = e^{x_1^2 + 2x_2^2} + \ln(3x_1^2 + x_2^2 + 1)$, $\quad x^{(0)} = (3, 2)$;

8) $f(x_1,x_2) = e^{x_1 + x_2} + \sqrt{x_1^2 + 10x_2^2} - 3x_1 - 5x_2$, $\quad x^{(0)} = (2, -1)$;

9) $f(x_1,x_2) = \sqrt{6x_1^2 + 4x_2^2} + (\sin(x_1 - 3x_2))^2$, $\quad x^{(0)} = (1, 3)$;

10) $f(x_1,x_2) = e^{x_1 + x_2} + \sqrt{5x_1^2 + x_2^2} - 2\cos(4x_1 - x_2)$, $\quad x^{(0)} = (2, 4)$.

10. Використовуючи класичні методи, знайти точки мінімуму функцій із завдання 9 і порівняти їх з наближеними розв'язками, одержаними за допомогою методів Ньютона.

11. За допомогою програмних засобів типу Derive, GRAN1, Mathcad чи інших для функцій із завдання 9 побудувати лінії рівня і визначити, які з них мають яристу структуру.

12. Провести чисельний експеримент з метою дослідження ефективності методів Ньютона на тестових задачах із завдання 16 §28. Наближені розв'язки шукати з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, $\varepsilon = 10^{-8}$. При цьому для кожного методу визначити такі параметри: N_k – кількість кроків, N_f – кількість обчислень значень цільової функції $f(x)$ (враховуючи кількість обчислень при розв'язуванні допоміжних задач), N_g – кількість обчислень градієнта цільової функції $f(x)$, $\delta = \|x^* - \bar{x}\|$, де x^* – точний розв'язок задачі, $\bar{x}$ – наближений розв'язок задачі.

Одержані результати оформити у вигляді таблиці:

№	Метод	$\varepsilon = 10^{-4}$				$\varepsilon = 10^{-8}$			
		N_k	N_f	N_g	δ	N_k	N_f	N_g	δ
1.	КМН								
2.	УМН								
3.	МУМН								
4.	КНМ								

П р и м і т к а. КМН – класичний метод Ньютона; УМН – узагальнений метод Ньютона; МУМН – модифікований узагальнений метод Ньютона; КНМ – квазіньютонівський метод.

Результати чисельного експерименту порівняти з результатами, які були одержані за допомогою градієнтних методів та їх модифікацій, зокрема яристого методу.

§30. Методи спряжених напрямів

Розглянемо методи першого порядку, швидкість збіжності яких наближається до швидкості збіжності квазіньютонівських методів, але які вигідно відрізняються від них тим, що їх трудомісткість порівняно невелика.

Нехай задано квадратичну функцію від n змінних виду

$$f(x)=\frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle+\langle b,x\rangle, \tag{30.1}$$

де A – симетрична додатно визначена матриця порядку $n\times n$, $x=(x_1,\dots,x_n)^T\in R^n$, $b=(b_1,\dots,b_n)^T\in R^n$.

Основна ідея *методів спряжених напрямів* полягає в тому, щоб знайти такі напрями спуску $g^{(0)},g^{(1)},\dots,g^{(n-1)}$, що послідовність точок $\{x^{(k)}\}$, яка визначається співвідношеннями

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+h_k g^{(k)}, \tag{30.2}$$

$$f(x^{(k)}+h_k g^{(k)})=\min_{h\ge 0} f(x^{(k)}+hg^{(k)}),\ k=0,1,\dots, \tag{30.3}$$

за n (або менше) кроків приводила до відшукання точки мінімуму функції виду (30.1) при будь-якому початковому наближенні $x^{(0)}\in R^n$, тобто

$$f(x^{(n)})=\min_{x\in R^n} f(x).$$

Виявляється, що таку властивість мають напрями, які взаємно спряжені відносно матриці A.

1. Спряжені напрями та їх властивості.

О з н а ч е н н я 30.1. Два вектори x і y з простору R^n називають *A-спряженими* (*спряженими відносно матриці A*), якщо вони не є нуль-векторами і

$$\langle Ax,y\rangle=0. \tag{30.4}$$

Спряженість двох векторів можна вважати узагальненням поняття ортогональності, оскільки при $A=E$, де E – одинична матриця, вектори x і y ортогональні.

О з н а ч е н н я 30.2. Вектори (напрями) $s^{(0)},s^{(1)},\dots,s^{(k)}$ з R^n називаються *A-спряженими* (*взаємно спряженими відносно матриці A*), якщо всі вони не є нуль-векторами і

$$\langle As^{(i)},s^{(j)}\rangle=0,\ i\ne j,\ i=\overline{0,k},\ j=\overline{0,k}. \tag{30.5}$$

Розглянемо метод спряжених напрямів для мінімізації квадратичної функції виду (30.1), який визначається співвідношеннями (30.2), (30.3), де вектори $g^{(k)}$, $k=\overline{0,n-1}$, взаємно спряжені відносно матриці A:

$$\langle Ag^{(i)},g^{(j)}\rangle=0,\ i\ne j,\ i=\overline{0,n-1},\ j=\overline{0,n-1}. \tag{30.6}$$

Доведемо, що цей метод розв'язує поставлену задачу не більше ніж за n кроків. Але спочатку розглянемо одне допоміжне твердження.

Л е м а 30.1. *A-спряжені вектори $g^{(0)},g^{(1)},\dots,g^{(n-1)}$ лінійно незалежні.*

Д о в е д е н н я. Припустимо, що це не так, тобто для деякого вектора $g^{(k)}$ існують числа α_i ($i\in I_k=\{0,1,\dots,n-1\}\setminus\{k\}$), не всі рівні нулю, такі, що

$$g^{(k)}=\sum_{i\in I_k}\alpha_i g^{(i)}.$$

Тоді

$$\langle Ag^{(k)},g^{(k)}\rangle=\langle Ag^{(k)},\sum_{i\in I_k}\alpha_i g^{(i)}\rangle=\sum_{i\in I_k}\alpha_i\langle Ag^{(k)},g^{(i)}\rangle=0,$$

що можливо лише тоді, коли $g^{(k)}$ – нуль-вектор, оскільки матриця A додатно визначена (див. §9). Але згідно означення 30.2 $g^{(k)}$ не є нуль-вектором. Одержана суперечність і доводить лему.

Т е о р е м а 30.1. *Якщо в методі* (30.2), (30.3) $x^{(0)}\in R^n$ – *довільна початкова точка і напрями* $g^{(0)},g^{(1)},\dots,g^{(k)},\dots,g^{(n-1)}$ *A-спряжені, то точка*

$$x^{(n)}=x^{(n-1)}+h_{n-1}g^{(n-1)}$$

співпадає з точкою мінімуму x^* квадратичної функції $f(x)$ виду (30.1).

Д о в е д е н н я. Враховуючи співвідношення (30.2), (30.3), маємо

$$x^{(n)}=x^{(0)}+\sum_{k=0}^{n-1}h_k g^{(k)}. \tag{30.7}$$

Згідно леми 28.1, розв'язком задачі (30.3) одновимірної мінімізації за змінною h квадратичної функції $f(x)$ (30.1) є

$$h_k=-\frac{\langle f'(x^{(k)}),g^{(k)}\rangle}{\langle Ag^{(k)},g^{(k)}\rangle}. \tag{30.8}$$

Тоді з (30.7) одержуємо

$$x^{(n)}=x^{(0)}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\langle f'(x^{(k)}),g^{(k)}\rangle}{\langle Ag^{(k)},g^{(k)}\rangle}g^{(k)}. \tag{30.9}$$

Враховуючи те, що вектори $g^{(0)},g^{(1)},\dots,g^{(k)}$ A-спряжені і $f'(x)=Ax+b$, маємо

$$\langle f'(x^{(k)}),g^{(k)}\rangle=\langle Ax^{(k)}+b,g^{(k)}\rangle=\langle A\left(x^{(0)}+\sum_{i=0}^{k-1}h_i g^{(i)}\right)+b,g^{(k)}\rangle=$$

$$=\langle Ax^{(0)}+b,g^{(k)}\rangle+\langle A\left(\sum_{i=0}^{k-1}h_i g^{(i)}\right),g^{(k)}\rangle=\langle Ax^{(0)}+b,g^{(k)}\rangle+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}h_i\langle Ag^{(i)},g^{(k)}\rangle=\langle Ax^{(0)}+b,g^{(k)}\rangle=\langle f'(x^{(0)}),g^{(k)}\rangle.$$

Тоді (30.9) буде мати такий вигляд

$$x^{(n)}=x^{(0)}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\langle f'(x^{(0)}),g^{(k)}\rangle}{\langle Ag^{(k)},g^{(k)}\rangle}g^{(k)}. \tag{30.10}$$

Нехай x^* – точний розв'язок задачі

$$f(x)\to\min, x\in R^n.$$

Тоді $f'(x^*)=Ax^*+b=O_n$ і $x^*=-A^{-1}b$. Легко перевірити, що

$$x^*=x^{(0)}-A^{-1}f'(x^{(0)}). \tag{30.11}$$

Оскільки вектори $g^{(k)}, k=\overline{0,n-1}$, згідно леми 30.1 лінійно незалежні, то вектор $x^*-x^{(0)}$ можна подати у вигляді їх лінійної комбінації

$$x^*-x^{(0)}=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k g^{(k)}$$

або

$$x^*=x^{(0)}+\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k g^{(k)}. \tag{30.12}$$

Можна показати (див. [88], стор. 97), що в умовах теореми має місце подання

$$A^{-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(g^{(k)})^T}{\langle Ag^{(k)},g^{(k)}\rangle},$$

де $g^{(k)}$ – вектор-стовпчик, $(g^{(k)})^T$ – вектор-рядок, а $g^{(k)}(g^{(k)})^T$ – їх добуток.

Тоді з (30.11) одержуємо

$$x^*=x^{(0)}-\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(g^{(k)})^T}{\langle Ag^{(k)},g^{(k)}\rangle}\right)f'(x^{(0)})$$

або, в іншій формі,

$$x^*=x^{(0)}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\langle f'(x^{(0)}),g^{(k)}\rangle}{\langle Ag^{(k)},g^{(k)}\rangle}g^{(k)}. \tag{30.13}$$

З (30.12) і (30.13) в силу єдиності подання вектора x^* через систему лінійно незалежних векторів $g^{(k)}, k=\overline{0,n-1}$, маємо, що

$$\alpha_k=-\frac{\langle f'(x^{(0)}),g^{(k)}\rangle}{\langle Ag^{(k)},g^{(k)}\rangle},\ k=\overline{0,n-1}. \tag{30.14}$$

Порівнюючи праву частину (30.10) з правою частиною (30.12) з α_k виду (30.14), одержуємо

$$x^{(n)}=x^*=A^{-1}b.$$

Отже, за методом (30.2), (30.3), (30.6) дійсно можна знайти мінімум квадратичної функції (30.1) за n кроків.

Для того, щоб скористатися розглянутим методом спряжених напрямів, необхідно знати n напрямків $g^{(k)}, k=\overline{0,n-1}$, взаємно спряжених відносно матриці A. В залежності від їх вибору можна побудувати різні варіанти методу спряжених напрямів. Одним з найбільш відомих варіантів цього методу є метод Флетчера-Рівса або метод *спряжених градієнтів*.

2. Метод спряжених градієнтів. Метод спряжених градієнтів був запропонований Р. Флетчером і К. Рівсом у 1964 р. в [120]. Ідея методу полягає в тому, що вибір A-спряжених напрямів відбувається спільно з одновимірною мінімізацією за змінною h функції $f(x)$, при цьому кожний з напрямів $g^{(k)}, k=\overline{0,n-1}$, є лінійною комбінацією антиградієнта в точці $x^{(k)}$ і попереднього напряму спуску $g^{(k-1)}$.

Отже, в методі спряжених градієнтів система A-спряжених напрямів будується за правилом

$$\begin{aligned} g^{(0)}&=-f'(x^{(0)}),\\ g^{(k)}&=-f'(x^{(k)})+\lambda_{k-1}g^{(k-1)},\ k\ge 1. \end{aligned} \tag{30.15}$$

З умови A-спряженості векторів $g^{(k-1)}$, $g^{(k)}$ і (30.15) маємо

$$\langle g^{(k)},Ag^{(k-1)}\rangle=-\langle f'(x^{(k)}),Ag^{(k-1)}\rangle+\lambda_{k-1}\langle g^{(k-1)},Ag^{(k-1)}\rangle=0.$$

Звідси

$$\lambda_{k-1}=\frac{\langle f'(x^{(k)}),Ag^{(k-1)}\rangle}{\langle g^{(k-1)},Ag^{(k-1)}\rangle}. \tag{30.16}$$

Для обґрунтування того, що метод (30.2), (30.3), (30.15), (30.16) належить до методів спряжених напрямів, необхідно навести деякі твердження, доведення яких можна знайти, наприклад, в [73], [88], [98].

Л е м а 30.2. *Має місце співвідношення*

$$f'(x^{(k+1)}) = f'(x^{(k)}) + h_k A g^{(k)}. \qquad (30.17)$$

Л е м а 30.3. *Вектори* $f'(x^{(k)})$, $f'(x^{(k+1)})$ *ортогональні між собою, тобто*

$$\langle f'(x^{(k+1)}), f'(x^{(k)}) \rangle = 0.$$

Л е м а 30.4. *Нехай* $x^{(0)} \in R^n$ *– довільне початкове наближення, точки* $x^{(k)}$, $k = \overline{0, n-1}$, *вектори* $g^{(k)}$, $k = \overline{0, n-1}$, *одержані за методом спряжених градієнтів* (30.2), (30.3), (30.15), (30.16) *і* $f'(x^{(k)}) \neq O_n$, $k = \overline{0, n-1}$. *Тоді вектори* $g^{(0)}, g^{(1)}, \dots, g^{(n-1)}$ *взаємно спряжені відносно матриці* A, *а градієнти* $f'(x^{(0)}), f'(x^{(1)}), \dots, f'(x^{(n-1)})$ *взаємно ортогональні.*

Доведення даної леми можна провести методом математичної індукції (див., наприклад, [73], [98]).

Отже, метод спряжених градієнтів відноситься до методів спряжених напрямів. Тому згідно теореми 30.1 має місце наступне твердження.

Т е о р е м а 30.2. *Метод спряжених градієнтів* (30.2), (30.3), (30.15), (30.16) *розв'язує задачу мінімізації квадратичної функції* (30.1) *не більше ніж за* n *кроків.*

При практичній реалізації методу Флетчера-Рівса для визначення параметра λ_{k-1} в (30.15) краще використовувати співвідношення

$$\lambda_{k-1} = \frac{\langle f'(x^{(k)}), f'(x^{(k)}) - f'(x^{(k-1)}) \rangle}{\langle f'(x^{(k-1)}), f'(x^{(k-1)}) \rangle} = \frac{\| f'(x^{(k)}) \|^2}{\| f'(x^{(k-1)}) \|^2}, \qquad (30.18)$$

яке одержується з (30.16), (30.17) і умови ортогональності градієнтів $f'(x^{(k)}), f'(x^{(k-1)})$.

На рис. 30.1 подано геометричну інтерпретацію методу спряжених градієнтів для квадратичної функції від двох змінних.

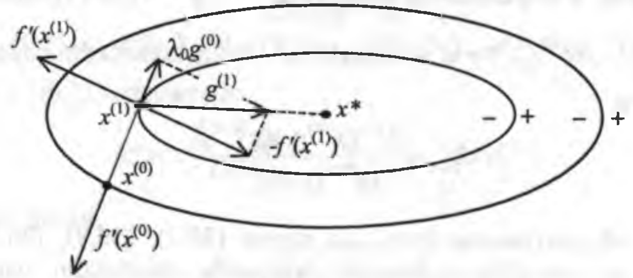


Рис. 30.1.

П р и к л а д 30.1. За методом спряжених градієнтів знайти точку мінімуму квадратичної функції

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2$$

при $x^{(0)} = (0,0)^T$.

Ця задача була нами розв'язана за квазіньютонівськими методами за два кроки (див. приклад 29.2), при цьому $x^* = \left(\frac{1}{3}, 0\right)^T$ і $f(x^*) = -\frac{1}{3}$.

Згідно теореми 30.2 точка мінімуму квадратичної функції $f(x)$ повинна бути знайдена за методом спряжених градієнтів (30.2), (30.3), (30.15), (30.16) також за два кроки. Оскільки за методом спряжених градієнтів визначення першого наближення $x^{(1)}$ здійснюється так само, як і за методом найшвидшого спуску, то скористаємось результатами, одержаними в прикладі 29.2:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + h_0 g^{(0)},$$

$$g^{(0)} = -f'(x^{(0)}) = -(-2, 1)^T = (2, -1)^T, \ h_0 = -\frac{\langle f'(x^{(0)}), g^{(0)} \rangle}{\langle A g^{(0)}, g^{(0)} \rangle} = \frac{5}{44},$$

$$x^{(1)} = (0, 0)^T + \frac{5}{44}(2, -1)^T = \left(\frac{5}{22}, -\frac{5}{44}\right)^T.$$

Для знаходження наступного напряму спуску $g^{(1)}$ скористаємось співвідношенням

$$g^{(1)} = -f'(x^{(1)}) + \lambda_0 g^{(0)},$$

де

$$f'(x^{(1)}) = \left(6 \cdot \frac{5}{22} - 3 \cdot \left(-\frac{5}{44}\right) - 2, -3\frac{5}{22} + 8 \cdot \left(-\frac{5}{44}\right) + 1\right)^T = \left(-\frac{13}{44}, -\frac{26}{44}\right)^T,$$

а параметр $\lambda^{(0)}$ обчислюється за формулою (30.18):

$$\lambda^{(0)} = \frac{\left\| \left(-\frac{13}{44}, -\frac{26}{44}\right) \right\|^2}{\| (-2, 1) \|^2} = \frac{13^2}{44^2}.$$

Одержуємо

$$g^{(1)} = -\left(-\frac{13}{44}, -\frac{26}{44}\right)^T + \frac{13^2}{44^2}(2, -1)^T = \left(\frac{910}{44^2}, \frac{975}{44^2}\right)^T.$$

Остання точка ітераційного процесу $x^{(2)} = x^*$ визначається співвідношенням

$$x^{(2)} = x^{(1)} + h_1 g^{(1)},$$

де h_1 згідно (30.8) дорівнює $h_1 = -\frac{\langle f'(x^{(1)}), g^{(1)} \rangle}{\langle A g^{(1)}, g^{(1)} \rangle} = \frac{44}{195}$. Тоді

$$x^{(2)} = \left(\frac{5}{22}, -\frac{5}{44}\right)^T + \frac{44}{195}\left(\frac{910}{44^2}, \frac{975}{44^2}\right)^T = \left(\frac{1}{3}, 0\right)^T.$$

Наведений приклад свідчить про те, наскільки точно треба виконувати обчислення параметрів ітераційного процесу методу спряжених градієнтів для того, щоб одержати точний розв'язок задачі за відповідну кількість кроків. Отже даний метод, як і квазіньютонівські методи, досить чутливий до похибок обчислень, тому при його реалізації на комп'ютері, як правило, одержується наближений розв'язок задачі мінімізації квадратичної функції.

3. Мінімізація неквадратичних функцій. Розглянемо, як можна використовувати метод спряжених градієнтів для мінімізації неквадратичних функцій. В цьому випадку, як правило, розв'язок вже не одержується за скінченну кількість кроків, оскільки вектори $g^{(0)}, g^{(1)}, \dots, g^{(k)}, \dots$, які одержуються під час ітераційного процесу, взагалі кажучи, не будуть взаємно спряженими відносно якої-небудь матриці, а задача (30.3) вибору параметру h_k розв'язується наближено. Але навіть в цих умовах метод спряжених градієнтів є досить ефективним методом першого порядку, який для деяких класів функцій збігається з квадратичною швидкістю.

Для того щоб зменшити вплив похибок обчислень, які накопичуються в процесі наближеного розв'язування задачі одновимірної мінімізації (30.3), до методу спряжених градієнтів вводиться процедура «оновлення», яка полягає в тому, що, коли $k = 0, n, 2n, 3n, \dots$, процедура (30.16) для обчислення $\lambda_{n-1}, \lambda_{2n-1}, \lambda_{3n-1}, \dots$ не виконується, а вони покладаються рівними нулю, при цьому $g^{(k)} = -f'(x^{(k)})$. Тоді *модифікований метод Флетчера-Рівса* для мінімізації неквадратичних функцій має такий вигляд:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h_k g^{(k)}, \tag{30.19}$$

де h_k визначається з умови

$$f(x^{(k)} + h_k g^{(k)}) = \min_{h \ge 0} f(x^{(k)} + h g^{(k)}),\ k = 0, 1, \dots, \tag{30.20}$$

$$\begin{aligned} g^{(0)} &= -f'(x^{(0)}), \\ g^{(k)} &= -f'(x^{(k)}) + \lambda_{k-1} g^{(k-1)},\ k \ge 1, \end{aligned} \tag{30.21}$$

$$\lambda_{k-1} = \begin{cases} \dfrac{\langle f'(x^{(k)}), f'(x^{(k)}) - f'(x^{(k-1)}) \rangle}{\langle f'(x^{(k-1)}), f'(x^{(k-1)}) \rangle}, & k \mod n \ne 0, \\ 0, & k \mod n = 0. \end{cases} \tag{30.22}$$

Опишемо загальну схему розв'язування задачі мінімізації неквадратичної функції за методом спряжених градієнтів.

Нехай $x^{(0)} \in R^n$ – довільне початкове наближення, $\varepsilon > 0$ – досить мале число.

К р о к 0. Покласти $k := 0$ і обчислити вектор $g^{(0)} = -f'(x^{(0)})$.

К р о к 1. Знайти точку

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h_k g^{(k)},$$

де h_k визначається з умови

$$f(x^{(k)} + h_k g^{(k)}) = \min_{h \ge 0} f(x^{(k)} + h g^{(k)}).$$

К р о к 2. Обчислити $f(x^{(k+1)})$ і $f'(x^{(k+1)})$.

К р о к 3. Якщо $\| f'(x^{(k+1)}) \| < \varepsilon$, то точка $x^{(k+1)}$ – наближений розв'язок задачі, покласти $x^* := x^{(k+1)}$, $f^* := f(x^{(k+1)})$ і перейти до виконання кроку 5.

К р о к 4. Якщо $k + 1 = n$, то покласти $g^{(0)} := -f'(x^{(k+1)})$, $k := 0$ і перейти до виконання кроку 1, інакше знайти вектор $g^{(k+1)}$ із співвідношення

$$g^{(k+1)} = -f'(x^{(k+1)}) + \frac{\langle f'(x^{(k+1)}), f'(x^{(k+1)}) - f'(x^{(k)}) \rangle}{\langle f'(x^{(k)}), f'(x^{(k)}) \rangle} g^{(k)},$$

покласти $k := k + 1$ і перейти до виконання кроку 1.

К р о к 5. Вивести: x^*, f^*, k.

Кінець.

Оскільки при $k = 0, n, 2n, 3n, \dots$ в методі (30.19)-(30.22) відбувається крок методу найшвидшого спуску, то можна очікувати, що при досить незначних обмеженнях на функцію $f(x)$ модифікований метод спряжених градієнтів повинен збігатися до деякої стаціонарної точки цієї функції. Дійсно, як показано в [88], має місце

Т е о р е м а 30.3. *Якщо функція $f(x)$ диференційовна на R^n і обмежена знизу, а її градієнт задовольняє умову Ліпшиця:*

$$\| f'(x) - f'(y) \| \le K \| x - y \|$$

для будь-яких $x \in R^n$, $y \in R^n$, де $K > 0$, то в методі (30.19)-(30.22)

$$\lim_{k \to \infty} \| f'(x^{(k)}) \| = 0.$$

Т е о р е м а 30.4. *Нехай $f(x)$ – тричі диференційовна і сильно опукла на R^n функція. Тоді послідовність $\{x^{(k)}\}$, яка генерується за методом* (30.19)-(30.22), *збігається до точки x^* мінімуму функції $f(x)$, причому має місце оцінка*

$$\| x^{(k+n)} - x^* \| \le C \| x^{(k)} - x^* \|^2 \tag{30.23}$$

для всіх $k = 0, n, 2n, 3n, \dots$, $k \ge M$, де $C > 0$ і M – деякі константи.

Доведення цієї теореми можна знайти в [81]. Порівнюючи оцінку, наведену в теоремі 29.1, з оцінкою (30.23), можна зробити висновок, що n кроків модифікованого методу спряжених градієнтів приблизно еквівалентні одному кроку методу Ньютона.

Отже метод спряжених градієнтів є методом першого порядку, але має досить високу швидкість збіжності і, як свідчать чисельні експерименти, за ефективністю майже не поступається квазіньютонівським методам, при цьому він вимагає менше ресурсів оперативної пам'яті комп'ютера.

Запитання для самоконтролю

1. У чому полягає основна ідея методів спряжених напрямів?
2. Які вектори називаються A-спряженими?
3. Які властивості мають A-спряжені вектори?
4. У чому полягає сутність методів спряжених напрямів і які рекурентні співвідношення в ньому використовуються?
5. У чому полягає сутність методу спряжених градієнтів Флетчера-Рівса і які рекурентні співвідношення в ньому використовуються?
6. За яких умов послідовні наближення за методом спряжених градієнтів збігаються до стаціонарної точки цільової функції в задачі безумовної мінімізації?

Вправи для самостійного виконання

1. Довести леми 30.2, 30.3, 30.4 і теореми 30.3, 30.4.

2. Нехай задано симетричну додатно визначену матрицю $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ і вектори $g_1=(1,1)^T$, $g_2=(-4,3)^T$. З'ясувати чи є задані вектори g_1, g_2 спряженими відносно матриці A.

3. Мінімізувати квадратичні функції із завдання 5 §28, зробивши два кроки за методом спряжених градієнтів (30.2), (30.3), (30.8), (30.15), (30.16).

4. Однією з мов програмування описати програму, яка реалізує метод спряжених градієнтів з «оновленням» (30.19)-(30.22) для неквадратичних функцій.

За допомогою розробленої програми знайти наближені розв'язки задач мінімізації функцій із завдання 9 §29 з точністю $\varepsilon=10^{-4}$, $\varepsilon=10^{-8}$, починаючи ітераційний процес з точки $x^{(0)}$ і закінчуючи його при виконанні умови $\| f'(x^{(k)})\| < \varepsilon$.

5. Провести чисельний експеримент з метою дослідження ефективності методу спряжених градієнтів на тестових задачах із завдання 16 §28. Наближені розв'язки шукати з точністю $\varepsilon=10^{-4}$, $\varepsilon=10^{-8}$. При цьому визначити такі параметри: N_k – кількість кроків, N_f – кількість обчислень значень цільової функції $f(x)$ (враховуючи кількість обчислень при розв'язуванні допоміжних задач), N_g – кількість обчислень градієнта цільової функції $f(x)$, $\delta=\|x^*-\bar{x}\|$, де x^* – точний розв'язок задачі, $\bar{x}$ – наближений розв'язок задачі.

Одержані результати оформити у вигляді таблиці:

№	Метод	$\varepsilon=10^{-4}$				$\varepsilon=10^{-8}$			
		N_k	N_f	N_g	δ	N_k	N_f	N_g	δ
1.	МСГ								

П р и м і т к а. МСГ – метод спряжених градієнтів.

Результати чисельного експерименту порівняти з результатами, які одержані за допомогою яристого методу (див. завдання 16 §28) і методів Ньютона (див. завдання 12 §29).

§31. Субградієнтний метод та його модифікації

З 60-х років 20 сторіччя почалось інтенсивне і систематичне вивчення проблем недиференційовної оптимізації (НДО), які стосувались широкого кола питань, пов'язаних із дослідженнями властивостей негладких функцій і методів знаходження екстремумів таких функцій. Інтерес до задач НДО обумовлений важливістю і різноманітністю їх застосувань в управлінні, економіці, техніці і самій математиці. Так проблеми мінімізації або максимізації не всюди диференційовних функцій виникають при розв'язуванні задач виробничо-транспортного планування, оптимального проектування і управління технологічними процесами, при розв'язуванні задач надійності, резервування та управління запасами природних ресурсів. Крім того, задачі НДО тісно пов'язані з розв'язуванням систем рівнянь і нерівностей великої розмірності, із задачами мінімаксного типу в теорії ігор та теорії наближень функцій поліномами, з обчисленням оцінок у методі гілок і меж розв'язування задач дискретного програмування, з розв'язуванням задач математичного програмування за методами, в яких використовуються різні схеми декомпозиції або точні штрафні функції.

У зв'язку з цим розробка і дослідження чисельних методів розв'язування задач НДО являє собою досить актуальну проблему. Найбільш дослідженими серед задач НДО і описаними в науковій та навчальній літературі є мінімаксні задачі (див., наприклад, [20], [32], [77], [103]) і задачі опуклого (вгнутого) програмування (див., наприклад, [19], [31], [36], [51], [74], [85], [111], [113], [126]).

Серед методів негладкої оптимізації можна виділити кілька класів, які в тій чи іншій мірі знайшли практичне застосування.

Метод узагальненого градієнтного спуску або *субградієнтний метод.* Цей метод був запропонований в [110] для мінімізації опуклих кусково-лінійних функцій і передбачає рух у напрямі, який дає зменшення відстані до точки мінімуму, якщо кроковий множник досить малий. Субградієнтний метод є основою широкого класу немонотонних субградієнтних процесів мінімізації, в яких значення цільової функції не обов'язково зменшуються від ітерації до ітерації. Немонотонні методи субградієнтного типу відрізняються простотою реалізації, економічністю, вони стійкі до похибок обчислень, є у певному розумінні оптимальними для опуклих екстремальних задач великої розмірності [74], а також є збіжними і для деяких інших класів задач неопуклої оптимізації (див., наприклад, [71]). До недоліків цих методів треба віднести повільну збіжність і складність оцінки точності розв'язку. Однією з причин повільної збіжності послідовних наближень за немонотонними методами, особливо в ситуаціях, коли поверхні рівня цільової функції мають «яристу» структуру, є те, що при побудові чергового наближення ніякі дані, окрім про субградієнт і значення цільової функції в поточній точці, не використовуються. Цей недолік вдається подолати за рахунок усереднення субградієнтів, обчислених і накопичених на попередніх ітераціях, що дає змогу знайти напрям вздовж «яру». Різні схеми усереднення субградієнтів або їх аналогів розглянуто, наприклад, у роботах [39], [42], [71], [109].

Узагальнені градієнтні методи з розтягуванням простору. В цих методах для прискорення збіжності застосовується лінійне неортогональне перетворення метрики простору (див., наприклад, [70], [111]). Методи цього класу, зокрема метод з розтягуванням простору у напрямі різниці двох послідовних субградієнтів (r-алгоритм), є одним з найбільш ефективних засобів розв'язування широкого кола задач негладкої оптимізації, зокрема задач виробничо-транспортного планування.

Методи, які використовують січні гіперплощини для кусково-лінійної апроксимації графіка цільової функції (*метод січних* [125]), або для послідовного зменшення об'єму області локалізації екстремуму (*метод централізованих перерізів* [62]). До методів цього класу відноситься і *метод еліпсоїдів* (див., наприклад, роботи [70], [74], [111]) та різні його модифікації.

Монотонні ε-субградієнтні методи. Ці методи засновані на виборі напряму спуску за рахунок апроксимації ε-субдиференціала опуклої цільової функції у поточній точці ітераційного процесу шляхом обчислення субградієнтів в околі цієї точки або шляхом накопичення даних про субградієнти, знайдені на попередніх кроках. Різноманітні процедури такої апроксимації запропоновані, наприклад, в роботах [31], [89], [126], [129], [137] та ін. При цьому за напрям руху, як правило, обирається вектор, протилежний елементові мінімальної норми в опуклій оболонці скінченного числа накопичених субградієнтів. Достоїнством ε-субградієнтних методів є монотонне спадання цільової функції від ітерації до ітерації, а до недоліків можна віднести їх складність і трудомісткість за рахунок виконання процедури знаходження напряму спуску.

Одним з перспективних підходів до створення методів негладкої оптимізації є методи, що поєднують в собі ідеї як монотонних, так і немонотонних субградієнтних методів (див., наприклад, [31], [42], [71], [109] та ін.) і відносяться до так званих *комбінованих методів*.

У цьому параграфі будуть розглянуті деякі методи опуклої безумовної мінімізації, які, по-перше, були узагальнені і адаптовані для розв'язування інших класів задач НДО (див. §19), а, по-друге, виявилися такими, що практично не поступаються найбільш ефективним методам розв'язування гладких погано обумовлених екстремальних задач.

1. Субградієнтний метод. З методу узагальненого градієнта або субградієнтного методу практично почалась розробка і дослідження методів негладкої оптимізації. Цей метод є аналогом градієнтного методу (див. §28) і був вперше застосований для мінімізації опуклих кусково-лінійних функцій. Потім були досліджені умови його збіжності та побудовані численні модифікації й узагальнення на інші класи негладких функцій, зокрема розглянутих у §19 (див., наприклад, [28], [70], [71], [77], [132] та ін.).

Нехай $f(x)$ – опукла і обмежена знизу на R^n функція. Треба знайти розв'язок задачі

$$f(x) \to \min,\ x \in R^n. \qquad (31.1)$$

Методом узагальненого градієнта або *субградієнтним методом* розв'язування задачі (31.1) називається процедура побудови послідовних наближень $x^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, таких, що $x^{(0)} \in R^n$ – довільне початкове наближення, а точки $x^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, визначаються співвідношенням

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - h_k \gamma_k g^{(k)},\ k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (31.2)$$

де h_k – кроковий множник, γ_k – нормуючий множник, $g^{(k)} \in \partial f(x^{(k)})$ – довільний субградієнт функції $f(x)$ в точці $x^{(k)}$.

У (31.2) напрям руху може бути обраний, взагалі кажучи, так, що вектор $-g^{(k)}$ не буде напрямом спадання функції $f(x)$ в точці $x^{(k)}$. Тобто, на відміну від методу градієнтного спуску (див. §28), за методом (31.2) не відбувається монотонне зменшення значень цільової функції на кожному кроці. У геометричній інтерпретації при відшуканні точки мінімуму субградієнтним методом на k-му кроці у напрямі $-g^{(k)}$ значення функції $f(x)$ не обов'язково спадає, але при певному виборі крокового множника h_k зменшується відстань до точки мінімуму x^*, тобто $\| x^{(k+1)} - x^* \| < \| x^{(k)} - x^* \|$ (рис. 31.1).

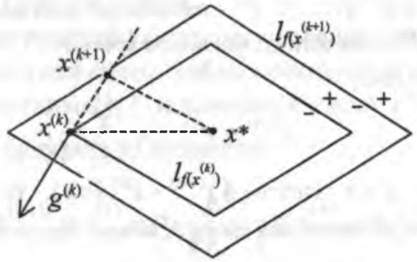


Рис. 31.1.

У роботах [37], [82] було запропоновано «програмне» управління вибором значень крокового множника h_k:

$$h_k \geq 0,\ h_k \to 0,\ \sum_{k=0}^{\infty} h_k = +\infty, \qquad (31.3)$$

причому в (31.2) $\gamma_k > 0$, $\gamma_k \| g^{(k)} \| \leq const$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Ці умови гарантують збіжність послідовності $\{x^{(k)}\}$, що будується за допомогою (31.2), до точки мінімуму $f(x)$ і є цілком природними у даному випадку. Так розбіжність ряду $\sum_{k=0}^{\infty} h_k$ забезпечує повільне зменшення h_k і досяжність точки мінімуму x^* з довільної точки $x^{(0)}$.

Існує кілька варіантів доведення теореми про збіжність субградієнтного методу (31.2), (31.3), які можна знайти, наприклад, в [31], [37], [70], [82], [111].

Т е о р е м а 31.1 [70]. *Нехай $f(x)$ – опукла функція на R^n з обмеженою множиною $X^* = \{x^* \in R^n \mid f(x^*) = f^* = \min_{x \in R^n} f(x)\}$ точок мінімуму, послідовність $\{h_k\}$ задовольняє умову* (31.3), *а нормуючий множник в* (31.2) $\gamma_k = \| g^{(k)} \|^{-1}$. *Тоді для послідовності $\{x^{(k)}\}$, одержаної за співвідношенням* (31.2) *при довільному $x^{(0)} \in R^n$, або знайдеться таке число $\overline{k}$, що $x^{(\overline{k})} \in X^*$, або*

$$\lim_{k\to\infty} \min_{x^* \in X^*} \| x^{(k)} - x^* \| = 0,\ \lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f^*.$$

Наведемо опис схеми алгоритму роботи за субградієнтним методом.

К р о к 0. Задати точність обчислень $\varepsilon > 0$, вибрати довільне початкове наближення $x^{(0)} \in R^n$, послідовність $\{h_k\}$, яка задовольняє умову (31.3), і покласти $k := 0$.

К р о к 1. Знайти довільний субградієнт $g^{(k)} \in \partial f(x^{(k)})$. Якщо $\| g^{(k)} \| = 0$, то $x^{(k)}$ – точний розв'язок задачі (31.1), покласти $x^* := x^{(k)}$, $f^* := f(x^{(k)})$ і перейти до виконання кроку 4.

К р о к 2. Якщо $\| g^{(k)} \| < \varepsilon$, то $x^{(k)}$ – наближений розв'язок задачі (31.1), покласти $x^* := x^{(k)}$, $f^* := f(x^{(k)})$ і перейти до виконання кроку 5.

К р о к 3. Знайти точку

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - h_k \frac{g^{(k)}}{\| g^{(k)} \|}.$$

К р о к 4. Якщо $h_k < \varepsilon$ (тобто $\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| < \varepsilon$), то покласти $x^* := x^{(k+1)}$, $f^* := f(x^{(k+1)})$ і перейти до виконання кроку 5, інакше покласти $k = k+1$ і перейти до виконання кроку 1.

К р о к 5. Вивести: x^*, f^*, k.

Кінець.

Якщо послідовність $\{h_k\}$ крім умови (31.3) задовольняє також умову

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k^2 = c < +\infty, \qquad (31.4)$$

то для субградієнтного методу можна показати (див., наприклад, [31]), що послідовність $\{x^{(k)}\}$ збігається до розв'язку $x^* \in X^*$ без припущення про обмеженість множини X^*. Тобто має місце теорема

Т е о р е м а 31.2. *Якщо множина X^* непорожня, то послідовність $\{x^{(k)}\}$, яка генерується за субградієнтним методом* (31.2), (31.3), (31.4), *збігається до однієї з точок $x^* \in X^*$.*

Прикладом послідовності $\{h_k\}$, яка задовольняє умови (31.3) і (31.4), є послідовність $\{c(k+1)^{-\alpha}\}$, де $c > 0$ – деяка константа, $\alpha \in (2^{-1}; 1]$.

Субградієнтний метод можна застосовувати і з постійним кроком, тобто використовувати (31.2) при $h_k = h > 0$ для будь-якого $k = 0, 1, \ldots$. Тоді буде побудована послідовність $\{x^{(k)}\}$ така, що коли вона скінченна, тобто для деякого k^* буде $\| g^{(k^*)} \| = 0$, то остання одержана точка $x^{(k^*)}$ є точкою мінімуму функції $f(x)$, а якщо вона нескінченна, то має місце теорема (див., наприклад, [70]).

Т е о р е м а 31.3. *Нехай $f(x)$ – опукла функція з непорожньою множиною точок мінімуму X^*. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ і $x^* \in X^*$ знайдуться число $k = k^*$ і точка $\overline{x}$, що при застосуванні субградієнтного методу* (31.2) *з постійним кроком $h_k = h > 0$ буде виконуватись умова $f(\overline{x}) = f(x_{k^*})$, при цьому $\| \overline{x} - x^* \| < \dfrac{h(1+\varepsilon)}{2}$.*

2. Субградієнтний метод з регулюванням кроку. Як вже відмічалось, істотним недоліком субградієнтних методів є їх повільна збіжність. Для подолання цього недоліку пропонуються різноманітні способи, один з яких полягає в регулюванні зміною крокового множника h_k в (31.2) без порушення умови (31.3).

Розглянемо два правила такого регулювання (див., наприклад, [31]), які роблять субградієнтний метод майже монотонним методом.

Нехай послідовність $\{h_k\}$ задовольняє умову (31.3). Послідовність точок $\{x^{(k)}\}$ будемо будувати за правилом:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k \frac{g^{(k)}}{\| g^{(k)} \|} \equiv x^{(k)} + \alpha_k v^{(k)}, \qquad (31.5)$$

де $\alpha_k \in [\beta h_k; \gamma h_k]$, $\beta > 0$, $\gamma > \beta$ – деякі фіксовані числа, $g^{(k)} \in \partial f(x^{(k)})$, $v^{(k)} = -g^{(k)} \| g^{(k)} \|^{-1}$.

Правила вибору α_k з відрізку $[\beta h_k; \gamma h_k]$ можуть бути такими:

$$1)\ f(x^{(k)}+\alpha_k v^{(k)}) = \min_{\alpha\in[\beta h_k;\gamma h_k]} f(x^{(k)}+\alpha v^{(k)}), \tag{31.6}$$

$$2)\ f(x^{(k)}+\alpha_k v^{(k)}) = \min_{i=1,m} f(x^{(k)}+t_{ik} v^{(k)}), \tag{31.7}$$

де $t_{ik}=\beta_i h_k$, $\beta<\beta_1$, $\beta_2=2\beta_1$, ..., $\beta_i=2^{i-1}\beta_1$, ..., $\beta_m=2^{m-1}\beta_1\le\gamma$, при цьому m – деяке фіксоване натуральне число.

Зауважимо, що якщо взяти число β досить малим, а γ досить великим, наприклад: $\beta=10^{-10}$, $\gamma=10^{10}$, то при використанні правил (31.6), (31.7) субградієнтний метод стає майже монотонним методом.

Збіжність методів (31.5), (31.6) і (31.5), (31.7) при цьому зберігається, оскільки послідовність $\{\alpha_k\}$ задовольняє умову

$$\alpha_k \to 0,\ \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k = +\infty.$$

3. ε_k -субградієнтний метод. У розглянутих субградієнтних методах передбачалось, що субградієнти цільової функції обчислювались точно. Однак при реалізації цих методів на комп'ютері така можливість практично відсутня. Крім того, для обчислення субградієнтів деяких функцій може знадобитися нескінченний ітераційний процес. Прикладом такої функції є функція $f(x)=\max_{y\in Y}\varphi(x,y)$, де Y – опукла множина, $\varphi(x,y)$ – опукла за x функція при будь-якому фіксованому $y\in Y$. Тому важливо мати методи, в яких субградієнти можна знаходити наближено, тобто замість субградієнтів використовувати ε-субградієнти.

Розглянемо метод послідовних наближень, в якому на кожному кроці для вибору напряму руху в поточній точці використовуються ε_k -субградієнти ($\varepsilon_k\to 0$ при $k\to\infty$).

Спочатку обирають довільну точку $x^{(0)}\in R^n$, послідовність $\{h_k\}$, яка задовольняє умови (31.3), послідовність $\{\varepsilon_k\}$ таку, що $\varepsilon_k\to 0$ при $k\to\infty$, і число $\varepsilon>0$ – точність розв'язку.

Нехай вже знайдена точка $x^{(k)}\in R^n$. Далі обирають довільний вектор $g^{(k)}\in\partial_{\varepsilon_k} f(x^{(k)})$, де

$$\partial_{\varepsilon_k} f(x^{(k)}) = \{g\in R^n \mid f(x)-f(x^{(k)}) \ge \langle g, x-x^{(k)}\rangle - \varepsilon_k\ \ \forall x\in R^n\} -$$

ε_k -субдиференціал функції $f(x)$ в точці $x^{(k)}$.

Якщо $\| g^{(k)} \|=0$, то $O_n\in\partial_{\varepsilon_k} f(x^{(k)})$ і точка $x^{(k)}$ є ε_k -стаціонарною, тобто

$$0\le f(x^{(k)}) - f^* \le \varepsilon_k. \tag{31.8}$$

Якщо $\varepsilon_k<\varepsilon$, то процес завершується і за наближений розв'язок приймається точка $x^{(k)}$, інакше треба знайти точку

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - h_k \frac{g^{(k)}}{\| g^{(k)} \|}.$$

Якщо $h_k<\varepsilon$, то процес завершується, оскільки $\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| < \varepsilon$, в протилежному випадку процес продовжується при $k=k+1$.

В [31] доведено теорему про збіжність послідовних наближень за ε_k -субградієнтним методом.

Теорема 31.4. *Якщо множина X^* непорожня і обмежена, то для послідовності $\{x^{(k)}\}$, яка генерується за ε_k -субградієнтним методом, при $k\to\infty$*

$$\rho(x^{(k)}, X^*) \to 0\ \ i\ \ f(x^{(k)}) \to f^*.$$

Зауваження. В описаному методі для будь-якого $k=0,1,\ldots$ можна покласти $\varepsilon_k=\varepsilon>0$, тоді буде одержано ε-субградієнтний метод, який за умови, що X^* – непорожня і обмежена, збігається до множини ε-стаціонарних точок функції $f(x)$.

Запитання для самоконтролю

1. Чому виникла необхідність у розробці методів негладкої оптимізації і як вони розвивались?
2. У чому полягає сутність субградієнтних методів?
3. За яких умов послідовні наближення за методом субградієнтів збігаються до розв'язку задачі безумовної мінімізації?
4. Які правила вибору крокового множника використовуються в субградієнтних методах?
5. У чому полягає сутність ε_k -субградієнтного методу?
6. За яких умов послідовні наближення за ε_k -субградієнтним методом збігаються до розв'язку задачі безумовної мінімізації?

Вправи для самостійного виконання

1. Довести теореми 31.1-31.4.
2. Показати, що послідовність $\{c(k+1)^{-\alpha}\}$, де $c>0$ – деяка константа, $\alpha\in(2^{-1};1]$, задовольняє умови (31.3), (31.4).
3. Показати, що послідовності $\{\alpha_k\}$, які визначаються за умовами (31.6) і (31.7), задовольняють умову (31.3).
4. На основі схеми алгоритму роботи за субградієнтним методом (31.2)-(31.4), скласти схеми алгоритмів роботи за субградієнтними методами з регулюванням кроку (31.5), (31.6) і (31.5), (31.7), та описати відповідні програми для комп'ютера однією з мов програмування.
5. За допомогою розроблених у завданні 4 програм для комп'ютера знайти наближений розв'язок задачі мінімізації функції $f(x)$ з точністю $\varepsilon=10^{-4}$, $\varepsilon=10^{-8}$, по-

чинаючи ітераційний процес з точки $x^{(0)}$ і закінчуючи його при виконанні умови $\| g^{(k)} \| < \varepsilon$, де $g^{(k)} \in \partial f(x^{(k)})$, або умови $h_k < \varepsilon$, при цьому за послідовність $\{h_k\}$ можна взяти $\{(k+1)^{-1}\}$:

1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 5(|x_1| + |x_2|) - 7$, $\quad x^{(0)} = (1, 1)$;

2) $f(x_1, x_2) = \max\{x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2;\ 2x_1 + 3x_2\}$, $\quad x^{(0)} = (2, 2)$;

3) $f(x_1, x_2) = \max\{|x_1 + x_2|;\ |x_1| + |x_2|\}$, $\quad x^{(0)} = (3, 3)$;

4) $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 + 4|x_1| + 6|x_2| + 5$, $\quad x^{(0)} = (-1, -1)$;

5) $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 + 5\sin(x_1 + x_2) + |x_1 + x_2|$, $\quad x^{(0)} = (1, 1)$.

6. Провести чисельний експеримент з метою дослідження ефективності субградієнтних методів на тестових задачах із завдання 16 §28. Наближені розв'язки шукати з точністю $\varepsilon = 10^{-4}, \varepsilon = 10^{-8}$. При цьому для кожного методу визначити такі параметри: N_k – кількість кроків, N_f – кількість обчислень значень цільової функції $f(x)$ (враховуючи кількість обчислень при розв'язуванні допоміжних задач), N_g – кількість обчислень субградієнта функції $f(x)$, $\delta = \|x^* - \bar{x}\|$, де x^* – точний розв'язок задачі, $\bar{x}$ – наближений розв'язок задачі. Одержані результати оформити у вигляді таблиці:

№	Метод	$\varepsilon = 10^{-4}$				$\varepsilon = 10^{-8}$			
		N_k	N_f	N_g	δ	N_k	N_f	N_g	δ
1.	СМ								
2.	СМРК1								
3.	СМРК2								

Примітка. СМ – субградієнтний метод (31.2)-(31.4), СМРК1 – субградієнтний метод з регулюванням кроку (31.5), (31.6), СМРК2 – субградієнтний метод з регулюванням кроку (31.5), (31.7).

Результати чисельного експерименту порівняти з результатами, які одержані за допомогою градієнтних методів (див. завдання 16 §28), методів Ньютона (див. завдання 12 §29) і методу спряжених градієнтів (див. завдання 5 §30).

7. За допомогою субградієнтних методів СМ, СМРК1 і СМРК2 знайти наближений розв'язок задач мінімізації функцій, які часто використовуються для тестування чисельних методів негладкої мінімізації:

1) $f(x) = \sum_{i=1}^{n} i^2 |x_i|$, де $x^{(0)} = (1, 1, ..., 1)$, $x^* = (0, 0, ..., 0)$, $f(x^*) = 0$, при цьому обчислення робити для $n = 10$ і $n = 32$;

2) $f(x) = \max_{i=\overline{1,m}} \varphi_i(x)$, де $\varphi_i(x) = A_i \sum_{j=1}^{n} (x_j + a_{ij})^2$, $i = \overline{1,m}$, $n = 5$, $m = 10$,

$$(A_i)_{i=1}^{10} = (1;\ 5;\ 10;\ 2;\ 4;\ 3;\ 1{,}7;\ 2{,}5;\ 6;\ 3{,}5),\ (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$x^{(0)} = (0, 0, 0, 0, 1)$, при цьому задана функція є опуклою з двовимірним яром і $x^* \approx (1{,}12434;\ 0{,}97945;\ 1{,}47770;\ 0{,}92029;\ 1{,}12429)$, $f(x^*) \approx 22{,}60016$.

§32. Монотонні ε-субградієнтні методи

Нехай функція $f(x)$ – опукла на R^n. У §18 відмічалось, що ε-субдиференціал опуклої функції має більш широкі, у порівнянні з субдиференціалом, аналітичні властивості. Зокрема, якщо в точці $x^{(0)} \in R^n$ існує вектор $\nu^{(0)}$, для якого виконується умова

$$\frac{\partial_\varepsilon f(x^{(0)})}{\partial \nu^{(0)}} = \max_{g \in \partial_\varepsilon f(x^{(0)})} \langle \nu^{(0)}, g \rangle < 0, \tag{32.1}$$

то в напрямі $\nu^{(0)}$ функція може бути зменшена не менше, ніж на ε ($\varepsilon > 0$), тобто існує таке $h_0 > 0$, що

$$f(x^{(0)}) - f(x^{(0)} + h_0 \nu^{(0)}) > \varepsilon,$$

або

$$f(x^{(0)} + h_0 \nu^{(0)}) < f(x^{(0)}) - \varepsilon. \tag{32.2}$$

Як показано в [31], таку властивість має, наприклад, вектор

$$\nu^{(0)} = -\frac{g^{(0)}}{\| g^{(0)} \|}, \tag{32.3}$$

де $g^{(0)} \in \partial_\varepsilon f(x^{(0)})$ і

$$\| g^{(0)} \| = \min_{g \in \partial_\varepsilon f(x^{(0)})} \| g \|. \tag{32.4}$$

При цьому $\nu^{(0)}$, який задовольняє умови (32.3), (32.4), є напрямом ε-*найшвидшого спуску* в точці $x^{(0)} \in R^n$, тобто

$$\frac{\partial_\varepsilon f(x^{(0)})}{\partial \nu^{(0)}} = \max_{\|\nu\|=1} \frac{\partial_\varepsilon f(x^{(0)})}{\partial \nu} < 0. \tag{32.5}$$

Можна показати, що вектор $\nu^{(0)}$ єдиний.

Розглянемо монотонний метод для розв'язування задачі негладкої опуклої мінімізації, який за своєю ідеєю нагадує градієнтний метод найшвидшого спуску (див. §28) і в результаті застосування якого буде одержана ε-стаціонарна точка.

1. Метод ε-найшвидшого спуску. Будемо розв'язувати задачу мінімізації опуклої обмеженої знизу функції $f(x)$ на R^n. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ – точність розв'язування поставленої задачі і візьмемо довільне початкове наближення $x^{(0)} \in R^n$.

Нехай вже одержана точка $x^{(k)} \in R^n$. Знайдемо вектор $g^{(k)} \in \partial_\varepsilon f(x^{(k)})$ такий, що

$$\| g^{(k)} \| = \min_{g \in \partial_\varepsilon f(x^{(k)})} \| g \|. \tag{32.6}$$

Якщо $\| g^{(k)} \| = 0$, то $O_n \in \partial_\varepsilon f(x^{(k)})$ і точка $x^{(k)}$ є ε-стаціонарною точкою $f(x)$ на R^n (див. (31.8)), а отже задача розв'язана з точністю ε.

Якщо ж $O_n \notin \partial_\varepsilon f(x^{(k)})$, то покладемо $v^{(k)} = -g^{(k)} \| g^{(k)} \|^{-1}$, тобто $v^{(k)}$ – напрям ε-найшвидшого спуску в точці $x^{(k)}$.

Визначимо точку

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h_k v^{(k)}, \tag{32.7}$$

таку, що кроковий множник h_k задовольняє умову

$$f(x^{(k)} + h_k v^{(k)}) = \min_{h>0} f(x^{(k)} + h v^{(k)}). \tag{32.8}$$

В силу (32.1) – (32.4) така точка обов'язково знайдеться, при цьому

$$f(x^{(k+1)}) \le f(x^{(k)}) - \varepsilon. \tag{32.9}$$

Далі процес продовжується з точки $x^{(k+1)}$.

Оскільки функція $f(x)$ обмежена знизу на R^n, то ітераційний процес (32.7), (32.8) з урахуванням (32.9) завершиться за скінченну кількість кроків і тоді буде одержана ε-стаціонарна точка функції $f(x)$ на R^n. Описаний метод називається *методом ε-найшвидшого спуску.*

2. Методи ε_k-найшвидшого спуску. Розглянемо ітераційний процес, в основі якого лежить подвійний цикл. У внутрішньому циклі (верхній індекс) відбувається пошук такого ε_k, для якого поточна точка $x_k^{(j)}$ є ε_k-стаціонарною. Далі виконується крок зовнішнього циклу (нижній індекс), як і в методі ε-найшвидшого спуску при $\varepsilon = \varepsilon_{k+1}$.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ – досить мале число, $\varepsilon_0 > \varepsilon$, $\lambda \in (0;1)$, і візьмемо довільне початкове наближення $x_0^{(0)} \in R^n$. Опишемо один крок внутрішнього циклу.

Нехай вже знайдена точка $x_k^{(j)}$ при деяких значеннях $k \ge 0$, $j \ge 0$ і $\varepsilon_k > 0$.

Знайдемо вектор $g_k^{(j)} \in \partial_{\varepsilon_k} f(x_k^{(j)})$ такий, що $\| g_k^{(j)} \| = \min\limits_{g \in \partial_{\varepsilon_k} f(x_k^{(j)})} \| g \|$.

Якщо $\| g_k^{(j)} \| \ne 0$, то $O_n \notin \partial_{\varepsilon_k} f(x_k^{(j)})$ і точка $x_k^{(j)}$ не є ε_k-стаціонарною. Покладемо

$$v_k^{(j)} = -g_k^{(j)} \| g_k^{(j)} \|^{-1}$$

і знайдемо точку

$$x_k^{(j+1)} = x_k^{(j)} + h_k^{(j)} v_k^{(j)} \tag{32.10}$$

таку, що

$$f(x_k^{(j+1)}) = \min_{h>0} f(x_k^{(j)} + h v_k^{(j)}),$$

при цьому

$$f(x_k^{(j+1)}) \le f(x_k^{(j)}) - \varepsilon_k.$$

Далі продовжується внутрішній цикл при $j = j+1$.

Якщо $\| g_k^{(j)} \| = 0$, то $O_n \in \partial_{\varepsilon_k} f(x_k^{(j)})$, і точка $x_k^{(j)}$ є ε_k-стаціонарною точкою функції $f(x)$. На цьому зовнішній цикл за k завершується, знаходиться $\varepsilon_{k+1} = \lambda \varepsilon_k$, де $0 < \lambda < 1$, і покладається $x_{k+1}^{(0)} = x_k^{(j)}$. У наступному внутрішньому циклі відбувається пошук ε_{k+1}-стаціонарної точки і т.д.

Оскільки функція $f(x)$ обмежена знизу за припущенням, то через скінченну кількість кроків j_k ($j_k \ge 0$) внутрішній цикл завершиться при будь-якому фіксованому $k \ge 0$.

В результаті роботи за цим методом буде побудована послідовність $\{x_k^{(0)}\}$, кожна точка якої є ε_{k-1}-стаціонарною ($k \ge 1$) точкою функції $f(x)$ на R^n.

Т е о р е м а 32.1. *Якщо функція $f(x)$ опукла і обмежена знизу на R^n ($f^* > -\infty$), а послідовність $\{\varepsilon_k\}$ така, що $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, то послідовність $\{x_k^{(0)}\}$, яка генерується за методом ε_k-найшвидшого спуску, збігається до $f^* = \min\limits_{x \in R^n} f(x)$, тобто*

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k^{(0)}) = f^*. \tag{32.11}$$

Якщо ж множина $D(x_0^{(0)}) = \{x \in R^n \mid f(x) \le f(x_0^{(0)})\}$ обмежена, то будь-яка гранична точка послідовності $\{x_k^{(0)}\}$ є точкою мінімуму $f(x)$ на R^n.

Д о в е д е н н я. Оскільки для $\forall k$ $x_k^{(0)}$ є ε_{k-1}-стаціонарною точкою функції $f(x)$ на R^n, то $0 \le f(x_k^{(0)}) - f^* \le \varepsilon_{k-1}$.

Звідси і з того, що $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$ і випливає (32.11).

Якщо множина $D(x_0^{(0)})$ обмежена і $x_k^{(0)} \in D(x_0^{(0)})$ для будь-якого k, то послідовність $\{x_k^{(0)}\}$ має граничні точки. Нехай $x_k^{(0)} \to x^*$. Тоді в силу (32.11) і неперервності опуклої функції $f(x)$ на R^n

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k^{(0)}) = f(x^*) = f^*.$$

Що й треба було довести.

Розглянемо ще один варіант методу ε_k-найшвидшого спуску, який має геометричну швидкість збіжності за значеннями функції $f(x)$. В основі цього методу також лежить подвійний цикл, при цьому на відміну від попереднього методу у внутрішньому циклі при фіксованому k відбувається добір такого значення $\varepsilon = \varepsilon_k^{(j)}$ $j \ge 0$, для якого $x_k^{(j)}$ буде ε-стаціонарною точкою. Після чого робиться перехід до наступного кроку зовнішнього циклу при $k = k+1$ і пошук наступної точки x_{k+1} за методом ε-найшвидшого спуску.

Нехай за методом ε-найшвидшого спуску знайдена деяка точка x_0 така, що при $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ $O_n \notin \partial f(x_0)$ і $O_n \in \partial_{\varepsilon_0} f(x_0)$, тобто x_0 – деяка ε_0 – стаціонарна (але не екстремальна точка), при цьому

$$f(x_0) - f^* \le \varepsilon_0.$$

Опишемо спочатку внутрішній цикл, який полягає в знаходженні такого $\varepsilon_0^{(j_0)}$, для якого точка x_0 не є $\varepsilon_0^{(j_0)}$ – стаціонарною. Покладемо $\varepsilon_0^{(1)} = 2^{-1}\varepsilon_0^{(0)}$, де $\varepsilon_0^{(0)} = \varepsilon_0$.

Знайдемо $g_0^{(1)} \in \partial_{\varepsilon_0} f(x_0)$ такий, що $\| g_0^{(1)} \| = \min\limits_{g \in \partial_{\varepsilon_0^{(1)}} f(x_0)} \| g \|$.

Якщо $\| g_0^{(1)} \| = 0$, то зменшуємо параметр $\varepsilon_0^{(j)}$ доти, поки при деякому j_0 і $\varepsilon_1 = \varepsilon_0^{(j_0)} = 2^{-j_0}\varepsilon_0 \le 2^{-1}\varepsilon_0$ стане $\| g_0^{(j_0)} \| = \min\limits_{g \in \partial_{\varepsilon_1} f(x_0)} \| g \| \ne 0$. При цьому

$$O_n \in \partial_{2\varepsilon_1} f(x_0) \text{ і } f(x_0) - f^* \le 2\varepsilon_1. \qquad (32.12)$$

На цьому внутрішній цикл завершується. Крок зовнішнього циклу полягає в знаходженні точки $x_1 = x_0 + h_0 v_0$, такої, що

$$f(x_1) = \min_{h>0} f(x_0 + h v_0),$$

де $v_0 = -\dfrac{g_0^{(j_0)}}{\| g_0^{(j_0)} \|}$, при цьому

$$f(x_1) < f(x_0) - \varepsilon_1.$$

Звідси, з урахуванням (32.11), маємо

$$f(x_1) < f^* + 2\varepsilon_1 - \varepsilon_1 = f^* + \varepsilon_1,$$

тобто точка x_1 є ε_1-стаціонарною і $O_n \in \partial_{\varepsilon_1} f(x_1)$.

Продовжуючи аналогічно, через k зовнішніх ітерацій буде одержано набір точок $x_1, x_2, ..., x_k$ такий, що або $O_n \in \partial f(x_k)$ і x_k – точка мінімуму функції $f(x)$ на R^n, або кожна його точка є ε_i-стаціонарною точкою функції $f(x)$ на R^n, де $\varepsilon_i = 2^{-j_{i-1}}\varepsilon_{i-1}$,

$$0 \le f(x_i) - f^* \le 2^{-j_{i-1}}\varepsilon_{i-1} \le 2^{-i}\varepsilon_0 \qquad (32.13)$$

для будь-якого $i = \overline{1,k}$.

Для описаного методу має місце наступна теорема.

Т е о р е м а 32.2. *Якщо $f(x)$ – опукла і обмежена знизу на R^n ($f^* > -\infty$), то для описаного методу*

$$f(x_k) \to f^* \text{ при } k \to \infty$$

з геометричною швидкістю.

Якщо множина $D(x_0)$ обмежена, то будь-яка гранична точка послідовності $\{x_k\}$ є точкою мінімуму $f(x)$ на R^n.

Доведення цієї теореми аналогічне до доведення теореми 32.1, а нерівність (32.13) означає, що послідовність $\{f(x_k)\}$ збігається до f^* з геометричною швидкістю.

3. Розглянуті в цьому параграфі методи типу ε_k-найшвидшого спуску мають, головним чином, теоретичний інтерес, оскільки фактично на кожному кроці необхідно розв'язувати досить складну задачу знаходження елемента мінімальної норми на множині $\partial_\varepsilon f(x)$ ($\varepsilon > 0$), тобто задачу

$$\| g^* \| = \min_{g \in \partial_\varepsilon f(x)} \| g \|, \qquad (32.14)$$

при цьому необхідно знати всю відповідну множину $\partial_\varepsilon f(x)$. До того ж, клас функцій, для яких можна ефективно обчислювати ε-субдиференціали, не досить широкий. Крім того, в цих методах необхідно розв'язувати задачу одновимірної мінімізації на промені, що також вимагає певних обчислювальних витрат.

Можна запропонувати деякі модифікації розглянутих методів, які дозволяють дещо спростити процедури пошуку напряму спуску і замість задачі одновимірної мінімізації розв'язувати дещо простішу задачу.

Так при побудові послідовності $\{x_k\}$ за співвідношенням

$$x_{k+1} = x_k + h_k v_k \qquad (32.15)$$

за напрям спуску можна брати вектор $v_k = -\dfrac{g_k}{\| g_k \|}$, де $g_k \in \partial_{\varepsilon_k} f(x_k)$, такий, що $\| g_k \| \ne 0$ і

$$\langle g, g_k \rangle \ge \lambda \langle g_k, g_k \rangle \ \ \forall g \in \partial_{\varepsilon_k} f(x_k), \qquad (32.16)$$

де $\lambda \in (0;1]$, при цьому можна показати, що

$$\frac{\partial_{\varepsilon_k} f(x_k)}{\partial v_k} < 0, \qquad (32.17)$$

тобто вектор $v^{(k)}$ є напрямом спадання функції $f(x)$ в точці $x^{(k)}$, при цьому (див. (32.1), (32.2)) існує таке $\overline{h} > 0$, що має місце нерівність

$$f(x^{(k)} + \overline{h} v^{(k)}) < f(x^{(k)}) - \varepsilon_k. \qquad (32.18)$$

Замість пошуку крокового множника h_k в (32.15) за правилом

$$f(x_{k+1}) = f(x_k + h_k v_k) = \min_{h>0} f(x_k + h v_k)$$

можна шукати таке h_k, що точка x_{k+1} задовольняє умову $f(x_{k+1}) \le f(x_k) - \varepsilon$ (така точка обов'язково знайдеться в силу (32.17)).

При цьому твердження теорем 32.1 і 32.2 залишаються правильними.

З а у в а ж е н н я.

1. Якщо замість напряму v_k, що задовольняє умову (32.17), брати напрям w_k, для якого $\frac{\partial f(x_k)}{\partial w_k}<0$, то описані методи можуть не збігатися до розв'язку задачі мінімізації $f(x)$ на R^n. Це пов'язано з тим, що в останньому випадку немає оцінки типу $\inf_{h>0} f(x_k+hw_k)<f(x_k)-\varepsilon$, яка гарантує спадання функції в напрямі w_k.

2. Використання вектора v_k, який задовольняє умову (32.17) при виборі напряму спуску вимагає побудови ефективної процедури для перевірки включення виду $O_n\in\partial_{\varepsilon_n} f(x_n)$, що проблематично без розв'язування задачі типу (32.14).

3. Якщо функція $f(x)$ необмежена знизу ($f^*=-\infty$), то в процесі роботи з методами типу ε_k - найшвидшого спуску це обов'язково з'ясується.

Запитання для самоконтролю

1. Які чисельні методи оптимізації називаються монотонними?
2. Чим обумовлена можливість побудови монотонних ε-субградієнтних методів?
3. Який напрям називається напрямом ε-найшвидшого спуску?
4. У чому полягає сутність монотонних ε-субградієнтних методів?
5. У чому полягає сутність методу ε_k-найшвидшого спуску?
6. Які переваги і недоліки у порівнянні з субградієнтними методами мають монотонні ε-субградієнтні методи?

Вправи для самостійного виконання

1. Довести теорему 32.2.

2. Показати, що для вектора $v^{(0)}=-g^{(0)}\|g^{(0)}\|^{-1}$, де $g^{(0)}\in\partial_\varepsilon f(x^{(0)})$, $\varepsilon>0$, $\|g^{(0)}\|\neq 0$ і $\|g^{(0)}\|=\min_{g\in\partial_\varepsilon f(x^{(0)})}\|g\|$, існує таке $h_0>0$, що

$$f(x^{(0)})-f(x^{(0)}+h_0v^{(0)})>\varepsilon.$$

3. Показати, що для вектора $v^{(0)}$ такого, що $\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial v^{(0)}}<0$, не існує $h_0>0$, для якого має місце нерівність

$$f(x^{(0)})-f(x^{(0)}+h_0v^{(0)})>\varepsilon,$$

де $\varepsilon>0$.

4. Показати, що для вектора $v^{(0)}=-g^{(0)}\|g^{(0)}\|^{-1}$, де $g^{(0)}\in\partial_\varepsilon f(x^{(0)})$, $\varepsilon>0$, такий, що $\|g^{(0)}\|\neq 0$ і $\langle g,g^{(0)}\rangle\geq\lambda\langle g^{(0)},g^{(0)}\rangle$ $\forall g\in\partial_\varepsilon f(x^{(0)})$, $\lambda\in(0;1]$, має місце нерівність

$$\frac{\partial_\varepsilon f(x^{(0)})}{\partial v^{(0)}}<0.$$

§33. Методи з усередненням ε-субградієнтів

Як відмічалось у §31, один з підходів до розробки методів опуклої оптимізації ґрунтується на ідеї поєднання переваг немонотонних субградієнтних методів і монотонних ε-субградієнтних методів. У таких методах напрям руху в поточній точці визначається як результат операції усереднення скінченної кількості субградієнтів (ε-субградієнтів), обчислених на попередніх ітераціях або (і) у деякому околі поточного наближення.

Для гладких функцій така процедура є досить ефективною, про що свідчить метод спряжених градієнтів (див. §30), який можна вважати методом усереднення градієнтів (див., наприклад, [31], [71]).

Теоретичні і практичні дослідження показали, що процедура усереднення при визначенні напряму руху і для негладких функцій дозволяє зробити пошук екстремальних точок більш регулярним і ефективним. Це пов'язано з тим, що для гладких функцій градієнти у близьких точках не дуже відрізняються один від одного в силу неперервної диференційовності цільової функції, а для негладких опуклих функцій за одним субградієнтом (ε-субградієнтом) в точці важко судити про весь субдиференціал (ε-субдиференціал) у цій точці. Тому дані про субградієнти (ε-субградієнти) також і у кількох близьких точках можуть бути використані для наближеного визначення субдиференціалу (ε-субдиференціалу) цільової функції, а, отже, і напряму спуску. Зокрема, при мінімізації функцій яристого типу усереднений напрям, як правило, вказує напрям вздовж яру поверхонь (ліній) рівня цільової функції.

Для регулювання довжини кроків у методах з усередненням використовують різні адаптаційні правила, в яких при невдалому напрямі крок визначається за правилами немонотонних субградієнтних методів (§31), а при вдалому напрямі (наприклад, напрямі спуску) крок визначається як у монотонних ε-субградієнтних методах (§32).

У цьому параграфі розглядаються загальні схеми методів з усередненням ε-субградієнтів для мінімізації негладких опуклих функцій, а також деякі їх конкретні реалізації, які можна використовувати для розв'язування й інших класів задач негладкої оптимізації (див., наприклад, [31], [42], [71], [109]).

1. Метод з усередненням ε_k-субградієнтів, обчислених в околі поточного наближення. Нехай в евклідовому просторі R^n розглядається задача

$$f(x)\to\min,\ x\in R^n, \tag{33.1}$$

де $f(x)$ – опукла і обмежена знизу на R^n функція.

Основу методу з усередненням ε_k - субградієнтів, обчислених в околі поточного наближення, для розв'язування задачі (33.1) складає подвійний цикл: зовнішній цикл (нижній індекс) використовується для побудови мінімізуючої послідовності $\{x_k^{(0)}\}$, $k=0,1,...$, а внутрішній цикл (верхній індекс) – для знаходження напряму руху, який є результатом деякої операції усереднення скінченної кількості ε_k - субградієнтів, знайдених у поточній точці $x_k^{(0)}$ і кількох точках $x_k^{(j)}$, $j=1,2,...,m_k$, з околу точки $x_k^{(0)}$, де m_k вказує на кількість ε_k - субградієнтів, що усереднюються на k-му кроці ітераційного процесу.

За методом генерується послідовність точок згідно з правилами:

$x_0^{(0)} \in R^n$ – довільне початкове наближення;

$$x_k^{(j+1)} = x_k^{(0)} - h_k^{(j)} \tilde{\gamma}_k^{(j)} \tilde{g}_k^{(j)}, \ j=\overline{0,m_k}, \tag{33.2}$$

$$x_{k+1}^{(0)} = x_k^{(m_k)} = x_k^{(0)} - h_k^{(m_k)} \tilde{\gamma}_k^{(m_k)} \tilde{g}_k^{(m_k)}, \ \ k=0,1,..., \tag{33.3}$$

де $h_k^{(j)} > 0$ – регульований кроковий множник, $j=\overline{0,m_k}$,

$$\tilde{g}_k^{(j)} = \sum_{i=0}^{j} \lambda_k^{(i)} g_k^{(i)} \ - \tag{33.4}$$

усереднений вектор такий, що $g_k^{(i)} \in \partial_{\varepsilon_k} f(x_k^{(i)})$, $i=\overline{0,j}$, $j=\overline{0,m_k}$, $k=0,1,...$,

$$\varepsilon_k > 0, \ \varepsilon_k \to 0 \ \text{при} \ k \to +\infty, \tag{33.5}$$

$\lambda_k^{(i)}$, $i=\overline{0,j}$, – регульовані множники усереднення такі, що

$$\lambda_k^{(i)} \in [0;\Lambda], \ i=\overline{0,j}, \ 0<\Lambda<+\infty, \ \sigma_k^{(j)} = \sum_{i=0}^{j} \lambda_k^{(i)} > 0, \ j=\overline{0,m_k}, \tag{33.6}$$

$\tilde{\gamma}_k^{(j)}$ – регульований нормуючий множник такий, що

$$\tilde{\gamma}_k^{(j)} = (\sigma_k^{(j)})^{-1} \gamma_k^{(j)}, \ 0<\gamma \le \gamma_k^{(j)} \le \Gamma < +\infty, \ j=\overline{0,m_k}, \ k=0,1,..., \tag{33.7}$$

$m_k \ge 0$ – параметр, який вказує на кількість ε_k - субградієнтів, що усереднюються на k-му кроці. При цьому будемо вважати

$$0 \le m_k \le m < +\infty \tag{33.8}$$

для будь-якого $k=0,1,...$, де m – максимальна кількість ε_k - субградієнтів, яку доцільно усереднювати при розв'язуванні поставленої задачі.

Зауважимо, що при $m_k=0$ для будь-якого $k=0,1,...$ (усереднення відсутнє), метод (33.2)-(33.8) перетворюється в ε_k - субградієнтний метод (див. §31), а при $\varepsilon_k=0, k=0,1,...$, у звичайний субградієнтний метод (35.2).

Надалі внутрішній цикл k-ї зовнішньої ітерації, для якої $m_k=m$, будемо називати *повним*.

На рис. 33.1 і 33.2 подано геометричну інтерпретацію одного кроку методу (33.2)-(33.8), коли $\varepsilon_0=0, m_0=1$, і

$$x_0^{(1)} = x_0^{(0)} - h_0^{(0)} \gamma_0^{(0)} g_0^{(0)},$$

де $h_0^{(0)} > 0$, $\gamma_0^{(0)} = 1$, $g_0^{(0)} \in \partial f(x_0^{(0)})$,

$$x_1^{(0)} = x_0^{(0)} - h_0^{(1)} \gamma_0^{(1)} \tilde{g}_0^{(1)},$$

де $\quad h_0^{(1)} = \arg\min\limits_{h>0} f(x_0^{(0)} - h\gamma_0^{(1)} \tilde{g}_0^{(1)})$, $\quad \tilde{g}_0^{(1)} = \lambda_0^{(0)} g_0^{(0)} + \lambda_0^{(1)} g_0^{(1)}$, $\quad g_0^{(1)} \in \partial f(x_0^{(1)})$,

$\lambda_0^{(0)} = \lambda_0^{(1)} = 1$, $\gamma_0^{(1)} = 1$. При цьому на рис. 33.1 цільова функція $f(x)$ опукла і диференційовна на R^n, а її субдиференціал $\partial f(x) = \{f'(x)\}$ $\forall x \in R^2$ (див. теорему 16.5). На рис. 33.2 показано випадок, коли цільова функція $f(x)$ опукла і не всюди диференційована на R^n. При цьому вектор $-g_0^{(0)}$ не є напрямом спуску, де $g_0^{(0)} \in \partial f(x_0^{(0)})$.

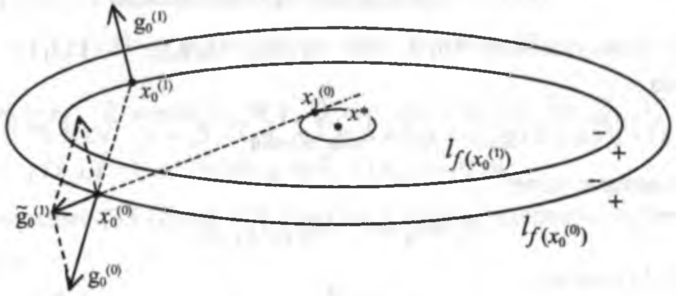


Рис. 33.1.

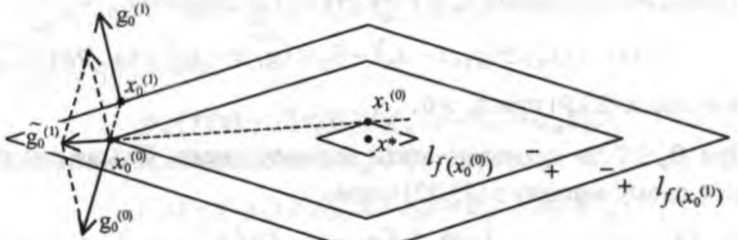


Рис. 33.2.

З рис. 33.1 і рис. 33.2 видно, що напрям руху, зворотній до усередненого вектора $\tilde{g}_0^{(1)}$, є напрямом вздовж яру лінії рівня цільової функції.

Перед тим як розглянути умови збіжності методу (33.2)-(33.8), а також правила регулювання його параметрів, розглянемо деякі допоміжні твердження.

Л е м а 33.1. *Нехай* $x_1 = x_0 - h_0\gamma_0 g_0$, *де* $h_0 > 0$, $\gamma_0 > 0$, $g_0 \neq O_n$, $\delta_0 = f(x_0) - f(x_1)$, $f(x)$ – *опукла на* R^n *функція.*

Тоді для довільного $g_1 \in \partial_{\varepsilon_1} f(x_1)$, *де* $\varepsilon_1 \geq 0$, *існує таке число* $\varepsilon_0 \geq 0$, *що має місце нерівність*

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle g_1, x - x_0 \rangle - \varepsilon_0 \quad \forall x \in R^n, \tag{33.9}$$

тобто g_1 *є* ε_0 *-субградієнтом функції* $f(x)$ *в точці* x_0, *при цьому*

$$\varepsilon_0 \geq \varepsilon_1 + \delta_0 - h_0\gamma_0 \langle g_1, g_0 \rangle. \tag{33.10}$$

Д о в е д е н н я. З означення ε_1 -субградієнта функції $f(x)$ в точці x_1 маємо

$$f(x) - f(x_1) \geq \langle g_1, x - x_1 \rangle - \varepsilon_1 \quad \forall x \in R^n.$$

Звідси з урахуванням того, що $x_1 = x_0 - h_0\gamma_0 g_0$ і $f(x_1) = f(x_0) - \delta_0$, одержимо

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle g_1, x - x_0 \rangle + h_0\gamma_0 \langle g_1, g_0 \rangle - \delta_0 - \varepsilon_1 \quad \forall x \in R^n. \tag{33.11}$$

Позначимо через

$$\theta_0 = \varepsilon_1 + \delta_0 - h_0\gamma_0 \langle g_1, g_0 \rangle.$$

Тоді з (33.11) маємо

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle g_1, x - x_0 \rangle - \theta_0 \quad \forall x \in R^n. \tag{33.12}$$

При $\theta_0 > 0$, поклавши $\varepsilon_0 \geq \theta > 0$, з (33.12) одержимо

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle g_1, x - x_0 \rangle - \theta_0 \geq \langle g_1, x - x_0 \rangle - \varepsilon_0 \quad \forall x \in R^n,$$

тобто має місце (33.9) при $\varepsilon_0 > 0$.

При $\theta_0 \leq 0$ за ε_0 можна взяти довільне число, більше або рівне 0, оскільки в цьому випадку з (33.12) маємо

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle g_1, x - x_0 \rangle + |\theta_0| \geq \langle g_1, x - x_0 \rangle \geq \langle g_1, x - x_0 \rangle - \varepsilon_0 \quad \forall x \in R^n,$$

де $\varepsilon_0 \geq 0 \geq \theta_0$ – деяке число. Тобто має місце (33.9), що й треба було довести.

Зауважимо, що в лемі 33.1 для визначеності можна покласти

$$\varepsilon_0 = \max\{\varepsilon, \varepsilon_1 + \delta_0 - h_0\gamma_0 \langle g_1, g_0 \rangle\}, \tag{33.13}$$

де $\varepsilon \geq 0$ – деяке число.

Л е м а 33.2. *Нехай має місце подання*

$$\widetilde{g}_m = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i^{(m)} g_i, \tag{33.14}$$

де $g_i \in \partial_{\varepsilon_i} f(x_i), \varepsilon_i \geq 0$, $0 \leq \lambda_i^{(m)} \leq \Lambda < +\infty$, $i = \overline{0, m}$, $\sigma_m = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i^{(m)} > 0$, $f(x)$ – *опукла на* R^n *функція*, $x_i = x_0 - h_{i-1}\gamma_{i-1}\widetilde{g}_{i-1}$, $h_{i-1} > 0$, $\gamma_{i-1} > 0$, $\widetilde{g}_{i-1} \neq O_n$, $i = \overline{1, m}$.

Тоді для вектора $v_m = \sigma_m^{-1}\widetilde{g}_m$ *має місце нерівність*

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle v_m, x - x_0 \rangle - \mathrm{E}_0 \quad \forall x \in R^n, \tag{33.15}$$

де $\mathrm{E}_0 \geq 0$, *тобто вектор* $v_m \in \partial_{\mathrm{E}_0} f(x_0)$, *і* $v_m \in co\left\{\bigcup_{i=0}^{m}\{g_i\}\right\}$.

Д о в е д е н н я. З леми 33.1, враховуючи (33.13), випливає, що для всіх $g_i \in \partial_{\varepsilon_i} f(x_i), i = \overline{0, m}$, має місце нерівність

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle g_i, x - x_0 \rangle - \widetilde{\varepsilon}_i \quad \forall x \in R^n, \tag{33.16}$$

де

$$\widetilde{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0, \;\; \widetilde{\varepsilon}_i = \max\{\varepsilon_0, \theta_i\}, \;\; \theta_i = \varepsilon_i + \delta_i - h_{i-1}\gamma_{i-1}\langle g_i, \widetilde{g}_{i-1} \rangle,$$

$\delta_i = f(x_0) - f(x_i), i = \overline{1, m}$, тобто $g_i \in \partial_{\widetilde{\varepsilon}_i} f(x_0), i = \overline{0, m}$.

Домножимо (33.16) на $\lambda_i^{(m)}, i = \overline{0, m}$, і додамо одержані нерівності для $i = \overline{0, m}$. Тоді

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i^{(m)} (f(x) - f(x_0)) \geq \sum_{i=0}^{m} \lambda_i^{(m)} (\langle g_i, x - x_0 \rangle - \widetilde{\varepsilon}_i) =$$

$$\langle \sum_{i=0}^{m} \lambda_i^{(m)} g_i, x - x_0 \rangle - \sum_{i=0}^{m} \lambda_i^{(m)} \widetilde{\varepsilon}_i \geq \langle \widetilde{g}_m, x - x_0 \rangle - \sigma_m \mathrm{E}_0 \quad \forall x \in R^n,$$

де $\mathrm{E}_0 = \max_{i=0,m} \widetilde{\varepsilon}_i \geq 0$, тобто

$$\sigma_m (f(x) - f(x_0)) \geq \langle \widetilde{g}_m, x - x_0 \rangle - \sigma_m \mathrm{E}_0.$$

Поділивши цю нерівність на $\sigma_m > 0$, одержимо

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle v_m, x - x_0 \rangle - \mathrm{E}_0 \quad \forall x \in R^n,$$

де $\mathrm{E}_0 \geq 0$. Звідси випливає, що $v_m \in \partial_{\mathrm{E}_0} f(x^{(0)})$.

При цьому вектор $v_m = (\sigma_m)^{-1}\widetilde{g}_m = (\sigma_m)^{-1}\sum_{i=0}^{m}\lambda_i^{(m)} g_i$ належить $co\left\{\bigcup_{i=0}^{m}\{g_i\}\right\}$, оскільки $(\sigma_m)^{-1}\lambda_i^{(m)} \in [0; 1]$, $i = \overline{0, m}$, $\sum_{i=0}^{m}(\sigma_m)^{-1}\lambda_i^{(m)} = 1$. Лема доведена.

Т е о р е м а 33.1. *Нехай в методі* (33.2)-(33.8) *всі внутрішні цикли є повними, тобто $m_k = m$ для будь-якого $k = 0,1,\ldots,$ і*

$$x_{k+1}^{(0)} = x_k^{(0)} - h_k^{(m)}\tilde{\gamma}_k^{(m)}\tilde{g}_k^{(m)},$$

де $\tilde{g}_k^{(m)} = \sum_{i=0}^{m}\lambda_k^{(i)} g_k^{(i)}$, $g_k^{(i)} \in \partial_{\varepsilon_k} f(x_k^{(i)})$, $\varepsilon_k \ge 0$, $\lambda_k^{(i)} \in [0;\Lambda]$, $i = \overline{0,m}$,

$0 < \Lambda < +\infty$, $\sigma_k^{(m)} = \sum_{i=0}^{m}\lambda_k^{(i)} > 0$, $h_k^{(m)} > 0$, $\tilde{\gamma}_k^{(m)} = (\sigma_k^{(m)})^{-1}\gamma_k^{(m)}$,

$0 < \gamma \le \gamma_k^{(m)} \le \Gamma < +\infty$.

Тоді для вектора $v_k^{(m)} = (\sigma_k^{(m)})^{-1}\tilde{g}_k^{(m)}$ при будь-яких $k = 0,1,\ldots,$ має місце нерівність

$$f(x) - f(x_0) \ge \langle v_k^{(m)}, x - x_k^{(0)}\rangle - \mathrm{E}_k^{(0)} \quad \forall x \in R^n, \tag{33.17}$$

$\mathrm{E}_k^{(0)} \ge 0$, *тобто* $v_k^{(m)} \in \partial_{\mathrm{E}_k^{(0)}} f(x_k^{(0)})$, *де*

$$\mathrm{E}_k^{(0)} = \max_{i=\overline{0,m}} \varepsilon_k^{(i)}, \tag{33.18}$$

$$\varepsilon_k^{(0)} = \varepsilon_k, \tag{33.19}$$

$$\varepsilon_k^{(i)} = \max\{\varepsilon_k, \theta_k^{(i)}\}, i = \overline{1,m}, \tag{33.20}$$

$$\theta_k^{(i)} = \varepsilon_k + \delta_k^{(i)} - h_k^{(i-1)}\tilde{\gamma}_k^{(i-1)}\langle g_k^{(i)}, \tilde{g}_k^{(i-1)}\rangle, \tag{33.21}$$

$$\delta_k^{(i)} = f(x_k^{(0)}) - f(x_k^{(i)}), i = \overline{1,m}. \tag{33.22}$$

Доведення теореми безпосередньо випливає з леми 33.2.

Наведена теорема дозволяє зробити висновок, що метод (33.2)-(33.8) є $\mathrm{E}_k^{(0)}$ -субградієнтним методом, де $\mathrm{E}_k^{(0)}$ визначається співвідношеннями (33.18)-(33.22).

Однією з умов збіжності в ε_k -субградієнтних методах як немонотонних, так і монотонних, є умова $\varepsilon_k \to +0$ при $k \to \infty$ (див. §31 і §32).

Тому з'ясуємо, за яких умов

$$\mathrm{E}_k^{(0)} \to +0 \text{ при } k \to \infty. \tag{33.23}$$

З (33.18)-(33.22), враховуючи очевидне співвідношення

$$\theta_k^{(i)} \le \varepsilon_k + |\delta_k^{(i)}| + h_k^{(i-1)}\tilde{\gamma}_k^{(i-1)} |\langle g_k^{(i)}, \tilde{g}_k^{(i-1)}\rangle|, \tag{33.24}$$

маємо, що для того щоб виконувалась умова (33.23), досить виконання наступних вимог:

$$\varepsilon_k \to +0 \text{ при } k \to \infty; \tag{33.25}$$

$$|\delta_k^{(i)}| = |f(x_k^{(0)}) - f(x_k^{(i)})| \le \varepsilon_k, \; i = \overline{1,m}; \tag{33.26}$$

$$h_k^{(i-1)}\tilde{\gamma}_k^{(i-1)} |\langle g_k^{(i)}, \tilde{g}_k^{(i-1)}\rangle| \to +0, \; i = \overline{1,m}, \; k \to \infty. \tag{33.27}$$

Вимога (33.25), як вже відмічалось, є стандартною для ε_k -субградієнтних методів. Умова (33.26) є цілком природною, оскільки її порушення при чисельній реалізації конкретних алгоритмів, побудованих за загальною схемою методу (33.2)-(33.8), дає можливість уникнути зайвих обчислень (не всі внутрішні цикли будуть повними). Наприклад, якщо при $\delta_k^{(i)} > 0$ буде $\delta_k^{(i)} > \varepsilon_k$, то це означає, що відбулося значне зменшення цільової функції і накопичування ε_k -субградієнтів можна припинити. Якщо ж при $\delta_k^{(i)} < 0$ буде $|\delta_k^{(i)}| > \varepsilon_k$, то це означає, що поточний усереднений напрям руху є невдалим, і тому накопичування варто припинити.

Виконання вимоги (33.27) при виконанні умови (33.7) можна домогтися, якщо покласти

$$h_k^{(i-1)} \to +0 \text{ при } k \to \infty, i = \overline{1,m}, \tag{33.28}$$

або ε_k -субградієнти $g_k^{(i)}, i = \overline{1,m}$, $k = 0,1,\ldots,$ добирати спеціальним чином, наприклад такими, що

$$\langle g_k^{(i)}, \tilde{g}_k^{(i-1)}\rangle = 0. \tag{33.29}$$

Умова (33.28) найбільш часто використовується при побудові немонотонних методів, а накопичування ε_k – субградієнтів $g_k^{(i)}$, які задовольняють умову (33.29), застосовується в чисельних монотонних ε_k -субградієнтних методах (див., наприклад, [89], [100], [129]).

Якщо функція $f(x)$ така, що для будь-якого $x^{(0)} \in R^n$ лебегова множина функції $f(x)$

$$L_f(x^{(0)}) = \{x \in R^n \mid f(x) \le f(x^{(0)})\} \tag{33.30}$$

обмежена, то (див. теорему 16.6) існує константа Ліпшиця $0 < K < +\infty$ така, що

$$|f(x_k^{(0)}) - f(x_k^{(i)})| \le K \| x_k^{(0)} - x_k^{(i)} \|, \; i = \overline{1,m}, \; k = 0,1,\ldots\,.$$

Тоді умову (33.26) можна замінити умовою

$$\| x_k^{(0)} - x_k^{(i)} \| \le \varepsilon_k, i = \overline{1,m}, \tag{33.31}$$

яка також цілком природна, і при чисельній реалізації методу (33.2)-(33.8) її порушення є умовою припинення процесу накопичування ε_k -субградієнтів на k-му кроці, оскільки зроблено досить значний крок в обраному усередненому напрямі.

На практиці для припинення накопичуванння ε_k-субградієнтів у внутрішньому циклі на k-тій ітерації доцільно використовувати перевірку як умови (33.26), так і умови (33.31), щоб уникнути зайвих обчислень.

Позначимо множину розв'язків задачі (33.1) через

$$X^* = \{x^* \in R^n \mid f(x^*) = f^*\},$$

де $f^* = \inf_{x \in R^n} f(x)$, а множину ε-стаціонарних точок опуклої функції $f(x)$ на R^n через

$$X_\varepsilon^* = \{x_\varepsilon^* \in R^n \mid f(x_\varepsilon^*) \le f^* + \varepsilon\}.$$

Л е м а 33.3. *Якщо множина X^* непорожня і обмежена, то для будь-якого $x^{(0)} \in R^n$ лебегова множина $L_f(x^{(0)})$ (33.30) функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$ обмежена.*

Н а с л і д о к 1. *Для того щоб множина X^* точок мінімуму опуклої функції $f(x)$ була обмежена, необхідно, щоб для будь-якого $x^{(0)} \in R^n$ лебегова множина $L_f(x^{(0)})$ була обмеженою.*

Н а с л і д о к 2. *Якщо множина X^* непорожня і обмежена, то множина X_ε^* обмежена для будь-якого фіксованого $\varepsilon > 0$.*

Н а с л і д о к 3. *Якщо множина X^* непорожня і обмежена, то для будь-якого $a > 0$ знайдеться $\varepsilon = \varepsilon(a) > 0$ таке, що*

$$X_\varepsilon^* \subset S_a(X^*) = \{x \in R^n \mid \rho(x, X^*) \le a\},$$

де

$$\rho(x, X^*) = \min_{x^* \in X^*} \| x - x^* \|. \qquad (33.32)$$

Доведення леми 33.3 та її наслідків можна знайти в [31].

Т е о р е м а 33.2. *Нехай послідовність точок $\{x_k^{(0)}\}$ згенерована за методом* (33.2)-(33.8), *при цьому*

$$\varepsilon_k \to +0,\ k \to \infty,$$

$$| f(x_k^{(0)}) - f(x_k^{(i)}) | \le \varepsilon_k,\ i = \overline{1,m}$$

$$h_k^{(i)} = t_k^{(i)} r_k, \qquad (33.33)$$

де $t_k^{(i)} \in (0; \mathrm{T}]$, $\mathrm{T} < \infty$, $i = \overline{0,m}$,

$$r_k > 0,\ r_k \to +0,\ \sum_{k=0}^{\infty} r_k = \infty, \qquad (33.34)$$

для будь-яких $g \in \partial_\varepsilon f(x)$ $\| g \| \le \mathrm{M} < \infty$ *при довільних фіксованих* $\varepsilon \ge 0$ *і* $x \in R^n$.

Тоді, якщо множина X^* непорожня і обмежена, то при $k \to \infty$

$$\rho(x_k^{(0)}, X^*) \to 0,\ f(x_k^{(0)}) \to f^*.$$

Д о в е д е н н я. Встановимо спочатку, що

$$\lim_{k \to \infty} \rho(x_k^{(0)}, X^*) = 0. \qquad (33.35)$$

Припустимо, що це не так. Тоді знайдеться число $a > 0$ і номер $k_0 < \infty$ такі, що

$$\rho(x_k^{(0)}, X^*) \ge 2a > 0 \quad \forall k \ge k_0. \qquad (33.36)$$

Оскільки X^* – обмежена множина, то за наслідком 3 леми 33.3 знайдеться число $c > 0$ таке, що

$$X_c^* = \{x \in R^n \mid f(x) \le f^* + c\} \subset S_a(X^*),$$

де $S_a(X^*) = \{x \in R^n \mid \rho(x, X^*) \le a\}$. Звідси, враховуючи, що для будь-яких $x \in S_a(X^*) \setminus X_c^*$ $f(x) > f^* + c$, будемо мати

$$\inf_{x \in S_a(X^*)} f(x) \ge \inf_{x \in S_a(X^*) \setminus X_c^*} f(x) > f^* + c.$$

Тоді, позначивши

$$d = \inf_{x \in S_a(X^*)} f(x) - f^*,$$

одержимо

$$d = \inf_{x \in S_a(X^*)} f(x) - f^* > f^* + c - f^* = c > 0. \qquad (33.37)$$

Очевидно, що для будь-яких $x^* \in X$ має місце включення $x^* \in \operatorname{int} X_c^*$. Тоді існує число $b > 0$ таке, що

$$S_b(x^*) = \{x \in R^n \mid \| x - x^* \| \le b\} \subset X_c^* \quad \forall x^* \in X^*. \qquad (33.38)$$

Зафіксуємо довільне $x^* \in X^*$ (рис. 33.3). Оскільки згідно (33.37)

$$\inf_{x \in S_a(X^*)} f(x) = f^* + d,$$

то з (33.36) для будь-яких $k > k_0$ маємо

$$f(x_k^{(0)}) > f^* + d. \qquad (33.39)$$

Згідно теореми 33.1 для будь-якої точки $x_k^{(0)}$, $k = 0, 1, \ldots$, що згенерована за методом (33.2)-(33.8), має місце нерівність

$$f(x) - f(x_k^{(0)}) \ge \langle v_k^{(m)}, x - x_k^{(0)} \rangle - \mathrm{E}_k^{(0)} \quad \forall x \in R^n, \qquad (33.40)$$

де $\mathrm{E}_k^{(0)}$ визначається співвідношеннями (33.18)-(33.22).

В умовах теореми $\mathrm{E}_k^{(0)} \to +0$ при $k \to \infty$, тому при великих k, враховуючи, що $d > c$ (див. (33.37)), буде

$$\mathrm{E}_k^{(0)} < d - c. \qquad (33.41)$$

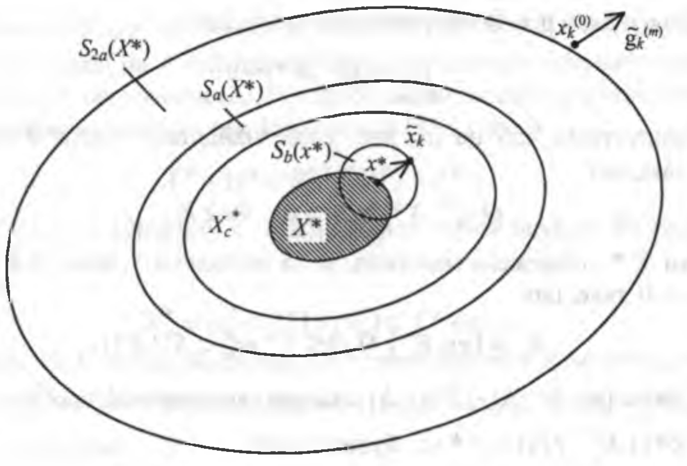


Рис. 33.3.

Тоді з (33.39)-(33.41), при досить великих $k > k_0$ для будь-яких $x \in X_c^*$, тобто таких, що $f(x) \le f^* + c$, будемо мати

$$\langle v_k^{(m)}, x - x_k^{(0)} \rangle \le f(x) - f(x_k^{(0)}) + \mathrm{E}_k^{(0)} < f(x) - f^* - d + \mathrm{E}_k^{(0)} \le$$

$$\le f^* + c - f^* - d + \mathrm{E}_k^{(0)} < f^* + c - f^* - d + d - c = 0.$$

Отже, при досить великих $k > k_0$

$$\langle v_k^{(m)}, x - x_k^{(0)} \rangle < 0 \quad \forall x \in X_c^*. \tag{33.42}$$

Візьмемо точку

$$\tilde{x}_k = x^* - b\frac{z_k}{\| z_k \|}, \tag{33.43}$$

де

$$z_k = -h_k^{(m)} \tilde{\gamma}_k^{(m)} \tilde{g}_k^{(m)} = -h_k^{(m)} \gamma_k^{(m)} (\sigma_k^{(m)})^{-1} \tilde{g}_k^{(m)} = -h_k^{(m)} \gamma_k^{(m)} v_k^{(m)} \tag{33.44}$$

і $h_k^{(m)} > 0,\ 0 < \gamma \le \gamma_k^{(m)} \le \Gamma < \infty,\ \sigma_k^{(m)} > 0$.

З (33.38) випливає, що $\tilde{x}_k \in X_c^*$ (див. рис. 33.3). Враховуючи, що

$$x_{k+1}^{(0)} = x_k^{(0)} - h_k^{(m)} \tilde{\gamma}_k^{(m)} \tilde{g}_k^{(m)} = x_k^{(0)} + z_k,$$

з (33.42) і (33.44) одержимо

$$0 > \langle v_k^{(m)}, x - x_k^{(0)} \rangle = \langle -v_k^{(m)}, x_k^{(0)} - x \rangle$$

і

$$0 > \langle z_k, x_k^{(0)} - x \rangle \quad \forall x \in X_c^*. \tag{33.45}$$

Оскільки $\tilde{x}_k \in X_c^*$, то з (33.45) $\langle z_k, x_k^{(0)} - \tilde{x}_k \rangle < 0$. Звідси, враховуючи (33.43) і (33.33), одержимо

$$\langle z_k, x_k^{(0)} - x^* + b z_k \| z_k \|^{-1} \rangle = \langle z_k, x_k^{(0)} - x^* \rangle + b \| z_k \| < 0,$$

тобто

$$\langle z_k, x_k^{(0)} - x^* \rangle < -b \| z_k \| = -b \| -h_k^{(m)} \gamma_k^{(m)} v_k^{(m)} \| =$$

$$= -b t_k^{(m)} r_k \gamma_k^{(m)} \| v_k^{(m)} \| = -b r_k R_k, \tag{33.46}$$

де

$$R_k = t_k^{(m)} \gamma_k^{(m)} \| v_k^{(m)} \|. \tag{33.47}$$

З урахуванням (33.46) і (33.47), маємо

$$\| x_{k+1}^{(0)} - x^* \|^2 = \| x_k^{(0)} + z_k - x^* \|^2 = \| x_k^{(0)} - x^* \|^2 + 2\langle z_k, x_k^{(0)} - x^* \rangle +$$

$$+ \| z_k \|^2 < \| x_k^{(0)} - x^* \|^2 - 2 b r_k R_k + \| z_k \|^2 =$$

$$= \| x_k^{(0)} - x^* \|^2 - 2 b r_k R_k + r_k^2 (t_k^{(m)} \gamma_k^{(m)})^2 \| v_k^{(m)} \|^2 = \tag{33.48}$$

$$= \| x_k^{(0)} - x \|^2 - 2 b r_k R_k + r_k^2 R_k^2 = \| x_k^{(0)} - x^* \|^2 - b r_k R_k - r_k R_k (b - r_k R_k).$$

За умовою (33.34) $r_k \to +0$ при $k \to \infty$, тому при досить великих $k > k_0$ величина $r_k R_k (b - r_k R_k) > 0$.

Тоді з (33.48) одержимо

$$\| x_{k+1}^{(0)} - x^* \|^2 < \| x_k^{(0)} - x^* \|^2 - b r_k R_k. \tag{33.49}$$

Продовжуючи аналогічно, одержимо

$$\| x_{k+s}^{(0)} - x^* \|^2 < \| x_k^{(0)} - x^* \|^2 - b \sum_{i=0}^{s-1} r_{k+i} R_{k+i}. \tag{33.50}$$

В силу умови (33.34) з (33.50) випливає $\| x_{k+s}^{(0)} - x^* \|^2 \to -\infty$ при $s \to +\infty$, що неможливо. Одержана суперечність і доводить (33.35).

Зафіксуємо $\delta > 0$. Тоді, як і у попередніх міркуваннях, знайдеться $b_\delta > 0$ таке, що

$$\| x_{k+1}^{(0)} - x^* \|^2 < \| x_k^{(0)} - x^* \|^2 - b_\delta r_k R_k \quad \forall x^* \in X^* \tag{33.51}$$

для всіх досить великих k і таких, що

$$\rho(x_k^{(0)}, X^*) > \delta.$$

З (33.51) і (33.32) маємо

$$\rho^2(x_{k+1}^{(0)}, X^*) < \rho^2(x_k^{(0)}, X^*) - b_\delta r_k R_k. \tag{33.52}$$

В силу (33.35) існує k таке, що

$$\rho(x_k^{(0)}, X^*) < \delta. \tag{33.53}$$

Оскільки $x_{k+1}^{(0)} = x_k^{(0)} + z_k$, де, враховуючи (33.47), $\| z_k \| = r_k R_k$, то згідно з (33.32) будемо мати

$$\rho(x_{k+1}^{(0)}, X^*) = \min_{x^* \in X^*} \| x_{k+1}^{(0)} - x^* \| = \min_{x^* \in X^*} \| x_k^{(0)} + z_k - x^* \| \le$$

$$\le \min_{x^* \in X^*} \| x_k^{(0)} - x^* \| + \| z_k \| = \rho(x_k^{(0)}, X^*) + r_k R_k .$$

Звідси для k, які задовольняють (33.53), враховуючи, що $r_k \to 0$, можна вважати $\rho(x_{k+1}^{(0)}, X^*) < 2\delta$. Якщо при цьому буде $\rho(x_{k+1}^{(0)}, X^*) > \delta$, то в силу (33.52)

$$\rho(x_{k+2}^{(0)}, X^*) < \rho(x_{k+1}^{(0)}, X^*) < 2\delta .$$

Далі міркуємо аналогічно. Отже, якщо $\rho(x_{k+i}^{(0)}, X^*) < \delta$, то $\rho(x_{k+i+1}^{(0)}, X^*) < 2\delta$, якщо ж $\delta < \rho(x_{k+i}^{(0)}, X^*) < 2\delta$, то

$$\rho(x_{k+i+1}^{(0)}, X^*) < \rho(x_{k+i}^{(0)}, X^*) < 2\delta .$$

Остаточно для всіх $i \ge 1$ маємо $\rho(x_{k+i}^{(0)}, X^*) < 2\delta$.

В силу довільності $\delta > 0$ звідси випливає, що $\rho(x_k^{(0)}, X^*) \to 0$ при $k \to +\infty$, а тоді й $f(x_k^{(0)}) \to f^*$. Що й треба було довести.

Описаний немонотонний метод з усередненням ε_k-субградієнтів (33.2)-(33.8) має загальний характер і набуває конкретного змісту при конкретизації правил регулювання його параметрів та управляючих послідовностей. Певна свобода, яка допускається при цьому, передбачає можливість будувати і реалізовувати різні конкретні алгоритми.

Розглянемо деякі найбільш популярні способи і правила регулювання параметрів, які використовуються в методах з усередненням ε_k-субградієнтів.

Спочатку розглянемо правила регулювання крокових множників.

1. Найпростішим є *програмне регулювання*, в якому наперед задається послідовність $\{r_k\}$ така, що

$$r_k > 0, \lim_{k \to \infty} r_k = 0, \sum_{k=0}^{\infty} r_k = \infty , \tag{33.54}$$

і в (33.2), (33.3) $h_k^{(j)} = r_k$ для кожного $j = \overline{0, m_k}$. Прикладом такої послідовності є послідовність

$$\{r_k\} = \{c(k+1)^{-1}\}, \text{ де } c = const, k = 0, 1, \dots .$$

Нажаль, при такому правилі вибору крокових множників втрачається сенс усереднення, оскільки при вдалому напрямі $-\tilde{g}_k^{(j)}$ (напрямі вздовж яру цільової функції) втрачається можливість значно зменшити значення цільової функції і наблизитись до розв'язку задачі (33.1).

2. *Адаптивне правило регулювання* полягає у тому, що спочатку шукається пробна точка

$$\bar{x} = x_k^{(0)} - r_k \tilde{\gamma}_k^{(j)} \tilde{g}_k^{(j)} ,$$

де r_k обирається за правилом (33.54).

Якщо

$$f(x_k^{(0)}) - f(\bar{x}) \le 0 ,$$

тобто не відбулося зменшення цільової функції у пробній точці, то покладають $x_k^{(j+1)} = \bar{x}$, у протилежному випадку, тобто коли

$$f(x_k^{(0)}) - f(\bar{x}) > 0 , \tag{33.55}$$

то шукають точку $x_k^{(j+1)}$ таку, що

$$x_k^{(j+1)} = x_k^{(0)} - h_k^{(j)} \tilde{\gamma}_k^{(j)} \tilde{g}_k^{(j)} ,$$

де $h_k^{(j)} > 0$ – наближений розв'язок задачі одновимірної мінімізації

$$\min_{h>0} f(x_k^{(0)} - h \tilde{\gamma}_k^{(j)} \tilde{g}_k^{(j)}) , \tag{33.56}$$

тобто величина кроку $h_k^{(j)}$ задовольняє умову $h_k^{(j)} \in [\underline{h}_k^{(j)}; \bar{h}_k^{(j)}]$, де $[\underline{h}_k^{(j)}; \bar{h}_k^{(j)}]$ – відрізок локалізації точки мінімуму функції $f(x_k^{(0)} - h \tilde{\gamma}_k^{(j)} \tilde{g}_k^{(j)})$ за h, при цьому

$$0 < \bar{h}_k^{(j)} - \underline{h}_k^{(j)} \le \tau_k , \tag{33.57}$$

де τ_k – точність розв'язування задачі (33.56) на k-му кроці і $\tau_k \to 0$ при $k \to \infty$.

У даному випадку величину $h_k^{(j)}$ можна подати у вигляді $h_k^{(j)} = t_k^{(j)} r_k$, де $0 < t_k^{(j)} \le \mathrm{T} < \infty$, що задовольняє умову (33.33) теореми 33.2.

Для наближеного розв'язування задачі (33.56), (33.57) можна скористатися одним з методів одновимірної мінімізації, виконавши перед цим процедуру локалізації точки мінімуму (див. §25) функції $f(x_k^{(0)} - h \tilde{\gamma}_k^{(j)} \tilde{g}_k^{(j)})$.

З а у в а ж е н н я. На практиці можна використовувати й інші правила регулювання крокових множників, не порушуючи умову (33.33) (див., наприклад, (35.6), (35.7)). Більш складні правила регулювання, особливо в околі розв'язку задачі (33.1), можна знайти, наприклад, в [71].

Розглянемо тепер правила усереднення ε_k-субградієнтів, які можна використовувати, зокрема, в методах з усередненням субградієнтів або градієнтів.

1. Найпростішим правилом усереднення в (33.4) є звичайне середнє арифметичне ε_k -субградієнтів, обчислених у точках $x_k^{(0)}, x_k^{(1)}, ..., x_k^{(j)}$, тобто

$$\tilde{g}_k^{(j)} = \frac{1}{j+1}\sum_{i=0}^{j} g_k^{(i)} = \sum_{i=0}^{j} \lambda_k^{(i)} g_k^{(i)}, \qquad (33.58)$$

де $\lambda_k^{(i)} = \dfrac{1}{j+1}$, $i = \overline{0,j}$, $\Lambda = 1$, при цьому $\sigma_k^{(j)} = \sum_{i=0}^{j} \lambda_k^{(i)} = 1$, $g_k^{(i)} \in \partial_{\varepsilon_k} f(x_k^{(i)})$, $i = \overline{0,j}$, $j \le m$.

2. Коефіцієнти усереднення $\lambda_k^{(i)}$, $i = \overline{0,j}$, в (33.4) є деякі випадкові (псевдовипадкові) числа, рівномірно розподілені на відрізку $[0;1]$, при цьому $\Lambda = 1$, $0 < \sigma_k^{(i)} \le j+1$.

3. Усереднений напрям $\tilde{g}_k^{(j)}$ в (33.4) можна обчислювати рекурентно:

$$\tilde{g}_k^{(j)} = (1-\alpha_j)\tilde{g}_k^{(j-1)} + \alpha_j g_k^{(j)}, \qquad (33.59)$$

де $\tilde{g}_k^{(0)} = g_k^{(0)} \in \partial_{\varepsilon_k} f(x_k^{(0)})$, $g_k^{(j)} \in \partial_{\varepsilon_k} f(x_k^{(j)})$, $\alpha_j \in [0;1]$, $j = \overline{1, m_k}$, причому при $j > m_k$ відбувається так зване поновлення, тобто треба покласти $k = k+1, j = 0$, або, іншими словами, необхідно припинити процедуру накопичування і на цьому завершити внутрішній цикл на k-тій ітерації.

Можна показати, що

$$\tilde{g}_k^{(j)} = \sum_{i=0}^{j} \lambda_k^{(j)} g_k^{(j)}, \qquad (33.60)$$

де $\lambda_k^{(j)} = \alpha_j$, $\lambda_k^{(0)} = \prod_{i=1}^{j}(1-\alpha_i)$, $\lambda_k^{(i)} = \alpha_i \prod_{s=i+1}^{j}(1-\alpha_s)$, $i = \overline{1, j-1}$, при цьому $\sum_{i=0}^{j} \lambda_k^{(i)} = 1$, $\lambda_k^{(i)} \in [0;1]$, $i = \overline{0,j}$, тобто $\tilde{g}_k^{(j)} \in co\left\{\bigcup_{i=0}^{j}\{g_k^{(i)}\}\right\}$.

Одним з правил вибору α_j в (33.59) може бути таке:

$$\alpha_j = \arg\min_{\alpha \in [0;1]} \| \alpha g_k^{(j)} + (1-\alpha)\tilde{g}_k^{(j-1)} \|,$$

при цьому α_j можна визначити аналітично

$$\alpha_j = \frac{\langle \tilde{g}_k^{(j-1)}, \tilde{g}_k^{(j-1)} - g_k^{(j)} \rangle}{\| \tilde{g}_k^{(j-1)} - g_k^{(j)} \|^2}. \qquad (33.61)$$

У цьому випадку вектор $\tilde{g}_k^{(j)}$ в (33.59) є найближчою до початку координат простору R^n точкою множини $co\{\tilde{g}_k^{(j-1)}, g_k^{(j)}\}$ (рис. 33.4).

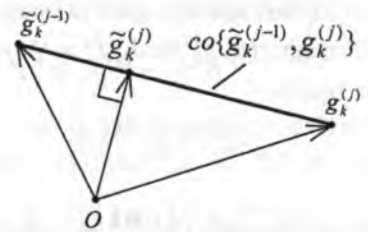


Рис. 33.4.

Зауваження.

1. Якщо в (33.61) $\alpha_j < 0$, то треба покласти $\tilde{g}_k^{(j)} = \tilde{g}_k^{(j-1)}$, а якщо $\alpha_j > 1$, то покласти $\tilde{g}_k^{(j)} = g_k^{(j)}$. В обох випадках накопичування в методі (33.2)-(33.8) можна припинити, оскільки новий усереднений вектор не дає практично нічого нового.

2. Якщо в (33.59) після визначення $\alpha_j \in [0;1]$ за формулою (33.61) буде $\tilde{g}_k^{(j)} = O_n$, тобто $O_n \in co\left\{\bigcup_{i=0}^{j}\{g_k^{(i)}\}\right\}$, то процес накопичування також можна припинити, оскільки точка $x_k^{(0)}$ буде $\mathrm{E}_k^{(0)}$-стаціонарною точкою функції $f(x)$. Після цього необхідно провести аналіз цієї ситуації. Наприклад, при $\mathrm{E}_k^{(0)} < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – точність розв'язування задачі (33.1), можна завершити роботу за методом, а в протилежному випадку зменшити параметр ε_k.

4. Усереднений вектор $\tilde{g}_k^{(j)}$ в (33.4) визначається з опуклої оболонки векторів $g_k^{(0)}, g_k^{(1)}, ..., g_k^{(j)}$, де $g_k^{(i)} \in \partial_{\varepsilon_k} f(x_k^{(i)}), i = \overline{0,j}$:

$$\tilde{g}_k^{(j)} \in coG_k = co\{g_k^{(0)}, g_k^{(1)}, ..., g_k^{(j)}\},$$

так що

$$\| \tilde{g}_k^{(j)} \| = \min_{g \in coG_k} \| g \|, \qquad (33.62)$$

тобто $\tilde{g}_k^{(j)}$ – найближчий до початку координат простору R^n вектор з опуклої оболонки coG_k накопичених ε_k -субградієнтів або елемент мінімальної норми в множині coG_k.

В цьому випадку напрям $-\tilde{g}_k^{(j)}$ є напрямом найшвидшого спуску в точці $x_k^{(0)}$ для апроксимуючої функції

$$F(x) = f(x_k^{(0)}) + \max_{i=\overline{0,j}} \langle g_k^{(i)}, x - x_k^{(0)} \rangle.$$

Знаходження вектора $\tilde{g}_k^{(j)}$, який задовольняє умову (33.62), зводиться до розв'язування послідовності зв'язаних між собою задач квадратичного програмування спеціального виду, для яких можна використати або скінченні методи (див., наприклад, [138]), або нескінченні наближені методи (див., наприклад, [32]).

Якщо в процесі роботи методу (33.2)-(33.8) у внутрішньому циклі k-тої ітерації ε_k-субградієнти $g_k^{(j)} \in \partial_{\varepsilon_k} f(x_k^{(j)})$ накопичувати спеціальним чином, наприклад так, що

$$\langle \tilde{g}_k^{(j-1)}, g_k^{(j)} \rangle = 0 \qquad (33.63)$$

або

$$\langle \tilde{g}_k^{(j-1)}, g_k^{(j)} \rangle < \alpha \| \tilde{g}_k^{(j-1)} \|, \qquad (33.64)$$

де $\alpha \in [0;1]$, $j = \overline{1, m_k}$, $m_k \le m$, то при досить великому m за скінченну кількість кроків буде або

$$\| \tilde{g}_k^{(j)} \| < \varepsilon_k, \qquad (33.65)$$

або знайдеться таке число $h_k^{(m_k)} > 0$, що

$$f(x_k^{(0)} - h_k^{(m_k)} \tilde{\gamma}_k^{(m_k)} \tilde{g}_k^{(m_k)}) < f(x_k^{(0)}) - \varepsilon_k. \qquad (33.66)$$

Виконання умови (33.65) дає можливість припинити процес накопичування, а якщо $\varepsilon_k < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – точність обчислень в методі (33.2)-(33.8), то можна припинити ітераційний процес, оскільки точка $x_k^{(0)}$ буде практично ε-стаціонарною точкою функції $f(x)$.

Виконання умови (33.66) гарантує можливість зменшення значення цільової функції $f(x)$ не менше ніж на ε_k, тобто в цьому випадку метод (33.2)-(33.8) стає чисельно реалізовним майже монотонним ε_k-субградієнтним методом, якщо для вибору крокових множників використовувати адаптивне правило 2.

В немонотонних методах традиційно використовуються нормуючі множники, що дає змогу забезпечити виконання умов збіжності цих методів. На практиці нормуючі множники в методі (33.2)–(33.8), як правило, обирають так:

1) $\gamma_k^{(i)} = 1, j = \overline{0, m_k}, k = 0,1,...,$ (33.67)

2) $\gamma_k^{(j)} = \begin{cases} 1, & \| \tilde{g}_k^{(j)} \| \le C_1, \\ \| \tilde{g}_k^{(j)} \|^{\alpha}, & \| \tilde{g}_k^{(j)} \| > C_1, \end{cases}$ (33.68)

де $0 < C_1 \le 1, \alpha \le -1, j = \overline{0, m_k}, k = 0,1,...$.

При цьому правило (33.67) застосовується в монотонних ε_k–субградієнтних методах, в яких виконується повний (майже повний) крок у напрямі спуску. Тому коли для деяких $k = 0,1,...,$ $j = \overline{0, m_k}$ в методі (33.2)-(33.8)

$$h_k^{(j)} = h_k^{*(j)} = \arg\min_{h>0} f(x_k^{(0)} - h\tilde{g}_k^{(j)}), \qquad (33.69)$$

де вектор $-\tilde{g}_k^{(j)}$ є напрямом спуску для функції $f(x)$ в точці $x_k^{(0)}$, або

$$h_k^{(j)} \in \left[h_k^{*(j)} - \frac{\tau_k}{2}; h_k^{*(j)} + \frac{\tau_k}{2} \right],$$

де $\tau_k > 0$ – досить мале число, яке визначає точність розв'язування задачі одновимірної мінімізації (33.69), то в (33.2) слід використовувати співвідношення (33.67).

Нормування за правилом (33.68) використовується в немонотонних методах з програмним і адаптованим регулюванням крокових множників. Тому в методі (33.2)-(33.8) у випадках, коли $-\tilde{g}_k^{(j)}$ не є напрямом спуску, слід використовувати правило (33.68), при цьому покладають $C_1 = 1$, $\alpha = -1$.

Зауважимо, що у методі (33.2)-(33.8) при використанні правил усереднення (33.58)-(33.62), в яких $\sigma_k^{(j)} = \sum_{i=0}^{j} \lambda_k^i = 1$, маємо $\tilde{\gamma}_k^{(j)} = \gamma_k^{(j)}$, що спрощує процес обчислень.

Досвід розв'язування задач оптимізації за методами, в яких використовуються процедури накопичування даних про ε_k-субградієнти (субградієнти або градієнти) показує, що число накопичувань істотно залежить від розмірності задачі, характеристик комп'ютерної техніки, на якій вони реалізовуються, і визначається, як правило, розмірністю дна яру цільової функції. Заздалегідь важко сказати, якою повинна бути послідовність $\{m_k\}$, або яким повинно бути число m, що визначає максимальну кількість накопичувань на кожному k-му кроці зовнішнього циклу.

Наприклад, якщо m не досить велике, то процедура усереднення може не дати бажаного ефекту. Якщо ж m досить велике, то зростає складність методів усереднення, знижується їх ефективність, особливо в околі розв'язку задачі (33.1).

При обранні значення m можна користуватися наступними міркуваннями.

Точки, які генеруються за методом з усередненням, можуть на певних ітераціях розташовуватись на дні яру цільової функції, а на деяких – на його схилах. Для того, щоб з'ясувати розташування схилів яру, необхідно одержати хоча б по одному ε_k-субградієнту (субградієнту, градієнту) з кожного схилу. Наприклад, якщо n – розмірність простору, r – розмірність дна яру, то $(n+1) - r$ – кількість його схилів. Отже, для організації руху вздовж яру за методом з усередненням слід зробити не менше ніж $C(n-r)$ кроків поперек яру, де C – середнє число кроків на одному схилі, і обчислити $C(n-r)+1$ ε_k–субградієнтів (субградієнтів, градієнтів).

На практиці часто ефективно використовуються методи з усередненням ε_k-субградієнтів при $C \in \{1, 2, 3\}$. Кількість накопичувань на кожному k-му кроці може бути або сталою, наприклад, $m = C(n-r)+1$, або змінною, коли регулювання відбувається програмно або за рахунок умов поновлення (обнулення лічильника накопичень j), наприклад, порушення умов (33.26) або (33.31), або виконання умови (33.65).

Розглянемо одну схему немонотонних алгоритмів з усередненням ε_k-субградієнтів, яка є конкретною реалізацією методу (33.2)-(33.8) і передбачає певні адаптаційні засоби, які дозволяють уникнути зайвих накопичувань і прискорити збіжність ітераційного процесу.

Задати управляючі послідовності

$$\{\varepsilon_k\}, \text{ де } \varepsilon_k > 0, \varepsilon_k \to 0, \tag{33.70}$$

$$\{\tau_k\}, \text{ де } \tau_k > 0, \tau_k \to 0, \tag{33.71}$$

$$\{r_k\}, \text{ де } r_k > 0, r_k \to 0, \sum_{k=0}^{\infty} r_k = \infty, \tag{33.72}$$

а також правило усереднення ε_k-субградієнтів (див. (33.4)) і правило регулювання нормуючих множників $\gamma_k^{(j)}$ (див. (33.5)).

Зафіксувати досить мале число $\varepsilon > 0$, яке визначає точність розв'язування задачі (33.1), число $m \in Z^+$, яке визначає максимальну кількість векторів, що будуть усереднюватись на кожному k-му кроці.

Обрати довільне початкове наближення $x_0^{(0)} \in R^n$ і покласти $k := 0, j := 0$.

К р о к 1. Знайти довільний вектор $g_k^{(0)} \in \partial_{\varepsilon_k} f(x_k^{(0)})$ і покласти $G_k = \{g_k^{(0)}\}$.

К р о к 2. Якщо $\| g_k^{(0)} \| \le \varepsilon_k$, то точку $x_k^{(0)}$ можна вважати ε_k-стаціонарною точкою цільової функції і на цьому k-й цикл завершується. В такому разі покласти $k := k+1$ і перейти до виконання кроку 1. Якщо $\| g_k^{(0)} \| > \varepsilon_k$, то покласти $\tilde{g}_k^{(0)} = g_k^{(0)}, \tilde{\gamma}_k^{(0)} = \gamma_k^{(0)}$ і перейти до виконання кроку 3.

К р о к 3. Визначити допоміжну точку

$$\bar{x} = x_k^{(0)} - r_k \tilde{\gamma}_k^{(j)} \tilde{g}_k^{(j)}.$$

К р о к 4. Якщо

$$f(x_k^{(0)}) - f(\bar{x}) > 0,$$

тобто пробний крок зроблено у напрямі спадання функції $f(x)$, то перейти до виконання кроку 5, інакше покласти $x_k^{(j+1)} := \bar{x}$ і перейти до виконання кроку 6.

К р о к 5. Знайти точку $x_k^{(j+1)} = x_k^{(0)} - h_k^{(j)} \tilde{\gamma}_k^{(j)} \tilde{g}_k^{(j)}$, яка є наближеним розв'язком задачі одновимірної мінімізації

$$\min_{h>0} f(x_k^{(0)} - h\tilde{\gamma}_k^{(j)} \tilde{g}_k^{(j)}), \tag{33.73}$$

тобто величина кроку задовольняє умову

$$0 < \underline{h}_k^{(j)} \le h_k^{(j)} \le \bar{h}_k^{(j)} < \infty,$$

де $[\underline{h}_k^{(j)}; \bar{h}_k^{(j)}]$ – відрізок локалізації точки мінімуму функції $f(x_k^{(0)} - h\tilde{\gamma}_k^{(j)} \tilde{g}_k^{(j)})$ за змінною h, при цьому

$$0 < \bar{h}_k^{(j)} - \underline{h}_k^{(j)} < \tau_k,$$

τ_k – точність розв'язування задачі (33.73).

К р о к 6. Якщо

$$| f(x_k^{(0)}) - f(x_k^{(j+1)}) | > \varepsilon_k \tag{33.74}$$

або

$$\| x_k^{(0)} - x_k^{(j+1)} \| > \varepsilon_k, \tag{33.75}$$

то припинити процес накопичування ε_k-субградієнтів на k-му кроці, покласти $x_{k+1}^{(0)} = x_k^{(j+1)}$, $k := k+1$, $j := 0$ і перейти до виконання кроку 1, інакше перейти до виконання кроку 7.

К р о к 7. Якщо $\varepsilon_k \le \varepsilon$, то на цьому роботу за алгоритмом припинити, за наближений розв'язок задачі (33.1) прийняти точку $x_k^{(j+1)}$, тобто покласти $x^* := x_k^{(j+1)}$, $f^* := f(x_k^{(j+1)})$, і перейти до виконання кроку 13, інакше перейти до виконання кроку 8.

К р о к 8. Знайти довільний вектор $g_k^{(j+1)} \in \partial_{\varepsilon_k} f(x_k^{(j+1)})$ і здійснити процедуру накопичення – покласти

$$G_k = G_k \cup \{g_k^{(j+1)}\} = \{g_k^{(0)}, g_k^{(1)}, \dots, g_k^{(j)}, g_k^{(j+1)}\},$$

тобто накопичити ще один ε_k-субградієнт з околу точки $x_k^{(0)}$.

К р о к 9. Якщо $j+1 > m$, то припинити процес накопичування ε_k-субградієнтів і перейти до виконання кроку 12, інакше перейти до виконання кроку 10.

К р о к 10. Знайти вектор $\tilde{g}_k^{(j+1)}$, який є результатом усереднення векторів з множини G_k, тобто

$$\tilde{g}_k^{(j+1)} = \sum_{i=0}^{j+1} \lambda_k^{(i)} g_k^{(i)},$$

де $g_k^{(i)} \in G_k$, $0 \le \lambda_k^{(i)} \le \Lambda < \infty$, $i = \overline{0, j+1}$, обчислити $\sigma_k^{(j+1)} = \sum_{i=0}^{j+1} \lambda_k^{(i)} > 0$ і покласти $\tilde{\gamma}_k^{(j+1)} = (\sigma_k^{(j+1)})^{-1} \gamma_k^{(j+1)}$.

К р о к 11. Якщо

$$(\sigma_k^{(j+1)})^{-1} \| \tilde{g}_k^{(j+1)} \| < \varepsilon_k, \tag{33.76}$$

то припинити процес накопичування ε_k-субградієнтів і перейти до виконання кроку 12, інакше покласти $j := j+1$ і перейти до виконання кроку 3.

К р о к 12. Покласти $x_{k+1}^{(0)} := x_k^{(j+1)}$, $G_k = \{g_{k+1}^{(0)}\}$, де $g_{k+1}^{(0)} = g_k^{(j+1)}$, $\tilde{g}_{k+1}^{(0)} = g_{k+1}^{(0)}$, $\tilde{\gamma}_{k+1}^{(0)} = \gamma_{k+1}^{(0)}$, $k := k+1, j := 0$, і перейти до виконання кроку 3.

К р о к 13. Вивести результати роботи за алгоритмом: x^*, f^*.

Кінець.

Управляючі послідовності (33.70) і (33.71) часто будуються за правилом

$$\varepsilon_{k+1} = \beta_0 \varepsilon_k, \tau_{k+1} = \beta_1 \tau_k,$$

де $\beta_0 \in (0; 1)$, $\beta_1 \in (0; 1)$, наприклад $\beta_0 = \beta_1 = \frac{1}{2}$. При цьому елементи послідовності $\{\tau_k\}$ повинні задовольняти умову $\tau_{k+1} = \beta_1 \tau_k < r_{k+1}$, де r_{k+1} елемент послідовності

(33.72). Початкове значення ε_0 можна обирати так: якщо значення f^* відоме заздалегідь, то можна покласти $\varepsilon_0 \approx f(x_0^{(0)}) - f^*$, а в протилежному випадку ε_0 можна обрати з умови $0 < \varepsilon_0 \le |f(x_0^{(0)})|$. Початкове значення τ_0 можна обрати, наприклад, з умови $0 < \tau_0 \le \frac{1}{2} r_0$.

Зауваження.

1. Наведена схема немонотонних алгоритмів з усередненням ε_k-субградієнтів задовольняє умови теореми 33.2 про збіжність методу усереднення ε_k-субградієнтів.

2. Для більшої адаптивності наведеної схеми алгоритмів з усередненням ε_k-субградієнтів можна ввести ще дві управляючі послідовності $\{d_k\}$, $\{\eta_k\}$, де $d_{k+1} = \beta_2 d_k$, $\eta_{k+1} = \beta_3 \eta_k$, $\beta_2 \in (0;1)$, $\beta_3 \in (0;1)$, які використовуються замість послідовності $\{\varepsilon_k\}$ в умовах (33.75) і (33.76) відповідно. При цьому повинно бути $d_0 > r_0$, наприклад, $d_0 = 2r_0$, і $0 < \eta_0 \le \| g_0^{(0)} \|$, де $g_0^{(0)} \in \partial_{\varepsilon_0} f(x_0^{(0)})$.

Розглянемо один метод наближеного розв'язування задачі (33.62) знаходження вектора мінімальної норми в опуклій оболонці скінченної кількості векторів.

Нехай в R^n задано скінченну множину точок $G = \{g_1, g_2, ..., g_m\}$ і їх опуклу оболонку

$$coG = \{g \in R^n \mid g = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i,\ \lambda_i \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\}.$$

Позначимо через $g^* \in coG$ найближчу до початку координат в R^n точку множини coG, тобто $\| g^* \| = \min_{g \in coG} \| g \|$, або

$$\langle g^*, g^* \rangle = \min_{g \in coG} \langle g, g \rangle. \quad (33.77)$$

Можна показати, що опукла множина coG – обмежена і замкнена. Тоді точка $g^* \in coG$, яка задовольняє (33.77), існує і єдина, оскільки є розв'язком задачі квадратичного програмування відносно λ_i, $i = \overline{1,m}$:

$$\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i \rangle \to \min,\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Розглянемо один з найпростіших методів послідовних наближень для знаходження точки $g^* \in coG$ (див. [32], с. 335-341).

Нехай задано число $\varepsilon > 0$ – точність розв'язування задачі (33.77). Візьмемо за початкове наближення точку $g^{(0)} = g_{i_0} \in G$, для якої

$$\langle g_{i_0}, g_{i_0} \rangle = \min_{i=\overline{1,m}} \langle g_i, g_i \rangle.$$

Нехай вже знайдено k-те наближення $g^{(k)} \in coG$. Опишемо побудову наступного наближення $g^{(k+1)} \in coG$. Позначимо через $\bar{g}_k$ точку множини G, для якої $\langle \bar{g}_k, g^{(k)} \rangle = \min_{i=\overline{1,m}} \langle g_i, g^{(k)} \rangle$ (якщо таких точок кілька, то взяти будь-яку з них).

Знайдемо величину

$$\delta(g^{(k)}) = \langle g^{(k)}, g^{(k)} \rangle - \min_{i=\overline{1,m}} \langle g_i, g^{(k)} \rangle, \quad (33.78)$$

яка в цьому випадку дорівнює

$$\delta(g^{(k)}) = \langle g^{(k)}, g^{(k)} - \bar{g}_k \rangle,$$

при цьому $\delta(g^{(k)}) \ge 0$.

Якщо

$$\delta(g^{(k)}) < \varepsilon, \quad (33.79)$$

то ітераційний процес можна завершити, поклавши $g^* \approx g^{(k)}$. У протилежному випадку розглянемо точки відрізка $[g^{(k)}; \bar{g}_k]$ виду $g^{(k)}(\alpha) = \alpha \bar{g}_k + (1-\alpha) g^{(k)}$, де $\alpha \in [0;1]$, і знайдемо $\alpha_k \in [0;1]$, для якого має місце співвідношення

$$\langle g^{(k)}(\alpha_k), g^{(k)}(\alpha_k) \rangle = \min_{\alpha \in [0;1]} \langle g^{(k)}(\alpha), g^{(k)}(\alpha) \rangle,$$

тобто

$$\alpha_k = \arg\min_{\alpha \in [0;1]} \| \alpha \bar{g}_k + (1-\alpha) g^{(k)} \|,$$

при цьому α_k можна визначити аналітично (див. (33.61))

$$\alpha_k = \frac{\langle g^{(k)}, g^{(k)} - \bar{g}_k \rangle}{\| g^{(k)} - \bar{g}_k \|^2} = \frac{\delta(g^{(k)})}{\| g^{(k)} - \bar{g}_k \|^2} \ge 0.$$

Покладемо $g^{(k+1)} = g^{(k)}(\alpha_k)$. Очевидно, що $g^{(k+1)} \in coG$, причому можна показати, що

$$\| g^{(k+1)} \| \le \| g^{(k)} \|.$$

Якщо в описаному методі не використовувати умову завершення ітераційного процесу (33.79), то він генерує послідовність точок $\{g^{(k)}\}$, для якої мають місце наступні твердження [32].

Лема 33.4. *Для описаного методу має місце граничне співвідношення*

$$\lim_{k \to \infty} \delta(g^{(k)}) = 0.$$

Теорема 33.3. *Послідовність точок $\{g^{(k)}\}$, яка побудована за описаним методом, збігається до точки g^*, яка задовольняє умову* (33.77).

Завершення роботи методу при виконанні умови (33.79) обумовлюється наступною теоремою.

Теорема 33.4. *Для того щоб точка $g^* \in coG$ була найближчою до початку координат точкою множини coG, необхідно і достатньо, щоб*

$$\delta(g^*) = 0.$$

2. Метод з усередненням ε_k-субградієнтів, знайдених на попередніх ітераціях. Розглянемо ще один метод розв'язування задачі (33.1) з усередненням ε_k-субградієнтів, в якому, на відміну від попереднього методу, для побудови напряму руху у поточній точці використовується інформація про ε_k-субградієнти, знайдені на попередніх кроках ітераційного процесу.

За методом генерується послідовність точок $\{x^{(k)}\}$ за такими правилами:

$x^{(0)} \in R^n$ – довільне початкове наближення;

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - h_k \widetilde{\gamma}_k \widetilde{g}^{(k)}, \; k = 0,1,..., \qquad (33.80)$$

де $h_k > 0$ – регульований кроковий множник,

$$\widetilde{g}_{(k)} = \sum_{i=m_k}^{k} \lambda_k^{(i)} g^{(i)}, \; k = 0,1,..., - \qquad (33.81)$$

усереднений вектор такий, що

$$g^{(i)} \in \partial_{\varepsilon_i} f(x^{(i)}), \; i = \overline{m_k, k}, \; \varepsilon_i \geq 0, \qquad (33.82)$$

$\lambda_k^{(i)}$ – регульовані множники усереднення такі, що

$$\lambda_k^{(i)} \in [0; \Lambda], \; i = \overline{m_k, k}, \; 0 < \Lambda < +\infty, \; \sigma_k = \sum_{i=m_k}^{k} \lambda_k^{(i)} > 0, \qquad (33.83)$$

$\widetilde{\gamma}_k$ – регульований нормуючий множник такий, що

$$\widetilde{\gamma}_k = (\sigma_k)^{-1} \gamma_k, \; 0 < \gamma \leq \gamma_k \leq \Gamma < +\infty, \; k = 0,1,..., \qquad (33.84)$$

m_k – параметр, який визначає кількість ε_i-субградієнтів, що усереднюються на k-му кроці ітераційного процесу (33.80), при цьому

$$0 \leq m_k \leq k. \qquad (33.85)$$

Будемо вважати, що $0 \leq k - m_k \leq m$, де число $m \geq 0$ визначає максимальну кількість векторів, які можуть бути усереднені на k-му кроці, $k = 0,1,...$. Зауважимо, що при $m_k = k$, $k = 0,1,...$, тобто коли усереднення відсутнє, метод (33.80)-(33.85) перетворюється в ε_k-субградієнтний метод, а якщо при цьому $\varepsilon_k = 0$ для будь-яких $k = 0,1,...$, то у звичайний субградієнтний метод (див. §31). При $m_k = 0$ для будь-яких $k = 0,1,...$ усереднюються всі ε_k-субградієнти, знайдені на попередніх кроках ітераційного процесу. При $\varepsilon_k = 0$ для будь-яких $k = 0,1,...$ і $m > 0$ метод стає одним з методів з усередненням субградієнтів, які описані, наприклад, в [71], [109].

На рис. 33.5 і 33.6 подано геометричну інтерпретацію перших кроків методу (33.80)-(33.85), коли

$$x^{(1)} = x^{(0)} - h_0 \widetilde{\gamma}_0 \widetilde{g}^{(0)},$$

де $\widetilde{g}^{(0)} = g^{(0)} \in \partial_{\varepsilon_0} f(x^{(0)})$, $\varepsilon_0 = 0$, $\widetilde{\gamma}_0 = \gamma_0 = 1$, $h_0 > 0$,

$$x^{(2)} = x^{(1)} - h_1 \widetilde{\gamma}_1 \widetilde{g}^{(1)},$$

де $h_1 = \arg\min_{h>0} f(x^{(1)} - h\widetilde{\gamma}_1 \widetilde{g}^{(1)})$, $\widetilde{g}^{(1)} = \lambda_1^{(0)} g^{(0)} + \lambda_1^{(1)} g^{(1)}$, $g^{(1)} \in \partial_{\varepsilon_1} f(x^{(1)})$,

$\varepsilon_1 = 0$, $\lambda_1^{(0)} = \lambda_1^{(1)} = 1$, $\sigma_1 = 2$, $\gamma_1 = 1$, $\widetilde{\gamma}_1 = (\sigma_1)^{-1}\gamma_1 = \frac{1}{2}$. При цьому на рис. 33.5 цільова функція $f(x)$ опукла і диференційовна на R^n, а її субдиференціал $\partial f(x) = \{f'(x)\}$ $\forall x \in R^2$. На рис. 33.6 показано випадок, коли цільова функція $f(x)$ опукла і не всюди диференційовна на R^2. При цьому вектор $-g^{(0)}$ не є напрямом спуску, де $g^{(0)} \in \partial f(x^{(0)})$.

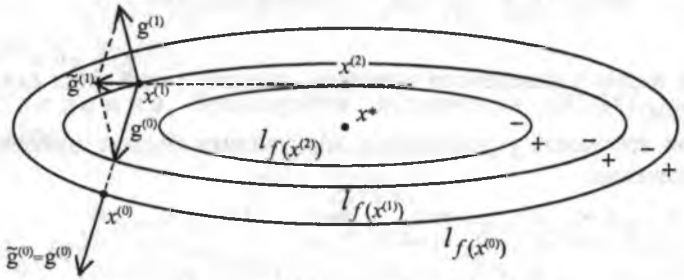


Рис. 33.5.

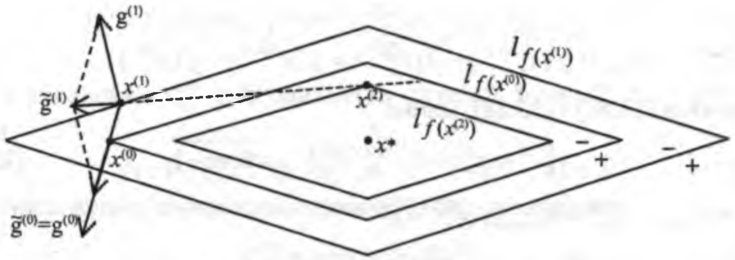


Рис. 33.6

З рис. 33.5 і рис. 33.6 видно, що рух у напрямі, зворотньому до усередненого вектора $\widetilde{g}^{(1)}$, є напрямом вздовж яру ліній рівня цільової функції (порівняти з рис. 33.1 і 33.2).

Нехай за допомогою методу (33.80)-(33.85) одержано сукупність точок

$$x^{(k-m)}, x^{(k-m+1)}, ..., x^{(k-1)}, x^{(k)}, \qquad (33.86)$$

де $k \geq m > 0$,

$$x^{(k-m+i+1)} = x^{(k-m+i)} - h_{k-m+i} \widetilde{\gamma}_{k-m+i} \widetilde{g}^{(k-m+i)}, \qquad (33.87)$$

$i = \overline{0, m-1}$, $h_{k-m+i} > 0$, усереднені вектори $\widetilde{g}^{(k-m+i)}$ визначаються за співвідношеннями (33.81)-(33.83), а $\widetilde{\gamma}_{k-m+i}$ – за співвідношенням (33.84).

Назвемо сукупність точок (33.86), (33.87) *повним* s-*тим циклом* усереднення, де s дорівнює цілій частині дробу $\frac{k}{m+1}$, тобто $s=\left[\frac{k}{m+1}\right]$, де $k \geq m > 0$.

Так, наприклад, при $m=2$ будемо мати:

при $k=2$ $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}$ – повний 0-й цикл,

при $k=5$ $x^{(3)}, x^{(4)}, x^{(5)}$ – повний 1-й цикл,

при $k=8$ $x^{(6)}, x^{(7)}, x^{(8)}$ – повний 2-й цикл

і т.д.

Як видно з наведеного прикладу, повний s-тий цикл складається з $m+1$ точки.

Для зручності у подальших міркуваннях будемо використовувати такі позначення:

$$x_s^{(0)} = x^{(k-m)}, x_s^{(1)} = x^{(k-m+1)}, ..., x_s^{(m-1)} = x^{(k-1)}, x_s^{(m)} = x^{(k)}, \tag{33.88}$$

$$\delta_s^{(0)} = \delta_{k-m} = f(x_s^{(0)}) - f(x_s^{(1)}) = f(x^{(k-m)}) - f(x^{(k-m+1)}),$$

$$\delta_s^{(1)} = \delta_{k-m+1} = f(x_s^{(1)}) - f(x_s^{(2)}) = f(x^{(k-m+1)}) - f(x^{(k-m+2)}), \tag{33.89}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\delta_s^{(m-1)} = \delta_{k-1} = f(x_s^{(m-1)}) - f(x_s^{(m)}) = f(x^{(k-1)}) - f(x^{(k)}).$$

Враховуючи (33.87) і (33.88), маємо

$$x_s^{(i+1)} = x_s^{(i)} - h_s^{(i)} \tilde{\gamma}_s^{(i)} \tilde{g}_s^{(i)}, \ i = \overline{0, m-1}, \tag{33.90}$$

де $h_s^{(i)} = h_{k-m+i}$, $\tilde{\gamma}_s^{(i)} = \tilde{\gamma}_{k-m+i}$, $\tilde{g}_s^{(i)} = \tilde{g}^{(k-m+i)}$.

Тоді точки $x_s^{(0)}, x_s^{(1)}, ..., x_s^{(m-1)}$ можна подати у вигляді

$$x_s^{(i)} = x^{(k)} + \sum_{j=i}^{m-1} h_s^{(j)} \tilde{\gamma}_s^{(j)} \tilde{g}_s^{(j)}, \ i = \overline{0, m-1}. \tag{33.91}$$

Припустимо, що для довільної точки $x^{(0)}$ лебегова множина

$$L(x^{(0)}) = \{x \in R^n \mid f(x) \leq f(x^{(0)})\}$$

обмежена. Тоді згідно теореми 16.6 опукла функція $f(x)$ на множині $L(x^{(0)})$ задовольняє умову Ліпшиця, тобто для будь-яких $x^{(1)} \in L(x^{(0)})$, $x^{(2)} \in L(x^{(0)})$ існує константа $K > 0$ така, що

$$| f(x^{(1)}) - f(x^{(2)}) | \leq K \| x^{(1)} - x^{(2)} \|. \tag{33.92}$$

Т е о р е м а 33.5. *Нехай має місце подання*

$$\tilde{g}^{(k)} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_k^{(i)} g^{(k-m+i)}, \tag{33.93}$$

де $0 \leq \lambda_k^{(i)} \leq \Lambda < +\infty$, $g^{(k-m+i)} \in \partial_{\varepsilon_{k-m+i}} f(x^{(k-m+i)})$, *точки* $x^{(k-m+i)}$ *визначаються співвідношенням* (33.87) *і* $\sigma_k = \sum_{i=0}^{m} \lambda_k^{(i)} > 0$.

Тоді для вектора $\nu^{(k)} = (\sigma_k)^{-1} \tilde{g}^{(k)}$ *існує* $\tilde{\mathrm{E}}_k \geq 0$ *таке, що*

$$f(x) - f(x^{(k)}) \geq \langle \nu^{(k)}, x - x^{(k)} \rangle - \tilde{\mathrm{E}}_k \quad \forall x \in R^n, \tag{33.94}$$

тобто $\nu^{(k)} \in \partial_{\tilde{\mathrm{E}}_k} f(x^{(k)})$.

Д о в е д е н н я. Враховуючи позначення (33.88), з (33.93) будемо мати

$$\tilde{g}^{(k)} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_k^{(i)} g_s^{(i)},$$

де $g_s^{(i)} \in \partial_{\varepsilon_s^{(i)}} f(x_s^{(i)})$, $\varepsilon_s^{(i)} = \varepsilon_{k-m+i}$, $g_s^{(i)} = g^{(k-m+i)}$, $x_s^{(i)} = x^{(k-m+i)}$, $i = \overline{0, m}$.

З урахуванням (33.89) подамо кожне значення $f(x_s^{(i)}) = f(x^{(k-m+i)})$, $i = \overline{0, m-1}$, через значення $f(x^{(k)})$:

$$f(x_s^{(i)}) = f(x^{(k)}) + \sum_{j=i}^{m-1} \delta_s^{(j)}, \ i = \overline{0, m-1}. \tag{33.95}$$

З означення $\varepsilon_s^{(i)}$-субградієнтна опуклої функції $f(x)$ в точці $x_s^{(i)}$ маємо

$$f(x) - f(x_s^{(i)}) \geq \langle g_s^{(i)}, x - x_s^{(i)} \rangle - \varepsilon_s^{(i)} \quad \forall x \in R^n. \tag{33.96}$$

Враховуючи припущення (див. (33.92)), покладемо

$$\tilde{\varepsilon}_s^{(i)} = \max\{\varepsilon_s^{(i)}, K d_s^{(i)}\}, \tag{33.97}$$

де K – константа Ліпшиця на обмеженій множині

$$L_k(x) = \{x \in R^n \mid f(x) \leq \max_{i=0,m} f(x_s^{(i)})\}.$$

Позначимо

$$d_s^{(i)} = \| x^{(k)} - x_s^{(i)} \| = \| x^{(k)} - x^{(k-m+i)} \| = d_{k-m+i}, \ i = \overline{0, m-1}. \tag{33.98}$$

Враховуючи (33.91), (33.95), (33.97), з (33.96) одержимо

$$f(x) - (f(x^{(k)}) + \sum_{j=i}^{m-1} \delta_s^{(j)}) \geq \langle g_s^{(i)}, x - (x^{(k)} + \sum_{j=i}^{m-1} h_s^{(j)} \tilde{\gamma}_s^{(j)} \tilde{g}_s^{(j)}) \rangle - \tilde{\varepsilon}_s^{(i)} \tag{33.99}$$

для будь-яких $x \in R^n$, $i = \overline{0, m-1}$.

Позначимо

$$\mathrm{E}_s^{(i)} = \tilde{\varepsilon}_s^{(i)} - \sum_{j=i}^{m-1}\delta_s^{(j)} + \sum_{j=i}^{m-1} h_s^{(j)}\tilde{\gamma}_s^{(j)}\langle \tilde{g}_s^{(j)}, g_s^{(i)}\rangle . \qquad (33.100)$$

Тоді з (33.99) маємо

$$f(x) - f(x^{(k)}) \geq \langle g_s^{(i)}, x - x^{(k)}\rangle - \mathrm{E}_s^{(i)} \qquad (33.101)$$

для будь-яких $x \in R^n$, $i = \overline{0, m-1}$.

Оскільки за умовою теореми $g^{(k)} \in \partial_{\varepsilon_k} f(x^{(k)})$, то

$$f(x) - f(x^{(k)}) \geq \langle g_s^{(m)}, x - x^{(k)}\rangle - \mathrm{E}_s^{(m)} \quad \forall x \in R^n, \qquad (33.102)$$

де $\mathrm{E}_s^{(m)} = \varepsilon_s^{(m)} = \varepsilon_k$, $g_s^{(m)} = g^{(k)}$.

Домножимо (33.101) на $\lambda_k^{(i)}$, $i = \overline{0, m-1}$, а (33.102) на $\lambda_k^{(m)}$, і додамо одержані нерівності для $i = \overline{0, m}$:

$$\sum_{i=0}^{m}\lambda_k^{(i)}(f(x) - f(x^{(k)})) \geq \sum_{i=0}^{m}\lambda_k^{(i)}\langle g_s^{(i)}, x - x^{(k)}\rangle - \sum_{i=0}^{m}\lambda_k^{(i)}\mathrm{E}_s^{(i)} \quad \forall x \in R^n ,$$

або

$$\sum_{i=0}^{m}\lambda_k^{(i)}(f(x) - f(x^{(k)})) \geq \langle \tilde{g}^{(k)}, x - x^{(k)}\rangle - \sum_{i=0}^{m}\lambda_k^{(i)}\mathrm{E}_s^{(i)} \quad \forall x \in R^n . \qquad (33.103)$$

Покладемо

$$\tilde{\mathrm{E}}_k = \max_{i=0,m} \mathrm{E}_s^{(i)} . \qquad (33.104)$$

Оскільки $\mathrm{E}_s^{(m)} = \varepsilon_k \geq 0$, то $\tilde{\mathrm{E}}_k \geq 0$. Тоді з (33.103), враховуючи, що $\sigma_k = \sum_{i=0}^{m}\lambda_k^{(i)} > 0$, маємо

$$f(x) - f(x^{(k)}) \geq (\sigma_k)^{-1}\langle \tilde{g}^{(k)}, x - x^{(k)}\rangle - \tilde{\mathrm{E}}_k \quad \forall x \in R^n ,$$

тобто вектор $v^{(k)} = (\sigma_k)^{-1}\tilde{g}^{(k)} \in \partial_{\tilde{\mathrm{E}}_k} f(x^{(k)})$, при цьому (див. доведення теореми 33.2) $v^{(k)} \in co\left(\bigcup_{i=0}^{m}\{g_s^{(i)}\}\right) = co\left(\bigcup_{i=0}^{m}\{g^{(k-m+i)}\}\right)$. Що й треба було довести.

Ця теорема дозволяє зробити висновок, що метод (33.80)-(33.85) є $\tilde{\mathrm{E}}_k$-субградієнтним методом, де $\tilde{\mathrm{E}}_k \geq 0$, з урахуванням співвідношень (33.88), (33.89), (33.95)-(33.100), (33.104), визначається так:

$$\tilde{\mathrm{E}}_k = \max_{i=0,m} \mathrm{E}_s^{(i)} ,$$

де

$$\mathrm{E}_s^{(i)} = \tilde{\varepsilon}_s^{(i)} - \Delta_s^{(i)} + \pi_s^{(i)} ,$$

$$\tilde{\varepsilon}_s^{(i)} = \max\{\varepsilon_s^{(i)}, Kd_s^{(i)}\} \geq 0 ,$$

$$\Delta_s^{(i)} = \sum_{j=i}^{m-1}\delta_s^{(j)} = f(x_s^{(i)}) - f(x^{(k)}) ,$$

$$\pi_s^{(i)} = \sum_{j=i}^{m-1} h_s^{(j)}\tilde{\gamma}_s^{(j)}\langle \tilde{g}_s^{(j)}, g_s^{(i)}\rangle ,\ i = \overline{0, m-1} ,$$

$$\mathrm{E}_s^{(m)} = \varepsilon_s^{(m)} ,$$

або в інших позначеннях

$$\tilde{\mathrm{E}}_k = \max_{i=0,m} \mathrm{E}_{k-m+i} , \qquad (33.105)$$

де

$$\mathrm{E}_{k-m+i} = \tilde{\varepsilon}_{k-m+i} - \Delta_{k-m+i} + \pi_{k-m+i} , \qquad (33.106)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{k-m+i} = \max\{\varepsilon_{k-m+i}, Kd_{k-m+i}\} \geq 0 , \qquad (33.107)$$

$$d_{k-m+i} = \| x^{(k-m+i)} - x^{(k)} \| , \qquad (33.108)$$

$$\Delta_{k-m+i} = f(x^{(k-m+i)}) - f(x^{(k)}) , \qquad (33.109)$$

$$\pi_{k-m+i} = \sum_{j=i}^{m-1} h_{k-m+j}\tilde{\gamma}_{k-m+j}\langle \tilde{g}^{(k-m+j)}, g^{(k-m+i)}\rangle ,\ i = \overline{0, m-1} , \qquad (33.110)$$

$$\mathrm{E}_k = \varepsilon_k . \qquad (33.111)$$

Аналогічно до того, як було визначено умови збіжності методу (33.2)-(33.8), визначимо умови збіжності методу (33.80)-(33.85). Для цього спочатку з'ясуємо, коли

$$\tilde{\mathrm{E}}_k \to 0 \text{ при } k \to \infty . \qquad (33.112)$$

З (33.105)-(33.111), враховуючи очевидне співвідношення

$$\mathrm{E}_{k-m+i} \leq \tilde{\varepsilon}_{k-m+i} + |\Delta_{k-m+i}| + |\pi_{k-m+i}| ,\ i = \overline{0, m-1} ,$$

для

$$\tilde{\Theta}_k = \max_{i=0,m} \Theta_{k-m+i} , \qquad (33.113)$$

де

$$\Theta_{k-m+i} = \tilde{\varepsilon}_{k-m+i} + |\Delta_{k-m+i}| + |\pi_{k-m+i}| ,\ i = \overline{0, m-1},\ \Theta_k = \varepsilon_k , \qquad (33.114)$$

маємо

$$0 \leq \tilde{\mathrm{E}}_k \leq \tilde{\Theta}_k . \qquad (33.115)$$

З (33.113)-(33.115) випливає, що для того щоб виконувалась умова (33.112), досить щоб $\tilde{\Theta}_k \to 0$ при $k \to \infty$. Ця умова при скінченному і фіксованому $m > 0$, з урахуванням (33.105)-(33.111), задовольняється при виконанні, наприклад, наступних вимог:

$$\varepsilon_k \to 0 \text{ при } k \to \infty, \qquad (33.116)$$

$$d_{k-m+i} = \| x^{(k-m+i)} - x^{(k)} \| \le \varepsilon_{k-m+i}, i = \overline{0, m-1}, \qquad (33.117)$$

$$| \Delta_{k-m+i} | = | f(x^{(k-m+i)}) - f(x^{(k)}) | \le \varepsilon_{k-m+i}, i = \overline{0, m-1}, \qquad (33.118)$$

$$h_k \to 0 \text{ при } k \to \infty. \qquad (33.119)$$

Умова (33.116) є традиційною умовою збіжності ε_k-субградієнтних методів. Умова (33.117) разом з (33.116) забезпечують виконання умови $\tilde{\varepsilon}_{k-m+i} \to 0$ при $k \to \infty$, а умова (33.118) разом з (33.116) забезпечують виконання умови $| \Delta_{k-m+i} | \to 0$ при $k \to \infty$ в (33.114). При цьому зауважимо, що якщо справджується припущення про обмеженість лебегової множини функції $f(x)$ при довільному $x^{(0)} \in R^n$, з умови (33.92) маємо

$$| f(x^{(k-m+i)}) - f(x^{(k)}) | \le K \| x^{(k-m+i)} - x^{(k)} \|, \ i = \overline{0, m-1},$$

де $K > 0$. Тоді умову (33.118) можна замінити умовою (33.117) і при цьому буде $| \Delta_{k-m+i} | \to 0$ при $k \to \infty$.

При виконанні умови (33.119) з урахуванням умови (33.84) можна показати, що

$$| \pi_{k-m+i} | \le \sum_{j=i}^{m-1} h_{k-m+j} \tilde{\gamma}_{k-m+j} | \langle \tilde{g}^{(k-m+j)}, g^{(k-m+i)} \rangle | \to 0 \qquad (33.120)$$

при $i = \overline{0, m-1}$ і $k \to \infty$.

Дійсно, з урахуванням (33.84) і припущення, що $\| g \| \le M < +\infty$ для будь-яких $g \in \partial_\varepsilon f(x)$ і при будь-яких $x \in R^n$, $\varepsilon \ge 0$, маємо

$$| \pi_{k-m+i} | \le \Gamma M^2 \sum_{j=i}^{m-1} h_{k-m+j}, \ i = \overline{0, m-1}.$$

Звідси при скінченному $m > 0$ і виконанні умови (33.119) $\sum_{j=i}^{m-1} h_{k-m+j} \le \sum_{j=0}^{m-1} h_{k-m+j} \to 0$ при $k \to \infty$, а отже виконується умова (33.120).

Т е о р е м а 33.6. *Нехай послідовність точок* $\{x^{(k)}\}$ *генерується за методом* (33.80)-(33.85), *при цьому*

$$\varepsilon_k \to 0 \ \textit{при} \ k \to \infty,$$

$$d_{k-m+i} = \| x^{(k-m+i)} - x^{(k)} \| \le \varepsilon_{k-m+i}, \ i = \overline{0, m-1}, \ k \ge m > 0,$$

$$h_k = t_k r_k, \ \textit{де} \ \ t_k \in (0; T], \ T < +\infty, \ k = 0, 1, \ldots,$$

$$r_k > 0, \ r_k \to 0 \text{ при } k \to \infty, \ \sum_{k=0}^{\infty} r_k = \infty,$$

для будь-яких $g \in \partial_\varepsilon f(x)$ $\| g \| \le M < +\infty$ *при довільних* $x \in R^n$ *і* $\varepsilon \ge 0$.

Тоді, якщо множина розв'язків X^* *задачі* (33.1) *непорожня і обмежена, то при* $k \to \infty$

$$\rho(x^{(k)}, X^*) \to 0, \ f(x^{(k)}) \to f^*.$$

В умовах теореми $\tilde{\mathrm{E}}_k \ge 0$, яке визначається співвідношеннями (33.105)-(33.111), задовольняє умову $\tilde{\mathrm{E}}_k \to 0$ при $k \to \infty$, тоді доведення теореми можна провести аналогічно до доведення теореми 33.2.

Зауважимо, що умови (33.117)-(33.118) мають лише теоретичне застосування, оскільки при чисельній реалізації методу (33.80)-(33.85) їх перевірити під час ітераційного процесу практично неможливо (це пов'язано з тим, що точки $x^{(k)}$ наперед невідомі). Тому при побудові конкретних алгоритмів реалізації методу (33.80)-(33.85) можна використовувати, наприклад, такі умови:

$$\| x^{(k-m)} - x^{(k-m+i)} \| \le \varepsilon_{k-m}, \ i = \overline{0, m-1}, \qquad (33.121)$$

$$| f(x^{(k-m)}) - f(x^{(k-m+i)}) | \le \varepsilon_{k-m}, \ i = \overline{0, m-1}, \qquad (33.122)$$

які є більш природними. Зокрема, виконання умови (33.121) забезпечує виконання умови

$$d_{k-m+i} = \| x^{(k-m+i)} - x^{(k)} \| \le 2\varepsilon_{k-m}, \ i = \overline{0, m-1},$$

(див. рис. 33.7), з якої випливає умова

$$\Delta_{k-m+i} = | f(x^{(k-m+i)}) - f(x^{(k)}) | \le 2K\varepsilon_{k-m}, \ i = \overline{0, m-1}.$$

Звідси маємо, що $d_{k-m+i} \to 0$ і $| \Delta_{k-m+i} | \to 0$ при $k \to \infty$, оскільки $\varepsilon_{k-m} \to 0$ при $k \to \infty$.

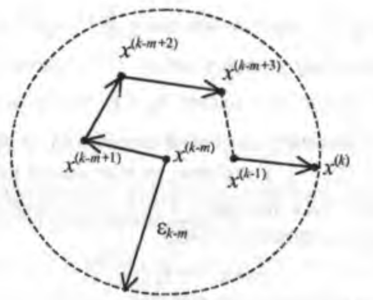


Рис. 33.7.

При цьому порушення умови (33.121) або (33.122) є ознакою припинення процедури накопичування ε_k-субградієнтів на k-му кроці, оскільки у першому випадку зроблено досить великий крок в обраному усередненому напрямі $-\tilde{g}^{(k-m+i)}$, а у другому випадку або зроблено суттєвий спуск щодо функції $f(x)$ (при $f(x^{(k-m)}) - f(x^{(k-m+i)}) > 0$), або поточний усереднений напрям руху є невдалим (при $f(x^{(k-m)}) - f(x^{(k-m+i)}) \le 0$), і тому накопичування варто припинити.

Метод (33.80)-(33.85) з усередненням ε_k -субградієнтів, як і метод (33.2)-(33.7), має загальний характер і набуває конкретного змісту при конкретизації правил регулювання його параметрів та управляючих послідовностей. При цьому можна використовувати способи регулювання крокових і нормуючих множників, а також правила усереднення ε_k -субградієнтів, описані у попередньому пункті.

Наведемо одну схему алгоритмів з усередненням ε_k -субградієнтів, яка є конкретною реалізацією методу (33.80)-(33.85) і передбачає певні адаптаційні засоби.

Задати управляючі послідовності

$$\{\varepsilon_k\}, \text{ де } \varepsilon_k > 0, \varepsilon_k \to 0, \tag{33.123}$$

$$\{\tau_k\}, \text{ де } \tau_k > 0, \tau_k \to 0, \tag{33.124}$$

$$\{r_k\}, \text{ де } r_k > 0, r_k \to 0, \sum_{k=0}^{\infty} r_k = \infty, \tag{33.125}$$

а також обрати конкретне правило усереднення ε_k -субградієнтів (див. (33.4)) і правило регулювання нормуючих множників γ_k (див. (33.5)).

Зафіксувати досить мале число $\varepsilon > 0$, яке визначає точність розв'язування задачі (33.1), число $m \in Z^+$, яке визначає максимальну кількість векторів, що будуть усереднюватись на кожному k -му кроці.

Обрати довільне початкове наближення $x^{(0)} \in R^n$ і покласти $k := 0$, $s := 0$, $j := 0$.

К р о к 1. Знайти довільний вектор $g^{(k)} \in \partial_{\varepsilon_k} f(x^{(k)})$ і покласти $x_s^{(0)} = x^{(k)}$, $G_s = \{g_s^{(0)}\}$, де $g_s^{(0)} = g^{(k)}$.

К р о к 2. Якщо $\| g^{(k)} \| > \varepsilon_k$, то покласти $\widetilde{g}^{(k)} = g^{(k)}, \widetilde{\gamma}_k = \gamma_k$ і перейти до виконання кроку 3. У протилежному випадку точку $x^{(k)}$ можна вважати ε_k – стаціонарною точкою цільової функції. Якщо при цьому $\varepsilon_k \le \varepsilon$, то на цьому роботу за алгоритмом можна припинити, за наближений розв'язок задачі (33.1) прийняти точку $x^{(k)}$, тобто покласти $x^* := x^{(k)}$, $f^* := f(x^{(k)})$, і перейти до виконання кроку 13. Якщо ж $\varepsilon_k > \varepsilon$, то на цьому k -й цикл завершується, покласти $k := k+1$ і перейти до виконання кроку 1.

К р о к 3. Визначити допоміжну точку

$$\bar{x} = x^{(k)} - r_k \widetilde{\gamma}_k \widetilde{g}^{(k)}.$$

К р о к 4. Якщо

$$f(x^{(k)}) - f(\bar{x}) > 0,$$

тобто пробний крок зроблено у напрямі спадання функції $f(x)$, то перейти до виконання кроку 5, інакше покласти $x^{(k+1)} = \bar{x}$ і перейти до виконання кроку 6.

К р о к 5. Знайти точку $x^{(k+1)} = x^{(k)} - h_k \widetilde{\gamma}_k \widetilde{g}^{(k)}$, де h_k є наближеним розв'язком задачі одновимірної мінімізації

$$\min_{h>0} f(x^{(k)} - h\widetilde{\gamma}_k \widetilde{g}^{(k)}), \tag{33.126}$$

тобто величина кроку задовольняє умову

$$0 < \underline{h}_k \le h_k \le \bar{h}_k < \infty,$$

де $[\underline{h}_k; \bar{h}_k]$ – відрізок локалізації точки мінімуму функції $f(x^{(k)} - h\widetilde{\gamma}_k \widetilde{g}^{(k+1)})$ за h, при цьому $0 < \bar{h}_k^{(j)} - \underline{h}_k^{(j)} < \tau_k$, де τ_k – точність розв'язування задачі (33.126).

К р о к 6. Якщо

$$| f(x_s^{(0)}) - f(x^{(k+1)}) | > \varepsilon_s \tag{33.127}$$

або

$$\| x_s^{(0)} - x^{(k+1)} \| > \varepsilon_s, \tag{33.128}$$

то припинити процес накопичування ε_k-субградієнтів в s-му циклі, покласти $s := s+1, k := k+1, j := 0$ і перейти до виконання кроку 1, інакше перейти до виконання кроку 7.

К р о к 7. Якщо $\varepsilon_s \le \varepsilon$, то роботу за алгоритмом припинити, за наближений розв'язок задачі (33.1) прийняти точку $x^{(k+1)}$, тобто покласти $x^* := x^{(k+1)}$, $f^* := f(x^{(k+1)})$, і перейти до виконання кроку 13, інакше перейти до виконання кроку 8.

К р о к 8. Якщо $j+1 \le m$, то перейти до виконання кроку 9, інакше припинити процес накопичування і перейти до виконання кроку 12.

К р о к 9. Знайти довільний вектор $g^{(k+1)} \in \partial_{\varepsilon_{k+1}} f(x^{(k+1)})$ і покласти

$$G_s = G_s \cup \{g_s^{(j+1)}\} = \{g_s^{(0)}, g_s^{(1)}, ..., g_s^{(j)}, g_s^{(j+1)}\}, \text{ де } g_s^{(j+1)} = g^{(k+1)}.$$

К р о к 10. Знайти вектор $\widetilde{g}^{(k+1)}$, який є результатом усереднення векторів з множини G_s, тобто

$$\widetilde{g}^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{j+1} \lambda_{k+1}^{(i)} g_s^{(i)} = \sum_{i=0}^{j+1} \lambda_{k+1}^{(i)} g^{(k-j+i)},$$

де $g_s^{(i)} \in G_s$, $0 \le \lambda_{k+1}^{(i)} \le \Lambda < \infty$, $i = \overline{0, j+1}$, обчислити $\sigma_{k+1} = \sum_{i=0}^{j+1} \lambda_{k+1}^{(i)} > 0$ і покласти $\widetilde{\gamma}_{k+1} = (\sigma_{k+1})^{-1} \gamma_{k+1}$.

К р о к 11. Якщо

$$(\sigma_{k+1})^{-1} \| \widetilde{g}^{(k+1)} \| \le \varepsilon_k, \tag{33.129}$$

то припинити процес накопичування і перейти до виконання кроку 12, інакше покласти $k = k+1$, $j = j+1$ і перейти до виконання кроку 3.

К р о к 12. Покласти $x_{s+1}^{(0)} = x^{(k+1)}$, $G_{s+1} = \{g_{s+1}^{(0)}\}$, де $g_{s+1}^{(0)} = g^{(k+1)}$, $\widetilde{g}^{(k+1)} = g^{(k+1)}$, $\widetilde{\gamma}_{k+1} = \gamma_{k+1}$, $s := s+1$, $k := k+1$, $j := 0$, і перейти до виконання кроку 3.

К р о к 13. Вивести результати роботи за алгоритмом: x^*, f^*.

Кінець.

З а у в а ж е н н я.

1. Наведена схема, з урахуванням зроблених зауважень (див. (33.121), (33.(122)), задовольняє умови теореми 33.6 про збіжність послідовних наближень за методом усереднення ε_k -субградієнтів (33.80)-(33.85).

2. Управляючі послідовності (33.123) і (33.124) будуються так, як і у попередньому методі усереднення (33.2)-(33.8).

3. Для більшої адаптивності наведеної схеми алгоритмів з усередненням ε_k-субградієнтів можна ввести ще дві управляючі послідовності $\{d_k\}$, $\{\eta_k\}$, які використовуються замість послідовності $\{\varepsilon_k\}$ в умовах (33.128) і (33.129) відповідно (див. зауваження 2 до попередньої схеми усереднення).

4. В s-му циклі накопичування на кроках 1 і 9 можна шукати вектори $g^{(k)}$ і $g^{(k+1)}$ відповідно з $\partial_{\varepsilon_s} f(x^{(k)})$ і $\partial_{\varepsilon_s} f(x^{(k+1)})$, що дасть можливість краще регулювати процес накопичування і при визначенні усередненого напряму використовувати більш багату множину G_s.

Зазначимо, що на основі розглянутих методів (33.2)-(33.8) і (33.80)-(33.85) можна запропонувати метод усереднення ε_k-субградієнтів, який є їх комбініцією, при цьому спочатку необхідно робити накопичування в околі поточного наближення за методом (33.2)-(33.8), який утворює внутрішній цикл, а після його завершення при певних умовах напрям руху у наступній точці визначати з урахуванням попереднього усередненого напряму, або частини ε_k-субградієнтів, знайдених на попередніх кроках зовнішнього циклу.

Запитання для самоконтролю

1. Чим обумовлена доцільність використання процедури усереднення напрямів руху в задачах безумовної оптимізації?
2. Які схеми накопичування ε_k-субградієнтів використовуються в методах усереднення?
3. У чому полягає сутність методу з усередненням ε_k-субградієнтів, обчислених в околі поточного наближення?
4. За яких умов метод з усередненням ε_k-субградієнтів, обчислених в околі поточного наближення, збігається до розв'язку задачі безумовної мінімізації?
5. Які правила регулювання крокових множників використовуються в методах з усередненням ε_k-субградієнтів?
6. У чому полягає сутність методу з усередненням ε_k-субградієнтів, знайдених на попередніх ітераціях?
7. За яких умов метод з усередненням ε_k-субградієнтів, знайдених на попередніх ітераціях, збігається до розв'язку задачі безумовної мінімізації?
8. Які правила регулювання параметрів використовуються в методах з усередненням ε_k-субградієнтів?

Вправи для самостійного виконання

1. Довести теореми 33.1, 33.3, 33.4, 33.5 і леми 33.3, 33.4.

2. Скласти схему алгоритму розв'язування задачі (33.77) про знаходження найближчої до початку координат точки опуклої оболонки скінченної кількості точок і описати відповідну програму для комп'ютера однією з мов програмування.

3. Скласти схему методу усереднення ε_k-субградієнтів, який є комбініцією методів (33.2)-(33.8) і (33.80)-(33.85).

4. Однією з мов програмування описати програми, за якими реалізуються схеми методів (33.2)-(33.8) і (33.80)-(33.85) з усередненням ε_k-субградієнтів з різними правилами усереднення: (33.58), (33.59)-(33.61) і (33.62) (з використанням допоміжної програми із завдання 2).

5. За допомогою розроблених у завданні 4 програм для комп'ютера знайти наближені розв'язки задач мінімізації функцій із завдання 5 §31 і порівняти результати з результатами, одержаними за субградієнтними методами.

П р и м і т к а. Для обчислення ε_k-субградієнтів можна використати матеріал §18.

6. Провести чисельний експеримент з метою дослідження ефективності методів з усередненням ε_k-субградієнтів на тестових задачах із завдання 16 §28. Дослідити вплив параметра m, який визначає максимальну кількість накопичувань, на ефективність цих методів, а також порівняти ефективність різних схем усереднення. Одержані результати порівняти з результатами, які одержані за допомогою градієнтних методів (див. завдання 16 §28), методів Ньютона (див. завдання 12 §29), методу спряжених градієнтів (див. завдання 5 §30) і субградієнтних методів (див. завдання 5 §31).

7. Провести чисельний експеримент з метою дослідження ефективності методів з усередненням ε_k-субградієнтних на тестових задачах із завдання 7 §31. Одержані результати порівняти з результатами, які одержані за допомогою субградієнтних методів.

§ 34. Метод проекції градієнта

Розв'язування задач умовної оптимізації – більш складна проблема, ніж розв'язування задач безумовної оптимізації. Тому й розробка чисельних методів розв'язування задач оптимізації з обмеженнями є більш складною проблемою, ніж побудова методів безумовної оптимізації. Ефективні методи вдається побудувати лише для спеціальних класів задач умовної оптимізації, наприклад, лінійного, квадратичного і опуклого програмування.

При побудові чисельних методів розв'язування задач умовної оптимізації використовують два основних підходи. Перший полягає у тому, щоб, контролюючи безпосередньо виконання обмежень задачі, рухатися до її розв'язку, будуючи послідовність допустимих або «майже» допустимих точок так, щоб значення цільової функції в них монотонно спадали – для задачі мінімізації або зростали – для задачі максимізації. Такі методи називають *методами спуску* (*підйому*) за аналогією з методами безумовної оптимізації. До таких методів можна віднести метод проекції градієнта, метод умовного градієнта, метод можливих напрямів. Інший підхід полягає у тому, щоб розв'язування задачі оптимізації з обмеженнями звести до розв'язування послідовності спеціальним чином побудованих допоміжних задач безумовної оптимізації. До таких методів відноситься, зокрема, метод штрафних функцій. Нижче будуть розглянуті методи, що реалізують зазначені підходи.

Для задач безумовної мінімізації досить розповсюдженими є методи градієнтного спуску (див. §28). Але для задач з обмеженнями напрям вздовж антиградієнта не обов'язково є можливим напрямом відносно заданих обмежень. Для випадку, коли допустима множина опукла, можна знайти можливий напрям, використовуючи операцію проектування антиградієнта на допустиму множину.

1. Опис методу. Розглянемо метод проекції градієнта для розв'язування задачі

$$f(x) \to \min, \quad x \in X, \tag{34.1}$$

де X – замкнена опукла множина в R^n, $f(x)$ – диференційовна функція на X.

Нагадаємо (див. §12), що *проекцією* точки $y \in R^n$ на множину $X \subset R^n$ називається точка $p = P_X(y) \in X$ така, що для довільних точок $x \in X$ виконується умова

$$\| p - y \| \leq \| x - y \|, \tag{34.2}$$

тобто це точка множини X, яка є найближчою до точки $y \in R^n$ серед усіх точок множини X: $\| p - y \| = \inf\limits_{x \in X} \| x - y \|$.

Очевидно, що коли $y \in X$, то проекція $p = P_X(y)$ співпадає з y.

Нехай $x^{(0)} \in X$ – деяке початкове наближення до розв'язку задачі (34.1).

За методом проекції градієнта наступна точка наближення до розв'язку задачі (34.1) обирається за правилом:

$$x^{(k+1)} = P_X(x^{(k)} - h_k f'(x^{(k)})), \; k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{34.3}$$

де $h_k > 0$ – кроковий множник.

Як було показано (див. теорему 12.1), для замкненої опуклої множини X і будь-якої точки $y \in R^n$ проекція $p = P_X(y)$ цієї точки на множину X існує і єдина. Тому, якщо в (34.3) задати спосіб визначення параметра h_k, $k = 0,1,\ldots$, то послідовність $\{x^{(k)}\}$ буде однозначно визначеною за правилом (34.3).

Якщо на деякому кроці ітераційного процесу (34.3) буде $x^{(k+1)} = x^{(k)}$ (наприклад при $f'(x^{(k)}) = O_n$), то процес припиняється. У цьому випадку точка $x^{(k)}$ задовільняє необхідну умову оптимальності (див. теорему 20.4):

$$x^{(k)} = P_X(x^{(k)} - h_k f'(x^{(k)}))$$

і для з'ясування того, чи є точка $x^{(k)}$ розв'язком задачі (34.1), треба проводити додаткові дослідження функції $f(x)$ в околі точки $x^{(k)}$. Зауважимо, що якщо $f(x)$ – опукла функція, то тоді $x^{(k)}$ є розв'язком задачі (34.1) (див. теорему 20.4).

При практичній реалізації ітераційний процес (34.3) за методом проекції градієнта завершується при виконанні однієї з нерівностей $\| f'(x^{(k)}) \| < \varepsilon$ або $\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| < \varepsilon$, де параметр $\varepsilon > 0$ визначає точність розв'язування задачі (34.1). При цьому покладають $x^* \approx x^{(k)}$, $f^* \approx f(x^{(k)})$.

З а у в а ж е н н я. Якщо $X = R^n$, то метод (34.3) є звичайним градієнтним методом безумовної оптимізації.

Вибираючи в (34.3) різні способи побудови послідовності $\{h_k\}$, зокрема такі, які були використані в градієнтних методах безумовної оптимізації (див. §28), можна одержати різні варіанти методу проекції градієнта.

1. Розглянемо правило вибору послідовності $\{h_k\}$, яке є певним аналогом правила вибору крокового множника в методі найшвидшого спуску:

$$f(P_X(x^{(k)} - h_k f'(x^{(k)}))) = \inf_{h \geq 0} f(P_X(x^{(k)} - h f'(x^{(k)}))),$$

тобто

$$h_k = \arg\min_{h \ge 0} f(P_X(x^{(k)} - hf'(x^{(k)}))). \qquad (34.4)$$

На практиці в методі проекції градієнта для спрощення обчислень при визначенні h_k замість правила (34.4) використовують правило

$$h_k = \arg\min_{h \ge 0} f(x^{(k)} - hf'(x^{(k)})). \qquad (34.5)$$

Очевидно, що при $X = R^n$ методи (34.3), (34.4) і (34.3), (34.5) співпадають і є методами найшвидшого спуску.

З а у в а ж е н н я. Оскільки величину кроку h_k в умовах (34.4) і (34.5) знайти точно вдається дуже рідко, то на практиці h_k визначається наближено із заданою точністю.

На рисунках 34.1 і 34.2 подано геометричну інтерпретацію методів (34.3), (34.4) і (34.3), (34.5) відповідно. З рисунків видно, що метод (34.3), (34.4) швидше збігається до розв'язку, але реально процедура знаходження точки

$$\bar{x}^{(k)} = x^{(k)} - h_k f'(x^{(k)}),$$

де h_k задовольняє умову (34.4), складніша, ніж пошук точки $\bar{x}^{(k)}$, де h_k задовольняє умову (34.5).

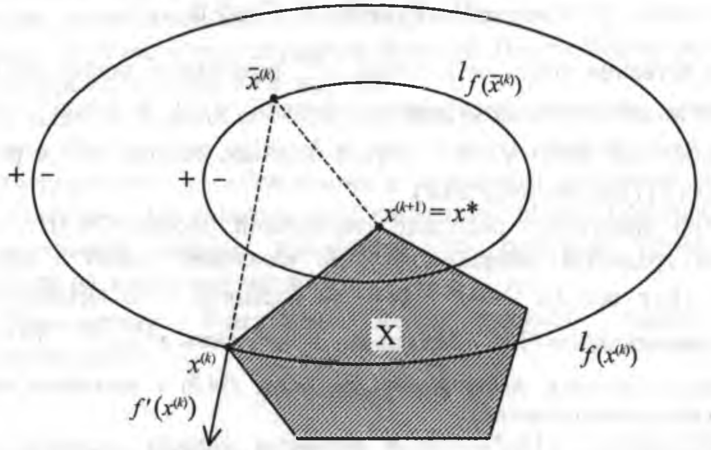


Рис. 34.1.

2. Значення параметра $h_k > 0$ в (34.3) можна обирати так, щоб виконувалась умова монотонності

$$f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)}). \qquad (34.6)$$

При цьому спочатку вибирають деяку константу $h > 0$ і покладають $h_k = h$.

Якщо

$$f(P_X(x^{(k)} - h_k f'(x^{(k)}))) < f(x^{(k)}), \qquad (34.7)$$

то переходять до наступного $(k+1)$-го кроку. В протилежному випадку покладають $h_k = \alpha h_k$, де $\alpha \in (0; 1)$ (наприклад, $\alpha = 2^{-1}$) і повторюють перевірку умови монотонності (34.7). Зменшення кроку здійснюють доти, поки не виконається умова (34.7).

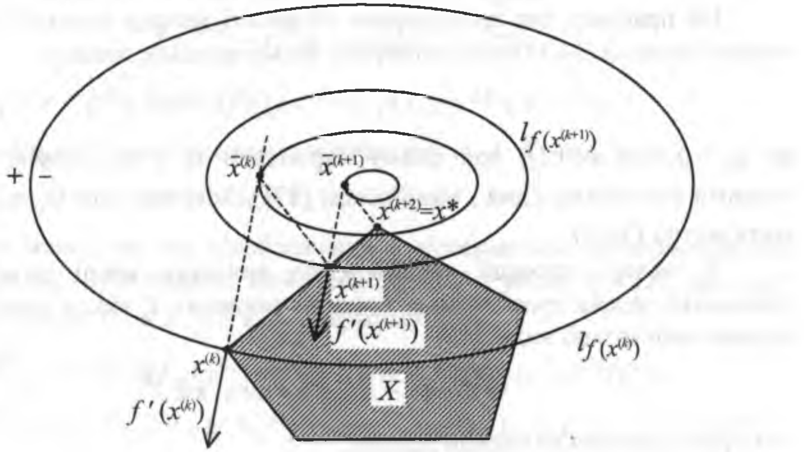


Рис. 34.2.

3. У (34.3) величину h_k можна обирати за апріорним правилом

$$h_k > 0,\ k = 0, 1, \ldots,\ \sum_{k=0}^{\infty} h_k = \infty,\ \sum_{k=0}^{\infty} h_k^2 < +\infty, \qquad (34.8)$$

наприклад, $h_k = \dfrac{C}{k+1}$, де $C = const > 0$, $k = 0, 1, \ldots$.

4. Нехай функція $f(x) \in C^{1,1}(X)$, тобто належить до класу функцій, градієнти яких на множині X задовольняють умову Ліпшиця, тобто для будь-яких точок $x^{(1)} \in X, x^{(2)} \in X$ існує константа $L > 0$ така, що

$$\| f'(x^{(1)}) - f'(x^{(2)}) \| \le L \| x^{(1)} - x^{(2)} \|.$$

Тоді в (34.3) параметр h_k можна обирати як будь-яке число, що задовольняє умови

$$0 < \varepsilon_0 \le h_k \le \frac{2}{L + 2\varepsilon} < \frac{2}{L}, \qquad (34.9)$$

де $\varepsilon_0 > 0, \varepsilon > 0$ – параметри методу.

5. Параметр h_k можна обирати з умови

$$f(x^{(k)}) - f(P_X(x^{(k)} - h_k f'(x^{(k)}))) \ge$$
$$\ge \varepsilon \| x^{(k)} - P_X(x^{(k)} - h_k f'(x^{(k)})) \|^2, \qquad (34.10)$$

де $\varepsilon > 0$ – параметр методу.

Для знаходження такого h_k можна скористатися процедурою, яка була описана при виборі h_k за правилом монотонності (34.7). При цьому можна показати, що для функції $f(x)\in C^{1,1}(X)$ умова (34.10) виконається за скінченну кількість кроків.

На практиці для прискорення збіжності методу проекції градієнта замість правила (34.3) використовують більш загальне правило

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k (P_X(x^{(k)} - h_k f'(x^{(k)})) - x^{(k)}), \qquad (34.11)$$

де $h_k > 0$, $\alpha_k \in (0;1]$, при цьому параметри h_k і α_k можна обирати різними способами (див., наприклад, [57]). Зокрема при $\alpha_k = 1$ будемо мати метод (34.3).

У методі проекції градієнта на кожному кроці розв'язується допоміжна задача проектування точки на множину X, яка, у свою чергу, є задачею мінімізації виду

$$\varphi(x) = \| x - x^{(k)} \|^2 \to \min, \ x\in X \qquad (34.12)$$

і яка розв'язується не завжди просто.

Тому метод проекції градієнта, як правило, використовують лише у тих випадках, коли проекція точки на множину X шукається досить легко. Наприклад, коли множина X являє собою гіперплощину, кулю, півпростір, n-вимірний паралелепіпед, додатній ортант, то задача проектування розв'язується в явному вигляді (див. приклад 12.1 і завдання 2 §12).

Коли ж множина X задається системою більш-менш складних рівнянь і/або нерівностей, то метод проекції градієнта в описаному варіанті практично незастосовний, оскільки задачу (34.12), взагалі кажучи, розв'язати не простіше, ніж задачу (34.1). У таких випадках іноді в методі проекції градієнта задачу проектування на множину X замінюють проектуванням на лінійний многовид (поліедр), що апроксимує множину X в околі поточної точки $x^{(k)}$ методу (34.3) (див., наприклад, [73]).

2. Збіжність методу. Розглянемо умови збіжності методу проекції градієнта для різних способів визначення послідовності $\{h_k\}$.

Т е о р е м а 34.1. *Нехай множина X замкнена і опукла в R^n, функція $f(x)$ сильно опукла з константою $m > 0$ і диференційовна на X, причому її градієнт задовільняє умову Ліпшиця:*

$$\| f'(x^{(1)}) - f'(x^{(2)}) \| \le L \| x^{(1)} - x^{(2)} \| \ \forall x^{(1)} \in X, x^{(2)} \in X, \qquad (34.13)$$

де $L > 0$ – константа Ліпшиця.

Тоді послідовність $\{x^{(k)}\}$, яка генерується за правилом (34.3), *де $x^{(0)}$ – довільна точка з X, а $h_k = h \in \left(0; \frac{4m}{L^2}\right)$, збігається до розв'язку $x^* \in X$ задачі* (34.1) *зі швидкістю геометричної прогресії*:

$$\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| \le q(h) \| x^{(k)} - x^* \|,$$

де $q(h) = \sqrt{1 + L^2 h^2 - 4hm} \in (0;1)$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо відображення $A: X \to X$ виду

$$Ax = P_X(x - hf'(x)).$$

Покажемо, що це відображення є стискаючим. Використовуючи нерівність (20.12) в теоремі 20.4, теорему 15.5 і умову (34.13), для двох довільних точок $x^{(1)} \in X, x^{(2)} \in X$ одержимо

$$\| Ax^{(1)} - Ax^{(2)} \|^2 = \| P_X(x^{(1)} - hf'(x^{(1)})) - P_X(x^{(2)} - hf'(x^{(2)})) \|^2 \le$$
$$\le \| x^{(1)} - hf'(x^{(1)}) - x^{(2)} + hf'(x^{(2)}) \|^2 = \| (x^{(1)} - x^{(2)}) - h(f'(x^{(1)}) - f'(x^{(2)})) \|^2 \le$$
$$\le \| x^{(1)} - x^{(2)} \|^2 - 2h\langle x^{(1)} - x^{(2)}, f'(x^{(1)}) - f'(x^{(2)})\rangle + h^2 \| f'(x^{(1)}) - f'(x^{(2)}) \|^2 \le$$
$$\le \| x^{(1)} - x^{(2)} \|^2 + h^2 L^2 \| x^{(1)} - x^{(2)} \| - 2h2m \| x^{(1)} - x^{(2)} \|^2 =$$
$$= (1 + h^2 L^2 - 4hm) \| x^{(1)} - x^{(2)} \|^2.$$

Звідси безпосередньо випливає, що $q^2(h) = 1 + L^2 h^2 - 4hm > 0$ і

$$\| Ax^{(1)} - Ax^{(2)} \| \le q(h) \| x^{(1)} - x^{(2)} \|. \qquad (34.14)$$

Оскільки $h \in \left(0; \frac{4m}{L^2}\right)$, то $q(h) \in (0;1)$ і, відповідно, відображення A – стискаюче. Крім того, згідно леми 7.1 множина X, як будь-яка замкнена множина в R^n, є повним метричним простором. Тоді, в силу принципу стискаючих відображень, для ітераційного процесу (34.3), який в умовах теореми записується у вигляді

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)},$$

маємо $x^{(k)} \to x^*$ при $k \to \infty$, де $x^* \in X$ – нерухома точка відображення A, тобто $x^* = Ax^*$.

Згідно теореми 20.3 точка $x^* \in X$ є розв'язком задачі (34.1). Нарешті, з нерівності (34.14) випливає, що

$$\| x^{(k+1)} - x^* \| = \| Ax^{(k)} - Ax^* \| \le q(h) \| x^{(k)} - x^* \|,$$

де $q(h) \in (0;1)$, що й треба було довести.

Т е о р е м а 34.2. *Нехай X – замкнена опукла множина в* R^n, *функція* $f(x)\in C^{1,1}(X)$ *і обмежена знизу на X. Тоді для послідовності* $\{x^{(k)}\}$, *яка одержана за методом* (34.3), (34.9) *для довільного початкового наближення* $x^{(0)}\in X$, *має місце співвідношення*

$$\lim_{k\to\infty}\| x^{(k+1)}-x^{(k)}\|=0.$$

Якщо при цьому множина Лебега $L_f(x^{(0)})=\{x\in X \mid f(x)\le f(x^{(0)})\}$ *обмежена, то*

$$\lim_{k\to\infty}\rho(x^{(k)},S^*)=0,$$

де

$$S^*=\{x^*\in L_f(x^{(0)}) \mid \langle f'(x^*),x-x^*\rangle\ge 0\ \ \forall x\in X\}\ -$$

множина стаціонарних точок функції $f(x)$ *на* $L_f(x^{(0)})$.

Т е о р е м а 34.3. *Якщо виконуються умови теореми 34.2 і крім того функція* $f(x)$ *опукла на X, то для послідовності* $\{x^{(k)}\}$, *яка одержана за методом* (34.3), (34.9), *маємо*

$$\lim_{k\to\infty}f(x^{(k)})=f^*,\quad \lim_{k\to\infty}\rho(x^{(k)},X^*)=0,$$

причому має місце оцінка

$$0\le f(x^{(k)})-f^*\le Ck^{-1},$$

де $C=const>0,\quad k=1,2,\ldots$.

Доведення теорем 34.2, 34.3 можна знайти, наприклад, у [18].

3. Метод проекції субградієнта. Для опуклих функцій, які не є всюди диференційовними, метод проекції градієнта природно описати мовою субградієнтів (див. §16).

Нехай X – замкнена опукла множина з R^n, функція $f(x)$ – опукла на R^n. Тоді її субдиференціал $\partial f(x)$ є непорожньою, опуклою, замкненою і обмеженою множиною (див. теорему 16.3).

Для наближенного розв'язування задачі (34.1) при зазначених умовах розглянемо наступний ітераційний процес:

$$x^{(k+1)}=P_X(x^{(k)}-h_k g^{(k)}),\quad h_k>0,\quad g^{(k)}\in\partial f(x^{(k)}),\quad k=0,1,\ldots,\quad (34.15)$$

де $x^{(0)}$ – деяка точка з X, а субградієнт $g^{(k)}$ обирається з $\partial f(x^{(k)})$ довільно.

Якщо при деякому k буде $x^{(k+1)}=x^{(k)}$, то процес (34.15) зупиняється, оскільки в цьому випадку точка $x^{(k)}$ є розв'язком задачі (34.1). Дійсно, при $x^{(k)}=P_X(x^{(k)}-h_k g^{(k)})$ згідно теореми 12.2

$$\langle x-x^{(k)},(x^{(k)}-h_k g^{(k)})-x^{(k)}\rangle=-h_k\langle g^{(k)},x-x^{(k)}\rangle\le 0$$

для будь-яких $x\in X$ або, оскільки $h_k>0$,

$$\langle g^{(k)},x-x^{(k)}\rangle\ge 0\quad \forall x\in X. \qquad (34.16)$$

За означенням (16.1) субградієнта $g^{(k)}\in\partial f(x^{(k)})$ маємо

$$f(x)-f(x^{(k)})\ge\langle g^{(k)},x-x^{(k)}\rangle\quad \forall x\in R^n,$$

а отже і для будь-яких $x\in X$. Звідси з урахуванням (34.16) одержуємо $f(x)-f(x^{(k)})\ge 0\quad \forall x\in X$, тобто $f(x^{(k)})=\inf_{x\in X}f(x)=f^*$.

При виборі крокового множника h_k в (34.15) можна керуватися міркуваннями, які були описані вище. Але напрям антисубградієнта не завжди є напрямом спадання функції $f(x)$ (див. §16), тому у методі проекції субградієнта послідовність $\{h_k\}$ обирається, як правило, такою, щоб виконувались умови

$$h_k>0,\quad k=0,1,\ldots,\quad \sum_{k=0}^{\infty}h_k=\infty,\quad \sum_{k=0}^{\infty}h_k^2<+\infty. \qquad (34.17)$$

Метод (34.15), (34.17) не гарантує виконання умови монотонності $f(x^{(k+1)})<f(x^{(k)})$ на кожній ітерації і збігається, взагалі кажучі, повільно. Але, якщо проекцію точки на множину X і субградієнт $g^{(k)}\in\partial f(x^{(k)})$ знайти нескладно, то цей метод є досить простим для реалізації на комп'ютері.

На практиці ітераційний процес (34.15), (34.17) за методом проекції субградієнта завершується при виконанні однієї з умов $\| g^{(k)}\|<\varepsilon$ або $\| x^{(k)}-x^{(k-1)}\|<\varepsilon$, де параметр $\varepsilon>0$ визначає точність розв'язування задачі (34.1).

Т е о р е м а 34.4. *Нехай X – замкнена опукла множина в* R^n, *функція* $f(x)$ *визначена, опукла і обмежена знизу на* R^n, *множина X* точок мінімуму* $f(x)$ *на X непорожня і обмежена, при цьому*

$$\sup_{x\in X}\ \sup_{g\in\partial f(x)}\| g\|=D<+\infty.$$

Тоді для послідовності $\{x^{(k)}\}$, *яка визначена за методом* (34.15), (34.17), *мають місце співвідношення*

$$\lim_{k\to\infty}f(x^{(k)})=f^*,\quad \lim_{k\to\infty}\rho(x^{(k)},X^*)=0.$$

Доведення теореми, а також узагальнення методу проекції субградієнта для задачі опуклого програмування

$$f(x) \to \min, \quad x \in X,$$

де $X = \{x \in P \subseteq R^n \mid g_i(x) \le 0, i = \overline{1,m}\}$, P – опукла множина, $g_i(x)$ – опуклі функції ($i = \overline{1,m}$), можна знайти, наприклад, у [18].

Використовуючи ідею проектування, для розв'язування задач умовної оптимізації можна застосувати й інші методи безумовної оптимізації, наприклад, метод Ньютона (§29) або метод спряжених градієнтів (§30).

Запитання для самоконтролю

1. Чим обумовлена складність розв'язування задач умовної оптимізації?
2. Які основні підходи використовують при побудові чисельних методів умовної оптимізації?
3. У чому полягає сутність методу проекції градієнта і які рекурентні співвідношення в ньому використовуються?
4. Які правила вибору крокового множника використовують в методі проекції градієнта?
5. До розв'язування яких задач умовної мінімізації доцільно використовувати метод проекції градієнта?
6. За яких умов метод проекції градієнта збігається до розв'язку задачі умовної мінімізації?
7. У чому полягає сутність методу проекції субградієнта і за яких умов він збігається до розв'язку задачі умовної мінімізації?

Вправи для самостійного виконання

1. Для задачі умовної мінімізації

$$f(x) = -x_1 + x_2^2 \to \min, \quad x \in X,$$

де $X = \{x \in R^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$, виконати дві ітерації за методом проекції градієнта (34.3) з кроковим множником $h_k = h = \dfrac{1}{L}$, де L – константа Ліпшиця для градієнта цільової функції, починаючи процес з точки $x^{(0)} = (0, 0{,}5) \in X$.

Дати геометричну інтерпретацію одержаних результатів.

2. Для задачі умовної мінімізації

$$f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \to \min, \quad x \in X,$$

де $X = \{x \in R^2 \mid x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\}$, виконати дві ітерації за методом проекції градієнта при різних способах вибору параметра h_k. Розглянути початкові наближення $x^{(0)} = (0, 0)$, $x^{(0)} = (0, 1)$, $x^{(0)} = (1, 0)$, $x^{(0)} = (1, 1)$.

Дати геометричну інтерпретацію одержаних результатів.

3. Для квадратичної функції $f(x) = \dfrac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$, де A – симетрична, додатно визначена матриця прорядку $n \times n, b \in R^n$, у загальному вигляді описати одну ітерацію методу проекції градієнта (34.3), (34.5) для випадків, коли множина X являє собою гіперплощину, замкнену кулю, n-вимірний паралеліпіпед, додатній ортант в R^n, півпростір в R^n (див. приклад 12.1 і завдання 2 §12). Дослідити збіжність методу для заданої задачі.

Примітка. При розв'язуванні задачі врахувати, що $f'(x) = Ax + b$ і в (34.5) (див. §28)

$$h_k = \frac{\| Ax^{(k)} + b \|^2}{\langle A(Ax^{(k)} + b), Ax^{(k)} + b\rangle}.$$

4. Для задачі опуклого програмування

$$f(x) = | x_1 + x_2 - 2 | + | x_1 - x_2 | \to \min, \quad x \in X,$$

де $X = \{x \in P \subset R^2 \mid x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0\}$, $P = \{x \in R^2 \mid x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\}$, виконати дві ітерації за методом проекції субградієнта (34.15) при h_k в (34.17) рівному $\dfrac{1}{k+1}$, починаючи з точки $x^{(0)} = (0; 0)$. Дати геометричну інтерпретацію одержаних результатів.

Примітка. Для знаходження субградієнтів $g^{(k)} \in \partial f(x^{(k)})$ скористатися результатами завдання 3.7 § 17.

5. Побудувати загальні схеми методів проекції градієнта і субградієнта для наближеного розв'язування задачі (34.1) із заданою точністтю $\varepsilon > 0$.

6. Однією з мов програмування описати програму, яка реалізує схему методу проекції градієнта з одним або кількома способами вибору крокового множника (34.4), (34.5), (34.7), (34.8), (34.9) для випадків, коли допустима множина X являє собою:

1) $X = \{x \in R^n \mid x_i \ge 0, i = \overline{1,n}\}$ – невід'ємний ортант в R^n;

2) $X = \{x \in R^n \mid a_i \le x_i \le b_i,\ i = \overline{1,n},\ a_i, b_i \in R^1\}$ – n-вимірний паралелепіпед;

3) $X = \{x \in R^n \mid \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 \le r\}$ – замкнену кулю радіуса $r > 0$ з центром в точці $a = (a_1, a_2, \dots a_n) \in R^n$;

4) $X = \{x \in R^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b,\ a = (a_1, a_2, \dots a_n) \ne O_n,\ b \in R^1\}$ – гіперплощину з нормаллю a;

5) $X = \{x \in R^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \ge b, a = (a_1, a_2, \dots a_n) \ne O_n,\ b \in R^1\}$ – півпростір в R^n.

Примітка. При написанні програми скористатися явними розв'язками задачі проектування точки на множину X (див. § 12).

7. Використовуючи розроблену програму, розв'язати задачі умовної оптимізації методом проекції градієнта, починаючи з точки $x^{(0)}$, при цьому обчислення завершувати при виконанні однієї з умов $\| f'(x^{(k)}) \| < \varepsilon$ або $\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| < \varepsilon$, де $\varepsilon = 10^{-4}$, $\varepsilon = 10^{-8}$:

1) $f(x)=x_1^2+4x_1x_2+6x_2^2+5x_1+8x_2 \to \min, \quad x\in X,$

де $X=\{x\in R^2 | x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_1+x_2\geq 3\}$, $x^{(0)}=(4;4)$;

2) $f(x)=7x_1^2+x_2^2-40x_1+2x_2 \to \min, \quad x\in X,$

де $X=\{x\in R^2 | x_1\geq 0, x_2\geq 0\}$, $x^{(0)}=(1;4)$;

3) $f(x)=x_1^2+9x_2^2-12x_1-36x_2 \to \min, \quad x\in X,$

де $X=\{x\in R^2 | 0\leq x_1\leq 4; 0\leq x_2\leq 2\}$, $x^{(0)}=(0;0)$;

4) $f(x)=2\sqrt{1+x_1^2+2x_2^2}+x_1+x_2 \to \min, \quad x\in X,$

де $X=\{x\in R^2 | 5\leq x_1\leq 8; 1\leq x_2\leq 10\}$, $x^{(0)}=(8;10)$;

5) $f(x)=x_1+3x_2 \to \min, \quad x\in X,$

де $X=\{x\in R^2 \,|\, (x_1-4)^2+(x_2-2)^2\leq 1\}$, $x^{(0)}=(4;3)$;

6) $f(x)=x_1^2-8x_1+x_2^2 \to \min, \quad x\in X,$

де $X=\{x\in R^2 \,|\, x_1^2+(x_2-4)^2\leq 9\}$, $x^{(0)}=(-3;4)$;

7) $f(x)=(x_1-2)^4+(x_2-1)^4 \to \min, \quad x\in X,$

де $X=\{x\in R^2 \,|\, 2x_1+x_2\leq 2\}$, $x^{(0)}=(-1;4)$;

8) $f(x)=x_1^2+4x_2^2 \to \min, \quad x\in X,$

де $X=\{x\in R^2 \,|\, 4x_1-2x_2\leq 3\}$, $x^{(0)}=(2;5)$;

9) $f(x)=x_1^2-2x_1-x_2 \to \min, \quad x\in X,$

де $X=\{x\in R^2 \,|\, 2x_1^2+3x_2^2\leq 6, x_1\geq 0, x_2\geq 0\}$, $x^{(0)}=(0;1)$;

10) $f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1+2x_2+3x_3 \to \min, \quad x\in X,$

де $X=\{x\in R^3 \,|\, x_1+x_2+x_3=3\}$, $x^{(0)}=(3;0;0)$;

11) $f(x)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1-5x_2-6x_3 \to \min, \quad x\in X,$

де $X=\{x\in R^3 \,|\, x_1+x_3=2\}$, $x^{(0)}=(2;0;0)$;

12) $f(x)=(x_1-1)^2+10(x_2-1)^2+100(x_3-1)^2+1000(x_4-1)^2 \to \min, \quad x\in X,$

де $X=\{x\in R^4 \,|\, -4\leq x_i\leq 4, i=\overline{1,4}\}$, $x^{(0)}=(-1;-2;-3;-4)$.

Результати обчислень оформити у вигляді таблиці:

№ задачі	Правило вибору h_k	Точність обчислень (ε)	Кількість ітерацій (*k*)	Кількість обчислень значень функції (N_f)	Кількість обчислень значень градієнта (N_g)	x^*	f^*

8. Задачі 7.1) – 7.9) наближено розв'язати геометричним методом, використовуючи програмні засоби типу Advanced Grapher, Derive, GRAN1, GRAN-2D чи інших.

9. Задачі 7.1) – 7.12) наближено розв'язати за допомогою одного з програмних засобів Mathcad, Maple, Mathematica, Matlab чи інших.

10. Порівняти результати, одержані в завданнях 7, 8, 9.

§ 35. Метод умовного градієнта

Розглянемо ще один метод умовної оптимізації, який також відноситься до методів спуску і називається *методом умовного градієнта* або *лінійної апроксимації* (*лінеаризації*) цільової функції.

1. Опис методу. Будемо розглядати задачу

$$f(x)\to\min, \quad x\in X, \tag{35.1}$$

де $f(x)$ – диференційовна на X функція, X – опукла компактна множина.

Нехай $x^{(0)}\in X$ – деяке початкове наближення. У методі умовного градієнта наступна точка наближення до розв'язку задачі (35.1) обирається за правилом

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+h_k g^{(k)}, \quad k=0,1,\ldots, \tag{35.2}$$

де $g^{(k)}\in U(x^{(k)},f)\cap V(x^{(k)},X)$, тобто вектор $g^{(k)}$ одночасно є напрямом спадання функції $f(x)$ в точці $x^{(k)}\in X$ і можливим напрямом у точці $x^{(k)}\in X$ відносно множини X (див. §20, означення 20.1 і 20.2), а кроковий множник $h_k>0$ обирається так, щоб для послідовності $\{x^{(k)}\}$ виконувалась умова монотонності на множині X

$$f(x^{(k+1)})<f(x^{(k)}) \;\text{ і }\; x^{(k+1)}\in X, \quad k=0,1,\ldots . \tag{35.3}$$

Визначення вектора $g^{(k)}$ на *k*-му кроці ітераційного процесу (35.2) відбувається з наступних міркувань. Приріст функції $f(x)$ в точці $x^{(k)}$, за умови, що $f'(x^{(k)})\neq O_n$, можна подати у вигляді

$$f(x)-f(x^{(k)})=\langle f'(x^{(k)}), x-x^{(k)}\rangle+o(\|x-x^{(k)}\|).$$

Тоді лінійна функція

$$f_k(x)=\langle f'(x^{(k)}), x-x^{(k)}\rangle \tag{35.4}$$

є наближенням різниці $f(x)-f(x^{(k)})$ з точністю до величини $o(\|x-x^{(k)}\|)$ у деякому околі точки $x^{(k)}\in X$.

Визначимо допоміжне наближення $\bar{x}^{(k)}\in X$ як розв'язок задачі мінімізації лінійної функції $f_k(x)$ на множині X:

$$f_k(x)\to\min, \quad x\in X, \tag{35.5}$$

тобто

$$\bar{x}^{(k)}=\arg\min_{x\in X} f_k(x). \tag{35.6}$$

Оскільки множина X компактна, а лінійна функція $f_k(x)$ неперервна на X, то згідно теореми 7.5 (Вейєрштрасса) точка $\bar{x}^{(k)}$ в (35.6) завжди існує. Якщо функція $f_k(x)$ досягає мінімуму на X більш ніж в одній точці, то за $\bar{x}^{(k)}$ можна обрати будь-яку з них.

Позначимо значення функції $f_k(x)$ в точці $\bar{x}^{(k)}$, яка є розв'язком задачі (35.5), через

$$\eta_k = \langle f'(x^{(k)}), \bar{x}^{(k)} - x^{(k)} \rangle. \qquad (35.7)$$

Враховуючи, що $x^{(k)} \in X$, маємо

$$\eta_k \le \langle f'(x^{(k)}), x^{(k)} - x^{(k)} \rangle = 0,$$

тобто величина η_k може набувати лише від'ємних значень або бути рівною 0.

Якщо $\eta_k = 0$, то

$$\langle f'(x^{(k)}), x - x^{(k)} \rangle \ge \eta_k = 0 \quad \forall x \in X,$$

тобто точка $x^{(k)} \in X$ задовольняє необхідну умову мінімуму для функції $f(x)$ на X (див. теорему 20.2). Іншими словами, $x^{(k)}$– стаціонарна точка задачі (35.1). У цьому випадку ітераційний процес (35.2) завершується і точку $x^{(k)}$ треба додатково дослідити на оптимальність. Зауважимо, що якщо функція $f(x)$ опукла на X, то тоді точка $x^{(k)}$ є розв'язком задачі (35.1) (див. теорему 20.3).

Нехай тепер $\eta_k < 0$. Тоді наступне наближення $x^{(k+1)}$ до розв'язку задачі (35.1) будемо шукати за правилом (35.2) при

$$g^{(k)} = \bar{x}^{(k)} - x^{(k)}. \qquad (35.8)$$

Цей вектор прийнято називати *умовним антиградієнтом* функції $f(x)$ в точці $x^{(k)} \in X$.

Оскільки

$$\langle f'(x^{(k)}), g^{(k)} \rangle = \eta_k < 0,$$

то згідно леми 20.1 вектор $g^{(k)} \in U(x^{(k)}, f)$, тобто є напрямом спадання $f(x)$ в точці $x^{(k)}$. Крім того, з опуклості множини X випливає, що для будь-якого $\alpha \in [0;1]$

$$x^{(k)} + \alpha g^{(k)} = x^{(k)} + \alpha(\bar{x}^{(k)} - x^{(k)}) = \alpha \bar{x}^{(k)} + (1-\alpha) x^{(k)} \in X, \quad (35.9)$$

тобто вектор $g^{(k)} \in V(x^{(k)}, X)$ – можливий напрям відносно множини X в точці $x^{(k)} \in X$.

Враховуючи (35.9), параметр h_k в (35.2) обирається з інтервалу $[0;1]$ з метою, щоб при $\alpha = h_k$ виконувалось включення (35.9).

Існує багато варіантів обрання параметра $h_k \in [0;1]$ в (35.2), яким відповідають різні варіанти методу умовного градієнта.

Розглянемо деякі з них.

1. Величина h_k обирається з умови одновимірної мінімізації

$$h_k = \arg\min_{h \in [0;1]} f(x^{(k)} + h g^{(k)}), \qquad (35.10)$$

тобто

$$f(x^{(k)} + h_k g^{(k)}) = \min_{h \in [0;1]} f(x^{(k)} + h g^{(k)}).$$

Наприклад, як було показано в §30, для квадратичної функції $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle$, де A – симетрична додатно визначена матриця порядку $n \times n$, $b \in R^n$, задача (35.10) розв'язується в явному вигляді, при цьому

$$h_k = \min\{1, h_k^*\}, \qquad (35.11)$$

де

$$h_k^* = \arg\min_{h>0} f(x^{(k)} + h g^{(k)}) = -\frac{\langle f'(x^{(k)}), \bar{x}^{(k)} - x^{(k)} \rangle}{\langle A(\bar{x}^{(k)} - x^{(k)}), \bar{x}^{(k)} - x^{(k)} \rangle}$$

і $f'(x^{(k)}) = Ax^{(k)} + b$.

Але точне визначення h_k з умови (35.10) у загальному випадку не завжди можливе. Тому часто замість розв'язування задачі (35.10) параметр h_k шукають з умов

$$h_k \in [0;1], \quad f(x^{(k)} + h_k g^{(k)}) \le f_k^* + \delta_k, \ \delta_k \ge 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k = \delta < \infty, \quad (35.12)$$

де $f_k^* = \min_{h \in [0;1]} f(x^{(k)} + h g^{(k)})$, або

$$h_k \in [0;1], \quad f(x^{(k)} + h_k g^{(k)}) \le (1-\alpha_k) f(x^{(k)}) + \alpha_k f_k^*, \quad (35.13)$$

де $0 < \bar{\alpha} \le \alpha_k \le 1$ (див., наприклад [18], [57]).

При визначенні h_k з умов (35.12) і (35.13) можна використовувати відомі наближені методи одновимірної мінімізації (див. §25).

Геометричну інтерпретацію перших двох кроків методу умовного градієнта (35.2), (35.6), (35.7), (35.10) для задачі опуклої умовної мінімізації подано на рис. 35.1, при цьому $\eta_0 = \langle f'(x^{(0)}), \bar{x}^{(0)} - x^{(0)} \rangle < 0$, $\eta_1 = \langle f'(x^{(1)}), \bar{x}^{(1)} - x^{(1)} \rangle < 0$ і точка $\bar{x}^{(1)} = x^{(2)}$ є розв'язком задачі (35.1), оскільки $\bar{x}^{(2)} = x^{(2)}$ і $\eta_2 = 0$.

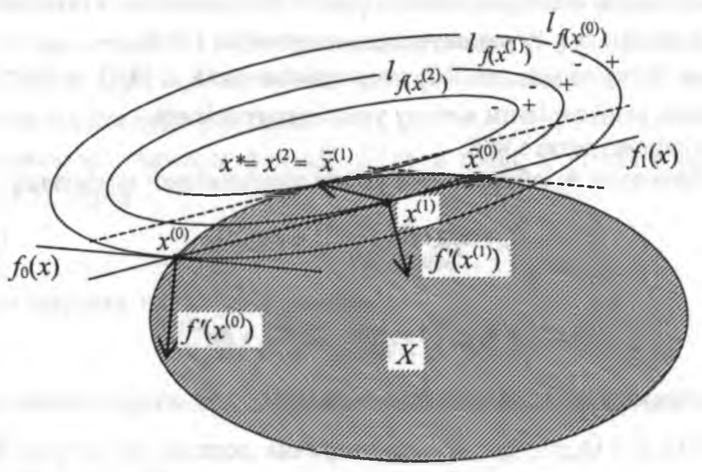


Рис. 35.1.

На рис. 35.2. показано випадок, коли множина X – многокутник, $\eta_0 = \langle f'(x^{(0)}), \bar{x}^{(0)} - x^{(0)} \rangle < 0$, $\bar{x}^{(0)} = x^{(1)} = \bar{x}^{(1)}$ – розв'язок задачі (35.1) $(\eta_1 = 0)$.

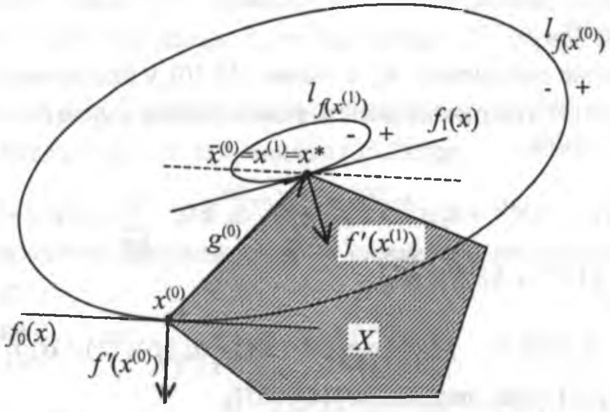


Рис. 35.2.

2. На початку виконання (k+1)-ої ітерації процесу (35.2), (35.6), (35.7) покладають h_k=1 і перевіряють умову монотонності

$$f(x^{(k)} + h_k g^{(k)}) < f(x^{(k)}). \qquad (35.14)$$

Якщо вона не виконується, то h_k зменшують, тобто покладають $h_k = \lambda h_k$, де $\lambda \in (0;1)$ (наприклад $\lambda = 2^{-1}$), і знову перевіряють умову

(35.14). Зменшення h_k відбувається доти, поки умова (35.14) не виконається. Після цього переходять до наступної ітерації.

3. В іншому способі вибору кроку h_k для методу умовного градієнта поступають аналогічно до попереднього, але при цьому перевіряється виконання умови

$$f(x^{(k)} + h_k g^{(k)}) \le f(x^{(k)}) + \varepsilon h_k \eta_k, \qquad (35.15)$$

де $\varepsilon \in (0;1)$ – параметр методу.

Л е м а 35.1. *Нехай X – опукла компактна множина, функція $f(x)$ диференційовна на X, а її градієнт задовольняє умову Ліпшиця*:

$$\| f'(x^{(1)}) - f'(x^{(2)}) \| \le L \| x^{(1)} - x^{(2)} \| \quad \forall x^{(1)} \in X, \forall x^{(2)} \in X. \quad (35.16)$$

Якщо в методі (35.2), (35.6), (35.7)

$$\eta_k = \langle f'(x^{(k)}), \bar{x}^{(k)} - x^{(k)} \rangle < 0,$$

то для будь-якого $\varepsilon \in (0;1)$ нерівність (35.15) *виконується при*

$$0 < h \le -(1-\varepsilon) \frac{\eta_k}{L \| g^{(k)} \|^2}. \qquad (35.17)$$

Д о в е д е н н я. За формулою скінченних приростів Лагранжа (див., наприклад, [60], т. 2, стор. 10-11) при деякому $\theta \in (0;1)$ для точок $x^{(k+1)} = x^{(k)} + h_k g^{(k)} \in X$, $x^{(k)} \in X$ маємо

$$f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)}) = \langle f'(x^{(k)} + \theta h_k g^{(k)}), x^{(k+1)} - x^{(k)} \rangle =$$
$$= \langle f'(x^{(k)} + \theta h_k g^{(k)}), h_k g^{(k)} \rangle = \langle f'(x^{(k)} + \theta h_k g^{(k)}) - f'(x^{(k)}) + f'(x^{(k)}), h_k g^{(k)} \rangle =$$
$$= h_k \langle f'(x^{(k)}), g^{(k)} \rangle + \langle f'(x^{(k)} + \theta h_k g^{(k)}) - f'(x^{(k)}),\ h_k g^{(k)} \rangle.$$

Звідси, скориставшись для другого доданку нерівністю Коші-Буняковського (7.2), одержимо

$$f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)}) \le h_k \langle f'(x^{(k)}), g^{(k)} \rangle + \| f'(x^{(k)} + \theta h_k g^{(k)}) - f'(x^{(k)}) \| \cdot h_k \| g^{(k)} \|.$$

Враховуючи (35.16) і те, що $\theta \in (0;1)$, маємо

$$f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)}) \le h_k \langle f'(x^{(k)}), g^{(k)} \rangle + L \| \theta h_k g^{(k)} \| \cdot h_k \cdot \| g^{(k)} \| =$$
$$= h_k (\langle f'(x^{(k)}), g^{(k)} \rangle + L\theta h_k \| g^{(k)} \|^2) \le h_k (\langle f'(x^{(k)}), g^{(k)} \rangle + L h_k \| g^{(k)} \|^2).$$

Підставляючи в цю нерівність замість h_k у другому входженні вираз із правої частини нерівності (35.17), одержимо

$$f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)}) \le h_k \left(\eta_k - (1-\varepsilon) \frac{\eta_k}{L \| g^{(k)} \|^2} L \| g^{(k)} \|^2 \right) = h_k \eta_k (1 - 1 + \varepsilon) = \varepsilon h_k \eta.$$

Що й треба було довести.

Для обґрунтування збіжності методу умовного градієнта більш детально розглянемо зазначене правило вибору параметра h_k і покажемо, що умова (35.15) виконається за скінченну кількість зменшень h_k за формулою $h_k = \lambda h_k$, де $\lambda \in (0;1)$.

Нехай спочатку h_k=1. Будемо послідовно перевіряти умову (35.15) при $h_k = 1$, $h_k = \lambda$, $h_k = \lambda^2$ і т.д. Нехай нерівність (35.15) вперше виконається при $h_k = \lambda^{i_k}$. Тоді, поклавши в (35.15) $h_k = \lambda^{i_k}$, одержимо

$$f(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)} + \lambda^{i_k} g^{(k)}) \le f(x^{(k)}) + \varepsilon \lambda^{i_k} \eta_k . \qquad (35.18)$$

Можливі два випадки: $i_k = 0$ або $i_k \ge 1$. Якщо $i_k = 0$, то $h_k = 1$. Якщо $i_k \ge 1$, то при $h = \lambda^{i_k - 1} = \dfrac{\lambda^{i_k}}{\lambda} = \dfrac{h_k}{\lambda}$ умова (35.15) не виконується і h не задовольняє умову (35.17). Враховуючи сказане, можна вважати, що

$$h_k = 1 \text{ або } 1 > h_k > -\lambda(1-\varepsilon)\frac{\eta_k}{L\| g^{(k)} \|^2} \quad \forall k = 0, 1, \ldots, \qquad (35.19)$$

де $\varepsilon \in (0;1)$.

4. Величину h_k в (35.2) можна апріорно задати з умов

$$0 < h_k \le 1, \ \lim_{k\to\infty} h_k = 0, \ \sum_{k=0}^{\infty} h_k = \infty . \qquad (35.20)$$

Такий спосіб обрання h_k досить простий для реалізації на комп'ютері, але, взагалі кажучи, він не гарантує виконання умови монотонності (35.3).

Зауважимо, що при практичній реалізації методу умовного градієнта завершують роботу не лише при η_k=0, але й при виконанні однієї з умов

$$\| f'(x^{(k)}) \| < \varepsilon \text{ або } \| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| < \varepsilon,$$

де величина $\varepsilon > 0$ визначає точність розв'язування задачі (35.1).

Наведемо схему алгоритму роботи за методом умовного градієнта, який визначається співвідношеннями (35.2), (35.6), (35.8), (35.10).

Зафіксувати $\varepsilon > 0$, $x^{(0)} \in X$ і покласти $k := 0$.

Крок 1. Знайти $f'(x^{(k)})$. Якщо $\| f'(x^{(k)}) \| < \varepsilon$, то покласти $x^* := x^{(k)}$, $f^* := f(x^{(k)})$ і перейти до виконання кроку 7.

Крок 2. Знайти

$$\bar{x}^{(k)} = \arg\min_{x\in X} f_k(x),$$

де $f_k(x) = \langle f'(x^{(k)}), x - x^{(k)} \rangle$, і обчислити $\eta_k = \langle f'(x^{(k)}), \bar{x}^{(k)} - x^{(k)} \rangle$.

Якщо $\eta_k = 0$, то покласти $x^* := x^{(k)}$, $f^* := f(x^{(k)})$ і перейти до виконання кроку 7.

Крок 3. Покласти $g^{(k)} = \bar{x}^{(k)} - x^{(k)}$.

Крок 4. Знайти $h_k = \arg\min_{h\in[0;1]} f(x^{(k)} + hg^{(k)})$.

Крок 5. Знайти $x^{(k+1)} = x^{(k)} + h_k g^{(k)}$.

Крок 6. Якщо $\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| < \varepsilon$, то покласти $x^* := x^{(k+1)}$, $f^* := f(x^{(k+1)})$ і перейти до виконання кроку 7, інакше покласти $k := k+1$ і перейти до виконання кроку 1.

Крок 7. Вивести: x^*, f^*, k.

Кінець.

Зауваження. На другому кроці схеми замість умови $\eta_k = 0$ можна перевіряти умову $|\eta_k| < \varepsilon$ і якщо вона виконується, то брати за наближений розв'язок задачі (35.1) $x^{(k)}$, $f(x^{(k)})$.

Допоміжна задача (35.5) мінімізації лінійної функції

$$f_k(x) = \langle f'(x^{(k)}), x - x^{(k)} \rangle$$

на множині X є, взагалі кажучи, задачею нелінійної оптимізації. Тому застосування методу умовного градієнта доцільне лише у випадках, коли ця задача розв'язується досить просто. Розглянемо деякі з таких випадків.

1. Нехай в задачі (35.1) допустима множина X має вигляд

$$X = \{x \in R^n \,|\, \langle a^{(i)}, x \rangle \le b^{(i)}, i = \overline{1,m}, \langle a^{(i)}, x \rangle = b^{(i)}, i = \overline{m+1,k}, x_i \ge 0, i = \overline{1,n}\},$$

де $a^{(i)} \in R^n, b^{(i)} \in R^n, i = \overline{1,k}$.

Тоді задача (35.5) є задачею лінійного програмування, яка може бути розв'язана за відомими методами, зокрема за симплекс-методом.

2. Нехай в задачі (35.1) допустима множина X є n-вимірним паралелепіпедом:

$$X = \{x \in R^n \,|\, a_i \le x_i \le b_i, \ i = \overline{1,n}\},$$

де $a_i \in R^1$, $b_i \in R^1$, $i = \overline{1,n}$.

Тоді можна показати, що розв'язком задачі (35.5) є будь-яка точка $\bar{x}^{(k)}$ така, що

$$\begin{aligned} &\bar{x}_i^{(k)} = a_i, && \text{якщо } \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i} > 0, \\ &\bar{x}_i^{(k)} \in [a_i; b_i], && \text{якщо } \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i} = 0, \qquad (35.21) \\ &\bar{x}_i^{(k)} = b_i, && \text{якщо } \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i} < 0, \end{aligned}$$

де $i = \overline{1,n}$.

З а у в а ж е н н я. У випадку, коли $\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i} = 0$, виникає невизначеність, тому за $\bar{x}_i^{(k)}$ можна обрати будь-яке число з проміжку $[a_i; b_i]$, наприклад, $\bar{x}_i^{(k)} = a_i$, або $\bar{x}_i^{(k)} = b_i$, або $\bar{x}_i^{(k)} = \frac{a_i + b_i}{2}$.

3. Нехай в задачі (35.1) допустима множина X – замкнена куля радіуса $r > 0$ з центром в точці $a \in R^n$:

$$X = \{x \in R^n \mid \| x - a \| \le r\}.$$

Тоді можна показати, що розв'язком задачі (35.5) є точка

$$\bar{x}^{(k)} = a - r \cdot \frac{f'(x^{(k)})}{\| f'(x^{(k)}) \|}. \qquad (35.22)$$

Зауважимо, що коли знайти розв'язок задачі (35.5) точно не вдається або це зробити досить складно, то замість точного розв'язку в методі умовного градієнта можна брати деякий наближений розв'язок цієї задачі. Зокрема, точку $\bar{x}^{(k)}$ можна визначити з наступних умов

$$\bar{x}^{(k)} \in X,\ f_k(\bar{x}^{(k)}) \le \min_{x \in X} f_k(x) + \varepsilon_k,\ \varepsilon_k \ge 0,\ \lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0. \quad (35.23)$$

2. Збіжність методу. Розглянемо умови збіжності методу умовного градієнта при деяких способах вибору крокового множника h_k.

Т е о р е м а 35.1. *Нехай X – опукла компактна множина в R^n, функція $f(x) \in C^{1,1}(X)$. Тоді при довільному початковому наближенні $x^{(0)} \in X$ для послідовності $\{x^{(k)}\}$, яка генерується за методом умовного градієнта* (35.2), (35.23), (35.8), (35.12), *виконуються рівності*

$$\lim_{k \to \infty} \langle f'(x^{(k)}), \bar{x}^{(k)} - x^{(k)} \rangle = 0,\ \lim_{k \to \infty} \rho(x^{(k)}, S^*) = 0,$$

де $S^* = \{x^* \in X \mid \langle f'(x^*), x - x^* \rangle = 0\ \forall x \in X\}$ – множина стаціонарних точок функції $f(x)$ на X.

Якщо, крім того, $f(x)$ опукла на X і $\varepsilon_k + \delta_k \le C_0 k^{-2p}$, де $C_0 = const > 0$, $p \in (2^{-1}; 1]$, то

$$\lim_{k \to \infty} f(x^{(k)}) = f^*,\quad \lim_{k \to \infty} \rho(x^{(k)}, X^*) = 0,$$

де $f^* = \min_{x \in X} f(x^{(k)})$, X^* – множина розв'язків задачі (35.1), *і має місце оцінка*

$$0 \le f(x^{(k)}) - f^* \le C_1 k^{-p},$$

де $C_1 = const > 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

Доведення цієї теореми можна знайти, наприклад, у [18].

Т е о р е м а 35.2. *Нехай X – опукла компактна множина, функція $f(x)$ – диференційовна на X, градієнт якої задовольняє умову Ліпшиця* (35.16). *Тоді будь-яка гранична точка x^* послідовності $\{x^{(k)}\}$, яка генерується за методом умовного градієнта* (35.2), (35.6), (35.8), (35.15), *починаючи з довільної точки $x^{(0)} \in X$, є стаціонарною точкою задачі* (35.1), *тобто*

$$\langle f'(x^*), x - x^* \rangle \ge 0\ \ \forall x \in X. \qquad (35.24)$$

Якщо, крім того, функція $f(x)$ опукла на X, то x^* – розв'язок задачі (35.1) *і*

$$\lim_{k \to \infty} f(x^{(k)}) = f^*, \qquad (35.25)$$

де $f^* = \min_{x \in X} f(x^{(k)})$.

Д о в е д е н н я. В умовах теореми будемо вважати, що послідовність $\{x^{(k)}\}$ є нескінченною, і тоді $\eta_k < 0$ для будь-яких $k = 0, 1, \ldots$, оскільки якщо при деякому k_0 $\eta_{k_0} = 0$, то теорема буде доведена (див. п. 1).

На першому етапі доведення покажемо, що

$$\eta_k = \langle f'(x^{(k)}), \bar{x}^{(k)} - x^{(k)} \rangle \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Для цього знайдемо суму перших m нерівностей виду (35.15)

$$f(x^{(m)}) \le f(x^{(0)}) + \varepsilon \sum_{k=0}^{m-1} h_k \eta_k,$$

або

$$f(x^{(m)}) - f(x^{(0)}) \le \varepsilon \sum_{k=0}^{m-1} h_k \eta_k, \qquad (35.26)$$

де $\varepsilon \in (0; 1)$, $h_k = 1$ або $h_k = \lambda^{i_k}$, i_k – найменший номер, при якому виконується (35.18).

Враховуючи, що в методі умовного градієнта (35.2), (35.6), (35.8), (35.15) $x^{(m)} \in X$ для будь-якого $m = 0, 1, \ldots$, $f(x)$ – неперервна, а X – компактна множина, одержимо

$$f(x^{(m)}) \ge f^*.$$

Тоді з (35.26), враховуючи, що $\eta_k < 0$ і $h_k > 0$ для будь-яких $k = 0, 1, \ldots$, одержимо

$$\frac{f^* - f(x^{(0)})}{\varepsilon} \le \sum_{k=0}^{\infty} h_k \eta_k < 0,$$

тобто ряд $\sum_{k=0}^{\infty} h_k \eta_k$, складений з від'ємних членів, обмежений, а отже є збіжним за теоремою 7.4 (Больцано-Вейерштрасса). Тому в силу необхідної умови збіжності ряду (див., наприклад, [60], т. 1) маємо

$$\lim_{k\to\infty} h_k \eta_k = 0. \qquad (35.27)$$

Оскільки X – компактна множина, то існує константа $C > 0$ така, що $\| g^{(k)} \| = \| \bar{x}^{(k)} - x^{(k)} \| \le C \quad \forall k = 0, 1, \ldots$. Звідси і з (35.19) випливає, що

$$h_k = 1 \quad \text{або} \quad h_k > -\lambda(1-\varepsilon)\frac{\eta_k}{LC^2} > 0 \ \forall k = 0, 1, \ldots . \qquad (35.28)$$

Тоді з (35.27) і (35.28) випливає, що

$$\lim_{k\to\infty} \eta_k = 0. \qquad (35.29)$$

Нехай x^* – гранична точка послідовності $\{x^{(k)}\}$, тобто існує підпослідовність $\{x^{(k_j)}\}$, $j \to \infty$ така, що $\{x^{(k_j)}\}$ збігається до x^*.

За визначенням η_k маємо

$$\langle f'(x^{(k_j)}), x - x^{(k_j)} \rangle \ge \eta_{k_j} \quad \forall x \in X. \qquad (35.30)$$

Оскільки в силу умови (35.16) $\lim_{j\to\infty} f'(x^{(k_j)}) = f'(x^*)$, то переходячи в (35.30) до границі при $j \to \infty$, враховуючи (35.29), одержимо

$$\langle f'(x^*), x - x^* \rangle \ge 0 \quad \forall x \in X,$$

тобто x^* – стаціонарна точка функції $f(x)$ на множині X.

Якщо в умові теореми $f(x)$ – опукла на X функція, то x^* – розв'язок задачі (35.1) в силу теореми 20.3. Отже, можна записати

$$\lim_{j\to\infty} f(x^{(k_j)}) = f(x^*) = f^*. \qquad (35.31)$$

Оскільки опукла функція $f(x)$ на опуклій обмеженій множині X обмежена (див. теорему 16.16), то послідовність $\{f(x^{(k)})\}$ обмежена і в силу (35.15) з урахуванням умов $\eta_k < 0$, $h_k > 0$ для будь-яких $k = 0, 1, \ldots$, монотонно спадає, а отже вона має границю. Враховуючи (35.31), ця границя дорівнює f^*, тобто має місце (35.25).

З а у в а ж е н н я. В [38] показано, що в умовах теореми 35.2 для опуклої на X функції $f(x)$ має місце оцінка

$$f(x^{(k)}) - f^* \le \frac{C}{k}, \qquad (35.32)$$

де $C > 0$ – деяка константа. Це означає, що метод умовного градієнта збігається не дуже швидко. При цьому одержана оцінка є точною для випадку, коли X – многогранник.

Т е о р е м а 35.3. *Нехай X – опукла компактна множина в R^n, функція $f(x) \in C^{1,1}(X)$ і опукла на X. Тоді при довільному початковому наближенні $x^{(0)} \in X$ для послідовності $\{x^{(k)}\}$, яка генерується за методом умовного градієнта* (35.2), (35.23), (35.8), (35.20), *мають місце рівності*

$$\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f^*, \quad \lim_{k\to\infty} \rho(x^{(k)}, X^*) = 0,$$

Якщо, крім того, $h_k = \frac{1}{k+1}$, $\varepsilon_k = \frac{C_1}{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$, *то*

$$0 \le f(x^{(k)}) - f^* \le \frac{C_2 \ln(k+1)}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

якщо $h_k = \frac{1}{(k+1)^\beta}$, $\varepsilon_k = \frac{C_1}{(k+1)^\beta}$, $k = 0, 1, \ldots$, $0 < \beta < 1$, *то*

$$0 \le f(x^{(k)}) - f^* \le \frac{C_2}{k^\beta}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

де C_1, C_2 – деякі додатні константи.

Доведення теореми 35.3. можна знайти, наприклад, у [18].

З а у в а ж е н н я.

1. Як уже відмічалось, метод умовного градієнта в різних його варіантах доцільно використовувати у випадках, коли задача мінімізації лінійної функції $f_k(x)$ на множині X розв'язується досить просто або в явному вигляді. Але, як свідчить оцінка (35.32), навіть для таких випадків швидкість збіжності цього методу досить повільна.

2. Розглянутий метод умовного градієнта є втіленням ідеї лінійної апроксимації (лінеаризації) цільової функції в задачах умовної оптимізації, яка відіграє важливу роль у теорії розв'язування екстремальних задач. Зокрема ця ідея лежить в основі досить ефективних методів математичного програмування – методів лінеаризації, які використовують апроксимацію не лише цільової функції, але й обмежень задачі в околі поточного наближення ітераційного процесу (див., наприклад, [87], [88]).

3. Метод умовного градієнта можна також узагальнити за рахунок знаходження допоміжної точки $\bar{x}^{(k)}$ не як розв'язку задачі (35.5) з лінійною цільовою функцією (35.4), а як розв'язку задачі

$$f_k(x) = \langle f'(x^{(k)}), x - x^{(k)} \rangle + \frac{1}{2}\langle f''(x^{(k)})(x - x^{(k)}), x - x^{(k)} \rangle \to \min, x \in X, \quad (35.33)$$

тобто як задачі знаходження на множині X точки мінімуму квадратичної функції $f_k(x)$, яка апроксимує $f(x)$ в околі точки $x^{(k)}$. При цьому параметр h_k в (35.2) можна обирати як і у звичайному методі умовного градієнта. У [88] цей метод розглядається як метод Ньютона умовної мінімізації з регулюванням кроку. У випадку коли функція $f(x)$ сильно опукла і двічі диференційовна на опуклій компактній множині X, цей метод має надлінійну швидкість збіжності, а при деяких додаткових умовах на матрицю других похідних і квадратичну швидкість. При цьому, якщо множина X є многогранником, то задача (35.33) є задачею квадратичного програмування, для якої є досить ефективні методи розв'язування (див., наприклад, [1], [50], [87], [88], [98]).

Запитання для самоконтролю

1. У чому полягає сутність методу умовного градієнта і які рекурентні співвідношення в ньому використовуються?
2. Які правила вибору крокового множника використовують в методі умовного градієнта?
3. Які правила використовують для завершення роботи за методом умовного градієнта?
4. За яких умов послідовні наближення за методом проекції градієнта збігаються до розв'язку задачі умовної мінімізації?
5. До розв'язування яких задач умовної мінімізації доцільно використовувати метод умовного градієнта?
6. Які можливі шляхи узагальнення методу умовного градієнта?

Вправи для самостійного виконання

1. Довести правильність співвідношень (35.21), (35.22).
2. Для задачі умовної квадратичної мінімізації виконати дві ітерації за методом умовного градієнта (35.2), (35.10), починаючи процес з точки $x^{(0)}$ і використовуючи для розв'язування задачі (35.5) співвідношення (35.21), (35.22), а для розв'язування задачі (35.10) співвідношення (35.11):

1) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 \to \min,\ x \in X,$

де $X = \{x \in R^2 \mid -1 \le x_1 \le 1;\ 0 \le x_2 \le 2\}$, а) $x^{(0)} = (-1, 0)$; б) $x^{(0)} = (1, 0)$; в) $x^{(0)} = (1, 2)$; г) $x^{(0)} = (-1, 2)$;

2) $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - x_1 + x_2 \to \min,\ x \in X,$

де $X = \{x \in R^2 \mid 0 \le x_1 \le 1;\ -1 \le x_2 \le 0\}$, а) $x^{(0)} = (0, 0)$; б) $x^{(0)} = (0, -1;)$; в) $x^{(0)} = (1, 0)$; г) $x^{(0)} = (1, -1)$;

3) $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 6x_1 - 2x_2 \to \min,\ x \in X,$

де $X = \{x \in R^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$, $x^{(0)} = (0, 2)$.

Дати геометричну інтерпретацію одержаних результатів.

3. Однією з мов програмування описати програму, яка реалізує схему алгоритму роботи за методом умовного градієнта з одним або кількома способами вибору крокового множника h_k (35.10), (35.14), (35.15), (35.20) для випадків, коли допустима множина X являє собою n-вимірний паралелепіпед або замкнену кулю.

Примітка. При написанні програми скористатися явним розв'язком задачі (35.5) для зазначених випадків задання множини X (35.21) і (35.22). Для визначення параметра h_k за правилом (35.10), коли цільова функція не є квадратичною, можна використати один з наближених методів одновимірної мінімізації (див. §25). Якщо цільова функція квадратична, то для знаходження h_k за правилом (35.10) варто скористатись співвідношенням (35.11).

4. Використовуючи розроблену програму із завдання 3, розв'язати задачі умовної оптимізації із завдання 7 § 34 за методом умовного градієнта, починаючи процес з точки $x^{(0)}$ і завершуючи обчислення при виконанні однієї з умов $|\eta_k| < \varepsilon$, або $\| f'(x^{(k)}) \| < \varepsilon$, або $\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| < \varepsilon$, де $\varepsilon = 10^{-4}$, $\varepsilon = 10^{-8}$. Результати обчислень

оформити у вигляді таблиці (див. завдання 7 §34) і порівняти їх з результатами, одержаними за допомогою методу проекції градієнта.

5. За методом умовного градієнта наближено розв'язати наступні задачі умовної оптимізації при $\varepsilon = 10^{-4}$, $\varepsilon = 10^{-8}$, починаючи процес з точки $x^{(0)}$:

1) $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 7x_1 - 3x_2 \to \min,\ x \in X,$

де $X = \{x \in R^2 \mid x_1 + x_2 \le 4, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\}$, $x^{(0)} = (0, 4)$;

2) $f(x) = 3x_1^2 + 8x_2^2 \to \min,\ x \in X,$

де

$X = \{x \in R^2 \mid x_1 + x_2 \le 7;\ x_1 - x_2 \le 0;\ 2x_1 + x_2 \ge 6;\ -x_1 + 2x_2 \le 8;\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0\}$, $x^{(0)} = (2, 4)$;

3) $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 8x_2 \to \min,\ x \in X,$

де $X = \{x \in R^2 \mid -1 \le x_1 \le 2;\ 0 \le x_2 \le 3\}$, $x^{(0)} = (-1, 3)$;

4) $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 + 3x_2 \to \min,\ x \in X,$

де $X = \{x \in R^2 \mid (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 1\}$, $x^{(0)} = (1, 2)$;

5) $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 3x_2 \to \min,\ x \in X,$

де $X = \{x \in R^2 \mid x_1 + x_2 \le 3;\ 2x_1 + x_2 \le 4;\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0\}$, $x^{(0)} = (0, 3)$;

6) $f(x) = e^{(3x_1 - x_2)^2} + x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 - 4x_2 \to \min,\ x \in X,$

де $X = \{x \in R^2 \mid -1 \le x_1 \le 0;\ -1 \le x_2 \le 3\}$, $x^{(0)} = (-1, -1)$;

7) $f(x) = e^{x_1 - 4x_2} + x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2 \to \min,\ x \in X,$

де $X = \{x \in R^2 \mid 0 \le x_1 \le 5;\ 2 \le x_2 \le 5\}$, $x^{(0)} = (5, 5)$;

8) $f(x) = \ln(x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 12) + 2x_1^2 + x_2^2 \to \min,\ x \in X,$

де $X = \{x \in R^2 \mid (x_1 + 2)^2 + (x_2 + 1)^2 \le 4\}$, $x^{(0)} = (-4, -1)$;

9) $f(x) = \ln(x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 20) - x_1 - x_2 + 10 \to \min,\ x \in X,$

де $X = \{x \in R^2 \mid x_1 + x_2 \le 3;\ -1 \le x_1 \le 3;\ -1 \le x_2 \le 2\}$, $x^{(0)} = (-1, 1)$;

10) $f(x) = e^{2x_1 + 3x_2} + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to \min,\ x \in X,$

де $X = \{x \in R^2 \mid (x_1 + 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \le 4\}$, $x^{(0)} = (-3, 4)$.

Результати обчислень оформити у вигляді таблиці (див. завдання 7 §34). Дати геометричну інтерпретацію одержаних результатів.

6. Задачі із завдання 5 розв'язати наближено за допомогою одного з програмних засобів Mathcad, Matlab, Mathematica, Maple чи інших. Порівняти результати обчислень з результатами, одержаними за методом умовного градієнта.

§ 36. Метод можливих напрямів

Особливість методу можливих напрямів, який був запропонований голландським математиком Г. Зойтендейком (див., наприклад, [50]), для розв'язування задачі умовної оптимізації

$$f(x) \to \min, \ x \in X, \qquad (36.1)$$

полягає у тому, що при визначенні напряму спуску з деякої точки x допустимої множини X враховуються локальні властивості цільової функції $f(x)$ і локальні властивості множини X в околі точки x. При цьому напрям обирається з конусу можливих напрямів, який задається системою лінійних нерівностей так, щоб в цьому конусі довільний вектор утворював тупий кут з градієнтом функції, що мінімізується.

Цей метод можна розглядати як природне узагальнення методу градієнтного спуску для задачі умовної оптимізації. У порівнянні з методом умовного градієнта, метод можливих напрямів має перевагу у тому, що система обмежень задачі може мати більш складну структуру, і для відшукання напряму спуску досить розв'язати задачу лінійного програмування з невеликою кількістю обмежень або найпростішу задачу квадратичного програмування.

1. Опис методу. У роботі [50] розглядається задача опуклої умовної оптимізації (36.1), коли допустима множина X має досить загальну структуру:

$$X = \{x \in R^n \mid g_i(x) \le b_i, i = \overline{1,m}, \langle a_i, x\rangle \le b_i, i = \overline{m+1,k}, x_j \in [0; c_j], j = \overline{1,n}\},$$

де $g_i(x), i = \overline{1,m}$ – опуклі на R^n функції, $a_i \in R^n$, $i = \overline{m+1,k}$, $b_i \in R^1$, $i = \overline{1,k}$, $0 < c_j < +\infty$, $j = \overline{1,k}$.

Розглянемо суть методу можливих напрямів для випадку, коли допустима множина X в задачі (36.1) має такий вигляд

$$X = \{x \in R^n \mid g_i(x) \le 0, i = \overline{1,m}\}, \qquad (36.2)$$

де функції $f(x), g_i(x), i = \overline{1,m}$, визначені і диференційовні на X.

Нехай $x^{(0)} \in X$ – довільне початкове наближення і вже відоме k-те наближення $x^{(k)} \in X$. Наступне (k+1)-е наближення для задачі (36.1), (36.2) у методі можливих напрямів обирається за правилом

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h_k p^{(k)}, \quad k = 0,1,..., \qquad (36.3)$$

де, як і в методі умовного градієнта (див. § 35), вектор $p^{(k)}$ задовольняє умову

$$p^{(k)} \in U(x^{(k)}, f) \cap V(x^{(k)}, X), \qquad (36.4)$$

а кроковий множник h_k обирається так, щоб виконувалось умова монотонності на множині X, тобто

$$f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)}) \text{ і } x^{(k+1)} \in X, \ k = 0,1,... . \qquad (36.5)$$

Розглянемо допоміжну задачу відшукання вектора $p^{(k)}$, який задовольняє умову (36.4).

Нехай $I = \{i \mid i = \overline{1,m}\}$ – множина номерів функціональних обмежень задачі (36.1), (36.2), $I(x^{(k)}) = \{i \in I \mid g_i(x^{(k)}) = 0\}$ – множина номерів «активних» функціональних обмежень в точці $x^{(k)} \in X$.

Зауважимо, що може бути $I(x^{(k)}) = \varnothing$. У цьому випадку $g_i(x^{(k)}) < 0$ для будь-яких $i \in I$, тобто $x^{(k)} \in \operatorname{int} X$.

Надалі будемо вважати, що $I(x^{(k)}) \ne \varnothing$. Розглянемо твердження, яке гарантує для деякого вектора виконання умови (36.4).

Л е м а 36.1. *Якщо для задачі* (36.1), (36.2), *де* $X \ne \varnothing$, *у деякій точці* $\bar{x} \in X$ *такій, що* $I(\bar{x}) \ne \varnothing$, *існує вектор* $p \in R^n$, *що задовольняє умови*

$$\langle f'(\bar{x}), p\rangle < 0, \qquad (36.6)$$

$$\langle g_i'(\bar{x}), p\rangle < 0, \ i \in I(\bar{x}), \qquad (36.7)$$

то

$$p \in U(\bar{x}, f) \cap V(\bar{x}, X). \qquad (36.8)$$

Д о в е д е н н я. Згідно леми 20.1 вектор p, який задовольняє умову (36.6), належить конусу напрямів спадання функції $f(x)$ в точці $\bar{x}$, тобто $p \in U(\bar{x}, f)$.

Покажемо, що вектор p, який задовольняє умову (36.7) належить конусу допустимих напрямів множини X в точці $\bar{x} \in X$.

Позначимо $\sigma_i = \langle g_i'(\bar{x}), p\rangle < 0$, $i \in I(\bar{x})$. Із диференційовності функцій $g_i(x)$, $i \in I(\bar{x})$, в точці $\bar{x}$ існує $\bar{\alpha} > 0$ таке, що для будь-яких $\alpha \in (0; \bar{\alpha})$ має місце

$$g_i(\bar{x} + \alpha p) = g_i(\bar{x} + \alpha p) - g_i(\bar{x}) = \alpha\langle g_i'(\bar{x}), p\rangle + o(\alpha) =$$
$$= \alpha\left(\langle g_i'(\bar{x}), p\rangle + \frac{o(\alpha)}{\alpha}\right) = \alpha\left(\sigma_i + \frac{o(\alpha)}{\alpha}\right). \qquad (36.9)$$

Нехай $\sigma = \min_{i \in I(\bar{x})} |\sigma_i| > 0$. Тоді для будь-яких $i \in I(\bar{x})$ і досить малого числа $\alpha \in (0; \bar{\alpha})$ з (36.9) випливає, що

$$g_i(\bar{x} + \alpha p) \le \alpha\left(-\sigma + \frac{o(\alpha)}{\alpha}\right) < 0,$$

тобто вектор $p \in V(\bar{x}, X)$. Отже вектор p задовольняє умову (36.8). Що й треба було довести.

Враховуючи лему 36.1, вектор $p^{(k)}$ в (36.3) треба обирати так, щоб він задовольняв нерівності (36.6), (36.7). Тоді у цьому напрямі існує точка $x^{(k+1)}$, для якої виконується умова (36.5). Це можна зробити, розв'язавши наступну задачу.

Покладемо $z=(p,\sigma)=(p_1,p_2,...,p_n,\sigma)\in R^{n+1}$ і розглянемо задачу

$$\sigma\to\min, z\in Z_k, \tag{36.10}$$

де

$$Z_k=\{(p,\sigma)\in R^{n+1}\,|\,\langle f'(x^{(k)}),p\rangle\le\sigma,\ \langle g_i'(x^{(k)}),p\rangle\le\sigma,$$
$$i\in I(x^{(k)}),|\,p_j\,|\le 1, j=\overline{1,n}\}. \tag{36.11}$$

Очевидно, що ця задача є задачею лінійного програмування, причому цільова функція

$$\langle c,z\rangle=0\cdot p_1+0\cdot p_2+...+0\cdot p_n+1\cdot\sigma,$$

явно не залежить від змінних $p_j(j=\overline{1,n})$ і її градієнт дорівнює вектору $c=(0,0,...,0,1)\in R^{n+1}$.

Зауважимо, що точка $z^{(0)}=(0,0,...,0)\in Z_k$, тобто $Z_k\ne\varnothing$ і $\min\limits_{z\in Z_k}\sigma=\sigma_k\le 0$ для будь-якого $k=0, 1, ...$. Крім того, Z_k – замкнена множина, а умова $|\,p_j\,|\le 1, j=\overline{1,n}$, яка еквівалентна системі лінійних нерівностей $p_j\le 1,\ j=\overline{1,n},\ p_j\ge -1,\ j=\overline{1,n}$, і називається *умовою нормування*, гарантує обмеженість множини Z_k. Отже, розв'язок задачі (36.10), (36.11) завжди існує. Для знаходження розв'язку задачі (36.10), (36.11) можна використати один з скінченних методів лінійного програмування, наприклад симплекс-метод.

З а у в а ж е н н я. Іноді в множині Z_k замість умови $|\,p_j\,|\le 1, j=\overline{1,n}$, використовують інші умови нормування (див., наприклад, [50]), зокрема умову $\langle p,p\rangle\le 1$ або $\sum\limits_{j=1}^{n}(p_j)^2\le 1$. Тоді задача (36.10), (36.11) є найпростішою задачею нелінійного програмування, яка еквівалентна задачі квадратичного програмування спеціального виду (див. завдання 2).

Нехай розв'язком задачі (36.10), (36.11) є точка $z^{(k)}=(p^{(k)},\sigma_k)\in Z_k$, тобто $\sigma_k=\min\limits_{z\in Z_k}\sigma$.

Як було зазначено, $\sigma_k\le 0$. Спочатку проаналізуємо випадок, коли $\sigma_k=0$. З (36.10), (36.11) видно, що це може бути, наприклад, при $f'(x^{(k)})=O_n$ або $g_i'(x^{(k)})=O_n$ для деякого $i\in I(x^{(k)})$. У цьому випадку вже не можна гарантувати, що $p^{(k)}$ задовольняє умову (36.4). Але, як стверджує наступна теорема, при $\sigma_k=0$ точка $x^{(k)}$ є стаціонарною точкою задачі (36.1), (36.2), тобто в ній виконуються необхідні умови мінімуму, які визначені в теоремі 23.6. Отже, при $\sigma_k=0$ ітераційний процес (36.3) завершується.

Т е о р е м а 36.1. *Нехай функції $f(x), g_i(x), i=\overline{1,m}$, визначені на R^n і неперервно диференційовні на множині X виду* (36.2).

Якщо задача (36.1), (36.2) *має розв'язок, тобто $f^*=\min\limits_{x\in X}f(x)>-\infty$ і $X^*=\{x^*\in X\,|\,f(x^*)=f^*\}\ne\varnothing$, то для будь-якої точки $x^*\in X^*$ задача*

$$\sigma\to\min,\ z=(p,\sigma)\in Z^* \tag{36.12}$$

має розв'язок $(p^*,\sigma^*)\in Z^*$ і $\sigma^*=\min\limits_{z\in Z^*}\sigma=0$, де

$$Z^*=\{(p,\sigma)\in R^{n+1}\,|\,\langle f'(x^*),p\rangle\le\sigma,\ \langle g_i'(x^*),p\rangle\le\sigma,$$
$$i\in I(x^*),|\,p_j\,|\le 1,\ j=\overline{1,n}\}, \tag{36.13}$$

$I(x^*)=\{i\in I\,|\,g_i(x^*)=0\}$.

Д о в е д е н н я. Нехай точка $x^*\in X^*$. Тоді згідно теореми 23.6 і того, що $P=R^n$ (див. (23.30)), існують множники Лагранжа $\lambda_0^*\ge 0, \lambda_i^*\ge 0, i=\overline{1,m}$, не всі рівні нулеві, такі, що виконуються умови

$$\lambda_0^*f'(x^*)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^*g_i'(x^*)=O_n, \tag{36.14}$$

$$\lambda_i^*g_i(x^*)=0,\quad i=\overline{1,m}. \tag{36.15}$$

Враховуючи зміст умов доповнюючої нежорсткості (36.15) (див. §23), для $i\notin I(x^*)$ $\lambda_i^*=0$. Тому (36.14) можна записати у вигляді

$$\lambda_0^*f'(x^*)+\sum_{i\in I(x^*)}\lambda_i^*g_i'(x^*)=O_n. \tag{36.16}$$

Візьмемо довільну точку $z=(p,\sigma)\in Z^*$. Тоді

$$\langle f'(x^*),p\rangle\le\sigma,$$
$$\langle g_i'(x^*),p\rangle\le\sigma,\ i\in I(x^*).$$

Помноживши першу нерівність на $\lambda_0^*\ge 0$, решту – на відповідні $\lambda_i^*\ge 0$, $i\in I(x^*)$, і додавши одержані нерівності, з урахуванням (36.16) будемо мати

$$\langle\lambda_0^*f'(x^*)+\sum_{i\in I(x^*)}\lambda_i^*g_i'(x^*),p\rangle=0\le\sigma(\lambda_0^*+\sum_{i\in I(x^*)}\lambda_i^*).$$

Звідси, враховуючи, що $\lambda_0^* + \sum\limits_{i \in I(x^*)} \lambda_i^* > 0$, маємо $\sigma \geq 0$ для будь-якої точки $z = (p, \sigma) \in Z^*$. Оскільки точка $(0, 0, ..., 0) \in Z^*$, то $\sigma^* = \min\limits_{z \in Z^*} \sigma = 0$.

З а у в а ж е н н я. Можна показати (див., наприклад, [18]), що, якщо в умовах теореми 36.1, крім того функції $f(x), g_i(x), i = \overline{1,m}$, опуклі на R^n, а множина X регулярна (див. означення 22.2), то будь-яка точка $x^* \in X^*$, для якої задача (36.12), (36.13) визначає величину $\sigma^* = \min\limits_{z \in Z^*} \sigma = 0$, є розв'язком задачі (36.1), (36.2).

Нехай тепер $\sigma_k < 0$. Тоді згідно леми 36.1 напрям $p^{(k)}$, одержаний при розв'язуванні задачі (36.10), (36.11), є напрямом спадання цільової функції $f(x)$ в точці $x^{(k)} \in X$ і можливим напрямом відносно множини X в точці $x^{(k)}$, тобто $p^{(k)} \in U(x^{(k)}, f) \bigcap V(x^{(k)}, X)$ (див. рис. 36.1).

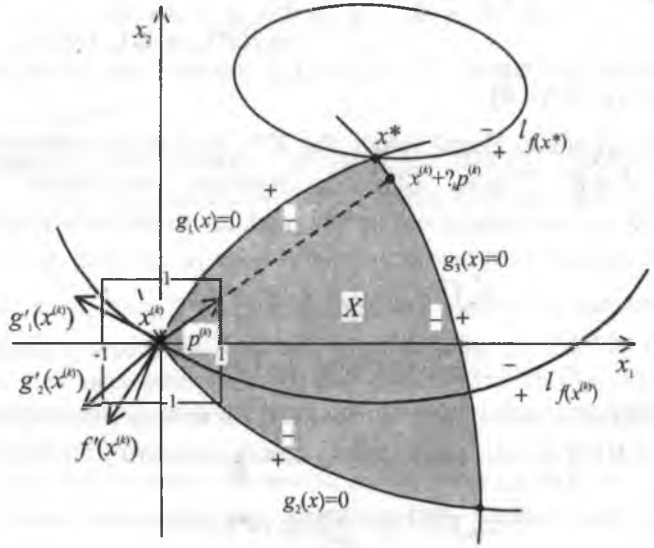


Рис. 36.1

Зауважимо, що якщо в точці $x^{(k)}$ множина $I(x^{(k)}) = \varnothing$, то $x^{(k)} \in \operatorname{int} X$ і $p^{(k)}$ співпадає з напрямом антиградієнта функції $f(x)$ в точці $x^{(k)} \in X$, тобто

$$p^{(k)} = -\beta_k f'(x^{(k)}), \qquad (36.17)$$

де $\beta_k = \left(\max\limits_{j=\overline{1,n}} \left| \dfrac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_j} \right| \right)^{-1} > 0$ і при цьому $| p_j^{(k)} | \leq 1,\ j = \overline{1,n}$ (див. рис. 36.2).

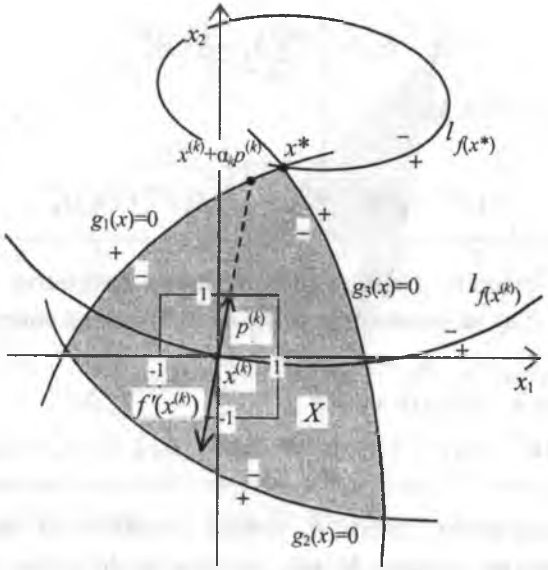


Рис. 36.2

Використовуючи знайдений напрям спуску $p^{(k)}$, наступне (k+1)-е наближення визначається за правилом (36.3), де параметр $h_k \in (0; \alpha_k]$,

$$\alpha_k = \sup\{\alpha \mid x^{(k)} + \lambda p^{(k)} \in X,\ 0 \leq \lambda \leq \alpha\} > 0. \qquad (36.18)$$

Величина α_k, якщо вона скінченна, визначає найбільший відрізок $[x^{(k)}; x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}]$, який належить X і при цьому точка $x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}$ лежить на межі множини X (див. рис. 36.1).

Обираючи величину h_k в (36.3) різними способами, можна одержати різні варіанти методу можливих напрямів. Розглянемо деякі з них (див., наприклад, [18], [57]).

1. Величина h_k обирається з умови

$$h_k = \arg\min_{h \in (0;\, \alpha_k]} f(x^{(k)} + hp^{(k)}), \qquad (36.19)$$

тобто

$$f(x^{(k)} + h_k p^{(k)}) = \min_{h \in (0;\, \alpha_k]} f(x^{(k)} + hp^{(k)}).$$

Для знаходження h_k, що задовольняє умову (36.19), можна використати відомі класичні методи одновимірної мінімізації (див. § 8). Але точний розв'язок задачі (36.19) вдається знайти дуже рідко, тому на практиці доцільно використовувати, наприклад, такі способи визначення h_k:

$$0 < h_k \leq \alpha_k,\ f(x^{(k)} + h_k p^{(k)}) \leq f_k^* + \delta_k, \qquad (36.20)$$

$$\delta_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k = \delta < \infty,$$

де $f_k^* = \inf\limits_{h \in (0;\, \alpha_k]} f(x^{(k)} + hp^{(k)})$,

або

$$f(x^{(k)} + h_k p^{(k)}) \leq (1 - \lambda_k) f(x^{(k)}) + \lambda_k f_k^*, \qquad (36.21)$$

де $0 < \lambda \leq \lambda_k \leq 1$.

2. Якщо функція $f(x) \in C^{1,1}(X)$ і відома константа Ліпшиця $L > 0$ для градієнта $f(x)$ на множині X, то h_k в (36.3) можна обирати з умови

$$h_k = \min\{\alpha_k; |\sigma_k| \cdot L^{-1}\}. \qquad (36.22)$$

3. Можна h_k обирати з умов

$$f(x^{(k)} + h_k p^{(k)}) - f(x^{(k)}) \leq -\varepsilon \alpha_k |\sigma_k|, \; 0 < h_k \leq \alpha_k, \qquad (36.23)$$

де $\varepsilon \in (0; 2^{-1}]$.

Для знаходження такого h_k можна скористатися правилом поділу кроку, поклавши на початку $h_k = \alpha_k$, а потім, якщо умова (36.23) не виконується, зменшувати h_k, помножаючи його щоразу на деяке число $\lambda \in (0; 1)$ доти, поки умова (36.23) не виконається. Тут можна покласти, наприклад, $\lambda = 0.9$.

4. У тих випадках, коли величину α_k, яка задовольняє (36.18), знайти важко, то для визначення $h_k > 0$, яке забезпечує виконання умови монотонності (36.5) на множині X, можна скористатися наступним правилом. Покласти $h_k = h = const > 0$. Якщо умова (36.5) виконується, то пошук h_k завершується. Якщо не виконується умова $x^{(k+1)} \in X$, то треба зменшувати h_k, помножаючи його на деяке число $\lambda \in (0; 1)$, і знову перевіряти умову (36.5).

На цьому завершується опис пошуку (k+1)-го наближення за методом можливих напрямів.

На практиці ітераційний процес (36.3) доцільно завершувати не лише при $\sigma_k = 0$ (див. (36.10)), але й при виконанні однієї з умов

$$-\varepsilon < \sigma_k \leq 0, \text{ або } \| f'(x^{(k)}) \| < \varepsilon, \text{ або } \| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| < \varepsilon,$$

де $\varepsilon > 0$ – точність обчислень.

П р и к л а д 36.1. Нехай задано задачу умовної мінімізації

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2)^2 + x_2^2 \to \min,$$

$$X = \{x \in R^2 \mid g_1(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_2 - 2 \leq 0; \; g_2(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 - 1 \leq 0\}.$$

Зробити дві ітерації за методом можливих напрямів (36.3)-(36.5), (36.10), (36.11), (36.19), починаючи ітераційний процес з допустимої точки $x^{(0)} = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ (рис. 36.3).

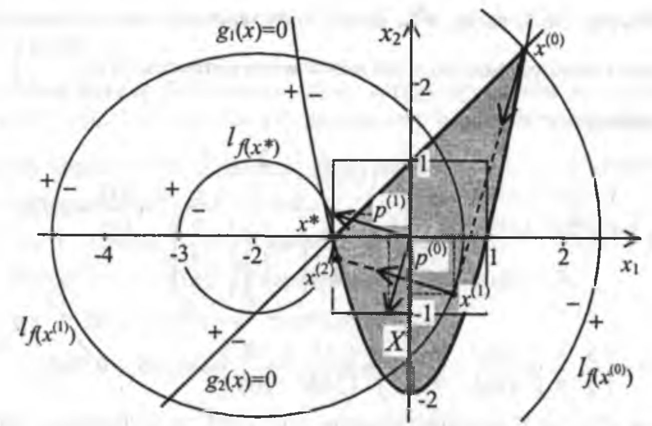


Рис. 36.3

Для знаходження можливого напряму $p^{(0)}$ в точці $x^{(0)}$ побудуємо допоміжну задачу виду (36.10), (36.11) при $I(x^{(0)}) = \{1, 2\}$. Враховуючи, що

$$f'(x_1, x_2) = (2(x_1 + 2), 2x_2), \; g_1'(x_1, x_2) = (4x_1, -1), \; g_2'(x_1, x_2) = (-1, 1),$$

маємо

$$\sigma \to \min,$$

$$\begin{cases} 7p_1 + 5p_2 \leq \sigma, \\ 6p_1 - p_2 \leq \sigma, \\ -p_1 + p_2 \leq \sigma, \\ p_1 \leq 1, \\ p_1 \geq -1, \\ p_2 \leq 1, \\ p_2 \geq -1. \end{cases}$$

Розв'язавши цю задачу лінійного програмування відносно змінних p_1, p_2, σ, наприклад за симплекс-методом, одержимо

$$p_1^{(0)} = -\frac{2}{7} \approx -0{,}286, \; p_2^{(0)} = -1, \; \sigma_0 = -\frac{5}{7} \approx -0{,}714.$$

Отже, $p^{(0)} = \left(-\frac{2}{7}, -1\right)$ і, оскільки $\sigma_0 < 0$, то перейдемо до знаходження наступного наближення $x^{(1)}$ за правилом

$$x^{(1)} = x^{(0)} + h_0 p^{(0)},$$

де

$$h_0 = \arg\min_{h \in (0;\, \alpha_0]} f(x^{(0)} + hp^{(0)}),$$

$$\alpha_0 = \sup\{\alpha \mid x^{(0)} + \lambda p^{(0)} \in X, \quad 0 \leq \lambda \leq \alpha\} > 0$$

(див. (36.18)).

Як видно з рис. 36.3, точка $x^{(1)} \in \operatorname{int} X$. Тому, враховуючи, що цільова функція $f(x)$ квадратична з симетричною додатно визначеною матрицею $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, h_0 згідно (32.20) буде дорівнювати

$$h_0 = -\frac{\langle f'(x^{(0)}), p^{(0)}\rangle}{\langle A(p^{(0)})^T, (p^{(0)})^T\rangle} = -\frac{\left\langle (7,5), \left(-\frac{2}{7}, -1\right)\right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{2}{7}\\ -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{2}{7}\\ -1\end{pmatrix}\right\rangle} = \frac{343}{106} \approx 3{,}236 .$$

Тоді маємо

$$x^{(1)} = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) + \frac{343}{106}\left(-\frac{2}{7}, -1\right) = \left(\frac{61}{106}, -\frac{78}{106}\right) \approx (0{,}575, -0{,}736).$$

Для точки $x^{(1)} \in \operatorname{int} X$ множина номерів $I(x^{(1)}) = \varnothing$, тому знайдемо напрям $p^{(1)}$ із співвідношення (36.17):

$$p^{(1)} = -\beta_1 f'(x^{(1)}),$$

де $\beta_1 = \left(\max_{j=\overline{1,n}} \left|\frac{\partial f(x^{(1)})}{\partial x_j}\right|\right)^{-1} > 0$, $f'(x^{(1)}) = \left(\frac{546}{106}, -\frac{156}{106}\right) \approx (5{,}151, -1{,}472)$.

Звідси маємо

$$\beta_1 = \frac{106}{546} \approx 0{,}194 \quad \text{і} \quad p^{(1)} = -\frac{106}{546}\left(\frac{546}{106}, -\frac{156}{106}\right) = \left(-1, -\frac{156}{546}\right) \approx (-1, 0{,}286).$$

З рис. 36.3 видно, що наступне наближення

$$x^{(2)} = x^{(1)} + h_1 p^{(1)} = \left(\frac{61}{106}, -\frac{78}{106}\right) + h_1\left(-1, \frac{156}{546}\right)$$

належить межі множини X і при цьому

$$h_1 = \arg\min_{h\in(0;\alpha_1]} f(x^{(1)} + hp^{(1)}) = \alpha_1, \quad I(x^{(2)}) = \{1\}.$$

Знайдемо h_1, підставивши в рівняння $g_1(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_2 - 2 = 0$ замість x_1 і x_2 відповідно $x_1 = \frac{61}{106} - h_1$, $x_2 = -\frac{78}{106} + h_1\frac{156}{546}$, при цьому одержимо квадратне рівняння

$$2\left(\frac{61}{106} - h_1\right)^2 + \frac{78}{106} - h_1\frac{156}{546} - 2 = 0$$

відносно h_1. Розв'язавши його, знайдемо два корені

$$h_1' = \frac{\sqrt{141}}{14} + \frac{240}{371} \approx 1{,}495; \quad h_1'' = -\frac{\sqrt{141}}{14} + \frac{240}{371} \approx -0{,}201,$$

з яких другий корінь зайвий. Отже, $h_1 \approx 1{,}495$.

Тоді

$$x^{(2)} = \left(\frac{61}{106} - 1{,}495, -\frac{78}{106} + 1{,}495\frac{156}{546}\right) \approx (-0{,}920, -0{,}309),$$

в якій $f(x^{(2)}) \approx 1{,}262$.

Зауважимо, що розв'язком задачі, як видно з рис. 36.3, є точка $x^* = (-1, 0)$, $f(x^*) = 1$.

2. Схема методу. Розглянемо схему алгоритму роботи за методом можливих напрямів (36.3), (36.5), (36.10), (36.11), де параметр h_k обирається за правилом 4.

Нехай задано $\varepsilon > 0$ – досить мале число, $\lambda \in (0; 1)$, $h = const > 0$, довільне початкове наближення $x^{(0)} \in X$ і $k := 0$.

К р о к 1. Знайти $f'(x^{(k)})$ і визначити множину $I(x^{(k)})$. Якщо $\| f'(x^{(k)}) \| < \varepsilon$, то покласти $x^* := x^{(k)}$, $f^* := f(x^{(k)})$ і перейти до виконання кроку 8.

К р о к 2. Якщо $I(x^{(k)}) = \varnothing$, то обчислити

$$p^{(k)} = -\beta_k f'(x^{(k)}),$$

де $\beta_k = \left(\max_{j=\overline{1,n}} \left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_j}\right|\right)^{-1}$ і перейти до виконання кроку 5.

К р о к 3. Знайти $g_i'(x^{(k)})$, $i \in I(x^{(k)})$, і визначити пару $(p^{(k)}, \sigma_k)$, яка є розв'язком задачі

$$\sigma \to \min,$$

$$\langle f'(x^{(k)}), p\rangle \le \sigma, \ \langle g_i'(x^{(k)}), p\rangle \le \sigma, \ i \in I(x^{(k)}),$$

$$|p_j| \le 1, \ j = \overline{1,n}.$$

К р о к 4. Якщо $-\varepsilon < \sigma_k \le 0$, то покласти $x^* := x^{(k)}$, $f^* := f(x^{(k)})$ і перейти до виконання кроку 8.

К р о к 5. Покласти $h_k := h$.

К р о к 6. Знайти

$$\bar{x} = x^{(k)} + h_k p^{(k)}.$$

Якщо $\bar{x} \in X$ і $f(\bar{x}) < f(x^{(k)})$, то покласти $x^{(k+1)} := \bar{x}$ і перейти до виконання кроку 7, інакше покласти $h_k := \lambda h_k$ і повторити крок 6.

К р о к 7. Якщо $\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| < \varepsilon$, то покласти $x^* := x^{(k+1)}$, $f^* := f(x^{(k+1)})$ і перейти до виконання кроку 8, інакше покласти $k := k+1$ і перейти до виконання кроку 1.

К р о к 8. Вивести: x^*, f^*, k.

Кінець.

З а у в а ж е н н я. На практиці описаний варіант методу можливих напрямів використовується досить рідко. Це пов'язано з тим, що коли в розв'язку $(p^{(k)}, \sigma_k)$ задачі (36.10), (36.11) значення $\sigma_k < -\varepsilon$ досить мале, то напрям $p^{(k)}$, теоретично будучи можливим напрямом спадання функції $f(x)$ в точці $x^{(k)}$ відносно множини X, практично може не задовольняти цю умову, або задовольняти її, але при цьому величина α_k в (36.17), а отже і h_k, будуть досить малими. Виникнення такої ситуації можливе з двох основних причин:

1) напрям $p^{(k)}$ «дотикається» множини X, якщо для деякого $i \in I(x^{(k)})$ величина $\sigma_i^{(k)} = \langle g_i'(x^{(k)}), p^{(k)} \rangle \approx 0$;

2) величина $\sigma_f^{(k)} = \langle f'(x^{(k)}), p^{(k)} \rangle \approx 0$, тобто вздовж $p^{(k)}$ функція спадає досить повільно.

З цих причин метод можливих напрямів ще далеко від розв'язку $x^* \in X$ задачі (36.1), (36.2) починає збігатися досить повільно. Далі буде розглянуто один із способів, як запобігти виникненню таких ситуацій.

3. Прискорити збіжність послідовних наближень за методом можливих напрямів можна за рахунок певного правила добору множини $I(x^{(k)})$ для поточного наближення $x^{(k)}$ з метою визначення вектора $p^{(k)}$ з яскраво вираженими властивостями можливого напряму спадання функції $f(x)$ в точці $x^{(k)}$ відносно множини X.

Нехай $x^{(0)} \in X$ – деяке початкове наближення, ε – досить мале число, $\varepsilon_0 > \varepsilon$ – параметр методу. Припустимо, що вже знайдено точку $x^{(k)} \in X$ і відповідне йому значення параметра $\varepsilon_k > 0$.

Визначимо множину $I(x^{(k)}, \varepsilon_k)$ таку, що

$$I(x^{(k)}, \varepsilon_k) = \{ i \in I \mid -\varepsilon_k \le g_i(x) \le 0 \}, \qquad (36.24)$$

і розглянемо задачу

$$\sigma \to \min, \; z = (p, \sigma) \in Z_k, \qquad (36.25)$$

де

$$X = \{ (p, \sigma) \in R^{n+1} \mid \langle f'(x^{(k)}), p \rangle \le \sigma, \; \langle g_i'(x^{(k)}), p \rangle \le \sigma,$$

$$i \in I(x^{(k)}, \varepsilon_k), \; |p_j| \le 1, \; j = \overline{1, n} \}. \qquad (36.26)$$

Як і задача (36.10), (36.11), задача (36.25), (36.26) є задачею лінійного програмування і має хоча б один розв'язок $(p^{(k)}, \sigma_k)$, де $\sigma_k = \min_{z \in Z_k} \sigma \le 0$.

Можливі такі випадки:

1. Якщо $\sigma_k \le -\varepsilon_k$, то вважають, що напрям $p^{(k)}$ є досить вдалим напрямом спадання функції $f(x)$ в точці $x^{(k)}$ відносно множини X, і тоді за допомогою одного з правил 1-4 обчислюють величину h_k таку, що $0 < h_k \le \alpha_k$, де α_k визначається з (36.18). Потім покладають

$$x^{(k+1)} := x^{(k)} + h_k p^{(k)}, \; \varepsilon_{k+1} := \varepsilon_k, \; k = k+1, \qquad (36.27)$$

і продовжують процес, тобто розв'язується задача (36.25), (36.26) з новою точкою $x^{(k+1)}$ і параметром ε_{k+1}.

2. Якщо $-\varepsilon_k < \sigma_k \le 0$, то вважають, що напрям $p^{(k)}$ не є вдалим і тоді покладають

$$x^{(k+1)} := x^{(k)}, \; \varepsilon_{k+1} := \lambda \varepsilon_k, \text{ де } \lambda \in (0;1), \qquad (36.28)$$

і знову розв'язують задачу (36.25), (36.26) з новим параметром ε_{k+1} і множиною

$$I(x^{(k+1)}, \varepsilon_{k+1}) = \{ i \in I \mid -\varepsilon_{k+1} \le g_i(x^{(k+1)}) \le 0 \},$$

сподіваючись, що вдасться знайти кращий напрям $p^{(k+1)}$.

3. Якщо $\sigma_k = 0$, то розв'язують задачу (36.25), (36.26) при $I(x^{(k)}, 0)$, тобто задачу (36.10), (36.11). Якщо для цієї задачі буде $\overline{\sigma}_k = 0$, то процес зупиняється, оскільки $x^{(k)}$ – стаціонарна точка задачі (36.1), (36.2). У випадку коли $\overline{\sigma}_k < 0$, покладають

$$x^{(k+1)} := x^{(k)}, \; \varepsilon_{k+1} := \lambda \varepsilon_k, \text{ де } \lambda \in (0;1), \qquad (36.29)$$

і знову розв'язують задачу (36.25), (36.26) з новим параметром ε_{k+1} і множиною $I(x^{(k+1)}, \varepsilon_{k+1})$.

Зауваження.

1. Для задачі умовної мінімізації

$$f(x) \to \min, \quad x \in X,$$

де

$$X = \{ x \in R^n \mid g_i(x) \le 0, \, i = \overline{1,m}, \; \langle a_i, x \rangle - b_i = 0, \; i = \overline{m+1,k} \},$$

$a_i \in R^n, b_i \in R^1, i = \overline{m+1,k}$, тобто задачі, яка містить обмеження-нерівності і лінійні обмеження-рівності, метод можливих напрямів описується так само, як і для задачі (36.1), (36.2), але в задачах (36.10), (36.11) і (36.24), (36.25) необхідно додати обмеження $\langle a_i, p \rangle = 0, \quad i = \overline{m+1,k}$.

2. Якщо величина ε_k буде задовольняти умову $\varepsilon_k < \varepsilon$, то роботу за описаним методом можна зупинити і одержати розв'язок задачі (36.1), (36.2) із заданою точністю ε.

3. Ефективність методу можливих напрямів залежить від вдалого вибору параметрів ε_k, $k = 0, 1, \ldots$, але це треба робити для кожної задачі умовної мінімізації окремо, оскільки загальні рекомендації дати важко.

4. Збіжність методу. Для методу можливих напрямів, описаному в попередньому пункті, сформулюємо теореми, в яких визначено умови збіжності відповідних послідовних наближень.

Позначимо через S^* множину стаціонарних точок задачі (36.1), (36.2). Згідно теореми 36.1 S^* складається з точок $x^* \in X$, для яких задача (36.12), (36.13) має розв'язок $(p^*, \sigma^*) \in Z^*$ і $\sigma^* = 0$, при цьому $I(x^*) = I(x^*, 0)$.

Т е о р е м а 36.2. *Нехай виконуються умови:*

1) *функції* $f(x)$, $g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, *належить класу* $C^{1,1}(X)$;

2) *існує таке число* $M>0$, *що* $\| g_i'(x) \| \le M, i=\overline{1,m}$, *для будь-яких* $x \in X_0 = \{x \in X \mid f(x) \le f(x^{(0)})\}$, *де точка* $x^{(0)} \in X_0$ – *деяке початкове наближення*;

3) *множина* $S^* \subset X$ *стаціонарних точок задачі* (36.1), (36.2) *непорожня*;

4) $f^* = \inf\limits_{x\in X} f(x) > -\infty$;

5) *послідовність точок* $\{x^{(k)}\}$, *яка генерується за методом можливих напрямів* (36.3)-(36.5), (36.24)-(36.26), (36.27)-(36.29), (36.18), (36.21), *обмежена.*

Тоді має місце рівність

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x^{(k)}, S^*) = \lim_{k\to\infty} \inf_{x^*\in S^*} \| x^{(k)} - x^* \| = 0.$$

Доведення цієї теореми можна знайти, наприклад, у [57].

Т е о р е м а 36.3. *Нехай виконуються умови:*

1) *функції* $f(x)$, $g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, *визначені і опуклі на* R^n;

2) *множина* X *в задачі* (36.1), (36.2) *регулярна*;

3) *функції* $f(x)$, $g_i(x), i=\overline{1,m}$, *належить класу* $C^{1,1}(X)$;

4) $D = \max\limits_{i=\overline{1,m}} \sup\limits_{x\in X} \| g_i'(x) \| < \infty$;

5) *задача* (36.1), (36.2) *має розв'язок, тобто*

$$f^* = \inf_{x\in X} f(x) > -\infty,\ \ X^* = \{x^* \in X \mid f(x^*) = f^*\} \ne \varnothing;$$

6) *початкове наближення* $x^{(0)} \in X$ *таке, що множина*

$$L_\sigma(x^{(0)}) = \{x \in X \mid f(x) \le f(x^{(0)}) + \sigma,\ \sigma > 0\} \text{ – обмежена.}$$

Тоді при будь-якому $\varepsilon_0 > 0$ *для послідовності* $\{x^{(k)}\}$, *яка генерується за методом можливих напрямів* (36.3)-(36.5), (36.24)-(36.26), (36.27)-(36.29), (36.18), (36.20), *мають місце рівності*

$$\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f^*,$$

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x^{(k)}, X^*) = \lim_{k\to\infty} \inf_{x^*\in X^*} \| x^* - x^{(k)} \| = 0.$$

Доведення цієї теореми можна знайти, наприклад, у [18].

На закінчення зазначимо, що достоїнствами методу можливих напрямів можна вважати його надійність і універсальність при розв'язуванні задач оптимізації з обмеженнями досить складної структури. Недоліками цього

методу є невисока швидкість збіжності за кількістю ітерацій і досить великий об'єм обчислень на кожній ітерації за рахунок розв'язування допоміжних задач для знаходження напряму можливого спуску $p^{(k)}$ і крокового множника h_k.

Різні способи прискорення збіжності розглянутого методу та його узагальнення на більш широкий клас задач умовної оптимізації можна знайти, наприклад, у [18], [50], [57].

Запитання для самоконтролю

1. У чому полягає сутність методу можливих напрямів і які рекурентні співвідношення в ньому використовуються?
2. Які правила вибору крокового множника використовують в методі можливих напрямів?
3. Які правила використовують для завершення роботи за методом можливих напрямів?
4. За яких умов послідовні наближення за методом можливих напрямів збігаються до розв'язку задачі умовної мінімізації?
5. До розв'язування яких задач умовної мінімізації доцільно використовувати метод умовного градієнта?
6. Які переваги і недоліки методу можливих напрямів?

Вправи для самостійного виконання

1. В умовах теореми 36.1 з урахуванням опуклості функцій $f(x)$, $g_i(x), i=\overline{1,m}$, і регулярності множини X, довести, що рівність $\sigma^* = \min\limits_{z\in Z^*} \sigma = 0$ в деякій точці $x^* \in X$ є достатньою умовою для того, щоб ця точка була розв'язком задачі (36.1), (36.2).

2. Нехай в методі можливих напрямів для знаходження напряму спуску в деякій точці $\bar{x} \in X$ використовується допоміжна задача виду

$$\sigma \to \min, \tag{36.30}$$

$$\langle f'(\bar{x}), p \rangle \le \sigma,$$

$$\langle g_i'(\bar{x}), p \rangle \le \sigma, i \in \bar{I}, \tag{36.31}$$

$$\langle p, p \rangle \le 1,$$

де $\bar{I} = I(\bar{x}) = \{i \in I \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$ (див. (36.10), (36.11)),
або $\bar{I} = I(\bar{x}, \varepsilon) = \{i \in I \mid -\varepsilon \le g_i(\bar{x}) \le 0\}$ (див. (36.24)–(36.26)), $\varepsilon > 0$.

Розглянемо задачу квадратичного програмування

$$\langle p, p \rangle \to \min, \tag{36.32}$$

$$\langle f'(\bar{x}), p \rangle \ge 1,$$

$$\langle g_i'(\bar{x}), p \rangle \ge 1, i \in \bar{I}. \tag{36.33}$$

Показати, що:

1) якщо множина (36.33) непорожня, то існує вектор $p' \ne O_n$, який є розв'язком задачі (36.32), (36.33);

2) якщо $p' \neq O_n$ – розв'язок задачі (36.32), (36.33), то пара

$$p^* = -\frac{p'}{\| p' \|}, \sigma^* = -\frac{1}{\| p' \|},$$

є розв'язком задачі (36.30), (36.31);

3) якщо множина (36.33) порожня, то в задачі (36.30), (36.31) $\sigma^* = 0$.

3. Побудувати схему методу можливих напрямів (36.3)-(36.5), (36.24)-(36.26), (36.27)-(36.29), (36.18), (36.19).

4. Нехай задано задачу

$$f(x_1, x_2) = x_1 + \cos x_2 \to \min, \ x \in X,$$

де $X = \{x \in R^2 | g(x_1, x_2) = -x_1 \leq 0\}$.

Показати, що в точці $\bar{x} = (0, 0)$, яка не є розв'язком цієї задачі, виконується умова

$$\bar{\sigma} = \min_{\bar{x} \in Z(\bar{x})} \sigma = 0,$$

де

$$Z(\bar{x}) = \{(p, \sigma) \in R^3 | \langle f'(\bar{x}), p \rangle \leq \sigma, \ \langle g'(\bar{x}), p \rangle \leq \sigma, \ | p_j | \leq 1, \ j = \overline{1,2}\}.$$

5. Для задачі опуклого програмування

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \min, \ x \in X,$$

де

$$X = \{x \in R^2 \mid x_1^2 - x_2 \leq 0; x_2 - 1 \leq 0\},$$

зробити дві ітерації за методом можливих напрямів, починаючи з точок:

а) $x^{(0)} = (1, 1)$; б) $x^{(0)} = (-1, 1)$; в) $x^{(0)} = (0, 1)$; г) $x^{(0)} = (0, 0)$.

Дати геометричну інтерпретацію одержаних результатів.

6. Для задач умовної оптимізації із завдання 2 §35 зробити дві ітерації за методом можливих напрямів і порівняти результати з результатами, одержаними за методом умовного градієнта.

7. Однією з мов програмування описати алгоритми роботи за наведеними методами можливих напрямів.

8. За допомогою розроблених програм реалізації методів можливих напрямів розв'язати задачі умовної оптимізації із завдання 5 §35. Результати обчислень занести у таблицю (див. завдання 7 §34) і порівняти їх з результатами, одержаними за методом умовного градієнта.

§37. Методи штрафних функцій

Одним з найбільш популярних чисельних методів розв'язування задач нелінійного програмування є *метод штрафних функцій* або *метод штрафів*. Засновником його вважають німецького математика Ріхарда Куранта, який у 1943 р. запропонував вивчати умови стаціонарності функції $f(x) + tg^2(x)$ при $t \to \infty$ для аналізу руху в обмеженій області, яка задавалась умовою $g(x) = 0$, у термінах руху без яких-небудь умов.

Метод штрафних функцій, на відміну від розглянутих вище методів проекції градієнта, умовного градієнта і можливих напрямів, не є методом спуску. В його основі лежить ідея перетворення задачі оптимізації з обмеженнями в послідовність задач без обмежень. Це перетворення здійснюється за допомогою відповідної допоміжної функції, яка містить функції обмежень і визначає нову цільову функцію, яка залежить від деякого параметра і набуває безумовного мінімуму в деякій області. Поступово змінюючи параметр і тим самим збільшуючи вплив обмежень на допоміжну функцію, будують послідовність задач без обмежень, розв'язки яких збігаються за певних умов до розв'язку поставленої задачі умовної оптимізації.

Ідея методу, яка близька до ідеї класичного методу Лагранжа, проста і досить універсальна. Завдяки цьому, а також багатому вибору штрафних функцій і досить сильним властивостям збіжності, метод штрафних функцій широко використовується для розв'язування різноманітних екстремальних задач. Існує багато модифікацій цього методу, який, крім широких практичних застосувань, має важливе значення при теоретичному аналізі задач оптимізації, зокрема за його допомогою можна встановити умови оптимальності, одержати певні результати теорії двоїстості.

Різні обчислювальні, прикладні і теоретичні аспекти методу штрафних функцій та його модифікацій розглядаються, наприклад, у роботах [18], [35], [36], [48], [57], [65], [73], [82], [83], [103], [104], [107].

До методу штрафних функцій зазвичай відносять дві групи методів. До першої групи відносять методи, за допомогою яких пошук розв'язків задачі умовної оптимізації відбувається всередині допустимої області за рахунок так званих внутрішніх або бар'єрних штрафних функцій, які досить швидко зростають при наближенні до межі допустимої області з її середини. Друга група методів використовує так звані зовнішні штрафні функції, які зростають при віддалені від допустимої множини задачі і в яких пошук розв'язків відбувається за допомогою точок, розташованих поза цією множиною.

У цьому параграфі будуть розглянуті методи бар'єрних і зовнішніх штрафних функцій.

1. Загальна схема методів штрафних функцій. Будемо розглядати задачу умовної мінімізації

$$f(x) \to \min,\ x \in X, \qquad (37.1)$$

де X – непорожня множина в R^n.

Введемо так звану *індикаторну функцію* множини X:

$$\delta(x \mid X) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \in X, \\ +\infty, \text{ якщо } x \notin X. \end{cases} \qquad (37.2)$$

Тоді задача (37.1) буде еквівалентною до задачі безумовної мінімізації

$$F(x) = f(x) + \delta(x \mid X) \to \min,\ x \in R^n. \qquad (37.3)$$

Індикаторна функція $\delta(x \mid X)$ не є конструктивною і у чистому вигляді не може бути використана для розв'язування задачі (37.3). Але коли множину X задано обмеженнями нерівностями і/або рівностями, то, використовуючи функції, які їх визначають, можна побудувати конкретні послідовності функцій $R_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, які називають *штрафними* або *штрафами*, такі, що для будь-яких $x \in R^n$

$$\lim_{k \to \infty} R_k(x) = \delta(x \mid X). \qquad (37.4)$$

Тоді задача (37.3), з урахуванням (37.4), буде мати вигляд

$$\min_{x \in R^n}(f(x) + \lim_{k \to \infty} R_k(x)). \qquad (37.5)$$

Якщо операції відшукання мінімуму і граничного переходу є переставними, то з (37.5) одержимо послідовність звичайних задач безумовної мінімізації

$$F_k(x) = f(x) + R_k(x) \to \min, x \in R^n,\ k = 1, 2, \ldots, \qquad (37.6)$$

розв'язки яких $x^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, можна знайти за будь-яким відомим методом безумовної мінімізації (див. §§28-33), і для яких за певних умов на функції $R_k(x)$ можна добитися того, що

$$\lim_{k \to \infty} \min_{x \in R^n} F_k(x) = \min_{x \in R^n} F(x) = \min_{x \in X} f(x),$$

тобто

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x^*, \qquad (37.7)$$

де x^* – розв'язок задачі (37.1).

Отже, загальна схема методу штрафних функцій полягає у тому, щоб дібрати послідовність $\{R_k(x)\}$ штрафних функцій, яка задовольняє умову (37.4), і замість задачі (37.1) умовної мінімізації розв'язувати послідовність

задач (37.6) за одним з відомих методів безумовної мінімізації. При цьому послідовність штрафних функцій повинна забезпечувати виконання рівності (37.7).

Як вже зазначалось, існують два підходи до побудови штрафів $R_k(x)$ і відповідно до них розглядають дві групи методів штрафних функцій: *методи внутрішніх* або *бар'єрних штрафних функцій*, які іноді називають *методами внутрішньої точки*, і *методи зовнішніх штрафних функцій*, які іноді називають *методами зовнішньої точки*.

У методах бар'єрних штрафних функцій в ітераційному процесі породжуються точки, які належать внутрішності множини X, при цьому будується така послідовність штрафів $R_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, яка збігається за певних умов до індикаторної функції $\delta(x \mid X)$ і необмежено зростає при наближенні x до межі множини X з її середини (рис. 37.1 а).

У методах зовнішніх штрафних функцій в ітераційному процесі породжуються точки, що не належать множині X, при цьому будується така послідовність штрафів $R_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, яка збігається до індикаторної функції $\delta(x \mid X)$, і при будь-яких $k = 1, 2, \ldots$

$$R_k(x) = 0 \quad \forall x \in X,$$

$$R_k(x) > 0 \quad \forall x \notin X$$

і $R_k(x) \to +\infty$ при $k \to \infty$ (рис. 37.1 б).

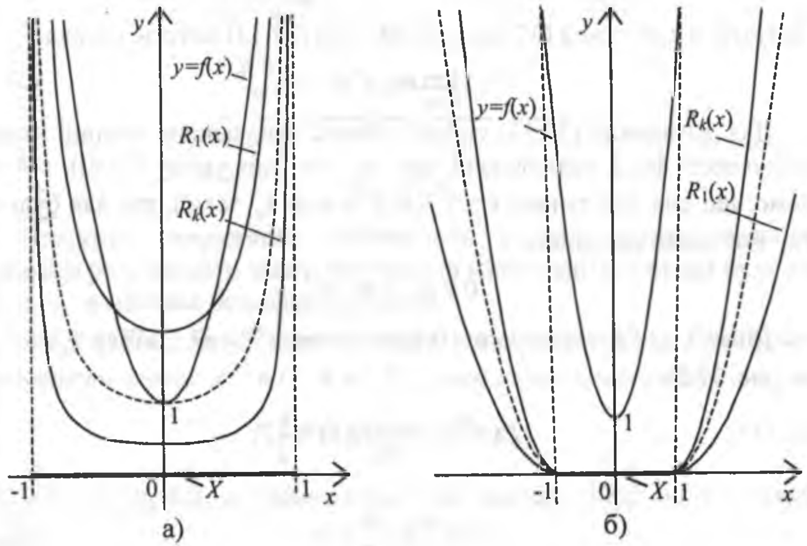


Рис. 37.1.

Різні способи вибору послідовностей штрафних функцій $R_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, породжують різні варіанти відповідних методів штрафних функцій.

Для того щоб будувати конкретні внутрішні і зовнішні штрафні функції, розглянемо твердження, яке гарантує перестановку операцій відшукання мінімуму і граничного переходу в (37.5).

Л е м а 37.1. *Нехай на множині* $G \subseteq R^n$ *задані функції* $F(x)$, $F_k(x)$, $k=1,2,\ldots$, *причому для будь-яких* $k=1,2,\ldots$ *виконуються умови*

$$F_k(x) \ge F(x) \quad \forall x \in G, \tag{37.8}$$

$$\lim_{k\to\infty} F_k(x) = F(x) \quad \forall x \in G. \tag{37.9}$$

Тоді, якщо

$$\inf_{x\in G} F(x) > -\infty, \tag{37.10}$$

то

$$\inf_{x\in G}\lim_{k\to\infty} F_k(x) = \lim_{k\to\infty}\inf_{x\in G} F_k(x) = \inf_{x\in G} F(x). \tag{37.11}$$

Д о в е д е н н я. В (37.11) рівність $\inf\limits_{x\in G}\lim\limits_{k\to\infty} F_k(x) = \inf\limits_{x\in G} F(x)$ має місце в силу умови (37.9).

Доведемо, що

$$\lim_{k\to\infty}\inf_{x\in G} F_k(x) = \inf_{x\in G} F(x). \tag{37.12}$$

Позначимо при фіксованому k

$$m_k = \inf_{x\in G} F_k(x) \quad \text{і} \quad m = \inf_{x\in G} F(x),$$

які існують в силу умов (37.10) і (37.8). Тоді (37.12) матиме вигляд

$$\lim_{k\to\infty} m_k = m. \tag{37.13}$$

Для доведення (37.13) скористаємось означенням границі числової послідовності $\{m_k\}$, враховуючи, що $m_k \ge m$ (див.умову (37.8)), тобто покажемо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер k_ε такий, що для будь-яких $k \ge k_\varepsilon$ має місце нерівність

$$0 \le m_k - m < \varepsilon.$$

Дійсно, для довільного $\varepsilon > 0$ існує точка $x^{(0)} \in G$ і номер k_ε такі, що (див. рис. 37.2)

$$F(x^{(0)}) < \inf_{x\in G} F(x) + \frac{\varepsilon}{2},$$

або

$$F(x^{(0)}) - \frac{\varepsilon}{2} < m, \tag{37.14}$$

і

$$F_k(x^{(0)}) < F(x^{(0)}) + \frac{\varepsilon}{2},$$

або

$$F_k(x^{(0)}) - F(x^{(0)}) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{37.15}$$

для будь-яких $k \ge k_\varepsilon$.

З (37.14) і (37.15) випливає, що для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $k > k_\varepsilon$

$$0 \le m_k - m \le F_k(x^{(0)}) - m < F_k(x^{(0)}) - \left(F(x^{(0)}) - \frac{\varepsilon}{2}\right) =$$

$$= (F_k(x^{(0)}) - F(x^{(0)})) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

тобто має місце (37.13).

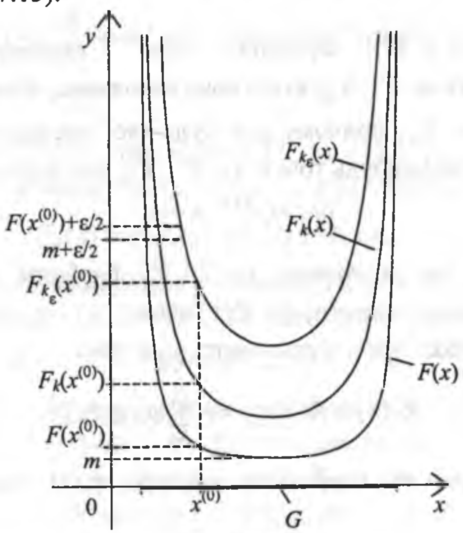


Рис 37.2.

Наступне твердження забезпечить у подальшому можливість наближено розв'язувати задачі безумовної мінімізації (37.6) для будь-якого $k=1,2,\ldots$, в методах штрафних функцій.

Л е м а 37.2. *Нехай виконуються умови леми 37.1. Тоді будь-яка послідовність точок* $x^{(k)} \in G$, $k=1,2,\ldots$, *яка задовольняє умову*

$$F_k(x^{(k)}) \le \inf_{x\in G} F_k(x) + \varepsilon_k, \tag{37.16}$$

де $\varepsilon_k \ge 0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0$, *є мінімізуючою для функції* $F(x)$ *на множині* G, *тобто*

$$\lim_{k\to\infty} F(x^{(k)}) = \inf_{x\in G} F(x). \tag{37.17}$$

Лема доводиться на основі співвідношення (37.11) (див., наприклад, [57]).

2. Метод бар'єрних функцій. Будемо розглядати задачу умовної мінімізації

$$f(x) \to \min, \ x \in X, \qquad (37.18)$$

де

$$X = \{x \in R^n \mid g_i(x) \le 0, i = \overline{1,m}\}, \qquad (37.19)$$

функції $f(x), g_i(x), i = \overline{1,m},$ неперервні на R^n. Нехай існує точка $x' \in R^n$ така, що $g_i(x') < 0$ для будь-яких $i = \overline{1,m}$, тобто множина

$$X_0 = \{x \in R^n \mid g_i(x) < 0, i = \overline{1,m}\} \subset X$$

непорожня.

Означення 37.1. Функція $R(x)$ називається *бар'єрною функцією* підмножини $X \setminus X_0$, якщо вона визначена, обмежена і невід'ємна для будь-якого $x \in X_0$, причому для будь-якої послідовності $\{x^{(k)}\} \in X_0$, яка збігається до якої-небудь точки $\bar{x} \in X \setminus X_0$, має місце рівність

$$\lim_{k \to \infty} R(x^{(k)}) = +\infty. \qquad (37.20)$$

Зауважимо, що в точках $\bar{x} \in X \setminus X_0$ бар'єрна функція $R(x)$ не визначена, або можна вважати, що $R(\bar{x}) = +\infty$.

Бар'єрні функції часто визначають у вигляді

$$R_k(x) = R(x, r_k) = r_k \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(g_i(x)), \qquad (37.21)$$

де $r_k > 0$ – *параметр* або *коефіцієнт штрафу*, $\varphi_i(t)$ – неперервні при $t < 0$ функції, причому

$$\varphi_i(t) \to +\infty \text{ при } t \to 0 - 0.$$

Найчастіше в якості функцій $\varphi_i(t)$ для задачі (37.18), (37.19) використовують такі функції:

$$\varphi_i(t) = -\frac{1}{t}, \ \varphi_i(t) = -\ln(-t), \qquad (37.22)$$

або їх узагальнення:

$$\varphi_i(t) = \frac{1}{|t|^p}, \ p > 0, \ \varphi_i(t) = (\max\{-\ln(-t); 0\})^p, \ p \ge 1. \qquad (37.23)$$

В якості послідовності параметрів штрафів $\{r_k\}$ використовують послідовності, які задовольняють умову

$$r_k > 0, \ \lim_{k \to \infty} r_k = 0, \qquad (37.24)$$

наприклад, $\{r_k\} = \{k^{-1}\}$.

З (37.21)-(37.23) одержимо такі бар'єрні функції:

$$R(x, r_k) = -r_k \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)}, \quad x \in X_0, \qquad (37.25)$$

$$R(x, r_k) = -r_k \sum_{i=1}^{m} \ln(-g_i(x)), \quad x \in X_0, \qquad (37.26)$$

$$R(x, r_k) = r_k \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{|g_i(x)|^p}, \ p > 0, \quad x \in X_0, \qquad (37.27)$$

$$R(x, r_k) = r_k \sum_{i=1}^{m} (\max\{-\ln(-g_i(x)); 0\})^p, \ p \ge 1, \ x \in X_0, \qquad (37.28)$$

де $r_k > 0, \lim_{k \to \infty} r_k = 0$.

Враховуючи (37.21), для задачі (37.18), (37.19) у методі бар'єрних функцій допоміжні функції $F_k(x), k = 1, 2, ...,$ в (37.6) будуть мати вигляд

$$F_k(x) = F(x, r_k) = f(x) + R(x, r_k). \qquad (37.29)$$

Вони набувають конкретного вигляду, якщо в них використати одну з бар'єрних функцій (37.25)-(37.28), конкретні значення $r_k > 0$, які задовольняють умову (37.24), і функції $g_i(x), i = \overline{1,m}$.

Приклад 37.1. Для задачі одновимірної мінімізації

$$f(x) = 7x^4 + x^3 - 4x^2 + 2 \to \min, x \in X,$$

де

$$X = \{x \in R^1 \mid g_1(x) = x - 1 \le 0; \ g_2(x) = -x - 1 \le 0\},$$

побудувати бар'єрні функції $R(x, r_k)$ виду (37.25), (37.26) і відповідні допоміжні функції $F(x, r_k)$ при $r_k = k^{-1}, \ k = 1, 2, 3$.

На рис. 37.3 а) показано цільову функцію $f(x)$ і бар'єрні функції $R(x, r_k)$ виду (37.25) для $r_1 = 1, r_2 = 2^{-1}, r_3 = 3^{-1}$, при цьому

$$R(x,1) = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{-x-1};$$

$$R(x, 2^{-1}) = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(-x-1)}; \qquad (37.30)$$

$$R(x, 3^{-1}) = -\frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(-x-1)}.$$

З рис. 37.3 а) видно, як функції $R(x, r_k)$ наближаються до індикаторної функції $\delta(x \mid X)$ виду (37.2) зсередини множини X.

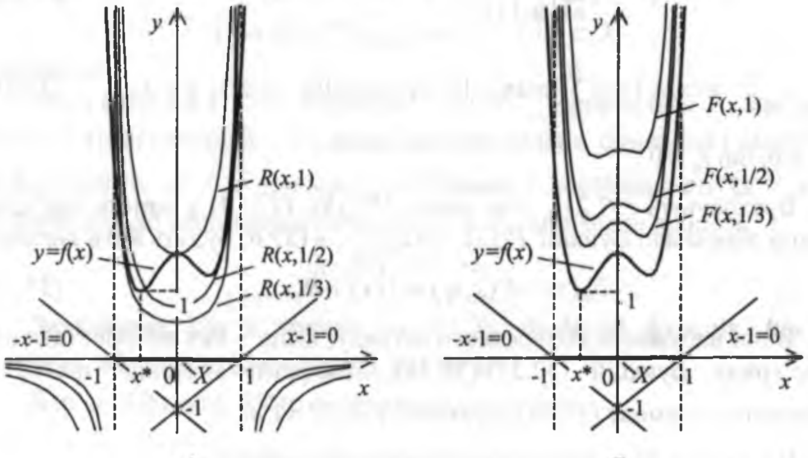
На рис. 37.3 б) показано цільову функцію $f(x)$ і допоміжні функції $F(x,r_k)$, $k=1,2,3$, виду (37.29), де $R(x,r_k)$, $k=1,2,3$, визначені в (37.30):

$$F(x,r_1)=7x^4+x^3-4x^2+2+R(x,1);$$

$$F(x,r_2)=7x^4+x^3-4x^2+2+R(x,2^{-1}); \qquad (37.31)$$

$$F(x,r_3)=7x^4+x^3-4x^2+2+R(x,3^{-1}).$$

З рис. 37.3 б) видно, як функції $F(x,r_k)$, $k=1,2,3$, виду (37.31), (37.30) наближаються до цільової функції $f(x)$ на множині X.



а) б)

Рис 37.3.

На рис. 37.4 а) показано цільову функцію $f(x)$ і бар'єрну функцію $R(x,r_k)$ виду (37.26) для $r_1=1$, $r_2=2^{-1}$, $r_3=3^{-1}$ при цьому

$$R(x,1)=-\ln(-(x-1))-\ln(-(-x-1));$$

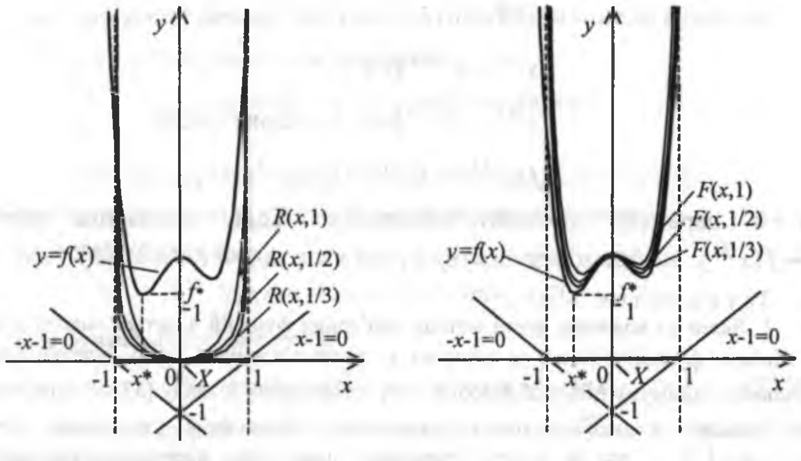
$$R(x,2^{-1})=-\frac{1}{2}\ln(-(x-1))-\frac{1}{2}\ln(-(-x-1)); \qquad (37.32)$$

$$R(x,3^{-1})=-\frac{1}{3}\ln(-(x-1)-\frac{1}{3}\ln(-(-x-1)).$$

З рис. 37.4 а) видно, як функції $R(x,r_k)$ наближаються до індикаторної функції $\delta(x\,|\,X)$ виду (37.2) зсередини множини X.

На рис. 37.4 б) показано цільову функцію $f(x)$ і функції $F(x,r_k)$, $k=1,2,3$, виду (37.29), де $R(x,r_k)$, $k=1,2,3$, визначені в (37.32).

З рис 37.4 б) видно, як функції $F(x,r_k)$, $k=1,2,3$, виду (37.31), (37.32) наближаються до цільової функції $f(x)$ усередині множини X, а їх точки мінімуму наближаються до розв'язку $x^*\approx-0{,}590771$ задачі, яка розглядається, при цьому $f(x^*)\approx1{,}25043$.



а) б)

Рис 37.4.

Опишемо метод бар'єрних функцій на основі загальної схеми методів штрафів.

Нехай задано довільне початкове наближення $x^{(0)}\in X_0$ і монотонно спадна послідовність $\{r_k\}$, яка задовольняє умови

$$r_k>0,\ \lim_{k\to\infty}r_k=0.$$

Припустимо, що вже зроблено $(k-1)$-у ітерацію методу. Розглянемо його k-ий крок.

Будуємо функцію

$$F(x,r_k)=f(x)+R(x,r_k), \qquad (37.33)$$

де $R(x,r_k)$ – одна з бар'єрних функцій виду (37.25)-(37.28), і, починаючи з точки $x^{(k-1)}$, розв'язуємо задачу безумовної мінімізації

$$F(x,r_k)\to\min,\ x\in R^n, \qquad (37.34)$$

тобто шукаємо точку $x^{(k)}\in X_0$ таку, що

$$F(x^{(k)},r_k)=\min_{x\in R^n}F(x,r_k). \qquad (37.35)$$

Потім процес (37.33)-(37.35) повторюється при $k=k+1$ і т.д.

При практичній реалізації робота за методом бар'єрних функцій завершується, коли k є досить великим числом і забезпечується потрібна точність розв'язку задачі. Наприклад, процес можна зупинити при виконанні однієї з умов:

$$r_k < \varepsilon,$$

$$\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| < \varepsilon,$$

$$\| x^{(k)} - x^{(k/2)} \| < \varepsilon, \ k - \text{парне число},$$

$$| f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)}) | < \varepsilon,$$

де $\varepsilon > 0$ – параметр точності обчислень. Тоді, поклавши $x^* \approx x^{(k)}$, $f^* \approx f(x^{(k)})$, знайдемо наближений розв'язок задачі (37.18), (37.19).

Зауваження.

1. Якщо на кожному кроці методу бар'єрних функцій вдається знайти глобальний мінімум функції $F(x,r_k)$ за змінною x, то послідовність $\{x^{(k)}\}$ буде збігатися до глобального мінімуму цільової функції $f(x)$ на множині X виду (37.19) (див. теорему 37.1). Якщо ж $x^{(k)}$ – точки локальних безумовних мінімумів функцій $F(x,r_k), k = 1, 2, ...,$ то за досить природних припущень вдається встановити, що $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \bar{x}$, де $\bar{x}$ – локальний розв'язок задачі (37.18), (37.19) (див., наприклад, [104]).

Згідно властивостей опуклих функцій (див. §16) для задачі опуклого програмування функції $F(x,r_k)$ опуклі за змінною x і, відповідно, мають лише глобальні мінімуми.

2. Нижче буде доведено (див. лему 37.3), що точки $x^{(k)}$, які є розв'язками задачі (37.34) при $k = 1, 2, ...,$ при певних умовах завжди належать X_0, тобто вихід за допустиму множину X теоретично неможливий. Більш того, при зменшенні r_k зменшується вплив бар'єрної функції $R(x,r_k)$ і зростає вплив цільової функції. Але, оскільки бар'єрні коефіцієнти $r_k \to 0$ при $k \to \infty$, то не виключена можливість, що із збільшенням k точки $x^{(k)}$, поступово «долаючи» бар'єр, будуть наближатися до межі множини X.

3. У чистому вигляді описаний метод можна реалізувати, якщо функції $F(x,r_k)$ в (37.33) такі, що точки $x^{(k)}$, які задовольняють (37.35), можна знайти на основі необхідних і достатніх умов екстремуму (див. §§8, 9). У загальному ж випадку точки $x^{(k)}$ шукають так, щоб виконувалась умова

$$F(x^{(k)}, r_k) = \min_{x \in R} F(x, r_k) + \varepsilon_k, \qquad (37.36)$$

де $\varepsilon_k > 0$, $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$.

Для цього можна використати різні наближені методи безумовної мінімізації (див. §§28-33), зокрема, якщо $\bar{X}_0 = X$, градієнтний метод:

$$x_{s+1}^{(k)} = x_s^{(k)} - h_s F'(x_s^{(k)}, r_k), \quad x_0^{(k)} = x^{(k-1)}, \quad s = 0, 1, ..., \qquad (37.37)$$

де h_s визначається за одним з правил, які розглядались у §28. При цьому необхідно слідкувати, щоб виконувалась умова $x_{s+1}^{(k)} \in X_0$, $s = 0, 1, ...,$ а при порушенні цієї умови зменшувати h_s. За рахунок цього величина h_s може бути дуже малою і збіжність градієнтного методу буде досить повільною. Це певна «платня» за виконання умови $x^{(k)} \in X_0$, де $x^{(k)} = x_{s^*}^{(k)}$ – розв'язок задачі (37.36), одержаний за градієнтним методом (37.37).

Для ілюстрації методу бар'єрних функцій розглянемо приклад.

Приклад 37.2. Знайти розв'язок задачі

$$f(x_1,x_2) = 2(x_1+1)^2 + (x_2+1)^2 \to \min, x \in X,$$

де

$$X = \{(x_1,x_2) \in R^2 \mid g_1(x_1,x_2) = -x_1 \le 0; \ g_2(x_1,x_2) = -x_2 \le 0\},$$

за методом бар'єрних функцій з логарифмічною штрафною функцією.

За умовою задачі маємо

$$R(x,r) = -r\ln(-(-x_1)) - r\ln(-(-x_2)).$$

Тоді функція $F(x,r)$ має вигляд

$$F(x,r) = 2(x_1+1)^2 + (x_2+1)^2 - r\ln x_1 - r\ln x_2. \qquad (37.38)$$

Мінімум цієї функції можна знайти аналітично, використавши необхідні умови мінімуму для довільного $r > 0$:

$$\frac{\partial F(x,r)}{\partial x_1} = 4(x_1+1) - \frac{r}{x_1} = 0;$$

$$\frac{\partial F(x,r)}{\partial x_2} = 2(x_2+1) - \frac{r}{x_2} = 0.$$

Розв'язавши цю систему відносно x_1 і x_2, одержимо

$$x_1(r) = \frac{-1 \pm \sqrt{r+1}}{2}; \quad x_2(r) = \frac{-1 \pm \sqrt{2r+1}}{2}.$$

Оскільки значення $x_1(r)$ і $x_2(r)$ повинні бути невід'ємними, то в якості стаціонарної точки будемо розглядати точку $x^* = (x_1^*(r), x_2^*(r))$, де

$$x_1^*(r) = \frac{-1 + \sqrt{r+1}}{2}; \quad x_2^*(r) = \frac{-1 + \sqrt{2r+1}}{2}. \qquad (37.39)$$

Використовуючи достатні умови екстремуму для функції двох змінних, легко переконатися, що ця точка є точкою локального мінімуму функції $F(x_1,x_2,r)$, але оскільки ця функція є опуклою при $r > 0$, то x^* – точка глобального мінімуму.

З (37.39) випливає, що $x_1^*(r) \to 0$, $x_2^*(r) \to 0$ при $r \to 0$. Як видно з рис. 37.5, точка $x^* = (0; 0)$ є розв'язком задачі, при цьому $f(x^*) = 3$.

У таблиці 37.1 з урахуванням (37.39) наведено точки глобального мінімуму перших трьох функцій $F(x,r_k)$ за умови, що $r_k = k^{-1}$, $k = 1, 2, 3$:

$$F(x,1) = 2(x_1+1)^2 + (x_2+1)^2 - \ln x_1 - \ln x_2;$$

$$F(x,2^{-1}) = 2(x_1+1)^2 + (x_2+1)^2 - \frac{1}{2}\ln x_1 - \frac{1}{2}\ln x_2;$$

$$F(x,3^{-1}) = 2(x_1+1)^2 + (x_2+1)^2 - \frac{1}{3}\ln x_1 - \frac{1}{3}\ln x_2.$$

31 — 5-481

Таблиця 37.1.

k	r_k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$f(x^{(k)})$
1	1	$\frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx 0{,}207106$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0{,}366025$	4,780234
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}-1}{2} \approx 0{,}112372$	$\frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx 0{,}207106$	3,931848
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{\frac{4}{3}}-1}{2} \approx 0{,}077350$	$\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}-1}{2} \approx 0{,}145497$	3,633529

На рис. 37.5 точки $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ визначають траєкторію наближення до розв'язку задачі $x^* = (0; 0)$, при цьому всі точки $(x_1^*(r), x_2^*(r))$ виду (37.39) належать $\operatorname{int} X$, що пояснює назву «метод внутрішньої точки».

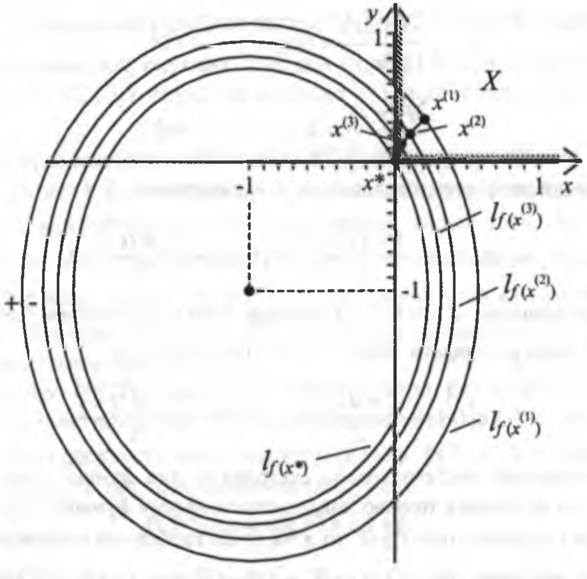


Рис. 37.5.

Для доведення збіжності методу бар'єрних функцій розглянемо твердження, яке гарантує належність точки $x^{(k)}$ множині X_0, яка є розв'язком задачі (37.34), для будь-якого $k = 1, 2, \ldots$.

Л е м а 37.3. *Нехай X – замкнена обмежена множина з непорожньою внутрішністю $\operatorname{int} X$, $F(x)$ – неперервна в $\operatorname{int} X$ і необмежено зростаюча функція при наближенні до межі множини X.*

Тоді існує точка $x' \in \operatorname{int} X$ така, що

$$F(x') = \min_{x \in \operatorname{int} X} F(x).$$

Д о в е д е н н я. Позначимо через $m = \inf_{x \in \operatorname{int} X} F(x)$. Тоді знайдеться послідовність точок $x^{(k)} \in \operatorname{int} X$, $k = 1, 2, \ldots$, для яких

$$\lim_{k\to\infty} F(x^{(k)}) = m < +\infty . \tag{37.40}$$

Оскільки множина X замкнена і обмежена, не зменшуючи загальності, можна вважати, що послідовність $\{x^{(k)}\}$ збігається до деякої точки $x' \in X$. При цьому x' не може належати межі X, оскільки в силу властивостей $F(x)$ це означало б, що

$$\lim_{k\to\infty} F(x^{(k)}) = +\infty,$$

що суперечить (37.40).

Отже, $x' \in \operatorname{int} X$. Звідси, оскільки $F(x)$ неперервна в $\operatorname{int} X$, випливає, що

$$m = \lim_{k\to\infty} F(x^{(k)}) = F(x').$$

Що й треба було довести.

Т е о р е м а 37.1. *Нехай в задачі (37.18), (37.19) $f(x)$ – неперервна на R^n функція, X – замкнена обмежена множина, для якої множина*

$$X_0 = \{x \in R^n \mid g_i(x) < 0\} \neq \varnothing,$$

причому $\overline{X}_0 = X$ і бар'єрні функції $R_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, множини $X \setminus X_0$ збігаються до індикаторної функції $\delta(x \mid X)$, тобто

$$\lim_{k\to\infty} R_k(x) = \delta(x \mid X).$$

Тоді будь-яка гранична точка x^* послідовності $\{x^{(k)}\}$, де

$$x^{(k)} = \arg\min_{x \in X_0} F_k(x) \tag{37.41}$$

і $F_k(x) = f(x) + R_k(x)$, є розв'язком задачі (37.18), (37.19).

Якщо, крім того,

$$R_{k+1}(x) \le R_k(x) \tag{37.42}$$

при будь-яких $k = 1, 2, \ldots$ і $x \in X_0$, то має місце співвідношення

$$\lim_{k\to\infty} F_k(x^{(k)}) = f(x^*).$$

Д о в е д е н н я. В силу леми 37.3 послідовність $\{x^{(k)}\}$, яка задовольняє (37.41), існує. Нехай x^* – деяка гранична точка цієї послідовності. Оскільки всі точки $x^{(k)}$ належать замкненій множині X, то й точка $x^* \in X$. Припустимо, що x^* не є розв'язком задачі (37.18), (37.19). Тоді, враховуючи умову $\overline{X}_0 = X$, можна стверджувати, що існує точка $x' \in X_0$ така, що

$$f(x') < f(x^*). \tag{37.43}$$

Позначимо через $\{x^{(k_s)}\}$ підпослідовність послідовності $\{x^{(k)}\}$, яка збігається до x^*. Використовуючи неперервність функції $f(x)$, нерівність (37.43) запишемо у вигляді

$$f(x') < \lim_{s\to\infty} f(x^{(k_s)}).$$

Звідси випливає, що для будь-якого s існує $\varepsilon > 0$ таке, що

$$f(x') < f(x^{(k_s)}) - \varepsilon. \qquad (37.44)$$

Оскільки згідно означення 37.1 бар'єрної функції $R_{k_s}(x') \geq 0$ для будь-якого s, то з (37.44) одержимо

$$f(x') < f(x^{(k_s)}) + R_{k_s}(x^{(k_s)}) - \varepsilon = F_{k_s}(x^{(k_s)}) - \varepsilon \qquad (37.45)$$

для будь-якого s.

Але для точки $x' \in X_0$ буде

$$\lim_{s\to 0} R_{k_s}(x') = 0,$$

тоді

$$\lim_{s\to\infty} F_{k_s}(x') = \lim_{s\to\infty}(f(x') + R_{k_s}(x')) = f(x') + \lim_{s\to\infty} R_{k_s}(x') = f(x'). \quad (37.46)$$

З (37.45) і (37.46) для досить великих s випливає, що мають місце нерівності

$$F_{k_s}(x') < F_{k_s}(x^{(k_s)}),$$

але це суперечить тому, що точки $x^{(k_s)} = \arg\min_{x\in X_0} F_{k_s}(x)$ (див. (37.41)). Одержана суперечність доводить те, що точка $x^* = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$ є розв'язком задачі (37.18), (37.19).

Нехай тепер виконується умова (37.42) при будь-яких k і $x \in X_0$. Тоді, враховуючи (37.41), одержимо

$$F_{k+1}(x^{(k+1)}) = f(x^{(k+1)}) + R_{k+1}(x^{(k+1)}) \leq$$
$$\leq f(x^{(k)}) + R_{k+1}(x^{(k)}) \leq f(x^{(k)}) + R_k(x^{(k)}) = F_k(x^{(k)}).$$

Тобто послідовність $\{F_k(x^{(k)})\}$ монотонно спадає. При цьому вона обмежена знизу величиною $f(x^*)$. Отже, існує границя

$$\lim_{k\to\infty} F_k(x^{(k)}) = \overline{F} \geq f(x^*). \qquad (37.47)$$

Покажемо, що в (37.47) має місце лише строга рівність. Дійсно, якби було $\overline{F} > f(x^*)$, то знайшлися б число $\varepsilon > 0$ і близька до x^* точка $x' \in X_0$ такі, що при будь-яких k мала би місце нерівність

$$F_k(x^{(k)}) > f(x') + \varepsilon.$$

Оскільки $R_k(x') \to 0$ при $k \to \infty$, то при досить великих k

$$F_k(x') = f(x') + R_k(x') < F_k(x^{(k)}).$$

Але це суперечить (37.41), тобто $\overline{F} = f(x^*)$. Що й треба було довести.

Зауваження. В прикладі 37.2 множина X не була обмеженою, як цього вимагає теорема 37.1, але послідовність $\{x^{(k)}\}$, яка генерується за методом бар'єрних функцій, збігається до точки мінімуму. Справа в тому, що обмеженість множини X в доведенні теореми 37.1 була необхідна лише для того, щоб гарантувати обмеженість послідовності $\{x^{(k)}\}$. Але якщо ця умова забезпечується іншими властивостями задачі, то умова обмеженості множини X зайва.

На основі теореми 37.1 можна гарантувати збіжність послідовних наближень за методом бар'єрних функцій для $R_k(x) = R(x, r_k)$ виду (37.25)-(37.29). Крім того, використовуючи лему 37.2, можна показати, що теорема збіжності має місце і при побудові послідовності $\{x^{(k)}\}$, яка задовольняє умову (37.36) (див., наприклад, [18]).

Якщо в задачі (37.18), (37.19) множина X задається умовами

$$X = \{x \in R^n \mid g_i(x) \leq 0, i = \overline{1,m},\ g_i(x) = 0, i = \overline{m+1,s}\},$$

то описаний метод бар'єрних функцій безпосередньо незастосовний для її розв'язування, оскільки умова $X_0 \neq \varnothing$ не виконується. В цьому випадку необхідно модифікувати і узагальнювати метод бар'єрних функцій. Незастосованість цього методу у випадку коли $X_0 = \varnothing$, навіть для X, що визначається через (37.19), можна вважати одним з його недоліків.

3. Метод зовнішніх штрафних функцій. Будемо розглядати задачу умовної мінімізації виду

$$f(x) \to \min, x \in X, \qquad (37.48)$$

де

$$X = \{x \in R^n \mid g_i(x) \leq 0, i = \overline{1,m},\ g_i(x) = 0, i = \overline{m+1,s}\}. \qquad (37.49)$$

Означення 37.2. Послідовність функцій $\{R_k(x)\}$, визначених і невід'ємних на R^n, називається *послідовністю штрафних функцій* на множині X, якщо

$$\lim_{k\to\infty} R_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in X, \\ +\infty, & \text{якщо } x \notin X. \end{cases}$$

З цього означення видно, що при великих номерах k за порушення умови $x \in X$ доводиться «сплачувати» великий штраф, але при $x \in X$ штрафна функція $R_k(x)$ є нескінченно малою при $k \to \infty$.

Як правило, у методі зовнішніх штрафних функцій, як і у методі внутрішніх (бар'єрних) штрафних функцій, покладають

$$R_k(x) = R(x,r_k) = r_k\varphi(x), \qquad (37.50)$$

де функція $\varphi(x)$ визначена на R^n і

$$\varphi(x) = 0 \text{ при } x \in X,$$

$$\varphi(x) > 0 \text{ при } x \notin X,$$

але тепер $r_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Існує багато функцій $\varphi(x)$, які задовольняють означення 37.2 для $R_k(x)$ виду (37.50). Серед них найбільш розповсюдженими є такі:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} (g_i^+(x))^p + \sum_{i=m+1}^{s} (g_i(x))^p, \ p \geq 2, \qquad (37.51)$$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} g_i^+(x) + \sum_{i=m+1}^{s} |g_i(x)|, \qquad (37.52)$$

де $g_i^+(x) = \max\{0; g_i(x)\}$ – «зріз» функції $g_i(x)$.

З (37.51) і (37.52) одержимо такі *штрафні* функції

$$R(x,r_k) = r_k\left(\sum_{i=1}^{m} (g_i^+(x))^p + \sum_{i=m+1}^{s} (g_i(x))^p\right), \ p \geq 2, \qquad (37.53)$$

$$R(x,r_k) = r_k\left(\sum_{i=1}^{m} g_i^+(x) + \sum_{i=m+1}^{s} |g_i(x)|\right). \qquad (37.54)$$

Крім того, використовують таку штрафну функцію

$$R(x,r_k) = \frac{1}{r_k}\left(\sum_{i=1}^{m} e^{r_k g_i(x)} + \sum_{i=m+1}^{s} e^{r_k (g_i(x))^2}\right). \qquad (37.55)$$

При цьому коефіцієнти штрафу r_k в (37.53)-(37.55) задовольняють умову

$$r_k > 0, \ \lim_{k\to\infty} r_k = +\infty. \qquad (37.56)$$

Функцію $R(x,r_k)$ виду (37.53) називають *степеневою* штрафною функцією множини X, зокрема, при $p = 2$ – *квадратичною* функцією штрафу, функцію $R(x,r_k)$ виду (37.54) – *негладкою* функцією штрафу, а функцію виду (37.55) – *експоненціальною* функцією штрафу.

Відмітимо, що коли функції $g_i(x)$ l раз неперервно диференційовні на R^n, то при $p > l$ функції (37.53), (37.55) будуть також l раз диференційовні на R^n. Для функції (37.54) з неперервності $g_i(x), i = \overline{1,s}$, випливає і

неперервність $R(x,r_k)$ на R^n, але якщо функції $g_i(x), i = \overline{1,s}$, диференційовні, то $R(x,r_k)$ недиференційовна (див. §14). Зауважимо також, що якщо функції $g_i(x)$, $i = \overline{1,m}$ опуклі на R^n, $g_i(x)$ – лінійні при $i = \overline{m+1,s}$, то функції $R(x,r_k)$ виду (37.53)-(37.55), згідно леми 14.6 та її наслідків, опуклі на R^n.

Враховуючи (37.50), для задачі (37.48), (37.49) в методі зовнішніх штрафних функцій допоміжні функції $F_k(x)$, $k = 1, 2, ...$, в (37.6) будуть мати вигляд

$$F_k(x) = F(x,r_k) = f(x) + R(x,r_k). \qquad (37.57)$$

Вони набувають конкретного вигляду, якщо в них використовувати одну з штрафних функцій (37.53)-(37.55), конкретні значення коефіцієнтів штрафу $r_k, k = 1, 2, ...$, які задовольняють умову (37.56), і конкретні функцій $g_i(x)$, $i = \overline{1,s}$.

П р и к л а д 37.3. Для задачі одновимірної мінімізації

$$f(x) = e^x + 1 \to \min, x \in X,$$

де

$$X = \{x \in R^1 \mid g_1(x) = x - 1 \leq 0; g_2(x) = -x - 1 \leq 0\},$$

побудувати зовнішні штрафні функції $R(x,r_k)$, $k = 1, 2, 3$, виду (37.53) при $p = 2$ і (37.54), а також відповідні їм функції $F(x,r_k)$, коли $r_k = k^2$, $k = 1, 2, 3$.

На рис. 37.6 а) показано цільову функцію $f(x) = e^x + 1$ і квадратичні штрафні функції $R(x,r_k)$, $k = 1, 2, 3$, виду (37.53), коли відсутні обмеження рівності у визначенні допустимої множини X $(s = 0)$, для $r_1 = 1$, $r_2 = 2^2 = 4$, $r_3 = 3^2 = 9$:

$$R(x,r_1) = (\max\{0; x-1\})^2 + (\max\{0; -x-1\})^2;$$

$$R(x,r_2) = 4((\max\{0; x-1\})^2 + (\max\{0; -x-1\})^2); \qquad (37.58)$$

$$R(x,r_3) = 9((\max\{0; x-1\})^2 + (\max\{0; -x-1\})^2).$$

З рис. 37.6 а) видно, як функції $R(x,r_k)$ наближаються до індикаторної функції $\delta(x \mid X)$ виду (37.2) для $x \notin X$ і співпадають з нею на множині X.

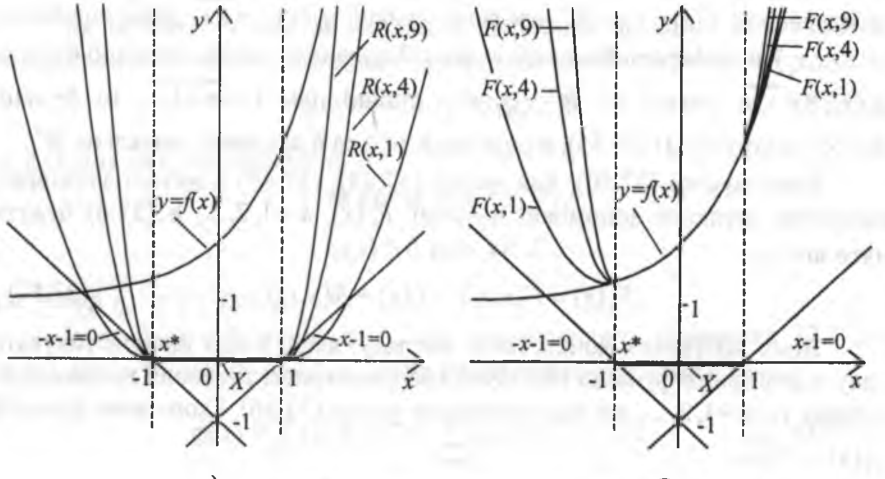
На рис. 37.6 б) показано цільову функцію $f(x) = e^x + 1$ і функції $F(x,r_k)$, $k = 1, 2, 3$, виду (37.57), де $R(x,r_k)$, $k = 1, 2, 3$, визначені у (37.58):

$$F(x,r_1) = e^x + 1 + R(x,1);$$

$$F(x,r_2) = e^x + 1 + R(x,4); \qquad (37.59)$$

$$F(x,r_3) = e^x + 1 + R(x,9).$$

З рис. 37.6 б) видно, що функції $F(x,r_k)$, $k = 1, 2, 3$, виду (37.59), (37.58) співпадають з цільовою функцією $f(x)$ на множині X, а їх точки мінімуму наближаються зліва до розв'язку задачі $x^* = -1$, при цьому $f(x^*) = \dfrac{1}{e} + 1 \approx 1{,}368$.



а) б)

Рис. 37.6.

На рис. 37.7 а) показано цільову функцію $f(x) = e^x + 1$ і негладкі штрафні функції $R(x, r_k)$, $k = 1, 2, 3$, виду (37.54), коли $s = 0$, для $r_1 = 1$, $r_2 = 2^2 = 4$, $r_3 = 3^2 = 9$:

$$R(x, r_1) = \max\{0;\ x-1\} + \max\{0;\ -x-1\};$$

$$R(x, r_2) = 4(\max\{0;\ x-1\} + \max\{0;\ -x-1\}); \tag{37.60}$$

$$R(x, r_3) = 9(\max\{0;\ x-1\} + \max\{0;\ -x-1\}).$$

З рис. 37.7 а) видно, як функції $R(x, r_k)$ наближаються до індикаторної функції $\delta(x \mid X)$ виду (37.2) для $x \notin X$ і співпадають з нею на множині X.

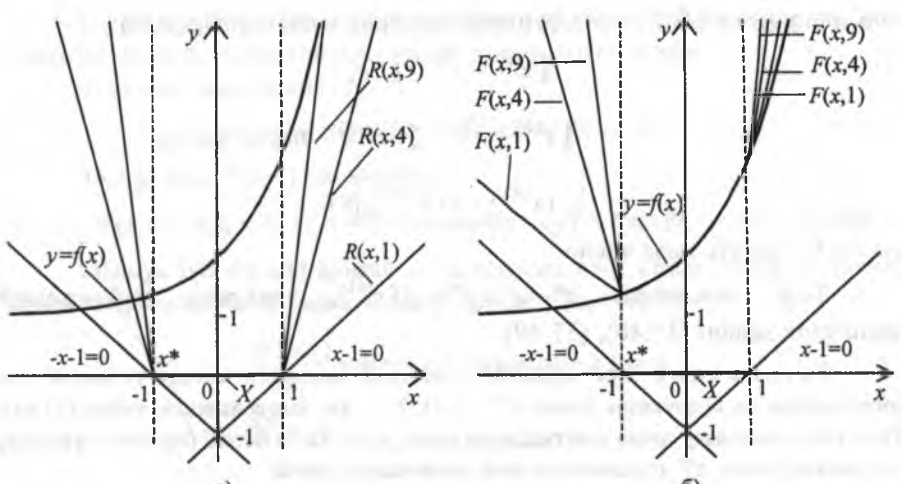
На рис. 37.7 б) показано цільову функцію $f(x) = e^x + 1$ і функції $F(x, r_k)$, $k = 1, 2, 3$, виду (37.57), де $R(x, r_k)$ визначені в (37.60):

$$F(x, r_1) = e^x + 1 + R(x, 1);$$

$$F(x, r_2) = e^x + 1 + R(x, 4); \tag{37.61}$$

$$F(x, r_3) = e^x + 1 + R(x, 9).$$

З рис. 37.7 б) видно, як функції $F(x, r_k)$ виду (37.61), (37.60) співпадають з цільовою функцією $f(x)$ на множині X, а їх точки мінімуму практично співпадають з розв'язком поставленої задачі $x^* = -1$. Це, як буде показано пізніше, є характерною ознакою негладких штрафних функцій.



а) б)

Рис. 37.7.

Опишемо схему розв'язування задач (37.48), (37.49) за методом зовнішніх штрафних функцій на основі загальної схеми методів штрафів (див. п.1).

Нехай задані довільне початкове наближення $x^{(0)} \notin X$ і монотонно зростаюча послідовність $\{r_k\}$, яка задовольняє умову (37.57).

Припустимо, що вже зроблено $(k-1)$-у ітерацію за методом зовнішніх штрафних функцій, тобто знайдено точку $x^{(k-1)} \in X$, і розглянемо його k-у ітерацію.

Будуємо функцію

$$F(x, r_k) = f(x) + R(x, r_k), \tag{37.62}$$

де $R(x, r_k)$ – одна із зовнішніх штрафних функцій виду (37.53)-(37.55), і, починаючи з точки $x^{(k-1)}$, одним з відомих методів безумовної мінімізації (див. §§28-33) розв'язуємо задачу

$$F(x, r_k) \to \min,\ x \in R^n, \tag{37.63}$$

тобто шукаємо точку $x^{(k)} \notin X$ таку, що

$$F(x^{(k)}, r_k) = \min_{x \in R^n} F(x, r_k). \tag{37.64}$$

Потім процес (37.62)–(37.64) повторюється при $k = k+1$ і т.д.

При практичній реалізації робота за методом зовнішніх штрафних функцій завершується, коли k є досить великим числом і забезпечується потрібна точність розв'язку задачі. Наприклад, процес можна зупинити при виконанні умови

$$r_k^{-1} < \varepsilon,$$

або, як і у методі бар'єрних функцій, при виконанні однієї з умов:

$$\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| < \varepsilon;$$

$$\| x^{(k)} - x^{(k/2)} \| < \varepsilon,\ k \text{ – парне число;}$$

$$| f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)}) | < \varepsilon,$$

де $\varepsilon > 0$ – досить мале число.

Тоді, поклавши $x^* \approx x^{(k)}, f^* \approx f(x^{(k)})$, знайдемо наближений розв'язок задачі (37.48), (37.49).

Зауваження. При чисельній реалізації описаного методу основний час витрачається на відшукання точок $x^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, які задовольняють умову (37.64). Розв'язати цю задачу точно вдається дуже рідко, тому, як і в методі бар'єрних функцій, на практиці точки $x^{(k)}$ шукають так, щоб виконувалась умова

$$F(x^{(k)}, r_k) = \min_{x \in R^n} F(x, r_k) + \varepsilon_k, \qquad (37.65)$$

де $\varepsilon_k > 0$, $\lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$.

Для цього можна використовувати різні наближені методи безумовної мінімізації. Зокрема, якщо функції $F(x, r_k)$ диференційовні на R^n, то можна використовувати градієнтні методи (див. §28), а якщо у функціях $F(x, r_k)$ використовувати негладкі штрафні функції виду (37.54), то для задачі опуклого програмування можна використовувати субградієнтні або ε-субградієнтні методи (див. §§31, 32), а для негладких і неопуклих функцій $F(x, r_k)$ (див. §19) – методи узагальненого градієнта (див., наприклад, [71]). Однак, при збільшенні параметра штрафу r_k, тобто при підвищенні точності обчислень, відшукання розв'язку задачі (37.63) або (37.65) ускладнюється тим, що функції $F(x, r_k)$ набувають яскраво вираженої яристої структури. Тому у цій ситуації при розв'язуванні задачі (37.63) або (37.65) доцільно використовувати методи, за допомогою яких можна долати яристість: яристий метод (див. §28), метод спряжених градієнтів (див. §30), методи з розтягуванням простору (див., наприклад, [70], [111]), методи з усередненням градієнтів, субградієнтів або ε-субградієнтів (див. §33) або узагальнених градієнтів (див., наприклад, [71], [109]) тощо.

Ще одним недоліком методів зовнішніх штрафних функцій є те, що при великих r_k сильно зростає вплив похибок округлення при знаходженні мінімуму функцій $F(x, r_k)$, коли значення функцій $g_i(x)$ близькі до 0.

Отже, одержати досить точний розв'язок задачі умовної мінімізації (37.48), (37.49) за методом зовнішніх штрафних функцій практично неможливо у зв'язку з великими обчислювальними витратами. Тому цей метод доцільно використовувати для пошуку локальних розв'язків задачі (37.48), (37.49).

Для ілюстрації роботи методу зовнішніх штрафних функцій розглянемо приклад.

Приклад 37.4. Знайти розв'язок задачі з прикладу 37.2 за методом зовнішніх штрафних функцій, використовуючи квадратичну функцію штрафу.

За умовою задачі маємо

$$R(x, r) = r((\max\{0; -x_1\})^2 + (\max\{0; -x_2\})^2).$$

Тоді функція $F(x, r_k)$ має вигляд

$$F(x, r) = 2(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + r((\max\{0; -x_1\})^2 + (\max\{0; -x_2\})^2). \qquad (37.66)$$

Мінімум цієї опуклої функції для довільного $r > 0$ можна знайти аналітично, використовуючи необхідні умови мінімуму функції $F(x, r)$ на R^n:

$$\frac{\partial F(x, r)}{\partial x_1} = 4(x_1 + 1) + 2r(\max\{0; -x_1\}) = 0;$$

$$\frac{\partial F(x, r)}{\partial x_2} = 2(x_2 + 1) + 2r(\max\{0; -x_2\}) = 0.$$

Легко переконатись, що ця система має єдиний розв'язок при $r > 0$:

$$x_1^*(r) = -\frac{2}{2 + r};\quad x_2^*(r) = -\frac{1}{1 + r}; \qquad (37.67)$$

і точка $x^*(r) = (x_1^*(r), x_2^*(r)) \notin X$ при фіксованому $r > 0$ є точкою глобального мінімуму для опуклої функції $F(x, r)$ виду (37.66). З (37.67) випливає, що $x_1^*(r) \to 0$, $x_2^*(r) \to 0$ при $r \to +\infty$. Як видно з рис. 37.8, точка $x^* = (0; 0)$ – розв'язок задачі, що розглядається.

У таблиці 37.2 з урахуванням (37.67) наведено точки глобального мінімуму перших трьох функцій $F(x, r)$ при $r_k = k^2$, $k = 1, 2, 3$:

$$F(x,1) = 2(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + (\max\{0; -x_1\})^2 + (\max\{0; -x_2\})^2;$$

$$F(x,4) = 2(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + 4((\max\{0; -x_1\})^2 + (\max\{0; -x_2\})^2);$$

$$F(x,9) = 2(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + 9((\max\{0; -x_1\})^2 + (\max\{0; -x_2\})^2).$$

Таблиця 37.2.

k	r_k	$x_1^{(k)}(r_k)$	$x_2^{(k)}(r_k)$	$f(x^{(k)})$
1	1	$-\frac{2}{3} \approx -0{,}666666$	$-\frac{1}{2} = -0{,}5$	0,472223
2	4	$-\frac{1}{2} = -0{,}5$	$-\frac{1}{3} \approx -0{,}333333$	0,944445
3	9	$-\frac{2}{11} \approx -0{,}181818$	$-\frac{1}{10} = -0{,}1$	2,148844

На рис. 37.8 набір точок $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$, одержаних за методом зовнішніх штрафних функцій, визначає траєкторію наближення точок $x^{(k)}$ до розв'язку задачі $x^* = (0; 0)$, при цьому всі точки $x^{(k)}(r) \notin X$, що пояснює назву «метод зовнішньої точки».

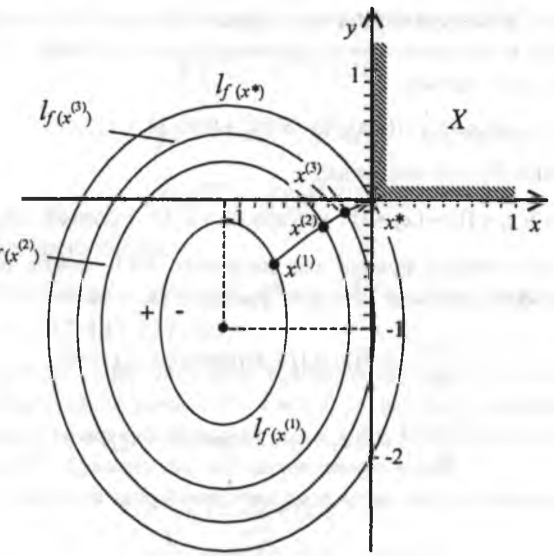


Рис. 37.8.

Т е о р е м а 37.2. *Нехай в задачі* (37.48), (37.49) *функція* $f(x)$ *неперервна на* R^n, X – *замкнена множина*, $\inf\limits_{x\in X} f(x) > -\infty$, *функції* $\varphi(x)$ *у* (37.50) *неперервні на* R^n, *точки* $x^{(k)}$, $k = 1, 2, ...,$ *безумовних глобальних мінімумів за* x *функцій*

$$F(x, r_k) = f(x) + r_k\varphi(x), \ k = 1, 2, ...,$$

існують і належать при будь-якому $r_k > 0$ *деякій обмеженій множині* $Y \subseteq R^n$.

Тоді для будь-якої послідовності $\{r_k\}$ *такої, що* $r_k > 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = +\infty$, *послідовність* $\{x^{(k)}\}$ *має граничну точку* x^*, *яка є розв'язком задачі* (37.48), (37.49), *і має місце співвідношення*

$$\lim_{k\to\infty} F(x^{(k)}, r_k) = f(x^*).$$

Д о в е д е н н я. В умовах теореми для будь-якої послідовності $\{r_k\}$ послідовність $\{x^{(k)}\}$ має граничну точку x^*. Позначимо через $\{x^{(k_s)}\}$ підпослідовність послідовності $\{x^{(k)}\}$, яка збігається до x^*.

Оскільки при будь-якому $r_{k_s} > 0$ мінімум за x функції $F(x, r_{k_s})$ на R^n не більше, ніж мінімум на $X \subset R^n$, то має місце співвідношення

$$\lim_{s\to\infty} \min_{x\in X} F(x, r_{k_s}) \ge \lim_{s\to\infty} \min_{x\in R^n} F(x, r_{k_s}). \tag{37.68}$$

При $x \notin X$ $r_k\varphi(x) > 0$ і $r_k\varphi(x) \to +\infty$ при $k \to \infty$, тому

$$\sup_{r_{k_s}>0} F(x, r_{k_s}) = \sup_{r_{k_s}>0} (f(x) + r_{k_s}\varphi(x)) = +\infty, \tag{37.69}$$

а при $x \in X$

$$F(x, r_{k_s}) = f(x). \tag{37.70}$$

Тоді, враховуючи (37.69), (37.70), маємо

$$\min_{x\in R^n} \sup_{r_{k_s}>0} F(x, r_{k_s}) = \min_{x\in X} \sup_{r_{k_s}>0} F(x, r_{k_s}) = \min_{x\in X} f(x) =$$

$$= \lim_{s\to\infty} \min_{x\in X} f(x) = \lim_{s\to\infty} \min_{x\in X} F(x, r_{k_s}). \tag{37.71}$$

З (37.68) і (37.71) одержуємо

$$\min_{x\in X} f(x) = \min_{x\in R^n} \sup_{r_{k_s}>0} F(x, r_{k_s}) = \lim_{s\to\infty} \min_{x\in X} F(x, r_{k_s}) \ge$$

$$\ge \lim_{s\to\infty} \min_{x\in R^n} F(x, r_{k_s}) = \lim_{s\to\infty} F(x^{(k_s)}, r_{k_s}). \tag{37.72}$$

Доведемо, що $x^* \in X$. Припустимо, що це не так. Тоді $\varphi(x^*) > 0$ і в силу неперервності функції $\varphi(x)$ знайдеться число $\varepsilon > 0$ таке, що при досить великих s буде

$$\varphi(x^{(k_s)}) \ge \varepsilon.$$

При цьому, враховуючи обмеженість послідовності $\{f(x^{(k_s)})\}$, маємо

$$\lim_{s\to\infty} \min_{x\in R^n} F(x, r_{k_s}) = \lim_{s\to\infty} F(x^{(k_s)}, r_{k_s}) = \lim_{s\to\infty} (f(x^{(k_s)}) + r_{k_s}\varphi(x^{(k_s)})) \ge$$

$$\ge \lim_{s\to\infty} (f(x^{(k_s)}) + r_{k_s}\varepsilon) = +\infty.$$

Але ця нерівність суперечить співвідношенню (37.72). Отже, $x^* \in X$.

З неперервності $\varphi(x)$ і $f(x)$ випливає, що

$$\lim_{s\to\infty} F(x^{(k_s)}, r_{k_s}) = \lim_{s\to\infty} (f(x^{(k_s)}) + r_{k_s}\varphi(x^{(k_s)})) \ge \lim_{s\to\infty} f(x^{(k_s)}) = f(x^*).$$

Звідси і з (37.72) одержуємо

$$f(x^*) \le \lim_{s\to\infty} F(x^{(k_s)}, r_{k_s}) \le \min_{x\in X} f(x).$$

Оскільки $x^* \in X$, то в останньому співвідношенні можлива лише рівність, тобто

$$\lim_{s\to\infty} F(x^{(k_s)}, r_{k_s}) = \min_{x\in X} f(x) = f(x^*),$$

що й треба було довести.

З а у в а ж е н н я.

1. Вимога $x^{(k)} \in Y$ для будь-яких $k = 1, 2, \ldots$, де Y – обмежена множина, виконується, наприклад, за умови, що існує точка $\overline{x} \in R^n$ така, що лебегова множина

$$L(\overline{x}) = \{x \in R^n \mid f(x) \le f(\overline{x})\} \text{ – обмежена.}$$

2. Теорема 37.2 стверджує, що якщо точки $x^{(k)}$ – точки глобального мінімуму функцій $F(x, r_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, то послідовність $\{x^{(k)}\}$ збігається до точки глобального мінімуму $f(x)$ на X. Якщо задача (37.48), (37.49) є задачею опуклого програмування, то, як вже відмічалось, функції $F(x, r_k) = f(x) + R(x, r_k)$ при $R(x, r_k)$ виду (37.53)-(37.55) будуть опуклими, а отже вони мають лише точки глобального мінімуму. Якщо задача (37.48), (37.49) є задачею неопуклого програмування, то при досить природних припущеннях можна довести збіжність точок локального мінімуму функцій $F(x, r_k)$ при $k \to \infty$ до локального розв'язку задачі (див., наприклад, [104]).

3. У [18] доведено теорему збіжності методу зовнішніх штрафних функцій для випадку, коли точки $x^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, задовольняють умову (37.65), тобто є наближеними розв'язками задач безумовної мінімізації функцій $F(x, r_k)$ за x.

Важливим моментом при розв'язуванні задач умовної мінімізації за методом зовнішніх штрафних функцій є те, що функції обмежень повинні бути «узгоджені» з цільовою функцією. Щоб пояснити, про що йдеться, розглянемо приклад.

П р и к л а д 37.4. Задачу одновимірної мінімізації

$$f(x) = x^7 \to \min, x \in X = \{x \in R^1 \mid x^2 = 0\}$$

розв'язати за допомогою методу зовнішніх штрафних функцій.

Оскільки множина X містить одну точку $x = 0$, то саме ця точка і буде розв'язком задачі. Для її знаходження використаємо, наприклад, квадратичний штраф, тобто

$$F(x, r) = x^7 + r(x^2)^2.$$

Легко бачити (див. рис. 37.9), що при будь-яких $r > 0$

$$\inf_{x \in R^1} F(x, r) = -\infty.$$

Отже, мінімум у допоміжній задачі (37.63) методу зовнішніх штрафних функцій не досягається ні при яких коефіцієнтах штрафу, тобто метод не збігається до розв'язку задачі. Це обумовлено тим, що цільова функція на множині $R^1 \setminus X$ спадає при $x \to -\infty$ значно швидше, ніж зростає штрафна функція $R(x, r) = rx^4$.

Щоб зробити метод зовнішніх штрафних функцій у цій ситуації придатним до розв'язування задачі, необхідно використати більш різко виражений штраф, наприклад, покласти

$$F(x, r) = x^7 + r(x^2)^4 \quad \text{або} \quad F(x, r) = x^7 + r(e^{x^4} - 1).$$

Тоді допоміжна задача

$$F(x, r) \to \min, x \in R^1,$$

буде мати розв'язок при $r > 0$ (див. рис. 37.9) і метод буде збігатися до розв'язку задачі $x^* = 0$.

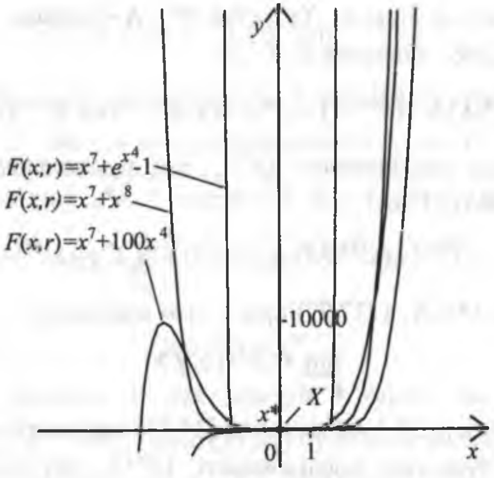


Рис. 37.9.

Наведений приклад показує, що для успішного використання методу зовнішніх штрафних функцій необхідно робити спеціальний аналіз умови задачі і добирати відповідний штраф, або, якщо це можливо, змінити деякі функції обмежень $g_i(x)$ так, щоб множина X не змінилась, але штраф $R(x, r_k)$ при цьому забезпечував існування розв'язків задачі (37.63). У наведеному прикладі можна покласти $X = \{x \in R^1 \mid g(x) = e^{x^2} - 1 = 0\}$.

О з н а ч е н н я 37.3. Обмеження

$$g_i(x) \le 0, i = \overline{1, m}, \ g_i(x) = 0, i = \overline{m+1, s}, \tag{37.73}$$

в задачі (37.48), (37.49) називаються *узгодженими* з цільовою функцією $f(x)$, якщо для будь-якої послідовності $\{x^{(k)}\}$ такої, що

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} g_i(x^{(k)}) \le 0, i = \overline{1, m}, \ \lim_{k \to \infty} g_i(x^{(k)}) = 0, i = \overline{m+1, s}, \tag{37.74}$$

має місце співвідношення

$$\underline{\lim_{k \to \infty}} f(x^{(k)}) \ge f^*,$$

де $f^* = \inf\limits_{x \in X} f(x)$.

Наведемо достатні умови узгодженості функцій обмежень і цільової функції в задачі (37.48), (37.49).

Л е м а 37.3. *Якщо функція Лагранжа задачі* (37.48), (37.49)

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(x), \tag{37.75}$$

де $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s) \in \Lambda = \{\lambda \in R^s \mid \lambda_i \ge 0, \ i = \overline{1, m}\}$, *має сідлову точку на* $R^n \times \Lambda$, *то обмеження виду* (37.73) *узгоджені з функцією* $f(x)$ *на* R^n.

Доведення. Нехай $(x^*,\lambda^*)\in R^n\times\Lambda$ – сідлова точка функції $L(x,\lambda)$, тобто згідно означення 22.1

$$L(x^*,\lambda)\le L(x^*,\lambda^*)=f^*\le L(x,\lambda^*)\quad \forall x\in R^n, \forall\lambda\in\Lambda. \qquad (37.76)$$

Візьмемо довільну послідовність $\{x^{(k)}\}$, яка задовольняє співвідношення (37.74). Тоді згідно (37.76)

$$f^*\le L(x^{(k)},\lambda^*)=f(x^{(k)})+\sum_{i=1}^{s}\lambda_i^* g_i(x^{(k)}). \qquad (37.77)$$

Враховуючи, що $\lambda^*\in\Lambda$, з (37.77) при $k\to\infty$ одержимо

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} f(x^{(k)})\ge f^*.$$

Означення 37.4. Обмеження (37.73) називаються *коректними* на R^n, якщо для будь-якої послідовності $\{x^{(k)}\}$, яка задовольняє умову (37.74)

$$\lim_{k\to\infty}\rho(x^{(k)},X)=0.$$

Наведемо приклади коректних обмежень (див., наприклад, [18]):

а) $X=\{x\in R^n \mid g_i(x)=\langle a^{(i)},x\rangle-b_i=0,\ i=\overline{1,m}\}$ – афінна множина, де система векторів $a^{(i)}\in R^n, i=\overline{1,m}$ – лінійно незалежна, $b_i\in R^1, i=\overline{1,m}$;

б) $X=\{x\in R^n \mid g(x)=\langle c,x\rangle-d\le 0\}$ – замкнений півпростір, де $c\in R^n, c\ne O_n, d\in R^1$.

Метод штрафів має не лише велике практичне значення, а й широко використовується в теоретичних дослідженнях. Зокрема за його допомогою можна одержати умови оптимальності для задач умовної мінімізації, які сформульовані в теоремі 23.6 (див., наприклад, [98]). Ця можливість обумовлена наступними міркуваннями.

Нехай задана задача

$$f(x)\to\min,\ x\in X, \qquad (37.78)$$

де

$$X=\{x\in R^n \mid g_i(x)\le 0,\ i=\overline{1,m}\}. \qquad (37.79)$$

Покажемо, як можна використати коефіцієнти штрафів і нев'язки обмежень цієї задачі в точках мінімуму за x функції $F(x,r_k)$ для оцінки множників Лагранжа $\lambda_i^*, i=\overline{1,m}$, задачі (37.78), (37.79) в точці x^*, яка є розв'язком цієї задачі.

Припустимо, що функції $f(x)$, $g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, – неперервно диференційовні, і нехай в методі зовнішніх штрафних функцій для задачі (37.78), (37.79) використовуються функції $F(x,r_k)$ виду

$$F(x,r_k)=f(x)+r_k\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x))^2,\quad k=1,2,..., \qquad (37.80)$$

де $g_i^+(x)=\max\{0;g_i(x)\}$, послідовність коефіцієнтів штрафів $\{r_k\}$ задовольняє умову $r_k>0$, $\lim_{k\to\infty} r_k=+\infty$, а послідовність точок $x^{(k)}=\arg\min_{x\in R^n} F(x,r_k)$ збігається до розв'язку $x^*\in X$ задачі (37.78), (37.79). Тоді

$$F'(x^{(k)},r_k)=f'(x^{(k)})+2r_k\sum_{i=1}^{m}g_i^+(x^{(k)})g_i'(x^{(k)})=O_n. \qquad (37.81)$$

Оскільки

$$\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=x^*, \qquad (37.82)$$

то при досить великих k для номерів i таких, що $g_i(x^*)<0$, буде $g_i(x^{(k)})<0$ і $g_i^+(x^{(k)})=0$. Тобто (37.81) буде мати вигляд

$$f'(x^{(k)})+2r_k\sum_{i\in I(x^*)}g_i^+(x^{(k)})g_i'(x^{(k)})=O_n, \qquad (37.83)$$

де $I(x^*)=\{i\in I \mid g_i(x^*)=0\}$.

Введемо позначення

$$\lambda_i^{(k)}=2r_kg_i^+(x^{(k)})\ge 0 \text{ для } i\in I(x^*).$$

Тоді з (37.83) маємо

$$f'(x^{(k)})+\sum_{i\in I(x^*)}\lambda_i^{(k)}g_i'(x^{(k)})=O_n. \qquad (37.84)$$

Припустимо, що градієнти $g_i'(x^*)$, $i\in I(x^*)$, – лінійно незалежні. Тоді в силу теореми 23.6 і співвідношення (23.30) знайдуться множники λ_i^*, $i\in I(x^*)$ невід'ємні і не всі одночасно рівні нулеві такі, що

$$f'(x^*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*g_i'(x^*)=O_n. \qquad (37.85)$$

З (37.84), (37.85), враховуючи (37.82) і неперервність функцій $g_i'(x)$, $i\in I(x^*)$, одержимо

$$\lim_{k\to\infty}\lambda_i^{(k)}=\lim_{k\to\infty}2r_kg_i^+(x^{(k)})=\lambda_i^*,\ i\in I(x^*),$$

або

$$\lim_{k\to\infty}r_kg_i^+(x^{(k)})=\frac{\lambda_i^*}{2},\ i\in I(x^*). \qquad (37.86)$$

Отже, при досить великих k величини $2r_kg_i^+(x^{(k)})$, $i=\overline{1,m}$, можна використовувати для оцінки множників Лагранжа задачі (37.78), (37.79) в точці x^*.

Зауважимо, що для інших гладких штрафних функцій $R(x,r_k)$ зв'язок між коефіцієнтами штрафів і множниками Лагранжа задачі (37.78), (37.79) також існує, але має дещо інший вигляд в залежності від способу задання $R(x,r_k)$.

В умовах, при яких було встановлено зв'язок (37.86), можна показати, що має співвідношення (див., наприклад, [73]):

$$f(x^*) - f(x^{(k)}) \approx r_k \sum_{i=1}^{m} (g_i^+(x^{(k)}))^2. \qquad (37.87)$$

При цьому, якщо функції $f(x)$, $g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$ – лінійні, то в (37.87) наближена рівність стає точною. Якщо ж задача (37.78), (37.79) є задачею опуклого програмування, то

$$f(x^*) - f(x^{(k)}) \geq r_k \sum_{i=1}^{m} (g_i^+(x^{(k)}))^2, \ k=1,2,\dots . \qquad (37.88)$$

Зауважимо, що оцінки типу (37.87), (37.88) можна одержати і для інших гладких штрафів.

При дослідженні методу зовнішніх штрафних функцій на збіжність передбачалось, що коефіцієнти штрафів r_k прямують до нескінченності, і це, як вже відмічалось, ускладнює його практичну реалізацію. Але існують класи задач умовної мінімізації і штрафні функції, які гарантують збіжність методу при скінченних значеннях коефіцієнтів штрафів. Зокрема це стосується задачі опуклого програмування і негладких штрафних функцій виду (37.54).

Т е о р е м а 37.3. *Нехай в задачі* (37.48), (37.49) *функції* $f(x)$, $g_i(x)$, $i=\overline{1,s}$, *опуклі, функція Лагранжа цієї задачі*

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(x)$$

має сідлову точку (x^*,λ^*) на $R^n \times \Lambda$ *і в методі зовнішніх штрафних функцій*

$$F(x,r) = f(x) + r\varphi(x), \qquad (37.89)$$

де $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} g_i^+(x) + \sum_{i=m+1}^{s} |g_i(x)|$, $g_i^+(x) = \max\{0; g_i(x)\}$, $i=\overline{1,m}$.

Тоді при всіх $r > \max_{i=\overline{1,s}} |\lambda_i^*|$ *множина розв'язків задачі*

$$F(x,r) \to \min, x \in R^n \qquad (37.90)$$

непорожня і співпадає з множиною розв'язків задачі (37.48), (37.49).

Доведення цієї теореми можна знайти, наприклад у [18].

Отже, коли відома апріорна оцінка зверху множників Лагранжа задачі (37.48), (37.49), у методі зовнішніх штрафних функцій доцільно використовувати негладкі штрафні функції виду (37.54). Для розв'язування задач негладкої опуклої безумовної мінімізації виду (37.90), (37.89), як уже

відзначалось, можна використовувати субградієнтні методи, їх різноманітні модифікації та узагальнення. При цьому, на відміну від гладких штрафних функцій, полегшується добір коефіцієнтів штрафів, оскільки для одержання достатньої точності треба працювати з не дуже великими значеннями штрафних коефіцієнтів, що у свою чергу зменшує яристість функції $F(x,r)$ і прискорює процес досягнення потрібної точності наближених розв'язків задачі (37.48), (37.49).

4. На завершення зробимо порівняльний аналіз методів внутрішніх (бар'єрних) і зовнішніх штрафних функцій.

Як перевагу перших часто відмічають те, що в них забезпечується виконання обмежень задачі умовної оптимізації протягом всього ітераційного процесу. Це важливо, коли цільова функція невизначена за межами допустимої області і є можливість припинити обчислення у будь-який момент, одержавши при цьому допустимий наближений розв'язок задачі. До недоліків методу бар'єрних функцій по відношенню до методу зовнішніх штрафних функцій можна віднести те, що вони мають сенс лише всередині допустимої множини, а це змушує використовувати спеціальні процедури мінімізації допоміжної функції $F(x,r)$, які містять блок перевірки виконання обмежень задачі поблизу межі допустимої множини. Крім того, метод бар'єрних функцій для деяких задач умовної оптимізації, наприклад задач з обмеженнями-рівностями, взагалі незастосовний у зв'язку з відсутністю внутрішності допустимої множини. Також для роботи за цим методом потрібна початкова точка, яка є внутрішньою для допустимої множини і яку знайти іноді не просто.

Спільним недоліком обох методів є те, що на кожному їх кроці доводиться розв'язувати, взагалі кажучи, непросту задачу безумовної мінімізації, яка вимагає значних обчислювальних витрат. При цьому в методі зовнішніх штрафних функцій задача ускладнюється із збільшенням штрафних коефіцієнтів у зв'язку з яристою структурою функцій, що мінімізуються, а також з появою додаткових локальних мінімумів. Все це призводить до того, що послідовні наближення за цим методом збігаються досить повільно і вимагають значних обчислювальних ресурсів. Тому при практичній реалізації методу зовнішніх штрафних функцій задачу (37.63) розв'язують, як правило, лише для таких номерів k (можливо великих), для яких має місце швидке спадання цільової функції $f(x)$ і достатня близькість точок $x^{(k)}$ до множини X при незначних обчислювальних витратах. Якщо одержане таким чином наближення до розв'язку задачі (37.48), (37.49) не є придатним, то застосовують інші більш потужні методи з використанням даних, які одержані за допомогою методу зовнішніх штрафних функцій. Зауважимо, що при використанні негладких штрафних функцій деякі із зазначених проблем зникають.

Враховуючи сказане, важко віддати перевагу тому чи іншому методу штрафів. Все залежить від конкретної задачі. На практиці при розв'язуванні задач умовної мінімізації виду (37.48), (37.49) можна використовувати допоміжну функцію $F(x,r)$ комбінованого типу, в якій обмеження-рівності враховуються за допомогою зовнішніх штрафних функцій, а обмеження-нерівності – за допомогою внутрішніх штрафних функцій. Наприклад, можна використовувати таку функцію

$$F(x,r) = f(x) - r\sum_{i=1}^{m}\ln(-g_i(x)) + \frac{1}{r}\sum_{i=m+1}^{s}(g_i(x))^2, \qquad (37.91)$$

де $r > 0$ і $r \to 0$. Детальне дослідження таких методів можна знайти, наприклад, у [81], [104].

Запитання для самоконтролю

1. У чому полягає основна ідея методів штрафних функцій?
2. У чому полягає сутність методу бар'єрних функцій і які бар'єрні функції найчастіше при цьому використовуються?
3. За яких умов послідовні наближення за методом бар'єрних функцій збігаються до розв'язку задачі умовної мінімізації?
4. У чому полягає сутність методу зовнішніх штрафних функцій і які функції штрафу найчастіше при цьому використовуються?
5. За яких умов послідовні наближення за методом зовнішніх штрафних функцій збігаються до розв'язку задачі умовної мінімізації?
6. Який зв'язок існує між коефіцієнтами штрафу і множниками Лагранжа для задачі нелінійного програмування?
7. Для яких класів задач умовної мінімізації і яких штрафних функцій гарантується збіжність методу зовнішніх штрафних функцій при скінченних значеннях коефіцієнтів штрафів?
8. У чому полягає комбінований підхід до побудови штрафних функцій?

Вправи для самостійного виконання

1. Довести, що індикаторна функція $\delta(x \mid X)$ опукла, коли множина X опукла.

2. Довести лему 37.2.

3. Довести, що функції (37.25)-(37.28) є бар'єрними функціями задачі (37.28), (37.29), тобто задовольняють означення 37.1, і опуклими, якщо $g_i(x)$ – опуклі на X функції для $i = \overline{1,m}$.

4. Для задач одновимірної мінімізації записати бар'єрні функції $R(x,r_k)$ виду (37.25), (37.26) і відповідні їм функції $F(x,r_k)$ при $r_k = \frac{1}{k}$, $k = 1,2,3$:

1) $f(x) = (x-1)^3 \to \min$, $x \in X = \{x \in R^1 \mid -x-1 \le 0\}$;
2) $f(x) = -x \to \min$, $x \in X = \{x \in R^1 \mid x \le 0\}$;
3) $f(x) = x^2 - 4x \to \min$, $x \in X = \{x \in R^1 \mid x-1 \le 0\}$;
4) $f(x) = x^4 - x^3 - 1 \to \min$, $x \in X = \{x \in R^1 \mid x-2 \le 0; -x-2 \le 0\}$;
5) $f(x) = x + e^{-x-1} \to \min$, $x \in X = \{x \in R^1 \mid -x-2 \le 0; x \le 0\}$.

За допомогою програмних засобів типу Advanced Grapher, Derive, GRAN1, Mathcad, Matlab, Maple, Mathematica чи інших побудувати графіки функцій $f(x)$, $R(x,r_k)$, $F(x,r_k)$, $k = 1, 2, 3$, і знайти розв'язки поставлених задач (див. приклад 37.1).

5. За методом бар'єрних функцій знайти розв'язки задач, використовуючи функції $R(x,r_k)$ виду (37.25), (37.26) при $k = 1,2,3$ (див. приклад 37.2):

1) $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \to \min$, $x \in X$, де $X = \{x \in R^2 \mid x_1^2 - x_2 \le 0; -x_1 \le 0\}$;

2) $f(x_1,x_2) = -x_1x_2 \to \min$, $x \in X$, де $X = \{x \in R^2 \mid x_1 + x_2^2 - 1 \le 0\}$;

3) $f(x_1,x_2) = x_1 - x_2 \to \min$, $x \in X$, де $X = \{x \in R^2 \mid x_1 + \sin x_1 - \frac{x_2}{2} \le 0\}$;

4) $f(x_1,x_2) = x_2 \to \min$, $x \in X$, де $X = \{x \in R^2 \mid -x_1 \le 0; x_1^2 - x_2 \le 0\}$;

5) $f(x_1,x_2) = \max(x_1,x_2) \to \min$, $x \in X$, де $X = \{x \in R^2 \mid x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0\}$.

Дати геометричну інтерпретацію одержаних результатів.

П р и м і т к а. При знаходженні стаціонарних точок виду $(x_1^*(r), x_2^*(r))$ можна скористатися програмними засобами типу Derive, Mathcad, Matlab, Mathematica, Maple тощо.

6. Використовуючи геометричну інтерпретацію, з'ясувати чи можна задачу

$$f(x) = e^{-x_1} \to \min,\ x \in X,\ \text{де } X = \{x \in R^2 \mid (x_1^2 + x_2^2 - 1)(x_2 - 1)^2 \le 0\},$$

розв'язати за методом бар'єрних функцій.

7. Однією з мов програмування описати алгоритм роботи за методом бар'єрних функцій (37.33), (37.36), (37.37) з бар'єрними функціями $R(x,r_k)$ виду (37.25)-(37.28), поклавши, наприклад, $\{r_k\} = \left\{\frac{1}{k}\right\}$, $\{\varepsilon_k\} = \left\{\frac{c}{2k}\right\}$, де $c \in (0;1)$. Ітераційний процес завершувати при виконанні однієї з умов $r_k < \varepsilon$ або $\| x^{(k)} - x^{(k/2)} \| < \varepsilon$, k – парне число, де $\varepsilon > 0$ – параметр точності обчислень.

8. Використовуючи розроблену програму (див. завдання 7), за методом бар'єрних функцій розв'язати наступні задачі математичного програмування з точністю до $\varepsilon = 10^{-4}$, $\varepsilon = 10^{-8}$, починаючи з точки $x^{(0)}$:

1) $f(x) = x_2^2 - 2x_2 - x_1 \to \min$, $x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid 10x_1^2 + x_2^2 - 4 \le 0\}$, $x^{(0)} = (0, 2)$;

2) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 8x_2 + 3 \to \min, x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid x_1 + 2x_2 - 2 \le 0; 2x_1 + x_2 - 2 \le 0\}$, $x^{(0)} = (-3, 2)$;

3) $f(x) = -2x_1 + x_1^2 - x_2 + 2 \to \min, x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid 2x_1^2 + 3x_2^2 - 6 \le 0\}$, $x^{(0)} = (-1, 1)$;

4) $f(x) = 4x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 4x_2 + 1 \to \min$, $x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid x_1^2 + 5x_2^2 - 2 \le 0\}$, $x^{(0)} = (-1, 0)$;

5) $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 3x_1 + 1 \to \min$, $x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid x_1^2 - 2x_2 \le 0;\ -2x_1 + x_2 \le 0\}$, $x^{(0)} = (2, 3)$;

6) $f(x) = -x_1 - 3x_2^2 - 1 \to \min,\ x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid x_1 + x_2^2 - 1 \le 0;\ -x_1 + 2x_2 \le 0\}$, $x^{(0)} = (-1, -1)$;

7) $f(x) = 4(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min,\ x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 1 \le 0;\ -x_1 + x_2 - 1 \le 0;\ x_1 - x_2 - 1 \le 0\}$,
$x^{(0)} = (1, 1)$;

8) $f(x) = x_1^2 + (x_2 + 1)^3 \to \min,\ x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid -x_1 + x_2 \le 0; -1 - x_1 - x_2 \le 0; x_1 - 3 \le 0\}$, $x^{(0)} = (2, 1)$;

9) $f(x) = 4(x_1 - 1)^3 + (x_2 + 1)^2 \to \min,\ x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 2 \le 0; -x_1 + x_2 - 2 \le 0;\ x_1 - x_2 \le 0\}$,
$x^{(0)} = (2, 3)$;

10) $f(x) = |x_1 - 2| + |x_2 - 2| \to \min,\ x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid -x_1 + x_2^2 \le 0;\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0\}$, $x^{(0)} = (0{,}5,\ 0{,}5)$.

Дати геометричну інтерпретацію одержаних результатів.

9. За допомогою програмних засобів типу Mathcad, Matlab, Maple, Mathematica чи інших розв'язати задачі із завдання 8 і результати порівняти з результатами, одержаними за методом бар'єрних функцій

10. Довести, що функції (37.53)-(37.55) є зовнішніми штрафними функціями задачі (37.48), (37.49), тобто задовольняють означення 37.2, і опуклими, якщо $g_i(x)$ – опуклі на R^n функції для $i = \overline{1,s}$.

11. Для задач із завдання 4 записати зовнішні штрафні функції $R(x, r_k)$ виду (37.53) при $p = 2$, (37.54) і відповідні їм функції $F(x, r_k)$ при $r_k = k^2, k = 1,2,3$.

За допомогою програмних засобів типу Advanced Grapher, GRAN1, Derive, Mathcad, Matlab, Maple, Mathematica чи інших побудувати графіки функцій $f(x), R(x, r_k), F(x, r_k), k = 1,2,3$ (див. приклад 37.3).

12. Задачу умовної мінімізації

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to \min,\ x \in X, \text{ де } X = \{x \in R^2 \mid g(x) = x_1 + 1 \le 0\},$$

розв'язати методом зовнішніх штрафних функцій з квадратичним штрафом. Дослідити лінії рівня функції $F(x, r)$ на R^2 на предмет яристості при $r \to \infty$. Дати геометричну інтерпретацію одержаних результатів.

13. За методом зовнішніх штрафних функцій знайти розв'язки задач із завдання 5, використовуючи квадратичні функції штрафу виду (37.53) (див. приклад 37.4). Дати геометричну інтерпретацію одержаних результатів.

14. Довести теорему 37.3 для задачі опуклого програмування виду (37.78), (37.79).

15. Для задачі опуклого програмування виду (37.78), (37.79) знайти субградієнти опуклої функції $F(x, r)$, коли в ній використовується негладка штрафна функція $R(x, r)$ виду (37.54).

16. Однією з мов програмування описати алгоритм роботи за методом зовнішніх штрафних функцій (37.62), (37.65) із штрафними функціями $R(x, r_k)$ виду (37.51), (37.52), поклавши, наприклад, $\{r_k\} = k^2$, $\{\varepsilon_k\} = \left\{\dfrac{c}{2k}\right\}$, де $c \in (0; 1)$. Ітераційний процес завершувати при виконанні однієї з умов $r_k^{-1} < \varepsilon$ або $\| x^{(k)} - x^{(k/2)} \| < \varepsilon$, k – парне число, де $\varepsilon > 0$ – параметр точності обчислень. Для розв'язування задачі (37.65) використати яристий метод (див. §28).

17. Використовуючи розроблену програму (див. завдання 16), за методом зовнішніх штрафних функцій розв'язати задачі із завдання 8 з точністю до $\varepsilon = 10^{-4}, \varepsilon = 10^{-8}$, починаючи з точок $x^{(0)} \notin X$. Результати порівняти з результатами, одержаними за методом бар'єрних функцій.

18. Встановити зв'язок між штрафними функціями і множниками Лагранжа для випадків, коли використовуються штрафні функції $R(x, r_k)$ виду (37.53) при $p > 0$.

19. Розв'язати задачу

$$f(x) = \ln x_1 - x_2 \to \min,\ x \in X, \text{ де } X = \{x \in R^2 \mid -x_1 + 1 \le 0;\ x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0\},$$

комбінованим методом штрафних функцій, коли $F(x, r)$ визначається співвідношенням (37.91). Дати геометричну інтерпретацію одержаних результатів при $r_1 = 1, r_2 = \dfrac{1}{4}, r_3 = \dfrac{1}{16}$.

20. Використовуючи розроблену програму (див. завдання 16), за методом зовнішніх штрафних функцій розв'язати наступні задачі математичного програмування з точністю до $\varepsilon = 10^{-4}, \varepsilon = 10^{-8}$, починаючи процес з точок $x^{(0)} \notin X$:

1) $f(x) = x_1^3 - 6x_1^2 + 11x_1 + x_3 \to \min,\ x \in X$,

де $X = \{x \in R^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \le 0;\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ge 4; x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; 0 \le x_3 \le 5\}$,
$x^{(0)} = (10, 10, 10)$;

2) $f(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^4 \to \min,\ x \in X$,

де $X = \{x \in R^3 \mid x_1 + x_1 x_2^2 + x_3^4 = 3\}$, $x^{(0)} = (2, 1, 1)$;

3) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 25x_2 \to \min,\ x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid 2x_1 + 3x_2 - 13 \le 0; 2x_1 - x_2 - 10 \le 0\}$, $x^{(0)} = (5, 0)$;

4) $f(x) = 3x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 + 4x_2 \to \min,\ x \in X$,

де $X = \{x \in R^2 \mid 2x_1 + 3x_2 + 6 = 0\}$, $x^{(0)} = (3, 0)$;

5) $f(x) = x_2^2 - 2x_2 + 2x_1 + x_3 \to \min,\ x \in X$,

де $X = \{x \in R^3 \mid x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 6 \le 0;\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2 \le 0\}$, $x^{(0)} = (2, 2, 2)$.

21. За допомогою програмних засобів типу Mathcad, Matlab, Maple, Mathematica чи інших розв'язати задачі із завдання 20 і результати порівняти з результатами, одержаними за методом зовнішніх штрафних функцій.

§38. Методи стохастичного програмування

Детерміновані оптимізаційні моделі часто неадекватно описують реальні виробничі, технічні, економічні, соціальні та інші процеси. Це пов'язано насамперед з неточністю та ймовірнісним характером показників і параметрів, які характеризують ці процеси. Наприклад, випадковий характер мають обсяги попиту на певну продукцію, моменти виходу з ладу технічного обладнання, погодні умови, які суттєво впливають на сільськогосподарське виробництво, кон'юнктура ринку, яка впливає на експортно-імпортні операції тощо. Тому актуальною є проблема розробки та удосконалення методів прийняття рішень в умовах часткової або повної невизначеності, ризику, неточності і випадковості вхідної інформації. Говорять, що має місце вибір рішень в умовах ризику, якщо кожна дія з допустимої множини дій приводить до одного з багатьох можливих часткових результатів, кожен з яких має певну ймовірність. Якщо ж кожна дія при виборі рішень приводить до одного з багатьох часткових результатів, ймовірності яких невідомі, то говорять, що вибір рішень відбувається в умовах невизначеності.

Розділ прикладної математики, в якому вивчаються питання вибору оптимальних рішень в ситуаціях, які характеризуються випадковими параметрами, має назву *стохастичне програмування.* З формальної точки зору стохастичне програмування – це теорія і методи розв'язування екстремальних задач стохастичної природи, тобто задач, в яких цільова функція і/або функції, що визначають допустиму множину, залежать від параметрів, які мають випадковий характер.

Термін «*стохастичне програмування*» з'явився на початку 50-х років 20 століття, коли Данціг, Чарнс і Купер стали аналізувати задачі лінійного програмування з випадковими коефіцієнтами (див., наприклад, [29]). Отже стохастичне програмування почало розвиватися майже одночасно з нелінійним програмуванням, теорія і методи якого широко застосовуються при розв'язуванні стохастичних задач оптимізації.

Цільова функція в задачі стохастичного програмування може визначати:
– ймовірність попадання розв'язку в деяку область (**P** - *моделі*);
– математичне сподівання деякої функції від розв'язку (**M** - *моделі*);
– дисперсію деякої функції від розв'язку (**D** - *моделі*).

Обмеження, які найчастіше зустрічаються в задачах стохастичного програмування, можуть бути:
– *жорсткими* (або майже жорсткими), які повинні виконуватись при всіх (або при майже всіх) значеннях параметрів, що входять до умови задачі;

– *ймовірнісними*, тобто такими, в яких нев'язки в умові задачі не повинні перевищувати заданих величин з ймовірностями, не меншими, ніж деякі числа з інтервалу $(0;1)$;
– *статистичними,* тобто такими, коли жорсткі обмеження можна замінити їх усередненнями за розподілами ймовірностей випадкових параметрів.

При знаходженні розв'язків задачі стохастичного програмування розглядають можливість прийняття рішення до спостереження випадкових параметрів (*задачі перспективного стохастичного програмування*) чи після спостереження випадкових параметрів (*задачі оперативного стохастичного програмування*).

Задачі стохастичного програмування можна поділити на такі класи:
– *одноетапні задачі*, в яких розв'язок знаходиться відразу і більше не змінюється;
– *двоетапні задачі*, в яких на першому етапі знаходиться попередній розв'язок задачі, а на другому етапі відбувається корекція знайденого на першому етапі розв'язку за певними критеріями;
– *багатоетапні задачі*, в яких корекція раніше знайденого розв'язку відбувається кілька разів за мірою того, як накопичуються дані про випадкові параметри задачі.

Методи розв'язування задач стохастичного програмування можна поділити на дві основні групи:
– *непрямі методи* стохастичного програмування – це методи, в яких задана задача замінюється деякою еквівалентною їй детермінованою задачею (в загальному випадку задачею нелінійного програмування), яку потім розв'язують за відомими методами математичного програмування (див. §§34-37);
– *прямі методи* стохастичного програмування – це методи, в яких розв'язок знаходиться лише з використанням даних про цільову функцію та обмеження самої задачі (метод стохастичних квазіградієнтів, стохастичний метод скорочення нев'язок, метод стохастичної апроксимації).

При розв'язуванні стохастичних задач оптимізації зі складними моделями можливе поєднання прямих та непрямих методів відшукання розв'язку або їх чергування на різних етапах багатоетапної задачі.

Проблемам стохастичного програмування присвячено значну кількість робіт (див., наприклад, [16], [28], [29], [37], [70], [74], [77], [114]).

У цьому параграфі розглядаються деякі постановки задач стохастичного програмування і описуються найбільш відомі методи їх розв'язування.

1. Загальні зауваження. Розглянемо постановку задачі стохастичного програмування у порівнянні із задачею нелінійного програмування виду:

$$f(x) \to \min, \tag{38.1}$$

$$g_i(x) \le 0, i = \overline{1,m}, \tag{38.2}$$

$$x \in X, \tag{38.3}$$

де $X \subseteq R^n$.

В задачі (38.1)-(38.3) функції $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, вважають однозначними, є можливість обчислювати точні значення цих функцій, їх похідних (частинних похідних) або їх аналогів для негладких функцій, а також встановлювати належність точки x множині X.

За аналогією із задачею нелінійного програмування (38.1)-(38.3) можна сформулювати наступну задачу стохастичного програмування:

$$f(x,\theta) \to \min, \tag{38.4}$$

$$g_i(x,\theta) \le 0, i = \overline{1,m}, \tag{38.5}$$

$$x \in X, \tag{38.6}$$

де X – деяка підмножина простору R^n, θ – елемент деякої *множини елементарних подій* Θ, на якій задано *імовірнісний простір* (Θ,Σ,P), де Σ – σ-*алгебра* підмножин множини Θ, тобто сукупність подій, яка містить вірогідну подію Θ, неможливу подію $\varnothing$ і замкнена відносно операцій переходу до протилежної події, зчисленного об'єднання і зчисленного перетину множин із Σ, P – імовірнісна міра на вимірному просторі (Θ,Σ).

Постановка задач стохастичного програмування істотно залежить від того, чи є можливість при визначенні розв'язку уточнити значення параметра θ шляхом спостережень чи експерименту. У зв'язку з цим розрізняють задачі *перспективного* і *оперативного стохастичного програмування*.

У задачах перспективного стохастичного програмування розв'язок визначається до проведення спостережень над параметром θ. Такі задачі виникають, наприклад, при перспективному техніко-економічному плануванні, при розрахунках оптимальних траєкторій керованих об'єктів.

У задачах оперативного стохастичного програмування розв'язок визначається після деякого експерименту (спостереження) над параметром θ, тобто він залежить від результатів експерименту. Такі задачі виникають, наприклад, у оперативному поточному техніко-економічному плануванні, у медичній діагностиці, коли діагноз і спосіб лікування залежать від результатів обстеження пацієнта.

Якщо в результаті експерименту значення параметра θ стає відомим, то визначення розв'язку $x(\theta)$ при даному θ зводиться до звичайної задачі нелінійного програмування.

У загальному випадку експеримент повністю не визначає значення θ, тому етапи визначення розв'язків можуть чергуватися з етапами спостережень над параметром θ.

Таким чином мають місце багатоетапні процеси визначення розв'язків, кожен з яких відбувається за одним з наступних сценаріїв:

розв'язування – спостереження – розв'язування – ...
... – спостереження – розв'язування;

спостереження – розв'язування – спостереження – ...
... – спостереження – розв'язування.

Процес визначення розв'язку називають N-*етапним*, якщо в ньому слово «розв'язування» зустрічається N-разів. Якщо процес визначення розв'язку в задачі стохастичного програмування починається зі слова «розв'язування», то таку задачу будемо називають N-*етапною задачею перспективного стохастичного програмування*, а якщо зі слова «*спостереження*» – N-*етапною задачею оперативного стохастичного програмування.*

2. Задача перспективного стохастичного програмування. Якщо розв'язок x детермінований і приймається перед тим, як спостерігається параметр θ, то співвідношенням (38.4)-(38.6) треба надати певний ймовірнісний зміст, оскільки при фіксованому x для одних θ співвідношення (38.5) можуть виконуватися і x буде допустимим розв'язком, а для інших θ співвідношення (38.5) можуть не виконуватися.

Задачу (38.4)-(38.6) часто розглядають як задачу мінімізації математичного сподівання деякої функції від x і θ, тобто

$$F(x) = \mathbf{M}f(x,\theta) \to \min, \tag{38.7}$$

за умов

$$G_i(x) = \mathbf{M}g_i(x,\theta) \le 0,\ i = \overline{1,m}, \tag{38.8}$$

$$x \in X, \tag{38.9}$$

де функції $F(x), G_i(x), i = \overline{1,m}$, називаються *функціями регресії.*

Крім того, розглядають й інші постановки задачі (38.4)-(38.6), наприклад, мінімізувати імовірність того, що значення деякої функції, яка залежить від x і θ, перевищуватимуть деяке число, тобто

$$\mathbf{Z}(x) = \mathbf{P}\{f(x,\theta) \ge \alpha\} \to \min, \tag{38.10}$$

за умов

$$T_i(x) = \mathrm{P}\{g_i(x,\theta) \le 0\} \ge \beta_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{38.11}$$

$$x \in X, \tag{38.12}$$

де α і β_i, $i = \overline{1,m}$, – деякі дійсні числа, причому $\beta_i \in (0;1)$.

Наведені формалізації не вичерпують всіх можливих постановок задач стохастичного програмування. Наприклад деякі задачі можуть мати формальний запис, який поєднує задачі (38.7)-(38.9) та (38.10)-(38.12). Але наведені задачі є типовими. Причому розглядати можна лише задачу (38.7)-(38.9), тому що задача (38.10)-(38.12) зводиться до задачі (38.7)-(38.9) за допомогою характеристичних (індикаторних) функцій множин $\{\theta : f(x,\theta) \geq \alpha\}$, $\{\theta : g_i(x,\theta) \leq 0\}$:

$$\chi_0(x,\theta) = \begin{cases} 1, & f(x,\theta) \geq \alpha, \\ 0, & f(x,\theta) < \alpha, \end{cases}$$

$$\chi_i(x,\theta) = \begin{cases} 1, & g_i(x,\theta) \leq 0, \\ 0, & g_i(x,\theta) > 0, \end{cases} \quad i = \overline{1,m},$$

для яких

$$\mathbf{M}\chi_0(x,\theta) = \mathbf{P}\{f(x,\theta) \geq \alpha\},$$

$$\mathbf{M}\chi_i(x,\theta) = \mathbf{P}\{g_i(x,\theta\} \leq 0\}, \; i = \overline{1,m}.$$

Зовнішньо задача (38.7)-(38.9) нагадує звичайну задачу нелінійного програмування (38.1)-(38.3) при $f(x) = F(x)$ і $g_i(x) = G_i(x)$, $i = \overline{1,m}$. Але по суті це не так, оскільки в задачі (38.7)-(38.9), як правило, при кожному x складно обчислити точне значення функцій $F(x)$, $G_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, тим більше значення їх частинних похідних. Найчастіше доступними є дані не про значення функцій $F(x)$, $G_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, а про значення функцій $f(x,\theta)$, $g_i(x,\theta)$, $i = \overline{1,m}$, для окремих значень $\theta \in \Theta$, що одержуються в результаті спостережень. Основна складність при цьому полягає у тому, щоб розв'язати задачу (38.7)-(38.9), не знаючи функцій $F(x)$, $G_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, а використовуючи лише значення $f(x,\theta)$, $g_i(x,\theta)$, $i = \overline{1,m}$. У тих випадках, коли вдається знайти функції $F(x)$, $G_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, екстремальна задача (38.7)-(38.9) нічим не відрізняється від задачі (38.1)-(38.3), а її стохастична природа проявляється лише на етапі пошуку цих функцій.

Досить часто при розв'язуванні задач стохастичного програмування виду (38.7)-(38.9) спочатку намагаються знайти функції $F(x)$, $G_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, а потім застосувати методи нелінійного програмування. Якщо ж це не вдається, то намагаються замінити задачу (38.7)-(38.9) її деяким наближеним детермінованим еквівалентом. Такі підходи до розв'язування задачі (38.7)-(38.9) називають *непрямими методами* стохастичного програмування. Інші підходи ґрунтуються на використанні відомостей про значення функцій $f(x,\theta)$, $g_i(x,\theta)$, $i = \overline{1,m}$. Такі методи називаються *прямими методами* стохастичного програмування.

Розглянемо приклади деяких виробничих і економічних задач, математичні моделі яких являють собою задачі перспективного стохастичного програмування.

П р и к л а д 38.1. **Задача вибору оптимального рівня виробництва.** Нехай треба спланувати виробництво однорідної продукції, попит на яку є випадковим. Позначимо через x обсяг виробництва цієї продукції, через θ – попит на неї, а через c – витрати на виробництво одиниці продукції. Оскільки попит на продукцію випадковий, то при будь-яких $x > 0$ можливе або її перевиробництво, або її дефіцит. Позначимо надлишок продукції при фіксованих x і θ через $y^+(x,\theta)$, дефіцит – через $y^-(x,\theta)$, питомі видатки, пов'язані з надлишком продукції, через d^+, а питомі видатки, пов'язані з дефіцитом, через d^-. Задача полягає в тому, щоб знайти такий обсяг виробництва продукції x, при якому математичне сподівання витрат, пов'язаних з виробництвом, надлишком і дефіцитом продукції, буде мінімальним. Враховуючи сказане, математична модель задачі має такий вигляд:

$$F(x) = cx + \mathbf{M}(d^+y^+(x,\theta) + d^-y^-(x,\theta)) \to \min, \; x \geq 0,$$

де $y^+(x,\theta) = \max\{0; x-\theta\}$, $y^-(x,\theta) = \max\{0; \theta - x\}$.

П р и к л а д 38.2. **Задача планування запасів.** Нехай потрібно зробити запас деяких товарів $T_1, T_2, ..., T_n$, на які є випадковий попит $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$. За нестачу одиниці товару T_j необхідно сплатити штраф c_j, а витрати на зберігання одиниці товару T_j становлять d_j, $j = \overline{1,n}$. Нехай планується зробити запас відповідних товарів у кількості $x_1, x_2, ..., x_n$. Тоді штраф за не задоволення попиту щодо товару T_j буде становити $c_j \max\{0; \theta_j - x_j\}$, витрати на зберігання надлишку товару T_j будуть дорівнювати $d_j \max\{0; x_j - \theta_j\}$, $j = \overline{1,n}$, і функція загальних збитків, яка відповідає запасу товарів $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, буде мати вигляд:

$$f(x,\theta) = \sum_{j=1}^{n} (c_j \max\{0; \theta_j - x_j\} + d_j \max\{0; x_j - \theta_j\}).$$

Задача полягає у том, щоб знайти такий запас товарів $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$, при якому математичне сподівання загальних збитків буде мінімальним, тобто

$$F(x) = \mathbf{M}f(x,\theta) \to \min.$$

Зауважимо, що для відшукання оптимального розв'язку цієї задачі необхідно знати розподіл ймовірностей випадкових величин θ_j: $H_j(z) = \mathbf{P}\{\theta_j < z\}$, $j = \overline{1,n}$.

П р и к л а д 38.3. **Задача статистики.** Нехай є випадкова величина ξ з невідомим математичним сподіванням $\mathbf{M}\xi$. Відомі $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N$ – незалежні спостережені значення випадкової величини ξ. На основі цих спостережених значень необхідно оцінити $\mathbf{M}\xi$.

Розглянемо функцію

$$F(x) = \mathbf{M}(\xi - x)^2.$$

Оскільки

$$F(x) = (x - \mathbf{M}\xi)^2 - \mathbf{M}\xi^2 + \mathbf{M}^2\xi,$$

то точкою мінімуму цієї функції є $x^* = \mathbf{M}\xi$, тому задача відшукання математичного сподівання $\mathbf{M}\xi$ рівносильна задачі відшукання точки мінімуму функції $F(x)$. Складність мінімізації функції $F(x)$ полягає у тому, що відомі лише спостережені значення $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N$, і знайти точне значення $F(x)$ при будь-якому x неможливо.

П р и к л а д 38.4. **Задача розподілу площ під сільськогосподарські культури**. Розглянемо задачу оптимального розподілу посівних площ з урахуванням того, що врожайність на різних ділянках має випадковий характер.

Нехай є m сільськогосподарських культур, які можна посіяти на n ділянках землі. Відомо, що площа j-ої ділянки землі дорівнює S_j, $j = \overline{1,n}$, а врожайність i-ої культури на j-ій ділянці становить $a_{ij}(\theta)$ і є випадковою величиною з відомим розподілом ймовірностей, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Позначимо через x_{ij} – площу, яку планується засіяти i-ою культурою на j-ій ділянці, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Необхідно обрати такий план $x = (x_{ij})_{i=\overline{1,m},\, j=\overline{1,n}}$ розподілу посівних площ, щоб максимізувати математичне сподівання валового збору сільськогосподарських культур з урахуванням обмеженості площ земельних ділянок.

Математична модель цієї задачі має вигляд:

$$F(x) = \mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)x_{ij}\right) \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le S_j, \; j = \overline{1,n},$$

$$x_{ij} \ge 0, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}.$$

П р и к л а д 38.5. **Задача про збереження активів.** Будь-яка особа може тримати свої заощадження (актив) у вигляді грошей та облігацій. Гроші – це актив, що використовується як засіб обігу, не приносячи прибутків. Облігації – цінні папери, що дають певний відсоток прибутку. Цілком логічно, що особі вигідно зберігати свої заощадження у вигляді облігацій. Але в реальному житті процент прибутку і ринкова вартість облігацій наперед точно не відомі, тому існує небезпека втратити частину своїх заощаджень. Розглянемо задачу найбільш пріоритетного розподілу заощаджень особи на гроші та облігації.

Нехай S – розмір заощаджень особи, а x і y – суми, які планується зберігати відповідно у формі грошей та облігацій. Будемо вважати, що через рік активи, вкладені в облігації, змінюються. За решти однакових умов облігацію, яка приносить більший відсоток прибутку на ринку цінних паперів, можна збути за більшу суму, ніж облігацію з меншим відсотком прибутку. Позначимо через ξ і η частки активів, які реалізуються через рік на одиницю активів, збережених відповідно у формі грошей та вкладених в облігації. В умовах задачі величина $\xi \equiv 1$, а величина η є випадковою величиною. Економіко-математична модель найбільш пріоритетного розподілу активів на гроші та облігації полягає в максимізації сподіваної корисності:

$$F(x, y) = \mathbf{M}(\xi x + \eta y) \to \max,$$

за умов

$$x + y \le S, \; x \ge 0, y \ge 0.$$

Звідси випливає, що коли $\mathbf{M}\eta > 1$, то активи потрібно вкладати в облігації, якщо $\mathbf{M}\eta < 1$, то краще активи тримати у грошах, а якщо $\mathbf{M}\eta = 1$, то однаково, який спосіб заощадження буде використано.

3. Задача оперативного стохастичного програмування. У тих випадках, коли розв'язок x визначається після спостережень за параметром θ, він залежить від θ. Якщо значення θ стало відомим в результаті експерименту над θ, то $x(\theta)$ краще за все обирати як точку мінімуму задачі (38.4), (38.5) при даному значенні θ. У загальному випадку в результаті експерименту з усієї сукупності подій, які утворюють σ-алгебру Σ основного імовірнісного простору $(\Theta, \Sigma, \mathbf{P})$, доступна для спостереження деяка частина S подій, яка є σ-підалгеброю σ-алгебри Σ. Тому функція $x(\theta)$ повинна бути вимірною відносно S (S-вимірною).

Враховуючи сказане, задача оперативного стохастичного програмування в загальному випадку формулюється так. Нехай є імовірнісний простір $(\Theta, \Sigma, \mathbf{P})$ і S – σ-підалгебра Σ, тобто $S \subseteq \Sigma$. Треба знайти S-вимірну вектор-функцію $x(\theta) = (x_1(\theta), x_2(\theta), ..., x_n(\theta))$, яка мінімізує функцію

$$F(x(\theta)) = \mathbf{M}f(x(\theta), \theta) \tag{38.13}$$

за умов

$$G_i(x(\theta)) = \mathbf{M}g_i(x(\theta), \theta) \le 0, \; i = \overline{1,m}, \tag{38.14}$$

$$x(\theta) \in X. \tag{38.15}$$

П р и к л а д 38.6. **Задача про вибір плану лікування** [114]. Як показує досвід і знання, накопичені в різних галузях медицини, багато задач діагностики, планування лікування і організації охорони здоров'я формулюються як задачі прийняття рішень в умовах ризику. Природно, що в медицині більше, ніж в інших галузях діяльності людини, результати аналізу формальних моделей треба розглядати лише як рекомендації, а останнє слово залишається за лікарями.

Різні методи лікування певного захворювання можуть бути охарактеризовані вектором $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, компоненти якого визначають дози ліків і параметри схем їх застосування, тривалість фізіотерапевтичних процедур тощо. Стан хворого при кожному захворюванні описується набором показників g_i, $i = \overline{1,m}$, (температура тіла, тиск, пульс, частота дихання, параметри різних аналізів), значення яких одержуються в результаті обстеження пацієнта. Опрацювання статистичних даних, що характеризують захворювання, і розуміння механізму впливу різних засобів на організм хворого дозволяють визначити залежність математичного сподівання об'єктивних показників g_i стану хворого від параметрів x_j, $j = \overline{1,n}$, методу лікування – $g_i = g_i(x_1, ..., x_n)$, $i = \overline{1,m}$. При цьому допустимий діапазон змін показників g_i для здорової людини нехай становить $[\underline{a}_i; \overline{a}_i]$, $i = \overline{1,m}$. Аналогічно встановлюються залежності показників h_r, $r = \overline{1,s}$, побічних ефектів у хворого від параметрів x_j, $j = \overline{1,n}$, методу лікування – $h_r = h_r(x_1, ..., x_n)$, $r = \overline{1,s}$. При цьому нехай допустиме значення небажаного фактору r-го типу обмежене зверху величиною b_r, $r = \overline{1,s}$. Крім того, будемо вважати, що на основі досвіду визначено раціональний діапазон $[\underline{x}_j; \overline{x}_j]$, $j = \overline{1,n}$, змін параметрів медикаментозного і фізіотерапевтичного лікування. З кожним методом лікування $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ пов'язується критерій якості лікування $f(x_1, ..., x_n)$, який характеризує тривалість, вартість, дискомфорт та інші показники лікування. Це може бути, наприклад, сумісна ймовірність того, що час одужання і різного роду витрати на лікування не перевищать заданих допустимих значень.

Детермінований варіант задачі про вибір методу лікування при фіксованому діагнозі буде мати такий вигляд:

$$f(x_1,...,x_n) \to \max,$$

$$\underline{a}_i \le g_i(x_1,...,x_n) \le \overline{a}_i, \ i=\overline{1,m},$$

$$h_r(x_1,...,x_n) \le b_r, \ r=\overline{1,s},$$

$$x_j \in [\underline{x}_j; \overline{x}_j], \ j=\overline{1,n}.$$

Нехай тепер лікування відбувається в умовах ризику, тобто коли наявні у хворого симптоми змушують підозрювати у нього одну з кількох хвороб. Припустимо, що наявний досвід і результати обстеження пацієнта дозволяють вказати ймовірності альтернативних діагнозів.

Стохастичну модель вибору плану лікування у цьому випадку можна одержати з описаної вище детермінованої моделі для фіксованого діагнозу шляхом усереднення показників, які визначають критерій ефективності лікування та обмеження задачі за розподілом ймовірностей альтернативних діагнозів. Позначимо через p_l ймовірність того, що правильним є l-ий діагноз, $l=\overline{1,k}$, через $f_l(x)=f_l(x_1,...,x_n)$ – критерій ефективності методу $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ лікування при l-му захворюванні, $l=\overline{1,k}$, а через $g_i^{(l)}(x)=g_i^{(l)}(x_1,...,x_n)$, $i=\overline{1,m}$, і $h_r^{(l)}=h_r^{(l)}(x_1,...,x_n)$, $r=\overline{1,s}$, – відповідно показники стану хворого і характеристики небажаних факторів, які відповідають використанню методу лікування x захворювання l-го типу. Зауважимо, що вигляд цих залежностей, взагалі кажучи, різний при різних захворюваннях.

Вибір методу лікування в умовах неточно встановленого діагнозу зводиться до розв'язування наступної задачі стохастичного програмування:

$$\mathbf{M}f=\sum_{l=1}^{k} p_l f_l(x_1,...,x_n) \to \max,$$

$$\underline{a}_i \le \mathbf{M}g_i=\sum_{l=1}^{k} p_l g_i^{(l)}(x_1,...,x_n) \le \overline{a}_i, \ i=\overline{1,m},$$

$$\mathbf{M}h_r=\sum_{l=1}^{k} p_l h_r^{(l)}(x_1,...,x_n) \le b_r, \ r=\overline{1,s},$$

$$x_j \in [\underline{x}_j; \overline{x}_j], \ j=\overline{1,n}.$$

4. Двоетапна задача стохастичного програмування. Однією з найпоширеніших стохастичних моделей є двоетапна задача стохастичного програмування. До неї природним чином зводиться велика кількість задач планування в умовах невизначеності і ризику. Саме необхідність приймати рішення ще до реалізації деяких умов, здебільшого стохастичного характеру, спонукає поділити процес планування на два етапи. На першому етапі визначається попередній план, який дозволяє прийняти оперативне рішення і провести необхідну підготовчу роботу. На другому етапі, після спостереження значень раніше не визначених параметрів, проводиться компенсація (корекція) виявлених нев'язок в обмеженнях задачі. Отже, на другому етапі коригується попередній розв'язок. При цьому попередній план і план-корекція повинні бути узгоджені, наприклад так, щоб забезпечити мінімум математичного сподівання сумарних витрат, що виникають на обох етапах розв'язування задачі.

Розглянемо типовий приклад двоетапної стохастичної задачі.

Нехай підприємство виробляє продукцію n видів і для її виготовлення використовується m видів ресурсів. Будемо вважати, що витрати ресурсу i-го виду $(1 \le i \le m)$ на виробництво одиниці продукції j-го виду $(1 \le j \le n)$, а також запаси ресурсу i-го виду $(1 \le i \le m)$ залежать від деякого випадкового параметра θ. Така ситуація може виникнути, наприклад, в результаті перевиробництва продукції або її дефіциту внаслідок неможливості точного передбачення попиту на цю продукцію, або нестачі ресурсів внаслідок їх недостатнього постачання чи видобутку тощо. За таких умов позначимо через $a_{ij}(\theta)$ витрати ресурсу i-го виду $(1 \le i \le m)$ на виробництво одиниці продукції j-го виду $(1 \le j \le n)$, через $b_i(\theta)$ – наявні ресурси i-го виду $(1 \le i \le m)$, c_j – питомі витрати підприємства на виготовлення одиниці продукції j-го виду $(1 \le j \le n)$. Необхідно скласти такий план $x=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ виробництва продукції, щоб за умови повного використання наявних ресурсів сумарні витрати підприємства були мінімальними.

У зв'язку з тим, що вектор $b(\theta)$ є випадковим, то взагалі кажучи, яким би не був обраний план x, він не зможе задовольнити умови

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)x_j=b_i(\theta), \ i=\overline{1,m}, \qquad (38.16)$$

тобто для деяких i виявиться, що $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i$, а для деяких $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > b_i$. Для ліквідації такого роду нев'язок введемо в (38.16) вектор корекції $y=(y_1,y_2,...,y_k)^T$ з матрицею корекції $R(\theta)=\{r_{ij}(\theta)\}_{i=\overline{1,m},\, j=\overline{1,k}}$, де $k \le n$. Тоді одержимо таку систему обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)x_j+\sum_{j=1}^{k} r_{ij}(\theta)y_j=b_i(\theta), \ i=\overline{1,m},$$

або в матричній формі

$$A(\theta)x+R(\theta)y=b(\theta), \qquad (38.17)$$

якій повинні задовольняти план x і вектор корекції y, при цьому

$$x \ge 0, y \ge 0. \qquad (38.18)$$

План x приймається до того, як стане відомим значення θ, а після того як значення θ стане відомим, нев'язки, які виникають в системі (38.16), коригуються за рахунок вибору вектора корекції y з умов (38.17), (38.18) при даних x,θ. Припустимо, що витрати підприємства на корекцію плану випуску продукції дорівнюють

$$\langle d(\theta), y\rangle = \sum_{j=1}^{k} d_j(\theta) y_j \,, \qquad (38.19)$$

де $d_j(\theta)$ – витрати на корекцію плану виготовлення j-го виду продукції, $j=\overline{1,k}$ (вектор $d(\theta)$ називають вектором штрафу за необхідність корекції плану). Зрозуміло, що коли план x прийнятий до виконання, а значення θ стало відомим пізніше, то вектор корекції y краще за все обирати з умови мінімізації витрат (38.19) при обмеженнях (38.17), (38.18) і даних x,θ, тобто він повинен бути розв'язком наступної екстремальної задачі:

$$\langle d(\theta), y\rangle \to \min \,, \qquad (38.20)$$

$$A(\theta)x + R(\theta)y = b(\theta), \qquad (38.21)$$

$$x \ge 0,\ y \ge 0 . \qquad (38.22)$$

Одержаний вектор оптимальної корекції позначимо через $y(x,\theta)$. Припустимо, що вектор $y(x,\theta)$ існує при будь-яких x,θ. Тоді очікувані витрати на виконання плану x і його оптимальну корекцію дорівнюють:

$$F(x) = \langle c, x\rangle + \mathbf{M}\langle d(\theta), y(x,\theta)\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \mathbf{M}\Big(\sum_{j=1}^{k} d_j(\theta) y_j(x,\theta)\Big) . \qquad (38.23)$$

Задача полягає у тому, щоб обрати план x, який мінімізує загальні витрати (38.23) за умови $x \ge 0$.

Зауважимо, що знаходження точного значення функції $F(x)$ можливе лише в небагатьох випадках, а саме, коли вдається відшукати розподіл ймовірностей (в залежності від x) оптимального значення $y(x,\theta)$ задачі (38.20)-(38.22). Потрібно також зауважити, що функція $F(x)$ у більшості випадків не є гладкою, оскільки негладкою при кожному значенні θ буде функція $\langle d(\theta), y(x,\theta)\rangle$ (див. приклад 38.1).

У найбільш загальному випадку план x і його корекція y замість (38.17), (38.18) повинні при всіх θ задовольняти умови

$$g_i(x,y,\theta) \le 0,\ i=\overline{1,m}, \qquad (38.24)$$

$$x \in X,\ y \in Y . \qquad (38.25)$$

Нехай витрати, пов'язані з виконанням плану x і його корекцією y при заданому θ, дорівнюють $f(x,y,\theta)$. Позначимо через $y(x,\theta)$ корекцію, яка

мінімізує $f(x,y,\theta)$ за умов (38.24), (38.25) і фіксованих x,θ. Тоді очікувані витрати на виконання плану x і корекцію $y(x,\theta)$ будуть становити

$$F(x) = \mathbf{M} f(x, y(x,\theta), \theta) .$$

Задача полягає у тому, щоб обрати план x, який мінімізує цільову функцію $F(x)$ за умови $x \in X$, тобто

$$F(x) = \mathbf{M} f(x, y(x,\theta), \theta) \to \min \,, \qquad (38.26)$$

$$x \in X . \qquad (38.27)$$

Розглянуту задачу називають *двоетапною стохастичною задачею виробничого планування.*

Зауважимо, що в цій задачі використовувались два способи прийняття рішень – *програмний* і *корекційний*, які застосовувались відповідно до і після спостереження за параметром θ. Попередній план міг коригуватися лише після того, як стануть відомими реальні значення θ. Але в загальному випадку коригування може відбуватися не тільки після одержання значення θ, а й під час його уточнення, тобто більш реальною і загальною є багатоетапна схема одержання і використання значення параметра θ.

5. Детерміновані аналоги задач стохастичного програмування. Перед тим, як розглядати деякі методи розв'язування задач стохастичного програмування, проаналізуємо їх специфіку на прикладі однієї з найбільш загальних постановок задач перспективного стохастичного програмування, яка полягає в тому, щоб знайти детермінований вектор x такий, що

$$F(x) = \mathbf{M} f(x,\theta) \to \min \,, \qquad (38.28)$$

$$G_i(x) = \mathbf{M} g_i(x,\theta) \le 0,\ i=\overline{1,m}, \qquad (38.29)$$

$$x \in X . \qquad (38.30)$$

До задачі (38.28)-(38.30) зводяться, наприклад, одноетапні та двоетапні задачі стохастичного програмування, задачі з імовірнісними обмеженнями (див. п.2, п.4).

По-перше, як вже відмічалось, для задач виду (38.28)-(38.30) характерна недиференційовність функцій $F(x)$, $G_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, а екстремальні задачі з недиференційовними функціями (див. §§14-19), як правило, значно складніші, ніж задачі з функціями, що мають неперервні похідні (частинні похідні).

По-друге, в задачах стохастичного програмування неможливо встановити явний вигляд функцій $F(x)$, $G_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, а також практично неможливо багатократно обчислювати їх значення. Дійсно, для обчислення значень функції $F(x)$ необхідно знайти інтеграл Стільтьєса (див., наприклад, [59])

$$\mathbf{M} f(x,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, dH_{f(x,\theta)}(z) ,$$

де $H_{f(x,\theta)}(z) = P\{f(x,\theta) < z\}$ – *функція розподілу ймовірностей* випадкової величини $f(x,\theta)$, яка залежить від вектора x. При цьому знаходження функції розподілу $H_{f(x,\theta)}(z)$ зводиться до обчислення r-кратного інтегралу від щільності $h(z_1,...,z_r)$ розподілу ймовірностей вектора $\theta = (\theta_1,...,\theta_r)$, якщо вона існує:

$$H_{f(x,\theta)}(z) = \int\limits_{f(x,z_1,...,z_r)<z} ....\int h(z_1,...,z_r)dz_1...dz_r.$$

Якщо врахувати, що навіть в середніх за розміром реальних задачах кількість випадкових параметрів і, як наслідок, кратність інтегралів може сягати десятків тисяч, то стає зрозумілим, що знаходження функції $F(x)$ в явному вигляді при фіксованому x в загальному випадку є практично нерозв'язною задачею.

Досить часто зазначені труднощі підсилюються ще й тим, що функція розподілу випадкового вектора θ не задається в явному вигляді, а є лише можливість спостерігати його реалізації $\theta^{(1)},...,\theta^{(k)}$, які одержуються за допомогою імітаційного моделювання процесів, що досліджуються.

Як вже відмічалось, методи розв'язування задач стохастичного програмування діляться на дві основні групи: непрямі методи і прямі методи. Як правило, під непрямими методами розв'язування певної математичної задачі розуміють методи, які для знаходження її розв'язку використовують деяку іншу, еквівалентну даній, задачу. Непрямі методи стохастичного програмування ґрунтуються або на застосуванні необхідних умов екстремуму, або на заміні стохастичної задачі її детермінованим аналогом – задачею лінійного або нелінійного програмування, розв'язок якої можна одержати за відомими методами.

Зауважимо, що перший підхід, наприклад, для розв'язування задачі (38.4)-(38.6) практично не застосовний, оскільки похідні функцій $F(x), G_i(x), i=\overline{1,m}$ (або їх аналоги) не відомі. Хоча формально задача (38.4)-(38.6) є задачею нелінійного програмування (для задачі перспективного стохастичного програмування) і для неї можна сформулювати необхідні умови екстремуму (див., наприклад, [37]).

Щодо другого підходу, то детерміновані еквіваленти можна побудувати для досить обмеженого класу задач стохастичного програмування, які є нескладними за своєю природою.

Спочатку дамо означення еквівалентності екстремальних задач виду:

$$F(x) \to \max, \tag{38.31}$$

$$x \in X, \tag{38.32}$$

$$\Phi(x,y) \to \max, \tag{38.33}$$

$$(x,y) \in Z, \tag{38.34}$$

де $x \in R^n$, $y \in R^m$, $F(x)$ і $\Phi(x,y)$ – задані скалярні функції, $X \subseteq R^n$ і $Z \subseteq R^{n+m}$ – задані множини.

Припустимо, що задачі (38.31), (38.32) і (38.33), (38.34) мають розв'язки, тобто

$$X^* = \{x^* \in X \mid F(x^*) = \max_{x\in X} F(x)\} \neq \varnothing,$$

$$Z^* = \{z^* = (x^*,y^*) \in Z \mid \Phi(x^*,y^*) = \max_{(x,y)\in Z} \Phi(x,y)\} \neq \varnothing.$$

О з н а ч е н н я 38.1. Задачі (38.31), (38.32) і (38.33), (38.34) називаються *еквівалентними*, якщо для кожного розв'язку $x^* \in X^*$ задачі (38.31), (38.32) знайдеться такий вектор y^*, що пара (x^*,y^*) є розв'язком задачі (38.33), (38.34), і, навпаки, для кожного розв'язку $(x^*,y^*) \in Z^*$ задачі (38.33), (38.34) вектор x^* є розв'язком задачі (38.31), (38.32).

Т е о р е м а 38.1. *Нехай*

1) *для кожної пари* $(x,y) \in Z$ *виконуються співвідношення* $x \in X$ *і* $F(x) = \Phi(x,y)$;

2) *для кожного* $x \in X$ *існує такий вектор* y, *що* $(x,y) \in Z$.

Тоді задачі (38.31), (38.32) і (38.33), (38.34) *еквівалентні, причому*

$$\max_{x\in X} F(x) = \max_{(x,y)\in Z} \Phi(x,y).$$

Доведення теореми 38.1 можна знайти, наприклад, у [114].

Розглянемо кілька постановок задач стохастичного програмування та наведемо їх детерміновані еквіваленти.

1. Нехай маємо одноетапну стохастичну задачу з сумісними *ймовірнісними обмеженнями*

$$F(x) = \mathbf{M}f(x,\theta) \to \max, \tag{38.35}$$

$$\mathbf{P}\{g(x,\theta) \leq 0\} \geq \alpha, \tag{38.36}$$

де $f(x,\theta)$ – задана скалярна функція, $g(x,\theta)$ – вектор-функція розмірності m, тобто $g(x,\theta) = (g_1(x,\theta),...,g_m(x,\theta))$, де $g_i(x,\theta)$ – задані скалярні функції, $i=\overline{1,m}$, $\alpha \in (0;1)$.

Позначимо через $H(y)$ сумісну функцію розподілу ймовірностей складових вектор-функції $g(x,\theta)$ для довільного вектора $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$:

$$H(y) = \mathbf{P}\{g_1(x,\theta) \leq y_1, ..., g_m(x,\theta) \leq y_m\} = \mathbf{P}\{g(x,\theta) \leq y\}.$$

Тоді стохастичній задачі (38.35), (38.36) буде відповідати наступна детермінована задача: потрібно знайти детерміновані вектори $x \in R^n$, $y \in R^m$, для яких

$$\Phi(x,y) = F(x) \to \max, \tag{38.37}$$

$$H(y) = \alpha, \ \alpha \in (0;1), \tag{38.38}$$

$$y \leq 0. \tag{38.39}$$

Т е о р е м а 38.2 (Саймондса). *Якщо сумісна функція розподілу $H(y)$ компонент випадкового вектора $g(x,\theta)$ неперервна при кожному x, то задача* (38.37)-(38.39) *еквівалентна задачі* (38.35), (38.36).

Д о в е д е н н я. Перевіримо, чи виконуються умови теореми 38.1. Нехай пара (x,y) задовольняє умови (38.38), (38.39). З рівності (38.38) слідує, що $\mathbf{P}\{g(x,\theta)\le y\}=\alpha$, а з нерівності (38.39) випливає, що $\mathbf{P}\{g(x,\theta)\le 0\}\ge\alpha$, тобто вектор x задовольняє умову (38.36). Крім того, згідно (38.37) $\Phi(x,y)=F(x)$.

Нехай тепер вектор $\bar{x}$ задовольняє умову (38.36): $\mathbf{P}\{g(\bar{x},\theta)\le 0\}\ge\alpha$ або, що те саме, $H(0)\ge\alpha$. За умовою функція розподілу $H(y)$ неперервна, тоді існує вектор $\bar{y}$ такий, що $\bar{y}\le 0$ і $H(\bar{y})=\alpha$.

Таким чином, пара $(\bar{x},\bar{y})$ задовольняє умови (38.38), (38.39). Отже всі умови теореми 38.1 виконані, а це означає, що задача (38.37)-(38.39) еквівалентна задачі (38.35), (38.36).

Відмітимо, що без додаткових умов на $H(y)$ задача (38.35), (38.36) еквівалентна такій детермінованій задачі:

$$F(x)\to\max,$$

$$H(0)\ge\alpha,\ \alpha\in(0;1).$$

2. За допомогою аналогічних міркувань будуються детерміновані еквіваленти стохастичних задач з мішаними імовірнісними обмеженнями

$$F(x)=\mathbf{M}f(x,\theta)\to\max,$$

$$\mathbf{P}\{g_i(x,\theta)\le 0\}\ge\alpha_i,\ \alpha_i\in(0;1),\ i=\overline{1,m}.$$

Позначимо через $H_i(y_i)$ функцію розподілу ймовірностей скалярної функції $g_i(x,\theta)$ при довільному y_i: $H_i(y_i)=\mathbf{P}\{g_i(x,\theta)\le y_i\}$, $i=\overline{1,m}$, і припустимо, що ці функції неперервні.

Тоді детермінований еквівалент даної задачі формулюються так:

потрібно знайти детерміновані вектори $x\in R^n$ і $y\in R^m$, для яких

$$F(x)\to\max,$$

$$H_i(y_i)=\alpha_i,\ \alpha_i\in(0;1),\ i=\overline{1,m},$$

$$y_i\le 0,\ i=\overline{1,m}.$$

Інший детермінований еквівалент має вигляд

$$F(x)\to\max,$$

$$H_i(0)\ge\alpha_i,\ \alpha_i\in(0;1),\ i=\overline{1,m}.$$

Якщо стохастична задача крім імовірнісних обмежень містить також і детерміновані умови, то вони переносяться до еквівалентної задачі без змін.

3. Розглянемо один спосіб побудови детермінованих еквівалентів стохастичних задач (див., наприклад, [37]).

Нехай задано задачу стохастичного програмування

$$F(x)=\mathbf{P}\{f(x,\theta)\le 0\}\to\max, \tag{38.40}$$

$$G_i(x)=\mathbf{P}\{g_i(x,\theta)\le 0\}\ge\alpha_i,\ \alpha_i\in(0;1),\ i=\overline{1,m}, \tag{38.41}$$

$$x\in X. \tag{38.42}$$

Припустимо, що функції $f(x,\theta)$, $g_i(x,\theta)$, $i=\overline{1,m}$, такі, що $F(x)$ і $G_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, можна подати відповідно у вигляді:

$$F(x)=\mathbf{P}\{\varphi_0(x)\le b_0(\theta)\},\ G_i(x)=\mathbf{P}\{\varphi_i(x)\le b_i(\theta)\},\ i=\overline{1,m},$$

де $\varphi_i(x)$ – функція дійсних змінних $x=(x_1,\ldots,x_n)$, а $b_i(\theta)$ – випадкова величина, яка не залежать від x, $i=\overline{0,m}$.

Нехай $H_i(z)$ – функція розподілу випадкової величини $b_i(\theta)$, тобто

$$H_i(z)=\mathbf{P}\{b_i(\theta)<z\},\ i=\overline{0,m}.$$

Оскільки $\mathbf{P}\{z\le b_i(\theta)\}=1-\mathbf{P}\{b_i(\theta)<z\}$, $i=\overline{0,m}$, то задача (38.40)-(38.42) рівносильна задачі

$$F(x)=1-H_0(\varphi_0(x))\to\max, \tag{38.43}$$

$$G_i(x)=1-H_i(\varphi_i(x))\ge\alpha_i,\ \alpha_i\in(0;1),\ i=\overline{1,m}, \tag{38.44}$$

$$x\in X. \tag{38.45}$$

Задача (38.43)-(38.45) є детермінованим еквівалентом стохастичної задачі (38.40)-(38.42).

Оскільки функції $H_i(z)$, $i=\overline{0,m}$, неспадні, то задача (38.43)-(38.45) рівносильна задачі:

$$\varphi_0(x)\to\min, \tag{38.46}$$

$$\varphi_i(x)\le b_i,\ i=\overline{1,m}, \tag{38.47}$$

$$x\in X, \tag{38.48}$$

де $b_i\in R^1$ – найбільше число b, яке задовольняє умову

$$1-\alpha_i\ge H_i(b),$$

$\alpha_i\in(0;1)$, $i=\overline{1,m}$.

Задача (38.46)-(38.48) є звичайною задачею математичного програмування.

4. Використовуючи розглянутий вище спосіб побудови детермінованих еквівалентів стохастичних задач, більш детально зупинимося на його реалізації для розв'язування лінійної стохастичної задачі з імовірнісними обмеженнями і детермінованою цільовою функцією (див., наприклад, [99]):

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \qquad (38.49)$$

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)x_j \le b_i(\theta)\right\} \ge 1-\alpha_i,\ i=\overline{1,m}, \qquad (38.50)$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}, \qquad (38.51)$$

де всі $a_{ij}(\theta)$, $b_i(\theta)$ – випадкові величини і $\alpha_i \in (0;1)$, $i=\overline{1,m}$. При цьому будемо вважати, що всі випадкові параметри є незалежними випадковими величинами з нормальними розподілами ймовірностей, з відомими математичними сподіваннями і дисперсіями: $\mathbf{M}a_{ij}$, $\mathbf{D}a_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, $\mathbf{M}b_i$, $\mathbf{D}b_i$, $i=\overline{1,m}$.

Спочатку розглянемо випадок, коли всі $a_{ij}(0)$ – незалежні випадкові величини з нормальними розподілами ймовірностей, для яких відомі $\mathbf{M}a_{ij}$, $\mathbf{D}a_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, а b_i – детерміновані величини.

Розглянемо одне з імовірнісних обмежень виду (38.50)

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)x_j \le b_i\right\} \ge 1-\alpha_i. \qquad (38.52)$$

Введемо позначення

$$g_i(x,\theta)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)x_j.$$

При зроблених припущеннях випадкова величини $g_i(x,0)$ має нормальний розподіл ймовірностей з математичним сподіванням

$$\mathbf{M}g_i(x,\theta)=\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{M}a_{ij}(\theta)=\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{M}a_{ij} \qquad (38.53)$$

і дисперсією

$$\mathbf{D}g_i(x,\theta)=\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \mathbf{D}a_{ij}(\theta)=\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \mathbf{D}a_{ij}. \qquad (38.54)$$

Замість випадкової величини $g_i(x,\theta)$ розглянемо нормовану випадкову величину з нормальним розподілом ймовірностей:

$$\phi_i(x,\theta)=\frac{g_i(x,\theta)-\mathbf{M}g_i(x,\theta)}{\sqrt{\mathbf{D}g_i(x,\theta)}},$$

для якої $\mathbf{M}\phi_i(x,\theta)=0$ і $\mathbf{D}\phi_i(x,\theta)=1$ (див., наприклад, [25]).

Тоді з (38.52) маємо

$$\mathbf{P}\{g_i(x,\theta)\le b_i\}=\mathbf{P}\left\{\phi_i(x,\theta)\le \frac{b_i-\mathbf{M}g_i(x,\theta)}{\sqrt{\mathbf{D}g_i(x,\theta)}}\right\}\ge 1-\alpha_i,$$

або

$$\mathbf{P}\{g_i(x,\theta)\le b_i\}=\Phi\left(\frac{b_i-\mathbf{M}g_i(x,\theta)}{\sqrt{\mathbf{D}g_i(x,\theta)}}\right)\ge 1-\alpha_i, \qquad (38.55)$$

де через Φ позначено функцію нормального розподілу ймовірностей з параметрами $a=0,\sigma=1$, тобто $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

Нехай β_i – значення випадкової величини з нормальним розподілом ймовірностей, яке задовольняє рівняння

$$\Phi(\beta_i)=1-\alpha_i. \qquad (38.56)$$

Оскільки функція Φ неспадна, то нерівність (38.55) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{b_i-\mathbf{M}g_i(x,\theta)}{\sqrt{\mathbf{D}g_i(x,\theta)}}\ge \beta_i.$$

Звідси, з урахуванням (38.53) і (38.54), одержуємо детерміноване нелінійне обмеження, яке еквівалентне імовірнісному обмеженню (38.52):

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{M}a_{ij}+\beta_i\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \mathbf{D}a_{ij}}\le b_i.$$

Тоді стохастична задача (38.49)-(38.51) буде детермінованою задачею нелінійного програмування виду

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \qquad (38.57)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{M}a_{ij}+\beta_i\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \mathbf{D}a_{ij}}\le b_i,\ i=\overline{1,m}, \qquad (38.58)$$

$$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,n}, \qquad (38.59)$$

де β_i – значення випадкової величини з нормальним розподілом ймовірностей, яке задовольняє рівняння (38.56), $i=\overline{1,m}$.

Тепер розглянемо випадок, коли в (38.50) всі $b_i(\theta)$ – незалежні випадкові величини з нормальним розподілом ймовірностей, для яких відомі $\mathbf{M}b_i$, $\mathbf{D}b_i$, $i=\overline{1,m}$, і a_{ij} – детерміновані величини. Аналіз цієї ситуації проводиться аналогічно до попереднього випадку.

Розглянемо, наприклад, імовірнісне обмеження виду

$$\mathbf{P}\left\{b_i(\theta)\ge \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right\}\ge 1-\alpha_i. \qquad (38.60)$$

Тоді, як і у попередньому випадку, маємо

$$\mathbf{P}\left\{b_i(\theta)\ge \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right\}=\mathbf{P}\left\{\frac{b_i(\theta)-\mathbf{M}b_i(\theta)}{\sqrt{\mathbf{D}b_i(\theta)}}\ge \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j-\mathbf{M}b_i(\theta)}{\sqrt{\mathbf{D}b_i(\theta)}}\right\}\ge 1-\alpha_i.$$

Це обмеження має місце лише при виконанні нерівності

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \mathbf{M}b_i(\theta)}{\sqrt{\mathbf{D}b_i(\theta)}} \le \beta_i, \qquad (38.61)$$

де β_i – значення випадкової величини з нормальним розподілом ймовірностей, яке задовольняє рівняння

$$\Phi(\beta_i) = 1 - \alpha_i, \qquad (38.62)$$

при цьому

$$\mathbf{P}\left\{b_i(\theta) \ge \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}\right\} = \Phi\left(\frac{b_i - \mathbf{M}b_i(\theta)}{\sqrt{\mathbf{D}b_i(\theta)}}\right),$$

Φ – функція нормального розподілу ймовірностей випадкової величини з параметрами $a = 0, \sigma = 1$.

Тоді, враховуючи, що $\mathbf{M}b_i(\theta) = \mathbf{M}b_i$ і $\mathbf{D}b_i(\theta) = \mathbf{D}b_i$, з (38.61) для імовірнісного обмеження (38.60) будемо мати еквівалентне детерміноване лінійне обмеження

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le \mathbf{M}b_i + \beta_i\sqrt{\mathbf{D}b_i}\ . \qquad (38.63)$$

Нарешті припустимо, що всі $a_{ij}(\theta)$, $b_i(\theta)$ – незалежні випадкові величини з нормальним розподілом ймовірностей з відомими математичними сподіваннями і дисперсіями: $\mathbf{M}a_{ij}$, $\mathbf{D}a_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, $\mathbf{M}b_i$, $\mathbf{D}b_i$, $i = \overline{1,m}$.

Запишемо нерівність

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)x_j \le b_i(\theta)$$

в обмеженнях (38.50) у вигляді

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)x_j - b_i(\theta) \le 0\,.$$

Оскільки розподіли ймовірностей незалежних випадкових величин $a_{ij}(\theta)$, $b_i(\theta)$ нормальні, то і випадкова величина $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)x_j - b_i(\theta)$ також має нормальний розподіл ймовірностей. Звідси випливає, що цей випадок подібний до першого випадку і може розглядатися аналогічно.

П р и к л а д 38.7. Нехай задано задачу стохастичного програмування

$$f(x) = 10x_1 + 7x_2 + 3x_3 \to \max,$$

$$\mathrm{P}\{4x_1 + 5x_2 + x_3 \le b_1\} \ge 0{,}9,$$

$$\mathrm{P}\{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le 5\} \ge 0{,}95,$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3},$$

де параметр b_1 – випадкова величина з нормальним розподілом ймовірностей, $\mathbf{M}\{b_1\} = 5$, $\mathbf{D}\{b_1\} = 9$, a_{21} a_{22}, a_{23} – незалежні випадкові величини з нормальним розподілом ймовірностей з такими значеннями математичних сподівань і дисперсій:

$$\mathbf{M}\{a_{21}\} = 2, \mathbf{M}\{a_{22}\} = 4, \mathbf{M}\{a_{23}\} = 10,\ \ \mathbf{D}\{a_{21}\} = 20, \mathbf{D}\{a_{22}\} = 11, \mathbf{D}\{a_{23}\} = 9\,.$$

Для заданої задачі стохастичного програмування побудувати детерміновану задачу математичного програмування.

Р о з в'я з у в а н н я. З рівнянь

$$\Phi(\beta_1) = 0{,}9 = 1 - 0{,}1,\ \Phi(\beta_2) = 0{,}95 = 1 - 0{,}05$$

(див. (38.62) і (38.56)), використовуючи таблицю значень функції нормального розподілу ймовірностей з параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$ $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ (див., наприклад, [99]), знаходимо $\beta_1 \approx 1{,}285$, $\beta_2 \approx 1{,}645$.

Тоді перше обмеження задачі згідно (38.63) буде еквівалентне детермінованому обмеженню

$$4x_1 + 5x_2 + x_3 \le 5 + 1{,}285\cdot\sqrt{9} \ \text{ або }\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 \le 8{,}855,$$

а друге обмеження згідно (38.58) буде еквівалентне детермінованому обмеженню

$$2x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 1{,}645\cdot\sqrt{20x_1^2 + 11x_2^2 + 9x_3^2} \le 5\,.$$

Отже, поставлена задача стохастичного програмування буде еквівалентна такій детермінованій задачі нелінійного програмування

$$f(x) = 10x_1 + 7x_2 + 3x_3 \to \max,$$

$$4x_1 + 5x_2 + x_3 \le 8{,}855,$$

$$2x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 1{,}645\cdot\sqrt{20x_1^2 + 11x_2^2 + 9x_3^2} \le 5,$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Основним недоліком непрямих методів є дуже велика розмірність детермінованих задач, які одержуються в результаті заміни на них стохастичних задач. Не дивлячись на різноманітність непрямих методів, вони не мають універсального значення і застосовні лише у спеціальних випадках.

Більш детально непрямі методи розглянуто, наприклад, в [37] і [114].

6. Прямі методи стохастичного програмування. В основі прямих методів стохастичного програмування лежить використання доступних даних про цільову функцію і функції, які описують обмеження задачі, для побудови ітеративної процедури, за якою отримуються послідовні наближення, що за певних умов збігаються до оптимального розв'язку. Такі дані можна одержати, наприклад, за допомогою імітаційних моделей, які дають можливість змоделювати незалежні спостереження за параметром θ і обчислити необхідні значення функцій, що входять до умови задачі. Розглянемо прямі методи, які призначені для розв'язування екстремальних задач, зокрема стохастичного програмування, з негладкими опуклими цільовими функціями і функціями обмежень в умовах неточної інформації про ці функції і/або їх субградієнти. Ці методи, які одержали назву *методи стохастичних квазіградієнтів*, тісно пов'язані з методами розв'язування задач недиференційовної опуклої оптимізації (див. §§31-34). Але внаслідок того, що в задачах стохастичного програмування обчислення субградієнтів функцій, що методах використовують не субградієнти (антисубградієнти), а деякі більш доступні з обчислювальної точки зору випадкові напрями. Зокрема такими напрямами руху є стохастичні субградієнти (антисубградієнти) і стохастичні квазіградієнти (антиквазіградієнти).

Нехай задана опукла функція $f(x)$, яка визначена на R^n.

Означення 38.2. *Стохастичним субградієнтом* функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$ називається випадковий вектор $\xi=(\xi_1,...,\xi_n)$, математичне сподівання якого співпадає з субградієнтом функції $f(x)$ в точці $x^{(0)}$, тобто

$$\mathbf{M}\xi = g(x^{(0)}), \qquad (38.64)$$

де

$$g(x^{(0)}) \in \partial f(x^{(0)}) = \{g \in R^n \mid f(x) - f(x^{(0)}) \geq \langle g, x - x^{(0)} \rangle \ \forall x \in R^n\}.$$

У більшості випадків точка $x^{(0)}$, в якій відшукується стохастичний субградієнт, є випадковою. Тоді в (38.64) математичне сподівання треба замінити на умовне математичне сподівання вектора ξ відносно випадкового вектора $x^{(0)}$

$$\mathbf{M}(\xi / x^{(0)}) = g(x^{(0)}). \qquad (38.65)$$

У §16 було показано що, якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці $x^{(0)}$, то її субградієнт у цій точці співпадає з градієнтом, а отже стохастичний субградієнт співпадає з стохастичним градієнтом.

З (38.65) випливає, що субградієнт являє собою деяку незміщену оцінку стохастичного субградієнта. При розв'язуванні деяких нелінійних стохастичних задач виникає потреба розширити поняття субградієнта, щоб допустити можливість певного зміщення. Узагальненням поняття стохастичного субградієнта у цьому розумінні є стохастичний квазіградієнт.

Нехай задано деякий імовірнісний простір $(\Theta,\Sigma,\mathbf{P})$ і набір випадкових величин $x^{(0)}, x^{(1)}, ..., x^{(k)}$.

Означення 38.3. *Стохастичним квазіградієнтом* опуклої на R^n функції $f(x)$ в точці $x^{(k)}$ називається випадковий вектор $\xi^{(k)}$, для якого

$$\mathbf{M}(\xi^{(k)} / x^{(0)},...,x^{(k)}) = a_k g(x^{(k)}) + b^{(k)}, \qquad (38.66)$$

де вектор $g(x^{(k)}) \in \partial f(x^{(k)})$, a_k – невід'ємна випадкова величина, $b^{(k)} = (b_1^{(k)},...,b_n^{(k)})$ – випадковий вектор, які вимірні відносно σ-підалгебри B_k, що індукована набором випадкових величин $x^{(0)}, x^{(1)}, ..., x^{(k)}$.

Вектор $\xi^{(k)}$, що задовольняє (38.66), з точністю до a_k, $b^{(k)}$, в середньому співпадає з субградієнтом $g(x^{(k)})$. Якщо $a_k \equiv 1$, $b^{(k)} \equiv O_n$, то вектор $\xi^{(k)}$ співпадає з стохастичним субградієнтом.

Наведемо приклад вектора $\xi^{(k)}$, який задовольняє (38.66). Нехай

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x),$$

де $f_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, – неперервно диференційовні функції, $f_i'(x)$ – градієнт функції $f_i(x)$, при цьому $f'(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i'(x)$. Оберемо з ймовірністю $\frac{1}{m}$ при $x = x^{(k)}$ одне з чисел $i = 1,...,m$ і позначимо обране число i_k. Тоді для вектора $\xi^{(k)} = f_{i_k}'(x^{(k)})$ маємо

$$\mathbf{M}(\xi^{(k)} / x^{(k)}) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f_i'(x^{(k)}) = \frac{1}{m} f'(x^{(k)}).$$

Метод проекції стохастичних квазіградієнтів. Розглянемо метод стохастичних квазіградієнтів, який є певним узагальненням методу проекції субградієнта (див. §34) для розв'язування задачі

$$f(x) \to \min, \qquad (38.67)$$

$$x \in X, \qquad (38.68)$$

де $f(x)$ – опукла на R^n функція, $X \subseteq R^n$ – опукла і замкнена множина. Припустимо, що при розв'язуванні даної задачі не можна точно обчислити субградієнти функції $f(x)$, але можна визначити вектори, які будуть їх статистичними оцінками.

Позначимо через $P_{\mathbf{X}}(y)$ оператор проектування довільної точки $y \in R^n$ на множину X (див. §12). Результатом дії оператора проектування точки y буде або сама ця точка, якщо вона належить множині X, або точка x з множини X, відстань від якої до точки y буде найменшою. При цьому, якщо множина X опукла і замкнена, то така точка існує і єдина (див. теорему 12.1).

Нехай $x^{(0)} \in X$ – деяке початкове наближення до розв'язку задачі (38.67), (38.68).

У методі проекції стохастичного квазіградієнта наступна точка наближення до розв'язку задачі (38.67), (38.68) обирається за правилом:

$$x^{(k+1)} = P_X(x^{(k)} - h_k \gamma_k \xi^{(k)}),\ k = 0,1,2,..., \qquad (38.69)$$

де $h_k > 0$ – кроковий множник, γ_k – нормуючий множник, $\xi^{(k)}$ – стохастичний квазіградієнт (див. означення 38.3).

При практичній реалізації ітераційний процес (38.69) методу проекції стохастичного квазіградієнта доцільно завершувати при виконанні умови $\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| < \varepsilon$, де параметр $\varepsilon > 0$ визначає точність розв'язування задачі (38.67), (38.68). При цьому покладають $x^* \approx x^{(k)}$, $f^* \approx f(x^{(k)})$.

З'ясуємо за яких умов на h_k, γ_k, $\xi^{(k)}$ послідовні наближення, одержані за методом (38.69), збігаються до розв'язку задачі (38.67), (38.68). При цьому зауважимо, що послідовні випадкові вектори $\{x^{(k)}\}$, які генеруються за правилом (38.69), можуть збігатися до розв'язку задачі (38.67), (38.68) по-різному.

Розглянемо основні види збіжності послідовності випадкових векторів $\{\xi^{(k)}(\omega)\}$ до деякого випадкового вектора $\xi^*(\omega)$ (див., наприклад, [25]).

О з н а ч е н н я 38.4. Послідовність випадкових векторів $\{\xi^{(k)}(\omega)\}$ збігається до випадкового вектора $\xi^*(\omega)$:

1) *з ймовірністю* 1 (майже напевне) і позначається $\xi^{(k)} \xrightarrow{\text{м.н.}} \xi^*$, якщо $\lim\limits_{k\to\infty} \xi^{(k)}(\omega) \to \xi^*(\omega)$ для майже всіх $\omega \in \Omega$ за мірою $\mathbf{P}$;

2) *за ймовірністю* і позначається $\xi^{(k)} \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\{\|\xi^{(k)} - \xi^*\| > \varepsilon\} = 0;$$

3) *у середньому квадратичному* і позначається $\xi^{(k)} \xrightarrow{\text{с.к.}} \xi^*$, якщо

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{M}\|\xi^{(k)} - \xi^*\|^2 = 0.$$

В [37] сформульована і доведена наступна теорема про збіжність послідовності векторів $\{x^{(k)}\}$, отриманих за правилом (38.69), де випадковий вектор $\xi^{(k)}$ визначається співвідношенням (38.66).

Т е о р е м а 38.3. *Нехай $\eta_k(\omega)$ – випадкова величина, вимірна відносно σ-підалгебри B_k, індукованої набором величин $(x^{(0)},\dots,x^{(k)})$, така, що для будь-якого числа $L < \infty$ знайдеться таке число $C_L < \infty$, що*

$$\mathbf{M}(\|\xi^{(k)}\|^2 / x^{(0)},\dots,x^{(k)}) \le \eta_k^2 \le C_L$$

при $\|x^{(i)}\| \le L$, $i = 0,1,\dots,k$; нормуючий множник γ_k для деяких чисел $\underline{\gamma}$, $\overline{\gamma}$ задовольняє умову

$$0 < \underline{\gamma} \le \gamma_k(\eta_k + \tau_k\|x^{(k)}\|) \le \overline{\gamma} < \infty,$$

де $\tau_k = 1$ при $\|b^{(k)}\| > 0$, $\tau_k = 0$ при $\|b^{(k)}\| = 0$; величини h_k, a_k, $b^{(k)}$ такі, що

$$h_k \ge 0,\ a_k \ge 0,\ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{M}(h_k\|b^{(k)}\| + h_k^2) < \infty,\ \sum_{k=0}^{\infty} h_k a_k = \infty.$$

Тоді послідовність $\{x^{(k)}(\omega)\}$ збігається до деякого вектора $x^*(\omega) \in X^*$ з імовірністю 1, *де $X^* = \{x^* \in R^n \mid x^* = \arg\min\limits_{x\in X} f(x)\}$ – множина розв'язків задачі* (38.67), (38.68).

Розглянемо приклади знаходження стохастичних квазіградієнтів для деяких класів функцій, які наведено в [37].

1. Нехай значення цільової функції $f(x)$ в задачі (38.67), (38.68) обчислюється точно для будь-яких $x \in X$, але обчислення субградієнта або градієнта цієї функції є недоцільним через велику кількість обчислень значень функції або через складність знаходження їх аналітичного виду, що призводить до швидкого накопичення похибки обчислень. При вище наведених недоліках доцільним є перехід від субградієнта до квазіградієнта.

Розглянемо вектор $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)$ з незалежними координатами з рівномірними розподілами ймовірностей їх значень на $[-1;1]$ і покладемо

$$\xi^{(k)} = \sum_{i=1}^{T_k} \frac{f(x^{(k)} + \Delta_k\beta^{(k_i)}) - f(x^{(k)})}{\Delta_k}\beta^{(k_i)}, \tag{38.70}$$

де $\beta^{(k_i)}$, $i = \overline{1,T_k}$, – серія незалежних спостережень вектора β на k-ій ітерації, причому $T_k \ge 1$, $\Delta_k > 0$. Випадкові величини T_k, Δ_k скрізь передбачаються вимірними відносно σ-підалгебри B_k, індукованої набором величин $(x^{(0)},\dots,x^{(k)})$. При цьому можна довести виконання співвідношення (38.66).

Отже для мінімізації функції $f(x)$ можна використати метод (38.69), в якому величина $\xi^{(k)}$ обчислюється за формулою (38.70). В даній процедурі величини h_k, Δ_k, T_k потрібно добирати так, щоб $h_k \ge 0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} h_k\gamma_k = \infty$ з ймовірністю 1, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbf{M}(h_k\Delta_k + h_k^2) < \infty$. Величини γ_k досить добирати так, щоб $\underline{\gamma} \le \gamma_k\|\xi^{(k)}\| \le \overline{\gamma}$, де $\underline{\gamma} > 0$ і $\overline{\gamma} < +\infty$ – деякі константи. Зокрема можна взяти $h_k = \dfrac{1}{k+1}$, $\Delta_k = \dfrac{1}{k+1}$.

2. Нехай $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{r} p_j f_j(x)$, де $p_j \ge 0$, $\sum\limits_{j=1}^{r} p_j = 1$, $f_j(x)$ – двічі неперервно-диференційовні функції, $j = \overline{1,r}$. Розглянемо випадкову величину α, яка набуває значень 1, 2, ..., r з ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_r$. Нехай α_k – реалізація випадкової величини α на k-ій ітерації, що визначає одну з функцій $f_j(x)$, тобто $j = \alpha_k$. Тоді вектор

$$\xi^{(k)} = \sum_{i=1}^{T_k} \frac{f_{\alpha_k}(x^{(k)} + \Delta_k\beta^{(k_i)}) - f_{\alpha_k}(x^{(k)})}{\Delta_k}\beta^{(k_i)}, \tag{38.71}$$

де $T_k \ge 1$, $\Delta_k > 0$, є стохастичним квазіградієнтом функції $f(x)$.

3. Досі розглядались детерміновані задачі нелінійного програмування, а елементи «стохастики» в них створювались штучно лише для знаходження вектора $\xi^{(k)}$. Але використання стохастичних квазіградієнтів є особливо ефективним в стохастичних екстремальних задачах, коли випадковий характер вектора $\xi^{(k)}$ може бути пов'язаний як з випадковою природою самої задачі, так і з штучними причинами. Це обумовлено тим, що обчислення стохастичного квазіградієнта або стохастичного субградієнта відбувається значно простіше, ніж обчислення субградієнта. Дійсно, розглянемо функцію

$$F(x) = \mathbf{M}f(x,\theta), \qquad (38.72)$$

де $f(x,\theta)$ – опукла на R^n функція за змінною x при кожному θ. Використовуючи означення 14.3 опуклої функції і властивості математичного сподівання, можна показати, що $F(x)$ також опукла функція. Тому можна говорити про субградієнт функції $F(x)$ в деякій точці $x^{(k)}$. За означенням 16.1 субградієнт $g(x^{(k)},\theta)$ функції $f(x,\theta)$ в точці $x^{(k)}$ при кожному θ задовольняє нерівність

$$f(x,\theta) - f(x^{(k)},\theta) \geq \langle g(x^{(k)},\theta), x - x^{(k)} \rangle \quad \forall x \in R^n.$$

Визначаючи математичне сподівання обох частин нерівності, одержимо

$$F(x) - F(x^{(k)}) \geq \langle \mathrm{M}g(x^{(k)},\theta), x - x^{(k)} \rangle \quad \forall x \in R^n,$$

тобто субградієнтом функції $F(x)$ в точці $x^{(k)}$ є вектор

$$G(x^{(k)}) = \mathbf{M}g(x^{(k)},\theta).$$

Якщо точка $x^{(k)}$ випадкова, то

$$G(x^{(k)}) = \mathbf{M}(g(x^{(k)},\theta)/x^{(k)}).$$

Тоді, згідно означення 38.2 стохастичного субградієнта маємо

$$\xi^{(k)} = g(x^{(k)},\theta^{(k)}), \qquad (38.73)$$

де $\theta^{(k)}$ – незалежне спостережене значення параметра θ. Отже, за умови існування необхідних математичних сподівань стохастичний субградієнт функції $F(x)$ дорівнює математичному сподіванню субградієнта функції $f(x,\theta)$. Щоб обчислити субградієнт функції $f(x,\theta)$ в точці $x^{(k)}$ при даному $\theta^{(k)}$, досить за допомогою генератора випадкових чисел змоделювати $\theta^{(k)}$ і при даному $\theta^{(k)}$ застосувати до $f(x^{(k)},\theta^{(k)})$ формули обчислення субградієнтів (див. §16).

Зауважимо, що якщо в функції $F(x)$ виду (38.72) можна здійснювати диференціювання під знаком математичного сподівання, то в (38.73) в якості $g(x^{(k)},\theta^{(k)})$ можна взяти або $f'_x(x^{(k)},\theta^{(k)})$ – градієнт функції $f(x,\theta^{(k)})$ (за змінною x) в точці $x^{(k)}$ при фіксованому $\theta^{(k)}$, або покласти (див. (38.70))

$$\xi^{(k)} = \sum_{i=1}^{T_k} \frac{f(x^{(k)} + \Delta_k \beta^{(k_i)},\theta) - f(x^{(k)},\theta)}{\Delta_k} \beta^{(k_i)}.$$

Враховуючи (38.73), для стохастичної задачі

$$F(x) = \mathbf{M}f(x,\theta) \to \min, \qquad (38.74)$$

$$x \in X, \qquad (38.75)$$

де $f(x,\theta)$ – опукла на R^n функція, множина X – опукла, замкнена і обмежена множина, на яку досить просто виконувати операцію проектування, рекурентне співвідношення методу проекції стохастичних квазіградієнтів (38.69) буде мати такий вигляд

$$x^{(k+1)} = P_X(x^{(k)} - h_k \gamma_k g(x^{(k)},\theta^{(k)})), \; k = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (38.76)$$

П р и к л а д 38.8. Зробити два кроки методу проекції стохастичних квазіградієнтів для розв'язування задачі вибору оптимального рівня виробництва (див. приклад 38.1):

$$F(x) = cx + \mathbf{M}(d^+ y^+(x,\theta) + d^- y^-(x,\theta)) \to \min, \qquad (38.77)$$

$$x \geq 0, \qquad (38.78)$$

де

$$y^+(x,\theta) = \max\{0; x - \theta\}, \;\; y^-(x,\theta) = \max\{0; \theta - x\}, \qquad (38.79)$$

x – обсяг виробництва продукції, θ – попит на неї, c – витрати на виробництво одиниці продукції, $d^+ > 0$ – питомі видатки, пов'язані з надлишком продукції, $d^- > 0$ – питомі видатки, пов'язані з дефіцитом продукції.

Р о з в ' я з у в а н н я. Спочатку знайдемо загальний вигляд стохастичного субградієнта $\xi^{(k)}$ для цільової функції $F(x)$ в деякій точці $x^{(k)}$. Враховуючи властивості математичного сподівання, функцію $F(x)$ можна записати так

$$F(x) = \mathbf{M}(cx + d^+ y^+(x,\theta) + d^- y^-(x,\theta)).$$

Тоді згідно (38.72) і (38.73) треба знайти субградієнт $g(x^{(k)},\theta)$ функції

$$f(x,\theta) = cx + d^+ y^+(x,\theta) + d^- y^-(x,\theta)$$

в точці $x^{(k)}$ при фіксованому θ.

Оскільки в умовах задачі функція $f(x,\theta)$ опукла за змінною x, то для знаходження загального вигляду її субградієнта $g(x^{(k)},\theta)$ скористаємось правилами обчислення субдиференціалів опуклих функції (див. §§16, 17). Згідно теореми 17.3 будемо мати:

$$\partial f(x^{(k)},\theta) = \partial f_1(x^{(k)},\theta) + \partial f_2(x^{(k)},\theta) + \partial f_3(x^{(k)},\theta), \qquad (38.80)$$

де

$$f_1(x,\theta) = f_1(x) = cx, \;\; f_2(x,\theta) = d^+ \max\{0; x - \theta\} = \begin{cases} 0, & x < \theta, \\ d^+(x - \theta), & x \geq \theta, \end{cases}$$

$$f_3(x,\theta) = d^- \max\{0; \theta - x\} = \begin{cases} d^-(\theta - x), & x < \theta, \\ 0, & x \geq \theta, \end{cases}$$

$$\partial f_1(x,\theta)=f_1'(x)=c\,,\quad \partial f_2(x,\theta)=\begin{cases}\{0\}, & x<\theta,\\ [0;d^+], & x=\theta,\\ \{d^+\}, & x>\theta,\end{cases}\quad \partial f_3(x,\theta)=\begin{cases}\{-d^-\}, & x<\theta,\\ [-d^-;0], & x=\theta,\\ \{0\}, & x\geq\theta.\end{cases}$$

Звідси з врахуванням (38.80) одержуємо

$$\partial f(x,\theta)=\begin{cases}\{c-d^-\}, & x<\theta,\\ c+[-d^-;d^+], & x=\theta,\\ \{c+d^+\}, & x>\theta.\end{cases}\qquad(38.81)$$

Враховуючи (38.81), за методом проекції стохастичних квазіградієнтів (38.69), (38.66) при $a_k\equiv 1$, $b^{(k)}\equiv O_n$, знайдемо, що вектор $\xi^{(k)}$ співпадає з стохастичним субградієнтом, який є вектором з множини $\partial f(x,\theta)$. Для визначеності за вектор $\xi^{(k)}$ оберемо, наприклад, вектор

$$\xi^{(k)}=\begin{cases}c-d^-, & x<\theta,\\ c, & x=\theta,\\ c+d^+, & x>\theta.\end{cases}\qquad(38.82)$$

Нехай ймовірності значень параметра θ рівномірно розподілені на інтервалі $[a;b]$. Тоді реалізації $\theta^{(k)}$ можна обчислити за формулою

$$\theta^{(k)}=a+(b-a)\eta_k,\qquad(38.83)$$

де η_k – незалежні реалізації випадкової величини з рівномірним розподілом ймовірностей на інтервалі $[0;1]$. Значення η_k можна одержати, наприклад, за допомогою генератора випадкових (псевдовипадкових) чисел.

Покладемо для визначеності $c=7$, $d^+=5$, $d^-=8$, $[a;b]=[6;12]$, $x^{(0)}=10$. З (38.82) випливає, що

$$\mathrm{M}(\|\xi^{(k)}\|^2/x^{(0)},....,x^{(k)})\leq const\,.\qquad(38.84)$$

Якщо врахувати, що $\|b^{(k)}\|=0$, то з умов теореми 38.3 і співвідношення (38.84) в (38.69) одержимо $\gamma_k\equiv 1$, при цьому кроковий множник h_k будемо визначати за правилом $h_k=\dfrac{1}{k+1}$. Нехай на 0-й ітерації незалежна реалізація випадкової величини η_0 з рівномірним розподілом ймовірностей на проміжку $[0;1]$ дорівнює 0,69313. Тоді згідно формули (38.83)

$$\theta^{(0)}=6+(12-6)\cdot 0{,}69313=6+4{,}15878=10{,}15878,$$

при цьому

$$f(x^{(0)},\theta^{(0)})=7\cdot 10+5\cdot\max\{0;10-10{,}15878\}+8\cdot\max\{0;10{,}15878-10\}=$$
$$=70+5\cdot 0+8\cdot 0{,}15878=71{,}27024.$$

Оскільки $x^{(0)}=10<\theta^{(0)}=10{,}15878$, то з урахуванням (38.82) одержимо

$$\xi^{(0)}=c-d^-=7-8=-1.$$

Зауважимо, що при $X=\{x\in R^1\,|\,x\geq 0\}$ проекція будь-якої точки $y\in R^1$ на множину X визначається співвідношенням $P_X(y)=\max\{0;y\}$. Тоді, враховуючи, що $\gamma_0=1$, $h_0=1$, $\xi^{(0)}=-1$, з (38.69) знаходимо

$$x^{(1)}=P_X(x^{(0)}-h_0\gamma_0\xi^{(0)})=P_X(10-1\cdot 1\cdot(-1))=\max\{0;11\}=11.$$

Аналогічно на 1-й ітерації при $\eta_1=0{,}39743$ одержуємо:

$$\theta^{(1)}=6+(12-6)\cdot 0{,}39743=6+2{,}38458=8{,}38458,$$
$$f(x^{(1)},\theta^{(1)})=7\cdot 11+5\cdot\max\{0;11-8{,}38458\}+8\cdot\max\{0;8{,}38458-11\}=$$
$$=77+5\cdot 2{,}61542+8\cdot 0=77+13{,}0771=90{,}0771,$$

оскільки $x^{(1)}=11>\theta^{(1)}=8{,}38458$, то $\xi^{(1)}=c+d^+=7+5=12$,

$$x^{(2)}=P_X(x^{(1)}-h_1\gamma_1\xi^{(1)})=P_X(11-0{,}5\cdot 1\cdot 12)=\max\{0;5\}=5.$$

При $\eta_2=0{,}54036$ $\theta^{(2)}=6+(12-6)\cdot 0{,}54036=6+3{,}24216=9{,}24216$ і тоді

$$f(x^{(2)},\theta^{(2)})=7\cdot 5+5\cdot\max\{0;5-9{,}24216\}+8\cdot\max\{0;9{,}24216-5\}=$$
$$=35+5\cdot 0+8\cdot 4{,}24216=35+33{,}93728=68{,}93728.$$

Враховуючи, що в умовах задачі ймовірності значень випадкової величини $f(x,\theta)$ розподілені рівномірно, для трьох спостережених значень параметра θ – $\theta^{(0)},\theta^{(1)},\theta^{(2)}$ будемо мати

$$\mathbf{M}f(x,\theta)=\frac{f(x^{(0)},\theta^{(0)})+f(x^{(1)},\theta^{(1)})+f(x^{(2)},\theta^{(2)})}{3}=$$
$$=\frac{71{,}27024+90{,}0771+68{,}93728}{3}=\frac{230{,}28462}{3}=76{,}76154.$$

Стохастичний метод скорочення нев'язок. Нехай задано задачу

$$f(x)\to\min,\qquad(38.85)$$
$$g_i(x)\leq 0,\ i=\overline{1,m},\qquad(38.86)$$
$$x\in X,\qquad(38.87)$$

де $X\subseteq R^n$, функції $f(x)$, $g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, неперервні і опуклі на опуклій замкненій множині X.

Складемо для даної задачі функцію Лагранжа (див. §22)

$$L(x,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x),\qquad(38.88)$$

де $x\in X$, $\lambda\in\Lambda\subseteq R^m$, $\Lambda=\{\lambda\in R^m\,|\,\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_m),\ \lambda_i\geq 0,\ i=\overline{1,m}\}$.

Позначимо через $\hat{L}_x(x,u)$ вектор узагальненого градієнта (субградієнта) функції Лагранжа за змінними x при фіксованому $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$, де не всі $\lambda_i=0$ одночасно, а через $L_\lambda'(x,\lambda)$ – градієнт цієї функції за змінними $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ при фіксованому $x=(x_1,\ldots,x_n)$, який дорівнює $(g_1(x),\ldots,g_m(x))$.

Розглянемо ітераційний процес, який є стохастичним варіантом методу проекції градієнта Ерроу-Гурвіца (див., наприклад, [113]) відшукання сідлової точки задачі (38.85)-(38.87), коли функції $f(x)$, $g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, неперервно диференційовні. Основна ідея цього методу полягає в тому, щоб одночасно рухатися за змінними $x_1,x_2,...,x_n$ в напрямі антисубградієнта функції Лагранжа (38.88) і в напрямі градієнта за змінними $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$.

В задачах стохастичного програмування виникає необхідність у заміні субградієнтів $\hat{L}_x(x,u)$ і градієнтів $L'_\lambda(x,u)$ функції Лагранжа відповідно стохастичними субградієнтами і градієнтами.

Визначимо послідовність точок $\{(x^{(k)},\lambda^{(k)})\}$, виходячи з наступних співвідношень:

$$x^{(k+1)} = P_X(x^{(k)} - h_k\gamma_k\xi^{(k)}),\ k = 0,1,2,\dots, \quad (38.89)$$

$$\lambda^{(k+1)} = P_\Lambda(\lambda^k + h_k\gamma_k\mu^{(k)}),\ k = 0,1,2,\dots, \quad (38.90)$$

де $(x^{(0)},\lambda^{(0)})$ – довільне початкове наближення, h_k – величина кроку, γ_k – нормуючий множник, $\xi^{(k)}$ і $\mu^{(k)}$ – випадкові вектори такі, що

$$\mathbf{M}(\xi^{(k)}/(x^{(0)},\lambda^{(0)}),\dots,(x^{(k)},\lambda^{(k)})) = a_k\hat{L}_x(x^{(k)},\lambda^{(k)}) + b^{(k)}, \quad (38.91)$$

$$\mathbf{M}(\mu^{(k)}/(x^{(0)},\lambda^{(0)}),\dots,(x^{(k)},\lambda^{(k)})) = a_k L'_\lambda(x^{(k)},\lambda^{(k)}) + d^{(k)}, \quad (38.92)$$

де випадкова величина $a_k \ge 0$, а $b^{(k)}$ і $d^{(k)}$ – випадкові вектори, вимірні відносно σ–підалгебри B_k, яка індукована набором випадкових величин $(x^{(0)},\lambda^{(0)}),\dots,(x^{(k)},\lambda^{(k)})$. Припустимо, що обмеження (38.86) задовольняють умову регулярності Слейтера (22.15). Тоді функція Лагранжа (38.88) має сідлову точку (див. теорему 22.2 Куна -Таккера). Для описаного методу має місце наступна теорема збіжності (див., наприклад, [37]).

Т е о р е м а 38.4. *Нехай функція $f(x)$ строго опукла на X, $\eta_k(\omega)$ – випадкова величина, вимірна відносно σ-підалгебри B_k, індукованої величинами $(x^{(0)},\lambda^{(0)}),\dots,(x^{(k)},\lambda^{(k)})$, така, що для будь-якого числа $L < \infty$ знайдеться таке число $C_L < \infty$, що*

$$\mathbf{M}(\|\xi^k\|^2 + \|\mu^k\|^2 /(x^{(0)},\lambda^{(0)}),\dots,(x^{(k)},\lambda^{(k)})) \le \eta_k^2 \le C_L$$

при $\|\xi^{(i)}\| + \|\mu^{(i)}\| \le L$, $i = 0,1,\dots,k$; нормуючий множник γ_k для деяких чисел $\underline{\gamma}$, $\bar{\gamma}$ задовольняє умову

$$0 < \underline{\gamma} \le \gamma_k(\eta_k + \tau_k\|x^{(k)}\| + \vartheta_k\|\lambda^{(k)}\|) \le \bar{\gamma} < \infty,$$

де $\tau_k = 1$ при $\|b^{(k)}\| \ne 0$ і $\tau_k = 0$ при $\|b^{(k)}\| = 0$, $\vartheta_k = 1$ при $\|d^{(k)}\| \ne 0$ і $\vartheta_k = 0$ при $\|d^{(k)}\| = 0$; $h_k \ge 0$, $a_k \ge 0$, $\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{M}(h_k\|b^{(k)}\| + h_k\|d^k\| + h_k^2) < \infty$ і $\sum_{k=0}^{\infty} h_k a_k = \infty$ з ймовірністю 1.

Тоді майже напевне для кожного ω послідовність $\{x^{(k)}(\omega)\}$ збігається до деякого елемента $x^*(\omega) \in X^*$, де X^* – розв'язок задачі (38.85)-(38.87).

Доведення теореми можна знайти, наприклад, в [37].

Припустимо, що значення функцій $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, в задачі (38.85)-(38.87) обчислюються точно і функція Лагранжа $L(x,\lambda)$ виду (38.88) має за змінними $x_1, x_2, \dots, x_n$ другі частинні похідні, обмежені на множині X при будь-якому фіксованому $\lambda \in \Lambda$. Тоді, враховуючи (38.70), вектор $\xi^{(k)}$, який повинен задовольняти умову (38.91), можна визначити наступним чином ([37]):

$$\xi^{(k)} = \sum_{i=1}^{T_k} \frac{L(x^{(k)} + \Delta_k\beta^{(k_i)},\lambda^{(k)}) - L(x^{(k)},\lambda^{(k)})}{\Delta_k}\beta^{(k_i)},\ k = 0,1,2,\dots,$$

де $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)$ — вектор з незалежними координатами з рівномірними розподілами ймовірностей їх значень на $[-1;1]$. При цьому можна показати, що

$$\mathbf{M}(\xi^{(k)}/(x^{(k)},\lambda^{(k)})) = \frac{T_k}{3}L_x(x^{(k)},\lambda^{(k)}) + \nu^{(k)}\Delta_k,$$

де $\nu^{(k)}$ – деякий випадковий вектор, вимірний відносно B_k, причому $\|\nu^{(k)}\| \le const$, і тому в (38.85)-(38.87) за вектор $\mu^{(k)}$, який задовольняє (38.92), доцільно взяти

$$\mu^{(k)} = \frac{T_k}{3}(g_1(x^{(k)}),\dots,g_m(x^{(k)})),\ k = 0,1,2,\dots.$$

Метод стохастичної апроксимації. Розглянемо спочатку один з перших загальних прямих методів розв'язування стохастичних задач на безумовний екстремум. Нехай треба розв'язати задачу мінімізації функції регресії на всьому просторі R^n, тобто

$$F(x) = \mathbf{M}f(x,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} z\,dH(z,x) \to \min,\ x \in R^n, \quad (38.93)$$

де

$$H(z,x) = P\{f(x,\theta) < z\}.$$

Основна ідея методу стохастичної апроксимації полягає в тому, щоб при мінімізації функції $F(x)$ за напрям спуску обирати антиградієнт функції $f(x,\theta)$ замість невідомого антиградієнта $-F'(x)$ функції $F(x)$, тобто замість звичайного градієнтного методу в методах стохастичної апроксимації розглядаються ітеративні процедури пошуку, що визначаються рекурентними співвідношеннями

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - h_k f'_x(x^{(k)},\theta),\ k = 0,1,2,\dots. \quad (38.94)$$

Якщо при кожному θ градієнт $f'_x(x,\theta)$ з певних причин обчислити складно, то розглядається метод, в якому градієнт визначається чисельно,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - h_k \sum_{j=1}^{n} \frac{f(x^{(k)} + \Delta_k e^{(j)}, \theta^{(k_j)}) - f(x^{(k)}, \theta^{(k_0)})}{\Delta_k} e^{(j)}, k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{38.95}$$

де $e^{(j)}$ – орт j-ї осі, $j = \overline{1,n}$; $\theta^{(0_i)}, \theta^{(1_i)}, \ldots, \theta^{(k_i)}, \ldots$, $i = \overline{0,n}$, – незалежні серії спостережених значень параметра θ (при цьому можна вважати, що $\theta^{(k_0)} = \theta^{(k_1)} = \ldots = \theta^{(k_n)} = \theta^{(k)}$); h_k – кроковий множник; $\Delta^{(k)}$ – величина зміщення (пробний крок) вздовж осей координат.

Збіжність методу стохастичної апроксимації (38.95) як правило досліджується за умов існування, неперервності і обмеженості других частинних похідних функції $F(x)$ (див., наприклад, [16]). Можна показати, що при таких припущеннях має місце подання

$$\mathbf{M}(\xi^{(k)} / x^{(k)}) = F'(x^{(k)}) + \nu^{(k)} \Delta_k,$$

де

$$\xi^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(x^{(k)} + \Delta_k e^{(j)}, \theta^{(k_j)}) - f(x^{(k)}, \theta^{(k_0)})}{\Delta_k} e^{(j)}, \tag{38.96}$$

$\nu^{(k)}$ – деякий випадковий вектор, вимірний відносно B_k, причому $\| \nu^{(k)} \| \le const$.

Отже, метод (38.95) є частинним випадком методу проекції стохастичного квазіградієнта (38.69), (38.66), коли $X = R^n$ і $\xi^{(k)}$ визначається співвідношенням (38.96).

Припустимо, що розмірність простору R^n досить велика і при визначенні напряму спуску згідно (38.96) витрачається багато ресурсів комп'ютера і, крім того, є додаткове пряме обмеження $x \in X$, де X опукла і замкнена множина, для якої легко шукати проекцію довільної точки з R^n. Тоді аналогічно з (38.70) можна використати випадкові напрями $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ з незалежними координатами з рівномірними розподілами ймовірностей їх значень на $[-1; 1]$ і розглянути ітеративний процес

$$x^{(k+1)} = P_X\left(x^{(k)} - h_k \sum_{j=1}^{T_k} \frac{f(x^{(k)} + \Delta_k \beta^{(k_j)}, \theta^{(k_j)}) - f(x^{(k)}, \theta^{(k_0)})}{\Delta_k} \beta^{(k_j)} \right),$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{38.97}$$

де величини T_k, Δ_k, $\beta^{(k_j)}$ мають той самий смисл, що й в (38.70), $\{\theta^{(k_j)}\}$, $j = \overline{0, T_k}$, – незалежні спостережені значення параметра θ для $k = 0, 1, 2, \ldots$.

У випадку, коли функція $F(x)$ має неперервні і обмежені другі частинні похідні при $x \in X$, можна показати, що процедура (38.97) є частинним випадком методу проекції стохастичного квазіградієнта (38.69), (38.66), коли $\xi^{(k)}$ визначається співвідношенням (38.96).

$$\xi^{(k)} = \sum_{j=1}^{T_k} \frac{f(x^{(k)} + \Delta_k \beta^{(k_j)}, \theta^{(k_j)}) - f(x^{(k)}, \theta^{(k_0)})}{\Delta_k} \beta^{(k_j)},$$

при цьому

$$\mathbf{M}(\xi^{(k)} / x^{(k)}) = \frac{T_k}{3} F'(x^{(k)}) + \nu^{(k)} \Delta_k,$$

$\nu^{(k)}$ – деякий випадковий вектор, вимірний відносно B_k, причому $\| \nu^{(k)} \| \le const$. Для регулювання величин h_k T_k, Δ_k в (38.97) використовуються загальні умови теореми 38.3.

Застосовуючи метод скорочення нев'язок (38.89)-(38.92), процедуру (38.95) можна узагальнити на задачу стохастичного програмування з обмеженнями (див, наприклад, [37]):

$$F(x) = \mathbf{M} f(x, \theta) \to \min,$$

$$G_i(x) = \mathbf{M} g_i(x, \theta) \le 0, \ i = \overline{1, m},$$
$$x \in X,$$

поклавши

$$L(x, \lambda, \theta) = f(x, \theta) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x, \theta),$$

$$\Phi(x, \lambda) = \mathbf{M} L(x, \lambda, \theta),$$

де функції $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, задовольняють умови теореми 38.3.

Тоді процедура стохастичного методу скорочення нев'язок набуває вигляду

$$x^{(k+1)} = P_X\left(x^{(k)} - h_k \gamma_k \sum_{j=1}^{n} \frac{L(x^{(k)} + \Delta_k e^{(j)}, \lambda^{(k)}, \theta^{(k_j)}) - L(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, \theta^{(0_j)})}{\Delta_k} e^{(j)} \right),$$

$$\lambda^{(k+1)} = P_\Lambda(\lambda^{(k)} + h_k \gamma_k L'_\lambda(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, \theta^{(k_0)})), \ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

де $e^{(j)}$ – орт j-ї осі, $j = \overline{1, n}$; $\theta^{(0_i)}, \theta^{(1_i)}, \ldots, \theta^{(k_i)}, \ldots$, $i = \overline{0, n}$, – незалежні серії спостережених значень параметра θ (при цьому можна вважати, що $\theta^{(k_0)} = \theta^{(k_1)} = \ldots = \theta^{(k_n)} = \theta^{(k)}$); h_k – кроковий множник; $\Delta^{(k)}$ – величина зміщення (пробний крок) вздовж осей координат, $L'_\lambda(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, \theta^{(k_0)})$ – градієнт функції Лагранжа $L(x, \lambda, \theta)$ за змінними $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ в точці $\lambda^{(k)}$ при фіксованих $x^{(k)}$ і $\theta^{(k_0)}$, тобто

$$L'_\lambda(x^{(k)}, \theta^{(k_0)}) = (g_1(x^{(k)}, \theta^{(k_0)}), \ldots, g_m(x^{(k)}, \theta^{(k_0)})).$$

У наведених процедурах величини h_k і Δ_k у випадку, коли вони детерміновані, досить обирати так, щоб виконувались наступні умови:

$$h_k \geq 0,\ \sum_{k=0}^{\infty} h_k = \infty,\ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{M}(h_k \,|\, \Delta_k \,| + h_k^2) < \infty .$$

Метод стохастичних казіградієнтів можна застосувати для знаходження розв'язку двоетапної задачі (див. п.4) як з лінійними, так і нелінійними цільовою функцією та функціями-обмеженнями (див., наприклад, [37]).

Нехай задано наступну задачу стохастичного програмування:

$$F(x) = \mathbf{M} f(x, y(x,\theta), \theta) \to \min, \tag{38.98}$$

$$g_i(x, y(x,\theta), \theta) \leq 0,\ i = \overline{1,m}, \tag{38.99}$$

$$x \in X,\ y \in Y, \tag{38.100}$$

де вектор $x \in X$, $X \subseteq R^n$ – попередній план задачі, а $y \in Y$, $Y \subseteq R^r$ – його корекція при заданому θ. Тобто, задача (38.98)-(38.100) являє собою двоетапну задачу стохастичного програмування. Для знаходження її розв'язку також можна застосувати ітераційний процес (38.69), (38.66). Розглянемо два способи реалізації процесу (38.69), (38.66).

Нехай функції $f(x, y(x,\theta), \theta)$, $g_i(x, y(x,\theta), \theta)$, $i = \overline{1,m}$ при кожному θ опуклі і неперервно-диференційовні за сукупністю змінних (x, y), а також при кожному x і θ існує сідлова точка $(y^*(x,\theta), \lambda^*(x,\theta))$ функції Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y, \theta) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x, y, \theta), \tag{38.101}$$

при $y \in Y$, $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1,m}$.

Нехай $\hat{f}_{xy}(x, y(x,\theta), \theta)$, $\hat{g}_{xy}^{(i)}(x, y(x,\theta), \theta)$, $i = \overline{1,m}$ – узагальнені градієнти (субградієнти) відповідно функцій $f(x, y(x,\theta), \theta)$, $g_i(x, y(x,\theta), \theta)$, $i = \overline{1,m}$, за сукупністю змінних (x, y) при фіксованому θ. Припустимо, що такі узагальнені градієнти можуть бути подані у вигляді $\hat{f}_{xy} = (\hat{f}_x, \hat{f}_y)$, $\hat{g}_{xy}^{(i)} = (\hat{g}_x^{(i)}, \hat{g}_y^{(i)})$, де $\hat{f}_x, \hat{f}_y, \hat{g}_x^{(i)}, \hat{g}_y^{(i)}$ – узагальнені градієнти відповідно функцій $f(x, y(x,\theta), \theta)$, $g_i(x, y(x,\theta), \theta)$, $i = \overline{1,m}$, за змінними x і y, коли інші змінні фіксовані. Тоді для знаходження розв'язку задачі (38.98)-(38.100), коли множина X опукла і замкнена, за правилами процесу (38.69), (38.66) необхідно взяти

$$\xi^{(k)} = \hat{f}_x(x^{(k)}, y(x^{(k)}, \theta^{(k)}), \theta^{(k)}) + \\ + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x^{(k)}, \theta^{(k)}) \hat{g}_x^{(i)}(x^{(k)}, y(x^{(k)}, \theta^{(k)}), \theta^{(k)}), \tag{38.102}$$

де $\theta^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots$, – незалежні реалізації параметра θ. При цьому можна довести виконання співвідношення (38.65).

Якщо $f(x, y(x,\theta), \theta)$, $g_i(x, y(x,\theta), \theta)$, $i = \overline{1,m}$, мають другі частинні похідні за x, обмежені при всіх θ і $y \in Y$, тоді замість (38.102) в методі проекції стохастичних квазіградієнтів (38.69), (38.65) можна використати вектор, який визначається з наступних співвідношень (див. (38.96))

$$\xi^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{L(x^{(k)} + \Delta_k e^{(j)}, y^{(k)}, \lambda^{(k)}, \theta^{(k)}) - L(x^{(k)}, y^{(k)}, \lambda^{(k)}, \theta^{(k)})}{\Delta_k} e^{(j)},$$

або (див. (38.70))

$$\xi^{(k)} = \sum_{i=1}^{T_k} \frac{L(x^{(k)} + \Delta_k \beta^{(k_i)}, y^{(k)}, \lambda^{(k)}, \theta^{(k)}) - L(x^{(k)}, y^{(k)}, \lambda^{(k)}, \theta^{(k)})}{\Delta_k} \beta^{(k_i)},$$

де

$$L(x, y, \lambda, \theta) = f(x, y, \theta) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x, y, \theta),$$

$$y^{(k)} = y(x^{(k)}, \theta^{(k)}),\ \lambda^{(k)} = \lambda(x^{(k)}, \theta^{(k)}),\ k = 0, 1, \ldots .$$

7. Умови зупинки в методах стохастичного програмування. При практичній реалізації розглянутих ітеративних методів стохастичного програмування виникає питання про зупинку процесу, тобто: коли можна вважати, що поточна точка $x^{(k)}$ з достатньою точністю близька до деякого розв'язку x^* задачі стохастичного програмування? Нагадаємо, що для детермінованих ітеративних процедур найбільш поширеними правилами зупинки є

$$\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| < \varepsilon \text{ або } | f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)}) | < \varepsilon,$$

де $\varepsilon > 0$ – досить мале число.

Такі ж правила зупинки можна було б використовувати при досить великих k і до стохастичних ітеративних процедур, для яких забезпечується збіжність з ймовірністю 1. Але оскільки послідовні наближення $\{x^{(k)}\}$, які генеруються за цими методами, є випадковими, то обчислення за цими правила потребують надто великої кількості кроків.

На практиці правило зупинки стохастичних ітеративних процедур часто визначається таким значенням $k = k_0$, при перевищенні якого випадкові наближення $\{x^{(k)}\}$ набувають стаціонарного характеру. Для надійного визначення k_0 необхідно певним чином згладити набір $\{x^{(k)}\}$. Одна з таких можливостей полягає у використанні так званого «*ковзного*» *середнього*:

$$\bar{x}^{(k)} = \frac{1}{N_k} \sum_{i=k}^{k+N_k} x^{(i)},\ k = 0, 1, \ldots .$$

Якщо, починаючи з деякого номера m_0, для всіх $m \geq m_0$ буде виконуватися умова

$$\| \bar{x}^{(m)} - \bar{x}^{(m+1)} \| < \varepsilon,$$

де $\varepsilon > 0$ – досить мале число, то значення $k_0 = m_0$ визначає той момент, коли можна вважати, що $\mathbf{M}x^{(k_0)} \approx x^*$, при цьому для визначеності можна вважати $N_k = N$ для всіх $k = 0, 1, \ldots$, де N – деяке фіксоване число.

Зауважимо, що згладжування можна досягти й іншими методами.

В теорії стохастичного програмування розроблені стохастичні аналоги інших відомих методів детермінованої безумовної та умовної як гладкої, так і негладкої оптимізації, зокрема, стохастичний метод лінеаризації, стохастичний метод умовного градієнта, стохастичний метод можливих напрямів, стохастичні методи з усередненням стохастичних квазіградієнтів, стохастичний метод штрафів та інші (див., наприклад, [16], [28], [37], [38], [53], [70], [74], [77], [82], [114], [116]).

Запитання для самоконтролю

1. У чому полягає сутність задач стохастичного програмування?
2. Яка стохастична задача називається одноетапною?
3. Яка стохастична задача називається двоетапною?
4. Яка стохастична задача називається багатоетапною?
5. Які основні класи методів розв'язування задач стохастичного програмування існують? В чому полягає їх сутність?
6. Які основні складності виникають при розв'язуванні задач стохастичного програмування?
7. Які задачі стохастичного програмування називають перспективними?
8. Які задачі стохастичного програмування називають оперативними?
9. Як будуються детерміновані аналоги задач стохастичного програмування?
10. Що таке стохастичний субградієнт, градієнт, квазіградієнт?
11. У чому полягає сутність методу проекції стохастичних квазіградієнтів?
12. У чому полягає сутність стохастичного методу скорочення нев'язок?
13. У чому полягає сутність методу стохастичної апроксимації?
14. За яких умов зупиняють ітераційний процес в методах розв'язування задач стохастичного програмування?

Вправи для самостійного виконання

1. Довести теорему 38.1.

2. Нехай є складське приміщення для збереження деякого однорідного продукту на V т, в якому треба створити запас цього продукту x т. До початку планування немає точних відомостей про потреби в цьому продукті, але є підстави вважати величину попиту випадковою величиною θ з функцією розподілу ймовірностей $H(z) = \mathbf{P}\{\theta < z\}$. Питомі витрати, пов'язані з надлишком і дефіцитом продукції відповідно становлять d^+ у.о. і d^- у.о. Необхідно обрати такий план (рівень запасів), щоб мінімізувати очікувані витрати, пов'язані з надлишком і дефіцитом продукції з урахуванням обмеженості приміщення. Побудувати стохастичну модель цієї задачі (див. приклад 38.2).

3. Сільськогосподарське підприємство хоче вирощувати дві культури на двох ділянках площею 200 га і 150 га. Погодні умови у регіоні, де розташоване підприємство, можуть бути несприятливими ($\theta^{(1)}$), нормальними ($\theta^{(2)}$) і сприятливими ($\theta^{(3)}$). В залежності від погодних умов матриці врожайності культур на ділянках мають вигляд:

$$A(\theta^{(1)}) = \begin{pmatrix} 65 & 90 \\ 72 & 85 \end{pmatrix}; \; A(\theta^{(2)}) = \begin{pmatrix} 100 & 125 \\ 110 & 120 \end{pmatrix}; \; A(\theta^{(3)}) = \begin{pmatrix} 115 & 140 \\ 120 & 130 \end{pmatrix},$$

де $a_{ij}(\theta^{(k)})$ – врожайність (у центнерах) i-ї культури на j-й ділянці при погодних умовах $\theta^{(k)}$, $i = 1,2$, $j = 1,2$, $k = 1,2,3$. При цьому імовірності погодних умов дорівнюють

$$p_1 = \mathrm{P}(\theta = \theta^{(1)}) = 0{,}2; \; p_2 = \mathrm{P}(\theta = \theta^{(2)}) = 0{,}5; \; p_3 = \mathrm{P}(\theta = \theta^{(3)}) = 0{,}3.$$

Побудувати стохастичну математичну модель визначення оптимального плану розподілу площ під культури, при якому максимізується математичне сподівання валового збору культур з урахуванням обмеженості площ ділянок (див. приклад 38.4).

Знайти оптимальний план одержаної задачі лінійного програмування графічним способом, розбивши її на дві незалежні задачі, а також за допомогою програмних засобів типу Mathcad, Matlab, Maple, Mathematica тощо. Результати порівняти і проаналізувати.

4. Для задачі про розподіл площ під сільськогосподарські культури (приклад 38.4) оцінити розмірність моделі, якщо кількість ділянок дорівнює 10, кількість культур – 5, врожайності культур на кожній ділянці є незалежними випадковими величинами з дискретними розподілами ймовірностей, причому кількість значень, яких може набувати кожна випадкова величина, дорівнює 10.

5. Відомо, що в комерційних банках нараховується більший відсоток на вкладені суми порівняно з ощадними банками, але повернення внеску не гарантується. Перед кожним клієнтом постає дилема: мати меншу, але гарантовану суму грошей, або більшу суму, проте з ризиком втратити весь внесок. При цьому з ризиком невикористаних можливостей пов'язаний і внесок до ощадного банку.

Нехай S – загальна сума грошей у клієнта; x – обсяг внеску до ощадного банку, y – обсяг внеску до комерційного банку; a і b – відсотки нарахування відповідно в ощадному і комерційному банках; $(1-p)$ – імовірність ліквідації (банкрутства) комерційного банку. Джерелом невизначеності є повернення внеску з комерційного банку. За певного розподілу суми грошей на x і y можливі такі дві ситуації щодо отримання дивідендів:

$ax + by$ – за умов успішного фінансування комерційного банку;

$ax - y$ – у протилежному випадку.

Побудувати економіко-математичну модель розподілу коштів з метою одержання найбільших дивідендів від їх вкладення до ощадного та комерційного банків.

6. Припустимо, що в лінійній двоетапній задачі стохастичного програмування (38.23), (38.17), (38.18) множина значень параметра θ скінченна, тобто $\theta \in \{1, \ldots, N\}$ і $p_1, \ldots, p_N$ – відповідні імовірності цих значень. Записати модель двоетапної задачі стохастичного програмування для цього випадку і переконатися, що вона є задачею блочного лінійного програмування (див., наприклад, [38]).

7. Нехай задане імовірнісне обмеження

$$P\{3x_1 + \theta x_2 - 2 \le 0\} \ge 0{,}9,$$

де випадкова величина θ з імовірностями 0,5 набуває значень 1 і -1. Побудувати множину, яка визначається цією нерівністю.

8. Побудувати детермінований аналог для ймовірнісних обмежень-нерівностей виду (38.50).

9. Детерміновану задачу нелінійного програмування з прикладу 38.7 розв'язати чисельно за допомогою одного з методів умовної оптимізації (наприклад за методом зовнішніх штрафних функцій (див. §37)), а також за допомогою програмних засобів типу Mathcad, Matlab, Maple, Mathematica тощо. Результати порівняти.

10. Для заданих задач стохастичного програмування з імовірнісними обмеженнями побудувати еквівалентні детерміновані моделі:

1) $f(x) = 3x_1 + 8x_2 + x_3 \to \max$,

$$P\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le 10\} \ge 0{,}95,$$

$$P\{4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le b_2\} \ge 0{,}8,$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3},$$

де a_{11}, a_{12}, a_{13} – незалежні випадкові величини з нормальними розподілами ймовірностей з такими значеннями математичних сподівань і дисперсій:

$$\mathbf{M}\{a_{11}\} = 1, \mathbf{M}\{a_{12}\} = 3, \mathbf{M}\{a_{13}\} = 9,\ \mathbf{D}\{a_{11}\} = 25, \mathbf{D}\{a_{12}\} = 16, \mathbf{D}\{a_{13}\} = 4,$$

параметр b_2 – випадкова величина з нормальним розподілом ймовірностей, для якої $\mathbf{M}\{b_2\} = 7, \mathbf{D}\{b_2\} = 9$;

2) $f(x) = x_1 + 10x_2 + 7x_3 \to \max$,

$$P\{a_{11}x_1 + 4x_2 + a_{13}x_3 \le 7\} \ge 0{,}9,$$

$$P\{8x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le b_2\} \ge 0{,}85,$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3},$$

при цьому a_{11}, a_{13} – незалежні випадкові величини з нормальними розподілами ймовірностей з такими значеннями математичного сподівання і дисперсії:

$$\mathbf{M}\{a_{11}\} = 3, \mathbf{M}\{a_{13}\} = 6,\ \mathbf{D}\{a_{11}\} = 10, \mathbf{D}\{a_{13}\} = 15,$$

параметр b_2 – випадкова величина з нормальним розподілом ймовірностей, для якої $\mathbf{M}\{b_2\} = 16, \mathbf{D}\{b_2\} = 24$;

3) $f(x) = 3x_1 + 4x_2^2 + x_3 \to \max$,

$$P\{x_1^2 + a_2 x_2^3 + a_3\sqrt{x_3} \le 8\} \ge 0{,}95,$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3},$$

де a_2, a_3 – незалежні випадкові величини з нормальними розподілами ймовірностей з такими значеннями математичних сподівань і дисперсій:

$$\mathbf{M}\{a_2\} = 5, \mathbf{M}\{a_3\} = 3,\ \mathbf{D}\{a_2\} = 12, \mathbf{D}\{a_3\} = 20.$$

Одержані детерміновані задачі нелінійного програмування розв'язати чисельно за допомогою одного з методів умовної оптимізації (наприклад за методом зовнішніх штрафних функцій (див. §37)), а також за допомогою програмних засобів типу Mathcad, Matlab, Maple, Mathematica тощо. Результати порівняти.

11. Для чисельного розв'язування задачі про управління запасами із завдання 1 застосувати метод проекції стохастичних квазіградієнтів (див., наприклад, [116]). Для цього:

– записати у загальному вигляді стохастичний квазіградієнт;
– записати рекурентне співвідношення виду (38.69).

12. Для лінійної двоетапної задачі стохастичного програмування виду ((38.23), (38.17), (38.18)):

1) побудувати двоїсту задачу до задачі (38.20)-(38.22) (див. §24);

2) показати, що стохастичний квазіградієнт має вигляд

$$\xi = c - A^T(\theta)u(x,\theta),$$

де $u(x,\theta)$ – розв'язок двоїстої задачі при фіксованих x і θ, що відповідає розв'язку $y(x,\theta)$ прямої задачі (38.20)-(38.22);

3) описати основні етапи розв'язування лінійної двоетапної задачі за методом проекції стохастичних квазіградієнтів (38.69).

13. Для прикладу 38.8 зробити наступні 3 ітерації методу проекції стохастичних квазіградієнтів, якщо за незалежні реалізації випадкової величини з рівномірним розподілом ймовірностей на проміжку $[0;1]$ взяти $\eta_3 = 0{,}92156$, $\eta_4 = 0{,}37284$, $\eta_5 = 0{,}65771$.

§39. Методи глобальної багатоекстремальної оптимізації

Важливу роль як з теоретичного, так і з практичного боку, відіграють задачі багатоекстремальної глобальної оптимізації та методи їх розв'язування. Задачі цього класу є досить складними і вирішення їх потребує значних обчислювальних ресурсів. Тому розробка ефективних методів глобальної оптимізації є досить актуальною проблемою.

Як відмічалось у §27, побудувати ефективні чисельні методи глобальної оптимізації вдається лише для деякого досить вузького класу задач, коли на цільову функцію і допустиму множину накладені певні досить жорсткі обмеження.

Серед задач багатоекстремальної мінімізації найбільш дослідженою є задача:

$$f(x) \to \min, x \in D, \qquad (39.1)$$

де множина D є n-вимірним паралелепіпедом (*гіперпаралелепіпедом*), тобто

$$D = \{x \in R^n \mid a_j \le x_j \le b_j, j = \overline{1,n}\}, \qquad (39.2)$$

де $a_j \in R^1, b_j \in R^1$ і $a_j < b_j$, $j = \overline{1,n}$, який, за умови $b_j - a_j = const$ для всіх $j = \overline{1,n}$, називають *гіперкубом* простору R^n.

Припустимо, що задача (39.1) має розв'язок, тобто існує точка $x^* \in D$ така, що

$$f(x^*) = \min_{x \in D} f(x). \qquad (39.3)$$

Розглянемо задачу, яка полягає у тому, щоб на основі скінченної кількості значень цільової функції, послідовно обчислених в обраних точках множини D, знайти таку точку $\bar{x} \in D$, яка є деяким наближенням точки x^* у певному розумінні, наприклад, $\| \bar{x} - x^* \| < \varepsilon$ або $| f(\bar{x}) - f(x^*) | < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – задана точність обчислень.

Складність чисельного вирішення поставленої задачі пов'язана з тим, що для ототожнення деякої точки $\bar{x}$ з точкою x^*, яка задовольняє умову (39.3), необхідно співставити значення функції $f(x)$ в цій точці зі значеннями цієї функції в усіх інших точках множини D. Можливість вирішення задачі (39.1) суттєво залежить від наявності апріорних відомостей про властивості цільової функції, оскільки для довільної неперервної дійсної функції при будь-якій заданій точності оцінка мінімуму, взагалі кажучи, не може бути побудована за значеннями функції, обчисленими в скінченній множині точок області визначення.

Розглянемо деякі підходи до вирішення багатоекстремальної задачі (39.1), які ґрунтуються на узагальненні методів пошуку локальних оптимальних точок (див., наприклад, [97]).

1. Області притягання і вибір початкових точок. Нехай в деякій підмножині D_i, $i = \overline{1,m}$, множини D задачі (39.1), (39.2) функція $f(x)$ є одноекстремальною (унімодальною), тобто в D_i існує єдина точка x_i^*, в деякому околі $S(x_i^*, \delta)$ якої виконується умова

$$f(x_i^*) \le f(x) \qquad (39.4)$$

для будь-яких $x \in D_i \cap S(x_i^*, \delta)$, і нехай

$$\bigcup_{i=1}^{m} D_i = D. \qquad (39.5)$$

За допомогою одного з локальних методів спуску, починаючи з довільного початкового наближення $x_i^{(0)} \in D_i$, на D_i можна знайти відповідну точку локального мінімуму $x_i^* \in D_i$, $i = \overline{1,m}$. У зв'язку з цим говорять, що підмножина D_i є *областю притягання* точки локального мінімуму $x_i^* \in D_i$. Тоді вирішення багатоекстремальної задачі (39.1), (39.2) при зазначених припущеннях може бути зведено до розв'язування m задач на знаходження точок локального мінімуму

$$f(x) \to \min, x \in D_i,$$

якщо задана множина початкових точок $x_i^{(0)} \in D_i$, $i = \overline{1,m}$.

Для більшості практичних екстремальних задач остання вимога виявляється занадто сильною, більше того, навіть число m в (39.5) як правило апріорі невідоме. У зв'язку з цим при такому підході виникає додаткова задача вибору початкових точок. Один з найпростіших способів полягає у тому, щоб обрати початкові точки $x_i^{(0)} \in D_i$, наприклад для методу градієнтного спуску (за умови диференційовності $f(x)$ на D) за схемою *методу Монте-Карло*, тобто випадково, або в якості таких точок обрати вузли деякої регулярної сітки в множині D.

Оскільки реалізація методів локального спуску для досить великої кількості початкових точок може виявитися практично неможливою (внаслідок великої складності), то використовуються різні способи відбору допустимої кількості таких точок з вибірки значно більшого об'єму, в якій проводились випробування. Точки цієї вибірки, яка часто одержується за методом Монте-Карло, або порівнюються за обчисленими в них значеннями цільової функції, або використовуються більш складні схеми відбору, засновані на деяких припущеннях про розподіл ймовірностей значень функції у випадково обраних точках області визначення, що дозволяє використовувати при побудові таких схем ідеї теорії статистичних розв'язків. При цьому послідовний відбір точок початкового наближення може поєднуватися з перебудовою механізму породження вибірки випадкових точок. Це робиться з метою підвищення ймовірності проведення випробувань в околі найменшого з раніше обчислених значень цільової функції. Ще одна схема відбору, яка використовується і в методах одновимірної глобальної мінімізації (див. §26), пов'язана з побудовою апроксимації функції за її значеннями, обчисленими у вузлах грубої сітки, з наступною оцінкою поділу (39.5) множини D на підмножини притягання D_i, $i=\overline{1,m}$.

Попередній відбір початкових точок – не єдиний спосіб скорочення обчислювальних витрат. Інший можливий спосіб полягає у тому, щоб чередувати ітерації локального спуску (початі в одній або паралельно в кількох початкових точках) з вибором нових початкових точок. При цьому ітерації з на початку обраних точок можуть бути остаточно припинені, якщо ітерації з наступних точок призводять до одержання істотно менших значень цільової функції. Послідовний відбір точок в таких методах може здійснюватися як регулярно, так і випадково.

2. Випадковий пошук. Алгоритми розв'язування багатоекстремальних задач, які входять до класу методів випадкового пошуку, характеризуються відсутністю яких-небудь ітерацій локального спуску. При цьому точка $x^{(k+1)}$ чергового випробування обирається за співвідношенням

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\xi^{(k)}, \tag{39.6}$$

де $\xi^{(k)}$ – реалізація n-вимірного випадкового вектора, розподіл ймовірностей якого визначається конкретним типом алгоритму випадкового пошуку.

Характерними рисами таких алгоритмів є обмеженість норми вектора $\xi^{(k)}$, тобто точка $x^{(k+1)}$ знаходиться в досить малому околі точки $x^{(k)}$, і зміна властивостей механізму породження векторів $\xi^{(k)}$, в залежності від результатів попередніх випробувань (адаптація випадкового пошуку). Таким чином, послідовність $\{x^{(k)}\}$, яка генерується за співвідношенням (39.6), можна розглядати як реалізацію випадкового процесу, яка при зростанні величини k, повинна перетинатися із заданим околом точки глобального мінімуму, причому бажано, щоб алгоритм забезпечував досить високу ймовірність перебування точки $x^{(k)}$, починаючи з деякого кроку k_0, в цьому околі. Остання вимога передбачає й існування такої ймовірності.

Для реалізації алгоритмів випадкового пошуку часто використовують моделювання поведінки біологічних систем (так звані *генетичні алгоритми*) (див., наприклад, [9], [121]).

3. Багатоекстремальна стохастична апроксимація. Згідно схеми багатоекстремальної стохастичної апроксимації здійснюється поєднання операцій вибору початкової точки і локального спуску. Процедура зміщення з поточної точки при переході від одного випробування до іншого містить компоненту, яка реалізує локальний спуск за методом стохастичної апроксимації (див. §38)), і компоненту, яка реалізує стрибкоподібний випадковий пошук, ефект впливу якого аналогічний до переходу в іншу початкову точку, причому досягнення асимптотичної збіжності до точки глобального екстремуму (у деякому узагальненому імовірнісному розумінні) забезпечується шляхом відповідного управління довжиною крокового множника при локальному спускові та інтенсивністю випадкових стрибків.

4. Застосування зглажування і фільтрації. Здійснення випробувань в точках деякої вибірки з оцінкою середнього значення результатів цих випробувань, яка потім використовується для організації наступного кроку обчислювального процесу, можна розглядати і як перехід від мінімізації цільової функції $f(x)$ в задачі (39.1) до мінімізації деякого усереднення цієї функції. Послідовне проведення такої процедури призводить до побудови інтегрального перетворення $\Phi(x)$ (усередненої функції) функції $f(x)$ такого, що мінімальні значення функцій $\Phi(x)$ і $f(x)$ співпадають, при цьому $\Phi(x)$ є одноекстремальною функцією, мінімізація якої може здійснюватися за локальними методами.

Але операція інтегрування, що виконується як правило в околі поточної ітерації, яка породжує функцію $\Phi(x)$, сама є досить трудомісткою. Наближене виконання цієї операції (наприклад за методами Монте-Карло) призводить до задачі мінімізації математичного сподівання (*зглаженої функції* $\Phi(x)$), значення якого обчислюються з випадковими похибками. Тому локальна оптимізація здійснюється за методами стохастичної апроксимації (див. §38 і, наприклад, [16]) або за методами стохастичних квазіградієнтів (див. §38 і, наприклад, [37]), які забезпечують необхідну фільтрацію.

5. Початкові припущення і збіжність методів. Асимптотична збіжність послідовностей, які генеруються за методами, розглянутими вище, до точки глобального екстремуму при слабких припущеннях про неперервність та порядок диференційовності цільової функції $f(x)$ визначається тим, що кожна точка допустимої множини D є граничною точкою послідовності випробувань $\{x^{(k)}\}$ і, відповідно,

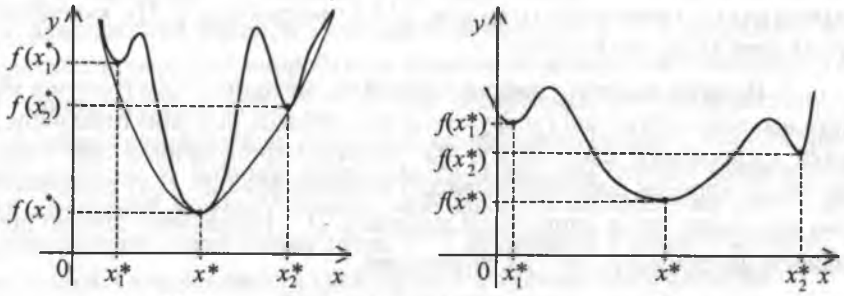
$$\lim_{K\to\infty}\min_{1\le k\le K} f(x^{(k)})=f(x^*),$$

де x^* – точка глобального мінімуму з (39.2). При цьому побудова всюди щільної послідовності $\{x^{(k)}\}$ забезпечується або вибором послідовності початкових точок локального спуску, або випадковими стрибками, або усередненням (в залежності від методу). З іншого боку, використання ітерацій локального спуску забезпечує, в силу існування областей притягання D_i з (39.5), досить велику ймовірність (якщо припустити, що $\{x^{(k)}\}$ – реалізація випадкового процесу і вказана ймовірність існує) знаходження $x^{(k)}$ в заданих околах локальних або глобального мінімумів при фіксованому значенні k або асимптотично при зростанні k.

6. Методи редукції. Основна складність розв'язування задач виду (39.1), (39.2) обумовлена зростанням обчислювальних витрат при збільшенні розмірності простору, який містить множину D. Якщо цільова функція є ліпшицевою і розв'язок задачі здійснюється за методом перебору (див. §26), то із зростанням розмірності кількість вузлів відповідної сітки збільшується експоненціально.

Для спрощення розв'язування задачі (39.1), (39.2) важливу роль відіграє наявність деяких спеціальних властивостей цільової функції $f(x)$. Ці властивості можна поділити на дві категорії. Врахування властивостей першої категорії дозволяє звести розв'язування багатоекстремальної задачі до розв'язування одноекстремальної задачі. Врахування властивостей другої категорії дозволяє зменшити розмірність задачі (зробити редукцію).

Припущення про те, що глобальний екстремум є «глибоким», тобто значення функції в точці глобального мінімуму істотно менше, ніж в локальних мінімумах (рис. 39.1 а), або «широким», тобто досить великий радіус області притягання точки глобального мінімуму (рис. 39.1 б), являють собою приклади властивостей першої категорії. В першому з вказаних випадків можна перейти до оптимізації «зглаженої» одноекстремальної функції, а в другому випадку, досить, наприклад, здійснити локальний спуск з невеликої кількості початкових точок, щоб потрапити до області притягання точки глобального мінімуму.



а) б)

Рис. 39.1.

Для аналізу властивостей другої категорії скористаємось відомим твердженням, яке зв'язує розв'язок задачі (39.1), (39.2) для неперервної функції $f(x)$ з розв'язуванням послідовності «вкладених» одновимірних задач:

$$\min_{x\in D} f(x) = \min_{x_1\in[a_1\,;\,b_1]} \dots \min_{x_n\in[a_n\,;\,b_n]} f(x_1,\dots,x_n). \qquad (39.7)$$

Співвідношення (39.7), яке називають *багатокроковою схемою редукції*, у поєднанні з деякими додатковими припущеннями про цільову функцію лежить в основі багатьох потужних обчислювальних методів оптимізації (див., наприклад, [11], [12], [69], [72]).

Розглянемо спочатку найпростіший випадок. Нехай цільова функція $f(x)$ *сепарабельна*, тобто

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i).$$

Тоді згідно з (39.7)

$$\min_{x\in D} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \{ \min_{x_i\in[a_i\,;\,b_i]} f_i(x_i)\}$$

і розв'язування багатовимірної задачі зводиться до незалежного розв'язування n одновимірних задач.

У більш складному і досить важливому для застосувань випадку, коли

$$f(x) = \sum_{i=2}^{n} f_{i-1}(x_{i-1}, x_i),$$

з (39.7) випливає (див., наприклад [72]), що

$$\min_{x\in D} f(x) = \min_{x_n\in[a_n\,;\,b_n]} \varphi_n(x_n),$$

де

$$\varphi_{i+1}(x_{i+1}) = \min_{x_i\in[a_i\,;\,b_i]} (\varphi_i(x_i) + f_i(x_i, x_{i+1})),\ 2<i<n,$$

$$\varphi_2(x_2) = \min_{x_1\in[a_1\,;\,b_1]} f_1(x_1, x_2).$$

При цьому розв'язування багатовимірної задачі вимагає лише табуляції одновимірних функцій $\varphi_i(x_i)$, $2\le i<n$, причому обчислення кожного значення $\varphi_i(x_i)$ передбачає розв'язування одновимірної задачі мінімізації.

Припустимо, що цільова функція в задачі (39.1), (39.2) є ліпшицевою. В цьому випадку схема (39.7) не дозволяє обійти складнощі, які пов'язані з експоненціальним зростанням кількості випробувань при збільшенні розмірності задачі, але використання цієї схеми істотно спрощує алгоритм багатовимірної оптимізації, оскільки згідно з (39.7) розв'язування багатовимірної задачі (39.1), (39.2) зводиться до розв'язування одновимірної задачі

$$\min_{x\in D} f(x) = \min_{x_1\in[a_1\,;\,b_1]} f_1(x_1), \qquad (39.8)$$

де

$$f_i(x_1,\dots,x_i) = \min_{x_{i+1}\in[a_{i+1}\,;\,b_{i+1}]} f_{i+1}(x_1,\dots,x_i,x_{i+1}),\ 1\le i<n, \qquad (39.9)$$

$$f_n(x_1,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_n), \qquad (39.10)$$

причому кожне обчислення значення одновимірної функції $f_1(x_1)$ для заданого x_1 передбачає мінімізацію по x_2 функції $f_2(x_1,x_2)$ і т.д. (див. (39.9)) до обчислення $f_n(x_1,...,x_n)$ згідно (39.10). У зв'язку з цим вирази (39.8)-(39.10), що випливають із схеми (39.7), у поєднанні з одновимірними методами мінімізації стали основою для створення багатовимірних методів.

Разом з тим, методи, побудовані за схемою (39.7), мають ряд недоліків. При використанні цієї схеми точність в умові зупинки, що забезпечує переривання розв'язування будь-якої вкладеної одновимірної задачі виду (39.9), повинна бути задана заздалегідь, і якщо ця точність виявиться недостатньою, то розв'язування задачі в цілому доведеться повторити спочатку (з більшою точністю). З іншого боку, якщо точність завищена і розв'язування задачі припиняється у зв'язку із закінченням обчислювальних ресурсів, то одержане наближення буде відповідати оцінці мінімуму функції в деякій підмножині множини D, оскільки схема (39.7) передбачає послідовне розв'язування задач мінімізації функції $f(x)$ в підмножинах множини D (див. (39.8)-(39.10)), які поступово заповнюють множину D (тому у випадку переривання в значній частині множини D може не бути жодного випробування, хоча в іншій частині вже побудоване покриття, що відповідає заданій точності).

У зв'язку з цим корисним є розгляд й інших схем, які дозволяють здійснити редукцію багатовимірної задачі до одновимірної. Така редукція може, наприклад, бути виконана за допомогою кривих Пеано, які ще називають *розгортками Пеано*.

Відомо, що відрізок $[0;1]$ дійсної осі може бути однозначно і неперервно відображений на гіперкуб $D \subset R^n$ (рис. 39.2). Відображення такого роду називають *кривими Пеано* (в 1890 році італійський математик Джузеппе Пеано побудував приклад кривої, яка повністю заповнює квадрат).

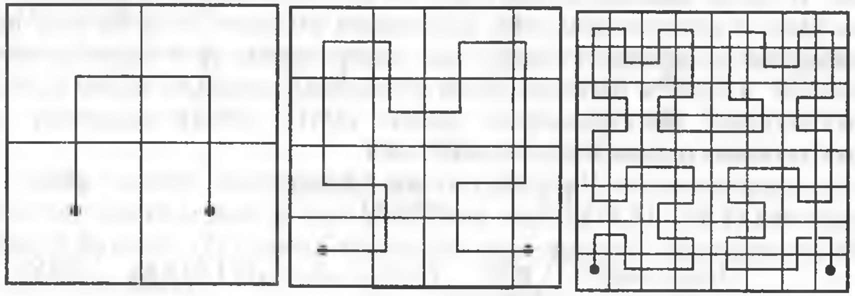


Рис. 39.2. Послідовне наближення кривої Пеано.

Нехай $x(t)$ – крива Пеано, де $t \in [0;1]$. Тоді з неперервності $f(x)$ і $x(t)$, а також рівності

$$D = \{x(t) \mid 0 \le t \le 1\}, \qquad (39.11)$$

випливає, що

$$\min_{x \in D} f(x) = \min_{t \in [0;\,1]} f(x(t)), \qquad (39.12)$$

тобто розв'язування багатовимірної задачі мінімізації функції $f(x)$ зводиться до мінімізації одновимірної функції $f(x(t))$.

Схема редукції (39.11) забезпечує побудову нерівномірної сітки, яка поступово ущільнюється під задану точність, одразу по всій множині D і тому у випадку переривання обчислень буде одержана оцінка мінімуму для всієї області (але з точністю, яка менша, ніж задана).

Треба відмітити, що і ця схема має свої недоліки. При її використанні частково втрачаються оцінки близькості точок у багатовимірному просторі (точки x' і x'', які досить близькі в гіперкубі D з (39.11), можуть мати прообрази t' і t'' при відповідності $x(t)$, які не є близькими на відрізку $[0;1]$). Цей недолік можна певною мірою подолати, якщо для точки x, в якій знайдено значення цільової функції, поновлювати всі прообрази t, що відображаються в неї згідно відповідності $x(t)$, тобто обчислення одного значення $f(x)$, $x \in D$, інтерпретується як обчислення кількох значень $f(x(t))$, $t \in [0;1]$.

Іншим недоліком цієї схеми є певна складність при визначенні образу $x(t) \in D$ за прообразом $t \in [0;1]$, оскільки відсутнє аналітичне подання кривих типу Пеано (криві Гільберта, Серпінського, Госпера) і вони будуються, як правило, за фрактальними принципами (див., наприклад, Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории.– М.: Постмаркет, 2000.– 352 с.).

Замість кривих Пеано можна використовувати і більш прості гладкі криві, які покривають задану ε-сітку в гіперкубі D, але при цьому рівність (39.11) виконується лише з точністю порядку εK, де K – константа Ліпшиця функції $f(x)$.

7. Метод рівномірного перебору. Припустимо, що в задачі (39.1) функція $f(x)$ задовольняє умову Ліпшиця

$$| f(x^{(1)}) - f(x^{(2)}) | \le K \| x^{(1)} - x^{(2)} \| \quad \forall x^{(1)} \in D, x^{(2)} \in D, \qquad (39.13)$$

де $K = const > 0$.

Розглянемо метод пошуку глобального мінімуму задачі (39.1), який є узагальненням методу рівномірного перебору для знаходження глобального мінімуму функції однієї змінної на відрізку $[a;b]$ (див. §26). Позначимо через $Q(K)$ клас функцій, які задовольняють умову (39.13) з однією й тією ж для всіх функцій цього класу константою Ліпшиця $K > 0$.

Нехай, як і в §26, M_k – деякий метод, який являє собою правило вибору k точок $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}$ з множини D, в яких обчислені значення цільової функції $f(x^{(1)}), f(x^{(2)}), ..., f(x^{(k)})$, і знайдена величина

$$F^* = \min_{i=\overline{1,k}} f(x^*),$$

яка є певним наближенням до значення $f^* = \inf_{x \in D} f(x)$.

Введемо деякі позначення:

$$\Delta(f, M_k) = F^* - f^* \text{ і } \delta(M_k) = \sup_{f \in Q(K)} \Delta(f, M_k),$$

де $\Delta(f, M_k)$ характеризує похибку методу M_k при мінімізації конкретної функції з класу $Q(K)$, а $\delta(M_k)$ є похибкою методу M_k для найбільш складної для цього методу функції з $Q(K)$ і називається *гарантованою точністю методу* M_k на класі $Q(K)$.

Постає питання: як обрати число k і метод M_k, за яким генерується множина точок $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}$ з D так, щоб мала місце нерівність

$$\delta(M_k) \le \varepsilon, \qquad (39.14)$$

де $\varepsilon > 0$ – задана точність?

Розглянемо правило вибору точок $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}$ з D (див., наприклад, [18]), яке полягає у тому, що ці точки обираються так, що об'єднання куль

$$\bar{S}(x^{(i)}, r) = \{x \in R^n \mid \| x - x^{(i)} \| \le r\}, \ i = \overline{1,k},$$

з центром в точках $x^{(i)}$ і радіуса $r = \varepsilon K^{-1}$, покриває множину D, тобто

$$D \subset \bigcup_{i=1}^{k} \bar{S}(x^{(i)}, r).$$

Виявляється, що при такому виборі точок $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}$ з D, якщо взяти F^* за наближення до f^*, буде розв'язана задача (39.1), (39.2), (39.13), (39.14).

Дійсно, візьмемо будь-яку точку $x^{(0)} \in D$. Оскільки кулі $\bar{S}(x^{(i)}, r)$, $i = \overline{1,k}$, покривають множину D, то точка $x^{(0)} \in D$ належить одній з куль $\bar{S}(x^{(i_0)}, r)$, тобто $\| x^{(0)} - x^{(i_0)} \| \le r = \varepsilon K^{-1}$. Звідси і з умови (39.13) маємо

$$f(x^{(0)}) \ge f(x^{(i_0)}) - K \| x^{(0)} - x^{(i_0)} \| \ge \min_{i=\overline{1,k}} f(x^{(i)}) - Kr = F^* - \varepsilon$$

або

$$F^* - f(x^{(0)}) \le \varepsilon$$

для кожної функції $f \in Q(K)$.

З останньої нерівності, в силу довільності точки $x^{(0)} \in D$, будемо мати

$$0 < F^* - f^* \le \varepsilon$$

для кожної функції $f \in Q(K)$.

Це означає, що для описаного методу M_k виконується нерівність (39.14). Що й треба було довести.

Зауважимо, що покривати кулями множину D не досить зручно. Набагато зручніше і простіше покривати множину D n-вимірними паралелепіпедами або гіперкубами. При цьому відзначимо, що куля $\bar{S}(x^{(i_0)}, r)$ містить у собі гіперкуб

$$C^{(i)} = \{x \in R^n \mid x_j^{(i)} - h \le x_j \le x_j^{(i)} + h, \ j = \overline{1,n}\},$$

де $h = \frac{r}{\sqrt{n}} = \frac{\varepsilon}{K\sqrt{n}}$, з довжиною ребра $2h$ і центром в точці $x^{(i)}$.

Розглянемо один з варіантів покриття гіперкубами паралелепіпеду D. Для цього побудуємо на множині D регулярну сітку з кроком h (рис. 39.3) і серед вузлів сітки візьмемо точки

$$x^{(i_1, i_2, ..., i_n)} = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, ..., x_j^{(i_j)}, ..., x_n^{(i_n)}), \ i_j = \overline{1, m_j}, \ j = \overline{1,n}, \qquad (39.15)$$

де j-ті координати $x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, ..., x_j^{(m_j)}$ цих точок визначаються за правилом

$$x_j^{(i)} = a_j + h(2i - 1), \ i = \overline{1, m_j - 1}, \qquad (39.16)$$

$$x_j^{(m_j)} = \min\{b_j; a_j + h(2m_j - 1)\}, \qquad (39.17)$$

а номер m_j визначається з умови

$$x_j^{(m_j - 1)} < b_j - h \le a_j + h(2m_j - 1) = x_j^{(m_j - 1)} + 2h. \qquad (39.18)$$

Тоді куби $C^{(i_1, i_2, ..., i_n)}$ з довжиною ребра $2h = \frac{2r}{\sqrt{n}}$ і з центром в точці $x^{(i_1, i_2, ..., i_n)}$, $i_j = \overline{1, m_j}$, $j = \overline{1,n}$, покриють паралелепіпед D.

Оскільки куб $C^{(i_1, i_2, ..., i_n)}$ належить кулі $\bar{S}(x^{(i_1, i_2, ..., i_n)}, r)$, то об'єднання куль $\bar{S}(x^{(i_1, i_2, ..., i_n)}, r)$, $i_j = \overline{1, m_j}$, $j = \overline{1,n}$, покриє паралелепіпед D. Тоді, як було показано вище, за методом M_k, за яким генеруються точки $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}$ з D, де $k = m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_n$, за правилом (39.15)-(39.18), розв'язується задача (39.1), (39.2), (39.13), (39.14) на класі функцій $Q(K)$.

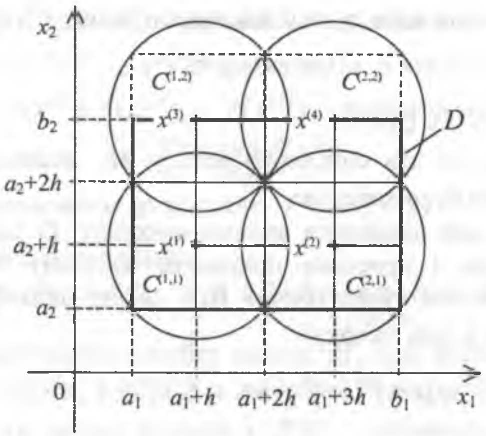


Рис. 39.3.

На рис. 39.3 показано приклад покриття прямокутника D квадратами $C^{(i_1,i_2)}$, $i_j = \overline{1,m_j}$, $j = 1,2$ де $m_1 = 2$, $m_2 = 2$, $k = m_1 \cdot m_2 = 4$, і точки $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}$ згідно (39.15)-(39.18) мають вигляд:

$$x^{(1)} = x^{(1,1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}),\ x^{(2)} = x^{(2,1)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(1)}),$$

$$x^{(3)} = x^{(1,2)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(2)}), x^{(4)} = x^{(2,2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}),$$

де j-ті координати $x_j^{(1)}, x_j^{(2)}$, $j = \overline{1,2}$, дорівнюють

$$x_1^{(1)} = a_1 + h,\ x_1^{(2)} = a_1 + 3h,$$

$$x_2^{(1)} = a_2 + h,\ x_2^{(2)} = a_2 + 3h = b_2.$$

Розглянутий метод рівномірного перебору відноситься до пасивних методів, оскільки в ньому всі точки $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}$ з D задаються одночасно до початку обчислень значень цільової функції.

Існують методи, за якими точки $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}$ генеруються послідовно і при обранні чергової точки $x^{(i)}$ певним чином враховуються результати обчислень у попередніх точках $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k-1)}$. Таким чином є можливість знайти величину f^* з тією ж точністю $\varepsilon > 0$ за меншу кількість обчислень, ніж у методі (39.15)-(39.18) (див., наприклад, [18]).

Запитання для самоконтролю

1. У чому полягає сутність задачі багатоекстремальної оптимізації?
2. Що таке гіперпаралелепіпед (гіперкуб)?
3. Що таке область притягання точки локального мінімуму?
4. Які підходи використовуються для вибору початкових точок в методах глобальної багатоекстремальної оптимізації?
5. Які функції називаються сепарабельними?
6. Що являє собою крива Пеано?
7. У чому полягає сутність наступних методів глобальної багатоекстремальної оптимізації:
   - методів випадкового пошуку;
   - методу багатоекстремальної стохастичної апроксимації;
   - методу зглажування і фільтрації;
   - методів редукції;
   - методу рівномірного перебору?

Завдання для самостійного виконання

1. Запропонувати алгоритм побудови кривої Пеано для відображення відрізка $[0;1]$ дійсної осі на квадрат $D = \{x \in R^2 \mid a \le x_1 \le b; a \le x_2 \le b\}$ із заданою точністю (див. рис. 39.2) і описати його однією з мов програмування.

2. На основі алгоритму побудови кривої Пеано (див. завдання 3) запропонувати алгоритм розв'язування задачі двовимірної багатоекстремальної мінімізації на квадраті $D = \{x \in R^2 \mid a \le x_1 \le b; a \le x_2 \le b\}$ за методом редукції (39.12).

3. Використовуючи багатокрокову схему редукції виду (39.7), а також методи одновимірної мінімізації, розв'язати задачі мінімізації сепарабельних функцій на заданій множині:

1) $f(x) = x_1 + x_2^4$,

$x \in D = \{x \in R^2 \mid 0 \le x_1 \le 1; 0 \le x_2 \le 1\}$;

2) $f(x) = x_1^2 + \sin(x_2)$,

$x \in D = \{x \in R^2 \mid -1 \le x_1 \le 1; -3 \le x_2 \le 3\}$;

3) $f(x) = e^{-x_1} + 2x_1 + (x_2 - 1)^3$,

$x \in D = \{x \in R^2 \mid -2 \le x_1 \le 2; -1 \le x_2 \le 1\}$;

4) $f(x) = x_1^5 + (x_2 - 4)^2$,

$x \in D = \{x \in R^2 \mid -1 \le x_1 \le 1; -5 \le x_2 \le 5\}$;

5) $f(x) = \cos x_1 + \sin x_2$,

$x \in D = \{x \in R^2 \mid 0 \le x_1 \le 4; 0 \le x_2 \le 4\}$.

4. Для прямокутника D на рис. 39.4 і заданої сітки побудувати покриття цього прямокутника за правилом (39.15)-(39.18).

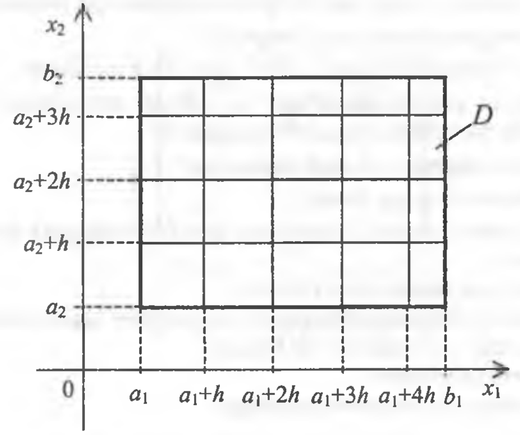


Рис. 39.4.

5. Побудувати схему алгоритму роботи за методом рівномірного перебору і описати його однією з мов програмування.

6. За допомогою методів глобальної багатоекстремальної оптимізації знайти глобальний мінімум заданих функцій на заданих множинах:

1) $f(x_1,x_2)=\dfrac{100}{100(x_1^2-x_2)+(1-x_1)^2+1}$,

$D=\{x\in R^2 \mid -1{,}28\le x_1\le 1{,}28;\ -1{,}28\le x_2\le 1{,}28\}$;

2) $f(x_1,x_2)=20+x_1^2+x_2^2-10\cos(2\pi x_1)-10\cos(2\pi x_2)$,

$D=\{x\in R^2 \mid -5{,}12\le x_1\le 5{,}12;\ -5{,}12\le x_2\le 5{,}12\}$;

3) $f(x_1,x_2)=\dfrac{1}{\dfrac{x_1^2+x_2^2}{200}-\cos(x_1)\cos\left(\dfrac{x_2}{\sqrt{2}}\right)+2}$,

$D=\{x\in R^2 \mid -20\le x_1\le 20;\ -20\le x_2\le 20\}$;

4) $f(x_1,x_2,...,x_{10})=\sum_{i=1}^{10}(10\cos(2\pi x_i)-x_i^2)-100$,

$D=\{x\in R^{10} \mid -5{,}12\le x_i\le 5{,}12;\ i=\overline{1,10}\}$;

5) $f(x_1,x_2,...,x_{10})=10-\sum_{i=1}^{10}\dfrac{x_i^2}{4000}+\prod_{i=1}^{10}\cos\left(\dfrac{x_i}{\sqrt{2}}\right)-1$,

$D=\{x\in R^{10} \mid -5{,}12\le x_i\le 5{,}12;\ i=\overline{1,10}\}$.

7. За допомогою математичних пакетів Mathcad, Matlab, Maple, Mathematica чи інших розв'язати задачі багатоекстремальної оптимізації, які наведені у завданні 6.

§40. Особливості розв'язування задач оптимізації за допомогою комп'ютера

Перед тим, як розглядати питання, які стосуються деяких особливостей розв'язування задач оптимізації, зокрема загальних підходів щодо їх формалізації, вибору найбільш ефективних методів розв'язування, чисельній реалізації цих методів за допомогою комп'ютера та аналізу одержаних результатів, розглянемо суть традиційної технології розв'язування практичних задач.

Коли виникає потреба розв'язати проблему вибору оптимального рішення серед багатьох альтернатив у певній предметній галузі, фахівці в цій галузі (назвемо їх *практиками*) намагаються описати задачу, яку треба розв'язати, відповідною професійною мовою і знайти її розв'язок за допомогою наявних засобів, зокрема й комп'ютерних. Якщо це зробити не вдається, то практики звертаються за допомогою до фахівців у галузі прикладної математики, комп'ютерних технологій і стають *замовниками*, а останні, у разі згоди на виконання робіт щодо розв'язування поставленої задачі, стають *виконавцями*. Так утворюється ланцюг:

«замовник» – «математик-аналітик» – «інженер-програміст».

У деяких випадках аналітик і програміст можуть поєднуватись в одній особі (але їх функції, взагалі кажучи, різні). Аналітик повинен вміти будувати математичні моделі різноманітних практичних задач, мати досить широкі знання про методи і засоби розв'язування цих задач, а також володіти навичками використання сучасних інформаційних технологій у наукових дослідженнях. Крім того, йому потрібно на необхідному рівні бути обізнаним зі сферою професійної діяльності замовника. Отже, аналітик будує для поставленої задачі математичну модель (перекладає задачу з професійної мови замовника на мову прикладної математики), вибирає методи і засоби її розв'язання, визначає структуру даних, складає алгоритм відшукання розв'язку. Написання програми, за якою реалізується запропонований алгоритм, здійснює програміст або самостійно, або спільно з аналітиком, але, як правило, без участі замовника. Після написання програми відбувається її налагодження, яке здійснюється програмістом на основі тестових даних і задач. Якщо результати роботи не задовольняють замовника, то вносяться необхідні корективи до постановки задачі та уточнюється її модель. При цьому внесення коректив вимагає, як правило, нового залучення аналітиків і програмістів, які повинні внести відповідні зміни до моделі, алгоритму і програми. Зауважимо, що останнє зробити буває іноді складніше, ніж написати нову програму. Процес виправлення помилок і розвиток функціональних характеристик програми є предметом діяльності розробників і називається *супроводом* програмного продукту, який виконується протягом усього його *життєвого циклу*.

Підсумовуючи сказане, можна виділити такі основні етапи розв'язування практичних задач за допомогою комп'ютера за традиційною технологією:

1. Постановка задачі та її опис професійною мовою замовника;
2. Математична формалізація задачі;
3. Вибір методів і засобів розв'язування одержаної формальної моделі;
4. Розробка алгоритму і написання програми однією з мов програмування, яка найбільш придатна для реалізації обраного методу розв'язування задачі;
5. Налагодження програми і проведення чисельного експерименту на контрольних даних;
6. Розв'язання задачі за допомогою комп'ютера при реальних даних.
7. Аналіз одержаних результатів.

Після цього, якщо це буде необхідно, уточнити постановку задачі, її математичну модель, алгоритм і програму.

Зауважимо, що, не дивлячись на такий досить тривалий процес і значні матеріальні витрати, традиційна технологія розв'язування практичних задач за допомогою комп'ютера є виправданою у випадках, коли досліджується зовсім нова задача, для розв'язування якої ще не створено відповідного проблемно-орієнтованого програмного забезпечення. Тому володіння такою технологією є обов'язковою компонентою професійної підготовки майбутніх математиків-аналітиків та інженерів-програмістів.

1. Особливості постановки і формалізації задач оптимізації. Початковими етапами розв'язування практичної задачі оптимізації є її чітка постановка і формалізація. Ця робота повинна здійснюватися спільно фахівцем у відповідній предметній галузі (замовником) і математиком-аналітиком, який буде створювати математичну модель задачі, аналізувати її, обирати метод розв'язування, будувати алгоритм реалізації обраного методу. При постановці задачі замовник повинен насамперед сам чітко розуміти мету дослідження, для чого планується використовувати одержаний результат, доступні чи ні вхідні дані, яка їх вірогідність, які взаємозв'язки між реальними об'єктами є найбільш суттєвими і важливими тощо. Досить часто вже на цьому етапі стає зрозумілим, чи можна розв'язати задачу, чи ні (наприклад через брак вхідних даних), або чи варто її розв'язувати взагалі, оскільки очікуваний ефект не компенсує всі можливі витрати або дасть незначний прибуток у порівнянні з цими витратами.

Після постановки задачі необхідно сформулювати критерій оптимальності або ефективності, а також визначити на змістовому рівні сутність обмежень на параметри, що входять до умови задачі. При цьому досить часто виникає проблема багатокритеріальності, тобто коли треба оптимізувати кілька показників. У такій ситуації бажано або сформулювати єдиний загальний критерій, або задати допустимі значення для всіх досліджуваних характеристик крім однієї, яку і треба оптимізувати.

Наступним етапом є математична формалізація задачі, на якому головна роль належить математику-аналітику, і успіх якого визначається його професійними знаннями, вміннями і навичками, рівнем математичної культури та інтуїції. На цьому етапі необхідно виділити відомі і невідомі величини, сталі і змінні параметри, незалежні і залежні змінні, описати цільову функцію, яка відповідає критерію оптимальності задачі, за допомогою математичних співвідношень задати обмеження задачі. При цьому замовник повинен чітко визначитися, які з параметрів задачі є основними, які допоміжними, а якими можна взагалі знехтувати, які змістові обмеження повинні бути обов'язково враховані, а які ні. Аналітик з урахуванням таких побажань повинен спробувати побудувати найбільш просту модель з найменшою кількістю змінних і обмежень. В результаті такої роботи одержується попередня математична формалізація задачі, яка потребує ретельного аналізу на предмет її адекватності реальній задачі, приналежності до певного класу, виконання умов існування і єдиності розв'язку, наявного досвіду розв'язування аналогічних задач. Також треба визначити, який математичний апарат, які технічні та інші ресурси необхідно залучити до розв'язування одержаної математичної задачі тощо. При цьому треба враховувати, що у побудованій моделі досить часто не всі параметри є відомими, вхідні дані не досить вірогідні за рахунок нестачі статистичного матеріалу або впливу показників, які мають випадковий характер.

У результаті такої аналітичної роботи створюється робочий варіант оптимізаційної моделі, яка й буде досліджуватися.

2. Критерії вибору методів оптимізації. Лише у виключних випадках вдається знайти розв'язок екстремальної задачі у явному вигляді. Частіше це доводиться робити за допомогою чисельних методів з використанням комп'ютера. При обранні чисельного методу та його програмній реалізації треба обов'язково враховувати основні властивості цього методу. До найбільш важливих характеристик методів оптимізації належать: швидкість збіжності, область збіжності, стійкість до похибок вхідних даних і обчислень, зручність для програмування, вимоги до обсягу оперативної пам'яті комп'ютера, необхідної для реалізації методу, широта класу задач, до яких він застосовний.

Часто вважають, що той метод кращий, у якого вища швидкість збіжності на деякому фіксованому класі задач. Але при такому способі оцінки ефективності методу, як правило, не береться до уваги така важлива властивість, як трудомісткість кожної окремо взятої ітерації методу. Іноді при розв'язуванні конкретної задачі вигідніше застосувати метод, який збігається повільніше і для одержання розв'язку із заданою точністю вимагає досить великої кількості ітерацій, але тим не менше з урахуванням того, що кожна ітерація методу реалізується досить просто, сумарний обсяг обчислень і, відповідно, загальний час для одержання розв'язку виявляється меншим, ніж при застосуванні іншого методу, який теоретично має вищу швидкість збіжності, але з більш трудомісткими ітераціями. Отже, при виборі методу оптимізації треба звертати увагу не стільки на швидкість його збіжності, скільки на загальний обсяг обчислень для одержання розв'язку з потрібною точністю.

При чисельній реалізації методів значний час витрачається на обчислення значень цільової функції, її градієнтів або їх аналогів. Тому в тих випадках, коли обчислення значень функції набагато простіші, ніж обчислення її частинних похідних, цілком природно краще використовувати методи нульового порядку, тобто ті, які вимагають лише обчислення значень цільової функції, наприклад метод покоординатного спуску або симплексний метод (§28). Зрозуміло, що у тих випадках, коли є досить прості аналітичні вирази для обчислення частинних похідних, краще використовувати методи першого порядку, зокрема градієнтні методи (§28), квазіньютонівські методи (§29), метод спряжених градієнтів (§30), а можливо й методи другого порядку, зокрема метод Ньютона (§29).

Значна кількість різноманітних, іноді навіть суперечливих, характеристик методів, недостатня розробленість методики оцінювання згаданих характеристик ускладнює порівняння методів один з одним. У цій ситуації часто для порівняння методів оптимізації використовують деякий набір тестових задач (див. завдання для самостійного виконання до §§28, 31, 37) і кращим визнають той метод, за допомогою якого вдається розв'язати ці тестові задачі з потрібною точністю за меншу кількість ітерацій, меншу кількість обчислень значень цільової функції, її частинних похідних, а, відповідно, і за менший час. Такі порівняння, безумовно, є корисними, але на їх основі не варто робити остаточні висновки щодо переваги того чи іншого методу. Це пов'язано з тим, що результати такого порівняння істотно залежать від кваліфікації програміста, який реалізував відповідний метод, мови програмування, яка використовувалась для кодування методу, якості транслятора з обраної мови програмування, технічних характеристик комп'ютера, на якому проводився чисельний експеримент тощо.

Як дослідникам, так і користувачам-замовникам, хотілося б мати найкращий в усіх відношеннях метод оптимізації. Але такого методу поки що немає, і навряд чи він взагалі існує. Тому для ефективного розв'язування конкретної екстремальної задачі доцільно поєднувати різні методи з урахуванням апріорних даних про задачу, що розв'язується, зокрема про властивості цільової функції та функції обмежень (неперервність, гладкість, опуклість), про можливе розташування точок екстремуму, а також наявних обчислювальних засобів, ресурсів часу, для одержання розв'язку тощо. У тих випадках, коли такі дані відсутні,

спочатку доцільно спробувати застосувати досить прості методи оптимізації (наприклад, методи перебору на сітці з невеликою кількістю вузлових точок, метод покоординатного спуску, метод випадкового пошуку), а потім на основі зібраних даних застосувати більш точні і потужні методи. Такий підхід обумовлений ще й деякими обставинами процесу формалізації поставленої задачі. Зокрема, часто початкове формулювання конкретної задачі може бути надто наближеним, спрощеним і передбачає подальше уточнення. В таких умовах знаходження досить точного розв'язку задачі недоцільне, а одержання наближених попередніх результатів та їх подальший аналіз за участю експертів у відповідній галузі знань, дозволяє уточнити математичну модель задачі. При уточненні моделі варто пам'ятати, що надмірна деталізація процесу, який досліджується, може призвести до того, що задача буде залежати від великої кількості параметрів, можливо випадкового характеру, різноманітних обмежень, і це зробить відшукання розв'язку задачі практично неможливим. Тому на перших етапах дослідження прикладних задач оптимізації бажано будувати прості моделі, які враховують найбільш важливі характеристики і параметри задачі та адекватно описують реальні умови, події, об'єкти тощо. Нажаль, такий підхід практично неможливо застосовувати при розв'язуванні реальних соціально-економічних задач та задач виробничо-транспортного планування, оскільки адекватні математичні моделі, які їх описують, як правило, занадто складні, містять велику кількість змінних і призводять до так званих екстремальних задач великої розмірності. Розв'язування таких задач звичайними чисельними методами практично неможливе навіть з використанням сучасних потужних комп'ютерів. В таких випадках використовують різні способи декомпозиції, які дозволяють поділити задачу на кілька слабо пов'язаних між собою підзадач значно меншої розмірності, розв'язування яких дає можливість одержати наближений розв'язок початкової задачі (див., наприклад, [38], [70]).

3. Програмна реалізація методів оптимізації. Перехід від обраного методу до його алгоритмічної і програмної реалізації є досить складною і відповідальною роботою, до виконання якої, як правило, залучаються висококваліфіковані програмісти, що мають досвід створення складних програмних продуктів. Найбільш перспективними є такі програми, які забезпечують користувачеві можливість управляти процесом розв'язування задачі. Це надає змогу спростити процедуру добору параметрів методу, здійснювати послідовну перевірку різних методів, досліджувати вплив певних змін в умові задачі на хід розв'язування, зупиняти ітераційний процес у разі його зациклювання тощо. Основні вимоги до таких програмних продуктів та деякі приклади їх конкретних реалізацій будуть розглянуті нижче.

4. Аналіз результатів. Після налагодження і тестування програмного продукту на контрольних даних і задачах настає час його використання для розв'язування конкретних екстремальних задач, що належать до певного класу. При цьому це доцільно зробити при різних значеннях початкового наближення, що дасть можливість уточнити локальний розв'язок задачі, або переконатися у нестабільності одержаних результатів і вдатися до відповідних заходів щодо виправлення ситуації. Після одержання розв'язку необхідно провести його змістовий аналіз, враховуючи те, що математична формалізація здійснювалась в умовах спрощення поставленої задачі. Може статися так, що хоча знайдений розв'язок і є коректним стосовно математичної моделі, але він не задовольняє замовника, оскільки не може бути використаний в реальній ситуації, наприклад внаслідок того, що не всі важливі фактори були враховані у постановці задачі. У такому разі необхідно переглянути математичну модель, внести до неї певні корективи, після чого розв'язати уточнену задачу оптимізації.

5. Загальні вимоги до тестових задач оптимізації та опису результатів чисельного експерименту. Як відзначалось вище, одним із способів порівняння методів (алгоритмів) розв'язування задач оптимізації є використання стандартних спеціально дібраних тестових задач. Розглянемо деякі вимоги, яким повинні задовольняти такі задачі (див., наприклад, [82]):

1) тестові задачі повинні бути уніфікованими і загальновизнаними, вони, як правило, формуються в результаті своєрідного природного відбору, при цьому однією з основних позитивних характеристик тесту є його популярність;

2) в тестових задачах повинні моделюватися типові труднощі для певного класу задач (наприклад, для задач безумовної мінімізації потрібні як одноекстремальні, так і багатоекстремальні тестові задачі, у яких цільові функції є гладкими або негладкими, неперервними або розривними, мають складну структуру ліній (поверхонь) рівня тощо);

3) точки екстремуму тестових задач повинні бути відомими;

4) задачі повинні бути досить компактними, не мати великих масивів вхідних даних і не вимагати складних обчислень при знаходженні значень функцій, що входять до умови задачі, градієнтів цих функцій або їх аналогів;

5) в якості тестових задач не можна використовувати задачі, які мають певні специфічні особливості, що надають перевагу тому чи іншому методу. Так, наприклад, якщо взяти функцію виду $f(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ як тестову цільову функцію для задачі безумовної мінімізації, то метод покоординатного спуску для відшукання її точки

мінімуму буде досить ефективним; для функції виду $F(x)=f(g(x))$, де $g(x)$ – квадратична, а f – скалярна функції, її поверхні рівня будуть еліпсоїдами, а тому метод Ньютона і метод спряжених градієнтів будуть для них скінченними (див. §§ 29, 30).

Відомості про ці та інші вимоги і підходи щодо побудови тестових задач оптимізації, а також перелік найбільш популярних тестових задач безумовної та умовної оптимізації, результати тестування деяких відомих методів оптимізації можна знайти, наприклад, у роботах [49], [82], [107], [111].

Для того, щоб можна було оцінити ефективність нових чисельних методів оптимізації, при опублікуванні результатів про чисельні експерименти щодо їх тестування бажано дотримуватися таких правил:

1) наводити точне формулювання задач, для яких проводились обчислення, включаючи всі необхідні вхідні дані, відомості про початкові наближення, точні або наближені розв'язки;

2) давати детальний опис алгоритму, що використовується для реалізації методу, зокрема перелік основних допоміжних алгоритмів, за якими розв'язуються допоміжні задачі (одновимірної оптимізації, обчислення частинних похідних тощо), а також умов зупинки ітераційного процесу;

3) вказувати відомості про програму, за якою реалізується даний алгоритм, зокрема мову програмування, якою вона описана, транслятор з мови програмування, який використовувався для виконання програми;

4) вказувати деякі технічні характеристики комп'ютера, на якому проводився експеримент (тип мікропроцесора, його тактова частота і розрядність, обсяг оперативної пам'яті);

5) наводити не лише кінцевий результат роботи програми, наприклад $\bar{x}$ і $f(\bar{x})$, де $\bar{x}$ – наближений розв'язок поставленої задачі, та відомості про трудомісткість обчислень (N_k – кількість ітерацій, N_f – кількість обчислень значень цільової функції, враховуючи кількість обчислень при розв'язуванні допоміжних задач, N_g – кількість обчислень градієнта цільової функції або його аналогів), але й дані про деякі проміжні результати (наприклад через кожних 100 ітерацій або при кожному збільшенні точності на порядок), при цьому ці відомості бажано подавати у вигляді таблиці, до якої включити:

– найбільш важливі характеристики точності поточних наближень, зокрема, координати $x^{(k)}$ (для задач невеликої розмірності) або $\delta_k = \| x^{(k)} - x^* \|$ (для задач великої розмірності), де $x^{(k)}$ – k-те наближення до розв'язку, а x^* – точний розв'язок задачі, значення $f(x^{(k)})$ або $\Delta_k = f(x^{(k)}) - f^*$, де $f^* = f(x^*)$;

– дані про виконання обмежень задачі, наприклад $r_k = \max_{i=\overline{1,m}} g_i(x^{(k)})$ при обмеженнях виду $g_i(x) \le 0, i = \overline{1,m}$;

– дані про виконання умов зупинки ітераційного процесу, наприклад значення величин $\delta_x = \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|$, $\Delta_f = | f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)}) |$, $\| f'(x^{(k)}) \|$.

Лише за таких умов можна відтворити наведені результати експерименту і порівняти їх з даними, одержаними за допомогою інших методів оптимізації.

6. Загальні принципи розробки спеціалізованих пакетів оптимізації. Для практиків, яким доводиться розв'язувати оптимізаційні задачі, актуальною проблемою є одержання готового програмного продукту, який дозволяє розв'язувати задачі при будь-яких вхідних даних, а для математиків-аналітиків – знати, які існують програмні засоби розв'язування оптимізаційних задач та які їх характеристики, а також де можна знайти ці засоби. Частково цю проблему можна вирішити за рахунок повідомлень, які публікуються у різних науково-технічних виданнях (див., наприклад, [2], [20], [107]), бюлетенях фондів алгоритмів і програм, а останнім часом за допомогою мережі Internet.

Серед програмних засобів, за допомогою яких можна розв'язувати досить широкі класи оптимізаційних задач і які є найбільш доступними, можна виділити:

– спеціалізовані пакети оптимізації;

– системи комп'ютерної математики;

– редактори електронних таблиць.

Одним з перших пакетів оптимізації була система «ДІСО» (див., наприклад, [35], [73]), розроблена в 1975-1976 роках у Обчислювальному Центрі АН СРСР і призначена для розв'язування задач безумовної мінімізації функцій багатьох змінних і задач нелінійного програмування, а пізніше і для задач оптимального управління системами з фазовими обмеженнями. У процесі роботи над цією системою були сформульовані основні принципи побудови, функціонування і експлуатації таких систем. Досвід практичної роботи з «ДІСО» було покладено в основу створення наступних, більш досконалих і універсальних версій системи.

В Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України у різні роки було створено кілька систем і пакетів прикладних програм (ППП) для розв'язування задач управління різноманітними виробничими і економічними процесами (див., наприклад, [35], [70], [94], [95]), зокрема:

– система планування «ДІСПЛАН», яка була призначена для оперативного розв'язування задач поточного планування на етапі узгодження плану;

– сімейство пакетів «ВЕКТОР», які були призначені для розв'язування оптимізаційних задач комбінаторного типу;

– ППП «ДІСПРО», який був призначений для розв'язування задач дискретної оптимізації;

– ППП «ПЛАНЕР», який був призначений для розв'язування спеціальних класів задач виробничо-транспортного планування великої розмірності.

В Інституті математики і кібернетики Литви для ЕОМ типу ЄС і СМ було створено ППП «МІНІМУМ», призначений для розв'язування у діалоговому режимі багатоекстремальних задач методами глобальної і локальної оптимізації.

Інститут технічної кібернетики Білорусії був основним розробником ППП «МОРОЗ» (Методо-Орієнтований на Розв'язування Оптимізаційних Задач) для ЄС ЕОМ, який призначений для розв'язування широкого класу задач оптимізації:

– задач лінійного, квадратичного, дробово-квадратичного програмування;
– задач геометричного програмування;
– задач безумовної мінімізації з опуклими диференційовними і недиференційовними цільовими функціями, а також багатоекстремальними цільовими функціями;
– задач нелінійного програмування з диференційовними цільовими функціями і функціями обмежень;
– задач дискретного програмування.

Наведемо *основні принципи* побудови керованої системи оптимізації (див., наприклад, [35], [73], [95]):

1) система повинна мати ієрархічну структуру, в якій окремі її програми будуються за модульним принципом;

2) система повинна досить просто модернізуватись, в ній повинні бути засоби розширення функціональних можливостей шляхом додавання нових режимів експлуатації;

3) опис умови задачі оптимізації повинен бути досить простим і прийнятним для використання будь-якого алгоритму з бібліотеки програм;

4) в системі повинно забезпечуватися виведення на екран дисплея будь-яких даних про поточні обчислення, про параметри управління, надання користувачеві всіх необхідних даних для управління;

5) користувач повинен мати можливість оперативно коригувати умови задачі, здійснювати управління системою щодо вибору методів оптимізації та зміни їх параметрів;

6) система повинна забезпечувати користувачу можливість подавати вказівки мовою, близькою до природної, а також перевірку коректності цих директив;

7) бібліотека методів оптимізації повинна мати ієрархічну структуру, що дозволить при введенні нової групи методів для розв'язування нового класу задач використовувати, як допоміжні процедури, всі програми з бібліотеки;

8) в системі повинні ефективно використовуватися ресурси комп'ютера;

9) в системі повинні бути передбачені адекватне реагування на помилкові директиви користувача і виведення відповідних повідомлень про це, а також виведення повідомлень про збої у роботі системи;

10) в системі повинна бути передбачена можливість зупиняти процес обчислень і виконувати наступні дії:

- аналіз і корекція поточного стану;
- обчислення значень цільової функції, функцій-обмежень, їх градієнтів (субградієнтів) у поточній точці;
- вибір нового методу (алгоритму) розв'язування;
- налагодження управляючих параметрів методів (алгоритмів);
- вибір критеріїв зупинки ітераційного процесу;
- вибір форми звіту про одержані поточні обчислення і кінцеві результати;
- збереження поточних результатів у базі даних;
- продовження ітераційного процесу;

11) система повинна включати банк тестових задач;

12) в системі повинна бути передбачена можливість візуалізувати ітераційний процес при розв'язуванні задач одно-, дво- і тривимірної оптимізації, виконувати геометричні побудови основних об'єктів цих задач (графіки функцій, їх лінії (поверхні) рівня тощо);

13) система повинна бути пристосована для роботи за попереднім сценарієм, коли користувач заздалегідь складає програму обчислень у залежності від одержаних результатів, при цьому робота системи повинна здійснюватися в автономному режимі без втручання користувача;

14) в системі повинна бути передбачена можливість виводити одержані результати у зручній формі для їх аналізу, у відповідності до змісту задачі, та забезпечувати надання користувачеві необхідних даних для прийняття рішення.

І сьогодні проблема створення ефективних і досить універсальних прикладних програм оптимізації є важливою науково-технічною задачею, що обумовлено широким впровадженням комп'ютерної техніки практично у всі сфери діяльності людини.

7. Розв'язування задач оптимізації за допомогою систем комп'ютерної математики та редакторів електронних таблиць.

Останнім часом використання комп'ютерної техніки та інформаційних технологій для розв'язування задач оптимізації дещо активізувалося завдяки появі таких універсальних математичних пакетів, як Mathcad, Matlab, Maple, Mathematica та ін. Ці системи мають зручний інтерфейс, реалізують багато стандартних і спеціальних математичних операцій і функцій, мають потужні графічні засоби, власні мови програмування, засоби підготовки математичних текстів до друку, забезпечують імпорт даних в інші програмні продукти (текстові і графічні редактори, електронні таблиці) та експорт з них даних для опрацювання. Математичні пакети надають користувачу можливість розв'язувати досить широкий спектр задач:

– проведення математичних досліджень, що вимагають аналітичних перетворень та числових розрахунків;

– розробка алгоритмів, які реалізують чисельні методи розв'язування задач, їх аналіз і використання;

– математичне моделювання та комп'ютерний експеримент;

– аналіз і опрацювання експериментальних даних;

– візуалізація результатів дослідження, наукова та інженерна графіка, створення графічних і числових звітних матеріалів тощо.

Розробники математичних систем останнім часом приділяють значну увагу їх інтеграції та спільному використанню. Це не лише розширює клас задач, що можна розв'язувати за допомогою кожної із систем, але й дозволяє дібрати для них самі найкращі і найбільш адекватні інструментальні засоби. Розв'язування складних математичних задач одразу за допомогою кількох систем істотно підвищує ймовірність одержання коректних результатів, оскільки, як математики так і математичні системи здатні помилятися, особливо при некоректній постановці задач недосвідченими користувачами.

Коротко проаналізуємо основні можливості *систем комп'ютерної математики* (СКМ) Mathcad, Matlab, Maple, Mathematica щодо розв'язування задач оптимізації, які забезпечуються досить потужними засобами, що або вбудовані у ядро цих систем, або входять до їх складу у вигляді додаткових модулів (пакетів розширення) і реалізують найбільш популярні методи оптимізації, зокрема, метод золотого перерізу і парабол для одновимірної оптимізації; симплексний метод Нелдера-Мілда, метод спряжених градієнтів, квазіньютонівські методи для задач багатовимірної нелінійної оптимізації; метод внутрішньої точки (метод Кармаркара) для розв'язування задач лінійного програмування великої розмірності тощо. Зазначимо, що в цих системах, як правило, при розв'язуванні конкретних задач реалізуються кілька методів оптимізації, які застосовуються в залежності від розмірності задачі, властивостей цільової функції чи особливостей наявних в задачі обмежень.

В таблиці 40.1 наведено дані про можливості СКМ Mathcad, Matlab, Mathematica, Maple щодо розв'язування деяких класів задач оптимізації, а в таблиці 40.2 – перелік вбудованих функцій і пакетів розширення деяких версій зазначених СКМ, які можна використовувати для розв'язування задач безумовної оптимізації, а також для розв'язування задач лінійного і нелінійного програмування.

Таблиця 40.1

Програма (версія) / *Задача оптимізації*	**Mathcad 2000 Professional**	**Matlab 6.5**	**Mathematica 4.1**	**Maple 7.0**
Лінійна (б/у)	+/+	м/м	+/+	+/+
Нелінійна (б/у)	+/+	м/м	+/-	+/+
Квадратична (б/у)	+/+	м/м	+/-	+/+

Примітка. В таблиці 40.1 використані наступні позначення:

«б» – задача безумовної оптимізації;

«у» – задача умовної оптимізації;

«м» – розв'язування задачі забезпечується додатковим модулем;

«+» – функція, яка забезпечує розв'язування задачі, вбудована в ядро програми;

«-» – розв'язування задачі не підтримується програмою.

Таблиця 40.2

Задача оптимізації / *Програма (версія)*	Задача одновимірної оптимізації	Задача безумовної оптимізації функції багатьох змінних	Задача лінійного програмування	Задача квадратичного програмування	Задача нелінійної умовної оптимізації
Mathcad 2000 Professional	Minimize, Maximize	Minimize, Maximize	Minimize, Maximize	Minimize, Maximize	Minimize, Maximize
Matlab 6.5	Fminbnd (пакет Optimization Toolbox)	Fminsearch, Fminunc (пакет Optimization Toolbox)	Linprog (пакет Optimization Toolbox)	Quadprog (пакет Optimization Toolbox)	Fmincon (пакет Optimization Toolbox)
Mathematica 4.1	FindMinimum	FindMinimum	ConstrainedMax, ConstrainedMin, LinearProgramming		
Maple 7.0	Minimize, Maximize, Extrema	Minimize, Maximize, Extrema	Extrema, Пакет розширення Simplex	Extrema	Extrema

Розглянемо основні вбудовані функції та деякі пакети розширення СКМ Mathcad, Matlab, Mathematica і редактора електронних таблиць MS Excel, які можна використовувати для знаходження екстремумів функцій від однієї та багатьох змінних, а також для розв'язування задач лінійного і нелінійного програмування.

7.1. Використання пакету Mathcad для розв'язування задач оптимізації. Математичний пакет Mathcad фірми MathSoft Inc. (www.mathsoft.com), починаючи з версії 3.0 під Windows, має статус універсальної математичної системи. До її позитивних рис можна віднести такі:

– Mathcad – єдина система комп'ютерної математики, в якій опис алгоритму розв'язування задач здійснюється мовою, аналогічною звичайній математичній мові опису математичних задач;

– інтерфейс системи Mathcad один з найкращих серед математичних пакетів; в ній вперше за допомогою палітр була реалізована можливість введення математичних спеціальних знаків і символів, серед яких різноманітні операції, функції, оператори програмування, букви грецького алфавіту тощо;

– не дивлячись на певну обмеженість засобів символьної математики у порівнянні з такими системами, як Maple, Mathematica, Matlab, пакет Mathcad містить засоби, яких досить для розв'язування більшості математичних задач, при цьому ядро символьної математики системи використовується для оптимізації обчислень завжди, коли це можливо: система намагається одержати результат в аналітичному вигляді, а потім вже використовувати його для чисельних обрахунків (наприклад, при знаходженні похідних, інтегралів, побудові графіків функцій тощо);

– останні версії системи Mathcad, зокрема Mathcad 2000 Professional, містять системний інтегратор MathConnex, який забезпечує пряму інтеграцію пакету Mathcad з багатьма програмами різного класу.

Починаючи з версії 8.0, система Mathcad має у своєму арсеналі потужні засоби для розв'язування задач лінійної і нелінійної оптимізації. Розглянемо ці засоби на прикладі системи Mathcad 2000 Professional.

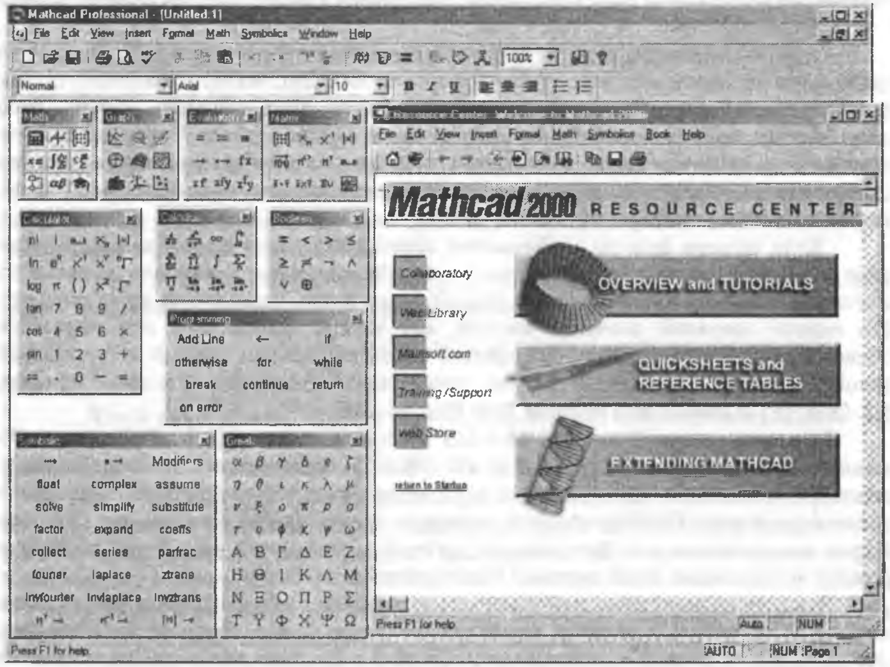


Рис. 40.1.

Запис умови екстремальної задачі в системі Mathcad здійснюється у формі, яка схожа на загальноприйнятий в математиці запис, при цьому користувачу надається можливість використовувати, крім клавіатури, панелі інструментів, які відкриваються за допомогою панелі *Math* пакету (рис. 40.1), зокрема:

Calculator – для створення основних математичних виразів;
Matrix – для запису матричних виразів;
Calculus – для запису складних сум, добутків, границь, похідних, інтегралів;
Boolean – для запису рівнянь, нерівностей, логічних виразів;
Greek – для запису літер грецького алфавіту.

Для графічних побудов у системі Mathcad використовується панель *Graph*.

Останні версії пакету Mathcad мають досить широкі можливості щодо розв'язування математичних задач в символьному вигляді. Символьні перетворення математичних виразів здійснюються за допомогою операції символьних обчислень (Symbolic Evalution) (символ «→»), яку можна активізувати за допомогою палітри символьних перетворень (*Symbolic*), панелі *Evalution*, або комбінації клавіш «Ctrl»+«.». Крім того, символьні перетворення можна виконувати за допомогою наступних дій Symbolics\Evaluate\Symbolically, або за допомогою комбінації клавіш «Shift»+«F9».

Для розв'язування задач оптимізації за допомогою системи Mathcad використовуються вбудовані функції *Maximize* і *Minimize*, які мають такий синтаксис:

Minimize(*f*, *var*1, *var*2, ..., *varN*),
Maximize(*f*, *var*1, *var*2, ..., *varN*),

де *f* – ім'я цільової функції задачі, *var*1, *var*2, ..., *varN* – змінні, від яких залежить цільова функція.

Результатом виконання функцій *Minimize* і *Maximize* є вектор-стовпчик, який є точним або наближеним розв'язком задачі відшукання відповідного екстремуму функції *f* із заданою точністю.

При розв'язуванні задачі оптимізації у вікні редактора Mathcad 2000 Professional треба спочатку задати вхідні дані задачі (значення констант, векторів, матриць), цільову функцію та початкові значення змінних, від яких вона залежить. Потім, якщо розв'язується задача умовної оптимізації, записати службове слова *Given*, яке визначає початок *розв'язкового блоку* (solve block), і після нього записати обмеження задачі (*обмеження-рівняння*, *обмеження-нерівності*, *прямі обмеження*). При цьому запис можна здійснити у векторному або матричному вигляді.

Коли цільова функція і обмеження задачі (якщо вони є) описані, записується одна з функцій оптимізації (*Maximize*() або *Minimize*()) за правилами відповідного синтаксису. Причому можна відразу отримати результат, натиснувши на клавішу «=», або надати одержане значення змінній, яку можна використати при подальших обчисленнях, наприклад, для знаходження значення цільової функції в оптимальній точці. На рис. 40.2 показано результат розв'язування транспортної задачі з прикладу 5.2. (див. §5) за допомогою Mathcad 2000 Professional.

З а у в а ж е н н я. В системі Mathcad нумерація стовпчиків і рядків матриці за замовченням починається з нуля, а не з одиниці, як прийнято традиційно. Для зміни початкового значення індексу матриці використовується змінна ORIGIN. Наприклад за допомогою виразу ORIGIN:=1, який задається перед описом матриці, всі її індекси будуть нумеруватися з 1. Значення цієї змінної можна також змінити за допомогою режиму встановлення опцій системи: Math\Options\Array Origin.

При розв'язуванні задач нелінійного програмування, вказавши за допомогою мишки на функції *Maximize* або *Minimize*, в контекстному меню можна обрати один з ітераційних методів пошуку екстремуму, зокрема метод лінійних наближень, метод квазіньютонівських наближень, метод спряжених градієнтів, метод квадратичних наближень.

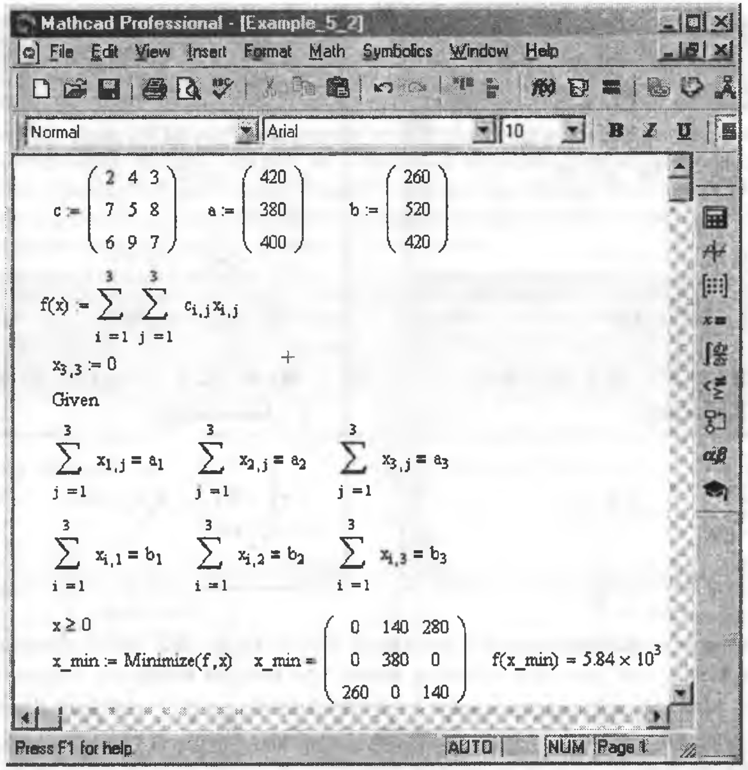


Рис. 40.2.

Оскільки для розв'язування задач оптимізації в системі Mathcad використовуються наближені ітераційні методи, то результат часто залежить від обраного початкового наближення. Тому при розв'язуванні реальних задач потрібно шукати розв'язки при різних початкових даних і обов'язково аналізувати одержані результати.

П р и к л а д 40.1. За допомогою функції *Minimize* системи Mathcad розв'язати задачу нелінійного програмування (див. завдання 20.1 §37):

$$f(x) = x_1^3 - 6x_1^2 + 11x_1 + x_3 \to \min,\ x \in X,$$

де

$$X = \{x \in R^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \le 0;\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ge 4;\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ 0 \le x_3 \le 5\},$$

при початкових наближеннях: а) $x^{(0)} = (10, 10, 10) \notin X$; б) $x^{(0)} = (4, 3, 5) \in X$.

Для розв'язування поставленої задачі скористаємося квазіньютонівським методом. Для цього після введення умови задачі треба за допомогою правої кнопки мишки, вказавши нею на функцію *Minimize*, в контекстному меню обрати Nonlinear\Quasi-Newton.

Як видно з рис. 40.3 і рис. 40.4 для різних початкових наближень одержано різні результати. При цьому наближеним розв'язком поставленої задачі є

$$x^* \approx (0; 1{,}414; 1{,}414),\quad f(x^*) \approx 1{,}414.$$

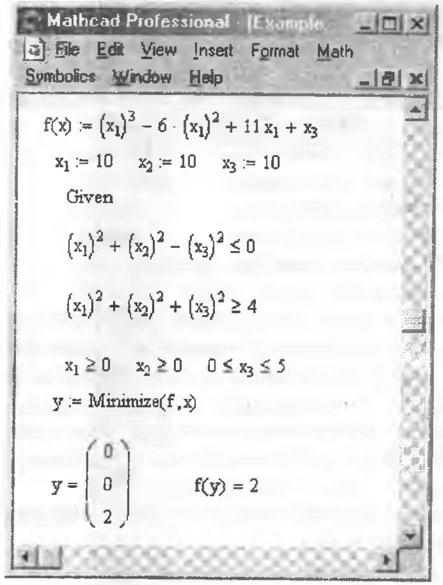


Рис. 40.3.

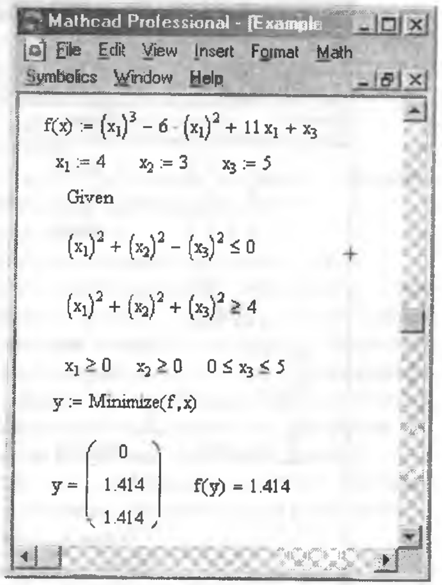


Рис. 40.4.

В системі Mathcad є певні проблеми з розв'язуванням задач цілочислового програмування. Так при розв'язування задачі про розкрій матеріалу з прикладу 5.4 (див. §5) Mathcad не дає можливості описати умови $x_j \in Z,\ j=\overline{1,9}$, що призводить до некоректного результату (рис. 40.5), оскільки кількість заготовок не може бути дробовим числом.

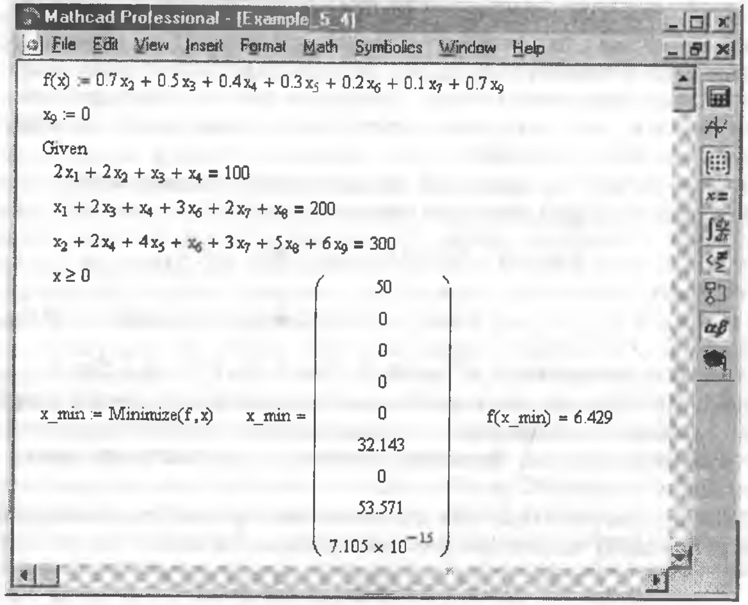


Рис. 40.5.

Для того щоб функції *Minimize* і *Maximize* підтримували розв'язування задач цілочислового лінійного програмування, необхідно додатково використовувати пакет розширення *Solving and Optimization Extension Pack* (*Expert Solver*).

В системі Mathcad екстремальні задачі можна розв'язувати і за допомогою класичних методів (див. §8-10), при цьому розв'язок можна одержати не лише у чисельному, а й в аналітичному вигляді. На рис. 40.6 показано результат розв'язування задачі Тартальї (див. приклад 8.3, §8) в аналітичному і чисельному вигляді. При цьому $x1$ – точка максимуму функції $f(x)$, оскільки друга похідна в точці $x1$ менше нуля, $x2$ – точка мінімуму, оскільки друга похідна в точці $x2$ більше нуля.

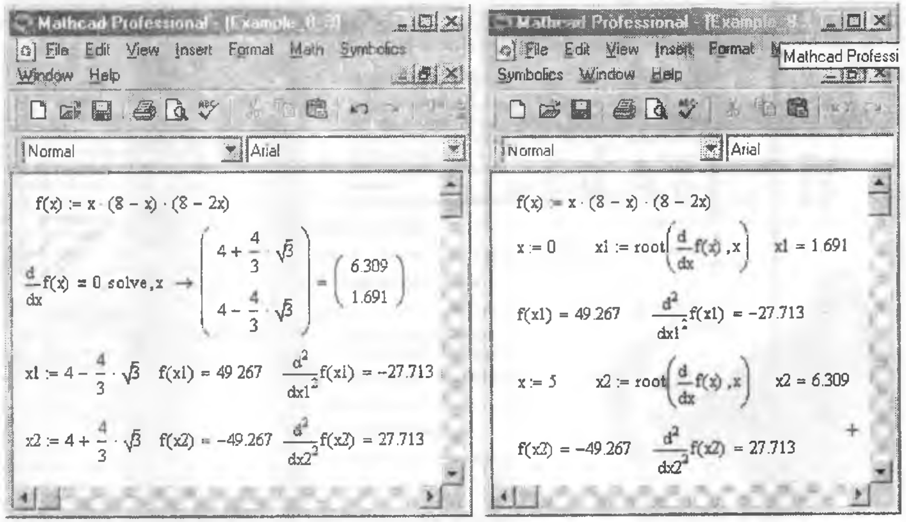


Рис. 40.6.

При розв'язуванні задачі було використано операції диференціювання $\dfrac{d}{dx}f(x)$, $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ – для знаходження першої і другої похідних функції $f(x)$, команду solve для розв'язування рівняння $\dfrac{d}{dx}f(x)=0$, яка активізується або через систему меню Symbolics\Variable\Solver, або за допомогою панелі Symbolic, а також функцію *root*(*f*(*var*), *var*, [*a*, *b*]), за допомогою якої знаходяться наближені корені рівняння виду *f*(*var*)=0 на проміжку [*a*, *b*] відносно змінної *var*.

З а у в а ж е н н я. Для знаходження всіх коренів многочлена *n*-го степеня виду $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ в системі Mathcad можна використовувати функцію *polyroots*(*a*), де $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)^T$ – вектор-стовпчик коефіцієнтів заданого многочлена.

На рис. 40.7 показано, як задачу з прикладу 10.1 (див. §10) розв'язано за допомогою методу множників Лагранжа.

При цьому використано функцію *find*(*var*1, *var*2, ..., *varN*) для розв'язування систем нелінійних рівнянь і нерівностей, що знаходяться у розв'язковому блоці. Перед використанням цієї функції змінним *var*1, *var*2, ..., *varN* необхідно надати початкові значення.

П р и м і т к и.

1. В системі Mathcad для наближеного розв'язування систем нелінійних рівнянь можна використовувати також функцію *Minerr*(*var*1, *var*2, ..., *varN*).

2. Для розв'язування систем лінійних рівнянь виду $Ax=b$ можна використовувати функцію *lsolve*(*A*,*b*), де *A* – невироджена квадратна матриця коефіцієнтів системи, *b* – вектор-стовпчик вільних членів системи рівнянь.

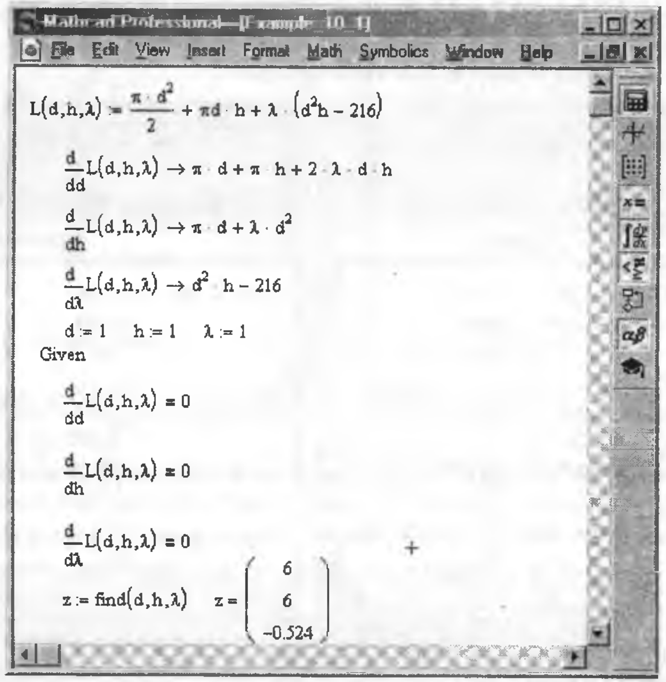


Рис. 40.7.

7.2. Використання пакету Matlab для розв'язування задач оптимізації. Пакет Matlab являє собою апробовану і надійну СКМ, яка призначена для розв'язування широкого кола математичних задач з поданням даних в універсальній матричній формі, яка запропонована фірмою Math Works Inc. (www.mathworks.com).

Matlab є універсальною інтегрованою СКМ, яка орієнтована на персональні комп'ютери класу IBM PC і Macintosh, робочі станції UNIX, і яка має потужні засоби діалогу, графіки і комплексної візуалізації, широкий спектр застосувань, включаючи опрацювання сигналів і зображень, проектування систем управління, розв'язування задач в галузі природничих наук, фінансів та економіки, приладобудування тощо. Відкрита архітектура дозволяє використовувати Matlab у поєднанні з іншими програмними продуктами для створення інструментів дослідження і розв'язування різноманітних задач.

Популярності системи Matlab сприяє її розширення Simulink, за допомогою якого можна здійснювати імітаційне моделювання лінійних і нелінійних динамічних систем, а також багато інших пакетів розширення (Toolbox), які підсилюють математичні можливості системи, підвищують швидкість, ефективність і точність обчислень (рис. 40.8). До таких пакетів відноситься Optimization Toolbox – пакет для розв'язування оптимізаційних задач, який реалізує основні методи оптимізації функцій багатьох змінних:

- безумовної оптимізації нелінійних функцій;
- умовної мінімізації нелінійних функцій;
- лінійного програмування;
- квадратичного програмування;
- багатокритеріальної оптимізації.

Рис. 40.8.

Розглянемо основні можливості використання пакету Matlab версії 6.5 для розв'язування оптимізаційних задач на конкретних прикладах.

П р и к л а д 40.2. Знайти наближений розв'язок задачі одновимірної мінімізації функції $f(x)=3x^4+5x^3-10x^2+6x$ на відрізку $[a;\,b]=[-4;\,2]$ (див. завдання 18.1 §25).

Розв'яжемо поставлену задачу за допомогою функції fminbnd, яка використовується для знаходження точки локального мінімуму функції на заданому інтервалі [*a*; *b*] і значення функції у цій точці.

Дії, які необхідно виконати для розв'язування поставленої задачі за допомогою функції fminbnd, подано на рис. 40.9.

Функція fminbnd може використовуватися у різних формах:

x = fminbnd(fun,x1,x2);
x = fminbnd(fun,x1,x2,options);
x = fminbnd(fun,x1,x2,options,p1,p2,...);
[x,fval] = fminbnd(...);
[x,fval,exitflag] = fminbnd(...);
[x,fval,exitflag,output] = fminbnd(...);

при цьому в результаті виконання:

- x = fminbnd(fun,x1,x2) – повертається точка x, яка є деяким наближенням точки локального мінімуму функції, яка описана у змінній fun, на інтервалі [x1; x2];

- x = fminbnd(fun,x1,x2,options) – схожа з описаною вище формою функції fminbnd, але при цьому використовуються параметри з набору вектора параметрів options, який містить понад 30 параметрів і які попередньо встановлюються за допомогою команди optimset. До таких параметрів відносяться, наприклад: tolX – величина ітераційної похибки, MaxFunEval – максимальна кількість обчислень значень цільової функції, MaxIter – максимальна кількість ітерацій, Display – виведення додаткових відомостей про знаходження точки екстремуму за допомогою певних параметрів, зокрема, якщо встановлено параметр 'iter', то виводяться відомості про кожну зроблену ітерацію. Якщо треба використати параметри обчислень за замовчуванням, то замість options необхідно ввести [] (порожній масив);
- x = fminbnd(fun,xl,x2,options,p1,p2,...) – схожа з описаною вище формою функції fminbnd, але до цільової функції передаються додаткові аргументи: p1, p2, ... ;
- [x,fval] = fminbnd(...) – додатково повертається значення цільової функції в точці x, яке присвоюється змінній з іменем fval;
- [x,fval,exitflag] = fminbnd(...) – додатково повертається значення параметра exitflag, яке дорівнює 1, якщо задача розв'язана із заданою точністю tolX, і 0, якщо зроблено максимальну кількість ітерацій, яка задана за допомогою параметра MaxIter;
- [x,fval,exitflag,output] = fminbnd(...) – додатково повертається структура output, що містить такі відомості, як кількість зроблених ітерацій (Iterations), кількість обчислень значень функції (funcCount), назва алгоритму, який використовувався при розв'язуванні (algorithm).

У наведених формах функції fminbnd використані такі позначення:
fun – рядкова змінна, яка містить функцію, що мінімізується;
x1, x2 – початок і кінець інтервалу, на якому шукається мінімум цільової функції;
options – вектор параметрів обчислень;
p1, p2, ...– додаткові, крім x, аргументи, які передаються до цільової функції.

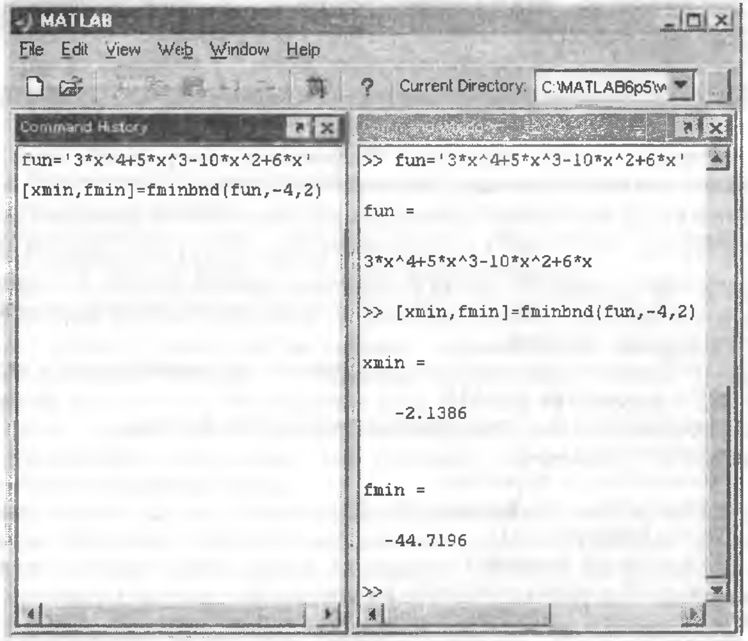


Рис. 40.9.

В залежності від форми задання функції fminbnd і вхідних даних, знаходження точки мінімуму відбувається за відомими методами: золотого перерізу і парабол (див. §25).

Наприклад, в результаті виконання у вікні Command window пакету Matlab команди

\>> [xmin,fmin,exitflag,output]=fminbnd(fun,-4,2,optimset('tolX',1.e-8,'display','iter'))

буде одержано

Func-count	x	f(x)	Procedure
1	-1.7082	-38.8077	initial
2	-0.291796	-2.7047	golden
3	-2.58359	-34.813	golden
4	-1.9719	-43.6941	parabolic
5	-2.08546	-44.6089	parabolic
6	-2.17372	-44.6691	parabolic
7	-2.13894	-44.7196	parabolic
8	-2.13815	-44.7196	parabolic
9	-2.13863	-44.7196	parabolic
10	-2.13863	-44.7196	parabolic
11	-2.13863	-44.7196	parabolic
12	-2.13863	-44.7196	parabolic

```
Optimization terminated successfully:
the current x satisfies the termination criteria using OPTIONS.TolX of 1.000000e-008
xmin = -2.1386
fmin = -44.7196
exitflag = 1
output =
        iterations: 12
        funcCount: 14
        algorithm: 'golden section search, parabolic interpolation'.
```

Для знаходження мінімуму нелінійної функції багатьох змінних $f(x_1,x_2,...,x_n)$ на її області визначення в пакеті Matlab використовуються такі функції:

– *fminsearch*, яка реалізує симплексний метод Нелдера-Міда (див. §28);

– *fminunc*, яка реалізує квазіньютонівські методи (див. §29) типу Давідона-Флетчера-Пауелла для мінімізації нелінійної диференційовної функції і входить до пакету Optimization Toolbox.

Функція *fminsearch* має такий синтаксис:

x = fminsearch(fun,x0);
x = fminsearch(fun,x0,options);
x = fminsearch(fun,x0,options,p1,p2,...);
[x,fval] = fminsearch(...);
[x,fval,exitflag] = fminsearch(...);
[x,fval,exitflag,output] = fminsearch(...);

при цьому в результаті виконання:

- x = fminsearch(fun,x0) – повертається вектор x, який є деяким наближенням точки локального мінімуму функції fun в околі точки x0. Початкове наближення x0 може бути числом при мінімізації функції однієї змінної, або вектором для функції багатьох змінних;

- x = fminsearch(fun,x0,options) – схожа з описаною вище формою функції fminsearch, але додатково використовується вектор параметрів options аналогічно тому, як і в функції fminbnd;
- x = fminsearch(fun,x0,options,p1,p2,...) – аналогічна до описаної вище функції, але до функції кількох змінних fun(x,p1,p2,...), що мінімізується, передаються додаткові аргументи p1, p2, ... Якщо треба використати параметри обчислень за замовчуванням, то замість options перед p1, p2 необхідно ввести [];
- [x,fval] = fminsearch(...) – додатково повертається значення параметра fval, яке дорівнює значенню цільової функції в точці x;
- [x,fval,exitflag] = fminsearch(...) – додатково повертається значення параметра exitflag, яке дорівнює 1, якщо ітераційний процес завершився у відповідності до заданої точності обчислень, що визначається за параметром tolX, -1, якщо ітераційний процес не збігається до розв'язку, і 0, якщо було перевищено максимальну кількість ітерацій, що визначається за параметром MaxIter;
- [x,fval,exitflag,output]= fminsearch(...) – додатково повертається структура output, яка має такі поля:
  - iterations – кількість виконаних ітерацій;
  - funcCount – кількість обчислень значень цільової функції;
  - algorithm – назва алгоритму, який було використано для розв'язування.

Функція *fminunc* має такий синтаксис:

x = fminunc(fun,x0);
x = fminunc(fun,x0,options);
x = fminunc(fun,x0,options,p1,p2,...);
[x,fval] = fminunc(...);
[x,fval,exitflag] = fminunc(...);
[x,fval,exitflag,output] = fminunc(...);
[x,fval,exitflag,output,grad] = fminunc(...);
[x,fval,exitflag,output,grad,hessian] = fminunc(...),

де x0 – початкове наближення, x – точка, яка є деяким наближенням точки локального мінімуму цільової функції, параметри fval, fun, options, exitflag, output, p1, p2 мають аналогічні значення, як і для функції fminsearch, grad – вектор градієнта цільової функції, яка описується в fun, hessian – гессіан (матриця частинних похідних другого порядку (див. §9)) цільової функції, значення яких можна вивести на екран.

Так, наприклад, в результаті виконання команди

[x,fval,exitflag,output,grad,hessian] = fminunc(fun,x0)

параметр grad одержить значення градієнта цільової функції в точці x, яка є результатом розв'язування поставленої задачі, а параметр hessian – гессіан функції в точці x. Але для цього треба спочатку виконати команди, за допомогою яких будуть активізовані відповідні параметри вектора options:

>>options = optimset('GradObj','on'),
>>options = optimset('Hessian','on').

П р и к л а д 40.3. За допомогою функцій *fminsearch* і *fminunc* пакету Matlab знайти точку мінімуму функції Розенброка (див. завдання 16, §28):

$$f(x_1,x_2)=100(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2$$

при початковому наближенні $x^{(0)}=(-1{,}9;2)$.

Як відомо, мінімальне значення цієї функції дорівнює нулю і досягається в точці $x^*=(1,1)$.

Для розв'язування задачі спочатку треба описати цільову функцію, наприклад, за допомогою команди:

>>fun='100*(x(2)-x(1)^2)^2+(1-x(1))^2'

і потім встановити необхідну точність обчислень, наприклад:

>>options=optimset('tolX',1.e-6).

Після цього для знаходження точки мінімуму за допомогою функції fminsearch треба набрати і виконати команду:

>> [xmin,fmin,exitflag,output]=fminsearch(fun,[-1.9 2]).

Результат її виконання подано на рис. 40.10.

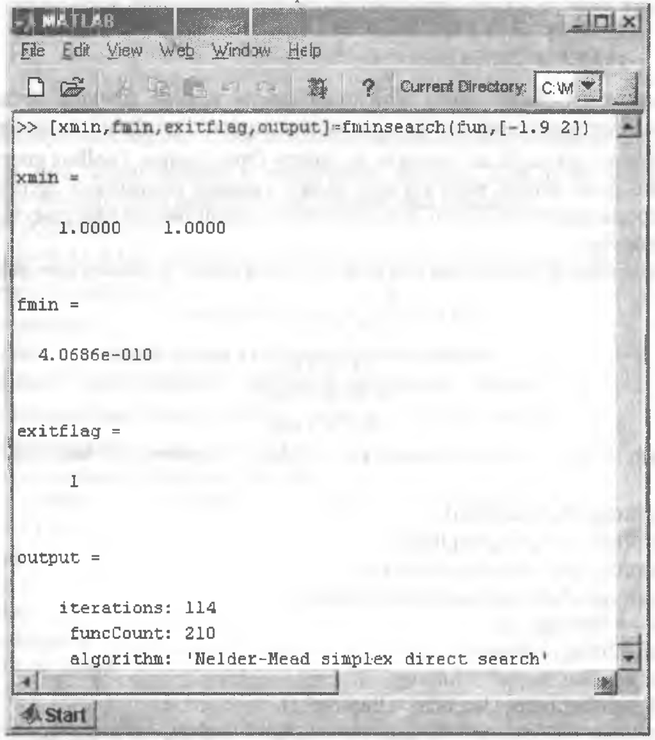


Рис. 40.10.

Для розв'язування поставленої задачі за допомогою функції *fminunc* можна виконати, наприклад, команду:

>> [xmin,fmin,exitflag,output,grad,hessian]=fminunc(fun,[-1.9 2]).

Після цього буде одержано:

Warning: Gradient must be provided for trust-region method;
using line-search method instead.
> In C:\MATLAB6P5\toolbox\optim\fminunc.m at line 211
Optimization terminated successfully:
Current search direction is a descent direction, and magnitude of
directional derivative in search direction less than 2*options.TolFun
xmin = 0.9999 0.9999
fmin = 4.0636e-009
exitflag = 1

```
output =
        iterations: 27
        funcCount: 166
        stepsize: 0.8771
        firstorderopt: 0.0032
        algorithm: 'medium-scale: Quasi-Newton line search'
grad =
        0.0032
        -0.0018
hessian =
        825.7828  -413.1772
        -413.1772  207.3416
```

Примітки. Якщо треба знайти максимум заданої функції, то досить перед функцією поставити знак «мінус» і скористатися однією з розглянутих функцій.

Розглянемо функції, які входять до пакету Optimization Toolbox системи Matlab і за допомогою яких можна розв'язувати задачі умовної оптимізації функцій багатьох змінних, зокрема задачі лінійного, квадратичного і нелінійного програмування: *linprog*, *quadprog*, *fmincon*.

Функція *linprog* призначена для розв'язування задачі лінійного програмування виду

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j=\langle c,x\rangle \to \min,$$
$$A\cdot x\le b,$$
$$Aeq\cdot x=beq,$$
$$lb\le x\le ub,$$

де c, x, b, beq, lb, ub – вектор-стовпчики, A, Aeq – прямокутні матриці, і має такий синтаксис:

```
x = linprog(c,A,b,Aeq,beq);
x = linprog(c,A,b,Aeq,beq,lb,ub);
x = linprog(c,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0);
x = linprog(c,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options);
[x,fval] = linprog(...);
[x,fval,exitflag] = linprog(...);
[x,fval,exitflag,output] = linprog(...);
[x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog(...).
```

Розглянемо особливості параметрів exitflag і lambda, які використовуються в функції linprog. Так параметр exitflag приймає значення 1, якщо ітераційний процес завершився у відповідності до заданої точності обчислень, -1, якщо ітераційний процес не збігається до розв'язку, і 0, якщо було перевищено максимальну кількість ітерацій, яка визначається за параметром MaxIter, або максимальну кількість обчислень значень цільової функції, яка визначається за параметром MaxFunEvals.

Параметр lambda являє собою структуру з полями, які містять значення множників Лагранжа для кожної групи обмежень задачі в точці x, що є результатом розв'язування поставленої задачі:

- ineqlin – для обмежень-нерівностей,
- eqlin – для обмежень-рівнянь,
- upper – для прямих обмежень типу $x\le ub$,
- lower – для прямих обмежень типу $lb\le x$,

при цьому ненульові елементи векторів у полях параметра lambda відповідають активним обмеженням для знайденої точки x.

Зауважимо, що якщо в умові задачі деякі вхідні дані відсутні, то замість відповідних величин треба ставити []. Наприклад, якщо в умові задачі відсутні обмеження-нерівності, то треба покласти A=[] і b=[].

Приклад 40.4. За допомогою функції *linprog* пакету Matlab розв'язати задачу про сплав (див. приклад 5.3 §5).

Математична модель задачі має такий вигляд:

$$f(x)=60x_1+80x_2+40x_3+50x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 0{,}24x_1+0{,}15x_2+0{,}36x_3+0{,}42x_4=0{,}3,\\ 0{,}26x_1+0{,}45x_2+0{,}18x_3+0{,}38x_4=0{,}25,\\ 0{,}5x_1+\ 0{,}4x_2+0{,}46x_3+\ 0{,}2x_4=0{,}45,\end{cases}$$

$$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4},$$

де x_j – кількість j-го сплаву, яку треба витратити на кожний кілограм нового сплаву $j=\overline{1,4}$.

Вхідні дані задачі подамо у матричному вигляді. Для цього у вікні Command window пакету Matlab треба виконати послідовно такі команди:

```
>> c=[60;80;40;50]
>> Aeq=[0.24 0.15 0.36 0.42; 0.26 0.45 0.18 0.38; 0.5 0.4 0.46 0.2]
>> beq=[0.3;0.25;0.45]
>> lb=zeros(4,1),
```

де функція zeros – створює масив з нульовими елементами.

Після цього треба набрати і виконати, наприклад, команду

```
>> [x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog(c,[],[],Aeq,beq,lb)
```

при цьому буде одержано такий результат:

```
Optimization terminated successfully.
x =     0.0962          0.2308          0.6731          0.0000
fval =  51.1538
exitflag = 1
output =
iterations: 5
cgiterations: 0
algorithm: 'lipsol'
lambda =
ineqlin: [0x1 double]
        eqlin: [3x1 double]
        upper: [4x1 double]
        lower: [4x1 double]
>> lambda.upper
ans =    0    0    0    0
>>lambda.lower
ans =   0.0000   0.0000   0.0000   10.7692
>>lambda.eqlin
ans =   57.1795  -122.3077   -83.8462
>>lambda.ineqlin
ans =   Empty matrix: 0-by-1.
```

Таким чином, оптимальний план використання наявних сплавів при виготовленні одного кілограма нового сплаву наближено дорівнює

$$X^*\approx(0{,}0962;\ 0{,}2308;\ 0{,}6731;\ 0{,}0000),$$

або у відсотках $X^*\approx(9.62\%;\ 23.08\%;\ 67.31\%;\ 0\%)$, при витратах $f(X^*)\approx 51{,}1538$ грн.

При розв'язуванні задачі використано метод внутрішньої точки LIPSOL – Linear Interior Point Solver (див., наприклад, Zhang, Y., «Solving Large-Scale Linear Programs by Interior-Point Methods Under the MATLAB Environment», Technical Report TR96-01, Department of Mathematics and Statistics, University of Maryland, Baltimore County, Baltimore, MD. July 1995.), який застосовується, як правило, для розв'язування задач великої розмірності (large-scale).

Функція *quadprog* призначена для розв'язування задачі квадратичного програмування виду

$$f(x)=\frac{1}{2}\langle Hx,x\rangle+\langle c,x\rangle\to\min, \tag{40.1}$$

$$A\cdot x\le b, \tag{40.2}$$

$$Aeq\cdot x=beq, \tag{40.3}$$

$$lb\le x\le ub, \tag{40.4}$$

де H – симетрична невід'ємно визначена квадратна матриця, A, Aeq – прямокутні матриці, c, b, beq, lb, ub, x – вектор-стовпчики, і має такий синтаксис:

x = quadprog(H,c,A,b);
x = quadprog(H,c,A,b,Aeq,beq);
x = quadprog(H,c,A,b,Aeq,beq,lb,ub);
x = quadprog(H,c,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0);
x = quadprog(H,c,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options);
x = quadprog(H,c,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options,p1,p2,...);
[x,fval] = quadprog(...);
[x,fval,exitflag] = quadprog(...);
[x,fval,exitflag,output] = quadprog(...);
[x,fval,exitflag,output,lambda] = quadprog(...).

П р и к л а д 40.5. За допомогою функції *quadprog* пакету Matlab розв'язати задачу квадратичного програмування (див. завдання 7.1 §34):

$$f(x)=x_1^2+4x_1x_2+6x_2^2+5x_1+8x_2\to\min,\quad x\in X,$$

де $X=\{x\in R^2\mid x_1\ge 0,\,x_2\ge 0,\,x_1+x_2\ge 3\}$, $x^{(0)}=(4,4)$.

Перед розв'язуванням поставленої задачі її спочатку доцільно записати у вигляді (40.1)-(40.4):

$$f(x)=\frac{1}{2}\left\langle\begin{pmatrix}2&4\\4&12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right\rangle+\left\langle\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right\rangle\to\min,$$

$$-x_1-x_2\le 3,$$

$$0\le x_1,$$

$$0\le x_2.$$

Потім у вікні Command Window пакету Matlab для введення вхідних даних задачі треба виконати послідовно такі команди:

```
>> H = [2 4; 4 12]
>> c = [5; 8]
>> lb = zeros(2,1)
>> A = [-1 -1]
>> b=-3
>> x0=[4; 4]
```

Після цього набрати і виконати, наприклад, команду:

```
>>[x,fval,exitflag,output] = quadprog(H,c,A,b,[],[],lb,[],x0),
```

в результаті буде одержано:


```
Warning: Large-scale method does not currently solve this problem formulation,
switching to medium-scale method.
> In C:\MATLAB6P5\toolbox\optim\quadprog.m at line 213
Optimization terminated successfully.
x =      3.0000          0
fval = 24.0000
exitflag = 1
output =
        iterations: 2
        algorithm: 'medium-scale: active-set'
        firstorderopt: []
        cgiterations: [].
```

При цьому використано метод для розв'язування задач середньої розмірності (Medium-Scale Optimization), подібний до методу, описаному в роботі Gill, P. E. and W. Murray, and M.H. Wright, Practical Optimization, Academic Press, London, UK, 1981.

Зауважимо, що для розв'язування задач квадратичного програмування великої розмірності (Large-Scale Optimization), а також при відсутності обмежень-нерівностей, або при наявності лише обмежень-рівнянь, або при наявності лише прямих обмежень використовується метод, який базується на методі Interior-reflective Newton, описаному в роботі Coleman, T.F. and Y. Li, «A Reflective Newton Method for Minimizing a Quadratic Function Subject to Bounds on some of the Variables», SIAM Journal on Optimization, Vol. 6, Number 4, pp. 1040-1058, 1996.

Функція *fmincon* призначена для розв'язування задачі нелінійного програмування виду

$$f(x)\to\min, \tag{40.5}$$

$$c(x)\le 0, \tag{40.6}$$

$$ceq(x)=0, \tag{40.7}$$

$$A\cdot x\le b, \tag{40.8}$$

$$Aeq\cdot x=beq, \tag{40.9}$$

$$lb\le x\le ub, \tag{40.10}$$

де $c(x)$, $ceq(x)$ – вектор-функції, компоненти яких, як і функція $f(x)$, можуть бути нелінійними, x, b, beq, lb, ub – вектор-стовпчики, A, Aeq–прямокутні матриці. Вона має такий синтаксис:

x = fmincon(fun,x0,A,b);
x = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq);
x = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub);
x = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon);
x = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,options);
x = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,options,p1,p2, ...);
[x,fval] = fmincon(...);
[x,fval,exitflag] = fmincon(...);
[x,fval,exitflag,output] = fmincon(...);
[x,fval,exitflag,output,lambda] = fmincon(...);
[x,fval,exitflag,output,lambda,grad] = fmincon(...);
[x,fval,exitflag,output,lambda,grad,hessian] = fmincon(...).

Розглянемо особливості використання параметра nonlcon, за допомогою якого у функції fmincon визначаються нелінійні обмеження-нерівності виду (40.6) та обмеження-рівняння виду (40.7).

Функція nonlcon має в якості вхідного параметра вектор x, а повертає значення, як правило, двох векторів c і ceq. Вектор c містить значення нелінійних функцій, що відповідають лівим частинам обмежень-нерівностей, в точці x, а вектор ceq містить значення нелінійних функцій, що відповідають лівим частинам обмежень-рівнянь, в точці x. Функція nonlcon може бути визначена як функція користувача. Для цього, виконавши послідовність дій File\New\M-file, в текстовому редакторі Matlab створюється m-файл, наприклад, з ім'ям nonlcon, який описує систему нелінійних обмежень-нерівностей і обмежень-рівнянь.

З а у в а ж е н н я.

1. Якщо в умові задачі відсутні обмеження певного виду, то в m-файлі, в якому описуються нелінійні обмеження, треба записати відповідно c='' або ceq='', при цьому у заголовку функції повинні бути вказані обидва вихідні параметри [c,ceq].
2. Якщо в умові задачі є кілька обмежень-нерівностей або обмежень-рівнянь, то для їх опису використовується матричний запис.

П р и к л а д 40.6. За допомогою функції *fmincon* пакету Matlab розв'язати задачу нелінійного програмування з прикладу 40.1.

Для того щоб розв'язати поставлену задачу треба створити m-файл, наприклад з ім'ям nonlcon (рис. 40.11), який описує систему функціональних обмежень задачі.

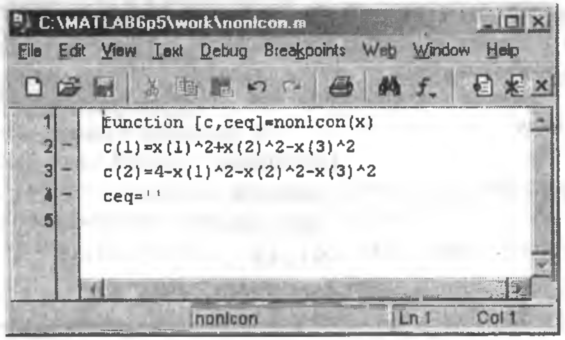


Рис. 40.11.

Потім у вікні Command Window пакету Matlab 6.5 набрати і виконати, наприклад, команди:

```
>>fun='x(1)^3-6*x(1)^2+11*x(1)+x(3)'
>> [x,fval,exitflag,output]=fmincon(fun,[10;10;10],[],[],[],[],[0;0;0],[ ; ;5],@nonlcon).
```

В результаті буде одержано:

```
Optimization terminated: No feasible solution found.
 Search direction less than 2*options.TolX but constraints are not satisfied.
x =    5.0000    10.0000    10.0000
fval =    40.0000
exitflag =    -1
output =
    iterations: 1
    funcCount: 9
    stepsize: 1
    algorithm: 'medium-scale: SQP, Quasi-Newton, line-search'
    firstorderopt: 26.0000
    cgiterations: []
```


Розв'яжемо задачу при іншому значенні початкового наближення:

```
>> [x,fval, exitflag,output] = fmincon(fun,[4;3;5],[],[],[],[],[0;0;0],[ ; ;5],@nonlcon).
```

В результаті буде одержано:

```
Optimization terminated successfully:
First-order optimality measure less than options.TolFun and
maximum constraint violation is less than options.TolCon
   Active Constraints:     1     3
   x =     4     3     5
   fval =     17
   exitflag =     1
   output =
       iterations: 1
       funcCount: 9
       stepsize: 1
       algorithm: 'medium-scale: SQP, Quasi-Newton, line-search'
       firstorderopt: 0
       cgiterations: []
```

Як видно з одержаних результатів, у обох випадках не було знайдено розв'язку, який би співпадав з розв'язком, знайденим за допомогою системи Mathcad:

$$x^* \approx (0; 1{,}414; 1{,}414), \quad f(x^*) \approx 1{,}414.$$

Це свідчить про те, що при розв'язуванні реальних оптимізаційних задач треба використовувати різні системи комп'ютерної математики і ретельно аналізувати одержані результати.

7.3. Використання системи Mathematica для розв'язування задач оптимізації. Система комп'ютерної математики Mathematica 1 була створена у 1988 році фірмою Wolfram Research Ltd. (www.wolfram.com) і стала першою справжньою універсальною математичною системою, яка сконцентрувала в собі досвід програмної реалізації різноманітних чисельних і аналітичних обчислень.

Хоча Mathematica традиційно розглядається як система комп'ютерної алгебри, вона є повноцінною універсальною математичною системою, яка поряд із засобами комп'ютерної алгебри надає користувачеві широкі можливості, необхідні для розв'язування математичних задач чисельними методами. Крім того, система Mathematica має потужні графічні засоби, які надають можливість будувати складні плоскі і просторові фігури. Ядро системи не залежить від комп'ютерних платформ, що дозволяє обмінюватися документами (у стилі Notebook) користувачам, які працюють на ПК із різними платформами.

Починаючи з версії Mathematica 3.0, у системі використаний принцип роздільного виведення закінчених елементів інтерфейсу. Зокрема, окремо виводяться рядок головного меню, вікна документів, панелі інструментів і т.д.

У системі Mathematica 4 особливу увагу приділено підвищенню ефективності обчислень, подальшому розширенню графічних можливостей і удосконаленню надійності символьних перетворень.

До інтерфейсу нової версії увійшли найкращі засоби для створення повноцінних документів у стилі Notebook, за аналогією з системою Mathcad введені палітри математичних спеціальних знаків (рис. 40.12). З'явилася можливість задавати як вихідні, так і вхідні вирази в природній математичній формі. Є різноманітні засоби для кольорового і стильового оформлення документів, застосування в них гіперпосилань та для створення електронних книг.

У системи Maple запозичена ідея багатоступінчастої організації контекстної довідкової системи (рис. 40.12). Ця система має 6 великих розділів допомоги. Для кожного розділу використовується чотирьохступінчатий покажчик розділів допомоги, що дозволяє легко знайти кожний з численних підрозділів.

Незважаючи на всі ці нововведення інтерфейсу, велика частина роботи із системою Mathematica 4, як і з іншими системами символьної математики, відбувається в командному режимі з текстовим поданням як вхідних даних, так і результатів чисельних і символьних обчислень. Для виконання простих операцій досить набрати необхідний математичний вираз і для одержання результату натиснути клавіші Shift і Enter одночасно. Приклад реальної роботи із системою Mathematica 4 подано на рис. 40.13.

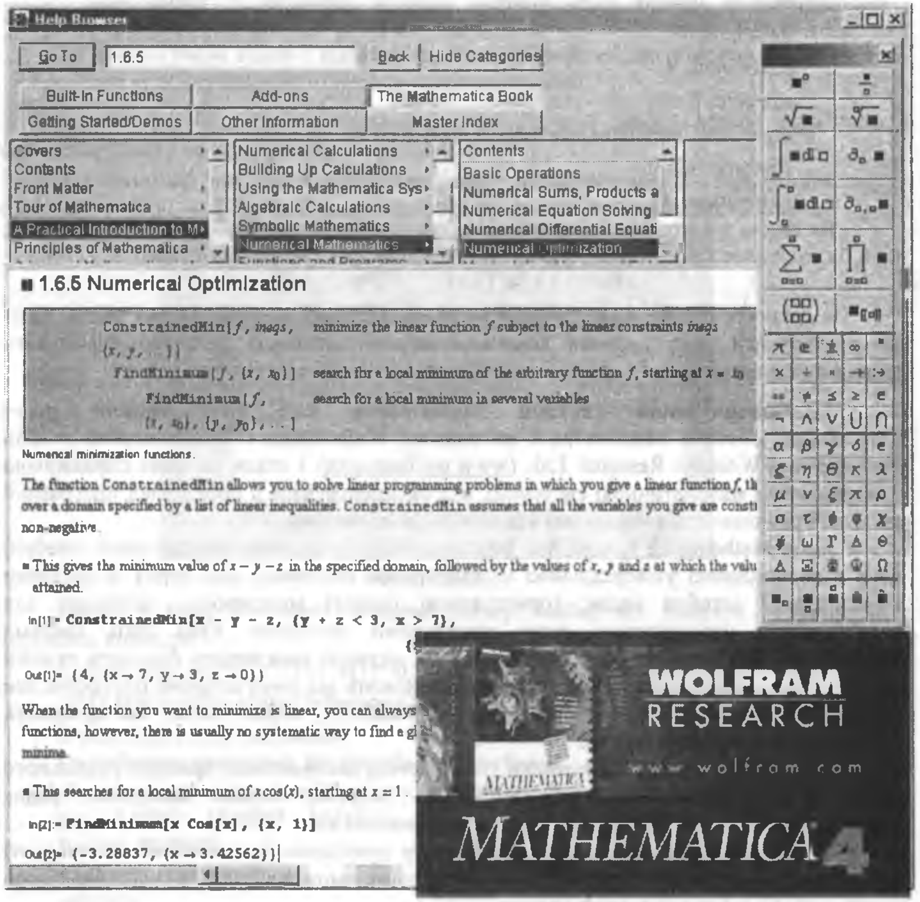


Рис. 40.12.

Системи Mathematica мають ряд функцій, за допомогою яких можна розв'язувати деякі класи задач оптимізації.

Для пошуку локального мінімуму аналітично заданої функції, як однієї, так і багатьох змінних, використовується процедура **FindMinimum**, синтаксис якої має такий вигляд:

FindMinimum[f, {x, x0}] – шукається локальний мінімум функції f, починаючи з точки x=x0;

FindMinimum[f, {x, {x0, x1}}] – шукається локальний мінімум функції f на проміжку [x0; x1];

FindMinimum[f, {x, x0, x1, x2}] – шукається локальний мінімум функції f, починаючи з точки x=x0 і закінчуючи пошук, якщо x виходить за межі проміжку [x1, x2];

FindMinimum[f, {x1, x10}, {x2, x20}, ..., {xn, xn0}] – шукається локальний мінімум функції від кількох змінних x1, x2, ..., xn, де x10, x20, ..., xn0 – початкові значення для відповідних змінних.

Роботою функції **FindMinimum** можна керувати за допомогою 6 параметрів:

- **AccuracyGoai –> Automatic** – точність обчислень цільової функції,
- **Compiled –> True** – цільова функція повинна компілюватися,
- **Gradient –> Automatic** – обчислення градієнта цільової функції,
- **MaxIterations –> N** – максимальна кількість ітерацій (за замовченням 30),
- **PrecisionGoal –> Automatic** – точність обчислень цільової функції,
- **WorkingPrecision –> Precision[1.]** – кількість цифр, яка використовується при обчисленнях (за замовчуванням 16 цифр).

Задавши, наприклад, **Gradient->Automatic**, можна перейти до обчислення символьного значення мінімуму для цільової функції, у якої градієнт обчислюється аналітично.

На рис. 40.13 подано результати використання функції **FindMinimum** для розв'язування задач мінімізації з прикладів 40.2 , 40.3.

П р и м і т к а. Якщо необхідно знайти локальні максимуми цільової функції, то для цього досить перед функцією поставити знак мінус або помножити її на -1.

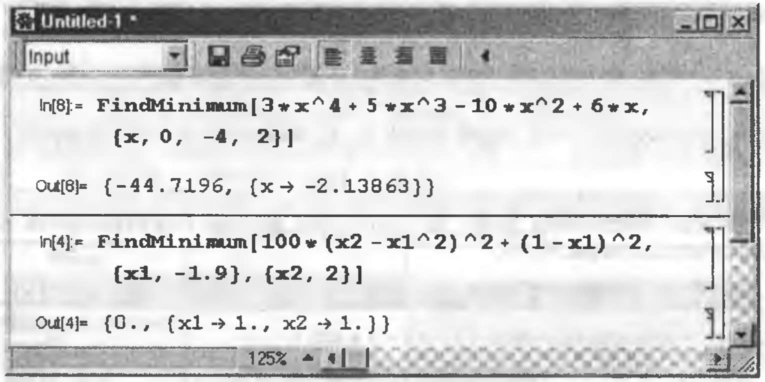


Рис. 40.13.

Система Mathematica має функції, за допомогою яких можна шукати глобальний максимум і мінімум в задачі лінійного програмування з обмеженнями-нерівностями:

ConstrainedMax[f, {inequalities}, {x1, x2, ..., xn}] –

шукається глобальний максимум лінійної функції f в допустимій області, яка визначена нерівностями,

ConstrainedMin[f, {inequalities}, {x1, x2, ..., xn}] –

шукається глобальний мінімум функції f в допустимій області, яка визначена нерівностями, при цьому вважається, що всі змінні x1, x2, ..., xn невід'ємні.

У функціях **ConstrainedMax**, **ConstrainedMin** цільова функція і функції обмежень задаються у символьному вигляді.

Для розв'язування задачі лінійного програмування, яка задана у векторно-матричному вигляді:

$$f(x) = c \cdot x \to \min, \qquad (40.11)$$

$$A \cdot x \geq b, \qquad (40.12)$$

$$x \geq 0, \qquad (40.13)$$

в системі Mathematica можна використовувати функцію **LinearProgramming**, яка має такий синтаксис:

LinearProgramming[c, A, b] –

шукається вектор x, який є розв'язком задачі виду (40.11)-(40.13), де c – вектор коефіцієнтів цільової функції, A – список рядків матриці обмежень, b – вектор вільних членів системи обмежень.

П р и к л а д 40.7. За допомогою системи Mathematica розв'язати задачу про раціон (приклад 5.7 §5).

Побудуємо математичну модель задачі. Нехай x_1 – необхідна норма їжі першого виду, а x_2 – необхідна норма їжі другого виду. Тоді цільова функція задачі, що визначає загальну вартість їжі, матиме вигляд:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2,$$

яку треба мінімізувати за наявності таких обмежень на вживання людиною корисних речовин:

$$\begin{cases} 0{,}1x_1 + 0{,}5x_2 \geq 0{,}1, \\ 0{,}3x_1 + 0{,}1x_2 \geq 0{,}2, \\ 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 \geq 0{,}15, \\ 0{,}3x_1 + 0{,}1x_2 \geq 1, \\ 0{,}1x_1 \geq 0{,}1, \end{cases}$$

при цьому, враховуючи умову задачі, змінні x_1, x_2 повинні бути невід'ємними:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Розв'язок поставленої задачі за допомогою функції **ConstrainedMin** системи Mathematica подано на рис 40.14.

```
Untitled-5 *

In[15]:= ConstrainedMin[2*x1 + 3*x2,
          {0.1*x1 + 0.5*x2 ≥ 0.1,
           0.3*x1 + 0.1*x2 ≥ 0.2,
           0.2*x1 + 0.3*x2 ≥ 0.15,
           0.3*x1 + 0.1*x2 ≥ 1,
           0.1*x1 ≥ 0.1},
          {x1, x2}]

Out[15]= {6.66667, {x1 → 3.33333, x2 → 0}}
```

Рис. 40.14.

Розв'язок поставленої задачі за допомогою функції **LinearProgramming** подано на рис. 40.15.

```
Untitled-6 *

In[17]:= LinearProgramming[{2, 3},
           {{0.1, 05}, {0.3, 0.1}, {0.2, 0.3},
            {0.3, 0.1}, {0.1, 0}},
           {0.1, 0.2, 0.15, 1, 0.1}]

Out[17]= {3.33333, 0}
```

Рис. 40.15.

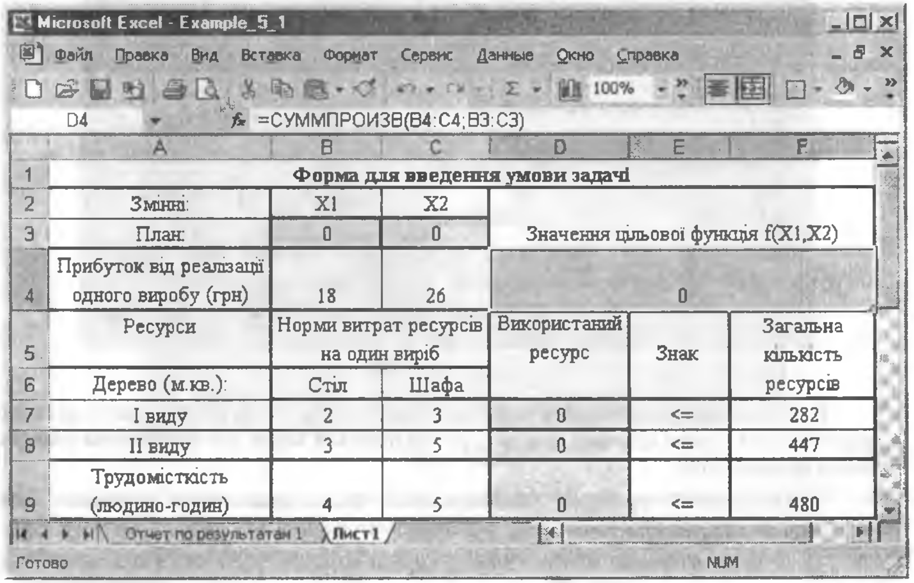
7.4. Розв'язування оптимізаційних задач за допомогою MS Excel. В редакторі електронних таблиць MS Excel розв'язування оптимізаційних задач забезпечується пакетом розширення Solver («Пошук розв'язку»), за допомогою якого можна розв'язувати задачі лінійного і нелінійного програмування, як в автоматичному, так і покроковому режимах, з можливістю формування звітів про одержані результати.

Розглянемо основні етапи розв'язування оптимізаційних задач за допомогою MS Excel на прикладі задачі лінійного програмування (див. приклад 5.1 §5):

1. Проаналізувати умову поставленої задачі.

2. Побудувати її математичну модель і визначити, до якого класу оптимізаційних задач вона належить.

3. Створити форму для введення умови задачі (приклад такої форми подано на рис. 40.16).



	A	B	C	D	E	F
1	Форма для введення умови задачі					
2	Змінні:	X1	X2			
3	План:	0	0	Значення цільової функція f(X1,X2)		
4	Прибуток від реалізації одного виробу (грн)	18	26	0		
5	Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Використаний ресурс	Знак	Загальна кількість ресурсів
6	Дерево (м.кв.):	Стіл	Шафа			
7	I виду	2	3	0	<=	282
8	II виду	3	5	0	<=	447
9	Трудомісткість (людино-годин)	4	5	0	<=	480

Рис. 40.16.

4. Вибрати комірки, в яких буде знаходитися результат розв'язування задачі (оптимальний план) (B3, C3), а також комірку де буде знаходитися екстремальне значення цільової функції (об'єднання комірок D4, E4, F4).

5. Ввести вхідні дані згідно умови задачі та її математичної моделі.

6. Ввести формулу для цільової функції. Для цього у полі для введення даних за допомогою майстра функцій набрати вираз «=СУММПРОИЗВ(B4:C4;B3:C3)» (рис. 40.16), який відповідає цільовій функції задачі:

$$f(x) = 18x_1 + 26x_2 .$$

7. Ввести формули для лівих частин функціональних обмежень

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 282, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 447, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 480, \end{cases}$$

у виділені для цього комірки D7, D8, D9, зокрема в комірку D7 – «=СУММПРОИЗВ(B3:C3;B7:C7)», в комірку D8 – «=СУММПРОИЗВ(B3:C3;B8:C8)», в комірку D9 – «=СУММПРОИЗВ(B3:C3;B9:C9)».

8. За допомогою меню «*Сервис*» завантажити надбудову (програму) «*Поиск решения*» (рис. 40.17). Якщо в меню «*Сервис*» команда «*Поиск решения*» відсутня, то треба встановити надбудову «*Поиск решения*». Для цього в меню «*Сервис*» обрати команду «*Надстройки*», встановити у вікні «*Доступные надстройки*» прапорець біля потрібної надбудови – «*Поиск решения*» і натиснути кнопку *OK*, при цьому виконати додаткові інструкції програми встановлення компонента MS Excel, якщо це необхідно.

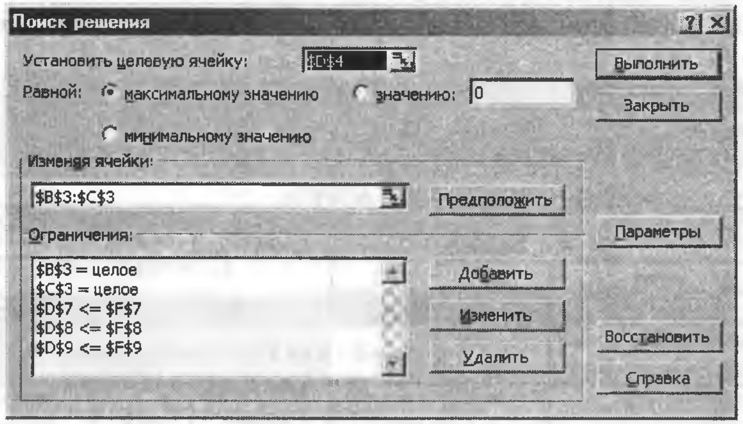


Рис. 40.17.

9. У вікні програми «*Поиск решения*» (рис. 40.17) у полі «*Установить целевую ячейку*» вказати адресу цільової комірки, де знаходиться вираз для обчислення значень цільової функції (D4).

10. Встановити критерій оптимальності («*максимальному значению*» або «*минимальному значению*»).

11. У поле «*Изменяя ячейки*» ввести адреси комірок, де знаходяться змінні, що відповідають плану задачі (B3:C3).

12. У поле «*Ограничения*» ввести функціональні обмеження за допомогою кнопки «*Добавить*» (рис. 40.18), а також умови цілочисельності (при потребі) (рис. 40.19).

Рис. 40.18.

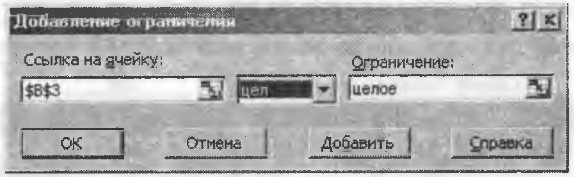


Рис. 40.19.

13. За допомогою кнопки «*Параметры*» у вікні програми «*Поиск решения*» викликати відповідне вікно і ввести параметри для розв'язування поставленої задачі (рис. 40.20). При цьому для задачі лінійного програмування обов'язковим є параметр «*Линейная модель*» і, як правило, параметр «*Неотрицательные значения*». Якщо розв'язується задача нелінійного програмування, то параметр «*Линейная модель*» не встановлюється, а вибирається один з методів розв'язування поставленої задачі «*Ньютона*» або «*Сопряженных градиентов*». Після встановлення параметрів треба натиснути кнопку *OK*.

Рис. 40.20.

14. Розв'язати задачу за допомогою програми «*Поиск решения*». Для цього у вікні цієї програми натиснути кнопку «*Выполнить*» (рис. 40.17). Якщо розв'язок буде знайдено, то буде виведено вікно «*Результаты поиска решения*» (рис. 40.21) з відповідним повідомленням.

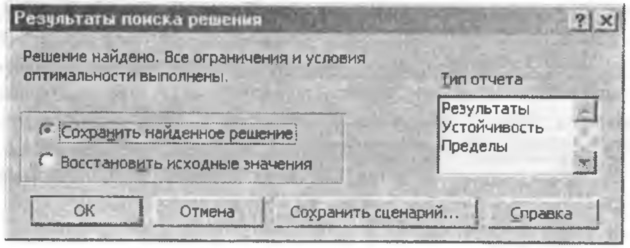
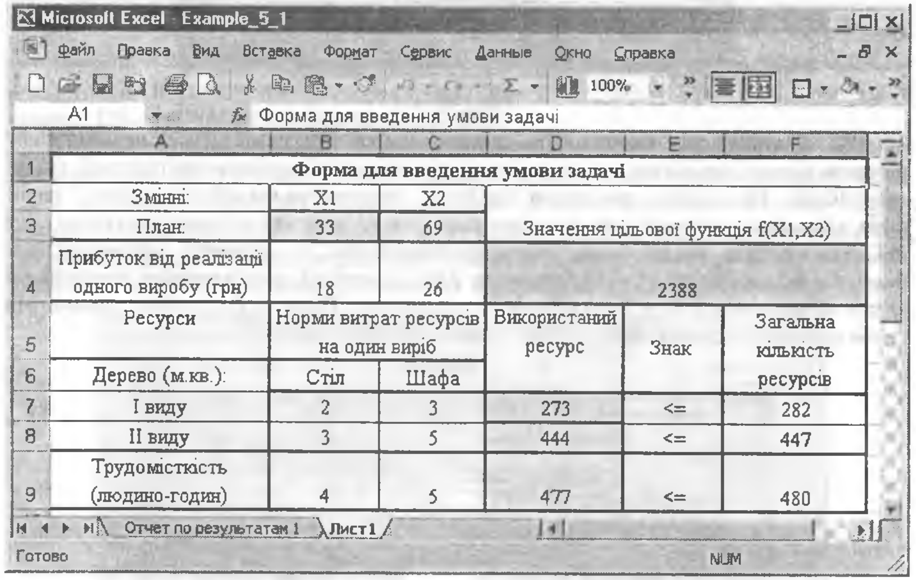


Рис. 40.21.

15. Проаналізувати одержані результати, які з'явилися в формі з умовою задачі (рис. 40.22).



Форма для введення умови задачі					
Змінні:	X1	X2	Значення цільової функція f(X1,X2)		
План:	33	69			
Прибуток від реалізації одного виробу (грн)	18	26	2388		
Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Використаний ресурс	Знак	Загальна кількість ресурсів
Дерево (м.кв.):	Стіл	Шафа			
I виду	2	3	273	<=	282
II виду	3	5	444	<=	447
Трудомісткість (людино-годин)	4	5	477	<=	480

Рис. 40.22.

16. Якщо одержані результати відповідають дійсності, то створити звіт про результати роботи. Для цього у вікні «*Результаты поиска решения*» обрати режим звіту «*Результаты*» і натиснути кнопку *ОК*. Звіт буде розміщено на новому листі книги з назвою «Отчет по результатам 1» (рис. 40.23).

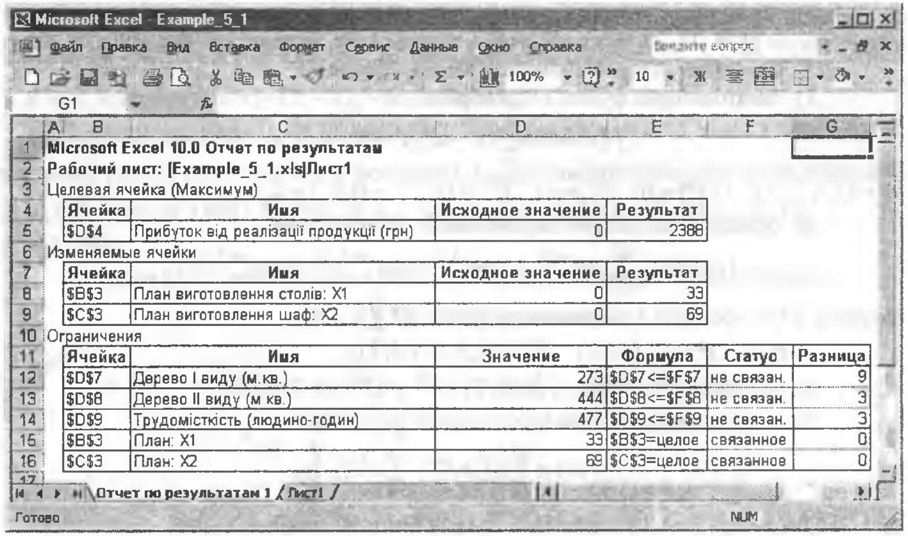
П р и м і т к а. За допомогою MS Excel результати пошуку розв'язків нецілочислових задач лінійного програмування можна подати у формі звіту трьох типів:

– **«Результаты»** (Answer), який містить вхідні і оптимальні значення цільової функції і значень змінних, а також додаткові відомості про виконання обмежень задачі;

– **«Устойчивость»** (Sensitivity), який містить відомості про чутливість розв'язку до малих змін в значеннях параметрів задачі або у формулах обмежень, а також розв'язок двоїстої задачі (стовпчик «*Теневая цена*»);

– **«Пределы»** (Limits), який крім вхідних і оптимальних значень цільової функції і значень змінних, містить верхні і нижні межі значень, які можуть приймати змінні при виконанні обмежень задачі.

З а у в а ж е н н я. Якщо в процесі розв'язування задачі результат не буде одержано, то потрібно проаналізувати математичну модель задачі, перевірити на коректність основні формули, адреси ключових комірок тощо. Після цього виконати обчислення в режимі покрокового виконання, скориставшись параметром «*Показывать результаты итераций*» (див. рис. 40.20).



Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$D$4	Прибуток від реалізації продукції (грн)	0	2388

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$3	План виготовлення столів: X1	0	33
$C$3	План виготовлення шаф: X2	0	69

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$D$7	Дерево I виду (м.кв.)	273	$D$7<=$F$7	не связан.	9
$D$8	Дерево II виду (м кв.)	444	$D$8<=$F$8	не связан.	3
$D$9	Трудомісткість (людино-годин)	477	$D$9<=$F$9	не связан.	3
$B$3	План: X1	33	$B$3=целое	связанное	0
$C$3	План: X2	69	$C$3=целое	связанное	0

Рис. 40.23.

Запитання для самоконтролю

1. У чому полягає сутність традиційної технології розв'язування практичних задач за допомогою комп'ютера?
2. Яка роль замовника, аналітика і програміста при розв'язуванні практичних задач за допомогою комп'ютера?
3. Яка загальна схема розв'язування практичних задач за традиційною технологією?
4. Які особливості процесу формалізації задач оптимізації?
5. Які критерії використовують при виборі методів розв'язування конкретних екстремальних задач?
6. Які особливості чисельної реалізації методів оптимізації?
7. У чому полягає аналіз результатів чисельного експерименту?
8. Яким загальним вимогам повинні задовольняти тестові задачі оптимізації?
9. Які загальні вимоги до опису результатів чисельного експерименту?
10. Які загальні принципи розробки керованих пакетів оптимізації?
11. Які основні можливості використання системи комп'ютерної математики?
12. Які засоби для розв'язування оптимізаційних задач мають пакети Mathcad, Matlab, Mathematica та редактор електронних таблиць MS Excel?

Вправи для самостійного виконання

1. На основі загальних принципів побудови керованої системи оптимізації розробити проект пакету програм оптимізації для персонального комп'ютера, за допомогою якого можна було б реалізовувати основні методи оптимізації, розглянуті у §§25-38.

2. За допомогою одного з середовищ розробки програмного забезпечення (Delphi, C++Builder, Visual C, Visual Basic тощо) реалізувати проект створення керованої системи оптимізації або деяких її підсистем, наприклад, одновимірної мінімізації, безумовної мінімізації, умовної мінімізації.

3. Провести налагодження і тестування створеної керованої системи оптимізації на відомих тестових задачах, які наведені у завданнях для самостійного виконання до §§28, 31, 37, та на наступних задачах (див, наприклад, [82], [107]):

3.1. Задачі безумовної мінімізації гладких функцій:

1) багатовимірна функція Розенброка:

$$f(x)=100\sum_{i=2}^{n}(x_i-x_{i-1}^2)^2+(1-x_1)^2,$$

$x^*=(1,1,....,1)$, $f(x^*)=0$, $x_1^{(0)}=-1$, $x_i^{(0)}=(x_{i-1}^{(0)})^2-0{,}2$, $i=\overline{2,n}$;

2) середньоквадратична апроксимація експонентами:

$$f(x)=\alpha^{-2}\sum_{j=1}^{10}(\alpha e^{-0{,}2j}+2\alpha e^{-0{,}4j}-x_1e^{(-0{,}2j)x_2}-x_3e^{(-0{,}2j)x_4})^2$$

(функція $f(x)$ неопукла з викривленим яром), $f^*=0$,

а) $\alpha=1$, $x^*=(1,1,2,2)$, $x^{(0)}=(0{,}5;0;2{,}5;3)$;

б) $\alpha=1000$, $x^*=(1000,1,2000,2)$, $x^{(0)}=(500,0,2500,3)$;

3) середньоквадратична апроксимація поліномами:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{101}\left(\sum_{i=1}^{n}x_it_j^{i-1}-\sum_{i=1}^{n}x_i^*t_j^{i-1}\right)^2,$$

де $t_j=0{,}01(j-1)$, $j=\overline{1,101}$, $x^*=(1,1,...,1)$, $f^*=0$, $x^{(0)}=(2,2,...,2)$;

3.2. Задачі безумовної мінімізації негладких функцій:

1) $f(x)=\max\limits_{k=\overline{1,5}}\{\langle A^{(k)}x,x\rangle-\langle b^{(k)},x\rangle\}$,

де $A^{(k)}=\{a_{ij}^{(k)}\}_{i=\overline{1,10},\,j=\overline{1,10}}$, $a_{ij}^{(k)}=e^{(i/j)}\cos(ij)\sin(k)$, $i\neq j$, $a_{ii}^{(k)}=0{,}1\cdot i\cdot\sin(k)+\sum\limits_{i\neq j}a_{ij}^{(k)}$,

$b_i^{(k)}=e^{(i/k)}\sin(ik)$, $i=\overline{1,10}$, $j=\overline{1,10}$, $k=\overline{1,5}$,

$x^*\approx(-0{,}1236;-0{,}0346;-0{,}0067;0{,}2668;0{,}0673;0{,}2786;0{,}0744;0{,}1387;0{,}0839;0{,}0385)$,

$f^*\approx-0{,}8414$, $x^{(0)}=(1,1,...,1)$, $f(x^{(0)})=5337$;

2) $f(x)=\sum\limits_{j=1}^{101}\left|\sum\limits_{i=1}^{n}x_it_j^{i-1}-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^*t_j^{i-1}\right|$,

де $t_j=0{,}01(j-1)$, $j=\overline{1;101}$, $x^*=(1/n,1/n,...,1/n)$, $f^*=0$, $x^{(0)}=(0,0,...,0)$;

3.3. Задачі нелінійного програмування:

1) задача неопуклого програмування

$$f(x)=-\sum_{i=1}^{10}b_ix_i+\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}c_{ij}x_{10+i}x_{10+j}+2\sum_{i=1}^{5}d_ix_{10+i}^3\to\min,$$

$$g_i(x)=\sum_{j=1}^{10}a_{ij}x_j-2\sum_{j=1}^{5}c_{ij}x_{10+j}-3d_ix_{10+j}^2-e_i\le0,\ i=\overline{1,5},\ x_j\ge0,\ j=\overline{1,15},$$

$$C=\begin{pmatrix}30&-20&-10&32&-10\\-20&39&-6&-31&32\\-10&-6&10&-6&-10\\32&-31&-6&39&-20\\-10&32&-10&-20&30\end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix}-16&0&-3{,}5&0&0&2&-1&-1&1&1\\2&-2&0&-2&-9&0&-1&-2&2&1\\0&0&2&0&-2&-4&-1&-3&3&1\\1&0{,}4&0&-4&1&0&-1&-2&4&1\\0&2&0&-1&-2{,}8&0&-1&-1&5&1\end{pmatrix},$$

$b=(-40;-2;-0{,}25;-4;-4;-1;-40;-60;5;1)$,

$d=(4;8;10;6;2)$, $e=(-15;-27;-36;-18;-12)$,

$x_j^{(0)}=0{,}0001;\ j=\overline{1;15};\ j\neq7;\ x_7^{(0)}=60;\ f(x^{(0)})=2400{,}01$,

при цьому точний розв'язок задачі невідомий, а один з наближених розв'язків дорівнює

$x^*\approx(0;0;5{,}174;0;3{,}0611;11{,}8395;0;0;0{,}1039;0;0{,}3;0{,}3335;0{,}4;0{,}4283;0{,}224)$,

$f^*\approx32{,}386$;

2) задача з лінійною цільовою функцією і неопуклими функціями обмежень

$$f(x)=\sum_{i=1}^{12}a_i(x_i+x_{i+12})\to\min,$$

$$g_i(x)=\frac{x_{i+12}}{b_i\sum\limits_{j=13}^{24}\frac{x_j}{b_{j-12}}}-\frac{c_ix_i}{40b_i\sum\limits_{j=1}^{12}\frac{x_j}{b_j}}=0,\ i=\overline{1,12},\quad g_{13}(x)=\sum_{i=1}^{24}x_i-1=0,$$

$$g_{14}(x)=\sum_{i=1}^{12}\frac{x_i}{d_i}+142{,}224705\sum_{i=13}^{24}\frac{x_i}{b_{i-12}}-1{,}671=0,$$

$$g_{15}(x)=\frac{x_1+x_{13}}{\sum\limits_{i=1}^{24}x_i}-0{,}1\le0,\quad g_{16}(x)=\frac{x_2+x_{14}}{\sum\limits_{i=1}^{24}x_i}-0{,}3\le0,$$

$$g_{17}(x)=\frac{x_3+x_{15}}{\sum\limits_{i=1}^{24}x_i}-0{,}4\le0,\quad g_{18}(x)=\frac{x_7+x_{19}}{\sum\limits_{i=1}^{24}x_i}-0{,}3\le0,$$

$$g_{19}(x)=\frac{x_8+x_{20}}{\sum\limits_{i=1}^{24}x_i}-0{,}6\le0,\quad g_{20}(x)=\frac{x_9+x_{21}}{\sum\limits_{i=1}^{24}x_i}-0{,}3\le0,$$

$$x_j\ge0,\quad j=\overline{1,24},$$

$a=(0{,}0693;0{,}0577;0{,}05;0{,}2;0{,}26;0{,}55;0{,}06;0{,}1;0{,}12;0{,}18;0{,}1;0{,}09)$,

$b=(44{,}094;58{,}12;58{,}12;137{,}4;120{,}9;170{,}9;62{,}501;84{,}94;133{,}425;82{,}507;46{,}07;60{,}097)$,

$c=(123{,}7;31{,}7;45{,}7;14{,}7;84{,}7;27{,}7;49{,}7;7{,}1;2{,}1;17{,}7;0{,}85;0{,}64)$,

$d=(31{,}244;36{,}12;34{,}784;92{,}7;82{,}7;91{,}6;56{,}708;82{,}7;80{,}8;64{,}517;49{,}4;49{,}1)$,

$$x_j^{(0)}=0{,}04;\quad j=\overline{1,24},$$

при цьому точний розв'язок задачі невідомий, а один з наближених розв'язків дорівнює

$x^*\approx(0;0{,}107248;0{,}111390;0;0;0;0;0{,}0755407;0;0;0;0;0{,}0111949;0;0{,}0192752;$
$0{,}288611;0;0;0;0{,}212858;0;0;0;0)$, $f^*\approx0{,}0556580$.

4. Провести тестування систем ком'ютерної математики Mathcad, Matlab, Mathematica, Maple та інших, а також редактора електронних таблиць MS Excel, на тестових задачах оптимізації, які наведені у завданнях для самостійного виконання до §§28, 31, 37 і у завданні 3. Зробити аналіз результатів проведеного експерименту щодо можливості використання цих програмних засобів для розв'язування реальних оптимізаційних задач.

СПИСОК ПОЗНАЧЕНЬ

R^n – n-вимірний дійсний евклідовий простір; $R = R^1$ – множина дійсних чисел;

$x=(x_1,x_2,...,x_n)$ – вектор-рядок у просторі R^n;

$x^T=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ – вектор-стовпчик у просторі R^n;

$O_n=(0,0,...,0)$ – нуль-вектор у просторі R^n;

$e^{(j)}=(0,...,0,\underset{j}{1},0,...,0)$ – j-й одиничний орт в R^n;

$x\in X$ – елемент x належить множині X;

$x\notin X$ – елемент x не належить множині X;

$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,...,\alpha x_n)$ – добуток вектора $x\in R^n$ на число $\alpha\in R^1$;

$x\pm y=(x_1\pm y_1,x_2\pm y_2,...,x_n\pm y_n)$ – сума (різниця) векторів x і y в R^n;

$\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}$ – евклідова норма вектора x в R^n;

$\langle x,y\rangle=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$ – скалярний добуток векторів x і y в R^n;

$\rho(x,y)=\|x-y\|$ – відстань між двома точками x і y в R^n;

$\{x\in X\mid P\}$ – підмножина елементів множини X, які мають властивість P;

$R_+^n=\{x\in R^n\mid x\ge 0\}$ – невід'ємний ортант в R^n;

$X\subseteq Y$ – множина X є підмножиною множини Y;

$X\cup Y$, $\bigcup\limits_{i\in I}X_i$ – об'єднання множин; $X\cap Y$, $\bigcap\limits_{i\in I}X_i$ – перетин множин;

$X\setminus Y$ – (теоретико-множинна) різниця множин; $X\times Y$ – декартовий добуток множин;

$X\pm Y=\{z\in R^n\mid z=x\pm y,\ x\in X,\ y\in Y\}$ – алгебраїчна сума (різниця) множин X і Y;

$\operatorname{int}X$ – внутрішність (множина внутрішніх точок) множини X;

$\bar{X}$ – замикання (множина граничних точок) множини X;

$FrX=\bar{X}\setminus\operatorname{int}X$ – межа (множина межових точок) множини X;

$co\ X$ – опукла оболонка множини X;

$cone\ X$ – конічна оболонка множини X;

$P_X(y)$ – проекція точки y на множину X;

$A=(a_{ij})_{i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}}$ – прямокутна матриця розміру $m\times n$;

A^T – матриця, транспонована до матриці A;

A^{-1} – матриця, обернена до квадратної матриці A;

E – одинична квадратна матриця;

$\det A$ – визначник квадратної матриці A;

$f:X\to Y$ – функція (відображення) з областю визначення X і множиною значень Y;

$D(f)$ – область визначення функції f;

$E(f)$ – область значень функції f;

G_f – графік функції f;

$epi\ f$ – надграфік функції f;

$hypo\ f$ – підграфік функції f;

$l_\alpha=\{x\in R^n\mid f(x)=\alpha,\ \alpha\in R^1\}$ – лінія (поверхня) рівня функції f;

$L_\alpha=\{x\in R^n\mid f(x)\le\alpha,\ \alpha\in R^1\}$ – лебегова множина функції f;

$\dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}$ – частинна похідна функції f в точці $x^*\in D(f)$ за змінною x_i;

$f'(x^*)=\left(\dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_1},...,\dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_n}\right)$ – градієнт функції f в точці $x^*\in D(f)$;

$\dfrac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i\partial x_j}$ – друга частинна похідна функції f в точці $x^*\in D(f)$ за змінними x_i і x_j;

$f''(x^*)=\left(\dfrac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}}$ – матриця других частинних похідних (гессіан) функції f в точці $x^*\in D(f)$;

$\dfrac{\partial f(x^*)}{\partial g}$ – похідна функції f в точці $x^*\in D(f)$ за напрямом $g\in R^n$;

$\partial f(x^*)$ – субдиференціал функції f в точці $x^*\in D(f)$;

$\partial_\varepsilon f(x^*)$ – ε-субдиференціал функції f в точці $x^*\in D(f)$, де $\varepsilon\ge 0$;

$\inf\limits_{x\in X} f(x)$, $\sup\limits_{x\in X} f(x)$ – точні нижня і верхня межі числової функції $f(x)$ на X;

$\min\limits_{x\in X} f(x)$, $\max\limits_{x\in X} f(x)$ – мінімальне (найменше) і максимальне (найбільше) значення числової функції $f(x)$ на множині X;

$x^*=\arg\min\limits_{x\in X} f(x)$ – довільна точка глобального мінімуму функції $f(x)$ на X;

$X^*=Arg\min\limits_{x\in X} f(x)$ – множина точок глобального мінімуму функції $f(x)$ на X;

$x^*=\arg\max\limits_{x\in X} f(x)$ – довільна точка глобального максимуму функції $f(x)$ на X;

$X^*=Arg\max\limits_{x\in X} f(x)$ – множина точок глобального максимуму функції $f(x)$ на X;

$\forall$ – квантор загальності: $\forall x\in X$ – „для будь-якого x з множини X";

$\exists$ – квантор існування: $\exists x\in X$ – „існує хоча б один x з множини X";

$o(h(x))$ – якщо $g:R^n\to R^m$, $h:R^n\to R^s$ і $\lim\limits_{\|x\|\to 0}\dfrac{\|g(x)\|}{\|h(x)\|}=0$, то $g(x)=o(h(x))$;

$O(h(x))$ – якщо $g:R^n\to R^m$, $h:R^n\to R^s$, $\exists\varepsilon>0$ і $\exists\alpha>0$ такі, що $\|g(x)\|\le\alpha\|h(x)\|$ при $\|x\|<\varepsilon$, то $g(x)=O(h(x))$;

$\mathbf{M}\xi$ – математичне сподівання випадкової величини ξ;

$\mathbf{D}\xi$ – дисперсія випадкової величини ξ;

$\xi^{(k)}\xrightarrow{\text{м.н.}}\xi^*$ – послідовність випадкових векторів $\{\xi^{(k)}(\omega)\}$ збігається до випадкового вектора $\xi^*(\omega)$ з ймовірністю 1 (майже напевне);

$\xi^{(k)}\xrightarrow{\mathbf{P}}\xi^*$ – послідовність випадкових векторів $\{\xi^{(k)}(\omega)\}$ збігається до випадкового вектора $\xi^*(\omega)$ за ймовірністю;

$\xi^{(k)}\xrightarrow{\text{с.к.}}\xi^*$ – послідовність випадкових векторів $\{\xi^{(k)}(\omega)\}$ збігається до випадкового вектора $\xi^*(\omega)$ в середньому квадратичному;

$x:=a$ – оператор, за яким змінній x надається значення a.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986.
2. Алгоритмы оптимизации проектных решений / Под ред. А. И. Половинкина. – М.: Сов. радио, 1976.
3. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979.
4. Алексеев О. Г. Комплексное применение методов дискретной оптимизации. – М.: Наука, 1987.
5. Аоки М. Введение в методы оптимизации. – М.: Наука, 1977.
6. Ашманов С. А. Линейное программирование. – М.: Наука, 1981.
7. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. – М.: Мир, 1982.
8. Батухтин В. Д., Майборода Л. А. Оптимизация разрывных функций. – М.: Наука, 1984.
9. Батищев Д. И. Генетические алгоритмы решения экстремальних задач / Под ред. Львовича Я. Е.: Учеб. пособие. – Воронеж, 1995.
10. Бейко И. В., Бублик Б. Н., Зинько П. Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. – К.: Вища школа, 1983.
11. Беллман Р. Динамическое программирование. – М.: ИЛ, 1960.
12. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. – М.: Наука, 1965.
13. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. – М.: Радио и связь, 1987.
14. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1966.
15. Болтянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами. – М.: Наука, 1973.
16. Вазан М. Стохастическая аппроксимация. – М.: Мир, 1972.
17. Васильев Ф. П. Лекции по методам решения экстремальных задач. – М.: МГУ. – 1974.
18. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука. – 1980.
19. Введение в нелинейное программирование / Эльстер К. – Х., Рейнгарт Р., Шойбле М., Донат Г. – М.: Наука, 1985.
20. Вопросы теории и элементы программного обеспечения минимаксных задач / Под ред. В. Ф. Демьянова и В. Н. Малоземова. – Л.: ЛГУ, 1977.
21. Вычислительные методы выбора оптимальных проектных решений / Под ред. В. С. Михалевича. – К.: Наукова думка, 1977.
22. Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Методы оптимизации. – Минск: Изд–во БГУ, 1981.
23. Гавурин М. К., Малоземов В. Н. Экстремальные задачи с линейными ограничениями. – Л.: Изд–во ЛГУ, 1984.
24. Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Краткий курс теории экстремальных задач. – М.: Изд–во МГУ, 1989.
25. Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Й. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища школа, 1988.
26. Глушков В. М. Основы безбумажной информатики. – М.: Наука, 1982.
27. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее применения. – М.: Наука, 1971.

28. Гупал А. М. Стохастические методы решения негладких экстремальных задач. – К.: Наукова думка, 1979.
29. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и применения. – М.: Прогресс, 1966.
30. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966.
31. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. – М.: Наука, 1981.
32. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. – М.: Наука, 1972.
33. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. – М.: Наука, 1990.
34. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на екстремум при наличии ограничений. – ЖВМ и МФ. – 1965. – Т. 5. – №3. – С. 395–453.
35. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М.: Наука, 1982.
36. Еремин И. И., Астафьев Н. Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. – М.: Наука, 1976.
37. Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования. – М.: Наука, 1976.
38. Ермольев Ю. М., Ляшко И. И., Михалевич В. С., Тюптя В. И. Математические методы исследования операций. Учебн. пособие для вузов. – К.: Вища школа, 1979.
39. Жалдак М. И. Накапливающий итерационный процесс для решения задачи выпуклого программирования в гильбертовом пространстве // Приближенные методы математического анализа: Сб. науч. тр. – К.: КГПИ, 1982. – С. 46–58.
40. Жалдак М. І., Рамський Ю. С. Чисельні методи математики: Посібник для самоосвіти вчителів. – К.: Рад. шк., 1984.
41. Жалдак М. И., Триус Ю. В. Об одном приближенном методе решения задачи выпуклого программирования // Вычисл. и прикл. математика. – Киев: Вища школа. Изд–во при Киев. ун–те, 1986. – Вып. 59. – С. 122–129.
42. Жалдак М. И., Триус Ю. В. Комбинированный метод недифференцируемой оптимизации с усреднением субградиентов // Асимптотические методы решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений: Сб. науч. тр. – К.: КГПИ, 1987. – С. 26–34.
43. Жиглявский А. А., Жилинскас А. Г. Методы поиска глобального экстремума.– М.: Наука, 1991.
44. Заботин Я. И., Кораблев А. И., Хабибуллин Р. Ф. О минимизации квазивыпуклих функционалов // Изв. вузов. Математика. – 1972. – №10. – С. 27–33.
45. Заботин Я. И., Кораблев А. И., Хабибуллин Р. Ф. Условия экстремума функционала при наличии ограничений // Кибернетика. – 1973. – №6. – С. 65–70.
46. Задачі оптимізації: Посібник для факультативних занять, 10–11 кл. / Л. М. Вивальнюк, О. І. Соколенко, Ю. В. Костарчук та ін. – К.: Рад. шк., 1991.
47. Зайченко Ю. П. Исследование операций: Нечеткая оптимизация: Учеб. пособие. – К.: Вища школа, 1991.
48. Зангвилл У. Нелинейное программирование. Единый подход. – М.: Сов. радио, 1973.
49. Захаров В. В. Десять распространенных тестовых функций для методов оптимизации // Автоматика и вычислительная техника. – Рига, 1974. – №6. – С. 41–45.
50. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений. – М.: ИЛ, 1963.

51. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. – М.: Наука. – 1967.
52. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. – М.: Наука. – 1974.
53. Итерационные методы в теории игр и программировании / Под. ред. В. З. Беленького, В. А. Волконского и др. – М.: Наука. – 1974.
54. Канторович Л. В. Математические методы в организации и планировании производства. – Л.: Изд–во ЛГУ, 1939.
55. Канторович Л. В. Об одном эффективном методе решения некоторых экстремальних проблем // ДАН СССР, 1940. – Т. 28. – №3. – С. 212–215.
56. Канторович Л. В., Акилов Г. Н. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 750с.
57. Карманов В. Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1980.
58. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. – М.: Наука, 1988.
59. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989.
60. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. – М.: Высшая школа, 1970. – Т. I, II.
61. Кюнци Г. П., Крелле В. Нелинейное программирование. – М.: Сов. радио, 1965.
62. Левин А. Ю. Об одном алгоритме минимизации выпуклых функций // ДАН СССР. – 1965. – Т. 160. – №6. – С. 1244–1247.
63. Лемарешаль К., Нурминский Е. А. Дифференциальные свойства опорной функции ε-субградиентного отображения // Кибернетика. – 1983. – №3. – С. 125–127.
64. Лесин В. В., Лисовец Ю. П. Основы методов оптимизации. – М.: Изд–во МАИ, 1995.
65. Ляшенко И. Н., Карагодова Е. А., Черникова Н. В., Шор Н. З. Линейное и нелинейное программирование. – К.: Вища школа, 1975.
66. Макаров В. Л., Рубинов А. М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. – М.: Наука, 1973.
67. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980.
68. Методы решения задач математического программирования и оптимального управления / Ащепков Л. Т., Белов Б. И., Булатов В. П. и др. – Новосибирск: Наука, 1984.
69. Михалевич В. С., Кукса А. И. Методы последовательной оптимизации. – М.: Наука, 1983.
70. Михалевич В. С., Трубин В. А., Шор Н. З. Оптимизационные задачи производственно–транспортного планирования. – М.: Наука, 1986.
71. Михалевич В. С., Гупал А. М., Норкин В. И. Методы невыпуклой оптимизации. – М.: Наука, 1987.
72. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1971.
73. Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978.
74. Немировский А. С., Юдин Д. Б. Сложность задач и эффективность методов оптимизации. – М.: Наука, 1979.
75. Нестеров Ю. Е. Эффективные методы в нелинейном программировании. – М.: Радио и связь, 1989.
76. Нурминский Е. А. Квазиградиентный метод решения задачи нелинейного программирования // Кибернетика. – 1973. – №1. – С. 122–125.
77. Нурминский Е. А. Численные методы решения детерминированных и стохастических минимаксных задач. – Киев: Наукова думка, 1979.

78. Нурминский Е. А. ε-субградиентное отображение и задача выпуклой оптимизации // Кибернетика. – 1985. – №6. – С. 61–63, 85.
79. Нурминский Е. А. Глобальные свойства ε-субградиентных отображений // Кибернетика. – 1986. – №1. – С. 120–122.
80. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений /А. Н. Борисов, А. В. Алексеев, Г. В. Меркулов и др. – М.: Радио и связь, 1989.
81. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход. – М.: Мир, 1974.
82. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983.
83. Понтрягин Л. С., Гамкрелидзе Р. В., Болтянский В. Г., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976.
84. Пропой А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. – М.: Наука, 1973.
85. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980.
86. Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума. – М.: Наука, 1982.
87. Пшеничный Б. Н. Метод линеаризации. – М.: Наука, 1983.
88. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975.
89. Ржевский С. В. Монотонные методы выпуклого программирования /АН Украины. Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова. – К.: Наукова думка, 1993.
90. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ.– М.: Мир, 1973.
91. Сборник задач по математике для втузов. – Ч. 4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения / Вуколов Э. А., Ефимов А. В., Земсков В. Н. и др. – М.: Наука, 1990.
92. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи / Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. – М.: Наука, 1984.
93. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы. – М.: Мир, 1973.
94. Сергиенко И. В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – К.: Наукова думка, 1988.
95. Современное состояние теории исследования операций / Под ред. Н. Н. Моисеева. – М.: Наука, 1979.
96. Степанюк В. В. Методи математичного програмування. – К.: Вища школа, 1977.
97. Стронгин Р. Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах. – М.: Наука, 1978.
98. Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В. Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986.
99. Таха Хэмди А. Введение в исследование операций, 6-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001.
100. Триус Ю. В. Приближенный метод отыскания седловых точек негладких выпукло-вогнутих функций // Асимптотические методы решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений: Сб. науч. тр. – К.: КГПИ, 1987. – С. 108–114.
101. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984.
102. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. – М.: Наука, 1978.
103. Федоров В. В. Численные методы максимина. – М.: Наука, 1979.
104. Фиакко А., Мак–Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. – М.: Мир, 1972.
105. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1970. – Т. I.

106. Хачиян Л. Г. Сложность задач линейного программирования. – М.: Знание, 1987. – (Новое в жизни, науке, технике.– Сер. «Математика, кибернетика», № 10).
107. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975.
108. Цегелик Г. Г. Лінійне програмування. – Львів: Світ, 1995.
109. Чепурной Н. Д. Методы негладкой оптимизации с усреднением субградиентов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев: ИК АН УССР, 1982.
110. Шор Н. З. О минимизации почти дифференцируемых функций // Кибернетика, 1972. – №4. – С. 65–70.
111. Шор Н. З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – Киев : Наукова думка, 1979.
112. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979.
113. Эрроу К. Дж., Гурвиц Л., Удзава Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию. – М.: ИЛ, 1962.
114. Юдин Д. Б. Задачи и методы стохастического программирования. – М.: Сов. радио, 1979.
115. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование. Теория и конечные методы. – М.: Наука, 1969.
116. Ястремський А. И. Стохастические модели математической экономики. – К.: Вища школа. Головное изд-во, 1983.
117. Arrow K.I., Enthoven A.C. Quasi–concave programming//Econometrica. – 1961. – 29. – N4. – P. 779–800.
118. Fenchal W. Convex cones, sets and functions //Office of Naval Research Logistics. Project Report Depart. of Mathem. Princeton University. – 1953.
119. Fletcher R., Powell M. J. D. A rapidly convergent descent method for minimization // Comp. J., 6, 1963. – P. 163–168.
120. Fletcher R., Reeves C.M. Function minimization by conjugate gradients // Comp. J., 7, 1964. – P. 149–154.
121. Goldberg D. E. Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine learning. – Addison–Wesley, 1989.
122. Goldstein A. A. Optimization of Lipschitz continuous functions//Math. Progr. – 1977. – V. 13. – N2. – P. 14–22.
123. Hestenes M. R., Stiefel E. Method of conjugate gradients for solving linear systems // J. Reseach Nat. Bur. Standards, 49, 1952. – P. 409–436.
124. Karamardian S. Strictly quasi–convex (concave) functions and duality in mathematical programming // J. Math. Anal. Appl. – 1967. – 20. – N2. – P. 344–358.
125. Kelly J. E. The cutting plane method for solving convex programms // SIAM J. Appl. Math. – 1960. – V. 8. – N4. – P. 703–712.
126. Kiviel K. C. Methods of descent for nondifferentiable optimization // Lecture Notes in mathematics, Springer–Verlag, Berlin. – 1985. – V. 1133.
127. Kuhn H. W., Tucker A. W. Nonlinear programming / Proc. Of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1951.– P. 481–492.
128. Lebourg M. G. Valeur moyenne pour gradient generalize // C. R. Acad. Sc. Paris.– 1975. – V. 281, ser. A, N19. – P. 775–779.
129. Lemarechal C. Nondifferentiable optimization subgradient and ε-subgradient methods // Lect. Notes. Econ. and Math. Syst. – 1976. – 117. – P. 191–199.
130. Mangasarian O. L. Convexity, pseudo–convexity and quasi–convexity of composite functions // Canad. Cent. stud. res. oper. – 1970. – V. 12. – N2. – P. 114–122.

131. Martos B. Quadratic programming with a quasi–convex objective function // Operations research. – 1971. – V. 19. – N1. – P. 87–97.
132. Mifflin R. Semismooth and semiconvex functions in constrained optimization // SIAM J. Control and Optimization. – 1977. – V. 15. – N6. – P. 959–972.
133. Mifflin R. An algorithm for constrained optimization with semismooth functions // RR–77–3, II ASA. – Laxenburg, Austria. – 1977.
134. Mitchell M. An introduction to Genetic Algorithm. – MIT Press, 1996.
135. Nelder J. A., Mead R. A Simplex Method for Function Minimization // Computer J. – 1965. – Vol .7. – P. 308–313.
136. Rademacher H. Über partielle und total differenzierbarkeit von funktionen mehrerer variabeln und über die transformation der doppelintegrale // Math. Annalen. – 1919. – V. 79. – P. 340–359.
137. Wolfe P. A method of conjugate subgradients for minimizing nondifferentiable functions // Mathemetical Programming Study 3 Non–differentiable optimization / Eds. M. L. Balinski, P. Wolfe. – Amsterdam: North–Holland. – 1975. – P. 145–173.
138. Wolfe P. Finding a nearest point in a polytone // Math. Program. – 1976. – V. II. – N2. – P. 128–149.

ПРЕДМЕТНИЙ ТА ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИКИ

ББК 22.18
УДК 519.6:378.1
Ж 24

Жалдак М.І., Триус Ю.В.
Основи теорії і методів оптимізації: Навчальний посібник. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 608 с.

ISBN 966-8756-04-5

ОСНОВИ ТЕОРІЇ І МЕТОДІВ ОПТИМІЗАЦІЇ
Навчальне видання

Жалдак Мирослав Іванович,
Триус Юрій Васильович
Автори

Комп'ютерний набір Ю.В. Триус
Оригінал-макет О.В. Красіліч
Технічний редактор О.М. Третяков

Здано до складання 29.11.2004. Підп. до друку 04.02.2005.
Формат 60x90/16. Папір офсетний. Гарнітура Таймс.
Умовн. друк. арк. 29,56. Обл.-вид. арк. 29,79.
Вид. № 5. Тираж 1000 прим. Зам. № 5-481

Видавництво «БРАМА-УКРАЇНА».

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців.
Серія ДК № 1996 від 28.10.2004 р.

Україна, 18000, м. Черкаси, вул. Леніна, 31/1, к.1
Тел: 8/0472/45-31-34.
E-mail: book_brama@ukr.net

ЗАТ «ВІПОЛ», ДК № 15
03151, Київ-151, вул. Волинська, 60.