М. В. Грисенко

МАТЕМАТИКА для ЕКОНОМІСТІВ

Методи й моделі, приклади й задачі

Навчальний посібник

М. В. Грисенко

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

Методи й моделі, приклади й задачі

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Навчальний посібник
для студентів економічних спеціальностей
вищих навчальних закладів

Київ
"Либідь"
2007

ББК 22.1я73
Г85

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. В. Михалевич*
(Українська академія зовнішньої торгівлі)
д-р техн. наук, проф. *М. В. Крюков*
(Київський університет економіки та технологій транспорту)
д-р екон. наук, проф. *А. І. Шнирков*
(Інститут міжнародних відносин Київського національного університету імені Тараса Шевченка)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист № 1.4/18–Г–508 від 19.07.2006 р.)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Редакція літератури
з природничих і технічних наук
Головний редактор *Т. В. Ковтуненко*
Редактор *А. С. Мнишенко*

ISBN 978-966-06-0436-0

ПЕРЕДМОВА

Пропонований навчальний посібник — результат досвіду викладання автором дисципліни «Математика для економістів» студентам Інституту міжнародних відносин Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Цей посібник створено для студентів економічних спеціальностей з огляду на сучасні вимоги щодо істотного підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки фахівців і посилення її прикладної спрямованості.

Посібник покликаний допомогти майбутнім економістам оволодіти методами математики, які використовуються в економічних дослідженнях. У ньому містяться не лише основні математичні теоретичні положення, знання яких необхідні кожному грамотному економістові, а й численні приклади їх застосування. Це сприяє кращому використанню знань під час вибору математичних методів і побудови економіко-математичних моделей.

Розглядаються методи й моделі лінійної і векторної алгебри та аналітичної геометрії (розділи 1—3); методи й моделі математичного аналізу — теорія множин, числові послідовності, функції, теорія границь, диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних, інтегральне числення та їх економічні застосування (розділи 4—11); методи й моделі теорії звичайних диференціальних рівнянь (розділ 12).

Усі теми викладаються за єдиним методичним принципом. Спочатку подаються основні означення, формулюються й доводяться теореми (іноді доведення скорочено або зовсім опущено, бо їх можна знайти в класичних підручниках із вищої математики), пропонуються відомі економіко-математичні моделі та прикладні задачі економічного змісту з докладними розв'язаннями.

Відомо, що новий навчальний матеріал засвоюється студентами набагато легше, якщо супроводжується достатньо великою кількістю прикладів із детальними розв'язаннями. Тому автор спробувала об'єднати в одній книжці теоретичний матеріал із практичним — розв'язуванням задач як математичного, так і економічного змісту. Краще розібратися в теоретичному матеріалі й перевірити рівень його засвоєння допоможуть контрольні запитання й приклади розв'язування задач, наведені до кожного розділу.

Наприкінці вміщено завдання для самостійної роботи. Завдання з кожної теми подано в чотирьох варіантах, аби їх можна було використовувати для індивідуальних і контрольних робіт студентів, що дає змогу здійснювати контроль їхніх знань за модульно-рейтинговою системою.

ВСТУП

Математика нині відіграє важливу роль у природничо-наукових, технічних і гуманітарних дослідженнях. Сучасна економіка — наука про об'єктивні закономірності функціонування й розвитку суспільства — характеризується широким застосуванням математики. Дедалі зростає роль математики як фундаменту для підготовки спеціалістів фінансово-економічного профілю. Математичні методи й моделі є складовою методів і моделей економічної теорії. Їх використання, разом зі змістовним економічним аналізом, відкриває нові перспективи для економічної науки й практики. Головним інструментом дослідження й прогнозування економічних об'єктів та явищ стала економіко-математична модель. Ідеться не просто про оволодіння студентами математичними методами, а й про вміння самостійно застосовувати ці знання для побудови економіко-математичних моделей.

Економіко-математичну модель визначають як внутрішньо несуперечливу замкнену систему математичних відношень, призначену для відтворення певних властивостей досліджуваного реального явища чи процесу. Прикладами економічних моделей є моделі споживчого вибору, моделі фірми, моделі економічного росту, моделі рівноваги на товарних, ресурсних і фінансових ринках. Будуючи моделі, економісти виявляють істотні фактори, що визначають досліджуване явище, й відкидають деталі, несуттєві для розв'язання поставленої проблеми. Формалізація основних особливостей функціонування економічних об'єктів дає змогу оцінити можливі наслідки дії на них та використовувати такі оцінки в управлінні.

Економіко-математична модель, що описує дане економічне явище або об'єкт, будується таким чином:

1) формулюється предмет і визначається мета дослідження;

2) у розглядуваній економічній системі виокремлюються структурні й функціональні елементи, що відповідають даній меті, виявляються їхні найважливіші якісні характеристики;

3) словесно, якісно описуються взаємозв'язки між елементами;

4) вводяться символічні позначення для характеристик економічного об'єкта або явища й формалізуються, наскільки це можливо, взаємозв'язки між ними. Тим самим формується економіко-математична модель;

5) проводяться розрахунки за економіко-математичною моделлю та аналізується добутий розв'язок.

Якщо з певних причин цей розв'язок не може бути застосований на практиці, то процес побудови економіко-математичної моделі доцільно повторити. Для цього постановку задачі й добутий розв'язок аналізують, досліджують, чи враховані всі початкові дані, порядок їх групування, взаємозв'язок величин тощо. Після такого аналізу модель змінюють.

Розрахунки в економіці грунтуються на певних математичних моделях. Тому економісти мають володіти мовою математичних понять, уміти здійснювати математичні операції над числами, символами, множинами, функціями, оперувати рівняннями й нерівностями, розрахунковими математичними інструментами, вміти ставити проблеми, розв'язувати їх, аналізувати добуті результати.

Нині завдяки сучасним комп'ютерним технологіям можливості математичного моделювання практично безмежні, але скористатися ними повною мірою вдається лише тим фахівцям, які вільно володіють математичними методами.

Розділ 1

МЕТОДИ Й МОДЕЛІ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1.1 Основні відомості про матриці

Поняття матриці та алгебра матриць мають дуже важливе значення для економістів: багато математичних моделей економічних об'єктів і процесів подаються в простій, а головне — компактній матричній формі.

➡ **Означення 1.1.** ***Матрицею розміру m на n називають прямокутну таблицю $m \times n$ чисел, що складається з m рядків і n стовпців.*** Позначення матриці:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}).$$

Числа a_{ij} називають ***елементами матриці***, де i — номер ***рядка***, а j — номер ***стовпця***, на перетині яких міститься елемент a_{ij}.

Матрицю, що складається лише з одного рядка, називають ***матрицею-рядком*** і позначають

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),$$

а матрицю лише з одним стовпцем — ***матрицею-стовпцем*** і позначають

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Дві матриці вважаються ***рівними***, якщо в них однакові кількості рядків і стовпців, а також рівні між собою відповідні елементи.

Матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю, називають ***нульовою*** й позначають так:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратною називають матрицю, в якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців, тобто $m = n$. Її позначають так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Число n називають ***порядком матриці***. Елементи $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ квадратної матриці утворюють її ***головну діагональ***, а елементи a_{1n}, $a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$ — ***побічну діагональ***.

Діагональною називають квадратну матрицю, в якої всі елементи, що розміщені не на головній діагоналі, дорівнюють нулю. Її позначають так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Одиничною називають діагональну матрицю, в якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2 Дії над матрицями

1.2.1. Лінійні операції над матрицями

Лінійними операціями над матрицями називають операції (дії) додавання, віднімання матриць (лише однакового розміру) та множення їх на число.

➡ **Означення 1.2.** ***Сумою (різницею) двох матриць*** $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *і* $\mathbf{B} = (b_{ij})$ *розміру* $m \times n$ *називають таку матрицю* $\mathbf{C} = (c_{ij})$ *розміру* $m \times n$, *елементи якої визначаються рівністю* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(c_{ij} = a_{ij} - b_{ij})$. Позначення суми (різниці):

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\ (\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}).$$

■ **Приклад 1.1.** *Обчислимо суму й різницю матриць*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 2 & -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 5 \\ 1 & 9 & -10 \end{pmatrix}.$$

■ **Приклад 1.2.** ***Розглянемо спрощену модель фінансової математики, яку умовно називають «портфельними інвестиціями».***

У реальному житті одним із багатьох джерел фінансування є міжнародні інвестиції. Країна може одержувати й надавати міжнародні займи, приймати та інвестувати за кордон капітал. Продаж активів у будь-якій формі (права власності, цінні папери, золото тощо) означає приплив капіталу в країну. Серед інвестицій є портфельні — вкладення капіталу в іноземні цінні папери, які не дають інвестору права реального контролю над об'єктом інвестування. Такі інвестиції базуються переважно на приватному капіталі.

Припустимо, що інвестори можуть вкладати гроші в активи: в облігації (які дають точний фіксований прибуток), акції (які дають прибуток, що може змінюватися), в землю. Нехай після виборів у даній країні до влади може прийти одна з двох політичних партій X_1 або X_2. Зрозуміло, що доход від капіталовкладень залежатиме від державного устрою країни. Так, уряд партії X_1 може збільшити ціну на землю й зменшити ціну акцій, а уряд партії X_2 — навпаки. Наприклад, маємо таблицю:

Активи	Партія X_1	Партія X_2
Земля	1,25	0,95
Облігації	1,05	1,05
Акції	0,90	1,15

Дану таблицю можна записати як матрицю $\mathbf{R} = (r_{ij})$, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$ розміру 3×2, що визначає доход від кожного активу:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1{,}25 & 0{,}95 \\ 1{,}05 & 1{,}05 \\ 0{,}90 & 1{,}15 \end{pmatrix}.$$

Нехай інвестори вирішили вкласти \$50 000 у землю, \$100 000 — в облігації і \$40 000 — в акції. Тоді дістанемо матрицю-рядок розміру 1×3: $\mathbf{P} = (50\,000 \;\; 100\,000 \;\; 40\,000)$, яка характеризує портфельні інвестиції.

Добутком матриць **PR** буде матриця розміру 1×2, яка характеризує можливі вартості портфельних інвестицій, якщо на виборах переможе партія X_1 чи X_2. Отже,

$$\mathbf{PR} = (50\,000 \;\; 100\,000 \;\; 40\,000) \begin{pmatrix} 1{,}25 & 0{,}95 \\ 1{,}05 & 1{,}05 \\ 0{,}90 & 1{,}15 \end{pmatrix} = (109\,000 \;\; 104\,000).$$

Можна зробити висновок: якщо на виборах переможе партія X_1, то вартість портфеля становитиме \$10 900, а якщо партія X_2 — то \$10 400.

У загальному випадкові, якщо розглядати m активів і n партій у країні, то добуток матриці $\mathbf{P} = (p_1 p_2 ... p_m)$ розміру $1 \times m$, яка характеризує портфель інвестицій, на матрицю прибутків від кожного активу $\mathbf{R} = (r_{ij})$, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$, виражає доход на портфель **P**. Це буде матриця **PR** розміру $1 \times n$, j-та компонента якої характеризує вартість портфеля **P**, якщо до влади прийде партія X_j, $j = 1, 2, ..., n$.

➡ **Означення 1.3.** ***Добутком матриці*** $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ***на дійсне число*** α *називають матрицю* $\mathbf{B} = (b_{ij})$, *елементи якої визначаються рівністю* $b_{ij} = \alpha a_{ij}$. Це записують так: $\mathbf{B} = \mathbf{A}\alpha$ або $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A}$.

Матрицю $(-1)\mathbf{A}$ називають ***протилежною*** матриці **A** й позначають $-\mathbf{A}$.

Властивості лінійних операцій над матрицями

① $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

② $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$.

③ $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$.

④ $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

⑤ $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

⑥ $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$.

⑦ $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$.

⑧ $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$.

1.2.2. Добуток матриць

Дія множення вводиться лише для узгоджених матриць. Матрицю **A** називають ***узгодженою з матрицею*** **B**, якщо кількість стовпців матриці **A** дорівнює кількості рядків матриці **B**.

Нехай матриця $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, тобто має розмір $m \times n$, а матриця $\mathbf{B} = (b_{ij})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, p}$, тобто має розмір $n \times p$.

➡ **Означення 1.4.** ***Добутком матриці*** **A** ***на матрицю*** **B** *називають матрицю* $\mathbf{C} = (c_{ij})$, *елементи якої визначаються рівністю*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Отже, щоб дістати елемент c_{ij} матриці **C**, треба знайти суму добутків елементів i-го рядка матриці **A** на відповідні елементи j-го стовпця матриці **B**. Очевидно, що матриця $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ матиме при цьому m рядків і p стовпців.

■ **Приклад 1.3.** *Обчислимо добуток матриць*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дістаємо

$$C = AB = \begin{pmatrix} 0\cdot 2 + 1\cdot 0 & 0\cdot 3 + 1\cdot 1 \\ 2\cdot 2 + 3\cdot 0 & 2\cdot 3 + 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

✓ *Зауваження 1.1.* У загальному випадкові $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, тобто множення матриць — операція некомутативна. Так, у прикладі 1.3 маємо

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \neq \mathbf{AB}.$$

Якщо $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, то матриці **A** і **B** називають ***комутативними***.

Властивості операції множення матриць

① $\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$.
② $\mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$.
③ $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.
④ $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.
⑥ $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$.
⑥ $\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$.

1.2.3. Піднесення матриць до степеня

Операція піднесення до степеня визначена тільки для квадратних матриць.

➡ **Означення 1.5.** ***Цілим додатним степенем*** $\mathbf{A}^n (n > 1)$ ***квадратної матриці* A *називають добуток n матриць, рівних* A, *тобто***

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{AA}\ldots\mathbf{A}}_{n\ \text{разів}}.$$

За означенням $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$, $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$. Легко показати, що $\mathbf{A}^n\mathbf{A}^m = \mathbf{A}^{n+m}$, $(\mathbf{A}^n)^m = \mathbf{A}^{nm}$.

Зазначимо, що з рівності $\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$ не випливає, що **A** — нульова матриця.

■ **Приклад 1.4.** *Знайдемо* $\mathbf{A}^2$, *де* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Маємо

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}.$$

1.2.4. Транспонування матриць

Для кожної матриці $\mathbf{A} = (a_{ij})$ розміру $m \times n$ можна побудувати матрицю $\mathbf{A}^T = (a^T_{ij})$ розміру $n \times m$, елементи якої визначаються рівністю $a^T_{ij} = a_{ji}$. Матрицю $\mathbf{A}^T$ називають ***транспонованою до матриці* A**. Її можна дістати, якщо в матриці **A** рядки й стовпці поміняти місцями:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

■ **Приклад 1.5.** *Транспонуємо матрицю*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Властивості операції транспонування матриць

① $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.
② $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$.
③ $(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T$.
④ $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

1.3
Визначники квадратних матриць та їхні властивості

Розглянемо квадратну матрицю **A** n-го порядку. Поняття визначника цієї матриці введемо індуктивно за порядком матриці. Визначник квадратної матриці n-го порядку позначатимемо так:

$$\Delta = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

➡ **Означення 1.6.** ***Визначником квадратної матриці n-го порядку*** *називають числову функцію* det **A**, *значення якої знаходять таким чином:*

- при $n = 1$ матриця $\mathbf{A} = (a_{11})$. Вважатимемо ***визначником матриці першого порядку*** число $\det \mathbf{A} = a_{11}$;
- при $n > 1$

$$\det \mathbf{A} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \dots + (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + \dots +$$

$$+ (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}, \qquad (1.1)$$

де $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}$ — елементи першого стовпця матриці **A**; M_{i1} — визначник матриці $(n-1)$-го порядку, яку дістають із матриці **A** вилученням її i-го рядка й першого стовпця (***мінор елемента*** a_{i1}).

Сформульоване означення дає змогу відразу обчислити ***визначник матриці другого порядку***

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$M_{11} = \det(a_{22}) = a_{22}, \quad M_{21} = \det(a_{12}) = a_{12}.$$

Отже,

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \qquad (1.2)$$

Обчислимо ***визначник матриці третього порядку***

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$M_{11} = \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad M_{21} = \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad M_{31} = \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\det \mathbf{A} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) +$$

$$+ a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}). \qquad (1.3)$$

✓ *Зауваження 1.2.* Кожний доданок алгебричної суми в останній формулі є добутком елементів матриці, взятих лише по одному з кожного рядка й кожного стовпця. Цей добуток входить із відповідним знаком. Для запам'ятовування знака добутку корисно знати *п р а в и л о т р и к у т н и к і в*, схематично зображене на рис. 1.1.

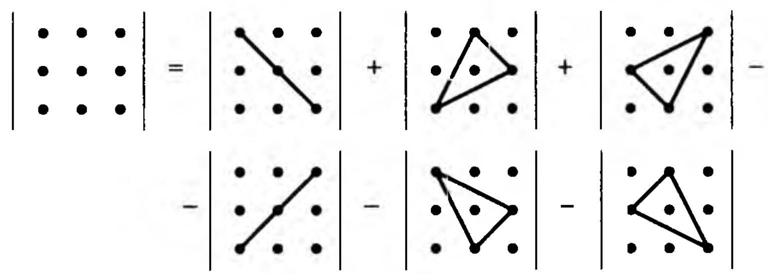


Рис. 1.1

■ **П р и к л а д 1.6.** *Використовуючи правило трикутників, обчислимо визначник матриці третього порядку:*

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 5\cdot 2\cdot 6 + (-1)3\cdot 2 + 3\cdot 4\cdot 7 - 7\cdot 2\cdot 2 - 3\cdot 4\cdot 5 - 3\cdot 6(-1) =$$

$$= 60 - 6 + 84 - 28 - 60 + 18 = 68.$$

На практиці для обчислення визначників вищих порядків використовують інші формули.

Розглянемо визначник матриці n-го порядку. Виділимо в ньому елемент a_{ij}.

Означення 1.7. ***Мінором M_{ij} елемента a_{ij} матриці n-го порядку*** *називають визначник матриці $(n-1)$-го порядку, добутої з матриці* **A** *вилученням її i-го рядка та j-го стовпця.*

Наприклад, мінором елемента a_{23} матриці **A** третього порядку буде

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Означення 1.8. ***Алгебричним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці n-го порядку*** *називають його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \tag{1.4}$$

тобто алгебричне доповнення збігається з мінором, якщо сума номерів рядка й стовпця $(i+j)$ — парне число, й відрізняється від мінора знаком, якщо $(i+j)$ — непарне число.

Наприклад, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$; $A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}$.

Для обчислення визначників важливе значення має така теорема.

ТЕОРЕМА 1.1

Визначник квадратної матриці дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебричні доповнення:

$$\det \mathbf{A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \tag{1.5}$$

(розклад визначника за елементами i-го рядка; $i = \overline{1, n}$);

$$\det \mathbf{A} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \tag{1.6}$$

(розклад визначника за елементами j-го стовпця; $j = \overline{1, n}$).

■ **Приклад 1.7.** *Обчислимо визначник верхньої трикутної матриці*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Маємо $\det \mathbf{A} = a_{11}M_{11}$, де M_{11} — визначник матриці, яку дістають з **A** вилученням її перших рядка й стовпця. Продовжуючи обчислення, дістанемо $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.

Аналогічна відповідь буде й для визначника нижньої трикутної матриці

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Отже, ми переконалися в тому, що *визначник трикутної (й, очевидно, діагональної) матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі.*

Основні властивості визначників

1. *У разі транспонування матриці її визначник не змінюється.*
2. *Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то й визначник дорівнює нулю.*
3. *У разі переставлення двох рядків (стовпців) визначник змінює знак на протилежний.*
4. *Спільний множник усіх елементів деякого рядка (стовпця) визначника можна виносити за знак визначника.*
5. *Визначник, який має два пропорційних рядки (стовпці), дорівнює нулю.*
6. *Якщо i-й рядок (стовпець) матриці* **C** *дорівнює сумі i-го рядка (стовпця) матриці* **A** *та i-го рядка (стовпця) матриці* **B**, *а всі інші рядки (стовпці) матриць* **A**, **B**, **C** *відповідно дорівнюють один одному, то*

$$\det \mathbf{C} = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}.$$

7. *Визначник не зміниться, якщо до елементів його одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на довільне число.*

⑧ ***Визначник добутку матриць дорівнює добуткові визначників цих матриць.***

⑨ ***Сума добутків елементів будь-якого рядка визначника на алгебричні доповнення відповідних елементів іншого рядка дорівнює нулю.***

Наведені властивості часто використовують для обчислення визначників.

■ **Приклад 1.8.** *Обчислимо визначник*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

трьома способами: ① ***за правилом трикутників;*** ② ***за формулою розкладу визначника за елементами першого рядка;*** ③ ***використовуючи властивості визначника.***

① За правилом трикутників дістаємо

$$\Delta = 3 \cdot 1(-2) + (-2)3 \cdot 2 + (-2)0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 3 - (-2)(-2)(-2) = -12.$$

② За формулою розкладу визначника за елементами першого рядка

$$\Delta = 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-2) + 2(-2) + 1(-2) = -12.$$

③ Обчислимо визначник, використовуючи його властивості. Переставимо місцями перший і третій рядки й, винісши з останнього спільний множник, матимемо

$$\Delta = -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Далі, помноживши перший рядок на 2 й додавши до другого, а потім, помноживши перший рядок на (–3) й додавши до третього, дістанемо

$$\Delta = -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Нарешті, помноживши другий рядок на 2 й додавши до третього, маємо

$$\Delta = -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12$$

як визначник верхньої трикутної матриці.

✓ *Зауваження 1.3.* Саме третій спосіб широко використовується для спрощення обчислень визначників матриць порядку $n \geq 3$.

■ **Приклад 1.9.** *Обчислимо визначник*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Додамо до першого рядка всі інші. Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Перший рядок послідовно помножимо на (–2), (–3), (–4) й додамо відповідно до другого, третього й четвертого рядків:

$$\Delta = 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Знову помножимо перший рядок спочатку на (–1), а потім — на 3 й додамо відповідно до другого й третього рядків. Матимемо

$$\Delta = 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{vmatrix}.$$

Додавши другий рядок до третього, дістанемо

$$\Delta = 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 10 \cdot 16 = 160$$

як визначник верхньої трикутної матриці.

1.4 Обернена матриця

Означення 1.9. ***Оберненою матрицею до квадратної матриці*** **A** *називають таку матрицю* $\mathbf{A}^{-1}$, *для якої* $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1.7)$$

де $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ *— алгебричне доповнення елемента* a_{ij}; Δ *— визначник матриці* **A**.

Означення 1.10. *Квадратну матрицю називають* ***невиродженою***, *або* ***неособливою***, *якщо її визначник не дорівнює нулю* ($\det \mathbf{A} \neq 0$); *в противному разі* ($\det \mathbf{A} = 0$) *матрицю називають* ***виродженою***, *або* ***особливою***.

Не кожна квадратна матриця має обернену.

ТЕОРЕМА 1.2
(необхідна й достатня умова існування оберненої матриці)
Обернена матриця $\mathbf{A}^{-1}$ існує й єдина тоді й лише тоді, коли матриця **A** невироджена.

Приклад 1.10. *Знайдемо матрицю, обернену до матриці*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Спочатку обчислимо визначник цієї матриці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -16 \neq 0.$$

Отже, матриця **A** невироджена й для неї існує єдина обернена матриця $\mathbf{A}^{-1}$. Послідовне обчислення алгебричних доповнень елементів a_{ij} матриці **A** дає

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Дістаємо

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -1 & 7 & -4 \\ 3 & -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{16} & -\frac{7}{16} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Властивості невироджених матриць

① $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$. ③ $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

② $(\mathbf{A}^{n})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{n}$. ④ $\det \mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}}$.

1.5 Ранг матриці

Для дослідження й розв'язування багатьох задач важливе значення має поняття рангу матриці.

Якщо в матриці **A** розміру $m \times n$ викреслити будь-які k рядків і k стовпців, то можна виокремити квадратні підматриці k-го порядку, де $k \le \min(m;\ n)$.

Визначники таких підматриць називають ***мінорами k-го порядку матриці*** **A**.

Наприклад, із матриці **A** розміру 3×4 можна дістати підматриці першого, другого й третього порядків.

➡ **Означення 1.11.** ***Рангом матриці*** **A** *називають найвищий порядок **ненульових мінорів цієї матриці*** й позначають так: rang **A**, або $r(\mathbf{A})$.

Зазначимо:

- для рангу матриці **A** розміру $m \times n$ виконується співвідношення $r(\mathbf{A}) \le \min(m;\ n)$;
- $r(\mathbf{A}) = 0$ тоді й лише тоді, коли всі елементи матриці дорівнюють нулю;
- для квадратної матриці n-го порядку $r(\mathbf{A}) = n$ тоді й лише тоді, коли матриця **A** невироджена.

Елементарними перетвореннями матриці називатимемо такі перетворення:

- відкидання нульового рядка (стовпця);
- множення всіх елементів рядка (стовпця) матриці на число, яке не дорівнює нулю;
- переставлення рядків (стовпців) матриці;
- додавання до елементів одного рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на будь-яке число;
- транспонування матриці.

ТЕОРЕМА 1.3

Унаслідок елементарних перетворень матриці її ранг не змінюється.

Для рангу матриці справедливі такі співвідношення:

① $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \le r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$;

② $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \ge |r(\mathbf{A}) - r(\mathbf{B})|$;

③ $r(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$;

④ $r(\mathbf{AB}) \le \min\{r(\mathbf{A});\ r(\mathbf{B})\}$;

⑤ $r(\mathbf{AB}) \ge r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) - n$, *де n — число стовпців матриці* **A** *або рядків матриці* **B**;

⑥ $r(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{A})$, *якщо* **B** *— квадратна матриця й* $\det \mathbf{B} \ne 0$.

■ **Приклад 1.11.** *Знайдемо ранг матриці*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що існує мінор матриці **A** другого порядку, відмінний від нуля, наприклад $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \ne 0.$

Іноді виявляється, що не потрібно далі обчислювати всі можливі мінори третього порядку. Якщо лише ті мінори третього порядку, які містять Δ_1 як мінор, дорівнюють нулю, то $r(\mathbf{A}) = 2$. У розглядуваному прикладі мінорами є

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix}.$$

Легко підрахувати, що вони дорівнюють нулю. Отже, $r(\mathbf{A}) = 2$.

1.6 Системи лінійних рівнянь

➡ **Означення 1.12.** ***Системою m лінійних рівнянь із n невідомими*** $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *або **лінійною системою**, називають систему рівнянь вигляду*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1.8)$$

Числа a_{ij} називають ***коефіцієнтами***, а числа b_i — ***вільними членами*** системи (1.8).

Лінійну систему називають ***однорідною***, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю. Якщо ж серед вільних членів є ненульові, то лінійну систему називають ***неоднорідною***.

Означення 1.13. ***Розв'язком системи лінійних рівнянь** (1.8) називають упорядковану сукупність чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, підставлення яких замість відповідних невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ перетворює кожне з рівнянь системи (1.8) на тотожність.*

Означення 1.14. *Систему (1.8) називають **сумісною**, якщо вона має принаймні один розв'язок. Якщо система (1.8) не має розв'язків, то її називають **несумісною**. Сумісну систему, яка має тільки один розв'язок, називають **визначеною**. Якщо сумісна система має нескінченну кількість розв'язків, її називають **невизначеною**.*

Означення 1.15. *Дві системи вважають **еквівалентними**, якщо множини їхніх розв'язків однакові.*

Зокрема, дві несумісні системи еквівалентні.

Подамо систему (1.8) у матричному вигляді.

Матрицю $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ називають ***основною матрицею***, а матрицю $(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ — ***розширеною матрицею системи***.

Позначимо через $\mathbf{X}$ та $\mathbf{B}$ матриці-стовпці $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$, складені з невідомих і вільних членів. Тоді система (1.8) набере вигляду

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}. \tag{1.9}$$

Такий запис системи називають ***матричним***.

Розв'язуючи ту чи іншу систему рівнянь, як правило, насамперед з'ясовують, чи сумісна вона, й потім уже знаходять усі її розв'язки.

Нехай задано систему лінійних рівнянь (1.8), у якій число невідомих n не менше за кількість рівнянь m. Питання про сумісність такої системи розв'язує наступна теорема.

ТЕОРЕМА 1.4

(Кронекера—Капеллі)

Система лінійних рівнянь сумісна тоді й лише тоді, коли ранг r основної матриці системи дорівнює рангу r' розширеної матриці цієї системи.

За цією теоремою, якщо ранги основної та розширеної матриць не рівні, то система несумісна й немає сенсу її розв'язувати. Якщо ранги матриць рівні, то система сумісна.

Для сумісних систем лінійних рівнянь можливі такі в и п а д к и.

1. *Якщо ранг матриці сумісної системи дорівнює числу невідомих, тобто $r = n$, то система (1.8) має єдиний розв'язок.*

Справді, в цьому разі система (1.8) має квадратну невироджену матрицю порядку r і, за теоремою Крамера, існує єдиний розв'язок цієї системи, тобто система визначена.

2. *Якщо ранг матриці сумісної системи менший від числа невідомих, тобто $r < n$, то система невизначена й має нескінченну кількість розв'язків.*

Нехай $r < n$; тоді r невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_r$ називаються ***основними***, або ***базисними***, якщо визначник матриці з коефіцієнтів при цих невідомих (тобто базисний мінор) відмінний від нуля. Решта $n - r$ невідомих називаються ***неосновними***, або ***вільними***. Можна показати, що базисні невідомі $x_1, x_2, \ldots, x_r$ лінійно виражаються через вільні невідомі. Оскільки вільні невідомі можуть набувати довільних значень, то в цьому разі система буде невизначеною.

Розв'язок системи (1.8), в якому всі $n - r$ неосновних невідомих дорівнюють нулю, називають ***базисним***.

■ **Приклад 1.12.** *Розв'яжемо систему рівнянь*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ \quad x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Запишемо основну **A** й розширену (**A**|**b**) матриці системи:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Їхні ранги $r = 2$, $r' = 3$ відповідно. Отже, система несумісна.

■ **Приклад 1.13.** *Розв'яжемо систему рівнянь*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$$

Ця система сумісна, оскільки $r = r' = 2$, причому ранг матриці менший від числа невідомих. Отже, система має безліч розв'язків. Мінор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, тому обмежимося лише першими двома рівняннями, а x_3, x_4 і x_5 візьмемо за вільні невідомі. Перенесемо вільні невідомі в праві частини перших двох рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 - x_3 - x_4 - x_5, \\ 3x_1 + 2x_2 = -2 - x_3 - x_4 + 3x_5. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, дістанемо

$$x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5, \quad x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5,$$

де x_3, x_4, x_5 набувають довільних значень.

Отже, дана система має розв'язки

$$(-16 + x_3 + x_4 + 5x_5;\ 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5;\ x_3;\ x_4;\ x_5),$$

де x_3, x_4, x_5 — довільні числа.

1.7 Методи розв'язування систем лінійних рівнянь

1.7.1. Матричний метод

Нехай кількість рівнянь системи (1.8) дорівнює числу невідомих, тобто $m = n$. Тоді матриця системи буде квадратною, а її визначник $\Delta = \det \mathbf{A}$ називають ***основним визначником системи***.

Припустимо, що матриця **A** невироджена, тобто її визначник $\Delta \neq 0$. У цьому разі існує обернена матриця $\mathbf{A}^{-1}$.

Запишемо систему в матричному вигляді (1.9). Помноживши зліва обидві частини матричної рівності на матрицю $\mathbf{A}^{-1}$, дістанемо

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

Оскільки $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{EX} = \mathbf{X}$, то розв'язком системи буде матриця-стовпець

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}. \tag{1.10}$$

■ **Приклад 1.14.** *Метричним методом розв'яжемо систему рівнянь*

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

У цьому разі

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ураховуючи результат, добутий у прикладі 1.10, за формулою (1.10) маємо

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{16} & -\frac{7}{16} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, задана система має розв'язок (1; 1; 2).

1.7.2. Застосування формул Крамера для розв'язування систем лінійних рівнянь

Формули Крамера для розв'язування системи (1.8) використовуються лише тоді, коли основна матриця **A** квадратна й невироджена.

ТЕОРЕМА 1.5
(Крамера)

Нехай Δ — основний визначник системи, а Δ_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) — визначник, який дістають із Δ заміною j-го стовпця на стовпець вільних членів **B**. Тоді, якщо $\Delta \neq 0$, то система (1.8) має єдиний розв'язок, який визначається формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \qquad (1.11)$$

✓ *Зауваження 1.4.* У разі, коли $\Delta = 0$, а серед Δ_j є ненульові визначники, система (1.8) несумісна. В разі однорідної системи і $\Delta \neq 0$ вона має лише нульовий розв'язок; якщо ж $\Delta = 0$, то система, крім нульового, має також інші розв'язки.

■ **Приклад 1.15.** *За формулами Крамера розв'яжемо систему*

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 7x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ -9x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 7 & -5 & 2 \\ -9 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & 2 \\ 1 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -9 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 7 & -5 & 0 \\ -9 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

За формулами Крамера дістанемо

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1.$$

Після відшукання розв'язку системи рекомендується зробити перевірку, підставивши добуті значення змінних у рівняння системи, й переконатися, що вони перетворюються на правильні рівності.

Недоліком розв'язання систем n лінійних рівнянь із n змінними за формулами Крамера та матричним способом є велика трудомісткість, пов'язана з обчисленням визначників та відшуканням оберненої матриці.

1.7.3. Метод Гаусса

Розглянемо систему (1.8) m лінійних рівнянь із n невідомими в загальному випадкові. Зауважимо, що й матричний метод, і метод Крамера пов'язані з великою обчислювальною роботою. Є економічніші методи розв'язування систем лінійних рівнянь, що грунтуються на попередньому перетворенні розширеної матриці системи до спеціального вигляду. До них належить метод Гаусса.

***Метод Гаусса — метод послідовного виключення невідомих** — полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень система рівнянь зводиться до рівносильної системи, з якої послідовно, починаючи з останніх (за номером) змінних, знаходять усі інші змінні.*

До ***елементарних перетворень системи лінійних рівнянь*** належать:

- множення рівняння системи на число, відмінне від нуля;
- додавання до одного рівняння системи іншого, помноженого на будь-яке число;
- переставлення місцями двох рівнянь системи.

Після застосування елементарних перетворень завжди дістають систему, еквівалентну початковій.

Розглянемо систему рівнянь загального вигляду (1.8). Нехай для визначеності $a_{11} \neq 0$ (якщо $a_{11} = 0$, то можна переставити на перше місце ненульовий доданок або почати з другого рівняння). Помножимо перше рівняння на $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ і додамо до другого рівняння цієї системи. Дістанемо друге рівняння, в якому коефіцієнт при x_1 дорівнює нулю. Помноживши перше рівняння на $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$ і додавши до третього, дістанемо третє рівняння, яке також не містить x_1. Зробивши аналогічні дії над усіма іншими рівняннями, дістанемо систему, еквівалентну (1.8):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad a_{32}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{m1}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases}$$

де $a_{22}^{(1)}, \ldots, a_{2n}^{(1)}, a_{32}^{(1)}, \ldots, a_{3n}^{(1)}, a_{m1}^{(1)}, \ldots, a_{mn}^{(1)}, b_2^{(1)}, \ldots, b_m^{(1)}$ — нові коефіцієнти й вільні члени. Індекс у дужках означає, що нові коефіцієнти добуто після першого кроку.

На другому кроці, припускаючи для визначеності, що $a_{22}^{(1)} \neq 0$ і зберігаючи перші два рівняння останньої системи, перетворимо її так, щоб в усіх інших рівняннях коефіцієнти при x_2 перетворилися в нуль.

Продовжуючи процес послідовного виключення невідомих аналогічним чином (тобто на третьому кроці перетворюються рядки з четвертого до останнього, на четвертому кроці — з п'ятого до останнього й т. д.) доти, доки не дійдемо до останнього рядка, початкову систему (1.8) можна звести до однієї з трьох:

1) системи трикутного вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{mn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}, \end{cases}$$

котра, як і початкова, має єдиний розв'язок, що шукається «з кінця» (значення x_n — з останнього рівняння, x_{n-1} — із попереднього й т. д.);

2) системи вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2k}^{(1)}x_k + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{kk}^{(k-1)}x_k + \ldots + a_{kn}^{(k-1)}x_n = b_k^{(k-1)}, \end{cases}$$

$$k < n,$$

яка має нескінченну кількість розв'язків. Залишаємо члени з першими k невідомими на своїх місцях, а решту переносимо праворуч, надаючи їм довільних значень. Дістанемо систему k рівнянь із k невідомими трикутного вигляду. Вона легко розв'язується «з кінця», причому довільному наборові невідомих $x_{k+1}, \ldots, x_n$ відповідає певний набір $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Ураховуючи, що наборів $x_{k+1}, \ldots, x_n$ існує безліч, дістанемо, що початкова система невизначена;

3) системи вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2k}^{(1)}x_k + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad 0 \cdot x_k = b_k^{(k-1)}, \end{cases}$$

$$k \le n,$$

яка, очевидно, несумісна, оскільки жодні значення невідомих не можуть задовольнити її останнє рівняння.

Метод Гаусса успішно застосовується для будь-якої лінійної системи (1.8), причому елементарні перетворення виконують не над рівняннями системи, а над рядками розширеної матриці $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$. Покажемо це на прикладах.

■ **Приклад 1.16.** *Методом Гаусса розв'яжемо систему*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Складемо розширену матрицю $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ і виконаємо елементарні перетворення над рядками матриці:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & -12 \end{array}\right) \to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&1&4\\0&-1&0&1&2\\0&-3&5&-4&-7\\0&1&-1&1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&1&4\\0&-1&0&1&2\\0&0&5&-7&-13\\0&0&-1&2&5\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&1&4\\0&-1&0&1&2\\0&0&-1&2&5\\0&0&5&-7&-13\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&1&4\\0&-1&0&1&2\\0&0&-1&2&5\\0&0&0&3&12\end{array}\right).$$

Здійснили такі елементарні перетворення над рядками матриці:

1) помножили перший рядок на (–2), (–1), (–3) й додали відповідно до другого, третього й четвертого рядків;

2) переставили місцями другий і третій рядки, а четвертий — помножили на (–1/4);

3) послідовно помножили другий рядок на (–3) та 1 і додали до третього й четвертого;

4) переставили місцями четвертий і третій рядки;

5) третій рядок помножили на 5 і додали до четвертого.

Цій розширеній матриці відповідає трикутна система рівнянь

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=4,\\ \qquad -x_2+x_4=2,\\ \qquad\quad -x_3+2x_4=5,\\ \qquad\qquad 3x_4=12.\end{cases}$$

Легко знайти розв'язок системи: $x_4=4$, $x_3=3$, $x_2=2$, $x_1=1$.

Отже, початкова система має розв'язок (1; 2; 3; 4).

■ **Приклад 1.17.** *Методом Гаусса розв'яжемо систему*

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3-x_4=1,\\ 3x_1+x_2+2x_3-2x_4=2,\\ 2x_1-4x_2-3x_3+6x_4=7,\\ 7x_1+5x_2+6x_3-6x_4=6.\end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ і виконаємо потрібні елементарні перетворення над її рядками:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&-1&1\\3&1&2&-2&2\\2&-4&-3&6&7\\7&5&6&-6&6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&-1&1\\0&-2&-1&1&-1\\0&-6&-5&8&5\\0&-2&-1&1&-1\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&-1&1\\0&-2&-1&1&-1\\0&0&-2&5&8\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Цій розширеній матриці відповідає система рівнянь

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3-x_4=1,\\ \quad -2x_2-x_3+x_4=-1,\\ \qquad -2x_3+5x_4=8\end{cases}\quad\text{або}\quad\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1+x_4,\\ \quad -2x_2-x_3=-1-x_4,\\ \qquad -2x_3=8-5x_4.\end{cases}$$

Вона легко розв'язується «з кінця»:

$$x_3=\frac{5}{2}x_4-4,\quad x_2=\frac{5}{2}-\frac{3}{4}x_4,\quad x_1=\frac{5}{2}-\frac{3}{4}x_4,$$

де x_4 набуває довільних значень.

Отже, початкова система має розв'язки

$$\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{4}x_4;\ \frac{5}{2}-\frac{3}{4}x_4;\ \frac{5}{2}x_4-4;\ x_4\right),$$

де x_4 — довільне число.

■ **Приклад 1.18.** *Методом Гаусса розв'яжемо систему*

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=1,\\ 3x_1-x_2+2x_3=7,\\ x_1+9x_2-6x_3=2.\end{cases}$$

Складемо розширену матрицю $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ і виконаємо потрібні елементарні перетворення над її рядками:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&1\\3&-1&2&7\\1&9&-6&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&1\\0&-7&5&4\\0&7&-5&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&1\\0&-7&5&4\\0&0&0&5\end{array}\right).$$

Система, яка відповідає цій розширеній матриці, очевидно, несумісна, оскільки її останній рядок відповідає рівнянню, в якому всі коефіцієнти при невідомих дорівнюють нулю, а вільний член ненульовий. Отже, початкова система несумісна.

1.7.4. Застосування методу Гаусса для обчислення оберненої матриці

Метод Гаусса є універсальним у разі розв'язування систем лінійних рівнянь. Цей метод можна застосовувати й для обчислення оберненої матриці, що набагато простіше за спосіб, розглянутий у п. 1.4.

Аби знайти обернену матрицю, потрібно виконати такі дії:

1) до даної матриці **A** справа дописати одиничну матрицю **E**;

2) елементарними перетвореннями над рядками матриці $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ матрицю **A** звести до одиничної матриці.

У результаті на місці даної матриці **A** буде сформовано одиничну матрицю, а на місці дописаної справа одиничної матриці **E** знаходитиметься обернена матриця $\mathbf{A}^{-1}$, тобто замість матриці $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ дістанемо матрицю $(\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1})$.

■ **Приклад 1.19.** *Знайдемо матрицю, обернену до матриці*

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

До даної матриці **A** справа допишемо одиничну матрицю **E**. За допомогою елементарних перетворень над рядками матриці $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ матриця **A** зводиться до одиничної матриці:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 1 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right).$$

Отже, обернена матриця

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Правильність виконаних обчислень легко безпосередньо перевірити за означенням $\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}$.

1.8 Лінійні економічні моделі

1.8.1. Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки (балансовий аналіз)

Розглянемо спрощену економіко-математичну модель міжгалузевого балансу. Зв'язок між галузями зазвичай відображують у таблицях міжгалузевого балансу, а математичну модель, яка дає змогу аналізувати їх, розроблено в 1936 р. американським економістом В. Леонтьєвим.

Припустимо, що весь виробничий комплекс поділено на n «чистих» галузей. Чисті галузі є економічною абстракцією, тобто це умовні галузі, кожна з яких об'єднує все виробництво даного виду продукції. Вважатимемо, що кожна з галузей випускає лише один певний вид продукції (тобто різні галузі випускають різну продукцію). В процесі виробництва кожна з галузей потребує продукції, виробленої в інших галузях.

Мета балансового аналізу — відповісти на запитання, яке постає в макроекономіці й пов'язане з ефективністю ведення багатогалузевого господарства: яким має бути обсяг виробництва кожної з галузей, щоб задовольнити всі потреби в продукції цієї галузі? При цьому кожна галузь виступає, з одного боку, як виробник даної продукції, а з іншого — як споживач і своєї, і виробленої іншими галузями продукції.

Основні припущення моделі, яку надалі називатимемо моделлю Леонтьєва, такі:

1) в економічній системі виробляються, купуються, споживаються й інвестуються n видів продукції, які позначимо індексами $i = 1, 2, ..., n$;

2) кожна галузь виробляє лише один вид продукції, отже, спільне виробництво різних товарів виключається. Різні галузі виробляють різні товари, й тому галузь, що виробляє продукцію виду i, позначатимемо тим самим індексом;

3) під виробничим процесом у кожній галузі розумітимемо перетворення деяких (можливо всіх) видів продукції, взятих у певних обсягах, на деякий обсяг продукції того чи іншого виду. При цьому припускається, що співвідношення витраченої й випущеної продукції є сталим.

Нехай економіко-виробнича система складається з n галузей, тобто виробляє n видів продукції. Схему міжгалузевого балансу виробництва й розподілу продукції подано в табл. 1.1, де зазначено основні показники та зв'язки виробництва за певний період часу (зазвичай за рік).

Таблиця 1.1

Галузь виробництва	Розподіл випуску продукції в галузях виробництва							Обсяг кінцевої продукції	Обсяг валової продукції
	1	2	...	j	...	n	Всього		
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1j}	...	x_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2j}	...	x_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{2j}$	Y_2	X_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ij}	...	x_{in}	$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$	Y_i	X_i
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nj}	...	x_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$	Y_n	X_n
Всього	$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} x_{i2}$	...	$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$	...	$\sum_{i=1}^{n} x_{in}$	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$	Y	X

Введемо позначення: X_i — обсяг валової продукції i-ї галузі ($i = 1, 2, ..., n$) за одиницю часу (наприклад, за рік); x_{ij} — обсяг продукції i-ї галузі, що потребує j-та галузь у процесі виробництва ($i, j = 1, 2, ..., n$); Y_i — обсяг кінцевої продукції i-ї галузі, призначеної для невиробничого споживання.

Використовуючи дані табл. 1.1, запишемо квадратну матрицю n-го порядку (за умови рівності поданих у балансі галузей виробництва та споживачів продукції). Кожен елемент матриці x_{ij}, $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., n$, характеризує обсяг поставки продукції з i-ї галузі, що

йде на виробниче споживання в j-й галузі. Взявши суму міжгалузевих поставок продукції i-ї галузі в усіх галузях-споживачах, дістанемо загальний обсяг проміжної продукції i-ї галузі: $X_i' = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$, $i = 1, 2, ..., n$.

Сума обсягів проміжної продукції всіх галузей виробництва становить загальний обсяг проміжної продукції: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = X'$.

За економічним змістом обсяг проміжної продукції — частина обсягу валової продукції, яка залишається після вилучення кінцевого продукту й спрямовується для відшкодування поточних матеріальних витрат у межах розглядуваного періоду часу.

Оскільки обсяг валової продукції будь-якої i-ї галузі дорівнює сукупному обсягові продукції, що споживається n галузями, та кінцевої продукції, то запишемо систему

$$\begin{cases} X_1 = x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} + Y_1, \\ X_2 = x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} + Y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_i = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} + Y_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_n = x_{n1} + x_{n2} + ... + x_{nn} + Y_n, \end{cases} \tag{1.12}$$

або в скороченій формі:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{1.13}$$

Рівняння (1.12) називають ***співвідношеннями балансу***.

Розглянемо *міжгалузевий баланс у вартісній формі*, тобто коли всі величини, що входять у систему (1.12), виражають вартість.

Особливість системи (1.12) полягає в тому, що змінні в ній містяться в першому степені, тому залежність між обсягом валової продукції та розподілом продукції кожної галузі лінійна.

Зауважимо, що величини x_{ij}, X_i, Y_i можуть виражатися в натуральних одиницях (штуках, тоннах, літрах тощо). Тоді йдеться про *міжгалузевий баланс у натуральній формі*.

Під час побудови й практичних застосувань економіко-математичної моделі міжгалузевого балансу використовують коефіцієнти прямих матеріальних витрат. Якщо обсяг міжгалузевих поставок i-ї галузі в j-ту поділити на обсяг валової продукції j-ї галузі, дістанемо шуканий норматив:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad i, j = 1, 2, ..., n, \tag{1.14}$$

де a_{ij} — ***коефіцієнт прямих витрат*** продукції i-ї галузі на одиницю обсягу валової продукції j-ї галузі.

Ці коефіцієнти утворюють квадратну ***матрицю коефіцієнтів прямих витрат***

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

яку іноді називають матрицею технологічних коефіцієнтів (*технологічною матрицею*).

Матриця **A** містить інформацію про структуру міжгалузевих зв'язків, про технологію виробництва даної економіко-виробничої системи. З рівності (1.14) випливає, що

$$x_{ij} = a_{ij} X_j. \tag{1.15}$$

Підставивши (1.15) в (1.13), дістанемо систему

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{1.16}$$

Запишемо її у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

або

$$\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{Y}. \tag{1.17}$$

Співвідношення (1.17) називають ***рівнянням лінійного міжгалузевого балансу***, або (в указаних позначеннях) ***моделлю Леонтьєва***.

Основна задача міжгалузевого балансу полягає у відшуканні такої матриці обсягів валової продукції **X**, яка за відомої матриці прямих витрат **A** забезпечує задану матрицю обсягів кінцевої продукції **Y**.

Перепишемо рівняння (1.17) так:

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{Y}. \tag{1.18}$$

Якщо матриця (**E** – **A**) невироджена, то його можна подати у вигляді

$$\mathbf{X} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{Y}. \tag{1.19}$$

Матрицю $\mathbf{B} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ називають ***матрицею повних витрат***.

Економічний зміст елементів матриці **B** такий: *кожен елемент b_{ij} матриці **B** є обсягом валової продукції i-ї галузі, необхідної для забезпечення випуску одиниці кінцевої продукції j-ї галузі* ($i, j = 1, 2, ..., n$).

За економічним змістом задачі величини X_i мають бути невід'ємними, оскільки $Y_i \geq 0$ і $a_{ij} \geq 0$, де $i, j = 1, 2, ..., n$.

З математичного погляду питання про сумісність системи (1.17) зводиться до питання про існування оберненої матриці $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$, складеної з невід'ємних елементів.

Рівняння міжгалузевого балансу можна використовувати у двох випадках. У першому (простішому) випадкові, коли відома матриця обсягів валової продукції **X**, потрібно обчислити матрицю обсягів кінцевої продукції **Y** (див. приклад 1.20).

■ **Приклад 1.20.** *Нехай матриця обсягів валової продукції галузі й матриця коефіцієнтів прямих витрат мають відповідно такий вигляд:*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи формулу (1.18) і правило множення матриць, дістаємо матрицю обсягів кінцевої продукції, що призначена для реалізації:

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,2 \\ -0,2 & 0,7 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

У другому випадкові рівняння міжгалузевого балансу використовується для планування (див. приклад 1.21).

Матрицю **A**, всі елементи якої невід'ємні, називають ***продуктивною***, якщо для довільної матриці **Y** із невід'ємними елементами існує розв'язок рівняння (1.17) — матриця **X**, усі елементи якої невід'ємні. В цьому разі модель Леонтьєва називається *продуктивною*.

Є кілька *критеріїв продуктивності матриці* **A**. Ми користуватимемося таким: *матриця* **A** *з невід'ємними елементами продуктивна, якщо максимум сум елементів її стовпців не перевищує одиниці, причому хоча б для одного зі стовпців сума елементів строго менша за одиницю, тобто матриця* **A** *продуктивна, якщо: 1)* $a_{ij} \geq 0$ *для довільних* $i, j = 1, 2, \ldots, n$; *2)* $\max\limits_{j=1,2,\ldots,n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$; *3) існує номер* j *такий, що* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

■ **Приклад 1.21.** *Розглянемо умовну виробничу систему, яка складається з трьох галузей. Коефіцієнти прямих витрат одиниць продукції i-ї галузі, що використовуються для випуску одиниць продукції j-ї галузі, та обсяги кінцевої продукції (у вартісній формі) наведено в таблиці.*

Галузь виробництва	Прямі витрати галузей			Обсяг кінцевої продукції
	1	2	3	
1	0	0,2	0	200
2	0,2	0	0,1	100
3	0	0,1	0,2	300

Визначимо: коефіцієнти повних витрат; матрицю обсягів валової продукції **X** *та план кожної галузі; коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат.*

Позначимо матрицю обсягів валової продукції, яка визначає виробничу програму галузей, так:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix},$$

де X_1, X_2, X_3 — планові обсяги валової продукції галузей. У розглядуваному прикладі матрицями технологічних коефіцієнтів та обсягів кінцевої продукції є відповідно

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Виробничі зв'язки галузей задовольняють умови

$$\begin{cases} X_1 - (0 \cdot X_1 + 0,2 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3) = 200, \\ X_2 - (0,2 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0,1 \cdot X_3) = 100, \\ X_3 - (0 \cdot X_1 + 0,1 \cdot X_2 + 0,2 \cdot X_3) = 300; \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 - 0,2X_2 = 200, \\ -0,2X_1 + X_2 - 0,1X_3 = 100, \\ -0,1X_2 + 0,8X_3 = 300. \end{cases}$$

Запишемо систему в матричному вигляді:

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{Y}.$$

Тоді

$$\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,2 & 0 \\ -0,2 & 1 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}.$$

Визначник матриці (**E** – **A**)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -0,2 & 0 \\ -0,2 & 1 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,8 - 0,01 - 0,032 = 0,758.$$

Знайдемо алгебричні доповнення елементів матриці (**E** – **A**):

$$\mathbf{B}_{11} = 0{,}79, \quad \mathbf{B}_{21} = 0{,}16, \quad \mathbf{B}_{31} = 0{,}02,$$
$$\mathbf{B}_{12} = 0{,}16, \quad \mathbf{B}_{22} = 0{,}8, \quad \mathbf{B}_{32} = 0{,}1,$$
$$\mathbf{B}_{13} = 0{,}02, \quad \mathbf{B}_{23} = 0{,}1, \quad \mathbf{B}_{33} = 0{,}96.$$

Обернена матриця має вигляд

$$\mathbf{B} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{0,758} \begin{pmatrix} 0,79 & 0,16 & 0,02 \\ 0,16 & 0,8 & 0,1 \\ 0,02 & 0,1 & 0,96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 238 \\ 186 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

Отже, планові обсяги валової продукції для галузей відповідно становлять: $X_1 = 238$, $X_2 = 186$, $X_3 = 400$. (Обчислюючи обернену матрицю, ми округлили всі числа до сотих.)

Визначимо виробничу програму кожної галузі, використовуючи коефіцієнти a_{ij}:

$$x_{11} = a_{11}X_1 = 0 \cdot 238 = 0, \qquad x_{21} = a_{21}X_1 = 0,2 \cdot 238 = 47,6,$$

$$x_{12} = a_{12}X_2 = 0,2 \cdot 186 = 37,2, \qquad x_{22} = a_{22}X_2 = 0,2 \cdot 186 = 0,$$

$$x_{13} = a_{13}X_3 = 0 \cdot 400 = 0, \qquad x_{23} = a_{23}X_3 = 0,1 \cdot 400 = 40,$$

$$x_{31} = a_{31}X_1 = 0 \cdot 238 = 0,$$

$$x_{32} = a_{32}X_2 = 0,1 \cdot 186 = 18,6,$$

$$x_{33} = a_{33}X_3 = 0,2 \cdot 400 = 80.$$

Коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат c_{ij} матриці **C** визначаються як різниця внутрішньовиробничих витрат (елементи матриці **B**) та прямих витрат (елементи матриці **A**):

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,01 & 0,03 \\ 0,01 & 1,05 & 0,03 \\ 0,03 & 0,03 & 1,07 \end{pmatrix}.$$

1.8.2. Модель рівноважних цін

Розглянемо балансову модель, яку називають ***моделлю рівноважних цін***.

Нехай задано матриці

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

де **A** — матриця прямих витрат; **X** — матриця обсягів валової продукції; **P** — матриця цін, i-та координата якої дорівнює ціні одиниці продукції i-ї галузі.

Тоді, наприклад, перша галузь одержить прибуток, який дорівнює p_1x_1. Частину свого прибутку ця галузь витратить на закупівлю продукції інших галузей. Так, для випуску одиниці продукції їй необхідна продукція першої галузі в обсязі a_{11}, другої галузі — в обсязі a_{21}, ... n-ї галузі — в обсязі a_{n1}.

На закупівлю цієї продукції буде витрачено суму, що становить

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{n1}p_n.$$

Отже, першій галузі для випуску продукції в обсязі x_1 необхідно витратити на закупівлю продукції інших галузей суму, що становить

$$x_1(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{n1}p_n).$$

Частину доходу, що залишилася, позначимо V_1 (ця частина доходу називається ***додатковою вартістю*** й іде на виплату заробітної плати й податків, підприємницький прибуток та інвестиції).

Таким чином, справджується рівність

$$x_1p_1 = x_1(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 \ldots + a_{n1}p_n) + V_1.$$

Поділивши її на x_1, дістанемо

$$p_1 = (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{n1}p_n) + W_1,$$

де $W_1 = V_1/x_1$ — норма додаткової вартості (тобто додаткова вартість на одиницю продукції, що випускається).

Аналогічно для інших галузей дістанемо

$$\begin{aligned} p_2 &= a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{n2}p_n + W_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{nn}p_n + W_n. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Добуті рівності можна записати в матричній формі:

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{W}, \tag{1.21}$$

де $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ — матриця, транспонована до матриці **A**; $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix}$ — матриця норм додаткової вартості, де $W_i = V_i/x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Бачимо, що рівняння (1.21) відрізняються від рівнянь моделі Леонтьєва лише тим, що матрицю обсягів валової продукції **X** замінено на матрицю цін **P**, матрицю обсягу кінцевої продукції **Y** — на матрицю додаткової вартості **W**, матрицю **A** — на транспоновану матрицю $\mathbf{A}^T$.

Модель рівноважних цін дає змогу за відомих норм додаткової вартості прогнозувати ціни на продукцію галузей, а також зміни цін та інфляцію, що є наслідком зміни ціни в одній із галузей.

■ **Приклад 1.22.** *Розглянемо економічну систему, яка складається з трьох галузей: паливно-енергетичної, промисловості й сільського господарства. Нехай* $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$ *— транспонована матриця прямих витрат,* $\mathbf{W} = (4 \;\; 10 \;\; 4)$ *— матриця додаткової вартості. Визначимо рівноважні ціни.*

Скористаємося формулою (1.21):

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{W} \text{ або } (\mathbf{E} - \mathbf{A}^T)\mathbf{P} = \mathbf{W}.$$

Звідси $\mathbf{P} = (\mathbf{E} - \mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{W}$, де $\mathbf{B}^T = (\mathbf{E} - \mathbf{A}^T)$ – транспонована матриця повних витрат. Після необхідних обчислень знайдемо

$$(\mathbf{B}^T)^{-1} = \frac{1}{0,444}\begin{pmatrix} 0,58 & 0,14 & 0,18 \\ 0,28 & 0,68 & 0,24 \\ 0,25 & 0,29 & 0,69 \end{pmatrix},$$

звідки $\mathbf{P} = (\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

1.8.3. Лінійна модель міжнародної торгівлі

Розглянемо ***лінійну модель обміну***, котру часто інтерпретують як ***модель міжнародної торгівлі***, що дає змогу визначити торговельні доходи країн (або їхні співвідношення) для збалансованої торгівлі. Нехай маємо групу з n країн $K_1, K_2, \ldots, K_n$, які ведуть між собою торгівлю. Позначимо через x_j торговельний дохід j-ї країни, який фор-

мується з продажу власних товарів як на внутрішньому, так і на зовнішньому ринках. Структуру торговельних відносин між країнами вважаємо встановленою: частина q_{ij} торговельного доходу x_j, яку j-та країна витрачає на купівлю товарів i-ї країни, є сталою.

Розглянемо матрицю

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix},$$

яку називають ***структурною матрицею торгівлі***.

Вважатимемо, що весь торговельний дохід витрачається або на закупівлю товарів на своїй території, або на імпорт з інших країн, тобто сума елементів будь-якого стовпчика матриці **Q** дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^{n} q_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (1.22)$$

Для країни K_i доход від внутрішньої та зовнішньої торгівлі становить

$$x_i = q_{i1}x_1 + q_{i2}x_2 + \ldots + q_{in}x_n.$$

Для збалансованої торгівлі необхідно знайти таку матрицю торговельних доходів

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

щоб справджувалося матричне рівняння

$$\mathbf{QX} = \mathbf{X}, \qquad (1.23)$$

з якого можна визначити **X**.

■ **Приклад 1.23.** *Візьмемо три країни (наприклад, США, Німеччину й Кувейт) — учасниці торгівлі з торговельними доходами* X_1, X_2, X_3 *. Ва-*

жатимемо, що весь торговельний дохід кожної країни витрачається або на закупівлю товарів на своїй території, або на імпорт з інших країн. Нехай США половину торговельного доходу витрачають на закупівлю товарів на своїй території, чверть — на закупівлю товарів із Німеччини та ще чверть — товарів із Кувейту. Німеччина порівну витрачає торговельний доход на закупівлю товарів зі США, на своїй території та з Кувейту. Кувейт половину торговельного доходу витрачає на закупівлю товарів зі США, іншу половину — з Німеччини й нічого не закуповує на своїй території. Визначимо доходи країн, які задовольняли б збалансовану бездефіцитну торгівлю, якщо сума їхніх доходів становить 9000 умов. грош. од.

Запишемо структурну матрицю торгівлі:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{США} & \text{Німеччина} & \text{Кувейт}\end{array} \\ \mathbf{Q} = & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Нехай q_{ij} — частина доходу, яку j-та країна витрачає на закупівлю товарів i-ї країни. Зазначимо, що сума елементів матриці $\mathbf{Q}$ у кожному стовпці дорівнює одиниці.

Після підбиття підсумків торгівлі за рік i-та країна одержить прибуток $x_i = q_{i1}X_1 + q_{i2}X_2 + q_{i3}X_3$, $i = 1, 2, 3$.

Запишемо систему рівнянь для відшукання матриці $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{QX} = \mathbf{X} \text{ або } (\mathbf{Q} - \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{0},$$

тобто

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок цієї системи: $X_1 = 2X_3$, $X_2 = \frac{3}{2}X_3$, $X_3 \in \boldsymbol{R}$.

Добутий результат означає, що збалансованість торгівлі даних країн досягається за співвідношення їхніх національних доходів 2 : (3/2) : 1.

Знайдемо доходи країн, які задовольняли б збалансовану бездефіцитну торгівлю за умови, що сума доходів становить $X_1 + X_2 + X_3 = 9000$ умов. грош. од. Підставимо в цю рівність значення $X_1 = 2C$, $X_2 = \frac{3}{2}C$, $X_3 = C$, де $C = \text{const}$. Дістанемо

$$2C + \frac{3}{2}C + C = 9000,$$

звідки $C = 2000$. Отже, $X_1 = 4000$, $X_2 = 3000$, $X_3 = 2000$ умов. грош. од.

На завершення зазначимо, що тут наведено спрощені варіанти моделей міжгалузевого балансу та міжнародної торгівлі.

?

Контрольні запитання

1. Що таке матриця?
2. Які є види матриць?
3. Які операції над матрицями називають лінійними?
4. Яку матрицю називають сумою (різницею) матриць?
5. Яку матрицю називають добутком матриці на число?
6. Які властивості лінійних операцій над матрицями?
7. Для яких матриць вводиться дія множення?
8. Яку матрицю називають добутком матриць?
9. Які властивості множення матриць?
10. Як обчислюють визначник квадратної матриці другого, третього, ..., n-го порядку?
11. Які властивості визначників?
12. Як записують розклад визначника n-го порядку за елементами будь-якого рядка (стовпця)?
13. Що називають рангом матриці?
14. Які перетворення матриці називають елементарними?
15. Що таке обернена матриця?
16. Які існують методи обчислення оберненої матриці?

17. Що називають розв'язком системи лінійних рівнянь?
18. Яку систему лінійних рівнянь називають сумісною?
19. Яку систему лінійних рівнянь називають несумісною?
20. Яку систему лінійних рівнянь називають визначеною?
21. Яку систему лінійних рівнянь називають невизначеною?
22. Як формулюється теорема Кронекера—Капеллі?
23. У чому полягає основна ідея методу Гаусса?
24. В якому випадкові можна користуватися матричним методом розв'язування системи лінійних рівнянь?
25. Як можна застосовувати формули Крамера для знаходження розв'язку системи лінійних рівнянь? В якому випадкові можна користуватися цими формулами?
26. За якої умови система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок?
27. Що можна сказати про систему лінійних рівнянь, якщо її основний визначник дорівнює нулю?
28. У чому полягає суть моделі Леонтьєва багатогалузевої економіки?
29. Яка основна задача міжгалузевого балансу?
30. Як визначають матриці прямих, повних та посередницьких витрат?
31. Який існує критерій продуктивності моделі Леонтьєва?
32. Як будується економічна модель рівноважних цін?
33. У чому полягає лінійна модель міжнародної торгівлі?

Приклади розв'язування задач

1 *Знайти суму матриць*

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&5&7\\2&-1&0\\4&3&2\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&3&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

Маємо

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3+1&5+2&7+4\\2+2&-1+3&0-2\\4-1&3+0&2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&7&11\\4&2&-2\\3&3&3\end{pmatrix}.$$

2 *Знайти матрицю* **2A + 5B**, *якщо*

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&5\\4&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&3\\1&-2\end{pmatrix}.$$

Маємо

$$2\mathbf{A}=\begin{pmatrix}6&10\\8&2\end{pmatrix},\quad 5\mathbf{B}=\begin{pmatrix}10&15\\5&-10\end{pmatrix},\quad 2\mathbf{A}+5\mathbf{B}=\begin{pmatrix}16&25\\13&-8\end{pmatrix}.$$

3 *Знайти добутки матриць* **AB** *і* **BA**, *якщо*

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&0&4\\1&2&3\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-1&2\\3&2&1\end{pmatrix}.$$

Маємо

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1\cdot2+3\cdot1+1\cdot3&1\cdot1+3(-1)+1\cdot2&1\cdot0+3\cdot2+1\cdot1\\2\cdot2+0\cdot1+4\cdot3&2\cdot1+0(-1)+4\cdot2&2\cdot0+0\cdot2+4\cdot1\\1\cdot2+2\cdot1+3\cdot3&1\cdot1+2(-1)+3\cdot2&1\cdot0+2\cdot2+3\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0&7\\16&10&4\\13&5&7\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}2\cdot1+1\cdot2+0\cdot1&2\cdot3+1\cdot0+0\cdot2&2\cdot1+1\cdot4+0\cdot3\\1\cdot1-1\cdot2+2\cdot1&1\cdot3-1\cdot0+2\cdot2&1\cdot1-1\cdot4+2\cdot3\\3\cdot1+2\cdot2+1\cdot1&3\cdot3+2\cdot0+1\cdot2&3\cdot1+2\cdot4+1\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6&6\\1&7&3\\8&11&14\end{pmatrix}.$$

4 *Знайти добуток матриць*

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-3&2&-1\\0&-1&3\\2&3&-1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}.$$

Маємо

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}-3&2&-1\\0&-1&3\\2&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6+8-3\\0-4+9\\4+12-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\\13\end{pmatrix}.$$

5 *Знайти добутки матриць* **AB** *і* **BA**, *якщо*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

6 *Знайти значення матричного многочлена*

$$f(\mathbf{X}) = 2\mathbf{X}^2 + 3\mathbf{X} + 5\mathbf{E},$$

де $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; **E** — *одинична матриця третього порядку.*

Маємо

$$\mathbf{X}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 8 & 11 & 6 \\ 9 & 8 & 10 \end{pmatrix},$$

$$2\mathbf{X}^2 = \begin{pmatrix} 20 & 12 & 10 \\ 16 & 22 & 12 \\ 18 & 16 & 20 \end{pmatrix}, \quad 3\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 9 & 3 \\ 12 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$5\mathbf{E} = 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$f(\mathbf{X}) = 2\mathbf{X}^2 + 3\mathbf{X} + 5\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{pmatrix}.$$

7 *Знайти добутки матриць* **AB** *і* **BA**, *якщо*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 17 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 \\ 2 & 16 & 11 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

8 *Обчислити визначник* $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$.

Маємо

$$\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 =$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab.$$

9 *Обчислити визначник* $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\beta & \sin\beta \end{vmatrix}$.

Маємо

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\beta & \sin\beta \end{vmatrix} = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta = -\cos(\alpha+\beta).$$

10 *Обчислити визначник* $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$.

Маємо

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 16 = -1.$$

11 *Обчислити визначник* $\begin{vmatrix} \dfrac{\cos^2\varphi}{1+\sin^2\varphi} & \dfrac{2\sin\varphi}{1+\sin^2\varphi} \\ \dfrac{-2\sin\varphi}{1+\sin^2\varphi} & \dfrac{\cos^2\varphi}{1+\sin^2\varphi} \end{vmatrix}$.

Маємо

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\cos^2\varphi}{1+\sin^2\varphi} & \dfrac{2\sin\varphi}{1+\sin^2\varphi} \\ \dfrac{-2\sin\varphi}{1+\sin^2\varphi} & \dfrac{\cos^2\varphi}{1+\sin^2\varphi} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{1+\sin^2\varphi}\right)^2 \begin{vmatrix} \cos^2\varphi & 2\sin\varphi \\ -2\sin\varphi & \cos^2\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(\cos^2\varphi)^2+4\sin^2\varphi}{(1+\sin^2\varphi)^2} = \frac{(1-\sin^2\varphi)^2+4\sin^2\varphi}{(1+\sin^2\varphi)^2} = \frac{(1+\sin^2\varphi)^2}{(1+\sin^2\varphi)^2} = 1.$$

12 *Обчислити визначник* $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.

Маємо

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot 1(-2) + 0\cdot 0\cdot 1 + (-2)\cdot 3\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 1 -$$

$$-(-2)0(-2) - 0\cdot 3\cdot 3 = -20.$$

13 *Обчислити визначник* $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

Оскільки спільний множник елементів деякого рядка (стовпця) можна винести за знак визначника, то виносимо 2 з першого й другого рядків, а потім — із третього стовпця. Отже,

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 8(2\cdot 1\cdot 1 + 5\cdot 2\cdot 1 + 1(-1)3 - 1\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 3 - 5(-1)1) =$$

$$= 8(2 + 10 - 3 - 1 - 12 + 5) = 8\cdot 1 = 8.$$

14 *Обчислити визначник* $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$.

Від елементів першого стовпця віднімемо елементи третього стовпця, помножені на 2. Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 7 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

До елементів другого стовпця додамо елементи третього:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 7 & -3 & -2 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник за першим рядком:

$$\Delta = 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(-3) - 7\cdot 7 = 3 - 49 = -46.$$

15 *Обчислити визначник* $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

Виконаємо такі дії:

1) від елементів першого рядка віднімемо елементи другого, помножені на 3;
2) до елементів третього рядка додамо подвоєні елементи другого;
3) від елементів четвертого рядка віднімемо елементи другого.

Тоді даний визначник перетвориться на такий:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо цей визначник за елементами першого стовпця:

$$\Delta = 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Додаючи до елементів першого рядка елементи третього й віднімаючи від елементів другого рядка елементи третього, дістанемо

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник за елементами першого стовпця:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & -10 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = -70.$$

16 *Обчислити визначник* $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$

Виконаємо такі дії:

1) винесемо за знак визначника спільні множники рядків: із першого — $\left(-\frac{3}{2}\right)$, із другого — $\left(-\frac{1}{3}\right)$, із третього — $\left(-\frac{1}{3}\right)$, із четвертого — (-1);

2) до елементів другого стовпця додамо елементи першого, помножені на 3;

3) до елементів третього стовпця додамо елементи першого;

4) до елементів четвертого стовпця додамо подвоєні елементи першого:

$$\Delta = \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)(-1)\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ -4 & 5 & 3 & 2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -7 & -3 & -3 \\ -4 & -7 & -1 & -6 \\ -7 & -13 & -3 & -9 \end{vmatrix};$$

5) розкладемо визначник за елементами першого рядка;

6) винесемо спільні множники (–1) із першого й третього стовпців і (–3) — з третього:

$$\Delta = \frac{3}{6}\begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 13 & 3 & 3 \end{vmatrix};$$

7) від елементів другого рядка віднімемо елементи першого;

8) від елементів третього рядка віднімемо елементи першого:

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(7(-2)2 + 0\cdot 0\cdot 1 + 3\cdot 6\cdot 1 - 6(-2)1 - 0\cdot 7\cdot 1 - 0\cdot 3\cdot 2) = 1.$$

17 *Обчислити визначник* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}.$

Виконаємо такі дії:

1) від елементів другого рядка віднімемо елементи першого, помножені на a;

2) від елементів третього рядка віднімемо елементи другого, помножені на a;

3) від елементів четвертого рядка віднімемо елементи третього, помножені на a;

4) розкладемо визначник за елементами першого стовпця:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad \\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ad^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix};$$

5) від елементів другого рядка віднімемо елементи першого, помножені на b, від елементів третього рядка — елементи другого, помножені на b:

$$\Delta = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c^2-cb & d^2-db \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

Легко помітити, що цей визначник дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли серед чисел a, b, c, d є рівні.

18 *Обчислити визначник* $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$.

Додаючи до першого рядка всі інші й виносячи спільний множник, маємо

$$\Delta = (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = (x+y+z)\Delta_1.$$

Помножимо перший рядок визначника Δ_1 на $(-x)$, $(-y)$, $(-z)$ і додамо до другого, третього й четвертого рядків відповідно:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & z-x & y-x \\ 0 & z-y & -y & x-y \\ 0 & y-z & x-z & -z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & z-x & y-x \\ z-y & -y & x-y \\ y-z & x-z & -z \end{vmatrix}.$$

Додамо до третього рядка визначника Δ_1 другий його рядок:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -x & z-x & y-x \\ z-y & -y & x-y \\ 0 & x-z-y & x-z-y \end{vmatrix} = (x-z-y)\Delta_2.$$

Віднімемо третій стовпчик визначника Δ_2 від другого:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -x & z-y & y-x \\ z-y & -x & x-y \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & z-y \\ z-y & -x \end{vmatrix} =$$

$$= x^2 - (z-y)^2 = (x+z-y)(x-z+y).$$

Остаточно

$$\Delta = (x+y+z)(x-y-z)(x+z-y)(x-z+y) =$$

$$= x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2.$$

19 *Обчислити визначник n-го порядку* $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 5 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 5 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 5 \end{vmatrix}$.

Віднімемо перший рядок від усіх інших:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

До першого стовпця додамо суму всіх інших:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5+3(n-1) & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = (3n+2)2^{n-1}.$$

20 *Обчислити визначник* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

Додамо перший рядок до всіх інших:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 ... n = n!$$

21 *Обчислити визначник* $(n+1)$*-го порядку*

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x & x & \cdots & x & x & 1 \\ x & x & x & \cdots & x & 2 & x \\ x & x & x & \cdots & 3 & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x & n & x & \cdots & x & x & x \\ x & x & x & \cdots & x & x & x \end{vmatrix}.$$

Віднімемо перший стовпець від усіх інших:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-x \\ x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2-x & 0 \\ x & 0 & 0 & \cdots & 3-x & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x & n-x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо цей визначник за останнім рядком n разів:

$$\Delta = (-1)^{n+2} x \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 3-x & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ... =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+5)}{2}} x(x-1)(x-2) ... (x-n).$$

22 *Обчислити визначник n-го порядку* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

Віднімемо перший рядок від усіх інших:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}.$$

23 *Обчислити визначник* $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$.

Віднімемо перший рядок від усіх інших:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & \cdots & 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x-a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}.$$

Із першого стовпця винесемо $(a_1 - x)$, із другого — $(a_2 - x)$, ... із n-го — $(a_n - x)$:

$$\Delta = (a_1 - x)(a_2 - x)\ldots(a_n - x)\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1 - x} & \frac{x}{a_2 - x} & \frac{x}{a_3 - x} & \cdots & \frac{x}{a_n - x} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Зауважимо, що $\frac{a_1}{a_1 - x} = 1 + \frac{x}{a_1 - x}$, і всі стовпці додамо до першого:

$$\Delta = (a_1 - x)(a_2 - x)\ldots(a_n - x)\begin{vmatrix} 1 + \frac{x}{a_1 - x} + \ldots + \frac{x}{a_n - x} & \frac{x}{a_2 - x} & \cdots & \frac{x}{a_n - x} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= x(a_1 - x)(a_2 - x)\ldots(a_n - x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \frac{1}{a_2 - x} + \ldots + \frac{1}{a_n - x}\right).$$

24 *За допомогою елементарних перетворень знайти ранг матриці*

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}.$$

Від елементів другого рядка віднімемо елементи першого, помножені на 3, від елементів третього рядка — елементи другого, від елементів четвертого рядка — елементи першого:

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Відкинемо четвертий рядок, оскільки він дорівнює сумі другого й третього:

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці $r = 3$, бо визначник трикутної матриці, складеної з перших трьох стовпців, не дорівнює нулю.

25 *Знайти ранг матриці* $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Від елементів четвертого стовпця віднімемо елементи третього, а потім відкинемо четвертий стовпець:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$, то ранг матриці $r = 3$.

26 *Знайти ранг матриці* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

① Якщо елемент $a_{11} = 0$, то, міняючи місцями рядки або стовпці, добиваємося того, щоб $a_{11} \neq 0$. В даному прикладі $a_{11} = 1 \neq 0$.

② Якщо $a_{11} \neq 0$, то, застосовуючи елементарні перетворення матриці, добиваємося того, щоб усі елементи першого стовпця (крім a_{11}) дорівнювали нулю. В розглядуваному прикладі елементи першого рядка послідовно помножимо на (–2), (–3) і (–4) і, додавши до одержаних чисел елементи другого, третього й четвертого рядків відповідно, дістанемо

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to$$

③ Якщо в добутій матриці $a_{22} \neq 0$ (у нас $a_{22} = -4 \neq 0$), то, здійснивши елементарні перетворення, а саме — помноживши другий рядок на (–2) і додавши до елементів третього, а потім — четвертого рядків, добиваємося того, щоб елементи другого стовпця (крім a_{12}, a_{22}) дорівнювали нулю.

Якщо в процесі перетворення дістанемо рядки (або стовпці), всі елементи яких дорівнюють нулю (як у даному прикладі), то відкидаємо ці рядки (стовпці). Маємо

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Остання матриця містить мінори третього порядку, які не дорівнюють нулю, наприклад $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$. Тому ранг добутої матриці, а отже, й шуканої матриці **A**, дорівнює 3, тобто $r(\mathbf{A}) = 3$.

27 *Знайти матрицю, обернену до*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник матриці **A**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 27 + 2 - 24 = 5.$$

Знайдемо алгебричні доповнення елементів цього визначника:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Отже, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}.$

28 *Знайти невідому матрицю* **X** *із рівняння*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Введемо позначення: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. Тоді дане рівняння матиме вигляд

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}.$$

Помножимо це рівняння зліва на $\mathbf{A}^{-1}$:

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \quad \mathbf{EX} = \mathbf{A}^{-1}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

Отже, аби знайти невідому матрицю **X**, потрібно відшукати матрицю, обернену до **A**, а потім помножити її на матрицю **B**.

Обчислимо визначник матриці **A**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 16 + 9 + 12 - 4 = 1.$$

Обчислимо алгебричні доповнення елементів:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Таким чином,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Якщо матриця **A** особлива, тобто $\Delta = 0$, то матриця $\mathbf{A}^{-1}$ не існує, і розглянутий спосіб неприйнятний. Матричне рівняння в цьому разі або матиме безліч розв'язків, або не матиме жодного.

29 ***Знайти невідому матрицю X із рівняння***

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Тут $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$. Нехай $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$. Тоді

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

або

$$\begin{pmatrix} 2x_{11} - 3x_{21} & 2x_{12} - 3x_{22} \\ 4x_{11} - 6x_{21} & 4x_{12} - 6x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases} 2x_{11} - 3x_{21} = 2, \\ 4x_{11} - 6x_{21} = 4, \\ 2x_{12} - 3x_{22} = 3, \\ 4x_{12} - 6x_{22} = 6. \end{cases}$$

Знаходимо

$$x_{11} = \frac{2 + 3x_{21}}{2}, \quad x_{12} = \frac{3 + 3x_{22}}{2}, \quad x_{21} = a, \quad x_{22} = b,$$

де a і b — довільні дійсні числа.

Отже,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \dfrac{2 + 3a}{2} & \dfrac{3 + 3b}{2} \\ a & b \end{pmatrix},$$

де a і b — довільні дійсні числа.

30 ***Знайти невідому матрицю X із рівняння***

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тут $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$. Покладемо $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$. Тоді

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ або } \begin{cases} 4x_{11} + 6x_{21} = 1, \\ 6x_{11} + 9x_{21} = 1, \\ 4x_{12} + 6x_{22} = 1, \\ 6x_{12} + 9x_{22} = 1. \end{cases}$$

Система несумісна. Отже, розв'язку не існує.

31 ***Методом Гаусса розв'язати систему лінійних рівнянь***

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи й за допомогою елементарних перетворень зведемо її до діагонального вигляду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 5 & -8 & 4 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 5 & -8 & 4 & 6 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Отже, система набере вигляду

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_3 + x_4 = 6, \\ x_4 = 2. \end{cases}$$

Підставивши значення $x_4 = 2$ в третє рівняння, дістанемо $x_3 = 4$; підставивши значення x_4 і x_3 в друге рівняння, матимемо $x_2 = 6$; підставивши значення x_4, x_3 і x_2 в перше рівняння, дістанемо $x_1 = 8$. Отже, розв'язок системи $x_1 = 8$, $x_2 = 6$, $x_3 = 4$, $x_4 = 2$.

32 *Методом Гаусса розв'язати систему лінійних рівнянь*

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 10x_4 = 0, \\ 5x_1 + 21x_3 + 13x_4 = 3. \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 13 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & 21 & 13 & 3 \end{array}\right).$$

Додамо до елементів четвертого рядка елементи другого й віднімемо суму елементів першого та третього:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 13 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Отже, система несумісна.

33 *Методом Гаусса розв'язати систему лінійних рівнянь*

$$\begin{cases} 12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 23x_4 + 27x_5 = 5, \\ 16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 = 8, \\ 18x_1 + 20x_2 - 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 = 9, \\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 = 4. \end{cases}$$

Додамо до елементів третього рядка елементи четвертого й віднімемо суму двох перших:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 12 & 14 & -15 & 23 & 27 & 5 \\ 16 & 18 & -22 & 29 & 37 & 8 \\ 18 & 20 & -21 & 32 & 41 & 9 \\ 10 & 12 & -16 & 20 & 23 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 12 & 14 & -15 & 23 & 27 & 5 \\ 16 & 18 & -22 & 29 & 37 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 12 & -16 & 20 & 23 & 4 \end{array}\right).$$

Відкинемо третій рядок і віднімемо від першого рядка останній:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & -7 & 6 & 10 & 3 \\ 10 & 12 & -16 & 20 & 23 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -21 & 5 & 3 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -21 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Отже, маємо систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 1, \\ 2x_2 - 21x_3 + 5x_4 + 3x_5 = -1, \\ -9x_3 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

Вона невизначена. Нехай x_4, x_5 — вільні невідомі. З третього рівняння дістаємо $x_3 = \frac{2}{9}x_5 - \frac{1}{9}$.

Підставивши x_3 в друге рівняння, матимемо

$$x_2 = -\frac{5}{2}x_4 + \frac{5}{6}x_5 - \frac{5}{3}.$$

Із першого рівняння

$$x_1 = \frac{1}{2}\left[1 - 2\left(-\frac{5}{2}x_4 + \frac{5}{6}x_5 - \frac{5}{3}\right) - \left(\frac{2}{9}x_5 - \frac{1}{9}\right) - 3x_4 - 4x_5\right] =$$

$$= x_4 - \frac{53}{18}x_5 + \frac{20}{9}.$$

Отже, загальний розв'язок системи можна записати у вигляді

$$x_1 = a - \frac{53}{18}b + \frac{20}{9}, \quad x_2 = -\frac{5}{2}a + \frac{5}{6}b - \frac{5}{3}, \quad x_3 = \frac{2}{9}b - \frac{1}{9},$$

$$x_4 = a, \quad x_5 = b,$$

де a і b — довільні числа.

34 ***Матричним способом розв'язати систему рівнянь***

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$$

Перепишемо систему у вигляді **AX** = **B**,

де $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$.

Розв'язок матричного рівняння має вигляд $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Знайдемо $\mathbf{A}^{-1}$. Обчислимо основний визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 28 - 30 - 4 = -6.$$

Обчислимо алгебричні доповнення елементів цього визначника:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким чином,

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\mathbf{X} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 126 + 70 - 208 \\ -90 - 56 + 128 \\ 18 + 14 + 16 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$.

35 ***Використовуючи формули Крамера, розв'язати систему рівнянь***

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Обчислимо основний визначник системи Δ та визначники Δ_i, $i = 1, 2, 3$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 14,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 14,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 28,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 42.$$

Отже,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{14}{14} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3.$$

36 *Розв'язати систему*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 15, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9. \end{cases}$$

Обчислимо основний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Від кожного стовпця віднімемо перший:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Обчислимо інші визначники системи, виконавши такі перетворення:
1) від усіх рядків віднімемо п'ятий;

2) винесемо з першого рядка 4, з другого — 3, з третього — 2;
3) від п'ятого рядка віднімемо суму всіх інших.
Дістанемо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 15 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 13 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -6 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 24 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 24 \cdot 5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 15 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 13 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 14 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 \cdot 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 24 \cdot 4,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 15 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 13 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 14 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 12 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 14 \\ 1 & 1 & 12 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -12 \begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 24 \cdot 3,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 15 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 13 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 14 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 12 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 14 \\ 1 & 1 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -8\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 12 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -8\cdot 6 = 24(-2),$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -24.$$

Отже,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{24\cdot 5}{24} = 5, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{24\cdot 4}{24} = 4,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{24\cdot 3}{24} = 3, \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{24(-2)}{24} = -2,$$

$$x_5 = \frac{\Delta_5}{\Delta} = \frac{24(-1)}{24} = -1.$$

37 ***Залежно від параметра λ знайти загальний розв'язок системи рівнянь***

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$$

Обчислимо основний та інші визначники системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 1 + 1 - \lambda - \lambda - \lambda = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2),$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 + 1 - \lambda - 1 - \lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

① Нехай $\Delta \neq 0$, тобто $\lambda \neq 1$ або $\lambda \neq -2$. Тоді система має єдиний розв'язок $x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{1}{\lambda + 2}$.

② Нехай $\Delta = 0$.

При $\lambda = 1$ система має нескінченну кількість розв'язків. Справді, в цьому разі $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, а тому $x_1 = 1 - x_2 - x_3$, де x_1, x_2 — довільні дійсні числа.

При $\lambda = -2$ система набирає вигляду

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Додавши всі три рівняння, дістанемо $0 = 3$, тобто система розв'язків не має.

38 ***Дані про виконання балансу за звітний період (в умов. грош. од.) наведено в таблиці:***

Галузь виробництва	Розподіл випуску продукції в галузях		Обсяг кінцевої продукції	Обсяг валової продукції
	1	2		
1	9	25	66	100
2	8	27	165	200

Обчислити необхідний обсяг валової продукції кожної галузі, якщо обсяг кінцевої продукції першої галузі збільшиться вдвоє, а другої — не зміниться.

Отже, маємо $X_1 = 100$, $X_2 = 200$. Матриця обсягів валової продукції $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$.

Використовуючи формулу (1.14), знаходимо коефіцієнти прямих витрат:

$$a_{11} = \frac{9}{100} = 0{,}09, \qquad a_{21} = \frac{8}{100} = 0{,}08,$$

$$a_{12} = \frac{25}{200} = 0{,}125, \qquad a_{22} = \frac{27}{200} = 0{,}135,$$

тобто матриця технологічних коефіцієнтів $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}09 & 0{,}125 \\ 0{,}08 & 0{,}135 \end{pmatrix}$ має невід'ємні елементи й задовольняє критерій продуктивності:

$$\max\{0{,}09 + 0{,}08;\quad 0{,}125 + 0{,}135\} = \max\{0{,}17;\quad 0{,}26\} = 0{,}26 < 1.$$

Тому для довільної матриці обсягів кінцевої продукції $\mathbf{Y}$ можна знайти необхідний обсяг валової продукції $\mathbf{X}$ за формулою

$$\mathbf{X} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{Y}.$$

Знайдемо матрицю повних витрат $\mathbf{B} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$:

$$\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}09 & 1{,}125 \\ 0{,}08 & 0{,}135 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}91 & -0{,}125 \\ -0{,}08 & 0{,}865 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\det|\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0{,}777\ 15 \neq 0$, то

$$\mathbf{B} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{0{,}777\ 15}\begin{pmatrix} 0{,}865 & 0{,}125 \\ 0{,}08 & 0{,}91 \end{pmatrix}.$$

За умовою матриця обсягів кінцевої продукції $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 132 \\ 165 \end{pmatrix}$. Тоді матриця обсягів валової продукції

$$\mathbf{X} = \frac{1}{0{,}777\ 215}\begin{pmatrix} 0{,}865 & 0{,}125 \\ 0{,}08 & 0{,}91 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 132 \\ 165 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 173{,}461 \\ 206{,}794 \end{pmatrix},$$

тобто обсяг валової продукції в першій галузі треба збільшити до 173,461 умов. грош. од., а в другій — до 206,794 умов. грош. од.

39 ***Розглядається економічна система, що складається, наприклад, із трьох галузей — вугільнодобувної, електроенергетики й транспорту. Припускається, що для виробництва вугілля на 1 грн. необхідно виробництво електроенергії на 0,25 грн. та транспортних витрат на 0,25 грн. На виробництво електроенергії на 1 грн. необхідно виробити запасів вугілля на 0,65 грн., електроенергії на 0,05 грн. та транспортних витрат на 0,05 грн. Забезпечення транспортних перевезень на 1 грн. потребує виробництва запасів вугілля на 0,55 грн. й електроенергії на 0,10 грн. Кожного тижня зовнішні потреби економічної системи в запасах вугілля становлять на 50 000 грн. та в запасах електроенергії на 25 000 грн. Визначити зовнішні потреби транспорту. Який обсяг щотижневих витрат необхідно спланувати для кожної галузі?***

Нехай X_1 — обсяг виробництва запасів вугілля, X_2 — обсяг виробництва електроенергії, X_3 — транспортні витрати (грн.). Загальні потреби для кожної з галузей становлять:

$$\begin{aligned} X_1 &= 50\ 000 + 0{,}65X_2 + 0{,}55X_3, \\ X_2 &= 25\ 000 + 0{,}25X_1 + 0{,}05X_2 + 0{,}10X_3, \\ X_3 &= 0{,}25X_1 + 0{,}05X_2. \end{aligned}$$

Отже,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}65 & 0{,}55 \\ 0{,}25 & 0{,}05 & 0{,}10 \\ 0{,}25 & 0{,}05 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 50\ 000 \\ 25\ 000 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{AX} + \mathbf{Y}.$$

Розв'язавши це рівняння, дістанемо

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{Y}, \quad \mathbf{X} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}.$$

Обернену матрицю $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ можна обчислити таким методом. Справа від матриці $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ записують одиничну матрицю. За допомогою елементарних перетворень над рядками матриці зводять матрицю $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ до одиничної. Тоді права матриця буде оберненою. Маємо

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}65 & -0{,}55 & 1 & 0 & 0 \\ -0{,}25 & 0{,}95 & -0{,}10 & 0 & 1 & 0 \\ -0{,}25 & -0{,}05 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}65 & -0{,}55 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7875 & -0{,}2375 & 0{,}25 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}2125 & 0{,}8625 & 0{,}25 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}65 & -0{,}55 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}301\ 587 & 0{,}317\ 46 & 1{,}269\ 84 & 0 \\ 0 & -0{,}2125 & 0{,}8625 & 0{,}25 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}65 & -0{,}55 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}301\,58 & 0{,}317\,46 & 1{,}269\,84 & 0 \\ 0 & 0 & -3{,}7524 & -1{,}493\,93 & -1{,}269\,84 & -4{,}705\,88 \end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}65 & -0{,}55 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}301\,587 & 0{,}317\,46 & 1{,}269\,84 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}397\,614 & 0{,}337\,972 & 1{,}252\,48 \end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}65 & 0 & 1{,}218\,69 & 0{,}185\,885 & 0{,}688\,866 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}437\,376 & 1{,}371\,77 & 0{,}377\,733 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}397\,614 & 0{,}337\,972 & 1{,}252\,48 \end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1{,}502\,98 & 1{,}077\,53 & 0{,}934\,392 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}437\,376 & 1{,}371\,77 & 0{,}377\,733 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}397\,614 & 0{,}337\,972 & 1{,}252\,48 \end{array}\right).$$

Таким чином,

$$(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{pmatrix} 1{,}502\,98 & 1{,}077\,53 & 0{,}934\,392 \\ 0{,}437\,376 & 1{,}371\,77 & 0{,}377\,733 \\ 0{,}397\,614 & 0{,}337\,972 & 1{,}252\,48 \end{pmatrix}$$

і

$$\mathbf{X}=(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{Y}=\begin{pmatrix} 102\,087 \\ 56\,163 \\ 28\,330 \end{pmatrix}.$$

Розділ 2

МЕТОДИ Й МОДЕЛІ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

2.1 Вектори на площині й у просторі

2.1.1. Поняття вектора

Узагальнимо поняття про вектори, які відомі зі шкільного курсу математики.

Під ***вектором** розуміють відрізок, на якому зазначено напрям*. Якщо A і B — дві точки, то вектор $\vec{AB}$ (напрям від A до B; A — початок вектора, B — його кінець) відрізняється від вектора $\vec{BA}$ (напрям від B до A; B — початок вектора, A — його кінець).

Позначатимемо вектори літерами зі стрілками: $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ і т. д. Якщо треба підкреслити, що точка A — початок вектора, а точка B — його кінець, писатимемо $\vec{AB}$. Графічно вектор зображується відрізком зі стрілкою (рис. 2.1).

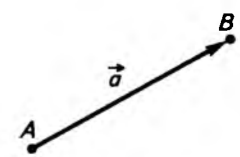


Рис. 2.1

➡ **Означення 2.1.** *Відстань між початком вектора та його кінцем називають **довжиною (або модулем) вектора**.* Довжину вектора $\vec{AB}$ позначають $|\vec{AB}|$, вектора $\vec a$ — $|\vec a|$.

Вектор, початок і кінець якого збігаються, називають ***нульовим*** і позначають $\vec 0$. Можна вважати, що нульовий вектор має довільний, наперед вибраний напрям, а його довжина дорівнює нулю, тобто $|\vec{0}| = 0$.

➡ **Означення 2.2.** *Вектори називають **колінеарними**, якщо вони розміщені на одній прямій або на паралельних прямих.*

Компланарними називають вектори, які лежать в одній площині.

➡ **Означення 2.3.** *Два вектори $\vec a$ і $\vec b$ називають **рівними**, якщо вони мають однакові довжину й напрям;* при цьому пишуть $\vec a = \vec b$.

Таким чином, не розрізняються вектори, що мають однакові напрями й довжини, але розташовані в різних частинах простору. Інакше кажучи, вектор можна переносити паралельно самому собі, розміщуючи його початок у будь-якій точці простору. Такі вектори називають ***вільними***.

➡ **Означення 2.4.** ***Ортом*** *даного вектора $\vec a$ називають вектор, довжина якого дорівнює одиниці, а напрям збігається з напрямом даного вектора $\vec a$.* Орт вектора $\vec a$ позначають $\vec a_0$, причому $|\vec a_0| = 1$ і $\vec a = |\vec a|\,\vec a_0$.

2.1.2. Лінійні операції над векторами

Лінійними операціями над векторами є операції (дії) їх додавання та множення дійсного числа на вектор.

➡ **Означення 2.5.** ***Добутком числа** α **на вектор** $\vec a$ називають вектор $\vec b = \alpha\vec a$, що має довжину $|\vec b| = |\alpha|\,|\vec a|$, і напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec a$, якщо $\alpha > 0$, і протилежний йому, якщо $\alpha < 0$* (рис. 2.2).

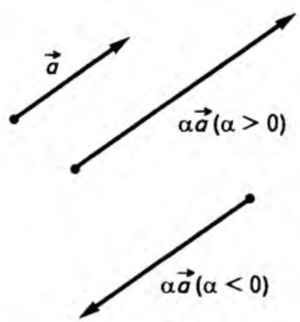


Рис. 2.2

➡ **Означення 2.6.** ***Протилежним вектором** $(-\vec a)$ називають добуток числа (-1) на вектор $\vec a$, тобто $-\vec a = (-1)\vec a$.*

➡ **Означення 2.7.** ***Сумою векторів** $\vec a$ **і** $\vec b$ називають вектор $\vec c = \vec a + \vec b$, початок якого збігається з початком вектора $\vec a$, а кінець — із кінцем вектора $\vec b$ за умови, що початок вектора $\vec b$ збігається з кінцем вектора $\vec a$ (п р а в и л о   т р и к у т н и к а* (рис. 2.3)).

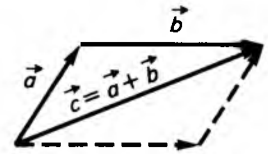


Рис. 2.3

Вектор $\vec c$, очевидно, є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec a$ і $\vec b$ (*п р а в и л о   п а р а л е л о г р а м а* (рис. 2.3)).

Сума векторів $\vec a_1, \vec a_2, \dots, \vec a_n$ знаходиться послідовно: спочатку додаються вектори $\vec a_1$ і $\vec a_2$, потім до їх суми $\vec a_1 + \vec a_2$ додається вектор $\vec a_3$ і т. д.

Сумою кількох векторів є вектор, що сполучає початок першого вектора й кінець останнього за умови, що початок кожного наступного вектора збігається з кінцем попереднього (*п р а в и л о   м н о г о к у т н и к а* (рис. 2.4)).

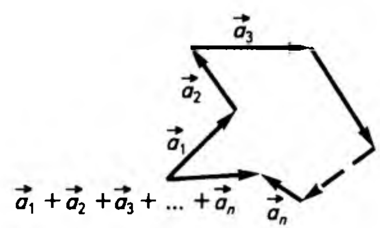


Рис. 2.4

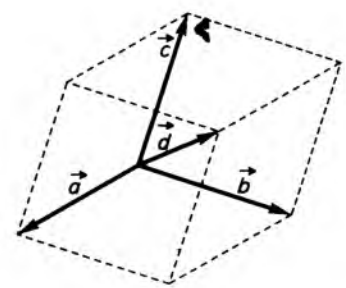


Рис. 2.5

Якшо від однієї точки в просторі відкласти три некомпланарних вектори $\vec a$, $\vec b$ і $\vec c$, то неважко переконатися, що вектор $\vec d = \vec a + \vec b + \vec c$ буде діагоналлю паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec a$, $\vec b$ і $\vec c$, котрі не лежать в одній площині або в паралельних площинах (*п р а в и л о   п а р а л е л е п і п е д а* (рис. 2.5)).

➡ **Означення 2.8.** ***Різницею двох векторів*** $\vec{a}$ ***і*** $\vec{b}$ ***називають суму вектора*** $\vec{a}$ ***й вектора*** $(-\vec{b})$, ***протилежного*** $\vec{b}$ (рис. 2.6).

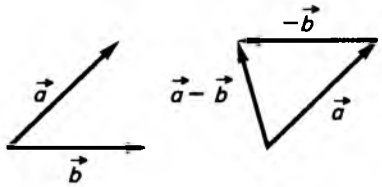


Рис. 2.6

Неважко переконатися, що в паралелограмі, побудованому на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, одна діагональ є сумою цих векторів, а інша — їх різницею (на рис. 2.7 $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, $\vec{DB} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$).

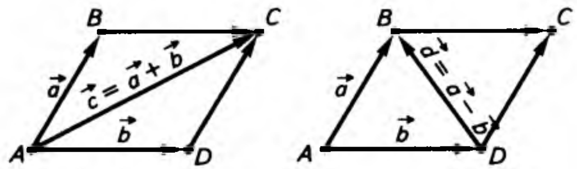


Рис. 2.7

ТЕОРЕМА 2.1

(необхідна й достатня умова колінеарності векторів)

Два ненульових вектори колінеарні тоді й лише тоді, коли $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, де α — деяке дійсне число.

2.1.3. Проекція вектора на вісь. Координати вектора

Нехай задано два вектори $\vec{OA}$ і $\vec{OB}$. Кутом φ між ними називають кут AOB, на який потрібно повернути один із векторів, щоб його напрям збігся з напрямом іншого вектора. Вважають, що $0 \le \varphi \le \pi$. Якщо початки векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не збігаються, то кутом між ними називають кут між векторами $\vec{OA}$ і $\vec{OB}$, де $\vec{a} = \vec{OA}$ і $\vec{b} = \vec{OB}$.

Нехай $\vec{a} = \vec{AB}$. Проведемо через точки A і B прямі, перпендикулярні до вектора $\vec{b}$. Позначимо точки перетину цих прямих із вектором $\vec{b}$ через A' і B' (рис. 2.8).

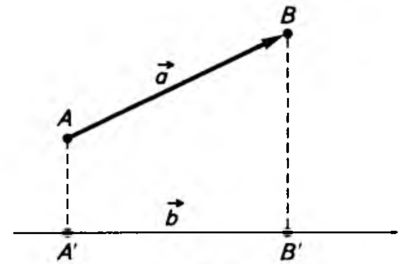


Рис. 2.8

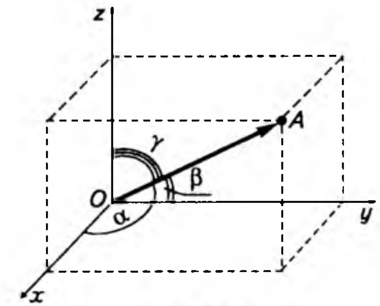


Рис. 2.9

Проекція вектора $\vec{AB}$ ***на напрям вектора*** $\vec{b}$ *дорівнює довжині вектора* $\vec{AB}$, *помноженій на косинус кута* φ *між векторами* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$:

$$np_{\vec{b}}\vec{AB} = |\vec{AB}| \cos\varphi.$$

Нехай у просторі задано систему координат $Oxyz$ і довільний вектор $\vec{a}$. Розглянемо проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі. Нехай $x = np_{Ox}\vec{a}$, $y = np_{Oy}\vec{a}$ і $z = np_{Oz}\vec{a}$.

Проекції x, y, z вектора $\vec{a}$ на осі координат називають його ***координатами***. При цьому записують $\vec{a} = (x, y, z)$.

Вважатимемо, що вектор $\vec{a} = \vec{OA}$ виходить із початку координат і не лежить у жодній координатній площині. Через точку A проведемо площини, перпендикулярні до осей. Разом із координатними площинами вони утворюють прямокутний паралелепіпед, діагоналлю якого є відрізок OA (рис. 2.9).

Оскільки квадрат довжини діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів, то

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{OA}|^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

тобто

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Позначимо через α, β, γ кути між вектором $\vec{a}$ та осями координат. Оскільки координати вектора $x = |\vec{a}|\cos\alpha$, $y = |\vec{a}|\cos\beta$, $z = |\vec{a}|\cos\gamma$, то cos α, cos β, cos γ називають ***напрямними косинусами вектора*** $\vec{a}$. Їх обчислюють за формулами

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Піднісши до квадрата ліву й праву частини кожної рівності та додавши їх почленно, матимемо

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

2.2 *n*-Вимірні вектори й дії над ними

➡ **Означення 2.9.** ***n-Вимірним вектором*** *називають упорядковану сукупність n чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ і позначають вектор-стовпцем

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

або вектор-рядком $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Числа a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ називають ***компонентами вектора***, або його ***координатами***.

Поняття *n*-вимірного вектора широко застосовується в економічних задачах. Наприклад, вектором $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можна схарактеризувати деякий набір товарів обсягами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а вектором $\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — набір відповідних цін цих товарів.

Вектор, у якого всі компоненти дорівнюють нулю, називають *нульовим* і позначають $\vec{0} = (0; 0; \ldots; 0)$.

Два *n*-вимірних вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ називають ***рівними***, якщо їхні відповідні компоненти рівні:

$$a_i = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Визначимо дію додавання *n*-вимірних векторів.

➡ **Означення 2.10.** ***Сумою двох n-вимірних векторів*** *називають вектор, компоненти якого дорівнюють сумі відповідних компонент векторів доданків, тобто*

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \ldots,\ a_n + b_n). \tag{2.1}$$

Властивості дії додавання векторів

① *Для будь-яких двох n-вимірних векторів* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *виконується рівність*

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{2.2}$$

(***комутативна властивість додавання***).

② *Для будь-яких трьох n-вимірних векторів* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *і* $\vec{c}$ *справедлива рівність*

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \tag{2.3}$$

(***асоціативна властивість додавання***).

③ *Для довільного n-вимірного вектора* $\vec{a}$ *існує нульовий вектор* $\vec{0}$ *такий, що*

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}. \tag{2.4}$$

④ *Для довільного n-вимірного вектора існує протилежний вектор* $(-\vec{a})$ *такий, що*

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}. \tag{2.5}$$

Ураховуючи останню властивість, різницю двох векторів можна записати так:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Отже, у випадку алгебричної суми, наприклад, для трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ їх алгебрична сума $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ знаходиться за формулою

$$\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = (a_1 - b_1 + c_1, a_2 - b_2 + c_2, ..., a_n - b_n + c_n).$$

Визначимо дію множення числа на n-вимірний вектор.

Означення 2.11. ***Добутком дійсного числа*** α ***на вектор*** $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *називають вектор* $\alpha\vec{a}$, *компоненти якого дорівнюють добуткам числа* α *на відповідні компоненти вектора* $\vec{a}$:

$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, ..., \alpha a_n). \tag{2.6}$$

Введені дії додавання векторів і множення числа на вектор пов'язані між собою ***дистрибутивними (розподільними) властивостями***.

⑤ *Для двох довільних n-вимірних векторів* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *та дійсного числа* α *справджується рівність*

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} \tag{2.7}$$

(***дистрибутивна властивість відносно суми векторів***).

⑥ *Для довільних дійсних чисел* α *і* β *та n-вимірного вектора* $\vec{a}$ *справджується рівність*

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} \tag{2.8}$$

(***дистрибутивна властивість відносно суми числових множників***).

Крім того, виконуються такі властивості.

⑦ *Для довільних дійсних чисел* α, β *і n-вимірного вектора* $\vec{a}$

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a} \tag{2.9}$$

(***асоціативна властивість відносно числового множника***).

⑧ *Для довільного n-вимірного вектора* $\vec{a}$ *виконуються рівності*

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, \quad 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}. \tag{2.10}$$

Означення 2.12. *Множину n-вимірних векторів із дійсними компонентами, в якій визначені операції додавання векторів та множення числа на вектор, що мають властивості (2.2)—(2.5) і (2.7)—(2.10), називають* ***векторним простором***. Позначатимемо його $\boldsymbol{R}^n$.

✓ *Зауваження 2.1.* Елементи простору $\boldsymbol{R}^n$ можна розглядати не лише як вектори, а й як елементи (об'єкти) довільної природи. В цьому разі відповідну множину елементів називають ***лінійним простором***.

Векторні простори $\boldsymbol{R}^1$, $\boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{R}^3$ можна розглядати як множину векторів на прямій $\boldsymbol{R}$ (множину дійсних чисел); $\boldsymbol{R}^2$ — множина векторів на площині; $\boldsymbol{R}^3$ — множина векторів у тривимірному просторі.

2.3 Вимірність і базис лінійного простору

Нехай задано m векторів векторного простору $\boldsymbol{R}^n$: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$. Задану множину називатимемо ***системою m векторів***.

Означення 2.13. *Вектор* $\vec{a}$ *називають* ***лінійною комбінацією векторів*** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$, *якщо для деяких дійсних чисел* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ *справджується рівність*

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_m\vec{a}_m. \tag{2.11}$$

Лінійну комбінацію, всі коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ якої дорівнюють нулю, називають ***тривіальною***. В противному разі лінійну комбінацію називають ***нетривіальною***.

Означення 2.14. *Систему векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ *векторного простору* $\boldsymbol{R}^n$ називають ***лінійно залежною***, *якщо існують такі числа* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, не всі одночасно рівні нулю, що виконується рівність

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_m\vec{a}_m = 0. \tag{2.12}$$

У противному разі вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ називають ***лінійно незалежними***.

ТЕОРЕМА 2.2

Система векторів лінійно залежна тоді й лише тоді, коли хоча б один із них є лінійною комбінацією інших.

Доведення

Необхідність. Якщо система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ лінійно залежна, то хоча б один із коефіцієнтів у рівності (2.12) ненульовий.

Нехай $\alpha_1 \neq 0$. Тоді $\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\vec{a}_3 - \ldots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1}\vec{a}_m$, тобто вектор $\vec{a}_1$ є лінійною комбінацією інших векторів.

Достатність. Якщо який-небудь вектор, наприклад $\vec{a}_1$, є лінійною комбінацією інших векторів, то виконується рівність

$$\vec{a}_1 = \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 + \ldots + \alpha_m\vec{a}_m.$$

Перепишемо її у вигляді

$$\vec{a}_1 - \alpha_2\vec{a}_2 - \alpha_3\vec{a}_3 - \ldots - \alpha_m\vec{a}_m = 0.$$

Отже, нетривіальна лінійна комбінація даних векторів дорівнює нулю, тобто система векторів лінійно залежна.

Теорему доведено.

■ **Приклад 2.1.** ***Покажемо, що три компланарних вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ у просторі R^3 лінійно залежні.***

Нехай задано ненульові компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Якщо будь-які два з них колінеарні, наприклад $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то $\vec{b} = \alpha\vec{a}$. Тоді

$$\alpha\vec{a} + (-1)\vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = 0,$$

а це означає, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ лінійно залежні.

Нехай тепер серед векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ немає колінеарних. Оскільки ці вектори компланарні, то вони лежать в одній площині. Відкладемо їх від однієї точки O (рис. 2.10).

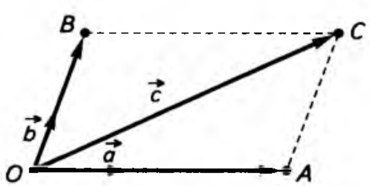


Рис. 2.10

Через кінець вектора $\vec{c}$ проведемо прямі, паралельні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Вони перетнуть прямі, на яких лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, у точках A і B. Тоді за правилом паралелограма $\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Але вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$

колінеарні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Тому $\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{a}$ і $\overrightarrow{OB} = \beta\vec{b}$. Таким чином, $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, а це означає, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ лінійно залежні.

■ **Приклад 2.2.** ***Покажемо, що два неколінеарних вектори на площині лінійно незалежні.***

Нехай задано два ненульових неколінеарних вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$. Припустимо, що вони лінійно залежні. Це означає, що рівність $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 = 0$ виконується тоді й лише тоді, коли або α_1, або α_2, або обидва водночас не дорівнюють нулю. Припустимо, що $\alpha_1 \neq 0$. Тоді $\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\vec{a}_2$. А це означає, що вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ колінеарні. Дійшли суперечності.

Отже, вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ лінійно незалежні.

■ **Приклад 2.3.** ***З'ясуємо, чи будуть лінійно залежними вектори***

$$\vec{a}_1 = (1;\ 2;\ 3;\ 4),\quad \vec{a}_2 = (2;\ 1;\ 1;\ 3),\quad \vec{a}_3 = (2;\ -1;\ 1;\ 3).$$

Запишемо векторну рівність:

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 = 0.$$

Перепишемо її у вигляді

$$\alpha_1(1;\ 2;\ 3;\ 4) + \alpha_2(2;\ 1;\ 1;\ 3) + \alpha_3(2;\ -1;\ 1;\ 3) = (0;\ 0;\ 0;\ 0).$$

Ця рівність еквівалентна системі лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи та зведемо її до діагонального вигляду за допомогою елементарних перетворень:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Таким чином, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Знаходимо її розв'язок $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Це означає, що рівність $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 = 0$ можлива тільки при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Отже, вектори лінійно незалежні.

Означення 2.15. ***Базисом векторного простору R^n називають довільну систему n лінійно незалежних векторів.***

У прикладі 2.2 було встановлено фундаментальну властивість множини векторів на площині, яку можна сформулювати так: *будь-які два неколінеарних вектори площини утворюють базис у множині векторів цієї площини.*

Векторний простір R^n називають ***n-вимірним***, якщо в ньому існує система n лінійно незалежних векторів, а будь-які з $(n + 1)$ векторів є лінійно залежними. Число n називають ***вимірністю простору R^n***. Інакше кажучи, вимірність простору — це максимальне число лінійно незалежних векторів, що містяться в ньому.

ТЕОРЕМА 2.3
(про розклад вектора за базисом)

Будь-який вектор $\vec{a}$ векторного простору R^n можна подати, й причому єдиним способом, у вигляді лінійної комбінації векторів базису.

Доведення

Нехай задано довільний базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ простору R^n. Виберемо довільний вектор $\vec{a} \in R^n$. Тоді система векторів $\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ є лінійно залежною, тобто існують числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha$, які не всі водночас дорівнюють нулю, такі, що виконується рівність

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + ... + \alpha_n\vec{e}_n + \alpha\vec{a} = 0,$$

причому $\alpha \neq 0$.

У противному разі, якщо $\alpha = 0$, то хоча б одне з чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ не дорівнює нулю. Це означало б, що вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ були б лінійно залежними.

Отже,

$$\vec{a} = -\frac{\alpha_1}{\alpha}\vec{e}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha}\vec{e}_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha}\vec{e}_n.$$

Позначимо $a_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha}, a_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha}, ..., a_n = -\frac{\alpha_n}{\alpha}$. Тоді

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + ... + a_n\vec{e}_n. \tag{2.13}$$

Доведемо єдиність виразу (2.13) від супротивного.

Припустимо, що вектор можна записати у вигляді

$$\vec{a} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + ... + b_n\vec{e}_n, \tag{2.14}$$

причому $a_i \neq b_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Віднімемо рівності (2.13) і (2.14):

$$(a_1 - b_1)\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\vec{e}_2 + ... + (a_n - b_n)\vec{e}_n = 0.$$

Оскільки вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ лінійно незалежні, то коефіцієнти лінійної комбінації $a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = ... = a_n - b_n = 0$, тобто $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_n = b_n$.

Теорему доведено.

Рівність (2.13) називають ***розкладом вектора $\vec{a}$ в базисі*** $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, а числа $a_1, a_2, ..., a_n$ — ***координатами вектора $\vec{a}$*** в цьому базисі.

■ **Приклад 2.4.** *З'ясуємо, чи буде система векторів $\vec{e}_1 = (1; 0; ...; 0)$, $\vec{e}_2 = (0; 1; ...; 0)$, ..., $\vec{e}_n = (0; 0; ...; 1)$ базисом простору R^n.*

Справді, ці вектори лінійно незалежні й будь-який вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in R^n$, очевидно, можна подати у вигляді

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + ... + a_n\vec{e}_n,$$

тобто як лінійну комбінацію векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$.

Отже, ***система векторів із простору R^n утворює базис, якщо ці вектори лінійно незалежні й будь-який вектор із R^n є лінійною комбінацією векторів даної системи.***

■ **Приклад 2.5.** *У базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ простору R^3 задано вектори*

$$\vec{a} = (2;\ 0;\ 1),\ \vec{b} = (1;\ -1;\ 2),\ \vec{c} = (3;\ 1;\ 1),\ \vec{d} = (1;\ 1;\ 1).$$

Покажемо, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ також утворюють базис простору R^3. Знайдемо координати вектора $\vec{d}$ у базисі векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють базис простору R^3, якщо вони лінійно незалежні.

Запишемо векторну рівність:

$$\alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{c} = 0.$$

Перепишемо її у вигляді

$$\alpha_1(2;\ 0;\ 1)+\alpha_2(1;\ -1;\ 2)+\alpha_3(3;\ 1;\ 1)=(0;\ 0;\ 0).$$

Дістанемо однорідну систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases}2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=0,\\ -\alpha_2+\alpha_3=0,\\ \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0.\end{cases}$$

Оскільки основний визначник системи $\Delta=\begin{vmatrix}2&1&3\\0&-1&1\\1&2&1\end{vmatrix}=-2\neq 0$, то система має єдиний розв'язок $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. Це означає, що вектори $\vec a, \vec b, \vec c$ лінійно незалежні. Отже, вони утворюють базис.

Позначимо координати вектора $\vec d=(x,\ y,\ z)$ у базисі векторів $\vec a, \vec b, \vec c$. Тоді справджується векторна рівність

$$\vec d=x\vec a+y\vec b+z\vec c.$$

Вона рівносильна системі лінійних рівнянь

$$\begin{cases}2x+y+3z=1,\\ -x+y=1,\\ x+2y+z=1.\end{cases}$$

Оскільки основний визначник системи $\Delta=-2\neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який можна знайти, наприклад, за формулами Крамера. Отже, $x=-3$, $y=1$, $z=2$.

Таким чином, у базисі векторів $\vec a, \vec b, \vec c$ вектор $\vec d=(-3;\ 1;\ 2)$.

2.4 Скалярний добуток векторів і його властивості

➡ **Означення 2.16.** ***Скалярним добутком двох векторів*** $\vec a=(a_1, a_2, ..., a_n)$ *і* $\vec b=(b_1, b_2, ..., b_n)$ *називають число*

$$\vec a\cdot\vec b=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n, \qquad (2.15)$$

тобто скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їхніх відповідних компонент.

Для трьох довільних векторів $\vec a$, $\vec b$ і $\vec c$ і довільного дійсного числа α справедливі такі рівності:

① $\vec a\cdot\vec b=\vec b\cdot\vec a$ (***комутативна властивість***);

② $(\alpha\vec a)\vec b=\alpha(\vec a\cdot\vec b)$ (***сполучна властивість відносно числового множника***);

③ $(\vec a+\vec b)\vec c=\vec a\cdot\vec c+\vec b\cdot\vec c$ (***асоціативна властивість***);

④ $\vec a\cdot\vec a\geq 0$ *і* $\vec a\cdot\vec a=0$ *тоді й лише тоді, коли* $\vec a=0$.

Зазначені властивості легко доводяться. Пропонується зробити це самостійно.

➡ **Означення 2.17.** *Якщо в лінійному просторі визначено скалярний добуток двох векторів за формулою (2.15) із властивостями ①—④, то цей простір називають* ***евклідовим***.

Якщо вектори $\vec a$ і $\vec b$ належать простору $\boldsymbol R^2$ або $\boldsymbol R^3$, можна дати інше означення.

➡ **Означення 2.18.** ***Скалярним добутком двох векторів*** $\vec a$ *і* $\vec b$ *називають число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними*:

$$\vec a\cdot\vec b=|\vec a||\vec b|\cos\varphi. \qquad (2.16)$$

З означення скалярного добутку випливає: якщо $\vec a=\vec b$, то кут між ними $\varphi=0°$, а $\cos 0=1$, тому $\vec a\cdot\vec a=|\vec a|^2$, або $|\vec a|=\sqrt{\vec a\cdot\vec a}$.

Отже, якщо вектори $\vec a=(a_1, a_2, ..., a_n)$ і $\vec b=(b_1, b_2, ..., b_n)$ n-вимірні, то, використовуючи формулу (2.16), дістанемо вираз для визначення довжини вектора:

$$|\vec a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}. \qquad (2.17)$$

ТЕОРЕМА 2.4

(необхідна й достатня умова перпендикулярності двох векторів)

Ненульові вектори $\vec a$ і $\vec b$ взаємно перпендикулярні тоді й лише тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Доведення

Необхідність. Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні. Тоді

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ = 0.$$

Достатність. Нехай $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. Якщо один із векторів нульовий, то оскільки напрям нульового вектора не визначений, його можна вважати перпендикулярним до іншого вектора. Якщо $\vec{a} \neq 0$ і $\vec{b} \neq 0$, то з рівності $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ та формули (2.16) випливає, що $\cos\varphi = 0$, тобто $\varphi = 90°$.

Теорему доведено.

Використовуючи вираз (2.16), запишемо важливу формулу для знаходження кута між двома ненульовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ у n-вимірному просторі $\boldsymbol{R}^n$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \tag{2.18}$$

Цей кут φ існує і $0 \le \varphi \le \pi$; оскільки $|\vec{a}| \neq 0$ і $|\vec{b}| \neq 0$, то $-1 \le \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \le 1$.

Якщо $\cos\varphi = 1$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні й однаково напрямлені.

Якщо $\cos\varphi = -1$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні й протилежно напрямлені.

Використовуючи (2.15) і (2.17), формулу (2.18) можна записати у вигляді

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}}, \tag{2.19}$$

де вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ n-вимірні.

➡ **Означення 2.19.** *Два вектори називають* ***ортогональними****, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю.*

✓ *Зауваження 2.2.* Для дво- й тривимірних векторів поняття ортогональності та перпендикулярності збігаються.

■ **Приклад 2.6.** *Визначимо кут між векторами* $\vec{a} = (2;\ 1;\ 3;\ 2)$ і $\vec{b} = (1;\ 2;\ -2;\ 1)$.

За формулою (2.19) знаходимо косинус кута φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 3(-2) + 2\cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2 + 2^2}\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 0.$$

Оскільки $\cos\varphi = 0$, то $\varphi = \pi/2$. Отже, дані вектори ортогональні.

Очевидно, що нульовий вектор ортогональний до будь-якого іншого вектора. З означення випливає: якщо два ненульових вектори ортогональні, то кут між ними дорівнює $\pi/2$ (оскільки $\cos(\pi/2) = 0$).

➡ **Означення 2.20.** *Вектори* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *n-вимірного простору* $\boldsymbol{R}^n$ *утворюють* ***ортонормований базис****, якщо ці вектори попарно ортогональні й довжина кожного з них дорівнює одиниці, тобто якщо* $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = 0$ *при* $i \neq j$, $|\vec{e}_i| = 1$ *при* $i = j$, *де* $j, i = 1, 2, \ldots, n$.

■ **Приклад 2.7.** *Покажемо, що вектори* $\vec{i} = (1;\ 0;\ 0)$, $\vec{j} = (0;\ 1;\ 0)$, $\vec{k} = (0;\ 0;\ 1)$ *простору* $\boldsymbol{R}^3$ *утворюють базис.*

Знайдемо скалярні добутки векторів:

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = 1,\quad \vec{i}\cdot\vec{j} = 0,\quad \vec{i}\cdot\vec{k} = 0,$$
$$\vec{j}\cdot\vec{i} = 0,\quad \vec{j}\cdot\vec{j} = 1,\quad \vec{j}\cdot\vec{k} = 0,$$
$$\vec{k}\cdot\vec{i} = 0,\quad \vec{k}\cdot\vec{j} = 0,\quad \vec{k}\cdot\vec{k} = 1.$$

Оскільки $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, то вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ортогональні й утворюють ортонормований базис простору $\boldsymbol{R}^3$.

Базис векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ називатимемо ***стандартним базисом простору*** $\boldsymbol{R}^3$.

Справедливе таке твердження.

ТВЕРДЖЕННЯ

Будь-який вектор $\vec{a} = (x, y, z)$ простору $\boldsymbol{R}^3$ можна записати єдиним способом у вигляді

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{2.20}$$

Координати вектора $\vec{a}$ в ортонормованому базисі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ називають його ***прямокутними координатами***, а рівність (2.20) — ***розкладом вектора*** $\vec{a}$ ***в стандартному базисі простору*** $\boldsymbol{R}^3$.

2.5
Простір товарів. Вектор цін

Під *товаром* розуміють деяку продукцію або послугу, яка надходить на ринок для продажу в певний час і в певному місці. Вважатимемо, що маємо n різних товарів. Обсяг i-го товару позначимо через x_i, $i = 1, 2, ..., n$. Тоді деякий набір цих товарів можна записати у вигляді вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, тобто $\vec{x}$ є n-вимірним вектором. З економічних міркувань розглядатимемо лише такі набори товарів, у яких компоненти $x_i \geq 0$ для довільного $i = 1, 2, ..., n$. *Множину всіх наборів товарів називають **простором товарів** C*. Ця множина є простором тому, що в ній можна додавати два довільних набори й множити будь-який набір товарів на довільне невід'ємне число.

Вважаємо, що кожен товар має певну *ціну*. Всі ціни строго додатні. Нехай ціна одиниці i-го товару становить p_i, $i = 1, 2, ..., n$. Тоді вектор $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ називають ***вектором цін***.

Для набору товарів $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ розглянемо вектор відповідних цін $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$. Скалярний добуток цих векторів

$$\vec{p} \cdot \vec{x} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n$$

є числом, яке визначає *ціну набору товарів* і позначається $c(\vec{x})$.

■ **Приклад 2.8.** *Витрати фірми на ресурси, які використовуються для виготовлення одиниці продукції, задано в таблиці:*

Ресурси (x_i)	Кількість	Ціна (p_i)
Сировина першого виду (x_1)	200 кг	3 грн./кг
Сировина другого виду (x_2)	500 м^2	5 грн./м^2
Витрати праці (x_3)	0,65 людино-год	10 грн./людино-год
Обладнання (x_4)	0,7 машино-год	15 грн./машино-год

Визначимо ціну всіх ресурсів, що використовуються фірмою для виготовлення одиниці продукції.

Введемо вектор витрат ресурсів на одиницю продукції $\vec{x} = (200;\ 500;\ 0{,}65;\ 0{,}7)$ та вектор цін одиниць відповідних ресурсів $\vec{p} = (3;\ 5;\ 10;\ 15)$. Вартість усіх ресурсів, що використовуються для виготовлення одиниці продукції, буде скалярним добутком векторів $\vec{x}$ та $\vec{p}$. Тому

$$c(\vec{x}) = \vec{x}\vec{p} = \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4.$$

Отже,

$$\vec{x} \cdot \vec{p} = 200 \cdot 3 + 500 \cdot 5 + 0{,}65 \cdot 10 + 0{,}7 \cdot 15 = 3117 \text{ грн.}$$

■ **Приклад 2.9.** *Комерційний банк, що бере участь у будівництві багатоповерхових будинків на одному з масивів міста, одержав кредити від трьох комерційних банків. Кожен із них надав кредити в розмірі відповідно 200, 300, 400 тис. грн. під річну процентну ставку 40, 25 і 30 %. Визначимо, яку суму треба заплатити за кредити наприкінці року.*

Розглянемо вектор кредитів $\vec{x} = (200;\ 300;\ 400)$ і вектор процентних ставок $\vec{p} = (1{,}40;\ 1{,}25;\ 1{,}30)$. Простим розрахунком керівник комерційного банку може визначити, скільки потрібно заплатити наприкінці року за кредити, взяті у банків:

$$\vec{p} \cdot \vec{x} = 200 \cdot 1{,}4 + 300 \cdot 1{,}25 + 400 \cdot 1{,}3 = 1175 \text{ тис. грн.}$$

■ **Приклад 2.10.** *Визначимо індекс цін та індекс інфляції через розрахунок вартості «споживчого кошика», який складається з 300 видів товарів і послуг. Приклад, як можна обчислити індекс цін для певного місяця, наведено в таблиці:*

Вид товару	Обсяг товару	Ціна одиниці товару в поточному місяці	Витрати споживачів у поточному місяці	Ціна одиниці товару в попередньому місяці	Витрати споживачів у попередньому місяці
A	3	4000	12 000	3500	10 500
B	10	2000	20 000	1800	18 000
C	2	4000	8000	4500	9000
Загальні витрати	—	—	40 000	—	37 500

Розрахуємо індекс цін: 40 000 : 37 500 · 100 = 106,7 %. Таким чином, індекс інфляції становить 6,7 %. Введемо позначення: $\vec{q}$ = (3; 10; 2) — вектор обсягу споживчих товарів; $\vec{c}$ = (4000; 2000; 4000) — вектор цін у поточному місяці; $\vec{c}_n$ = (3500; 1800; 4500) — вектор цін у попередньому місяці.

Тоді індекс цін (%) обчислюється за формулою

$$p = \frac{\vec{c} \cdot \vec{q}}{\vec{c}_n \cdot \vec{q}} 100,$$

звідки $100 \cdot \vec{c} \cdot \vec{q} = p\vec{c}_n \cdot \vec{q}$ або $(100 \cdot \vec{c} - p\vec{c}_n)\vec{q} = 0$, тобто індекс можна визначити як числовий коефіцієнт p, який робить вектор $\vec{q}$ перпендикулярним до вектора $(100 \cdot \vec{c} - p\vec{c}_n)$.

Індекс інфляції обчислюється за формулою

$$i = p - 100 = \frac{\vec{c} \cdot \vec{q}}{\vec{c}_n \cdot \vec{q}} 100 - 100 = \frac{(\vec{c} - \vec{c}_n)\vec{q}}{\vec{c}_n \cdot \vec{q}} 100.$$

?

Контрольні запитання

1. Що таке вектор?
2. Як позначають і зображують вектор?
3. Що називають довжиною вектора?
4. Який вектор називають нульовим?
5. Які вектори називають рівними?
6. Які вектори називають компланарними?
7. Що таке орт вектора?
8. Які лінійні операції можна виконувати над векторами?
9. Які властивості мають операції додавання векторів і множення числа на вектор?
10. За якими правилами можна знайти суму векторів?
11. Які вектори називають колінеарними?
12. Як формулюється необхідна й достатня умова колінеарності двох векторів?
13. Що таке координати вектора?
14. Що називають лінійною комбінацією системи векторів?

15. Яку лінійну комбінацію називають тривіальною?
16. Яку систему векторів називають лінійно залежною, а яку — лінійно незалежною?
17. Яка необхідна й достатня умова лінійної залежності системи векторів?
18. Як виконують лінійні операції над векторами, заданими своїми координатами?
19. Яка система векторів утворює базис у n-вимірному просторі?
20. Яким чином записують розклад вектора в базисі?
21. Як визначають координати вектора в даному базисі?
22. За якими формулами обчислюють довжину, проекції на координатній осі, напрямні косинуси вектора?
23. Як визначають скалярний добуток векторів?
24. Які властивості має скалярний добуток векторів?
25. Як виражається скалярний добуток двох векторів через координати векторів співмножників?
26. Яка необхідна й достатня умова перпендикулярності двох векторів?
27. Як виражається ця умова в координатній формі?
28. За якою формулою обчислюють кут між двома векторами?
29. Які вектори ортогональні?
30. Який простір називають простором товарів?
31. Що таке вектор цін?
32. Як обчислюють ціну набору товарів?

Приклади розв'язування задач

1 *У трикутнику ABC проведено медіани AD, BE, CK (рис. 2.11). Довести, що* $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CK} = \vec{0}$.

Розглянемо вектори $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$. Очевидно, що $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$. Оскільки, точки D, E, K ділять відповідні сторони трикутника ABC навпіл, то

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC},$$

$$\vec{BE} = \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CA},$$

$$\vec{CK} = \vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{AB}.$$

Додамо ліві й праві частини цих рівностей:

$$\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CK} - \frac{3}{2}\left(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}\right) = 0,$$

що й треба було довести.

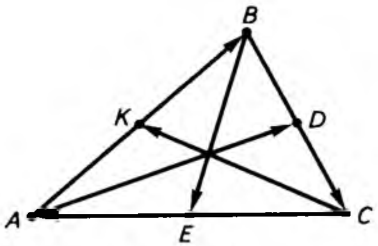


Рис. 2.11

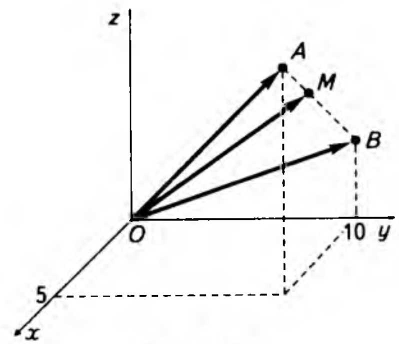


Рис. 2.12

2 *На векторах $\vec{OA} = (5;\ 10;\ 15)$ і $\vec{OB} = (0;\ 10;\ 5)$ побудувати трикутник AOB. Точка M ділить сторону AB у відношенні 2 : 3. Знайти координати вектора $\vec{OM}$.*

Трикутник AOB побудовано на рис. 2.12, з якого видно, що

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (0;\ 10;\ 5) - (5;\ 10;\ 15) = (-5;\ 0;\ -10),$$

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OA} + \frac{2}{5}\vec{AB} = (5;\ 10;\ 15) + \frac{2}{5}(-5;\ 0;\ -10) =$$

$$= (5;\ 10;\ 15) + (-2;\ 0;\ -4) = (3;\ 10;\ 11).$$

3 *Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 20$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$.*

Вектори $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$ є діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах (рис. 2.13). Відомо, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів довжин чотирьох його сторін.

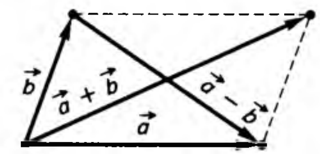


Рис. 2.13

Тому

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2).$$

Звідси випливає, що

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) - |\vec{a} - \vec{b}|^2} =$$

$$= \sqrt{2(11^2 + 23^2) - 20^2} = 30.$$

4 *Записати лінійну комбінацію $3\vec{a}_1 + 5\vec{a}_2 - \vec{a}_3$ векторів*

$$\vec{a}_1 = (4;\ 1;\ 3;\ -2),\ \vec{a}_2 = (1;\ 2;\ -3;\ 2),\ \vec{a}_3 = (16;\ 9;\ 1;\ -3).$$

Користуючись правилами виконання лінійних операцій над векторами, заданими своїми координатами, дістанемо

$$3\vec{a}_1 + 5\vec{a}_2 - \vec{a}_3 = 3(4;\ 1;\ 3;\ -2) + 5(1;\ 2;\ -3;\ 2) - (16;\ 9;\ 1;\ -3) =$$

$$= (12;\ 3;\ 9;\ -6) + (5;\ 10;\ -15;\ 10) - (16;\ 9;\ 1;\ -3) = (1;\ 4;\ -7;\ 7).$$

5 *Дано точки $A(-1;\ 5;\ -10)$, $B(5;\ -7;\ 8)$, $C(2;\ 2;\ -7)$ і $D(5;\ -4;\ 2)$. Перевірити, чи колінеарні вектори $\vec{AB}$ і $\vec{CD}$.*

Запишемо координати векторів $\vec{AB}$ і $\vec{CD}$:

$$\vec{AB} = (5 + 1;\ -7 - 5;\ 8 + 10) = (6;\ -12;\ 18),$$

$$\vec{CD} = (5 - 2;\ -4 - 2;\ 2 + 7) = (3;\ -6;\ 9).$$

Колінеарні вектори мають пропорційні координати, тому

$$\frac{6}{3} = \frac{-12}{-6} = \frac{18}{9} = 2.$$

Отже, $\vec{AB} = 2\vec{CD}$.

6 *З'ясувати, за яких значень l і m вектори $\vec{a} = (l;\ -2;\ 5)$, $\vec{b} = (1;\ m;\ -3)$ колінеарні.*

Умова колінеарності двох векторів $\vec{a} = \lambda\vec{b}$. Для заданих векторів ця умова запишеться так: $(l;\ -2;\ 5) = \lambda(1;\ m;\ -3)$.

Використовуючи умови рівності двох векторів, дістанемо

$$l = \lambda,\quad -2 = \lambda m,\quad 5 = -3\lambda.$$

З останньої рівності знаходимо $\lambda = -5/3$. Підставляючи значення λ у першу й другу рівності, матимемо $l = -5/3$, $m = 6/5$.

7 *Показати, що вектори*

$$\vec{x}_1 = (1;\ 2;\ 1;\ 2),\ \vec{x}_2 = (-1;\ 3;\ 2;\ 1),\ \vec{x}_3 = (-13;\ -1;\ 2;\ -11)$$

лінійно залежні.

Запишемо лінійну комбінацію $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3 = 0$ або

$$\alpha_1(1;\ 2;\ 1;\ 2) + \alpha_2(-1;\ 3;\ 2;\ 1) + \alpha_3(-13;\ -1;\ 2;\ -11) = (0;\ 0;\ 0;\ 0).$$

Це векторне рівняння еквівалентне такій системі:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - 13\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - 11\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи й зведемо її до діагонального вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -13 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -11 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -13 & 0 \\ 0 & 5 & 25 & 0 \\ 0 & 3 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -13 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -13 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - 13\alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0, \\ \alpha_3 \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

Отже, $\alpha_3 \in \boldsymbol{R}$, $\alpha_2 = -5\alpha_3$, $\alpha_1 = 8\alpha_3$. Тому лінійна комбінація векторів $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ і $\vec{x}_3$ матиме вигляд $8\vec{x}_1 - 5\vec{x}_2 + \vec{x}_3 = 0$. Це означає, що вектори $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ і $\vec{x}_3$ лінійно залежні.

8 *Показати, що вектори* $\vec{a} = (-2;\ 0;\ 1)$, $\vec{b} = (1;\ -1;\ -2)$, $\vec{c} = (3;\ 1;\ -1)$ *лінійно незалежні.*

Оскільки $\alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{c} = 0$ лише при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, то запишемо цю рівність у вигляді

$$\alpha_1(-2;\ 0;\ 1) + \alpha_2(1;\ -1\ ;-2) + \alpha_3(3;\ 1\ ;-1) = (0;\ 0;\ 0),$$

тобто маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Оскільки її визначник $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, то система має єдиний розв'язок $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ лінійно незалежні.

9 *У базисі векторів із попереднього прикладу знайти координати вектора* $\vec{d} = (1;\ 1;\ 1)$.

Позначивши через x, y, z координати вектора $\vec{d}$ у базисі $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, маємо

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{d},$$

або

$$\begin{cases} -2x + y + 3z = 1, \\ -y + z = 1, \\ x - 2y - z = 1. \end{cases}$$

Оскільки визначник цієї системи $\Delta = -2 \neq 0$, то вона має єдиний розв'язок, який можна легко знайти. Після відповідних обчислень дістанемо

$$x = -1,\ \ y = -1,\ \ z = 0.$$

Таким чином, у базисі векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ вектор $\vec{d} = (-1;\ -1;\ 0)$.

10 *Знайти довжину та напрямні косинуси вектора* $\vec{a} = (1;\ -2;\ 2)$.

За формулами $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\cos\alpha = \dfrac{x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \dfrac{y}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{z}{|\vec{a}|}$ дістанемо

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3,$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{3},\ \ \cos\beta = -\frac{2}{3},\ \ \cos\gamma = \frac{2}{3}.$$

11 *Визначити вектор, довжина якого дорівнює* 1, *а напрям збігається з напрямом вектора* $\vec{a} = (3;\ 4;\ -12)$, *а також знайти його напрямні косинуси.*

Знаходимо довжину вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2} = 13$. Тоді ортом вектора $\vec{a}$ є вектор

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{3}{13};\ \frac{4}{13};\ -\frac{12}{13}\right).$$

Вектор $\vec{a}_0$ має довжину 1. Напрямні косинуси вектора $\vec{a}$ є координатами вектора $\vec{a}_0$: $\cos\alpha = \frac{3}{13}$, $\cos\beta = \frac{4}{13}$, $\cos\gamma = -\frac{12}{13}$.

12 ***Дано вектори*** $\vec{a}$ ***і*** $\vec{b}$, ***які утворюють кут*** $60°$. ***Знайти довжину вектора*** $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, ***якщо*** $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$.

Довжину вектора $\vec{c}$ можна знайти за формулою $|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}\cdot\vec{c}} = \sqrt{\vec{c}^2}$. Користуючися властивостями скалярного добутку, маємо

$$\vec{c}\cdot\vec{c} = (3\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 9\vec{a}^2 + 12\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2.$$

Оскільки $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 9$, $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 16$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60° = 6$, то

$$\vec{c}^2 = 9\cdot 9 + 12\cdot 6 + 4\cdot 16 = 217.$$

Звідси випливає, що $|\vec{c}| = \sqrt{217}$.

13 ***Визначити, при якому значенні*** α ***вектори*** $\vec{a} = (\alpha;\ -3;\ 2)$ ***і*** $\vec{b} = (1;\ 2;\ -\alpha)$ ***взаємно перпендикулярні.***

Запишемо умову перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, тобто $\alpha\cdot 1 + (-3)2 + 2(-\alpha) = 0$, $-6 - \alpha = 0$. Отже, $\alpha = -6$.

14 ***Дано вектори*** $\vec{a} = (3;\ -2;\ 1)$ ***і*** $\vec{b} = (-1;\ 1;\ -2)$. ***Знайти вектор*** $\vec{c} = (x,\ y,\ z)$, ***який перпендикулярний до векторів*** $\vec{a}$ ***і*** $\vec{b}$ ***і має довжину*** $\sqrt{35}$.

Запишемо умову перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{c}$ та $\vec{b}$ і $\vec{c}$:

$$3x - 2y + z = 0,\quad -x + y - 2z = 0.$$

Крім того, за умовою довжина вектора $|\vec{c}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{35}$, тобто, $x^2 + y^2 + z^2 = 35$.

Складемо й розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ -x + y - 2z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 35, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ y = 5z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 35, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 9z = 0, \\ y = 5z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 35, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3z, \\ y = 5z, \\ 9z^2 + 25z^2 + z^2 = 35, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3z, \\ y = 5z, \\ z^2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 3, \\ y = \pm 5, \\ z = \pm 1. \end{cases}$$

Отже, маємо два вектори $\vec{c}_1 = (-3;\ -5;\ -1)$ і $\vec{c}_2 = (3;\ 5;\ 1)$, які задовольняють умову задачі.

15 ***Дано вершини трикутника*** $A(3;\ 2;\ -3)$, $B(5;\ 1;\ -1)$, $C(1;\ -2;\ 1)$. ***Знайти внутрішній кут при вершині*** A.

Шуканий кут є кутом між векторами $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$:

$$\vec{AB} = (2;\ -1;\ 2),\quad \vec{AC} = (-2;\ -4;\ 4).$$

За формулою (2.17) дістанемо

$$\cos\varphi = \frac{2(-2) + (-1)(-4) + 2\cdot 4}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2}} = \frac{4}{9},$$

тобто $\varphi = \arccos\frac{4}{9}$.

16 ***Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах*** $\vec{a} = (2;\ 1;\ 0)$ ***і*** $\vec{b} = (0;\ -2;\ 1)$ ***(рис. 2.14).***

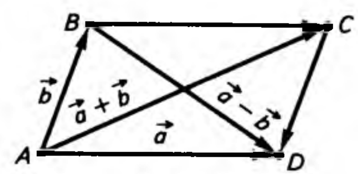


Рис. 2.14

Введемо позначення:

$$\vec{a} = \vec{AD} = \vec{BC};\quad \vec{b} = \vec{AB};\quad -\vec{b} = \vec{CD};\quad \vec{AC} = \vec{a} + \vec{b};\quad \vec{BD} = \vec{a} - \vec{b}.$$

Діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, будуть вектори $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{BD} = \vec{a} - \vec{b}$. Знаходимо координати цих векторів: $\vec{AC} = (2;\ -1;\ 1)$, $\vec{BD} = (2;\ 3;\ -1)$. За формулою (2.18) обчислюємо косинус кута φ між векторами $\vec{AC}$ і $\vec{BD}$:

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 2 + (-1)3 + 1(-1)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{4 - 4}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = 0.$$

Оскільки $\cos\varphi = 0$, то $\varphi = \pi/2$, отже діагоналі даного паралелограма перпендикулярні.

17 *Вектор* $\vec{b}$, *колінеарний вектору* $\vec{a} = (6; -8; -7,5)$, *утворює з віссю Oz гострий кут. Знайти його координати, якщо* $|\vec{b}| = 50$.

Нехай координати вектора $\vec{b} = (x_b,\ y_b,\ z_b)$. З умови колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ маємо

$$\frac{x_b}{6} = \frac{y_b}{-8} = \frac{z_b}{-7,5} = \lambda.$$

Отже, $x_b = 6\lambda,\ y_b = -8\lambda,\ z_b = -7,5\lambda$.

Оскільки вектор $\vec{b}$ утворює з віссю Oz гострий кут, а вектор $\vec{a}$ з тією самою віссю — тупий кут ($z_a = -7,5 < 0$), то вектори протилежно напрямлені. Тому $\lambda = -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = -\dfrac{50}{12,5} = -4$.

Отже, $x_b = -24,\ y_b = 32,\ z_b = 30$.

Розділ 3

МЕТОДИ Й МОДЕЛІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

3.1 Рівняння лінії на площині

Рівняння лінії є найважливішим поняттям аналітичної геометрії. Нехай на площині задано деяку лінію (криву); координати x та y точки, що належить цій лінії, зв'язані між собою певним способом. Такий зв'язок аналітично записується у вигляді деякого рівняння.

➡ **Означення 3.1.** ***Рівнянням лінії (кривої) на площині*** *називають рівняння з двома змінними x та y, яке задовольняють координати довільної точки цієї лінії й не задовольняють координати будь-якої точки, що не лежить на цій лінії* (рис. 3.1).

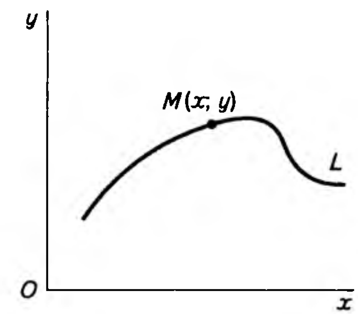


Рис. 3.1

У загальному випадкові рівняння лінії L записується так:

$$F(x,\ y) = 0. \tag{3.1}$$

Іноді змінну y можна виразити з рівняння (3.1); тоді рівняння лінії має вигляд

$$y = f(x). \qquad (3.2)$$

■ **Приклад 3.1.** *Запишемо рівняння лінії точок, рівновіддалених від двох точок площини $A(-2; 1)$ і $B(4; -1)$.*

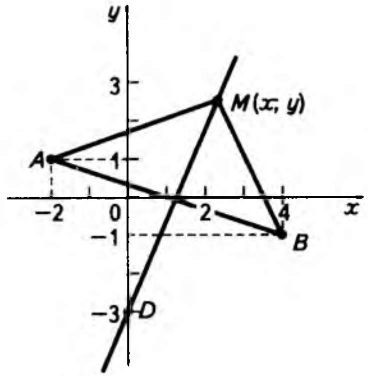


Рис. 3.2

Відстань між двома точками $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ визначається за формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (3.3)$$

Нехай $M(x; y)$ — довільна точка шуканої лінії (рис. 3.2). Тоді, підставляючи координати точок $M(x; y)$, $A(-2; 1)$, $B(4; -1)$ у формулу (3.3) і прирівнявши відстані, матимемо

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2}.$$

Піднесемо до квадрата обидві частини рівняння. Після перетворень дістанемо

$$3x - y - 3 = 0,$$

або

$$y = 3x - 3.$$

Це рівняння прямої MD, що є серединним перпендикуляром до відрізка AB.

Взагалі можна записати рівняння будь-якої лінії, але на практиці це не завжди просто зробити.

Щоб переконатися, чи належить точка $M(x_0; y_0)$ даній лінії L, рівняння якої $F(x, y) = 0$, треба перевірити, чи задовольняють координати цієї точки дане рівняння.

3.2
Рівняння прямої на площині

Найпростішою лінією на площині є пряма. Щоб скласти рівняння прямої лінії на площині, треба певним способом задати умови, які визначають положення прямої відносно координатних осей. Пряму на площині відносно системи координат можна задати, наприклад, двома різними точками, точкою та напрямом (вектором), точкою та вектором, перпендикулярним до прямої, або іншими способами. Таких способів кілька, тому ми можемо дістати рівняння прямої в різних формах.

3.2.1. Рівняння прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора

Запишемо рівняння прямої, що проходить через дану точку $M(x_0; y_0)$ перпендикулярно до даного вектора $\vec{n} = (a, b)$.

Виберемо на прямій L довільну точку $M(x; y)$. Розглянемо вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$. Вектори $\overline{M_0M}$ та $\vec{n}$ перпендикулярні (рис. 3.3), тому їх скалярний добуток дорівнює нулю. Дістанемо рівняння прямої

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0, \qquad (3.4)$$

яке називають ***рівнянням прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора.***

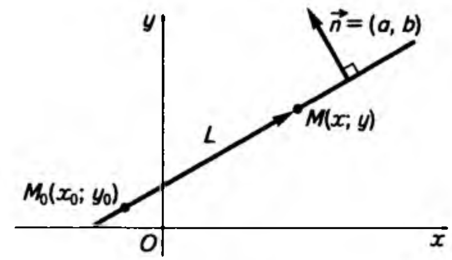


Рис. 3.3

Рівняння (3.4) задовольняють координати будь-якої точки, що лежить на прямій, і не задовольняють координати точки, що не лежить на прямій. Тому рівняння (3.4) є шуканим.

■ **Приклад 3.2.** *Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку $M(3; -1)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (2; 4)$.*

Підставивши в рівняння (3.4) координати вектора $\vec{n} = (2; 4)$ і точки $M(3; -1)$, матимемо

$$2(x-3)+4(y+1)=0, \text{ або } 2x+4y-2=0, \text{ або } x+2y-1=0.$$

3.2.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай пряма перетинає вісь Oy у точці $B(0; b)$ й утворює з віссю Ox кут α (рис. 3.4), який називають *кутом нахилу прямої.*

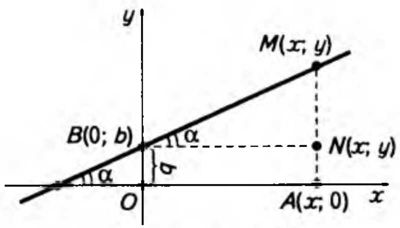


Рис. 3.4

Виберемо на прямій довільну точку $M(x; y)$.

Розглянемо трикутник MBN, в якому $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{MN}{NB} = \dfrac{y-b}{x}$.

➡ **Означення 3.2.** ***Кутовим коефіцієнтом прямої*** *називають тангенс кута α, який утворює пряма з додатним напрямом осі Ox:*

$$k = \operatorname{tg}\alpha. \tag{3.5}$$

Отже, $k = \dfrac{y-b}{x}$, звідки

$$y = kx + b. \tag{3.6}$$

Рівняння (3.6) називають ***рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.***

Розглянемо окремі випадки рівняння (3.6).

1. Якщо $b = 0$, то пряма $y = kx$ проходить через початок координат (рис. 3.5). Якщо $k = \operatorname{tg}\alpha > 0$, то пряма утворює з віссю Ox гострий кут. Якщо ж $k = \operatorname{tg}\alpha < 0$, то пряма утворює з віссю Ox тупий кут.

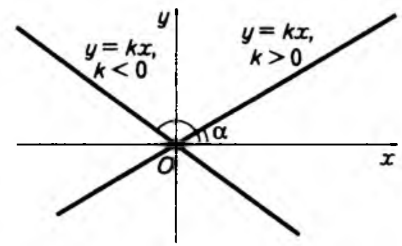


Рис. 3.5

2. Якщо $k = 0$, то $\operatorname{tg}\alpha = 0$, а отже, $\alpha = 0$; тому пряма $y = b$ паралельна осі Ox. Рівняння осі Ox має вигляд $y = 0$ (рис. 3.6).

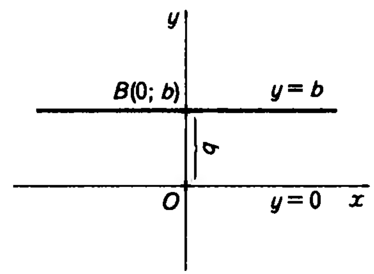


Рис. 3.6

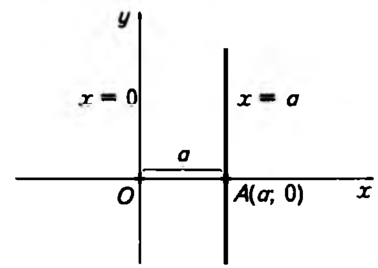


Рис. 3.7

3. Якщо $\alpha = \pi/2$, то $\operatorname{tg}(\pi/2)$ не існує, тобто вертикальна пряма не має кутового коефіцієнта. Дана пряма паралельна осі Oy, і її рівняння має вигляд $x = a$ (рис. 3.7).

3.2.3. Рівняння прямої, яка проходить через дану точку в даному напрямі

Нехай пряма проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ і утворює з віссю Ox кут α ($\alpha \neq \pi/2$). Оскільки точка $M_0(x_0; y_0)$ лежить на прямій, то її координати задовольняють рівняння (3.6), тому

$$y_0 = kx_0 + b. \qquad (3.7)$$

Віднімаючи рівняння (3.7) від (3.6), дістанемо

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (3.8)$$

Це ***рівняння прямої, яка проходить через дану точку $M_0(x_0;\ y_0)$ у даному напрямі***. Його ще називають ***рівнянням пучка прямих***, що проходить через точку $M_0(x_0;\ y_0)$.

■ **Приклад 3.3.** *Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1;\ -2)$: ① паралельно осі Ox; ② паралельно осі Oy; ③ під кутом $\alpha = 135°$.*

① Якщо пряма паралельна осі Ox, то кутовий коефіцієнт цієї прямої $k = 0$. Тому її рівняння має вигляд $y = b$. Підставляючи в це рівняння координати точки $M_0(1;\ -2)$, дістанемо $b = -2$. Отже, рівняння шуканої прямої $y = -2$.

② Якщо пряма паралельна осі Oy, то вона утворює кут $\alpha = \pi/2$ з віссю Ox. Тому $k = \mathrm{tg}(\pi/2)$ не існує, й рівняння прямої має вигляд $x = a$. Підставивши координати точки $M_0(1;\ -2)$, дістанемо $a = 1$. Отже, рівняння шуканої прямої $x = 1$.

③ Якщо пряма утворює з віссю Ox кут 135°, то її кутовий коефіцієнт $k = \mathrm{tg}\ 135° = -1$. Використовуючи формулу (3.8), матимемо $y + 2 = -1(x - 1)$, або $y = -x - 1$, що є рівнянням шуканої прямої.

3.2.4. Канонічне рівняння прямої

Нехай пряма проходить через задану точку $M_0(x_0;\ y_0)$ паралельно даному векторові $\vec{s} = (l,\ m)$ (рис. 3.8).

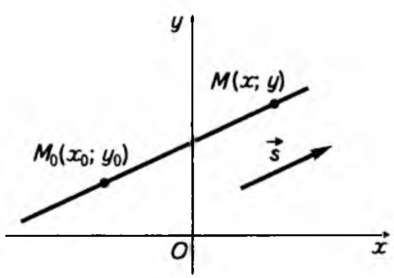


Рис. 3.8

Виберемо на прямій довільну точку $M(x;\ y)$ і розглянемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0,\ y - y_0)$. Вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ колінеарні, тому їхні координати пропорційні. З цієї умови дістанемо рівняння

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \qquad (3.9)$$

яке називають ***канонічним рівнянням прямої.*** Вектор $\vec{s}$ називають ***напрямним вектором прямої.***

3.2.5. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай пряма проходить через дві задані точки $M_1(x_1;\ y_1)$ і $M_2(x_2;\ y_2)$ (рис. 3.9). Тоді напрямним вектором прямої буде $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$. Підставивши його координати й координати заданої точки $M_1(x_1;\ y_1)$ у рівняння (3.9), дістанемо рівняння

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \qquad (3.10)$$

яке називають ***рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки.***

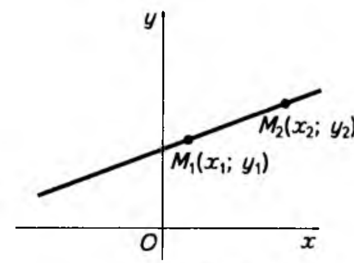


Рис. 3.9

■ **Приклад 3.4.** *Запишемо рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(3;\ 1)$ і $M_2(5;\ 4)$.*

Підставляючи координати заданих точок у рівняння (3.10), дістанемо рівняння шуканої прямої:

$$\frac{x - 3}{5 - 3} = \frac{y - 1}{4 - 1}, \text{ або } \frac{x - 3}{2} = \frac{y - 1}{3}, \text{ або } 3x - 2y - 7 = 0.$$

3.2.6. Рівняння прямої у відрізках

Запишемо рівняння прямої, яка відтинає від осей координат Ox і Oy задані відрізки $a \neq 0$ і $b \neq 0$ відповідно (рис. 3.10).

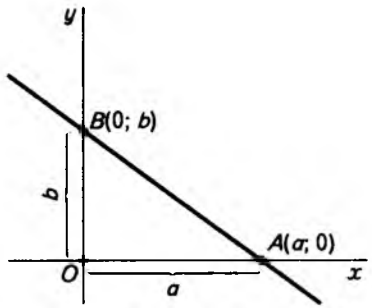


Рис. 3.10

Використовуючи рівняння прямої (3.10), яка проходить через точки $A(a;\ 0)$ і $B(0;\ b)$, дістанемо рівняння $\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}$, або після перетворень

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (3.11)$$

Рівняння (3.11) називають ***рівнянням прямої у відрізках***. Його зручно використовувати під час побудови прямої.

■ **Приклад 3.5.** *Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку $M(4;\ -1)$ і відтинає від додатної півосі Ox відрізок удвоє більший, ніж на додатній півосі Oy, й побудуємо цю пряму.*

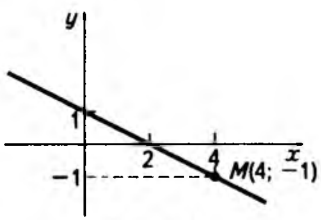


Рис. 3.11

За умовою $a = 2b$ ($a > 0,\ b > 0$). Підставивши ці значення в рівняння (3.11), дістанемо

$$\frac{x}{2b} + \frac{y}{b} = 1.$$

Оскільки точка M (4; −1) лежить на прямій, то її координати задовольняють це рівняння. Отже, $\frac{4}{2b} - \frac{1}{b} = 1$. Звідси $b = 1$. Тоді $a = 2$. Рівняння шуканої прямої (рис. 3.11) має вигляд

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{1} = 1.$$

3.2.7. Загальне рівняння прямої

Розглянемо рівняння першого степеня відносно змінних x і y

$$ax + by + c = 0. \qquad (3.12)$$

Якщо коефіцієнти a і b цього рівняння одночасно не дорівнюють нулю ($a^2 + b^2 > 0$), то його називають ***загальним рівнянням прямої***.

Окремі випадки рівняння (3.12) подано в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Значення коефіцієнтів	Вигляд рівняння	Положення прямої
$c = 0$	$ax + by = 0$ $(y = kx)$	Проходить через початок координат
$a = 0$	$by + c = 0$ $(y = d)$	Паралельна осі Ox
$b = 0$	$ax + c = 0$ $(x = g)$	Паралельна осі Oy
$a = c = 0$	$y = 0$	Збігається з віссю Ox
$b = c = 0$	$x = 0$	Збігається з віссю Oy

3.2.8. Взаємне розміщення двох прямих

❑ **Перетин двох прямих.** Нехай задано дві прямі: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, які перетинаються. Оскільки координати точки перетину цих прямих мають задовольняти рівняння кожної прямої, то їх можна знайти, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases} \qquad (3.13)$$

Якщо система (3.13) має єдиний розв'язок $(x_0;\ y_0)$, то прямі перетинаються в точці $M_0(x_0;\ y_0)$.

❑ **Кут між прямими.** Нехай потрібно знайти кут між прямими L_1: $y = k_1x + b_1$ і L_2: $y = k_2x + b_2$ (рис. 3.12). Із рисунка видно, що кут між прямими L_1 і L_2 становить $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Оскільки $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$, то за умови, що $\alpha_1 \neq \pi/2$ і $\alpha_2 \neq \pi/2$, дістанемо

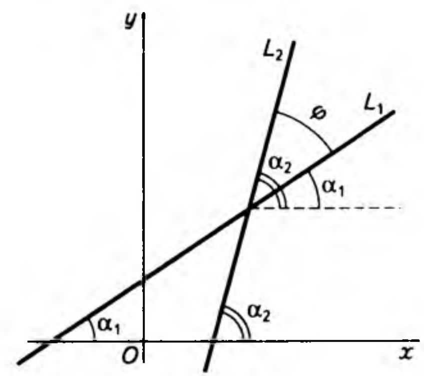


Рис. 3.12

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2},$$

або

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (3.14)$$

Формула (3.14) визначає один із кутів між прямими, що перетинаються. Інший кут дорівнює $\pi - \varphi$.

❑ **Умова паралельності прямих.** Якщо прямі L_1: $y = k_1x + b_1$ і L_2: $y = k_2x + b_2$ паралельні, то кут $\varphi = 0$, а отже, $\operatorname{tg}\varphi = 0$. Із формули (3.14) випливає, що

$$k_1 = k_2. \quad (3.15)$$

І навпаки, якщо $k_1 = k_2$, то з формули (3.14) випливає, що $\operatorname{tg}\varphi = 0$, а отже, і $\varphi = 0$. Таким чином, умова (3.15) є ***необхідною й достатньою умовою паралельності двох прямих***.

■ **Приклад 3.6.** ***Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку** $M(-2; 4)$ **паралельно прямій** $2x - 3y + 6 = 0$ **(рис. 3.13).***

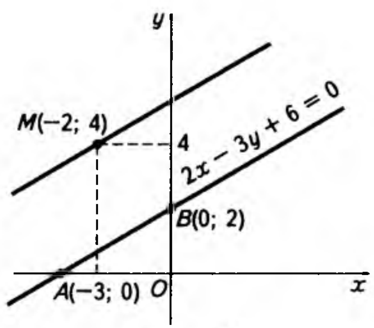


Рис. 3.13

Записавши рівняння заданої прямої у вигляді $y = \frac{2}{3}x + 2$, знайдемо її кутовий коефіцієнт $k_1 = 2/3$. Оскільки задана й шукана прямі паралельні, то їхні кутові коефіцієнти рівні, тобто $k_1 = k_2 = 2/3$.

Шукана пряма проходить через точку $M(-2; 4)$ і має кутовий коефіцієнт $k_2 = 2/3$. Тому її рівняння має вигляд

$$y - 4 = \frac{2}{3}(x + 2), \quad \text{або} \quad 2x - 3y + 16 = 0.$$

❑ **Умова перпендикулярності двох прямих.** Якщо прямі L_1: $y = k_1x + b$ і L_2: $y = k_2x + b_2$ перпендикулярні, то кут $\varphi = \pi/2$; при цьому $\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg}(\pi/2) = 0$ або $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{1 + k_1k_2}{k_2 - k_1} = 0$. Отже, справедлива рівність

$$k_1k_2 = -1. \quad (3.16)$$

Таким чином, умова (3.16) є ***необхідною й достатньою умовою перпендикулярності двох прямих***.

❑ **Відстань від точки до прямої.** Нехай задано точку $M_0(x_0; y_0)$ і пряму L: $ax + by + c = 0$. Відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої L є довжиною перпендикуляра $d = M_0N$ (рис. 3.14), яка обчислюється за формулою

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (3.17)$$

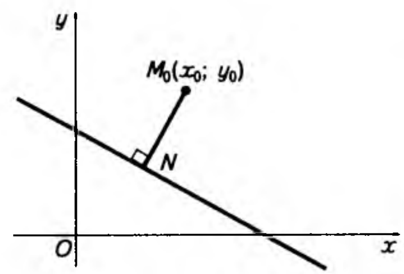


Рис. 3.14

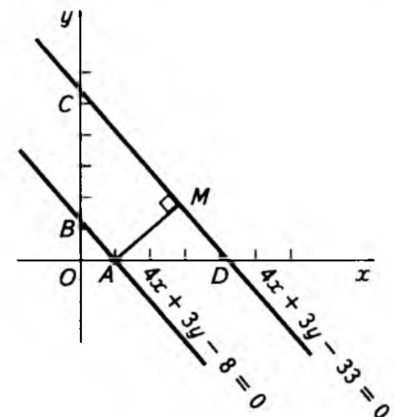


Рис. 3.15

■ **Приклад 3.7.** ***Знайдемо відстань між двома паралельними прямими** AB: $4x + 3y - 8 = 0$ **і** DC: $4x + 3y - 33 = 0$ **(рис. 3.15).***

Через довільну точку A на будь-якій із прямих (наприклад AB) проведемо перпендикуляр AM. Визначивши координати точок перетину цього перпендикуляра із заданими прямими, знайдемо відстань між цими прямими. Кутовий коефіцієнт прямої AB $k_1 = -\frac{4}{3}$. Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої AM, що проходить через точку $A(2;\ 0)$ перпендикулярно до прямої AB, з умови (3.16): $k_2 = -\frac{1}{k_1} = \frac{3}{4}$. Отже, рівняння цього перпендикуляра має вигляд

$$y - 0 = \frac{3}{4}(x - 2), \quad \text{або} \quad 3x - 4y - 6 = 0.$$

Знайдемо точку перетину перпендикуляра AM із прямою DC, розв'язавши систему

$$\begin{cases} 4x + 3y - 33 = 0, \\ 3x - 4y - 6 = 0. \end{cases}$$

Звідси дістаємо координати точки перетину $M(6;\ 3)$.

Обчислюємо відстань між точками A і M:

$$AM = \sqrt{(2-6)^2 + (0-3)^2} = 5.$$

3.3 Моделі й задачі економічного змісту

3.3.1. Модель рівноваги ринку

Розглянемо просту математичну модель рівноваги ринку, в якій основними є співвідношення між двома величинами: ціною одиниці товару p та обсягом товару на ринку q.

В основу зазначеної математичної моделі покладено просту ідею: розглянути ціну одиниці товару p та обсяг товару q як упорядковану пару чисел $(p,\ q)$ і поставити їй у відповідність на площині точку з координатами $(p;\ q)$. Через p позначимо вісь абсцис, а через q — вісь ординат. Наприклад, пара (7; 2000) відповідає ситуації, коли 2000 одиниць товару можна продати за ціною 7 грн. за одиницю.

Візьмемо деякий товар. За даної ціни p за одиницю товару через $s(p)$ позначимо число одиниць товару, які продавці на ринку пропонують для продажу. Функцію $s = s(p)$ називають ***функцією пропозиції товару***. Через $q(p)$ позначимо число одиниць товару, які покупці ба-

жають купити. Функцію $q = q(p)$ називають ***функцією попиту на товар***. З економічних міркувань функція пропозиції $s = s(p)$ зростаюча, а функція попиту $q = q(p)$ спадна.

➡ **Означення 3.3.** *Ціну, за якої попит на певний товар дорівнює пропозиції цього товару на ринку, називають* ***рівноважною ціною***. *Тобто за рівноважної ціни p^* виконується рівність $s(p^*) = q(p^*)$. Точку $E(p^*;\ q^*)$ називають* ***точкою рівноваги*** (рис. 3.16).

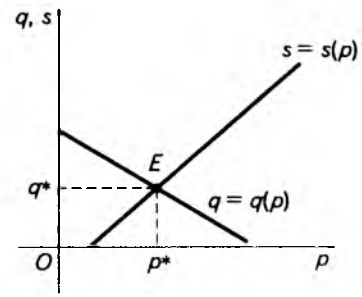


Рис. 3.16

Розглянемо задачу. Нехай задано лінійні функції

$$s(p) = bp - a \quad \text{і} \quad q(p) = c - dp,$$

де a, b, c, d — додатні числа; функція $s = s(p)$ визначає пропозицію, а функція $q = q(p)$ — попит на певний товар на ринку. Потрібно знайти рівноважну ціну p^*.

Якщо відсутні всілякі податки, то рівноважна ціна визначається як розв'язок рівняння $s(p^*) = q(p^*)$ або системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} s^* = bp^* - a, \\ q^* = c - dp^*. \end{cases}$$

Звідси $bp^* - a = c - dp^*$ або $p^*(b + d) = a + c$.

Отже,

$$p^* = \frac{a + c}{b + d}. \tag{3.18}$$

■ **Приклад 3.8.** *Нехай задано функцію попиту $q = -5p + 40$ і функцію пропозиції $s = \frac{15}{2}p - 10$. Знайдемо точку рівноваги.*

Координати точки рівноваги $E(p^*;\ q^*)$ задовольняють умову рівноваги $s^* = q^*$, тобто $\frac{15}{2}p - 10 = 40 - 5p$, звідки $p^* = 4$, а $s^* = q^* = 40 - 5p^* = 20$.

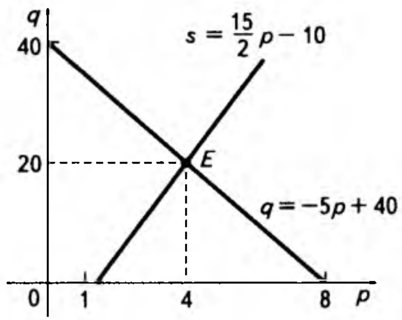


Рис. 3.17

Отже, шукана точка рівноваги — це точка $E(4;\ 20)$ (рис. 3.17).

■ **Приклад 3.9.** *Припустимо, що уряд деякої країни встановив акцизний податок T за одиницю товару, причому цей податок є фіксованим числом, а не процентом від продажної ціни. Скориставшися даними прикладу 3.8 (функція попиту $q = 40 - 5p$, функція пропозиції $s = \frac{15}{2}p - 10$, рівноважна ціна $p^* = 4$), визначимо, як зміняться при цьому рівноважна ціна та обсяг товару.*

Якщо уряд установить акцизний податок T за одиницю товару, то функція пропозиції зміниться й задаватиметься співвідношенням

$$s^T = s(p - T) = \frac{15}{2}(p - T) - 10,$$

а функція попиту залишиться незмінною. Тоді нову точку рівноваги $(p^T;\ q^T)$ можна визначити з умови рівноваги $s^T = q^T$, тобто $40 - 5p^T = \frac{15}{2}(p^T - T) - 10$. Отже, нова рівноважна ціна $p^T = 4 + \frac{3}{5}T$, а відповідний обсяг товару $s^T = q^T = 20 - 3T$. Дістали нову точку рівноваги $\left(4 + \frac{3}{5}T;\ 20 - 3T\right)$.

Наприклад, якщо податок $T = 1$ грн. за одиницю продукції, то рівноважна ціна збільшиться від 4 до 4,6 грн., а обсяг товару (пропозиція) зменшиться з 20 до 17, тобто обсяг одиниць товару для продажу зменшується на $3T$, а ціна збільшується на $\frac{3}{5}T$.

Розглянемо загальнішу ситуацію, коли функції попиту $q = c - dp$ і пропозиції $s = bp - a$ лінійні (a, b, c, d — деякі додатні числа). Якщо встановлено податок T за одиницю товару, то нова ціна буде $p^T - T$. Визначаємо нову точку рівноваги з умови $s^T = q^T$, де $s^T = b(p^T - T) - a$, а $q^T = c - dp^T$. Тоді $bp^T - Tb - a = c - dp^T$. Із цієї рівності знаходимо нову рівноважну ціну $p^T = \frac{a+c}{b+d} + \frac{b}{b+d}T$.

Ураховуючи результат прикладу 3.8 та формулу (3.18), матимемо

$$p^T = p^* + \frac{b}{b+d}T. \tag{3.19}$$

Отже, нова рівноважна ціна підвищується на $\frac{b}{b+d}T$.

Оскільки $b > 0$ і $d > 0$, то $0 < \frac{b}{b+d} < 1$ і $0 < \frac{b}{b+d}T < T$.

3.3.2. Модель рівноваги доходів і збитків компанії

Розглянемо просту модель рівноваги доходів і збитків компанії. Компанія випускає продукцію й продає її за ціною p (грн.) за одиницю. Керівництво компанії встановило, що зміна суми $y_в$ загальних щомісячних витрат на виготовлення продукції в кількості x (тис. од.) має таку закономірність: $y_в = ax + b$ (рис. 3.18). Знайдемо точку рівноваги, області прибутків і збитків компанії.

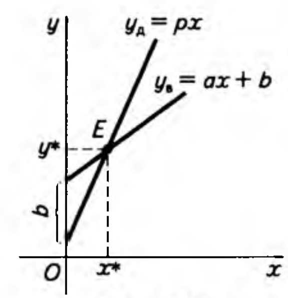


Рис. 3.18

Оскільки доход від продажу x (тис.) виробів продукції ціною p (грн.) за одиницю визначатиметься функцією доходу $y_д = px$, то для рівноваги доходів і витрат потрібно, щоб виконувалась умова рівноваги

$$y_д = y_в.$$

Знаходимо розв'язок рівняння $px = ax + b$. Маємо

$$x^* = \frac{b}{p-a}.$$

Отже, ми визначили точку рівноваги $E\left(\frac{b}{p-a}; \frac{pb}{p-a}\right)$.

Розглянемо можливості компанії. Прибуток P компанії визначається рівністю

$$P = y_д - y_в = px - ax - b = x(p-a) - b.$$

Отже, точка рівноваги — це коли прибуток компанії $P = 0$.

Якщо $0 \le x \le x^*$, то графік функції доходу $y_д$ проходить нижче за графік функції витрат $y_в$, і $y_д < y_в$ (рис. 3.18). Тоді $P < 0$, і компанія несе збитки.

Якщо $x > x^*$, то $y_д > y_в$, тобто графік функції доходу $y_д$ проходить вище за графік функції витрат $y_в$. Тоді $P > 0$, і компанія одержує прибуток.

Отже, область збитків компанії $x \in [0; x^*)$, а область прибутків $x \in (x^*; +\infty)$.

■ **Приклад 3.10.** *Транспортні витрати на перевезення одиниці вантажу залізничним транспортом виражаються функцією $y = 2x + 10$, а автомобільним транспортом — функцією $y = x + 20$, де x вимірюється десятками кілометрів. Визначимо, на які відстані вигідніше перевозити вантажі залізничним і автомобільним транспортом.*

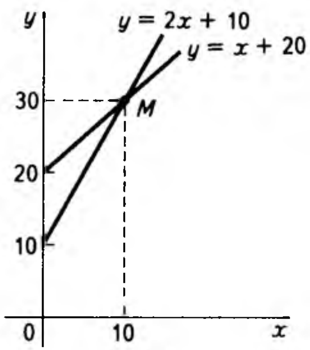


Рис. 3.19

Побудуємо графіки транспортних витрат перевезення (рис. 3.19). Прямі перетинаються в точці $M(10; 30)$. Для перевірки її координат знайдемо точку перетину прямих, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} y = x + 20, \\ y = 2x + 10. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є точка з координатами $x = 10$, $y = 30$.

Графічний аналіз функцій витрат дає змогу зробити такі висновки:

1) якщо $x \in [0; 10)$, тобто $x < 100$ км, то транспортні витрати на перевезення вантажу автомобільним транспортом нижчі, ніж залізничним;

2) якщо $x \in (10; +\infty)$, тобто $x > 100$ км, рентабельнішим буде залізничний транспорт.

3.3.3. Бюджетні множини й лінії бюджетного обмеження

Розглянемо n-вимірний простір товарів C. Нехай задано вектор цін $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$. Тоді ціна набору товарів $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ є скалярним добутком цих векторів: $c(x) = \vec{p} \cdot \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$.

Для простоти розглянемо простір двох товарів. Легко побачити, що набори товарів, котрі мають однакову ціну $c(x)$, це множина точок, які утворюють частину прямої L_c, заданої рівнянням $p_1x_1 + p_2x_2 = c$ і розміщеної в першому квадранті (оскільки $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$) перпендикулярно до вектора цін (рис. 3.20).

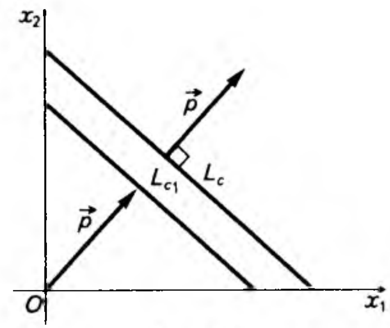


Рис. 3.20

Якщо $c_1 < c$, то пряма L_c, задана рівнянням $p_1x_1 + p_2x_2 = c_1$, паралельна прямій L_c і лежить ближче до початку координат (рис. 3.20).

Нехай зафіксовано деяку грошову суму R, яку ми називатимемо бюджетом (або доходом).

➡ **Означення 3.4.** *Множину всіх наборів товарів, ціна яких не перевищує R, називають* ***бюджетною множиною*** *й позначають $B(p, R)$.*

Бюджетну множину можна визначити за допомогою звичайних або векторних нерівностей

$$B(p,\ R) = \{x \in C\colon\ p_1x_1 + p_2x_2 \le R,\ \ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0\}$$

або

$$B(p,\ R) = \{x \in C\colon\ \vec{p}\vec{x} \le R,\ \ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0\}.$$

Означення 3.5. ***Межею бюджетної множини** G називають множину наборів товарів, які мають ціну рівно R.*

Межу бюджетної множини можна визначити за допомогою звичайних або векторних рівностей

$$G(p,\ R) = \{x \in C\colon\ p_1x_1 + p_2x_2 = R\}$$

або

$$G(p,\ R) = \{x \in C\colon\ \vec{p}\vec{x} = R\}.$$

Якщо простір товарів дво- або тривимірний, то бюджетну множину можна зобразити наочно.

Приклад 3.11. *Розглянемо бюджетні множини за різних цін p і бюджетів (або доходів) R.*

Якщо задано бюджет $R = 20$ умов. грош. од. і вектор цін $\vec{p} = (2;\ 1)$, то бюджетна множина задається нерівністю $2x_1 + x_2 \le 20$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Будуємо межу бюджетної множини: це буде пряма, задана рівнянням $\frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{20} = 1$ (рис. 3.21). Ураховуємо, що $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

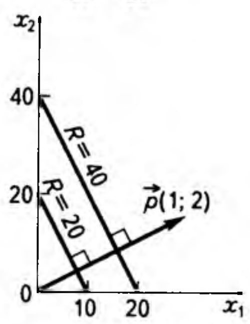


Рис. 3.21

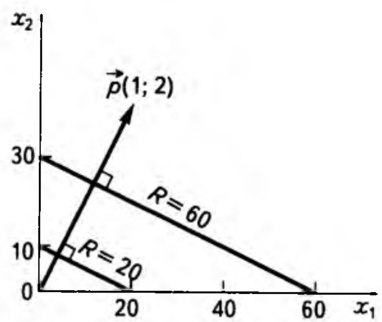


Рис. 3.22

У випадку, коли $R = 40$, а $\vec{p} = (2;\ 1)$ (рис. 3.21), бюджетна множина

$$B(p,\ 40) = \{(x_1,\ x_2)\colon\ 2x_1 + x_2 \le 40,\ \ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0\},$$

а її межа

$$G(p,\ 40) = \left\{(x_1,\ x_2)\colon\ \frac{x_1}{20} + \frac{x_2}{40} = 1\right\}.$$

При $R = 20$ і $\vec{p} = (1;\ 2)$ (рис. 3.22) бюджетна множина

$$B(p,\ 20) = \{(x_1,\ x_2)\colon\ x_1 + 2x_2 \le 20,\ \ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0\},$$

а її межа

$$G(p,\ 20) = \left\{(x_1,\ x_2)\colon\ \frac{x_1}{20} + \frac{x_2}{10} = 1\right\}.$$

Якщо $R = 60$ і $\vec{p} = (1;\ 2)$ (рис. 3.22), то бюджетна множина

$$B(p,\ 60) = \{(x_1,\ x_2)\colon\ x_1 + 2x_2 \le 60,\ \ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0\},$$

а її межа

$$G(p,\ 60) = \left\{(x_1,\ x_2)\colon\ \frac{x_1}{60} + \frac{x_2}{30} = 1\right\}.$$

Із рисунків видно, що межею бюджетної множини буде відрізок між осями координат у першому квадранті, перпендикулярний до вектора цін.

У тривимірному просторі товарів бюджетна множина буде тригранною пірамідою, а її межа — однією з граней піраміди, частиною площини, що розміщена в першому квадранті.

Очевидно, що бюджетна множина $B(p,\ R)$ залежить від цін p і бюджету (доходу) R. У разі збільшення бюджету R межа бюджетної множини паралельно рухається в напрямі від початку координат. За зменшення цін бюджетна множина також збільшується.

На завершення зазначимо, що поняття, які було введено в цьому пункті, використовуються в теорії оптимального планування, лінійного програмування та в мікроекономіці.

3.4 Лінії другого порядку

Лінії, координати точок яких задовольняють рівняння, що в прямокутній системі координат є рівнянням другого степеня, називають ***лініями,*** або ***кривими, другого порядку***. До них належать коло, еліпс, гіпербола, парабола.

3.4.1. Коло

➡ **Означення 3.6.** ***Колом*** *називають геометричне місце точок площини, рівновіддалених від заданої точки — центра кола — на задану відстань — радіус кола.*

Виведемо рівняння кола. Нехай задано коло з центром у точці $C(a;\ b)$ і радіусом R. Візьмемо на колі довільну точку $M(x;\ y)$ (рис. 3.23). Тоді за означенням кола $CM = R$, тобто

$$CM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R,$$

або

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \qquad (3.20)$$

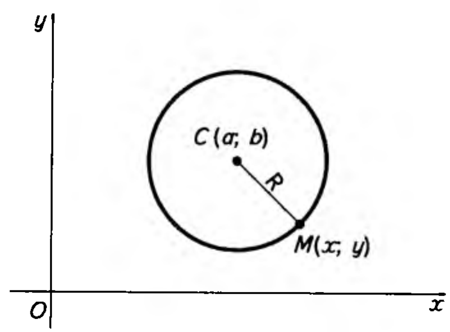


Рис. 3.23

Цю рівність задовольняють координати довільної точки $M(x;\ y)$, що належить колу. Рівняння (3.20) є ***канонічним рівнянням кола***.

Якщо центр кола знаходиться в точці (0; 0), то його рівняння має вигляд

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (3.21)$$

3.4.2. Еліпс

➡ **Означення 3.7.** ***Еліпсом*** *називають геометричне місце точок площини, сума відстаней від яких до заданих точок (фокусів) є величиною сталою й більшою за відстань між фокусами.*

Виведемо рівняння еліпса. Через F_1, F_2 позначимо фокуси, $2c$ — відстань між ними, $2a$ — суму відстаней від довільної точки еліпса до фокусів. За означенням еліпса $2a > 2c$, тобто $a > c$.

Через точки F_1, F_2 проведемо вісь абсцис, а вісь ординат спрямуємо так, щоб вона проходила через середину відрізка F_1F_2 перпендикулярно до осі Ox (рис. 3.24, *а*).

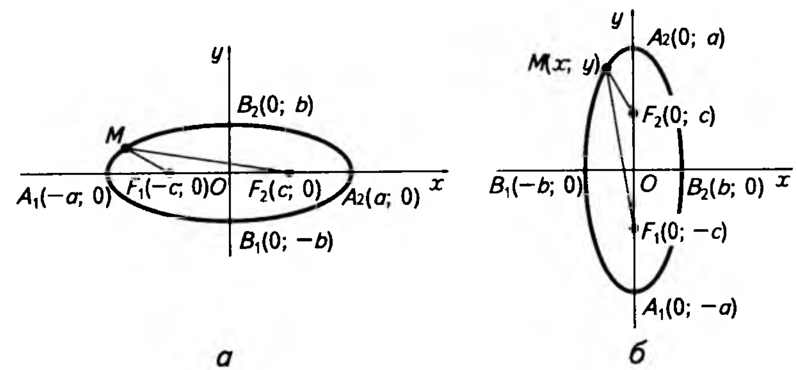


Рис. 3.24

У вибраній системі координат $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$. Виберемо на еліпсі довільну точку $M(x;\ y)$. За означенням еліпса $F_1M + F_2M = 2a$.

Оскільки $F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$ і $F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$, то маємо рівняння еліпса

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Спростимо це рівняння, перенісши один корінь у праву частину й піднісши до квадрата обидві частини рівності:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2,$$

$$x^2+2cx+c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2-2cx+c^2,$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2-4cx,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2-cx.$$

Знову піднесемо обидві частини рівності до квадрата:

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+y^2c^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Поділимо обидві частини на $a^2(a^2-c^2)$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

За означенням еліпса $a^2>c^2$. Позначимо $b^2=a^2-c^2$. Тоді рівняння матиме вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a>b. \tag{3.22}$$

Це ***канонічне рівняння еліпса***, фокуси якого лежать на осі Ox (рис. 3.24, *а*).

Дослідження рівняння еліпса дає змогу зробити висновок, що параметри a і b є довжинами півосей еліпса, які розташовані на осях координат.

Вершинами еліпса є точки $A_1(a;\ 0)$, $A_2(a;\ 0)$, $B_1(0;\ -b)$, $B_2(0;\ b)$. Відрізки $A_1A_2=2a$ і $B_1B_2=2b$ утворюють відповідно велику й малу ***осі еліпса***.

Якщо фокуси еліпса лежать на осі Oy (рис. 3.24, *б*), то його канонічне рівняння має вигляд

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1, \quad a>b. \tag{3.23}$$

Фокусами цього еліпса є точки $F_1(0;\ -c)$ і $F_2(0;\ c)$, вершинами — точки $A_1(0;\ -a)$, $A_2(0;\ a)$, $B_1(-b;\ 0)$, $B_2(b;\ 0)$, і відрізки $A_1A_2=2a$ і $B_1B_2=2b$ утворюють відповідно велику й малу осі еліпса.

Ексцентриситетом еліпса називають величину $e=c/a$. Оскільки за означенням еліпса $a>c$, то $0<e<1$.

Ураховуючи співвідношення між параметрами $c^2=a^2-b^2$, маємо

$$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

тому

$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}.$$

З останньої рівності випливає ***геометрична інтерпретація ексцентриситету.*** При малому e числа a і b майже рівні, тому еліпс близький до кола, причому для кола $e=0$. Якщо e близький до 1, то число b дуже мале порівняно з числом a, і еліпс сильно «витягнутий» уздовж великої осі. Таким чином, ***ексцентриситет еліпса характеризує його форму.***

3.4.3. Гіпербола

➡ **Означення 3.8.** ***Гіперболою*** *називають геометричне місце точок площини, для яких модуль різниці відстаней до двох заданих точок (фокусів) є величиною сталою й меншою, ніж відстань між фокусами.*

Виведемо рівняння гіперболи. Виберемо систему координат таким чином, щоб вісь Ox проходила через фокуси F_1 і F_2, а вісь Oy — через середину відрізка F_1F_2 перпендикулярно до нього. Тоді у вибраній системі координат $F_1(-c;\ 0)$ і $F_2(c;\ 0)$. Візьмемо на гіперболі довільну точку $M(x;\ y)$ (рис. 3.25, *а*).

За означенням гіперболи відстань між фокусами $2c$ більша за різницю відстаней до фокусів $2a$, тому $a<c$ і маємо $|F_1M-F_2M|=2a$, $F_1M-F_2M=\pm 2a$. Отже,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

Аналогічно, як і у випадку еліпса, можна перетворити рівняння (що пропонується зробити самостійно) й звести його до вигляду

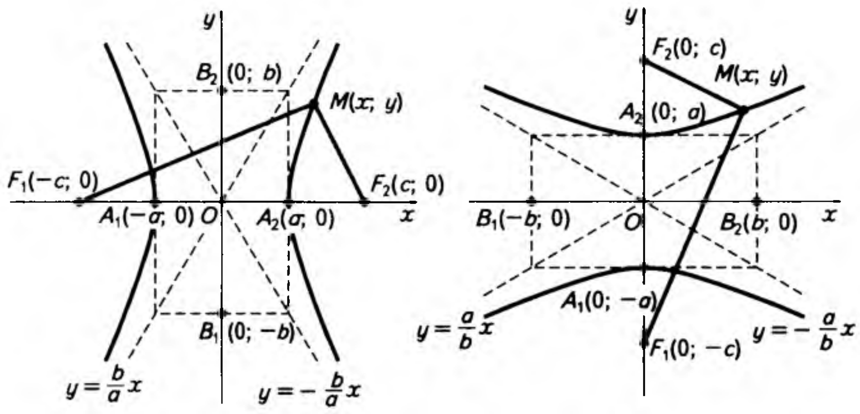
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Для гіперболи за означенням $c^2 > a^2$. Позначимо $b^2 = c^2 - a^2$. Тоді рівняння гіперболи матиме вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.24}$$

Це ***канонічне рівняння гіперболи***, фокуси якої лежать на осі Ox (рис. 3.25, *а*)

Дослідження рівняння гіперболи дає змогу визначити властивості гіперболи й побудувати її (рис. 3.25, *а*).



а *б*

Рис. 3.25

Точки $A_1(-a; 0)$ і $A_2(a; 0)$ називають ***вершинами гіперболи***. Відрізок $A_1A_2 = 2a$ утворює ***дійсну вісь*** гіперболи, а відрізок $B_1B_2 = 2b$ — її ***уявну вісь***. Прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$ є ***асимптотами гіперболи***. ***Ексцентриситет гіперболи*** $e = c/a > 1$ характеризує її форму.

Якщо фокуси гіперболи лежать на осі Oy (рис. 3.25, *б*), то її канонічне рівняння має вигляд

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1, \tag{3.25}$$

а рівняння асимптот

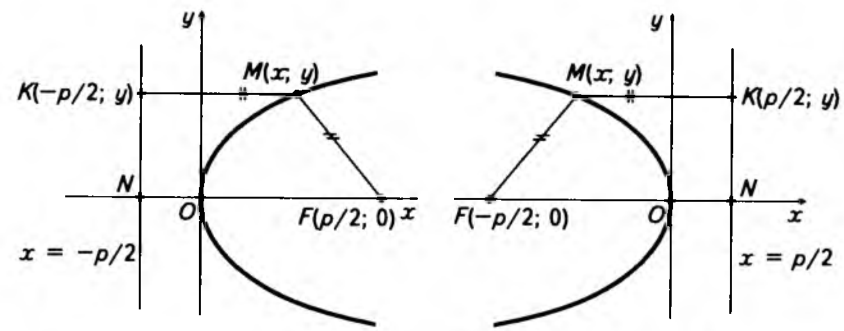
$$y = \pm\frac{a}{b}x.$$

Якщо дійсна та уявна осі гіперболи рівні, то гіперболу називають ***рівносторонньою***.

3.4.4. Парабола

Означення 3.9. ***Параболою називають геометричне місце точок площини, відстані від яких до заданої точки (фокуса) й заданої прямої (директриси) рівні.***

Виведемо рівняння параболи. Виберемо систему координат таким чином, щоб вісь Ox проходила перпендикулярно до директриси через фокус параболи — точку F. За початок координат візьмемо точку O, що є серединою відрізка FN (рис. 3.26, *а*). Відстань між фокусом і директрисою позначимо p. Тоді фокус параболи $F(p/2; 0)$, а рівняння директриси $x = -p/2$.



а *б*

Рис. 3.26

Виберемо на параболі довільну точку $M(x; y)$. За означенням $FM = KM$. Оскільки

$$FM = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}, \quad KM = \sqrt{(x + p/2)^2} = x + p/2,$$

то

$$x + p/2 = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}.$$

Піднісши до квадрата обидві частини рівності й здійснивши перетворення (пропонується зробити це самостійно), матимемо рівняння

$$y^2 = 2px, \quad p > 0, \tag{3.26}$$

яке називають ***канонічним рівнянням параболи, симетричної відносно осі Ох***, із вершиною в початку координат і вітки якої напрямлені вправо (рис. 3.26, *а*).

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Ox і вітки якої напрямлені вліво (рис. 3.26, *б*), має вигляд

$$y^2 = -2px, \quad p > 0. \tag{3.27}$$

Координати її фокуса $F(-p/2; 0)$, а рівняння директриси $x = p/2$.

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Oy і вітки якої напрямлені вгору (рис. 3.27, *а*), має вигляд

$$x^2 = 2py, \quad p > 0. \tag{3.28}$$

Координати її фокуса $F(0; p/2)$, а рівняння директриси $y = -p/2$.

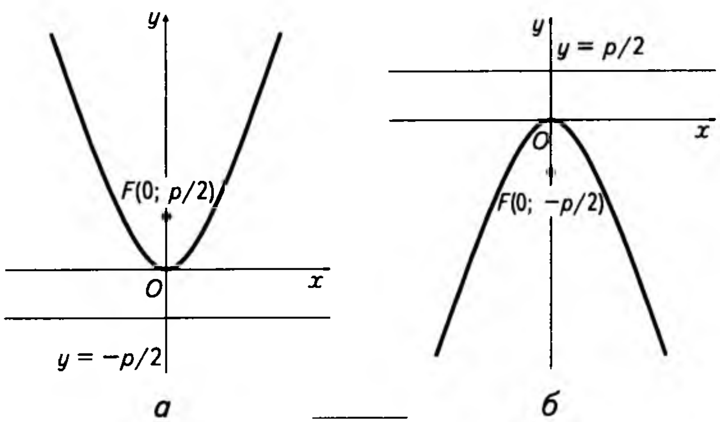


Рис. 3.27

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Oy і вітки якої напрямлені вниз (рис. 3.27, *б*), має вигляд

$$x^2 = -2py, \quad p > 0. \tag{3.29}$$

Координати її фокуса $F(0; -p/2)$, а рівняння директриси $y = p/2$.

3.5 Площина й пряма в просторі

3.5.1. Рівняння площини

Виведемо рівняння площини в тривимірному просторі. Нехай на площині P задано точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і вибрано вектор $\vec{n} = (a, b, c)$, перпендикулярний до неї (***вектор нормалі***). Візьмемо на площині P довільну точку $M(x; y; z)$. Тоді вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ перпендикулярний до вектора $\vec{n} = (a, b, c)$ (рис. 3.28).

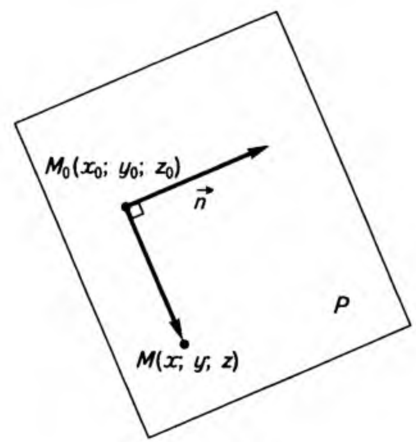


Рис. 3.28

Запишемо аналітично умову перпендикулярності цих векторів:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \tag{3.30}$$

Це ***рівняння площини, що проходить через задану точку*** $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ ***перпендикулярно до заданого вектора*** $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$.

Якщо позначити сталу величину $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, то рівняння (3.30) матиме вигляд

$$ax + by + cz + d = 0. \qquad (3.31)$$

Якщо $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, то рівняння (3.31) називають ***загальним рівнянням площини***.

Розглянемо окремі випадки рівняння (3.31).

1. $a = 0$ — площина паралельна осі Ox.
2. $b = 0$ — площина паралельна осі Oy.
3. $c = 0$ — площина паралельна осі Oz.
4. $d = 0$ — площина проходить через початок координат O.
5. $a = b = 0$ — площина перпендикулярна до осі Oz.
6. $a = c = 0$ — площина перпендикулярна до осі Oy.
7. $b = c = 0$ — площина перпендикулярна до осі Ox.
8. $a = d = 0$ — площина проходить через вісь Ox.
9. $b = d = 0$ — площина проходить через вісь Oy.
10. $c = d = 0$ — площина проходить через вісь Oz.
11. $a = b = d = 0$ — площина проходить через осі Ox, Oy (площина xOy).
12. $a = c = d = 0$ — площина проходить через осі Ox, Oz (площина xOz).
13. $b = c = d = 0$ — площина проходить через осі Oy, Oz (площина yOz).

Якщо жоден із коефіцієнтів рівняння (3.31) не дорівнює нулю, то загальне рівняння площини можна записати у вигляді

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1, \qquad (3.32)$$

де $A = -\dfrac{d}{a}$, $B = -\dfrac{d}{b}$, $C = -\dfrac{d}{c}$ — відрізки, що відтинає площина від координатних осей.

Рівняння (3.32) називають ***рівнянням площини у відрізках на осях***.

Нехай задано три точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$, які не лежать на одній прямій. Запишемо рівняння площини, що проходить через ці три точки. Перепишемо рівняння (3.31) у вигляді

$$a_k x + b_k y + c_k z + d = 0, \quad k = 1,\ 2,\ 3.$$

Віднявши почленно ці рівняння, складемо систему

$$\begin{cases} a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0, \\ a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0, \\ a(x_3 - x_1) + b(y_3 - y_1) + c(z_3 - z_1) = 0. \end{cases}$$

Оскільки ця однорідна система рівнянь має ненульовий розв'язок a, b, c, то її визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.33)$$

Це ***рівняння площини, що проходить через три задані точки***.

■ **Приклад 3.12.** *Запишемо рівняння площини, що проходить через три точки* $M_1(1;\ 2;\ 3)$, $M_2(4;\ -1;\ -2)$, $M_3(4;\ 0;\ 3)$.

Використовуючи (3.33), запишемо рівняння площини

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ 3 & -3 & -5 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, дістанемо шукане рівняння площини:

$$10x + 15y - 3z - 31 = 0.$$

3.5.2. Відстань від точки до площини

Задано площину $ax + by + cz + d = 0$ і точку $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ поза нею. Нехай точка $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ лежить на площині. Тоді відстань d від точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ до площини дорівнює модулю проекції вектора $\overline{M_0M} = (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0)$ на нормаль до площини (рис. 3.29).

Отже,

$$d = \left| \frac{\vec{n} \cdot \overline{M_0M_1}}{\vec{n}} \right| = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

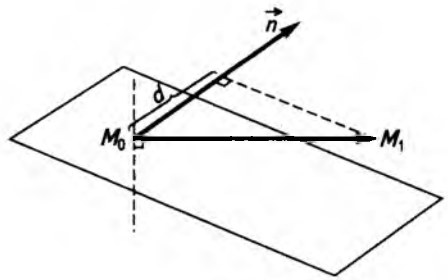


Рис. 3.29

Оскільки $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, то

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (3.34)$$

Це формула ***відстані від точки до площини***.

3.5.3. Взаємне розміщення двох площин

Нехай дві площини P_1 і P_2 задано загальними рівняннями

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

відповідно.

У разі довільного розміщення площин P_1 і P_2 у просторі один із кутів φ між ними дорівнює куту між їхніми нормальними векторами $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ і обчислюється за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

або

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \quad (3.35)$$

Другий кут дорівнює $\pi - \varphi$.

Якщо площини P_1 і P_2 перпендикулярні, то їхні нормальні вектори також перпендикулярні, й навпаки. Тому з формули (3.35) дістанемо ***умову перпендикулярності двох площин***

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0. \quad (3.36)$$

Якщо площини P_1 і P_2 паралельні, то їхні нормальні вектори колінеарні, й навпаки. Тоді їхні координати пропорційні, отже, маємо ***умову паралельності двох площин***:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}. \quad (3.37)$$

Дві площини збігаються, якщо виконується рівність

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}. \quad (3.38)$$

3.5.4. Рівняння прямої в просторі

Будь-яку пряму L у просторі можна розглядати як лінію перетину двох непаралельних площин. При цьому, якщо площини P_1 і P_2 задані загальними рівняннями, то система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

задає ***загальні рівняння прямої в просторі***.

Нехай задано точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і вектор $\vec{s} = (l, m, n)$, паралельний цій прямій. Тоді вектор $\vec{s}$ називають ***напрямним вектором прямої***.

Нехай $M(x; y; z)$ — довільна точка прямої L.

Вектор $\overline{M_0M_1} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ колінеарний вектору $\vec{s} = (l, m, n)$, тому їхні координати пропорційні:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (3.40)$$

Рівняння (3.40) задає ***канонічні рівняння прямої у просторі***.

Нехай t — коефіцієнт пропорційності векторів $\vec{s}$ і $\overrightarrow{M_0M}$, тобто $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$.

Із рівняння (3.40) маємо

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t.$$

Ці рівняння можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \quad (3.41)$$

Рівняння (3.41) задає ***параметричні рівняння прямої в просторі***.

Параметричні рівняння зручно використовувати в тих випадках, коли потрібно знайти точку перетину прямої з площиною.

■ **Приклад 3.13.** *Знайдемо точку перетину прямої* $\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{5}$ *з площиною* $x + 2y - 3z - 4 = 0$.

Запишемо рівняння прямої в параметричній формі. Припустивши, що $\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{5} = t$, дістанемо $x = 2 + 4t$, $y = 3 + 2t$, $z = -1 + 5t$.

Підставивши знайдені значення x, y, z у рівняння площини, маємо

$$2 + 4t + 2(3 + 2t) - 3(-1 + 5t) - 4 = 0.$$

Звідси $t = 1$. Підставивши значення $t = 1$ у параметричне рівняння прямої, дістанемо $x = 6$, $y = 5$, $z = 4$. Отже, (6; 5; 4) — шукана точка перетину прямої і площини.

Нехай пряму задано двома її точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Тоді вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ можна взяти за напрямний вектор прямої. Підставивши його координати в рівняння (3.40), дістанемо

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (3.42)$$

Це ***рівняння прямої, що проходить через дві задані точки***.

3.5.5. Відстань від точки до прямої. Відстань між прямими

Відстань d від точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до прямої L: $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, обчислюють за формулою

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ l & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (3.43)$$

Знайдемо відстань між двома мимобіжними прямими L_1 і L_2:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}, \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}. \quad (3.44)$$

Довжину відрізка спільного перпендикуляра до двох мимобіжних прямих, кінці якого лежать на цих прямих, називають ***відстанню між двома мимобіжними прямими***. Цю відстань можна обчислити за формулою

$$d = \left| \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}} \right|. \quad (3.45)$$

3.5.6. Взаємне розміщення двох прямих

Якщо прямі L_1 і L_2 задані рівняннями вигляду (3.44), то за довільного розміщення в просторі один із двох кутів між ними дорівнює куту φ між їхніми напрямними векторами $\vec{s}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ і $\vec{s}_2 = (l_2, m_2, n_2)$, а інший — $\pi - \varphi$.

Кут між прямими L_1 і L_2 обчислюється за формулою

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \qquad (3.46)$$

Умову паралельності прямих L_1 і L_2 дістаємо з умови колінеарності їхніх напрямних векторів $\vec{s}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ і $\vec{s}_2 = (l_2, m_2, n_2)$:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \qquad (3.47)$$

Умову перпендикулярності прямих L_1 і L_2 дістанемо з умови перпендикулярності їхніх напрямних векторів $\vec{s}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ і $\vec{s}_2 = (l_2, m_2, n_2)$:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \qquad (3.48)$$

3.5.7. Взаємне розміщення прямої й площини

Нехай задано площину P: $ax + by + cz + d = 0$ і пряму L: $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$. Знайдемо кут φ між цією прямою та заданою площиною. Обчислимо додатковий кут $\theta = \pi/2 - \varphi$ між вектором нормалі $\vec{n} = (a, b, c)$ площини та напрямним вектором прямої $\vec{s} = (l, m, n)$:

$$\cos\theta = \frac{al + bm + cn}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Якщо $\theta \le \pi/2$, то $\varphi = \pi/2 - \theta$ і $\sin\varphi = \sin(\pi/2 - \theta) = \cos\theta$ (як на рис. 3.30).

Якщо $\theta \ge \pi/2$, то $\varphi = \theta - \pi/2$ і $\sin\varphi = \sin(\theta - \pi/2) = -\cos\theta$.

У будь-якому випадкові $\sin\varphi = |\cos\theta|$. Тому справедлива рівність

$$\sin\varphi = \frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \qquad (3.49)$$

звідки випливають умови паралельності й перпендикулярності прямої та площини в просторі.

Пряма паралельна площині тільки в тому разі, коли напрямний вектор прямої $\vec{s} = (l, m, n)$ перпендикулярний до нормального вектора $\vec{n} = (a, b, c)$ площини.

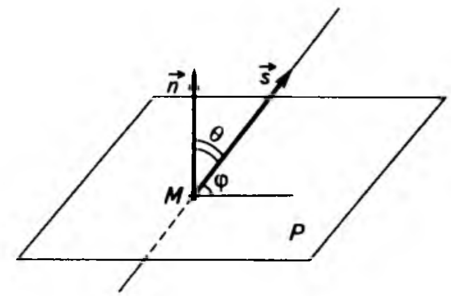


Рис. 3.30

Звідси дістанемо ***умову паралельності прямої й площини в просторі***:

$$al + bm + cn = 0. \qquad (3.50)$$

Пряма перпендикулярна до площини тоді й лише тоді, коли її напрямний вектор $\vec{s} = (l, m, n)$ колінеарний нормальному векторові $\vec{n} = (a, b, c)$ площини. Звідси дістанемо ***умову перпендикулярності прямої й площини в просторі***:

$$\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}. \qquad (3.51)$$

?

Контрольні запитання

1. Як на площині й у просторі задається прямокутна (декартова) система координат?
2. Як на площині можна задати лінію?
3. Як записується рівняння лінії в загальному випадкові?
4. Як задається пряма на площині?
5. Які є види рівняння прямої на площині?

6. За якою формулою обчислюють кут між двома прямими на площині?
7. За якою формулою обчислюють відстані від точки до прямої?
8. Як можуть розміщуватися дві прямі на площині?
9. Які необхідні й достатні умови паралельності двох прямих на площині?
10. Які необхідні й достатні умови перпендикулярності двох прямих на площині?
11. Як записують рівняння кола з центром у точці $C(a;\ b)$ і радіусом R?
12. Як записують канонічне рівняння еліпса?
13. Яким чином будують еліпс?
14. Який геометричний зміст параметрів, що входять у канонічне рівняння еліпса?
15. Як залежить форма еліпса від його ексцентриситету?
16. Як записують канонічне рівняння гіперболи та рівняння її асимптот?
17. Який геометричний зміст параметрів, що входять у канонічне рівняння гіперболи?
18. Як залежить форма гіперболи від його ексцентриситету?
19. Які гіперболи називають рівносторонніми?
20. Який вигляд має канонічне рівняння параболи, симетричної відносно осі Ox?
21. Який вигляд має канонічне рівняння параболи, симетричної відносно осі Oy?
22. Які є види рівняння площини в просторі?
23. Як можуть розміщуватися дві площини в просторі?
24. За якою формулою обчислюють кут між двома площинами?
25. Які умови паралельності й перпендикулярності двох площин?
26. Які є види рівняння прямої в просторі?
27. Як можуть розміщуватися дві прямі в просторі?
28. За якою формулою обчислюють кут між двома прямими в просторі?
29. Які умови паралельності та перпендикулярності двох прямих у просторі?

30. Як можуть розміщуватися пряма й площина в просторі?
31. За якою формулою обчислюють кут між прямою та площиною?
32. Які умови паралельності й перпендикулярності прямої та площини?
33. За якою формулою обчислюють відстань від точки до площини?
34. За якою формулою обчислюють відстань між двома точками в просторі?
35. У чому полягає суть економічної моделі рівноваги ринку?
36. Що таке рівноважна ціна, точка рівноваги?
37. Як знаходять рівноважну ціну в економічній моделі рівноваги ринку за умови, що функції попиту й пропозиції лінійні?
38. У чому полягає суть економічної моделі рівноваги та збитків компанії?
39. Як визначаються бюджетна множина, її межа й лінії бюджетного обмеження?

Приклади розв'язування задач

1 ***Обчислити відстань між точками $M_1(-2;\ 3)$ і $M_2(-8;\ -5)$ та відстань від точки M_1 до початку координат.***

Користуючися формулою відстані між двома точками, дістаємо

$$M_1M_2 = \sqrt{(-8-(-2))^2 + (-5-3)^2} = 10;$$

$$M_1O = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

2 ***На осях координат знайти точки, рівновіддалені від точок $A(1;\ 1)$ і $B(3;\ 7)$.***

Нехай M_1 і M_2 — шукані точки, причому точка M_1 лежить на осі Ox (тоді її координати $(x;\ 0)$), а точка M_2 — на осі Oy (її координати $(0;\ y)$).

Оскільки точки M_1 і M_2 рівновіддалені від точок A і B, то відстані $M_1A = M_1B$ і $M_2A = M_2B$.

Скориставшися формулою відстані між двома точками, маємо

$$\sqrt{(1-x)^2+(1-0)^2}=\sqrt{(3-x)^2+(7-0)^2},$$

$$\sqrt{(1-0)^2+(1-y)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(7-y)^2}.$$

Розв'язуючи рівняння, знаходимо $x = 14$; $y = 14/3$.

Тоді $M_1(14; 0)$, $M_2(0; 14/3)$.

3 ***Задано залежності попиту q і пропозиції s від ціни p:***

$$q = 400 - 5p,\quad s = 100 + 5p.$$

Знайти рівноважну ціну й доход за рівноважної ціни.

Точка рівноваги визначається з рівності попиту та пропозиції на ринку: $q(p) = s(p)$. Тому $400 - 5p = 100 + 5p$, звідки $p = 30$. Отже, рівноважна ціна $p = 30$.

Доход за рівноважної ціни становить

$$R(30) = q(30)\,30 = 7500.$$

4 ***Три послідовні вершини паралелограма мають координати*** $A(3; -3)$, $B(-1; 1)$, $C(-1; 6)$. ***Знайти координати четвертої вершини D (рис. 3.31).***

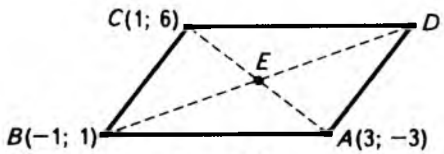


Рис. 3.31

Відомо, що діагоналі паралелограма в точці перетину E діляться навпіл. Знайдемо цю точку як середину відрізка AC:

$$x_E=\frac{3+1}{2}=2;\quad y_E=\frac{-3+6}{2}=\frac{3}{2}.$$

Таким чином, $E(2; 3/2)$.

Якщо x_D і y_D — координати точки D, то дістанемо рівняння

$$2=\frac{-1+x_D}{2};\quad 4=-1+x_D;\quad x_D=5;\quad \frac{3}{2}=\frac{1+y_D}{2};\quad 3=1+y_D;\quad y_D=2.$$

Отже, вершина $D(5; 2)$.

5 ***Дано координати середин сторін трикутника*** $E(7; 8)$, $F(-4; 5)$, $K(1; -4)$ ***(рис. 3.32). Визначити координати вершин трикутника.***

Нехай $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ — шукані вершини трикутника. Точка E — середина сторони AB: $2x + y - 7 = 0$. Тоді

$$x_E=\frac{x_A+x_B}{2};\quad y_E=\frac{y_A+y_B}{2},$$

або

$$7=\frac{x_A+x_B}{2};\quad 8=\frac{y_A+y_B}{2},$$

або

$$x_A+x_B=14;\quad y_A+y_B=16.$$

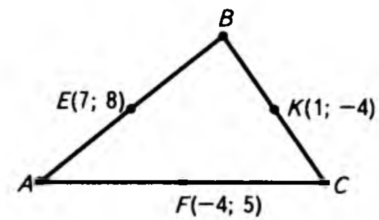


Рис. 3.32

Точка F — середина сторони AC. Тоді

$$x_F=\frac{x_A+x_C}{2};\quad y_F=\frac{y_A+y_C}{2}$$

або

$$-4=\frac{x_A+x_C}{2};\quad 5=\frac{y_A+y_C}{2}$$

або

$$x_A+x_C=-8;\quad y_A+y_C=10.$$

Точка K — середина сторони BC: $y + 1 = -2(x - 4)$. Тоді

$$x_K=\frac{x_B+x_C}{2};\quad y_K=\frac{y_B+y_C}{2},$$

або

$$1=\frac{x_B+x_C}{2};\quad -4=\frac{y_B+y_C}{2},$$

або

$$x_B+x_C=2;\quad y_B+y_C=-8.$$

Таким чином, для визначення шести невідомих дістали дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 14, \\ x_A + x_C = -8, \\ x_B + x_C = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} y_A + y_B = 16, \\ y_A + y_C = 10, \\ y_B + y_C = -8. \end{cases}$$

Розв'яжемо першу систему. Додавши почленно рівняння, маємо

$$2(x_A + x_B + x_C) = 8, \text{ або } x_A + x_B + x_C = 4.$$

З третього рівняння системи дістанемо $x_A = 2$, з другого — $x_B = 12$, із першого — $x_C = -10$.

Отже, $x_A = 2$, $x_B = 12$, $x_C = -10$.

Аналогічно розв'язуючи другу систему, дістаємо

$$y_A = 17, \; y_B = -1, \; y_C = -7.$$

Отже, вершини трикутника $A(2; 17)$, $B(12; -1)$, $C(-10; -7)$.

6 *Вершини трикутника знаходяться в точках $A(3; -5)$, $B(-3; 3)$, $C(-1; -2)$ (рис. 3.33). Визначити довжину бісектриси його внутрішнього кута, проведеної з вершини A.*

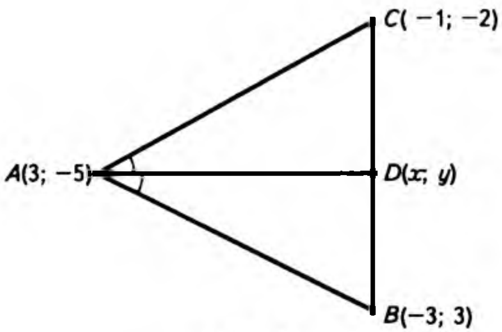


Рис. 3.33

Відомо, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на частини, пропорційні довжинам прилеглих сторін. Знайдемо довжини цих сторін:

$$AB = \sqrt{(-3-3)^2 + (3+5)^2} = 10,$$

$$AC = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2+5)^2} = 5.$$

Якщо $D(x; y)$ — точка перетину бісектриси й сторони BC, то вона ділить цю сторону у відношенні

$$\lambda = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{10}{5} = 2.$$

Тепер знаходимо координати точки D:

$$x = \frac{-3 + 2(-1)}{1+2} = -\frac{5}{3}; \quad y = \frac{3 + 2(-2)}{1+2} = -\frac{1}{3}.$$

Довжина бісектриси

$$AD = \sqrt{\left(-\frac{5}{3} - 3\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} + 5\right)^2} = \frac{14\sqrt{2}}{3}.$$

7 *Знайти координати точки перетину медіан трикутника, якщо його вершинами є точки $A(7; 4)$, $B(-1; 8)$, $C(-12; -1)$.*

Відомо, що медіани трикутника перетинаються в одній точці M, яка ділить кожну з медіан у відношенні 2 : 1, рахуючи від відповідної вершини трикутника.

Знайдемо координати точки D — середини сторони BC:

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2}; \quad y_D = \frac{y_B + y_C}{2}.$$

Визначаємо координати точки M, яка ділить медіану AD у відношенні $\lambda = 2 : 1 = 2$ (від A до D):

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_D}{1+\lambda} = \frac{x_A + 2\frac{x_B + x_C}{2}}{1+2} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3};$$

$$y_M = \frac{y_A + \lambda y_D}{1+\lambda} = \frac{y_A + 2\frac{y_B + y_C}{2}}{1+2} = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Таким чином, координати точки перетину медіан трикутника дорівнюють середньому арифметичному однойменних координат його вершин.

Підставляючи в ці формули координати заданих точок A, B і C, маємо

$$x_M = \frac{7 - 1 - 12}{3} = -\frac{6}{3} = -2; \quad y_M = \frac{-4 + 8 - 1}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

Отже, точка $M(-2; 1)$.

8 *Побудувати пряму, задану рівнянням*

$$x - 2y - 4 = 0.$$

Спосіб 1. Пряма на площині визначається двома точками. Знайдемо точки A і B її перетину з осями координат. Якщо A — точка перетину з віссю Ox, то її ордината дорівнює нулю. Отже, для відшукання її абсциси підставимо в рівняння прямої значення $y = 0$ і дістанемо $x = 4$. Якщо B — точка перетину з віссю Oy, то її абсциса дорівнює нулю. Отже, підставивши в рівняння прямої значення $x = 0$, дістанемо $y = -2$.

Побудуємо знайдені точки $A(4;\ 0)$ і $B(0;\ -2)$ і проведемо через них пряму (рис. 3.34).

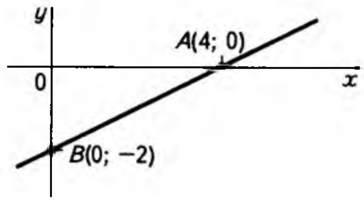


Рис. 3.34

Спосіб 2. Пряму задано загальним рівнянням. Запишемо це рівняння у відрізках на осях. Для цього вільний член перенесемо в праву частину рівняння і обидві його частини поділимо на чотири:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1.$$

Побудуємо відрізки, які пряма відтинає на осях координат. Для цього відкладемо від початку координат управо по осі Oy чотири одиниці й униз по осі Oy — дві одиниці. Дістанемо точки A і B, через які проведемо пряму AB.

9 ***Визначити площу S і периметр p трикутника, утвореного прямою $3x - 4y - 12 = 0$ та осями координат.***

Загальне рівняння прямої перетворимо на рівняння прямої у відрізках на осях:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1.$$

Пряма відтинає на осях координат відрізки довжиною в 4 і –3 од. відповідно.

Отже,

$$S = \frac{1}{2} 4 \cdot 3 = 6 \text{ кв. од.}$$

Для визначення периметра трикутника знайдемо довжину c його гіпотенузи:

$$c = \sqrt{(4-0)^2 + (0+3)^2} = 5.$$

Тоді

$$p = 4 + 3 + 5 = 12 \text{ од.}$$

10 ***Записати рівняння прямої, паралельної бісектрисі другого координатного кута, яка відтинає на від'ємній півосі Oy відрізок, що дорівнює 4 од.***

Шукана пряма як бісектриса другого координатного кута утворює з віссю Ox кут, що дорівнює $3\pi/4$. Тому кутовий коефіцієнт $k = \operatorname{tg}(3\pi/4) = -1$. Крім того, відомо, що $b = -4$. Тоді можна записати рівняння прямої у вигляді

$$y = -x - 4.$$

11 ***Обчислити кут між прямими:***

① $y = 3x$ *і* $y = -2x + 5$;

② $y = 4x - 7$ *і* $y = -x/4 + 2$;

③ $y = 5x - 3$ *і* $y = 5x + 8$.

① Оскільки $k_1 = 3$, $k_2 = -2$, то

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-2-3}{1-6} = 1.$$

Кут між прямими $y = 3x$ і $y = -2x + 5$ дорівнює $\pi/4$.

② При $k = 4$, $k_2 = -\frac{1}{4}$

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-\frac{1}{4} - 4}{1 - 1},$$

тобто $\operatorname{tg} \varphi$ не існує, отже $\varphi = \pi/2$.

③ При $k_1 = 5$, $k_2 = 5$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{5-5}{1+25} = 0.$$

Отже, $\varphi = 0$.

12 ***Визначити кут між гіпотенузою, яка лежить на прямій $y = -\sqrt{3}x + 1$, і катетом прямокутного трикутника, що лежить на прямій $y = \sqrt{3}x - 5$.***

За умовою задачі $k_1 = -\sqrt{3}$, $k_2 = \sqrt{3}$. Тоді

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\sqrt{3}} = -\sqrt{3},$$

звідки кут $\varphi = 2\pi/3 > \pi/2$.

Оскільки кут між прямими, на яких лежать гіпотенуза й катет трикутника, гострий, то задано значення зовнішнього кута трикутника, суміжного з шуканим. Тоді шуканий кут дорівнює $\pi - \varphi = \pi/3$.

13 *Записати рівняння прямих, на яких лежать катети рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо відомі рівняння прямої, на якій лежить гіпотенуза* $3x - y + 5 = 0$, *і вершина прямого кута* $C(4; -1)$.

Оскільки трикутник прямокутний і рівнобедрений, то його гострі кути дорівнюють $\pi/4$. Позначимо через $k_2 = 3$ кутовий коефіцієнт прямої, на якій лежить гіпотенуза, а через k_1 — кутовий коефіцієнт тієї прямої, на якій лежить один із катетів трикутника й яка утворює з прямою, що визначає гіпотенузу, кут $\varphi = \pi/4$. Тоді $\operatorname{tg}\varphi = 1$. Отже,

$$1 = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}, \quad 1 = \frac{3 - k_1}{1 + 3k_1}, \quad k_1 = \frac{1}{2}.$$

Знаючи кутовий коефіцієнт прямої і точку, через яку вона проходить, запишемо її рівняння: $y + 1 = \frac{1}{2}(x - 4)$, або $x - 2y - 6 = 0$. Оскільки прямі, на яких лежать катети, перпендикулярні, то кутовий коефіцієнт k_3 прямої, на якій лежить другий катет, визначимо зі співвідношення $k_3 = -\frac{1}{k_1}$; $k = -2$. Знаючи кутовий коефіцієнт і точку, через яку проходить пряма, запишемо її рівняння: $y + 1 = -2(x - 4)$, або $2x + y - 7 = 0$. Отже, рівняння шуканих прямих

$$x - 2y - 6 = 0 \text{ і } 2x + y - 7 = 0.$$

14 *Основа рівнобедреного трикутника лежить на прямій* $x - 2y = 0$, *а одна з бічних сторін — на прямій* $x + y - 3 = 0$. *Записати рівняння прямої, на якій лежить друга бічна сторона, знаючи, що вона проходить через точку* $M(1; -1)$.

Позначимо через $k_1 = 1/2$ кутовий коефіцієнт прямої, на якій лежить основа трикутника, через $k_2 = -1$ — кутовий коефіцієнт прямої, на якій лежить задана бічна сторона. Тангенс кута φ між прямими, на яких лежить основа й задана бічна сторона, визначаємо за формулою $\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-1 - 1/2}{1 - 1/2} = -3.$$

Оскільки кут між прямими, на яких лежать основа й друга бічна сторона, дорівнює $\pi - \varphi$ (рис. 3.35), то тангенс кута між ними $\operatorname{tg}(\pi - \varphi) = -\operatorname{tg}\varphi = 3$.

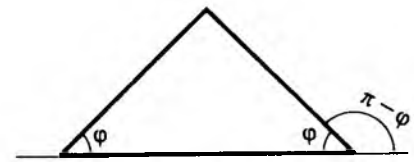


Рис. 3.35

Якщо k_3 — кутовий коефіцієнт прямої, на якій лежить шукана бічна сторона, то

$$3 = \frac{k_3 - k_1}{1 + k_1k_3} = \frac{k_3 - 1/2}{1 + k_3/2},$$

звідки $k_3 = -7$.

Запишемо рівняння шуканої прямої, що проходить через точку $M(1; -1)$ і в даному напрямі ($k_3 = -7$), на якій лежить бічна сторона:

$$y + 1 = -7(x - 1), \text{ або } 7x + y - 6 = 0.$$

15 *Записати рівняння прямої, що проходить через початок координат і точку* $(-1; 8)$.

Шукана пряма проходить через дві точки $(0; 0)$ і $(-1; 8)$. Її рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{x - 0}{-1 - 0} = \frac{y - 0}{8 - 0}, \text{ або } y = -8x.$$

16 *Задано вершини трикутника* $A(1; -2)$, $B(5; 4)$ *і* $C(-2; 0)$. *Записати рівняння бісектриси його внутрішнього кута при вершині* A.

Відомо, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на частини, пропорційні довжинам протилежних сторін. Тоді $BM/MC = AB/AC$.

Точка M перетину бісектриси AM зі стороною BC ділить відрізок BC у відношенні $\lambda = AB/AC$. Знайдемо відстані між точками A і B та A і C:

$$AB = \sqrt{(5 - 1)^2 + (4 + 2)^2} = \sqrt{52},$$

$$AC = \sqrt{(-2-1)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{13},$$

$$\lambda = \sqrt{52}/\sqrt{13} = 2.$$

Знайдемо координати точки M:

$$x = \frac{5+2(-2)}{1+2} = \frac{1}{3};\quad y = \frac{4+2\cdot 0}{1+2} = \frac{4}{3},\quad M\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Запишемо рівняння бісектриси AM:

$$\frac{x-1}{1/3-1} = \frac{y+2}{4/3+2},\quad \text{або}\quad 5x + y - 3 = 0.$$

17 *Установити, які з пар прямих паралельні, збігаються або перетинаються (в останньому випадку знайти точку їх перетину):*

① $x + y - 3 = 0$ *і* $2x + 3y - 8 = 0$;

② $y = x + 5$ *і* $2x - 2y + 3 = 0$;

③ $y = \frac{1}{2}x + 2$ *і* $-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = 1$.

① Прямі задані своїми загальними рівняннями. Тому зручно порівнювати відношення їхніх коефіцієнтів $A_1/A_2 = 1/2$, $B_1/B_2 = 1/3$. Оскільки $A_1/A_2 \neq B_1/B_2$, то прямі перетинаються. Для знаходження точки перетину розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ 2x + 3y - 8 = 0, \end{cases}$$

звідки $x = 1$, $y = 2$.

Отже, точка перетину (1; 2).

② Перетворимо рівняння другої прямої на рівняння з кутовим коефіцієнтом $y = x + 3/2$. У даних прямих рівні кутові коефіцієнти $k_1 = k_2 = 1$, а вільні члени не рівні: $b_1 = 5$, $b_2 = 3/2$.

Отже, прямі паралельні.

③ Перетворимо друге рівняння на рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $y = \frac{1}{2}x + 2$. У даних прямих кутові коефіцієнти $k_1 = k_2 = 1$ і вільні члени $b_1 = b_2 = 2$.

Отже, прямі збігаються.

18 *Записати рівняння прямої, на якій лежить перпендикуляр, установлений у точці перетину прямих*

$$4x + 3y - 5 = 0 \;\; і \;\; 8x - 5y + 23 = 0,$$

до першої прямої.

Знайдемо точку $A(x; y)$ перетину прямих, розв'язавши систему

$$\begin{cases} 4x + 3y - 5 = 0, \\ 8x - 5y + 23 = 0. \end{cases}$$

Маємо $A(-1; 3)$.

Визначимо кутовий коефіцієнт k_1 першої прямої: $k_1 = -4/3$.

Оскільки шукана пряма перпендикулярна до першої заданої прямої, то її кутовий коефіцієнт $k_2 = -1/k_1 = 3/4$. Знаючи кутовий коефіцієнт і точку, через яку проходить шукана пряма, запишемо її рівняння:

$$y - 3 = \frac{3}{4}(x+1),\quad \text{або}\quad 3x - 4y + 15 = 0.$$

19 *Знайти координати точки, симетричної точці $M(-2; 9)$ відносно прямої*

$$2x - 3y + 18 = 0.$$

Якщо N — точка, симетрична точці M відносно прямої $2x - 3y + 18 = 0$, то точки M і N лежать на прямій MN, перпендикулярній до даної прямої, й рівновіддалені від цієї прямої, тобто $MP = PN$, де точка P — проекція точки M на задану пряму $2x - 3y + 18 = 0$ (рис. 3.36).

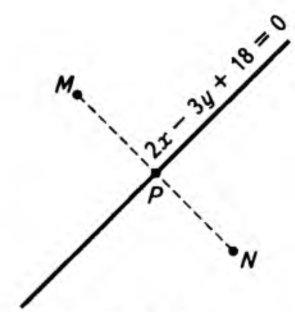


Рис. 3.36

Запишемо рівняння прямої MN. Оскільки кутовий коефіцієнт даної прямої $k_1 = 2/3$, то кутовий коефіцієнт прямої MN становить $k_2 = -1/k_1 = -3/2$. Оскільки пряма проходить через точку $M(-2; 9)$, то рівняння прямої MN

$$y - 9 = -\frac{3}{2}(x+2),\quad \text{або}\quad 3x + 2y - 12 = 0.$$

Знайдемо координати точки P як точки перетину даної прямої та прямої MN. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 3y + 18 = 0, \\ 3x + 2y - 12 = 0. \end{cases}$$

Точка P має координати $P(0; 6)$ і ділить відрізок MN навпіл. Зі співвідношень $0 = \frac{-2+x}{2}$ і $6 = \frac{9+y}{2}$ знаходимо координати точки N: $x = 2$, $y = 3$.

Отже, $N(2; 3)$.

20 *На прямій* $2x + y - 6 = 0$ *знайти точку* M, *рівновіддалену від точок* $A(3; 5)$ *і* $B(2; 6)$.

Позначимо координати точки $M(x_0; y_0)$. Тоді

$$MA = \sqrt{(x_0 - 3)^2 + (y_0 - 5)^2}, \quad MB = \sqrt{(x_0 - 2)^2 + (y_0 - 6)^2}.$$

Оскільки $MA = MB$, то

$$\sqrt{(x_0 - 3)^2 + (y_0 - 5)^2} = \sqrt{(x_0 - 2)^2 + (y_0 - 6)^2}.$$

Після піднесення до квадрата й спрощень дістаємо $x_0 - y_0 + 3 = 0$.

Точка $M(x_0; y_0)$ належить прямій $2x + y - 6 = 0$. Отже, її координати задовольняють це рівняння.

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} x_0 - y_0 + 3 = 0, \\ 2x_0 + y_0 - 6 = 0, \end{cases}$$

дістаємо $x_0 = 1$, $y_0 = 4$.

Отже, $M(1; 4)$.

21 *Знайти відстань від точки* $M(-1; 5)$ *до прямої*

$$4x + 3y - 5 = 0.$$

Використовуючи формулу відстані від точки до прямої, маємо

$$d = \frac{|4(-1) + 3 \cdot 5 - 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{6}{5}.$$

22 *Знайти відстань між паралельними прямими*

$$3x + 4y - 18 = 0 \ \text{та} \ 3x + 4y + 43 = 0.$$

Візьмемо на прямій $3x + 4y - 18 = 0$ довільну точку, наприклад $(6; 0)$, і знайдемо відстань від неї до другої прямої:

$$d = \frac{|3 \cdot 6 + 4 \cdot 0 + 43|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{61}{5}.$$

Це і є відстань між даними паралельними прямими.

23 *Записати рівняння прямої, на якій лежать бісектриси кутів між прямими*

$$3x - 4y + 7 = 0 \ \text{і} \ 5x + 12y - 1 = 0.$$

Бісектриса — це геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін кута. Отже, якщо $M(x; y)$ — довільна точка бісектриси, то відстані d_1 і d_2 від точки M до двох заданих прямих рівні між собою: $d_1 = d_2$. Знайдемо ці відстані:

$$d_1 = \frac{|3x - 4y + 7|}{5}, \quad d_2 = \frac{|5x + 12y - 1|}{13}.$$

Запишемо рівність

$$\frac{1}{5}|3x - 4y + 7| = \frac{1}{13}|5x + 12y - 1|,$$

або

$$\frac{1}{5}(3x - 4y + 7) = \pm\frac{1}{13}(5x + 12y - 1).$$

Звідси дістанемо рівняння бісектриси:

$$\frac{1}{5}(3x - 4y + 7) = \frac{1}{13}(5x + 12y - 1), \quad \text{або} \quad 7x - 56y + 48 = 0,$$

$$\frac{1}{5}(3x - 4y + 7) = -\frac{1}{13}(5x + 12y - 1), \quad \text{або} \quad 32x + 4y + 43 = 0.$$

24 *За яких значень параметра* a *пряма*

$$(a + 2)x + (a^2 - 9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$$

① *паралельна осі* Ox;

② *паралельна осі* Oy;

③ *проходить через початок координат?*

① Якщо пряма паралельна осі Ox, то в її рівнянні коефіцієнт при x дорівнює нулю, тобто $a + 2 = 0$, $a = -2$.

② Якщо пряма паралельна осі Oy, то $a^2 - 9 = 0$. Отже, $a = 3$ і $a = -3$.

③ Якщо пряма проходить через початок координат, то $x = 0$ і $y = 0$ задовольняють її рівняння. Тому $3a^2 - 8a + 5 = 0$. Розв'язавши це рівняння, знайдемо два значення: $a = 5/3$ і $a = 1$.

25 *Записати рівняння прямих, на яких розміщені сторони трикутника ABC, знаючи координати вершини $A(1;\ 3)$ та рівняння двох його медіан*

$$y - 1 = 0 \ \ i \ \ x - 2y + 1 = 0.$$

Легко перевірити, що задані медіани не проходять через точку A. Нехай $x - 2y + 1 = 0$ — рівняння медіани BB_1, а $y - 1 = 0$ — рівняння медіани CC_1. Точки B і C мають координати $B(x_B;\ y_B)$, $C(x_C;\ y_C)$. Тоді координати точки B_1

$$x_{B_1} = \frac{1}{2}(1 + x_C); \quad y_{B_1} = \frac{1}{2}(3 + y_C);$$

координати точки C_1

$$x_{C_1} = \frac{1}{2}(1 + x_B); \quad y_{C_1} = \frac{1}{2}(3 + y_B).$$

Точка B_1 належить медіані CC_1, тому її координати задовольняють рівняння $\frac{1}{2}(1 + x_C) - (3 + y_C) + 1 = 0$.

Точка C_1 лежить на медіані BB_1, тому її координати задовольняють рівняння $\frac{1}{2}(3 + y_C) - 1 = 0$. Крім того, медіана CC_1 проходить через точку C, а тому $y_C - 1 = 0$, а медіана BB_1 — через точку B, тобто $x_B - 2y_B + 1 = 0$. Таким чином, дістали системи рівнянь

$$\begin{cases} x_C - 2y_C - 3 = 0, \\ y_C - 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_B - 2y_B + 1 = 0, \\ y_B + 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши їх, матимемо

$$x_B = -3; \ \ y_B = -1; \ \ x_C = 5; \ \ y_C = 1.$$

Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві задані точки, знаходимо рівняння сторін трикутника.

26 *Записати рівняння сторін трикутника ABC, якщо задано координати однієї з його вершин $B(-4;\ -5)$ і рівняння прямих, на яких лежать дві його висоти:*

$$5x + 3y - 4 = 0 \ \ та \ \ 3x + 8y + 13 = 0.$$

Легко переконатися в тому, що координати точки $B(-4;\ -5)$ не задовольняють задані рівняння. Справді,

$$5(-4) + 3(-5) - 4 \neq 0, \ \ (-4)3 + 8(-5) + 13 \neq 0.$$

Нехай рівняння $5x + 3y - 4 = 0$ задає пряму, на якій лежить висота AK, рівняння $3x + 8y + 13 = 0$ — пряму, на якій лежить висота CZ. Пряма BC проходить через точку B перпендикулярно до прямої AK. Використаємо таку форму рівняння прямої: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Тут x_0 і y_0 — координати точки $B(-4;\ -5)$. Кутовий коефіцієнт k задовольняє співвідношення $kk_1 = -1$, де k_1 — кутовий коефіцієнт прямої AK. Але $k_1 = -5/3$, тому $k = 3/5$.

Рівняння прямої, на якій лежить сторона BC, має вигляд

$$y + 5 = \frac{3}{5}(x + 4).$$

Аналогічно знаходимо рівняння прямої, на якій лежить сторона AB, як прямої, що проходить через точку B перпендикулярно до висоти CZ. Це рівняння має вигляд

$$y + 5 = \frac{8}{3}(x + 4).$$

Для того щоб записати рівняння прямої AC, знайдемо координати точок A і C. Точку A можна розглядати як точку перетину прямих AB і AK, тому її координати є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} y + 5 = \frac{8}{3}(x + 4), \\ 5x + 3y - 4 = 0. \end{cases}$$

Легко переконатися в тому, що координати точки A: $x = -1$; $y = 3$ є розв'язком системи.

Аналогічно координати точки C знаходимо як розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} y + 5 = \frac{3}{5}(x + 4), \\ 3x + 8y + 13 = 0. \end{cases}$$

Координати точки C: $x = 1$; $y = -2$ є розв'язком системи. Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві задані точки A і C, маємо рівняння прямої AC:

$$\frac{x + 1}{2} = \frac{y - 3}{-5}, \ \text{або} \ 5x + 2y - 1 = 0.$$

27 *Записати рівняння прямих, на яких лежать катети прямокутного рівнобедреного трикутника, знаючи координати вершини* $C(5; -1)$ *прямого кута й рівняння гіпотенузи*

$$2x - 3y + 5 = 0.$$

Даний прямокутний трикутник рівнобедрений, тому катети утворюють із гіпотенузою кути, що дорівнюють $\pi/4$. Кутовий коефіцієнт прямої, на якій лежить гіпотенуза, $k_1 = 2/3$. Позначимо кутовий коефіцієнт прямої, на якій лежить катет, через k. За формулою $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$, де φ — кут, утворений прямими, дістанемо

$$1 = \pm\frac{k - 2/3}{1 + 2/3k}.$$

Звідси знаходимо два кутових коефіцієнти. Тоді рівняння прямих, на яких лежать катети,

$$y + 1 = 5(x - 5) \quad \text{і} \quad y + 1 = -\frac{1}{5}(x - 5).$$

28 *Компанія випускає продукцію й продає її по 7 грн. за одиницю. Керівництво компанії встановило, що сума загальних щотижневих витрат на виготовлення продукції в кількості x (тис. од.) має таку закономірність:* $y_в = 1000 + 5x$. *Знайти точку рівноваги та області прибутку й збитків компанії.*

Оскільки доход від продажу x тис. виробів продукції вартістю 7 грн. за одиницю буде $y_д = 7x$, то для рівноваги доходу й витрат потрібно, щоб виконувалася рівність $y_д = y_в$. Тому $1000 + 5x = 7x$, або $2x = 1000$, або $x = 500$.

Отже, при $x = 500$ прибуток компанії $P = 0$. Якщо компанія виробляє менше, ніж 500 одиниць продукції, то вона несе збитки. Якщо компанія вироблятиме більш як 500 одиниць продукції, то одержуватиме прибуток.

29 *Записати рівняння кола з центром у точці* $(1/2; -3/4)$ *і з радіусом, що дорівнює* 2. *Побудувати це коло.*

За умовою задачі $a = 1/2$, $b = -3/4$ і $r = 2$. Підставивши ці значення в канонічне рівняння кола, маємо

$$(x - 1/2)^2 + (y - (-3/4))^2 = 4, \quad \text{або} \quad (x - 1/2)^2 + (y + 3/4)^2 = 4.$$

Побудуємо коло. Будуємо його центр $C(1/2; -3/4)$, з якого радіусом, що дорівнює 2, описуємо коло (рис. 3.37).

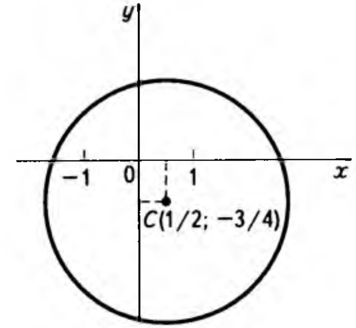


Рис. 3.37

Отже, рівняння кола

$$(x - 1/2)^2 + (y + 3/4)^2 = 4.$$

30 *Записати рівняння кола, що має центр у точці* $(5; -7)$ *і проходить через точку* $(2; -3)$.

Знайдемо радіус кола як відстань від центра до заданої його точки:

$$r = \sqrt{(2 - 5)^2 + (-3 - (-7))^2} = 5.$$

Тепер у рівняння кола підставимо координати центра й значення радіуса:

$$(x - 5)^2 + (y + 7)^2 = 25.$$

31 *Знайти координати центра й радіус кола*

$$x^2 + y^2 - 4x - 14y + 17 = 0.$$

Перепишемо дане рівняння:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 14y + 49 + 17 - 4 - 49 = 0,$$

або

$$(x - 2)^2 + (y - 7)^2 - 36 = 0,$$

або

$$(x - 2)^2 + (y - 7)^2 = 6^2.$$

Порівнюючи це рівняння з канонічним рівнянням кола, дістанемо: $a = 2$, $d = 7$ і $r = 6$. Отже, центр кола знаходиться в точці $(2; 7)$; його радіус дорівнює 6.

32 *Записати рівняння кола, що проходить через точки $A(3;\ 1)$, $B(-2;\ 6)$ і $C(-5;\ -3)$.*

Нехай $O_1(a;\ b)$ — центр шуканого кола. Тоді $O_1A = O_1B = O_1C$ як радіуси одного кола. Маємо

$$O_1A = \sqrt{(a-3)^2 + (b-1)^2},$$

$$O_1B = \sqrt{(a+2)^2 + (b-6)^2},$$

$$O_1C = \sqrt{(a+5)^2 + (b+3)^2}.$$

Складемо систему рівнянь відносно невідомих a та b і розв'яжемо її:

$$\begin{cases} \sqrt{(a-3)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{(a+2)^2 + (b-6)^2}, \\ \sqrt{(a-3)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{(a+5)^2 + (b+3)^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} a - b + 3 = 0, \\ 2a + b + 3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок системи: $a = -2$, $b = 1$. Отже, точка $O_1(-2;\ 1)$ є центром кола.

Знаходимо радіус кола: $r = O_1A = \sqrt{(-2-3)^2 + (1-1)^2} = 5.$

Отже, шукане рівняння кола має вигляд

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25.$$

33 *Записати рівняння кола, центр якого знаходиться в точці $C(1;\ -1)$ і пряма $5x - 12y + 9 = 0$ є дотичною до кола.*

Радіус кола — відстань від точки C до дотичної — становить

$$R = \frac{|5\cdot 1 - 12(-1) + 9|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = 2.$$

Рівняння кола запишемо у вигляді

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4.$$

34 *Записати рівняння кола, яке дотикається до осей координат і проходить через точку $A(18;\ -4)$.*

Центр шуканого кола, яке дотикається до осей координат і проходить через точку A, розташовану в IV квадранті, має координати $O_1(a;\ -a)$, де $a > 0$ (рис. 3.38).

Радіус кола $r = a$. Отже,

$$\sqrt{(a-18)^2 + (-a+4)^2} = a,$$

$$a^2 - 44a + 340 = 0,$$

$$a_1 = 34,\ a_2 = 10.$$

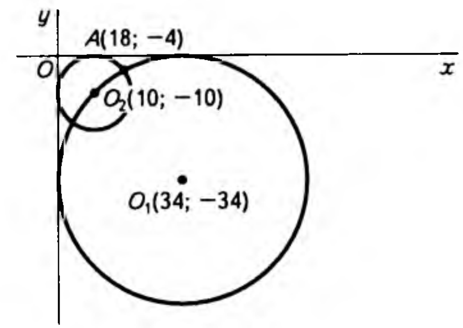


Рис. 3.38

Таким чином, є два центри $O_1(34;\ -34)$ і $O_2(10;\ -10)$ та два значення радіуса $r_1 = 34$, $r_2 = 10$, тобто умову задачі задовольняють два кола:

$$(x-34)^2 + (y+34)^2 = 34^2,$$

$$(x-10)^2 + (y+10)^2 = 10^2.$$

35 *Записати канонічне рівняння еліпса, що проходить через точку $M(5;\ 0)$, якщо фокальна відстань (відстань між фокусами) дорівнює 6.*

Оскільки відстань між фокусами дорівнює 6, то $c = 3$. За умовою точка $M(5;\ 0)$ належить еліпсу, тож її координати задовольняють рівняння еліпса. Тому $25/a^2 = 1$, $a^2 = 25$. Із рівності $a^2 - c^2 = b^2$ знаходимо $b^2 = 25 - 9 = 16$.

Отже, шукане рівняння

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

36 *Звести до канонічного вигляду рівняння $36x^2 + 100y^2 = 3600$ і показати, що воно є рівнянням еліпса. Знайти координати фокусів.*

Перепишемо дане рівняння у вигляді $36x^2 + 100y^2 = 3600$ і поділимо обидві його частини на 3600:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Це рівняння еліпса. Оскільки для еліпса $a^2 - b^2 = c^2$ і $a^2 = 100$, $b^2 = 36$, то $c^2 = 64$, тобто $c = 8$. Фокуси еліпса знаходитимуться в точках $F_1(-8; 0)$ і $F_2(8; 0)$.

37 *Записати рівняння еліпса, фокусами якого є точки* $(0; -\sqrt{5})$ *і* $(0; \sqrt{5})$, *а велика вісь дорівнює* 6.

Фокуси еліпса лежать на осі Oy, отже, $b = 3$.

За формулою $a^2 - c^2 = b^2$ знаходимо $a^2 = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 4$. Підставивши значення a^2 і b^2 в канонічне рівняння, маємо

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

38 *Визначити точки еліпса* $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, *відстань від яких до правого фокуса дорівнює* 14.

Відстань від точок еліпса до правого фокуса визначається за формулою

$$r_2 = a - \frac{c}{a}x.$$

Маємо $r_2 = 14$, $a = 10$, $b = 6$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 8$. Тоді $14 = 10 - \frac{8}{10}x$, звідки $x = -5$. Підставивши знайдене значення x у рівняння еліпса, дістаємо $y = \pm 3\sqrt{3}$.

Таким чином, шукані точки $M_1(-5;\ 3\sqrt{3})$ і $M_2(-5;\ -3\sqrt{3})$.

39 *Записати рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо відстань між фокусами дорівнює* 12, *а ексцентриситет* $e = 0{,}6$.

За умовою задачі $F_1F_2 = 12$, отже, $c = 6$, $e = c/a = 0{,}6$. Підставивши в цю рівність значення c, дістанемо $6/a = 0{,}6$, тобто $a = 10$.

За формулою $a^2 - c^2 = b^2$ знайдемо $b^2 = 10^2 - 6^2 = 64$.

Отже, шукане рівняння має вигляд

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

40 *Побудувати еліпси* $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ *і* $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. *Для кожного з них обчислити ексцентриситет.*

Знаходимо півосі заданих еліпсів: $a_1 = 5$, $b_1 = 4$; $a_2 = 5$, $b_2 = 3$.

Позначимо на рис. 3.39 вершини першого еліпса: $A_1(5; 0)$, $B_1(0; 4)$, $C_1(-5; 0)$, $D_1(0; -4)$. Дві вершини другого еліпса знаходяться в точках A_1 і C_1, а дві інші вершини — в точках $B_2(0; 3)$ і $D_2(0; -3)$.

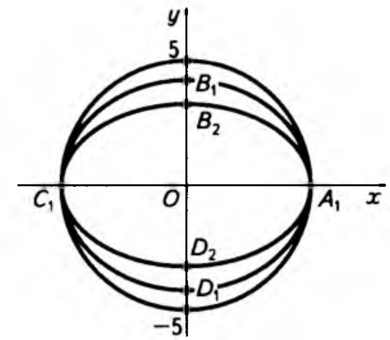


Рис. 3.39

Побудуємо коло $x^2 + y^2 = 25$.

Точки першого еліпса дістанемо зсувом до осі Ox точок кола, при якому ординати зменшуються у відношенні $b_1/a_1 = 4/5$.

Точки другого еліпса дістанемо зсувом точок кола, при якому ординати зменшуються у відношенні $b_2/a_2 = 3/5$.

Зазначимо, що достатньо одержати точки еліпса в одному з квадрантів координатної площини, а потім скористатися симетрією еліпса відносно осей координат. На рис. 3.39 перший еліпс зображений кривою $A_1B_1C_1D_1$, другий — кривою $A_1B_2C_1D_2$.

Ексцентриситети еліпсів знаходимо за формулою

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Маємо

$$e_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5};\quad e_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

У другого еліпса ексцентриситет більший, ніж у першого; другий еліпс сильніше стиснутий до своєї великої осі.

41 *Знайти координати точок перетину еліпса* $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ *з прямою* $x + 2y - 14 = 0$.

Для того щоб знайти координати точок перетину еліпса й прямої, треба розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{25} = 1, \\ x + 2y - 14 = 0; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 8, \\ y = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 6, \\ y = 4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Отже, еліпс і пряма перетинаються в точках (8; 3) і (6; 4).

42 *З'ясувати, яку лінію визначає рівняння* $7x^2 - 9y^2 = 63$.

Поділивши обидві частини рівняння на 63, дістанемо

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1.$$

Порівнюючи дане рівняння з канонічним рівнянням гіперболи, зробимо висновок, що рівняння визначає гіперболу з дійсною піввіссю $a = 3$ та уявною піввіссю $b = \sqrt{7}$.

43 *Дано асимптоти гіперболи* $y = \pm\frac{1}{2}x$ *і відстань між фокусами* $2c = 10$. *Записати рівняння гіперболи.*

Із рівнянь асимптот гіперболи випливає, що $b/a = 1/2$, звідки $a = 2b$.

Користуючись рівністю $a^2 + b^2 = c^2$, дістаємо $4b^2 + b^2 = 25$, звідки $b^2 = 5$. Тоді $a^2 = 4b^2 = 20$. Запишемо шукане рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

44 *Записати рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо задано точку* $M(-5; 3)$, *що лежить на гіперболі, та її ексцентриситет* $e = \sqrt{2}$.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Знайдемо a і b. Оскільки $e = c/a$, то $c = ea = a\sqrt{2}$.

Користуючись рівністю $a^2 + b^2 = c^2$, матимемо $2a^2 = a^2 + b^2$, звідки $a^2 = b^2$.

Координати точки M задовольняють рівняння гіперболи. Тому

$$\begin{cases} \dfrac{5^2}{a^2} - \dfrac{3^2}{b^2} = 1, \\ a^2 = b^2. \end{cases}$$

Звідси випливає, що $16/a^2 = 1$. Отже, $a^2 = b^2 = 16$. Тоді шукане рівняння гіперболи запишемо у вигляді

$$x^2 - y^2 = 16.$$

45 *Знайти ексцентриситет гіперболи, симетричної відносно координатних осей, асимптота якої утворює з дійсною віссю кут:* ① $60°$; ② α, $0 < \alpha < \pi/2$.

① Рівняння однієї з асимптот, яка утворює з дійсною віссю гострий кут $\varphi = 60°$, має вигляд $y = \frac{b}{a}x$. Отже, її кутовий коефіцієнт k, з одного боку, дорівнює b/a, а з іншого — $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$. Звідси $b/a = \sqrt{3}$.

Ураховуючи, що ексцентриситет гіперболи обчислюється за формулою

$$e = \frac{2c}{2a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

матимемо

$$e = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

② Аналогічно випадку ① маємо $b/a = k = \operatorname{tg}\alpha$, отже,

$$e = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha.$$

46 *Знайти відстань від фокуса гіперболи* $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ *до її асимптот і кут між асимптотами.*

Виходячи з канонічного рівняння гіперболи, знайдемо довжини її півосей: $a = 4$, $b = 3$. Відомо, що гіпербола має фокуси в точках F_1 і F_2 з координатами $(-\sqrt{a^2 + b^2}; 0)$ та $(\sqrt{a^2 + b^2}; 0)$, а рівняння асимптот мають вигляд $y = \pm\frac{b}{a}x$. Підставляючи відомі значення a і b, дістанемо координати фокусів $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$ та рівняння асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$.

Оскільки гіпербола складається з двох віток, симетричних відносно координатних осей, то з міркувань симетрії випливає, що відстані d_1, d_2, d_3, d_4 від будь-якого фокуса до асимптот однакові (рис. 3.40).

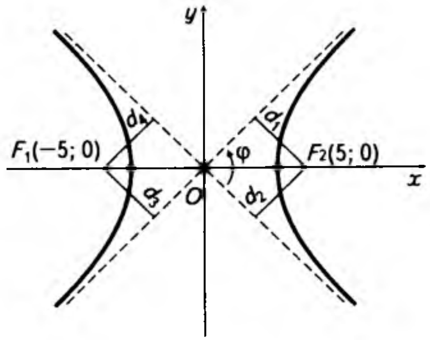


Рис. 3.40

Для визначення шуканої відстані скористаємося формулою для обчислення відстані від точки F_2 до прямої $y = \pm\frac{3}{4}x$:

$$d_1 = \frac{\left|\frac{3}{4}5 + 0\right|}{\sqrt{(3/4)^2 + (-1)^2}} = 3.$$

Кут між асимптотами φ обчислимо за формулою $\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}$ для кута між двома прямими $y = \frac{3}{4}x$ та $y = -\frac{3}{4}x$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3/4 - (-3/4)}{1 + 3/4(-3/4)} = \frac{24}{7}.$$

Звідси $\varphi = \operatorname{arctg}(24/7)$.

47 ***На гіперболі $9x^2 - 16y^2 = 144$ знайти точку, відстань якої від лівого фокуса вдвоє менша, ніж від правого.***

Запишемо рівняння гіперболи в канонічному вигляді, поділивши обидві його частини на 144:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Отже, $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, $c^2 = a^2 + b^2 = 25$. Звідси знаходимо фокуси $F_1(-5; 0)$ і $F_2(5; 0)$ та ексцентриситет $e = 5/4$.

Нехай $M_0(x_0; y_0)$ — шукана точка, причому з умови задачі випливає, що вона має знаходитися на лівій вітці гіперболи, тобто $x_0 < 0$ (рис. 3.41). Запишемо фокальні радіуси r_1 та r_2 шуканої точки M_0:

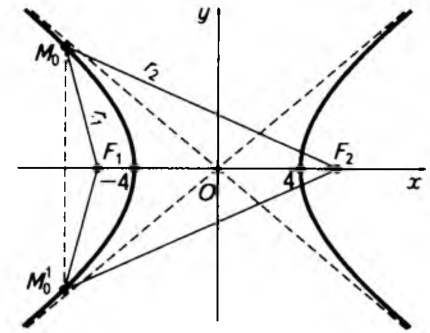


Рис. 3.41

$$r_1 = |M_0F_1| = |ex_0 + a| = \left|\frac{5}{4}x_0 + 4\right|,$$

$$r_2 = |M_0F_2| = |ex_0 - a| = \left|\frac{5}{4}x_0 - 4\right|.$$

Оскільки за умовою $2r_1 = r_2$, дістаємо рівняння

$$2\left|\frac{5}{4}x_0 + 4\right| = \left|\frac{5}{4}x_0 - 4\right|.$$

Розв'язуючи його, знаходимо $x_0 = -9{,}6$. Підставивши це значення в рівняння гіперболи, матимемо $y_0 = \pm\frac{3}{5}\sqrt{119}$. Отже, умову задачі задовольняють дві точки $M_0(-9{,}6;\ 0{,}6\sqrt{119})$ і $M_0^1(-9{,}6;\ -0{,}6\sqrt{119})$, симетричні відносно осі *Ox*.

48 ***На гіперболі $x^2 - y^2 = 4$ знайти точку, фокальні радіус-вектори якої перпендикулярні.***

Запишемо рівняння гіперболи в канонічному вигляді:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Це рівняння рівносторонньої гіперболи з параметрами $a^2 = b^2 = 4$. Тоді $c^2 = a^2 + b^2 = 8$.

Маємо фокуси $F_1(-2\sqrt{2};\ 0)$, $F_2(2\sqrt{2};\ 0)$ та ексцентриситет $e = \sqrt{2}$.

Розглянемо ΔF_1MF_2. Якщо $\angle F_1MF_2 = 90°$, то точка M має знаходитися на півколі, побудованому на відрізку F_1F_2 (оскільки вписаний кут, що спирається на діаметр, прямий). Радіус цього кола $R = \frac{1}{2}|F_1F_2| = |OF_2| = 2\sqrt{2}$, а його рівняння $x^2 + y^2 = 8$.

Отже, точка M (і всі такі точки) є точками перетину гіперболи та кола. Розв'язуючи відповідну систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = 8, \end{cases}$$

дістанемо всі її розв'язки: $(\sqrt{6};\ \sqrt{2})$, $(\sqrt{6};\ -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{6};\ \sqrt{2})$, $(-\sqrt{6};\ -\sqrt{2})$.

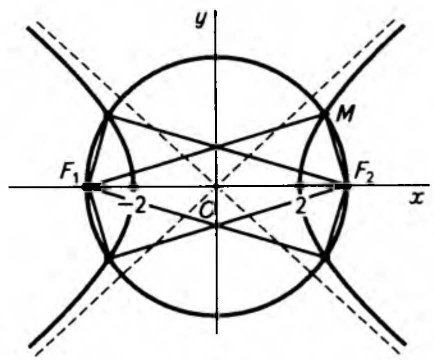


Рис. 3.42

Таким чином, умові задачі відповідають чотири точки, розташовані симетрично точці M відносно координатних осей та початку координат (рис. 3.42).

49 *Задано рівносторонню гіперболу $x^2 - y^2 = 8$. Знайти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться у фокусах гіперболи, якщо відомо, що еліпс проходить через точку $A(4;\ 6)$.*

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$. Із нього знаходимо $a^2 = b^2 = 4$, $c^2 = a^2 + b^2 = 16$. Отже, $F_1(-4;\ 0)$, $F_2(4;\ 0)$. Позначимо через a_1 та b_1 довжини відповідно великої та малої півосей шуканого еліпса.

Оскільки, з одного боку, відстань між фокусами еліпса $2c = 8$, а з іншого — $2\sqrt{a_1^2 - b_1^2}$, то для невідомих параметрів еліпса дістаємо перше співвідношення

$$8 = 2\sqrt{a_1^2 - b_1^2}, \text{ або } a_1^2 - b_1^2 = 16.$$

Оскільки за умовою точка A належить еліпсу, то її координати (4; 6) мають задовольняти його рівняння $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$. Дістаємо друге співвідношення:

$$\frac{16}{a_1^2} + \frac{36}{b_1^2} = 1.$$

Для визначення параметрів a_1^2 та b_1^2 одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_1^2 - b_1^2 = 16, \\ \dfrac{16}{a_1^2} + \dfrac{36}{b_1^2} = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши її, матимемо $a_1^2 = 64$ і $b_1^2 = 48$.

Отже,

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1.$$

50 *Записати рівняння параболи, вершиною якої є точка* (0; 0) *і яка проходить:* ① *через точку* (–1; 2) *симетрично відносно осі Ox;* ② *через точку* (2; 4) *симетрично відносно осі Oy.*

① Оскільки парабола проходить через початок координат і через точку (–1; 2) з від'ємною абсцисою, а її віссю симетрії є вісь Ox, то рівняння параболи слід шукати у вигляді $y^2 = -2px$. Підставляючи в це рівняння координати точки (–1; 2), дістанемо $4 = -2p(-1)$, $p = 2$. Шукане рівняння має вигляд $y^2 = -4x$.

② Рівняння параболи шукатимемо у вигляді $x^2 = 2py$. Підставляючи в це рівняння координати точки (2; 4), дістанемо $4 = 2p \cdot 4$, $p = 1/2$. Отже, шуканим рівнянням параболи є $x^2 = y$.

51 *На параболі $y^2 = 6x$ знайти точку M, фокальний радіус якої дорівнює 4,5.*

Порівнюючи дане рівняння параболи з канонічним, дістанемо $2p = 6$. Отже, $p = 3$. Фокальний радіус r точки $M(x; y)$ обчислюється за формулою $r = x + p/2$. Підставляючи в це співвідношення відомі величини r та p, матимемо рівняння $4{,}5 = x + 1{,}5$. Звідси $x = 3$. Підставляючи в рівняння параболи $y^2 = 6x$ абсцису x невідомої точки M, знайдемо її ординату: $y = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$. Отже, умову задачі задовольняють дві точки — $M_1(3;\ 3\sqrt{2})$ і $M_2(3;\ -3\sqrt{2})$, які розташовані симетрично відносно осі Ox.

52 *Визначити область розташування кривої $y = -\sqrt{-x}$. Побудувати її.*

Область визначення функції, що задає криву, $-x \geq 0$, тобто $x \leq 0$, а область її значень $y = -\sqrt{-x} \leq 0$. Отже, крива цілком розташована в III квадранті: $\{(x,\ y) \in R^2 \mid x \leq 0,\ y \leq 0\}$.

Запишемо рівняння кривої у вигляді

$$y^2 = -x = -2\frac{1}{2}x.$$

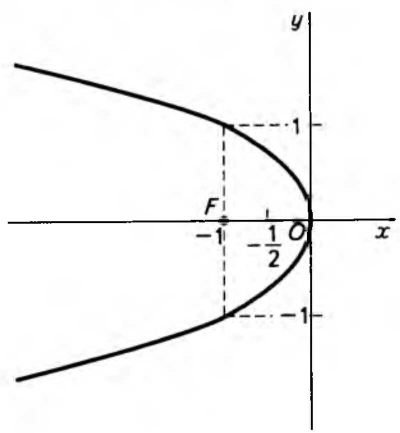


Рис. 3.43

Робимо висновок, що шуканою кривою є нижня половина параболи з параметром $p = 1/2$, розташована в III квадранті (рис. 3.43).

53 *Із вершини параболи $y^2 = 2px$ проведено всі можливі хорди. Записати рівняння геометричного місця середин цих хорд.*

Нехай $A(x; y)$ — довільна фіксована точка на параболі, OA — відповідна хорда, $A_1(x_1; y_1)$ — середина цієї хорди (рис. 3.44). Оскільки A_1 — середина відрізка OA, то $x_1 = x/2$ і $y_1 = y/2$.

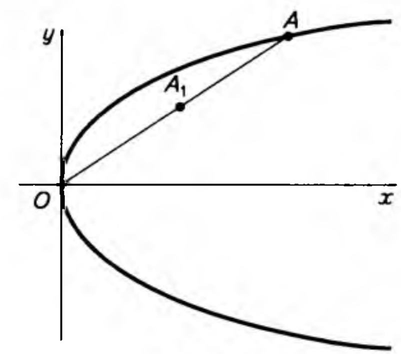


Рис. 3.44

Оскільки точка A лежить на параболі, то її координати мають задовольняти рівняння $y^2 = 2px$. Підставляючи в це рівняння співвідношення $x = 2x_1$ і $y = 2y_1$, дістанемо рівняння для визначення координат точки A_1: $(2y_1)^2 = 2p(2x_1)$, тобто $y_1^2 = 2\frac{p}{2}x_1$. Це рівняння визначає параболу, параметр якої вдвоє менший від параметра початкової параболи.

54 *Записати рівняння площини, що проходить через вісь Oz і точку $M(1;\ -2;\ 1)$.*

У загальному рівнянні площини $ax + by + cz + d = 0$ коефіцієнти $c = d = 0$, оскільки площина проходить через вісь Oz. Тоді шукана площина задається рівнянням $ax + by = 0$. Точка M, за умовою, лежить на цій площині, отже, її координати задовольняють рівняння площини: $a - 2b = 0$, тобто $a = 2b$. Підставивши значення a в рівняння площини й скоротивши на b, дістанемо рівняння шуканої площини

$$2x + y = 0.$$

55 *Площина проходить через точку $M(3;\ 8;\ -4)$ і відтинає на осі абсцис відрізок $a = -3$, на осі аплікат — $c = 2$. Записати рівняння площини.*

Запишемо рівняння площини у відрізках на осях: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. За умовою $a = -3$, $c = 2$, тому $\frac{x}{-3} + \frac{y}{b} + \frac{z}{2} = 1$. Точка $M(3;\ 8;\ -4)$ лежить на площині, тому її координати задовольняють рівняння площини $\frac{3}{-3} + \frac{8}{b} + \frac{-4}{2} = 1$, звідки $b = 2$.

Отже, шукане рівняння

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1, \text{ або } 2x-3y-3z+6=0.$$

56 *Точка M (2; –1; 2) — основа перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину. Записати рівняння площини.*

За умовою задачі радіус-вектор точки M перпендикулярний до площини, а його координатами є координати точки M, тобто $\vec{OM} = (2; -1; 2)$. Отже, відомі вектор, перпендикулярний до площини $\vec{n} = \vec{OM} = (2; -1; 2)$, і точка M (2; –1; 2), що лежить на площині. Використовуючи рівняння площини, що проходить через дану точку із заданим нормальним вектором (3.29), дістанемо

$$2(x-2)-1(y+1)+2(z-2)=0, \text{ або } 2x-y+2z-9=0.$$

57 *Записати рівняння площини, яка перпендикулярна до осі Ox і проходить через точку $M_0(2; -1; 3)$.*

Рівняння площини, перпендикулярної до осі Ox, має вигляд $x + d = 0$. Підставивши в це рівняння координати точки M_0, знаходимо $d = -2a$. Підставивши значення d у рівняння $ax + d = 0$ і поділивши на a, дістанемо

$$x-2=0.$$

58 *Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-2; 3; 4)$ і паралельна площині $x + 2y - 3z + 4 = 0$.*

Оскільки шукана площина паралельна площині $x + 2y - 3z + 4 = 0$, то за її нормальний вектор можна взяти вектор $\vec{n} = (1; 2; -3)$ даної площини. Використовуючи рівняння площини, що проходить через задану точку із заданим нормальним вектором (3.29), дістанемо

$$(x+2)+2(y-3)-3(z-4)=0, \text{ або } x+2y-3z+8=0.$$

59 *Знайти відстань між паралельними площинами*

$$2x-3y+6z+28=0 \text{ та } 2x-3y+6z-14=0.$$

Щоб знайти шукану відстань, треба взяти точку на одній із площин і визначити відстань від цієї точки до іншої площини. В рівнянні першої із заданих площин покладемо $y = 0$, $z = 0$. Маємо $2x + 28 = 0$, тобто $x = -14$. Отже, дістали точку $M(-14; 0; 0)$. Тепер, використовуючи

формулу (3.33), знаходимо відстань від точки до другої площини $2x - 3y + 6z - 14 = 0$:

$$d=\frac{|2(-14)-3\cdot 0+6\cdot 0-14|}{\sqrt{4+9+36}}=2.$$

60 *Знайти кут між площинами*

$$x+y-1=0 \text{ та } 2x-y+\sqrt{3}z+1=0.$$

Для відшукання кута між площинами скористаємося формулою (3.34). Дістанемо

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 2+1(-1)+0\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{2^2+(-1)^2+(\sqrt{3})^2}}=\frac{2-1}{\sqrt{2}\sqrt{8}}=\frac{1}{4},$$

тобто $\varphi=\arccos\frac{1}{4}\approx 76$.

61 *Записати канонічні й параметричні рівняння прямої, що утворює з осями координат кути $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/4$, $\gamma = 2\pi/3$ і проходить через точку $M_0(-1; 0; 5)$.*

За напрямний вектор $\vec{s}$ прямої можна взяти її одиничний вектор. Його координатами є напрямні косинуси $\cos\alpha=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos\gamma=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$, тобто $\vec{s}=\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$.

Використовуючи канонічні рівняння прямої, дістанемо

$$\frac{x+1}{1/2}=\frac{y-0}{\sqrt{2}/2}=\frac{z-5}{-1/2},$$

або

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y}{\sqrt{2}}=\frac{z-5}{-1}.$$

Якщо прирівняти кожне з цих відношень до t, то

$$\frac{x+1}{1}=t,\quad \frac{y}{\sqrt{2}}=t,\quad \frac{z-5}{-1}=t.$$

Тоді параметричні рівняння прямої такі:

$$x=t-1,\quad y=\sqrt{2}t,\quad z=5-t.$$

62 *Звести до канонічного вигляду рівняння прямої*

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$$

Додамо обидва рівняння. Дістанемо $4x - 2z - 8 = 0$, або $x = \dfrac{z+4}{2}$.

Помножимо перше рівняння на 5, друге — на 3 й почленно додамо їх:

$$14x - 4y - 32 = 0, \text{ або } x = \frac{2y+16}{7}, \text{ або } x = \frac{y+8}{7/2}.$$

Прирівнюючи результати, дістанемо канонічні рівняння у вигляді

$$x = \frac{y+8}{7/2} = \frac{z+4}{2}, \text{ або } \frac{x}{2} = \frac{y+8}{7} = \frac{z+4}{4}.$$

63 *Записати канонічне рівняння перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину* $4x - y + 2z - 3 = 0$.

Вектор $\vec{n} = (4; -1; 2)$ перпендикулярний до даної площини, паралельний шуканій прямій, і його можна вважати напрямним вектором цієї прямої. За формулою (3.39) дістанемо

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}.$$

64 *Записати рівняння прямої, яка паралельна осі Ox і проходить через точку* $M_0(1; 1; 1)$.

Напрямний вектор $\vec{s}$ прямої колінеарний осі Ox, отже, його проекції на координатні осі Oy і Oz дорівнюють нулю. Виберемо за вектор $\vec{s}$ орт осі Ox $\vec{i} = (1; 0; 0)$ і запишемо канонічне рівняння

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{0}.$$

Загальні рівняння шуканої прямої мають вигляд

$$\begin{cases} y - 1 = 0, \\ z - 1 = 0. \end{cases}$$

65 *Записати рівняння прямої, яка проходить через точку* $M_0(-1; 2; 1)$ *і паралельна прямій* $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+2}{1}$.

Оскільки шукана пряма паралельна заданій, то за її напрямний вектор можна взяти вектор $\vec{s} = (2; 3; 1)$ даної прямої. Використовуючи формулу (3.39), дістанемо канонічні рівняння шуканої прямої

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}.$$

66 *Обчислити гострий кут між прямими*

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{2} \quad \textit{та} \quad \frac{x+1}{12} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

Використовуючи формулу (3.45), дістанемо

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 12 + 1\cdot 3 + 2\cdot 4}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\sqrt{12^2+3^2+4^2}} = 0{,}8974.$$

Отже, $\varphi = \arccos 0{,}8974 \approx 26$.

67 *Обчислити кут між прямою* $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z-3}{2}$ *та площиною* $x + 2y - 3z + 4 = 0$.

Використовуючи формулу (3.48), дістанемо

$$\sin\varphi = \frac{1\cdot 3 + 2\cdot 4 + (-3)2}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}\sqrt{3^2+4^2+2^2}} = 0{,}2482.$$

Отже, $\varphi = \arcsin 0{,}2482 \approx 14$.

68 *Записати рівняння площини, яка проходить через точку* $M(-1; 2; -3)$ *перпендикулярно до прямої* $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+3}{2}$.

За нормальний вектор $\vec{n}$ шуканої площини можна взяти паралельний йому напрямний вектор $\vec{s} = (4; 3; 2)$ прямої. Використовуючи рівняння площини (3.29), дістанемо

$$4(x+1) + 3(y-2) + 2(z+3) = 0, \quad \text{або} \quad 4x + 3y + 2z + 4 = 0.$$

69 *Записати рівняння площини, яка проходить через точку* $M(1; 3; 2)$ *перпендикулярно до площини* $x - 2y + 2z - 3 = 0$.

За напрямний вектор шуканої прямої візьмемо паралельний йому нормальний вектор $\vec{n} = (1; -2; 2)$ даної площини.

Використовуючи формулу (3.39), дістанемо канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{2}.$$

70 *Знайти проекцію* M_1 *точки* $M\,(5;\ 2;\ -1)$ *на площину* $2x-y+3z+23=0$.

Вектор $\vec{n}=(2;\ -1;\ 3)$, перпендикулярний до даної площини, можна взяти за напрямний вектор перпендикуляра MM_1. Тому канонічні рівняння цього перпендикуляра мають вигляд

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{3}.$$

Параметричні рівняння прямої MM_1: $x=5+2t,\ \ y=2-t,\ \ z=3t-1$.

Підставивши значення x, y, z у рівняння даної площини, дістаємо

$$2(5+2t)-(2-t)+3(3t-1)+23=0.$$

Знайдемо $t=-2$ — значення параметра, що відповідає точці M_1 як точці перетину прямої MM_1 із заданою площиною.

Отже, $M_1(1;\ 4;\ -7)$ — шукана точка.

71 *Знайти проекцію* P *точки* $Q(4;\ 3;\ 10)$ *на пряму*

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}.$$

Точка P є точкою перетину даної прямої з перпендикулярною до неї площиною, що проходить через точку Q. Оскільки вектор $\vec{s}=(2;\ 4;\ 5)$ є перпендикуляром до цієї площини, то її рівняння

$$2(x-4)+4(y-3)+5(z-10)=0,\quad \text{або}\quad 2x+4y+5z-70=0.$$

Тим самим методом, що й у попередньому прикладі, знайдемо координати точки перетину заданої прямої й заданої площини.

Отже, $P(3;\ 6;\ 8)$.

Розділ 4

МНОЖИНИ Й ПОСЛІДОВНОСТІ

4.1 Методи теорії множин

4.1.1. Множини. Основні поняття

Поняття множини — одне з основних у математиці. Слова *сукупність*, *клас*, *система*, *набір* часто вживають як синоніми слова *множина*.

Множина — це деякі об'єкти (*елементи множини*), що виділені за певною ознакою (або ознаками) з інших об'єктів і розглядаються як одне ціле. При цьому клас усіх розглядуваних об'єктів має бути описаний іще раніше будь-яким способом. Цей клас називають ***універсальною множиною*** й позначають U.

Множини зазвичай позначають великими латинськими літерами (A, B, C, ...), а елементи множини — маленькими (a, b, c, ...).

Належність елемента a множині A позначають так: $a \in A$ (a належить до множини A). Якщо елемент a універсальної множини U не є елементом множини A, то це позначають як $a \notin A$ (a не належить до множини A).

Множину, що не містить жодного елемента, називають ***порожньою множиною*** й позначають $\varnothing$.

Якщо вдається перелічити всі елементи множини A, то їх записують у фігурних дужках і позначають як $A=\{a, b, c, \ldots, d\}$. Найчастіше множина задається виразом $A=\{a \mid P(a)\}$. Такий запис означає, що A — множина всіх елементів певної універсальної множини, що мають властивість P.

Якщо через A і B позначено певні множини, то рівність $A=B$ завжди означає, що A і B — та сама множина.

Якщо кожен елемент множини A є елементом множини B, то A називають ***підмножиною множини B***. Позначається це так: $A \subset B$.

Порожня множина вважається підмножиною будь-якої іншої множини.

Нехай A — деяка множина. Тоді через $\bar{A}$ позначатимемо множину всіх елементів універсальної множини, які не належать до A, й називатимемо ***доповненням множини A***.

Нехай задано множини A і B.

➡ **Означення 4.1.** ***Об'єднанням двох множин A і B*** *називають множину* $A \cup B$ *усіх елементів, які належать хоча б одній із цих множин*:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

Аналогічно об'єднанням кількох (і навіть безлічі) множин є множина тих елементів, які належать принаймні одній із цих множин.

Об'єднання множин $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ коротко позначають $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

Якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, то їх об'єднання позначають так: $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

➡ **Означення 4.2.** ***Перерізом (перетином) двох множин A і B*** *називають множину* $A \cap B$ *усіх їхніх спільних елементів, тобто елементів, які належать як множині* A, *так і множині* B:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

Аналогічно перерізом кількох (і навіть безлічі) множин називають множину всіх їхніх спільних елементів.

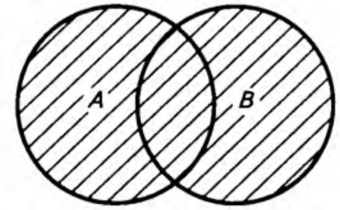
Переріз множин $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ позначають так: $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$, а нескінченної кількості множин A_k — як $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$.

➡ **Означення 4.3.** ***Різницею двох множин A і B*** *називають множину* $A \setminus B$ *усіх елементів, що належать множині* A, *але не належать множині* B:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}.$$

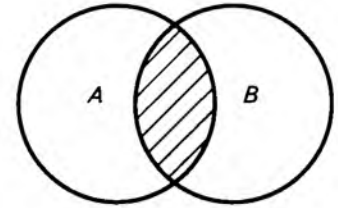
Зауважимо, що $\bar{A} = U \setminus A$, де U — універсальна множина.

Об'єднання, переріз та різницю множин A і B зображено на рис. 4.1—4.3 відповідно, які часто називають *діаграмами В'єнна*, або *кругами Ейлера*.



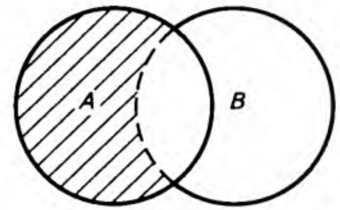
$A \cup B$

Рис. 4.1



$A \cap B$

Рис. 4.2



$A \setminus B$

Рис. 4.3

■ **Приклад 4.1.** *Нехай* $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ *і* $B = \{(x, y) \mid |x| + |y| \le 1\}$. *Зобразимо множини* A, $\bar{A}$, B, $\bar{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Якщо зображувати їх як множини точок площини з координатами $(x; y)$, то множина A складається з внутрішніх точок круга з центром у точці $O(0; 0)$ одиничного радіуса, причому точки кола $x^2 + y^2 = 1$ не входять у множину A (рис. 4.4). Множина $\bar{A}$, — це зовнішність круга разом із точками кола $x^2 + y^2 = 1$ (рис. 4.5).

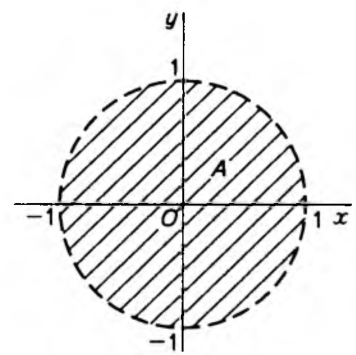


Рис. 4.4

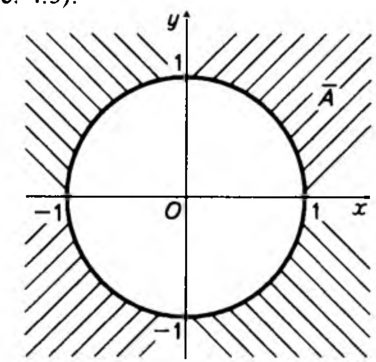


Рис. 4.5

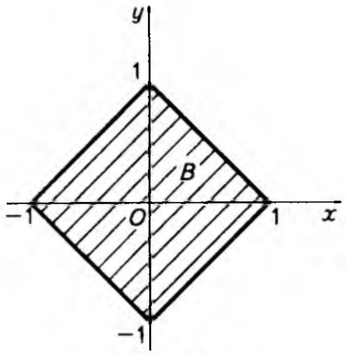


Рис. 4.6

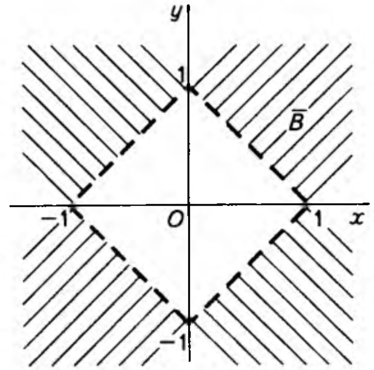


Рис. 4.7

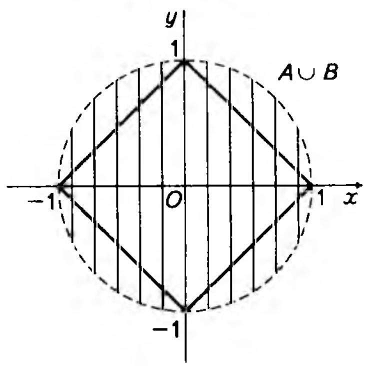


Рис. 4.8

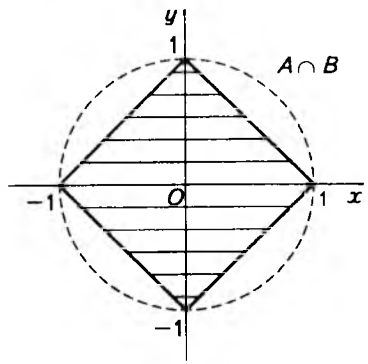


Рис. 4.9

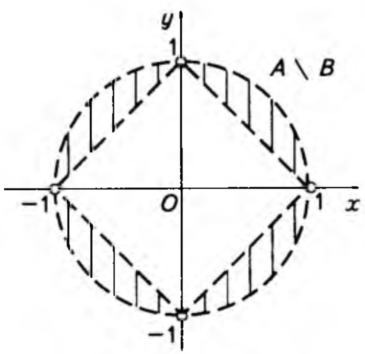


Рис. 4.10

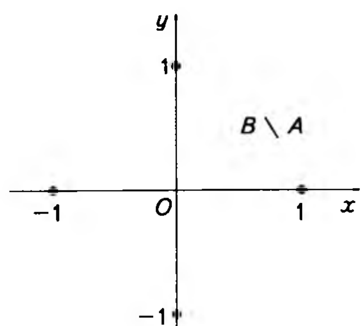


Рис. 4.11

Множина $\boldsymbol{B}$ — це множина внутрішніх точок квадрата, обмеженого лінією $|x| + |y| = 1$, разом із точками його сторін (рис. 4.6), а множина $\overline{\boldsymbol{B}}$ — це множина точок поза межами квадрата (рис. 4.7).

Множина $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ у даному прикладі збігається з множиною $\boldsymbol{A}$ (рис. 4.8). Переріз множин $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ збігається з множиною $\boldsymbol{B}$ (рис. 4.9).

Різниця множин $\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}$ — це сегменти круга одиничного радіуса без точок (–1; 0), (1; 0), (0; –1), (0; 1) (рис. 4.10). Різниця множин $\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{A}$ — це точки (–1; 0), (1; 0), (0; –1), (0; 1) (рис. 4.11).

Означення 4.4. ***Декартовим добутком множини A на множину B називають множину $A \times B$, елементами якої є всі можливі пари $(x; y)$, в яких елементи x належать до множини A, а елементи y — до множини B.***

Декартів добуток позначають $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{(x, y) \mid x \in \boldsymbol{A} \text{ і } y \in \boldsymbol{B}\}$.

Елементи x і y називаються ***координатами пари*** (x, y).

Слід наголосити, що пари (x, y) і (y, x) різні. Крім того, пари в жодному разі не можна тлумачити як множини, що складаються з двох елементів. До того ж координати пари можуть бути однакові, тоді як множина, за її означенням, не може містити двічі один і той самий елемент.

Пари — це нові специфічні об'єкти, які за своєю природою відрізняються як від елементів, що є їхніми координатами, так і від множин, котрі можуть утворювати ці елементи.

Декартів добуток $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ називають ***декартовим квадратом множини A***. Його позначають $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = \{(x, y) \mid x \in \boldsymbol{A} \text{ і } y \in \boldsymbol{A}\}$.

Наприклад, $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^2$ — множина дійсних чисел — це множина всіх можливих пар дійсних чисел. Якщо на площині зобразити прямокутну систему координат, то ці пари є координатами точок площини.

4.1.2. Числові множини

У математиці використовуються такі основні числові множини:

- ***множина натуральних чисел*** $N = \{1; 2; 3; 4; 5; \ldots\}$;
- ***множина цілих чисел*** $Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 5; \ldots\}$;
- ***множина раціональних чисел*** $Q = \left\{\frac{m}{n},\ m \in Z,\ n \in N\right\}$;
- ***множина ірраціональних чисел*** $\boldsymbol{I}$ (чисел, які не можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in Z$, $n \in N$);

- ***множина дійсних чисел*** $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{I}$ (будь-яке дійсне число можна подати у вигляді нескінченного десяткового дробу — періодичного, якщо число раціональне, й неперіодичного, якщо число ірраціональне);
- ***множина комплексних чисел*** $\boldsymbol{C}$.

Означення 4.5. ***Комплексним числом*** *називають число* $a + bi$, $a, b \in \boldsymbol{R}$, $i^2 = -1$.

Дійсне число a називають ***дійсною частиною*** комплексного числа $a + bi$, а дійсне число b — його ***уявною частиною***. Число i називають ***уявною одиницею***.

Числа $a_1 + b_1 i$ і $a_2 + b_2 i$ рівні лише у випадку $a_1 = a_2$ і $b_1 = b_2$.
Число $a - bi$ називають ***комплексно-спряженим до числа*** $a + bi$.

Дії додавання, віднімання, множення й ділення комплексних чисел вводяться відповідно за такими формулами:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i;$$

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i;$$

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i;$$

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 - a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2 i}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Крім стандартної алгебричної форми запису комплексного числа $z = a + bi$, використовують тригонометричну й показникову.

4.1.3. Обмежені числові множини

Розглянемо множину дійсних чисел $\boldsymbol{R}$. Дійсні числа можна зображати точками числової осі, тобто між точками прямої і множини $\boldsymbol{R}$ можна встановити взаємно однозначну відповідність. Тому множину $\boldsymbol{R}$ часто ототожнюють із ***числовою прямою*** (***віссю***), а її елементи — з ***точками числової осі***, які задані своїми координатами.

Нехай $a, b \in \boldsymbol{R}$, причому $a < b$. Введемо позначення:

$(a, b) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x < b\}$ — *інтервал* (a, b);

$[a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \le x \le b\}$ — *відрізок* $[a, b]$;

$(a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x \le b\}$ — *півінтервал* $(a, b]$, який містить кінець b;

$[a, b) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \le x < b\}$ — *півінтервал* $[a, b)$, який містить кінець a.

Надалі інтервали, відрізки й півінтервали називатимемо ***числовими проміжками*** або просто ***проміжками***.

Числові множини

$$(a, +\infty) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x\},\ [a, +\infty) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \le x\},$$
$$(-\infty, b] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \le b\},\ (-\infty, b) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x < b\}$$

називатимемо ***необмеженими проміжками***.

Множину всіх дійсних чисел позначатимемо $\boldsymbol{R} = (-\infty, +\infty)$.

Розглянемо деяку множину $X \subset \boldsymbol{R}$.

Означення 4.6. *Числову множину* X *називають* ***обмеженою зверху***, *якщо є таке число* $c \in \boldsymbol{R}$, *що для всіх елементів* $x \in X$ *виконується нерівність* $x \le c$. *Число* c — ***верхня межа множини*** X.

Числову множину X *називають* ***обмеженою знизу***, *якщо є таке число* $c \in \boldsymbol{R}$, *що для всіх елементів* $x \in X$ *виконується нерівність* $x \ge c$.

Число c — ***нижня межа множини*** X.

Якщо множина X *обмежена й зверху, й знизу, то її називають* ***обмеженою***.

Означення 4.7. *Найменшу з усіх верхніх меж називають* ***точною верхньою межею множини*** X і позначають $\sup X$ (супремум множини X).

Найбільшу з усіх нижніх меж називають ***точною нижньою межею множини*** X і позначають $\inf X$ (інфінум множини X).

Сформулюємо *ознаку*, за якою можна встановити, що число c справді є точною верхньою (нижньою) межею множини X: *для всіх* $x \in X$ *виконується нерівність* $x \le c$ $(x \ge c)$, *причому для довільного* $d < c$ $(d > c)$ *знайдеться такий елемент* $x \in X$, *що*

$$x > d \quad (x < d).$$

ТЕОРЕМА 4.1

У будь-якої не порожньої обмеженої множини X існують точна верхня й точна нижня межі.

Як правило, у випадку, коли множина X не обмежена зверху (знизу), використовують позначення $\sup X = +\infty$ ($\inf X = -\infty$). За такою домовленістю можна вважати, що будь-яка числова множина має скінченну або нескінченну точну верхню (нижню) межу.

4.2 Числові послідовності

Числові послідовності — це нескінченні множини чисел.

Означення 4.8. Нехай кожному натуральному числу $n \in N$ поставлено у відповідність деяке дійсне число x_n. Тоді *кажуть, що задано числову* ***послідовність*** $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, *або коротко — послідовність* $\{x_n\}$.

Отже, ***послідовність*** *— це функція* $x_n = f(n)$, $n \in N$, *визначена на множині натуральних чисел. Числа* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *є* ***членами (елементами) послідовності***, x_n *—* ***загальним її членом (загальним елементом)***, *а* n *—* ***номером члена***.

Щоб задати послідовність, треба вказати правило, за яким кожному числу n ставиться у відповідність одне й лише одне число x_n. Послідовність визначається формулою її загального члена.

■ **Приклад 4.2.** *Нехай загальний член послідовності* $x_n = \dfrac{2n+1}{n^2+1}$. *Знайдемо* x_7.

За цією формулою можна знайти будь-який член послідовності, підставивши замість n його номер. Наприклад,

$$x_7 = \frac{2\cdot 7+1}{7^2+1} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Інші приклади послідовностей:

1) $x_n = \dfrac{1}{n}$, x_n: $1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{4}; \ldots;$

2) $x_n = (-1)^n$, x_n: $-1; 1; -1; 1; \ldots;$

3) $x_n = \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$, x_n: $-\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; -\dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{5}; \ldots;$

4) $x_n = n!$, x_n: $1; 2; 6; 24; \ldots;$

5) $x_n = \dfrac{1}{3^n}$, x_n: $\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{9}; \dfrac{1}{27}; \dfrac{1}{81}; \ldots$

Означення 4.9. *Числову послідовність називають* ***монотонно зростаючою***, *якщо для довільного* $n \in N$ *виконується нерівність* $x_{n+1} > x_n$.

■ **Приклад 4.3.** Послідовність $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ є монотонно зростаючою, оскільки

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Тоді $x_{n+1} > x_n$ для довільного $n \in N$.

Означення 4.10. *Числову послідовність називають* ***монотонно спадною***, *якщо для довільного* $n \in N$ *виконується нерівність* $x_{n+1} < x_n$.

■ **Приклад 4.4.** Послідовність $x_n = \dfrac{1}{n}$ є монотонно спадною, оскільки

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-n-1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} < 0.$$

Тоді $x_{n+1} < x_n$ для довільного $n \in N$.

Означення 4.11. *Числову послідовність* $\{x_n\}$ *називають*:

- ***обмеженою зверху***, *якщо існує таке число* M, *що для довільного* $n \in N$ *виконується нерівність* $x_n \le M$;
- ***обмеженою знизу***, *якщо існує таке число* m, *що для довільного* $n \in N$ *виконується нерівність* $x_n \ge m$;
- ***обмеженою***, *якщо існує таке число* $C > 0$, *що для довільного* $n \in N$ *виконується нерівність* $|x_n| \le C$;

- ***необмеженою**, якщо для довільного $n \in N$ послідовність не обмежена ні зверху, ні знизу.*

■ **Приклад 4.5.** *Визначимо, які з наведених послідовностей обмежені:*

$$① \; x_n = \frac{1}{n}; \quad ② \; x_n = \frac{n}{n+1}; \quad ③ \; x_n = (-1)^n; \quad ④ \; x_n = n.$$

① Очевидно, що $0 < \frac{1}{n} \le 1$, тобто послідовність обмежена знизу числом 0, зверху — числом 1. Для довільного $n \in N$ $|x_n| \le 1$. Отже, послідовність обмежена.

② Оскільки $|x_n| = \left|\frac{n}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$, то послідовність обмежена.

③ Оскільки $|x_n| = |(-1)^n| \le 1$, то послідовність обмежена.

④ Оскільки $x_n = n \ge 1$, то послідовність обмежена знизу, але не обмежена зверху.

■ **Приклад 4.6.** *Послідовність чисел арифметичної прогресії.*

Арифметична прогресія — це числова послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому плюс деяке число d, яке називають *різницею прогресії*, тобто $a_n - a_{n-1} = d$.

Формула загального члена арифметичної прогресії $a_n = a_1 + d(n-1)$.

■ **Приклад 4.7.** *Послідовність чисел геометричної прогресії.*

Геометрична прогресія — це числова послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на деяке число q, яке називають *знаменником прогресії*, тобто $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ для довільного $n \in N$.

Формула загального члена геометричної прогресії $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Арифметична й геометрична прогресії часто використовуються в банківських розрахунках. Прикладом послідовності є нарощені грошові суми, покладені в банк. Коли вкладник робить вклад у банк, то банк дістає можливість розпоряджатися (в певних межах) цією грошовою сумою протягом року. Виплата процентів вкладникові і є платою банку за цю можливість.

■ **Приклад 4.8.** У банк зроблено вклад S (грн.) за процентної ставки p(%). Сума, яку одержить вкладник через час t за умови *нарахування простих процентів,* виражається формулою

$$S_t = S\left(1 + \frac{pt}{100}\right),$$

тобто залежність нагромадженої суми від часу є лінійною. Якщо нарахування проводяться після цілого числа років, то нагромаджена сума є арифметичною прогресією з початковим членом $a_0 = S$ і різницею $d = \frac{Sp}{100}$.

Розглянемо ситуацію, коли банк *нараховує складні проценти*. Тепер сума S_t, яку вкладник одержить через час t, виражається формулою

$$S_t = S\left(1 + \frac{pt}{100}\right)^t,$$

тобто залежність нагромадженої суми від часу t є показниковою. Якщо нарахування відбувається тільки після цілого числа років, то нагромаджена сума є геометричною прогресією з початковим членом $a_0 = S$ і знаменником $q = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

4.2.1. Границя числової послідовності

Нехай задано числову послідовність $\{x_n\}$.

➡ **Означення 4.12.** *Число а називають **границею числової послідовності** $\{x_n\}$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для всіх членів послідовності з номерами n, більшими за цей номер $(n > N)$, виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.*

Границя числової послідовності позначається так:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \text{ або } x_n \to a \text{ при } n \to \infty.$$

Послідовність, яка має границю, називають ***збіжною***. Якщо послідовність границі не має, то її називають ***розбіжною***.

Використовуючи логічні символи — квантор загальності $\forall$ (замість слів «для кожного», «для всіх») і квантор існування $\exists$ (замість слова «існує»), запишемо означення границі послідовності:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \quad \forall n > N: \ |x_n - a| < \varepsilon,$$

зміст якого полягає в тому, що за достатньо великих n члени послідовності $\{x_n\}$ дуже мало відрізняються від числа a (за модулем менше, ніж число ε, хай би яким малим воно було).

■ **Приклад 4.9.** *Використовуючи означення границі числової послідовності, доведемо, що* $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1.$

Розглянемо послідовність $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$. Тоді

$$|x_n - a| = \left| \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) - 1 \right| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Нехай, наприклад, $\varepsilon = 0{,}1$. Тоді $|x_n - a| = \frac{1}{n} < 0{,}1 = \frac{1}{10}$, і ця нерівність виконується при $n > 10$.

Аналогічно можна показати, що для $\varepsilon = 0{,}01$ нерівність $|x_n - a| = \frac{1}{n} < \varepsilon = \frac{1}{100}$ виконується при $n > 100$.

У загальному випадкові для довільного $\varepsilon > 0$ нерівність

$$|x_n - a| = \left| \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) - 1 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

виконується при $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Отже, виберемо $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, де $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ — ціла частина числа $\frac{1}{\varepsilon}$. Тоді

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \quad \forall n > N$: $|x_n - 1| < \varepsilon$, а це означає, що $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$.

Розглянемо ***геометричний зміст границі послідовності.***

Розмістимо члени послідовності $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ на числовій прямій (рис. 4.12).

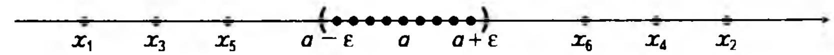


Рис. 4.12

Нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ рівносильна нерівності $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$, або $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, тобто $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Проміжок $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ називають ***ε-околом*** точки a. Отже, число a є границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, починаючи з якого ($n > N$), всі члени послідовності потрапляють в ε-окіл точки a, хай би який вузький він був. Поза цим околом знаходиться лише скінченне число членів даної послідовності.

Розглянемо застосування поняття границі числової послідовності в економічній теорії.

4.2.2. Павутинна модель ринку

Ця модель дає змогу дослідити стійкість цін та обсягів товарів на ринку, що описуються традиційними кривими попиту й пропозиції за наявності запізнення в часі (лага).

Нехай виробник (наприклад, деяка фірма) визначає пропозицію товару в поточному періоді t на підставі цін, які було встановлено в попередньому періоді $(t - 1)$, тобто обсяг пропозиції $s(t)$ залежить від ціни товару в попередньому періоді: $s(t) = s_t(p_{t-1})$. Отже, у функцію пропозиції включається часовий лаг тривалістю в одиницю часу (наприклад, один рік). Справді, рішення щодо обсягу виробництва приймається з урахуванням поточних цін, але виробничий цикл має певну тривалість, і відповідне цьому рішення пропозиції на ринку з'являється по завершенні даного циклу. Оскільки попит характеризує залежність обсягу попиту на товар від ціни товару в даному періоді, то $q(p) = q_t(p_t)$. Таким чином, динаміку ціни можна описати системою рівнянь $s(t) = s_t(p_{t-1})$, $q_t = q_t(p_t)$, $q_t = s_t$ або одним рівнянням

$$q_t(p_t) = s_t(p_{t-1}), \tag{4.1}$$

звідки можна знайти значення ціни p_t у поточний період часу за відомим значенням p_{t-1} у попередній період часу. Схема розв'язання проста:

$$q_0 \to p_0 = q^{-1}(p_0) \to q_1 = s(p_0) \to p_1 = q^{-1}(p_1) \to q_2 = s(p_1) \ldots,$$

де q^{-1} — обернена функція попиту.

Нехай початкову ціну p_1 називає виробник (у найпростішому випадкові він і є продавцем). Ціна p_1 вища за рівноважну (оскільки будь-який виробник намагається одержати максимальний прибуток зі свого виробництва). Покупець оцінює попит q_1 за цієї ціни й визначає свою ціну p_2, за якої попит q_1 дорівнює пропозиції. Ціна p_2 нижча, ніж рівноважна (оскільки будь-який покупець намагається придбати товар якнайдешевше). Своєю чергою, виробник оцінює попит q_2, що відповідає ціні p_2, і визначає свою ціну p_3, за якою попит дорівнює пропозиції; ця ціна вища від рівноважної. Процес торгу, що продовжується за певних умов, приводить до стійкого наближення до рівноважної ціни, тобто до «скручування» спіралі (рис. 4.13).

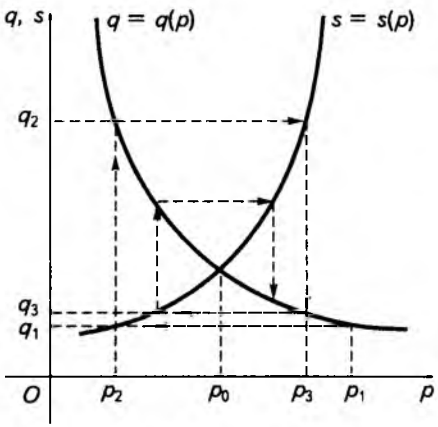


Рис. 4.13

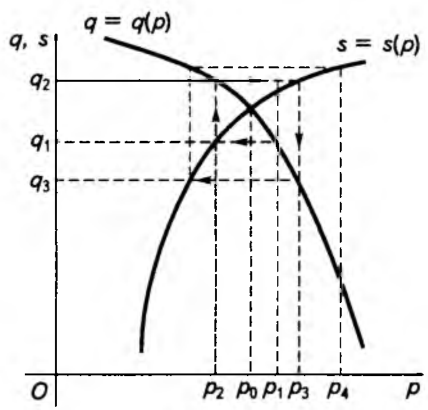


Рис. 4.14

Якщо розглядати числову послідовність, яка складається з цін у процесі торгу p_1, p_2, p_3, ... p_n, ..., то границею цієї послідовності є рівноважна ціна p_0, тобто $p_0 = \lim_{n\to\infty} p_n$. Але «спіраль» установлення рівноважної ціни не завжди «скручується» до точки p_0. Якщо економіка «хвора», то криві попиту й пропозиції можуть мати інший вигляд, наприклад, як на рис. 4.14, де ілюструється випадок, коли пропозиція явно недостатня, а купівельна спроможність населення дуже низька. У цьому разі рівноважна ціна p_0 нестійка в тому розумінні, що процес торгу «розкручує» спіраль цін від ціни p_0, покупцеві не вдається втримати ціну, й у результаті такого торгу виграє виробник. Така ситуація

можлива, якщо виробник є монополістом. Тоді рівноважну ціну можна втримати лише неринковими засобами (наприклад, державним втручанням).

Розглянемо окремий випадок ***павутинної моделі, в якій функції попиту й пропозиції лінійні***:

$$s(p) = a + bp_{t-1}, \quad q(p) = c - dp_t.$$

Тут $b > 0$, оскільки функція пропозиції зростаюча; $d > 0$, оскільки функція попиту спадна; $c > a > 0$, тобто $q(0) > s(0) > 0$ (вважаємо, що за нульової ціни попит перевищує пропозицію).

Запишемо умову рівноваги:

$$q(p_t) = s(p_{t-1}), \text{ або } c - dp_t = a + bp_{t-1}.$$

Спочатку знайдемо рівноважну ціну p^* та рівноважний обсяг виробництва q^*. Вони задовольняють рівняння $q^* = c - dp^* = a + bp^*$, звідки

$$p^* = \frac{c-a}{b+d}, \quad q^* = \frac{bc-ad}{b+d}.$$

Далі дослідимо тенденцію цін та обсягів виробництва в тому випадку, коли початкова точка не збігається з рівноважною. Цю задачу можна розв'язати графічно й дістати «павутину», що підтверджує назву моделі.

Задавши певні початковий обсяг товару й ціну, які не дорівнюють рівноважним, послідовно наноситимемо точки відповідно до процедури розрахунку за моделлю й сполучатимемо їх горизонтальними та вертикальними прямими. З графічного аналізу можна дістати такі результати. Якщо крива пропозиції нахилена крутіше, ніж крива попиту ($b < d$), то рівновага на такому ринку буде стійкою (рис. 4.15). Якщо крива попиту нахилена крутіше, ніж крива пропозиції ($b > d$), то рівновага на ринку буде нестійкою (рис. 4.16). За рівного нахилу кривих попиту й пропозиції ($b = d$) ціни на ринку регулярно коливатимуться зі сталою амплітудою (рис. 4.17).

Перейдемо до математичного аналізу моделі. Виразивши p_t через p_{t-1}, матимемо рекурентне співвідношення

$$p_t = \frac{c-a}{d} - \frac{b}{d} p_{t-1}.$$

Послідовно застосовуючи його, знаходимо

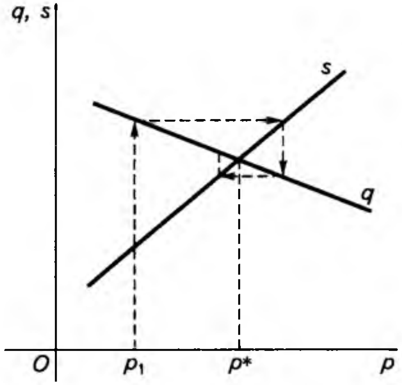


Рис. 4.15

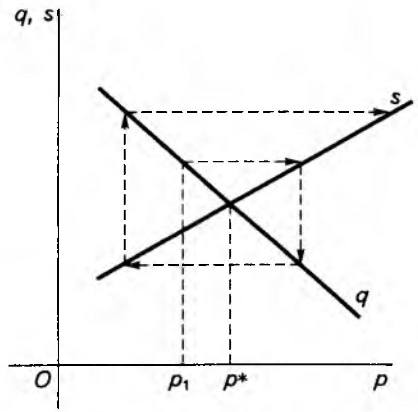


Рис. 4.16

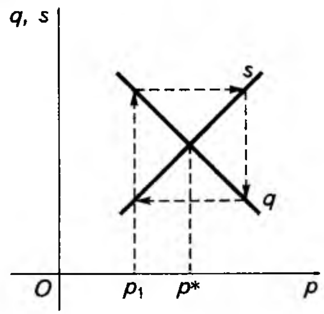


Рис. 4.17

$$p_1 = \frac{c-a}{d} - \frac{b}{d} p_0,$$

$$p_2 = \frac{c-a}{d} - \frac{b}{d}\left[\frac{c-a}{d} - \frac{b}{d} p_0\right] = \frac{c-a}{d}\left[1 - \frac{b}{d}\right] + \left(\frac{b}{d}\right)^2 p_0$$

або в загальному випадкові

$$p_t = \frac{c-a}{d}\left[1 - \frac{b}{d} + \left(\frac{b}{d}\right)^2 + \ldots + (-1)^t \left(\frac{b}{d}\right)^{t-1}\right] + (-1)^t \left(\frac{b}{d}\right)^t p_0.$$

Вираз у квадратних дужках є сумою t членів геометричної прогресії. Використаємо формулу суми n членів геометричної прогресії $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$. Якщо $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$.

Для павутинної моделі $q = -\frac{b}{d}$, $a_1 = \frac{c-a}{d}$, звідки дістаємо вираз для ціни p_t у будь-який момент часу t:

$$p_t = \frac{c-a}{d}\frac{1-(-1)^t (b/d)^t}{1+b/d} + (-1)^t \left(\frac{b}{d}\right)^t p_0.$$

Очевидно, що при $\frac{b}{d} < 1$, тобто за крутішого нахилу кривої пропозиції, ніж кривої попиту, $\left(\frac{b}{d}\right)^t \to 0$ при $t \to \infty$, а $p_t \to \frac{c-a}{b+d} = p^*$, і рівновага є стійкою. Якщо $\frac{b}{d} > 1$, тобто крутіший нахил кривої попиту, то $\left(\frac{b}{d}\right)^t \to \infty$ при $t \to \infty$, і процес розбігається (рівновага нестійка). При $\frac{b}{d} = 1$, тобто $b = d$, значення p_t коливаються навколо рівноважного значення.

4.2.3. Нескінченно малі й нескінченно великі послідовності

➡ **Означення 4.13.** *Якщо границя числової послідовності дорівнює нулю, то таку послідовність називають* ***нескінченно малою при n → ∞***, тобто, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \ \exists N\ \ \forall n > N\colon |\alpha_n| < \varepsilon$.

■ **Приклад 4.10.** *Розглянемо послідовність $x_n = \frac{1}{n}$. Покажемо, що вона нескінченно мала при $n \to \infty$.*

Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$. Із нерівності $|\alpha_n| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ маємо, що $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Якщо вибрати $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, то для всіх $n > N$ виконуватиметься нерівність $|\alpha_n| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$. Отже, $\forall\varepsilon > 0 \ \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \ \forall n > N$: $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$.

Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

✓ *Зауваження 4.1.* Якщо існує границя послідовності $\{x_n\}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то послідовність $\{\alpha_n\} = \{x_n - a\}$ є нескінченно малою при $n \to \infty$, оскільки $\forall\varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N$: $|x_n - a| < \varepsilon$. Тому збіжну послідовність $\{x_n\}$, яка має границю a, можна подати у вигляді

$$x_n = a + \alpha_n, \tag{4.2}$$

де α_n — нескінченно мала при $n \to \infty$.

Співвідношення (4.2) часто використовують, доводячи теореми про границі.

➡ **Означення 4.14.** *Послідовність $\{x_n\}$ називають **нескінченно великою при $n \to \infty$**, якщо для довільного числа $E > 0$ існує такий номер N, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > E$.*

Очевидно, що нескінченно велика послідовність не має скінченної границі. Тому кажуть, що вона має нескінченну границю й записують так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ ($-\infty$ або $+\infty$).

■ **Приклад 4.11.** *Розглянемо послідовність $x_n = n$ і покажемо, що вона нескінченно велика при $n \to \infty$.*

Виберемо довільне число $E > 0$. Із нерівності $|x_n| = |n| > E$ дістанемо, що $n > E$. Якщо взяти $N = [E]$, то $\forall n > N$ виконується нерівність $|x_n| > E$, тобто $\forall\varepsilon > 0 \ \exists N = [E] \ \forall n > N$: $|x_n| > E$. Це означає, що послідовність нескінченно велика при $n \to \infty$.

ТЕОРЕМА 4.2
(про зв'язок між нескінченно малими й нескінченно великими послідовностями)

Якщо послідовність $\{x_n\}$ нескінченно мала при $n \to \infty$, то послідовність $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ нескінченно велика при $n \to \infty$. І навпаки, якщо послідовність $\{x_n\}$ нескінченно велика при $n \to \infty$, то послідовність $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ нескінченно мала при $n \to \infty$.

Доведення

Нехай послідовність $\{x_n\}$ нескінченно велика при $n \to \infty$. Для довільно взятого числа $\varepsilon > 0$ покладемо $E = \frac{1}{\varepsilon}$. За означенням для цього E існує такий номер N, що при $n > N$: $|x_n| > E$. Звідси дістанемо $\left|\frac{1}{x_n}\right| = \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{E} = \varepsilon$ для всіх $n > N$, тобто послідовність $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ є нескінченно малою при $n \to \infty$.

Друга частина теореми доводиться аналогічно.

Основні властивості нескінченно малих послідовностей

① *Алгебрична сума скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.*

② *Добуток скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.*

③ *Добуток нескінченно малої послідовності на обмежену послідовність є нескінченно малою послідовністю.*

④ *Добуток нескінченно малої послідовності на стале число є нескінченно малою послідовністю.*

Ці властивості легко довести, користуючись означеннями.

4.2.4. Основні властивості збіжних послідовностей

ТЕОРЕМА 4.3

Збіжна послідовність має лише одну границю.

Доведення

Доводитимемо від супротивного. Припустимо, що послідовність $\{a_n\}$ має дві різні границі $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ і $a \neq b$. Тоді $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1\ \ \forall n > N_1 : |a_n - a| < \varepsilon$ і $\exists N_2\ \ \forall n > N_2 : |a_n - b| < \varepsilon$.

Виберемо $N = \max\{N_1; N_2\}$. Тоді $\forall n > N$

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| =$$

$$= |a_n - a| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon ,$$

а це означає, що $a = b$.

Теорему доведено.

ТЕОРЕМА 4.4

Всяка збіжна послідовність обмежена.

Доведення

Якщо послідовність збіжна, то вона має границю $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. За означенням $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \ \forall n > N: |a_n - a| < \varepsilon$ або $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$, або $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Тобто в ε-околі $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ точки a знаходяться всі члени a_n для всіх $n > N$, а поза ε-околом точки залишається скінченне число членів послідовності $a_1, a_2, ..., a_{N-1}$. Виберемо число $C = \max\{|a| + \varepsilon; |a_1|, ..., |a_N|\}$. Тоді, очевидно, $|a_n| < C$ для всіх натуральних n, а це означає, що послідовність обмежена.

Теорему доведено.

✓ *Зауваження 4.2.* Обернене твердження, взагалі кажучи, невірне. Обмежена послідовність може бути розбіжною. Наприклад, послідовність $x_n = (-1)^n$ обмежена, але границі не має.

Нехай задано дві послідовності $\{a_n, n \geq 1\}$ і $\{b_n, n \geq 1\}$. Тоді з них можна утворити нові послідовності за допомогою арифметичних дій над відповідними їхніми членами:

$$\{a_n \pm b_n\} = a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3, ..., a_n \pm b_n, ...$$

$$\{a_n b_n\} = a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, ..., a_n b_n, ...$$

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, ..., \frac{a_n}{b_n}, ..., \text{ якщо } b_n \neq 0.$$

ТЕОРЕМА 4.5

(про арифметичні дії над границями)

Якщо послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ збіжні, тобто існують границі $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$, якщо $b \neq 0$.

Доведення

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то з рівності (4.2) дістанемо $a_n = a + \alpha_n$ і $b_n = b + \beta_n$, де α_n і β_n – нескінченно малі послідовності при $n \to \infty$.

Тоді маємо:

1) $(a_n \pm b_n) - (a \pm b) = (a_n - a) \pm (b_n - b) = \alpha_n \pm \beta_n$.

За властивостями нескінченно малих послідовностей послідовність $\{a_n \pm b_n\}$ нескінченно мала при $n \to \infty$, тому послідовність $\{(a_n \pm b_n) - (a \pm b)\}$ також нескінченно мала при $n \to \infty$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$;

2) $a_n b_n - ab = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) - ab = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n - ab =$
$= a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$.

За властивостями нескінченно малих послідовностей послідовності $\{a_n b_n\}$, $\{b\alpha_n\}$, $\{\alpha_n\beta_n\}$ нескінченно малі при $n \to \infty$, тому послідовність $\{a_n b_n - ab\}$ нескінченно мала при $n \to \infty$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$;

3) якщо $b \neq 0$, то елементи послідовності $\{b_n\}$ не перетворюються в нуль, починаючи з деякого номера N, тому частка $\frac{a_n}{b_n}$ має зміст при всіх $n > N$. Тоді

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a_n b - ab_n}{bb_n} = \frac{b(a+\alpha_n) - a(b+\beta_n)}{bb_n} =$$

$$= \frac{ab + b\alpha_n - ab - a\beta_n}{bb_n} = \frac{1}{b_n}\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right).$$

За властивостями нескінченно малих послідовностей послідовність $\left\{\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right\}$ нескінченно мала при $n \to \infty$.

Покажемо, що послідовність $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ обмежена. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то для $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ $\exists N\ \forall n > N: |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$. Тому

$$|b_n| = |b - (b - b_n)| \geq |b| - |b_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}.$$

Оскільки $|b_n| > \frac{|b|}{2}$, то $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$ при всіх $n > N$. Тоді послідовність $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ обмежена. Це означає, що послідовність $\left\{\frac{1}{b_n}\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right)\right\}$ нескінченно мала як добуток нескінченно малої послідовності на обмежену послідовність.

Отже, послідовність $\left\{\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right\}$ нескінченно мала при $n \to \infty$, а це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Теорему доведено.

♦ **Наслідок.** *Якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = ca$, *де* $c = \text{const}$.

4.2.5. Граничний перехід у нерівностях

ТЕОРЕМА 4.6

Якщо члени збіжної послідовності $\{a_n\}$ задовольняють нерівність $a_n \geq b$ (або $a_n \leq b$) для всіх n і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $a \geq b$ (або $a \leq b$).

Доведення

Доводитимемо від супротивного. Припустимо, що $a \leq b$. Виберемо $\varepsilon = b - a > 0$. Тоді $\exists N\ \forall n > N: |a_n - b| < \varepsilon = b - a$. Це рівносильно $-(b - a) \leq a_n - a \leq b - a$, тобто $a_n \leq b$, що суперечить умові.

Теорему доведено.

♦ **Наслідок 1.** *Якщо елементи збіжних послідовностей* $\{a_n\}$ *і* $\{b_n\}$ *задовольняють нерівність* $a_n \leq b_n$, *починаючи з деякого номера, то їхні границі* $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *і* $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *задовольняють нерівність* $a \leq b$.

Справді, починаючи с деякого номера, елементи послідовності $\{b_n - a_n\}$ невід'ємні. Тоді за теоремою

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = b - a \geq 0.$$

Отже, $b \geq a$.

♦ **Наслідок 2.** *Якщо елементи збіжної послідовності* $\{a_n\}$ *знаходяться на відрізку* $[c, b]$, *то й границя* $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *також належить відрізку* $[c, b]$, *тобто* $a \in [c, b]$.

Справді, якщо $c \leq a_n \leq b$ для всіх n, то $c \leq a \leq b$.

ТЕОРЕМА 4.7
(про три послідовності)

Якщо існують границі послідовностей $\{x_n\}$ та $\{z_n\}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ і для всіх n виконується нерівність $x_n \leq y_n \leq z_n$ і послідовність $\{y_n\}$ збіжна, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Доведення

Оскільки $a = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$, то $\forall\varepsilon > 0$

$$\exists N_1\ \ \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

$$\exists N_2\ \ \forall n > N_2 : |z_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon.$$

Виберемо $N = \max\{N_1; N_2\}$. Тоді для всіх $n > N$

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |y_n - a| < \varepsilon.$$

Це означає, що $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

Теорему доведено.

Сформулюємо й доведемо ознаку збіжності монотонної послідовності.

ТЕОРЕМА 4.8
(Вейєрштрасса)

Будь-яка монотонна обмежена послідовність має границю.

Доведення

Розглянемо множину значень послідовності $\{x_n\}$. Ця множина обмежена, тому вона має точну верхню й точну нижню межі. Для визначеності вважатимемо, що послідовність $\{x_n\}$ монотонно зростає.

Позначимо $M = \sup\{x_n\}$ і доведемо, що $\lim_{n\to\infty} x_n = M$.

При всіх n за умовою теореми виконується нерівність $x_n \le M$. Виберемо довільне число $\varepsilon > 0$. За означенням точної верхньої межі можна знайти значення x_N таке, що $x_N > M - \varepsilon$. Оскільки послідовність монотонно зростає, то при $n > N$ маємо $x_n > x_N > M - \varepsilon$.

Із нерівностей $M - \varepsilon < x_n \le M$ випливає: $M - \varepsilon < x_n < M + \varepsilon$, тобто $|x_n - M| < \varepsilon$. Це означає, що $\lim_{n\to\infty} x_n = M$.

Теорему доведено.

- **Наслідок 1.** *Монотонно зростаюча обмежена зверху послідовність має границю.*
- **Наслідок 2.** *Монотонно спадна обмежена знизу послідовність має границю.*

4.2.6. Число *e*

Розглянемо послідовність чисел $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Обчислимо кілька перших членів послідовності:

$$x_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2,\quad x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25,$$

$$x_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2{,}37, \ldots$$

Доведемо, що послідовність $\{x_n\}$ монотонно зростає й обмежена зверху.

Застосуємо *формулу бінома Ньютона*:

$$\boxed{(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,} \tag{4.3}$$

де $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — біноміальні коефіцієнти. Тоді

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}{2!}\frac{1}{n^n}. \tag{4.4}$$

Скоротивши дроби, маємо

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Замінімо в цьому розкладі n на $n + 1$. Тоді число доданків збільшиться на одиницю. Матимемо

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \ldots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Оскільки $n < n + 1$, то $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1} \Rightarrow 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$ і для довільного k $(1 \le k < n)$ виконується нерівність $1 - \frac{k}{n} < 1 - \frac{k}{n+1}$. Тому $x_n < x_{n+1}$ для довільного $n \in N$. Це означає, що послідовність $\{x_n\}$ монотонно зростає.

Доведемо обмеженість послідовності $\{x_n\}$.

Скористаємося нерівністю $n! > 2^{n-1}$ для довільного $n \in N$. У формулі (4.4) значення кожного виразу в дужках менше за одиницю. Отже,

$$2 < x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{\substack{\text{геометрична прогресія} \\ \text{зі знаменником } q = \frac{1}{2}}} =$$

$$= 2 + \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 3 - \frac{1}{2^n} < 3,$$

тобто послідовність $\{x_n\}$ обмежена: $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$. За теоремою Вейєрштрасса послідовність має границю й

$$\boxed{\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.} \tag{4.5}$$

Число e ірраціональне, $e \approx 2{,}7182$ (літерою e це число позначив Л. Ейлер).

4.2.7. Задача про неперервне нарахування процентів

Нехай початковий вклад у банк становив S_0 (грн.). Банк нараховує $p(\%)$ річних. Треба знайти розмір вкладу S_t через t років.

У разі використання *простих процентів* розмір вкладу щороку збільшуватиметься на одну й ту саму величину $\frac{p}{100}S_0$, тобто

$$S_1 = S_0\left(1 + \frac{p}{100}\right), \quad S_2 = S_0\left(1 + \frac{2p}{100}\right), \ \ldots, \quad S_t = S_0\left(1 + \frac{tp}{100}\right).$$

На практиці частіше застосовуються *складні проценти*. В цьому випадку розмір вкладу щороку збільшуватиметься в одне й те саме число $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ разів, тобто

$$S_1 = S_0\left(1 + \frac{p}{100}\right), \quad S_2 = S_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2, \ \ldots, \quad S_t = S_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t.$$

Формули такого типу застосовуються також у демографічних розрахунках (приросту населення) та в економічних прогнозах (збільшення валового національного продукту).

Нехай початковий депозит S_0 покладено в банк під $p = 100\ \%$ річних. Тоді через рік ($n = 1$) сума депозиту становитиме $2S_0$. Припустимо, що через півроку ($n = 2$) рахунок закрито з результатом $S_1 = S_0\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}S_0$, і цю суму знову покладено як депозит у той самий банк. Наприкінці року депозит становив $S_2 = S_0\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25S_0$.

Будемо зменшувати строк розміщення депозиту в банку за умови його подальшого розміщення після вилучення. За щоквартального повторення цих операцій депозит наприкінці року становитиме

$$S_3 = S_0\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \approx 2{,}37S_0.$$

Якщо є можливість повторювати операцію вилучення-розміщення протягом року скільки завгодно разів, то за щомісячного виконання цієї операції ($n = 12$) сума за рік становитиме $S_{12} = S_0\left(1+\dfrac{1}{12}\right)^{12} \approx 2{,}61S_0$; за щоденного відвідування банку ($n = 365$) $S_{365} = S_0\left(1+\dfrac{1}{365}\right)^{365} \approx$ $\approx 2{,}714S_0$; за щогодинної активності ($n = 8760$) $S_{8760} = S_0\left(1+\dfrac{1}{8760}\right)^{8760} \approx$ $\approx 2{,}718S_0$ і т. д. Неважко помітити, що послідовність значень початкового вкладу $\{q_n\} = \left\{\dfrac{S_n}{S_0}\right\}$ збігається з послідовністю, границею якої є число e при $n \to \infty$.

У загальному випадкові, якщо процент нарахування p і рік розбито на n частин, то через t років сума депозиту становитиме

$$S_t = S_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}.$$

Тоді

$$S_t = \lim_{n\to\infty}\left[S_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}\right] = S_0\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}}\right]^{\frac{tp}{100}} = S_0e^{\frac{tp}{100}},$$

або

$$S_t = S_0e^{\frac{tp}{100}}. \qquad (4.6)$$

Розрахунки, виконані за формулою (4.6), називають ***обчисленнями за неперервними процентами***.

✓ *Зауваження 4.3.* Хоча в практичних фінансово-кредитних операціях неперервне нарахування процентів застосовується рідко, проте воно є ефективним у разі аналізу фінансових проблем, зокрема обґрунтування й вибору інвестиційних рішень.

4.2.8. Терема про вкладені відрізки

ТЕОРЕМА 4.9
(про вкладені відрізки)

Нехай задано послідовність відрізків $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ... таких, що кожний наступний лежить у попередньому, тобто $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $n \in N$. Тоді, якщо $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то існує єдина точка, яка належить усім відрізкам цієї послідовності.

Доведення

З умови $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ для довільного $n \in N$ випливає, що $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$ при всіх $n \in N$, тобто послідовність $\{a_n\}$ неспадна й обмежена зверху, а послідовність $\{b_n\}$ незростаюча й обмежена знизу.

Тоді за теоремою Вейєрштасса існують $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c_2$. Оскільки $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n =$ $c_2 - c_1 = 0$, тобто $c_2 = c_1$. Отже, послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ мають спільну границю. Позначимо її через c. Оскільки послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ монотонні, то при будь-яких $n \in N$ виконуються нерівності $a_n \le c \le b_n$, тобто точка c справді належить відрізкам $[a_n, b_n]$.

Доведемо, що точка c єдина. Справді, якби існувала ще одна точка d, яка належала б усім відрізкам, то відрізок із кінцями c і d належав би усім відрізкам; але тоді при будь-якому $n \in N$ виконувалися б нерівності $b_n - a_n \ge |d - c| > 0$, що неможливо, оскільки $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отже, $c = d$.

Теорему доведено.

?

Контрольні запитання

1. Що таке множина?
2. Як позначають множини?
3. Яку з множин називають універсальною?

4. Яку з множин називають порожньою?
5. Яку множину називають підмножиною даної множини?
6. Яку множину називають об'єднанням двох даних множин?
7. Яку множину називають перерізом двох даних множин?
8. Яку множину називають різницею двох даних множин?
9. Які числові множини ви знаєте?
10. Яке означення числової послідовності?
11. Які числові послідовності називають монотонними?
12. Які числові послідовності називають обмеженими?
13. Яку послідовність називають арифметичною прогресією?
14. Яку послідовність називають геометричною прогресією?
15. Як формулюється означення границі числової послідовності?
16. Яку з послідовностей називають нескінченно малою?
17. Який геометричний зміст границі числової послідовності?
18. Який економічний зміст границі числової послідовності?
19. У чому полягає суть павутинної моделі ринку?
20. Які властивості нескінченно малих послідовностей?
21. Яку з послідовностей називають нескінченно великою?
22. Який зв'язок існує між нескінченно малими й нескінченно великими послідовностями?
23. Яку послідовність називають збіжною, а яку — розбіжною?
24. Які основні властивості збіжних послідовностей?
25. Як здійснюється граничний перехід у нерівностях?
26. Як формулюється теорема про три послідовності?
27. Як формулюється теорема Веєрштрасса?
28. Як визначається число e?
29. У чому полягає суть задачі про неперервне нарахування процентів?
30. Як формулюється теорема про вкладені відрізки?

Приклади розв'язування задач

1 *Задано множини A, B і C. Визначити, які з наведених тверджень правильні, а які ні:*

① $(A \subset A)$;

② $(A \subset \varnothing) \Rightarrow (A = \varnothing)$;

③ $((A \subset B)$ *і* $(A \subset B)) \Leftrightarrow (A = B)$;

④ $((A \subset B)$ *і* $(B \supset C)) \Rightarrow (A \supset C)$.

① Твердження правильне, оскільки кожен елемент множини A належить до множини A.

② Твердження правильне, оскільки порожня множина $\varnothing$ не містить жодного елемента, а множина A є її підмножиною. Тому множина A також не містить жодного елемента й збігається з порожньою множиною.

③ Твердження правильне, оскільки кожен елемент множини A належить до множини B, і навпаки, кожен елемент множини B належить до множини A. Тому за означенням такі множини рівні.

④ Твердження неправильне, оскільки кожен елемент множини A є елементом множини B, а кожен елемент множини C є елементом множини B, а це зовсім не означає, що кожен елемент множини C є елементом множини A.

2 *Фірма A випускає товари a, b, c, d, а фірма B — товари b, c, d. Оптова база закуповує товари обох фірм. Знайти множину тих товарів, які база закуповує: ① або на фірмі A, або на фірмі B; ② тільки на фірмі A; ③ тільки на фірмі B; ④ одночасно на фірмах A і B.*

Позначимо множини: $A = \{a, b, c, d\}$ і $B = \{b, c, d\}$.

① Множина тих товарів, які база закуповує або на фірмі A, або на фірмі B, є об'єднанням множин $A = \{a, b, c, d\}$ і $B = \{b, c, d\}$. Тоді $A \cup B = \{x \mid x \in A$ або $x \in B\}$, тобто $A \cup B = \{a, b, c, d\} = A$.

② Множина тих товарів, які база закуповує тільки на фірмі A, є різницею двох множин A і B: $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ і $x \notin B\}$. У нашому випадкові ця множина складається лише з одного елемента $A \setminus B = \{a\}$.

③ Множина тих товарів, які база закуповує тільки на фірмі B, є різницею двох множин B і A: $B \setminus A = \{x \mid x \in B$ і $x \notin A\}$. В нашому випадкові ця множина не містить жодного елемента, тобто $B \setminus A = \varnothing$.

④ Множина тих товарів, які база закуповує водночас на фірмах A і B, є перерізом множин $A = \{a, b, c, d\}$ і $B = \{b, c, d\}$, тобто множиною їхніх спільних елементів: $A \cap B = \{x \mid x \in A$ і $x \in B\}$. У нашому випадкові ця множина збігається з множиною B. Отже, $A \cap B = B = \{b, c, d\}$.

3 *Знайти загальний член послідовності* 1, 4, 9, 16, 25, ...

Легко бачити, що

$$a_1 = 1 = 1^2,\; a_2 = 4 = 2^2,\; a_3 = 9 = 3^2,\; a_4 = 16 = 4^2,\; a_5 = 25 = 5^2, \ldots$$

Отже, $a_n = n^2$.

4 *Знайти загальний член послідовності* $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$

Маємо

$$|a_1| = |1| = \frac{1}{1},\quad |a_2| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} = \frac{1}{1+2},\quad |a_3| = \left|\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5} = \frac{1}{2\cdot 2+1},$$

$$|a_4| = \left|-\frac{1}{7}\right| = \frac{1}{7} = \frac{1}{2\cdot 3+1},\quad |a_5| = \left|\frac{1}{9}\right| = \frac{1}{9} = \frac{1}{2\cdot 4+1}, \ldots$$

Отже,

$$|a_n| = \frac{1}{2(n-1)+1} = \frac{1}{2\cdot n-1}.$$

Оскільки $a_1 > 0$, $a_2 < 0$, $a_3 > 0$ і т. д., то загальний член послідовності

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2\cdot n-1}.$$

5 *Визначити, чи буде послідовність* $a_n = \frac{1}{2^n}$ *монотонною.*

Оскільки

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 2^{n+1}}{2^n\cdot 2^{n+1}} = \frac{2^n(1-2)}{2^n\cdot 2^{n+1}} = -\frac{1}{2^{n+1}} < 0,$$

то $a_{n+1} < a_n$ для довільного $n \in N$. Отже, дана послідовність монотонно спадна.

6 *Визначити, які з послідовностей обмежені:*

① $a_n = \sin 2^n$; ② $a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$.

① Оскільки $|a_n| = |\sin 2^n| \le 1$, то послідовність обмежена.

② Оскільки справедлива рівність $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, то

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Очевидно, що $0 < a_n < 1$, тобто послідовність обмежена знизу числом 0, а зверху — числом 1. Для довільного $n \in N$ маємо $|x_n| \le 1$. Отже, послідовність обмежена.

7 *Використовуючи означення границі послідовності, показати, що* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$.

Розглянемо послідовність $x_n = \frac{1}{10^n}$. У загальному випадкові для довільного $\varepsilon > 0$ нерівність $|x_n - a| = \left|\frac{1}{10^n} - 0\right| = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$ виконується при $n > \lg\frac{1}{\varepsilon}$. Отже, виберемо $N = \left[\lg\frac{1}{\varepsilon}\right]$, де $\left[\lg\frac{1}{\varepsilon}\right]$ — ціла частина числа $\lg\frac{1}{\varepsilon}$.

Тоді $\forall\varepsilon > 0\ \exists N = \left[\lg\frac{1}{\varepsilon}\right]\ \forall n > N\colon \left|\frac{1}{10^n} - 0\right| < \varepsilon$, а це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{10^n} = 0$.

8 *Використовуючи означення границі послідовності, показати, що* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k} = 0$, $k \in N$.

У даному випадкові можна знайти вираз для числа N залежно від ε. Для довільного $\varepsilon > 0$ нерівність $|x_n - a| = |x_n - 0| = \frac{1}{n^k} < \varepsilon$ виконується при $n > \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$. Виберемо $N = \left[\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}\right]$, де $\left[\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}\right]$ — ціла частина числа $\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$. Тоді $\forall\varepsilon > 0\ \exists N = \left[\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}\right]\ \forall n > N\colon |x_n - 0| < \varepsilon$, а це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k} = 0$.

9 *Обчислити границю послідовності із загальним членом* $a_n = \frac{5n^5 + 3n^3 + 2}{2n^5 - n^4 - 1}$.

Потрібно знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^5 + 3n^3 + 2}{2n^5 - n^4 - 1}$. Перетворимо загальний член послідовності, поділивши почленно чисельник і знаменник на n^5:

$$a_n = \frac{5n^5+3n^3+2}{2n^5-n^4-1} = \frac{5+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{2}{n^5}}{2-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^5}}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{2}{n^5}\right)=5,\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^5}\right)=2\neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{5n^5+3n^3+2}{2n^5-n^4-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{5+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{2}{n^5}}{2-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^5}} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

10 *Обчислити границю* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n+4}{4n^2+n-3}$.

Поділивши чисельник і знаменник на n^2, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+4}{4n^2+n-3} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^2}}{4+\dfrac{1}{n}-\dfrac{3}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\dfrac{1}{n}-\dfrac{3}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{3+2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+4\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{4+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}-3\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}} = \frac{3}{4}.$$

11 *Обчислити границю* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}$.

Поділимо чисельник і знаменник на n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cos n}{1+1/n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\lim\limits_{n\to\infty}\cos n}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

Ми врахували, що послідовність $\{\cos n\}$ обмежена, тобто для всіх $n\in N$ виконується нерівність $|\cos n|\le 1$, і послідовності $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ і $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ нескінченно малі при $n\to\infty$.

12 *Обчислити границю* $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

Помножимо й поділимо чисельник і знаменник на спряжений вираз:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{1+1/n}+1)} = \frac{0}{1+1} = 0.$$

13 *Довести, що послідовність $x_n = q^n$: ① нескінченно мала при $|q|<1$; ② нескінченно велика при $|q|>1$.*

① Якщо $q=0$, то справедлива рівність $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Нехай $\varepsilon>0$ довільне й $0<|q|<1$. Тоді, користуючися нерівністю Бернуллі $(1+x)^n\ge 1+nx$ при $n>1$, дістанемо

$$\frac{1}{|q|^n} = \left(1+\left(\frac{1}{|q|^n}-1\right)\right)^n > 1+n\left(\frac{1}{|q|}-1\right) > n\left(\frac{1}{|q|}-1\right).$$

Звідси

$$|q|^n = |q^n| < \frac{|q|}{n(1-q)} < \varepsilon.$$

Ця нерівність виконується $\forall n > \dfrac{|q|}{\varepsilon(1-|q|)}$. Виберемо $N = \left[\dfrac{|q|}{\varepsilon(1-|q|)}\right]$.

Тоді для всіх $n>N$ виконується нерівність $|q^n|<\varepsilon$. Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ при $|q|<1$, тобто послідовність нескінченно мала при $n\to\infty$.

② Нехай $|q|>1$ і $\Delta>0$ довільне. Тоді з нерівності

$$|q|^n > ((1+(|q|-1))^n > 1+n(|q|-1) > n(|q|-1) > \Delta$$

знаходимо

$$|q|^n > \Delta \ \ \forall n > \frac{\Delta}{|q|-1}.$$

Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ при $|q|>1$, тобто послідовність нескінченно велика при $n\to\infty$.

14 ***Нехай попит і пропозиція виражаються лінійними функціями $q(p) = 10 - 2p$ і $s(p) = 4 + p$. Визначити рівноважну ціну. Встановити графічним способом, якою буде павутинна модель ринку.***

Рівноважну ціну можна знайти з умови рівноваги $q(p_0) = s(p_0)$, тобто $10 - 2p_0 = 4 + p_0$. Отже, $p_0 = 2$.

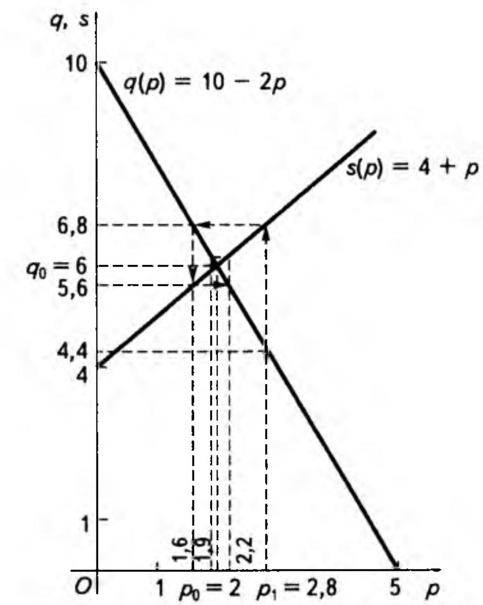


Рис. 4.18

Виразимо ціну через попит: $p = 5 - \frac{1}{2}q$. Нехай, наприклад, початкова ціна $p_1 = 2{,}8$. Оскільки попит $q_1(2{,}8) = 10 - 2\cdot 2{,}8 = 4{,}4$, а пропозиція $s_1(2{,}8) = 4 + 2{,}8 = 6{,}8$, то $q_1 < s_1$. Тоді ціна зменшується до p_2 так, щоб $s_1 = q_2$, тобто $p_2 = 5 - \frac{1}{2}6{,}8 = 1{,}6$. Але за ціни $p_2 = 1{,}6$ пропозиція $s_2(1{,}6) = 4 + 1{,}6 = 5{,}6$ менша, ніж попит $q_2 = 6{,}8$. Це спричиняє зростання ціни до $p_3 = 5 - \frac{1}{2}5{,}6 = 2{,}2$ так, щоб $s_2 = q_3$. Але за ціни $p_3 = 2{,}2$ попит $q_3(2{,}2) = 10 - 2\cdot 2{,}2 = 5{,}6$ менший, ніж пропозиція $s_3(2{,}2) = 4 + 2{,}2 = 6{,}2$, що зумовлює падіння ціни до $p_3 = 1{,}9$. Продовжуючи цей процес, дістанемо послі-

довність цін p_n: 2,8; 1,6; 2,2; 1,9; 2,05; 1,975; ... та попиту q_n: 4,4; 6,8; 5,6; 6,2; 5,9; 6,05; ... Зобразимо точки з координатами $(p_i;\, q_i)$ на графіку (рис. 4.18). Тоді $p_n \to p_0 = 2$, $q_n \to q_0 = 6$ при $n \to \infty$. Маємо точку рівноваги (2; 6).

15 ***Обчислити границю:***

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^n = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n/4}\right)^4 = e^4.$$

16 ***Обчислити границю:***

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{-n} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{-1/2} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

17 ***Нехай межа інфляції становить 1 % на день. Визначити, наскільки зменшиться початкова сума вкладу через півроку.***

Застосування формули складних процентів дає $S = S_0\left(1-\frac{1}{100}\right)^{182}$, де S_0 — початкова сума; 182 — число днів у півріччі. Перетворимо цей вираз:

$$S = S_0\left[\left(1-\frac{1}{100}\right)^{-100}\right]^{-\frac{182}{100}} \approx S_0 e^{-1.82},$$

тобто інфляція зменшить початкову суму майже в 6 разів.

Розділ 5

ФУНКЦІЇ ТА ЇХНІ ГРАФІКИ

5.1
Функції однієї змінної

➡ **Означення 5.1.** Нехай X і Y — деякі числові множини. *Якщо кожному елементові x множини X ($x \in X$) ставиться у відповідність певний елемент y із множини Y ($y \in Y$), то кажуть, що на множині X задано функцію $y = f(x)$. При цьому x називають* ***незалежною змінною (аргументом)****, y —* ***залежною змінною (значенням функції)****, а f означає закон відповідності. Множину $X = D(f)$ називають* ***областю визначення функції****, множину $y = E(f)$ —* ***областю значень функції***. Позначення: $f: X \to Y$

Якщо множину X спеціально не обумовлено, то під областю визначення функції розуміють область допустимих значень (ОДЗ) незалежної змінної x, тобто множину таких значень x, при яких функція $y = f(x)$ має зміст.

■ **Приклад 5.1.** *Знайдемо область визначення функції* $y = x^2 + \sqrt{5 - x}$.

Підкореневий вираз $5 - x \geq 0$, $x \leq 5$. Отже, область визначення функції $D(f) = (-\infty; 5]$.

5.1.1. Способи задання функції

Задати функцію f — означає вказати, як за кожним значенням аргументу x знаходити відповідні значення функції $y = f(x)$. Є кілька способів задання функції.

❑ **Аналітичний спосіб,** який найчастіше застосовується на практиці, полягає в заданні функції формулою.

■ **Приклад 5.2.** *Знайдемо область визначення та область значень функцій.*

① $y = x^2$. Маємо $D(y) = \boldsymbol{R}$, $E(y) = [0; \infty)$;

② $$y = \sin x = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad x > 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad x = 0, \\ -1, & \text{якщо} \quad x < 0. \end{cases}$$

Дістаємо $D(y) = \boldsymbol{R}$, $E(y) = \{-1; 0; 1\}$.

■ **Приклад 5.3.** *Розглянемо взаємозалежність між ціною p деякого товару та попитом q на нього.*

Цю залежність можна виразити, наприклад, формулою $q = 50 - 0{,}06p$.

❑ **Табличний спосіб**, який дуже часто використовується в економіці, полягає в тому, що функціональна залежність задається у вигляді таблиці, в якій для кожного значення x указано відповідне значення y.

■ **Приклад 5.4.** *Функціональну залежність між ціною p товару та попитом q на нього задано у вигляді таблиці:*

p	100	150	200	250	300
q	44	41	38	35	32

Підставивши значення ціни у формулу $q = 50 - 0{,}06p$, дістанемо відповідні значення попиту.

❑ **Графічний спосіб** полягає в заданні функції за допомогою графіка.

➡ **Означення 5.2.** ***Графіком функції*** *$y = f(x)$ називають геометричне місце точок на координатній площині, що мають координати $(x; f(x))$ й у яких абсциси — це значення незалежної змінної x, а ординати — відповідні значення $y = f(x)$.*

■ **Приклад 5.5.** Для побудови графіка функції попиту $q = 50 - 0{,}06p$ треба відкласти значення величин p та q, які дано в таблиці (див. прик-

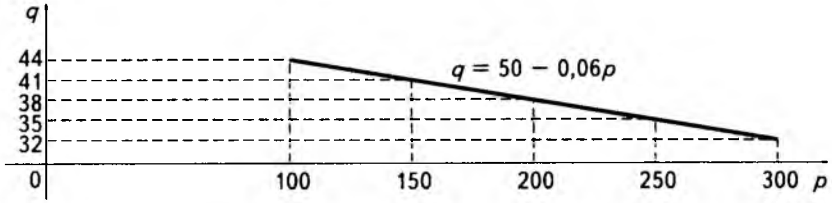


Рис. 5.1

лад 5.4), на відповідних координатних осях і сполучити добуті точки (рис. 5.1).

На практиці графіки зазвичай будують за допомогою спеціальних приладів, наприклад барографа, який реєструє у вигляді кривої на рухомій стрічці зміни атмосферного тиску залежно від висоти над рівнем моря.

❑ **Словесний спосіб** використовується, якщо функція описується правилом її одержання за допомогою слів.

■ **Приклад 5.6.** Функція Діріхле $f(x) = 1$, якщо x — раціональне число, й $f(x) = 0$ — якщо x — ірраціональне число.

✓ *Зауваження 5.1.* Якщо функцію задано аналітично, то неважко перейти до табличного або графічного способу її задання, що потребує певних знань і навичок. Іноді такий перехід удається здійснити лише наближено.

➡ **Означення 5.3.** *Функцію $y = f(x)$ називають **однозначною**, якщо кожному значенню x відповідає тільки одне значення y. Функцію $y = f(x)$ називають **багатозначною**, якщо кожному значенню x відповідає кілька значень y.*

➡ **Означення 5.4.** *Функцію називають **явною**, якщо її задано формулою $y = f(x)$.*

■ **Приклад 5.7.** Функція $y = x^2 + 5x + 6$ явно виражає x через y.

➡ **Означення 5.5.** *Функцію y аргументу x називають **неявною**, якщо її задано рівнянням $F(x, y) = 0$, яке не розв'язне відносно y.*

■ **Приклад 5.8.** Функцію задано рівнянням $x^3 + y^2 - x = 0$. Ця рівність взагалі задає дві функції: $y = \sqrt{x - x^3}$ при $y \geq 0$ і $y = -\sqrt{x - x^3}$ при $y < 0$.

➡ **Означення 5.6.** Нехай x і y — функції однієї незалежної змінної t: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, причому вони визначені й неперервні на заданому проміжку T. Тоді *кажуть, що функцію $y = f(x)$ **задано параметрично***.

■ **Приклад 5.9.** Нехай функцію задано параметрично: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $t \in [0; 2\pi]$. Якщо піднести до квадрата обидві частини рівностей і почленно додати, то дістанемо рівняння $x^2 + y^2 = a^2$ — рівняння кола з центром у початку координат і радіусом $|a|$.

Крім «арифметичних» дій над функціями — додавання, віднімання, множення й ділення, є операції, що дають змогу за даними функціями будувати нові.

❑ **Обернена функція.** Нехай на деякому проміжку D задано функцію $y = f(x)$ і E — область її значень. Візьмемо деяке число y_0 з області E. Тоді в області D обов'язково знайдеться хоча б одне число x_0, при якому дана функція набуває саме значення y_0, так що $y_0 = f(x_0)$. Щоб дістати значення x_0, достатньо через y_0 на осі ординат (рис. 5.2) провести пряму, паралельну осі абсцис. Ця пряма перетне графік функції $y = f(x)$ в одній або кількох точках. Абсциси цих точок і дають шукані значення x (одне з них x_0), при яких функція дорівнює y_0.

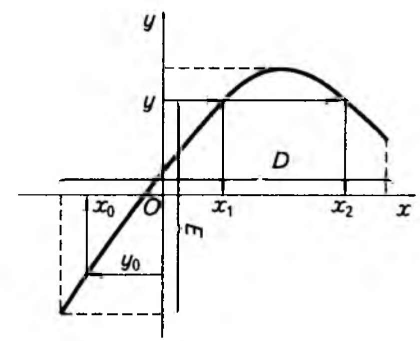


Рис. 5.2

Таким чином, кожному значенню y_0 з області E відповідає одне або кілька значень x, що належать проміжку D. Цим в області D визначається однозначна (якщо кожному y із E відповідає лише одне значення x із D) або многозначна функція $x = g(y)$, яку називають ***оберненою до функції** $y = f(x)$*.

Графіки функції $y = f(x)$ і оберненої до неї функції $x = g(y)$ збігаються, тільки аргумент оберненої функції розглядається по осі Oy. Але оскільки звично аргумент позначати літерою x і відкладати його на осі абсцис, то замінимо позначення x на y і замість рівняння $x = g(y)$ писатимемо $y = g(x)$, і графік функції $y = g(x)$, взагалі кажучи, відрізнятиметься від графіка функції $y = f(x)$.

Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно бісектриси першого й третього координатних кутів — прямої $y = x$.

Сформулюємо *умову існування оберненої функції*.

ТВЕРДЖЕННЯ 5.1

Нехай однозначна функція $y = f(x)$ визначена й монотонно зростає (спадає) на проміжку D і набирає значень із проміжку E. Тоді існує обернена до неї функція $y = g(x)$, яка визначена на проміжку E, однозначна й також зростає (спадає) на проміжку D.

Відшукання оберненої функції зводиться до розв'язування рівняння $y = f(x)$ відносно x. Припустимо, що можна подати розв'язки цього рівняння у вигляді формули $x = g(y)$. Якщо ця формула кожному y з області значень $E(f)$ ставить у відповідність тільки одне значення x, то $x = g(y)$ можна розглядати як функцію, визначену на проміжку E (це й буде обернена функція).

Якщо одному значенню y із проміжку E відповідає кілька значень x, то однозначна обернена функція для $y = f(x)$ на всій області визначення не існує. Але функція $y = f(x)$ має однозначну обернену на кожному проміжку монотонності .

Оскільки традиційно незалежну змінну позначають через x, а значення функції — через y, то, замінивши позначення, дістанемо функцію $y = g(x)$. Часто обернену функцію позначають $y = f^{-1}(x)$.

■ **Приклад 5.10.** Функція $y = \dfrac{2x+3}{5}$ визначена для всіх $x \in (-\infty, +\infty)$, зростає й набирає значень $y \in (-\infty, +\infty)$. Виразимо x через y : $2x + 3 = 5y$, тобто $x = \dfrac{5y-3}{2}$ — обернена, визначена й зростає на всій числовій прямій. Замінимо позначення x на y. Дістанемо функцію $y = \dfrac{5x-3}{2}$, обернену до даної.

■ **Приклад 5.11.** *Вкажемо функції, обернені до заданих.*

① $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$. Виразимо x через y: $x = \log_a y$ або в звичайних позначеннях обернена функція $y = \log_a x$.

② $y = \sin x$. Обернена функція $y = \arcsin x$, $|x| \leq 1$.

❑ **Складна функція.** Нехай функція $y = f(u)$ є функцією аргументу u (f: $U \to Y$), а змінна u — своєю чергою, функцією $u = g(x)$ від змінної x(g: $X \to U$). Тоді на множині X задано функцію $y = h(x) = f(g(x))$, яку називають ***складною***, або ***композицією функцій***, ***суперпозицією функцій, функцією від функції***; при цьому h: $X \to Y$.

■ **Приклад 5.12.** *Розглянемо функцію* $y = \lg(\operatorname{tg} x)$. Тут так звана внутрішня функція $u = \operatorname{tg} x$, а зовнішня — $y = \lg u$.

5.1.2. Властивості функцій

❑ **Парні або непарні функції.**

➡ **Означення 5.7.** *Функцію $y = f(x)$ називають **парною**, якщо для всіх $x \in D(f)$ справджується рівність $f(-x) = f(x)$, і **непарною**, якщо $f(-x) = -f(x)$. У противному разі функцію $y = f(x)$ називають **функцією загального вигляду, або ні парною, ні непарною**.*

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy, а непарної — відносно точки (0; 0).

■ **Приклад 5.13.** ① Для функції $y = x^2$ справджується рівність $y(-x) = (-x)^2 = x^2 = y(x)$. Тому ця функція парна.

② Для функції $y = x^3$ справджується рівність $y(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -y(x)$. Тому ця функція непарна.

③ Функція $y = x^2 + 3x$ ні парна, ні непарна.

❑ **Обмежені функції.**

➡ **Означення 5.8.** *Функцію $y = f(x)$ називають **обмеженою** на деякому проміжку X, якщо існує таке додатне число $C > 0$, що для всіх $x \in D(f)$: $|f(x)| \leq C$. У противному разі функцію називають **необмеженою**.*

■ **Приклад 5.14.** ① Функція $y = \sin x$ обмежена, оскільки виконується нерівність $|\sin x| \leq 1 \quad \forall x \in D(f)$.

② Функція $y = 1/x$ необмежена, оскільки вона набирає значень $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

❑ **Монотонні функції.**

➡ **Означення 5.9.** *Якщо для функції $y = f(x)$ і для будь-яких значень аргументу x_1, $x_2 \in D(f)$ таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність:*

- $f(x_1) < f(x_2)$, *то функцію називають* ***зростаючою*** (рис. 5.3, *а*);
- $f(x_1) > f(x_2)$, *то функцію називають* ***спадною*** (рис. 5.3, *б*);
- $f(x_1) \geq f(x_2)$, *то функцію називають* ***неспадною*** (рис. 5.3, *в*);
- $f(x_1) \leq f(x_2)$, *то функцію називають* ***незростаючою*** (рис. 5.3, *г*).

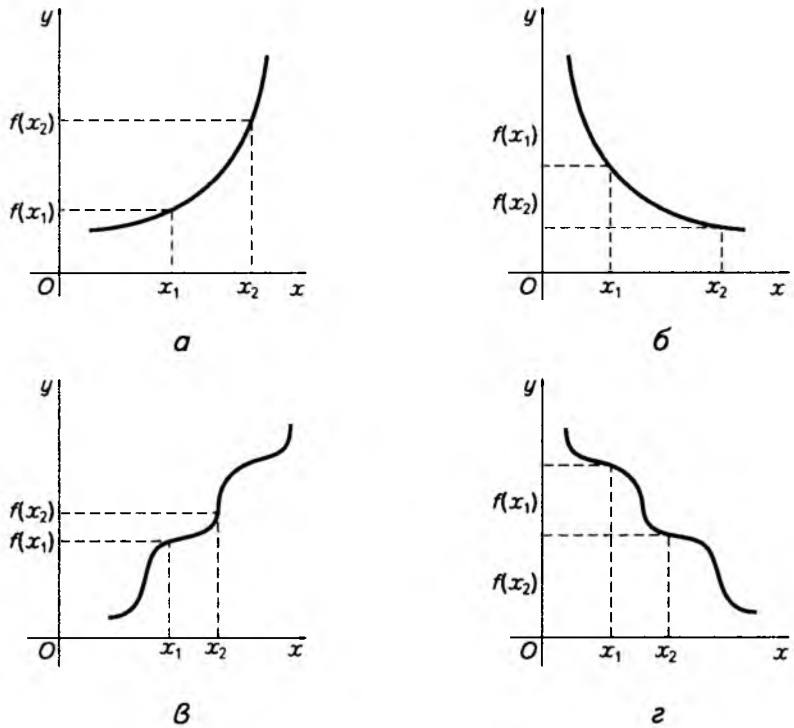


Рис. 5.3

❑ **Періодичні функції.**

➡ **Означення 5.10.** *Функцію $y = f(x)$ називають* ***періодичною*** *з найменшим періодом $T \neq 0$, якщо для всіх x із області визначення функції справджується рівність $f(x - T) = f(x + T) = f(x)$.*

■ **Приклад 5.15.** Функція $y = \sin(x)$ має період $T = 2\pi$, оскільки $\sin(x - 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

5.2 Елементарні функції

Розглянемо властивості найпростіших елементарних функцій, до яких належать: лінійна, квадратична, степенева, показникова, логарифмічна, тригонометричні й обернені тригонометричні функції.

❑ **Лінійна функція** — це функція вигляду $y = kx + b$, де k і b – дійсні числа.

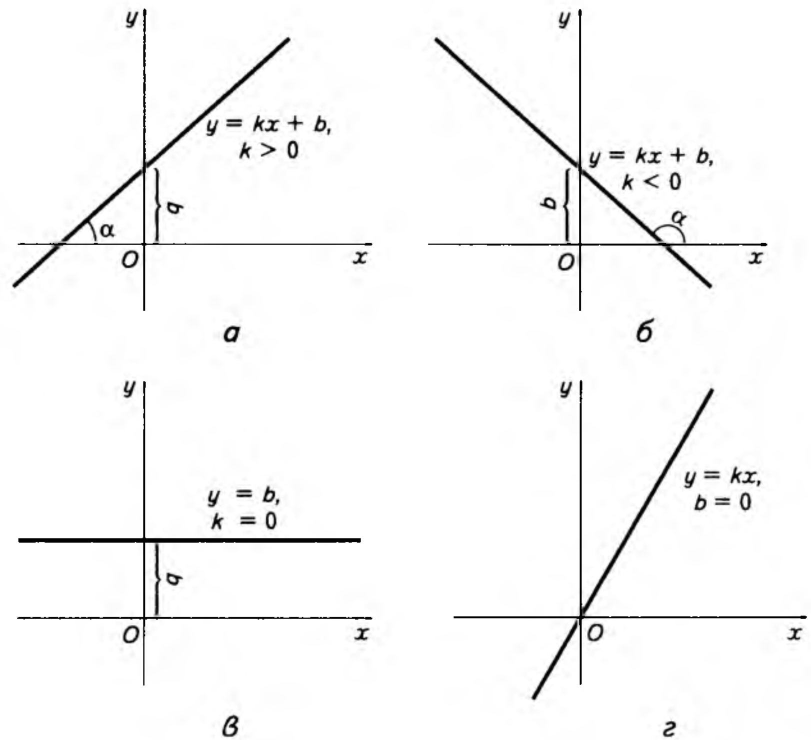


Рис. 5.4

Функція визначена на всій числовій прямій. Якщо $k \neq 0$, то множиною її значень є вся множина $\boldsymbol{R}$; якщо ж $k = 0$, то множина значень складається з одного числа b.

Функція $y = kx + b$ монотонна: при $k > 0$ вона зростає на $\boldsymbol{R}$ (рис. 5.4, *а*), при $k < 0$ — спадає (рис. 5.4, *б*), а при $k = 0$ стала (рис. 5.4, *в*). Графіком лінійної функції $y = kx + b$ є пряма, що проходить через точку $(0; b)$ і утворює з додатним напрямом осі Ox кут α. Число $k = \operatorname{tg} \alpha$ називають ***кутовим коефіцієнтом*** даної прямої.

При $b = 0$ пряма проходить через початок координат (рис. 5.4, *г*).

❑ **Квадратична функція** — це функція вигляду $y = ax^2 + bx = c$, де a, b, c — дійсні числа і $a \neq 0$. Вона визначена на всій числовій осі, а її значення заповнюють числову піввісь. У найпростішому випадкові, коли $a = 1$, $b = c = 0$, тобто $y = x^2$, ця функція є парною, невід'ємною й набирає значень із множини $[0; +\infty)$. На проміжку $(-\infty; 0)$ вона спадає, а на проміжку $(0; +\infty)$ — зростає; при $x = 0$ — досягає мінімального значення. Графіком цієї функції є парабола з вершиною в точці $(0; 0)$ і віссю симетрії Oy.

Для довільного $a > 0$ графік функції $y = ax^2$ утворюється з графіка функції $y = x^2$ стисканням до осі Ox в $1/a$ разів.

При $a < 0$ функція $y = ax^2$ на проміжку $(-\infty; 0)$ зростає, а на проміжку $(0; +\infty)$ — спадає; точка $x = 0$ є її точкою максимуму.

Графік функції $y = ax^2$ при $a < 0$ можна дістати з графіка функції $y = |a|x^2$ дзеркальним відображенням відносно осі Ox.

Отже, графіком функції $y = ax^2$ є парабола, симетрична відносно осі Oy із вершиною в точці $O(0; 0)$. Вітки параболи при $a > 0$ напрямлені вгору (рис. 5.5, *а*), а при $a < 0$ — вниз (рис. 5.5, *б*).

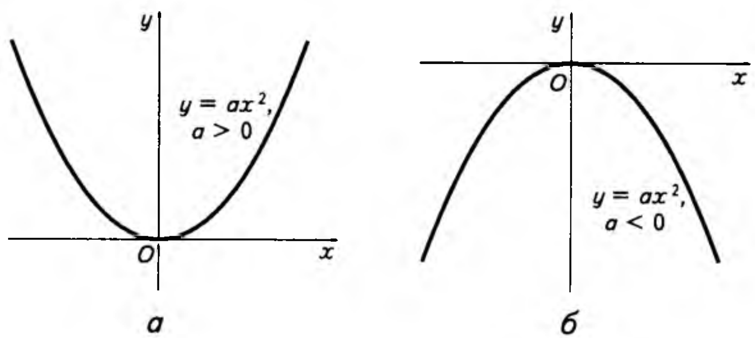


Рис. 5.5

Оскільки

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

то графіком функції $y = ax^2 + bx + c$ є парабола з вершиною в точці $P\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$, віссю симетрії якої є пряма $x = -\frac{b}{2a}$. Вітки параболи при $a > 0$ напрямлені вгору, а при $a < 0$ — вниз.

❑ **Степенева функція** — це функція вигляду $y = x^p$, $p \in \boldsymbol{Z}$.

1. Якщо $p = n$, $n \in \boldsymbol{N}$, то $y = x^n$ визначена на всій числовій осі. При $n = 1$ дістанемо лінійну функцію, а при $n = 2$ — квадратичну.

Якщо n — парне число, тобто $n = 2k$, функція $y = x^{2k}$ парна. Графіком цієї функції є парабола з вершиною в точці $O(0; 0)$, симетрична відносно осі Oy, вітки якої напрямлені вгору (рис. 5.6, *а*).

Якщо n — непарне число, тобто $n = 2k + 1$, функція $y = x^{2k+1}$ непарна, і її графік симетричний відносно початку координат. При $x < 0$ графік опуклий угору (лежить під дотичною, проведеною в довільній його точці). При $x > 0$ графік опуклий униз (лежить над

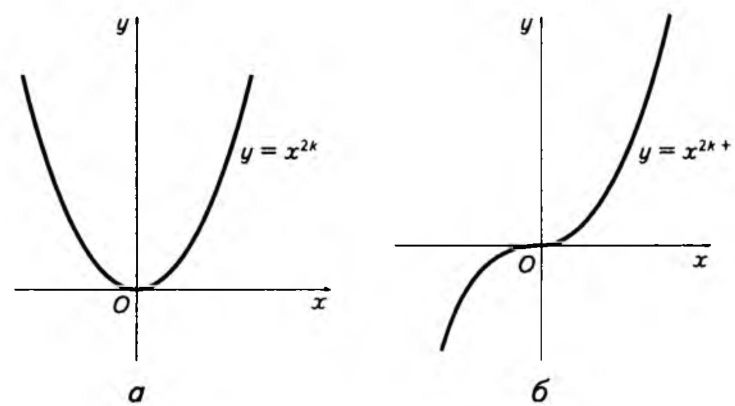
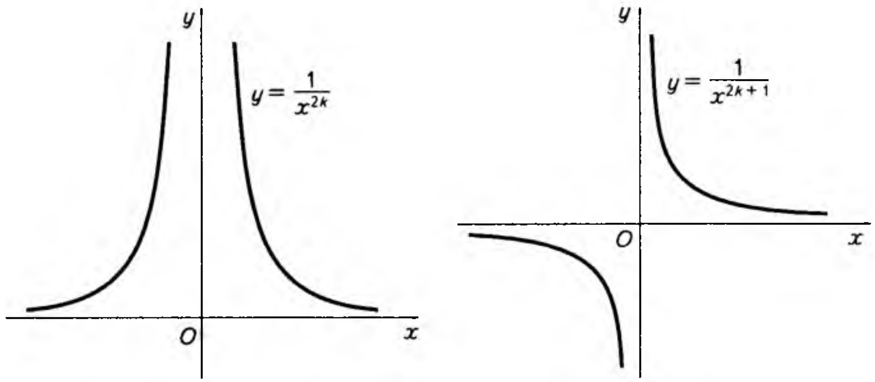


Рис. 5.6

дотичною, проведеною в довільній точці). В початку координат опуклість угору змінюється опуклістю вниз. Дотичною до графіка в цій точці є вісь Ox, але в точці дотику O графік переходить з одного боку дотичної на інший. Такі точки називають ***точками перегину даної кривої*** (рис. 5.6, *б*).

2. Якщо $p = -n$, $n \in N$, то функція $y = 1/x^n$ має область визначення $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Якщо n — парне число, тобто $n = 2k$, то функція парна (рис. 5.7, *а*); якщо n — непарне число, тобто $n = 2k + 1$, то функція непарна (рис. 5.7, *б*).



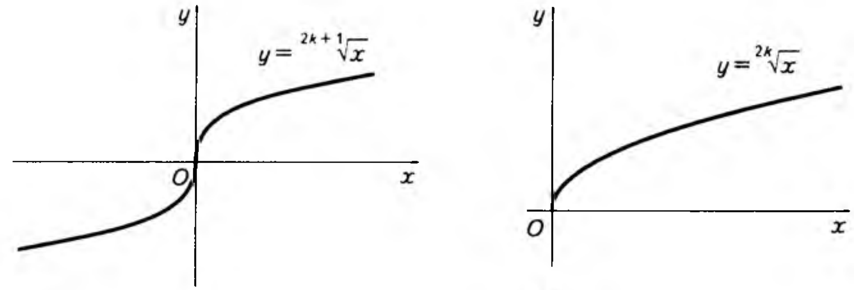
а б

Рис. 5.7

Якщо $n \in N$ довільне, то функція необмежено зростає (або спадає) в разі наближення її аргументу до точки $x = 0$ і наближається до нуля в разі необмеженого зростання чи спадання аргументу. Графіком функції є гіпербола.

3. Якщо $p = 1/n$, $n \in N$, то функція $y = \sqrt[n]{x}$ при непарному n визначена на всій числовій осі, а при парному n — тільки на півосі $x \geq 0$.

Функція $y = \sqrt[n]{x}$ обернена до степеневої функції $y = x^n$. Тому її графік симетричний відносно бісектриси першого й третього координатних кутів (рис. 5.8, *а* — при непарному $n > 1$, рис. 5.8, *б* — при парному n).



а б

Рис. 5.8

4. Графік функції $y = x^{m/n}$, $x > 0$, $m, n \in Z$ при $m/n > 1$ дотикається до осі Ox. Якщо $0 < m/n < 1$, то $n/m > 1$, і, отже, графік даної функції дотикається до осі Oy. Якщо $m/n > 0$, то в разі необмеженого зростання x значення y також необмежено зростають. Якщо $m/n < 0$, то в разі необмеженого зростання x значення y необмежено спадають, а з наближенням x до нуля — необмежено зростають. При $x < 0$ функція $y = x^{m/n}$ визначена не для всіх x. Якщо ж вона визначена при $x < 0$, то вона або парна, або непарна, й, отже, її графік при $x < 0$ можна дістати з її графіка при $x > 0$ за допомогою симетрії.

❑ **Дробово-лінійна функція** є відношенням двох лінійних функцій:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad c \neq 0, \quad bc - ad \neq 0.$$

Якщо $a = d = 0$, то, позначивши $b/c = k$, дістанемо $y = k/x$, тобто обернено пропорційну залежність.

Відповідний графік називають ***гіперболою*** (рис. 5.9, *а*, *б*).

Оскільки $y = k/x$ не визначена при $x = 0$ і непарна, то гіпербола має центр симетрії — точку $O(0; 0)$ і дві асимптоти $x = 0$, $y = 0$, тобто осі Oy та Ox відповідно.

Функція $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ визначена для всіх x, за винятком точки $x = -d/c$.

Оскільки

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a\left(x + \frac{d}{c}\right) + b - \frac{ad}{c}}{c(x + d/c)} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2}\,\frac{1}{x + d/c},$$

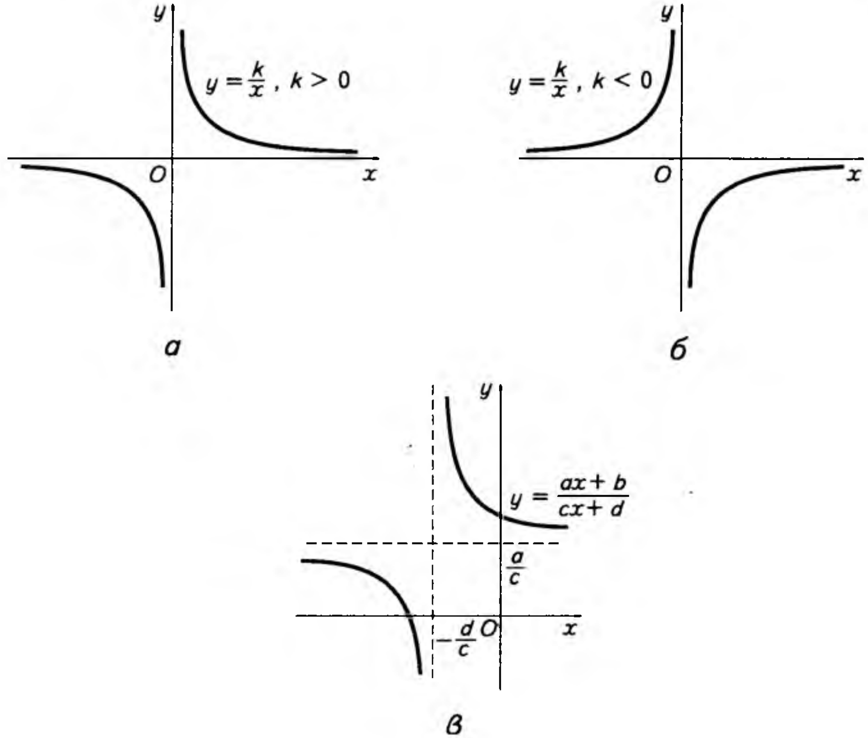


Рис. 5.9

то графік дробово-лінійної функції можна дістати паралельним перенесенням $r\left(-\frac{d}{c};\ \frac{a}{c}\right)$ (рис. 5.9, *в*) із графіка функції $y=\frac{k}{x}$, де $k=\frac{bc-ad}{c^2}$.

(Паралельне перенесення — це перетворення, за якого графік зміщується в іншу точку, не повертаючися при цьому.)

❑ **Показникова функція** — це функція вигляду $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$. Вона визначена на всій числовій прямій і взаємно однозначно відображує проміжок $(-\infty, +\infty)$ на проміжок $(0; +\infty)$. При $a>1$ функція $y=a^x$ зростає, при $0<a<1$ — спадає. Вісь Ox (пряма $y=0$) є горизонтальною асимптотою графіка функції $y=a^x$ при $x\to+\infty$, якщо $0<a<1$, і при $x\to-\infty$, якщо $a>1$. Графік функції $y=a^x$ опуклий униз (рис. 5.10, *а*, *б*).

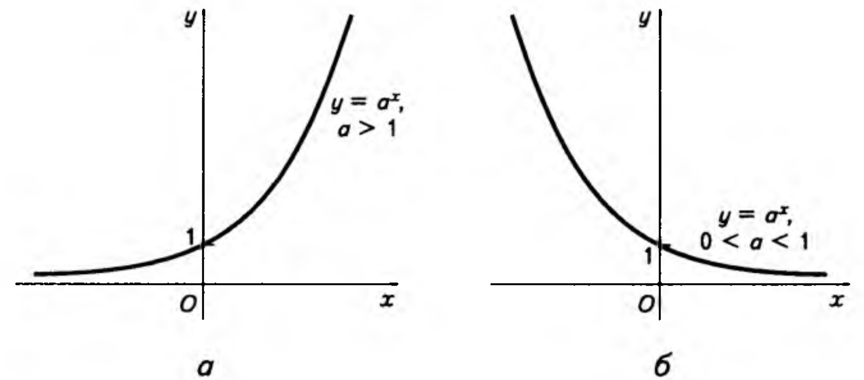


Рис. 5.10

❑ **Логарифмічна функція** — це функція вигляду $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$. Ця функція є оберненою до показникової функції $y=a^x$. Вона визначена тільки для $x>0$ і взаємно однозначно відображує проміжок $(0; +\infty)$ на проміжок $(-\infty, +\infty)$. Якщо $a>1$, то функція $y=\log_a x$ є зростаючою й опуклою вгору (рис. 5.11, *а*), а якщо $0<a<1$, то вона спадна й опукла вниз (рис. 5.11, *б*).

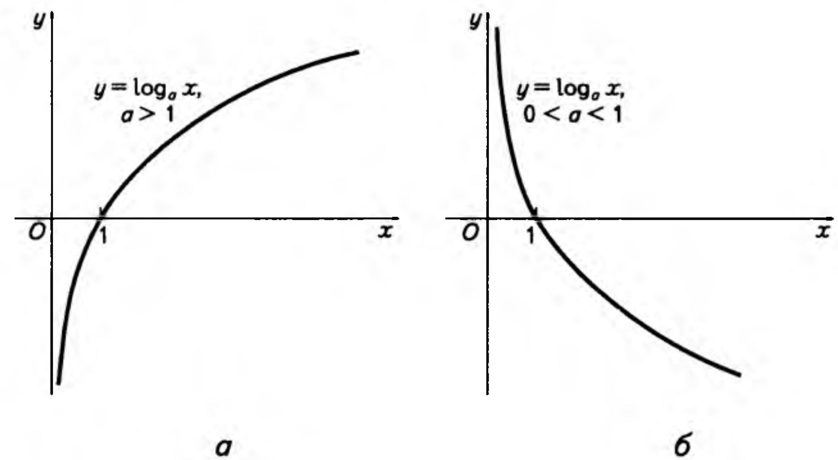


Рис. 5.11

Вісь Oy є вертикальною асимптотою графіка логарифмічної функції. Вісь Ox графік функції $y=\log_a x$ перетинає в точці $x=1$. Графік

$y = \log_a x$ можна дістати з графіка функції $y = a^x$ дзеркальним відображенням відносно бісектриси першого й третього координатних кутів — прямої $y = x$.

Тригонометричні функції. Перш ніж досліджувати тригонометричні функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \text{tg}\, x$, $y = \text{ctg}\, x$, введемо поняття синуса й косинуса кута на одиничному колі (рис. 5.12).

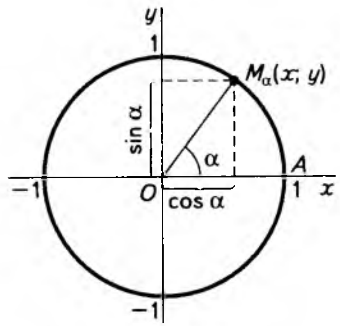


Рис. 5.12

Розглянемо так зване «тригонометричне коло» — одиничне коло з центром у точці $O(0; 0)$. Горизонтальний радіус OA вважають нерухомим і початковим для всіх кутів у крузі. Кінцеву сторону цих кутів утворює радіус OM, який називають рухомим. Кожному дійсному числу α відповідає єдине положення рухомого радіуса OM_α (або точки M_α на колі), що утворює кут α. Обернений зв'язок неоднозначний — кожному положенню радіуса OM_α (або точки M_α на колі) відповідає нескінченна множина дійсних чисел α — значень усіх кутів, визначених цим положенням рухомого радіуса OM_α. Всі ці числа містяться у формулі $\alpha + 2\pi k$, де $k \in Z$.

Означення 5.11. ***Синусом кута*** *називають ординату у точки M_α рухомого радіуса одиничного кола: $y = \sin \alpha$.* ***Косинусом кута*** *називають абсцису x точки M_α рухомого радіуса одиничного кола: $x = \cos \alpha$.*

Тангенсом кута *називають відношення* $\dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg}\, \alpha$. ***Котангенсом кута*** *називають відношення* $\dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \text{ctg}\, \alpha$.

Аналогічно вводяться поняття косинуса, синуса, тангенса й котангенса числового аргументу, тобто коли аргументом є число, яке виражає радіанну міру кута. Кожному числу, яке виражає радіанну міру кута, ставиться у відповідність ордината або абсциса точки на одиничному колі. Таку залежність називають функціями синуса або косинуса. Функція $y = \text{tg}\, x$ визначається як відношення $y = \text{tg}\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, а функція $y = \text{ctg}\, x$ — як відношення $y = \text{ctg}\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Властивості тригонометричних функцій та їхні графіки

① *Областю визначення функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$ є вся числова пряма, а областю значень — проміжок $[-1; 1]$.* Це випливає з означення.
Областю визначення функції $y = \text{tg}\, x$ є множина всіх дійсних чисел, крім точок $\pi/2 + k\pi$, $k \in Z$, а областю значень — проміжок $(-\infty, +\infty)$.
Областю визначення функції $y = \text{ctg}\, x$ є множина всіх дійсних чисел, крім точок $k\pi$, $k \in Z$, а областю значень — проміжок $(-\infty, +\infty)$.

② *Тригонометричні функції періодичні.*
Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ мають період 2π, а функції $y = \text{tg}\, x$ і $y = \text{ctg}\, x$ — період π.

③ *Функція $y = \cos x$ парна, а функції $y = \sin x$, $y = \text{tg}\, x$ та $y = \text{ctg}\, x$ непарні. Щоб побудувати графіки тригонометричних функцій, достатньо побудувати графік функції $y = \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ і графік $y = \text{tg}\, x$ на проміжку $(-\pi/2; \pi/2)$.*

④ *Функція $y = \sin x$ на проміжку $(0; \pi)$ опукла вгору, а на проміжку $(\pi; 2\pi)$ — опукла вниз. Функція $y = \text{tg}\, x$ на проміжку $(0; \pi/2)$ опукла вниз, а на проміжку $(-\pi/2; 0)$ — опукла вгору.*

З означення випливає, що функція $y = \sin x$ при $x \in (0; \pi/2)$ зростає, набуваючи значень від 0 до 1, при $x \in (\pi/2; 3\pi/2)$ спадає від 1 до −1, при $x \in (3\pi/2; 2\pi)$ зростає від −1 до 0. Графіком функції $y = \sin x$ є ***синусоїда*** (рис. 5.13).

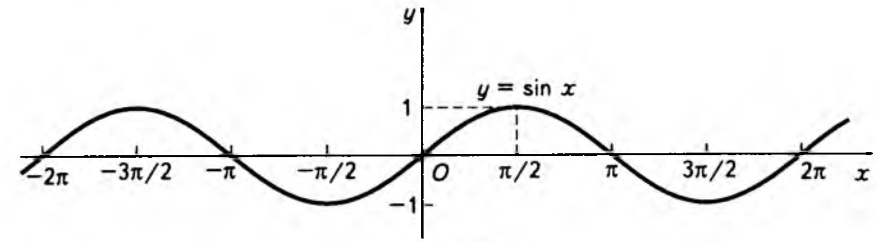


Рис. 5.13

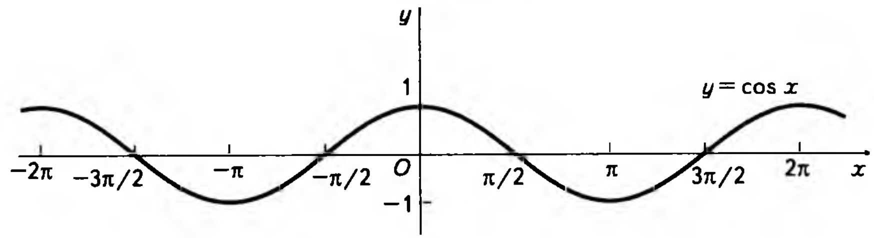


Рис. 5.14

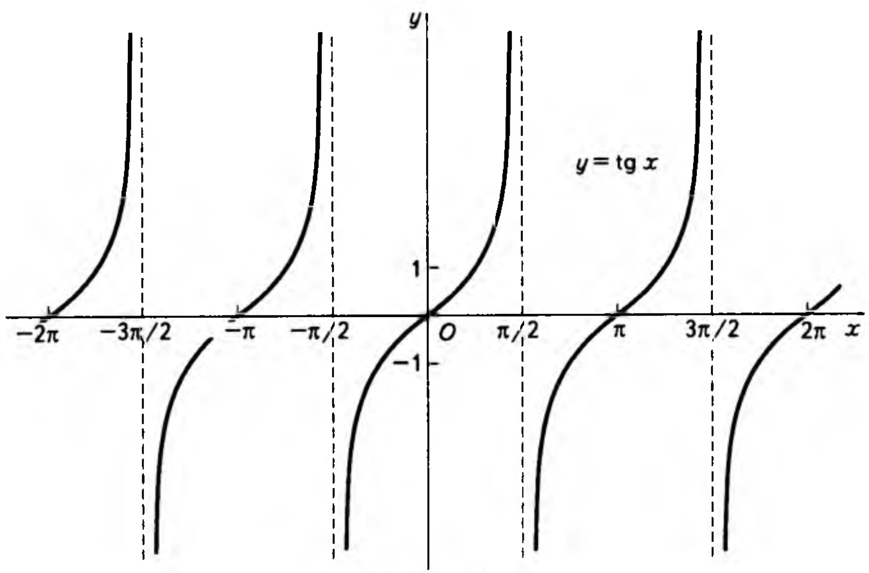


Рис. 5.15

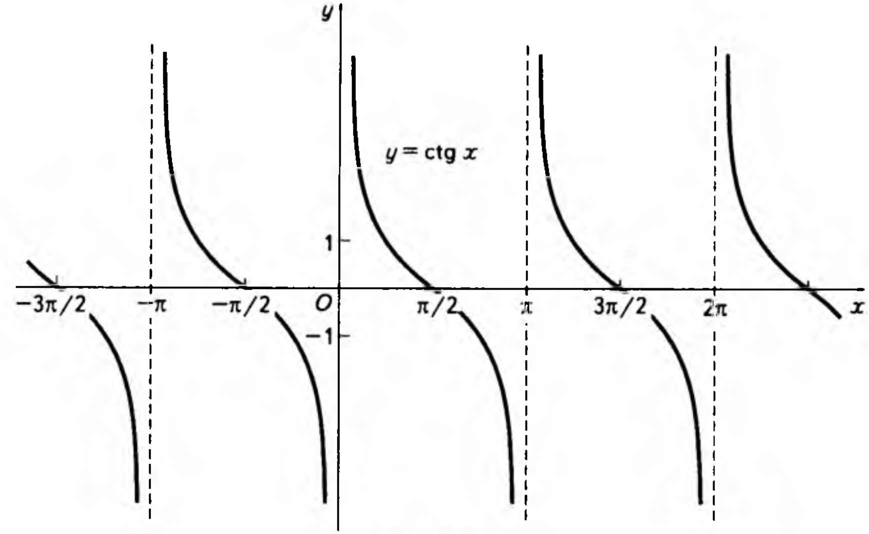


Рис. 5.16

Оскільки $y = \cos x = \sin(x + \pi/2)$, то графіком функції $y = \cos x$ є синусоїда, перенесена вздовж осі абсцис ліворуч на $\pi/2$ (рис. 5.14).

Функція $y = \mathrm{tg}\, x$ монотонно зростає на проміжку $(-\pi/2;\ \pi/2)$. Її графік зображено на рис. 5.15.

Оскільки $\mathrm{ctg}\, x = -\mathrm{tg}(x + \pi/2)$, то графік функції $y = \mathrm{ctg}\, x$ можна дістати з графіка функції $y = \mathrm{tg}\, x$ перенесенням уздовж осі Ox ліворуч на $\pi/2$ з наступним симетричним відображенням відносно осі Ox (рис. 5.16).

❑ **Обернені тригонометричні функції та їхні властивості.** Всі тригонометричні функції, будучи періодичними, не є монотонними в усій області визначення. Звідси випливає, що функції, обернені до тригонометричних, багатозначні. Щоб дістати однозначні вітки цих багатозначних функцій, треба взяти проміжки монотонності, на яких тригонометрична функція або зростає, або спадає, набуваючи при цьому всіх можливих для неї значень.

Розглянемо обернені функції до кожної з тригонометричних функцій окремо.

Функція* $y = \arcsin x$.** Якщо для функції $y = \sin x$ розглядати не всі значення аргументу x, а лише значення $x \in [-\pi/2;\ \pi/2]$, то кожному значенню $y \in [-1;\ 1]$ відповідає лише одне значення x. Згідно із загальною теорією існує обернена однозначна функція, що визначена на проміжку $[-1; 1]$ і монотонно зростає, набуваючи значень із проміжку $[-\pi/2; \pi/2]$. Її називають ***арксинусом і позначають $y = \arcsin x$.

➡ **Означення 5.12.** ***Арксинусом числа*** *x називають таку змінну величину y, яка набуває значень із проміжку* $[-\pi/2; \pi/2]$ *і синус якої дорівнює x.*

Оскільки функції $y = \sin x$ і $y = \arcsin x$ взаємно обернені, то $\sin(\arcsin x) = x$, якщо $|x| \le 1$, і $\arcsin(\sin x) = x$, якщо $|x| \le \pi/2$.

Графік функції $y = \arcsin x$ є симетричним відображенням синусоїди, взятої з проміжку $[-\pi/2; \pi/2]$, відносно прямої $y = x$ (рис. 5.17, *а*).

Основні властивості функції $y = \arcsin x$

① *Область визначення функції* $y = \arcsin x$ *— це проміжок* $[-1; 1]$, *а область значень — проміжок* $[-\pi/2; \pi/2]$.

② *Функція* $y = \arcsin x$ *непарна:* $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

③ *Функція монотонно зростає від* $-\pi/2$ *до* $\pi/2$. Це випливає з того, що функція, обернена до монотонно зростаючої функції, також монотонно зростає.

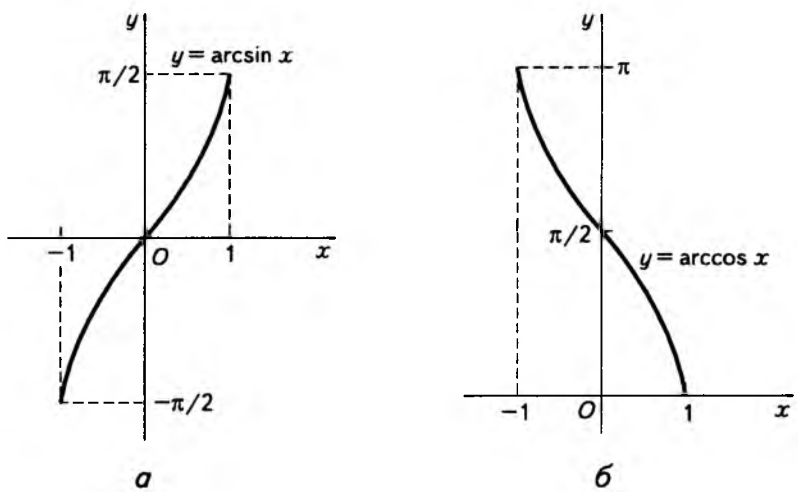


Рис. 5.17

Функція $y = \arccos x$. Розглянемо графік функції $y = \cos x$. Кожному значенню y з проміжку $[-1; 1]$ відповідає безліч значень x таких, що $\cos x = y$.

Якщо розглядати x лише із проміжку $[0; \pi]$, де функція $y = \cos x$ монотонно спадає й однозначна, то кожному значенню y $(-1 \le y \le 1)$ відповідає лише одне значення x (позначимо його $x = \arccos y$) таке, що $\cos y = x$, тобто функція $y = \cos x$ на проміжку $[0; \pi]$ має однозначну обернену функцію, яку називають ***арккосинусом*** і позначають $x = \arccos y$.

➡ **Означення 5.13.** ***Арккосинусом числа*** *x називають таку змінну величину y, яка набуває значень від 0 до π і косинус якої дорівнює x, тобто* $\cos(\arccos x) = x$, $|x| \le 1$, $\arccos(\cos x) = x$, $0 \le x \le \pi$.

Оскільки функція $y = \arccos x$ обернена до функції $y = \cos x$ на проміжку $[0; \pi]$, то її графік є симетричним відображенням косинусоїди, взятої на проміжку $[0; \pi]$, відносно прямої $y = x$ (рис. 5.17, *б*).

Основні властивості функції $y = \arccos x$

① *Функція* $y = \arccos x$ *визначена на проміжку* $[-1; 1]$; *область її значень — проміжок* $[0; \pi]$.

② *На проміжку* $[-1; 1]$ *функція* $y = \arccos x$ *монотонно спадає від* π *до* 0. Це випливає з того, що функція $y = \cos x$ спадає на проміжку $[0; \pi]$ від 1 до −1, а функція, обернена до монотонно спадної функції, монотонно спадна.

③ *Функція* $y = \arccos x$ *— загального вигляду, але справджується рівність* $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

Функція $y = \mathrm{arctg}\, x$. Розглянемо функцію $y = \mathrm{tg}\, x$ на проміжку $(-\pi/2; \pi/2)$. На цьому проміжку функція $y = \mathrm{tg}\, x$ монотонно зростає й однозначна, тому для кожного значення y існує тільки одне значення x (позначимо його $x = \mathrm{arctg}\, y$) із проміжку $(-\pi/2; \pi/2)$ таке, що $\mathrm{tg}\, x = y$. Отже, функція $y = \mathrm{tg}\, x$ на проміжку $(-\pi/2; \pi/2)$ має обернену функцію, яка називається ***арктангенсом*** і позначається $x = \mathrm{arctg}\, y$. Змінимо позначення, помінявши місцями x і y.

➡ **Означення 5.14.** ***Арктангенсом числа*** *x називають таку змінну величина y, яка набуває значень із проміжку* $(-\pi/2; \pi/2)$ *і тангенс якої дорівнює x, тобто* $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, x) = x$, $x \in \boldsymbol{R}$, $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) = x$, $|x| < \pi/2$.

Графік функції $y = \mathrm{arctg}\, x$ утворюється симетричним відображенням графіка функції $y = \mathrm{tg}\, x$ на проміжку $(-\pi/2; \pi/2)$ відносно прямої $y = x$ (рис. 5.18, *а*).

Основні властивості функції $y = \mathrm{arctg}\, x$

① *Функція* $y = \mathrm{arctg}\, x$ *визначена при всіх* x; *область її значень — проміжок* $(-\pi/2; \pi/2)$.

② ***Функція*** $y = \operatorname{arctg} x$ ***на проміжку*** $(-\infty, +\infty)$ ***монотонно зростає від*** $-\pi/2$ ***до*** $\pi/2$.

③ ***Функція*** $y = \operatorname{arctg} x$ ***непарна***: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

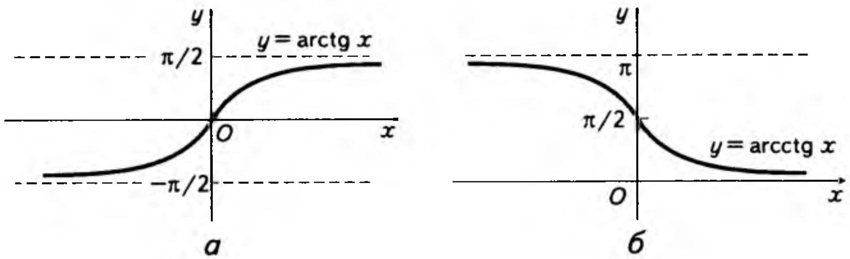


Рис. 5.18

Функція $y = \operatorname{arcctg} x$. Розглянемо функцію $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; \pi)$, на якому вона монотонно спадає від $-\infty$ до $+\infty$ і однозначна. Тому для будь-якого значення y існує тільки одне x (позначатимемо його $x = \operatorname{arcctg} y$) з проміжку $(0; \pi)$ таке, що $\operatorname{ctg} x = y$. Отже, функція $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; \pi)$ має обернену функцію. Функція, обернена до функції $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; \pi)$, називається ***арккотангенсом*** і позначається $x = \operatorname{arcctg} y$. Змінимо позначення, помінявши місцями x і y.

➡ **Означення 5.15.** ***Арккотангенсом числа*** x ***називають таку змінну величину*** y, ***яка набуває значень із проміжку*** $(0; \pi)$ ***і котангенс якої дорівнює*** x, ***тобто*** $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$, $x \in \boldsymbol{R}$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$, $0 < x < \pi$.

Графік функції $y = \operatorname{arcctg} x$ утворюється з графіка функції $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; \pi)$ симетричним відображенням відносно прямої $y = x$ (рис. 5.18, *б*).

Основні властивості функції $y = \operatorname{arcctg} x$

① ***Функція*** $y = \operatorname{arcctg} x$ ***визначена при всіх*** x; ***область її значень — проміжок*** $(0; \pi)$.

② ***Функція*** $y = \operatorname{arcctg} x$ ***монотонно спадає від*** π ***до*** 0.

③ ***Функція*** $y = \operatorname{arcctg} x$ ***непарна, й справджується рівність*** $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

Крім того, виконуються рівності

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2 \quad \text{і} \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2.$$

➡ **Означення 5.16.** ***Функції, добуті з найпростіших елементарних функцій за допомогою скінченного числа алгебричних дій додавання, віднімання, множення, ділення та скінченного числа утворень складної функції, називають елементарними.***

■ **Приклад 5.16.** Функція $y = \dfrac{\sqrt{x}\sin^2 x}{\sqrt[3]{x} + 5^{2x^3}} + \sqrt{\lg^3 x - 1}$ елементарна, а функції $y = |x|$, $y = [x]$ (ціла частина числа) неелементарні.

❑ **Класифікація елементарних функцій.** Ці функції поділяють на алгебричні й неалгебричні (трансцендентні).

➡ **Означення 5.17.** ***Алгебричною*** ***називають функцію, в якій над аргументом проводиться скінченне число алгебричних дій.***

До ***алгебричних*** належать такі функції:

- *цілі раціональні* (*многочлени* або *поліноми*)

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n;$$

- *дробово-раціональні* — відношення двох многочленів

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m};$$

- *ірраціональні* (якщо серед операцій над аргументом є добування арифметичного кореня).

До ***неалгебричних (трансцендентних)*** належать показникові, логарифмічні, тригонометричні та обернені тригонометричні функції.

5.3 Застосування функцій в економічній теорії

Спектр функцій, що використовуються в економічній теорії та практиці, достатньо широкий: від лінійних до таких, які дістають за певним алгоритмом за допомогою так званих рекурентних співвідношень, що пов’язують стани об’єктів, які вивчаються в різні періоди часу. Поряд із лінійними використовуються дробово-раціональні, степеневі, показникові, логарифмічні та інші функції.

Найчастіше в економіці використовуються такі функції:

- ***функція корисності (функція переваг)*** — у широкому розумінні — залежність корисності, тобто результату, ефекту деякої дії від її рівня (інтенсивності);
- ***виробнича функція*** — залежність результату виробничої діяльності від факторів, що її зумовлюють;
- ***функція випуску*** (окремий вид виробничої функції) — залежність обсягу виробництва від наявності або споживання ресурсів;
- ***функція витрат*** (окремий вид виробничої функції) — залежність витрат виробництва від обсягу продукції;
- ***функції попиту, споживання та пропозиції*** — залежність обсягу попиту, споживання й пропозиції окремих товарів або послуг від різноманітних факторів (наприклад, ціни, доходу тощо).

Оскільки економічні явища й процеси зумовлені дією різноманітних факторів, для їх дослідження широко використовуються функції багатьох змінних (див. розд. 8). Якщо дією побічних факторів можна знехтувати або вдається зафіксувати ці фактори на певних рівнях, то вплив одного головного фактора вивчається за допомогою функції однієї змінної. Розглянемо приклади.

■ **Приклад 5.17** *(залежність попиту від доходу)*. Використовуючи залежності попиту y на різні товари від доходу x, можна встановити рівні доходів a_1, a_2, a_3, за яких починається придбання тих або інших товарів і послуг, та рівні (точки) насичення b_1 і b_2 для груп товарів першої й другої необхідності. Ці залежності описуються функціями Л. Торнквіста (рис. 5.19):

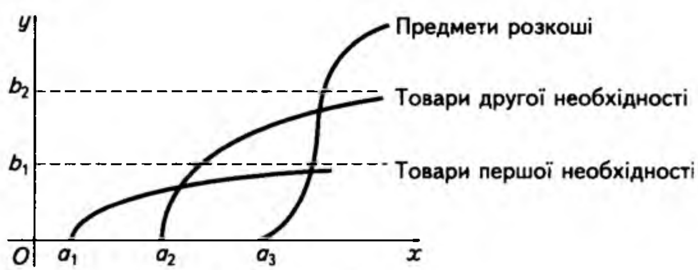


Рис. 5.19

$$y = \frac{b_1(x - a_1)}{x - c_1}, \quad x > a_1,$$

$$y = \frac{b_2(x - a_2)}{x - c_2}, \quad x > a_2,$$

$$y = \frac{b_3(x - a_3)}{x - c_3}, \quad x > a_3.$$

■ **Приклад 5.18** *(залежність попиту й пропозиції від ціни)*. Розглядаючи в одній системі координат криві попиту $q = q(p)$ та пропозиції $s = s(p)$, можна встановити ринкову (рівноважну) ціну p_0 даного товару в процесі формування ціни в умовах конкурентного ринку (рис. 5.20). Приклади лінійних функцій попиту й пропозиції наведено в розд. 3.

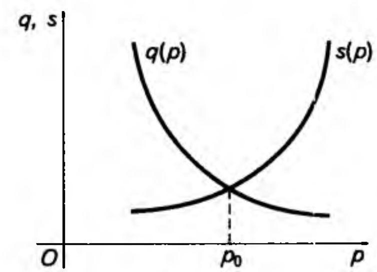


Рис. 5.20

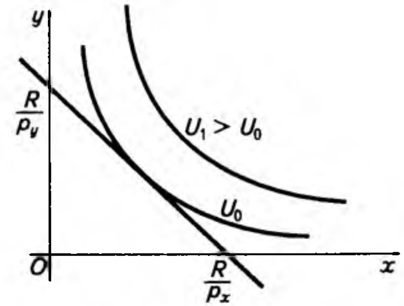


Рис. 5.21

■ **Приклад 5.19** *(функція споживання та лінії бюджетного обмеження)*. В теорії споживчого попиту на два товари x та y перевага споживача описується *кривою байдужості* $U(x, y) = U_0$ — лінією, вздовж якої корисність двох товарів x і y однакова, і розглядаються бюджетні обмеження (витрати споживача не перевищують його доход). У випадку, коли споживач витрачає весь свій доход на дані товари, маємо *лінію бюджетного обмеження*.

Розглянемо, наприклад, простий випадок функції корисності $U(x, y) = xy$. Якщо U_0 — рівень корисності (добробуту), то лінія бюджетного обмеження $p_x x + p_y y = R$, де p_x і p_y — відповідні ціни товарів, R — доход споживача. Дістанемо функції

$$y = \frac{U_0}{x}, \quad y = \frac{R}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x.$$

Графіком першої з цих функцій (кривої байдужості) є гіпербола, а графіком другої (лінії бюджетного обмеження) — пряма (рис. 5.21).

■ **Приклад 5.20** *(залежність витрат і доходу від обсягу виробництва).* Розглядаючи функції витрат $C = C(q)$ (повних витрат) і доходу фірми $R = R(q) = qp$, можемо встановити залежність прибутку $P(q) = R(q) - C(q)$ від обсягу виробництва q. У типовому випадкові витрати виробництва фірми великі за невеликого обсягу виробництва й спочатку ростуть швидше, ніж доход. Зі збільшенням обсягу виробництва швидкість росту витрат зменшується, в певний момент вони дорівнюють доходу, й фірма починає одержувати прибуток. Зі збільшенням обсягу виробництва прибуток збільшується, досягаючи максимального значення. За подальшого збільшення обсягу виробництва витрати знову починають рости швидше, ніж доход (вичерпано ресурси, потрібні додаткові приміщення, сировина, кваліфікована робоча сила), й прибуток фірми зменшується, досягаючи від'ємних значень за достатньо великих обсягів виробництва. Типові графіки доходу, витрат і прибутку наведено на рис. 5.22. Їм, наприклад, можуть відповідати функції $R(q) = aq - bq^2$

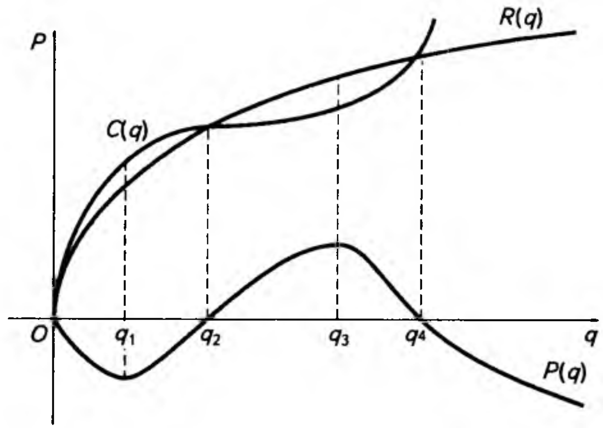


Рис. 5.22

і $C(q) = cq - dq^2 + eq^3$, де a, b, c, d, e — додатні числа. Можна виявити рівні обсягу виробництва, за яких виробництво продукції збиткове ($0 < q < q_2$, $q > q_4$) або прибуткове ($q_2 < q < q_4$), дає максимальний прибуток при $q = q_3$ або максимально збиткове при $q = q_1$, і визначити розміри цих збитків і прибутків.

5.4 Границя функції

5.4.1. Означення границі функції в точці

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай $x_0 \in (a, b)$ і функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a, b), за винятком, можливо, точки x_0.

➡ **Означення 5.18 (Гейне).** *Число A називають **границею функції** $y = f(x)$ **у точці** x_0, якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності значень аргументу, усі елементи якої відмінні від x_0, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до числа A:*

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \{x_n\}: x_n \to x_0$$
$$\text{при } n \to \infty,\ x_n \neq x_0: \{f_n(x_n)\} \to A \text{ при } n \to \infty. \quad (5.1)$$

Сформулюємо інше означення, еквівалентне попередньому.

➡ **Означення 5.19 (Коші).** *Число A називають **границею функції** $y = f(x)$ **при** $x \to x_0$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що для всіх x із δ-околу точки x_0, тобто таких, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$:*

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$$
$$\forall x \in D(y): 0 < |x - x_0| < \delta: |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (5.2)$$

Перше означення границі функції називають означенням «мовою послідовностей» (границя функції за Гейне), друге — означенням «мовою ε—δ» (границя функції за Коші).

ТЕОРЕМА 5.1

Перше й друге означення границі функції в точці еквівалентні.

Зміст означення границі функції $y = f(x)$ у точці x_0 полягає в тому, що для всіх значень x з області визначення функції, достатньо близьких до x_0, значення функції $y = f(x)$ як завгодно мало відрізняються від числа A (за абсолютним значенням).

Розглянемо *геометричний зміст границі функції в точці.*

Нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ рівносильна нерівності $-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$ або $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$. Якщо розглянути границю функції $y = f(x)$ (рис. 5.23), то нерівність $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ відповідає розміщенню частини графіка в смузі завширшки 2ε для всіх x із δ-околу точки x_0, тобто таких, що $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

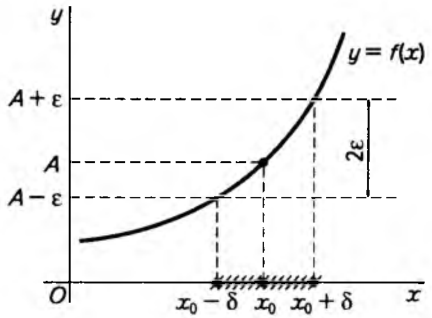


Рис. 5.23

Число A є границею функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий δ-окіл точки x_0, що для всіх $x \neq x_0$ з δ-околу точки x_0 відповідні ординати графіка функції $f(x)$ лежать у смузі $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, хай би якою вузькою вона була.

■ **Приклад 5.21.** *Нехай $f(x) = x^2$. Користуючись означенням границі функції за Коші, доведемо, що $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.*

Нехай ε — довільне додатне число. Потрібно довести, що можна вибрати таке $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $0 < |x - 2| < \delta$, виконуватиметься нерівність $|x^2 - 4| < \varepsilon$.

Якщо $0 < |x - 2| < \delta$, то

$$|x + 2| = |x - 2 + 4| \leq |x - 2| + 4 < \delta + 4$$

і

$$|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < \delta(\delta + 4).$$

Для виконання нерівності $|x^2 - 4| < \varepsilon$ достатньо покласти $\varepsilon = \delta(\delta + 4)$, тобто $\delta^2 + 4\delta - \varepsilon = 0$, звідки $\delta = -2 + \sqrt{4 + \varepsilon}$ (другий корінь $\delta = -2 - \sqrt{4 + \varepsilon}$ відкидаємо, оскільки δ має бути додатним).

Таким чином, для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \sqrt{4 + \varepsilon} - 2 > 0$, що з нерівності $|x - 2| < \delta$ випливає нерівність $|x^2 - 4| < \varepsilon$. Отже, $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

■ **Приклад 5.22.** *Доведемо, що функція $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не має границі в точці $x_0 = 0$.*

Зазначимо, що точка $x_0 = 0$ не належить до області визначення функції. Візьмемо дві різні послідовності точок, що збігаються до нуля:

$$x_n^1 = \frac{1}{2\pi n}, \quad x_n^2 = \frac{1}{2\pi n + \pi/2} = \frac{2}{(4n + 1)\pi}.$$

Тоді відповідні послідовності значень функції

$$f(x_n^1) = \sin(2\pi n) = 0, \quad f(x_n^2) = \sin(\pi/2 + 2\pi n) = 1.$$

Таким чином, для двох різних послідовностей значень аргументу, які збігаються до нуля, відповідні послідовності значень функції мають різні границі. Отже, з означення границі функції за Гейне випливає, що функція не має границі в точці $x_0 = 0$.

➡ **Означення 5.20.** ***Границею функції $y = f(x)$ на $+\infty$ або $-\infty$** називають число*

$$A = \lim_{x \to +\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \ \varepsilon > 0 \ \ \exists \Delta > 0$$

$$\forall x : x > x_0, \ x > \Delta : |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$A = \lim_{x \to -\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \ \varepsilon > 0 \ \ \exists \Delta > 0$$

$$\forall x : x < x_0, \ x < \Delta : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

5.4.2. Нескінченно малі й нескінченно великі функції

➡ **Означення 5.21.** *Функцію $y = \alpha(x)$ називають **нескінченно малою при $x \to x_0$**, якщо*

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0. \qquad (5.3)$$

Означення 5.22. *Функцію $y = f(x)$ називають* ***нескінченно великою при $x \to x_0$***, *якщо*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty. \qquad (5.4)$$

Є тісний зв'язок між нескінченно малими й нескінченно великими функціями.

ТЕОРЕМА 5.2

Якщо при $x \to x_0$ функція $y = \alpha(x)$ нескінченно мала, то функція $y = f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ при $x \to x_0$ нескінченно велика, і навпаки, якщо при $x \to x_0$ функція $y = f(x)$ нескінченно велика, то функція $y = \alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ при $x \to x_0$ нескінченно мала.

ТЕОРЕМА 5.3
(про зв'язок нескінченно малих функцій із границями функцій)

Для функції $y = f(x)$ існує скінченна границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ тоді й лише тоді, коли цю функцію можна подати у вигляді суми

$$f(x) = A + \alpha(x), \qquad (5.5)$$

де $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Доведення

Необхідність. Нехай $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Тоді за означенням $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ $\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta : |f(x) - A| < \varepsilon$. Це означає, що для функції $\alpha(x) = f(x) - A$ виконується нерівність $|\alpha(x)| < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Отже, $f(x) = A + \alpha(x)$, де $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Достатність. Нехай виконується рівність (5.5). Перейдемо до границі при $x \to x_0$ у цій рівності:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (A + \alpha(x)) = A + \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = A + 0 = A,$$

що й треба було довести.

5.4.3. Властивості й порівняння нескінченно малих функцій

① *Алгебрична сума скінченного числа нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією.*

② *Добуток нескінченно малої функції на обмежену функцію є нескінченно малою функцією.*

③ *Добуток нескінченно малої функції на константу є нескінченно малою функцією.*

④ *Добуток скінченного числа нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією.*

⑤ *Частка від ділення нескінченно малої функції на функцію, границя якої не дорівнює нулю, є нескінченно малою функцією.*

Доведемо, що сума двох нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією. Нехай $y = \alpha(x)$ і $y = \beta(x)$ — нескінченно малі функції при $x \to x_0$, тобто

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon_1 = \varepsilon/2 > 0$$

$$\exists \delta_1 > 0 \ \ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_1 : |\alpha(x)| < \varepsilon_1 = \varepsilon/2,$$

$$\lim_{x \to x_0} \beta(x) = 0 \Leftrightarrow \exists \delta_2 > 0 \ \ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_2 : |\beta(x)| < \varepsilon_1 = \varepsilon/2.$$

Виберемо $\delta = \min(\delta_1; \delta_2)$. Тоді $\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$:

$$|\alpha(x) + \beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Це означає, що $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$.

Інші властивості пропонується довести самостійно.

Під час дослідження функцій часто доводиться мати справу не з однією, а з кількома нескінченно малими функціями. Для їх порівняння розглядають частку цих функцій $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

Означення 5.23. Нехай $y = \alpha(x)$ і $y = \beta(x)$ — нескінченно малі функції при $x \to x_0$. Тоді:

- *якщо існує* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$, *де число* $A \neq 0$, *то функції* $y = \alpha(x)$ *і* $y = \beta(x)$ *називають* ***нескінченно малими одного порядку при*** $x \to x_0$;
- *якщо існує* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, *то функції* $y = \alpha(x)$ *і* $y = \beta(x)$ *називають* ***еквівалентними нескінченно малими при*** $x \to x_0$ і позначають так: $\alpha(x) \sim \beta(x),\ x \to x_0$;
- *якщо існує* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, *то функцію* $y = \alpha(x)$ *називають* ***нескінченно малою вищого порядку*** *порівняно з функцією* $y = \beta(x)$ *при* $x \to x_0$. У цьому разі використовують символ o («o мале»), тобто $\alpha(x) = o(\beta(x)),\ x \to x_0$;
- *нескінченно малу функцію* $y = \alpha(x)$ *називають* ***нескінченно малою порядку p*** *порівняно з нескінченно малою функцією* $y = \beta(x)$, *якщо*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^p} = A, \text{ де число } A \neq 0.$$

5.4.4. Однобічні границі

Означення 5.24. *Число A називають* ***правою (лівою) границею функції*** $y = f(x)$ ***у точці*** x_0, *якщо для довільної збіжної послідовності* $\{x_n\}$ *такої, що* $x_n > x_0$ $(x_n < x_0)$, $x_n \to x_0$ *при* $n \to \infty$, *відповідна послідовність значень функції* $f(x_n) \to A$ *при* $n \to \infty$.

Для правої (лівої) границі функції використовується такий запис:

$$A = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) \left(A = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \right).$$

Можна дати означення однобічних границь «мовою ε—δ».

Означення 5.25. *Число A називають* ***правою (лівою) границею функції*** $y = f(x)$ ***у точці*** x_0, *якщо для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує таке* $\delta > 0$, *що для всіх x таких, що* $x_0 < x < x_0 + \delta$ $(x_0 - \delta < x < x_0)$, *виконується нерівність* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Приклад 5.23. *Розглянемо функцію*

$$f(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

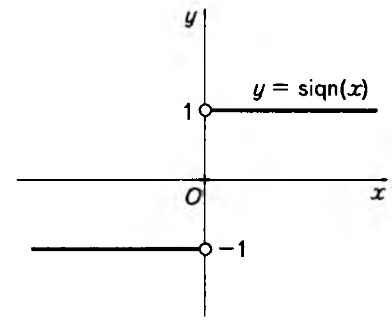


Рис. 5.24

У точці $x = 0$ обчислимо однобічні границі (рис. 5.24):

$$\lim_{x \to 0-0} \operatorname{sign}(x) = -1, \quad \lim_{x \to 0+0} \operatorname{sign}(x) = 1.$$

ТЕОРЕМА 5.4
(про зв'язок між однобічними границями й границею функції)

Функція $y = f(x)$ має границю в точці x_0 тоді й лише тоді, коли в цій точці існують права й ліва границі й вони рівні між собою:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A.$$

Доведення

Необхідність. Нехай існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Тоді за означенням

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Отже, при $x_0 - \delta < x < x_0$ і при $x_0 < x < x_0 + \delta$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Відповідно до означення однобічних границь

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A.$$

Достатність. Нехай у функції $y = f(x)$ існують однобічні границі в точці x_0, які дорівнюють A. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$

$$\exists\delta_1 > 0 \quad \forall x : x_0 - \delta_1 < x < x_0 : |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$\exists\delta_2 > 0 \quad \forall x : x_0 < x < x_0 + \delta_2 : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Виберемо $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$. Тоді для всіх x таких, що $0 < |x - x_0| < \delta$: $|f(x) - A| < \varepsilon$. Це означає, що $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

5.4.5. Основні теореми про границі

ТЕОРЕМА 5.5

Якщо функція $y = f(x)$ має границю A при $x \to x_0$, то ця границя єдина.

Доведення

Доводитимемо від супротивного. Припустимо, що існують дві різні границі $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ та $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$ і $A \neq B$. Тоді за теоремою 5.3 про зв'язок між границями й нескінченно малими функціями (5.5) маємо

$$f(x) = A + \alpha(x) \quad \text{і} \quad f(x) = B + \beta(x),$$

де функції $y = \alpha(x)$ і $y = \beta(x)$ нескінченно малі при $x \to x_0$. Віднімемо почленно рівності:

$$0 = A - B + (\alpha(x) - \beta(x)).$$

Функція $y = (\alpha(x) - \beta(x))$ нескінченно мала при $x \to x_0$. Отже, $A = B$.
Теорему доведено.

ТЕОРЕМА 5.6
(про арифметичні дії над границями)

Нехай функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ мають границі в точці x_0:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \text{і} \quad \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = B.$$

Тоді:

1) $$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B; \tag{5.6}$$

2) $$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = AB; \tag{5.7}$$

3) $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0. \tag{5.8}$$

Доведення

Доведемо, наприклад, п. 2). Оскільки границі $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ і $\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, то на підставі теореми 5.3 про зв'язок нескінченно малих із границями функцій (5.5) дістанемо

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad f(x) = B + \beta(x),$$

де функції $y = \alpha(x)$ і $y = \beta(x)$ нескінченно малі при $x \to x_0$. Тоді добуток

$$f(x)g(x) = (A + \alpha(x))(B + \beta(x)) = AB + A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x).$$

Функції $A\beta(x)$, $B\alpha(x)$, $\alpha(x)\beta(x)$ нескінченно малі при $x \to x_0$. Отже, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = AB$.

Пункти 1) і 3) пропонується довести самостійно.

- **Наслідок 1.** *Для довільного числа C*

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} C f(x) = C \lim_{x \to x_0} f(x).} \tag{5.9}$$

- **Наслідок 2.** *Для довільного $m \in N$*

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} [f(x)]^m = \left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right]^m.} \tag{5.10}$$

- **Наслідок 3.** *Для довільного $k \in N$*

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \to x_0} f(x)}.} \tag{5.11}$$

- **Наслідок 4.**

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right]^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}.} \tag{5.12}$$

ТЕОРЕМА 5.7
(про три функції)

Якщо в деякому околі точки x_0 виконується нерівність $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$, причому $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = A$, то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Доведення

Нехай $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = A$. Тоді за означенням

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x : |\varphi(x) - A| < \varepsilon \quad \text{і} \quad |\psi(x) - A| < \varepsilon$$

або

$$A - \varepsilon < \varphi(x) < A + \varepsilon \quad \text{і} \quad A - \varepsilon < \psi(x) < A + \varepsilon .$$

Отже, $A - \varepsilon < \varphi(x) \le f(x) \le \psi(x) < A + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Теорему доведено.

■ **Приклад 5.24.** *Обчислимо границі:*

① $\lim\limits_{x \to 1}(5x^2 - 6x + 7) = 5 - 6 + 7 = 6.$

② $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \dfrac{-1}{-1} = 1.$

③ $\lim\limits_{x \to 2}(3x)^{x^2} = \lim\limits_{x \to 2}(3x)^{\lim\limits_{x \to 2} x^2} = 6^4.$

④ $\lim\limits_{x \to \pi/2} \sin x = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1.$

У простих випадках обчислення границь зводиться до підставляння в даний вираз граничного значення аргументу, але часто це призводить до невизначеностей типу $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, $\infty - \infty$. Розглянемо приклади на обчислення границь функцій.

■ **Приклад 5.25.** *Обчислимо границю:*

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 2} \frac{(x-3)(x-2)}{x(x-2)} =$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x} = \frac{-1}{2}.$$

■ **Приклад 5.26.** *Обчислимо границю:*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 10} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - 1/x}{1 + 10/x^2} = 2.$$

У прикладах, подібних до 5.26, чисельник і знаменник почленно ділять на x^n, де n — степінь многочлена в знаменнику.

■ **Приклад 5.27.** *Обчислимо границю:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{x^2(\sqrt{1+x^2} + 1)} =$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + x^2 - 1}{x^2(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \frac{1}{2}.$$

■ **Приклад 5.28.** *Обчислимо границю:*

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x}) = (\infty - \infty) =$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x+a} - \sqrt{x})(\sqrt{x+a} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + a - x}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} =$$
$$= a \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} = 0.$$

У прикладах 5.27 і 5.28 помножено й поділено ірраціональні вирази на спряжені.

Приклади розкриття невизначеностей інших типів розглянемо далі.

5.4.6. Перша важлива границя

Обчислюючи границі трансцендентних функцій, часто використовують формулу

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1.} \qquad (5.13)$$

Для її доведення розглянемо коло радіусом 1 із центром у точці O. Нехай OB — рухомий радіус, що утворює кут x $(0<x<\pi/2)$ із віссю Ox (рис. 5.25).

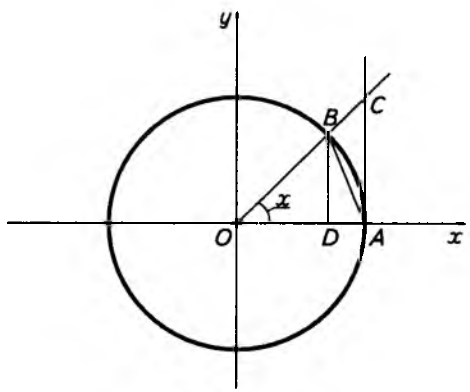


Рис. 5.25

Із рисунка видно, що $S_{\Delta AOB}<S_{\text{сек }AOB}<S_{\Delta AOC}$:

$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot BD=\frac{1}{2}1\cdot\sin x;\quad S_{\text{сек }AOB}=\frac{1}{2}x;$$

$$S_{\Delta AOC}=\frac{1}{2}OA\cdot AC=\frac{1}{2}1\cdot\operatorname{tg}x.$$

Отже,

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg}x.$$

Поділимо на $\frac{1}{2}\sin x>0$. Дістанемо $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1.$

Оскільки $\cos x$ і $\dfrac{\sin x}{x}$ — функції парні, то добута нерівність справедлива й при $-\pi/2<x<0$. Перейдемо до границі при $x\to 0$. Дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1,\quad \lim_{x\to 0}1=1.$$

За теоремою про три функції $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

Розглянемо приклади, в яких потрібно обчислити границі даних функцій.

■ **Приклад 5.29.** *Обчислимо границю:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{4x}=\frac{6}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}=\frac{3}{2}.$$

■ **Приклад 5.30.** *Обчислимо границю:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x/2}\right)^2=\frac{1}{2}1=\frac{1}{2}.$$

♦ **Наслідок 1.**

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}.} \qquad (5.14)$$

Справді,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\frac{ax}{bx}\frac{bx}{\sin bx}=\frac{a}{b}\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\lim_{x\to 0}\frac{bx}{\sin bx}=\frac{a}{b}.$$

♦ **Наслідок 2.**

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}ax}{bx}=\frac{a}{b}.} \qquad (5.15)$$

Справді,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx\cos ax}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\frac{1}{\cos ax}\frac{ax}{bx}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos ax}\frac{a}{b}=\frac{a}{b}.$$

♦ **Наслідок 3.**

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} ax}{bx}=\frac{a}{b}.} \qquad (5.16)$$

Справді,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} ax}{bx}=\left|\begin{array}{l}\operatorname{arctg} ax=t,\quad t\to 0\\ ax=\operatorname{tg} t,\quad x=\dfrac{1}{a}\operatorname{tg} t\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{t}{b\dfrac{1}{a}\operatorname{tg} t}=\frac{a}{b}.$$

5.4.7. Друга важлива границя

У п. 4.26 було введено число e. Доведемо, що

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.} \qquad (5.17)$$

Для доведення (5.17) припустимо, що $x>0$, $x\to+\infty$. Для будь-якого x знайдеться натуральне число n таке, що $n<x<n+1$. Тоді

$$\frac{1}{n}\ge\frac{1}{x}>\frac{1}{n+1},\quad \text{або}\quad 1+\frac{1}{n}\ge 1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1}.$$

Якщо велике число піднести до великого степеня, нерівність лише підсилиться. Дістанемо нерівність

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Обчислимо границі:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e;$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{1}{1+\dfrac{1}{n+1}}=\frac{e}{1}=e.$$

За теоремою про три функції маємо $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e.$

Нехай тепер $x<0$, $x\to-\infty$. Обчислимо границю:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left|\begin{array}{l}x=-1-y\\ y=-x-1\\ y\to+\infty\end{array}\right|=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-1-y}\right)^{-1-y}=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{-y}{-1-y}\right)^{-1-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y+1}\right)^{-1-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1+y}{y}\right)^{1+y}=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\left(1+\frac{1}{y}\right)=e\cdot 1=e.$$

Якщо зробити заміну $1/x=t$, то при $x\to\infty$, $t\to 0$ матимемо

$$\boxed{\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=e.} \qquad (5.18)$$

♦ **Наслідок 1.**

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.} \qquad (5.19)$$

Справді,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\ln e=1.$$

♦ **Наслідок 2.**

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e,\ a>0,\ a\ne 1.} \qquad (5.20)$$

Справді,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x\ln a}=\frac{1}{\ln a}=\log_a e.$$

♦ **Наслідок 3.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \tag{5.21}$$

Справді,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\left|\begin{array}{l} y=e^x-1\\ 1+y=e^x\\ x=\ln(1+y)\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1.$$

♦ **Наслідок 4.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \tag{5.22}$$

Справді,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\ln a=\ln a.$$

♦ **Наслідок 5.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha. \tag{5.23}$$

Справді,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\left|\begin{array}{l} (1+x)^\alpha-1=y\\ (1+x)^\alpha=1+y\\ \alpha\ln(1+x)=\ln(1+y)\\ \dfrac{\alpha\ln(1+x)}{\ln(1+y)}=1\end{array}\right|=\lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}}\frac{y}{x}\frac{\alpha\ln(1+x)}{\ln(1+y)}=$$

$$\alpha\lim_{x\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\alpha.$$

Із рівності (5.23) випливає, що

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}.$$

5.4.8. Границя показниково-степеневої функції

Розглянемо методи визначення границь показниково-степеневої функції $y=f(x)^{g(x)}$. Нехай існують границі $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ і $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$. Тоді існує границя показниково-степеневої функції $y=f(x)^{g(x)}$, причому

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=A^B.$$

Використовуючи основну логарифмічну тотожність, можна записати:

$$f(x)^{g(x)}=e^{\ln f(x)^{g(x)}}=e^{g(x)\ln f(x)}. \tag{5.24}$$

Унаслідок неперервності показникової й логарифмічної функцій маємо

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{B\ln A}=A^B,$$

тобто

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\left(\lim_{x\to x_0}f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=e^{B\ln A}=A^B. \tag{5.25}$$

Формули (5.24) і (5.25) застосовуються, коли потрібно розкрити невизначеності типу 0^0, 1^∞, ∞^0.

Нехай $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$. Тоді з формули (5.25) маємо

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\left((1+(f(x)-1))^{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{(f(x)-1)g(x)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-1)g(x)}.$$

Отже,

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)-1)g(x)}. \tag{5.26}$$

■ **Приклад 5.31.** *Обчислимо границю* $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2}$.

У нашому випадкові

$$f(x) = \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right), \quad g(x) = x^2$$

і

$$(f(x)-1)g(x) = \frac{3x^2}{x^2-2}.$$

Отже,

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2}{x^2-1}} = e^3.$$

■ **Приклад 5.32.** *Обчислимо границю* $\lim\limits_{x \to 0} (1+x^2)^{\mathrm{ctg}^2 x}$.

Використовуючи формулу (5.26), дістанемо

$$\lim_{x \to 0} (1+x^2)^{\mathrm{ctg}^2 x} = e^{\lim\limits_{x \to 0} x^2 \mathrm{ctg}^2 x} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{\mathrm{tg}\, x} \right)^2} = e.$$

5.5 Неперервність функції

5.5.1. Основні поняття

➡ **Означення 5.26.** *Функцію $y = f(x)$, визначену в деякому околі точки x_0, називають **неперервною в точці x_0**, якщо існує границя функції і її значення в цій точці рівні, тобто*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{5.27}$$

Оскільки $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, то співвідношення (5.27) запишемо у вигляді

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} (x) \right). \tag{5.28}$$

Отже, для неперервної функції можна міняти місцями знаки функції та границі.

Величину $\Delta x = x - x_0$ називають ***приростом аргументу***, а величину $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — ***приростом функції в точці x_0***.

➡ **Означення 5.27.** *Функцію $y = f(x)$ називають **неперервною в точці x_0**, якщо її приріст у цій точці є нескінченно малою функцією при $\Delta x \to 0$, тобто*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{5.29}$$

Саме це означення найчастіше використовують на практиці.

■ **Приклад 5.33.** *Доведемо за означенням, що функція $y = \sin x$ неперервна в будь-якій точці $x_0 \in \boldsymbol{R}$.*

Надамо аргументові приросту Δx. Тоді функція дістане приріст

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0) = 2 \sin \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2} \cos \frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$. Отже, функція $y = \sin x$ неперервна в кожній точці $x_0 \in \boldsymbol{R}$.

➡ **Означення 5.28.** *Функцію $y = f(x)$ називають **неперервною на проміжку (a, b)**, якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.*

➡ **Означення 5.29.** *Функцію $y = f(x)$ називають **неперервною в точці x_0 справа** (або **зліва**), якщо*

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$$

$$\text{(або} \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0)).$$

Для неперервності функції $y=f(x)$ у точці x_0 необхідно й достатньо, щоб виконувалися такі *умови*:

1) функція $y=f(x)$ визначена в точці x_0, тобто існує значення $f(x_0)$;
2) існує скінченна ліва границя $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$;
3) існує скінченна права границя $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$;
4) однобічні границі рівні між собою: $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$.

Якщо виконуються умови 1)—4), то точку x_0 називають ***точкою неперервності функції*** $y=f(x)$.

Якщо хоч одна з цих умов порушується, то точку x_0 називають ***точкою розриву функції*** $y=f(x)$.

5.5.2. Класифікація точок розриву функції

Означення 5.30. *Точку x_0 називають:*

- ***точкою усувного розриву функції*** $y=f(x)$, *якщо*
$$f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0);$$
- ***точкою розриву першого роду***, *якщо існують однобічні границі $f(x_0-0)$ і $f(x_0+0)$, але вони не рівні між собою:*
$$f(x_0-0)\neq f(x_0+0);$$
- ***точкою розриву другого роду***, *якщо в точці x_0 не існує або нескінченна принаймні одна з однобічних границь функції $y=f(x)$.*

Означення 5.31. *Функцію $y=f(x)$ називають* ***розривною***, *якщо вона має хоча б одну точку розриву.*

5.5.3. Властивості неперервних функцій

Розглянемо основні властивості неперервних функцій, які випливають з означення неперервності й відповідних властивостей границі функції.

ТЕОРЕМА 5.8

Якщо функції $y=f(x)$ і $y=g(x)$ неперервні в точці x_0, то функції $y=f(x)\pm g(x)$, $y=f(x)g(x)$, $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при $g(x_0)\neq 0$) також неперервні в цій точці.

Доведення теореми випливає з означення неперервності й теореми про арифметичні дії над границями функцій. Справді, якщо функції $y=f(x)$ і $y=g(x)$ неперервні в точці x_0, то
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \text{ і } \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0).$$

Тоді
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\pm g(x_0);$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)g(x_0);$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)},\quad g(x_0)\neq 0.$$

Це означає, що $y=f(x)\pm g(x)$, $y=f(x)g(x)$, $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ — неперервні функції в точці x_0.

ТЕОРЕМА 5.9
(про неперервність складної функції)

Нехай $y=f(g(x))$ — складна функція, де $y=f(u)$, а $u=g(x)$; при цьому функція $u=g(x)$ неперервна в точці x_0, а $y=f(u)$ — в точці $u_0=g(x_0)$. Тоді складна функція неперервна в точці x_0.

Доведення

Розглянемо довільну послідовність $\{x_n\}$, $x_n\to x_0$ при $n\to\infty$. Унаслідок неперервності функції $u=g(x)$ послідовність $u_n=g(x_n)\to g(x_0)$ при $n\to\infty$. Оскільки функція $y=f(u)$ неперервна в точці $u_0=g(x_0)$, то $f(u_n)\to f(u_0)$ при $n\to\infty$, тобто $f(g(x_n))\to f(g(x_0))$ при $n\to\infty$.

Отже, $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$, а це означає, що функція $y = f(g(x))$ неперервна в точці x_0.

Теорему доведено.

Доведені теореми дають змогу встановити неперервність широкого класу функцій. Зокрема, як наслідок можна стверджувати, що основні елементарні функції $y = x^n$, $y = a^x$, $y = \log_a x$ $(a > 0)$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ неперервні в усіх точках своєї області визначення.

Із цих теорем випливають такі ***наслідки:*** *функція, що складена скінченним числом алгебричних дій та утворенням складних функцій від функцій з основних елементарних функцій, є неперервною в усіх точках, в яких визначені всі елементарні функції, що її утворюють, за винятком точок, в котрих який-небудь зі знаменників перетворюється в нуль.*

Зокрема, всякий многочлен є функцією, неперервною в області дійсних чисел; дробово-раціональна функція (відношення двох многочленів) неперервна в усіх точках, в яких знаменник не дорівнює нулю.

■ **Приклад 5.34.** *Дослідимо на неперервність функцію* $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ *і встановимо характер точок розриву.*

Оскільки функції $y = \sin x$ і $y = x$ неперервні в усіх точках своїх областей визначення, то функція $y = \dfrac{\sin x}{x}$ буде неперервна в усіх точках, крім $x = 0$. У точці $x = 0$ дана функція не визначена, тому має розрив. Але існує $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, тому розрив у цій точці буде усувний.

Якщо покласти $f(0) = 1$, то функція $F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0 \end{cases}$ буде неперервною в точці $x = 0$.

5.5.4. Економічна інтерпретація неперервності

Більшість функцій, що використовуються в економіці, є неперервними. Наведемо приклади.

■ **Приклад 5.35.** Графік податкової ставки N має вигляд, як на рис. 5.26. На кінцях проміжків функція розривна й має розриви першого роду. Але сам розмір прибуткового податку P є неперервною функцією річного доходу R (рис. 5.27). Отже, якщо річні доходи двох осіб не дуже відрізняються, то треба, щоб різниця за прибутковим податком, яку вони мають заплатити, також не була дуже великою. Цікаво, що цю обставину більшість осіб сприймає як природну.

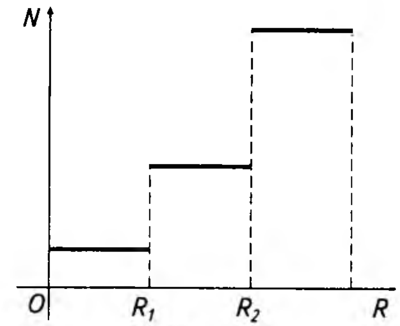


Рис. 5.26

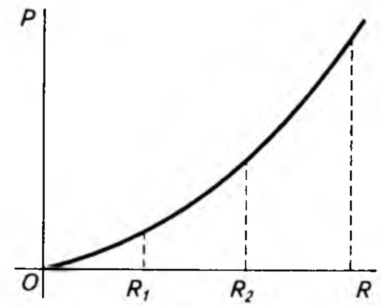


Рис. 5.27

Якщо ж результат не неперервно залежить від початкових даних, параметрів, що характеризують економічну задачу, то таку задачу вважають некоректною.

■ **Приклад 5.36.** За своїм економічним змістом функції попиту $q = q(p)$ і пропозиції $s = s(p)$ неперервно залежать від ціни p. Отже, за малих коливань цін попит і пропозиція також змінюються неперервно. За глибшого аналізу часто виявляються психологічні причини, за якими попит, наприклад, може змінитися стрибкоподібно. Так буває в разі «пробиття» круглої ціни. Ціна підвищується, але люди «терплять», і попит зменшується неістотно. І ось ціна завмерла біля «круглої» цифри. Коли ціна перевищує «круглу» цифру, може відбутися різке стрибкоподібне зменшення попиту. Це добре знають фахівці, які працюють на валютних та інших фінансових ринках.

5.5.5. Властивості функцій, неперервних на відрізку

Розглянемо важливі властивості функцій, неперервних на відрізку $[a, b]$. При цьому будемо розуміти, що функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, якщо вона неперервна в усіх точках проміжку (a, b), а в самих точках a і b неперервна відповідно справа й зліва. Сформулюємо без доведення ці властивості у вигляді теорем.

ТЕОРЕМА 5.10
(Вейєрштрасса)

Якщо функція неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

✓ *Зауваження 5.2.* Умова неперервності функції на відрізку $[a, b]$ суттєва. Неперервна на проміжку (a, b) функція не обов'язково обмежена на ньому. Наприклад, функція $y = 1/x$ неперервна на проміжку $(0; 1)$, але необмежена на $(0; 1)$ (рис. 5.28).

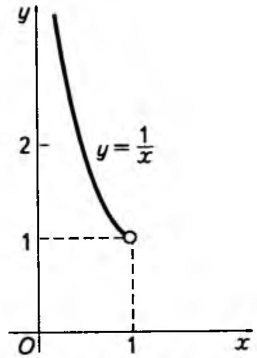


Рис. 5.28

ТЕОРЕМА 5.11
(Вейєрштрасса)

Неперервна на відрізку $[a, b]$ функція $y = f(x)$ досягає на ньому свого найбільшого й найменшого значень, тобто існують точки c_1 і c_2 такі, що $c_1, c_2 \in [a, b]$, причому

$$\max_{x \in [a,\ b]} f(x) = f(c_1), \quad \min_{x \in [a,\ b]} f(x) = f(c_2).$$

✓ *Зауваження 5.3.* На неперервні на проміжку (a, b) функції друга теорема Вейєрштрасса, взагалі кажучи, не поширюється. Наприклад, функція $y = x$ неперервна на проміжку $(0; 1)$. Ця функція обмежена. Її значення мають точну верхню ($M = 1$) і точну нижню ($m = 0$) межі (рис. 5.29). Але дана функція не досягає свого найбільшого й

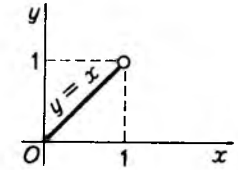


Рис. 5.29

найменшого значень. У теоремі 5.11 істотно, що $[a, b]$ — обмежена множина.

ТЕОРЕМА 5.12
(Больцано—Коші)

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і набуває на кінцях цього відрізка значень різних знаків, тобто $f(a)f(b) < 0$, то всередині відрізка існує принаймні одна точка $c \in (a, b)$ така, що $f(c) = 0$.

✓ *Зауваження 5.4.* Ця теорема має простий *геометричний зміст*: якщо функція на кінцях відрізка набуває значень різних знаків, то її графік обов'язково перетне вісь Ox у деякій точці $c \in (a, b)$ (рис. 5.30 або 5.31).

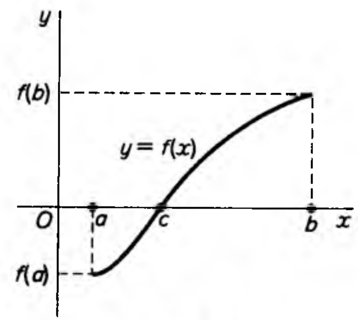


Рис. 5.30

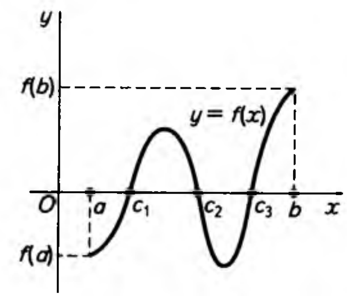


Рис. 5.31

Справедливе й таке твердження, що узагальнює теорему 5.12.

ТЕОРЕМА 5.13
(Больцано—Коші)

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і на його кінцях набуває різних значень $f(a) = A$, $f(b) = B$, причому $A \neq B$, то при будь-якому C $(A < C < B)$ знайдеться принаймні одна точка $c \in (a, b)$ така, що $f(c) = C$.

Геометричний зміст теореми 5.13 полягає в тому, що в разі виконання відповідних умов пряма $y = C$ перетинає графік функції $y = f(x)$ принаймні в одній точці (рис. 5.32).

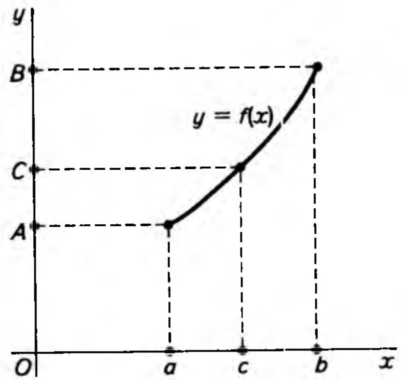


Рис 5.32

♦ **Наслідок.** *Множиною значень функції $y = f(x)$, відмінної від сталої функції, неперервної на відрізку $[a, b]$, є відрізок $[m, M]$, де* $m = \min\limits_{x \in [a,\, b]} f(x)$ *і* $M = \max\limits_{x \in [a,\, b]} f(x)$.

?

Контрольні запитання

1. Що таке функція одного аргументу?
2. Що називають областю визначення функції?
3. Що називають областю значень функції?
4. Які основні способи задання функції?
5. Яку функцію називають: монотонною, додатною, від'ємною, знакосталою, парною, непарною, періодичною?

6. Яку функцію називають обмеженою, а яку — необмеженою?
7. Яку функцію називають складною?
8. Які функції називають взаємно оберненими?
9. Які функції належать до основних елементарних?
10. Які функції називають: цілою раціональною (многочленом), дробово-раціональною, трансцендентною?
11. Які функції використовуються в економічній теорії?
12. Як формулюються означення границі функції в точці?
13. Чи рівносильні означення границі функції за Гейне й за Коші?
14. Який геометричний зміст границі функції в точці?
15. Які основні властивості функції, що має границю?
16. Яку функцію називають нескінченно малою, а яку — нескінченно великою? Який зв'язок між ними?
17. Які основні властивості нескінченно малих функцій?
18. Як порівнюють нескінченно малі функції?
19. Які нескінченно малі функції називають еквівалентними?
20. Які нескінченно малі функції називають нескінченно малими одного порядку малості?
21. Як формулюються основні теореми про границі функцій?
22. Як визначають важливі границі?
23. Які існують типи невизначеностей?
24. Як обчислюють границю показниково-степеневої функції?
25. Яке означення неперервності функції в точці?
26. Які точки називають точками розриву функції?
27. Як класифікують точки розриву?
28. Яке означення неперервності функції на відрізку?
29. Які властивості неперервних на відрізку функцій?
30. Яка економічна інтерпретація неперервності?

Приклади розв'язування задач

1 *Використовуючи означення Коші, довести, що* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$.

Нехай ε — довільне додатне число. Потрібно довести, що можна добрати таке $M>0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x|>M$, виконуватиметься нерівність $\left|\frac{x^2}{x^2+1}-1\right|<\varepsilon$.

Якщо $|x|>M$, то $x^2>M^2$ і $\left|\frac{x^2}{x^2+1}-1\right|=\frac{1}{x^2+1}<\frac{1}{M^2+1}<\frac{1}{M^2}$.

Отже, аби виконувалася нерівність $\left|\frac{x^2}{x^2+1}-1\right|<\varepsilon$, достатньо знайти $M>0$ з умови $\frac{1}{M^2}=\varepsilon$, тобто $M=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Звідси випливає, що

$$\forall\varepsilon>0\ \exists M=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\ \forall x:|x|>M:\left|\frac{x^2}{x^2+1}-1\right|<\varepsilon.$$

А це означає, що $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$.

2 *Використовуючи означення Коші, довести, що* $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$.

Нехай $E>0$ довільне. Тоді нерівність $\frac{1}{(x-1)^2}<E$ виконується, якщо виконується нерівність $(x-1)^2<\frac{1}{E}$ або $0<|x-1|<\frac{1}{\sqrt{E}}=\delta(E)$. Звідси випливає, що $\forall E>0\ \exists\delta=\frac{1}{\sqrt{E}}\ \forall x:0<|x-1|<\delta:\left|\frac{1}{(x-1)^2}\right|>E$.

3 *Показати, що функція $y=\sin x$ при $x\to\infty$ (або $x\to-\infty$) не має границі.*

Найлегше це довести, використовуючи означення границі функції «мовою послідовностей» (за Гейне).

Розглянемо дві послідовності аргументів: $x_n=\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi$ і $x'=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$ при $n\to\infty$, $x_n\to+\infty$, $x'_n\to+\infty$.

Відповідні послідовності значень функції:

$$f(x_n)=\sin\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi=-1,\quad f(x'_n)=\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi=1,$$

тобто функція не має границі при $x\to\infty$.

4 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

Оскільки $\lim\limits_{x\to0}(x^2-1)=-1$, $\lim\limits_{x\to0}(2x^2-x-1)=-1\neq0$, то за теоремою про арифметичні дії над границями дістанемо

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to0}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to0}(2x^2-x-1)}=\frac{-1}{-1}=1.$$

5 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$.

Чисельник і знаменник дробу при $x\to3$ прямують до нуля, тобто має місце невизначеність типу $\left(\frac{0}{0}\right)$. Тому, розклавши й чисельник, і знаменник на множники, дістанемо

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{x+3}{x}=\frac{3+3}{3}=2.$$

6 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$.

У цьому прикладі при $x\to1$ чисельник і знаменник функції нескінченно малі, тобто має місце невизначеність типу $\left(\frac{0}{0}\right)$. Розкладемо на множники чисельник і знаменник дробу та обчислимо границю:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0.$$

7 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x-5}{4x^3-2x+1}$.

При $x\to\infty$ чисельник і знаменник є нескінченно великими, тобто має місце невизначеність типу $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Для її розкриття поділимо й чисельник, і знаменник даного дробу на x^3 і до нового дробу застосуємо теорему про арифметичні дії над границями:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x-5}{4x^3-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{4-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=$$

$$=\frac{3+2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}-5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{4-2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}=\frac{3}{4}.$$

Тут враховано, що $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$.

8 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^6}-1}{x^6}$.

У цьому прикладі має місце невизначеність типу $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Щоб розкрити її, помножимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений із чисельником. Після цього можна буде скоротити на x^6. Дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^6}-1}{x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^6-1}{(\sqrt{1+x^6}+1)\ x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^6}+1}=\frac{1}{2}.$$

9 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$.

Знову має місце невизначеність типу $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Помноживши чисельник і знаменник на неповний квадрат суми, тобто $((\sqrt[3]{1+x^2})^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1)$, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x^2((\sqrt[3]{1+x^2})^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[3]{1+x^2})^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1}=\frac{1}{3}.$$

10 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x+m)(x+n)}-x)$.

Має місце невизначеність типу $(\infty-\infty)$. Помножимо й поділимо вираз на спряжений. Тоді

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{(x+m)(x+n)}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+m)(x+n)-x^2}{\sqrt{(x+m)(x+n)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(n+m)x+mn}{\sqrt{(x+m)(x+n)}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(n+m)+mn/x}{\sqrt{\left(1+\frac{m}{x}\right)\left(1+\frac{n}{x}\right)}+1}=\frac{m+n}{2}.$$

11 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

При $x\to 0$ величина $\alpha=2x\to 0$. Тому, помноживши й поділивши чисельник і знаменник на 2 і застосовуючи формулу (5.13), дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\cdot 1=2.$$

12 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$.

У цьому прикладі при $x\to\infty$ величина $\alpha=\dfrac{1}{x}\to 0$. Тому

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{1/x} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

13 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$.

Оскільки справедлива формула $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$, то, користуючися формулою (5.13), дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{5x}{2}}{5x/2}\right)^2\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}.$$

14 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$.

Оскільки $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, а $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$, то, виконавши тотожні перетворення й урахувавши, що $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{4}\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{1/3}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt[3]{4}\sin\frac{x}{2}\sqrt[3]{\sin\frac{x}{2}}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt[3]{4}}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to 0}\cos\frac{x}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\sin\frac{x}{2}}} = \frac{2}{\sqrt[3]{4}}1\cdot 1\cdot\infty = \infty.$$

15 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.

Має місце невизначеність типу 1^∞.

Оскільки $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$, то, поклавши $\alpha = \operatorname{tg} x$, при $x\to 0$, $\alpha\to 0$ дістанемо

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{1/\operatorname{tg} x} = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e.$$

16 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

У цьому прикладі границя основи дорівнює 1, а показник степеня прямує до ∞. Має місце невизначеність типу 1^∞. Для розкриття цієї невизначеності виділимо цілу частину в дробу:

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1+\frac{2}{x-1}.$$

Зробимо заміну: $\dfrac{2}{x-1} = \alpha$. Тоді $x = \dfrac{2}{\alpha}+1$, і якщо $x\to\infty$, то $\alpha\to 0$ і дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{2/\alpha+1} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{2/\alpha}\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha) = \lim_{\alpha\to 0}((1+\alpha)^{1/\alpha})^2\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha) = e^2\cdot 1 = e^2.$$

17 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Має місце невизначеність типу 1^∞. Оскільки $\operatorname{ctg} x = 1/\operatorname{tg} x$, то, користуючися формулами (5.18) і (5.12), дістанемо

$$\lim_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x} = \lim_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}} = \lim_{x\to 0}\left((1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{3\operatorname{tg}^2 x}}\right)^3 = e^3.$$

18 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$.

Діленням чисельника дробу на знаменник виділимо цілу частину:

$$\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7} = 1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}.$$

Таким чином, при $x\to\infty$ має місце невизначеність типу 1^∞.

Зробимо заміну: $\dfrac{8x-3}{x^2-3x+7} = \alpha$. Якщо $x\to\alpha$, то $\alpha\to 0$.

Виконаємо тотожні перетворення й застосуємо формулу (5.12):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right)^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right)^{\frac{8-3/x^2}{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}}=\left[\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8-3/x^2}{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}}=e^8.$$

19 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{7^x-1}{4^x-1}$.

Поділимо чисельник і знаменник дробу на x. Тоді за формулами (5.22) і (5.8) дістанемо

$$\lim_{x\to0}\frac{7^x-1}{4^x-1}=\lim_{x\to0}\left(\frac{7^x-1}{x}:\frac{4^x-1}{x}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{7^x-1}{x}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{4^x-1}{x}}=\frac{\ln7}{\ln4}.$$

20 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to\infty}x\lg\dfrac{5+x}{3+x}$.

Позначимо $y=1/x$. Тоді $x=1/y$. Якщо $x\to\infty$, то $y\to0$, і за формулою (5.20) дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}x\lg\frac{5+x}{3+x}=\lim_{y\to0}\frac{1}{y}\lg\frac{5+1/y}{3+1/y}=\lim_{y\to0}\frac{1}{y}\lg\frac{1+5y}{1+3y}=$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{\lg(1+5y)-\lg(1+3y)}{y}=5\lim_{y\to0}\frac{\lg(1+5y)}{5y}-3\lim_{y\to0}\frac{\lg(1+3y)}{3y}=$$

$$=5\lg e-3\lg e=2\lg e.$$

21 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[k]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$.

Позначимо $x=1+y$. Тоді $y=x-1$. Якщо $x\to1$, то $y\to0$, і за формулою (5.23) дістанемо

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[k]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}=\lim_{y\to0}\frac{(1+y)^{1/k}-1}{(1+y)^{1/m}-1}=\lim_{y\to0}\left(\frac{(1+y)^{1/k}-1}{y}:\frac{(1+y)^{1/m}-1}{y}\right)=$$

$$=\left(\lim_{y\to0}\frac{(1+y)^{1/k}-1}{y}\right):\left(\lim_{y\to0}\frac{(1+y)^{1/k}-1}{y}\right)=\frac{1}{k}:\frac{1}{m}=\frac{m}{k}.$$

22 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2x}$.

Додамо й віднімемо в чисельнику одиницю. Дістанемо

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2x}+\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x-1}{\sin^2x\left(\sqrt{\cos x}+1\right)}+\frac{1-\cos x}{\sin^2x}\,\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\left(-\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1}+\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2x}}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}1\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{12}.$$

23 *Довести, що нескінченно малі при $x\to0$ функції $\alpha(x)=\dfrac{x}{1-x}$ і $\beta(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ еквівалентні.*

Обчислимо границю відношення цих функцій:

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{x}{1+x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{1+x^2}{1-x}=1.$$

Отже,

$$\frac{x}{1-x} \sim \frac{x}{1+x^2} \text{ при } x \to 0.$$

24 *Порівняти нескінченно малі функції* $\alpha(x) = x\ln(1+x)$ *і* $\beta(x) = x\sin x$ *при* $x \to 0$.

Обчислимо границю відношення цих функцій:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} : \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Отже, $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to 0$.

25 *Довести, що функції* $\alpha(x) = \dfrac{8x^2}{1+x}$ *і* $\beta(x) = x^2$ *при* $x \to 0$ *будуть нескінченно малими одного порядку.*

Знайдемо границю відношення двох заданих функцій:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{8x^2}{x+1}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{8x^2}{x^2(x+1)} = 8\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1} = 8 \neq 0.$$

Отже, функції є нескінченно малими одного порядку при $x \to 0$.

26 *Довести, що функція* $\alpha(x) = \dfrac{x^3}{7-x}$ *нескінченно мала вищого порядку порівняно з функцією* $\beta(x) = x^2$ *при* $x \to 0$.

Знайдемо границю відношення двох заданих функцій:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{7-x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2(7-x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{7-x} = 0,$$

тобто функція $y = \alpha(x)$ є нескінченно малою вищого порядку порівняно з функцією $y = \beta(x)$ при $x \to 0$.

27 *Довести, що функція* $\alpha(x) = 1 - \cos x$ *буде нескінченно малою другого порядку порівняно з функцією* $\beta(x) = x$ *при* $x \to 0$.

Обчислимо границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2} = 1\cdot 0 = 0.$$

Обчислимо тепер границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x/2}\right)^2 = \frac{1}{2}1 = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Отже, функція $\alpha(x) = 1 - \cos x$ є нескінченно малою другого порядку порівняно з функцією $\beta(x) = x$ при $x \to 0$.

28 *Порівняти нескінченно малі функції* $\alpha(x) = \ln(1 + 3x\sin x)$ *і* $\beta(x) = \operatorname{tg} x^2$ *при* $x \to 0$.

Обчислимо границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x\sin x)}{\operatorname{tg} x^2}.$$

Замінимо чисельник і знаменник дробу еквівалентними нескінченно малими: $\ln(1 + 3x\sin x) \sim 3x\sin x$, $\operatorname{tg} x^2 \sim x^2$ при $x \to 0$.

У разі заміни нескінченно малих еквівалентними функціями границя відношення не змінюється, тому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x\sin x)}{\operatorname{tg} x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{3x\sin x}{x^2} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 3.$$

Отже, функції при $x \to 0$ є нескінченно малими одного порядку.

29 *Знайти точки розриву функції* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+2|}{x+2}x - 2, & \text{якщо } x \neq -2, \\ -2, & \text{якщо } x = -2 \end{cases}$ *і встановити характер розриву.*

Дана функція визначена для всіх $x \in \boldsymbol{R}$. Якщо $x > -2$, то $x + 2 > 0$, $|x+2| = x + 2$ і $\dfrac{|x+2|}{x+2} = 1$. У цьому разі $f(x) = \dfrac{|x+2|}{x+2}x - 2 = x - 2$. Тому для всіх $x > -2$ функція неперервна як многочлен першого степеня.

Аналогічно при $x < -2$ матимемо $|x+2| < 0$, $|x+2| = -x-2$, $\frac{|x+2|}{x+2} = -1$, і $f(x) = \frac{|x+2|}{x+2}x - 2 = -x - 2$ неперервна як многочлен першого степеня.

Розглянемо точку $x_0 = -2$. Обчислимо однобічні границі при $x \to -2$:

$$\lim_{x \to -2-0} f(x) = \lim_{x \to -2-0} (-x-2) = 2-2 = 0,$$

$$\lim_{x \to -2+0} f(x) = \lim_{x \to -2+0} (x-2) = -2-2 = -4.$$

Отже, однобічні границі функції $f(x)$ у точці $x_0 = -2$ існують, але не рівні між собою. Тому в цій точці функція має розрив першого роду.

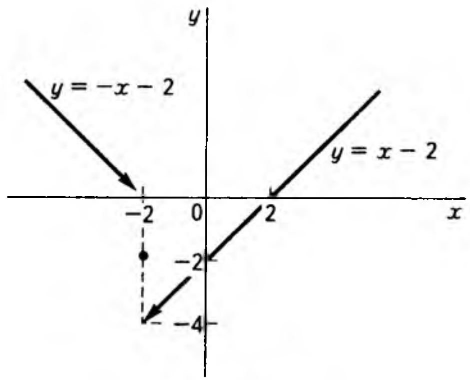


Рис. 5.33

Графік функції зображено на рис. 5.33:

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{при } x > -2, \\ -2 & \text{при } x = -2, \\ -x-2 & \text{при } x < -2. \end{cases}$$

30 *Знайти точки розриву функції* $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}$ *і встановити характер розриву.*

Цю функцію можна подати як складну функцію $y = \frac{1}{1+2^u}$, де $u = \frac{1}{x-1}$.

Оскільки $1 + 2^u > 0$, то функція $y = \frac{1}{1+2^u}$ неперервна для будь-якого u. Функція $u = \frac{1}{x-1}$ неперервна для всіх значень x, крім $x = 1$. Отже, дана складна функція неперервна для всіх $x \neq 1$.

При $x \to 1-0$ матимемо $\frac{1}{x-1} \to -\infty$, $2^{\frac{1}{x-1}} \to 0$ (рис. 5.34 і рис. 5.35 відповідно). Тому

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

При $x \to 1+0$ матимемо $\frac{1}{x-1} \to +\infty$, $2^{\frac{1}{x-1}} \to +\infty$ (рис. 5.34 і 5.35 відповідно). Тому

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}} = 0.$$

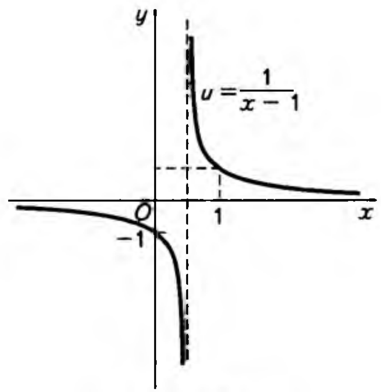


Рис. 5.34

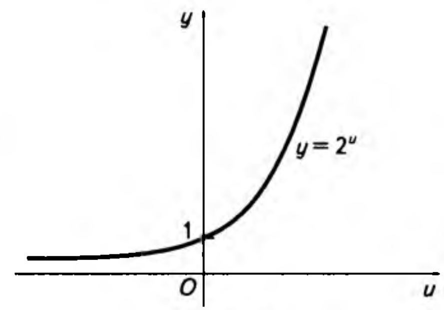


Рис. 5.35

Отже,

$$f(1-0) = 1, \quad f(1+0) = 0 \quad \text{і} \quad f(1-0) \neq f(1+0).$$

Таким чином, однобічні границі існують, але не рівні між собою, тому

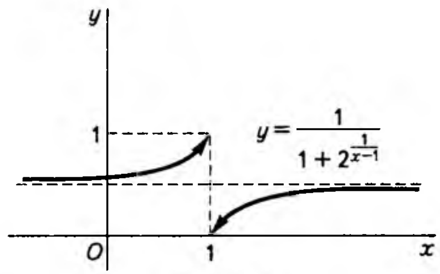


Рис. 5.36

точка $x_0 = 1$ є точкою розриву першого роду. Графік заданої функції зображено на рис. 5.36.

31 *Знайти точки розриву функції* $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$ *і встановити характер розриву.*

Задана функція неперервна скрізь, крім точки $x = -1$.
Для визначення характеру розриву обчислимо однобічні границі:

$$\lim_{x \to -1-0} e^{\frac{1}{x+1}} = 0,$$

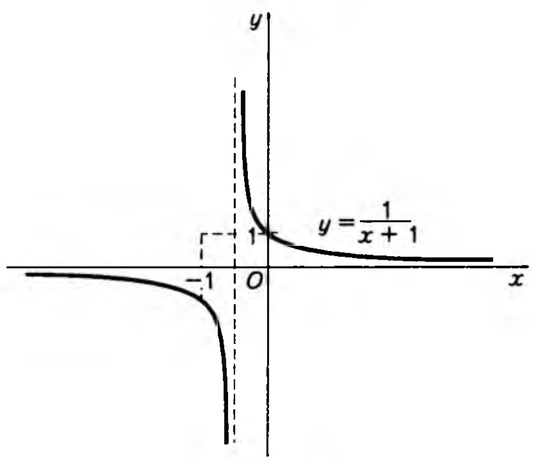


Рис. 5.37

(при $x \to -1-0$ маємо $\frac{1}{x+1} \to -\infty$, $e^{\frac{1}{x+1}} \to 0$);

$$\lim_{x \to -1+0} e^{\frac{1}{x+1}} = +\infty,$$

(при $x \to -1+0$ маємо $\frac{1}{x+1} \to +\infty$, $e^{\frac{1}{x+1}} \to +\infty$) (рис. 5.37 і 5.38 відповідно).

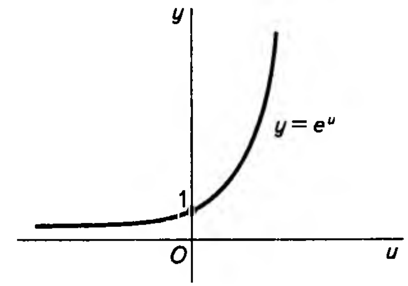


Рис. 5.38

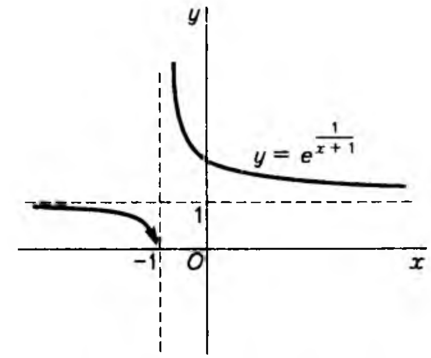


Рис. 5.39

Отже, точка $x_0 = -1$ є точкою розриву другого роду, оскільки права границя нескінченна. Графік заданої функції зображено на рис. 5.39.

32 *Знайти точки розриву функції* $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ *і встановити характер розриву.*

Задана функція є дробово-раціональною, і тому вона неперервна в усіх точках, в яких знаменник відмінний від нуля. В точках $x = \pm 2$ функція не визначена, й тому вона розривна.

Неважко перевірити, що в обох точках однобічні границі нескінченні (рис. 5.40 і рис. 5.41).

Для визначення характеру розриву обчислимо однобічні границі:

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x \to 2-0} \frac{x}{x+2} \lim_{x \to 2-0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x \to 2+0} \frac{x}{x+2} \lim_{x \to 2+0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty,$$

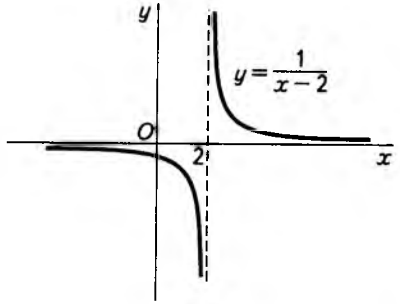


Рис. 5.40

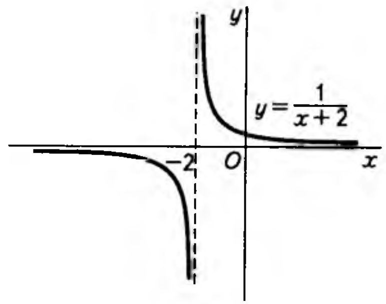


Рис. 5.41

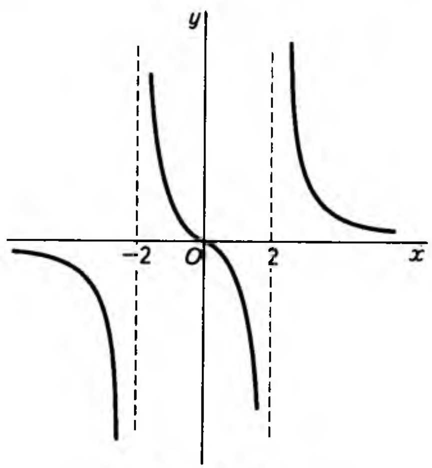


Рис. 5.42

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{x}{x^2-4}=\lim_{x\to -2-0}\frac{x}{x-2}\lim_{x\to -2-0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to -2-0}\frac{1}{x+2}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to -2+0}\frac{x}{x^2-4}=\lim_{x\to -2+0}\frac{x}{x-2}\lim_{x\to -2+0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to -2+0}\frac{1}{x+2}=+\infty.$$

Отже, $x=\pm 2$ — точки розриву другого роду.
Графік заданої функції зображено на рис. 5.42.

Розділ 6

МЕТОДИ Й МОДЕЛІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

6.1 Похідна функції

6.1.1. Поняття похідної

Диференціальне числення — математичний апарат, що широко застосовується для економічного аналізу. Основною задачею економічного аналізу є вивчення економічних зв'язків, які записуються у вигляді функцій. Виникають запитання: Як зміниться доход держави в разі збільшення податків або введення імпортного мита? Зросте або зменшиться прибуток фірми внаслідок збільшення ціни на її продукцію? Аби відповісти на ці й подібні запитання, треба побудувати функції зв'язку змінних, які потім вивчаються за допомогою методів диференціального числення.

В економіці дуже часто потрібно знайти найкраще або оптимальне значення того чи іншого показника: наприклад, найвищу продуктивність праці, максимальний прибуток, мінімальні витрати тощо. Кожен показник являє собою функцію однієї або багатьох змінних. Подібні задачі породжують клас екстремальних задач в економіці, розв'язання яких пов'язане з використанням методів диференціального числення.

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на деякому проміжку $X=(a, b)$ (можливо, нескінченному). Виберемо довільну точку $x_0 \in X$ і надамо аргументові приросту Δx, так що точка $x_1 = x_0 + \Delta x$ також належить проміжку X (рис. 6.1).

Величину $\Delta x = x_1 - x_0$ називають ***приростом аргументу***. При цьому $\Delta x > 0$, якщо $x_1 > x_0$, і $\Delta x < 0$, якщо $x_1 < x_0$. Тоді відповідним ***приростом функції*** є величина $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$.

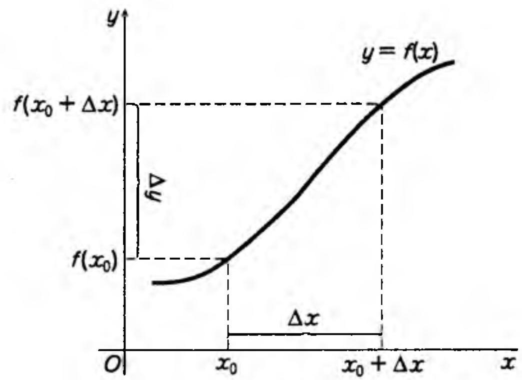


Рис. 6.1

➡ **Означення 6.1.** *Якщо існує границя відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу при $\Delta x \to 0$, то її називають* ***похідною функції*** $y = f(x)$ ***у точці*** x_0. Похідну позначають по-різному:

$$y'(x_0),\quad y',\quad f'(x_0),\quad f'_x,\quad \frac{df(x_0)}{dx},\quad \frac{dy}{dx},$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{6.1}$$

Відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{6.2}$$

називають ***диференціальним відношенням***.

У випадку, коли границя диференціального відношення (6.2) не існує, вважають, що функція не має похідної в точці x_0.

Якщо $y = f(x)$ має похідну в кожній точці проміжку X, то похідна $y = f'(x)$ також є функцією аргументу x, визначеною на проміжку X.

■ **Приклад 6.1.** *Знайдемо похідну функції $y = x^2$ у точці x_0, використовуючи означення 6.1.*

Надамо аргументові приросту Δx. Тоді функція дістане приріст

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x + \Delta x)^2 - x_0^2 =$$

$$= x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Знайдемо диференціальне відношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

та границю цього відношення при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

Отже, $f'(x_0) = 2x_0$.

6.1.2. Задачі, що приводять до поняття похідної

❑ **Задача про дотичну.** Нехай задано неперервну функцію $y = f(x)$, що має похідну на даному проміжку. Для з'ясування геометричного змісту похідної введемо означення дотичної до графіка функції в даній точці.

➡ **Означення 6.2.** ***Дотичною до графіка функції*** $y = f(x)$ ***у точці*** M_0 *називають граничне положення січної M_0M_1, коли точка M_1 прямує до точки M_0 по графіку $y = f(x)$.*

Запишемо рівняння дотичної до графіка функції в точці $M_0(x_0; f(x_0))$. Надамо аргументові приросту Δx і перейдемо по кривій $y = f(x)$ із точки $M_0(x_0; f(x_0))$ у точку $M_1(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$. Проведемо січну M_0M_1 (рис. 6.2).

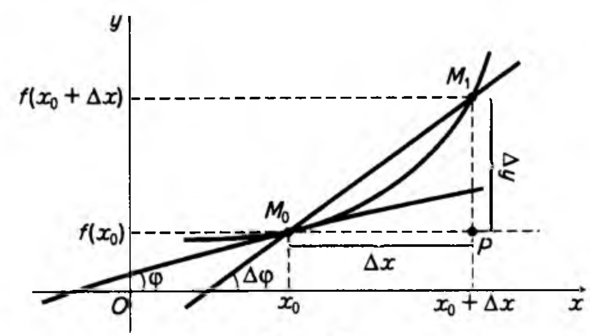


Рис. 6.2

Рівняння прямої, що проходить через точку M_0, має вигляд

$$y - f(x_0) = k(x - x_0).$$

Кутовий коефіцієнт $k = \text{tg}\ \Delta\varphi$, де $\Delta\varphi$ — кут нахилу січної M_0M_1. Розглянемо трикутник M_0PM_1, в якому $M_0P = \Delta x$, $M_1P = \Delta y$ і

$$\text{tg}\ \Delta\varphi = \frac{M_1P}{M_0P} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Нехай $\Delta x \to 0$. Тоді $M_1 \to M_0$, січна M_0M_1 прямує до дотичної, проведеної до графіка функції в точці M_0, і $\Delta\varphi \to \varphi$. Тоді кутовий коефіцієнт дотичної $k = \text{tg}\ \varphi = \lim\limits_{\Delta\varphi \to \varphi} \text{tg}\ \Delta\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Отже,

$$\boxed{k = f'(x_0).}$$

Ця рівність виражає *геометричний зміст похідної*: ***похідна $f'(x_0)$ функції $y = f(x)$ у точці x_0 чисельно дорівнює кутовому коефіцієнтові дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $(x_0; f(x_0))$.***

Рівняння дотичної має вигляд

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x)(x - x_0).} \qquad (6.3)$$

➡ **Означення 6.3.** ***Нормаллю до графіка функції $y = f(x)$ у точці M_0 називають пряму, яка перпендикулярна до дотичної й проходить через точку дотику M_0.***

Оскільки нормаль і дотична до графіка функції перпендикулярні й проходять через точку $M_0(x_0; f(x_0))$, то їхні кутові коефіцієнти k_1 і $k_2 = f'(x_0)$ пов'язані між собою співвідношенням $k_1k_2 = -1$. Тому кутовий коефіцієнт нормалі $k_1 = -\frac{1}{f'(x_0)}$, і рівняння нормалі має вигляд

$$\boxed{y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).} \qquad (6.4)$$

➡ **Означення 6.4.** ***Кутом між двома кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ у точці їх перетину M_0 називають кут між дотичними до цих кривих у даній точці.***

Використовуючи формулу кута між прямими, дістанемо формулу обчислення кута між даними кривими:

$$\boxed{\text{tg}\ \varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)f_2'(x_0)}.} \qquad (6.5)$$

❑ **Задача про миттєву швидкість.** Розглянемо нерівномірний прямолінійний рух тіла, що починається в момент часу t_0. Нехай шлях, пройдений тілом за час t, становить $S = S(t)$. Функцію $S(t)$ називають *законом руху тіла*. Тоді $\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)$ — шлях, який пройде тіло за інтервал часу $[t_0, t_0 + \Delta t]$.

Середня швидкість руху v_c за інтервал часу Δt — це відношення

$$v_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t},$$

в якому легко впізнати диференціальне відношення. Проте середня швидкість дає лише наближене уявлення про рух в окремий момент часу. Оскільки рух тіла нерівномірний, то на початку проміжку воно могло рухатися прискорено, а наприкінці — вповільнено.

Миттєвою швидкістю руху $v(t_0)$ у момент часу t_0 називають границю диференціального відношення при $\Delta t \to 0$, тобто

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} = S'(t_0).$$

Ця рівність виражає *фізичний зміст похідної*: ***похідна від шляху за часом $S'(t_0)$ дорівнює миттєвій швидкості тіла в момент часу t_0, що рухається за законом $S = S(t)$, тобто***

$$\boxed{S'(t_0) = v(t_0).} \qquad (6.6)$$

❑ **Задача про продуктивність праці.** Розглянемо *однофакторну*, або *однoресурсну, виробничу функцію* $u = u(x)$, яка виражає обсяг продукції, що виробляється за одиницю часу t, залежно від обсягу x витраченого ресурсу. Цей ресурс часто позначає кількість людської праці, вираженої в людино-годинах або в кількості робітників, зайнятих у виробництві. Нехай кількість робітників фірми становить x_0. Як правило, виробнича функція має похідну, тобто існує границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x_0),$$

де $\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)$ — приріст обсягу продукції, виробленої фірмою; Δx — кількість нових робочих місць.

У цьому випадкові $u'(x_0)$ — *обсяг додаткової продукції*, що виробляється новими робітниками фірми за одиницю часу.

Нехай p — ціна одиниці продукції, а $z = z(t)$ — заробітна плата робітника за одиницю часу. Якщо $pu'(x_0) > z$, то треба найняти ще одного робітника, оскільки він дає фірмі більше, ніж вона йому платить. Це правило має універсальний характер і називається *золотим правилом економіки.*

У розглядуваній ситуації похідну виробничої функції в точці x_0 в економіці називають *граничною продуктивністю праці.*

Нехай тепер виробнича функція $u = u(t)$ виражає кількість виробленої продукції u за час t, і необхідно знайти продуктивність праці в момент часу t_0. За період часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ кількість продукції зміниться від $u(t_0)$ до $u(t_0 + \Delta t)$.

Середня продуктивність праці за період часу Δt

$$\pi_{\text{сер}} = \frac{\Delta u}{\Delta t}. \tag{6.7}$$

Очевидно, що продуктивність праці в момент часу t_0 можна визначити як граничне значення середньої продуктивності праці за інтервал часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, тобто $\pi = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \pi_{\text{сер}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}$. Тому

$$\boxed{\pi = u'(t_0).} \tag{6.8}$$

Отже, *похідна від обсягу продукції $u'(t_0)$ виражає продуктивність праці в момент часу t_0.*

❑ **Задача про витрати виробництва.** Розглядатимемо витрати деякого виробництва $C = C(x)$ як функцію x обсягу продукції, що випускається. Нехай Δx — приріст обсягу продукції, ΔC — приріст витрат виробництва.

Середній приріст витрат виробництва на одиницю продукції Δx становить

$$C_{\text{сер}} = \frac{\Delta C}{\Delta x}.$$

Тоді похідна

$$C'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

виражає *граничні витрати виробництва* й наближено характеризує додаткові витрати на виробництво одиниці додаткової продукції.

Середні витрати виробництва на одиницю продукції визначаються так:

$$C_{\text{сер}} = \frac{C(x)}{x}.$$

Таким чином, маємо ***економічний зміст похідної:*** *похідна характеризує швидкість зміни деякого економічного об'єкта чи процесу відносно часу або іншого досліджуваного фактора.*

Наприклад, якщо розглядати *функцію попиту* $q = q(p)$ — залежність попиту q на деякий товар від його ціни p, то похідна $q'(p)$ характеризує швидкість зміни попиту зі зміною ціни p на одиницю продукції.

Якщо розглядати *функцію пропозиції* $s = s(p)$ — залежність пропозиції деякого товару s від його ціни p, то похідна $s'(p)$ характеризує швидкість зміни пропозиції товару з боку виробників зі зміною ціни на одиницю товару.

Якщо розглядати *функції споживання й збереження*, де x — національний доход, $C = C(x)$ — функція споживання частини доходу, що витрачається, а $S = S(x)$ — функція збереження, то справедлива рівність

$$x = C(x) + S(x).$$

Здиференціювавши її, дістанемо

$$1 = C'(x) + S'(x),$$

де $C'(x)$ — *гранична схильність до споживання*; $S'(x)$ — *гранична схильність до збереження.*

Аналогічно можна визначити граничний доход, граничний обсяг продукції, граничну корисність тощо.

6.1.3. Однобічні похідні

За аналогією з поняттям однобічних границь функції вводяться поняття лівої та правої похідних функції в точці.

Означення 6.5. *Якщо існують однобічні границі*

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \ \text{і} \ \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

*то їх називають відповідно **лівою й правою похідними функції** $y = f(x)$ **у точці** x_0* і позначають відповідно

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \ \text{і} \ f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{6.9}$$

Якщо існують ліва та права похідні й $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, то існує похідна функції $y = f(x)$, причому

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0). \tag{6.10}$$

■ **Приклад 6.2.** *Покажемо, що функція $y = |x|$ не має похідної в точці $x_0 = 0$.*

Надамо аргументові приросту Δx. Тоді функція дістане приріст

$$\Delta y = |x_0 + \Delta x| - |x_0| = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|.$$

Запишемо диференціальне відношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \Delta x > 0, \\ -1, & \text{якщо} \quad \Delta x < 0. \end{cases}$$

Отже, $f'_+(0) = 1$, $f'_-(x) = -1$ і $f'_+(0) \neq f'_-(x)$, тобто функція $y = |x|$ не має похідної в точці $x_0 = 0$.

Взагалі функція типу $y = |f(x)|$ не має похідних у точках дійсних коренів рівняння $f(x) = 0$, оскільки за означенням модуля для цих функцій характерне $y'_+ \neq y'_-$.

6.1.4. Диференційовність функції

➨ **Означення 6.6.** *Функцію $y = f(x)$ називають **диференційовною в точці** x_0, якщо її приріст Δy у цій точці можна подати у вигляді*

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{6.11}$$

де A — деяке число, що не залежить від Δx; $\alpha(\Delta x)$ — нескінченно мала функція при $\Delta x \to 0$.

Оскільки добуток двох нескінченно малих функцій $\alpha(\Delta x)$ і Δx є нескінченно малою функцією вищого порядку малості при $\Delta x \to 0$, то формулу (6.11) можна записати у вигляді

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x). \tag{6.12}$$

ТЕОРЕМА 6.1

Аби функція $y = f(x)$ була диференційовною в точці x_0, необхідно й достатньо, щоб вона мала в цій точці скінченну похідну й $f'(x_0) = A$.

Доведення

Необхідність. Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0. Тоді приріст функції можна подати у вигляді (6.11). Поділивши цю рівність на $\Delta x \neq 0$, дістанемо диференціальне відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x).$$

Перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha(\Delta x)) = A.$$

Це означає, що існує похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0. Отже,

$$f'(x_0) = A. \tag{6.13}$$

Достатність. Нехай функція $y = f(x)$ має похідну в точці x_0 і $f'(x_0) = A$. З означення похідної (6.1) випливає, що функція $\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - A$ є нескінченно малою при $\Delta x \to 0$. Помноживши обидві частини цієї рівності на Δx, дістанемо $\alpha(\Delta x)\Delta x = \Delta y - A\Delta x$, що рівносильно (6.11). Отже, функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0.

Теорему доведено.

Твердження теореми дає змогу в подальшому ототожнювати диференційовність та існування похідної функції однієї змінної. Операцію знаходження похідної функції називають ***диференціюванням***.

➨ **Означення 6.7.** *Якщо функція має похідну в кожній точці деякого проміжку X, то кажуть, що вона **диференційовна на цьому проміжку**.*

ТЕОРЕМА 6.2
(про зв'язок між поняттями диференційовності та неперервності функції)

Якщо функція диференційовна в точці x_0, то вона й неперервна в цій точці.

Доведення

Оскільки функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, то $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$. Перейшовши до границі при $\Delta x \to 0$, дістанемо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) =$$

$$= f'(x_0) \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x)\Delta x = 0,$$

тобто $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, а це означає, що функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0.

Теорему доведено.

Обернене твердження невірне: ***функція $y = f(x)$, неперервна в точці, може не мати похідної в цій точці.***

Наприклад, $y = |x|$ неперервна в точці $x = 0$, але не має похідної в цій точці.

Таким чином, вимога диференційовності функції сильніша, ніж умова неперервності, оскільки з диференційовності випливає неперервність.

Отже, ***неперервність функції — необхідна, але не достатня умова диференційовності функції.***

✓ *Зауваження 6.1.* Похідна неперервної функції не обов'язково неперервна. Якщо функція має неперервну похідну на деякому проміжку X, то функцію називають ***гладкою*** на цьому проміжку. Якщо похідна функції має скінченне число точок розриву (причому першого роду), то таку функцію називають ***кусково-гладкою*** на проміжку X.

6.2 Диференціал функції

6.2.1. Означення й геометричний зміст диференціала

Приріст функції $y = f(x)$, диференційовної в точці x_0, має вигляд

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x. \qquad (6.14)$$

Якщо функція диференційовна в точці x_0, то вона неперервна в цій точці, але тоді при $\Delta x \to 0$ величини Δy, $f'(x_0)\Delta x$, $\alpha(\Delta x)\Delta x$ є нескінченно малими. Порядок малості цих величин різний: $f'(x_0)\Delta x$ і Δy

мають однаковий порядок з Δx, а величина $\alpha(\Delta x)\Delta x$ є нескінченно малою вищого порядку при $\Delta x \to 0$. Інакше кажучи, величина $f'(x_0)\Delta x$ є головною частиною приросту Δy; вона лінійна відносно Δx.

➡ **Означення 6.8.** ***Диференціалом функції $y = f(x)$ у точці x_0 називають головну, лінійну відносно Δx, частину приросту функції в цій точці:***

$$dy = f'(x_0)\Delta x. \qquad (6.15)$$

Диференціалом dx незалежної змінної x називатимемо приріст цієї змінної Δx, тобто

$$dx = \Delta x, \qquad (6.16)$$

і співвідношення (6.15) набирає вигляду

$$\boxed{dy = f'(x_0)dx.} \qquad (6.17)$$

Із рівності (6.17) випливає, що $f'(x_0) = \dfrac{dy}{dx}$, тобто похідна $f'(x_0)$ обчислюється як відношення диференціала функції dy до диференціала аргументу dx. Рівність (6.14) можна записати у вигляді

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) = dy + o(\Delta x). \qquad (6.18)$$

Диференціал функції має *геометричний зміст*.

Розглянемо графік функції $y = f(x)$ (рис. 6.3). На ньому позначено точки $M_0(x_0;\ f(x_0))$ і $M_1(x_0 + \Delta x;\ f(x_0 + \Delta x))$. Проведемо дотичну до графіка в точці M_0. У трикутнику M_0NP: $NP = M_0P$ tg $\varphi = f'(x_0)\Delta x = dy$.

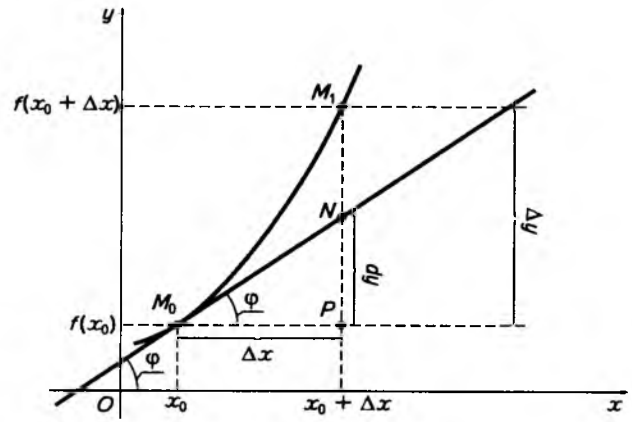


Рис. 6.3

Отже, *диференціал функції дорівнює приросту ординати дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0.*

Для складної функції $y = f(\varphi(x))$, де $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$, диференційовні функції $dy = f'_x[\varphi(x)]dx = f'_u(u)\varphi'_x(x)dx = f'(u)du$.

Отже, зовнішній вигляд диференціала функції $y = f(u)$ зберігається у випадку, коли u є функцією, а не незалежною змінною. Цю важливу властивість диференціала називають ***інваріантністю його форми***.

6.2.2. Наближені обчислення за допомогою диференціала

Ці обчислення базуються на наближеній заміні приросту функції в точці її диференціалом, тобто

$$\Delta y \approx dy. \tag{6.19}$$

Абсолютна похибка за такої заміни $|\Delta y - dy|$ при $\Delta x \to 0$ є нескінченно малою вищого порядку порівняно з Δx. Тому

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x. \tag{6.20}$$

Формула (6.20) є основною в наближених обчисленнях.

■ **Приклад 6.3.** *Наближено обчислимо значення* arcsin 0,51.

Розглянемо функцію $y = \arcsin x$. Покладемо $x_0 = 0{,}5$, $\Delta x = 0{,}01$ і застосуємо формулу (6.20):

$$\arcsin(x_0 + \Delta x) \approx \arcsin x_0 + (\arcsin x_0)'\Delta x.$$

Дістанемо

$$\arcsin 0{,}51 \approx \arcsin 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}}0{,}01 = \frac{\pi}{6} + 0{,}01 \approx 0{,}513.$$

6.2.3. Економічне застосування диференціала. Мультиплікатор

Розглянемо найпростішу економічну модель, яка описує динаміку росту прибутку залежно від інвестицій: $P = S + I$, де P — прибуток; S — споживання; I — інвестиції. Нехай $P = P(I)$ і $S = S(P)$. Виникає запитання: як впливає зміна інвестицій dI на зміну прибутку dP?

Оскільки $dP = P'(I)dI$, то з рівняння $P = S(P(I)) + I$ знайдемо залежність між інвестиціями й швидкістю росту прибутку:

$$P'(I) = \frac{dS}{dP}P'(I) + 1,$$

тобто

$$P'(I) = \frac{1}{1 - \frac{dS}{dP}},$$

або в диференціалах

$$dP = \frac{1}{1 - \frac{dS}{dP}}dI = \mu dI.$$

Вираз $\mu = \dfrac{1}{1 - \frac{dS}{dP}}$ називають ***мультиплікатором*** — числовим коефіцієнтом, який показує, в скільки разів сума приросту або скорочення прибутку перевищує початкову суму інвестицій.

Цей термін, уперше введений у 1931 р. Ф. Каюмом, набув подальшого розвитку в моделі Кейнса визначення рівня рівноваги прибутку. В цій моделі маємо: якщо $0 < \dfrac{dS}{dP} = C'(P) < 1$, то $\mu > 1$. Отже, додаткові інвестиції збільшуватимуть прибуток.

6.3 Правила диференціювання

6.3.1. Диференціювання суми, добутку й частки функцій

ТЕОРЕМА 6.3

Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовні в точці x_0, то функції $y = u(x) \pm v(x)$, $y = u(x)v(x)$ і $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ (за умови, що $v(x) \neq 0$) також диференційовні в цій точці, причому справджуються такі формули:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \tag{6.21}$$

$$(uv)' = u'v + uv', \tag{6.22}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v(x) \neq 0. \tag{6.23}$$

Доведення

Доведемо формулу (6.21). Розглянемо функцію $y = u(x) + v(x)$. Надамо аргументові приросту Δx. Тоді функція дістане приріст

$$\Delta y = [u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)] - [u(x) \pm v(x)] =$$

$$= [u(x + \Delta x) - u(x)] \pm [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u \pm \Delta v.$$

Використовуючи означення похідної (6.1) і теорему про арифметичні дії над границями, дістанемо

$$y' = (u(x) \pm v(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) \pm v'(x).$$

Формулу (6.21) доведено.

Для доведення формули (6.22) розглянемо функцію $y = u(x)\,v(x)$. Надамо аргументові приросту Δx. Тоді функція дістане приріст

$$\Delta y = [u(x + \Delta x)v(x + \Delta x)] - [u(x)v(x)].$$

Додавши й віднявши вираз $u(x)\,v(x + \Delta x)$, матимемо

$$\Delta y = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) + u(x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x + \Delta x) =$$

$$= [u(x + \Delta x) - u(x)]v(x + \Delta x) + u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)] =$$

$$= \Delta u v(x + \Delta x) + u(x)\Delta v.$$

Використовуючи означення похідної (6.1) і теорему про арифметичні дії над границями, дістанемо

$$y' = (u(x)v(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u v(x + \Delta x) + u(x)\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} v(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Формулу (6.22) доведено.

Для доведення формули (6.23) розглянемо функцію $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$. Надамо аргументові приросту Δx. Тоді функція дістане приріст

$$\Delta y = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)v(x)} =$$

$$= \frac{u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)v(x)} =$$

$$= \frac{[u(x + \Delta x) - u(x)]v(x) - [v(x + \Delta x) - v(x)]u(x)}{v(x + \Delta x)v(x)} =$$

$$= \frac{\Delta u v(x) - \Delta v u(x)}{v(x + \Delta x)v(x)}.$$

Використовуючи означення похідної (6.1) і теорему про арифметичні дії над границями, матимемо

$$y' = \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x} v(x) - \dfrac{\Delta v}{\Delta x} u(x)}{v(x + \Delta x)v(x)} = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}.$$

Формулу (6.23) доведено.

♦ **Наслідок.** *Сталий множник можна виносити за знак похідної.*

Справді, покладемо у формулі (6.22) $v(x) = C$, де $C = \text{const}$. Тоді $v'(x) = 0$ і $(Cu)' = Cu'$, тобто сталий множник можна виносити за знак похідної.

6.3.2. Диференціювання складної та оберненої функцій

ТЕОРЕМА 6.4
(правило диференціювання складної функції)

Нехай функція $u = \varphi(x)$ має похідну в точці x_0, а функція $y = f(u)$ — похідну у відповідній точці $u_0 = \varphi(x_0)$. Тоді складна функція $y = f(\varphi(x))$ має похідну в точці x_0 і справджується формула

$$f_x'(\varphi(x_0)) = f_u'(u_0)\varphi_x'(x_0). \tag{6.24}$$

Доведення

Надамо аргументові приросту $\Delta x \neq 0$. Тоді функція $u = \varphi(x)$ дістане приріст Δu, а функція $y = \varphi(x)$ — приріст Δy. За умови $\Delta u \neq 0$ дістанемо диференціальне відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}$. Перейшовши до границі при $\Delta x \to 0$ у цій рівності, матимемо

$$y_x' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = y_u'(u_0)\varphi_x'(x_0).$$

Теорему доведено.

♦ **Наслідок** *(правило диференціювання оберненої функції). Нехай функція $x = \varphi(y)$ обернена до функції $y = f(x)$, причому функції $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ мають похідні в точках x_0 і $y_0 = f(x_0)$ відповідно. Тоді справджується рівність*

$$\boxed{\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}. \tag{6.25}$$

Установимо зв'язок між похідними $y_x' = f'(x) \neq 0$ і $x_y' = \varphi'(y)$.

Оскільки $x = f(\varphi(y))$ при всіх значеннях x, то за правилом диференціювання складної функції візьмемо похідні від обох частин цієї рівності. Дістанемо

$$\varphi'(y_0)f'(x_0) = 1\varphi'(y_0)f'(x_0) = 1 \quad \text{або} \quad \varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Формулу (6.25) доведено.

6.3.3. Диференційовність елементарних функцій

Доведемо, що всі елементарні функції диференційовні в своїх областях визначення. Використовуючи означення похідної, можна легко обчислити похідні всіх основних елементарних функцій.

Запишемо *т а б л и ц ю п о х і д н и х:*

1. $(C)' = 0$, де $C = \text{const}$.
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$; зокрема, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
3. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$; зокрема, $(e^x)' = e^x$.
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0$; зокрема, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
5. $(\sin x)' = \cos x$.
6. $(\cos x)' = -\sin x$.
7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.
10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.
11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

У математиці, економіці та інших науках широко застосовуються гіперболічні функції:

$\text{sh}\ x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ — гіперболічний синус;

$\text{ch}\ x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ — гіперболічний косинус;

$\text{th}\ x = \dfrac{\text{sh}\ x}{\text{ch}\ x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ — гіперболічний тангенс;

$\text{cth}\ x = \dfrac{\text{ch}\ x}{\text{sh}\ x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ — гіперболічний котангенс ($x \neq 0$).

Легко показати, що ці функції неперервні й диференційовні на всій множині дійсних чисел ($x \neq 0$ для cth x). З означення гіперболічних функцій випливають такі формули для обчислення їхніх похідних, якими ми доповнимо таблицю похідних:

1. $(\text{sh}\ x)' = \text{ch}\ x,\ \ x \in \boldsymbol{R}$.

2. $(\text{ch}\ x)' = \text{sh}\ x,\ \ x \in \boldsymbol{R}$.

3. $(\text{th}\ x)' = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x},\ \ x \in \boldsymbol{R}$.

4. $(\text{cth}\ x)' = -\dfrac{1}{\text{sh}^2 x},\ \ x \neq 0$.

Формули таблиці похідних разом із формулами, що виражають правила диференціювання, є ***основними формулами диференціального числення***.

Можна зробити важливий ***висновок:*** *оскільки похідна довільної елементарної функції — також елементарна функція, то операція диференціювання не виводить функцію з класу елементарних.*

6.3.4. Похідна показниково-степеневої функції

Нехай функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ мають похідні в точці x_0. Знайдемо похідну показниково-степененевої функції $y = u(x)^{v(x)}$.

Скористаємось основною логарифмічною тотожністю $x = e^{\ln x}$. Тоді маємо

$$y = u(x)^{v(x)} = e^{\ln u(x)^{v(x)}} = e^{v(x)\ln u(x)}.$$

Використовуючи правило диференціювання складної функції, при $u(x) > 0$ дістанемо

$$(u(x)^{v(x)})' = (u(x))^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + \frac{u'(x)v(x)}{u(x)}\right). \tag{6.26}$$

■ **Приклад 6.4.** *Знайдемо похідну показниково-степеневої функції*

$$y = (x^2+1)^{\sin x}.$$

Використовуючи формулу (6.26), дістанемо

$$y' = ((x^2+1)^{\sin x})' = (e^{\sin x \ln(x^2+1)})' =$$

$$= e^{\sin x \ln(x^2+1)}\left[\cos x \ln(x^2+1) + \sin x \frac{2x}{x^2+1}\right] =$$

$$= (x^2+1)^{\sin x}\left[\cos x \ln(x^2+1) + \sin x \frac{2x}{x^2+1}\right].$$

6.3.5. Похідна неявної функції

Вище було розглянуто диференціювання явних функцій, заданих у вигляді $y = f(x)$. Розглянемо диференціювання неявної функції, заданої рівнянням $F(x, y) = 0$. Якщо для кожного x (на деякому проміжку X) існує одне або кілька значень y, які разом із x задовольняють таке рівняння, то цим визначається (однозначно або багатозначно) функція $y = f(x)$, для якої рівність

$$F(x, f(x)) = 0 \tag{6.27}$$

справджується вже тотожно відносно x.

Похідну функції, заданої неявно, можна знайти з рівняння

$$\frac{d}{dx}(F(x, y)) = 0,$$

де $F(x, y)$ розглядається як складна функція аргументу x.

Отже, *для відшукання похідної функції, заданої неявно, достатньо здиференціювати обидві частини рівняння, розглядаючи y як функцію від x, а потім із добутого рівняння знайти похідну* y'_x.

■ **Приклад 6.5.** *Рівняння* $x^2 + y^2 - 1 = 0$ *визначає y як неявну функцію від x. Знайдемо* y'_x.

Диференціюючи обидві частини рівності за правилами диференціювання складної функції, дістанемо

$$2x + 2y \cdot y'_x = 0 \quad \text{або} \quad y'_x = -\frac{x}{y}.$$

■ **Приклад 6.6.** *Дано рівняння* $e^y - e^x + xy = 0$. *Знайдемо* y'_x.

Диференціюючи обидві частини рівняння за правилами диференціювання складної функції, дістанемо

$$e^y y'_x - e^x + y + xy'_x = 0 \quad \text{або} \quad y'_x(e^y + x) = e^x - y,$$

тобто

$$y'_x = \frac{e^x - y}{e^y + x}.$$

6.3.6. Похідна функції, заданої параметрично

Нехай функцію $y = f(x)$ задано параметрично: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in T$. Диференціювання функції, заданої параметрично, базується на такій теоремі.

ТЕОРЕМА 6.5

Нехай виконуються такі умови:

1) функції $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ визначені та неперервні на заданому проміжку T і диференційовні в точці $t_0 \in T$;

2) функція $x = \varphi(t)$ строго монотонна на T і $\varphi'(t_0) \neq 0$;

3) функція $t = \alpha(x)$ обернена до функції $x = \varphi(t)$.

Тоді функція $y = \psi(\alpha(x))$ диференційовна в точці $x_0 = \varphi(t_0)$, причому справджується формула

$$y'(x_0) = \frac{\psi'(\alpha(x_0))}{\varphi'(\alpha(x_0))} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}. \tag{6.28}$$

Доведення

Оскільки функція $y = \psi(\alpha(x))$ складна й $t = \alpha(x)$ — функція, обернена до $x = \varphi(t)$, то за теоремами про диференціювання складної та оберненої функції, враховуючи, що $x_0 = \varphi(t_0)$, дістанемо

$$y'(x_0) = \psi'(\alpha(x_0))\alpha'(x_0) = \frac{\psi'(\alpha(x_0))}{\varphi'(\alpha(x_0))} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Теорему доведено.

■ **Приклад 6.7.** *Обчислимо похідну функції, заданої параметрично:* $x = a\cos^3 t$, $t = a\sin^3 t$, $t \in [0; \pi]$.

Обчислимо похідні:

$$\varphi'_t = -3a\cos^2 t \sin t, \quad \psi'_t = 3a\sin^2 t\cos t.$$

Підставивши їх у формулу (6.28), дістанемо

$$y'_t = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\operatorname{tg} t.$$

6.4 Похідні й диференціали вищих порядків

6.4.1. Похідні вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ має похідну на проміжку $X = (a, b)$. Якщо в точці $x_0 \in (a, b)$ похідна $f'(x)$, своєю чергою, диференційовна, то її називають ***похідною другого порядку***, або ***другою похідною***, функції $y = f(x)$ у точці x_0. Позначення: $f''(x_0)$, $y''(x_0)$, $\dfrac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$, $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

Похідну від другої похідної називають ***третьою похідною***, або ***похідною третього порядку***. Якщо цей процес можна продовжити, то дістанемо похідні четвертого, п'ятого, ..., n-го порядку.

Похідні, починаючи з другої, називають ***похідними вищих порядків***. Для них використовують такі позначення: y'', y''', $y^{(4)}$, $y^{(5)}$, ..., $y^{(n)}$.

Нехай функція $y = f(x)$ має на проміжку X похідні до $(n-1)$-го порядку: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$.

Означення 6.9. *Якщо в точці $x_0 \in X$ існує похідна функції $f^{(n-1)}(x)$, то її називають* ***похідною n-го порядку*** *функції $y = f(x)$ у точці x_0* і позначають так: $f^{(n)}(x_0)$, $y^{(n)}(x_0)$, $\dfrac{d^n f(x_0)}{dx^n}$, $\dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Отже, якщо функція $y = f(x)$ має в точці x_0 похідні до n-го порядку включно, то $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Означення 6.10. *Функцію $y = f(x)$, яка має на деякому проміжку X похідні до n-го порядку включно, називають* ***n разів диференційовною*** *на X. Функцію, яка має на X похідні всіх порядків, називають* ***нескінченно диференційовною*** *на X.*

Наприклад, функція $y = e^x$ нескінченно диференційовна на проміжку $X = (-\infty, +\infty)$.

У загальному випадкові для обчислення похідної вищого порядку потрібно попередньо знайти похідні всіх нижчих порядків. В окремих випадках удається встановити загальний вираз для похідної n-го порядку.

Приклад 6.8. *Знайдемо похідну n-го порядку функції $y = x^\alpha$, $\alpha \in R$, $x > 0$.*

Послідовно диференціюючи дану функцію, дістаємо

$$y' = \alpha x^{\alpha-1},\quad y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},\quad y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3},\ \ldots,$$

$$\boxed{y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.} \tag{6.29}$$

Зокрема, при $\alpha = -1$ маємо $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

Якщо $\alpha = m$, то $(x^m)^{(n)} = 0$ при $n > m$.

Приклад 6.9. *Знайдемо похідну n-го порядку функції $y = e^x$, $a > 0$.*

Послідовне диференціювання цієї функції дає

$$y' = a^x \ln a,\quad y'' = \alpha^x(\ln a)^2,\quad y''' = \alpha^x(\ln\alpha)^3,\ \ldots,$$

$$\boxed{y^{(n)} = \alpha^x(\ln\alpha)^n.} \tag{6.30}$$

Приклад 6.10. *Знайдемо похідну n-го порядку функції $y = \sin x$.*

Маємо

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = -\sin x = \sin(x+\pi) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right).$$

Таким чином, кожне диференціювання додає до аргументу синуса $\pi/2$, отже,

$$\boxed{(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).} \tag{6.31}$$

Аналогічно можна дістати формулу

$$\boxed{(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).} \tag{6.32}$$

Приклад 6.11. *Знайдемо похідну n-го порядку функції $y = \ln x$.*

Ураховуючи, що $y^{(n)} = (y)^{n-1}$, матимемо

$$\boxed{(\ln x)^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.} \tag{6.33}$$

6.4.2. Похідні вищих порядків функцій, заданих параметрично й неявно

Нехай функцію $y = f(x)$ задано параметрично: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in T$. Якщо функції $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ двічі диференційовні на заданому проміжку T і $\varphi'(t) \neq 0$, то похідна функції $y'_x = \dfrac{\psi'_t}{\varphi'_t}$ також є функцією, заданою параметрично. Знайдемо другу похідну функції, використовуючи формулу (6.28): $y''_{xx} = \dfrac{(\psi'_t/\varphi'_t)'}{\varphi'_t}$. Після диференціювання чисельника як частки двох функцій дістанемо

$$y''_{xx} = \frac{\psi''_{tt}\varphi'_t - \varphi''_{tt}\psi'_t}{(\varphi'_t)^3}. \tag{6.34}$$

■ **Приклад 6.12.** *Обчислимо другу похідну функції, заданої параметрично:* $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0; 2\pi]$.

Послідовно диференціюючи, дістанемо $\varphi'_t = -a\sin t$, $\varphi''_{tt} = -a\cos t$, $\psi'_t = b\cos t$, $\psi''_{tt} = -b\sin t$. Підставимо у формулу (6.34):

$$y''_{xx} = -\frac{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t}{a^3\sin^3 t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

Нехай функцію $y = f(x)$ неявно задано рівнянням $F(x, y) = 0$. Її похідна y''_{xx} у цьому разі обчислюється так:

1) знаходимо похідну від обох частин рівняння $\frac{d}{dx}(F(x, y)) = 0$, де $F(x, y)$ розглядається як складна функція аргументу x;
2) розв'язавши добуте рівняння відносно y'_x, дістанемо $y'_x = f(x, y)$;
3) для визначення другої похідної y''_{xx} від неявної функції диференціюємо добуту рівність (знову розглядаючи y як функцію від x), а потім замінюємо y'_x знайденим у п. 2) виразом.

■ **Приклад 6.13.** *Знайдемо* y''_{xx}, *якщо функцію* $y = y(x)$ *задано неявно:* $\operatorname{arctg} y - y + x = 0$.

Диференціюємо задане співвідношення, розглядаючи y як функцію від x:

$$\frac{y'_x}{1+y^2} - y'_x + 1 = 0, \quad \text{або} \quad y'_x - y'_x - y^2 y'_x + 1 + y^2 = 0.$$

Виражаємо з даного рівняння y'_x:

$$y'_x = \frac{1+y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} + 1.$$

Далі знаходимо:

$$y''_{xx} = -2y^{-3}y'_x.$$

Підставивши добуте значення y'_x у праву частину останньої рівності, дістанемо

$$y''_{xx} = -2y^{-3}y'_x = -\frac{2}{y^3}\left(\frac{1+y^2}{y^2}\right) = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}.$$

6.4.3. Формула Лейбніца для похідної *n*-го порядку добутку двох функцій

Нехай $y = uv$, де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ — функції, що мають похідні довільного порядку. Послідовне диференціювання функції дає

$$y' = u'v + uv', \; y'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

Праві частини рівностей аналогічні розкладу за формулою бінома Ньютона для випадків $n = 2$ і $n = 3$, тільки показники степенів замінено на порядки похідних, а самі функції u і v слід розглядати як похідні нульового порядку: $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$.

Методом математичної індукції можна довести справедливість загальної формули для похідної n-го порядку

$$(y)^{(n)} = (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}, \tag{6.35}$$

яку називають ***формулою Лейбніца***.

Коефіцієнти в рівності (6.35) обчислюються за формулою

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

причому для них виконується така властивість:

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Формулу Лейбніца зручно застосовувати, зокрема, в тих випадках, коли один із співмножників є многочленом.

Розглянемо приклади застосування формули Лейбніца.

■ **Приклад 6.14.** *Знайдемо похідну десятого порядку функції* $y = x^3 e^x$.

Покладемо $u = u^{(0)} = x^3$, $v = v^{(0)} = e^x$. Послідовно знаходимо похідні:

$$u' = 3x^2, \quad u'' = 6x, \quad u''' = 6, \quad u^{(4)} = \ldots = u^{(n)} = 0, \quad v^{(k)} = e^x$$

та біноміальні коефіцієнти:

$$C_{10}^0 = \frac{10!}{0!\ 10!} = 1,\quad C_{10}^1 = \frac{10!}{1!\ 9!} = 10,$$

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!\ 8!} = 45,\quad C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\ 7!} = 120.$$

Підставивши ці вирази у формулу (6.35), маємо

$$y^{(10)} = (x^3e^x)^{(10)} = x^3e^x + 10\cdot 3x^2e^x + 45\cdot 6xe^x + 120\cdot 6e^x =$$

$$= e^x(x^3 + 30x^2 + 270x + 720).$$

■ **Приклад 6.15.** *Знайдемо похідну п'ятого порядку функції* $y = e^{5x}\sin x$.

Поклавши $u = u^{(0)} = e^{5x}$ і $v = v^{(0)} = \sin x$, знаходимо похідні:

$$u^{(n)} = 5^ne^{5n},\quad v^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Підставимо значення відповідних похідних у формулу (6.35). При $n = 5$ маємо

$$y^{(5)} = e^{5x}(5^5\sin x + 5\cdot 5^4\cos x - 10\cdot 5^3\sin x -$$

$$- 10\cdot 5^2\cos x + 5\cdot 5\sin x + \cos x) = 25e^{5x}(76\sin x + 116\cos x).$$

6.4.4. Диференціали вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ є n разів диференційовною на проміжку X. Тоді в кожній точці $x \in X$ існує її диференціал $dy = f'(x)\,dx$, який надалі називатимемо ***диференціалом першого порядку функції*** $y = f(x)$, або ***першим диференціалом***. Оскільки диференціал аргументу dx є величиною сталою, то dy є функцією однієї змінної x. Диференціал цієї функції називатимемо ***диференціалом другого порядку функції*** $y = f(x)$ і позначатимемо d^2y або $d^2f(x)$. Отже,

$$d^2y = d(dy).$$

Тоді

$$d^2y = d(f'(x)dx) = d(f(x))dx = f''(x)dx^2.$$

Диференціал третього порядку, або ***третій диференціал***,

$$d^3y = d(d^2y) = d(f''(x)dx^2) = d(f''(x))dx^2 = f'''(x)dx^3.$$

Продовжуючи цей процес, визначимо диференціал n-го порядку (n-й диференціал).

➨ **Означення 6.11.** *Якщо для функції* $y = f(x)$ *визначено диференціал* $(n-1)$*-го порядку* $d^{(n-1)}y$, *то* ***диференціалом n-го порядку*** d^ny ***функції*** $y = f(x)$ *називають диференціал від диференціалу* $(n-1)$*-го порядку, тобто* $d^ny = d(d^{(n-1)}y)$.

За методом математичної індукції дістанемо

$$\boxed{d^ny = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}) = f^{(n)}(x)dx^n.} \qquad (6.36)$$

Із формули (6.36) випливає вираз для похідної n-го порядку:

$$\boxed{y^n(x) = \frac{d^nf}{dx^n}.}$$

✓ *Зауваження 6.2.* Формула (6.36) справедлива при $n > 1$ тільки у випадку незалежної змінної x, тобто ***диференціали вищих порядків не мають властивості інваріантності форми.***

Справді, вже при $n = 2$, з одного боку, якщо u — незалежна змінна, маємо $d^2y = f''(u)du^2$, з іншого — для складної функції $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, дістаємо

$$d^2y = d(f'(u)du) =$$

$$= d(f'(u)du + f'(u)d(du)u) = f''(u)du^2 + f''(u)d^2u, \qquad (6.37)$$

де $d^2u = \varphi''(x)dx^2$.

■ **Приклад 6.16.** *Знайдемо диференціал другого порядку функції* $y = e^{-x^2}$.

Вважаючи x незалежною змінною, за формулою (6.36) дістанемо

$$d^2y = (e^{-x^2})''dx^2.$$

Оскільки

$$y' = -2xe^{-x^2},\quad y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1),$$

то

$$d^2y = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)dx^2.$$

Вважаючи x функцією деякої незалежної змінної, за формулою (6.37) маємо

$$d^2y = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)dx^2 - 2xe^{-x^2}d^2x.$$

6.5
Застосування похідних до дослідження функцій

6.5.1. Основні теореми диференціального числення

ТЕОРЕМА 6.6
(Ферма)

Якщо диференційовна на проміжку (a, b) функція $y = f(x)$ досягає свого найменшого або найбільшого значення у внутрішній точці $x_0 \in (a, b)$ цього проміжку, то похідна в цій точці дорівнює нулю, тобто $f'(x_0) = 0$.

Доведення

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на проміжку (a, b) і набуває в точці $x_0 \in (a, b)$ свого найменшого значення. Тоді $f(x_0 + \Delta x) \ge f(x_0)$, якщо $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ (рис. 6.4), і $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \ge 0$ при достатньо малих Δx незалежно від знака Δx. Звідси $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0$ при $\Delta x > 0$ і $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \le 0$ при $\Delta x < 0$.

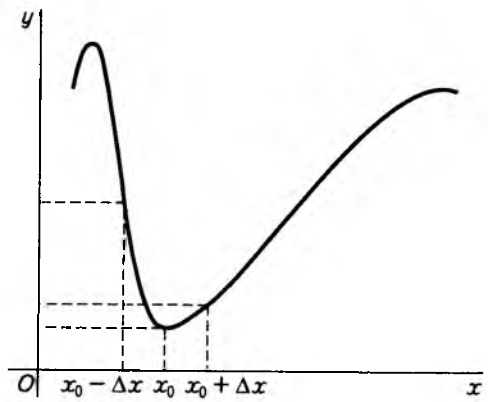


Рис. 6.4

Переходячи до границі при $\Delta x \to 0 + 0$ і при $\Delta x \to 0 - 0$, дістанемо

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0 \quad \text{і} \quad \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \le 0.$$

За умовою теореми функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0. Отже,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Це означає, що $f'(x) = 0$.

Аналогічно можна довести випадок, коли функція $y = f(x)$ набуває в точці x_0 найбільшого значення.

Теорему доведено.

Геометричний зміст теореми Ферма: в точці, в якій функція набуває свого найбільшого або найменшого значення, що досягається всередині проміжку (a, b), дотична до графіка функції паралельна осі абсцис.

ТЕОРЕМА 6.7
(Ролля)

Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє такі умови:

1) неперервна на відрізку $[a, b]$;
2) диференційовна на проміжку (a, b);
3) $f(a) = f(b)$.

Тоді існує принаймні одна точка $c \in (a, b)$ така, що $f'(c) = 0$.

Доведення

Функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$. Тоді за теоремою Вейєрштрасса вона набуває свого найбільшого та найменшого значень. Позначимо їх $\max\limits_{[a,\,b]} f(x) = M$, $\min\limits_{[a,\,b]} f(x) = m$ відповідно. Розглянемо такі випадки:

1) якщо $m = M$, то $f(x) = M$ — стала для всіх $x \in [a, b]$, і за точку c можна взяти будь-яку точку з проміжку (a, b);
2) якщо $m < M$, то принаймні одне зі значень m або M досягається у внутрішній точці c відрізка $[a, b]$, тобто $c \in (a, b)$. Тоді за теоремою Ферма $f'(c) = 0$.

Теорему доведено.

Геометричний зміст теореми Ролля: якщо функція неперервна на відрізку $[a, b]$, *диференційовна в кожній точці* (a, b) *і на кінцях набуває однакових значень, то хоча б в одній внутрішній точці відрізка дотична до графіка функції паралельна осі* Ox (рис. 6.5, 6.6).

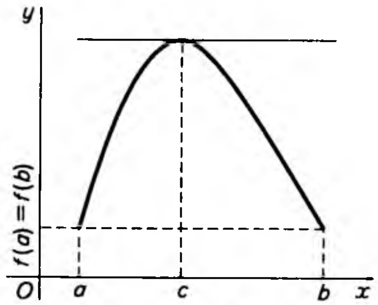


Рис. 6.5

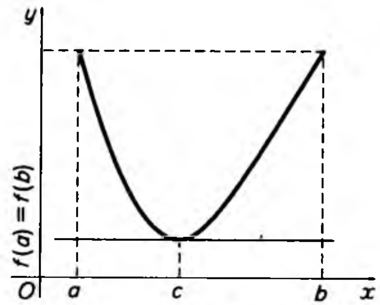


Рис. 6.6

Зауважимо, що всі умови теореми Ролля суттєві. Розглянемо кілька прикладів, в яких ці умови порушуються.

■ **Приклад 6.17.** Функція $y = x^2$, $x \in [0; 1]$ неперервна й диференційовна на $(0; 1)$, але $f(0) \neq f(1)$. Тому для неї не існує внутрішньої точки $c \in (0; 1)$, в якій $f'(c) = 0$ і дотична була б паралельна осі Ox (рис. 6.7).

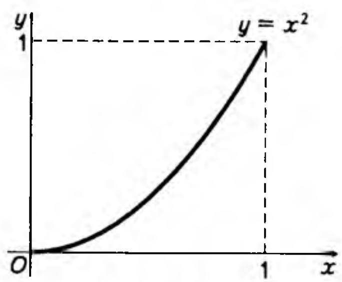


Рис. 6.7

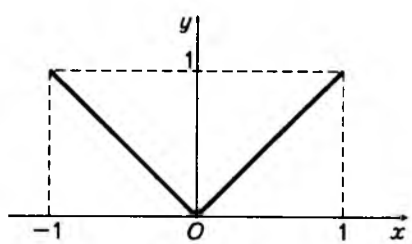


Рис. 6.8

■ **Приклад 6.18.** Функція $y = |x|$ неперервна на $[-1; 1]$ і $f(-1) = f(1) = 1$. Але ця функція не має похідної в точці $x = 0$, тому не існує внутрішньої точки c, в якій похідна перетворюється в нуль (рис. 6.8).

■ **Приклад 6.19.** Функція $y(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in (0; 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ диференційовна на $(0; 1)$ і $f(0) = f(1) = 0$. Але ця функція не є неперервною на $[0; 1]$. Тому не існує такої внутрішньої точки c, в якій $f'(c) = 0$ (рис. 6.9).

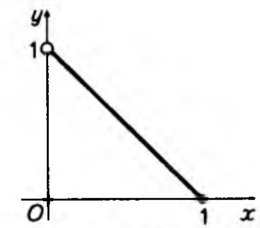


Рис. 6.9

ТЕОРЕМА 6.8
(Лагранжа)

Нехай функція $y = f(x)$:

1) неперервна на $[a, b]$;
2) диференційовна на (a, b).

Тоді існує принаймні одна точка $c \in (a, b)$ така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{6.38}$$

Доведення

Розглянемо на $[a, b]$ допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Функція $y = F(x)$ задовольняє умови теореми Ролля:

1) неперервна на $[a, b]$ як різниця неперервних на $[a, b]$ функцій $f(x)$ і $f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$;

2) диференційовна на (a, b), причому $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$;

3) $F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$,

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0,$$

тобто $F(a) = F(b) = 0$.

Отже, за теоремою Ролля існує принаймні одна точка $c \in (a, b)$ така, що $F'(c) = 0$, тобто

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

звідки

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Теорему доведено.

Геометричний зміст теореми Лагранжа: серед усіх дотичних до графіка функції $y = f(x)$ знайдеться принаймні одна паралельна січній AB, що сполучає точки $A(a; f(a))$ і $B(b; f(b))$ (рис. 6.10).

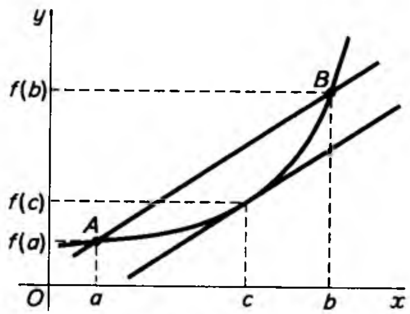


Рис. 6.10

Оскільки відношення $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ є кутовим коефіцієнтом січної AB, а $f'(c)$ — кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції, й вони рівні, то січна AB і дотична до графіка функції, проведеної в точці c, паралельні.

✓ *Зауваження 6.3.* Теорема Ролля є окремим випадком теореми Лагранжа, якщо $f(a) = f(b)$.

Вираз

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \quad c \in (a, b)} \tag{6.39}$$

називають ***формулою Лагранжа,*** або ***формулою скінченних приростів.*** Її можна записати інакше. Очевидно, що $c = a + \theta(b - a)$, де $\theta \in (0; 1)$. Тому $f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a)$, $\theta \in (0; 1)$. Поклавши $a = x$, $b = x_0 + \Delta x$, дістанемо

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x, \quad \theta \in (0; 1). \tag{6.40}$$

ТЕОРЕМА 6.9
(Коші)

Нехай функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$:

1) неперервні на $[a, b]$;

2) диференційовні на (a, b), причому $g'(x) \neq 0$ в усіх точках $x \in (a, b)$.

Тоді існує принаймні одна точка $c \in (a, b)$ така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{6.41}$$

Формулу (6.41) називають ***формулою Коші,*** або ***узагальненою формулою скінченних приростів.***

Доведення

Спочатку зауважимо, що $g(b) = g(a) \neq 0$, оскільки в противному разі за теоремою Ролля для функції $y = g(x)$ знайдеться принаймні одна точка $c \in (a, b)$ така, що $g'(c) = 0$. А це суперечить тому, що $g'(c) \neq 0$ в усіх точках проміжку (a, b).

Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Очевидно, що $y = F(x)$ задовольняє всі вимоги теореми Ролля:

1) неперервна на $[a, b]$ як різниця двох неперервних функцій $f(x)$ і

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a));$$

2) диференційовна на (a, b), причому $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$;

3) $F(a) = F(b) = 0$.

Отже, за теоремою Ролля існує принаймні одна точка $c \in (a, b)$ така, що $F'(c) = 0$, тобто

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

Звідси, оскільки $g'(c) \neq 0$, дістанемо формулу Коші

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad c \in (a; b).$$

Теорему доведено.

✓ *Зауваження 6.4.* Теорема Лагранжа є окремим випадком теореми Коші, якщо $g(x) = x$.

6.5.2. Формула Тейлора

Один з основних принципів математики — подання складного через простіше. Формула Тейлора саме й реалізує цей принцип. Довільні функції, що задовольняють умови теореми Тейлора, з достатньою точністю можна подати у вигляді многочлена n-го степеня. Многочлени є найпростішими елементарними функціями, над якими зручно виконувати арифметичні дії, обчислювати значення в будь-якій точці. Формула Тейлора — одна з основних формул диференціального числення й має широке застосування.

ТЕОРЕМА 6.10

Нехай функція $y = f(x)$ має в точці x_0 та деякому її околі похідні до $(n + 1)$-го порядку. Нехай x — деяке значення аргументу з цього околу x_0. Тоді існує таке число $\theta \in (0; 1)$, що справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (6.42)$$

або в короткій формі

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x). \qquad (6.43)$$

Доведення

Розглянемо многочлен $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$. Його називають ***многочленом Тейлора n-го степеня для функції*** $y = f(x)$ ***у точці*** x_0. Позначимо через $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$ залишковий член у формулі Тейлора. Тоді $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$. Теорему буде доведено, якщо встановити, що $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

Оцінимо значення члена $R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} r(x)$, де $r(x)$ — шукана функція. Зафіксуємо значення x з указаного околу. Для визначеності покладемо $x > x_0$, позначимо через t змінну величину $t \in [x_0, x]$ і розглянемо на відрізку $[x_0, x]$ допоміжну функцію

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{x - t}{1!} f'(t) - \frac{(x - t)^2}{2!} f''(t) - \ldots - \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n)}(t) - \frac{(x - t)^{n+1}}{(n+1)!} r(x).$$

Очевидно, що $F(t)$ на $[x_0, x]$ задовольняє вимоги теореми Ролля. Вона неперервна на відрізку $[x_0, x]$ і диференційовна на проміжку (x_0, x), причому легко переконатися, що

$$F'(t) = -\frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(x - t)^n}{n!} r(x) \quad \text{і} \quad F(x_0) = F(x) = 0.$$

Тому за теоремою Ролля існує така точка $c \in (x_0, x)$, що $F'(c) = 0$, тобто

$$-\frac{(x - c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) + \frac{(x - c)^n}{n!} r(x) = 0$$

або

$$\frac{(x-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c)=\frac{(x-c)^n}{n!}r(x).$$

Отже, $r(x)=f^{(n+1)}(c)$.

Таким чином, функція $r(x)$ визначена й $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

Оскільки $c=x_0+\theta(x-x_0)$, де $\theta\in(0;\ 1)$, то

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (6.44)$$

Такий запис залишкового члена формули Тейлора називають ***залишковим членом у формі Лагранжа***.

Якщо $f^{(n+1)}(x)$ при $x\to x_0$ обмежена, то, очевидно, залишковий член $R_n(x)$ при $x\to x_0$ — нескінченно мала функція вищого порядку порівняно з $(x-x_0)^n$, тобто

$$R_n(x)=o((x-x_0)^n) \quad \text{при} \quad x\to x_0. \qquad (6.45)$$

Такий запис залишкового члена формули Тейлора називають ***залишковим членом у формі Пеано.***

6.5.3. Формула Маклорена. Розвинення деяких елементарних функцій

Формулою Маклорена називають формулу Тейлора, в якій $x_0=0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x). \qquad (6.46)$$

Залишковий член має вигляд:

1) у формі Лагранжа $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $\theta\in(0;\ 1)$;

2) у формі Пеано $R_n(x)=o(x^n)$, $x\to0$.

Розглянемо розвинення деяких елементарних функцій за формулою Маклорена.

1. Розвинемо за формулою Маклорена функцію $f(x)=e^x$. Оскільки

$$f(x)=f'(x)=\ldots=f^{(n+1)}(x)=e^x,$$

$$f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n+1)}(0)=1,$$

то

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n). \qquad (6.47)$$

2. Розвинемо за формулою Маклорена функцію $f(x)=\sin x$. Оскільки

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(0)=\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, & n=2m,\\ (-1)^m, & n=2m+1,\end{cases}$$

то

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}+o(x^{2m+2}). \qquad (6.48)$$

3. Розвинемо за формулою Маклорена функцію $f(x)=\cos x$. Оскільки

$$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(0)=\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, & n=2m-1,\\ (-1)^{n/2}, & n=2m,\quad m=1,2,3,\ldots,\end{cases}$$

то

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m+1}). \qquad (6.49)$$

4. Розвинемо за формулою Маклорена функцію $f(x)=(1+x)\alpha$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$.

Оскільки

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1),$$

то

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).} \quad (6.50)$$

У випадку, коли $\alpha = n$, $n \in N$, $f^{(n+1)}(x) = 0$ і $R_{n+1}(x) = 0$, дістанемо ***формулу бінома Ньютона***

$$\boxed{(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots + x^n.} \quad (6.51)$$

5. Розвинемо за формулою Маклорена функцію $f(x) = \ln(1+x)$, $x > 0$.

Оскільки

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},$$

$$f(0) = 0,\ f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

то

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + \frac{1}{n}(-1)^{n-1}x^n + o(x^n).} \quad (6.52)$$

6.5.4. Застосування формули Маклорена до обчислення границь

Формули Тейлора й Маклорена дають змогу подати функцію $y = f(x)$ у вигляді многочлена, коефіцієнти якого обчислюються достатньо просто. Ці формули широко використовуються й для наближених обчислень різних функцій. При цьому похибка обчислень оцінюється за залишковим членом у формі Лагранжа. Формулу Маклорена часто використовують для обчислення границь. Наведемо приклади.

■ **Приклад 6.20.** *Обчислимо границі:*

$$① \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}; \quad ② \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^3 \sin x}.$$

① Використаємо наближену формулу (6.48):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3!} + \frac{o(x^4)}{x^3}}{1} = -\frac{1}{3!} + \lim_{x\to 0}\frac{o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

② Використаємо наближені формули (6.47)—(6.49):

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^3 \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}}{x^3(x + o(x))} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{12} + \frac{o(x^4)}{x^4}}{1 + \frac{o(x^4)}{x^4}} = \frac{1}{12}.$$

6.6 Застосування похідної до обчислення границь

6.6.1. Правила Лопіталя. Розкриття невизначеностей типу $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$

У процесі дослідження функцій часто виникає потреба знаходити границю дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$, коли чисельник і знаменник при $x \to x_0$ одночасно прямують до нуля або до нескінченності. Знаходження таких границь називають ***розкриттям невизначеностей.***

Найпростішими й найефективнішими методами розкриття невизначеностей є ***правила Лопіталя***.

ТЕОРЕМА 6.11

(перше правило Лопіталя)

Нехай функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ визначені й диференційовні в околі деякої точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0. Нехай існують $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ і $g(x) \neq 0$. Тоді, якщо існує границя (скінченна або нескінченна) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ і виконується рівність

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{6.53}$$

Доведення

Функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ диференційовні в околі точки x_0. Тоді вони неперервні в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0. Довизначимо функції в точці $x = x_0$. Нехай $f(x_0) = g(x_0)$. Тоді вони, очевидно, неперервні на $[x_0, x]$ і задовольняють на цьому відрізку умови теореми Коші. Тому існує точка $c \in (x_0, x)$ така, що справедлива рівність

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Переходячи до границі в останній рівності, маємо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорему доведено.

✓ *Зауваження 6.5.* Теорема 6.11 залишається справедливою й при $x \to x_0 - 0$ або $x \to x_0 + 0$, тобто у випадку однобічних границь.

■ **Приклад 6.21.** *Обчислимо границю* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$.

У чисельнику й знаменнику дробу стоять функції, диференційовні й нескінченно малі при $x \to 0$. Границі існують. Маємо невизначеність типу $\left(\frac{0}{0}\right)$. Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)\cos^2 x}{1 - \cos^3 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x}{1 + \cos x + \cos^2 x} = \frac{1}{3}.$$

✓ *Зауваження 6.6.* Твердження теореми 6.11 залишається справедливим, якщо $x_0 = \pm\infty(\infty)$. Справді, візьмемо $x_0 = \infty$ і зробимо заміну: $t = \frac{1}{x}$ і $F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$, $G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$. Тоді

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{-\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ТЕОРЕМА 6.12

(друге правило Лопіталя)

Нехай функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ диференційовні в деякому околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, і $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, $g'(x) \neq 0$. Тоді, якщо існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ і справджується рівність

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

✓ *Зауваження 6.7.* Якщо для похідних $y = f'(x)$ і $y = g'(x)$ виконуються умови теореми 6.12, то правило Лопіталя можна застосувати повторно:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

■ **Приклад 6.22.** *Обчислимо границю* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$, *де* $n\in N$.

У чисельнику й знаменнику дробу стоять функції, диференційовні й нескінченно великі при $x\to\infty$. Границі існують. Маємо невизначеність типу $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Застосуємо правило Лопіталя n разів:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots1}{e^x}=0.$$

✓ *Зауваження 6.8.* Формула (6.53) справедлива тільки тоді, коли границя в правій частині рівності існує. Бувають випадки, коли границя, що стоїть у лівій частині рівності, існує, але водночас границя, що стоїть у правій частині рівності, не існує. Наведемо приклад.

■ **Приклад 6.23.** *Обчислимо границю* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+\sin x}{x}\right)$.

Ця границя існує й дорівнює 1.
Справді,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

Але відношення похідних

$$\frac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\frac{1+\cos x}{1}=1+\cos x$$

при $x\to\infty$ не прямує ні до якої границі, а коливається між 0 і 2.

6.6.2. Розкриття невизначеностей типу $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞

Невизначеність типу $0\cdot\infty$ зводиться до невизначеностей типу $\frac{\infty}{\infty}$ або $\frac{0}{0}$ за допомогою таких перетворень:

$$f(x)g(x)=f(x):\frac{1}{g(x)},\quad f(x)g(x)=g(x):\frac{1}{f(x)}.$$

■ **Приклад 6.24.** *Обчислимо границю:*

$$\lim_{x\to\pi/2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}2x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{x-\pi/2}{\operatorname{tg}2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{\dfrac{2}{\cos^2 2x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi/2}\cos^2 2x=\frac{1}{2}.$$

Невизначеність типу $\infty-\infty$ зводиться до невизначеностей типу $\frac{\infty}{\infty}$ або $\frac{0}{0}$ за допомогою перетворення

$$f(x)-g(x)=\left(\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right):\frac{1}{f(x)g(x)}.$$

■ **Приклад 6.25.** *Обчислимо границю:*

$$\lim_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}^2x-\frac{1}{x^2}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos^2x-\sin^2x}{x^2\sin^2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x+\sin x}{x}\,\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2x}.$$

Границю першого співмножника знайти легко:

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cos x+\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)=2,$$

а до другого — застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{-x\sin x}{\sin^2x+2x\sin x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{\dfrac{\sin x}{x}+2\cos x}=-\frac{1}{3}.$$

Отже, шукана границя

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{3}.$$

Невизначеності типу 0^0, ∞^0, 1^∞ за допомогою перетворення $(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$ зводяться до невизначеності типу $(0\cdot\infty)$ в показнику.

■ **Приклад 6.26.** *Обчислимо границю:*

$$\lim_{x\to 0+} x^x = (0^0) = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x} = \exp\left[\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x}\right] = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \exp\left[\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{\frac{-1}{x^2}}\right] = \exp\left[-\lim_{x\to 0+} x\right] = e^0 = 1.$$

■ **Приклад 6.27.** *Обчислимо границю* $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg} x)^{2\cos x} = (\infty^0)$.

Оскільки

$$(\operatorname{tg} x)^{2\cos x} = e^{2\cos x\ln\operatorname{tg} x} = \exp\left[\frac{2\ln\operatorname{tg} x}{\frac{1}{\cos x}}\right]$$

і

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2\ln\operatorname{tg} x}{\frac{1}{\cos x}}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\ \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos^2 x}}\right] =$$

$$= 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\operatorname{tg} x\sin x}\right] = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right] = 0,$$

то шукана границя

$$\lim_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg} x)^{2\cos x} = e^0 = 1.$$

■ **Приклад 6.28.** *Обчислимо границю* $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}} = (1^\infty)$.

Оскільки

$$(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}} = e^{\frac{1}{e^x-1-x}\ln(1+x^2)}$$

і

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}\right] = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{e^x-1}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2x}{(1+x^2)(e^x-1)}\right] = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{e^x(1+x^2)+(e^x-1)2x} = 2,$$

то

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}} = e^2.$$

6.7 Дослідження функцій і побудова їхніх графіків

6.7.1. Умови монотонності функції

З'ясуємо, як за відомою похідною функції можна робити висновки про зростання (спадання) самої функції на даному проміжку.

ТЕОРЕМА 6.13
(ознака монотонності функції)

Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна на проміжку (a, b), то:

1) при $f'(x) > 0$ вона зростає на (a, b);
2) при $f'(x) < 0$ вона спадає на (a, b).

Доведення

Нехай заради визначеності $f'(x) > 0$ на (a, b). Виберемо дві довільні точки x_1 і $x_2 \in (a, b)$, причому $x_1 < x_2$. Тоді на відрізку $[x_1, x_2]$

для функції $f(x)$ виконуються всі умови теореми Лагранжа, внаслідок якої

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad c \in (a, b).$$

За умовою теореми $f'(c) > 0$ і $x_2 - x_1 > 0$. Тоді $f(x_2) - f(x_1) > 0$, тобто $f(x_2) > f(x_1)$, а це означає, що функція зростає на (a, b).

Аналогічно доводиться випадок, коли $f'(x) < 0$ на (a, b).

6.7.2. Умови локального екстремуму

➡ **Означення 6.12.** *Точку x_0 називають **точкою локального мінімуму функції** $y = f(x)$, якщо при всіх $x \neq x_0$ у деякому околі точки x_0 виконується нерівність $f(x) > f(x_0)$.*

*Точку x_0 називають **точкою локального максимуму функції** $y = f(x)$, якщо при всіх $x \neq x_0$ у деякому околі точки x_0 виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$.*

*Точки локального мінімуму й локального максимуму називають **точками локального екстремуму**, а значення функції в цих точках — її **екстремумами**.*

ТЕОРЕМА 6.14

(необхідні умови локального екстремуму)

Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0 і має в цій точці локальний екстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Доведення

За означенням локального екстремуму існує такий δ-окіл точки x_0: $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в якому значення функції $f(x_0)$ є найбільшим або найменшим. Тоді за теоремою Ферма похідна функції в цій точці дорівнює нулю, тобто $f'(x_0) = 0$.

Теорему доведено.

Геометричний зміст: у точках локального екстремуму дотичні до графіка функції $y = f(x)$ паралельні осі Ox (рис. 6.11).

✓ *Зауваження 6.9.* Якщо $f'(x_0) = 0$, то звідси не випливає, що x_0 — точка локального екстремуму. Наприклад, для функції $y = x^3$ маємо $f'(x) = 3x^2$ і $f'(0) = 0$. Але $x_0 = 0$ не є точкою локального екстремуму (рис. 6.12).

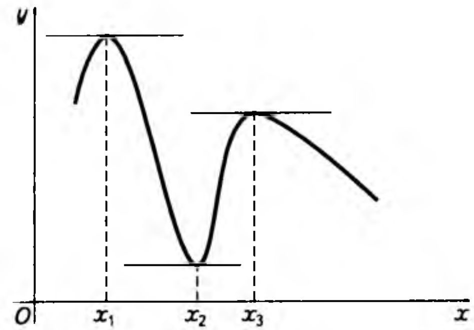


Рис. 6.11

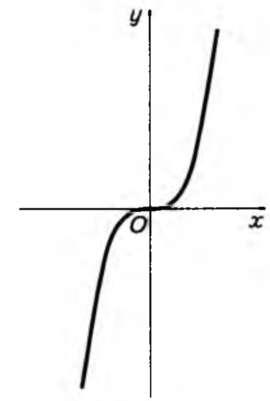


Рис. 6.12

✓ *Зауваження 6.10.* Точка x_0, в якій функція недиференційовна, також може бути точкою екстремуму. Наприклад, функція $y = |x|$ не має похідної в точці $x_0 = 0$, але ця точка є для неї точкою локального мінімуму (див. рис. 6.8).

Таким чином, теорема 6.14 дає необхідні, але не достатні умови локального екстремуму.

Точки, в яких похідна дорівнює нулю, називають ***стаціонарними.*** Стаціонарні точки, а також точки, де похідна функції не існує, називають ***критичними точками першого роду***, або ***точками можливого екстремуму***.

Нехай x_0 є точкою можливого екстремуму для функції $y = f(x)$.

ТЕОРЕМА 6.15

(достатні умови локального екстремуму першого типу)

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна в деякому околі точки x_0, диференційовна в цьому околі, за винятком, можливо, самої точки x_0. Тоді:

1) якщо в точці x_0 похідна змінює свій знак з «+» на «–», то x_0 — точка локального максимуму;

2) якщо в точці x_0 похідна змінює свій знак з «–» на «+», то x_0 — точка локального мінімуму;

3) якщо $f'(x)$ не змінює свого знака в околі точки x_0, то задана функція не має локального екстремуму в точці x_0.

Доведення

Нехай заради конкретності похідна змінює свій знак з «–» на «+», тобто $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ і $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Застосуємо формулу Лагранжа до функції $y = f(x)$ на відрізку $[x, x_0]$. Маємо $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, $c \in (x_0 - \delta, x_0)$.

Оскільки зліва $f'(c) < 0$ і $x - x_0 < 0$, то $f(x) - f(x_0) > 0$, тобто $f(x) > f(x_0)$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$.

Застосовуючи теорему Лагранжа до функції $y = f(x)$ на відрізку $[x_0, x]$, у випадку, коли $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, дістанемо

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)\,(x - x_0),\quad c \in (x_0, x).$$

Оскільки справа $f'(c) > 0$ і $x - x_0 > 0$, то $f(x) - f(x_0) > 0$, тобто $f(x) > f(x_0)$ для всіх $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

Отже, для всіх $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$ виконується умова локального мінімуму.

Випадок локального максимуму (якщо знак $f'(x)$ змінюється з «+» на «–») доводиться аналогічно.

Якщо, переходячи через точку x_0, похідна $f'(x)$ не змінює знака, то функція є монотонною на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ і, отже, не має локального екстремуму в точці x_0.

Теорему доведено.

ТЕОРЕМА 6.16

(достатні умови локального екстремуму другого типу)

Нехай x_0 — стаціонарна точка для функції $y = f(x)$ і функція має в точці x_0 похідні до $(n + 1)$-го порядку включно, причому $f^{(n+1)}(x)$ неперервна в точці x_0. Тоді, якщо $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0$, а $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, то при парному $n + 1$ точка x_0 є точкою локального екстремуму, причому, якщо $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, то точкою локального мінімуму, а якщо $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ — точкою локального максимуму. При непарному $n + 1$ точка x_0 не є точкою локального екстремуму.

Доведення

Оскільки $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0$, то формула Тейлора для функції $f(x)$ в околі точки x_0 має вигляд

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},\quad 0 < \theta < 1,$$

або

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Похідна $f^{(n+1)}(x)$ неперервна в точці x_0, отже, існує такий δ-окіл цієї точки $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в якому $f^{(n+1)}(x)$ зберігає знак. Зважаючи, що $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, маємо $(x - x_0)^{(n+1)} > 0$, якщо $n + 1$ парне. Якщо $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, то $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, а тому $f(x) - f(x_0) > 0$, або $f(x) > f(x_0)$, при всіх $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, а це означає, що x_0 є точкою локального мінімуму.

Випадок $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ досліджується аналогічно.

Якщо $n + 1$ непарне, то вираз $(x - x_0)^{n+1}$ змінює свій знак на проміжках $(x_0 - \delta, x_0)$ і $(x_0, x_0 + \delta)$. При цьому на цих проміжках змінює свій знак і різниця $f(x) - f(x_0)$. Отже, точка x_0 не є точкою локального екстремуму.

Теорему доведено.

✓ *Зауваження 6.11.* Найчастіше теорема 6.16 використовується для випадку, коли $n = 1$. Якщо $f'(x_0) = 0$ (точка x_0 стаціонарна), а $f''(x_0) \neq 0$, то в точці x_0 буде локальний мінімум при $f''(x_0) > 0$ і локальний максимум при $f''(x_0) < 0$.

6.7.3. Умови опуклості й точки перегину графіка функції

➡ **Означення 6.13.** *Графік функції $y = f(x)$ називають* ***опуклим униз*** (рис. 6.13), *якщо він розміщений не нижче за довільну дотичну, проведену до графіка функції на (a, b), і* ***опуклим угору*** (рис. 6.14), *якщо він розміщений не вище за довільну дотичну, проведену до графіка функції на (a, b).*

ТЕОРЕМА 6.17

Якщо функція $y = f(x)$ має на (a, b) другу похідну й $f''(x_0) \geq 0$ на (a, b), то графік функції опуклий униз на (a, b). Якщо $f''(x_0) \leq 0$, то графік функції опуклий угору на (a, b).

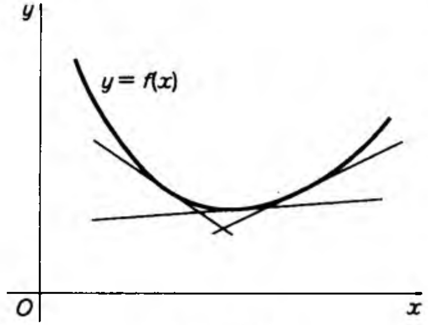


Рис. 6.13

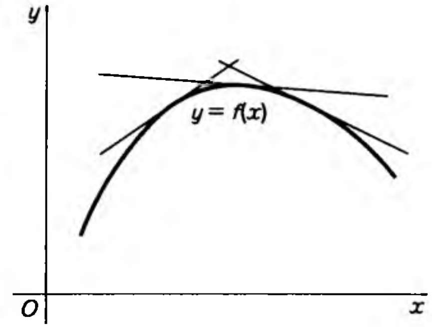


Рис. 6.14

Доведення

Розглянемо випадок $f''(x_0) \geq 0$ на (a, b). Нехай c — довільна точка проміжку (a, b) і рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$, що проходить через точку $M(x_0; f(x_0))$ із кутовим коефіцієнтом $k = f'(x_0)$, має вигляд

$$y_д = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{6.54}$$

Розвинемо функцію $y = f(x)$ в околі точки x_0 за формулою Тейлора. При $n = 1$ для всіх $x \in (a, b)$ існує $c \in (a, b)$ таке, що

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2. \tag{6.55}$$

Віднімаючи (6.54) від (6.55), дістанемо

$$f(x) - y_д = \frac{f''(c)(x - x_0)^2}{2!}. \tag{6.56}$$

За умовою теореми $f''(x_0) \geq 0$ на (a, b). Отже, права частина рівності (6.56) невід'ємна, тобто $f(x) \geq y_д$ для всіх $x \in (a, b)$. Ця нерівність доводить теорему: графік функції скрізь на проміжку (a, b) лежить не нижче за дотичну в довільній точці цього проміжку.

Означення 6.14. *Точку $M_0(x_0; f(x_0))$ називають **точкою перегину графіка функції** $y = f(x)$, якщо в цій точці графік має дотичну й*

існує такий окіл точки x_0, у межах якого характер опуклості графіка різний (рис. 6.15).

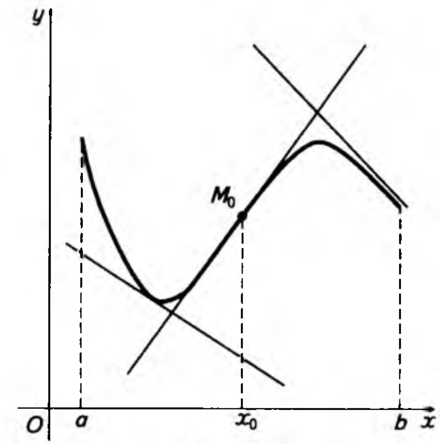


Рис. 6.15

У точці перегину дотична перетинає графік функції, оскільки він переходить з одного боку дотичної на інший («перегинається» через неї).

ТЕОРЕМА 6.18

(необхідні умови точок перегину)

Нехай графік функції перегинається в точці $M_0(x_0; f(x_0))$ і функція $y = f(x)$ має в точці x_0 неперервну другу похідну. Тоді $f''(x_0) = 0$.

Доведення

Припустимо протилежне, тобто $f''(x_0) \neq 0$. Тоді існує окіл точки x_0, в якому $f''(x_0) > 0$ або $f''(x_0) < 0$. Але тоді за теоремою 6.17 графік функції має певний напрям опуклості в цьому околі, що суперечить умові теореми, оскільки в точці x_0 графік функції перегинається. Ця суперечність доводить теорему.

✓ *Зауваження 6.12.* Не завжди умова $f''(x_0) = 0$ означає наявність точки перегину графіка функції $y = f(x)$. Наприклад, функція $y = x^{2n}$ не має перегину в точці $x_0 = 0$, хоча $y'' = 2n(2n-1)x^{2n-2}$; $y''(0) = 0$ (рис. 6.16). Тому рівність $f''(x_0) = 0$ є необхідною, але не достатньою умовою точки перегину.

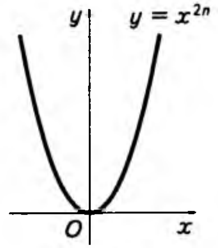


Рис. 6.16

Точки, в яких $f''(x_0)$ не існує або $f''(x_0) = 0$, називатимемо ***критичними точками другого роду***. В кожній такій точці необхідно додатково дослідити питання про існування перегину.

ТЕОРЕМА 6.19

(достатні умови точок перегину)

Нехай функція $y = f(x)$ у деякому околі точки x_0 має другу похідну різних знаків зліва й справа від точки x_0. Тоді точка x_0 є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$.

Доведення

Унаслідок теореми 6.17 напрями опуклості графіка функції зліва й справа від точки x_0 є різними. Тоді за означенням точка x_0 є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$.

Теорема 6.19 справедлива й для випадку, коли $f''(x_0)$ існує в деякому околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, і існує дотична до графіка функції в точці x_0.

■ **Приклад 6.29.** *Розглянемо функцію* $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$.

Обчислимо похідні:

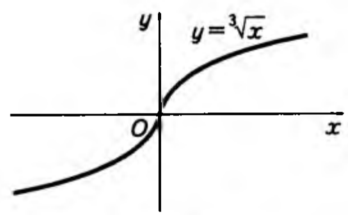


Рис. 6.17

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}.$$

У точці $x = 0$ похідні не існують; у точці $x = 0$ дотична збігається з віссю Oy. Але графік цієї функції має перегин у точці (0; 0) (рис. 6.17), оскільки знаки $f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$ різні зліва й справа від точки $x = 0$.

6.7.4. Асимптоти графіка функції

Часто виявляється, що графік функції необмежено наближається до деякої прямої. Такі прямі називають ***асимптотами***. Необмеженість наближення графіка функції до асимптоти означає, що відстань від графіка до цієї прямої (довжина перпендикуляра, опущеного з довільної точки графіка на пряму) прямує до нуля.

➡ **Означення 6.15.** *Пряму $x = a$ називають **вертикальною асимптотою** графіка функції $y = f(x)$, якщо хоча б одна з границь $\lim_{x \to a-0} f(x)$ або $\lim_{x \to a+0} f(x)$ дорівнює $+\infty$ або $-\infty$. Вертикальні асимптоти відповідають точкам розриву другого роду.*

■ **Приклад 6.30.** *Для функції $y = e^{1/x}$ обчислимо однобічні границі в точці $x = 0$:*

$$\lim_{x \to 0-0} e^{1/x} = e^{-\infty} = 0, \quad \lim_{x \to 0+0} e^{1/x} = e^{+\infty} = \infty.$$

Отже, $x = 0$ — вертикальна асимптота.

➡ **Означення 6.16.** *Пряму $y = kx + b$ називають **похилою асимптотою** графіка функції $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$, якщо її можна подати у вигляді*

$$f(x) = kx + b + \alpha, \tag{6.57}$$

де $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

У випадку ***горизонтальної асимптоти*** кутовий коефіцієнт прямої $k = 0$.

Поділимо обидві частини рівності (6.57) на x:

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}$$

і, перейшовши до границі при $x \to \infty$, дістанемо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = k,$$

$$\boxed{k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x},} \tag{6.58}$$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}(kx + b + \alpha(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}(b + \alpha(x)) = b,$$

$$\boxed{b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx).} \tag{6.59}$$

6.7.5. Схема дослідження функції й побудова її графіка за допомогою похідної

Уміння знаходити значення аргументу x, при яких дана функція $y = f(x)$ має екстремуми, можна використати для побудови графіка функції, що точно характеризує на даному проміжку зміну функції в разі зміни аргументу. За допомогою розглянутих вище методів можна встановити певне число «опорних» точок, які характеризують даний графік. Для побудови графіка функції $y = f(x)$ потрібно здійснити такі кроки:

1) знайти область визначення функції;
2) дослідити функцію на парність, непарність, періодичність;
3) знайти точки перетину з осями координат (із віссю Ox покладемо $y = 0$, із віссю Oy — $x = 0$);
4) знайти асимптоти графіка функції (якщо вони існують);
5) знайти першу похідну $y'(x)$, проміжки монотонності, критичні точки першого роду, екстремуми функції та значення функції в точках екстремуму;
6) знайти другу похідну $y''(x)$, напрями опуклості графіка функції, критичні точки другого роду, точки перегину графіка;
7) побудувати графік функції за результатами дослідження.

■ **Приклад 6.31.** *Побудуємо графік функції* $y = x^2e^{-x^2}$.

1. Область визначення функції $D(y) = \mathbf{R}$.

2. Оскільки $y(-x) = (-x)^2e^{-(-x)^2} = x^2e^{-x^2} = y(x)$, то функція парна, її графік симетричний відносно осі Oy.

3. Точки перетину з осями координат: $x = 0$, $y = 0$.

4. Вертикальних асимптот немає, оскільки функція неперервна. Знайдемо інші асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2e^{-x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2xe^{x^2}} = 0, \quad k = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}(x^2e^{-x^2}) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2xe^{x^2}} = 0.$$

Отже, рівняння горизонтальної асимптоти $y = 0$ (вісь Ox)

5. Знайдемо критичні точки першого роду (точки можливого екстремуму). Для цього обчислимо першу похідну функції:

$$y'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2e^{-x^2}(-2x) = 2xe^{-x^2}(1 - x^2) =$$

$$= 2xe^{-x^2}(1 - x)(1 + x) = -2xe^{-x^2}(x - 1)(x + 1).$$

Стаціонарні точки знайдемо з умови $y' = 0$. Ця рівність виконується при $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Обчислимо тепер значення функції, що відповідають добутим значенням: $y(0) = 0$, $y(-1) = (-1)^2e^{-1} = 1/e$, $y(1) = e^{-1} = 1/e$. Результати дослідження зручно подати у вигляді таблиці:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	+	0	–	0	+	0	–
y	↗	$1/e$	↘	0	↗	$1/e$	↘
		loc max		loc min		loc max	

6. Знаходимо критичні точки другого роду — це точки, в яких y'' не існує або $y'' = 0$. Обчислимо другу похідну функції: $y'' = 2e^{-x^2}(2x^4 - 5x^2 + 1)$, причому $y'' = 0$ при $2x^4 - 5x^2 + 1 = 0$. Отже, критичні точки другого роду

$$x_1 = \frac{-\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}, \quad x_3 = \frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2},$$

$$x_2 = \frac{-\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}, \quad x_4 = \frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}.$$

Перевіримо знак другої похідної на проміжках. Результати запишемо в таблицю:

x	$(-\infty;\ x_1)$	x_1	$(x_1;\ x_2)$	x_2	$(x_2;\ x_3)$	x_3	$(x_3;\ x_4)$	x_4	$(x_4;\ +\infty)$
y''	+	0	–	0	+	0	–	0	+
y	$\cup$		$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$
		т. п.		т. п.		т. п.			

7. Графік функції побудовано на рис. 6.18.

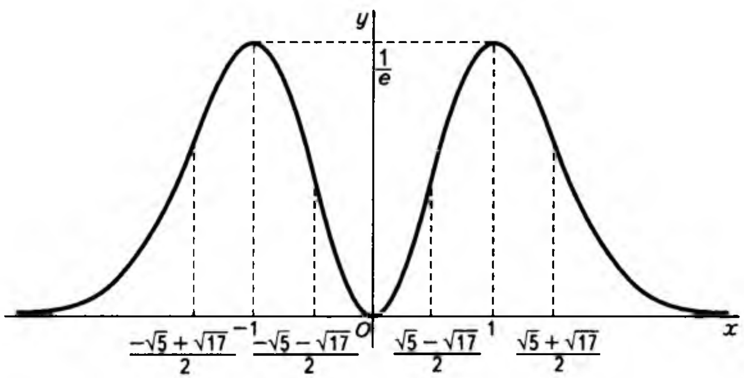


Рис. 6.18

?

Контрольні запитання

1. Що таке похідна функції однієї змінної?
2. Яку операцію називають диференціюванням функції?
3. За якими правилами обчислюється похідна суми, добутку, частки двох функцій?
4. За яким правилом обчислюються похідна складної функції?
5. Як можна обчислити похідну показниково-степеневої функції?
6. Як обчислюють похідну функції, заданої наявно?
7. Як обчислюють похідну функції, заданої параметрично?
8. Яке формулювання означення однобічних похідних?
9. У чому полягає геометричний зміст похідної?
10. Що називають кутом між двома кривими? Як його можна обчислити?
11. Який вигляд має рівняння дотичної до кривої?
12. Який вигляд має рівняння нормалі до кривої?
13. У чому полягає фізичний зміст похідної?
14. У чому полягає економічний зміст похідної?
15. Яку функцію називають диференційовною?
16. Що називають диференціалом функції?
17. У чому полягає економічний зміст диференціала?
18. Що таке мультиплікатор?
19. Якою формулою користуються для наближених обчислень за допомогою диференціала?
20. Як визначаються похідні другого, третього, ..., *n*-го порядку?
21. Як записують формулу Лейбніца для обчислення похідної *n*-го порядку від добутку двох функцій?
22. Як обчислюється похідна другого порядку функції, заданої: неявно; параметрично?
23. Як обчислюються диференціали другого ..., *n*-го порядку?
24. Яке формулювання теореми Ролля?
25. Яке формулювання теореми Коші?
26. Яке формулювання правил Лопіталя?
27. Як записується формула Тейлора?

28. Який вираз є залишковим членом у формулі Тейлора у формі Лагранжа, а який — у формі Пеано?

29. Як записується формула Маклорена?

30. Як розвиваються елементарні функції за формулою Маклорена?

31. Яка ознака монотонності функції?

32. Які необхідні умови локального екстремуму функції?

33. Які точки називають стаціонарними, а які — критичними першого роду?

34. Які достатні умови локального екстремуму функції першого й другого типів?

35. Який графік функції називають опуклим угору, а який — опуклим униз?

36. Що таке точки перегину графіка функції?

37. Які необхідні умови точки перегину графіка функції?

38. Які точки називають критичними точками другого роду?

39. Які достатні умови точки перегину графіка функції?

40. Як визначаються асимптоти графіка функції?

41. За яким алгоритмом можна дослідити функцію й побудувати її графік?

42. Як можна знайти найбільше й найменше значення функції на відрізку?

Приклади розв'язування задач

1 *Знайти похідну функції* $y = 2\sqrt[3]{x} + \dfrac{3}{x^2}$.

Використовуючи правило диференціювання суми двох функцій, дістанемо

$$y' = \left(2\sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^2}\right)' = 2\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 3(-2)x^{-3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{6}{x^3}.$$

2 *Знайти похідну функції* $y = x^3 \cos x$.

За правилом диференціювання добутку функцій дістанемо

$$y' = x^3(-\sin x) + 3x^2 \cos x = -x^3 \sin x + 3x^2 \cos x = x^2(3 \cos x - x \sin x).$$

3 *Знайти похідну функції* $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

За правилом диференціювання частки функцій дістанемо

$$y' = \frac{x^3 \dfrac{1}{x^2+1} - 3x^2 \operatorname{arctg} x}{x^6} = \frac{x^3 - 3x^2(x^2+1)\operatorname{arctg} x}{x^6(x^2+1)};$$

$$y' = \frac{x - 3(x^2+1)\operatorname{arctg} x}{x^4(x^2+1)}.$$

4 *Знайти похідну функції* $y = \sqrt{x^2 + 3x + 1}$.

Введемо допоміжну функцію $u = x^2 + 3x + 1$. Тоді, очевидно, можна записати $y = \sqrt{u}$. За правилом диференціювання складної функції дістанемо

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+3x+1}}(2x+3) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+1}}.$$

5 *Знайти похідну функції* $y = \ln(\operatorname{arctg}\sqrt{x})$.

Послідовно застосовуючи правило диференціювання складної функції, дістанемо

$$y' = \frac{(\operatorname{arctg}\sqrt{x})'}{\operatorname{arctg}\sqrt{x}} = \frac{\dfrac{(\sqrt{x})'}{x+1}}{\operatorname{arctg}\sqrt{x}} = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}}.$$

6 *Знайти похідну функції* $y = (\arcsin\sqrt{x})^4$.

Маємо

$$y' = 4(\arcsin\sqrt{x})^3(\arcsin\sqrt{x})' = 4(\arcsin\sqrt{x})^3\frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-x}} =$$

$$= 4(\arcsin\sqrt{x})^3\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{2(\arcsin\sqrt{x})^3}{\sqrt{x-x^2}}.$$

7 *Знайти похідну функції* $y = 3^{\operatorname{tg}^4(x^2+5x)}$.

Послідовно застосовуючи правило диференціювання складної функції, дістанемо

$$y' = 3^{\mathrm{tg}^4(x^2+5x)} \ln 3 (\mathrm{tg}^4(x^2+5x))' =$$

$$= 3^{\mathrm{tg}^4(x^2+5x)} \ln 3 \cdot 4\,\mathrm{tg}^3(x^2+5x)(\mathrm{tg}(x^2+5x))' =$$

$$= 3^{\mathrm{tg}^4(x^2+5x)} \ln 3 \cdot 4\,\mathrm{tg}^3(x^2+5x)\frac{1}{\cos^2(x^2+5x)}(x^2+5x)' =$$

$$= 3^{\mathrm{tg}^4(x^2+5x)} \ln 3 \cdot 4\,\mathrm{tg}^3(x^2+5x)\frac{1}{\cos^2(x^2+5x)}(2x+5x) =$$

$$= \frac{4\ln 3(2x+5)3^{\mathrm{tg}^4(x^2+5x)}\mathrm{tg}^3(x^2+5x)}{\cos^2(x^2+5x)}.$$

8 *Знайти похідну функції $y = (x^3 + x^2)^{\sin x}$.*

Використовуючи основну логарифмічну тотожність, дану показниково-степеневу функцію можна подати у вигляді $y = e^{\sin x \ln(x^3+x^2)}$. Тоді за правилом диференціювання складної функції дістанемо

$$y' = e^{\sin x \ln(x^3+x^2)}(\sin x \ln(x^3+x^2))' =$$

$$= e^{\sin x \ln(x^3+x^2)}\left(\cos x \ln(x^3+x^2) + \sin x \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2}\right) =$$

$$= (x^3+x^2)^{\sin x}\left(\cos x \ln(x^3+x^2) + \frac{(3x^2+2x)\sin x}{x^3+x^2}\right).$$

9 *Знайти похідну y'_x, якщо функцію $y = y(x)$ задано неявно:*

$$x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0.$$

Диференціюємо по x обидві частини рівності:

$$3x^2 + \frac{y'}{y} - x^2 e^y y' - 2xe^y = 0.$$

Виражаємо з цієї рівності y':

$$y'\left(\frac{1}{y} - x^2 e^y\right) = 2xe^y - 3x^2,$$

$$y'\left(\frac{1 - x^2 y e^y}{y}\right) = 2xe^y - 3x^2,$$

тобто

$$y' = \frac{(2xe^y - 3x^2)y}{1 - x^2 y e^y}.$$

10 *Знайти похідну y'_x, якщо функцію $y = y(x)$ задано параметрично:*

$$x = \ln t,\ \ y = \sin^2 t.$$

Диференціюємо:

$$\frac{dy}{dt} = 2\sin t\cos t = \sin 2t,\ \ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}.$$

Тоді

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2t}{1/t} = t\sin 2t.$$

11 *Для функції $y = |\sin 3x|$ знайти $y'_+(0)$ і $y'_-(0)$.*

Згідно з означенням

$$y'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{|\sin 3\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+}\frac{\sin 3\Delta x}{\Delta x} = 3,$$

$$y'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{|\sin 3\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-}\frac{-\sin 3\Delta x}{\Delta x} = -3.$$

12 *Скласти рівняння дотичної та нормалі в точці $M(1;\,3)$ до кривої $y = x^3 + 2x$.*

Для визначення кутового коефіцієнта дотичної знайдемо похідну даної функції: $y' = 3x^2 + 2$. Значення похідної в точці $M(1;\,3)$ є шуканим кутовим коефіцієнтом $k = 3 \cdot 1 + 2 = 5$. Отже, рівнянням дотичної буде

$$y - 3 = 5(x - 1),\ \text{ або }\ 5x - y - 2 = 0,$$

а рівнянням нормалі —

$$y - 3 = -\frac{1}{5}(x - 1),\ \text{ або }\ x + 5y - 16 = 0.$$

13 *Записати рівняння дотичної та нормалі в точці $M(1;\,-1)$ до кривої $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 0$.*

Диференціюємо рівняння кривої

$$2x + 2y^2 + 4xyy' + 12y^3y' = 0,$$

звідки

$$y' = -\frac{x + y^2}{2xy + 6y^3}.$$

Отже,

$$y'(M) = -\frac{1 + (-1)^2}{2 \cdot 1(-1) + 6(-1)^3} = \frac{1}{4}.$$

Тоді рівнянням дотичної буде

$$y + 1 = \frac{1}{4}(x - 1), \text{ або } x - 4y - 5 = 0,$$

а рівнянням нормалі —

$$y + 1 = -4(x - 1), \text{ або } 4x + y - 3 = 0.$$

14 ***Знайти кут між параболами*** $y = 8 - x^2$ ***та*** $y = x^2$.

Визначимо точки перетину цих парабол. Для цього розв'яжемо систему

$$\begin{cases} y = 8 - x^2, \\ y = x^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 8, \\ y = x^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2, \\ y = 4. \end{cases}$$

Отже, точки перетину парабол $A(2; 4)$ і $B(-2; 4)$.

Здиференціюємо рівняння парабол: $y' = -2x$, $y' = 2x$. Знайдемо значення цих похідних при $x = 2$: $k_1 = -4$, $k_2 = 4$.

Використовуючи формулу обчислення кута між прямими, знайдемо кут, який утворюють параболи в точці $A(2; 4)$: $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{4 + 4}{1 - 16} = -\frac{8}{15}$. Тоді

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{8}{15}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{8}{15}.$$

Аналогічно можна визначити кут між кривими в точці $B(-2; 4)$:

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{8}{15}.$$

15 ***По параболі*** $y = x(8 - x)$ ***рухається точка так, що її абсциса змінюється залежно від часу*** t ***за законом*** $x = t\sqrt{t}$ ***(*** t ***— в секундах,*** x ***— в метрах). Визначити швидкість зміни ординати в точці*** $M(1; 7)$.

Знайдемо закон зміни ординати, замінивши в рівнянні параболи x на $t\sqrt{t}$. Дістанемо $y = 8t\sqrt{t} - t^3$. Швидкість зміни ординати є похідною за часом $y'_t = 12\sqrt{t} - 3t^2$. У точці $M(1; 7)$ значення $t = 1$. Тому $y'(1) = 9$, тобто швидкість зміни ординати дорівнює 9 м/с.

16 ***Точка рухається по прямій. Відстань*** S ***(у метрах) точки від початку відліку визначається формулою*** $S = t^2 + 2t + 3$, ***де*** t ***— час (у секундах). Визначити швидкість руху точки на п'ятій секунді.***

Швидкість руху точки v визначається як похідна від шляху S за часом t. У даному випадкові $v(t) = 2t + 2$. Добутий вираз є загальною формулою швидкості руху точки.

Щоб визначити швидкість руху точки на п'ятій секунді, потрібно у вираз для v підставити $t = 5$. Дістанемо $v(5) = 12$ м/с.

17 ***Знайти диференціал функції*** $y = (1 + \operatorname{tg} x)^8$.

Перший спосіб. Знаходимо похідну функції:

$$y' = 8(1 + \operatorname{tg} x)^7 \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Тоді за означенням диференціала (6.17)

$$dy = 8(1 + \operatorname{tg} x)^7 \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Другий спосіб. Безпосередньо обчислюємо диференціал:

$$dy = 8(1 + \operatorname{tg} x)^7 d(1 + \operatorname{tg} x) = 8(1 + \operatorname{tg} x)^7 \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

18 ***Знайти диференціал функції*** $y = \ln \operatorname{arctg}(\sin x)$.

Застосовуючи формулу для обчислення диференціала (6.17), дістанемо

$$dy = \frac{d(\operatorname{arctg}(\sin x))}{\operatorname{arctg}(\sin x)} = \frac{\frac{1}{1 + \sin^2 x} d(\sin x)}{\operatorname{arctg}(\sin x)} =$$

$$= \frac{\cos x \, dx}{(1 + \sin^2 x)\operatorname{arctg}(\sin x)}.$$

19 ***Наближено обчислити*** $\sqrt[3]{26{,}19}$.

Будемо використовувати наближену формулу (6.20). У даному прикладі $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Покладемо $x_0 = 27$, $\Delta x_0 = -0{,}81$. Тоді

$$f(x_0 + \Delta x) = \sqrt[3]{26{,}19},\quad f(x_0) = \sqrt[3]{27} = 3,\quad df(x_0) = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{27^2}}.$$

Отже,

$$\sqrt[3]{26{,}19} = \sqrt[3]{27 - 0{,}81} \approx \sqrt[3]{27} - \frac{0{,}81}{3\sqrt[3]{27^2}} = 3 - \frac{0{,}81}{3\cdot 9} = 3 - 0{,}03 = 2{,}97.$$

20 ***Обчислити похідні y', y'', y''', $y^{(4)}$, $y^{(5)}$, ..., $y^{(n)}$ функції***

$$y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 0{,}5x + 7.$$

Диференціюємо:

$$y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - 0{,}5,$$
$$y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2,$$
$$y''' = 60x^2 + 48x - 18,$$
$$y^{(4)} = 120x + 48,$$
$$y^{(5)} = 120,\ y^{(6)} = \ldots\ y^{(n)} = 0.$$

21 ***Знайти похідну n-го порядку функції $y = \ln(2x + 3)$.***

Послідовно обчислюємо похідні:

$$y' = \frac{2}{2x+3},\quad y'' = \frac{-2^2\cdot 1}{(2x+3)^2},\quad y''' = \frac{2^3\cdot 2}{(2x+3)^3},\quad y^{(4)} = \frac{-2^4\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{(2x+3)^4}.$$

Можна помітити закономірність і записати, що

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!2^n}{(2x+3)^n}.$$

22 ***Використовуючи формулу Лейбніца, знайти похідну четвертого порядку функції $y = x^7e^{5x}$.***

У формулі Лейбніца (6.35) покладемо $u = x^7$, $v = e^{5x}$. Послідовно знаходимо похідні функції:

$$u' = 7x^6,\quad u'' = 42x^5,\quad u''' = 210x^4,\quad u^{(4)} = 840x^3,$$
$$v' = 5e^{5x},\quad v'' = 25e^{5x},\quad v''' = 125e^{5x},\quad v^{(4)} = 625e^{5x}.$$

При $n = 4$ формула Лейбніца набирає вигляду

$$(uv)^{(4)} = u^{(4)}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + v^{(4)}u.$$

Підставивши відповідні похідні, дістанемо

$$y^{(n)} = 840x^3e^{5x} + 4\cdot 210x^4\cdot 5e^{5x} + 6\cdot 42x^5\cdot 25e^{5x} +$$
$$+ 4\cdot 7x^6\cdot 125e^{5x} + x^7\cdot 625e^{5x} =$$
$$= x^3e^{5x}(840 + 4200x + 6300x^2 + 3500x^3 + 625x^4).$$

23 ***Знайти y''_{xx}, якщо функцію задано неявно рівнянням $x^2 - y^2 = a^2$.***

Спочатку знайдемо першу похідну. Здиференціюємо обидві частини рівності: $2x - 2y\cdot y'_x = 0$ або $x - y\cdot y'_x = 0$, звідки $y'_x = x/y$.

Повторно диференціюємо рівність $x - y\cdot y'_x = 0$. Дістанемо $1 - (y'_x)^2 - y\cdot y''_{xx} = 0$. Тоді $y''_{xx} = \dfrac{1-(y'_x)^2}{y}$. Підставивши замість $y'_x = x/y$, матимемо

$$y''_{xx} = \frac{1}{y}\left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = -\frac{x^2 - y^2}{y^3} = -\frac{a^2}{y^3}.$$

24 ***Знайти y''_{xx} функції $y = f(x)$, заданої параметрично: $x = \varphi(t) = \ln t$, $y = \psi(t) = \sin 2t$.***

Обчислимо похідні:

$$\varphi'_t = \frac{1}{t},\quad \varphi''_{tt} = -\frac{1}{t^2},\quad \psi'_t = 2\cos 2t,\quad \varphi''_{tt} = -4\sin 2t.$$

Використовуючи формулу (6.34) для обчислення другої похідної функції, заданої параметрично, дістанемо

$$y''_{xx} = \frac{-4\sin 2t\,\dfrac{1}{t} - \left(-\dfrac{1}{t^2}\right)2\cos 2t}{1/t^3} = t(2\cos 2t - 4t\sin 2t).$$

25 ***Знайти диференціал другого порядку функції $y = e^{t^3}$.***

Послідовно диференціюючи, дістанемо

$$y' = e^{t^3}\cdot 3t^2,\quad y'' = e^{t^3}\cdot 9t^4 + e^{t^3}\cdot 6t = 3te^{t^3}(3t^3 + 2).$$

Отже,

$$d^2y = y''\,dx = 3te^{t^3}(3t^3+2)dx^2.$$

26 *Знайти диференціал третього порядку для функції* $y = e^x \ln x$.

Формула Лейбніца (6.35) при $n = 3$ має вигляд

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

Поклавши $u = e^x$ і $v = \ln x$, дістанемо

$$u' = u'' = u''' = e^x,\quad v' = \frac{1}{x},\quad v'' = -\frac{1}{x^2},\quad v''' = \frac{2}{x^3}.$$

Тоді

$$y''' = e^x \ln x + 3e^x \frac{1}{x} + 3e^x\left(-\frac{1}{x^2}\right) + e^x \frac{2}{x^3} =$$

$$= e^x\left(\ln x + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$$

і

$$d^3y = e^x\left(\ln x + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)dx^3.$$

27 *Використовуючи теорему Ролля, довести, що для многочлена* $P(x) = (x+3)(x+2)(x-1)$ *на проміжку* $(-3;\ 1)$ *знайдеться корінь рівняння* $P''(x) = 0$.

Многочлен перетворюється в нуль у точках $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$. На кожному проміжку $(-3;\ -2)$ і $(-2;\ 1)$ функція $P(x)$ диференційовна й $P(-3) = P(-2) = 0$, $P(1) = P(-2) = 0$. Тому за теоремою Ролля знайдуться точки $c_1 \in (-3;\ -2)$ і $c_2 \in (-2;\ 1)$ такі, що $P'(c_1) = P'(c_2) = 0$.

До функції $P'(x)$ на відрізку $[c_1,\ c_2]$ можна знову застосувати теорему Ролля, тому існує така точка $c \in [c_1,\ c_2]$, в якій $P''(c) = 0$.

28 *Користуючись формулою Лагранжа, оцінити значення* $\ln(1+e)$.

Розглянемо функцію $f(x) = \ln x$. Ця функція диференційовна скрізь при $x > 0$ і $f'(x) = 1/x$. Запишемо формулу Лагранжа (6.38), поклавши $b = x$:

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x-a),\quad c \in (x,\ a).$$

На відрізку $[e,\ e+1]$ застосуємо цю формулу для даної функції:

$$\ln(1+e) = \ln e + \frac{1}{c}[e+1-e] = 1 + \frac{1}{c},\quad c \in [e,\ e+1].$$

Оцінимо вираз $1 + \frac{1}{c}$. Дістанемо $1 + \frac{1}{c} < 1 + \frac{1}{e}$, оскільки $c > e$, і $1 + \frac{1}{c} > 1 + \frac{1}{e+1}$, оскільки $c < e + 1$. Таким чином,

$$1 + \frac{1}{e+1} < \ln(1+e) < 1 + \frac{1}{e}.$$

Підставивши в цю оцінку $e \approx 2{,}7$, остаточно матимемо

$$1{,}27 < \ln(1+e) < 1{,}37.$$

29 *Перевірити, що функції* $f(x) = \sin x$ *і* $g(x) = \cos x$ *задовольняють умови теореми Коші на відрізку* $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right]$, *та знайти точку* c, *яка фігурує у формулі Коші.*

Функції $f(x) = \sin x$ і $g(x) = \cos x$ неперервні на відрізку $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right]$; їхні похідні $f'(x) = \cos x$ і $g'(x) = -\sin x$ існують у всіх точках проміжку $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right)$, і похідна $g'(x) = -\sin x \neq 0$ на цьому інтервалі. За теоремою Коші існує точка $c \in \left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right)$ така, що справджується формула (6.41). У нашому прикладі

$$\frac{\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6}} = -\frac{\cos c}{\sin c}.$$

Звідси $\operatorname{ctg} c = 1$, тобто $c = \pi/4$.

30 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.

Функції, що стоять у чисельнику й знаменнику, диференційовні в околі точки $x = 1$ і прямують до нуля при $x \to 1$. Тому маємо невизначеність типу $\left(\frac{0}{0}\right)$. За правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{2x + 1/x}{e^x} = \frac{3}{e}.$$

31 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Маємо невизначеність типу $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Функції, що стоять у чисельнику й знаменнику, диференційовні. Границі існують. Застосувавши правило Лопіталя тричі, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

32 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

У чисельнику й знаменнику стоять функції, диференційовні й нескінченно малі при $x\to 1$. Границі існують. Маємо невизначеність типу $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Застосувавши правило Лопіталя, дістанемо

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x-1}}{-\pi\dfrac{1}{\sin^2\pi x}}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2\pi x}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=-\frac{1}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\sin 2\pi x}{1}=0.$$

33 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to 0+0}(x^2\ln x)$.

Маємо невизначеність типу $(0\cdot\infty)$. Подамо добуток функцій у вигляді частки, а потім, діставши невизначеність типу $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, застосуємо правило Лопіталя. Тоді

$$\lim_{x\to 0+0}(x^2\ln x)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{\ln x}{1/x^2}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1/x}{-\dfrac{2}{x^3}}\right)=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0+0}x^2=0.$$

34 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

Маємо невизначеність типу $(\infty-\infty)$. Для того щоб знайти дану границю, зведемо дроби до спільного знаменника, а потім, діставши невизначеність типу $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, застосуємо правило Лопіталя. Тоді

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\frac{1}{2}.$$

35 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$.

Маємо невизначеність типу (0^0). Позначимо $f(x)=\sin x$, $g(x)=x$. Тоді за основною логарифмічною тотожністю дістанемо $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln(f(x))}$.

У нашому випадкові $(\sin x)^x=e^{x\ln(\sin x)}$.

У показнику степеня маємо невизначеність типу $(0\cdot\infty)$ Обчислимо границю показника, користуючися правилом Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}x\ln(\sin x)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\sin x)}{\dfrac{1}{x}}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{-1/x^2}\right)=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2\cos x}{\sin x}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x\cos x-x^2\sin x}{\cos x}\right)=-\frac{0}{1}=0.$$

Отже,

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^x=\lim_{x\to 0}e^{x\ln(\sin x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}x\ln(\sin x)}=e^0=1.$$

36 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$, то маємо невизначеність типу (∞^0).

Запишемо $\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{x} = e^{x\ln(\ln 1/x)}$. Зробимо заміну $t = \frac{1}{x}$. Якщо $x \to 0+$, то $t \to +\infty$. Обчислимо границю показника степеня, застосовуючи правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\ln\frac{1}{x}}{1/x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln\ln t}{t} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t\ln t} = 0.$$

Остаточно маємо

$$\lim_{x\to 0+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{x} = e^{0} = 1.$$

✓ Слід зауважити, що хоча правила Лопіталя є сильним засобом обчислення границь, проте вони повністю не можуть замінити прийомів знаходження границь, розглянутих у розд. 4. Наведемо приклади.

37 *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+\cos x}{x+\sin x}\right)$.

Правило Лопіталя в даному випадкові застосувати не можна, оскільки відношення похідних $\frac{1-\sin x}{1+\cos x}$ не має границі при $x\to\infty$, тобто порушено умови теореми. Але границю даної функції можна обчислити таким способом:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+\cos x}{x+\sin x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}\right) = 1.$$

Тут ураховано, що

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cos x}{x}\right) = 0 \text{ і } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 0.$$

38 *Розкласти многочлен* $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - + 8x^2 + 4$ *за степенями двочлена* $(x-2)$.

Многочлен має похідні довільного порядку. Покладемо у формулі Тейлора (6.42) $x_0 = 0$. Обчислимо значення функції, її похідні й коефіцієнти:

$$f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4, \qquad f(2) = 0;$$
$$f'(x) = 8x^3 - 15x^2 - 6x + 8, \qquad f'(2) = 0;$$
$$f''(x) = 24x^2 - 30x - 6, \qquad f''(2) = 30;$$
$$f'''(x) = 48x - 30, \qquad f'''(2) = 66;$$
$$f^{(4)}(x) = 48, \qquad f^{(4)}(2) = 48;$$
$$f^{(5)}(x) = 0, \qquad f^{(5)}(2) = 0.$$

Запишемо формулу Тейлора для даної функції:

$$f(x) = 0 + \frac{1}{1!}0(x-2) + \frac{1}{2!}30(x-2)^2 + \frac{1}{3!}66(x-2)^3 + \frac{1}{4!}48(x-2)^4,$$

тобто

$$f(x) = 15(x-2)^2 + 11(x-2)^3 + 2(x-2)^4.$$

Похибка $R_5(x) = 0$, оскільки $f^{(5)}(x) = 0$.

39 *Розвинути функцію* $f(x) = \sqrt{1+x}$ *за формулою Маклорена й записати залишковий член у формі Пеано.*

Обчислимо значення функції та її похідні в точці $x_0 = 0$:

$$f(x) = \sqrt{1+x}, \qquad f(0) = 1;$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, \qquad f'(0) = \frac{1}{2};$$
$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-3/2} = -\frac{1}{2^2}(1+x)^{-3/2}, \qquad f''(0) = -\frac{1}{2^2};$$
$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\frac{1\cdot 3\ldots(2k-3)}{2^k}(1+x)^{-\frac{2k+1}{2}}, \qquad f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k+1}(2k-3)!!}{2^k}.$$

Тоді за формулою Маклорена (6.50) маємо

$$f(x) = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{2}x - \frac{1}{2!}\frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1}{3!}\frac{1\cdot 3}{2^3}x^3 + \ldots +$$
$$+ (-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{n!}\frac{1}{2^n}x^n + o(x^n).$$

✓ Користуючись відомими розкладами, можна не обчислювати похідних і безпосередньо писати розвинення для складніших функцій. При цьому всі степені x, до потрібної включно, слід ураховувати, а вищі степені (не виписуючи їх), зразу включати в залишковий член. Наведемо приклади.

40 *Записати розвинення функції* $f(x) = e^{\sin x}$ *до члена з* x^3.

Запишемо формулу (6.47) для функції $f(x) = e^x$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Підставивши замість x вираз $\sin x$, дістанемо розвинення функції $f(x) = e^{\sin x}$ у вигляді

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + o(x^3).$$

Використовуючи формулу (6.48), запишемо тепер розвинення функції $y = \sin x$ до члена з x^3:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Таким чином,

$$e^{\sin x} = 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

Член з x^3 зникає, й остаточно маємо $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$. Залишковий член

$$R_{2m}(x) \le \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Аналогічно можна дістати $e^{\operatorname{tg} x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.

41 *Записати розвинення функції* $f(x) = \ln(\cos x)$ *до члена з* x^6.

Оскільки

$$\ln(\cos x) = \ln(1 + (\cos x - 1)) =$$

$$= (\cos x - 1) - \frac{1}{2}(\cos x - 1)^2 + \frac{1}{3}(\cos x - 1)^3 + o(x^6)$$

і при цьому за формулою (6.49)

$$\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7),$$

то

$$\ln(\cos x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}x^6\right) + o(x^6).$$

Після скорочення дістанемо

$$\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6).$$

Аналогічно

$$\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{31}{40}x^5 + o(x^5);$$

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 - \frac{1}{2835}x^6 + o(x^6).$$

✓ Два останні розвинення пропонується дістати самостійно. Всі ці розвинення, добуті без безпосереднього використання формули Тейлора, можна, звичайно, одержати за цією формулою, причому з тими самими коефіцієнтами, оскільки розвинення функції за формулою Тейлора єдине.

42 *Розглянемо функцію* $f(x) = \sin x$.

Запишемо для неї формулу Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m}).$$

Залишковий член у формі Лагранжа має вигляд

$$R_{2m}(x) = \frac{\sin\left(\theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2m+1)!}x^{2m+1} = (-1)^m \cos\theta x\,\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!},\quad \theta \in (0;1),$$

і похибка наближення оцінюється легко: $|R_{2m}(x)| \le \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}$.

Зокрема, якщо ми обмежимось одним членом, поклавши $\sin x \approx x$, то для того, щоб похибка була меншою, наприклад за 0,001, достатньо взяти (вважаючи $x > 0$) $x^3/6 < 0{,}001$ або $x < 0{,}1817$, що приблизно дорівнює 10°. Користуючись формулою $\sin x \approx x - x^3/6$, для досягнення тієї самої точності вже достатньо взяти $x^5/120 < 0{,}001$ або $x < 0{,}6544$ ($\approx 37{,}5^\circ$). Якщо обмежитися кутами $x < 0{,}4129$ ($\approx 23{,}5^\circ$), то похибка становитиме навіть менш як 0,0001, і т. д. Бачимо, що зі збільшенням числа членів многочлена Тейлора він із більшою точністю й на більшому проміжку відтворює дану функцію.

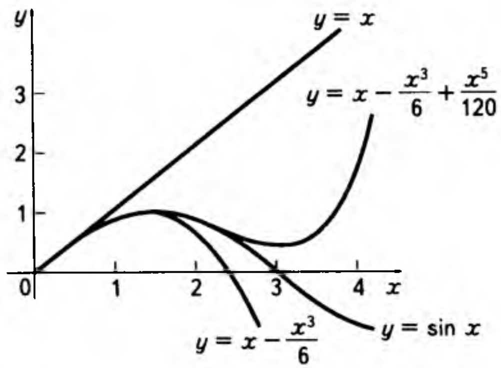


Рис. 6.19

Цей факт проілюстровано на рис. 6.19, де поряд із графіком функції $y = \sin x$ подано графіки $y = x$, $y = x - \dfrac{x^3}{6}$, $y = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.

43 *Знайти проміжки монотонності функції $y = x^2 \cdot 2^{-x}$.*

Область визначення функції $D(y) = \mathbf{R}$. Обчислимо похідну функції:

$$y' = (x^2 \cdot 2^{-x})' = 2x \cdot 2^{-x} + x^2 \cdot 2^{-x} \ln 2(-1) = x \cdot 2^{-x}(2 - x \ln 2).$$

Розв'яжемо нерівність $x \cdot 2^{-x}(2 - x \ln 2) > 0$. Оскільки $2^{-x} > 0$ при всіх x, то $2x\left(1 - x\dfrac{\ln 2}{2}\right) > 0$. Отже, при $x \in \left(0; \dfrac{2}{\ln 2}\right)$ похідна $y'(x) > 0$, і це означає, що функція зростає; при $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\dfrac{2}{\ln 2}; +\infty\right)$ похідна $y'(x) < 0$, і це означає, що на цих проміжках функція спадає.

44 *Знайти точки локального екстремуму функції $y = x^3 e^{-x}$.*

Дана функція визначена на множині всіх дійсних чисел. Знайдемо критичні точки першого роду, тобто ті точки в яких похідна дорівнює нулю або не існує.

Оскільки

$$y'(x) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = x^2 e^{-x}(3 - x),$$

то $y'(x) = 0$ при $x_1 = 0$ і $x_2 = 3$. Точки $x_1 = 0$ і $x_2 = 3$ є критичними.

Оскільки функція диференційовна скрізь, то зручно застосувати другу достатню умову локального екстремуму. Визначаємо

$$y''(x) = 2xe^{-x}(3 - x) - x^2 e^{-x}(3 - x) - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(x^2 - 6x + 6).$$

У критичних точках $y''(0) = 0$, $y''(3) = 3e^{-3}(9 - 18 + 6) < 0$. Отже, в точці $x_2 = 3$ функція має локальний максимум $y(3) = 27e^{-3}$. Характер критичної точки $x_1 = 0$ ще не визначений, оскільки $f''(0) = 0$. Для з'ясування її характеру знаходимо

$$y'''(x) = -e^{-x}(x^3 - 6x^2 + 6x) + e^{-x}(3x^2 - 12 + 6) =$$

$$= e^{-x}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6).$$

Таким чином, $y'''(0) = 6 \neq 0$. У точці $x = 0$ перша відмінна від нуля похідна третього порядку (непарного), тому критична точка $x = 0$ не є точкою локального екстремуму.

45 *Знайти точки локального екстремуму функції $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x + 2}$.*

Функція визначена скрізь, крім точки $x = -2$, тобто на проміжках $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$. Знайдемо критичні точки першого роду. Для цього обчислимо

$$y'(x) = \left(x^{\frac{2}{3}} \frac{1}{x + 2}\right)' = \frac{\frac{2}{3}x^{-1/3}(x + 2) - x^{2/3}}{(x + 2)^2} =$$

$$= \frac{2x + 4 - 3x}{3x^{1/3}(x + 2)^2} = \frac{4 - x}{3\sqrt[3]{x}(x + 2)^2}.$$

Оскільки $y'(x) = 0$ при $x = 4$ і $y'(x)$ не існує при $x = -2$ і $x = 0$, то точки $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$ — критичні точки першого роду для даної функції. При $x = -3$ похідна $y'(-3) < 0$, тому $y'(x) < 0$ на проміжку $(-\infty; -2)$. Аналогічно визначаємо знаки $y'(x)$ на інших проміжках. Результати запишемо в таблицю:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 4)$	4	$(4; +\infty)$
y'	–	Не існує	–	Не існує	+	0	–
y	↘	Не існує	↘	0	↗	$\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$	↘
				loc min		loc max	

Із таблиці видно, що $(0; 0)$ — точка локального мінімуму (оскільки $y'(x)$ змінює свій знак з «–» на «+»), а $\left(4; \frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right)$ — точка локального максимуму ($y'(x)$ змінює свій знак з «+» на «–»).

У розглядуваному прикладі не можна було скористатися другою достатньою умовою для визначення характеру критичної точки $x = 0$, оскільки в ній функція недиференційовна.

46 *Знайти найбільше значення функції* $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ *на проміжку* $(0; +\infty)$.

На проміжку $(0; +\infty)$ функція диференційовна і її похідна

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Знайдемо критичні точки першого роду з таких умов: похідна $f'(x) = 0$ або $f'(x)$ не існує. Оскільки $f'(x) = 0$ при $1 - \ln x = 0$, то $x = e$, а $f'(x)$ не існує при $x = 0$, але ця точка не є критичною, бо при $x = 0$ функція не визначена. Знайдемо $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-x(3 - \ln x)}{x^4} = -\frac{3 - \ln x}{x^3}.$$

Оскільки $f''(e) < 0$, то в точці $x = e$ функція досягає максимуму $f(e) = \frac{1}{e}$.

Тому $\max\limits_{x \in (0; +\infty)} f(x) = \frac{1}{e}$.

47 *Знайти найбільше й найменше значення функції* $f(x) = 3x - x^3$ *на відрізку* $[-2; 3]$.

Для цього потрібно:

1) знайти екстремуми функції на цьому відрізку;
2) знайти значення функції на кінцях цього відрізка;
3) серед добутих значень вибрати найбільше й найменше.

Знаходимо похідну функції $f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1 - x)(1 + x)$ та стаціонарні точки. Для цього розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0$. Його розв'язки $x = \pm 1$. Результати запишемо в таблицю:

x	$[-2; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; 3]$
y'	–	0	+	0	–
y	↘	-2	↗	2	↘
		loc max		loc min	

Знайшли локальний максимум $f(1) = 2$ і локальний мінімум $f(-1) = -2$ функції на відрізку.

Обчислимо значення даної функції на кінцях відрізка $[-2; 3]$:

$$f(-2) = 2, \quad f(3) = -18.$$

Із добутих значень вибираємо найбільше й найменше. Таким чином,

$$\max_{x \in [-2; 3]} f(x) = f(2) = f(1) = 2, \quad \min_{x \in [-2; 3]} f(x) = f(3) = -18.$$

48 *Знайти асимптоти графіка функції* $y = \sqrt{\frac{x^3}{x - 2}}$.

Функція визначена на проміжках $(-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$.

Оскільки $\lim\limits_{x \to 2+0} \sqrt{\frac{x^3}{x - 2}} = +\infty$, то пряма $x = 2$ є вертикальною асимптотою графіка функції.

Горизонтальних асимптот немає, оскільки

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x - 2}} = \infty \quad \text{і} \quad \lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x - 2}} = \infty.$$

Визначимо, чи існують похилі асимптоти. Використовуючи формули (6.58) і (6.59), знаходимо

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{1-2/x}} = 1;$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-k_1x] = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-x+2)}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x}+\sqrt{x-2})} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1-2/x}(1+\sqrt{1-2/x})} = 1.$$

Отже, існує права похила асимптота $y = x + 1$.

Далі:

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}}{-1}$$

(чисельник та знаменник поділили на додатну величину $(-x)$), тобто

$$k_2 = -\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1}{1-2/x}} = -1;$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_2x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{(-x)^3}{2-x}} + x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{x}+x\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x(\sqrt{-x}-\sqrt{2-x})}{\sqrt{2-x}} =$$

$$= -\lim_{x\to-\infty}\frac{x(-x-2+x)}{\sqrt{2-x}(\sqrt{-x}+\sqrt{2-x})} = -1.$$

Отже, існує ліва похила асимптота $y = -x - 1$.

49 *Знайти напрями опуклості й точки перегину графіка функції* $y = \dfrac{3\ln x}{\sqrt{x}}$.

Функція визначена на проміжку $(0; +\infty)$.

Обчислимо першу й другу похідні функції:

$$y'(x) = \left(3\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)' = 3\frac{\dfrac{1}{x}\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} = 3\frac{1-\dfrac{1}{2}\ln x}{x^{3/2}};$$

$$y''(x) = 3\left(\frac{1-\dfrac{1}{2}\ln x}{x^{3/2}}\right)' = 3\frac{-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x}x^{3/2} - \dfrac{3}{2}x^{1/2}\left(1-\dfrac{1}{2}\ln x\right)}{x^3} =$$

$$= -\frac{3}{4}\frac{8-3\ln x}{x^{5/2}}.$$

Знаходимо критичні точки другого роду: $y''(x)$ при $8 - 3\ln x = 0$ або $x = e^{8/3}$, $y'(x)$ не існує при $x = 0$, але $x = 0$ не є критичною точкою, оскільки не належить області визначення функції.

Результати дослідження запишемо в таблицю:

x	$(0; e^{8/3})$	$e^{8/3}$	$(e^{8/3}; +\infty)$
y''	–	0	+
y	∩	Точка перегину	∪

Отже, $x = e^{8/3}$ є точкою перегину. При $x \in (0; e^{8/3})$ графік функції опуклий угору, а при $x \in (e^{8/3}; +\infty)$ — опуклий униз (рис. 6.20).

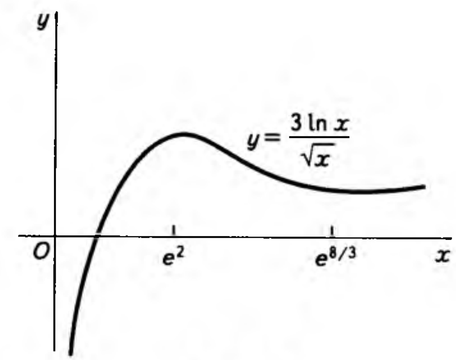


Рис. 6.20

50 *Побудувати графік функції* $y = \frac{1}{x}e^{1/x}$.

1. Область визначення функції $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

2. Оскільки $y(-x) = -\frac{1}{x}e^{-1/x} \neq \pm y(x)$, то функція загального вигляду.

3. Точок перетину з осями координат немає.
4. Знайдемо асимптоти графіка функції:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{1/x}}{x} = \lim_{y\to +\infty} ye^{y} = +\infty,\quad \lim_{x\to 0-}\frac{e^{1/x}}{x} = \lim_{y\to -\infty} ye^{y} = 0.$$

Функція має розрив другого роду в точці $x = 0$. Таким чином, вертикальна асимптота $x = 0$ (вісь Oy), але асимптотична поведінка функції спостерігається тільки справа від осі ординат.

Оскільки $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{1/x}}{x} = 0$, то рівняння горизонтальної асимптоти $y = 0$ (вісь Ox).

5. Знаходимо критичні точки першого роду (точки можливого екстремуму). Для цього обчислимо першу похідну функції:

$$y'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x} + \frac{1}{x}e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x}\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Стаціонарні точки знаходимо з умови $y' = 0$ при $(1 + 1/x) = 0$, тобто при $x = -1$. При $x = 0$ похідна не існує. Обчислимо тепер значення функції:

$$y(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}.$$

Результати запишемо в таблицю:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1;\ 0)$	0	$(0;\ +\infty)$
y'	–	0	+	–	–
y		$-\frac{1}{e}$		–	
		loc min		loc max	

Отже, функція зростає на проміжку $(-1;\ 0)$ і спадає на проміжках $(-\infty;\ -1)$ і $(0;\ +\infty)$. Точка $\left(-1;\ -\frac{1}{e}\right)$ є точкою локального мінімуму.

6. Знаходимо критичні точки другого роду. Це точки, в яких y'' не існує або дорівнює нулю. Обчислимо другу похідну функції:

$$y'' = -\frac{x^3 - 3x^2(x+1)}{x^6}e^{\frac{1}{x}} - \frac{x+1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}\frac{2x^2+4x+1}{x^5},$$

причому $y'' = 0$ при $2x^2 + 4x + 1 = 0$.

Отже, критичні точки другого роду

$$x_1 = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}},\quad x_2 = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Перевіримо знак другої похідної на проміжках. Результати запишемо в таблицю:

x	$(-\infty;\ x_1)$	x_1	$(x_1;\ x_2)$	x_2	$(x_2;\ 0)$	0	$(0;\ +\infty)$
y''	–	0	+	0	–	–	+
y	$\cap$		$\cup$		$\cap$	–	$\cap$
		т. п.		т. п.		т. п.	

7. Графік функції зображено на рис. 6.21.

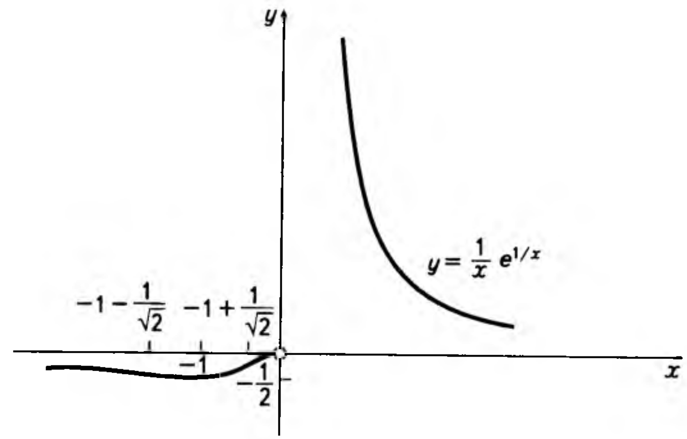


Рис. 6.21

Розділ 7

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ В ЕКОНОМІЧНОМУ АНАЛІЗІ

7.1 Еластичність

7.1.1. Еластичність функції

Важливим напрямом застосування диференціального числення в економіці є введення з його допомогою поняття *еластичності*. Коефіцієнт еластичності показує відносну зміну досліджуваного економічного показника внаслідок одиничної відносної зміни економічного фактора, від якого він залежить, за незмінності інших факторів, що впливають на нього.

Нехай задано функцію $y=f(x)$. Зміна незалежної змінної x на Δx зумовлює зміну функції y на Δy. Виникає запитання: як суттєво змінюється функція y залежно від зміни аргументу x? Одним із показників реагування однієї змінної на зміну іншої змінної є похідна

$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, що характеризує швидкість зміни функції внаслідок зміни аргументу. Але в економіці цей показник незручний тим, що він залежить від вибору одиниць величин.

Наприклад, розглянувши функцію попиту на цукор q від його ціни p ($q = q(p)$), побачимо, що значення похідної $q'_p = \lim\limits_{\Delta p \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta p}$ за кожної ціни p, яка виражається в гривнях, залежить від того, в чому виражається попит на цукор — у кілограмах або тоннах. У першому випадкові похідна виражається в кілограмах на гривню, в другому — в тоннах на гривню, й відповідно її значення, за однієї й тієї самої ціни, будуть різними залежно від одиниці попиту. Тому для якісного визначення зміни функції відносно зміни аргументу в економіці вивчають зв'язок не абсолютних змін величин x і y (Δx і Δy), а їхніх відносних або процентних змін.

Означення 7.1. ***Еластичністю функції*** $y=f(x)$ *називають границю відношення відносного приросту функції y до відносного приросту аргументу x при $\Delta x \to 0$* і позначають

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right). \tag{7.1}$$

Еластичність функції наближено виражає, на скільки процентів зміниться функція $y = f(x)$ у разі зміни незалежної змінної x на 1 %, тобто

$$\frac{\Delta y}{y} \approx E_x(y)\frac{\Delta x}{x}.$$

З означень еластичності й похідної випливає, що

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}y'$$

або

$$E_x(y) = \frac{x}{y}y' = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}. \tag{7.2}$$

Оскільки для функції $y=f(x)$ маємо $E_x(y) = \dfrac{x}{f(x)}f'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)/x}$, то *еластичність виражає відношення граничного значення $f'(x)$ до середнього значення функції $f(x)/x$ у точці x.*

Ураховуючи, що $\dfrac{y'}{y} = (\ln y)'$ і $x = \dfrac{1}{1/x} = \dfrac{1}{(\ln x)'}$, дістаємо

$$E_x(y) = \frac{(\ln y)'}{(\ln x)'}, \tag{7.3}$$

тобто еластичність можна подати у вигляді «логарифмічної» похідної.

Як і похідна, еластичність має простий *геометричний зміст*. Оскільки $y'(x) = \operatorname{tg}\alpha$, де α — кут нахилу дотичної, проведеної до графіка функції $y=f(x)$ у точці x, то за означенням (7.1) $E_x(y) = \dfrac{x}{y}\operatorname{tg}\alpha$.

Знайдемо еластичність функції в довільній точці $C(x;\ y)$. Для цього проведемо дотичну AB до графіка функції $y = f(x)$ у точці C. Нехай A і B — точки перетину дотичної з осями Ox і Oy відповідно.

Розглянемо спадну опуклу вниз функцію $y = f(x)$ (рис. 7.1).

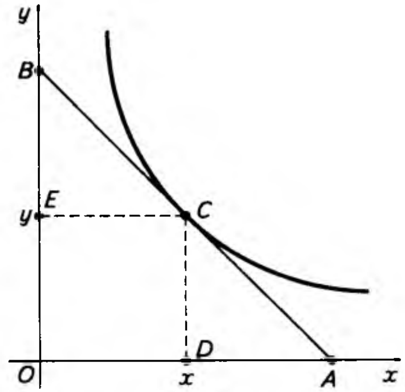


Рис. 7.1

З ΔACD дістанемо

$$\frac{CD}{AD} = \operatorname{tg} \angle DAC = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$

$$AD = \frac{CD}{-\operatorname{tg}\alpha}, \quad CD = f(x),$$

тобто $AD = \dfrac{f(x)}{-f'(x)} = -\dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Із подібності трикутників CBE та ACD випливає, що $\dfrac{CB}{CA} = \dfrac{CE}{AD} = -\dfrac{f'(x)x}{f(x)} = -E_x(y)$. Таким чином,

$$E_x(y) = -\frac{CB}{CA}, \tag{7.4}$$

тобто геометрично еластичність спадної функції дорівнює відношенню відстаней по дотичній від точки C до її перетину з осями Oy і Ox, взятому зі знаком «–». У випадку зростаючої функції, опуклої вниз

(рис. 7.2) і опуклої вгору (рис. 7.3), еластичність функції також дорівнюватиме відношенню CB/CA (пропонується довести це самостійно), а знак еластичності визначатиметься напрямом відрізків CB і CA. Якщо точки A і B лежать по один бік від точки C на дотичній (як на рис. 7.2 і 7.3), то у формулі (7.4) треба брати знак «+». Якщо точки A і B лежать по різні боки від точки C (див. рис. 7.1), то у формулі (7.4) треба брати знак «–».

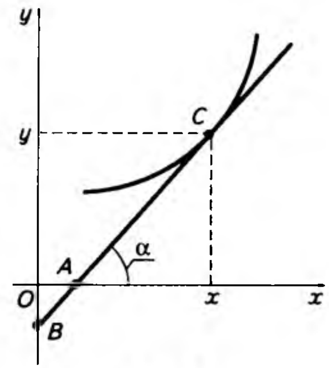


Рис. 7.2

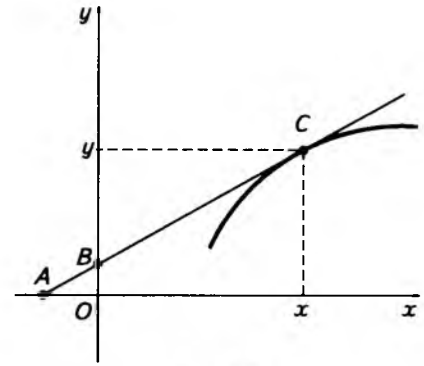


Рис. 7.3

Отже, *еластичність функції (за абсолютним значенням) дорівнює відношенню відстаней по дотичній від даної точки графіка функції до точок її перетину з осями Oy і Ox.*

➡ **Означення 7.2.** *Якщо* $|E_x(y)| < 1$, *то функцію називають* ***нееластичною*** *(її відносний приріст спадає). Якщо* $|E_x(y)| > 1$, *то функцію називають* ***еластичною*** *(її відносний приріст зростає).*

✓ *Зауваження.* Еластичність функції, зображеної на рис. 7.2, більша за одиницю (оскільки $CB > CA$), а на рис. 7.3 — менша від одиниці (оскільки $CB < CA$).

7.1.2. Властивості еластичності

① *Еластичність — безрозмірна величина, значення якої не залежить від того, в яких одиницях виражаються величини y і x,* тобто

$$E_{ax}(by) = E_x(y). \tag{7.5}$$

Справді,

$$E_{ax}(by) = \frac{ax}{by}\frac{d(by)}{d(ax)} = \frac{ax}{by}\frac{b(dy)}{a(dx)} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = E_x(y).$$

② *Еластичність функції дорівнює добутку незалежної змінної x на темп зміни функції:* $T_y = (\ln y)' = y'/y$, тобто

$$\boxed{E_x(y) = xT_y.} \tag{7.6}$$

③ *Еластичності взаємно обернених функцій — взаємно обернені величини:*

$$\boxed{E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}.} \tag{7.7}$$

Справді,

$$E_x(y) = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}\frac{y}{x}} = \frac{1}{E_y(x)}.$$

④ *Еластичність добутку двох функцій $u = u(x)$ і $v = v(x)$, що залежать від одного й того самого аргументу x, дорівнює сумі еластичностей:*

$$\boxed{Ex(uv) = Ex(u) + E_x(v).} \tag{7.8}$$

Справді,

$$E_x(uv) = \frac{x}{uv}\frac{d(uv)}{dx} = \frac{x}{uv}\left[v\left(\frac{du}{dx}\right) + u\left(\frac{dv}{dx}\right)\right] =$$

$$= \frac{x}{u}\frac{du}{dx} + \frac{x}{v}\frac{dv}{dx} = E_x(u) + E_x(v).$$

⑤ *Еластичність частки двох функцій $u = u(x)$ і $v = v(x)$, що залежать від одного й того самого аргументу x, дорівнює різниці еластичностей:*

$$\boxed{E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v).} \tag{7.9}$$

Справді,

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{x}{u/v}\frac{d(u/v)}{dx} = \frac{xv}{u}\frac{v\,du - u\,dv}{v^2\,dx} =$$

$$= \frac{x}{u}\frac{du}{dx} - \frac{x}{v}\frac{dv}{dx} = E_x(u) - E_x(v).$$

⑥ *Еластичність алгебричної суми двох функцій $u = u(x)$ і $v = v(x)$ обчислюється за формулою*

$$\boxed{E_x(u \pm v) = \frac{uE_x(u) \pm vE_x(v)}{u \pm v}.} \tag{7.10}$$

Справді,

$$E_x(u \pm v) = \frac{x}{u \pm v}\frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{x}{u \pm v}\left[\frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}\right] =$$

$$= \frac{\frac{x}{u}\frac{du}{dx}u \pm \frac{x}{v}\frac{dv}{dx}v}{u \pm v} = \frac{uE_x(u) \pm vE_x(v)}{u \pm v}.$$

Наведемо приклади обчислення еластичностей елементарних функцій.

■ **Приклад 7.1.** Еластичність степеневої функції $y = x^\alpha$ стала й дорівнює показнику степеня α:

$$E_x(x^\alpha) = \alpha.$$

Справді,

$$E_x(x^\alpha) = \frac{x}{x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{dx} = \frac{\alpha x^{\alpha-1}x}{x^\alpha} = \alpha.$$

■ **Приклад 7.2.** Еластичність показникової функції $y = a^x$ пропорційна x:

$$E_x(a^x) = x\ln a.$$

Справді,

$$E_x(a^x) = \frac{x}{a^x}\frac{da^x}{dx} = \frac{x}{a^x}a^x\ln a = x\ln a.$$

■ **Приклад 7.3.** Еластичність лінійної функції $y = kx + b$ становить

$$E_x(kx+b) = \frac{kx}{kx+b}.$$

Справді,

$$E_x(kx+b) = \frac{x}{kx+b}\,\frac{d(kx+b)}{dx} = \frac{x}{kx+b}k = \frac{kx}{kx+b}.$$

Якщо лінійна функція спадна (кутовий коефіцієнт від'ємний, $k < 0$), то еластичність функції змінюється від нуля в точці y_m перетину з графіком осі Oy до мінус нескінченності ($-\infty$) у точці x_m перетину осі Ox, проходячи через граничне значення (–1) у середній точці $\left(\frac{x_m}{2}; \frac{y_m}{2}\right)$. Отже, еластичність лінійної функції залежить не лише від кута нахилу прямої, а й від того, в якій точці x вона оцінюється (рис. 7.4).

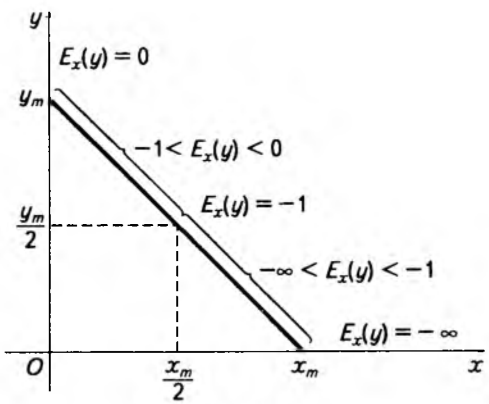


Рис. 7.4

➡ **Означення 7.3.** *Функцію з нескінченною еластичністю в усіх точках називають* ***цілком еластичною****, а з нульовою еластичністю в усіх точках —* ***цілком нееластичною****.*

7.1.3. Застосування еластичності в економічному аналізі

Еластичність функцій застосовується для аналізу попиту й споживання, прогнозів цінової політики. Нехай $q = q(p)$ — функція попиту на товар ціною p за одиницю.

❑ **Еластичність попиту за ціною**

$$E_p(q) = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{p}{q}q' \tag{7.11}$$

виражає відносну зміну (в процентах) розміру попиту на будь-який товар або послугу зі зміною ціни на 1 % і характеризує чутливість споживачів до зміни цін на продукцію.

■ **Приклад 7.4.** *Дослідним шляхом установлено функції попиту $q = \frac{p+8}{p+2}$ і пропозиції $s = p + 1/2$, де q і s — обсяги товарів, а p — їхня ціна. Знайдемо рівноважну ціну та еластичність попиту й пропозиції за рівноважної ціни.*

Рівноважну ціну p^* можна знайти так:

$$\frac{p+8}{p+2} = p + \frac{1}{2},\quad p + 8 = p^2 + 2p + \frac{1}{2}p + 1,$$

$$p^2 + \frac{5}{2}p - p - 7 = 0,\quad 2p^2 + 3p - 14 = 0.$$

Маємо $p_1 = -3{,}5$, $p_2 = 2$. З економічних міркувань $p_1 = -3{,}5 < 0$ — сторонній розв'язок. Отже, рівноважна ціна $p^* = 2$.

Обчислимо еластичність попиту:

$$E_p(q) = \frac{p}{q}q'_p,\quad E_p(q) = \frac{-6p}{(p+2)(p+8)}.$$

Обчислимо еластичність пропозиції:

$$E_p(s) = \frac{p}{s}s'_p,\quad E_p(s) = \frac{2p}{2p+1}.$$

За рівноважної ціни $p^* = 2$ маємо: $E_2(q) = -0{,}3$; $E_2(s) = 0{,}8$.

Попит і пропозиція за рівноважною ціною нееластичні. Це означає, що зміна ціни не спричинить різкої зміни попиту й пропозиції. Так, унаслідок збільшення ціни на 1 % попит зменшиться на 0,3 %, а пропозиція збільшиться на 0,8 %.

■ **Приклад 7.5.** *Нехай функцію попиту на товар, який випускає деяка фірма, змодельовано залежністю $p(q) = q_0 e^{-kp^2}$, де q_0 і k — відомі величини. Визначимо, за якої ціни p попит буде еластичним.*

Обчислимо еластичність попиту:

$$E_p(q) = \frac{p}{q} q'_p, \quad E_p(q) = \frac{-2kpq_0 e^{-kp^2}}{q_0 e^{-kp^2}} p = -2kp^2$$

Аби попит був еластичним, необхідно, щоб виконувалася нерівність $2kp^2 > 1$. Отже, $p > 1/\sqrt{2k}$.

☐ Еластичність попиту за доходом

$$E_R(q) = \frac{dq}{q} : \frac{dR}{R} = \frac{R}{q}\frac{dq}{dR} \tag{7.12}$$

виражає відносну зміну (в процентах) попиту на будь-який товар або послугу в разі зміни доходу споживачів цього блага на 1 %.

Додатна еластичність попиту за доходом характеризує нормальні (якісні) товари, а від'ємна — малоцінні (низькоякісні).

Наприклад, високий додатний коефіцієнт еластичності попиту за доходом у галузі означає, що її внесок в економічне зростання більший, ніж частка в структурі економіки, й вона має шанси на розширення й розвиток у майбутньому. Навпаки, якщо коефіцієнт еластичності попиту на продукцію галузі за доходом має невелике додатне чи від'ємне значення, то на неї очікують застій і перспектива скорочення виробництва.

■ **Приклад 7.6** (*зв'язок еластичності з доходом*). У ситуації, що складається на ринку, функція попиту $q = q(p)$ на певний товар, який випускає фірма, є монотонно спадною. Тому підвищення ціни на одиницю товару спричиняє зменшення його споживання, тобто попит на даний товар знижується. На практиці дуже важливим є запитання: як змінюватиметься річний доход фірми?

Оскільки річний доход фірми $R = R(p)$ дорівнює добутку ціни одиниці товару p на попит ($R(p) = q(p)p$) і залежить як від ціни товару, так і від попиту на нього на ринку, то доход фірми може зростати або знижуватися. Для того щоб визначити це, розглянемо дану ситуацію детальніше. Очевидно, що відповідь на це запитання залежить також від місця фірми на ринку. Якщо фірма є монополією, тобто сама випускає й продає товар на ринку, то керівництво фірми може підвищити ціну на товар без погодження з іншими фірмами-виробниками.

Розглянемо функцію доходу фірми $R(p) = q(p)p$.

Обчислимо похідну цієї функції:

$$R'(p) = q + pq'_p = q(1 + E_p(q)).$$

Аби річний доход фірми збільшився, потрібно, щоб функція доходу зростала, тобто її похідна була додатною.

Тепер проаналізуємо всі варіанти еластичності попиту.

1. $E_p(q) < -1$. Тоді $R'(p) < 0$. Таким чином, за еластичного попиту збільшення ціни p спричиняє зниження доходу. І навпаки, зниження ціни на товар збільшує доход.
2. $E_p(q) = -1$. Тоді $R'(p) = 0$, тобто за нейтрального попиту зміна ціни на товар не впливає на доход.
3. $E_p(q) > -1$. Тоді $R'(p) > 0$, тобто за нееластичного попиту збільшення ціни p зумовлює збільшення доходу.

Еластичність попиту за ціною завжди від'ємна, оскільки $q'(p) < 0$. Отже, еластичність доходу за ціною від'ємна ($E_p(R) < 0$) для товарів, попит на які еластичний, і додатна ($E_p(R) > 0$) для товарів, попит на які нееластичний. Це означає: якщо попит нееластичний, то зміна ціни спричиняє зміну доходу в тому самому напрямі, й продавцям вигідно підвищувати ціну (що веде до збільшення їхнього доходу). За еластичного попиту зміна доходу відбувається в напрямі, протилежному зміні ціни, й для його підвищення продавцям вигідно знижувати ціну. Аналогічно підвищення податку на товар з еластичним попитом зумовлює скорочення доходу від оподаткування.

За еластичного попиту доход збільшується зі збільшенням кількості товару або зменшенням ціни, а за нееластичного — зменшується. Наприклад, доходи фермерів за гарного врожаю скоротяться, оскільки еластичність попиту на сільськогосподарську продукцію достатньо низька. Аналогічно підвищення цін на залізничні квитки може спричинити скорочення надходжень у бюджет, якщо попит на відповідну послугу виявиться еластичним.

7.1.4. Еластичність і податкова політика

Коли уряд вводить податки на деякі товари, він має знати: на які товари вводити податок; з кого стягувати податок — із виробників чи споживачів; які будуть податкові надходження в бюджет; на кого ляже основний податковий тягар; якщо податок вже стягується, то чи варто підвищувати податкову ставку для покриття дефіциту бюджету.

Інтуїтивно здавалося б, що основний податковий тягар ляже на тих, із кого стягуватиметься податок, і що чим вища податкова ставка, тим більшими будуть надходження від податків у бюджет. Детальніший економічний аналіз показує, що розмір податкового тягаря визначається не формальними платниками податку, а еластичністю попиту й пропозиції. Аналогічно підвищення податкової ставки, еквівалентне збільшенню ціни оподатковуваного товару, може спричинити як збільшення податкових надходжень у бюджет, так і їх зменшення, знову ж таки залежно від еластичності.

Аби розібратися в цих питаннях, розглянемо детальніше ***модель стягування податку***.

Нехай p — ціна одиниці товару на деякому ринку, $s(p)$ — пропозиція, $q(p)$ — попит на нього. Рівноважна ціна p_0 визначається з рівняння $s(p_0) = q(p_0)$.

Припустимо, що вводиться додатковий податок із виробників у розмірі t з кожної одиниці товару. Оскільки залежність пропозиції від ціни визначається прибутком, а за ціни p і податку t прибуток такий самий, як і за ціни $p - t$ і відсутності додаткового податку, то

$$s_t(p) = s(p - t),$$

де $s_t(p)$ — функція пропозиції після введення податку. Таким чином, крива пропозиції після введення податку посувається вгору на t одиниць (рис. 7.5).

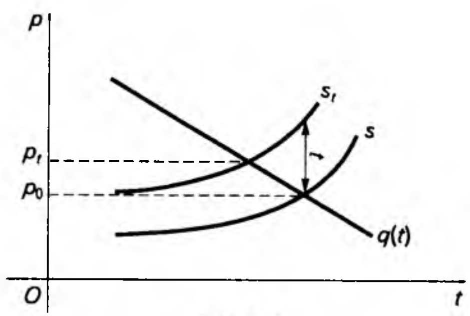


Рис. 7.5

Нехай p_1 — нова рівноважна ціна. Рівність попиту й пропозиції за ціни p_t виражається рівнянням $s_t(p_t) = q(p_t)$, яке еквівалентне рівнянню

$$s(p_t - t) = q(p_t). \tag{7.13}$$

Замінюючи прирости функцій $q(p)$ і $s(p)$ у точці p_0 їхніми диференціалами, дістанемо наближені рівності

$$s(p_0 + \Delta p) \approx s(p_0) + s'(p_0)\Delta p, \tag{7.14}$$

$$q(p_0 + \Delta p) \approx q(p_0) + q'(p_0)\Delta p, \tag{7.15}$$

в яких $\Delta p = p_t - p_0$ — зміна рівноважної ціни. Враховуючи формули (7.14) і (7.15), рівність (7.13) можна записати у вигляді

$$s(p_0) + s'(p_0)(\Delta p - t) = q(p_0) + q'(p_0)\Delta p.$$

Оскільки $s(p_0) = q(p_0)$, то остання рівність набирає вигляду

$$s'(p_0)(\Delta p - t) = q'(p_0)\Delta p,$$

звідки

$$\Delta p = \frac{ts'(p_0)}{s'(p_0) - q'(p_0)}. \tag{7.16}$$

Таким чином, після введення додаткового податку на купівлю одиниці товару витрати споживача збільшаться на величину Δp, яку можна наближено обчислити за формулою (7.16). Відповідно доход виробника (також на одиницю продукції) зменшиться на

$$t - \Delta p = \frac{-tq'(p_0)}{s'(p_0) - q'(p_0)}.$$

Отже, додатковий податок розподілиться між споживачами й виробниками продукції в такому відношенні:

$$\frac{\Delta p}{t - \Delta p} = \frac{s'(p_0)}{-q'(p_0)}.$$

Оскільки в точці p_0 попит дорівнює пропозиції, то

$$\frac{s'(p_0)}{-q'(p_0)} = \frac{s'(p_0)p_0}{s(p_0)} : \frac{-q'(p_0)p_0}{q(p_0)} = \frac{E_s(p)}{-E_q(p)},$$

де $E_s(p)$ і $E_q(p)$ — еластичності пропозиції і попиту в точці p_0.

Аналізуючи це співвідношення, бачимо, що майбутній податковий тягар лягає на економічного агента з меншою еластичністю, в якого менше можливостей уникнути його. Зокрема, якщо еластичність попиту дорівнює нулю, то весь податковий тягар лягає на плечі споживачів, оскільки, незалежно від розміру податку (а отже, й від ціни), вони не змінять обсягу купівлі. Якщо ж попит на який-небудь товар характеризується цілковитою еластичністю, то програють виробники, оскільки споживачі уникають податку, знижують попит і переходять до споживання інших товарів. У цьому разі весь податковий тягар лягає на плечі виробників.

■ **Приклад 7.7.** Нехай цінова еластичність попиту дорівнює (–3), а цінова еластичність пропозиції дорівнює 2, і податок, що вводиться, $t = 100$. Тоді ціна після введення всього податку збільшиться на $\frac{2}{2+3}100 = 40$ умов. грош. од., а прибуток виробників на одиницю продукції зменшиться на $100 - 40 = 60$ умов. грош. од.

7.2 Теорія однoресурсної фірми

Припустимо, що фірма виробляє один вид продукції в кількості y, для чого використовується тільки один ресурс x. Фірма цілком характеризується своєю виробничою функцією $y = f(x)$, що виражає залежність обсягу продукції, що випускається, від обсягу витраченого ресурсу x.

Далі вважатимемо, що виробнича функція двічі диференційовна й задовольняє дві умови.

Умова 1. В області D, $D \subset D(f)$ визначення функції $y = f(x)$, яку називатимемо *економічною областю D*, дана функція неспадна, тобто збільшення обсягу ресурсу не спричинює зменшення випуску продукції.

Математично це означає, що для двох довільних точок $x_1, x_2 \in D$ таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) \le f(x_2)$.

Отже, в області D похідна $f'(x)$ невід'ємна, тобто $f'(x) \ge 0$. Похідну $f'(x)$ називають *граничним продуктом*.

Умова 2. Існує підмножина E економічної області D, $E \subset D$, така, що для всіх $x \in E: f''(x) \le 0$.

Зупинимося на економічному змісті цих двох умов. Умова 1 стверджує, що виробнича функція — не якась абстрактна, вигадана математиком-теоретиком. Вона відображує економічно важливе й водночас тривіальне твердження: в розумній економіці збільшення витрат ресурсу не може спричинити зменшення випуску продукції.

Умову 2 в економіці називають ***законом спадної доходності:*** *зі збільшенням обсягу ресурсу з деякого моменту (при вході в область E) починає зменшуватися граничний продукт.*

Розглянемо дії фірми. Нехай p — ціна одиниці ресурсу, а w — ціна одиниці продукції, що випускається. Отже, прибуток фірми $P = P(x)$ є функцією від обсягу ресурсу x (і цін, але вони вважаються сталими). Тоді $P(x) = wf(x) - px$.

Розглянемо ***задачу фірми:*** *потрібно знайти максимальне значення прибутку — функції $P(x)$ за умови, що $x \ge 0$,* тобто

$$P(x) \to \max, \quad x \ge 0. \tag{7.17}$$

Обчислимо похідну функції $P(x)$ та прирівняємо її до нуля:

$$P'(x) = wf'(x) - p, \quad wf'(x) - p = 0,$$

звідки

$$f'(x^*) = \frac{p}{w}. \tag{7.18}$$

Очевидно, що обсяг ресурсу додатний, а отже, точка x^*, що задається формулою (7.18), є точкою екстремуму. Оскільки ми припустили, що $f''(x) \le 0$, то це точка максимуму.

Точку x^*, яка визначається зі співвідношення (7.18), називають *оптимальним розв'язком задачі фірми.*

Розглянемо економічний зміст співвідношення (7.18). Нагадаємо, що $f'(x)$ — граничний продукт, а $wf'(x)$ — це вартість граничного продукту, додатково виробленого з одиниці ресурсу. Але вартість одиниці ресурсу дорівнює p, тобто дістаємо рівновагу: можна залучити у виробництво додаткову одиницю ресурсу, витративши на її закупівлю p грош. од., але в результаті виграшу не буде, оскільки після переробки ресурсу й реалізації продукції одержимо стільки ж грошей, скільки витратили на придбання одиниці ресурсу. Отже, оптимальна точка, що задається співвідношенням (7.18), є точкою рівноваги: вже неможливо вижати з ресурсів більше, ніж витрачено на їх закупівлю.

Очевидно, нарощування випуску продукції фірмою відбувалося поступово: спочатку вартість граничного продукту була вищою за закупівельну ціну ресурсів, що потрібні для його виробництва. Нарощування обсягу виробництва триває доти, доки починає виконуватися співвідношення (7.18): рівність вартості граничного продукту та закупівельної ціни ресурсу, потрібного для його виробництва.

За певних умов, накладених на виробничу функцію, оптимальний розв'язок задачі фірми, що визначається співвідношенням (7.18), єдиний для всіх p і w.

■ **Приклад 7.8.** *Обсяг видобування щебеня у (т/год) залежить від кількості праці x (людино-год): $y = 6\sqrt{x}$. Ціна щебеня — 40 грн./т, заробітна плата робітника — 30 грн./год. Крім заробітної плати, інші витрати не враховуються. Знайдемо оптимальну кількість праці (кількість робітників).*

За кількості робітників x прибуток фірми

$$P(x) = wy - px = 40 \cdot 6\sqrt{x} - 30x = 240\sqrt{x} - 30x = 30(8\sqrt{x} - x).$$

Отже, $P(x) = 30(8\sqrt{x} - x)$.

Знайдемо похідну функції прибутку:

$$P'(x) = 30\left(8\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right) = 30\left(\frac{4}{\sqrt{x}} - 1\right)$$

та стаціонарні точки з умови: $P'(x) = 0$, тобто $\frac{4}{\sqrt{x}} - 1 = 0$, звідки $x^* = 16$.

Знайдемо другу похідну:

$$P''(x) = 30 \cdot 4\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{x^3}} = -60\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

та її значення в стаціонарній точці x^*:

$$P''(16) = -60\frac{1}{16\sqrt{16}} = -60\frac{1}{16 \cdot 4} = -\frac{15}{16} < 0.$$

Тому $x^* = 16$ — точка максимуму.

7.3 Прийняття оптимальних рішень в економічних дослідженнях

7.3.1. Оптимальні ціна, граничні витрати та обсяг виробництва фірми

Нехай монополіст, знаючи (наприклад, із маркетингових досліджень) функцію попиту на свою продукцію, вирішує, скільки її виробляти й за якою ціною продавати. Якщо монополіст установить достатньо високу ціну, то споживачі за певний період придбають у нього не дуже багато продукції. Якщо він вироблятиме більше, то йому доведеться знизити ціну, аби продати всю продукцію за певний період часу. При цьому прибуток збільшиться за рахунок зростання обсягу продажу (доход) і водночас зменшиться через зменшення ціни (витрати). Результат залежатиме від того, що буде більше: доход чи витрати. Як же монополіст може визначити оптимальний обсяг випуску продукції? Для цього він має знати залежність прибутку (якщо враховувати витрати випуску) від обсягу продукції.

Нехай задано функцію доходу $R = R(q)$ й функцію витрат $C = C(q)$ фірми. Тоді функція її прибутку від випуску продукції має вигляд

$$P(q) = R(q) - C(q) = p(q)q - C(q).$$

Визначимо, за якого обсягу продукції прибуток фірми буде максимальним.

З теорії відомо, що задача визначення максимуму функції розв'язується за допомогою апарату диференціального числення.

7.3.2. Задача вибору фірмою оптимального обсягу виробництва

Зазначену задачу розглянемо як приклад, з якого буде видно, наскільки важливе дослідження функцій для прийняття оптимальних рішень.

Аби одержати максимальний прибуток, фірма має випускати продукцію обсягом q_0, так щоб значення $P(q_0)$ було максимальним. Практично обсяг продукції $q \in [0; Q]$, де Q — це верхня межа обсягу продукції, який може випускати фірма. Математично задача зводиться до знаходження максимуму функції прибутку $P = P(q)$ на відрізку $[0;\ Q]$. Оскільки теоретично функція прибутку $P = P(q)$ може досягати максимального значення й на кінцях проміжку при $q = 0$ і $q = Q$, то обидві ці ситуації, коли фірма не випускає нічого ($q = 0$) або випускає продукцію на межі своїх виробничих можливостей ($q = Q$), є крайніми. Зараз ми не розглядатимемо їх і припустимо, що функція прибутку досягає максимуму в точці $q_0 \in (0;\ Q)$. Отже, нехай виконуються такі умови:

1) функції $R = R(q)$ і $C = C(q)$ визначені й диференційовні на відрізку $[0;\ Q]$;
2) функція прибутку досягає максимуму в деякій точці q_0 ($q_0 \neq 0$ і $q_0 \neq Q$).

У випадку, коли максимум прибутку $P(q_0) > 0$, умова $q_0 \neq 0$ природно виконується, оскільки $P \le 0$ (немає випуску — немає доходу, немає доходу — немає прибутку).

Якщо виконуються обидві умови, то функція $P = P(q)$ диференційовна й на відрізку $[0;\ Q]$ має максимум у точці $q_0 \neq 0$. Тоді за теоремою Ферма $P'(q_0) = 0$. Оскільки $P'(q) = R'(q) - C'(q)$, то в точці $q = q_0$ дістаємо рівність

$$\boxed{R'(q_0) = C'(q_0).} \tag{7.19}$$

Пригадавши, що похідна функції витрат C' виражає граничні витрати, а похідна R' — граничний доход, то, використовуючи цю термінологію, дістанемо ***базовий економічний принцип***: *оптимальний продуктивний рівень фірма досягає, коли граничний річний доход дорівнює граничним витратам.*

В економічній теорії рівність (7.19) визначає ***правило***, за яким *фірма, яка максимізує свій прибуток, установлює обсяг виробництва таким чином, що граничний доход дорівнює граничним витратам.*

У випадку, коли обсяг виробництва q не впливає на ціну продукції p, маємо $R(q) = pq$, $R'(q) = p$. Рівність (7.19) набирає вигляду

$$\boxed{p = C'(q_0).} \tag{7.20}$$

■ **Приклад 7.9.** *Знайдемо оптимальний обсяг продукції фірми, якщо відомі ціна одиниці продукції $p = 15$ грош. од. і функція витрат $C(q) = q^3 + 3q$.*

Запишемо функцію прибутку фірми в разі виробництва q одиниць продукції:

$$P(q) = 15q - q^3 - 3q = q(12 - q^2).$$

Очевидно, $P(q) \ge 0$, якщо $q \in [0;\ \sqrt{12}]$. Оскільки $P = P(q)$ — неперервна функція, то на відрізку $[0;\ \sqrt{12}]$, у деякій точці q_0, вона набуває свого найбільшого значення. Оскільки $P(q) \le 0$ при $q > \sqrt{12}$, то $P(q_0)$ — найбільше значення при будь-якому $q \ge 0$. Використовуючи рівність (7.20), дістанемо

$$15 = C'(q_0) = 3(q_0)^2 + 3.$$

Звідси $q_0 = 2$.

Оскільки фірма намагається одержати максимальний прибуток, то вона випускатиме дві одиниці продукції. Фактично ми з'ясували, що за ціни $p = 15$ грош. од. фірмі вигідно випускати для продажу дві одиниці продукції.

Оскільки річний доход і прибуток фірми залежать від її місця на ринку, то слід розглянути випадок монополії, коли фірма постачає повний обсяг продукції під реалізацію. В цій ситуації ціна визначається функцією попиту. Інакше кажучи, ціна товару, за якою споживачі купують його, залежить від попиту $p = p(q)$, де q — стала. Якщо відома функція ціни $p = p(q)$, то функція прибутку $P = qp(q) - C(q)$, й необхідною умовою її максимуму є $P'(q) = 0$, яку можна записати у вигляді

$$qp'(q) + p(q) - C'(q) = 0. \tag{7.21}$$

У кожному окремому випадкові рівність (7.21) можна використовувати для знаходження максимуму функції прибутку, але слід зауважити, що не всі критичні точки функції прибутку $P = P(q)$, де $q \in [0;\ q]$, є максимальними, оскільки умова (7.21) є необхідною, але не достатньою.

Розглянемо тепер загальніший випадок, коли ціна продукції p є диференційовною функцією $p = p(q)$ від обсягу випуску продукції q. Обчислимо похідну функції доходу фірми $R(q) = p(q)q$:

$$R'(q) = qp'(q) + p(q) - C'(q) = p(q)(E_q(p) + 1).$$

Тоді рівність (7.19) запишемо у вигляді $p(q_0)(E_q(p) + 1) = C'(q_0)$, звідки дістанемо рівняння для ціни

$$p(q_0) = \frac{C'(q_0)}{E_q(p) + 1}. \tag{7.22}$$

Оскільки $E_q(p) < 0$, то з рівності (7.22) випливає, що ціна $p(q_0)$ не нижча від граничних витрат $C'(q_0)$. Насправді, якщо фірма займає суттєву частку ринку, то збільшення її випуску спричиняє насичення ринку й падіння ціни. В цьому разі $E_q(p) < 0$ і з рівності (7.22) випливає, що ціна $p(q_0)$ більша за граничні витрати $C'(q_0)$.

■ **Приклад 7.10.** *Розглянемо задачу вибору оптимального обсягу виробництва фірмою, функцію прибутку якої можна змоделювати залежністю* $P(q) = R(q) - C(q) = q^2 - 8q + 10$.

Знайдемо похідну: $P'(q) = 2q - 8$.

Перевіримо необхідні умови локального екстремуму. Прирівнюємо похідну до нуля: $P'(q) = 0$, $2q - 8 = 0$. Тоді дістаємо $q_0 = 4$.

Щоб визначити, чи є обсяг випуску $q = 4$ оптимальним для фірми, треба проаналізувати характер зміни знака похідної при переході через точку q_0 (тобто перевірити достатні умови локального екстремуму): при $q < q_0$ маємо $P'(q) < 0$, і функція прибутку спадає; при $q > q_0$ маємо $P'(q) > 0$, і функція прибутку зростає.

Отже, в точці $q_0 = 4$ функція прибутку набуває мінімального значення, і обсяг випуску не є оптимальним.

Яким же має бути оптимальний обсяг випуску фірми? Відповісти на це запитання дає змогу додаткове дослідження виробничих потужностей фірми. Якщо фірма не може виробляти за розглядуваний період більш як 8 одиниць продукції, то оптимальне рішення для неї — взагалі нічого не виробляти, а здавати в оренду приміщення або обладнання й одержувати доход. Якщо фірма може виробляти більш як 8 одиниць продукції, то оптимальним рішенням для неї буде випуск на межі своїх виробничих можливостей.

■ **Приклад 7.11.** *Фірма реалізує свою продукцію за ціною p за одиницю, а витрати виробництва при цьому задаються кубічною залежністю* $C(x) = ax + \lambda x^3$ $(a < p,\ \lambda > 0)$. *Знайдемо оптимальний для фірми обсяг виробництва продукції й максимальний прибуток.*

Позначимо обсяг продукції через x. Запишемо функцію прибутку $P(x) = R(x) - C(x)$, де $R(x)$ — доход від реалізації продукції.

У нашому випадкові $P(x) = px - (ax + \lambda x^3)$.

Знаходимо похідну функції прибутку: $P'(x) = (p - a) - 3\lambda x^2$.

Знаходимо критичні точки першого роду. Для цього прирівняємо похідну до нуля: $P'(x) = 0$. Тоді $(p - a) - 3\lambda x^2 = 0$, звідки $3\lambda x^2 = p - a$.

Отже, $x^2 = \dfrac{p-a}{3\lambda}$ і $x_1 = \sqrt{\dfrac{p-a}{3\lambda}}$, причому $x_2 = -\sqrt{\dfrac{p-a}{3\lambda}} < 0$ — сторонній розв'язок.

Знаходимо $P''(x) = -6\lambda x$ і визначаємо знак другої похідної при $x_1 = \sqrt{\dfrac{p-a}{3\lambda}}$.

Дістанемо $P''\left(\sqrt{\dfrac{p-a}{3\lambda}}\right) = -6\lambda\sqrt{\dfrac{p-a}{3\lambda}} < 0$ при всіх x.

Отже, при $x = \sqrt{\dfrac{p-a}{3\lambda}}$ прибуток буде максимальним. Знаходимо його:

$$P_{\max} = P\left(\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}\right) = \frac{2(p-a)\sqrt{p-a}}{3\sqrt{3\lambda}}.$$

7.3.3. Закон спадної ефективності виробництва

Цей закон стверджує, що в разі збільшення одного з основних факторів виробництва, наприклад капітальних витрат k, приріст виробництва, починаючи з деякого значення k, є спадною функцією.

Інакше кажучи, обсяг випуску продукції u як функція від k описується графіком зі зміною характеру опуклості вниз на опуклість угору.

Характерний вигляд цієї функції:

$$u(k) = \frac{u_{\lim}}{1 + ae^{-bk+c}},$$

де a, b, c — відомі додатні числа (визначаються структурою організації виробництва); $u_{\lim}$ — гранично можливий обсяг випуску продукції.

Обчислимо похідні функції:

$$u'(k) = u_{\lim}[(1 + ae^{-bk+c})^{-1}]' =$$

$$= u_{\lim}(-1)(1 + ae^{-bk+c})^{-2}ae^{-bk+c}(-b) =$$

$$= u_{\lim}abe^{-bk+c}(1 + ae^{-bk+c})^{-2},$$

$$u''(k) = u_{\lim}ab\left[e^{-bk+c}(-b)(1+ae^{-bk+c})^{-2} +\right.$$

$$\left.+\ e^{-bk+c}(-2)(1+ae^{-bk+c})^{-3}ae^{-bk+c}(-b)\right] =$$

$$= u_{\lim}ab^2e^{-bk+c}\left[\frac{-1}{(1+ae^{-bk+c})^2} + \frac{2ae^{-bk+c}}{(1+ae^{-bk+c})^3}\right] =$$

$$= u_{\lim}ab^2e^{-bk+c}\,\frac{2ae^{-bk+c} - 1 - ae^{-bk+c}}{(1+ae^{-bk+c})^3} =$$

$$= \frac{u_{\lim}ab^2e^{-bk+c}(ae^{-bk+c}-1)}{(1+ae^{-bk+c})^3}.$$

Критична точка другого роду знаходиться з умови $u''(k) = 0$, звідки маємо

$$ae^{-bk+c} - 1 = 0, \quad e^{-bk+c} = 1/a, \quad -bk + c = -\ln a, \quad bk = \ln a + c,$$

$$k_{кр} = \frac{\ln a + c}{b}.$$

Графік функції змінює характер опуклості в точці перегину $k_{кр}$. До цієї точки ($k < k_{кр}$) збільшення капітальних витрат приводить до інтенсивного росту обсягу випуску продукції, а після цієї точки ($k > k_{кр}$) приріст обсягу продукції знижується, $u''(k) < 0$, тобто ефективність капіталовкладень витрат зменшується (рис. 7.6).

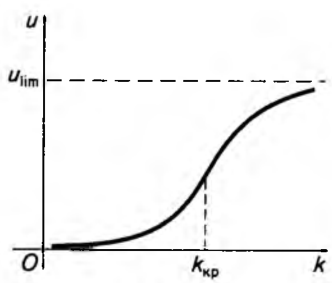


Рис. 7.6

Таким чином, у стратегії капіталовкладень дуже важливим моментом є визначення критичного обсягу витрат, за перевищення якого

додаткові витрати призводитимуть до дедалі меншої віддачі за даної структури виробництва. Знаючи цей прогноз, можна вдосконалювати й змінювати структуру організації виробництва, «поліпшуючи» показники a, b, c, $u_{\lim}$ у бік підвищення ефективності капіталовкладень.

7.4 Оптимізація оподаткування підприємств

Розглянемо економічну ситуацію щодо дій уряду держави з оподаткування підприємств і фірм і визначимо, як пов'язані прибуток фірми та обсяг податків, що надходять державі за даної податкової ставки. Нехай ціна на продукцію $p(q) = a - bq$, $a > 0$ і $b > 0$, тобто лінійно зменшується зі збільшенням обсягу готової продукції на ринку, а витрати $C = C(q)$ залежать від обсягу продукції q таким чином: $C(q) = cq^2 + dq + e$, де a, b, c, d, e — деякі додатні числа. Нехай податок є акцизом зі ставкою t, тобто з кожної проданої одиниці товару держава одержує податок t, і податкова сума становить $T = tq$. Тоді фірма має прибуток

$$P(q) = pq - C(q) - T = q(a - bq) - cq^2 - dq - e - tq.$$

Для того щоб максимізувати прибуток, фірма шукає оптимальний обсяг виробництва. Обчислимо похідну функції прибутку:

$$P'(q) = a - 2bq - 2cq - d - t = a - d - t - 2q(b + c).$$

Перевіримо необхідні умови екстремуму. Для цього прирівняємо до нуля похідну функції прибутку: $P'(q) = 0$, $2q(b + c) = a - d - t$. Дістанемо критичну точку:

$$q^* = \frac{a - d - t}{2(b + c)}.$$

Оскільки $P''(q) = -2(b + c) < 0$, то згідно з достатніми умовами локального екстремуму q^* — справді точка максимуму.

Оскільки $t > 0$, то така податкова ставка призводить до зниження оптимального випуску продукції.

Для прогнозування дій уряду зі встановлення податкової ставки t обчислимо податковий доход держави:

$$T = tq = \frac{t(a-d-t)}{2(b+c)} = \frac{-t^2}{2(b+c)} + \frac{(a-d)t}{2(b+c)} =$$

$$= \frac{1}{2(b+c)}\left[-t^2 + (a-d)t\right],$$

тобто в даній країні крива доходів держави є параболою, вітки якої напрямлені вниз (рис. 7.7).

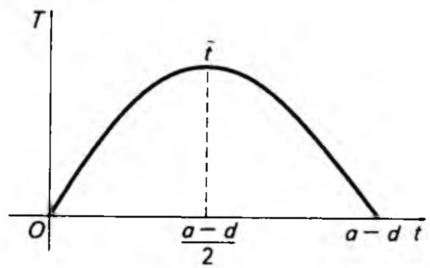


Рис. 7.7

Знайшовши похідну $T' = \frac{1}{2(b+c)}\left[-2t + (a-d)\right]$, визначимо критичні точки з умови $T' = 0$, тобто $2t = a - d$, $t = \frac{a-d}{2}$.

Оскільки друга похідна $T'' = \frac{-1}{(b+c)} < 0$, то максимум досягається при $t^* = \frac{a-d}{2}$ і становить

$$T^* = t^*q^* = \frac{1}{2(b+c)}\left[-\frac{(a-d)^2}{4} + \frac{(a-d)^2}{2}\right] = \frac{(a-d)^2}{8(b+c)}.$$

Оптимальний випуск продукції при цьому значенні t^* становить $q_1 = \frac{a-d}{4(b+c)}$, і відповідний прибуток фірми $P(q_1) = \frac{(a-d)^2}{16(b+c)} - e$.

Взагалі прибуток фірми за податкової ставки t

$$P(q^*) = \frac{(a-d-t)^2}{4(b+c)} - e,$$

звідки випливає, що зі збільшенням податкової ставки t прибуток фірми зменшується, якщо $0 \le t \le a - d$, і існує область значень податкової ставки при $t \ge \bar{t} = a - d - \sqrt{4e(b+c)}$, в якій прибуток фірми від'ємний, хоча доходи держави додатні. Це відбувається тому, що за критерій вибору обсягу випуску було взято максимум прибутку фірми, але не було обумовлено, що цей максимум має бути додатним.

Якщо вважати, що при $t \ge \bar{t}$ випуск продукції справді стане нульовим, то доход держави при $t \ge \bar{t}$ також дорівнюватиме нулю. Тому зрозуміло, що вже біля $\bar{t}$ відбувається різке скорочення ділової активності.

■ **Приклад 7.12.** *Нехай t — податкова ставка. Відомі функція доходу $R(q) = 16q - q^2$ і функція витрат $C(q) = q^2 + 1$ фірми. Визначимо, яким має бути податок t, щоб сумарний податок T з усієї продукції був найбільшим.*

Запишемо функцію прибутку фірми $P(q) = R(q) - C(q) - T$. У нашому випадкові

$$P(q) = 16q - q^2 - q^2 - 1 - tq = 16q - 2q^2 - tq - 1.$$

З'ясуємо, при якому значенні функція прибутку набуває максимального значення. Оскільки необхідна умова максимуму прибутку $P'(q) = 0$, то $P'(q) = 16 - 4q - t$. Розв'яжемо рівняння $16 - 4q - t = 0$, або $4q = 16 - t$. Отже, $q^* = 4 - t/4$. Оскільки $P''(q) = -4 < 0$, то q^* — точка максимуму. Отже, оптимальний обсяг $q^* = q_{\text{опт}}$.

Підставимо добуте значення обсягу продукції у вираз сумарного доходу:

$$T = q^*t = t\left(4 - \frac{4}{t}\right) = 4t - \frac{1}{4}t^2$$

і, своєю чергою, знайдемо умови, за яких T буде максимальним.

Обчислимо похідну: $T' = 4 - \frac{1}{2}t$. Знаходимо стаціонарні точки: $T' = 0$. Дістанемо $4 - \frac{1}{2}t = 0$, $t = 8$. Тоді $q^* = 4 - 8/4 = 4 - 2 = 2$.

Обчислимо максимальний прибуток фірми:

$$P_{max} = P(q_{опт}) = 16 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 1 = 32 - 8 - 16 - 1 = 7.$$

Оптимальний з погляду податкового законодавства акцизний податок $T_{опт} = 2 \cdot 8 = 16$.

Цікаво порівняти ці цифри з цифрами в разі відсутності оподаткування. При $t = 0$ розв'язок задачі на знаходження максимуму функції прибутку дав би такі результати: $q_{опт} = 4$, $P_{max} = 31$.

Отже, зменшення оподаткування стимулює збільшення випуску продукції й сприяє збільшенню прибутку від її реалізації. Зрозуміло, чому виробники докладають стільки зусиль, щоб знизити податкову ставку.

?

Контрольні запитання

1. У чому полягає економічний зміст похідної?
2. Що називають еластичністю функції?
3. Що виражає коефіцієнт еластичності?
4. У чому полягає геометричний зміст еластичності?
5. Яку функцію називають: еластичною, нееластичною, цілком еластичною, цілком нееластичною?
6. Які властивості еластичності?
7. Який існує зв'язок еластичності з доходом?
8. Як за допомогою коефіцієнта еластичності попиту на товар за доходом визначити, що очікує на галузь, яка його випускає: процвітання або застій?
9. У чому полягає суть моделі стягування податку?
10. У чому полягає суть моделі однoресурсної фірми?
11. Яка основна задача однoресурсної фірми?
12. Що таке економічна область?
13. Що називають граничним продуктом?
14. Як формулюється закон спадної доходності?
15. Як визначається оптимальний розв'язок задачі фірми?

16. Яка задача вибору оптимального обсягу виробництва фірмою?
17. У чому полягає закон спадної ефективності виробництва?
18. Що можна сказати про залежність доходу підприємства від обсягу виробництва, якщо відомо, що за довільного обсягу виробництва, більшого за деяке значення q_0, граничний доход менший, ніж граничні витрати?
19. Яке співвідношення між середніми й граничними витратами, якщо вони зростають? Чи достатньо цієї інформації для відповіді?
20. Як визначають граничний прибуток, якщо відомі доход і витрати фірми?
21. За якої умови фірма досягає оптимального продуктивного рівня?
22. Як використовуються граничні величини для визначення оптимального обсягу виробництва фірми?
23. Як обчислюється прибуток фірми та обсяг податків, що надходять державі за даної податкової ставки?

Приклади розв'язування задач

1 *Для функції витрат підприємства $C(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}3x^2 + 40x + 1000$ (у гривнях) знайти граничну вартість випуску $x_1 = 50$, $x_2 = 100$, $x_3 = 150$ одиниць продукції.*

За означенням обчислимо граничну вартість: $C'(x) = 3 \cdot 0{,}001x^2 - 0{,}6x + 40$. При $x_1 = 50$

$$C'(50) = 0{,}003 \cdot 50^2 - 0{,}6 \cdot 50 + 40 = 7{,}5 - 30 + 40 = 17{,}5;$$

при $x_2 = 100$

$$C'(100) = 0{,}003 \cdot 100^2 - 0{,}6 \cdot 100 + 40 = 30 - 60 + 40 = 10;$$

при $x_3 = 150$

$$C'(150) = 0{,}003 \cdot 150^2 - 0{,}6 \cdot 150 + 40 = 67{,}5 - 90 + 40 = 17{,}5.$$

Отже, вартість виготовлення 51-ї та 151-ї одиниць продукції становитиме 17 грн. 50 коп., а — 101-ї одиниці — лише 10 грн.

2 *Для функції витрат $C(x) = 1000 + 10x + 0{,}1x^2$ виробництва x одиниць продукції (у гривнях) знайти граничну та середню вартості виробництва одиниці продукції.*

Гранична вартість виробництва становитиме

$$C'(x) = 10 + 0{,}2x.$$

Середня вартість виробництва одиниці продукції

$$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{1000}{x} + 10 + 0{,}1x.$$

Ці величини зовсім різні.

3 *Визначити граничний дохід від виробництва 300 одиниць продукції, якщо обсяг продукції обчислюється за формулою $x = 1000 - 100p$, де p — ціна одиниці продукції.*

Спочатку визначимо ціну p одиниці продукції як функцію обсягу x. Для цього з рівності $x = 1000 - 100p$ виразимо p: $p = 10 - 0{,}01x$. Тоді функція доходу має вигляд

$$R'(x) = xp = x(10 - 0{,}01x) = 10x - 0{,}01x^2.$$

Знайдемо граничний дохід:

$$R'(x) = 10 - 0{,}02x.$$

При $x = 300$ дістанемо

$$R'(300) = 10 - 0{,}02 \cdot 300 = 10 - 6 = 4.$$

4 *Фірма виготовляє x одиниць продукції, ціна кожної з яких — p, причому $p = -0{,}1x + 80$, а функція витрат $C(x) = 5000 + 20x$ (у гривнях). Знайти граничний прибуток, якщо виготовлено й продано 150 і 400 одиниць продукції, та максимальний прибуток фірми.*

Функція доходу має вигляд $R(x) = xp = x(80 - 0{,}1x) = 80x - 0{,}1x^2$.

Запишемо функцію прибутку фірми від виготовлення й продажу x одиниць продукції:

$$P'(x) = R(x) - C(x) = 80x - 0{,}1x^2 - (5000 + 20x) = 60x - 0{,}1x^2 - 5000.$$

Знайдемо граничний прибуток для довільного x:

$$P'(x) = (60x - 0{,}1x^2 - 5000)' = 60 - 0{,}2x.$$

Тоді

$$P'(150) = 60 - 0{,}2 \cdot 150 = 30, \quad P'(400) = 60 - 0{,}2 \cdot 400 = -20.$$

Фірма матиме збитки розміром 20 грн. за кожну одиницю продукції, що буде виготовлена й продана в разі зростання обсягу виробництва.

Знайдемо максимальний прибуток фірми. Оскільки $P'(x) = 60 - 0{,}2x = 0$ при $x = 300$ і $P''(x) = -0{,}2 < 0$, то в разі випуску $x = 300$ одиниць продукції фірма може одержати максимальний прибуток $P_{max} = 12\,100$ умов. грош. од.

5 *Мале підприємство може виготовляти й продавати кожну одиницю продукції з прибутком 10 грн. Якщо підприємство витрачатиме x (грн.) на рекламу, то кількість проданих товарів становитиме $q = 1000(1 - e^{-0{,}001x})$. Знайти швидкість зміни прибутку відносно зміни витрат на рекламу при $x = 1000$ грн. і $x = 3000$ грн.*

Кожна одиниця продукції дає 10 грн. прибутку. Тоді прибуток від реалізації даної кількості одиниць продукції $P(x) = 1000(1 - e^{-0{,}001x}) - x$ з урахуванням витрат на рекламу. Швидкість зміни прибутку відносно зміни витрат на рекламу знайдемо диференціюванням:

$$P' = -10\,000(-0{,}001)e^{-0{,}001x} - 1 = 10e^{-0{,}001x} - 1,$$

$$P'(1000) = 10e^{-1} - 1 = 10 \cdot 0{,}3679 - 1 = 2{,}679,$$

$$P'(3000) = 10e^{-1} - 1 = 10 \cdot 0{,}0498 - 1 = -0{,}502.$$

Отже, за витрат на рекламу 3000 грн. прибутки зменшуються, оскільки похідна від'ємна й функція прибутку спадає.

6 *Нехай валовий продукт деякої держави змінюється з часом t за формулою ВВП $= 100 + t$, а кількість населення — за законом К $= 120 + 2t$. Знайти швидкість зміни частини валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина.*

Частину валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина, позначимо через $y(t)$.

За умовою задачі

$$y(t) = \frac{\text{ВВП}}{\text{К}} = \frac{100 + t}{120 + 2t}.$$

Тоді швидкість зміни частини валового продукту є похідною

$$y'(t) = \frac{(100+t)'(120+2t)-(100+t)(120+2t)'}{(120+2t)^2} =$$

$$= \frac{120+2t-200-2t}{4(60+t)^2} = \frac{-80}{4(60+t)^2} = \frac{-20}{(60+t)^2}.$$

Оскільки похідна від'ємна, то частина валового продукту, що припадає на одного громадянина, з часом зменшується.

7 *Обсяг продукції q, випущеної бригадою робітників, описується функцією $q = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$ (од.), $t \in [0; 8]$, де t — робочий час. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни через 1 год. після початку роботи й за годину до її завершення.*

Продуктивність праці виражається похідною від обсягу виробництва:

$$z(t) = q'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100.$$

Швидкість і темп зміни продуктивності праці виражаються похідною $z'(t)$ та «логарифмічною» похідною $T_z(t) = [\ln z(t)]' = \frac{z'(t)}{z(t)}$ відповідно.

У розглядуваному випадкові

$$z'(t) = -5t + 15, \quad T_z(t) = \frac{-5t+15}{-\frac{5}{2}t^2 + 15 + 100} = \frac{2t-6}{t^2-6t-40}.$$

У моменти часу $t_1 = 1$ і $t_2 = 8 - 1 = 7$ відповідно маємо

$$z(1) = 112{,}5, \quad z'(1) = 10, \quad T_z(1) = 0{,}09;$$

$$z(7) = 82{,}5, \quad z'(7) = -20, \quad T_z(7) = -0{,}24.$$

Отже, наприкінці робочого дня продуктивність праці істотно знижується; при цьому зміна знака $z'(t)$ і $T_z(t)$ з «+» на «–» означає, що швидкість і темп зміни продуктивності праці в перші години робочого дня збільшується і знижується в останні години.

8 *Нехай r — річна ставка банківського процента. Визначити кількість років T, протягом яких початкова сума внеску збільшиться вдвоє.*

Оскільки за рік внесок збільшиться в $\left(1+\frac{r}{100}\right)$ разів, то за T років — у $\left(1+\frac{r}{100}\right)^T$ разів.

Фактично нам потрібно розв'язати рівняння $\left(1+\frac{r}{100}\right)^T = 2.$

Логарифмуючи це рівняння, дістанемо $T\ln(1 + r/100) = \ln 2$. Розв'язком цього рівняння буде

$$T = \frac{\ln 2}{\ln(1 + r/100)}.$$

Розглянемо функцію $y = \ln(1 + x)$. Оскільки $y' = \frac{1}{1+x}$, $y'(0) = 1$, $y(0) = \ln 1 = 0$, то при достатньо малих x маємо $\ln(1 + x) \approx x$. Використовуючи цю наближену рівність у нашій задачі, дістанемо, що $\ln\left(1+\frac{r}{100}\right) \approx \frac{r}{100}$. Таким чином,

$$T \approx \frac{\ln 2}{r/100} = \frac{100\ln 2}{r}.$$

Оскільки $\ln 2 \approx 0{,}7$, то час подвоєння внеску становить $T \approx 70/r$ («*правило 70*»).

Якщо, наприклад, процентна ставка — 10 % річних, то час подвоєння внеску становить приблизно 7 років.

9 *Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 0{,}36x^3 + 0{,}25x + 15$, де x — сукупний національний доход (грош. од.). Знайти граничну схильність до споживання й граничну схильність до збереження, якщо доход становить 27 млн грош. од.*

Гранична схильність до споживання

$$C'(x) = 0{,}48x^{1/3} + 0{,}25.$$

При $x = 27$

$$C'(27) = 0{,}48\sqrt[3]{27} + 0{,}25 = 1{,}69.$$

Гранична схильність до збереження

$$S' = 1 - C'(x) = 0{,}75 - 0{,}48x^{1/3}.$$

При $x = 27$

$$S'(27) = 1 - 1{,}69 = -0{,}69.$$

10 *Витрати палива автомобілем на 100 км шляху залежно від швидкості руху v (км/год) описується функцією $C = C(v) = 18 - 0{,}3v + 0{,}003v^2$. Оцінити відносну похибку обчислення витрат палива за швидкості $v = 90$ км/год, визначену з точністю до 5 %.*

Знайдемо еластичність функції:

$$|E_v(y)| = \left|\frac{vf'(v)}{f(v)}\right| = \left|\frac{v(-0{,}3 + 0{,}006v)}{18 - 0{,}3v + 0{,}003v^2}\right|.$$

При $v = 90$ дістанемо $|E_{90}(y)| = 1{,}41$. Тоді відносна похибка

$$\delta_y = 1{,}41 \cdot 5 \approx \approx 7{,}1\ \%.$$

Розділ 8

МЕТОДИ Й МОДЕЛІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

8.1 Поняття функції багатьох змінних

8.1.1. Означення функції двох змінних

Раніше досліджувалися функції однієї змінної, тобто за значенням незалежної змінної x визначалося певне значення залежної змінної y або функції. В науці та в економічних дослідженнях часто трапляються випадки, коли незалежних змінних виявляється кілька, й для обчислення значення функції необхідно попередньо встановити значення, яких одночасно набувають ці змінні. Наприклад, розподіл якогось товару по різних ринках із різним попитом, визначення прибутку фірми залежно від певних факторів виробництва, ціни на працю та капітальних витрат тощо.

Введемо поняття функції двох незалежних змінних. Задамо дві множини X та Y.

Означення 8.1. Нехай D — деяка множина впорядкованих пар дійсних чисел: $D = X \times Y$. Припустимо, що кожній парі $(x, y) \in D$ певним способом поставлено у відповідність число z із множини Z. *Тоді кажуть, що на множині D **задано функцію двох змінних** $z = f(x, y)$. Змінні x, y називають **незалежними змінними**, або **аргументами**, а z — **залежною змінною**. Множину D називають **областю визначення функції**. Всі значення, яких набуває функція $z = f(x, y)$ при $(x, y) \in D$, утворюють **область значень функції** z.*

У випадку функції однієї змінної її областю визначення, як правило, був проміжок (скінченний або нескінченний). У випадку функції двох змінних області визначення функцій різноманітні й складні. Тому розгляд цих областей набагато полегшується, якщо використовувати їхню геометричну інтерпретацію. Якщо на площині вибрати прямокутну систему координат, то множина пар точок із координатами $(x;\ y)$, для яких функція визначена, утворює певну фігуру на площині.

Розглянемо приклади.

■ **Приклад 8.1.** *Знайдемо область визначення функції* $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

Областю визначення такої функції є множина всіх точок, для яких вираз $\sqrt{4-x^2-y^2}$ визначений, тобто $4-x^2-y^2\ge 0$, $x^2+y^2\le 4$ (рис. 8.1). Множина точок площини, координати яких задовольняють цю нерівність, є кругом із центром $O(0;\ 0)$ радіусом 2, що включає в себе і його межу.

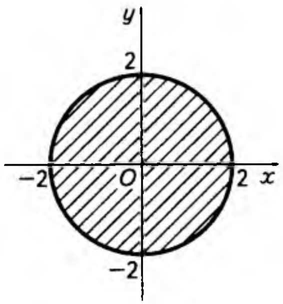


Рис. 8.1

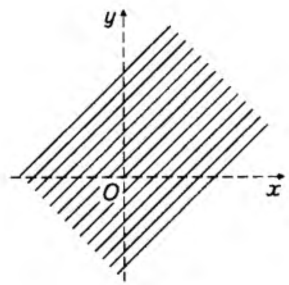


Рис. 8.2

■ **Приклад 8.2.** *Знайдемо область визначення функції* $z=\dfrac{1}{xy}$.

Очевидно, що дана функція визначена, якщо $x\ne 0$, $y\ne 0$. Тоді множина D — це площина Oxy, за винятком точок координатних прямих Ox і Oy (рис. 8.2).

8.1.2. Означення функції багатьох змінних. Способи задання функції

Введемо поняття функції n змінних ($n\ge 3$). Розглянемо n-вимірний простір $\boldsymbol{R}^n$ і область $D\subset \boldsymbol{R}^n$.

➡ **Означення 8.2.** Нехай маємо впорядкований набір n величин $(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in D$. Припустимо, що кожному наборові відповідає певне значення змінної z. *Тоді кажуть, що на множині D **задано

функцію багатьох змінних** $z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називають **незалежними змінними**,* або ***аргументами***, *z — **залежною змінною***, а *f позначає закон відповідності. Множину D називають **областю визначення функції**.*

■ **Приклад 8.3.** Підприємство випускає n видів продукції, яку реалізує за цінами $p_1, p_2, \ldots, p_n$. За обсягів реалізації продукції $x_1, x_2, \ldots, x_n$ виторг (доход) підприємства визначається функцією.

$$R=p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n.$$

■ **Приклад 8.4.** Квартирна плата залежить від метражу житлової або зальної площі, від тарифів на електроенергію, газ, холодну й гарячу воду, від пільг, які мають мешканці квартири. Але якщо для двох квартир у будинку всі ці показники однакові, то й плата за квартиру буде однаковою. Отже, розмір квартирної плати є функцією від цих показників.

■ **Приклад 8.5.** Податок, який повинна заплатити фірма, обчислюється за спеціальною методикою, але якщо у двох фірм показники однакові, то й податок має бути однаковим. Отже, податок є функцією від цих показників.

Як і функції однієї змінної, функції багатьох змінних можна задавати аналітично, за допомогою таблиць або графічно.

За ***аналітичного способу задання функції*** її значення визначається залежністю від аргументів функції. В прикладі 8.1 функцію задано саме так, а в прикладах 8.2 і 8.3 при бажанні також можна задати функцію залежністю від відповідних показників.

Табличний спосіб задання функції застосовується в економіці дуже часто. У вигляді таблиць подаються різноманітні звіти, баланси, економічні показники підприємств. Цей спосіб зазвичай необхідний у разі складних розрахунків на ЕОМ.

Графічний спосіб задання функції більш як двох змінних майже не застосовується через труднощі зображення графіка такої функції.

Введемо поняття графіка у випадку функції двох змінних.

➡ **Означення 8.3.** *Множину всіх точок $(x;\ y;\ z)$ простору, таких, що $(x,\ y)\subset D$, а $z=f(x,\ y)$, називають **графіком функції** $z=f(x,\ y)$* і позначають $\Gamma_f=\{(x, y, z)\mid (x, y)\in D,\ z=f(x, y)\}$.

Графіком функції двох змінних є поверхня, що задається рівнянням $z = f(x, y)$.

Наприклад, графіком функції $z = ax + bx + c$ є площина $z - ax + by + c = 0$, а графіком функції $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ — півсфера радіусом $R = 1$ із центром у початку координат.

У процесі побудови графіків функцій двох змінних здебільшого виникають значні труднощі. Тому є ще один спосіб наочного зображення функції багатьох змінних — використання лінії заданого рівня.

➡ **Означення 8.4.** ***Лінією рівня функції*** $z = f(x, y)$ ***називають множину точок площини, в яких функція набуває одного й того самого значення*** C, ***тобто визначається співвідношенням*** $z = f(x, y) = C$, ***де*** $C = \text{const}$.

Надаючи різних значень C і щоразу будуючи лінію із заданим рівнем C, дістанемо сім'ю ліній рівня, яка дає наочне уявлення про характер зміни функції $z = f(x, y)$.

У випадку $n \geq 3$ розглядають не лінії, а ***поверхню рівня функції*** $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, тобто це поверхні, на яких $f(x_1, x_2, ..., x_n) = C$.

Прикладами ліній рівня є паралелі й меридіани на глобусі — лінії рівня функції широти й довготи. Синоптики публікують карти із зображенням ізотерм та ізобар — ліній рівня температури. В економіці прикладом ліній рівня слугують *ізокванти* — лінії, вздовж яких виробнича функція дорівнює константі.

При різних значеннях C дістанемо різні лінії рівня даної функції. Вони утворюють топологічну карту графіка функції $z = f(x, y)$. Якщо вибирати числа $C_1, C_2, ..., C_n$ так, щоб вони утворювали арифметичну прогресію з різницею d, то матимемо низку ліній рівня, за взаємним розміщенням яких можна судити про графік функції.

■ **Приклад 8.6.** *Побудуємо лінії рівня функції* $z = x^2 + y^2 - 2y$.

Лінії рівня визначаються зі співвідношення $x^2 + y^2 - 2y = c$, або $x^2 + y^2 - 2y = c + 1$:

$$x^2 + (y - 1)^2 = c + 1.$$

Це рівняння кола з центром у точці $C(0; 1)$ радіусом $R = \sqrt{c + 1}$, $c \geq -1$. Точка $C(0; 1)$ — це вироджена лінія рівня, що відповідає мінімальному

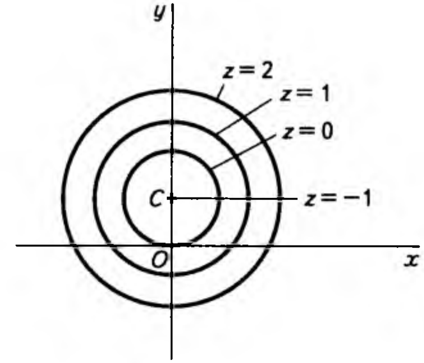


Рис. 8.3

значенню $z = -1$. Лініями рівня є концентричні кола, радіус яких збільшується зі збільшенням значення c (рис. 8.3).

8.1.3. Функції багатьох змінних, які використовуються в економічній теорії

Одновимірні аналоги цих функцій уже розглядалися в п. 5.3.4.

1. Функцію вигляду

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b = \sum_{k=1}^{n} a_kx_k + b,$$

де $a_1, a_2, ..., a_n, b$ — деякі числа, називають ***лінійною функцією,*** або ***гіперплощиною***, в евклідовому просторі R^{n+1}.

2. Функцію вигляду

$$z = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + ... + a_{nn}x_n^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де a_{ij} — деякі числа, називають ***квадратичною формою від змінних*** $x_1, x_2, ..., x_n$.

3. ***Функція корисності*** — одне з базових понять економічної теорії, яке можна узагальнити на випадок n змінних; багатовимірний її аналог – це функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, що виражає корисність від n придбаних товарів. Це суб'єктивна числова оцінка даним індивідом корисності u набору товарів $x_1, x_2, ..., x_n$. Часто трапляються такі види функції корисності:

- *логарифмічна*

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \ln(x_i - c_i), \quad a_i > 0, \quad x_i > c_i \geq 0;$$

- *сталої еластичності*

$$u = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1 - b_i}(x_i - c_i)^{1-b_i}, \quad a_i > 0, \quad 0 < b_i < 1, \quad x_i > c_i \geq 0.$$

Лінії рівня функції корисності називають *кривими байдужості*.

4. На випадок n змінних узагальнюється ***виробнича функція***, що виражає результат виробничої діяльності залежно від факторів, що його зумовлюють, $x_1, x_2, ..., x_n$. Лінії рівня виробничої функції називають *ізоквантами*.

При $n = 2$ часто трапляються такі види виробничої функції:

- *функція Кобба—Дугласа*

$$z = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2},$$

де $z = z(x_1, x_2)$ виражає вартість випуску продукції залежно від вартості основного капіталу x_1 та вартості трудових ресурсів x_2; $b_0 > 0$ — параметр продуктивності конкретної технології; $0 < b_1 < 1$ — частка капіталу в доході; $b_1 + b_2 = 1$;

- *функція зі сталою еластичністю заміщення*

$$z = e_0(e_1 x_1^{-\beta} + e_2 x_2^{-\beta})^{-h/\beta},$$

де z — суспільний продукт; x_1 — витрати праці; x_2 — обсяг виробничих фондів.

8.2
Границя й неперервність функції

8.2.1. Границя функції двох змінних

Надалі розглядатимемо функції двох змінних ($n = 2$), щоб уникнути громіздких позначень. Випадок двох змінних дає змогу використовувати наочне геометричне ілюстрування основних понять. При цьому всі означення й теореми легко узагальнюються на випадок $n > 2$.

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$. Нехай її область визначення $D \subset \mathbf{R}^2$, тобто D — підмножина координатної площини.

Відстань між точками $M(x; y)$ і $M_0(x_0; y_0)$ визначається рівністю

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Означення 8.5. δ-***Околом точки*** $M_0(x_0; y_0)$ *називають множину всіх точок площини, координати яких задовольняють нерівність*

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

Геометрично це множина точок площини, що лежать усередині круга з центром у точці M_0 і радіусом δ. Внутрішність круга є двовимірним аналогом відкритого проміжку $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ на числовій прямій, і $\rho(M, M_0) = |x - x_0| < \delta$.

У випадку функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ δ-околом точки M_0 є відкрита куля (без сфери) з центром у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і радіусом δ, і

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta.$$

У випадку функції n змінних δ-окіл точки M_0

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2} < \delta.$$

Більшість понять аналізу, введених для функції однієї змінної, можна перенести на випадок функції двох змінних.

➡ **Означення 8.6.** *Число A називають **границею функції** $z=f(x, y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, якщо для довільного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$ ($\delta = \delta(\varepsilon)$), що для всіх точок $M(x; y)$ із δ-околу точки $M_0(x_0; y_0)$ таких, що $0 < \rho(M, M_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$, виконується нерівність $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.*

Наведене означення можна перефразувати, використовуючи геометричні терміни. Так, число A називають ***границею функції*** $z=f(x, y)$, якщо точка $M(x; y)$ прямує до точки $M_0(x_0; y_0)$ ($M(x; y) \to M_0(x_0; y_0)$) і для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що $|f(x, y) - A| < \varepsilon$, як тільки відстань $0 < \rho(M, M_0) < \delta$.

Розглянемо точку $M_0(x_0; y_0) \in D(f)$ та послідовність точок $M_i(x_i; y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ і сформулюємо інше означення границі функції «мовою послідовностей».

➡ **Означення 8.7.** *Число A називають **границею функції** $z=f(M)$ **при** $M \to M_0$, якщо для довільної послідовності точок $\{M_n\}$, яка збігається до точки M_0, відповідна послідовність значень функції $\{f(M_n)\}$ збігається до числа A.* Використовують таке позначення границі функції: $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$.

✓ *Зауваження 8.1.* Між поняттями границі функції однієї змінної та багатьох змінних багато спільного, але є й принципова різниця. Так, для функції однієї змінної $z=f(x)$ те, що існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, означає, що існують однобічні границі й вони рівні між собою, й навпаки. Для функції двох змінних $z=f(x, y)$ наближення до точки $(x_0; y_0)$ можливе різними способами: і справа, й зліва, і зверху, й знизу, й під деяким кутом по прямій, і вздовж певної лінії (траєкторії). Отже, маємо істотне обмеження порівняно з рівністю двох однобічних границь у випадку функції однієї змінної.

■ **Приклад 8.7.** *Доведемо, що* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ *не існує.*

Наближатимемося до точки (0; 0) по прямій $y = kx$. Тоді

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x;\, y) \to (0;\, 0)} \frac{2xkx}{x^2+k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2},$$

тобто значення границі залежить від кутового коефіцієнта прямої, наприклад: при $k = 1$

$$\lim_{(x;\, y) \to (0;\, 0)} \frac{2xkx}{x^2+k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2} = 1;$$

при $k = 2$

$$\lim_{(x;\, y) \to (0;\, 0)} \frac{2xkx}{x^2+k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2} = \frac{4}{5}$$

і т. д.

Отже, наближаючися до точки (0; 0) в різних напрямах, дістанемо різні значення границі. Це означає, що дана функція не має границі.

Крім границі функції $z=f(x, y) = f(M)$ за одночасного прямування аргументів $x \to x_0$, $y \to y_0$ доводиться мати справу й з ***повторними границями***, тобто такими, які дістають у результаті граничних переходів за кожним аргументом окремо. Припустимо, що область визначення функції така, що змінна x (незалежно від змінної y) може набувати довільних значень на множині $\boldsymbol{X}$ і $x \to x_0$; аналогічно змінна y (незалежно від змінної x) змінюється на множині $\boldsymbol{Y}$ і $y \to y_0$. Якщо при довільному фіксованому y із $\boldsymbol{Y}$ для функції $f(x, y)$ (яка є функцією тільки від x) існує границя при $x \to x_0$, то ця границя, взагалі кажучи, залежатиме від наперед фіксованого y: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = \varphi(y)$.

Потім можна поставити питання про границю функції $\varphi(y)$ при $y \to y_0$. Дістанемо $\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y) = \lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$. Це й є одна з двох повторних границь. Іншу границю дістанемо, здійснивши граничні переходи в зворотному порядку: $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$.

Сформулюємо без доведення важливі теореми про границі функції двох змінних $z=f(x, y) = f(M)$.

ТЕОРЕМА 8.1

Якщо функція $z=f(M)$ має границю при $M \to M_0$, то ця границя єдина.

ТЕОРЕМА 8.2

Якщо функція $z=f(M)$ має границю при $M \to M_0$, то вона обмежена в деякому околі точки M_0.

ТЕОРЕМА 8.3

Якщо $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$ і $\lim\limits_{M \to M_0} g(M) = B$, то

1) $\lim\limits_{M \to M_0} (f(M) \pm g(M)) = A \pm B$;

2) $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)g(M) = AB$;

3) $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{f(M)}{g(M)} = \dfrac{A}{B}$, $B \neq 0$.

Для функції багатьох змінних $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ поняття границі та її властивості вводяться аналогічно. Границю функції в точці позначають так:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A, \text{ де } M(x_1, x_2, ..., x_n) \to M(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0).$$

Розглянемо приклади обчислення границь.

■ **Приклад 8.8.** *Обчислимо границю* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Для цього зробимо заміну й перейдемо до границі функції однієї змінної, а потім застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x^2 + y^2} = \rho, \\ x \to 0,\ y \to 0, \\ \rho \to 0 \end{array} \right| = \lim_{\rho \to 0} \frac{\ln(1 - \rho^2)}{\rho} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{(\ln(1 - \rho^2))'}{\rho'} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\frac{1}{1 - \rho^2}(-2\rho)}{1} = -2 \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho}{1 - \rho^2} = 0.$$

■ **Приклад 8.9.** *Обчислимо границю* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin 3xy}{xy}$.

Зробивши відповідну заміну, дістанемо

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin 3xy}{xy} = \left| \begin{array}{c} xy = t, \\ t \to 0 \end{array} \right| = \lim_{t \to 0} \frac{\sin 3t}{t} = 3.$$

■ **Приклад 8.10.** *Доведемо, що* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ *не існує.*

Виберемо дві послідовності $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right)$ та $(x_n', y_n') = \left(-\frac{1}{n}; \frac{2}{n}\right)$.

При $n \to \infty$ послідовності $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ і $x_n' \to 0$, $y_n' \to 0$, але

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{(1/n)^2 + (1/n)^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n', y_n') = \lim_{n \to \infty} \frac{-\frac{1}{n}\frac{2}{n}}{(-1/n)^2 + (2/n)^2} = -\frac{2}{5}.$$

Отже, функція не має границі.

■ **Приклад 8.11.** *Обчислимо границю* $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin xy}{y}$.

Визначимо границю як повторну:

$$\lim_{\substack{x \to 5 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 5} \frac{\sin xy}{y} \right) = \lim_{y \to 0} \frac{\sin 5y}{y} = 5.$$

8.2.2. Неперервність функції двох змінних

➡ **Означення 8.8.** *Функцію $z = f(x, y)$ називають **неперервною в точці** $M_0(x_0; y_0)$, якщо вона визначена в цій точці й має в ній границю, причому* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

При цьому важливо наголосити, що точка M може прямувати до точки M_0 довільним способом, але весь час має залишатися в області визначення функції.

Означення 8.9. *Функцію $z = f(x, y)$ називають* ***неперервною в області D****, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.*

Означення 8.10. *Точку $M_0(x_0; y_0)$ називають* ***точкою розриву функції*** *$z = f(x, y)$, якщо ця функція:*

1) *не визначена в точці $M_0(x_0; y_0)$;*

2) *визначена в точці $M_0(x_0; y_0)$, але:*

а) *не має границі в цій точці, тобто $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ не існує;*

б) *границя $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ існує, але $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \neq f(x_0, y_0)$.*

Приклад 8.12. *Розглянемо функцію двох змінних*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & (x, y) = (0; 0). \end{cases}$$

Ця функція має розрив у точці (0; 0), оскільки не має границі в цій точці.

8.2.3. Частинні й повний прирости функції двох змінних

Нехай задано функцію двох змінних $z = f(x, y)$, яка визначена в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0)$. Зафіксуємо змінну y так, щоб $y = y_0$, і розглянемо функцію однієї змінної $z = f(x, y)$ у точці x_0. Надамо змінній x приросту Δx. Тоді функція дістане приріст

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0), \tag{8.1}$$

який називають ***частинним приростом функції*** $z = f(x, y)$ ***за змінною x у точці*** $M_0(x_0; y_0)$.

Аналогічно, якщо зафіксувати змінну x так, щоб $x = x_0$, і розглянути функцію $z = f(x, y)$ у точці y_0, надавши приросту Δy, то функція дістане приріст

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0), \tag{8.2}$$

який називають ***частинним приростом функції*** $z = f(x, y)$ ***за змінною y***.

Якщо обом змінним надати приростів Δx, Δy, то функція дістане ***повний приріст функції*** $z = f(x, y)$ ***у точці*** $M_0(x_0; y_0)$

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \tag{8.3}$$

✓ *Зауваження 8.2.* Для функції багатьох змінних $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ відповідні ***частинні прирости*** в точці $M(x_1; x_2; ...; x_n)$ позначають так:

$$\Delta_{x_i} z = f(x_1, x_2, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n),$$

де точка $M_i(x_1; x_2; ...; x_i + \Delta x_i; ...; x_n)$, $i = 1, 2, ..., n$ належить області визначення функції $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Повний приріст позначають так:

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Взагалі кажучи, повний приріст не дорівнює сумі частинних приростів.

Сформулюємо інше означення неперервності функції в точці.

Означення 8.11. *Функцію двох змінних $z = f(x, y)$ називають* ***неперервною в точці*** *$M_0(x_0; y_0)$, якщо існує границя*

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0. \tag{8.4}$$

8.3 Диференційовність функції двох змінних

8.3.1. Частинні похідні першого порядку

Розглянемо функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Виберемо точку $M_0(x_0; y_0)$ з області визначення функції.

Означення 8.12. *Якщо існують границі*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = z'_x,$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = z'_y,$$

*то їх називають **частинними похідними за змінними x і y функції** $z = f(x, y)$.*

Для частинних похідних першого порядку використовують і такі позначення: $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$; $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$.

З означення випливає, що частинна похідна функції $z = f(x, y)$ за змінною x є звичайною похідною від функції змінної x при фіксованому значенні змінної y, а частинна похідна за змінною y — звичайною похідною за змінною y при фіксованому значенні змінної x. Інакше кажучи, для знаходження $f'_x(x, y)$ потрібно вважати сталою змінну y, а для знаходження $f'_y(x, y)$ — змінну x.

✓ *Зауваження 8.3.* Для функції багатьох змінних $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ поняття частинної похідної за змінною x_i, $i = 1, 2, ..., n$ вводиться аналогічно:

$$z'_{x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} z}{\Delta x_i}, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

■ **Приклад 8.13.** *Нехай $f(x, y) = 4x^2y + 5xy^3 - 3x + 2y - 6$. Обчислимо частинні похідні $f'_x(x, y)$ і $f'_y(x, y)$.*

Якщо змінну y вважати сталою, то

$$f'_x(x, y) = 8xy + 5y^3 - 3.$$

Аналогічно, якщо змінну x вважати сталою, то

$$f'_y(x, y) = 4x^2 + 15xy^2 + 2.$$

■ **Приклад 8.14.** *Дано функцію $f(x, y) = x^y$. Обчислимо похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$.*

Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

■ **Приклад 8.15.** *Нехай $z = x \ln y + \frac{y}{x}$. Обчислимо $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$.*

Дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \ln y + y\left(\frac{1}{x}\right)' = \ln y - \frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x(\ln y)' + \frac{1}{x}y' = \frac{x}{y} + \frac{1}{x}.$$

8.3.2. Необхідна умова диференційовності функції

➡ **Означення 8.13.** *Функцію $z = f(x, y)$ називають **диференційовною в точці** $M_0(x_0; y_0)$, якщо її повний приріст можна подати у вигляді*

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \tag{8.5}$$

де A, B — деякі числа; $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ і $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — нескінченно малі функції при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Відомо, що для функції однієї змінної необхідною й достатньою умовою диференційовності функції в точці є існування похідної в цій точці.

У випадку функції двох і більшого числа змінних з існування частинних похідних не випливає навіть неперервність функції.

■ **Приклад 8.16.** *Розглянемо функцію* $f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } xy = 0, \\ 1, & \text{якщо } xy \neq 0. \end{cases}$

Ця функція має частинні похідні в точці (0; 0), причому $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, і $f(x, 0) = f(0, y) = 0$. Але $f(0, 0) = 0$, і в кожному околі, який містить точку (0; 0), є точки $(x; y)$ такі, що $f(x, y) = 1$. Отже, функція $f(x, y)$ розривна в точці (0; 0).

ТЕОРЕМА 8.4

Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0; y_0)$, то в цій точці існують частинні похідні z'_x, z'_y, причому $z'_x(x_0, y_0) = A$, $z'_y(x_0, y_0) = B$, де A і B — коефіцієнти в рівності (8.5).

Доведення

Оскільки функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0; y_0)$, то справедлива рівність (8.5).

При фіксованому $y = 0$ запишемо частинний приріст функції за змінною x:

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)\Delta x.$$

Поділимо цю рівність на Δx і перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$. Дістанемо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [A + \alpha(\Delta x, 0)] = A.$$

За означенням

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = z'_x \quad \text{і} \quad z'_x = A.$$

Аналогічно можна показати, що $z'_y = B$.
Теорему доведено.

✓ *Зауваження 8.4.* Якщо частинні похідні функції двох змінних у даній точці не існують, то така функція не диференційовна в даній точці.

ТЕОРЕМА 8.5

Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0; y_0)$, то вона неперервна в цій точці.

Доведення

Якщо функція диференційовна в точці $M_0(x_0; y_0)$, то справедлива рівність (8.5), з якої випливає, що $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$, а згідно з 8.4 це означає, що функція $z = f(x, y)$ неперервна в точці $M_0(x_0; y_0)$.
Теорему доведено.

✓ *Зауваження 8.5.* Обернені твердження теорем 8.4 і 8.5 невірні, тобто з неперервності функції двох змінних або з існування її частинних похідних у точці не випливає диференційовність функції в цій точці.

8.3.3. Достатня умова диференційовності функції

ТЕОРЕМА 8.6

Якщо функція $z = f(x, y)$ має частинні похідні в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0)$ і ці похідні неперервні в даній точці, то функція диференційовна в цій точці.

Доведення

Надамо змінним x і y приростів Δx і Δy так, щоб точка $M(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ не вийшла за межі околу точки $M_0(x_0; y_0)$, про який ідеться в теоремі.

Тоді повний приріст функції можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + \\ &\quad + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Різниця в перших квадратних дужках рівності (8.6) — це різниця значень функції $f(x_0, y_0 + \Delta y)$ однієї змінної x на кінцях відрізка $[x_0, x_0 + \Delta x]$.

За умовою теореми ця функція має похідну на $[x_0, x_0 + \Delta x]$, а отже, неперервна на цьому відрізку. Тоді існує $c_1 \in (x_0, x_0 + \Delta x)$ таке, що справедлива формула скінченних приростів Лагранжа:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = f'_x(c_1, y_0 + \Delta y)\Delta x.$$

Аналогічно існує $c_2 \in (y_0, y_0 + \Delta y)$ таке, що різницю в других квадратних дужках рівності (8.6) можна подати у вигляді

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, c_2)\Delta y.$$

Отже,

$$\Delta z = f'_x(c_1, y_0 + \Delta y)\Delta x + f'_y(x_0, c_2)\Delta y.$$

Оскільки частинні похідні неперервні в точці $(x_0; y_0)$, то

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_x(c_1, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) \quad \text{і} \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_y(x_0, c_2) = f'_y(x_0, y_0).$$

Це означає, що

$$f'_x(c_1, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha(\Delta x, \Delta y),$$

$$f'_y(x_0, c_2) = f'_y(x_0, y_0) + \beta(\Delta x, \Delta y),$$

де $\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$, $\beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Підставивши ці значення в (8.6), дістанемо

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y. \tag{8.7}$$

Це означає, що функція диференційовна в точці $M_0(x_0; y_0)$.
Теорему доведено.

♦ **Наслідок.** *З існування й неперервності частинних похідних функції двох змінних у даній точці випливає неперервність самої функції в цій точці.*

Справді, якщо $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, то, очевидно, й $\Delta z \to 0$.

✓ *Зауваження 8.6.* Аналогічно можна ввести поняття диференційовності функції багатьох змінних.

➠ **Означення 8.14.** *Функцію $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називають* ***диференційовною в точці*** *$M(x_1; x_2; \dots; x_n)$, якщо її повний приріст можна подати у вигляді*

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta z &= f'_{x_1}(M)\Delta x_1 + f'_{x_2}(M)\Delta x_2 + \dots + f'_{x_n}(M)\Delta x_n + \\ &+ \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_n \Delta x_n,\end{aligned}}$$

де α_i — нескінченно малі функції при $\Delta x_i \to 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

8.3.4. Повний диференціал функції двох змінних

➠ **Означення 8.15.** ***Повним диференціалом функції*** *$z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ називають головну, лінійну відносно приростів Δx і Δy, частину повного приросту функції в рівності (8.7) у цій точці.*

Оскільки $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, то повний диференціал функції $z = f(x, y)$ можна обчислити за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{8.8}$$

■ **Приклад 8.17.** *Знайдемо диференціал функції $z = xy + x^2 - 2y$.*

Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x - 2.$$

Тоді за формулою (8.8) дістанемо

$$dz = (2x + y)dx + (x - 2)dy.$$

Диференціал функції двох змінних $z = f(x, y)$ інваріантний, тобто формула (8.8) зберігає свій вигляд незалежно від того, є x і y незалежними змінними чи функціями інших змінних. Цю властивість називають ***властивістю інваріантності форми першого диференціала.***

8.3.5. Застосування повного диференціала в наближених обчисленнях

Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0; y_0)$, то з рівностей (8.7) і (8.8) випливає, що

$$\Delta z - dz = \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y.$$

Тому при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ справедлива наближена рівність

$$\boxed{\begin{aligned}&f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx \\ &\approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy,\end{aligned}} \tag{8.9}$$

яку часто використовують у наближених обчисленнях.

■ **Приклад 8.18.** *Наближено обчислимо значення* $(1{,}04)^{2{,}02}$.

Розглянемо функцію $f(x, y) = x^y$, $x > 0$. Нехай $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Тоді

$$\Delta x = 1{,}04 - 1 = 0{,}04, \quad \Delta y = 2{,}02 - 2 = 0{,}02.$$

Обчислюємо:

$$f'_x = yx^{y-1}, \quad f'_y = x^y \ln x, \quad f(x_0, y_0) = 1^2 = 1,$$

$$f'_x(x_0, y_0) = 2 \cdot 1^{2-1} = 2, \quad f'_y(x_0, y_0) = 1^2 \cdot \ln 1 = 0.$$

Тоді

$$df(x_0, y_0) = 2 \cdot 0{,}04 + 0 \cdot 0{,}02 = 0{,}08.$$

Застосувавши формулу (8.9), наближено дістанемо

$$(1{,}04)^{2{,}02} \approx 1 + 0{,}08 = 1{,}08.$$

8.3.6. Диференціювання складних функцій

ТЕОРЕМА 8.7

Нехай в області D визначена складна функція двох змінних $z = f(u, v)$, де $u = u(x, y)$ і $v = v(x, y)$, і функції $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ у деякому околі точки $(x_0; y_0) \in D$ мають неперервні частинні похідні за змінними x і y, а функція $z=f(u, v)$ має неперервні частинні похідні за змінними u, v у деякому околі точки $(u_0; v_0)$, де $u=u(x_0, y_0)$, $v=v(x_0, y_0)$. Тоді складна функція $z=f(u(x, y), v(x, y))$ має частинні похідні в точці $(x_0; y_0)$, причому

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}. \end{cases} \tag{8.10}$$

Доведення

За умовою теореми функції $u=u(x, y)$ і $v=v(x, y)$ мають неперервні частинні похідні в деякому околі точки $(x_0; y_0)$. Тоді за теоремою 8.6 вони диференційовні в точці $(x_0; y_0)$, тобто їхні повні прирости запишемо у вигляді

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\beta_1\Delta y,$$

$$\Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\alpha_2\Delta x+\beta_2\Delta y,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — нескінченно малі при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

Надамо аргументові x приросту Δx і запишемо частинні прирости функцій за змінною x:

$$\Delta_x u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\alpha_1\Delta x, \quad \Delta_x v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\alpha_2\Delta x. \tag{8.11}$$

Прирости $\Delta_x u$ і $\Delta_x v$ приводять до приросту функції $z=f(u, v)$:

$$\Delta_x z=\frac{\partial f}{\partial u}\Delta_x u+\frac{\partial f}{\partial v}\Delta_x v+\alpha\Delta_x u+\beta\Delta_x v. \tag{8.12}$$

Підставивши (8.11) у (8.12), дістанемо

$$\Delta_x z=\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\alpha_1\Delta x\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\alpha_2\Delta x\right)+$$

$$+\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\alpha_1\Delta x\right)+\beta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\alpha_2\Delta x\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+$$

$$+\left(\alpha_1\frac{\partial f}{\partial u}+\alpha_2\frac{\partial f}{\partial v}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+(\alpha\alpha_1+\beta\alpha_2)\Delta x.$$

При $\Delta x\to 0$ два останніх доданки є нескінченно малими величинами, тому

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Аналогічно можна показати, що $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

Теорему доведено.

♦ **Наслідок 1.** *Якщо $z=f(x, y)$ — складна функція двох змінних, де x і y є функціями змінної t: $x=x(t)$, $y=y(t)$, які диференційовні в точці t, то складна функція $z=f(x(t), y(t))$ диференційовна в точці t, і справедлива формула*

$$\boxed{\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.} \tag{8.13}$$

♦ **Наслідок 2.** *Якщо дана функція $z=f(x, y)$, а $y=y(x)$ — функція, диференційовна в точці x, то похідна за змінною x складної функції $z=f(x, y(x))$ є звичайною похідною функції однієї змінної x, тобто $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{dz}{dx}$, і справедлива формула*

$$\boxed{\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.} \tag{8.14}$$

■ **Приклад 8.19.** *Нехай $z=\ln(u^2+v^2)$, де $u=xy$, $v=x+y$. Знайдемо частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.*

Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2u}{u^2+v^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{2v}{u^2+v^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}=y, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=x, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=1.$$

Тоді за формулою (8.10)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2u}{u^2+v^2}y+\frac{2v}{u^2+v^2}1=\frac{2xy^2+2(x+y)}{x^2y^2+(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2u}{u^2+v^2}x+\frac{2v}{u^2+v^2}1=\frac{2x^2y+2(x+y)}{x^2y^2+(x+y)^2}.$$

■ **Приклад 8.20.** *Знайдемо* $\frac{dz}{dt}$, *якщо* $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, *де* $y=t^2$, $x=t^3+1$.

Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{dy}{dt}=2t,\quad \frac{dx}{dt}=3t^2.$$

За формулою (8.13) маємо

$$\frac{dz}{dt}=-\frac{y}{x^2+y^2}3t^2+\frac{x}{x^2+y^2}2t=\frac{-t^4+2t}{(t^3+1)^2+t^4}=\frac{-t^4+2t}{t^6+2t^3+t^4+1}.$$

Похідну $\frac{dz}{dt}$ можна знайти й іншим способом. Підставивши значення $y=t^2$ і $x=t^3+1$ у функцію $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, дістанемо $z=\operatorname{arctg}\frac{t^2}{t^3+1}$. Тоді

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{1+t^4/(t^3+1)^2}\,\frac{2t(t^3+1)-3t^4}{(t^3+1)^2}=\frac{-t^4+2t}{t^6+t^4+2t^3+1}.$$

Похідні, обчислені різними способами, збігаються.

■ **Приклад 8.21.** *Знайдемо* $\frac{dz}{dx}$, *якщо* $z=\arcsin\frac{x}{y}$, *де* $y=\sqrt{x^2+1}$.

За формулою (8.14) дістанемо

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2/y^2}}\frac{1}{y}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2/y^2}}\left(\frac{-x}{y^2}\right)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\frac{y}{\sqrt{y^2-x^2}}\frac{1}{y}+\frac{y}{\sqrt{y^2-x^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{x^2}{y\sqrt{y^2-x^2}\sqrt{x^2+1}}.$$

8.3.7. Похідна за напрямом

Нехай функція $z=f(x,y)$ визначена в деякому околі точки $M(x;y)$. Частинні похідні $f'_x(x,y)$ і $f'_y(x,y)$ виражають швидкість зростання функції в додатному напряму осей Ox і Oy відповідно. Але для функції $z=f(x,y)$ можна поставити питання про швидкість її зростання в точці в довільному напрямі.

Розглянемо деякий напрям, що задається одиничним вектором $\vec{l}=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$, де $|\vec{l}|=\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$. На прямій, що проходить через точку M, виберемо точку $M_1(x+\Delta x;\,y+\Delta y)$ і знайдемо довжину відрізка MM_1: $\Delta\vec{l}=MM_1=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ (рис. 8.4).

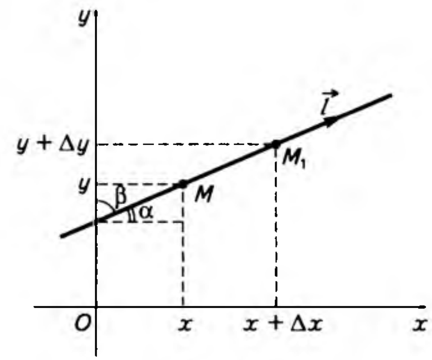


Рис. 8.4

➡ **Означення 8.16.** *Приріст функції* $\Delta_{\vec l}z=f(x+\Delta x,\,y+\Delta y)-f(x,y)$, *де* Δx *і* Δy *пов'язані співвідношеннями* $\Delta y=\Delta\vec{l}\cos\alpha$, $\Delta y=\Delta\vec{l}\cos\beta$, *називають **приростом функції** z **у даному напрямі вектора** $\vec{l}$, тому*

$$\Delta_{\vec l}z=f(x+\Delta\vec{l}\cos\alpha,\;y+\Delta\vec{l}\cos\beta)-f(x,y).\qquad(8.15)$$

➡ **Означення 8.17.** ***Похідною** $z'_{\vec l}$ **за напрямом вектора** $\vec{l}$ **функції двох змінних** $z=f(x,y)$ **у точці** $M(x;y)$ називають границю відношення приросту функції в цьому напрямі до $\Delta\vec{l}$ при $\Delta\vec{l}\to0$, якщо вона існує*, і позначають $\frac{\partial z}{\partial\vec{l}}=z'_{\vec l}=\lim\limits_{\Delta\vec l\to0}\frac{\Delta_{\vec l}z}{\Delta\vec{l}}$.

Похідна z'_l характеризує *швидкість зміни функції за напрямом вектора* $\vec{l}$.

✓ *Зауваження 8.7.* Якщо напрям вектора $\vec{l}$ збігається з додатним напрямом осі Ox (або Oy), то похідна за напрямом у точці $M(x; y)$ перетворюється в частинну похідну $f'_x(x, y)$ (або $f'_y(x, y)$).

Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x; y)$, то її приріст можна записати у вигляді

$$\Delta z = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y + o(\Delta l) = z'_x \Delta l \cos\alpha + z'_y \Delta l \cos\beta + o(\Delta l).$$

Поділивши цю рівність на Δl, дістанемо

$$\frac{\Delta z}{\Delta l} = z'_x \cos\alpha + z'_y \cos\beta + \frac{o(\Delta l)}{\Delta l}.$$

Тоді при $\Delta l \to 0$ матимемо

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta. \qquad (8.16)$$

✓ *Зауваження 8.8.* Очевидно, що всі поняття, введені для функції двох змінних, переносяться на функції багатьох змінних, тобто аналогічно для функції багатьох змінних $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ визначається похідна за напрямом n-вимірного вектора $\vec{l} = \{\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_n\}$ у точці $M(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ простору $\boldsymbol{R}^n$:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\cos\alpha_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z}{\partial x_i}\cos\alpha_i,$$

де $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \ldots + \cos^2\alpha_n = 1$.

■ **Приклад 8.22.** *Знайдемо похідну функції $z = x^2 + y^2$ у точці $M(1; 1)$ за напрямом вектора, що утворює з віссю Ox кут $\alpha = \pi/3$.*

Оскільки з віссю Ox вектор утворює кут $\alpha = \pi/3$, то з віссю Oy він утворює кут $\beta = \pi/2 - \pi/3 = \pi/6$. Тому за формулою (8.16) дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta = 2x\cos\frac{\pi}{3} + 2y\cos\frac{\pi}{6} =$$

$$= 2x\frac{1}{2} + 2y\frac{\sqrt{3}}{2} = x + \sqrt{3}y.$$

Тоді

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1;\,1)} = 1 + \sqrt{3}.$$

8.3.8. Градієнт функції

Нехай функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0; y_0)$. Тоді в цій точці існує похідна даної функції за будь-яким напрямом. Виникає важливе запитання: в якому напрямі похідна функції буде найбільшою? Виявляється, що можна відповісти на це запитання, ввівши поняття вектор-градієнта.

➡ **Означення 8.18.** ***Градієнтом функції $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ називають вектор, координати якого дорівнюють частинним похідним функції в цій точці:***

$$\nabla z = \operatorname{grad} z = \left\{\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\right\}. \qquad (8.17)$$

Оскільки одиничний вектор $\vec{l}$ має координати $\{\cos\alpha, \cos\beta\}$, то похідна за напрямом вектора $\vec{l}$ визначається так:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta = \vec{l}\operatorname{grad} z$$

і, очевидно, є *скалярним добутком векторів* $\vec{l}$ *і* grad z.

Оскільки $|\vec{l}| = 1$, то похідна за напрямом вектора $\vec{l}$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \vec{l}\operatorname{grad} z = |\vec{l}|\,|\operatorname{grad} z|\cos\varphi = |\operatorname{grad} z|\cos\varphi,$$

де φ — кут між векторами $\vec{l}$ і grad z.

Відомо, що скалярний добуток двох векторів максимальний, якщо вектори однаково напрямлені, тобто кут між ними $\varphi = 0$. При цьому

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\max} = |\operatorname{grad} z|.$$

Отже, *градієнт функції характеризує напрям і значення максимальної швидкості зміни функції в даній точці.*

Градієнт функції не залежить від вибору системи координат. Тому, знаючи градієнт функції в кожній точці, можна будувати локально лінії рівня функції.

Розглянемо лінії рівня функції $z = f(x, y)$, тобто множину точок площини, координати яких задовольняють рівняння $f(x, y) = C$, де C — фіксоване число. Оскільки лінію рівня можна подати як графік диференційовної функції, то тепер неважко знайти рівняння дотичної до лінії рівня, яка задається рівнянням $f(x, y) = C$, і $M_0(x_0; y_0)$ — точка на цій лінії рівня, тобто $f(x_0, y_0) = C$. Припустимо заради визначеності, що $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тоді рівняння $f(x, y) = C$ можна записати у вигляді $y = \varphi(x)$.

Запишемо рівняння дотичної до графіка функції $y = \varphi(x)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$:

$$y = y_0 + \varphi'(x_0)(x - x_0).$$

Але така форма запису не є достатньо ефективною, оскільки функція $y = \varphi(x)$ відома. Справді, знаходити функцію в явному вигляді $y = \varphi(x)$ необов'язково, оскільки похідну $y = \varphi'(x_0)$ можна виразити через частинні похідні функції $z = f(x, y)$. Для цього знайдемо похідну складної функції $z = f(x, \varphi(x))$ двома способами.

З одного боку,

$$\frac{d}{dx} f(x, \varphi(x)) = f'_x(x, \varphi(x)) + f'_y(x, \varphi(x))\varphi'(x).$$

З іншого боку,

$$\frac{d}{dx} f(x, \varphi(x)) = \frac{d}{dx} C = 0.$$

Отже,

$$\varphi'(x) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}.$$

Підставивши значення $\varphi'(x_0)$ у рівняння дотичної, дістанемо

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

З аналітичної геометрії відомо, що вектор коефіцієнтів при x і y в рівнянні прямої перпендикулярний до даної прямої й називається *вектором нормалі*. Тому можна зробити ***висновок: градієнт функції*** grad $z(M_0)$ ***є вектором нормалі дотичної, проведеної до лінії рівня в точці $M_0(x_0; y_0)$.***

■ **Приклад 8.23.** *Знайдемо рівняння дотичної до лінії рівня функції $z = \sqrt[3]{xy^2}$ у точці $M_0(1; 1)$.*

Запишемо рівняння дотичної:

$$z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Обчислимо частинні похідні в точці $M_0(1; 1)$:

$$z'_x = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} \text{ і } z'_x|_{(1;\,1)} = \frac{1}{3}; \quad z'_y = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} \text{ і } z'_y|_{(1;\,1)} = \frac{2}{3}.$$

Підставивши значення частинних похідних і координати точки $M_0(1; 1)$, дістанемо

$$\frac{1}{3}(x - 1) + \frac{2}{3}(y - 1) = 0, \text{ або } x + 2y - 3 = 0.$$

ТЕОРЕМА 8.8

Нехай задано диференційовну функцію $z = f(x, y)$ і в точці $M_0(x_0; y_0)$ значення градієнта не дорівнює нулю. Тоді градієнт перпендикулярний до лінії рівня, що проходить через дану точку.

Доведення

Лінія рівня L_C задається рівнянням $f(x, y) = C$, де $C = f(x_0, y_0)$. Припустимо, що це рівняння можна розв'язати відносно $y = g(x)$ на

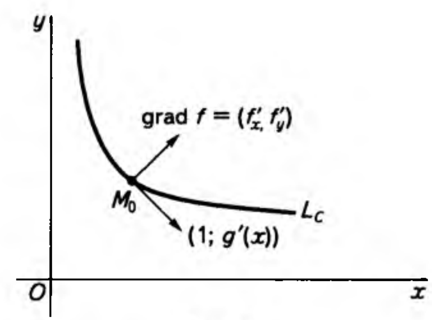


Рис. 8.5

L_C. Таким чином, вектор дотичної має координати $(1; g'(x))$. Помноживши його компоненти на dx, дістанемо, що вектор $(dx, g'(x)dx)$, тобто вектор (dx, dy), напрямлений по дотичній до лінії рівня L_C. На лінії рівня L_C функція $f(x, y) = \text{const}$, тому $df|_{L_C} = 0$.

Отже, на L_C: $z'_x\,dz + z'_y\,dy = 0$. Але $z'_x\,dz + z'_y\,dy$ — скалярний добуток вектор-градієнта (z'_x, z'_y) і вектора (dx, dy), дотичного до лінії рівня L_C, тобто вектори перпендикулярні (рис. 8.5).

Теорему доведено.

8.3.9. Економічне застосування градієнта

Нагадаємо, що функція корисності $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ — це суб'єктивна числова оцінка даним індивідом корисності u набору товарів $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Вона не спадна й опукла вниз. Крім того, припускатимемо, що кожен товар бажаний, тобто якщо для двох наборів товарів x і y виконується умова $x > y$ ($x_i > y_i$ для кожного $i = \overline{1, n}$), то й $u(x) > u(y)$. Нехай функція корисності $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ диференційовна.

➡ **Означення 8.19.** *Частинну похідну* $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ *називають* ***граничною корисністю i-го товару***, *а вектор* ***граничних корисностей***

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \text{ — це вектор-градієнт.}$$

Як правило, граничні корисності задовольняють умови $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} > 0$, $i = \overline{1, n}$.

■ **Приклад 8.24.** *Для функції корисності* $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$ *побудуємо криві байдужості (лінії сталої корисності) й знайдемо вектор граничних корисностей у точці* (4; 1).

Криві байдужості — це лінії рівня функції

$$u_C = \{(x_1, x_2) \mid \sqrt{x_1}\sqrt{x_2} = C\}.$$

Побудуємо лінію рівня $u = C$, де C дорівнює значенню функції $u = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$ у точці (4; 1). Дістанемо

$$C = (\sqrt{x_1}\sqrt{x_2})|_{(4;\,1)} = \sqrt{4}\sqrt{1} = 2.$$

Побудуємо на площині лінію $\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} = 2$, або $x_1x_2 = 4$, $x_2 = 4/x_1$. Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}}.$$

Дістанемо вектор граничних корисностей (градієнт) для даної функції:

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}}, \frac{\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}}\right).$$

Знайдемо значення градієнта в точці (4; 1):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{(4;\,1)} = \frac{\sqrt{1}}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{(4;\,1)} = \frac{4}{2\sqrt{1}} = 2.$$

Отже, grad $u(4; 1) = (1/4; 2)$.

Побудуємо вектор-градієнт, що виходить із точки (0; 0), а потім — із точки $\left(\frac{1}{4}; 2\right)$ (рис. 8.6). У точці (4; 1) градієнт перпендикулярний до дотичної, проведеної до графіка функції в даній точці.

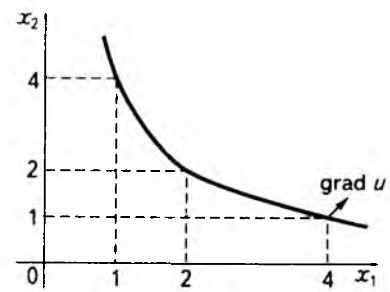


Рис. 8.6

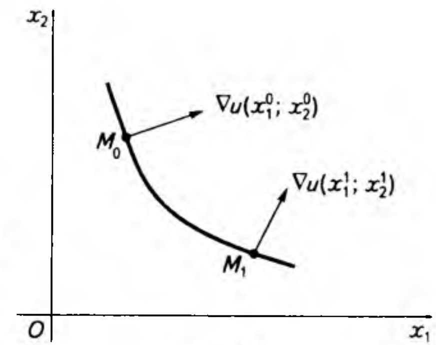


Рис. 8.7

Отже, лінії рівня можна побудувати таким чином. Припустимо, ми починаємо з точки $(x_0; y_0)$. Будуємо вектор-градієнт у цій точці. Задаємо напрям, перпендикулярний до вектор-градієнта. Далі розглянемо точку $M_1(x_1^1; x_2^1)$, близьку до $M_0(x_1^0; x_2^0)$ і побудуємо вектор-градієнт у цій точці. Продовжуючи цей процес, можна побудувати (з певною похибкою) лінії рівня (рис. 8.7).

8.4 Похідні й диференціали вищих порядків

8.4.1. Частинні похідні вищих порядків

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в області $D \in \boldsymbol{R}^2$. Припустимо, що в кожній точці області D існують частинні похідні $f'_x(x, y)$ і $f'_y(x, y)$. Тоді їх природно вважати функціями з областю визначення D і називати ***частинними похідними першого порядку***. Ці похідні, які розглядаються як функції від змінних x та y, своєю чергою, можуть мати частинні похідні за змінними x і y. Частинні похідні функцій $f'_x(x, y)$ і $f'_y(x, y)$ називають ***частинними похідними другого порядку*** (або ***другими частинними похідними***) функції $z = f(x, y)$. Їх усього чотири. Якщо процес подальшого диференціювання можливий, то частинні похідні від похідних другого порядку називають ***частинними похідними третього порядку*** (або ***третіми частинними похідними***) й т. д.

Якщо першу похідну функції $z = f(x, y)$ було взято, припустимо, за змінною x, то її частинні похідні в точці $M_0(x_0; y_0)$ позначаються так:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = f''_{xx}(x_0, y_0); \quad z''_{xy} = (z'_x)'_y = f''_{xy}(x_0, y_0)$$

або

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y\,\partial x}.$$

Аналогічні позначення використовують і для других частинних похідних, наприклад: $z''_{yx} = (z'_y)'_x$, $z''_{yy} = (z'_y)'_y$, $z'''_{xyx} = ((z'_x)'_y)'_x$ і т. д.

➡ **Означення 8.20.** *Частинні похідні другого порядку z''_{xy} і z''_{yx} називають **мішаними частинними похідними**.*

■ **Приклад 8.25.** *Обчислимо частинні похідні другого порядку функції*

$$u = x^3 - xy^2 + x + 5y - y^4 + 2.$$

Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - y^2 + 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2xy + 5 - 4y^3.$$

Обчислюємо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = -2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -12y^2 - 2x.$$

■ **Приклад 8.26.** *Обчислимо частинні похідні другого порядку функції*

$$u = e^{3x}\cos 2y.$$

Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3e^{3x}\cos 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{3x}\sin 2y.$$

Обчислюємо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3^2 e^{3x}\cos 2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 3e^{3x}(-2\sin 2y) = -6e^{3x}\sin 2y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = -6e^{3x}\sin 2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4e^{3x}\cos 2y.$$

У наведених прикладах мішані похідні виявилися рівними, хоча це буває не завжди. Відповідь на питання про рівність мішаних других похідних функції двох змінних дає наступна теорема.

ТЕОРЕМА 8.9

Якщо функція $z = f(x, y)$ має частинні похідні другого порядку в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0)$ і мішані похідні f''_{xy} і f''_{yx} неперервні в самій точці, то справедлива рівність

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0). \tag{8.18}$$

Аналогічно вводиться поняття частинних похідних функції багатьох змінних $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Якщо існують частинні похідні першого порядку $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$ у кожній точці області $D \subset \boldsymbol{R}^n$ і вони є функціями цих змінних у даній області, то можна визначити частинні похідні функції $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ за аргументом x_k у деякій точці $M(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ області D. Спочатку похідна береться за аргументом x_i, а потім — за аргументом x_k і позначається $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k}$ або $f''_{x_i x_k}$, $u''_{x_i x_k}$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, n}$.

При $i \neq k$ частинну похідну називають ***мішаною частинною похідною другого порядку***.

Означивши поняття частинної похідної другого порядку, можна послідовно ввести поняття частинної похідної третього порядку, потім четвертого й т. д. Нехай уже введено поняття $(n-1)$-ї частинної похідної функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за змінними $(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_{n-1}})$, причому окремі або навіть усі номери аргументів можуть збігатися. Нехай ця $(n-1)$-ша похідна має в точці $M_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ частинну похідну. Тоді її називають ***n-ю частинною похідною***, або ***частинною похідною n-го порядку, функції*** $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за аргументами $(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n})$. Таким чином, співвідношення, яке визначає n-у частинну похідну, має такий вигляд:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \ldots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_{n-1}} \ldots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} \right). \tag{8.19}$$

Якщо не всі індекси аргументів, за якими береться частинна похідна (8.19), збігаються, то її називають ***мішаною частинною похідною n-го порядку.***

Тепер введемо поняття n разів диференційовної функції багатьох змінних.

Означення 8.21. *Функцію $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають **n разів диференційованою в точці** $M_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$, якщо всі її частинні похідні $(n-1)$-го порядку є диференційовними функціями в цій точці.*

ТЕОРЕМА 8.10

Аби функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ була n разів диференційовною в точці $M_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$, достатньо, щоб її частинні похідні n-го порядку були неперервними функціями в $M_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Приклад 8.27. *Обчислимо частинні похідні четвертого порядку функції $u = x^4 y^3 z^2$.*

Дістаємо

$$u'_x = 4x^3y^3z^2;\quad u''_{xy} = 12x^3y^2z^2;\quad u'''_{xyz} = 24x^3y^2z;\quad u^{(4)}_{xyzx} = 72x^2y^2z;$$

$$u'_y = 3x^4y^2z^2;\quad u''_{yx} = 12x^3y^2z^2;\quad u'''_{yxx} = 36x^2y^2z^2;\quad u^{(4)}_{yxxz} = 72x^2y^2z;$$

$$u'_z = 2x^4y^3z;\quad u''_{zx} = 8x^3y^3z;\quad u'''_{zxy} = 24x^3y^2z;\quad u^{(4)}_{zxyx} = 72x^2y^2z.$$

8.4.2. Диференціали вищих порядків

Нехай функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x; y)$ і в деякому її околі. Тоді диференціал функції в цій точці обчислюється за формулою

$$\boxed{du = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.} \tag{8.20}$$

Його називають ***диференціалом першого порядку***. Нехай функція $u = f(x, y)$ двічі диференційовна в точці $M(x; y)$. Покладемо в цій формулі диференціали незалежних змінних dx і dy сталими. Тоді диференціал функції du є функцією змінних x і y, диференційовною в точці $M(x; y)$. Її диференціал у цій точці має вигляд

$$\delta(du) = \delta(f'_x\, dx + f'_y\, dy) = (f'_x\, dx + f'_y\, dy)'_x\, \delta x + (f'_x\, dx + f'_y\, dy)'_y\, \delta y.$$

Цей вираз при $\delta x = dx$ і $\delta y = dy$ називають ***другим диференціалом функції*** і позначають d^2u.

Виконуючи диференціювання в останній формулі й ураховуючи рівність мішаних похідних, дістанемо вираз для другого диференціала:

$$\boxed{d^2u = f''_{xx}\, dx^2 + 2f''_{xy}\, dx\, dy + f''_{yy}\, dy^2.} \tag{8.21}$$

Аналогічно можна визначити диференціали третього порядку

$$d^3u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 u =$$

$$= \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3}{\partial x^2\, \partial y} dx^2\, dy + 3\frac{\partial^3}{\partial x\, \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3} dy^3 \right) u \tag{8.22}$$

та n-го порядку

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n u. \qquad (8.23)$$

■ **Приклад 8.28.** *Знайдемо $d^4 u$ для функції $u = x^2 y + 2xy^2 + 3x + y^4$.*

Щоб знайти диференціал четвертого порядку за формулою (8.23), потрібно дістати вирази для всіх частинних похідних четвертого порядку. Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + 2y^2 + 3, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 4x + 4y^3;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = 2y + 4y = 6y;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 24y, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0;$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 24, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \, \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \, \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x \, \partial y^3} = 0.$$

Отже, за формулою (8.23) при $n = 4$ дістанемо

$$d^4 u = 24 dy^4.$$

За аналогією з уже розглянутим випадком функції двох змінних індуктивно можна ввести також поняття диференціала n-го порядку для функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у точці $M_0(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$. Для зручності введемо позначення $d = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n$.

Тоді

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^n u.$$

8.4.3. Формула Тейлора для функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0)$ і має неперервні похідні всіх порядків до m-го включно. Тоді в цьому околі справедлива рівність

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f(x_0, y_0)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} (x - x_0)^{k-i} (y - y_0)^i + R_m(x, y). \qquad (8.24)$$

➡ **Означення 8.22.** *Многочлен*

$$P_m(x, y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f(x_0, y_0)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} (x - x_0)^{k-i} (y - y_0)^i$$

*називають **многочленом Тейлора m-го порядку функції** $z = f(x, y)$, а функцію $R_m(x, y) = P_m(x, y) - f(x, y)$ — **залишковим членом m-го порядку у формулі Тейлора**. Формулу (8.24) називають **формулою Тейлора функції** $z = f(x, y)$ в околі точки $M_0(x_0; y_0)$. Зокрема, при $x_0 = y_0$ формулу (8.24) називають **формулою Маклорена.***

Оскільки функція $z = f(x, y)$ має в околі точки $M_0(x_0; y_0)$ неперервні похідні до $(m + 1)$-го порядку включно, то для будь-якої точки $M(x; y)$ із цього околу знайдеться таке $\theta \in (0; 1)$, що точка $(c; d) = (x_0 + \theta(x - x_0),\ y_0 + \theta(y - y_0))$ така, що

$$R_m(x, y) = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{i=0}^{m+1} C_{m+1}^i \frac{\partial^{m+1} f(c, d)}{\partial x^{m+1-i} \partial y^i} (x - x_0)^{m+1-i} (y - y_0)^i.$$

Такий запис залишкового члена формули Тейлора називають ***залишковим членом у формі Лагранжа.***

Якщо в околі точки $M_0(x_0; y_0)$ функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні до $(m + 1)$-го порядку включно, то при $x \to x_0$, $y \to y_0$ залишковий член $R_m(x)$ — нескінченно мала вищого порядку порівняно з $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, тобто $R_m(x, y) = o(\rho^m)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$. Такий запис залишкового члена формули Тейлора називають ***залишковим членом у формі Пеано.***

Для функції багатьох змінних $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ у точці $M_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ формула Тейлора записується у вигляді

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\alpha_i} \frac{1}{\alpha_1!...\alpha_n!} \frac{\partial^k f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)}{\partial x_1^{\alpha_1}... \partial x_n^{\alpha_n}} \times$$

$$\times (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} ...(x_n - x_n^0)^{\alpha_n} + o(\rho^m),$$

де $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2}$, $x_i \to x_i^0$, $i = \overline{1, n}$ і підсумовування виконується за всіма цілими невід'ємними α_i такими, що $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = k$.

8.5 Локальні екстремуми

8.5.1. Локальні екстремуми функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена й неперервна в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0)$.

Означення 8.23. *Точку $M_0(x_0; y_0)$ називають* ***точкою локального максимуму функції*** *$z = f(x, y)$, якщо існує такий δ-окіл цієї точки, що для всіх точок $M(x; y)$ із цього околу виконується нерівність*

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y).$$

Точку $M_0(x_0; y_0)$ *називають* ***точкою локального мінімуму,*** *якщо існує такий δ-окіл цієї точки, що для всіх точок $M(x; y)$ із цього околу виконується нерівність*

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y).$$

Точки локального мінімуму й локального максимуму називають ***точками локального екстремуму функції*** *$z = f(x, y)$, а значення функції в цих точках —* ***екстремумами функції.***

Зауважимо, що поняття екстремуму функції має локальний характер, і тому мінімум функції в деяких випадках може бути більшим за максимум.

Відповідно до означення локального екстремуму (мінімуму або максимуму) повний приріст функції $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ задовольняє одну з умов в околі точки $M_0(x_0; y_0)$:

$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) \leq 0$, якщо $M_0(x_0; y_0)$ — точка максимуму;

$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) \geq 0$, якщо $M_0(x_0; y_0)$ — точка мінімуму.

8.5.2. Необхідні й достатні умови локального екстремуму функції двох змінних

Припустимо, що функція $z = f(x, y)$ має екстремум у деякій точці $M_0(x_0; y_0)$. Установимо необхідні умови локального екстремуму.

ТЕОРЕМА 8.11
(необхідні умови локального екстремуму функції двох змінних)

Якщо функція $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ має екстремум і частинні похідні першого порядку, то в цій точці частинні похідні дорівнюють нулю, тобто

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0. \tag{8.25}$$

✓ *Зауваження 8.9.* Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці, то в точці локального екстремуму

$$df(M_0) = 0, \tag{8.26}$$

$$\text{grad}\, f(M_0) = 0. \tag{8.27}$$

Слід зазначити, що (8.25) не є достатніми умовами екстремуму.

Означення 8.24. *Точки, які задовольняють систему рівнянь* (8.25), *називають* ***стаціонарними точками функції*** *$z = f(x, y)$.*

Як і у випадку функції однієї змінної, в стаціонарній точці зовсім не обов'язкове забезпечення наявності екстремуму. Якщо як приклад взяти просту функцію $z = xy$, то для неї частинні похідні $z'_x = y$, $z'_y = x$ перетворюються в нуль у точці (0; 0), у якій $z = 0$.

Водночас безпосередньо видно, що в довільному околі цієї точки функція набуває як додатних, так і від'ємних значень, і екстремуму не має. Іноді бувають ситуації, коли в окремих точках деякі частинні похідні мають нескінченні значення або зовсім не існують. Такі точки також треба віднести до «підозрілих» на екстремум разом зі стаціонарними точками. Тому стаціонарні точки й точки, в яких частинні похідні не існують, називають ***точками можливого екстремуму***, або ***критичними точками***.

ТЕОРЕМА 8.12
(достатні умови локального екстремуму функції двох змінних)

Нехай функція $z = f(x, y)$ у деякому δ-околі стаціонарної точки $M_0(x_0; y_0)$ має неперервні частинні похідні другого порядку, причому $f''_{xx}(x_0, y_0) = A$, $f''_{xy}(x_0, y_0) = B$, $f''_{yy}(x_0, y_0) = C$.

Запишемо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Тоді:

1) якщо $\Delta > 0$, то в точці $M_0(x_0; y_0)$ функція $z = f(x, y)$ має екстремум, причому при $A < 0$ — локальний максимум, при $A > 0$ — локальний мінімум;

2) якщо $\Delta < 0$, то в точці $M_0(x_0; y_0)$ функція $z = f(x, y)$ екстремуму не має.

✓ *Зауваження 8.10.* Якщо $\Delta = AC - B^2 = 0$, то для вирішення питання про існування екстремуму потрібне додаткове дослідження.

8.5.3. Алгоритм дослідження функції двох змінних на екстремум

Для того щоб знайти локальні екстремуми функції $z = f(x, y)$, потрібно:

1) обчислити частинні похідні першого порядку f'_x, f'_y;

2) розв'язати систему

$$\begin{cases} f'_x = 0, \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

і знайти критичні точки функції M_i;

3) обчислити частинні похідні другого порядку f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy};

4) для кожної критичної точки M_i обчислити значення $A = f''_{xx}(M_i)$, $B = f''_{xy}(M_i)$, $C = f''_{yy}(M_i)$ і зробити висновки на підставі теореми 8.12.

■ **Приклад 8.29.** *Знайдемо точки локального екстремуму функції*

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

1. Обчислимо частинні похідні першого порядку:

$$z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad z'_y = 6xy - 12 = 6(xy - 2).$$

2. Знайдемо критичні точки, використовуючи необхідні умови екстремуму. Прирівнявши $z'_x = 0$, $z'_y = 0$, матимемо систему

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = 15, \\ 6xy = 12. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, дістанемо чотири критичні точки:

$$M_1(2; 1),\ M_2(-2; -1),\ M_3(1; 2),\ M_4(-1; -2).$$

3. Перевіримо достатні умови. Для цього знайдемо частинні похідні другого порядку: $z''_{xx} = 6x$, $z''_{xy} = 6y$, $z''_{yy} = 6x$.

4. Для точки $M_1(2; 1)$ маємо: $A = 12$, $B = 6$, $C = 12$, $\Delta_1 = 12 \cdot 12 - 6^2 = 108 > 0$, $\Delta_1 > 0$, $A > 0$. Отже, $M_1(2; 1)$ — точка локального мінімуму і $z_{\min} = z(2; 1) = -28$.

Для точки $M_2(-2; -1)$ маємо: $A = -12$, $B = -6$, $C = -12$, $\Delta_2 = 108 > 0$, $A = -12 < 0$. Отже, $M_2(-2; -1)$ — точка локального максимуму і $z_{\max} = z(-2; -1) = 28$.

Для точки $M_3(1; 2)$ дістаємо: $A = 6$, $B = 12$, $C = -12$, $\Delta_3 = 6 \cdot 6 - 12^2 = -108 < 0$. Отже, в точці $M_3(1; 2)$ екстремуму немає.

Для точки $M_4(-1; -2)$ дістаємо: $A = -6$, $B = -12$, $C = -12$, $\Delta_4 = 6 \cdot 6 + (-12)^2 < 0$. Отже, в точці $M_4(-1; -2)$ екстремуму немає.

8.5.4. Квадратичні форми

Введемо поняття квадратичної форми й сформулюємо деякі додаткові математичні відомості про них.

Означення 8.25. *Функцію*

$$\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \qquad (8.28)$$

*називають **квадратичною формою**, а числа a_{ik} — **коефіцієнтами квадратичної форми**.*

*Якщо $a_{ik} = a_{ki}$, то квадратичну форму називають **симетричною**.*

Означення 8.26. *Квадратичну форму називають **додатно-визначеною (від'ємно-визначеною)**, якщо для довільних значень змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, з яких хоча б одне відмінне від нуля, квадратична форма набуває додатних (від'ємних) значень. Обидва ці випадки об'єднують під назвою **знаковизначених квадратичних форм**. Якщо квадратична форма має як додатні, так і від'ємні значення, то її називають **знакозмінною**.*

Означення 8.27. *Симетричну матрицю, яка складена з коефіцієнтів квадратичної форми (8.28), називають **матрицею квадратичної форми*** й позначають

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення 8.28. *Визначники*

$$\Delta_1 = |\, a_{11} \,|, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \; \ldots, \; \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

*називають **головними мінорами матриці A**.*

Необхідною й достатньою умовою знаковизначеності квадратичної форми є критерій Сільвестра.

ТЕОРЕМА 8.13
(критерій Сільвестра)

Аби квадратична форма (8.28) була додатно-визначеною, необхідно й достатньо, щоб усі головні мінори матриці A були

додатними, тобто виконувалися нерівності $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, ..., $\Delta_n > 0$.

Аби квадратична форма була від'ємно-визначеною, необхідно й достатньо, щоб знаки головних мінорів чергувалися, починаючи з від'ємного, тобто виконувалися нерівності $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, ..., $(-1)^n \Delta_n > 0$.

Поняття знаковизначеної й знакозмінної квадратичних форм використовують при формулюванні достатніх умов локального екстремуму функції багатьох змінних.

8.5.5. Локальні екстремуми функції багатьох змінних

Нехай функція $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ визначена й неперервна в деякому околі точки $M_0(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$.

Означення 8.29. *Точку $M_0(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$ називають **точкою локального максимуму функції** $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ якщо існує такий δ-окіл цієї точки, що для всіх точок $M(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ із цього околу виконується нерівність*

$$f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \geq f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Означення 8.30. *Точку $M_0(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$ називають **точкою локального мінімуму**, якщо існує такий δ-окіл цієї точки, що для всіх точок $M(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ із цього околу виконується нерівність*

$$f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \leq f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Означення 8.31. *Точки локального мінімуму й локального максимуму називають **точками локального екстремуму функції** $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а значення функції в цих точках — **екстремумами функції**.*

8.5.6. Необхідні й достатні умови локального екстремуму функції багатьох змінних

ТЕОРЕМА 8.14
(необхідні умови локального екстремуму функції багатьох змінних)

Якщо функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ у точці $M_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ має локальний екстремум і частинні похідні першого порядку, то всі частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю:

$$u'_{x_i}(M_0) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{8.29}$$

➡ **Означення 8.32.** *Точки, які задовольняють систему рівнянь (8.29), називають* ***стаціонарними точками функції*** *$u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.*

Легко побачити, що для функції багатьох змінних $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ другий диференціал $d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 u$ є квадратичною формою відносно диференціалів незалежних змінних $dx_1, dx_2, ..., dx_n$. Матриця цієї квадратичної форми — це матриця, елементи якої $a_{ik} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, n}$ є частинними похідними другого порядку функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Цю матрицю називають ***матрицею Гессе*** й позначають

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Визначник цієї матриці називають ***гессіаном***.

ТЕОРЕМА 8.15
(достатні умови локального екстремуму функції багатьох змінних)

Нехай у точці $M_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ можливого екстремуму та в деякому її δ-околі функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має неперервні частинні похідні другого порядку. Тоді, якщо в точці M_0 другий диференціал d^2u є знаковизначеною квадратичною формою від диференціалів $dx_1, dx_2, ..., dx_n$ незалежних змінних, то дана функція в точці M_0 має локальний екстремум. При цьому:

1) якщо $d^2u(M_0) \geq 0$, то M_0 — точка локального мінімуму;

2) якщо $d^2u(M_0) \leq 0$, то M_0 — точка локального максимуму, причому рівність виконується лише за умови $\sum_{i=1}^{n} dx_i^2 = 0$;

3) якщо в точці M_0 другий диференціал d^2u є знакозмінною квадратичною формою, то функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ не має локального екстремуму.

✓ *Зауваження 8.11.* Умови 1) і 2) означають, що квадратична форма $d^2u(M_0) = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_k} dx_i\, dx_k$ відносно диференціалів незалежних змінних є додатно-визначеною й від'ємно-визначеною відповідно.

■ **Приклад 8.30.** *Дослідимо функцію $u = x^2 + y^2 + (z+1)^2 - xy + x$ на екстремум.*

1. Обчислимо частинні похідні першого порядку:

$$u'_x = 2x - y^2 + 1, \quad u'_y = 2y - x, \quad u'_z = 2(z+1).$$

2. Знайдемо критичні точки, використовуючи необхідні умови екстремуму. Прирівнявши частинні похідні до нуля, матимемо систему

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ 2y - x = 0, \\ 2(z+1) = 0, \end{cases}$$

розв'язавши яку, дістанемо критичну точку $M\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -1\right)$.

3. Перевіримо достатні умови. Для цього знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$u''_{xx} = 2, \quad u''_{yy} = 2, \quad u''_{zz} = 2,$$

$$u''_{xy} = -1, \quad u''_{yx} = -1, \quad u''_{xz} = 0, \quad u''_{yz} = 0, \quad u''_{zx} = 0.$$

4. Визначник матриці Гессе (гессіан) має вигляд

$$H = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

У точці $M\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -1\right)$ усі головні мінори додатні:

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = 3 > 0, \quad \Delta_3 = 6 > 0.$$

Отже, M — точка локального мінімуму й набуває найменшого значення $u_{\min} = -\frac{1}{3}$.

8.5.7. Найбільше й найменше значення функції в області

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена й неперервна в замкненій обмеженій області D. Тоді за теоремою Веєрштрасса в такій області функція досягає свого найбільшого й найменшого значень. Постає запитання: як знайти найбільше й найменше значення функції в даній області D? У загальному випадкові для функцій багатьох змінних немає правила відшукання точок, у яких функція досягає своїх найбільшого й найменшого значень. Однак для певних класів функцій, які, зокрема, виникають у задачах економіки, таке правило є. Це правило конструктивне й базується на такому *алгоритмі*:

1) знайти критичні точки, які лежать усередині області D, і обчислити значення функцій у цих точках (не вдаючися в дослідження, буде в них екстремум функції чи ні);
2) знайти найбільше (найменше) значення функції на межі області D;
3) порівняти добуті значення функції. Найбільше (найменше) з них і буде найбільшим (найменшим) значенням функції в усій області.

■ **Приклад 8.31.** *Знайдемо найбільше й найменше значення функції $z = x^2y(2 - x - y)$ в області D — трикутнику, обмеженому прямими $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$* (рис. 8.8).

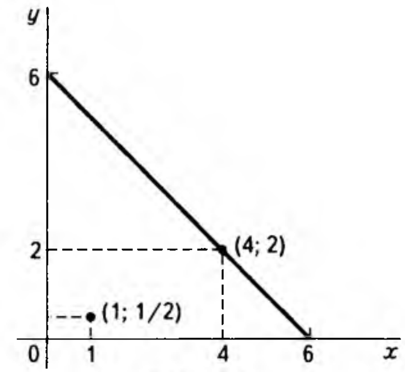


Рис. 8.8

1. Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$z'_x = 4xy - 3x^2y - 2xy^2 = xy(4 - 3x - 2y),$$

$$z'_y = 2x^2 - x^3 - 2x^2y = x^2(2 - x - 2y).$$

Визначимо критичні точки, які лежать у даному трикутнику. Прирівнявши $z'_x = 0$, $z'_y = 0$, дістанемо систему двох алгебричних рівнянь із двома невідомими:

$$\begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0, \\ 2 - x - 2y = 0. \end{cases}$$

На x і y можна скоротити, оскільки всередині трикутника $x > 0$, $y > 0$. Розв'язавши систему, дістанемо критичну точку $M(1; 1/2)$, яка лежить усередині трикутника. Значення функції в цій точці

$$z\left(1; \frac{1}{2}\right) = 1\frac{1}{2}\left(2 - 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

2. На сторонах трикутника $x = 0$ і $y = 0$ значення функції дорівнює нулю.

3. Знайдемо значення функції на стороні $x + y = 6$: $y = 6 - x$, $0 \le x \le 6$, і наша функція двох незалежних змінних перетворюється на функцію однієї змінної

$$z_1 = z(x) = x^2(6 - x)(2 - x - (6 - x)) = -4x^2(6 - x).$$

На кінцях інтервалу $z(0;\,6) = z(6;\,0) = 0$. Досліджуючи функцію однієї змінної, знайдемо критичні точки. Для цього, прирівнявши $z'(x)$ до нуля, дістанемо: $-48x + 12x^2 = 0$, $12x(x - 4) = 0$, звідки $x = 4$ (оскільки $x = 0$ — гранична точка); при цьому $y = 2$, $z = -128$.

Порівняємо всі добуті значення. Отже, найменше й найбільше значення функції $z = x^2y(2 - x - y)$ в області D — трикутнику, обмеженому прямими $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$, треба шукати серед таких її значень: $1/4$ — в точці $(1;\,1/2)$ всередині трикутника; 0 — у вершинах трикутника $(0;\,6)$, $(6;\,0)$ і на сторонах трикутника $x = 0$ і $y = 0$; -128 — у точці $(4;\,2)$.

Отже,

$$\min_{(x,\,y)\in D} z(x,\,y) = z(4;\,2) = -128,$$

$$\max_{(x,\,y)\in D} z(x,\,y) = z(1;\,1/2) = 1/4.$$

8.6 Метод найменших квадратів

8.6.1. Метод найменших квадратів можливої лінійної залежності між змінними

На практиці, зокрема в прикладних питаннях економіки, часто виникає потреба знайти залежність між змінними на підставі проведених експериментів і спостережень.

Нехай потрібно визначити залежність між двома змінними x і y, для яких із практичних досліджень відомо, що значення x_i відповідають значенням y_i. Результати експерименту подано в таблиці:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y_i	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Точки з координатами $(x_1;\,y_1)$, $(x_2;\,y_2)$, ..., $(x_n;\,y_n)$ на площині утворюють деяку лінію. Постає задача: знайти залежність між змінними x і y (записати формулу), яка «найкраще», тобто найточніше, виражала б дану залежність.

Звичайно, ми заздалегідь не знаємо аналітичної залежності вказаних змінних. Пошук за експериментальними даними вдалої формули (наближеної) є однією з важливих задач математики. Річ у тім, що вдало добрана аналітична залежність дає змогу економити кошти, виділені на наукові дослідження, а це, своєю чергою, економить державний бюджет у масштабі міста, області й навіть країни в цілому.

Наприклад, виявилося, що точки $(x_i;\,y_i)$, $i = \overline{1,\,n}$ групуються вздовж деякої прямої (рис. 8.9).

Тоді природно шукати аналітичну залежність у вигляді лінійної функції: $\hat{y} = kx + b$. Отже, задача зводиться до знаходження таких k і b, щоб шукана пряма якнайточніше наближалася до всіх точок $(x_i;\,y_i)$, $i = \overline{1,\,n}$.

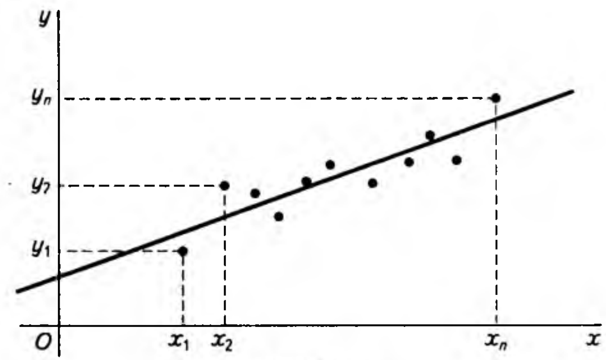


Рис. 8.9

Оскільки точки $(x_i;\,y_i)$, $i = \overline{1,\,n}$ лежать не точно на прямій, а лише біля неї, то залежність $\hat{y} = kx + b$ є наближеною. Тому, підставивши координати точок $(x_i;\,y_i)$, $i = \overline{1,\,n}$ у дану рівність, дістанемо $\hat{y}_i = kx_i + b$, $i = \overline{1,\,n}$. Різниці між y_i та $\hat{y}_i$ позначимо $l_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - ax_i - b$ і називатимемо їх ***відхиленнями***, або ***похибками, спостережуваної точки*** $(x_i;\,y_i)$ ***від точки*** $(x_i;\,\hat{y}_i)$ вирівнювальної прямої. Ці відхилення можуть бути як додатними, так і від'ємними, тому пряму добиратимемо так, щоб сума квадратів відхилень $\sum_{i=1}^{n} l_i^2$ була мінімальною. Для цього використовується ***метод найменших квадратів (МНК), який полягає в доборі таких коефіцієнтів прямої k і b, при яких сума квадратів*** *відхилень спостережуваних значень y_i від вирівнювальних $\hat{y}_i$ буде мінімальною.*

Сума квадратів відхилень — функція двох змінних k і b:

$$S(k,b)=\sum_{i=1}^{n} l_i^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-kx_i-b)^2.$$

Коефіцієнти k і b прямої $\hat{y}_i = kx_i + b$ слід добирати методом найменших квадратів так, щоб функція двох змінних $S(k, b)$ набувала мінімального значення, тобто $S(k,b)=\sum_{i=1}^{n} l_i^2 \to \min$.

Необхідною умовою існування мінімуму функції $S(k, b)$ є рівність нулю частинних похідних цієї функції за k і b:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(k,b)}{\partial k}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-kx_i-b)x_i=0, \\ \dfrac{\partial S(k,b)}{\partial b}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-kx_i-b)=0. \end{cases}$$

Розкривши дужки, дістанемо *нормальну систему рівнянь МНК*

$$\begin{cases} k\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i, \\ k\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+nb=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i, \end{cases}$$

яка має єдиний розв'язок

$$k_0=\frac{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2},\quad b_0=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i-k\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}.$$

Таким чином, добули єдину критичну точку $M_0(k_0; b_0)$.

Достатньою умовою існування екстремуму в критичній точці $M_0(k_0; b_0)$ є додатне значення визначника:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 S(k,b)}{\partial k^2} & \dfrac{\partial^2 S(k,b)}{\partial k\,\partial b} \\ \dfrac{\partial^2 S(k,b)}{\partial k\,\partial b} & \dfrac{\partial^2 S(k,b)}{\partial b^2} \end{vmatrix}>0,$$

причому, якщо $\dfrac{\partial^2 S(k,b)}{\partial k^2}>0$, то в точці $M_0(k_0; b_0)$ існує мінімум.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial k^2}=\frac{\partial}{\partial k}\left(-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-kx_i-b)x_i\right)=2\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial b^2}=\frac{\partial}{\partial b}\left(-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-kx_i-b)\right)=2n,$$

оскільки $\sum\limits_{i=1}^{n}1=n$,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial k\,\partial b}=\frac{\partial}{\partial b}\left(-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-kx_i-b)x_i\right)=2\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

Ураховуючи, що для неперервної функції $\dfrac{\partial^2 S(k,b)}{\partial k\,\partial b}=\dfrac{\partial^2 S(k,b)}{\partial b\,\partial k}$, запишемо визначник:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 & 2\sum\limits_{i=1}^{n}x_i \\ 2\sum\limits_{i=1}^{n}x_i & 2n \end{vmatrix}=4\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right)=$$

$$= 4n^2\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2\right] = 4n^2\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = 4n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 > 0,$$

де $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Отже, в точці $M_0(k_0;\, b_0)$ функція двох змінних $S(k,\, b)$ набуває мінімального значення. Це означає, що пряма $y = k_0x + b_0$ найменше відхиляється від точок $(x_i;\, y_i)$, $i = \overline{1,\, n}$, тобто є вирівнювальною прямою.

■ **Приклад 8.32.** *Результати експерименту наведено в таблиці:*

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	–0,5	0,2	0,4	1	1,4	1,9

Методом найменших квадратів знайдемо параметри k і b функції $y = kx + b$.

Побудуємо точки з координатами $(x_i;\, y_i)$ на координатній площині (рис. 8.10). Припустимо, що між x і y існує лінійна залежність $y = kx + b$. Застосуємо МНК.

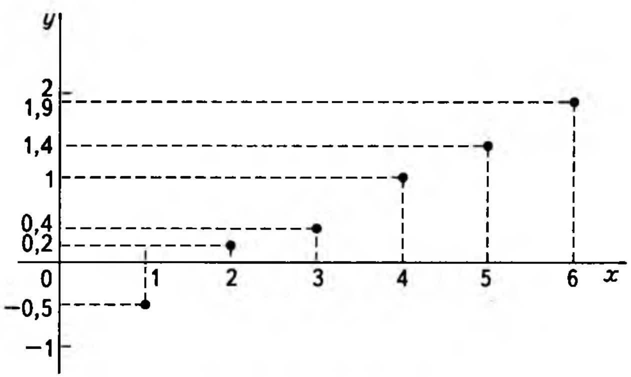


Рис. 8.10

Коефіцієнти k і b знайдемо з нормальної системи МНК

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = k\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i = k\sum_{i=1}^{n} x_i + bn. \end{cases}$$

Дістанемо:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91;$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = -0,5 + 0,2 + 0,4 + 1 + 1,4 + 1,9 = 4,4;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1(-0,5) + 2\cdot 0,2 + 3\cdot 0,4 + 4\cdot 1 + 5\cdot 1,4 + 6\cdot 1,9 = 23,5.$$

Складемо систему:

$$\begin{cases} 91a + 21b = 23,5, \\ 21a + 6b = 4,4 \end{cases}$$

і розв'яжемо її за правилом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 91 & 21 \\ 21 & 6 \end{vmatrix} = 546 - 441 = 105;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 23,5 & 21 \\ 4,4 & 6 \end{vmatrix} = 141 - 92,4 = 48,6;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 91 & 23,5 \\ 21 & 4,4 \end{vmatrix} = 400,4 - 493,5 = -93,1.$$

Отже,

$$k = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{48,6}{105} \approx 0,46;\quad b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-93,1}{105} \approx -0,89.$$

Таким чином, шукана пряма задається рівнянням $y = 0,46x - 0,89$.

8.6.2. Вирівнювання за допомогою кривих

У п. 8.6.1 розглядався випадок, коли точки $(x_i; y_i)$, $i = \overline{1, n}$ групуються вздовж деякої прямої. В протилежному випадкові постає запитання: що робити, коли точки $(x_i; y_i)$, $i = \overline{1, n}$ групуються вздовж деякої лінії, наприклад параболи або показникової кривої? В цьому разі йдеться про вирівнювання за допомогою кривих. Постає задача: знайти залежність між змінними x та y (записати формулу), яка «найкраще», тобто найточніше, виражала б дану залежність.

❑ **Вирівнювання за допомогою параболи.** Нехай точки з координатами $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ..., $(x_n; y_n)$ на площині утворюють деяку лінію. Припустимо, що між змінними існує залежність $\hat{y} = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Тоді, підставивши емпіричні значення $(x_i; y_i)$, $i = \overline{1, n}$, дістанемо систему

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2, \quad i = \overline{1, n}.$$

Параболу буде добрано «найкраще», згідно з МНК, якщо сума квадратів відхилень заданих значень y_i від її відповідних точок $\hat{y}_i$ буде мінімальною. Отже, потрібно знайти такі значення невідомих коефіцієнтів a_0, a_1, a_2, щоб функція $S(a_0, a_1, a_2) = \sum\limits_{i=1}^{n}(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 - y_i)^2$ набувала свого найменшого значення.

Запишемо необхідні умови існування мінімуму функції:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0.$$

Обчислимо частинні похідні першого порядку й дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} 2(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 - y_i)^2 1 = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} 2(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 - y_i)^2 x_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} 2(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 - y_i)^2 x_i^2 = 0. \end{cases}$$

Поділивши на 2 обидві частини всіх рівностей і розбивши кожну суму на доданки, дістанемо *нормальну систему МНК*

$$\begin{cases} na_0 + a_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i, \\ a_0\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2y_i^2. \end{cases}$$

Із цієї системи визначаємо невідомі коефіцієнти a_0, a_1, a_2. Перевіривши достатні умови, переконаємося, що критична точка $M(a_0; a_1; a_2)$ є точкою мінімуму функції $S(a_0, a_1, a_2)$. Отже, можна записати залежність між змінними:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

❑ **Вирівнювання за допомогою показникової кривої.** Нехай точки з координатами $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ..., $(x_n; y_n)$ на площині утворюють деяку лінію. Припустимо, що між змінними існує залежність $\hat{y} = ab^x$. Злогарифмуємо цю рівність:

$$\ln \hat{y} = \ln a + x \ln b.$$

Позначивши $\ln a = A$; $\ln b = B$, дістанемо рівняння $\ln \hat{y} = A + Bx$. Тоді, підставивши емпіричні значення $(x_i; y_i)$, $i = \overline{1, n}$, за допомогою МНК дістанемо *нормальну систему рівнянь*:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \ln y_i = nA + B\sum\limits_{i=1}^{n} x_i, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \ln y_i = A\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + B\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо значення A і B, а далі — «найкраще» добрану показникові криву.

8.7 Умовні екстремуми

8.7.1. Умовні екстремуми функції двох змінних

У різноманітних економічних дослідженнях часто трапляються задачі про знаходження екстремумів функції багатьох змінних за наявності *додаткових умов зв'язку* на її аргументи. Такі екстремуми називають ***умовними***.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в області D і в цій області задано деяку лінію L, рівняння якої $\varphi(x, y) = 0$. Розглядаючи питання про екстремум функції $z = f(x, y)$ в області D, можна ставити дві задачі: визначити екстремум функції $z = f(x, y)$ в області D та визначити екстремум функції на лінії L, яка належить цій області. В першому випадкові кажуть про ***безумовний екстремум***, а в другому — про ***умовний***. Остання назва пов'язана з тим, що на змінні x і y накладено додаткову умову $\varphi(x, y) = 0$. Функцію $\varphi(x, y) = 0$, яка задає лінію L, називають ***зв'язком*** (або ***умовою***).

Нехай потрібно знайти екстремум функції $z = f(x, y)$, якщо на змінні x і y накладено умову зв'язку $\varphi(x, y) = 0$. Дослідити функцію на умовний екстремум можна двома методами. Перший метод — ***прямий***, або ***метод зведення до задачі про безумовний екстремум***. Його можна застосовувати, якщо рівняння $\varphi(x, y) = 0$ розв'язне, наприклад відносно $y = \psi(x)$. Тоді, підставляючи $y = \psi(x)$ у вираз функції $z = f(x, y)$, дістанемо складну функцію однієї змінної $z = f(x, \psi(x))$. Добуту функцію досліджують на екстремум.

■ **Приклад 8.33.** *Знайдемо екстремуми функції $z = x^2 + y^2$, якщо її аргументи задовольняють умову зв'язку $x + y - 2 = 0$.*

Екстремуми даної функції шукаються не на всій площині xOy, а лише на прямій $x + y - 2 = 0$. Підставимо у функцію вираз для y з умови зв'язку, тобто $y = 2 - x$, і тим самим зведемо дану задачу про умовний екстремум для функції $z = x^2 + y^2$ до задачі про безумовний екстремум для функції $z = x^2 + (2 - x)^2$. Ця функція має екстремум у точці $x = 1$, тобто функція $z = x^2 + y^2$, за наявності даного зв'язку, має умовний мінімум $z = 2$ у точці (1; 1), який не збігається з безумовним мінімумом функції в точці (0; 0).

8.7.2. Метод невизначених множників Лагранжа знаходження точок умовного екстремуму

Це другий метод знаходження умовних екстремумів. Для дослідження функції $z = f(x, y)$ на умовний екстремум за умови $\varphi(x, y) = 0$, де $\varphi(x, y)$ — диференційовна функція двох аргументів x і y, обчислимо повні диференціали цих функцій, використовуючи формулу (8.8):

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \quad d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy. \tag{8.30}$$

У стаціонарних точках $dz = 0$. Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = 0$$

або

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{8.31}$$

Помноживши друге з рівнянь (8.30) на сталий множник λ і поділивши добуте рівняння на dx, після чого додавши його до рівняння (8.31), дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

або

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{8.32}$$

Із рівняння (8.32) визначаємо стаціонарні точки, вибравши параметр λ так, щоб $\frac{\partial z}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$. Тоді рівняння (8.32) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Остаточно стаціонарні точки умовного екстремуму визначаються із системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (8.33)$$

Якщо розглянути функцію

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \qquad (8.34)$$

то знаходження умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$ зведеться до відшукання безумовного екстремуму функції (8.34), оскільки система (8.33) рівносильна системі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0. \end{cases} \qquad (8.35)$$

Функцію (8.34) називають ***функцією Лагранжа***, а сам метод — ***методом невизначених множників Лагранжа***.

Фактично ми довели теорему, яка дає необхідні умови умовного екстремуму.

ТЕОРЕМА 8.16

(необхідні умови умовного екстремуму функції двох змінних)

Якщо функція $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ має умовний екстремум за умови $\varphi(x, y) = 0$ і існують неперервні частинні похідні першого порядку $f'_x, f'_y, \varphi'_x, \varphi'_y$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ і в деякому її околі, причому $\varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0$, $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то існує таке число λ, що точка $(x_0; y_0; \lambda)$ є критичною точкою функції Лагранжа (8.34), тобто задовольняє систему рівнянь (8.35).

Система (8.35) виражає необхідні умови умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$. Точки $M_i(x_i; y_i)$, координати яких задовольняють

систему (8.35), називають ***критичними точками***. Зауважимо, що точки, в яких f'_x, f'_y не існують, також можуть бути точками екстремуму для функції $z = f(x, y)$.

ТЕОРЕМА 8.17

(достатні умови умовного екстремуму функції двох змінних)

Нехай виконуються такі умови:

1) точка $M_0(x_0; y_0)$ — критична точка функції Лагранжа (8.34) для деякого λ, тобто вона задовольняє умови теореми 8.16;

2) функції $z = f(x, y)$ і $\varphi = \varphi(x, y)$ у деякому δ-околі критичної точки $M_0(x_0; y_0)$ мають неперервні частинні похідні другого порядку, причому $L''_{xx}(x_0, y_0) = A$, $L''_{xy}(x_0, y_0) = B$, $L''_{yy}(x_0, y_0) = C$ і повний диференціал $d^2L(M_0) = A(dx)^2 + 2B\,dx\,dy + C(dy)^2$, де dx і dy задовольняють умову зв'язку $\varphi'_x(x_0, y_0)dx + \varphi'_y(x_0, y_0)dy = 0$.

Тоді:

1) якщо $d^2L(M_0) > 0$, то функція $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ має умовний мінімум;

2) якщо $d^2L(M_0) < 0$, то функція $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ має умовний максимум.

Доведення

Очевидно, що функція Лагранжа (8.34) для всіх x і y задовольняє рівняння зв'язку $\varphi(x, y) = 0$. Тому для таких x і y

$$dL(x, y) = L'(x, y)dx + L'(x, y)dy$$

для всіх dx і dy, що задовольняють рівняння $\varphi'_x(x, y)dx + \varphi'_y(x, y)dy + 0$.

Отже,

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(dy)^2 + \frac{\partial L}{\partial x}d^2x + \frac{\partial L}{\partial y}d^2y +$$

$$+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(dy)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}d^2x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}d^2y = 0$$

для всіх x і y рівняння зв'язку $\varphi(x, y) = 0$.

У критичній точці $M_0(x_0;\, y_0)$ частинні похідні функції Лагранжа дорівнюють нулю. Тому в цій точці

$$d^2L(M_0) = A(dx)^2 + 2B\,dx\,dy + C(dy)^2,$$

де $L''_{xx}(x_0,\, y_0) = A$, $L''_{xy}(x_0,\, y_0) = B$, $L''_{yy}(x_0,\, y_0) = C$, а dx, dy задовольняють умову зв'язку $\varphi'_x(x,\, y)dx + \varphi'_y(x,\, y)dy + 0$.

За формулою Тейлора для функції $z = f(x,\, y)$ у точці $M_0(x_0;\, y_0)$

$$\Delta z = f(x,\, y) - f(x_0,\, y_0) = \frac{1}{2}d^2L(M_0).$$

Якщо $d^2L(x_0,\, y_0) > 0$, а dx, dy задовольняють умову зв'язку $\varphi'_x(x,\, y)dx + \varphi'_y(x,\, y)dy = 0$ у точці $M_0(x_0;\, y_0)$, то $f(x,\, y) < f(x_0,\, y_0)$, а отже, функція $z = f(x,\, y)$ має в точці $M_0(x_0;\, y_0)$ умовний мінімум.

Якщо $d^2L(x_0,\, y_0) < 0$, а dx, dy задовольняють умову зв'язку $\varphi'_x(x,\, y)dx + \varphi'_y(x,\, y)dy = 0$ у точці $M_0(x_0;\, y_0)$, то $f(x,\, y) > f(x_0,\, y_0)$, а отже, функція $z = f(x,\, y)$ у точці $M_0(x_0;\, y_0)$ має умовний максимум.

Теорему доведено.

8.7.3. Умовні екстремуми функції багатьох змінних

У загальному випадкові задача знаходження умовного екстремуму формулюється так: знайти екстремум функції $z = f(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$ від n змінних, яка визначена в області $D \in \boldsymbol{R}^n$ на деякій підмножині точок X в області D, координати яких задовольняють *рівняння зв'язку* або *обмеження*

$$\varphi_j(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) = 0, \quad j = \overline{1,\, m}, \quad m < n. \qquad (8.36)$$

➡ **Означення 8.33.** *Точку $M_0(x_1^0;\, x_2^0;\, \ldots;\, x_n^0) \in X$ називають **точкою умовного максимуму функції** $z = f(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$ відносно рівняння зв'язку (8.36), якщо для всіх достатньо близьких до неї точок $M(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n) \in X$ виконується нерівність $f(M) \le f(M_0)$.*

➡ **Означення 8.34.** *Точку $M_0(x_1^0;\, x_2^0;\, \ldots;\, x_n^0) \in X$ називають **точкою умовного мінімуму функції** $z = f(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$ відносно рівняння зв'язку (8.36), якщо для всіх достатньо близьких до неї точок $M(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n) \in X$ виконується нерівність $f(M) \ge f(M_0)$.*

➡ **Означення 8.35.** *Точки умовного максимуму й умовного мінімуму називають **точками умовного екстремуму**.*

Відмінність умовного екстремуму від звичайного полягає в тому, що нерівність має виконуватися не взагалі для всіх точок, достатньо близьких до точки M_0, а лише для тих, які належать множині X (у цьому й полягає *умовність* екстремуму).

Якщо рівняння зв'язку (8.36) можна розв'язати відносно m змінних, наприклад відносно змінних x_1, x_2, ..., x_m,

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_{m+1},\, \ldots,\, x_n), \\ x_2 = g_2(x_{m+1},\, \ldots,\, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = g_m(x_{m+1},\, \ldots,\, x_n), \end{cases}$$

то, підставивши ці значення у вираз функції, зведемо задачу до дослідження її на безумовний екстремум.

■ **Приклад 8.34.** *Знайдемо умовний екстремум функції $z = f(x_1,\, x_2,\, x_3) = x_1x_2x_3$ відносно рівнянь зв'язку $x_1 + x_2 - x_3 = 3$, $x_1 - x_2 - x_3 = 3$.*

Розв'яжемо рівняння зв'язку відносно змінних x_1 і x_2, підставимо значення x_1 та x_2 у вираз функції і зведемо задачу до дослідження на безумовний екстремум функції $z = -3x_3(6 + x_3) = -18x_3 - 3x_3^2$.

Обчислимо похідну: $z' = -18 - 6x_3$. Оскільки $z' = 0$ при $x_3 = -3$, а $z'' = -6 < 0$, то $x_3 = -3$ — точка максимуму функції. Отже, задана функція в точці (3; –3; –3) має умовний максимум, що становить $z_{\max} = 27$.

Для застосувань найважливішим є випадок, коли множина X задається за допомогою деякої системи рівнянь і нерівностей.

Нехай для функції n змінних $z = f(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$ потрібно знайти умовний екстремум за наявності m умов зв'язку (8.36), і ці функції неперервно диференційовні в околі точки $M_0(x_1^0;\, x_2^0;\, \ldots;\, x_n^0)$, координати якої задовольняють умови зв'язку, і ранг матриці Якобі

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

у цій точці дорівнює m.

➡ **Означення 8.36.** *Функцію*

$$L = L(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (8.37)$$

*називають **функцією Лагранжа**, а параметри* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — ***множниками Лагранжа.***

ТЕОРЕМА 8.18
(необхідні умови існування умовного екстремуму функції багатьох змінних)

Аби точка $M_0(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$ була точкою умовного екстремуму функції (8.37) за рівняння зв'язку (8.36), необхідно, щоб її координати при деяких значеннях $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ задовольняли систему рівнянь

$$\frac{\partial L(M_0)}{\partial x_k} = 0, \quad k = \overline{1, n}, \qquad (8.38)$$

$$\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad m < n. \qquad (8.39)$$

Умови (8.38) і (8.39) означають, що точка $M_0(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$ є стаціонарною точкою функції Лагранжа і її координати задовольняють умови зв'язку.

ТЕОРЕМА 8.19
(достатні умови існування умовного екстремуму)

Нехай функції $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $j = \overline{1, m}$, $m < n$, які входять у рівняння зв'язку (8.36), двічі неперервно диференційовні в околі точки $M_0(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$ і в цій точці виконуються необхідні умови (8.38), (8.39). Тоді в разі виконання умов

$$d\varphi_j(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_k} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} dx_k^2 > 0 \qquad (8.40)$$

другий диференціал функції Лагранжа $d^2L(M_0)$ є додатно-визначеною (від'ємно-визначеною) квадратичною формою. Це означає, що функція $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у точці $M_0(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$ має умовний мінімум (максимум). Якщо за умов (8.40) другий диференціал $d^2L(M_0)$ є знакозмінною квадратичною формою, то в точці $M_0(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$ функція умовного екстремуму не має.

?

Контрольні запитання

1. Що називають функцією двох (багатьох) змінних?
2. Як знаходять область визначення функції двох змінних?
3. Які існують способи задання функції багатьох змінних?
4. Які лінії називають лініями рівня функції двох змінних?
5. Що таке поверхня рівня функції багатьох змінних?
6. Які функції багатьох змінних використовуються в економічній теорії?
7. Яке означення границі функції двох (багатьох) змінних?
8. Які основні теореми про границі функцій багатьох змінних?
9. Яке означення неперервності функції двох (багатьох) змінних?
10. Яку функцію двох змінних називають неперервною в точці, в області?
11. Що таке частинні й повний прирости функції багатьох змінних?
12. Яке означення частинних похідних функції двох (багатьох) змінних?
13. Як обчислюються частинні похідні другого, ..., *n*-го порядків?

14. Які похідні називають мішаними?
15. Яку функцію двох змінних наживають диференційовною в точці?
16. Яка необхідна умова диференційовності функції?
17. Якщо функція диференційовна в точці, то чи буде вона неперервною в цій точці?
18. Якщо функція неперервна в точці, то чи буде вона диференційовною в цій точці?
19. Яка достатня умова диференційовності функції?
20. Чи випливає неперервність функції двох змінних із неперервності її частинних похідних?
21. Що називають повним диференціалом функції двох (багатьох) змінних?
22. За якою формулою обчислюється повний диференціал функції?
23. Як використовують повний диференціал функції в наближених обчисленнях?
24. Які правила знаходження похідної складної функції двох змінних?
25. Як обчислюється похідна функції, заданої неявно?
26. Як обчислюються частинні похідні вищих порядків?
27. Як знайти похідну функції за напрямом даного вектора?
28. Що називають градієнтом функції? Що він характеризує?
29. Який геометричний та економічний зміст градієнта? Який зв'язок між градієнтом функції двох змінних та її лінією рівня?
30. Як записується формула Тейлора для функції двох змінних?
31. Що таке точки локального екстремуму функції двох змінних?
32. Як формулюються необхідні умови локального екстремуму функції двох змінних?
33. Як знайти критичні точки функції двох змінних?
34. Як формулюються достатні умови локального екстремуму функції двох змінних?
35. За яким алгоритмом досліджують функцію двох змінних на екстремум?
36. Що таке квадратичні форми?

37. Яку квадратичну форму називають законовизначеною, а яку — знакозмінною?
38. Як формулюється критерій Сільвестра?
39. Що таке точки локального екстремуму функції багатьох змінних?
40. Як формулюються необхідні умови локального екстремуму функції багатьох змінних?
41. Які точки називають стаціонарними точками функції багатьох змінних?
42. Що таке матриця Гессе?
43. Як формулюються достатні умови локального екстремуму функції багатьох змінних?
44. За яким алгоритмом знаходять найбільше й найменше значення функції двох змінних в області?
45. Яка основна ідея методу найменших квадратів?
46. За якими формулами обчислюються коефіцієнти в методі найменших квадратів у випадку лінійної залежності $y = ax + b$?
47. Як знайти умовний екстремум функції двох змінних?
48. У чому полягає суть методу невизначених множників Лагранжа знаходження точок умовного екстремуму?
49. Як знаходять умовний екстремум функції багатьох змінних?

Приклади розв'язування задач

$\boxed{1}$ *Знайти область визначення функції* $z = \frac{\pi}{3} y^2 \sqrt{x^2 - y^2}$.

Оскільки жодних додаткових обмежень на аргументи x і y не накладено, область визначення D складатиметься з усіх тих точок площини, для яких даний аналітичний вираз набуває дійсних значень. Для того щоб значення функції z були дійсними числами, підкореневий вираз має бути невід'ємним, тобто $x^2 - y^2 \geq 0$, або $x^2 \geq y^2$.

Якщо залишити тут тільки знак рівності, то вийде рівняння межі області D: $x^2 = y^2$, або $x = \pm y$. Ця межа складається з двох бісектрис $x = y$ та

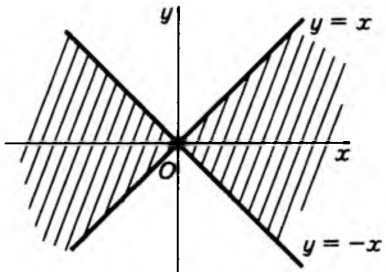


Рис. 8.11

$x = -y$ координатних кутів. Для внутрішніх точок області D має виконуватися нерівність $x^2 \geq y^2$, або $|x| \geq |y|$. Отже, ці точки розташовані між бісектрисами ближче до осі Ox, оскільки $|y|$ є відстанню точки $P(x; y)$ до осі Ox і вона менша за відстань $|x|$ точки P до осі Oy. Таким чином, область D складається з усіх точок двох кутів між бісектрисами $y = \pm x$, всередині яких лежить вісь Ox (рис. 8.11).

2 *Знайти область визначення функції* $z = \ln(4 + 4x - y^2)$.

Логарифм визначений тільки в разі додатного значення його аргументу, тому $4 + 4x - y^2 > 0$, або $4 + 4x > y^2$. Жодних інших обмежень на аргументи x та y немає. Щоб геометрично зобразити область D, знайдемо спочатку її межу $4 + 4x = y^2$, або $y^2 = 4(x + 1)$. Добуте рівняння визначає параболу, вершина якої розташована в точці $(-1; 0)$, а вісь збігається з додатним напрямом осі Ox (рис. 8.12). Точки перетину параболи з віссю Oy можна дістати з умови $x = 0$, звідки $y^2 = 4$, тобто $y = \pm 2$.

Парабола поділяє всю площину на дві частини — зовнішню й внутрішню відносно параболи. Для точок однієї з цих частин виконується нерівність $y^2 < 4 + 4x$, а для іншої — $y^2 > 4 + 4x$. На самій параболі $y^2 = 4 + 4x$. Щоб установити, яка з цих двох частин є областю визначення даної функції, тобто задовольняє умову $y^2 < 4 + 4x$, достатньо перевірити цю умову для якої-небудь однієї точки, що не лежить на параболі. Наприклад, початок координат $O(0; 0)$ лежить усередині параболи й задовольняє потрібну умову: $0 < 4 + 4 \cdot 0$.

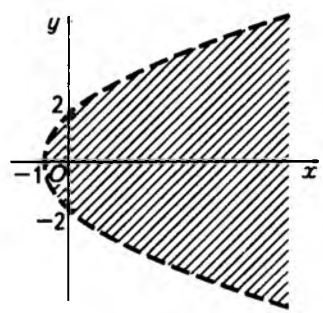


Рис. 8.12

Отже, область D складається з внутрішніх точок, які лежать усередині параболи. Сама парабола в область D входити не може, оскільки для точок параболи $4 + 4x - y^2 = 0$ і логарифм не визначений (рис. 8.12).

3 *Знайти область визначення функції*

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2).$$

Дана функція визначена й набуває дійсних значень за умов $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$ і $4 - x^2 - y^2 > 0$.

Запишемо рівняння межі області визначення D:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ 4 - x^2 - y^2 = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Таким чином, межа області D складається з двох кіл із центром у початку координат і радіусами $R = 1$ і $R = 2$. Ці кола поділяють усю площину на три частини. При цьому для внутрішніх точок області D мають одночасно виконуватися нерівності $x^2 + y^2 - 1 > 0$ і $4 - x^2 - y^2 > 0$.

Візьмемо три точки $O(0; 0)$, $A(3/2; 0)$ та $B(5/2; 0)$, що лежать у різних частинах площини, й перевіримо, чи виконуються для них нерівності. Координати точки O не задовольняють першу нерівність, а точки B — другу. Для точки A: $(3/2)^2 + 0 - 1 > 0$ і $4 - (3/2)^2 - 0 > 0$.

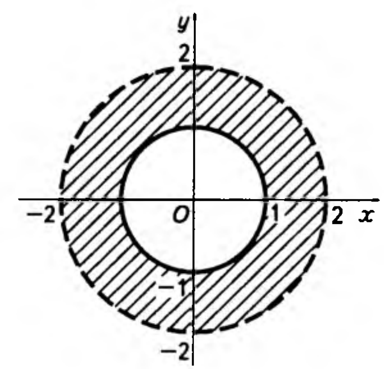


Рис. 8.13

Отже, шукана область D є кільцем, що міститься між двома даними колами. При цьому внутрішнє коло треба включити до області D, оскільки рівність $x^2 + y^2 - 1 = 0$ є можливою, а зовнішнє коло в область D не входить (рис. 8.13).

4 *Обчислити границю* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \dfrac{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y-2)^2}$.

Дана границя шукається за умови $M(x;\,y) \to (0;\,2)$. Відстань між цими точками $\rho = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$, тому

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \frac{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y-2)^2} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\sqrt{\rho^2 + 1} - 1}{\rho^2} = \lim_{\rho \to 0} \frac{(\rho^2 + 1) - 1}{\rho^2 \left(\sqrt{\rho^2 + 1} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2}{\rho^2 \left(\sqrt{\rho^2 + 1} + 1\right)} = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

5 *Обчислити границю* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{xy}$.

У даному випадкові $M(x;\,y) \to (0;\,0)$. Відстань між цими точками $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, тому

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy} = \lim_{\rho \to 0} \rho^2 \sin \frac{1}{xy} = 0.$$

Урахували, що добуток нескінченно малої величини ρ^2 на обмежену функцію $\left(\left|\sin \dfrac{1}{xy}\right| \le 1\right)$ є нескінченно малою величиною при $\rho \to 0$.

6 *З'ясувати, чи існує границя* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Припустимо, що змінна точка $M(x;\,y)$ наближається до початку координат не довільним чином, а по деякій прямій $y = kx$. Уздовж цієї прямої значення функції $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ сталі, оскільки при $y = kx$ маємо

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - k^2x^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2},$$

тому й

$$\lim_{\substack{\rho \to 0 \\ \text{вздовж } y = kx}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}.$$

Однак, якщо наближатися до початку координат із різних боків, то функція $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ прямуватиме до різних граничних значень. Справді, величина $\dfrac{1 - k^2}{1 + k^2}$ набуває свого значення для кожного k. Наприклад, при $M \to 0$ уздовж осі Ox ($k = 0$) значення z прямують до 1, а в разі руху вздовж бісектриси $y = x (k = 1)$ значення z прямують до 0. Отже, за означенням границі дана границя не існує.

7 *Знайти частинні похідні функції* $z = x^3 + y^3 - 3axy$. *Обчислити їхні значення в точці* $M_0(1;\,1)$.

Вважаючи y сталою, знаходимо частинну похідну за змінною x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^3 + y^3 - 3axy)'_x = 3x^2 + 0 - 3ay \cdot 1 = 3x^2 - 3ay.$$

Шукаючи частинну похідну за змінною y, фіксуємо аргумент x:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^3 + y^3 - 3axy)'_y = 0 + 3y^2 - 3ax \cdot 1 = 3y^2 - 3ax.$$

Обчислимо значення частинних похідних у точці $M_0(1;\,1)$:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = 3 - 3a, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = 3 - 3a.$$

8 *Знайти значення частинних похідних функції* $z = e^{-xy}$ *у точці* $M_0(0;\,1)$.

Обчислимо спочатку частинні похідні, використовуючи формулу диференціювання складної функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (e^{-xy})'_x = e^{-xy}(-xy)'_x = e^{-xy}(-y) = -ye^{-xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (e^{-xy})'_y = e^{-xy}(-xy)'_y = e^{-xy}(-x) = -xe^{-xy}.$$

Підставимо координати точки $M_0(0;\ 1)$:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0} = -1, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0} = 0.$$

9 *Довести, що функція* $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$ *задовольняє рівняння* $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2.$

Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + xy + y^2}(x^2 + xy + y^2)'_x = \frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + xy + y^2}(x^2 + xy + y^2)'_y = \frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2}.$$

Підставимо їх у дане рівняння:

$$x\frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2} + y\frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2} = 2,$$

$$\frac{2x^2 + 2xy + 2y^2}{x^2 + xy + y^2} = 2, \quad 2 = 2.$$

Добута тотожність показує, що функція справді задовольняє дане рівняння.

10 *Знайти повний диференціал функції* $z = x^2y - y^2x.$

Обчислимо частинні похідні функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2y - y^2x)'_x = 2xy - y^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2y - y^2x)'_y = x^2 - 2xy.$$

Повний диференціал функції обчислюється за формулою (8.8). Отже,

$$dz = (2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy.$$

Повний диференціал можна знайти й інакше, користуючись формулами для диференціалу різниці та добутку:

$$dz = d(x^2y - y^2x) = d(x^2y) - d(y^2x) = yd(x^2) + x^2\,dy - xd(y^2) - y^2\,dx =$$

$$= 2xy\,dx + x^2\,dy - y^2\,dx = (2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy.$$

11 *Знайти частинні похідні* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *і* $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ *та повний диференціал dz функції*

$$z = e^{x^2+3y} + \operatorname{arctg}\frac{x + y}{x - y}.$$

Обчислюємо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+3y} + \frac{1}{1 + \left(\frac{x + y}{x - y}\right)^2}\frac{-2y}{(x - y)^2} = 2xe^{x^2+3y} - \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3e^{x^2+3y} + \frac{1}{1 + \left(\frac{x + y}{x - y}\right)^2}\frac{2x}{(x - y)^2} = 3e^{x^2+3y} + \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Знаходимо повний диференціал даної функції:

$$dz = \left(2xe^{x^2+3y} - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(3e^{x^2+3y} + \frac{x}{x^2 + y^2}\right)dy.$$

Диференціюючи повторно, дістаємо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xe^{x^2+3y} - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) = 2xe^{x^2+3y}\cdot 3 - \frac{1(x^2 + y^2) - 2yy}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= 6xe^{x^2+3y} - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

12 *Знайти частинні похідні* $\frac{\partial z}{\partial u}$ *та* $\frac{\partial z}{\partial v}$ *складної функції*

$$z = x^2 \ln y, \text{ де } x = u/v,\ y = uv.$$

Спочатку обчислимо частинні похідні даних функцій:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\ln y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{y}, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u.$$

Шукані частинні похідні знаходяться за формулами (8.10). Підставивши в них добуті частинні похідні, дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2x\ \ln\ y\frac{1}{v} + \frac{x^2}{y}v = 2\frac{u}{v}\ln(uv) + \frac{u^2}{v^2}\frac{1}{uv}v = \frac{u}{v^2}(2\ \ln(uv) + 1),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2x\ \ln\ y\left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{x^2}{y}u = -2\frac{u}{v}\ln(uv) + \frac{u}{v^2} + \frac{u^2}{v^2}\frac{1}{uv}u.$$

13 ***Знайти*** $\frac{dz}{dt}$, ***якщо*** $z = x^2 + xy + y^2$, ***де*** $x = t^2$, $y = t^3$.

Похідна складної функції обчислюється за формулою (8.13). Знайшовши частинні похідні й підставивши їх у формулу (8.13), дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (2x + y)2t + (x + 2y)3t^2 =$$

$$= (2t^2 + t^3)2t + (t^2 + 2t^3)3t^2 = 4t^3 + 5t^4 + 6t^5.$$

Такий самий результат можна дістати й іншим способом: спочатку виразити z явно через t, а потім знайти похідну добутої функції:

$$z = z(t) = (t^2)^2 + t^2t^3 + (t^3)^2 = t^4 + t^5 + t^6.$$

Отже,

$$\frac{dz}{dt} = 4t^3 + 5t^4 + 6t^5.$$

14 ***Знайти другі частинні похідні функції*** $z = \ln(x^2 + y^2)$. ***Переконатися, що*** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

Спочатку обчислюємо перші частинні похідні даної функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = [\ln(x^2 + y^2)]'_x = \frac{1}{x^2 + y^2}(x^2 + y^2)'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = [\ln(x^2 + y^2)]'_y = \frac{1}{x^2 + y^2}(x^2 + y^2)'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

Диференціюючи кожну з добутих похідних за x і за y, дістанемо другі частинні похідні:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right)'_x = 2\frac{x^2 + y^2 - x\cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right)'_y = -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}2y = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right)'_x = -\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2}2x = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right)'_y = 2\frac{x^2 + y^2 - y\cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Отже, мішані частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ рівні між собою.

Цікаво зазначити, що для даної функції похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ відрізняються лише знаком.

15 ***Знайти*** $\frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2}$ ***для функції*** $z = \sin xy$.

Здиференціювавши дану функцію двічі за x і потім ще раз за y, дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\sin xy)'_x = \cos xy(xy)'_x = y\cos xy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (y\cos xy)'_x = -y^2\sin xy,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = (-y^2\sin xy)'_y = -2y\sin xy - xy^2\cos xy.$$

16 ***Знайти диференціал другого порядку функції*** $z = 3x^2y - 2xy + y^2 - 1$.

Обчислюємо перші й другі частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 2y,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 2x + 2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 6x - 2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

Підставивши добуті частинні похідні другого порядку у формулу (8.21), матимемо

$$d^2z = 6y\,dx^2 + 2(6x-2)dx\,dy + 2dy^2.$$

Такий самий результат можна дістати й іншим способом. Знайдемо спочатку перший диференціал даної функції:

$$dz = 3d(x^2y) - 2d(xy) + d(y^2-1) =$$

$$= 3x^2dy + 6xy\,dx - 2x\,dy - 2y\,dx + 2y\,dy =$$

$$= (6xy - 2y)dx + (3x^2 - 2x + 2y)dy.$$

Обчисливши диференціал від dz, знайдемо d^2z; при цьому dx і dy слід вважати сталими:

$$d^2z = d[(6xy-2y)dx + (3x^2-2x+2y)dy] =$$

$$= (6x\,dy + 6y\,dx - 2\,dy)dx + (6x\,dx - 2\,dx + 2\,dy)dy =$$

$$= 6y\,dx^2 + (12x-4)dx\,dy + 2\,dy^2.$$

17 ***Знайти*** grad u ***для функції*** $u = y^2z - 2xy^2 + z^2$ ***у точці*** $M_0(3;\ 1;\ 1)$ ***та похідну*** $\frac{\partial u}{\partial l}$ ***за напрямом вектора*** $\vec{l}$, ***що утворює з координатними осями кути*** $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/4$.

За умовою задачі $\cos\alpha = \cos(\pi/3) = 1/2$, $\cos\beta = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$. Оскільки $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, де γ — гострий кут, то

$$\cos\gamma = \sqrt{1-\cos^2\alpha - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Знаходимо частинні похідні функції $u(x, y, z)$ у точці $M_0(3;\ 1;\ 1)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = (-2yz)|_{M_0} = -2,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = (2yz - 2xz)|_{M_0} = -4,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = (y^2 - 2xy + 2z)|_{M_0} = -3.$$

Похідна за напрямом вектора $\vec{l}$ обчислюється за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

У нашому випадкові

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (-2)\frac{1}{2} + (-4)\frac{1}{\sqrt{2}} + (-3)\frac{1}{2} = -\frac{5+4\sqrt{2}}{2}.$$

Знайдемо градієнт функції u у точці M_0:

$$\text{grad}\, u = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\vec{i} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\vec{j} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\vec{k}.$$

У нашому випадкові grad $u = -2\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$, а його довжина

$$|\,\text{grad}\, u\,| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}.$$

Напрям вектора градієнта задають напрямні косинуси:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\,\text{grad}\, u\,|} = \frac{-2}{\sqrt{29}},\quad \cos\beta = \frac{y}{|\,\text{grad}\, u\,|} = \frac{-4}{\sqrt{29}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\,\text{grad}\, u\,|} = \frac{-3}{\sqrt{29}}.$$

18 ***Знайти частинні похідні*** $\frac{\partial z}{\partial x}$ ***і*** $\frac{\partial z}{\partial y}$ ***функції, заданої неявно рівнянням*** $z^3 + 2xz + x^2 - 2 = 0$, ***у точці*** $M_0(1;\ 2;\ 3)$.

Якщо функцію задано неявно рівнянням $F(x, y, z) = 0$, то частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ можна знайти за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}.$$

У нашій задачі $F(x, y, z) = z^3 + 2xz + xy - 2$.
Дістаємо

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2z + y^2,\quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2xy,\quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 + 2x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}=\frac{-(2z+y^2)}{3z^2+2x}=\frac{-2z-y^2}{3z^2+2x},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=\frac{-2\cdot 3-2^2}{3\cdot 3^2+2\cdot 1}=-\frac{10}{29},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}=\frac{-(2xy)}{3z^2+2x}=\frac{-2xy}{3z^2+2x},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=\frac{-2\cdot 1\cdot 2}{3\cdot 3^2+2\cdot 1}=-\frac{4}{29}.$$

19 ***Знайти екстремуми функції*** $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

Обчислюємо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-4x+4y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=4y^3+4x-4y.$$

Прирівнявши ці похідні до нуля, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases}x^3-x+y=0,\\ y^3+x-y=0,\end{cases}$$

з якої визначатимуться стаціонарні точки даної функції. Додавши ці рівняння, дістанемо $x^3+y^3=0$, тобто $y^3=-x^3$. Отже, $y=-x$. Підставивши $y=-x$ у перше з рівнянь, знайдемо значення x: $x^3-2x=0$, або $x(x^2-2)=0$. Звідси $x_1=0$, $x_2=\sqrt{2}$, $x_3=-\sqrt{2}$, а тоді $y_1=0$, $y_2=-\sqrt{2}$, $y_3=\sqrt{2}$. Маємо три стаціонарні точки: $M_1(0;0)$, $M_2(\sqrt{2};-\sqrt{2})$, $M_3(-\sqrt{2};\sqrt{2})$.

Перевіряємо достатні умови для добутих точок. Знайдемо спочатку другі частинні похідні:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-4,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=4,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-4.$$

Підставивши в похідні координати стаціонарних точок, дістанемо:

для точки $M_1(0;0)$: $A=-4$, $B=4$, $C=-4$, $\Delta=AC-B^2=0$;

для точки $M_2(\sqrt{2};-\sqrt{2})$: $A=20>0$, $B=4$, $C=20$, $\Delta=AC-B^2=384>0$;

для точки $M_3(-\sqrt{2};\sqrt{2})$: $A=20>0$, $B=4$, $C=20$, $\Delta=AC-B^2=384>0$.

У точках M_2 і M_3 маємо $\Delta>0$ і $A>0$, а отже, це точки мінімуму функції. Знайдемо мінімальне значення функції z: $z_{\min}=z(M_2)=z(M_3)=-8$.

У точці M_1 маємо $\Delta=0$, і достатні умови відповіді не дають. Додатковим дослідженням можна встановити, що в початку координат функція екстремуму не має. Справді, в цій точці $z=0$, а в довільному околі початку координат є точки, в яких значення z можуть бути як додатними, так і від'ємними. Наприклад, уздовж осі Ox (тобто при $y=0$)

$$z=x^4-2x^2=-x^2(2-x^2)<0$$

поблизу початку координат, а вздовж бісектриси $y=x$ значення функції

$$z=x^4+x^4-2x^2+4x^2-2x^2=2x^4>0.$$

20 ***Знайти екстремуми функції*** $z=1+6x-x^2-xy-y^2$.

Обчислюємо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6-2x-y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-x-2y.$$

Стаціонарні точки задовольняють таку систему рівнянь:

$$\begin{cases}6-2x-y=0,\\ x+2y=0.\end{cases}$$

Розв'язок цієї системи: $x_0=4$, $y_0=-2$. Отже, дана функція має тільки одну стаціонарну точку $M_0(4;-2)$.

Обчислимо другі частинні похідні:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-1,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2.$$

Тому в довільній точці, а отже, й у точці M_0: $A=-2$, $B=-1$, $C=-2$, $\Delta=AC-B^2=3$. Оскільки $\Delta>0$, а $A<0$, то M_0 є точкою максимуму даної функції і $z_{\max}=z(M_0)=1+6\cdot 4-16-4(-2)-4=13$.

21 ***Знайти найбільше M та найменше m значення функції*** $z=2xy-x^2y-xy^2$ ***в обмеженій області*** $x=1/2$, $y=0$, $x+y=6$.

Спочатку шукатимемо критичні точки для нашої функції.

Розв'яжемо систему

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2y-2xy-y^2=0,\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=2x-x^2-2xy=0.\end{cases}$$

Віднімемо від першого рівняння друге:

$$2y-2x-y^2+x^2=2(y-x)-(y-x)(y+x)=(y-x)(2-y-x).$$

Отже, або $y=x$, або $y=2-x$.

Підставимо в перше рівняння системи $y=x$. Дістанемо

$$2x-2x^2-x^2=2x-3x^2=x(2-3x)=0.$$

Звідси $x_1=0$, $x_2=2/3$ і відповідно $y_1=0$, $y_2=2/3$.

Підставимо в друге рівняння системи $y = 2 - x$:

$$2x - x^2 - 2x(2-x) = 2x - x^2 - 4x + 2x^2 = -2x + x^2 = x(x-2) = 0.$$

Звідси $x_3 = 0$, $x_4 = 2$ і відповідно $y_3 = 2$, $y_4 = 0$.

Маємо критичні точки: $M_1(0;\ 0)$, $M_2\left(\frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right)$, $M_3(0;\ 2)$, $M_4(2;\ 0)$. Серед них лише M_2 і M_4 належать даній області.

Щоб визначити характер цих точок, знайдемо другі частинні похідні:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 2 - 2x - 2y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x.$$

Для точки M_2

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2} = -\frac{4}{3},\quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right|_{M_2} = -\frac{2}{3},\quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_2} = -\frac{4}{3};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = \frac{4}{3}\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\frac{2}{3} = 4 > 0.$$

Оскільки $A < 0$, то в точці M_2 маємо локальний максимум.

Знайдемо значення функції в цій точці:

$$z\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right) = 2\frac{2}{3}\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}.$$

Для точки M_4

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_4} = 0,\quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right|_{M_4} = -2,\quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_4} = -4;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

Отже, в точці M_4 немає локального екстремуму.

Перейдемо до дослідження функції на межі області. Межа області складається з трьох відрізків: 1) $y = 0$, $1/2 \le x \le 6$; 2) $x = 1/2$, $0 \le y \le 11/2$; 3) $y = 6 - x$, $1/2 \le x \le 6$.

Дослідимо функцію на екстремум на кожному з відрізків. Почнемо з першого. Підставивши в нашу функцію $y = 0$, дістанемо $z = 0$, тобто на першому відрізку функція є сталою й скрізь дорівнює нулю.

Досліджуємо функцію на другому відрізку. Підставивши в неї $x = 1/2$, матимемо $z = \frac{3}{4}y - \frac{1}{2}y^2$. Шукаємо критичні точки: $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{4} - y = 0$, звідки $y = \frac{3}{4}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -1 < 0$. Отже, в точці $M_5\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{4}\right)$ (яка належить відрізку) маємо локальний максимум. Обчислимо значення функції в точці M_5: $z\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right) = \frac{9}{32}$.

Досліджуємо функцію на третьому відрізку. Підставивши в неї $y = 6 - x$, дістанемо

$$z = 2x(6-x) - x^2(6-x) - x(6-x)^2 = -24x + 4x^2.$$

Шукаємо критичні точки: $\frac{\partial z}{\partial x} = -24 + 8x = 0$, звідки $x = 3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 8 > 0$. Відповідне значення $y = 6 - x = 6 - 3 = 3$. Отже, в точці $M_6(3;\ 3)$ (яка належить відрізку) маємо локальний мінімум. Обчислимо значення функції у точці M_6: $z(3,\ 3) = -36$.

Залишилося знайти значення функції на кінцях кожного з відрізків або, що одне й те саме, у вершинах трикутника, який обмежує задану область.

Вершини трикутника: $M_7\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$, $M_8(6;\ 0)$, $M_9\left(\frac{1}{2};\ \frac{11}{2}\right)$. Досліджуючи перший відрізок, ми встановили, що в точках M_7 і M_8 функція дорівнює нулю. В точці M_9 маємо $z\left(\frac{1}{2},\ \frac{11}{2}\right) = -11$.

Щоб визначити мінімальне й максимальне значення функції в заданій області, слід порівняти значення функції в точках M_2, M_5, M_6, M_7, M_8, M_9 і знайти ті точки, в яких функція набуває найбільшого й найменшого значень. Значення функції в зазначених точках: $\frac{8}{27}$, $\frac{9}{32}$, -36, 0, 0, -11 відповідно. Отже, максимум досягається в точці M_2, а мінімум — у точці M_6. При цьому

$$z_{\max} = z(M_2) = z\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27},\quad z_{\min} = z(M_6) = z(3,\ 3) = -36.$$

22 *Знайти найбільше й найменше значення функції $z = x + y$ у крузі $x^2 + y^2 \le 1$.*

Стаціонарних точок функція не має, оскільки $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \ne 0$. Тому найбільшого й найменшого значень вона може набувати тільки на межі області, тобто на колі $x^2 + y^2 = 1$.

Запишемо параметричні рівняння кола: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$.

На колі $z = x + y$ буде функцією від t: $z = z(t) = \cos t + \sin t$. Шукаємо стаціонарні точки цієї функції: $z'(t) = -\sin t + \cos t$, тобто $\sin t = \cos t$, звідки $t_1 = \frac{\pi}{4}$, $t_2 = \frac{5\pi}{4}$. Знайдемо значення функції в цих точках:

$$z_1 = z\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}, \quad x_1 = y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_2 = z\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2}, \quad x_2 = y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Цим доведено, що найбільшого значення $z = \sqrt{2}$ і найменшого $z = -\sqrt{2}$ дана функція набуває в граничних точках $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ і $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

23 *Знайти умовний екстремум функції $z = x + y$ за умови $x^2 + y^2 = 1$.*

Запишемо нашу умову у вигляді $\varphi(x, y) = 0$, тобто $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Складемо функцію Лагранжа: $L(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.

Знайдемо її частинні похідні та прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2\lambda y = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Із першого рівняння маємо $x = -\frac{1}{2\lambda}$, із другого — $y = -\frac{1}{2\lambda}$. Підставляючи ці значення в третє рівняння, дістанемо $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0$, звідки

$\lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Знайшовши відповідні значення x та y, дістанемо дві точки: $M_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Далі необхідно з'ясувати, чи є знайдені точки точками екстремуму. Для цього обчислимо значення другого диференціала функції $L(x, y, \lambda)$ у цих точках, вважаючи λ параметром. Знаходимо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x\, \partial y} = 0$$

та диференціал другого порядку

$$d^2 L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x\, \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 = 2\lambda(dx^2 + dy^2).$$

Оскільки при $\lambda = \sqrt{2}/2$ другий диференціал $d^2L > 0$, то в точці M_1 маємо умовний мінімум:

$$z\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}.$$

Відповідно при $\lambda = -\sqrt{2}/2$ другий диференціал $d^2L < 0$, і в точці M_2 маємо умовний максимум:

$$z\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

24 *Результати експерименту наведено в таблиці:*

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	1,5	–4,5	–5	–2,7	5,3	17,4

Методом найменших квадратів знайти коефіцієнти a, b і c функції $y = ax^2 + bx + c$.

Згідно з МНК коефіцієнти a, b, c визначаються із системи рівнянь

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i. \end{cases}$$

Знаходимо відповідні суми:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1+2+3+4+5+6 = 21,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1+4+9+16+25+36 = 91,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 1+8+27+64+125+216 = 441,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^4 = 1+16+81+256+625+1296 = 2275,$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1{,}5-4{,}5-5-2{,}7+5{,}3+17{,}4 = 12,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1\cdot 1{,}5+2(-4{,}5)+3(-5)+4(-2{,}7)+5\cdot 5{,}3+6\cdot 17{,}4 = 97{,}6,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i = 1\cdot 1{,}5+4(-4{,}5)+9(-5)+16(-2{,}7)+25\cdot 5{,}3+36\cdot 17{,}4 = 654{,}2.$$

Складаємо систему:

$$\begin{cases} 91a + 21b + 6c = 12, \\ 441a + 91b + 21c = 97{,}6, \\ 2275a + 441b + 91c = 654{,}2. \end{cases}$$

Розв'язуємо її за правилом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 91 & 21 & 6 \\ 441 & 91 & 21 \\ 2275 & 441 & 91 \end{vmatrix} = 753\,571 + 1\,166\,886 + 1\,003\,275 - 1\,242\,150 -$$

$$-842\,751 - 842\,751 = -3920,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 21 & 6 \\ 97{,}6 & 91 & 21 \\ 654{,}2 & 441 & 91 \end{vmatrix} = 99\,372 + 288\,502{,}2 + 258\,249{,}6 - 357\,193{,}2 -$$

$$-111\,132 - 186\,513{,}6 = -8715,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 91 & 12 & 6 \\ 441 & 97{,}6 & 21 \\ 2275 & 654{,}2 & 91 \end{vmatrix} = 808\,225{,}6 + 573\,300 + 1\,731\,013{,}2 -$$

$$-1\,332\,240 - 481\,572 - 1\,250\,176{,}2 = 48\,550{,}6,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 91 & 21 & 12 \\ 441 & 91 & 97{,}6 \\ 2275 & 441 & 654{,}2 \end{vmatrix} = 5\,417\,430{,}2 + 4\,662\,840 + 2\,333\,772 -$$

$$-2\,484\,300 - 3\,916\,785{,}6 - 6\,058\,546{,}2 = -45\,589{,}6.$$

Знаходимо коефіцієнти:

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-8715}{-3920} \approx 2{,}22, \quad b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{48\,550{,}6}{-3920} \approx -12{,}39,$$

$$c = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-45\,589{,}6}{-3920} = 11{,}63.$$

Отже, шукана залежність — це функція

$$y = 2{,}22x^2 - 12{,}39x + 11{,}63.$$

Розділ 9

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ В ЕКОНОМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

9.1 Аналіз економічних задач за допомогою виробничих функцій

9.1.1. Виробничі функції багатьох змінних

Важливими елементами мікро- й макроекономічної теорії раціонального господарювання є, з одного боку, виробник, який витрачає економічні ресурси для виготовлення товарів або надання послуг, а з іншого — виробничі технологічні процеси.

Вивчаючи економічні процеси в сучасному суспільстві для побудови економіко-математичної моделі, яка описує внутрішній бік виробництва, потрібно зібрати необхідну інформацію про фактори й ресурси, які впливають на обсяг продукції, що випускається.

➡ **Означення 9.1.** ***Виробнича функція (ВФ)*** *— це функція, незалежна змінна x якої набуває значень обсягу ресурсу, котрий використовується у виробництві (фактора виробництва), а залежна змінна y — значення обсягу продукції, котру випускає дане підприємство, фірма або галузь.* Позначення виробничої функції

$$y = f(x). \tag{9.1}$$

Тут $x\,(x > 0)$ і $y\,(y > 0)$ — числові величини, тобто $y = f(x)$ є функцією однієї змінної x. У зв'язку з цим виробничу функцію називають *одноресурсною*, або *однофакторною*. Її область визначення — множина

невід'ємних дійсних чисел. Запис $y = f(x)$ означає: якщо ресурс витрачається або використовується в кількості x одиниць, то продукція випускається в кількості $y = f(x)$ одиниць. Знак функції f є характеристикою виробничої функції, яка перетворює ресурс у випуск продукції, і пов'язує між собою незалежну змінну x та залежну змінну y.

Аналіз виробництва здійснюють за допомогою теорії виробничих функцій, виникнення якої відносять до 1928 р., коли було опубліковано статтю «Теорія виробництва» американських учених — економіста П. Дугласа й математика Д. Кобба. В цій статті було здійснено спробу визначити емпіричним шляхом вплив витрачених капіталу й праці на обсяг випуску продукції в переробній промисловості США. На підставі статистичних даних за 1899—1922 рр. було поставлено такі *задачі:*

1) визначити клас функцій, який найкраще наближує співвідношення між трьома вибраними характеристиками виробничої діяльності;

2) знайти числові параметри, що задають конкретну функцію;

3) порівняти добуті результати — значення функцій — із фактичними даними.

Д. Кобб запропонував функцію вигляду

$$y = AK^{\alpha}L^{\beta}, \tag{9.2}$$

де y — обсяг випущеної продукції; K — обсяг основного капіталу; L — витрати праці; A, α, β — числові параметри, що задовольняють умови $A > 0$, $\alpha + \beta = 1$.

Вибір степеневої функції було зумовлено двома причинами:

1) степенева функція є однією з найпростіших із нелінійних функцій і за допомогою логарифмування зводиться до лінійної;

2) вона враховує нульовий ефект виробництва: якщо один із факторів дорівнює нулю, то й виробнича функція дорівнює нулю. Економічно це означає, що, не витрачаючи жодного з видів ресурсів, неможливо одержати продукцію.

Логарифмуючи функцію (9.2), маємо систему рівнянь

$$\ln y_t = \ln A + \alpha \ln K_t + \beta \ln L_t,$$

де y_t, K_t, L_t — фактичні значення відповідних величин за рік t.

Методом найменших квадратів знайдемо значення A, α, β, які мінімізують вираз

$$\sum_t (\ln y_t - \ln A - \alpha \ln K_t - \beta \ln L_t)^2.$$

У результаті $y_t = 0{,}01K^{0,25}L^{0,75}$.

Порівняння значення $y(K, L)$ з фактичним показало, що добута залежність дає добре наближення до реальної дійсності. Відхилення були пов'язані з періодами депресії й пожвавлення ділової активності.

Введемо поняття виробничої функції багатьох змінних за аналогією. Припустимо, що фірма випускає один вид продукції. Її обсяг позначимо через y, а вектор ресурсів-витрат — через $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

➡ **Означення 9.2.** ***Виробнича функція багатьох змінних** — це функція, незалежні змінні x_1, x_2, ..., x_n якої набувають значень обсягів ресурсів, що використовуються у виробництві (число змінних n дорівнює числу ресурсів), а значення функції виражає обсяг випуску продукції:*

$$y = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{9.3}$$

Тут $y (y \ge 0)$ — скалярна величина, а x — векторна; $(x_1, x_2, ..., x_n)$ — координати вектора, тобто $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ є числовою функцією n (багатьох) змінних $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Її називають ***багатофакторною виробничою функцією.*** За економічним змістом $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, ..., $x_n \ge 0$. Отже, областю визначення багатофакторної виробничої функції є множина n-вимірних векторів x, усі координати яких — невід'ємні числа.

Для окремого підприємства виробнича функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ може пов'язувати обсяг випуску продукції (в натуральному або вартісному вираженні) з витратами робочого часу за різними видами трудової діяльності, різноманітними видами сировини, енергії, основного капіталу тощо. Виробничі функції такого типу характеризують *технологію підприємства.*

Будуючи виробничу функцію для регіону або країни в цілому, за обсяг річного випуску y (так позначатимемо обсяг випуску або доход на макрорівні) зазвичай беруть їхній сукупний продукт (доход); як ресурси розглядають *основний капітал* ($x_1 = K$ — обсяг основного капіталу, що використовується протягом року) і *працю* ($x_2 = L$ — витрати праці, що використовується протягом року). Таким чином, дістають двофакторну виробничу функцію $y = f(x_1, x_2) = f(K, L)$, наприклад функцію Кобба—Дугласа.

Від двофакторної виробничої функції переходять до трифакторної. За третій фактор іноді беруть обсяг природного ресурсу, який використовується у виробництві. Крім того, як особливий фактор росту виробництва може розглядатися науково-технічний прогрес.

9.1.2. Властивості виробничих функцій

Розглянемо багатофакторну виробничу функцію $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Припустимо, що вона двічі диференційовна й має такі ***властивості:***

① *Функція $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ не спадна в області визначення*

$$D = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, n}\}.$$

Ця властивість означає, що зі зростанням витрат хоча б одного ресурсу обсяг випуску продукції збільшується.

② *Функція $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має невід'ємні частинні похідні, які називають **граничними продуктами**, тобто* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \ge 0, \quad i = \overline{1, n}.$

Ця властивість означає, що зі зростанням витрат одного ресурсу за незмінного обсягу іншого обсяг випуску продукції збільшується.

③ *Частинні похідні другого порядку задовольняють умови*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \le 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} \ge 0, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Ця властивість характеризує ***закон спадної ефективності виробництва***: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \le 0$, $i = \overline{1, n}$ означає, що зі зростанням витрат одного i-го ресурсу обсяг випуску продукції не збільшується. І оскільки $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} \ge 0$, $i, j = \overline{1, n}$, то зі збільшенням обсягу витрат одного ресурсу гранична ефективність іншого ресурсу зростає.

④ $f(0, 0, ..., 0) = 0.$

Ця властивість означає, що без ресурсів немає випуску продукції.

■ **Приклад 9.1.** Лінійна виробнича функція має вигляд

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \text{ (двофакторна)}, \tag{9.4}$$

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \text{ (багатофакторна)}, \tag{9.5}$$

де $a_i > 0$, $i = \overline{1, n}$.

Для лінійної виробничої функції виконуються властивості ①—③, а властивість ④ справджується при $a_0 = 0$.

9.1.3. Економічні характеристики процесу виробництва

В економічному аналізі процесу виробництва за допомогою виробничих функцій використовуються такі показники:

- середні й граничні ефективності;
- коефіцієнти еластичності;
- коефіцієнти заміщення.

Середні показники ефективності визначаються за формулою

$$\Xi_i = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{x_i} \tag{9.6}$$

і називаються *середньою продуктивністю i-го ресурсу* (*фактора виробництва*), або *середнім випуском за i-м ресурсом* (*фактором виробництва*).

➡ **Означення 9.3.** ***Середня фондовіддача*** *— це відношення обсягу виробленої продукції до розміру основних фондів:*

$$\bar{y}_K = \frac{f(K, L)}{K}. \tag{9.7}$$

➡ **Означення 9.4.** ***Середня продуктивність праці*** *— це відношення обсягу виробленої продукції до кількості витраченої праці:*

$$\bar{y}_l = \frac{f(K, L)}{L}. \tag{9.8}$$

Зокрема, для функції (9.2) така залежність є спадною функцією від змінної L. Економічно це можна трактувати так: *зі збільшенням витрат ресурсів середня продуктивність праці знижується.* Це має природне пояснення: оскільки значення другого фактора K залишається

без змін, то нова робоча сила не забезпечуватиметься додатковими засобами виробництва, що спричинить зниження продуктивності праці.

Поряд із середніми показниками виробничої функції важливу роль відіграють ***граничні показники***, які виражають частинними похідними першого порядку й часто називають ***граничними продуктами***, або ***граничними продуктивностями, i-го ресурсу (фактора)***. Позначення:

$$M_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{9.9}$$

Гранична продуктивність наближено показує, на скільки одиниць збільшиться обсяг випуску продукції y, якщо обсяг витрат i-го ресурсу x_i зростатиме за незмінних обсягів витрат інших ресурсів.

➡ **Означення 9.5.** *Вектор-градієнт називають* ***граничним вектор-продуктом, або вектором граничних продуктів****.*

Цей вектор є відгуком обсягу випуску продукції на зміни вектора ресурсів-витрат.

З економічних міркувань виокремлюється множина

$$E = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\middle|\; \frac{\partial f}{\partial x_1} \geq 0, \; \frac{\partial f}{\partial x_2} \geq 0, \; \ldots, \; \frac{\partial f}{\partial x_n} \geq 0 \right\}, \tag{9.10}$$

яку називають ***економічною областю***.

■ **Приклад 9.2.** *Для лінійної двофакторної виробничої функції* $f(x_1, x_2) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$, де $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, *знайдемо середні й граничні продуктивності факторів* x_1 *і* x_2.

Обчислимо середні показники ефективності факторів x_1 і x_2:

$$\Xi_{x_1} = \frac{f(x_1, x_2)}{x_1} = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2}{x_1} = \frac{a_0}{x_1} + a_1 + \frac{a_2x_2}{x_1},$$

$$\Xi_{x_2} = \frac{f(x_1, x_2)}{x_2} = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2}{x_2} = \frac{a_0}{x_2} + \frac{a_1x_1}{x_2} + a_2.$$

Знайдемо граничні продуктивності факторів x_1 і x_2:

$$M_1 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = a_1, \quad M_2 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = a_2.$$

Бачимо, що $\frac{M_1}{\Xi_{x_1}} \leq 1$, $\frac{M_2}{\Xi_{x_2}} \leq 1$. Отже, $M_1 \leq \Xi_{x_1}$, $M_2 \leq \Xi_{x_2}$.

■ **Приклад 9.3.** *Для виробничої функції Кобба—Дугласа* $f(x_1, x_2) = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, *де* $x_1 = K$ — *обсяг основного капіталу,* $x_2 = L$ — *трудові ресурси,* $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ *і* $a_1 + a_2 = 1$, *знайдемо середні й граничні продуктивності.*

Визначимо середні показники ефективності факторів x_1 і x_2:

$$\Xi_{x_1} = \frac{f(x_1, x_2)}{x_1} = a_0 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2}, \quad \Xi_{x_2} = \frac{f(x_1, x_2)}{x_2} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2 - 1}.$$

Знайдемо граничні продуктивності факторів x_1 і x_2:

$$M_1 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = a_1 a_0 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2} = a_1 \Xi_{x_1},$$

$$M_2 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = a_2 a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2 - 1} = a_1 \Xi_{x_2}.$$

Бачимо, що $\dfrac{M_1}{\Xi_{x_1}} = a_1 \le 1$, $\dfrac{M_2}{\Xi_{x_2}} = a_2 \le 1$. Отже,

$$M_1 \le \Xi_{x_1}, \quad M_2 \le \Xi_{x_2}.$$

У наведених прикладах виконуються нерівності $M_i \le \Xi_{x_i}$, $i = \overline{1, n}$, тобто гранична продуктивність i-го ресурсу не більша за його середню продуктивність.

9.2 Еластичність функції багатьох змінних

9.2.1. Означення еластичності функції двох змінних

У розд. 6 було введено поняття еластичності функції однієї змінної. Аналогічно вводиться поняття еластичності функції багатьох змінних.

Введемо це поняття для функції двох змінних $z = f(x, y)$. Розглянемо її частинні прирости:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

➡ **Означення 9.6.** ***Еластичністю функції*** $z = f(x, y)$ ***у точці*** $(x_0; y_0)$ ***за змінною x називають границю***

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta_x z}{z} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta_x z}{\Delta x}\,\frac{x}{z}\right) = E_x(z(x_0, y_0)).$$

Еластичністю функції $z = f(x, y)$ ***у точці*** $(x_0; y_0)$ ***за змінною y називають границю***

$$\lim_{\Delta y \to 0}\left(\frac{\Delta_y z}{z} : \frac{\Delta y}{y}\right) = \lim_{\Delta y \to 0}\left(\frac{\Delta_y z}{\Delta y}\,\frac{y}{z}\right) = E_y(z(x_0, y_0)).$$

Кажуть, що $E_x(z)$ — коефіцієнт еластичності z за x, а $E_y(z)$ — коефіцієнт еластичності z за y (позначення точки часто пропускають).

З означення випливають такі формули:

$$E_x(z(x, y)) = \frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = x(\ln z)'_x, \tag{9.11}$$

$$E_y(z(x, y)) = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = y(\ln z)'_y. \tag{9.12}$$

■ **Приклад 9.4.** *Знайдемо коефіцієнти еластичності за x і за y функції* $z = x^y$ *у точці* (4; 3).

Обчислюємо коефіцієнти еластичності, використовуючи формули (9.11) і (9.12):

$$E_x(z(x, y)) = x(\ln z)'_x = x(y \ln z)'_x = y,$$

$$E_y(z(x, y)) = y(\ln z)'_y = y(y \ln z)'_y = y \ln x.$$

Отже,

$$E_x(z(4; 3)) = 3, \quad E_y(z(4; 3)) = 3 \ln 4.$$

В економічному аналізі процесу виробництва за допомогою виробничих функцій використовуються такі показники, як часткові еластичності за факторами виробництва та еластичність виробництва.

Означення 9.7. *Відношення граничної продуктивності i-го ресурсу M_i до його середньої продуктивності Ξ_i називають* ***частинною еластичністю випуску за i-м фактором виробництва*** й позначають

$$E_{x_i}(f) = \frac{M_i}{\Xi_{x_i}} = \frac{x_i}{f(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{9.13}$$

Суму

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} E_{x_i}(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{f(x)}\frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{9.14}$$

називають ***еластичністю виробництва***.

З економічного погляду еластичності характеризують процент приросту обсягу випуску продукції зі збільшенням витрат ресурсу на 1 %.

■ **Приклад 9.5.** *Знайдемо еластичність виробництва й часткові еластичності для двофакторної лінійної виробничої функції $y = a_1x_1 + a_2x_2$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.*

Використовуючи формули (9.13) і (9.14), дістаємо:

$$E_{x_1}(y) = \frac{x_1}{y}\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{a_1x_1}{a_1x_1 + a_2x_2}, \quad E_{x_2}(y) = \frac{x_2}{y}\frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{a_2x_2}{a_1x_1 + a_2x_2};$$

$$E(x) = \sum_{i=1}^{2} E_{x_i}(f) = E_{x_1}(y) + E_{x_2}(y) = \frac{a_1x_1}{a_1x_1 + a_2x_2} + \frac{a_2x_2}{a_1x_1 + a_2x_2} = 1.$$

■ **Приклад 9.6.** *Знайдемо еластичність виробництва й часткові еластичності для виробничої функції Кобба—Дугласа $y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, $A > 0$, $\alpha + \beta = 1$.*

Дістаємо

$$E_K(y) = \frac{K}{y}\frac{\partial y}{\partial K} = \frac{K}{AK^{\alpha}L^{\beta}}\alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta} = \alpha,$$

$$E_L(y) = \frac{L}{y}\frac{\partial y}{\partial L} = \frac{L}{AK^{\alpha}L^{\beta}}\beta AK^{\alpha}L^{\beta-1} = \beta;$$

$$E(x) = \alpha + \beta = 1.$$

■ **Приклад 9.7.** *Знайдемо швидкості зміни обсягу випуску продукції $z = z(x_1, x_2)$ зі зміною одного з факторів виробництва — обсягу фондів x_1 або*

обсягу трудових ресурсів x_2 — для виробничої функції типу Кобба—Дугласа $z = b_0x_1^{b_1}x_2^{b_2}$, де $b_0 > 0$ — параметр продуктивності конкретно взятої технології, $0 < b_1 < 1$ — частка капіталу в доході, $b_1 + b_2 = 1$.

Обчислимо частинні похідні функції $z = z(x_1, x_2)$:

$$z'_{x_1}(x_1, x_2) = b_0b_1x_1^{b_1-1}x_2^{b_2}, \quad z'_{x_2}(x_1, x_2) = b_0b_2x_1^{b_1}x_2^{b_2-1}.$$

Нехай заради конкретності змінна x_1 є кількістю верстатів, а x_2 — кількістю робітників на підприємстві. Зафіксуємо поточний стан підприємства, тобто введемо фіксовані початкові величини x_1^0 та x_2^0. Тоді економічний зміст частинних похідних у точці $M_0(x_1^0; x_2^0)$ буде такий: частинна похідна від виробничої функції за обсягом фондів у точці $M_0(x_1^0; x_2^0)$ наближено дорівнює додатковій вартості продукції за рахунок збільшення фондів підприємства на одну одиницю, а частинна похідна від виробничої функції за обсягом трудових ресурсів у точці $M_0(x_1^0; x_2^0)$ наближено дорівнює додатковій вартості продукції, виробленої ще одним робітником.

У функції Кобба—Дугласа показники степеня b_1 і b_2 є коефіцієнтами еластичності $E_{x_1}(z)$ і $E_{x_2}(z)$ за кожним із аргументів.

9.2.2. Властивості еластичності

Оскільки формули для обчислення еластичності аналогічні тим, що використовувалися для доведення властивостей еластичності функції однієї змінної в п. 6.8.2, то всі властивості справедливі й для функції двох змінних, але форма запису їх складніша.

Зупинимося детально на окремих властивостях.

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$, і нехай $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in T$.

Властивість

Еластичність функції $z = f(x, y)$ за змінною t у точці x_0 обчислюється за формулою

$$E_t(z) = E_x(z)E_t(x) + E_y(z)E_t(y),$$

де $E_x(z)$, $E_y(z)$ — еластичності функції z за x і за y у точці $(\varphi(t_0); \psi(t_0))$, а $E_t(x)$, $E_t(y)$ — еластичності x і y за t у точці t_0.

Доведення

Обчислимо еластичність функції z за змінною t, використовуючи означення:

$$E_t(z) = \frac{t}{z}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{t}{z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{t}{x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{t}{y}\frac{\partial y}{\partial t} =$$

$$= E_x(z)E_t(x) + E_y(z)E_t(y).$$

Означення 9.8. *Пару функцій $x_1 = g_1(y_1, y_2)$, $x_2 = g_2(y_1, y_2)$ **називають оберненою до пари функцій** $y_1 = f_1(x_1, x_2)$, $y_2 = f_2(x_1, x_2)$, **заданих на множині** $x \subset \mathbf{R}^2$, якщо для довільної точки $(x_1; x_2)$ із множини X виконуються рівності*

$$x_1 = g_1(f_1(x_1, x_2),\ f_2(x_1, x_2)),\quad x_2 = g_2(f_1(x_1, x_2),\ f_2(x_1, x_2)).$$

Для довільної пари функцій $y_1 = f_1(x_1, x_2)$, $y_2 = f_2(x_1, x_2)$ маємо чотири коефіцієнти еластичності $E_{x_j}(y_i)$, $i = 1,\ 2;\ \ j = 1,\ 2$. Записавши їх у вигляді таблиці, дістанемо матрицю розміру 2×2:

$$E_x(y) = \begin{pmatrix} E_{x_1}(y_1) & E_{x_2}(y_1) \\ E_{x_1}(y_2) & E_{x_2}(y_2) \end{pmatrix}.$$

Елементи цієї матриці, які розміщені на побічній діагоналі, називають *перехресними коефіцієнтами еластичності.*

Властивість

Нехай $x_1 = g_1(y_1, y_2)$, $x_2 = g_2(y_1, y_2)$ — пара обернених функцій до функцій $y_1 = f_1(x_1, x_2)$, $y_2 = f_2(x_1, x_2)$. Тоді матриця коефіцієнтів еластичності $E_y(x)$ є оберненою до матриці $E_x(y)$.

Доведення

Перемножимо матриці $E_y(x)$ і $E_x(y)$, використовуючи попередню властивість:

$$E_y(x)E_x(y) =$$

$$= \begin{pmatrix} E_{y_1}(x_1)E_{x_1}(y_1) + E_{y_2}(x_1)E_{x_1}(y_2) & E_{y_1}(x_1)E_{x_2}(y_1) + E_{y_2}(x_1)E_{x_2}(y_2) \\ E_{y_1}(x_2)E_{x_1}(y_1) + E_{y_2}(x_2)E_{x_1}(y_2) & E_{y_1}(x_2)E_{x_2}(y_1) + E_{y_2}(x_2)E_{x_2}(y_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} E_{x_1}(x_1) & E_{x_2}(x_1) \\ E_{x_1}(x_2) & E_{x_2}(x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки в результаті множення дістали одиничну матрицю, то матриці $E_y(x)$ і $E_x(y)$ взаємно обернені.

Коефіцієнти еластичності використовуються під час аналізу функцій попиту на різні товари.

9.2.3. Попит на конкурентні товари

Попит на будь-який товар залежить від ціни його одиниці, якості, упакування та інших факторів, наприклад ціни іншого товару.

Розглянемо випадок двох товарів x і y. Нехай p_x і p_y — ціни за одиницю відповідного товару, а q_x, q_y — кількісний попит на товари x і y відповідно. Казатимемо, що *товари x і y взаємопов'язані*, якщо попит на товар x залежить не тільки від його ціни, а й від ціни товару y. Для пари товарів, які доповнюють один одного (наприклад, чай і цукор), або пари товарів, які замінюють один одного (наприклад, масло й маргарин), природно вважати, що попит на кожен товар залежить від обох цін p_x і p_y. Нехай товари x і y взаємопов'язані. Тоді q_x, q_y будуть функціями двох змінних: $q_x = q_x(p_x, p_y)$, $q_y = q_y(p_x, p_y)$. Припустимо, що не тільки ціни визначають попит, а й навпаки, попит визначає ціни. Інакше кажучи, вважатимемо, що ціни p_x і p_y виражаються через попит, тобто є оберненими функціями $p_x = p_x(q_x, q_y)$, $p_y = p_y(q_x, q_y)$.

Маємо дві пари взаємно обернених функцій. Тоді матрицю коефіцієнтів еластичності цін за попитом можна знайти як обернену матрицю $E_x(p) = (E_p(x))^{-1}$ до матриці $E_x(p)$ коефіцієнтів еластичності попиту за цінами.

Частинні похідні функції попиту виражають:

$\dfrac{\partial q_x}{\partial p_x}$ — ***граничний попит на товар x відносно ціни p_x;***

$\dfrac{\partial q_x}{\partial p_y}$ — ***граничний попит на товар x відносно ціни p_y.***

Означення 9.9. *Товари x і y називають* ***конкурентними,*** *якщо*

$$\frac{\partial q_x}{\partial p_x} > 0 \quad i \quad \frac{\partial q_x}{\partial p_y} > 0.$$

Еластичність попиту на товар x відносно ціни p_x обчислюється за формулою

$$E_{p_x}(q_x) = \frac{p_x}{q_x}\frac{\partial q_x}{\partial p_x}. \tag{9.15}$$

Еластичність попиту на товар x відносно ціни p_y обчислюється за формулою

$$E_{p_y}(q_x) = \frac{p_y}{q_x}\frac{\partial q_x}{\partial p_y}. \tag{9.16}$$

Отже, формула (9.16) задає ***перехресний коефіцієнт еластичності попиту***, який наближено показує процентну зміну попиту на даний товар зі зміною ціни альтернативного товару на 1 %.

Означення 9.10. *Товари x і y називають* ***взаємозамінними****, якщо*

$$E_{p_y}(q_x) > 0.$$

У цьому разі збільшення ціни одного товару спричиняє зростання попиту на інший товар.

Означення 9.11. *Товари x і y називають* ***взаємодоповняльними****, якщо*

$$E_{p_y}(q_x) < 0.$$

У цьому разі збільшення ціни будь-якого товару спричиняє зменшення попиту на нього.

■ **Приклад 9.8.** *Задано функцію попиту* $q_x = 500 + 3p_y - 6p_x^2$ *на товар x, де* p_x *і* p_y *— ціни товарів x і y відповідно. Знайдемо коефіцієнт еластичності попиту відносно цін* p_x *і* p_y*, якщо* $p_x = 5$, $p_y = 30$.

Використовуючи формули (9.15) і (9.16), дістаємо:

$$E_{p_x}(q_x) = \frac{p_x}{q_x}\frac{\partial q_x}{\partial p_x} = \frac{p_x}{500 + 3p_y - 6p_x^2}(-12p_x) = \frac{-12p_x^2}{500 + 3p_y - 6p_x^2};$$

$$E_5(q_x) = \frac{-12\cdot 25}{500 + 3\cdot 30 - 6\cdot 25} = \frac{-300}{440} = -\frac{30}{44} = -\frac{15}{22} \approx -0{,}68;$$

$$E_{p_y}(q_x) = \frac{p_y}{q_x}\frac{\partial q_x}{\partial p_y} = \frac{3p_y}{500 + 3p_y - 6p_x^2},$$

$$E_{30}(q_x) = \frac{3\cdot 30}{500 + 3\cdot 30 - 6\cdot 25} = \frac{90}{440} = \frac{9}{44} \approx 0{,}2.$$

Розглянемо ще один коефіцієнт еластичності, який характеризує виробничу функцію багатьох змінних і має важливе значення в економічній теорії.

Нехай $z = f(x, y)$ — виробнича функція, а $f_x'(x, y)$, $f_y'(x, y)$ — граничні продукти, що відповідають витратам ресурсів x і y.

Означення 9.12. ***Коефіцієнтом еластичності заміщення*** *називають величину*

$$\delta_{xy} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0\\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta \ln(x/y)}{\Delta \ln \dfrac{f_x'(x, y)}{f_y'(x, y)}} = -\frac{d \ln(x/y)}{d \ln \dfrac{f_x'(x, y)}{f_y'(x, y)}}. \tag{9.17}$$

При малих приростах аргументу Δt справедлива наближена рівність $\Delta \ln t \approx \Delta t/t$.

Таким чином, величина, обернена до коефіцієнта еластичності заміщення, наближено показує, на скільки процентів зміниться відношення граничних продуктів $\dfrac{f_x'(x, y)}{f_y'(x, y)}$ зі зміною відношення витрат ресурсів (x/y) на 1 %.

У загальному випадкові коефіцієнт еластичності заміщення є функцією двох змінних. Розглянемо вираз цієї функції в точках ізокванти. Оскільки вздовж ізокванти значення функції $z = f(x, y)$ стале, то повний диференціал $dz = f_x'\,dx + f_y'\,dy = 0$. Тому

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{f_x'(x, y)}{f_y'(x, y)},$$

тобто в разі збереження обсягу випуску продукції z величина $\left(-\dfrac{dy}{dx}\right)$ називається ***граничною нормою заміщення ресурсу x ресурсом y*** і дорівнює відношенню граничних продуктів:

$$\frac{1}{\delta_{xy}} = \frac{d\,\ln\left(-\dfrac{dy}{dx}\right)}{d\,\ln(y/x)}. \qquad (9.18)$$

Очевидно, що dy/dx — тангенс кута α нахилу дотичної до ізокванти в точці $M(x;\,y)$, а y/x — тангенс кута нахилу радіуса-вектора точки $M(x;\,y)$ (рис. 9.1).

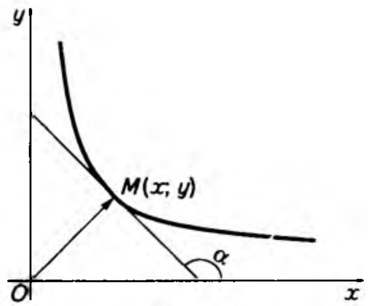


Рис. 9.1

Таким чином, величина $1/\delta_{xy}$ характеризує відносну зміну кута нахилу дотичної до ізокванти зі зміною кута нахилу її радіуса-вектора, тобто кривину ізокванти.

9.3 Задачі оптимізації виробництва

9.3.1. Задача багаторесурсної фірми

У п. 6.8.5 розглядалася теорія однoресурсної фірми. В загальному випадкові, тобто коли фірма використовує не один ресурс, а кілька, багато понять теорії аналогічні.

Нехай фірма випускає один товар (його обсяг позначимо через q) і використовує для його виробництва певні ресурси. Позначимо через

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ обсяги різних ресурсів, які фірма використовує для випуску продукції, а через $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — відповідно їхні ціни (всі p_i — сталі величини). Витрати виробництва однозначно пов'язані з випуском продукції, і цей зв'язок визначає виробнича функція $q = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яка виражає обсяг q продукції, що випускається, через обсяги $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ресурсів, які використовуються у виробництві.

Припускатимемо, що виробнича функція задовольняє необхідні умови диференційовності, а також умови, аналогічні наведеним у п. 6.8.5, тобто виробнича функція не спадна в економічній області E. Звідси випливає, що її частинні похідні, які називаються граничними продуктами, невід'ємні в цій області.

➡ **Означення 9.13.** ***Доходом R фірми*** *за певний період часу (наприклад, у певному році) називають добуток загального обсягу продукції q, що випускається, на (ринкову) ціну p_0 цієї продукції:*

$$R = p_0 q.$$

➡ **Означення 9.14.** ***Витратами C фірми*** *називають її загальні витрати за певний інтервал часу, тобто*

$$C = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n,$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — обсяги ресурсів, які використовує фірма (фактори виробництва); $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — ринкові ціни на ці ресурси (фактори виробництва).

➡ **Означення 9.15.** ***Прибутком P фірми*** *за певний інтервал часу називають різницю між одержаним нею доходом та витратами виробництва: $P = R - C$, тобто*

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= p_0 f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - (p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n). \qquad (9.19)$$

У теорії фірми вважають: якщо фірма функціонує в умовах чистої конкуренції, то на ринкові ціни $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ вона вплинути не може, тобто фірма «погоджується» із цими цінами. Випадки функціонування фірми в умовах чистої монополії, монополістичної конкуренції та олігополії спеціально розглядаються в межах курсу мікроекономіки.

***Основна задача багаторесурсної фірми** полягає в тому, що фірма намагається одержати максимальний прибуток шляхом раціонального розподілу ресурсів, які використовуються у виробництві.*

З математичного погляду ця задача зводиться до розв'язання задачі про знаходження максимального значення функції прибутку $P = P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, тобто функцію прибутку досліджують на екстремум і визначають, при яких значеннях $(x_1^*; x_2^*; \ldots; x_n^*)$ вона набуває свого найбільшого значення.

➡ **Означення 9.16.** *Набір ресурсів $(x_1^*; x_2^*; \ldots, x_n^*)$, який забезпечує фірмі максимальний прибуток, називають **оптимальним**.*

Фірма може вільно вибирати вектор ресурсів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, причому $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Знайдемо оптимальну для фірми комбінацію ресурсів $(x_1^*; x_2^*; \ldots; x_n^*)$, тобто розв'яжемо основну задачу багаторесурсної фірми.

Прирівнявши частинні похідні функції прибутку до нуля, дістанемо

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{p_1}{p_0}, \quad \frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{p_2}{p_0}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial P}{\partial x_n} = \frac{p_n}{p_0}. \tag{9.20}$$

Припустимо, що всі витрати ресурсів строго додатні (нульові просто можна не розглядати). Тоді точка $(x_1^*; x_2^*; \ldots; x_n^*)$, яка визначається співвідношеннями (9.20), є критичною, й вважатимемо, що умови, які накладаються на виробничу функцію, гарантують, що це точка максимуму. Тоді $(x_1^*; x_2^*; \ldots; x_n^*)$ називають *оптимальним розв'язком задачі багаторесурсної фірми.*

■ **Приклад 9.9.** *Нехай задано виробничу функцію фірми $f(x, y) = x^{1/4}y^{1/2}$ та ринкові ціни продукції $p_0 = 2$ і факторів виробництва — відповідно $p_1 = 1$, $p_2 = 1/2$ умов. грош. од. Знайдемо комбінацію ресурсів $(x^*; y^*)$, за якої фірма одержить максимальний прибуток.*

Функція прибутку фірми

$$P(x, y) = 2x^{1/4}y^{1/2} - x - \frac{1}{2}y.$$

Дослідимо її на екстремум. Запишемо необхідні умови існування локального екстремуму. Для цього знайдемо частинні похідні функції прибутку й прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} P'_x = 2\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}} - 1 = 0, \\ P'_y = 2\frac{1}{2}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{3}{4}}, \\ \dfrac{x^{\frac{1}{4}}}{2x^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 4x^{\frac{3}{2}}, \\ x = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4, \\ x = 1. \end{cases}$$

Отже, точка $M(1; 4)$ є критичною.

Перевіримо достатні умови. Для цього знайдемо частинні похідні другого порядку та обчислимо їхні значення в точці $M(1; 4)$:

$$P''_{xx} = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)x^{-\frac{7}{4}}y^{\frac{1}{2}}, \quad P''_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{4}}y^{-\frac{1}{2}}, \quad P''_{yy} = -\frac{1}{2}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{3}{2}};$$

$$A = -\frac{3}{8}1 \cdot 2 = -\frac{3}{4}, \quad B = \frac{1}{4}1\frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \quad C = -\frac{1}{2}1\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{16}.$$

Оскільки

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \end{vmatrix} = \frac{3}{64} - \frac{1}{64} = \frac{2}{64} = \frac{1}{32} > 0 \quad \text{і} \quad A = -\frac{3}{4} < 0,$$

то точка $M(1; 4)$ — точка локального максимуму.

Обчислимо максимальний прибуток фірми:

$$P_{\max} = R(1; 4) = 2 \cdot 1 \cdot 2 - 1 - \frac{1}{2}4 = 4 - 1 - 2 = 1.$$

9.3.2. Задача оптимального розподілу ресурсів

Розглянемо цю задачу в конкретному випадкові, коли функція обсягу випуску продукції має вигляд $q = f(x, y) = a_0xy^2$, а функція витрат на ресурси x і y лінійна:

$$C(x, y) = p_1x + p_2y,$$

де p_1 і p_2 — ціни одиниці ресурсів x і y відповідно.

У точці $M_0(x_0;\ y_0)$ оптимального розподілу ресурсів лінії рівня функції випуску й витрат дотикаються (рис. 9.2). Ці лінії визначаються рівняннями

$$a_0xy^2 = C,\ p_1x + p_2y = A.$$

Виразимо з цих рівностей змінну y:

$$y = \sqrt{b/x},\quad y = -(p_1/p_2)x + A/p_2,$$

де $A > 0$, $C > 0$ — сталі, $b = C/a_0$.

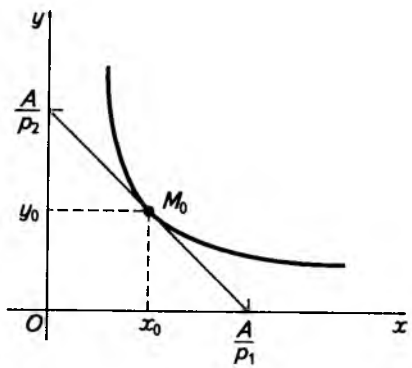


Рис. 9.2

Лінії $y = \sqrt{b/x}$ та $y = -(p_1/p_2)x + A/p_2$ дотикаються за умови

$$\left.\left(\sqrt{\frac{b}{x}}\right)'\right|_{x_0} = -\frac{p_1}{p_2}.$$

Визначимо з цієї рівності x_0:

$$x_0 = b^{\frac{1}{3}}\left[\frac{p_2}{2p_1}\right]^{2/3}.$$

Тоді з рівняння лінії рівня функції випуску визначимо y_0:

$$y_0 = \left(\frac{b}{x_0}\right)^{1/2} = b^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2p_1}{p_2}\right)^{1/3}.$$

Отже, оптимальний розподіл ресурсів x_0/y_0 має визначатись у відношенні цін $p_2/2p_1$ на ці ресурси.

9.3.3. Задача оптимального розподілу товарів

Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ — обсяги випуску різних товарів фірмою, а $p_1, p_2, \dots, p_n$ — відповідно їхні ціни (всі p_i — сталі величини).

Нехай витрати виробництва цих товарів задаються функцією витрат $C = C(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тоді ***функція прибутку*** має вигляд

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n - C(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (9.21)$$

Максимум прибутку природно шукати як локальний екстремум функції багатьох змінних $P = P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де $x_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$ (за відсутності інших обмежень).

Запишемо необхідні умови існування локального екстремуму $\frac{\partial P}{\partial x_i} = 0$, які приводять до системи алгебричних рівнянь відносно змінних x_i: $p_i - \frac{\partial C}{\partial x_i} = 0$, $i = \overline{1, n}$, тобто

$$p_i = \frac{\partial C}{\partial x_i},\quad i = \overline{1, n}. \quad (9.22)$$

Ця система реалізує відоме ***правило економіки: гранична ціна товару дорівнює граничним витратам на виробництво цього товару.***

Розв'язком системи (9.22) є набори значень $(x_1^*;\ x_2^*;\ \dots;\ x_n^*)$.

Слід зазначити, що сам процес відшукання розв'язку системи рівнянь (9.22) залежить від вигляду функції витрат і може бути достатньо складним.

Для знайдених наборів значень $(x_1^*;\ x_2^*;\ \dots;\ x_n^*)$ потрібно перевірити достатні умови локального екстремуму. Для цього запишемо визначник (гессіан) для функції прибутку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 P}{\partial x_1\,\partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 P}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x_2\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 P}{\partial x_2\,\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x_n\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 P}{\partial x_n\,\partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 P}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

У розглядуваній задачі це буде визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{\partial^2 C}{\partial x_1^2} & -\frac{\partial^2 C}{\partial x_1\, \partial x_2} & \dots & -\frac{\partial^2 C}{\partial x_1\, \partial x_n} \\ -\frac{\partial^2 C}{\partial x_2\, \partial x_1} & -\frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2} & \dots & -\frac{\partial^2 C}{\partial x_2\, \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\partial^2 C}{\partial x_n\, \partial x_1} & -\frac{\partial^2 C}{\partial x_n\, \partial x_2} & \dots & -\frac{\partial^2 C}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

Якщо знаки головних мінорів цього визначника чергуються, починаючи зі знака «–», то розв'язок системи $(x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$, що перевіряється, є n-вимірною точкою локального максимуму функції прибутку (9.21).

Виберемо серед цих точок локального максимуму ту, в якій функція набуває найбільшого значення. Добуті таким чином значення $(x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$ визначають набір обсягів товарів x_i, які потрібні, аби за даної функції витрат на їх виробництво в спектрі цін, що склалися, забезпечити максимальний прибуток.

■ **Приклад 9.10.** *Нехай фірма випускає два види товарів. Позначимо їхні обсяги через x і y. Нехай ціни на ці товари становлять відповідно $p_x = 8$ і $p_y = 10$ умов. грош. од., а функція витрат $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Знайдемо максимальний прибуток, який може одержати фірма.*

Функція прибутку фірми

$$P(x, y) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2.$$

Запишемо необхідні умови локального екстремуму:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 8 - 2x - y, \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 10 - x - 2y; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 - 2x - y = 0, \\ 10 - x - 2y = 0. \end{cases}$$

Розв'язком системи є критична точка $M(2; 4)$.

Перевіримо достатні умови локального екстремуму. Знайдемо значення частинних похідних другого порядку в точці $M(2; 4)$:

$$A = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -2, \quad B = \frac{\partial^2 P}{\partial x\, \partial y} = -1, \quad C = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -2.$$

Обчислимо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0, \quad A = -2 < 0.$$

Отже, $M(2; 4)$ — точка локального максимуму. Максимальний прибуток, який одержить фірма, $P_{\max} = P(2; 4) = 28$.

9.3.4. Задача визначення мінімальних витрат фірми

Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ — обсяги різних ресурсів, які використовує фірма для виробництва своєї продукції, а $p_1, p_2, \dots, p_n$ — відповідно їхні ціни (всі p_i — сталі величини). Нехай загальні витрати виробництва фірми задаються функцією витрат $C = C(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Постає задача: визначити мінімально можливі витрати ресурсів на виробництво фіксованого обсягу продукції.

Ці мінімальні витрати природно шукати як локальний мінімум функції багатьох змінних $C = C(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де $x_i \geq 0$ (за відсутності інших обмежень).

■ **Приклад 9.11.** *Нехай задано виробничу функцію Кобба—Дугласа, що залежить від двох змінних: $q = q(x, y) = Ax^{\alpha}y^{1-\alpha}$, де A — стала конкретного виробництва; x — витрати капіталу; y — витрати людської праці. Знайдемо значення величин x і y, які забезпечують мінімальні витрати виробництва за фіксованого обсягу продукції, якщо задано відповідні ціни на ресурси p_1 і p_2.*

Функція загальних витрат виражається формулою

$$C(x, y) = p_1x + p_2x.$$

Потрібно знайти мінімальне значення функції витрат за умови, що задано обсяг продукції $q(x, y) = q_0$.

Запишемо функцію Лагранжа

$$L = p_1x + p_2y + \lambda(Ax^{\alpha}y^{1-\alpha} - q_0).$$

Необхідні умови її умовного екстремуму виражаються рівностями

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0.$$

Знайшовши частинні похідні й прирівнявши їх до нуля, дістанемо систему трьох рівнянь:

$$\begin{cases} p_1+\alpha\lambda A x^{\alpha-1}y^{1-\alpha}=0,\\ p_2+(1-\alpha)\lambda A x^{\alpha}y^{1-\alpha-1}=0,\\ Ax^{\alpha}y^{1-\alpha}-q_0=0.\end{cases}$$

Розв'яжемо її:

$$\begin{cases} p_1+\alpha\lambda q_0 x^{-1}=0,\\ p_2+(1-\alpha)\lambda q_0 y^{-1}=0,\\ Ax^{\alpha}y^{1-\alpha}=q_0;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y}=-\dfrac{p_2}{(1-\alpha)\lambda q_0},\\ Ax^{\alpha}y^{1-\alpha}=q_0,\\ \dfrac{1}{x}=-\dfrac{p_1}{\alpha\lambda q_0}.\end{cases}$$

Розв'язок системи — точка $M_0(x_0;\ y_0)$, координати якої

$$x_0=\frac{q_0}{A}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_1}{p_2}\right)^{\alpha-1},\quad y_0=\frac{q_0}{A}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_1}{p_2}\right)^{\alpha}.$$

Оскільки $d^2L|_{M_0}>0$, то ця точка є точкою умовного мінімуму функції витрат.

9.3.5. Задача цінової дискримінації

Ця задача пов'язана з розподілом товару одного виду по різних ринках із різними попитами для максимізації загального прибутку фірми. Оскільки еластичність попиту на ринках різна, то на товар установлюють різні ціни, що призводить до так званої цінової дискримінації.

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — обсяги одного й того самого товару, що продається на ринках за цінами $p_i(x_i)$, тобто ціна на кожному ринку залежить від обсягу товару, який продається. Припустимо, що функція витрат залежить від загального обсягу товару, який продає фірма на всіх ринках, тобто $C=C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тоді *функція прибутку фірми* має вигляд

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)=p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n-C(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Необхідні умови екстремуму $\dfrac{\partial P}{\partial x_i}=0,\ i=\overline{1, n}$ приводять до системи рівнянь для визначення стаціонарних точок функції прибутку в області $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ \ldots,\ x_n\ge 0$:

$$p_i(x_i)+x_ip'_{x_i}(x_i)-C'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0,\quad i=\overline{1, n}. \tag{9.23}$$

Проаналізуємо доход R_i на i-му ринку залежно від ціни на товар обсягом x_i.

Оскільки $R_i=x_ip_i$, то граничний доход дорівнює сумі перших двох доданків у рівності (9.23):

$$R'_i=p_i+x_ip'_i=p_i\left(1+\frac{x_i}{p_i}p'_i\right)=p_i\left(1+\frac{1}{E_i}\right),$$

де E_i — еластичність попиту на i-му ринку.

Оскільки E_i — зазвичай від'ємна величина, то останнє рівняння можна переписати в зручнішій формі:

$$R'_i=p_i\left(1-\frac{1}{|E_i|}\right). \tag{9.24}$$

Якщо $|E_i|<1$, то $R'_i<0$, тобто ринок нееластичний. Якщо $C'_{x_i}>0$, то умова (9.23) потребує вибору ринку з додатним доходом або з еластичним попитом, тобто з умовою $|E_i|>1$. Із рівності (9.23) дістанемо

$$p_1\left(1-\frac{1}{|E_i|}\right)=p_2\left(1-\frac{1}{|E_i|}\right)=\ldots=p_n\left(1-\frac{1}{|E_i|}\right)=C'_{x_i}, \tag{9.25}$$

звідки виводиться *умова «цінової дискримінації»: чим менша за абсолютним значенням еластичність даного ринку за даного обсягу товару, який продається на ринку, тим вищою має бути ціна на товар на цьому ринку за умови максимального прибутку фірми.*

Гессіан для функції прибутку в скороченій формі має вигляд

$$\det H=\|a_{ij}\|,\ \text{де}\ |a_{ij}|=\begin{cases} p''_ix_i+2p''_i-C''_{x_i^2}, & i=j,\\ -C''_{x_ix_j}, & i\ne j.\end{cases}$$

■ **Приклад 9.12.** *Нехай фірма продає товар на трьох ринках і x_1, x_2, x_3 — обсяги товару, а $p_i = a_i - b_i x_i$ — відповідні ціни на ці товари. Тоді доход на і-му ринку $R_i = x_i(a_i - b_i x_i)$, $i = 1, 2, 3$. Нехай функція витрат фірми має вигляд $C = A + B(x_1 + x_2 + x_3)$. Знайдемо максимальний прибуток фірми. (В наведених співвідношеннях всі сталі додатні.)*

Функція прибутку фірми виражається формулою

$$P = x_1(a_1 - b_1x_1) + x_2(a_2 - b_2x_2) + x_3(a_3 - b_3x_3) - A - B(x_1 + x_2 + x_3).$$

Необхідні умови локального екстремуму приводять до такої системи рівнянь:

$$a_i - 2b_ix_i - B = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Отже, $x_i = \dfrac{a_i - B}{2b_i}$, $i = 1, 2, 3$ — єдина стаціонарна точка.

Обчислимо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2b_1 & 0 & 0 \\ 0 & -2b_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2b_3 \end{vmatrix}.$$

За критерієм Сільвестра маємо точку максимуму, оскільки знаки головних мінорів чергуються і $b_1 > 0$.

Заради конкретності візьмемо такі числові значення параметрів:

$$a_1 = 25, \; b_1 = 5, \; a_2 = 45, \; b_2 = 4, \; a_3 = 85, \; b_3 = 10, \; A = 10, \; B = 5.$$

Тоді дістанемо розподіл товару між ринками $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 4$ при цінах $p_1 = 15$, $p_2 = 25$, $p_3 = 45$. Відповідні еластичності $|E_1| = 1{,}5$, $|E_2| = 1{,}25$, $|E_3| = 1{,}125$ задовольняють принцип цінової дискримінації: чим менша еластичність $|E_i|$ i-го ринку, тим вищою має бути ціна товару на ньому.

Отже, $P_{\max} = 270$.

9.4 Задачі теорії споживання

9.4.1. Гранична корисність і гранична норма заміщення

Коли йдеться про основну мету підприємців, то зрозуміло, що вона полягає в одержанні максимального прибутку. Складніше визначити мотивацію поведінки споживачів. Можна, звичайно, припустити, що споживачі бажають максимально збільшити власні доходи. Але, якщо б це було єдиною метою, то всі прагнули б працювати сім днів на тиждень по двадцять чотири години на добу. Насправді це не так, і люди знаходять розумний компроміс між роботою й дозвіллям.

Аналогічно споживачі роблять покупки, вибираючи з різних товарів і враховуючи їхню ціну, якість та інші фактори. Спробуємо описати поведінку споживача. Споживанню товарів або послуг ставиться у відповідність число u, яке називають ***корисністю.*** Чим вища оцінка, яку дає споживач цим товарам або послугам, тим більше число u. Припустимо, що є два види товарів X і Y, і споживач купує їх у певних обсягах: x — кількість товару X, y — кількість товару Y. Тоді користь виражається деякою функцією двох змінних (число змінних може бути й більшим), яку ми позначимо $u = u(x, y)$.

Отже, основним поняттям теорії споживання є функція корисності $u = u(x, y)$. У п. 8.3.9 вже розглядалися диференціальні властивості функції корисності. Нагадаємо, що ця функція виражає міру корисності набору $(x; y)$, де x — кількість товару X, а y — кількість товару Y. Чутливість набору $(x; y)$ до незначної зміни x за фіксованого y називають ***граничною корисністю x*** і виражають як частинну похідну u'_x. Аналогічно ***гранична корисність y*** виражається як u'_y. Лінії рівня функції корисності називають ***кривими байдужості.***

Вважатимемо, що для точок $M_0(x_0; y_0)$ і $M_1(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$, які розміщені на одній лінії рівня, прирости Δx і Δy мають різні знаки (рис. 9.3).

Нехай заради визначеності $\Delta x > 0$, а $\Delta y < 0$. У цьому випадкові кажуть, що Δx одиниць першого товару заміщується на $(-\Delta y)$ одиниць другого товару (мається на увазі перехід від M_1 до M_0).

➡ **Означення 9.17.** ***Граничною нормою заміщення x на y у точці** $M_0(x_0; y_0)$ **називають границю відношення** $-\frac{\Delta x}{\Delta y}$, **коли точка** M_1 **прямує до точки** M_0, **залишаючись на одній із точкою** M_0 **лінії рівня функції** $u = u(x, y)$*, і позначають MRS_{xy} або $MRS_{xy}(M_0)$, якщо необхідно явно вказати на її залежність від точки M_0.

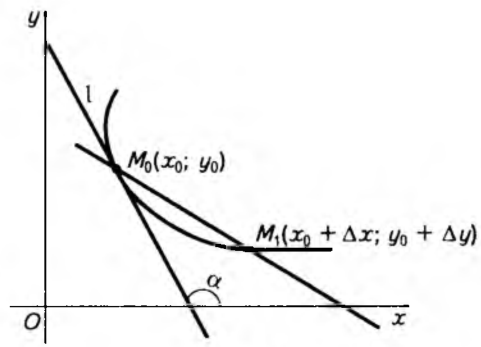


Рис. 9.3

Нехай l — дотична до лінії рівня функції $u = u(x, y)$ у точці M_0. Із рис. 9.3 видно, що січна M_0M_1 прямує до дотичної l, коли точка M_1 прямує до точки M_0. Тому

$$MRS_{xy}(M_0) = -\operatorname{tg}\alpha, \tag{9.26}$$

де α — кут нахилу дотичної l.

Запишемо рівняння дотичної l у вигляді

$$u'_x(M_0)(x - x_0) + u'_y(M_0)(y - y_0) = 0$$

або

$$y = y_0 - \frac{u'_x(M_0)}{u'_y(M_0)}(x - x_0), \tag{9.27}$$

звідки визначимо кутовий коефіцієнт дотичної:

$$k = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{u'_x(M_0)}{u'_y(M_0)}.$$

Використовуючи формулу (9.26), дістанемо

$$MRS_{xy}(M_0) = \frac{u'_x(M_0)}{u'_y(M_0)}. \tag{9.28}$$

Можна зробити ***висновок:*** *гранична норма заміщення одного товару іншим дорівнює відношенню їхніх граничних корисностей.*

■ **Приклад 9.13.** *Знайдемо граничну норму заміщення x на y для функції корисності* $u = u(x, y) = \ln x + \ln y$ *у точках* $A(3; 12)$ *і* $B(2; 1)$.

За формулою (9.28) дістанемо

$$MRS_{xy} = \frac{1}{x} : \frac{1}{y} = \frac{y}{x}.$$

Тому $MRS_{xy}(3; 12) = 4$, а $MRS_{xy}(2; 1) = 0{,}5$.

Із даного прикладу можна зрозуміти економічний зміст граничної норми заміщення.

Якщо $MRS_{xy}(3; 12) = 4$, то одиниця товару X за внеском у загальну корисність набору еквівалентна 4 одиницям товару Y. Нехай p_x — ціна товару X, а p_y — ціна товару Y. Тоді вартість набору $(x; y)$ становитиме $p_x x + p_y y$. У разі заміни в цьому наборі однієї одиниці X на 4 одиниці Y вартість набору зміниться на $4p_y - p_x$. Якщо ж, навпаки, 4 одиниці товару Y замінити на одну одиницю товару X, то вартість набору зміниться на $p_x - 4p_y$.

Припустимо, що $(x_0; y_0)$ — найдешевший набір при заданому рівні корисності $u(x, y) = C$ (C = const). Тоді вказані вище зміни вартості мають бути невід'ємними: $4p_y - p_x \ge 0$ і $p_x - 4p_y \ge 0$. Отже, $p_x = 4p_y$.

Ясно, що число 4, наведене в міркуваннях, можна замінити іншим. Фактично ми показали, що виконується рівність

$$MRS_{xy}(x_0, y_0) = \frac{p_x}{p_y}. \tag{9.29}$$

9.4.2. Функції попиту споживача

Нехай p_x — ціна товару X, а p_y — ціна товару Y, R — доход споживача, а $u = u(x, y)$ — функція корисності. Вважатимемо, що споживач може купувати лише такі набори товарів $(x; y)$, вартість яких не перевищує його доходу R, тобто $p_x x + p_y y \le R$.

➡ **Означення 9.18.** Нехай функція корисності $u = u(x, y)$ при довільних додатних p_x, p_y і R на множині $D = \{p_x x + p_y y \le R,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ має єдину точку максимуму $(x^*; y^*)$. *Тоді функції* $x^* = q_x(p_x, p_y, R)$ *і* $y^* = q_y(p_x, p_y, R)$ *називають* ***функціями попиту***.

Зміст даного означення полягає в тому, що споживач прагне якнайбільшого задоволення від товарів, котрі він придбав за обмежених коштів.

Геометрично множина D — це трикутник із вершинами $O(0; 0)$, $A\left(\dfrac{R}{p_x}; 0\right)$, $B\left(0; \dfrac{R}{p_y}\right)$, а економічно — це бюджетна множина (рис. 9.4).

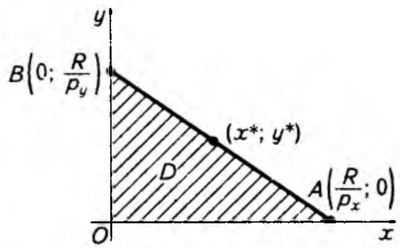


Рис. 9.4

Як правило, функція $u = u(x, y)$ зростає зі збільшенням x і y, і максимального значення досягає на відрізку AB, тому споживач витрачає на покупки весь свій доход.

Отже, задача зводиться до знаходження умовного максимуму функції корисності за умов $p_x x + p_y y \le R$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Запишемо функцію Лагранжа

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = u(x, y) + \lambda_1(R - p_x x - p_y y) + \lambda_2 x + \lambda_3 y.$$

Перевіримо необхідні умови умовного екстремуму. Для цього, знайшовши частинні похідні та прирівнявши їх до нуля:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0,\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0,\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = 0,$$

дістанемо систему

$$\begin{cases} u'_x(x, y) - \lambda_1 p_x + \lambda_2 = 0, \\ u'_y(x, y) - \lambda_1 p_y + \lambda_3 = 0, \\ R - p_x x - p_y y = 0, \\ \lambda_2 x = 0, \\ \lambda_3 y = 0, \\ \lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0,\ \lambda_3 \ge 0. \end{cases} \qquad (9.30)$$

Якщо відомо, що функція попиту не перетворюється в нуль, то з четвертого й п'ятого рівнянь (9.30) випливає $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, і система набирає вигляду

$$\begin{cases} u'_x(x, y) = \lambda_1 p_x, \\ u'_y(x, y) = \lambda_1 p_y, \\ R = p_x x - p_y y, \\ \lambda_1 \ge 0. \end{cases} \qquad (9.31)$$

Якщо $u'_x(x, y) > 0$ або $u'_y(x, y) > 0$ (найчастіше виконуються обидві умови), то з перших двох рівнянь випливає, що $\lambda_1 > 0$. Тоді λ_1 можна виключити із системи, і в результаті дістанемо

$$\begin{cases} MRS_{xy} = \dfrac{u'_x(x, y)}{u'_y(x, y)} = \dfrac{p_x}{p_y}, \\ p_x x + p_y y = R. \end{cases} \qquad (9.32)$$

■ **Приклад 9.14.** *Знайдемо функції попиту q_x і q_y, якщо функція корисності*

$$u(x, y) = \ln x + \ln y - \ln(x + y).$$

Для даної функції корисності знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$u'_x = \frac{y}{x(x + y)},\quad u'_y = \frac{x}{y(x + y)}.$$

Система рівнянь (9.29) набирає вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{u'_x}{u'_y} = \dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{p_x}{p_y}, \\ p_x x + p_y y = R. \end{cases}$$

Знаходимо другі похідні функції $u = u(x, y)$:

$$u''_{xx} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+y)^2}, \quad u''_{yy} = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x+y)^2}, \quad u''_{xy} = \frac{1}{(x+y)^2}.$$

Тоді визначник $\Delta = u''_{xx}u''_{yy} - (u''_{xy})^2 = \dfrac{2}{xy(x+y)^2}$.

В області $x > 0$, $y > 0$ маємо $u''_{xx} < 0$, $u''_{yy} < 0$, $\Delta = u''_{xx}u''_{yy} - (u''_{xy})^2 > 0$; крім того, $u'_x > 0$. Тому функції попиту будуть такі:

$$q_x = \frac{R}{p_x + \sqrt{p_x p_y}}, \quad q_y = \frac{R}{p_y + \sqrt{p_x p_y}}.$$

?

Контрольні запитання

1. Яку функцію називають виробничою?
2. Яку виробничу функцію називають функцією Кобба—Дугласа?
3. Які властивості виробничих функцій?
4. У чому суть закону спадної ефективності виробництва?
5. Які економічні характеристики процесу виробництва?
6. Як визначається середня продуктивність праці?
7. Як визначається середня фондовіддача?
8. Як визначаються граничні продуктивності i-го ресурсу?
9. Який зв'язок між середньою й граничною продуктивностями капіталу (праці) в загальному випадкові й у випадку виробничої функції Кобба—Дугласа?

10. Як визначається частинна еластичність випуску за i-м фактором виробництва?
11. Як визначається еластичність виробництва?
12. Які властивості еластичності?
13. Як визначається коефіцієнт еластичності попиту товару відносно його ціни?
14. Як визначається перехресний коефіцієнт еластичності попиту?
15. Як за коефіцієнтом еластичності попиту на товар за доходом визначити, чи будуть ці товари взаємозамінними або взаємодоповняльними?
16. Що таке ізокванта? В чому її економічний зміст?
17. Як визначається гранична норма заміщення одного ресурсу іншим?
18. Як змінюється гранична норма заміщення одного ресурсу іншим у разі руху по ізокванті?
19. Що характеризує коефіцієнт еластичності заміщення?
20. Як визначаються основні поняття теорії оптимізації виробництва?
21. Яка основна мета функціонування фірми?
22. Який набір ресурсів називають оптимальним?
23. Яка основна задача теорії багаторесурсної фірми?
24. У чому полягає суть задачі про оптимальний розподіл ресурсів?
25. Яка основна ідея задачі оптимального розподілу товарів?
26. У чому полягає суть задачі про мінімальні витрати виробництва за фіксованого обсягу випуску продукції?
27. У чому полягає суть задачі, пов'язаної з розподілом товару одного виду по різних ринках із різними попитами? Яка умова цінової дискримінації?
28. Що означає відношення переваги?
29. Які властивості функції корисності?
30. Які функції називають функціями попиту споживача?
31. Які лінії називають кривими байдужості?

Приклади розв'язування задач

1 *Виробнича функція (в грошових одиницях) має вигляд* $f(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$, *де x — обсяг першого ресурсу, а y — другого. Ціна одиниці першого ресурсу* $p_x = 5$, *а другого —* $p_y = 10$ *умов. грош. од. Знайти максимальний прибуток при використанні ресурсів.*

Якщо виробничу функцію задано в грошових одиницях, то вона виражає доход від використання ресурсів. Запишемо функцію витрат виробництва на використання ресурсів $C(x, y) = 5x + 10y$ і функцію прибутку $P(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y} - 5x - 10y$.

Знайдемо максимальне значення функції прибутку. Обчислимо частинні похідні функції прибутку:

$$P'_x = 15x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} - 5, \quad P'_y = 10x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}} - 10.$$

Прирівнюємо їх до нуля й розв'яжемо систему $\begin{cases} 15x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} - 5 = 0, \\ 10x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}} - 10 = 0. \end{cases}$

Дістали розв'язок $x = 81$ і $y = 27$, тобто визначили критичну точку першого роду $M(81; 27)$.

Частинні похідні другого порядку мають вигляд

$$P''_{xx} = -\frac{15}{2}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{3}}, \quad P''_{xy} = P''_{yx} = 5x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}, \quad P''_{yy} = -\frac{20}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{5}{3}}.$$

Перевіряємо достатні умови локального екстремуму. Знайдемо значення частинних похідних другого порядку в точці $M(81; 27)$:

$$A = P''_{xx}(81; 27) = -\frac{5}{2}, \quad B = P''_{xy}(81; 27) = \frac{5}{81}, \quad C = P''_{yy}(81; 27) = -\frac{20}{81}.$$

Обчислимо визначник:

$$\Delta = \left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{20}{81}\right) - \left(\frac{5}{81}\right)^2 > 0, \quad A = -\frac{5}{2} < 0.$$

Отже, $M(81; 27)$ — точка локального максимуму, й максимальний прибуток

$$P_{\max} = P(81; 27) = 132 \text{ умов. грош. од.}$$

2 *Виробнича функція (в грошових одиницях) має вигляд* $f(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$, *де x — обсяг першого ресурсу, а y — другого. Ціна одиниці першого ресурсу* $p_x = 5$, *а другого —* $p_y = 10$ *умов. грош. од. Через бюджетні обмеження на ресурси можна витратити не більше, ніж 600 умов. грош. од. Знайти оптимальний для виробника набір обсягів ресурсів* (x, y).

Запишемо функцію прибутку $P(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y} - 5x - 10y$. Набір ресурсів буде оптимальним, якщо функція прибутку набуває максимального значення за умови $5x + 10y \le 600$. У попередньому прикладі було знайдено оптимальний розподіл ресурсів за відсутності обмежень. Виявляється, що оптимальні витрати на ресурси становлять $5 \cdot 81 + 10 \cdot 27 = 675 > 600$. Можна показати, що в умовах наявності обмежень на ресурси потрібно витратити всю можливу суму.

Розглянемо задачу знаходження максимуму функції прибутку

$$P(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y} - 5x - 10y$$

за умови зв'язку $5x + 10y = 600$ або $x + 2y = 120$.

Перший спосіб. З умови зв'язку виразимо змінну: $x = 120 - 2y$ і підставимо її у функцію прибутку:

$$P(y) = 30\sqrt{120 - 2y}\sqrt[3]{y} - 5(120 - 2y) - 10y = 30\sqrt{120 - 2y}\sqrt[3]{y} - 600.$$

Знайдемо похідну:

$$P'(y) = \frac{30\sqrt[3]{y}}{\sqrt{120 - 2y}} + \frac{10\sqrt{120 - 2y}}{\sqrt[3]{y}}.$$

Прирівнюючи її до нуля, дістанемо розв'язок: $y = 24$, $x = 120 - 2 \cdot 24 = 72$. Максимальний прибуток при цьому

$$P_{\max} = P(72; 24) = 512\,400 \text{ умов. грош. од.}$$

Другий спосіб. За умови, що $5x + 10y = 600$, функція прибутку набирає вигляду $P(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y} - 600$. Очевидно, що деяке значення C рівня функції $P(x, y) = C$ має перетинатися прямою $5x + 10y = 600$ або $x + 2y = 120$.

Рівняння лінії рівня функції прибутку $30\sqrt{x}\sqrt[3]{y} - 600 = C$ можна записати так: $y = \frac{A}{x^{3/2}}$, де $A = \frac{C + 600}{30}$.

Максимальне значення A, а отже, і C досягається в тому випадкові, коли відповідна лінія рівня дотикається до прямої $x + 2y = 120$. Оскільки градієнт у кожній точці перпендикулярний до лінії рівня, то умову максимальності прибутку можна сформулювати таким чином: вектор (P'_x, P'_y) перпендикулярний до прямої $5x + 10y = 600$. Кутовий коефіцієнт цієї прямої $k_1 = -\frac{1}{2}$, а прямої, на якій лежить вектор (P'_x, P'_y), становить $k_2 = \frac{P'_y}{P'_x}$.

Із умови перпендикулярності двох прямих маємо $\frac{P'_y}{P'_x} = 2$, тобто виконується співвідношення $\frac{\frac{1}{3}x^{1/2}y^{-2/3}}{\frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/3}} = 2$, або $x = 2y$. Підставивши його в рівняння прямої $5x + 10y = 600$, знаходимо $y = 24$, $x = 120 - 2 \cdot 24 = 72$. Максимальний прибуток при цьому

$$P_{\max} = P(72;\ 24) = 512\ 400 \text{ умов. грош. од.}$$

3 *Задано виробничу функцію, що залежить від двох змінних: $q(x, y) = 5xy$, де x — витрати основних фондів; y — витрати людської праці, а також задано відповідні ціни на ресурси $p_x = 10$ і $p_y = 8$ умов. грош. од. Знайти значення величин x і y, які забезпечують мінімальні витрати виробництва за фіксованого обсягу продукції $q_0 = 1600$.*

Оскільки обсяг продукції фіксований, то $5xy = 1600$. Отже, маємо умови зв'язку $5xy - 1600 = 0$, $x > 0$, $y > 0$. Виразимо одну зі змінних, наприклад y, з умов зв'язку: $y = \frac{320}{x}$. Запишемо функцію витрат фірми $C(x, y) = 10x + 8y$. Підставивши значення $y = \frac{320}{x}$ у функцію витрат, дістанемо функцію однієї змінної $C(x) = 10x + 8\frac{320}{x}$.

Тепер застосуємо стандартний метод визначення мінімального значення функції $C = C(x)$. Знайдемо похідну функції витрат $C'(x) = 10 - \frac{2560}{x^2}$.

Критичні точки першого роду визначаємо з умови $10 - \frac{2560}{x^2} = 0$, звідки $10x_2 = 2560$. Дістанемо $x_1 = 16$ і $x_2 = -16$. З економічних міркувань $x_2 = -16$ — сторонній корінь. Отже, $x = 16$ — критична точка, а $y = 20$.

Оскільки $C''(x) = 5120x^{-3}$ і $C''(16) > 0$, то в точці $x = 16$ функція досягає мінімуму. Тоді $y = 20$. Мінімальні витрати $C_{\min} = 320$ умов. грош. од.

4 *Функція корисності має вигляд $U(x, y) = 2\ln(x - 1) + 3\ln(y - 1)$. Ціни одиниці товарів x і y відповідно становлять $p_x = 8$ і $p_y = 16$ умов. грош. од. На придбання цих товарів можна витратити 1000 умов. грош. од. Визначити, як розподілити цю суму між двома товарами x і y, щоб корисність їх придбання була найбільшою.*

Розглянемо лінії рівня функції корисності $U(x, y) = C$, тобто $2\ln(x - 1) + 3\ln(y - 1) = C$. Використовуючи властивості логарифмів, маємо $\ln(x - 1)^2(y - 1)^3 = C$, звідки $(y - 1)^3 = \frac{A}{(x - 1)^2}$, де $A = e^C$. Отже, лініями рівня будуть графіки функцій

$$y = \frac{\sqrt[3]{A}}{(x - 1)^{2/3}} + 1.$$

У точці $(x;\ y)$, де функція корисності досягає максимального значення, лінія рівня дотикається прямої $8x + 16y = 1000$ або $x + 2y = 125$ і градієнт перпендикулярний до цієї лінії. Градієнт функції корисності $\left(\frac{2}{x - 1};\ \frac{3}{y - 1}\right)$.

Кутовий коефіцієнт прямої $k_1 = -\frac{1}{2}$. Використовуючи умову перпендикулярності двох прямих, маємо $\frac{3(x - 1)}{2(y - 1)} = 2$ або $3x - 4y = -1$. Знайдемо точку перетину прямих, яка є розв'язком системи

$$\begin{cases} x + 2y = 125, \\ 3x - 4y = -1, \end{cases}$$

звідки $x = 49{,}5$, $y = 37{,}75$.

Отже, оптимальний розподіл споживання товарів буде при $x = 49{,}5$, $y = 37{,}75$.

Розділ 10

МЕТОДИ Й МОДЕЛІ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

10.1 Первісна й невизначений інтеграл

10.1.1. Первісна

Основна задача диференціального числення полягає в тому, щоб знайти похідну заданої функції $y = f(x)$. Багато питань математичного й економічного аналізу приводять до оберненої задачі: для заданої функції $y = f(x)$ знайти таку функцію $y = F(x)$, похідна якої дорівнювала б $y = f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

■ **Приклад 10.1.** Формування оборотних фондів — це динамічний процес, що відбувається в часі й який можна розглядати як неперервний. Нехай функція $K = K(t)$ виражає залежність обсягу оборотних фондів від часу. Тоді похідна за часом $\dfrac{dK}{dt}$ — це швидкість формування оборотних фондів, котру можна розглядати як швидкість потоку грошових фондів $I = I(t)$. Якщо задано функцію швидкості потоку, то постає задача знаходження функції оборотних фондів, яка зводиться до операції відшукання функції за її похідною.

Таку операцію називають ***операцією інтегрування***, а розділ математики, що вивчає методи знаходження функції за її похідною, — ***інтегральним численням***.

➡ **Означення 10.1.** *Диференційовну функцію $y = F(x)$ називають **первісною для функції** $y = f(x)$ на проміжку X, якщо для довільного $x \in X$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.*

■ **Приклад 10.2.** Нехай $f(x) = \cos x$. Тоді за первісну можна взяти функцію $F(x) = \sin x$, оскільки $(\sin x)' = \cos x$.

■ **Приклад 10.3.** *Знайдемо первісну для функції $f(x) = x^2$.*

Очевидно, що шуканою функцією буде $F_1(x) = \dfrac{x^3}{3}$, оскільки

$$F_1'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{(x^3)'}{3} = \frac{3x^2}{3} = x^2 \quad \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

Зауважимо, що в прикладі за шукану функцію можна взяти

$$F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 10, \text{ бо } F_2'(x) = x^2,$$

або

$$F_3(x) = \frac{x^3}{3} + 100, \text{ бо } F_3'(x) = x^2.$$

Таким чином, функції $y = F_1(x)$, $y = F_2(x)$, $y = F_3(x)$ є первісними для функції $y = x^2$, де $x \in (-\infty, +\infty)$.

Наведений приклад показує, що операція відшукання первісної неоднозначна. Тому постає запитання: якщо функція $y = f(x)$ має первісну, то скільки їх може бути й як вони між собою відрізнятимуться?

Можна сказати, що первісних для даної функції безліч. Цей факт пояснюється ось чим: якщо функція $y = F(x)$ є первісною для функції $y = f(x)$, то й функція $y = F(x) + C$, де C — довільна стала, теж є первісною (похідна від сталої дорівнює нулю).

Отже, ми відповіли на першу частину запитання. Для відповіді на другу частину доведемо теорему.

ТЕОРЕМА 10.1
(про загальний вигляд первісної)

Якщо функція $y = F(x)$ є первісною для функції $y = f(x)$ на проміжку X, то всі первісні для функції $y = f(x)$ мають вигляд $y = F(x) + C$, де $C = \text{const}$.

Доведення

Нехай $y = F(x)$ — первісна для функції $y = f(x)$. Тоді виконується рівність $F'(x) = f(x)$. Розглянемо функцію $y = \Phi(x) = F(x) + C$. Тоді $\Phi'(x) = (F(x) + C)' = f(x)$, а це означає, що функція $y = \Phi(x)$ також є первісною для функції $y = f(x)$.

Навпаки, якщо функції $y = F(x)$ і $y = \Phi(x)$ — дві первісні для функції $y = f(x)$, то $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = 0$. Тому $\Phi(x) - F(x) = C$, $C = \text{const}$, звідки $\Phi(x) = F(x) + C$, що й треба було довести.

Отже, будь-які дві первісні для функції $y = f(x)$ відрізняються між собою на сталу.

Ця теорема дає змогу ввести поняття невизначеного інтеграла, що є основним поняттям інтегрального числення.

➡ **Означення 10.2.** *Множину всіх первісних для функції $y = f(x)$ називають **невизначеним інтегралом*** і позначають

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{10.1}$$

У рівності (10.1) символ $\int$ — знак інтеграла; $f(x)$ — ***підінтегральна функція***; x — ***змінна інтегрування***; $f(x)\,dx$ — ***підінтегральний вираз***; функція $y = F(x)$ є однією з первісних для функції $y = f(x)$; $C = \text{const}$ — довільна стала.

10.1.2. Основні властивості невизначеного інтеграла

① *Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:*

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \tag{10.2}$$

Диференціюючи ліву й праву частини (10.2), дістанемо

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x).$$

② *Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:*

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx. \tag{10.3}$$

За означенням диференціала дістанемо

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx.$$

③ *Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції з точністю до довільної сталої:*

$$\int dF(x) = F(x) + C. \tag{10.4}$$

Оскільки $dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$, то

$$\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

④ *Сталий множник можна винести за знак інтеграла:*

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha\int f(x)dx. \tag{10.5}$$

Знайдемо похідну від функції $y = g(x) = \int \alpha f(x)dx - \alpha\int f(x)dx$:

$$g'(x) = \left(\int \alpha f(x)dx - \alpha\int f(x)dx\right)' = \left(\int \alpha f(x)dx\right)' - \alpha\left(\int f(x)dx\right)' =$$

$$= \alpha f(x) - \alpha f(x) = 0.$$

За наслідком теореми Лагранжа існує число C таке, що $g(x) = C$, тому

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha\int f(x)dx + C.$$

Оскільки сам невизначений інтеграл знаходиться з точністю до сталого множника, то в рівності (10.5) сталу можна пропустити.

⑤ *Інтеграл від алгебричної суми дорівнює алгебричній сумі інтегралів:*

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx. \tag{10.6}$$

Нехай функції $y = F(x)$ і $y = G(x)$, $y = |F(x) \pm G(x)|$ є первісними для функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$, $y = f(x) \pm g(x)$. Тоді

$$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = |F(x) + C_1| \pm |G(x) + C_2| =$$

$$= |F(x) \pm G(x)| + |C_1 \pm C_2| = |F(x) \pm G(x)| + C = \int |f(x) \pm g(x)|dx.$$

✓ *Зауваження 10.1.* Формулюючи й доводячи властивості, ми припускали, що всі функції, які входять у відповідні рівності, мають первісні.

✓ *Зауваження 10.2.* Виходячи з означення невизначеного інтеграла, рівності слід розуміти з точністю до довільної сталої. Інакше кажучи, невизначені інтеграли рівні тоді й лише тоді, коли рівні похідні від них.

10.1.3. Інтеграли від основних елементарних функцій

У п. 6.3.3 вміщено таблицю похідних основних елементарних функцій. Наведена нижче таблиця невизначених інтегралів є математичним апаратом інтегрального числення. Частина формул безпосередньо випливає з означення інтегрування як операції, оберненої до диференціювання. Справедливість усіх формул легко перевірити диференціюванням.

Таблиця інтегралів

1. $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1.$

4. $\int e^x\,dx = e^x + C.$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

9. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

9′. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C.$

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

10′. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C.$

11. $\int \dfrac{dx}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + C.$

11′. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C.$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm 1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm 1}\right| + C.$

12′. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a}\right| + C.$

Як було встановлено раніше, операція диференціювання не виводить функцію з класу елементарних функцій.

Інтеграли від деяких елементарних функцій уже не будуть елементарними функціями. Вкажемо деякі з них:

$\int e^{-x^2}dx$ — *інтеграл Пуассона;*

$\int \sin(x^2)dx$ — *інтеграл Френеля;*

$\int \cos(x^2)dx$ — *інтеграл Френеля;*

$\int \dfrac{dx}{\ln x}, \quad x > 0, \quad x \neq 1$ — *інтегральний логарифм;*

$\int \dfrac{\sin x}{x}dx$ — *інтегральний синус;*

$\int \dfrac{\cos x}{x}dx$ — *інтегральний косинус.*

Ці інтеграли відіграють важливу роль. Наприклад, інтеграл Пуассона є одним з основних у теорії ймовірностей і статистиці.

Зазвичай інтеграли, якими оперують у різних застосуваннях, не виражаються елементарними функціями (або, як кажуть, «не беруться»). Але існують досить добре розроблений математичний апарат наближених формул, а також методи наближених розрахунків, які дають змогу з будь-якою довільною точністю оцінити та обчислити «інтеграли, що не беруться», за допомогою елементарних функцій.

10.2 Основні методи інтегрування

Зазначимо, що немає універсального методу інтегрування функцій, проте існують класичні, або основні, методи інтегрування, до яких належать: метод безпосереднього інтегрування, метод підстановки (метод заміни) й метод інтегрування частинами.

10.2.1. Метод безпосереднього інтегрування

Цей метод ґрунтується на застосуванні табличних інтегралів та основних властивостей невизначеного інтеграла.

■ **Приклад 10.4.** *Обчислимо інтеграл:*

$$\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int\left(x^{\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}}\right)dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{1/3+1} + 2\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-2/3+1} + C =$$

$$= \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x} + C.$$

■ **Приклад 10.5.** *Обчислимо інтеграл:*

$$\int \frac{x^2dx}{1+x^2} = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2}dx = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

■ **Приклад 10.6.** *Обчислимо інтеграл:*

$$\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

■ **Приклад 10.7.** *Обчислимо інтеграл:*

$$\int (2^x + 5^x)^2 dx = \int (2^{2x} + 2\cdot 2^x\cdot 5^x + 5^{2x})\,dx =$$

$$= \int 4^x\,dx + 2\int 10^x\,dx + \int 25^x\,dx = \frac{4^x}{\ln 4} + 2\frac{10^x}{\ln 10} + \frac{25^x}{\ln 25} + C.$$

■ **Приклад 10.8.** *Обчислимо інтеграл:*

$$\int \frac{dx}{9x^2-1} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{9}\frac{1}{2\frac{1}{3}}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{3}}{x+\frac{1}{3}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+1}\right| + C.$$

■ **Приклад 10.9.** *Обчислимо інтеграл:*

$$\int\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int\left(\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)dx =$$

$$= \int (1 + \sin x)dx = x - \cos x + C.$$

10.2.2. Метод заміни змінної (метод підстановки)

У багатьох випадках введення нової змінної інтегрування дає змогу звести знаходження даного інтеграла до відшукання табличного інтеграла. Цей метод базується на такій теоремі

ТЕОРЕМА 10.2

Нехай функція $x = \varphi(t)$ визначена й диференційовна на проміжку T, $\varphi : T \to X$, а функція $y = f(x)$ визначена на проміжку X і має на ньому первісну $y = F(x)$. Тоді на проміжку T складна функція $y = F(\varphi(t))$ є первісною для функції $y = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, тобто справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C. \qquad (10.7)$$

Доведення

За правилом диференціювання складної функції

$$(F(\varphi(t)))' = F(\varphi(t))'_x\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t),\quad t \in T.$$

Отже, функція $y = F(\varphi(t))$ є первісною для функції $y = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Тому

$$F(\varphi(t)) + C = (F(x) + C)\big|_{x=\varphi(t)} =$$

$$= \int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Теорему доведено.

Формулу (10.7) називають ***формулою заміни змінної*** в невизначеному інтегралі.

♦ **Наслідок 1.** *Справедлива формула*

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C. \qquad (10.8)$$

Зробимо відповідну заміну. Тоді з (10.7) випливає

$$\int f(ax)dx = \left| \begin{array}{c} x = \dfrac{t}{a} \\ dx = \dfrac{1}{a}dt \end{array} \right| = \frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax) + C.$$

♦ **Наслідок 2.** *Справедлива формула*

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \qquad (10.9)$$

Справді,

$$\int f(ax+b)dx = \left| \begin{array}{l} ax+b = t \\ a\ dx = dt \\ dx = \dfrac{1}{a}dt \end{array} \right| = \frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

■ **Приклад 10.10.** *Обчислимо інтеграл:*

$$\int \sqrt[3]{3-x}\ dx = \left| \begin{array}{c} 3 - x = t^3 \\ -dx = 3t^2\ dt \end{array} \right| =$$

$$= \int t 3t^2\ dt = 3\int t^3\ dt = 3\frac{t^4}{4} + C = \frac{3}{4}t^4 + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(3-x)^4} + C.$$

■ **Приклад 10.11.** *Обчислимо інтеграл:*

$$\int xe^{-x^2}dx = \left| \begin{array}{c} -x^2 = t \\ -2x\ dx = dt \\ x\ dx = -\dfrac{1}{2}dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int e^t\ dt = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

■ **Приклад 10.12.** *Обчислимо інтеграл:*

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx = \left| \begin{array}{c} \ln x = t \\ \dfrac{dx}{x} = dt \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C = \frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

■ **Приклад 10.13.** *Обчислимо інтеграл:*

$$\int \frac{x\ dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{c} 1 - x^2 = t \\ -2x\ dx = dt \\ x\ dx = -\dfrac{1}{2}dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{1/2} + C = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

10.2.3. Метод інтегрування частинами

Це досить ефективний метод інтегрування, який базується на такій теоремі.

ТЕОРЕМА 10.3

Нехай функції $y = u(x)$, $y = v(x)$ визначені й диференційовні на проміжку X. Крім того, на цьому проміжку існує первісна для функції $v(x)u'(x)$. Тоді на проміжку X існує первісна для функції $u(x)v'(x)$, причому справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx. \qquad (10.10)$$

Формулу (10.10) називають ***формулою інтегрування частинами*** в невизначеному інтегралі.

Доведення

Функція $y = u(x)v(x)$ є однією з первісних для функції $y = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ на проміжку X, оскільки за правилом диференціювання добутку двох функцій маємо

$$d(u(x)v(x)) = u(x)dv(x) + v(x)du(x).$$

Взявши інтеграл від обох частин останньої рівності, дістанемо

$$\int d(u(x)v(x)) = \int u(x)dv(x) + \int v(x)du(x)$$

або

$$u(x)v(x) = \int u(x)dv(x) + \int v(x)du(x),$$

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Теорему доведено.

На практиці для застосування формули (10.10) підінтегральний вираз розбивають на два множники, які позначають u та dv. Потім диференціюванням знаходять du, а інтегруванням — функцію v.

Можна зробити зауваження щодо застосування формули (10.10).

1. *В інтегралах вигляду*

$$\int P_n(x)e^{\alpha x}\,dx,\quad \int P_n(x)\cos(\alpha x)dx,\quad \int P_n(x)\sin(\alpha x)dx,$$

де $P_n(x)$ — многочлен n-го степеня, позначають $u(x) = P_n(x)$, а вирази $e^{\alpha x}dx$, $\cos(\alpha x)dx$, $\sin(\alpha x)dx$ — через dv.

■ **Приклад 10.14.** *Обчислимо інтеграл:*

$$\int x^2e^x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x^2 & e^x\,dx = dv \\ du = 2x\,dx & v = e^x \end{matrix}\right| = x^2e^x - \int e^x\,2x\,dx =$$

$$= x^2e^x - 2\int xe^x\,dx = \left|\begin{matrix} x = u & e^x\,dx = dv \\ du = dx & v = e^x \end{matrix}\right| =$$

$$= x^2e^x - 2\left(e^xx - \int e^x\,dx\right) = x^2e^x - 2e^xx - 2e^x + C =$$

$$= e^x(x^2 - 2x - 2) + C.$$

2. *В інтегралах вигляду*

$$\int P_n(x)\ln^n x\,dx,\quad \int P_n(x)\arcsin x\,dx,\quad \int P_n(x)\arccos x\,dx,$$

$$\int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx,\quad \int P_n(x)\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$$

$\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\,x$, $\mathrm{arcctg}\,x$ позначають через $u = \ln x$, а $dv = P_n(x)dx$.

■ **Приклад 10.15.** *Обчислимо інтеграл:*

$$\int \ln x\,dx = \left|\begin{matrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = x \end{matrix}\right| = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

■ **Приклад 10.16.** *Обчислимо інтеграл:*

$$\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx = \left|\begin{matrix} u = \mathrm{arctg}\,x & dv = x\,dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix}\right| = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \int\frac{x^2}{2}\,\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2\,dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1-1)dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x + C.$$

Іноді метод інтегрування частинами доводиться застосовувати кілька разів.

3. *Для інтегралів вигляду* $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$, $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$ у результаті дворазового застосування методу інтегрування частинами можна дістати лінійне рівняння відносно заданого інтеграла.

■ **Приклад 10.17.** *Обчислимо інтеграл:*

$$I = \int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \left|\begin{matrix} u = e^{\alpha x}\,dv & \cos\beta x\,dx \\ du = \alpha e^{\alpha x}\,dx & v = \dfrac{1}{\beta}\sin\beta x \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}}{\beta}\sin\beta x - \int\frac{1}{\beta}\sin\beta x\,\alpha e^{\alpha x}dx = \frac{e^{\alpha x}}{\beta}\sin\beta x - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = e^{\alpha x} & dv = \sin\beta x\,dx \\ du = \alpha e^{\alpha x}\,dx & v = -\dfrac{1}{\beta}\cos\beta x \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}}{\beta}\sin\beta x - \frac{\alpha}{\beta}\left(-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x - \int\left(-\frac{1}{\beta}\cos\beta x\right)\alpha e^{\alpha x}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x + \frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\cos\beta x - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx.$$

Таким чином,

$$I = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x + \frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\cos\beta x - \frac{\alpha^2}{\beta^2}I,$$

$$\left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)I = e^{\alpha x}\left(\frac{1}{\beta}\sin\beta x + \frac{\alpha}{\beta^2}\cos\beta x\right),$$

$$\frac{\beta^2 + \alpha^2}{\beta^2}I = e^{\alpha x}\left(\frac{1}{\beta}\sin\beta x + \frac{\alpha}{\beta^2}\cos\beta x\right),$$

$$I = \frac{\beta^2}{\beta^2 + \alpha^2}e^{\alpha x}\left(\frac{1}{\beta}\sin\beta x + \frac{\alpha}{\beta^2}\cos\beta x\right),$$

$$I = \frac{e^{\alpha x}}{\beta^2 + \alpha^2}(\beta\sin\beta x + \alpha\cos\beta x).$$

10.2.4. Рекурентні формули

Іноді інтегрування частинами дає змогу дістати співвідношення між невизначеним інтегралом, що містить степінь деякої функції, та аналогічним інтегралом, але з меншим показником степеня тієї самої функції. Подібні співвідношення називаються ***рекурентними формулами***.

■ **Приклад 10.18.** *Виведемо рекурентну формулу для інтеграла*

$$I_n = \int\frac{dx}{(x^2+1)^n}.$$

Маємо

$$I_n = \int\frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n}dx =$$

$$= \int\frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int\frac{x^2dx}{(x^2+1)^n} = I_{n-1} - \int\frac{x^2}{(x^2+1)^n}dx.$$

В останньому інтегралі покладемо $u = x$, $dv = \frac{x}{(x^2+1)^n}dx$, $du = dx$. Тоді

$$v = \int\frac{x}{(x^2+1)^n}dx = \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^n} = \frac{1}{2}\int t^{-n}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = -\frac{1}{2n-2}\frac{1}{t^{n-1}} + C = -\frac{1}{2n-2}\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} + C.$$

Тому, використовуючи формулу інтегрування частинами, маємо

$$I_n = I_{n-1} + \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{(2n-2)}\int\frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + I_{n-1} - \frac{1}{2n-2}I_{n-1} =$$

$$= \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}.$$

Отже, дістали формулу

$$I_n = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}. \tag{10.11}$$

10.2.5. Методи інтегрування ірраціональних і трансцендентних функцій

Ірраціональні й трансцендентні функції інтегруються в елементарних функціях тільки в деяких випадках. Найбільше застосовуються такі види інтегралів від ірраціональних функцій, які виражаються через елементарні. Розглянемо випадки, коли заміною змінної інтеграли від ірраціональних функцій зводяться до інтегралів від раціональних функцій.

Позначимо через $R(u, v)$ функцію двох змінних — раціональну функцію, побудовану з використанням дій додавання, віднімання, множення й ділення над аргументами. Наприклад,

$$R(u, v) = u^2 + 2v^5, \quad R(u, v) = \frac{u+3v}{2-u^2}.$$

Інтеграли від ірраціональних і трансцендентних функцій зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою підстановок. Далі наведено найпоширеніші підстановки для певних видів інтегралів.

1. *Інтеграли вигляду* $\int R\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx.$

Підстановка $x = t^n$, де n — найменше спільне кратне чисел $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

2. *Інтеграли вигляду* $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, *де* $ad - cd \neq 0$.

Підстановка $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

3. *Інтеграли вигляду* $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx.$

Підстановки Ейлера

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x, \quad a > 0,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}, \quad c > 0,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm(x - x_1)t = \pm(x - x_2)t,$$

де x_1, x_2 — різні дійсні корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$.

4. *Інтеграли вигляду* $\int R(\sin x, \cos x)\,dx.$

Універсальна тригонометрична підстановка

$$t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}, \quad x = 2\,\mathrm{arctg}\,t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

5. *Інтеграли вигляду* $\int R(e^x)dx.$

Підстановка $t = e^x$.

6. *Інтеграли вигляду* $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx.$

Підстановка $x = \mathrm{tg}\,t$ або $x = a\,\mathrm{ctg}\,t$.

7. *Інтеграли вигляду* $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx.$

Підстановка $x = a \sin t$ або $x = a \cos t$.

8. *Інтеграли вигляду* $\int R(\mathrm{tg}\,x)dx.$

Підстановка $t = \mathrm{tg}\,x$.

9. *Інтеграли вигляду*

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x\, dx, \quad \int \sin \alpha x \sin \beta x\, dx, \quad \int \cos \alpha x \cos \beta x\, dx$$

за допомогою відомих тригонометричних формул можна розкласти в суму інтегралів.

10.3 Інтегрування дробово-раціональних функцій

10.3.1. Основні поняття про дробово-раціональні функції

До класу дробово-раціональних належать функції, які можна подати у вигляді відношення двох многочленів (у вигляді дробу).

Розглянемо дробово-раціональну функцію

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}.$$

Якщо $m \geq n$, то дріб називають *неправильним*, а якщо $n < m$, — *правильним*.

Якщо $m \geq n$, то виконуємо ділення

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}, \tag{10.12}$$

де $R(x)$ — ціла частина — многочлен, а $P_1(x)$ — многочлен степеня, нижчого за степінь многочлена $Q(x)$, тобто $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ — правильний дріб.

Інакше кажучи, будь-який неправильний дріб можна подати у вигляді суми многочлена й правильного дробу. Таким чином, інтегрування дробово-раціональних функцій зводиться до інтегрування многочленів і правильного дробу.

10.3.2. Інтегрування простих дробів

У повному курсі алгебри доводиться теорема про те, що правильний раціональний дріб розкладається на суму простих дробово-раціональних функцій типу:

1) $\frac{A}{x-a}$;

2) $\frac{A}{(x-a)^k}$;

3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$,

де k — ціле додатне число; $A, M, N, a, p, q \in \boldsymbol{R}$; $p^2 - 4q < 0$, а $x^2 + px + q$ — квадратний тричлен, що не має дійсних коренів. Ці дроби завжди інтегруються:

1) $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$;

2) $\int \frac{A}{(x-a)^k} = -\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C, \quad k > 1$;

3) $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{N - Mp/2}{\sqrt{q-p^2/4}} \operatorname{arctg} \frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}} + C;$$

4) $$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx = -\frac{M}{2(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{((x+p/2)^2+q-p^2/4)^k}.$$

Отже, прості дроби інтегруються в елементарних функціях. Практична реалізація зводиться до проблеми розкладання правильного раціонального дробу на елементарні.

10.3.3. Розкладання правильних раціональних дробів на найпростіші

З елементарної математики відома така теорема.

ТЕОРЕМА 10.4

Будь-який правильний раціональний дріб розкладається на суму найпростіших раціональних дробів.

Щоб зінтегрувати правильний раціональний дріб, потрібно розкласти знаменник на найпростіші множники й записати розклад даного дробу на елементарні. Можливі такі випадки.

1. Корені знаменника $Q(x)$ дійсні та різні, тобто, якщо

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m),$$

то в цьому разі

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_m}{x-a_m}. \tag{10.13}$$

2. Корені знаменника $Q(x)$ дійсні й деякі з них кратні, тобто, якщо

$$Q(x) = (x-a)(x-b)^k,$$

то

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_k}{(x-b)^k}. \qquad (10.14)$$

3. Корені знаменника дійсні й, крім того, знаменник містить квадратний тричлен, який не розкладається на множники; тобто, якщо

$$Q(x) = (x-a)(x-b)^k(x^2+px+q),$$

то

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_k}{(x-b)^k} + \frac{Dx+E}{x^2+px+q}. \qquad (10.15)$$

4. У випадку, коли знаменник має вигляд

$$Q(x) = (x-a)(x^2+px+q)^k,$$

дістаємо

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{D_1x+E_1}{x^2+px+q} +$$

$$+ \frac{D_2x+E_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{D_kx+E_k}{(x^2+px+q)^k}. \qquad (10.16)$$

10.3.4. Метод невизначених коефіцієнтів

У формулах (10.13)–(10.16) невідомі коефіцієнти знаходяться за методом невизначених коефіцієнтів. Практичне застосування цього методу проілюструємо на прикладах.

■ **Приклад 10.19.** *Обчислимо інтеграл* $\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)}$.

Підінтегральний вираз — правильний дріб (степінь чисельника менший за степінь знаменника), знаменник якого розкладено на найпростіші множники. Запишемо розклад даного дробу на елементарні доданки:

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}.$$

У правій частині рівності зводимо дроби до спільного знаменника:

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Знаменники дробів рівні, тому дроби рівні, коли рівні їхні чисельники. Прирівнюємо чисельники:

$$x = Ax^2 - Ax + Bx - B + Cx^2 + C.$$

Згрупувавши доданки, дістанемо

$$x = x^2(A+C) + x(B-A) + C - B.$$

Многочлени рівні, коли рівні коефіцієнти при відповідних степенях x. Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A + C = 0, \\ x & B - A = 1, \\ x^0 & C - B = 0. \end{array}$$

Розв'язавши цю систему, дістанемо $C = 1/2$, $B = 1/2$, $A = -1/2$.

Обчислимо заданий інтеграл:

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)} = -\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = \left| \begin{array}{l} x^2+1 = t \\ 2x\,dx = dt \\ x\,dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \left| \begin{array}{l} x-1 = z \\ dx = dz \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|t| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln|z| + C = -\frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x +$$

$$+ \frac{1}{2}\ln|x-1| + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \ln\left|\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{x^2+1}}\right| + C.$$

■ **Приклад 10.20.** *Обчислимо інтеграл* $\int \frac{x^2+2}{(x^2+1)^2(x-2)}dx$.

Підінтегральний вираз є правильним раціональним дробом, причому знаменник розкладено на елементарні множники. Для того щоб обчислити інтеграл, розкладемо підінтегральний вираз на елементарні дроби й скористаємося методом невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{x^2+2}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Знаменники дробів рівні, тому дроби рівні, коли рівні їхні чисельники. Прирівнюємо чисельники:

$$x^2+2=A(x^2+1)^2+(M_1x+N_1)(x-2)(x^2+1)+(M_2x+N_2)(x-2).$$

Остаточно

$$x^2+2=(A+M_1)x^4+(-2M_1+N_1)x^3+(2A+M_1-2N_1+M_2)x^2+$$
$$+(-2M_1+N_1-2M_2+N_2)x+(A-2N_1-2N_2).$$

Аби многочлени в лівій і правій частинах рівності були рівні між собою для всіх x, необхідно, щоб були рівні коефіцієнти при однакових степенях x цих многочленів. Прирівнявши ці коефіцієнти, дістанемо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів A_1, M_1, N_1, M_2, N_2:

$$\begin{cases} A+M_1=0,\\ -2M_1+N_1=0,\\ 2A+M_1-2N_1+M_2=1,\\ -2M_1+N_1-2M_2+N_2=0,\\ A-2N_1-2N_2=2.\end{cases}$$

Розв'язок системи: $A=\frac{6}{25}$, $M_1=-\frac{6}{25}$, $N_1=-\frac{12}{25}$, $M_2=-\frac{1}{5}$, $N_2=-\frac{2}{5}$.

Отже, підінтегральна функція розкладається на елементарні дроби:

$$\frac{x^2+2}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{\frac{6}{25}}{x-2}+\frac{-\frac{6}{25}x-\frac{12}{25}}{x^2+1}+\frac{-\frac{1}{5}x-\frac{2}{5}}{(x^2+1)^2}.$$

Тому шуканий інтеграл можна подати у вигляді

$$\int\frac{x^2+2}{(x-2)(x^2+1)^2}dx=\frac{6}{25}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{6}{25}\int\frac{x+2}{x^2+1}dx-\frac{1}{5}\int\frac{x+2}{(x^2+1)^2}dx.$$

Обчислимо кожний із цих інтегралів окремо:

$$\int\frac{dx}{x-2}=\ln|x-2|+C_1,$$

$$\int\frac{x+2}{x^2+1}dx=\int\frac{x\,dx}{x^2+1}+2\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+2\operatorname{arctg}x+C_2,$$

$$\int\frac{x+2}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx+2\int\frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

$$\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}=\left|\begin{matrix} t=x^2+1\\ dt=2x\,dx\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{t}+C_3=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}+C_3.$$

Щоб знайти $\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$, застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int\frac{dx}{x^2+1}=\left|\begin{matrix} u=\frac{1}{x^2+1}, & du=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx\\ dv=dx, & v=x\end{matrix}\right|=\frac{x}{x^2+1}+2\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{x}{x^2+1}+2\int\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}dx-2\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{x^2+1}+2\int\frac{dx}{x^2+1}-2\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Отже,

$$\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x}{x^2+1}+2\int\frac{dx}{x^2+1}-2\int\frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

звідки

$$2\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x+C_4,$$

$$\int\frac{x+2}{(x^2+1)^2}dx=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}+\frac{x}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x+C_5.$$

Тоді шуканий інтеграл

$$\int\frac{x^2+2}{(x-2)(x^2+1)^2}dx=\frac{6}{25}\ln|x-2|-\frac{3}{25}\ln|x^2+1|-\frac{3}{25}\operatorname{arctg}x+$$
$$+\frac{1}{10}\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{5}\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{5}\operatorname{arctg}x+C.$$

■ **Приклад 10.21.** *Обчислимо інтеграл* $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx$.

У знаменнику підінтегральної функції квадратний тричлен $x^2 - x + 1$ не розкладається на лінійні множники, оскільки $\frac{p^2}{4} - q = \frac{(-1)^2}{4} - 1 < 0$.

Отже, інтегрується елементарний дріб вигляду $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$.

Виділимо повний квадрат:

$$x^2 - x + 1 = x^2 2\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Обчислимо інтеграл:

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{3x-1}{(x-1/2)^2+3/4}dx.$$

Зробимо підстановку:

$$x - \frac{1}{2} = t\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x = \frac{t\sqrt{3}+1}{2}, \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt.$$

Тоді

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{\left(3\frac{t\sqrt{3}+1}{2} - 1\right)}{3/4(t^2+1)} = 3\int \frac{t\,dt}{t^2+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(t^2+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} t + C = \frac{3}{2}\ln\frac{3}{4}(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C_1,$$

де $C_1 = C + \frac{3}{2}\ln\frac{4}{3}$.

■ **Приклад 10.22.** *Обчислимо інтеграл* $\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx$.

У знаменнику підінтегральної функції стоїть квадратний тричлен, який не розкладається на лінійні множники, оскільки $p^2/4 - q = 1 - 3 < 0$.

Отже, інтегрується елементарний дріб вигляду $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, $n > 1$.

Ураховуючи, що $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$, робимо підстановку $x + 1 = t\sqrt{2}$, $x = t\sqrt{2} - 1$, $dx = \sqrt{2}\,dt$. Тоді

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx = \int \frac{t\sqrt{2}-2}{4(t^2+1)^2}\sqrt{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = -\frac{1}{(t^2+1)} - \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

З урахуванням рекурентної формули для інтегралів вигляду $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ при $n = 2$ маємо

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C.$$

Тому

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx = -\frac{1}{4(t^2+1)} - \frac{\sqrt{2}t}{4(t^2+1)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}t+1}{4(t^2+1)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg} t + C = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

■ **Приклад 10.23.** *Обчислимо інтеграл* $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx$.

Підінтегральний раціональний дріб неправильний, оскільки степінь чисельника дорівнює степеню знаменника. Тому виділяємо цілу частину. Для цього поділимо чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{r|l} -\,5x^3 + 9x^2 - 22x - 8 & x^3 - 4x \\ \cline{2-2} 5x^3 \qquad\quad - 20x & 5 \\ \cline{1-1} 9x^2 - 2x - 8 & \end{array}$$

Отже,

$$\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx = \int\left(5 + \frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}\right)dx.$$

Знаменник правильного залишкового дробу розкладається на лінійні множники так:

$$x^3 - 4x = x(x^2-4) = x(x-2)(x+2).$$

Кожному множникові знаменника вигляду $(x-a)$ в розкладі правильного дробу на елементарні відповідає доданок вигляду $\frac{A}{x-a}$. Тому даний дріб розкладається на елементарні таким чином:

$$\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Звівши праву частину до спільного знаменника й прирівнявши чисельники, дістанемо тотожність

$$9x^2-2x-8=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2).$$

Коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах тотожності мають бути рівними, тому, відмічаючи за рискою зліва, при яких степенях x порівнюються коефіцієнти, матимемо систему рівнянь

$$\begin{array}{r|l} x^2 & 9=A+B+C, \\ x^1 & -2=2B-2C, \\ x^0 & -8=-4A. \end{array}$$

Із третього рівняння системи знаходимо $A=2$. Підставивши значення A в перше рівняння й скоротивши друге на 2, матимемо $B+C=7$, $B-C=-1$, звідки $B=3$, $C=4$.

Замінивши під знаком інтеграла залишковий дріб його розкладом на елементарні дроби (з підставленими в нього знайденими значеннями коефіцієнтів) і знайшовши відповідні інтеграли, послідовно дістанемо

$$\int\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx=\int\left(5+\frac{2}{x}+\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x+2}\right)dx=$$

$$=5\int dx+2\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{dx}{x-2}+4\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=5x+2\ln|x|+3\ln|x-2|+4\ln|x+2|+C.$$

■ **Приклад 10.24.** *Обчислимо інтеграл* $\int\frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx$.

Підінтегральний дріб правильний. Його знаменник уже подано у вигляді добутку простих множників. Множнику x знаменника в розкладі підінтегральної функції відповідатиме елементарний дріб A/x, а множникові $(x+1)^3$ — сума трьох елементарних дробів: $\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)^3}$.

Тому розклад підінтегральної функції на елементарні дроби матиме вигляд

$$\frac{3x+2}{x(x+1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)^3}.$$

Звівши в правій частині доданки до спільного знаменника й прирівнявши чисельники, дістанемо

$$3x+2=A(x+1)^3+Bx(x+1)^2+Cx(x+1)+Dx.$$

Комбінуючи методи частинних значень (підставляючи зручні значення в рівність) та порівняння коефіцієнтів, знайдемо

$$\begin{array}{r|c} x=0 & 2=A, \\ x=-1 & -1=-D,\ \ D=1, \\ x^3 & 0=A+B=2+B,\ \ B=-2, \\ x^2 & 0=3A+2B+C=2+C,\ \ C=-2. \end{array}$$

Тепер обчислимо шуканий інтеграл:

$$\int\frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx=2\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x+1}-2\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\int\frac{dx}{(x+1)^3}=$$

$$=2\ln|x|-2\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{2(x+1)^2}+C=\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C.$$

10.4
Визначений інтеграл

10.4.1. Інтегральні суми та їхні основні властивості

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на проміжку $[a, b]$, $a<b$.

➡ **Означення 10.3.** *Множину* $T=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ *називають* ***подрібненням****, або* ***розбиттям******, замкненого проміжку*** $[a, b]$; *відрізки* $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ — *це* ***відрізки подрібнення****; максимальна довжина відрізків подрібнення* $[x_i, x_{i+1}]$, $i=\overline{1, n}$ *називається* ***рангом подрібнення*** T і позначається через $\lambda(T)$.

Означення 10.4. *Послідовність подрібнень T_n проміжку $[a, b]$ називають* ***нормальною****, якщо відповідна послідовність рангів $\lambda(T_n)$ прямує до нуля:*

$$\lim_{n \to \infty} \lambda(T_n) = 0.$$

■ **Приклад 10.25.** Множина $T = \{1 < 1,2 < 1,4 < 1,7 < 2\}$ є подрібненням проміжку $[1; 2]$ на чотири частини; його ранг $\lambda(T) = 0{,}3$.

■ **Приклад 10.26.** Множина $T_n = \{a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b\}$, де $x_1 = x_0 + \dfrac{b-a}{n}$, $x_2 = x_1 + \dfrac{b-a}{n}$, …, $x_n = x_{n-1} + \dfrac{b-a}{n}$, є подрібненням проміжку $[a, b]$ на n однакових за довжиною відрізків. Ранг подрібнення $\lambda(T_n) = \dfrac{b-a}{n}$. Отже, T_n — нормальна послідовність подрібнень проміжку $[a, b]$.

Означення 10.5. Нехай функція $y = f(x)$ визначена та обмежена на проміжку $[a, b]$; $T_n = \{a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b\}$ — подрібнення $[a, b]$ на відрізки $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$; $m_k = \inf E(f)$, а $M_k = \sup E(f)$, де $E(f)$ — множина значень функції $y = f(x)$ на $[x_{k-1}, x_k]$. *Суму*

$$S_T = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \tag{10.17}$$

називають ***нижньою інтегральною сумою****, а*

$$S^T = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \tag{10.18}$$

— ***верхньою інтегральною сумою****, які пов'язані з подрібненням T проміжку $[a, b]$.*

Поняття нижньої та верхньої інтегральних сум геометрично ілюструються на рис. 10.1 і 10.2 відповідно. В обох випадках це площі фігур, складених із прямокутників.

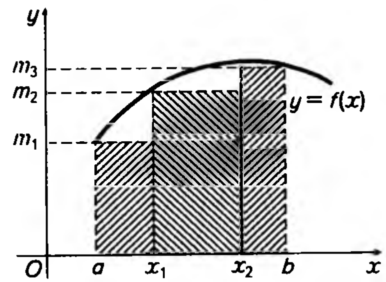


Рис. 10.1

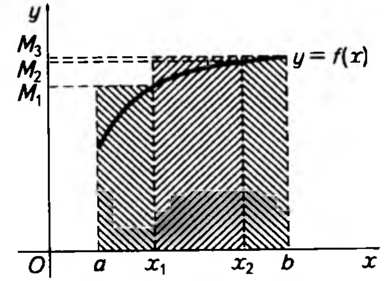


Рис. 10.2

Властивості верхніх і нижніх інтегральних сум

1. *$S_T \le S^T$ для кожного T.*
2. *Якщо T_1 і T_2 — подрібнення проміжку $[a, b]$ і $T_1 \subset T_2$ (подрібнення T_2 щільніше від T_1), то $S_{T_1} \le S_{T_2}$, $S^{T_1} \ge S^{T_2}$.*
3. *Для будь-яких подрібнень T_1 і T_2 проміжку $[a, b]$ виконується нерівність $S_{T_1} \le S^{T_2}$.*
4. *Множини всіх верхніх і нижніх інтегральних сум обмежені.*
5. *Нехай T — довільне подрібнення проміжку $[a, b]$, T_n — нормальна послідовність подрібнень цього самого проміжку, а ε — довільне додатне число. Тоді для всіх досить великих n справджуються нерівності $S^{T_n} < S^T + \varepsilon$, $S_{T_n} > -\varepsilon$.*
6. *Якщо T_n — нормальна послідовність подрібнень проміжку $[a, b]$, то послідовності S^{T_n} і S_{T_n} збіжні.*
7. *Кожна з границь $\lim\limits_{n \to \infty} S^{T_n}$ і $\lim\limits_{n \to \infty} S_{T_n}$ не залежить від вибору нормальної послідовності T_n подрібнень проміжку $[a, b]$.*
8. *Якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке подрібнення T проміжку $[a, b]$, що $S^T - S_T < \varepsilon$, то для кожної нормальної послідовності подрібнень T_n цього проміжку справджується рівність*

$$\lim_{n \to \infty} S^{T_n} = \lim_{n \to \infty} S_{T_n}.$$

➡ **Означення 10.6.** *Якщо $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ — подрібнення проміжку $[a, b]$, $y = f(x)$ — визначена на $[a, b]$ функція, точки $c_1 \in [x_0, x_1]$, $c_2 \in [x_1, x_2]$, ..., $c_n \in [x_{n-1}, x_n]$ — довільні точки проміжків подрібнення T, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ — довжина відрізка $[x_{k-1}, x_k]$, то суму*

$$\sigma(T) = f(c_1)(x - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots +$$

$$+ f(c_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \qquad (10.19)$$

*називають **інтегральною сумою функції** $y = f(x)$ для подрібнення T.*

Зрозуміло, що інтегральна сума залежить від вибору точок c_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Нехай T — нормальна послідовність подрібнень проміжку $[a, b]$, а $y = f(x)$ — визначена на $[a, b]$ функція. Позначимо $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$.

➡ **Означення 10.7.** *Якщо існує границя інтегральної суми (10.19) при $\lambda \to 0$, яка не залежить ні від вибору подрібнення T, ні від вибору проміжних точок c_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то її називають **визначеним інтегралом функції** $y = f(x)$ **на проміжку** $[a, b]$* і позначають так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \qquad (10.20)$$

(читається: інтеграл від a до b еф від ікс де ікс).

Наведене означення інтеграла належить німецькому математикові Г. Ф. Б. Ріману. Символ інтеграла введено німецьким математиком Г. В. Лейбніцем наприкінці XIX ст. Цей символ є дещо деформованою літерою S (перша літера слова *summa*). Термін «інтеграл» (від лат. integer — цілий) запропоновано наприкінці XVII ст. швейцарським математиком Я. І Бернуллі.

➡ **Означення 10.8.** *Якщо границя (10.20) існує, то функцію $y = f(x)$ називають **інтегровною на проміжку** $[a, b]$ **за Ріманом** (або просто інтегровною). Числа a і b називають відповідно **нижньою й верхньою межами інтегрування**. Функцію $y = f(x)$ називають **підінтегральною функцією**, а вираз $f(x)dx$ — **підінтегральним виразом**; x — **змінна інтегрування**; $[a, b]$ — **проміжок інтегрування**.*

ТЕОРЕМА 10.5
(ознака існування визначеного інтеграла)

Якщо $y = f(x)$ — визначена та обмежена на проміжку $[a, b]$ функція й для довільного $\varepsilon > 0$ є таке подрібнення T цього проміжку, що $S^T - S_T > \varepsilon$, то $\int_a^b f(x)dx$ існує.

Справді, нехай T_n — довільна нормальна послідовність подрібнень проміжку $[a, b]$, $\sigma(T_n)$ — довільна послідовність інтегральних сум. Існування $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma(T_n)$ є наслідком нерівностей $S_{T_n} \le \sigma(T_n) \le S^{T_n}$ і властивості ⑧ верхніх і нижніх інтегральних сум. Оскільки $\lim\limits_{n \to \infty} S^{T_n}$ і $\lim\limits_{n \to \infty} S_{T_n}$ не залежать від вибору нормальної послідовності T_n (властивість ⑦), то від нього не залежить також $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma(T_n)$.

♦ **Наслідок.** *Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ існує.*

✓ *Зауваження 10.3.* Якщо $\int_a^b f(x)dx$ існує, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке подрібнення T проміжку $[a, b]$, що $S^T - S_T < \varepsilon$. Це випливає з того, що $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n \to \infty} S^{T_n} = \lim\limits_{n \to \infty} S_{T_n}$ для нормальної послідовності подрібнень T_n, а тому $\lim\limits_{n \to \infty}(S^{T_n} - S_{T_n}) = 0$.

10.4.2. Задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла

❑ **Задача про площу криволінійної трапеції.** Нехай на проміжку $[a, b]$ задано функцію $y = f(x) \ge 0$. Фігуру $aABb$ (рис. 10.3), яка обмежена графіком даної функції і відрізками прямих $y = 0$, $x = a$, $x = b$, називають *криволінійною трапецією*. Знайдемо її площу.

Оскільки лінія AB є довільною кривою, то спочатку площу S трапеції $aABb$ шукатимемо наближено. Для цього розіб'ємо проміжок $[a, b]$ за допомогою довільно вибраних точок на n окремих відрізків

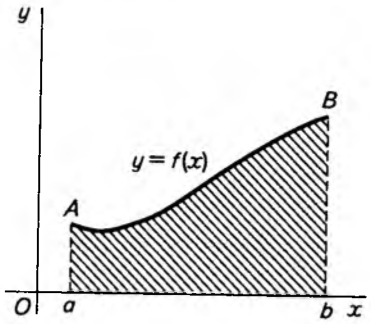


Рис. 10.3

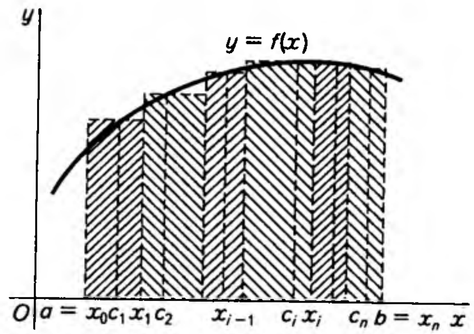


Рис. 10.4

$[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{1, n}$, тобто розглянемо розбиття проміжку $[a, b]$ на відрізки $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$. На кожному з них виберемо довільну точку $c_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{1, n}$ і побудуємо прямокутники, основою яких є відрізки $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, а висота становить $f(c_k)$, $k = \overline{1, n}$ (рис. 10.4). З рисунка видно, що шукана площа наближено дорівнює сумі площ прямокутників, тобто $S \approx \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$, де $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ — довжина відрізка $[x_{k-1}, x_k]$. Очевидно, якщо $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k \to 0$, то подрібнення проміжку $[a, b]$ ущільнюватиметься й усі $\Delta x_k \to 0$. Отже, площа криволінійної трапеції чисельно дорівнює границі інтегральних сум, якщо максимальна довжина окремих сегментів $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k \to 0$, тобто

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx. \tag{10.21}$$

Отже, *геометричний зміст визначеного інтеграла* такий: ***він чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції aABb, яка обмежена графіком даної функції $y = f(x)$ і відрізками прямих $y = 0$, $x = a$, $x = b$*** (див. рис. 10.3).

❑ **Задача про роботу змінної сили.** Нехай уздовж осі Ox діє сила $f = f(x)$, напрям якої сталий і збігається з напрямом осі Ox. Крім того, сила неперервно змінюється за абсолютним значенням. Під дією сили

$f = f(x)$ матеріальна точка переміститься вздовж осі з точки a в точку b. Обчислимо роботу цієї сили на шляху (проміжку) $[a, b]$.

Відомо: якщо сила не змінюється ($f = f(x) = \text{const}$) і діє в напрямі переміщення, то робота A дорівнює модулю добутку сили на переміщення: $A = f(b - a)$. Але сила змінна, й тому здійснимо подрібнення проміжку $[a, b]$ за допомогою довільно взятих точок на n окремих відрізків $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ і припустимо, що кожен із них настільки малий, що сила $f = f(x)$ на ньому майже стала (усереднена сила). На кожному з відрізків виберемо довільну точку $c_k \in [x_k, x_{k-1}]$, $k = \overline{1, n}$. Робота, виконана усередненою силою на відрізку $[x_{k-1}, x_k]$, дорівнює $f(c_k)\Delta x_k$, $k = \overline{1, n}$, а вся робота на проміжку $[a, b]$ наближено обчислюється так: $A \approx \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$.

Таким чином, робота сили $f = f(x)$ на шляху $[a, b]$ чисельно дорівнює границі інтегральних сум, якщо максимальна довжина окремих сегментів $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k \to 0$, тобто

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx. \tag{10.22}$$

Отже, *фізичний зміст визначеного інтеграла* такий: ***він чисельно дорівнює роботі сили $f = f(x)$, що діє вздовж проміжку $[a, b]$.***

❑ **Задача про обсяг продукції.** Нехай деяке підприємство (фірма) виробляє продукцію з інтенсивністю (продуктивністю праці) $f = f(t)$. Знайдемо обсяг продукції q, виробленої за інтервал часу $[0; T]$.

Очевидно, якщо інтенсивність виробництва продукції не змінюється ($f = f(t) = \text{const}$), то обсяг продукції q, виробленої за інтервал часу $[0; T]$, обчислюється за формулою $q = fT$.

У загальному випадкові справедливе наближене значення обсягу продукції $q \approx \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta t_k$. Тут $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ — довжини окремих відрізків подрібнення інтервалу $[0; T]$. Якщо $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta t_k \to 0$, то кожен із доданків суми стає дедалі точнішим, тому шуканий обсяг продукції (за умовою він існує) обчислюється за формулою

$$q = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \int_0^T f(t)dt. \tag{10.23}$$

Отже, *економічний зміст визначеного інтеграла* такий: *він чисельно дорівнює обсягу виробленої продукції підприємством (фірмою) з продуктивністю праці $f = f(t)$ за інтервал часу* $[0; T]$.

10.4.3. Основні властивості визначеного інтеграла

Припустимо, що $\int_a^b f(x)dx$ існує, тобто функція $y = f(x)$ інтегровна на проміжку $[a, b]$. Тоді визначений інтеграл має такі властивості.

① $\int_a^b dx = b - a.$

Справді, в цьому разі підінтегральна функція $y = f(x) = 1$. Тоді інтегральна сума дорівнює $b - a$.

② *Сталий множник можна винести за знак інтеграла, тобто*

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

③ *Якщо верхня межа інтегрування дорівнює нижній, то інтеграл дорівнює нулю, тобто*

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

④ *Якщо поміняти місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл змінить свій знак на протилежний*:

$$\int_b^a f(x)dx = c - \int_a^b f(x)dx.$$

⑤ *Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ інтегровні на проміжку $[a, b]$, то функція $y = f(x) + g(x)$ також інтегровна на цьому проміжку, і визначений інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів*:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

⑥ *Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ інтегровні на проміжку $[a, b]$ і $f(x) \le g(x)$ для всіх $x \in [a, b]$, то*

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

Доведемо, наприклад, цю властивість. Нехай T_n — нормальна послідовність подрібнень проміжку $[a, b]$, а $\sigma_1(T_n)$ і $\sigma_2(T_n)$ — послідовності інтегральних сум для $y = f(x)$ і $y = g(x)$, що відповідають тому самому виборові точок c_i. Тоді $\sigma_1(T_n) \le \sigma_2(T_n)$, а тому $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_1(T_n) \le \lim\limits_{n \to \infty} \sigma_2(T_n)$.

⑦ *Якщо функція $y = f(x)$ інтегровна на проміжку $[a, b]$, то*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Оскільки для інтегральної суми $\sigma_1(T_n)$ у лівій частині нерівності маємо

$$|\sigma_1(T_n)| = |f(c_1)(x - x_0) + \ldots + f(c_n)(x_n - x_{n-1})| \le$$

$$\le |f(c_1)||x - x_0| + \ldots + |f(c_n)||x_n - x_{n-1}| = \sigma_2(T_n),$$

то ця сума є інтегральною сумою для інтеграла в правій частині нерівності. Тому, перейшовши до границі зліва й справа, дістанемо потрібне.

⑧ *Якщо інтеграли $\int_a^b f(x)dx$ і $\int_b^c f(x)dx$ існують для $b \in (a, c)$, то*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

Доведемо цю властивість для $a < b < c$. Нехай $\varepsilon > 0$. Для числа $\varepsilon/2 > 0$ існують такі подрібнення T проміжку $[a, b]$ і τ проміжку $[b, c]$, що $S^T - S_T < \varepsilon/2$ і $S^\tau - S_\tau < \varepsilon/2$. Оскільки $T \cup \tau$ — подрібнення $[a, c]$, а $S^T + S^\tau$ і $S_T + S_\tau$ — відповідно верхня й нижня інтегральні суми функції $y = f(x)$ для цього подрібнення й $(S^T + S^\tau) - (S_T + S_\tau) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, то $\int_a^c f(x)dx$ існує. Властивість ⑧ випливає тепер із теореми про границю суми двох послідовностей.

♦ **Наслідок.** *Якщо функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $[a, b]$ і має на ньому лише скінченну кількість точок розриву першого роду, то* $\int_a^b f(x)dx$ *існує.*

Справді, скориставшися кілька разів властивістю ⑦ і наслідком ознаки існування визначеного інтеграла, дістанемо потрібне.

⑨ **ТЕОРЕМА 10.6**
(про середнє значення інтеграла)

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[a, b]$, то для певної точки $c \in [a, b]$ справджується рівність

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \qquad (10.24)$$

Нехай m — найменше, а M — найбільше значення функції $y = f(x)$ на $[a, b]$. Тоді виконується нерівність $m \le f(x) \le M$ для всіх $x \in [a, b]$, а тому за властивостями ①, ③, ④ дістанемо

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$$

звідки

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

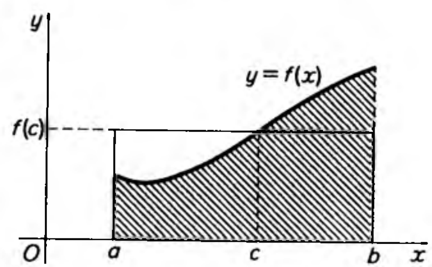


Рис. 10.5

Неперервна на проміжку $[a, b]$ функція $y = f(x)$ набуває всіх проміжних значень між m і M (рис. 10.5), а тому знайдеться така точка $c \in [a, b]$, що $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

⑩ *Якщо $y = f(x)$ — неперервна на проміжку $[a, b]$ функція і*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \text{ то } F'(x) = f(x) \text{ для всіх } x \in [a, b].$$

Для доведення цієї властивості застосуємо означення похідної. Насамперед функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[a, x]$, якщо $x \in [a, b]$, а тому інтеграл $\int_a^x f(t)dt$ існує, тобто функція $y = F(x)$ визначена на $[a, b]$. Нехай Δx — приріст аргументу x. Тоді

$$\Delta F(x, \Delta x) = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

(ця рівність виконується на підставі властивості ⑦).

Застосувавши властивість ③, дістаємо

$$\Delta F(x, \Delta x) = f(c)((x+\Delta x) - x) = f(c)\Delta x,$$

причому c лежить між x і $x + \Delta x$. Тоді

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta F(x, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c).$$

Оскільки в точці x функція $y = f(x)$ неперервна, то $\lim_{c \to x} f(c) = f(x)$. Нарешті, $\lim_{c \to x} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(c)$, оскільки c лежить між x і $x + \Delta x$.

10.4.4. Основна формула інтегрального числення

Доведемо основну формулу інтегрального числення, яка встановлює зв'язок між визначеним інтегралом і первісною.

ТЕОРЕМА 10.7

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[a, b]$, то справедлива формула Ньютона—Лейбніца $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, де $y = F(x)$ — довільна первісна для функції $y = f(x)$.

Справді, за властивістю ⑨ функція $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ — первісна для функції $y = f(x)$. Тому функція $F(x) = C + \Phi(x)$ — довільна первісна для функції $y = f(x)$ ($C = \text{const}$). Тоді

$$F(b) - F(a) = \left(C + \int_a^b f(t)dt \right)' = \int_a^b f(t)dt.$$

✓ *Зауваження 10.4.* Якщо $y = F(x)$ — довільна первісна для функції $y = f(x)$, то різницю $F(b) - F(a)$ позначають так: $F(x)\Big|_a^b$ і називають *підстановкою* від a до b, і формула *Ньютона—Лейбніца* набирає вигляду

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{10.25}$$

Формулу Ньютона—Лейбніца називають ***основною формулою інтегрального числення***.

10.5 Методи обчислення визначених інтегралів

Оскільки визначені й невизначені інтеграли пов'язані між собою формулою Ньютона—Лейбніца, то методи обчислення визначених інтегралів ті самі, що й для невизначених, а саме: метод безпосереднього інтегрування, метод підстановки й метод інтегрування частинами. Розглянемо їх детальніше.

10.5.1. Метод безпосереднього інтегрування

Цей метод ґрунтується на застосуваннях властивостей визначеного інтеграла та формули Ньютона—Лейбніца. Розглянемо приклади.

■ **Приклад 10.27.** *Обчислимо інтеграли:*

① $\int_a^b x^k\,dx$; ② $\int_a^b e^x\,dx$; ③ $\int_a^b \frac{1}{x}dx$; ④ $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x\,dx$; ⑤ $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Застосуємо формулу Ньютона—Лейбніца:

① $\int_a^b x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_a^b = \frac{b^{k+1}}{k+1} - \frac{a^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{k+1}(b^{k+1} - a^{k+1})$;

② $\int_a^b e^x\,dx = e^x\Big|_a^b = e^b - e^a$;

③ $\int_a^b \frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_a^b = \ln|b| - \ln|a| = \ln\left|\frac{b}{a}\right|$;

④ $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;

⑤ $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$.

10.5.2. Метод підстановки

Метод підстановки, або метод заміни змінної, базується на такій теоремі.

ТЕОРЕМА 10.8
(про заміну змінної у визначеному інтегралі)

Припустимо, що функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[a, b]$, а функція $x = \varphi(t)$ задовольняє такі умови:

1) $x = \varphi(t)$ визначена на деякому проміжку $[\alpha, \beta]$, причому $a \le \varphi(t) \le b$ і $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$;

2) на проміжку $[a, b]$ існує неперервна похідна $\varphi'(t)$.

Тоді справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \qquad (10.26)$$

яку називають ***формулою заміни змінної у визначеному інтегралі***.

Доведення

Нехай функція $y = F(x)$ — первісна для функції $y = f(x)$ на проміжку $[a, b]$ (вона існує за властивістю ⑨). Тоді функція $y = F(\varphi(t))$ — первісна для функції $y = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на проміжку $[\alpha, \beta]$. Це випливає з рівності $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Застосувавши двічі формулу Ньютона—Лейбніца, дістанемо

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Теорему доведено.

■ **Приклад 10.28.** *Обчислимо інтеграл* $\int_0^{\pi/2} \cos x \sin^2 x\, dx$.

Зробимо заміну: $t = \sin x$, $dt = \cos x\, dx$. Знайдемо нові межі інтегрування: $t_н = \sin 0 = 0$, $t_в = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Отже,

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \sin^2 x\, dx = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

■ **Приклад 10.29.** *Обчислимо інтеграл* $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Переходимо до нової змінної інтегрування. Зробимо заміну: $x = t^2$, $t > 0$, $dx = 2t\, dt$. Тоді $t = \sqrt{x}$. При $x = 0$ маємо $t = 0$, а при $x = 4$ маємо $t = 2$. Тому за формулою (10.24) дістанемо

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2t\, dt}{1+t} = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = 2(t - \ln|1+t|)\Big|_0^2 = 4 - 2\ln 3.$$

■ **Приклад 10.30.** *Обчислимо інтеграл* $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\, dx$.

Зробимо заміну: $x = 2\sin t$, $dx = 2\cos t\, dt$. Вона можлива (оскільки при довільному значенні t під коренем буде невід'ємна величина) й приводить до того, що корінь під знаком інтеграла зникає. Якщо x змінюється від $x = 0$ до $x = 1$, то t змінюється від $t = 0$ до $t = \pi/6$. Застосовуючи формулу заміни змінної (10.24), дістанемо

$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\, dx = \int_0^{\pi/6} \sqrt{4 - 4\sin^2 t}\, 2\cos t\, dt = 4\int_0^{\pi/6} \cos^2 t\, dt =$$

$$= 2\int_0^{\pi/6} (1 + \cos 2t)dt = 2\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

10.5.3 Метод інтегрування частинами

ТЕОРЕМА 10.9

(про інтегрування частинами у визначеному інтегралі)

Нехай функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$ неперервно диференційовні на проміжку $[a, b]$. Тоді справедлива формула

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x), \qquad (10.27)$$

яку називають ***формулою інтегрування частинами у визначеному інтегралі***.

Доведення

Справді, оскільки $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, то за формулою Ньютона—Лейбніца маємо

$$\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Тоді

$$\int_a^b v(x)du(x) + \int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Отже, справджується формула

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x),$$

що й треба було довести.

■ **Приклад 10.31.** *Обчислимо інтеграл* $\int_0^3 x \operatorname{arctg} x\, dx$.

Покладемо $\operatorname{arctg} x = u$, $x\,dx = dv$. Тоді $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = \frac{x^2}{2}$. Підставивши добуті значення у формулу інтегрування частинами, дістанемо

$$\int_0^3 x \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^3 - \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \frac{9}{2}\operatorname{arctg} 3 - \frac{1}{2}\int_0^3\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{9}{2}\operatorname{arctg} 3 - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x)\Big|_0^3 = 5 \operatorname{arctg} 3 - \frac{3}{2}.$$

■ **Приклад 10.32.** *Обчислимо інтеграл* $\int_1^e \ln x\, dx$.

Покладемо $u = \ln x$, $dv = dx$. Тоді $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$, і, застосувавши формулу (10.27), дістанемо

$$\int_1^e \ln x\, dx = x \ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{dx}{x} = e \ln e - 1 \ln 1 - \int_1^e dx = e - x\Big|_1^e = 1.$$

■ **Приклад 10.33.** *Обчислимо інтеграл* $\int_{-1}^0 xe^x\, dx$.

Скористаємося формулою (10.27) інтегрування частинами. Покладемо $u = x$, $du = dx$, $v = e^x$, $dv = e^x dx$. Тоді

$$\int_{-1}^0 xe^x\, dx = xe^x\Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 e^x\, dx = 0 + e^{-1} - e^x\Big|_{-1}^0 = \frac{1}{e} - 1 + \frac{1}{e} = \frac{2}{e} - 1.$$

10.6 Невласні інтеграли

Поняття визначеного інтеграла було введено для скінченного проміжку інтегрування й від обмеженої на цьому проміжку функції $y = f(x)$. Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то визначений інтеграл як границя інтегральної суми не існує. Але під час розв'язування практичних задач виникає необхідність розглядати інтеграли на нескінченному проміжку й від необмеженої функції. Такі інтеграли називають ***невласними*** й поділяють на два типи — першого роду та другого роду. Розглянемо їх.

10.6.1. Невласні інтеграли першого роду

➡ **Означення 10.9.** Нехай функція $y = f(x)$ неперервна при $a \le x < \infty$. Тоді *інтеграл*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \tag{10.28}$$

називають ***невласним інтегралом першого роду,*** *або* ***інтегралом із нескінченними межами інтегрування.***

Якщо границя в правій частині цієї рівності існує й скінченна, то інтеграл називають ***збіжним***, *у протилежному випадкові —* ***розбіжним***.

Аналогічно вводяться невласні інтеграли першого роду, коли $a = -\infty$ та $a = -\infty$, а $b = +\infty$, тобто

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx, \tag{10.29}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx. \tag{10.30}$$

Розглянемо приклади обчислення невласних інтегралів першого роду.

■ **П р и к л а д 10.34.** *Обчислимо інтеграл:*

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^{b}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)=1.$$

Отже, інтеграл збігається.

■ **П р и к л а д 10.35.** *Обчислимо інтеграл* $\int_a^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$, $a>1$.

Дістаємо

$$\int_a^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to\infty}\int_a^{b}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{b\to\infty}(\ln|\ln b|-\ln|\ln a|)=\infty.$$

Отже, інтеграл розбігається.

10.6.2. Невласні інтеграли другого роду

➡ **Означення 10.10.** Нехай функція $y=f(x)$ неперервна на проміжку $[a,\ b]$, за винятком точки c, яка належить $[a,\ b]$ і в якій функція має розрив другого роду. Тоді *інтеграл*

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{c-\varepsilon_1}f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b}f(x)dx \qquad (10.31)$$

називають ***невласним інтегралом другого роду, або інтегралом від необмежених функцій.***

Якщо границя в правій частині цієї рівності існує й скінченна, то інтеграл називають ***збіжним,*** *у протилежному випадкові —* ***розбіжним.***

Якщо точка розриву c збігається з точкою a, то

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx, \qquad (10.32)$$

а якщо c збігається з b, то

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx. \qquad (10.33)$$

■ **П р и к л а д 10.36.** *Обчислимо інтеграл* $\int_1^{e}\frac{dx}{x\ln x}$.

Це невласний інтеграл другого роду, оскільки підінтегральна функція необмежена в околі $x=1$ ($\ln 1=0$).

Згідно з правилом обчислення невласних інтегралів другого роду маємо

$$\int_1^2\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{\varepsilon\to 0}(\ln|\ln x|\,|_{1+\varepsilon}^{2})=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}(\ln(\ln 2)-\ln(\ln(1+\varepsilon)))=\ln(\ln 2)-\ln(\ln 1)=+\infty.$$

■ **П р и к л а д 10.37.** *Обчислимо інтеграл* $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Функція $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ неперервна при $0<x\le 1$ і має нескінченний розрив у точці $x=0$, тому з урахуванням рівності (10.30) дістаємо

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}2\sqrt{x}\,\Big|_{\varepsilon}^{1}=\lim_{\varepsilon\to 0}(2-2\sqrt{\varepsilon})=2.$$

Отже, інтеграл збігається й дорівнює 2.

10.7 Наближені формули для обчислення визначених інтегралів

Якщо первісна підінтегральної функції відома, то визначений інтеграл обчислюється за формулою Ньютона—Лейбніца. Проте можлива ситуація, коли первісна не подається у вигляді елементарної функції або її вираз складний. Тоді для обчислення інтегралів застосовують наближені формули. Основна ідея побудови цих формул полягає в заміні підінтегральної функції функцією простішого вигляду, наприклад многочленом, інтеграл від якого знаходять безпосередньо за формулою Ньютона—Лейбніца.

Є кілька способів наближеного обчислення визначених інтегралів. Якщо функцію $y = f(x)$ задано формулою або таблицею, то наближене значення визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ можна знайти так: 1) розбити проміжок інтегрування $[a, b]$ точками $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ на n рівних частин $h = \frac{b-a}{n}$; 2) обчислити значення підінтегральної функції $y = f(x)$ у точках $a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, b$, тобто визначити $y_0 = f(a)$, $y_1 = f(x_1)$, ..., $y_{n-1} = f(x_{n-1})$, $y_n = f(b)$; 3) скористатися однією з наближених формул.

Найчастіше застосовуються такі наближені формули, які ґрунтуються на геометричному зображенні визначеного інтеграла у вигляді площі криволінійної трапеції. При цьому припускають, що функція $y = f(x)$ задана аналітично й диференційовна потрібне число разів для оцінки похибки.

10.7.1. Формула прямокутників

За формулою

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}) = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i \qquad (10.34)$$

або

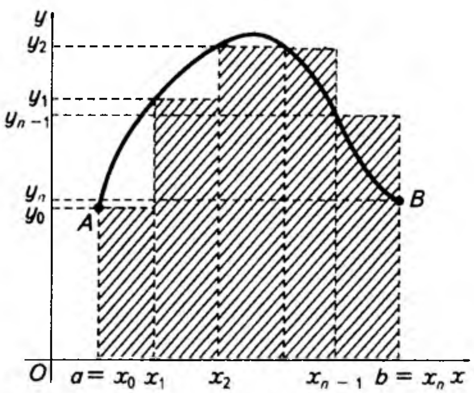


Рис. 10.6

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_1 + y_2 + ... + y_n) = h\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (10.35)$$

геометрично площу криволінійної трапеції $aABb$, яка відповідає інтегралу $\int_a^b f(x)dx$, замінюють сумою площ заштрихованих прямокутників (рис. 10.6, 10.7).

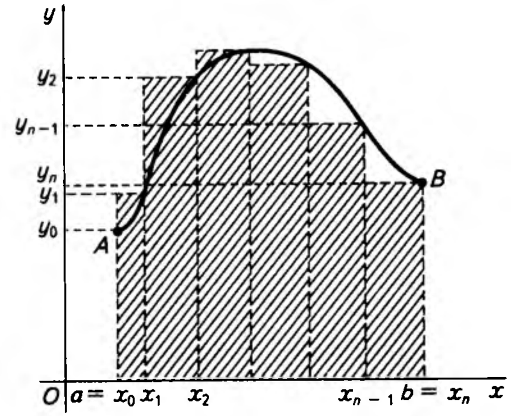


Рис. 10.7

Якщо у функції $y = f(x)$ існує похідна $y = f'(x)$, обмежена на проміжку $[a, b]$, то похибку Δ_n у формулах (10.34) і (10.35) оцінюють нерівністю

$$|\Delta_n| \le \frac{M_1(b-a)^2}{2n},$$

де $M_1 = \max_{x \in [a,b]} f'(x)$.

■ **Приклад 10.38.** *Застосовуючи формулу прямокутників (n = 10), наближено обчислимо $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ (розрахунки вестимемо з трьома знаками після коми). Оцінимо похибку наближення.*

Розіб'ємо відрізок [1; 2] на 10 рівних частин точками (тут $h = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$). Обчислимо значення підінтегральної функції $y = \frac{dx}{x}$ у вибраних точках. Результати запишемо в таблицю:

x_i	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y_i	1,000	0,909	9,833	0,769	0,714	0,667	0,625	0,588	0,556	0,526	0,5

Дістанемо $\sum_{i=0}^{9} y_i = 7{,}187$. За формулою (10.34) матимемо

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{2-1}{10} 7{,}187 \approx 0{,}719.$$

Оцінимо похибку наближення. Оскільки $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, то $|f'(x)| = \frac{1}{x^2}$ монотонно спадає на відрізку [1; 2]. Тому $M_1 = \max\limits_{x\in[1;\,2]} f'(x) = f'(1) = 1$.

Отже, $|\Delta_{10}| \le \frac{1}{20} = 0{,}05$.

Оскільки допустима похибка з'являється вже на другому знаку після коми, третій знак слід округлити, й остаточно маємо $\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}719 \pm 0{,}05$.

Обчислимо точно даний інтеграл за формулою Ньютона—Лейбніца:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\,\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0{,}6931.$$

Отже, насправді буде допущена похибка 0,03, тобто трохи менша, ніж обчислена за формулою.

10.7.2. Формула трапецій

За формулою

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right) = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) \quad (10.36)$$

геометрично площу криволінійної трапеції $aABb$, яка відповідає інтегралу $\int_a^b f(x)dx$, замінюють сумою площ заштрихованих трапецій (рис. 10.8).

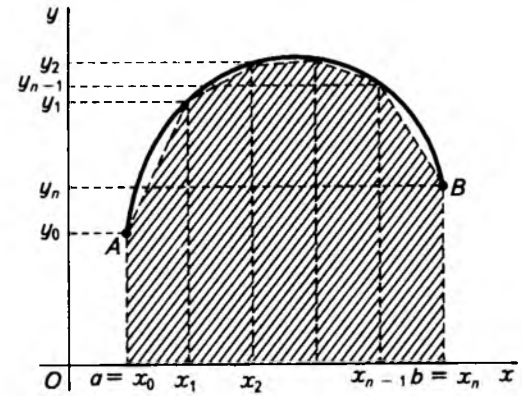


Рис. 10.8

Якщо у функції $y = f(x)$ існує друга похідна $y = f''(x)$, обмежена на проміжку $[a, b]$, то похибку Δ_n у формулах (10.34) і (10.35) оцінюють нерівністю

$$|\Delta_n| \le \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2},$$

де $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} f''(x)$.

■ **Приклад 10.39.** *Застосовуючи формулу трапецій ($n = 10$), наближено обчислимо $\int_1^2 \frac{dx}{x}$. Розрахунки вестимемо з чотирма знаками після коми. Оцінимо похибку наближення.*

Розіб'ємо відрізок [1; 2] на 10 рівних частин точками (тут $h = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$). Обчислимо значення підінтегральної функції $y = \frac{dx}{x}$ у вибраних точках. Результати запишемо в таблицю:

x_i	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y_i	1,000	0,9091	9,8333	0,7692	0,7143	0,6667	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5000

Дістанемо $2\sum_{i=0}^{9} y_i = 12{,}3754$, $y_0 + y_{10} = 1{,}5000$. За формулою (10.36) обчислимо $\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{2-1}{2 \cdot 10}(12{,}3754 + 1{,}5000) \approx 0{,}6938.$

Оцінимо похибку наближення. Оскільки $f''(x) = \frac{1}{x^3}$ монотонно спадає на відрізку [1; 2], то $M_2 = \max\limits_{x \in [1,2]} f''(x) = f''(1) = 2$ Отже, $|\Delta_{10}| \le \frac{1}{600} = 0{,}002.$

За формулою трапецій остаточно маємо $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2 \approx 0{,}694 \pm 0{,}002.$

Порівняння оцінок у даному й попередньому прикладах показує, що розрахунок за формулою трапецій точніший порівняно з розрахунком за формулою прямокутників при одному й тому самому значенні ($n = 10$).

✓ *Зауваження 10.5.* Очевидно, що зі збільшенням n точність обчислення за формулами (10.34)—(10.36) підвищується.

✓ *Зауваження 10.6.* Крім формул (10.34)—(10.36), є й інші, наприклад параболічна формула Сімсона.

?

Контрольні запитання

1. Яку функцію називають первісною для даної функції?
2. Який загальний вигляд первісної?
3. Які основні властивості первісної?
4. Що називають невизначеним інтегралом даної функції?

5. Які основні властивості невизначеного інтеграла?
6. Як обчислюють основні невизначені інтеграли від основних елементарних функцій?
7. Які існують основні методи інтегрування?
8. Як записується формула заміни змінної в невизначеному інтегралі?
9. У чому полягає суть методу інтегрування частинами?
10. Які функції називають дробово-раціональними?
11. Який раціональний дріб називають правильним, неправильним? Який зв'язок існує між ними?
12. Як інтегруються елементарні дробово-раціональні функції вигляду:

$$\frac{A}{x-a};\quad \frac{A}{(x-a)^m},\quad m > 1;$$

$$\frac{Bx + C}{x^2 + px + q};\quad \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^s},\quad s > 1?$$

13. Яким чином правильний раціональний дріб розкладається на суму елементарних?
14. У чому суть методу невизначених коефіцієнтів?
15. Які є методи інтегрування ірраціональних виразів? У чому полягає ідея раціоналізації інтеграла?
16. Що таке універсальна тригонометрична підстановка?
17. Що таке інтегральна сума функції $y = f(x)$ на проміжку $[a, b]$?
18. Яке означення визначеного інтеграла функції $y = f(x)$ на проміжку $[a, b]$?
19. У чому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла?
20. Які основні властивості визначеного інтеграла?
21. Які є класи інтегровних функцій?
22. Як записується формула Ньютона—Лейбніца?
23. Як здійснюється заміна змінної у визначеному інтегралі?
24. Як записується формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла?
25. У чому полягає відмінність між невласними інтегралами першого й другого роду?
26. Які існують наближені формули для обчислення визначених інтегралів?

Приклади розв'язування задач

1 *Обчислити невизначений інтеграл* $\int (x^5 - 3x^4 - 7x + 5)dx$.

Представивши інтеграл алгебричної суми у вигляді інтегралів доданків, винісши сталі множники за знаки інтегралів і застосувавши формулу

$$\int u^\alpha \, du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$$

із таблиці основних інтегралів, дістанемо

$$\int (x^5 - 3x^4 - 7x + 5)dx = \int x^5 \, dx - 3\int x^4 \, dx - 7\int x \, dx + 5\int dx =$$

$$= \frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{5}x^5 - \frac{7}{2}x^2 + 5x + C.$$

✓ Зазначимо, що тут і далі довільні сталі, які входять за означенням у кожен із невизначених інтегралів, що додаються, об'єднуються в одну довільну сталу.

2 *Обчислити невизначений інтеграл* $\int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} dx$.

Виконавши ділення почленно й застосувавши формули з таблиці інтегралів

$$\int u^\alpha \, du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1 \quad \text{та} \quad \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C,$$

дістанемо

$$\int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} dx = 2\int x^{-\frac{3}{2}} dx + 3\int x^{-\frac{5}{6}} dx + 5\int \frac{dx}{x} =$$

$$= 2\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + 3\frac{x^{-\frac{5}{6}+1}}{-\frac{5}{6}+1} + 5\ln|x| + C = -\frac{4}{\sqrt{x}} + 18\sqrt[6]{x} + 5\ln|x| + C.$$

3 *Обчислити невизначений інтеграл* $\int \frac{dx}{x^4 + x^2}$.

Додавши й віднявши в чисельнику підінтегральної функції x^2, дістанемо

$$\int \frac{dx}{x^4 + x^2} = \int \frac{x^2 + 1 - x^2}{x^2(x^2+1)} dx = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2+1} = \int x^{-2} dx - \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C.$$

4 *Обчислити невизначений інтеграл* $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

Замінивши одиницю в чисельнику підінтегральної функції виразом $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ і використавши формули

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C \quad \text{і} \quad \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$$

із таблиці основних інтегралів, дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

5 *Обчислити інтеграл* $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$, *використовуючи метод підстановки.*

Зробимо заміну $u = \ln x$. Тоді $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$. Підставивши ці значення в підінтегральний вираз, дістанемо

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \ln^2 x \, d(\ln x) = \int u^2 \, du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

6 *Обчислити інтеграл* $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$, *використовуючи метод підстановки.*

Легко помітити, що, зробивши заміну $\operatorname{arctg} x = u$, можна дістати $\frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x)$. Отже,

$$\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx = \int \sqrt[3]{\operatorname{arctg} x} \, d(\operatorname{arctg} x) = \int \sqrt[3]{u} \, du =$$

$$= \int u^{\frac{1}{3}} du = \frac{3}{4}(\operatorname{arctg} x)^{\frac{4}{3}} + C.$$

7 *Обчислити інтеграл* $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$, *використовуючи метод підстановки.*

Зробивши заміну $u = \ln x$ і застосувавши формулу $\int \cos u\, du = \sin u + C$ із таблиці основних інтегралів, дістанемо

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx = \int \cos(\ln x) d(\ln x) = \sin(\ln x) + C.$$

8 *Обчислити інтеграл* $\int xe^{-x^2}dx$, *використовуючи метод підстановки.*

Зробимо заміну $u = -x^2$. Тоді $d(-x^2) = -2x\,dx$. Підставивши ці значення в підінтегральний вираз, дістанемо

$$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}(-2x)dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

9 *Обчислити інтеграл* $\int \operatorname{tg} x\, dx$, *використовуючи метод підстановки.*

Зробимо заміну $u = \cos x$. Тоді $d(\cos x) = -\sin x\, dx$. Підставивши ці значення в підінтегральний вираз, дістанемо

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

10 *Обчислити інтеграл* $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$, *використовуючи метод підстановки.*

Зробимо заміну $u = x^3$. Тоді $d(x^3) = 3x^2\,dx$. Підставивши ці значення в підінтегральний вираз, дістанемо

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{\sqrt{1-(x^3)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin(x^3) + C.$$

11 *Обчислити інтеграл* $\int \frac{x\,dx}{5+7x^4}$, *використовуючи метод підстановки.*

Зробимо заміну $u = x^2$. Тоді $d(x^2) = 2x\,dx$. Підставивши ці значення в підінтегральний вираз, дістанемо

$$\int \frac{x\,dx}{5+7x^4} = \frac{1}{14}\int \frac{d(x^2)}{(\sqrt{5/7})^2 + (x^2)^2} = \frac{1}{14}\sqrt{\frac{7}{5}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7}{5}}x^2 + C.$$

12 *Використовуючи метод підстановки, обчислити інтеграл:*

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^x+1}{e^x+1}dx - \int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int dx - \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = x - \ln(e^x+1) + C.$$

13 *Обчислити інтеграл* $\int x^2 \ln x\, dx$, *використовуючи метод інтегрування частинами.*

Покладемо $u = \ln x$, $dv = x^2\,dx$. Тоді $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^3}{3}$. Використовуючи формулу інтегрування частинами, дістанемо

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

14 *Обчислити інтеграл* $\int xe^x\,dx$, *використовуючи метод інтегрування частинами.*

Покладемо $u = x$, $dv = e^x\,dx$. Тоді $du = dx$, $v = e^x$. За формулою інтегрування частинами маємо

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

15 *Обчислити інтеграл* $\int x^2 \cos x\, dx$, *використовуючи метод інтегрування частинами.*

Застосувавши формулу інтегрування частинами, дістанемо

$$\int \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} = x^2\sin x - 2\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin x\,dx}_{dv} = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x\,dx =$$

$$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

16 *Обчислити інтеграл* $\int e^x\cos x\,dx$, *використовуючи метод інтегрування частинами.*

Позначивши шуканий інтеграл через I і поклавши $u = \cos x$, $dv = e^x\,dx$, а потім $u = \sin x$, $dv = e^x\,dx$, дістанемо

$$I = \int e^x\cos x\,dx = e^x\cos x + \int e^x\sin x\,dx =$$

$$= e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx = e^x(\cos x + \sin x) - I.$$

Перенісши I в ліву частину рівності й поділивши на 2, матимемо

$$I = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C.$$

17 *Обчислити інтеграл* $\int \frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx.$

Підінтегральний дріб правильний. Його знаменник уже розкладено на прості множники. Розклад підінтегральної функції на елементарні дроби запишеться у вигляді

$$\frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Звівши праву частину до спільного знаменника й прирівнявши чисельники дробів, дістанемо

$$x^3-2x+2 = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Mx+N)(x-1)^2;$$

$$x^3-2x+2 =$$

$$= x^3(A+M) + x^2(B-A+2M+N) + x(A+M-2N) + (B-A+N).$$

Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, прирівняємо коефіцієнти при відповідних степенях x. У результаті матимемо систему

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 1 = A+M, \\ x^2 & 0 = B-A+2M+N, \\ x & -2 = A+M-2N, \\ x^0 & 2 = B-A+N, \end{array}$$

розв'язок якої: $A=0$, $B=1/2$, $M=1$, $N=3/2$. Тому

$$\int \frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2} + \int\frac{x+3/2}{x^2+1}dx =$$

$$= -\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{3}{2}\text{arctg } x + C.$$

18 *Обчислити інтеграл* $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx.$

Підінтегральний дріб правильний. Його знаменник можна розкласти на прості множники за формулою суми кубів. На елементарні дроби підінтегральна функція розкладається так:

$$\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1},$$

звідки

$$2x^2-3x+1 = A(x^2-x+1) + (Mx+N)(x+1).$$

Комбінуючи методи частинних значень і порівняння коефіцієнтів, знайдемо коефіцієнти:

$$\begin{array}{c|l} x=-1 & 6 = 3A,\ A = 2, \\ x^2 & 2 = A+M = 2+M,\ M = 0, \\ x^0 & 1 = A+N = 2+N,\ N = -1. \end{array}$$

Тому

$$\int\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx = 2\int\frac{dx}{x+1} - \int\frac{dx}{x^2-x+1} =$$

$$= 2\ln|x+1| - \int\frac{dx}{(x+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}.$$

В останньому інтегралі підстановка $x+\frac{1}{2} = t\frac{\sqrt{3}}{2}$, $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$ дає змогу обчислити його:

$$\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \int\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dt}{\frac{3}{4}(t^2+1)} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg } t + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Остаточно дістанемо

$$\int\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx = 2\ln|x+1| - \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

19 *Обчислити інтеграл* $\int\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}dx.$

Підінтегральний дріб правильний. Його знаменник уже розкладено на прості множники. Розклад підінтегральної функції на елементарні дроби матиме вигляд

$$\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Звівши до спільного знаменника дроби в правій частині рівності й прирівнявши чисельники, дістанемо

$$x^3+3=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x+1)(x^2+1)+(Dx+E)(x+1).$$

Комбінуючи методи частинних значень і порівняння коефіцієнтів, знайдемо коефіцієнти: $A=1/2$, $B=-1/2$, $C=3/2$, $D=-2$, $E=1$. Обчислюємо інтеграл:

$$\int\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}dx=\int\frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx+\int\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}{x^2+1}dx+\int\frac{-2x+1}{(x^2+1)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{x^2+1}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}-\int\frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x-\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{x^2+1}+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Інтеграл, який залишився, знаходиться за допомогою рекурентної формули

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Підставивши його у вираз, після спрощень дістанемо

$$\int\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}dx=\frac{x+2}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+2\operatorname{arctg}x+C.$$

20 *Обчислити інтеграл* $\int\frac{dx}{\sin x}$.

Підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ раціонально залежить від $\sin x$. Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Тоді $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2\,dt}{1+t^2}$. Отже,

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{1+t^2}{2t}\frac{2\,dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

21 *Обчислити інтеграл* $\int\frac{dx}{\cos x}$.

Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку (див. приклад 20):

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\sin(\pi/2+x)}=\int\frac{d(\pi/2+x)}{\sin(\pi/2+x)}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)\right|+C.$$

22 *Обчислити інтеграл* $\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

Застосувавши універсальну тригонометричну підстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, дістанемо

$$\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}=\int\frac{1}{8-4\frac{2t}{1+t^2}+7\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2\,dt}{1+t^2}=\int\frac{2\,dt}{t^2-8t+15}=$$

$$=\int\frac{2\,dt}{(t-3)(t-5)}=\int\frac{(t-3)-(t-5)}{(t-3)(t-5)}dt=\int\frac{dt}{t-5}-\int\frac{dt}{t-3}=$$

$$=\ln|t-5|-\ln|t-3|+C=\ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right|+C=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C.$$

23 *Обчислити інтеграл* $\int\frac{\sin x+\cos x}{3+\sin 2x}dx$.

Застосувавши універсальну тригонометричну підстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, дістанемо

$$\int\frac{\sin x+\cos x}{3+\sin 2x}dx=\int\frac{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{3+2\frac{2t}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2\,dt}{1+t^2}=\int\frac{2(-t^2+2t+1)}{3t^4-4t^3+6t^2+4t+3}dt.$$

Корені знаменника практично знайти складно, тому краще спочатку перетворити знаменник:

$$\int\frac{\sin x+\cos x}{3+\sin 2x}dx=\int\frac{\sin x+\cos x}{4-(\sin^2x-2\sin x\cos x+\cos^2x)}dx=$$

$$=\int\frac{\sin x+\cos x}{4-(\sin x-\cos x)^2}dx.$$

Тепер, зробивши підстановку $\sin x - \cos x = t$, $(\sin x + \cos x)dx = dt$, дістанемо

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x} dx = \int \frac{dt}{4 - t^2} = \int \frac{dt}{(2-t)(2+t)} = \frac{1}{4}\int \frac{(2-t)+(2+t)}{(2-t)(2+t)} dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{2+t} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{2-t} = \frac{1}{4}\ln|2+t| - \frac{1}{4}\ln|2-t| + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x - \cos x + 2}{\sin x - \cos x - 2}\right| + C.$$

24 *Обчислити інтеграл* $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 3} dx.$

Здійснимо такі перетворення: $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 3} dx = \int \frac{(\cos^2 x - 1)d(\cos x)}{\cos x - 3}.$

Позначивши $\cos x = t$, дістанемо

$$\int \frac{t^2 - 1}{t - 3} dt = \int \frac{t^2 - 9 + 8}{t - 3} dt = \int (t + 3)dt + 8\int \frac{dt}{t - 3} = \frac{t^2}{2} + 3t + 8\ln|t - 3| + C.$$

Зробивши зворотну заміну, матимемо

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 3} dx = \frac{\cos^2 x}{2} + 3\cos x + 8\ln|\cos x - 3| + C.$$

25 *Обчислити інтеграл* $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x}.$

Підінтегральна функція парна відносно синуса й косинуса, оскільки

$$\frac{1}{(-\sin x)^2 - 4(-\sin x)(-\cos x) + 5(-\cos x)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x}.$$

Тому застосуємо підстановку $\mathrm{tg} = t$; при цьому

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad \sin x = \mathrm{tg}\, x \cos x = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}},$$

$$x = \mathrm{arctg}\, t, \quad dx = \frac{dt}{1 + t^2}.$$

Маємо

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1 + t^2}}{\frac{t^2}{1 + t^2} - 4\frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} + 5\frac{1}{1 + t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 - 4t + 5} = \int \frac{dt}{(t-2)^2 + 1} = \int \frac{d(t-2)}{(t-2)^2 + 1} =$$

$$= \mathrm{arctg}(t - 2) + C = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x - 2) + C.$$

Вираження $\cos x$, $\sin x$ та dx через t можна уникнути, здійснивши такі перетворення:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x(\mathrm{tg}^2 x - 4\,\mathrm{tg}\, x + 5)} = \int \frac{dt}{t^2 - 4t + 5}.$$

✓ Хоча деякі застосовні підстановки зазвичай приводять до простіших викладок, ніж універсальна тригонометрична підстановка, однак бувають випадки, коли вона забезпечує найкоротший шлях.

26 *Обчислити інтеграл* $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

Підінтегральна функція непарна відносно синуса, тому можна застосувати підстановку $\cos x = t$, після якої дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^4 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{(1 - \cos^2 x)^2} = -\int \frac{dt}{(1 - t^2)^2} = -\int \frac{dt}{(1 - t^2)(1 + t^2)^2}.$$

Таким чином, застосувавши частинну підстановку, ми прийшли до не дуже простого інтеграла від раціонального дробу. Спробуємо універсальну тригонометричну підстановку $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$. Тоді $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$, $dx = \frac{2\,dt}{1 + t^2}$ і

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{(1 + t^2)^3}{8t^3}\frac{2\,dt}{1 + t^2} = \frac{1}{4}\int \frac{(1 + t^2)^2}{t^3} dt = \frac{1}{4}\int \frac{1 + 2t^2 + t^4}{t^3} dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^3} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} + \frac{1}{4}\int t\, dt = -\frac{1}{8t^2} + \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{8}t^2 + C =$$

$$= -\frac{1}{8\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + C.$$

Отже, універсальна тригонометрична підстановка виявилася зручнішою.

27 *Обчислити інтеграл* $\int \sin 4x \sin 6x\, dx$.

Скориставшися відомою тригонометричною формулою, запишемо підінтегральний вираз у вигляді

$$\cos 4x \cos 6x = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 10x.$$

Тоді дістанемо

$$\int \sin 4x \sin 6x\, dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 10x\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{20}\sin 10x + C.$$

28 *Обчислити інтеграл* $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\, \cos^3 x\, dx$.

Показник степеня косинуса дорівнює трьом, тому робимо підстановку $\sin x = t$, $\cos x\, dx = dt$. Тоді

$$\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\, \cos^3 x\, dx = \int \sqrt[3]{\sin^2 x}(1 - \sin^2 x)\cos x\, dx = \int \sqrt[3]{t^2}(1 - t^2)dt =$$

$$= \int t^{\frac{2}{3}}\, dt - \int t^{\frac{8}{3}}\, dt = \frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{11}t^{\frac{11}{3}} + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{\sin^5 x} - \frac{3}{11}\sqrt[3]{\sin^{11} x} + C.$$

29 *Обчислити інтеграл* $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x \sin x}}$.

Оскільки степені тригонометричних функцій $m = -\frac{7}{2}$, а $n = -\frac{1}{2}$, то $m + n = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2} = -4$ є парним від'ємним числом. Тому, зробивши підстановку $\operatorname{tg} x = t$, дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x \sin x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\cos^8 x \operatorname{tg} x}} = \int \frac{dx}{\cos^4 x \sqrt{\operatorname{tg} x}} = \int \frac{\sec^2 x \quad d(\operatorname{tg} x)}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} =$$

$$= \int \frac{(t^2 + 1)dt}{\sqrt{t}} = \int t^{\frac{3}{2}} dt + \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + 2t^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{\operatorname{tg}^5 x} + 2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C.$$

30 *Обчислити інтеграл* $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$.

Зробимо тригонометричні перетворення в підінтегральному виразі. Тоді

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1 + \cos 2x - \frac{1 + \cos 4x}{2} - \frac{1 + \cos 4x}{2}\cos 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1 + \cos 2x - \cos 4x - \cos 4x \cos 2x)dx.$$

Оскільки $\cos 4x \cos 2x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 6x$, то

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \frac{1}{16}\int \left(1 + \frac{1}{2}\cos 2x - \cos 4x - \frac{1}{2}\cos 6x\right) dx =$$

$$= \frac{x}{16} + \frac{\sin 2x}{64} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin 6x}{192} + C.$$

31 *Обчислити інтеграл* $\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx$.

У підінтегральну функцію змінна x під радикалами входить із показниками 2 та 3. Найменше спільне кратне показників 6, тому, зробивши підстановку $x = t^6$, $dx = 6t^5\, dt$, обчислимо інтеграл:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{t^3}{t^6 - t^4} \quad 6t^5\, dt = 6\int \frac{t^4}{t^2 - 1} dt = 6\int \frac{t^4 - 1 + 1}{t^2 - 1} dt =$$

$$= \int (t^2 + 1)\, dt + 6\int \frac{dt}{(t - 1)(t + 1)} = 2t^3 + 6t + 3\int \frac{(t + 1) - (t - 1)}{(t - 1)(t + 1)} dt =$$

$$= 2t^3 + 6t + 3\int \frac{dt}{t - 3} - 3\int \frac{dt}{t + 1} = 2t^3 + 6t + 3\ln|t - 1| - 3\ln|t + 1| + C =$$

$$= 2t^3 + 6t + 3\ln\left|\frac{t - 1}{t + 1}\right| + C = 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[6]{x} + 1}\right| + C.$$

32 *Обчислити інтеграл* $\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$.

Рекомендована підстановка $\frac{1-x}{1+x} = t^2$ дає змогу зробити таку заміну: $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt$. Крім того, $1 - x = \frac{2t^2}{1+t^2}$. Тому

$$\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = -\int \frac{(1+t^2)^2}{4t^4}\, t\, \frac{4t}{(1+t^2)^2}dt =$$

$$= -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

33 *Обчислити інтеграл* $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x + 3}}$.

Виділивши під коренем повний квадрат, дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x + 3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \frac{x}{2} + \frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(x - 1/4)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left| x - \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x^2 - x + 3}\right| + C.$$

34 *Обчислити інтеграл* $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 2x - 3x^2}}$.

Зробивши відповідні перетворення в підінтегральній функції, дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 2x - 3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}x - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(x + 1/3)}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{3}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x + 1}{4} + C.$$

35 *Обчислити інтеграл* $\int \frac{dx}{x\sqrt{10x^2 - 6x + 1}}$.

Даний інтеграл за допомогою «оберненої» підстановки $x = \frac{1}{t}$ зводиться до інтеграла вигляду $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$. Справді, зробивши заміну $x = \frac{1}{t}$ і $dx = -\frac{1}{t^2}dt$, дістанемо

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{10x^2 - 6x + 1}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{10}{t^2} - \frac{6}{t} + 1}} = \int \frac{-dt}{\sqrt{10 - 6t + t^2}} =$$

$$= -\int \frac{d(t-3)}{\sqrt{1 + (t-3)^2}} = -\ln\left| t - 3 + \sqrt{10 - 6t + t^2}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x} - 3 + \sqrt{10 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}}\right| + C.$$

36 *Обчислити інтеграл* $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$.

Зазначимо, що $x\,dx = \frac{1}{2}d(x^2 + 4x + 5) - 2\,dx$. Тоді дістанемо

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2 + 4x + 5)}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} =$$

$$= \sqrt{x^2 + 4x + 5} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 + 1}} =$$

$$= \sqrt{x^2 + 4x + 5} - 2\ln\left| x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 5}\right| + C.$$

37 *Обчислити інтеграл:*

$$\int_{-1}^{2} x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{3}\right|_{-1}^{2} = \frac{2^4}{3} - \frac{(-1)^4}{3} = \frac{16}{3} - \frac{1}{3} = 5.$$

38 *Обчислити інтеграл* $\int_0^8 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$.

Переходимо до нової змінної інтегрування, поклавши $x = t^3$, $dx = 3t^2\,dt$, $t > 0$. При $x = 0$ дістанемо $t = 0$, а при $x = 8$ маємо $t = 2$. Тому після заміни змінної

$$\int_0^8 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}} = \int_0^2 \frac{3t^2\,dt}{1+t} = 3\int_0^2 \frac{(t^2-1+1)dt}{1+t} = 3\int_0^2 \left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt =$$

$$= 3\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|1+t|\right)\Big|_0^2 = 3\left(\frac{4}{2} - 2 + \ln 3\right) = 3\ln 3.$$

39 *Обчислити інтеграл* $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx.$

Зробимо заміну $t = \sqrt{e^x - 1}$. Тоді $e^x = t^2 + 1$ і $e^x\,dx = 2t\,dt$. При $x = 0$ маємо $t = \sqrt{e^0-1} = 0$, при $x = \ln 5$ буде $t = \sqrt{e^{\ln 5}-1} = \sqrt{5-1} = 2$. Виконавши підстановку, дістанемо

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx = \int_0^2 \frac{t\,2t\,dt}{t^2+4} = 2\int_0^2 \frac{t^2\,dt}{t^2+4} = 2\int_0^2 \left(1-\frac{4}{t^2+4}\right)dt =$$

$$= 2\left(t - 2\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right)\Big|_0^2 = 2(2-2\operatorname{arctg}1) = 4-\pi.$$

40 *Обчислити інтеграл* $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}.$

Зробивши заміну $\ln x = t$, $dt = \frac{dx}{x}$, дістанемо

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{d\ln x}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \arcsin\ln x\Big|_1^{\sqrt{e}} =$$

$$= \arcsin\ln\sqrt{e} - \arcsin\ln 1 = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}.$$

41 *Обчислити інтеграл* $\int_1^e (1+\ln x)^2\,dx$, *використовуючи формулу інтегрування частинами.*

Покладемо $u = (1+\ln x)^2$, $dv = dx$. Тоді $du = 2(1+\ln x)\frac{dx}{x}$, $v = x$ і, застосувавши формулу (10.27), дістанемо

$$I = \int_1^e (1+\ln x)^2\,dx = x(1+\ln x)^2\Big|_1^e - 2\int_1^e (1+\ln x)\,dx.$$

До останнього інтеграла ще раз застосуємо формулу (10.27) інтегрування частинами, поклавши $u = 1 + \ln x$, $dv = dx$ і $du = dx/x$, $v = x$. Матимемо

$$I = x(1+\ln x)^2\Big|_1^e - 2\left[x(1+\ln x)^2\Big|_1^e - \int_1^e dx\right] = 2e - 1.$$

42 *Записати рекурентні формули для інтегралів*

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx \quad \textit{та} \quad \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx,\ n \ge 0 \text{ — \textit{ціле}}.$$

Зазначимо, що обидва ці інтеграли рівні. Справді, замінивши в $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ і зробивши заміну змінної $\frac{\pi}{2} - x = t$, дістанемо

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = -\int_{\pi/2}^0 \sin^n t\,dt = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx.$$

Тепер обчислимо $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$ при $n \ge 2$.

Застосуємо формулу інтегрування частинами, взявши $u = \sin^{n-1} x$, $dv = \sin x\,dx$. Тоді

$$du = (n-1)\sin^{n-2} x\cos x\,dx,\quad v = -\cos x,$$

і маємо

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = -\sin^{n-1} x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx,$$

або

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Розв'язавши це рівняння відносно I_n, дістанемо

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Розглянемо два випадки.

1. $n = 2m$ — *парне число.* Застосувавши останню формулу m разів, матимемо

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} I_{2m-2} = \frac{2m-1}{2m} \frac{2m-3}{2m-2} I_{2m-4} = \frac{2m-1}{2m} \frac{2m-3}{2m-2} \frac{2m-5}{2m-4} I_{2m-6} =$$

$$= \ldots = \frac{2m-1}{2m} \frac{2m-3}{2m-2} \frac{2m-5}{2m-4} \ldots \frac{3}{4} \frac{1}{2} I_0.$$

Оскільки $I_0 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^0 x\, dx = \int\limits_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$, то

$$I_{2m} = \frac{(2m-1)(2m-3)(2m-5)\ldots 1}{2m(2m-2)(2m-4)\ldots 2} \frac{\pi}{2}.$$

2. $n = 2m + 1$ — *непарне число.* Знову застосувавши рекурентну формулу m разів, дістанемо

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} I_{2m-1} = \frac{2m}{2m+1} \frac{2m-2}{2m-1} I_{2m-3} = \ldots =$$

$$= \frac{2m}{2m+1} \frac{2m-2}{2m-1} \frac{2m-4}{2m-3} \ldots \frac{2}{3} I_1.$$

Оскільки $I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\, dx = 1$, то

$$I_{2m+1} = \frac{2m(2m-2)(2m-4)\ldots 2}{(2m+1)(2m-1)(2m-3)\ldots 3}.$$

Об'єднавши формули у випадках 1 і 2, матимемо

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 1}{n(n-2)(n-4)\ldots 2} \dfrac{\pi}{2} & \text{при парному } n, \\[2ex] \dfrac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 2}{n(n-2)(n-4)\ldots 3} & \text{при непарному } n. \end{cases}$$

43 *Обчислити інтеграл* $\int\limits_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx.$

Це невласний інтеграл першого роду, оскільки верхня межа інтегрування в ньому нескінченна. Згідно з правилом обчислення невласних інтегралів першого роду

$$I = \int\limits_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{b \to \infty} \int\limits_1^{b} \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

Скористаємося методом інтегрування частинами:

$$I = -\lim_{b \to \infty} \int\limits_1^{b} \ln x\, d\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{\ln x}{x}\bigg|_1^b + \int\limits_1^b \frac{1}{x^2} dx \right) =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{\ln b}{b} + 0 - \frac{1}{x}\bigg|_1^b \right) = \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1 \right) = 1.$$

Отже, інтеграл збігається.

44 *Обчислити інтеграл:*

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \to -\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a) = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, інтеграл збігається.

45 *Обчислити інтеграл* $\int\limits_a^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$, $a > 1$.

Дістаємо

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{b \to \infty} \int\limits_2^b \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{\ln x} \right)\bigg|_2^{\infty} = \lim_{b \to \infty} \left(\frac{1}{\ln b} - \frac{1}{\ln 2} \right) = -\frac{1}{\ln 2}.$$

Отже, інтеграл збігається.

46 *Обчислити інтеграл* $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, ***виходячи з означення невласних інтегралів від необмежених функцій.***

Функція $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ неперервна при $0 \le x < 1$ і має розрив другого роду в точці $x = 1$. Тому внаслідок рівності $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,\ \varepsilon > 0$ дістаємо

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} (\arcsin x \big|_0^{1-\varepsilon}) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} [\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0] = \lim_{\varepsilon \to 0} \arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, інтеграл збігається й дорівнює $\pi/2$.

47 *Обчислити інтеграл* $\int\limits_0^3 \dfrac{dx}{(x-1)^2}$.

Підінтегральна функція має розрив другого роду в точці $x = 1$. Тоді за означенням

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int\limits_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} (x-1)^{-2} dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{1+\varepsilon}^3 (x-1)^{-2} dx =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{x-1}\Bigg|_0^{1-\varepsilon} - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{x-1}\Bigg|_{1+\varepsilon}^3 = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{1-\varepsilon-1} - 1 - \frac{1}{2} - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{1+\varepsilon-1} = \infty.$$

Отже, інтеграл розбігається.

48 *Наближено обчислити інтеграл* $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1+x^2}$ *за допомогою формул прямокутників і трапецій і порівняти з його точним значенням.*

Не обмежуючи загальності, розіб'ємо відрізок $[0;\ 1]$ на 10 рівних частин $\left(h = \dfrac{1-0}{10} = 10^{-1}\right)$ і знайдемо значення функції $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ у точках розбиття.

Застосуємо формули (10.34)—(10.36):

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx (1{,}0 + 0{,}99 + 0{,}96 + 0{,}92 + 0{,}86 + 0{,}8 + 0{,}74 +$$

$$+ 0{,}67 + 0{,}61 + 0{,}55) = 0{,}81;$$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{10}(0{,}99 + 0{,}96 + 0{,}92 + 0{,}86 + 0{,}8 + 0{,}74 +$$

$$+ 0{,}67 + 0{,}61 + 0{,}55) = 0{,}76;$$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{10}(0{,}75 + 0{,}99 + 0{,}96 + 0{,}92 + 0{,}86 + 0{,}8 + 0{,}74 +$$

$$+ 0{,}67 + 0{,}61 + 0{,}55) = 0{,}782.$$

Обчислимо точно даний інтеграл:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785.$$

Порівняння наближених значень даного інтеграла з його точним значенням дає такий результат: за формулами прямокутників дістали одну правильну цифру, а за формулами трапецій — дві.

Розділ 11

Застосування методів інтегрального числення

11.1 Геометричні застосування

11.1.1. Обчислення площ плоских фігур

Як уже зазначалося в п. 10.5, визначений інтеграл чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції $aABb$, яка обмежена графіком даної функції та відрізками прямих $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (див. рис. 10.3). Тому, якщо на проміжку $[a, b]$ неперервну криву задано рівнянням $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$, то площа криволінійної трапеції, обмеженої цією кривою, віссю Ox і прямими $x = a$, $x = b$, визначається формулою (10.21), тобто

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

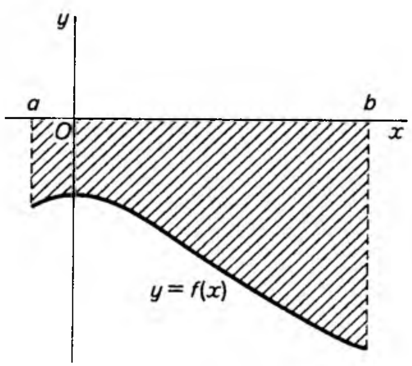


Рис. 11.1

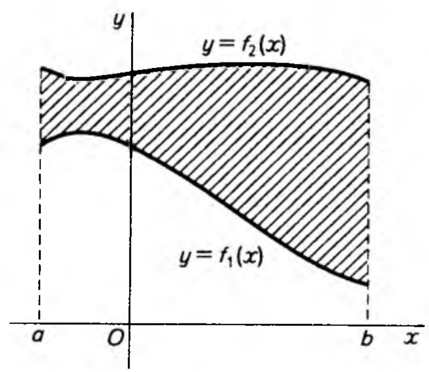


Рис. 11.2

Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою $y = f(x)$, $f(x) \leq 0$, віссю Ox і прямими $x = a$, $x = b$ (рис. 11.1), то її площа визначається за формулою

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|. \tag{11.1}$$

У загальнішому випадкові, якщо криволінійна трапеція обмежена двома неперервними кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ та прямими $x = a$, $x = b$, причому $f_1(x) \leq f_2(x)$ для $a \leq x \leq b$ (рис. 11.2), то її площу знаходять за формулою

$$S = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)|dx. \tag{11.2}$$

■ **Приклад 11.1.** *Обчислимо площу фігури, обмеженої лініями $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$ (рис. 11.3).*

Шукана площа обмежена півхвилею синусоїди й віссю Ox. Обчислюємо її:

$$S = \int_0^\pi \sin x\, dx = (-\cos x)\Big|_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 2.$$

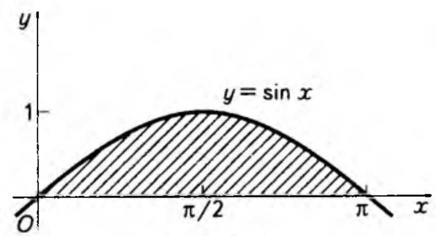


Рис. 11.3

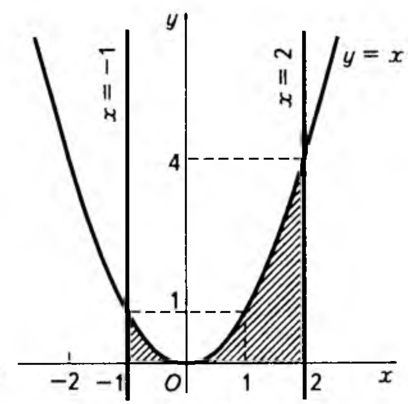


Рис. 11.4

■ **Приклад 11.2.** *Обчислимо площу, обмежену параболою $y = x^2$, прямими $x = -1$ і $x = 2$ та віссю абсцис (рис. 11.4).*

Шукана площа обчислюється так:

$$S = \int_{-1}^{2} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{2} = 3.$$

■ **Приклад 11.3.** *Обчислимо площу сегмента, який відтинає пряма $y = -x$ від параболи $y = 2x - x^2$.*

Методом виділення повних квадратів зведемо рівняння параболи до вигляду $y - 1 = -(x-1)^2$. Із рівняння видно, що парабола симетрична відносно прямої $x = 1$, її вітки спрямовані вниз і вершина її лежить у точці $A(1;\ 1)$ (рис. 11.5). Знаходимо точки перетину графіків — спільні розв'язки системи рівнянь, яку утворюють рівняння параболи $y = 2x - x^2$ та прямої $y = -x$, і визначаємо абсциси точок O і B, що є точками перетину цих двох кривих. Маємо $x_O = 0$, $x_B = 3$.

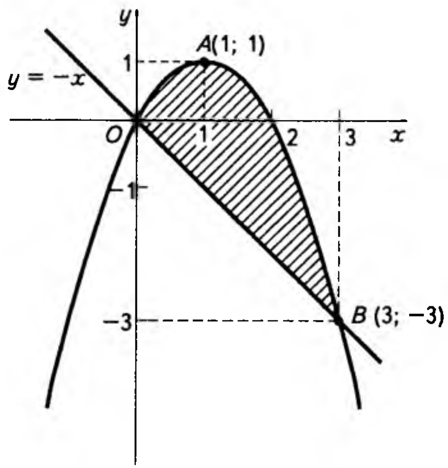


Рис 11.5

Тепер за формулою (11.2) обчислюємо шукану площу сегмента, де $f_1(x) = -x$, $f_2(x) = 2x - x^2$, $a = 0$, $b = 3$:

$$S = \int_0^3 ((2x - x^2) - (-x))dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^3 = \frac{9}{2}.$$

11.1.2. Обчислення довжини дуг кривих ліній

Нехай на проміжку $[a, b]$ неперервну криву AB задано рівнянням $y = f(x)$, $a \le x \le b$, причому функція $y = f'(x)$ також неперервна. Знайдемо довжину дуги AB, яка міститься між вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$. Виберемо на дузі AB точки $A, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, B$ з абсцисами $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ і проведемо хорди $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}B$, довжини яких позначимо $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$ відповідно. Тоді довжина ламаної $AA_1A_2\ldots A_{n-1}B$, вписаної в дугу AB, дорівнює $l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$ (рис. 11.6).

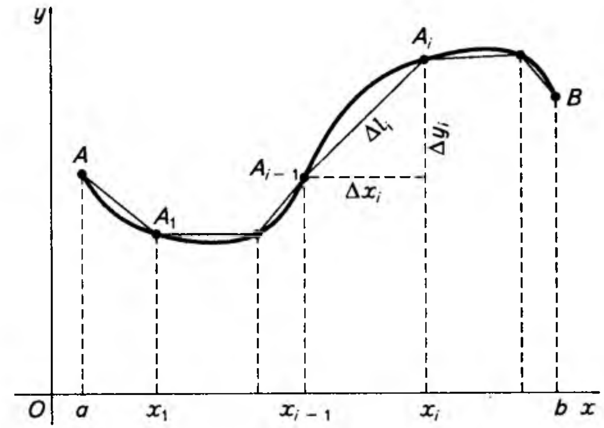


Рис. 11.6

➥ **Означення 11.1.** ***Довжиною l дуги AB називають границю (якщо вона існує), до якої прямує довжина вписаної в цю дугу ламаної, якщо довжина її найбільшої ланки прямує до нуля:***

$$l = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i.$$

Позначимо $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. За теоремою Піфагора $\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i$. Оскільки функція неперервно диференційовна на проміжку $[a, b]$, то за формулою Лагранжа на кожному окремому відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ маємо $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)\Delta x_i$, де $c \in [x_{i-1}, x_i]$. Тоді $\Delta l_i = \sqrt{1+(f'(c_i))^2}\,\Delta x_i$ і $l_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\Delta l_i = \sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(c_i))^2}\,\Delta x_i$. Оскільки функція $y = f'(x)$ неперервна, то функція $y = \sqrt{1+(f'(x))^2}$ також неперервна й існує відповідна границя інтегральних сум $l_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\Delta l_i$, а саме:

$$l = \lim_{\max \Delta l_i \to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i = \lim_{\max \Delta l_i \to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(c_i))^2}\,\Delta x_i.$$

Отже, довжина дуги AB кривої визначається за формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \qquad (11.3)$$

■ **Приклад 11.4.** *Обчислимо довжину дуги напівкубічної параболи $y = \sqrt{x^3}$ від початку координат до точки $A(4; 8)$ (рис. 11.7).*

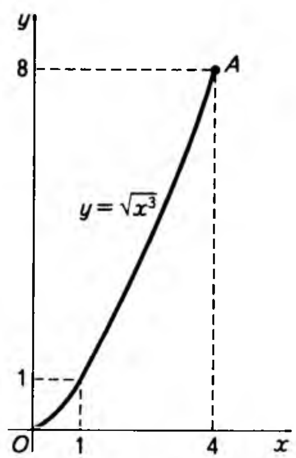


Рис. 11.7

Знаходимо $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ і, підставивши у формулу (11.3), дістанемо

$$l = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9}\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,d\left(1+\frac{9}{4}x\right) =$$

$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

11.1.3. Обчислення об'ємів тіл обертання

Розглянемо деяке тіло. Нехай функція $S = S(x)$ визначає площу перерізу цього тіла площиною, яка проходить перпендикулярно до осі Ox через точку з координатою x, де $x \in [a, b]$ (рис. 11.8). Обчислимо об'єм даного тіла. Виберемо довільне розбиття проміжку $[a, b]$ на відрізки $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ і проведемо через точки x_i, $i = \overline{1, n}$ площини, перпендикулярні до осі Ox. На кожному з цих відрізків виберемо довільну точку $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$. Площини розбивають тіло на елементарні циліндри, площі основ яких $S(c_i)$, $i = \overline{1, n}$, а висоти $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Об'єми всіх таких циліндрів можна обчислити за формулою

$$V_n \approx \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i.$$

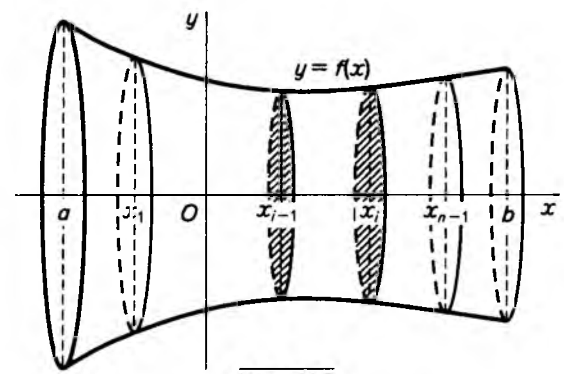


Рис. 11.8

➡ **Означення 11.2.** *Границю цієї суми при* $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i \to 0$ *(якщо вона існує) називають **об'ємом даного тіла**, тобто він обчислюється за формулою* $V = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i$.

Очевидно, що V_n є інтегральною сумою для функції $S = S(x)$ на проміжку $[a, b]$. Отже, за означенням визначеного інтеграла об'єм тіла обчислюється за формулою

$$V = \int_a^b S(x)dx. \tag{11.4}$$

Оскільки площа перерізу $S(x) = \pi f^2(x)$, то об'єм тіла, яке утворюється при обертанні навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$ та відрізками прямих $x = a$, $x = b$, $y = 0$, обчислюється за формулою

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx. \tag{11.5}$$

Аналогічно об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $x = \varphi(x)$, $y \in [c, d]$, навколо осі Oy, можна обчислити за формулою

$$V_y = \pi\int_c^d x^2\, dy. \tag{11.6}$$

■ **Приклад 11.5.** *Знайдемо об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої графіком функції* $y = \sin x$, *навколо відрізка* $[0, \pi]$ *осі* Ox.

За формулою (11.5) дістаємо

$$V_x = \pi\int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2x)dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

■ **Приклад 11.6.** *Знайдемо об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі* Oy *фігури, обмеженої параболою* $y = x^2$, *віссю* Oy *і прямою* $y = 1$.

За формулою (11.6), ураховуючи, що $c = 0$, $d = 1$, $x^2\,dy = y\,dy$, дістанемо

$$V_y = \pi\int_0^1 y\, dy = \pi\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

11.1.4. Обчислення площ поверхонь тіл обертання

Нехай графік неперервно диференційовної функції $y = f(x), f(x) \ge 0$, $x \in [a, b]$ обертається навколо осі Ox (рис. 11.9). Визначимо площу цієї поверхні на проміжку $[a, b]$. Функції $y = f(x)$ і $y = f'(x)$ неперервні при $a \le x \le b$. Виберемо на дузі AB точки A, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, B з абсцисами $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$ і проведемо хорди AM_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}B$, довжини яких позначимо Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n (рис. 11.9). Кожна хорда завдовжки Δl_i, $i = \overline{1, n}$ під час обертання описує зрізаний конус, площа поверхні якого $\Delta S_i = 2\pi\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta l_i$, $i = \overline{1, n}$. Оскільки

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i,$$

то, застосовуючи теорему Лагранжа, дістанемо

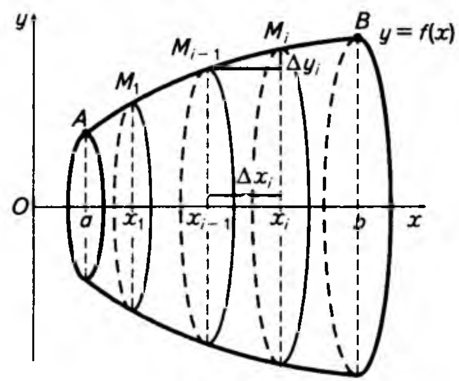


Рис. 11.9

$$\Delta l_i = \sqrt{1+(f'(c_i))^2}\,\Delta x_i \quad \text{і} \quad \Delta S_i = 2\pi\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\sqrt{1+(f'(c_i))^2}\,\Delta x_i.$$

Площа поверхні, описаної ламаною $AM_1M_2...M_{n-1}B$, становить

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta S_i$$

або

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}(f(x_{i-1})+f(x_i))\sqrt{1+(f'(c_i))^2}\,\Delta x_i.$$

➡ **Означення 11.3.** *Границю цієї суми при* $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\Delta l_i \to 0$ *(якщо вона існує) називають* ***площею поверхні обертання***:

$$S = \lim_{\max \Delta l_i \to 0}\pi\sum_{i=1}^{n}(f(x_{i-1})+f(x_i))\sqrt{1+(f'(c_i))^2}\,\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\max \Delta l_i \to 0}\pi\sum_{i=1}^{n}2(f(c_i))\sqrt{1+(f'(c_i))^2}\,\Delta x_i.$$

Тоді площа поверхні тіла, яке утворюється при обертанні графіка функції $y = f(x)$ навколо осі Ox, обчислюється за формулою

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx. \qquad (11.7)$$

■ **Приклад 11.7.** *Обчислимо площу кульового поясу, який утворюється при обертанні навколо осі Ox дуги кола $x^2+y^2=4$, $y>0$ між точками з абсцисами $x=-1$ та $x=1$.*

Запишемо підінтегральний вираз відповідно до формули (11.6), де $f(x)=\sqrt{4-x^2}$. Тоді $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$ і $f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}=2$. Дістанемо

$$S = 2\pi\int_{-1}^{1}2\,dx = 8\pi.$$

11.2
Фізичні застосування

11.2.1. Обчислення роботи змінної сили

Як уже зазначалося в п. 10.5, обчислення роботи змінної сили приводить до поняття визначеного інтеграла. Нагадаємо: якщо вздовж осі Ox діє сила $f=f(x)$, напрям якої збігається з напрямом осі Ox, а абсолютне значення неперервно змінюється, то під дією цієї сили матеріальна точка переміститься вздовж осі з точки $x=a$ в точку $x=b$. Робота змінної сили на проміжку $[a, b]$ обчислюється за формулою

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

■ **Приклад 11.8.** *Обчислимо роботу, яку треба виконати, щоб підняти вертикально вгору тіло масою m із поверхні Землі на висоту h. Нехай радіус Землі дорівнює R.*

За законом Ньютона сила земного тяжіння визначається за формулою $f(x)=\gamma\frac{mM}{x^2}$, де M — маса Землі; γ — гравітаційна стала; x — відстань від центра тіла масою m до центра Землі. Очевидно, що $R\le x\le R+h$. Якщо $x=R$, то тіло знаходиться на поверхні Землі. Тоді $f(R)=P=mg$ — вага тіла, тобто $f(R)=\gamma\frac{mM}{R^2}=P$. Використовуючи формулу, за якою обчислюється робота змінної сили, дістанемо

$$A = \int_R^{R+h}f(x)dx = \int_R^{R+h}\frac{PR^2}{x^2}dx = \frac{PRh}{R+h}.$$

11.2.2. Обчислення пройденого шляху

Нехай точка M рухається вздовж деякої осі й миттєва швидкість у момент часу t становить $v=v(t)$. Потрібно знайти шлях, який пройде точка з моменту часу $t=t_0$ до моменту часу $t=T$.

Якщо швидкість — стала величина ($v=v(t)=\text{const}$), то така задача розв'язується просто: $S=v(T-t_0)$.

Якщо швидкість — змінна величина ($v = v(t)$), то задача дещо ускладнюється. Виберемо довільне розбиття проміжку $[t_0, T]$ на відрізки $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ..., $[t_{n-1}, t_n]$. На кожному з цих відрізків виберемо довільну точку $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, n}$ — τ_i, $i = \overline{1, n}$ — момент часу). Вважатимемо, що швидкість на кожному відрізку є сталою й дорівнює $v(\tau_i)$, $i = \overline{1, n}$. Тоді шлях, пройдений точкою за інтервал часу $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, наближено становить $\Delta S \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$.

Якщо тепер припустити, що функція $v = v(t)$ неперервна, то, перейшовши до границі при $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta t_i \to 0$, дістанемо

$$S = \int_{t_0}^{T} v(t)dt. \tag{11.8}$$

■ **Приклад 11.9.** *Миттєва швидкість матеріальної точки (в метрах на секунду) визначається функцією $v(t) = 9t^2 - 8t$. Знайдемо шлях, який точка пройшла за четверту секунду.*

За умовою задачі точка пройшла шлях зі швидкістю $v(t) = 9t^2 - 8t$ від моменту часу $t_0 = 3$ до моменту часу $T = 4$. Тому за формулою (11.8) дістанемо

$$S = \int_3^4 (9t^2 - 8t)dt = (3t^3 - 4t^2)\Big|_3^4 = 83 \text{ м}.$$

■ **Приклад 11.10.** *Два тіла почали рухатись одночасно з однієї точки в одному напрямі по прямій. Перше тіло рухається зі швидкістю $v(t) = 6t^2 + 2t$, а друге — зі швидкістю $v(t) = 4t + 5$. Визначимо, на якій відстані одне від одного вони перебуватимуть через 5 с.*

Очевидно, що шукана відстань є різницею відстаней, пройдених першим і другим тілом за 5 с. Знайдемо ці відстані:

$$S_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t)dt = (2t^3 + t^2)\Big|_0^5 = 275 \text{ м},$$

$$S_2 = \int_0^5 (4t + 5)dt = (2t^2 + 5t)\Big|_0^5 = 75 \text{ м}.$$

Тоді шукана відстань

$$S = S_1 - S_2 = 275 - 75 = 200 \text{ м}.$$

11.3 Економічні застосування

11.3.1. Застосування в динамічних процесах

1. Нагадаємо, що в п. 10.5.2, розглядаючи задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла, ми з'ясували економічний зміст визначеного інтеграла: він чисельно дорівнює обсягу виробленої продукції підприємством (фірмою) з продуктивністю праці $f = f(t)$ за інтервал часу $[0; T]$, тобто

$$q = \int_0^T f(t)dt. \tag{11.9}$$

■ **Приклад 11.11.** *Продуктивність праці виробничої бригади виражається функцією $f(t) = 8t - t^2$. Тут $f(t) = u'(t)$, де $u = u(t)$ — обсяг виробленої продукції за інтервал часу $[0; t]$. Робітники працюють 8 год, тобто $t \in [0; 8]$. Обчислимо обсяг виробленої продукції: ① за робочий день; ② за інтервал часу $[2; 6]$. ③ Порівняємо ці обсяги в процентному відношенні.*

Застосувавши формулу (11.9), дістанемо:

① $$q_1 = \int_0^8 f(t)dt = \int_0^8 (8t - t^2)dt = \left(4t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^8 = \frac{256}{3} \text{ од. пр.;}$$

② $$q_2 = \int_0^6 f(t)dt = \int_0^6 (8t - t^2)dt = \left(4t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_2^6 = \frac{176}{3} \text{ од. пр.;}$$

③ $$r = \frac{q_2}{q_1} 100\,\% = \frac{17\,600}{256} = 68{,}75\,\%.$$

2. В економічній теорії виробнича функція Кобба—Дугласа, яка враховує технічний прогрес, має вигляд $f(t) = AK^{\alpha}L^{\beta}e^{\lambda t}$, де K — обсяг фондів; L — обсяг трудових ресурсів; λ — інтенсивність розвитку виробництва, пов'язаного з технічним прогресом. Тоді згідно з економічним змістом виробничої функції Кобба—Дугласа можна показати, що обсяг виробленої за T років продукції визначається за формулою (11.9).

■ **Приклад 11.12.** *Знайдемо обсяг продукції, виробленої фірмою за два роки, якщо виробнича функція Кобба—Дугласа має вигляд*

$$f(t) = (1 + 2t)e^{5t}.$$

За формулою (11.9) дістанемо

$$q = \int_0^2 (1 + 2t)e^{5t}\,dt = \left| \begin{array}{l} u = 1 + 2t, \quad du = 2\,dt \\ dv = e^{5t}\,dt, \quad v = \frac{1}{5}e^{5t} \end{array} \right| = \frac{1 + 2t}{5}e^{5t}\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 e^{5t}\,dt =$$

$$= e^{10} - \frac{1}{5}e^{0} - \frac{1}{10}e^{5t}\Big|_0^2 = e^{10} - 0{,}2 - \frac{1}{10}(e^{10} - e^{0}) = 0{,}9e^{10} - 0{,}1.$$

11.3.2. Обчислення середніх значень економічних функцій

В економічних задачах часто використовують теорему про середнє значення, яку доведено в п. 10.5.3 (властивість 9 визначеного інтеграла).

Якщо $C = C(t)$, $R = R(t)$, $P = P(t)$ — відповідно змінні витрати, доход і прибуток підприємства (фірми), то їхні середні значення за час від $t = t_0$ до $t = t_1$ обчислюють за формулами

$$C_{\text{сер}} = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} C(t)dt, \tag{11.10}$$

$$R_{\text{сер}} = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} R(t)dt, \tag{11.11}$$

$$P_{\text{сер}} = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} P(t)dt \tag{11.12}$$

відповідно.

■ **Приклад 11.13.** *Знайдемо середній доход за 10 міс поточного року, якщо задано функцію доходу фірми $R(t) = 3t^2 + 2t - 1$, де t — час.*

За умовою середній доход фірми потрібно визначити за інтервал часу від $t = 0$ до $t = 10$. Використовуючи формулу (11.11), дістанемо

$$R_{\text{сер}} = \frac{1}{10}\int_0^{10} (3t^2 + 2t - 1)dt = \frac{1}{10}(t^3 + t^2 - t)\Big|_0^{10} =$$

$$= \frac{1}{10}(10^3 + 10^3 - 10) = 109 \text{ умов. грош. од.}$$

У розд. 7 розглядалися різні граничні функції (граничний доход, граничні витрати, граничний прибуток). Також було показано, що граничні функції можна дістати з відповідних економічних функцій диференціюванням. Інтегрування дає змогу розв'язати обернену задачу: знайти дану економічну функцію за відомою граничною функцією.

Якщо $C'(x)$, $R'(x)$, $P'(x)$ — відповідно функції граничних витрат, доходу та прибутку підприємства (фірми), то при реалізації x одиниць товару (продукції) зміни витрат, доходу й прибутку зі збільшенням реалізації виробленої продукції від a до b одиниць обчислюють за формулами

$$C(b) - C(a) = \int_a^b C'(x)dx, \tag{11.13}$$

$$R(b) - R(a) = \int_a^b R'(x)dx, \tag{11.14}$$

$$P(b) - P(a) = \int_a^b P'(x)dx \tag{11.15}$$

відповідно.

Якщо витрати на виготовлення одиниці продукції зростають за законом $y = f(x)$, то *фактичне зв'язування обігових коштів* при цьому обчислюють за формулою

$$C_{\text{факт}} = \int_0^T f(x)dx. \tag{11.16}$$

Умовне зв'язування обігових коштів (якщо всі витрати виплатити в перший день) $C_{умов} = tC$, де t — тривалість циклу виробництва, а C — загальні витрати.

Коефіцієнт готовності одиниці продукції обчислюють за формулою

$$K = \frac{C_{факт}}{C_{умов}}. \tag{11.17}$$

■ **Приклад 11.14.** *Задано граничний прибуток фірми* $P'(x) = 23{,}5 - 0{,}01x$. *Визначимо зростання прибутку, якщо реалізація продукції збільшується з* 1000 *до* 1500 *одиниць.*

Зростання прибутку фірми знайдемо за формулою (11.15):

$$P(1500) - P(1000) = \int_{1000}^{1500} (23{,}5 - 0{,}01x)dx = \left(23{,}5x - 0{,}01\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{1000}^{1500} =$$

$$= 35\,350 - 11\,250 + 5000 = 5500.$$

Отже, прибуток зросте на 5500 умов. грош. од.

■ **Приклад 11.15.** *Задано граничний дохід фірми* $R'(x) = 15 - 0{,}01x$. *Знайдемо функцію доходу й визначимо співвідношення між ціною одиниці продукції та обсягом проданої продукції.*

Функцію доходу фірми можна знайти інтегруванням граничного доходу, тобто

$$R(x) = \int R'(x)dx = \int (15 - 0{,}01x)dx = 15\int dx - 0{,}01\int x\,dx =$$

$$= 15x - 0{,}01\frac{x^2}{2} + C = 15x - 0{,}005x^2 + C.$$

Для визначення константи C використовуємо той факт, що доход має дорівнювати нулю, якщо не продано жодної одиниці продукції, тобто при $x = 0$ дістанемо $0 = 15 \cdot 0 - 0{,}005 \cdot 0^2 + C$. Тоді $C = 0$. Отже, функція доходу фірми має вигляд

$$R(x) = 15x - 0{,}005x^2.$$

Якщо ціна кожної одиниці проданої фірмою продукції p і продано x одиниць, то її доход $R(x) = px$. Отже, $px = 15x - 0{,}005x^2$. Тому шукане співвідношення описується рівністю

$$p = 15 - 0{,}005x.$$

■ **Приклад 11.16.** *Нехай гранична ціна проданої фірмою продукції описується функцією* $p'(x) = x + 100$, *де* x *— обсяг проданої продукції. Визначимо загальну функцію ціни проданої продукції, якщо ціна* 100 *одиниць дорівнює* 40 000 *грн.*

За означенням граничної ціни маємо

$$p(x) = \int (x + 100)dx = \frac{x^2}{2} + 100x + C.$$

З умови $p(100) = 40\,000$ дістанемо $\frac{100^2}{2} + 100 + 100 + C = 40\,000$. Тоді $C = 25\,000$.

Отже, функція ціни проданої продукції має вигляд

$$p(x) = \frac{x^2}{2} + 100x + 25\,000.$$

11.3.3. Визначення приросту капіталу за відомими інвестиціями

Розглянемо задачу визначення капіталу (основних фондів) за відомими чистими інвестиціями (капіталовкладеннями). Чисті інвестиції — це загальні інвестиції, які надходять в економіку за певний інтервал часу (зазвичай за рік), із відрахуванням інвестицій на відшкодування основних фондів (витраченого капіталу). Таким чином, за одиницю часу капітал збільшується на обсяг чистих інвестицій.

Припустимо, що капітал $K = K(t)$ збільшується за одиницю часу t на обсяг чистих інвестицій $I = I(t)$. Тоді чисті інвестиції — це похідна від капіталу за часом t, тобто $I(t) = K'(t)$.

Часто в економічних дослідженнях доводиться знаходити приріст капіталу за інтервал часу від t_1 до t_2, тобто $\Delta K = K(t_2) - K(t_1)$. Оскільки $K = K(t)$ є первісною для функції $I = I(t)$, то, використовуючи формулу, яка пов'язує первісну з визначеним інтегралом, можна записати

$$\Delta K = K(t_2) - K(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt. \tag{11.18}$$

■ **Приклад 11.17.** *За даними чистими інвестиціями* $I(t) = 50\,000t$ *обчислимо приріст капіталу з першого по третій рік і визначимо, за скільки років приріст капіталу становитиме* 25 000 000 *умов. грош. од.*

Приріст капіталу знаходимо за інтервал часу від $t_1 = 1$ до $t_2 = 3$. Для цього скористаємося формулою (11.18):

$$\Delta K = K(3) - K(1) = \int_1^3 50\,000t\,dt = 25\,000t^2\Big|_1^3 = 200\,000 \text{ умов. грош. од.}$$

За умовою задачі $\Delta K = 25\,000t^2\Big|_0^T = 25\,000\,000$, тобто $T^2 = 100$, звідки $T = 10$. Отже, потрібно 10 років, щоб приріст капіталу досяг 25 млн умов. грош. од.

11.3.4. Оцінка ступеня нерівномірності розподілу доходів населення

Розглянемо функцію $y = f(x)$, яка характеризує нерівномірний розподіл доходів населення, де y — частка сукупного доходу, яку одержує частина x населення. Графік цієї функції називають *кривою Лоренца* (рис. 11.10). Очевидно, що $0 \le f(x) \le x$ при $x \in [0; 1]$, і нерівномірність розподілу доходів тим вища, чим більша площа фігури OAB.

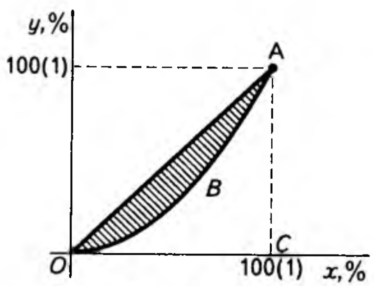


Рис. 11.10

Тому як міру нерівномірності використовують коефіцієнт Джині k, який дорівнює відношенню площі фігури OAB до площі трикутника OAC.

■ **Приклад 11.18.** *За даними досліджень розподілу доходів населення деякої країни крива Лоренца описується функцією* $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, *де y — частка сукупного доходу, яку одержує частина x населення. Обчислимо коефіцієнт Джині.*

Коефіцієнт Джині обчислюється за формулою

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - 2S_{OBAC},$$

оскільки $S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}$. Тоді

$$S_{OBAC} = \int_0^1 (1 - \sqrt{1 - x^2})dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = 1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx.$$

Зробивши заміну $x = \sin t$, $dx = \cos t$, $t_в = \pi/2$, $t_н = 0$, обчислимо інтеграл:

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos^2 x}\,\cos x\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x)dx = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, коефіцієнт Джині

$$k = 1 - 2S_{OBAC} = 1 - 2\left(1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx\right) = 2\frac{\pi}{4} - 1 \approx 0{,}57.$$

Досить велике значення коефіцієнта Джині свідчить про суттєво нерівномірний розподіл доходів населення даної країни.

11.3.5. Застосування у фінансових задачах

Розглянемо деякі застосування визначеного інтеграла в сфері фінансів.

У п. 4.2.7 було добуто формули, які дають змогу визначати розмір внеску S_t за інтервал часу t (кількість років), якщо початковий вклад становив S_0, а процентна ставка — p (%) на рік.

Якщо питому процентну ставку позначити через $i = \frac{p}{100}$, то в разі використання *простих процентів* $S_t = S_0(1 + it)$, звідки $S_0 = \frac{S_t}{1 + it}$.

Використовуючи *складні проценти*, маємо $S_t = S_0(1 + it)^t$, звідки $S_0 = \frac{S_t}{(1+it)^t}$.

Якщо проценти нараховуються неперервно, то $S_t = S_0 e^{\frac{pt}{100}} = S_0 e^{it}$.

Розглянемо тепер обернену задачу. Нехай платежі залежать від часу, тобто є функцією від t, що можна записати як $S_0 = f(t)$. Визначимо розмір внеску через T років. Розіб'ємо T років на n рівних інтервалів часу $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ..., $[t_{n-1}, T]$. На кожному з цих відрізків виберемо довільну точку $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1, n}$ (τ_k — моменти часу). Якщо надходження неперервні, то їх можна вважати сталими на кожному відрізку, а їхнє значення за інтервал часу $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ наближено становить $S_0 \approx f(\tau_k)\Delta t_k$. За час $(T - t_k)$ нарощена сума, обчислена за формулою неперервних процентів, за рахунок нарахування процентів на вклад $f(\tau_i)\Delta t_i$ становитиме $(f(\tau_i)\Delta t_i)e^{i(T-t_k)}$. Щоб визначити загальний вклад S_t через T років, достатньо додати всі вклади, а саме: $\Delta S_t \approx \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta t_k e^{i(T-t_k)}$. Ця наближена рівність стане точною, якщо $\Delta t_k \to 0$. Тоді, перейшовши до границі при $\lambda = \max_{1 \le k \le n} \Delta t_k \to 0$, дістанемо

$$S_t = \int_0^T f(t)e^{i(T-t)}dt. \qquad (11.19)$$

Задачу визначення початкового вкладу S_0 за умови, що відомий вклад S_t, одержаний через t років за річної процентної ставки p, називають ***дисконтуванням***.

Початковий вклад обчислюють за формулою $S_0 = S_t e^{-it}$ у випадку, коли проценти нараховуються неперервно. Якщо S_t також є функцією часу t, тобто $S_t = g(t)$, дисконтний вклад у момент часу t становить $S_0 = g(t)e^{-it}$.

Повну дисконтну суму за час T обчислюють за формулою

$$S_d = \int_0^T g(t)e^{-it}dt. \qquad (11.20)$$

■ **Приклад 11.19.** ***Визначимо дисконтну суму за три роки за процентної ставки 8 %, якщо базові капіталовкладення становили 10 млн грн., а очікуване зростання капіталу — 1 млн грн.***

Капіталовкладення задаються функцією $g(t) = 10 + 1t = 10 + t$, а $i = \frac{p}{100} = 0{,}08$. За формулою (11.20) дістанемо дисконтну суму капіталовкладень:

$$S_d = \int_0^3 (10+t)e^{-0.08t}dt = \left| \begin{matrix} u = 10+t, & du = dt \\ dv = e^{-0.08t}dt, & v = \dfrac{e^{-0.08t}}{-0{,}08} \end{matrix} \right| =$$

$$= -12{,}5e^{-0.08t}(10+t)\Big|_0^3 + 12{,}5\int_0^3 e^{-0.08t}dt =$$

$$= 125 - 162{,}5e^{-0.24} - 156{,}25e^{-0.08t}\Big|_0^3 =$$

$$= 125 - 162{,}5e^{-0.24} - 156{,}25e^{-0.24} + 156{,}25 =$$

$$= 281{,}25 - 318e^{-0.24} \approx 30{,}5 \text{ млн грн.}$$

11.3.6. Застосування в задачах реалізації товарів

Розглянемо криву попиту деякого товару у вигляді $p = f(q)$ (рис. 11.11). Якщо p — ціна одиниці товару, то загальна сума витрат на придбання товару обсягом q становить pq.

На рис. 11.11 через p_0 позначено рівноважну ціну, а через q_0 — обсяг товару, який реалізується за ціною p_0. Точка рівноваги — це точка A перетину кривих попиту й пропозиції.

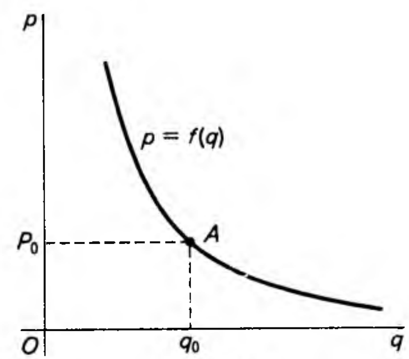


Рис. 11.11

Припустимо, що товар обсягом q_0 не відразу весь потрапляє на ринок, а надходить невеликими партіями, рівними Δq. Це поширена тактика реалізації товару. Мета продавця зрозуміла: підтримувати ціну товару, вищу за рівноважну. Після надходження першої партії товару його обсяг на ринку становить $q_1 = \Delta q$. Ціна, що відповідає цьому обсягові, знаходиться з кривої попиту й становить $p_1 = f(q_1)$.

Якщо величина Δq мала, то можна вважати, що вся партія реалізується за ціною p_1, а витрати споживача на цю партію товару становлять $p_1 \Delta q$.

Після надходження на ринок другої партії товару обсягом Δq загальний обсяг його на ринку становить $q_2 = q_1 + \Delta q = 2\Delta q$, а відповідна ціна також визначається з кривої попиту й становить $p_2 = f(q_2)$.

Можна вважати, що друга партія товару обсягом Δq реалізується за ціною p_2, а витрати споживача на цю партію товару становлять $p_2 \Delta q$.

Цей процес триває доти, доки дістанемо $q_n = q_0 = n\Delta q$. Для того щоб потрапити в точку $q_0 = n\Delta q$, потрібно вибрати $\Delta q = q_0/n$.

Товар останньої n-ї партії реалізується за ціною $p_n = f(q_n) = f(q_0) = p_0$, тобто за рівноважною. Витрати споживачів на цю партію становлять $p_n \Delta q = p_0 \Delta q$.

Загальні витрати споживачів на загальний обсяг товару q_0:

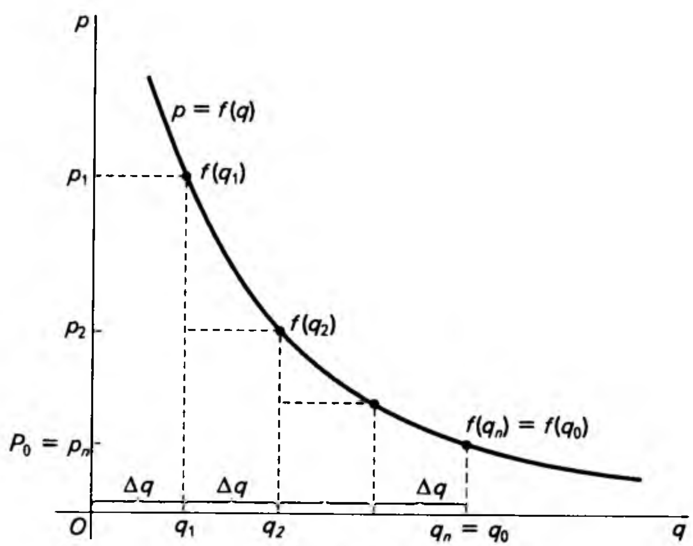


Рис. 11.12

$$p_1 \Delta q + p_2 \Delta q + \ldots + p_n \Delta q =$$

$$= p_1(q_1)\Delta q + p_2(q_2)\Delta q + p_n(q_n)\Delta q = \sum_{k=1}^{n} p_k(q_k)\Delta q.$$

Із рис. 11.12 видно, що загальні витрати споживачів дорівнюють сумі площ прямокутників, яка, своєю чергою, наближено дорівнює визначеному інтегралу

$$\sum_{k=1}^{n} p_k(q_k)\Delta q \approx \int_0^{q_0} f(q)dq. \tag{11.21}$$

Зі збільшенням n величина Δq відповідно як завгодно мала. Тоді наближена рівність перетвориться на точну. Отже, сумарні витрати споживачів $S_в$ обчислюються за формулою

$$S_в = \int_0^{q_0} f(q)dq. \tag{11.22}$$

➡ **Означення 11.4.** ***Надлишок споживача*** $S_н$ *— це різниця між можливими й реальними витратами споживача в умовах ринку:*

$$S_н = \int_0^{q} f(q)dq - p_0 q_0. \tag{11.23}$$

Геометричну інтерпретацію цього означення наведено на рис. 11.13, де $p = f(q)$ — крива попиту; A — точка рівноваги.

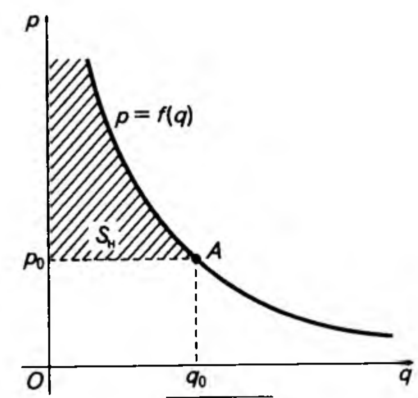


Рис. 11.13

■ **Приклад 11.20.** *Знайдемо надлишок споживача, якщо крива попиту визначається функцією $p = f(q) = 29 - 3q^2$, а рівноважний обсяг товару $q_0 = 2$.*

Підставивши значення $q_0 = 2$ у функцію попиту, дістанемо рівноважну ціну:

$$p_0 = f(q_0) = 29 - 3 \cdot 2^2 = 17.$$

Використовуючи формулу (11.23), матимемо

$$S_{\text{н}} = \int_0^q f(q)dq - p_0q_0 = \int_0^2 (29 - 3q^2)dq - 17 \cdot 2 = (29q - q^3)\Big|_0^2 - 34 =$$

$$= 29 \cdot 2 - 8 - 34.$$

Розглянемо ще одне поняття ринкової економіки — ***додаткову вартість***, або ***надлишок, виробника.*** Для цього візьмемо криву пропозиції деякого товару $p = f(q)$. Графік цієї кривої й точку рівноваги A (перетину з кривою попиту) показано на рис. 11.14.

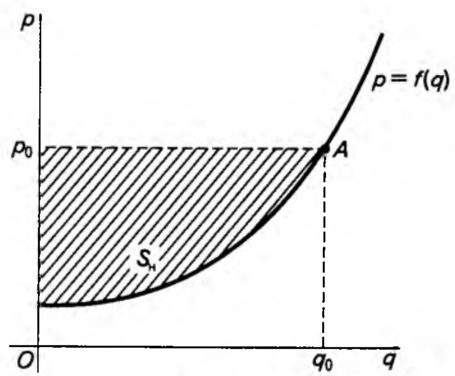


Рис. 11.14

Завдяки ринковим відносинам як деякі споживачі мають змогу придбати товар за ціною, нижчою ніж та, яку вони готові були заплатити, так і виробники іноді можуть продати товар за вигіднішою ціною, ніж та, з якою вони погоджувалися. Припускаючи, що весь товар обсягом q_0 буде реалізовано на ринку за ціною p_0, обчислимо доход споживачів: $R = p_0q_0$.

Нехай водночас обсяг товару, менший за q_0, виробники реалізують за ціною, нижчою, ніж p_0. Тоді додаткова вартість виробника обчислюється за формулою

$$S_{\text{дод. вар}} = p_0q_0 - \int_0^{q_0} f(q)dq. \qquad (11.24)$$

■ **Приклад 11.21.** *Знайдемо додаткову вартість виробників, якщо крива пропозиції визначається функцією $p = f(q) = 7 + 4q^3$, а рівноважний обсяг товару $q_0 = 3$.*

Підставивши значення $q_0 = 3$ у функцію пропозиції, дістанемо рівноважну ціну:

$$p_0 = f(q_0) = 7 + 4 \cdot 3^3 = 115.$$

Використовуючи формулу (11.24), матимемо

$$S_{\text{дод. вар}} = p_0q_0 - \int_0^{q_0} f(q)dq = 115 \cdot 3 - \int_0^3 (7 + 4q^3)dq =$$

$$= 345 - (7q + q^4)\Big|_0^3 = 243.$$

?

Контрольні запитання

1. Що таке криволінійна трапеція?
2. Як знайти площі плоских фігур, використовуючи визначений інтеграл?
3. Що таке довжина дуги кривої?
4. Як обчислити довжину ліній, використовуючи визначений інтеграл?
5. Як визначають об'єм тіла обертання навколо осі Ox (Oy)?

6. Що називають поверхнею площі обертання? Як її обчислюють?
7. Як визначається робота змінної сили?
8. За якою формулою обчислюється шлях, пройдений точкою вздовж прямої?
9. У чому полягає економічний зміст визначеного інтеграла?
10. За якою формулою обчислюється обсяг виробленої продукції?
11. Як обчислити середні значення економічних функцій?
12. За якою формулою визначається приріст капіталу за відомими інвестиціями?
13. Що характеризує коефіцієнт Джині?
14. За якою формулою визначається дисконтна сума?
15. Що таке надлишок споживача? За якою формулою його обчислюють?
16. Що таке додаткова вартість? За якою формулою її обчислюють?

Приклади розв'язування задач

1 *Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції* $y = \sin^2 x$ *на відрізку* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Шукану площу визначимо за формулою $S = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$.

Щоб обчислити цей інтеграл, скористаємося тригонометричною формулою зниження степеня $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. Тоді дістанемо

$$S = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2} dx - \int_0^{\pi/2} \cos 2x\, dx\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, шукана площа $S = \pi/4$.

2 *Обчислити площу фігури, обмеженої параболою* $y = 4 - x^2$ *і прямою* $y = x - 2$ *(рис. 11.15).*

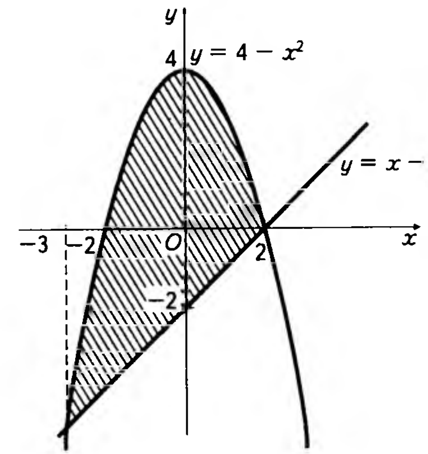


Рис. 11.15

Побудуємо фігуру, площу якої шукаємо.

Знаходимо точки перетину даних ліній. Маємо $4 - x^2 = x - 2$, звідки $x^2 + x - 6 = 0$, так що $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. Тому межі інтегрування $a = -3$, $b = 2$. Отже,

$$S = \int_{-3}^{2} (4 - x^2 - (x - 2))dx = \int_{-3}^{2} (6 - x - x^2)dx = \left(6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{2} = \frac{125}{6}.$$

3 *Обчислити площу фігури, обмеженої кривими* $y = \frac{8}{4 + x^2}$ *і* $y = \frac{x^2}{4}$ *(рис. 11.16).*

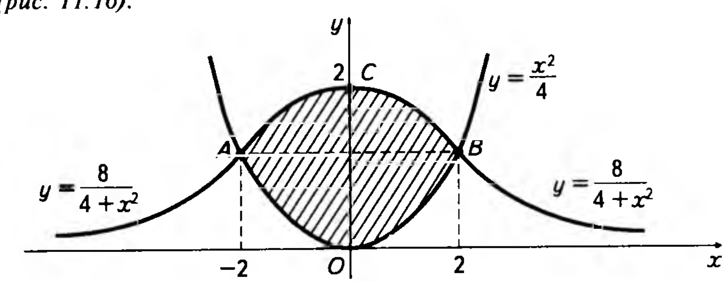


Рис. 11.16

Площу фігури $ACBO$ визначатимемо за формулою (11.2). Для цього спочатку знайдемо абсциси точок A і B перетину кривих. Із рівностей $y = \frac{8}{4+x^2}$ і $y = \frac{x^2}{4}$ дістанемо $\frac{8}{4+x^2} = \frac{x^2}{4}$, звідки $x^4 + 4x^2 - 32 = 0$. Розв'язки цього біквадратного рівняння $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Тому межі інтегрування $a = -2$, $b = 2$. Отже,

$$S = \int_{-2}^{2}\left(\frac{8}{4+x^2} - \frac{x^2}{4}\right)dx = \left(4\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = 2\pi - \frac{4}{3}.$$

4 *Обчислити площу фігури, обмеженої лініями* $y = \sqrt{x}$ *і* $y = 1/x^2$.

Зобразимо фігуру, яка обмежена заданими лініями (рис. 11.17). Площу заштрихованої фігури будемо обчислювати за формулою $S = S_1 + S_2$.

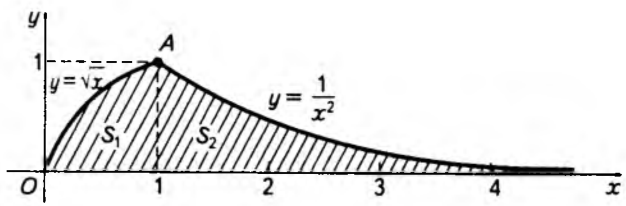


Рис. 11.17

Оскільки лінії перетинаються в точці $A(1;\ 1)$, то

$$S_1 = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3},$$

$$S_2 = \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$$

Отже, $S = 5/3$.

5 *Обчислити довжину дуги кривої* $y = 2\left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right)$ *від точки* $x = 0$ *до точки* $x = 4$.

Функція $y = 2\left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right)$ неперервна й диференційовна на відрізку

$[0;\ 4]$. Знайдемо похідну функції $y'(x) = 2\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{4}} - e^{-\frac{x}{4}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{4}} - e^{-\frac{x}{4}}\right)$. Тоді

$$1 + (y'(x))^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{4}} - e^{-\frac{x}{4}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} - 2 + e^{-\frac{x}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} + 2 + e^{-\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right).$$

Підставивши у формулу (11.3), дістанемо

$$l = \int_0^4 \sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4\left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right)dx = 2\left(e^{\frac{x}{4}} - e^{-\frac{x}{4}}\right)\Bigg|_0^4 = 2(e - e^{-1}).$$

6 *Обчислити довжину дуги кривої* $y = \ln(x+1)$ *від точки* $x = 0$ *до точки* $x = 1$.

Функція $y = \ln(x+1)$ неперервна й диференційовна на відрізку $[0;\ 1]$. Знайдемо похідну функції: $y'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$. Підставивши у формулу (11.3), дістанемо

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{(x+1)^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}dx.$$

Зробимо заміну: $t^2 = x^2 + 2x + 2$. Тоді $(x+1)dx = t\,dt$. Змінимо межі інтегрування: $t_в = \sqrt{5}$, $t_н = \sqrt{2}$. Остаточно маємо

$$l = \int_0^1 \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{t^2\,dt}{t^2-1} = \left(t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} =$$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{2}-1)}.$$

7 *Обчислити довжину дуги кривої* $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ *на відрізку* $[0;\ R]$.

Функція $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ неперервна й диференційовна на відрізку $[0;\ R]$.

Знайдемо похідну функції: $y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$. Підставивши у формулу (11.3), дістанемо

$$I = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\,dx = \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx = R\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\Bigg|_0^R = \frac{\pi R}{2}.$$

Оскільки лінія є четвертиною кола радіусом R, то довжина кола дорівнює $2\pi R$. Отже, добуто формулу, добре відому з елементарної математики.

8 *Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої лініями* $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ *і* $y = 0$.

Шукане тіло є кулею з центром у точці $O(0;\ 0)$ радіусом R.
За формулою (11.5) дістанемо

$$V = \pi\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi\int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Добуто формулу, добре відому з елементарної математики.

9 *Коло одиничного радіуса з центром у точці* $O(0;\ 2)$ *обертається навколо осі Ох. Знайти об'єм тіла обертання. (Це тіло називають тором.)*

Рівняння кола має вигляд $x^2 + (y-2)^2 = 1$. Виражаючи y через x, дістанемо рівняння ABC: $y = f_1(x) = 2 + \sqrt{1 - x^2}$ і рівняння ADC: $y = f_2(x) = 2 - \sqrt{1 - x^2}$.

Об'єм тора подамо у вигляді різниці об'ємів тіл, утворених від обертання криволінійних трапецій $EABCF$ і $EADCF$. За формулою (11.5) дістанемо

$$V_x = \pi\int_{-1}^{1} f_1^2(x)dx - \pi\int_{-1}^{1} f_2^2(x)dx = \pi\int_{-1}^{1}(f_1^2(x) - f_2^2(x))dx =$$

$$= \pi\int_{-1}^{1} 4\cdot 2\sqrt{1 - x^2}\,dx = 8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1 - x^2}\,dx = 4\pi^2.$$

10 *Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої лініями* $y = 1/x$ *і* $y = x^2$.

Фігура, яка обмежена заданими лініями, необмежена. Тіло, що утворюється при її обертанні навколо осі Ox (рис. 11.18), має скінченний об'єм, який обчислимо за формулою $V = V_1 + V_2$. Тут V_1, V_2 — об'єми тіл, які

утворюються при обертанні навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$ і $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 1$.

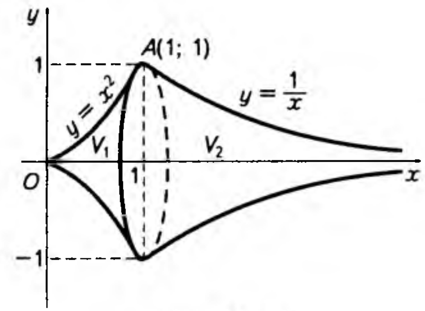


Рис. 11.18

Оскільки лінії перетинаються в точці $A(1;\ 1)$, то

$$V_1 = \pi\int_0^1 x^4\,dx = \pi\left(\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{5},$$

$$V_2 = \pi\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \pi\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}dx = \pi\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b = \pi\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b} + 1\right) = \pi.$$

Отже, $V = \frac{\pi}{5} + \pi = \frac{6\pi}{5}$.

11 *Обчислити площу поверхні тіла, утвореного обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої лініями* $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$.

Фігуру, яка обмежена заданими лініями, зображено на рис. 11.19. Це

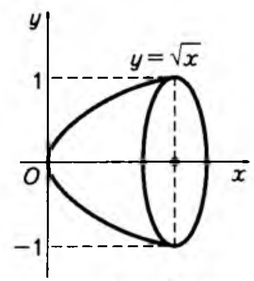


Рис. 11.19

частина еліптичного параболоїда. При $x \in [0;\ 1]$ функція $y = \sqrt{x}$ має неперервну похідну $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Використовуючи формулу (11.7), дістанемо

$$S = 2\pi\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{4x+1}\,dx = \left|\begin{matrix} 4x+1=t \\ t_в = 5 \\ t_н = 1\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_1^5 \sqrt{t}\,dt - \frac{\pi}{4}\frac{2}{3}(t\sqrt{t})\Big|_1^5 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

12 *Обчислити площу поверхні тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями* $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $y = 0$.

Шукане тіло є сферою з центром у точці $O(0;\ 0)$ радіусом R. Тоді $y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$. Якщо $x \in [-R,\ R]$, то похідна заданої функції неперервна. Використовуючи формулу (11.7), дістанемо

$$S = 2\pi\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)}dx =$$

$$= 2\pi\int_{-R}^{R} \sqrt{(R^2-x^2)}\sqrt{\frac{R^2-x^2+x^2}{R^2-x^2}}\,dx = 2\pi R\int_{-R}^{R} dx = 2\pi Rx\Big|_{-R}^{R} = 4\pi R^2.$$

Добуто формулу, добре відому з елементарної математики.

13 *Обчислити площу поверхні тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями* $y = \sin 2x$, $x = 0$, $x = \pi/2$.

Знаходимо $y'(x) = 2\cos 2x$. Якщо $x \in [0;\ \pi/2]$, то похідна заданої функції неперервна. Використовуючи формулу (11.7), дістанемо

$$S = 2\pi\int_0^{\pi/2} \sin 2x\sqrt{1+4\cos^2 2x}\,dx.$$

Зробимо заміну: $t = 2\cos 2x$, $-4\sin 2x\,dx = dt$, $\sin 2x\,dx = -\frac{1}{4}dt$. Знайдемо нові межі інтегрування: якщо $x = 0$, то $t = 2$; якщо $x = \pi/2$, то $t = -2$. Дістанемо

$$S = 2\pi\int_{-2}^{-2}\left(-\frac{1}{4}\right)\sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right).$$

14 *Продуктивність праці (в умовних одиницях) протягом робочого дня описується функцією* $f(t) = -t^2 + 8t + 3$. *Обчислити обсяг продукції, випущеної протягом робочого дня* ($0 \le t \le 8$).

Використовуючи формулу (11.9), дістанемо

$$q = \int_0^8 f(t)dt = \int_0^8 (-t^2+8t+3)dt = \left(-\frac{t^3}{3}+4t^2+3t\right)\Big|_0^8 = 109\frac{1}{3}.$$

15 *Продуктивність праці протягом робочого дня описується функцією*

$$f(t) = \begin{cases} -t^2+6t, & 0 < t \le 4, \\ 0, & 4 < t < 5, \\ -t^2+13t-40, & 5 \le t \le 8, \end{cases}$$

де t — час, що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, виробленої за весь робочий день.

Обсяг продукції, виробленої за весь робочий день, можна розглядати як суму обсягів продукції, що виробляється протягом 4 год роботи до обідньої перерви й протягом 3 год роботи після перерви.

Обсяг виробленої продукції можна розглядати також як суму обсягів продукції, виробленої за нескінченно малі інтервали часу, на які поділено відрізок $[0;\ 8]$: $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 8$. Можна вважати, що на кожному з таких нескінченно малих проміжків завдовжки $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ функція $y = f(t)$ не зміниться, а отже, обсяг виробленої продукції — це добуток продуктивності праці $f(t_k)$ і часу Δt_k. Тоді обсяг продукції, виробленої за весь робочий день, визначається так:

$$\lim_{\max \Delta t_k \to 0}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t_k = \int_0^4(-t^2+6t)dt + \int_5^8(-t^2+13t-40)dt =$$

$$= \left(-\frac{t^3}{3}+3x^2\right)\Big|_0^4 + \left(-\frac{t^3}{3}-13\frac{t^2}{2}-40t\right)\Big|_5^8 = 31{,}17 \text{ умов. од.}$$

16 *За функцією граничних витрат* $C'(x) = 3x^2 - 48x + 202$, $1 \le x \le 20$ *знайти функцію витрат* $C = C(x)$ *і обчислити витрати у випадку виробництва*

10 *одиниць продукції, якщо відомо, що витрати на виробництво першої одиниці продукції становлять* 50 *грн.*

Функцію витрат знаходимо інтегруванням: $C = C(x) = \int_1^x C'(t)dt + C_0$, де константа C_0 визначається з умови $C(1) = 50$. Оскільки $\int_1^1 C'(x)dx + C_0 = 50$, то $C_0 = 50$. Інтегруючи, дістанемо

$$C = C(x) = \int_1^x (3t^2 - 48t + 202)dt + 50 = x^3 - 24x^2 + 202x + 50.$$

Підставивши $x = 10$ у добуту формулу, матимемо шукане значення $C(10) = 670$.

17 *За даними чистими інвестиціями $I(t) = 7000\sqrt{t}$ визначити приріст капіталу за три роки й через скільки років він становитиме* 50 000, *якщо функція інвестицій залишиться незмінною.*

Приріст капіталу знаходимо за інтервал часу від $t_1 = 0$ до $t_2 = 3$. Для цього скористаємося формулою (11.18):

$$\Delta K = K(3) - K(0) = \int_0^3 7000\sqrt{t}\, dt = 7000\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^3 = 24\ 248{,}71.$$

Якщо функція інвестицій залишиться незмінною, то приріс капіталу за умовою задачі становить $\Delta K = 50\ 000$. Позначивши інтервал часу через T, формулу (11.18) можна записати у вигляді $\Delta K = \int_0^T I(t)dt$ або, підставивши числові значення:

$$50\ 000 = \int_0^T 7000\sqrt{t}\, dt.$$

Дістали рівняння, яке цікаве тим, що невідома величина T — це верхня межа інтегрування. Для розв'язання обчислимо визначений інтеграл:

$$\int_0^T 7000\sqrt{t}\, dt = 7000\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^T = 4666{,}67T^{\frac{3}{2}}.$$

Тоді рівняння можна записати у вигляді $4666{,}67T^{\frac{3}{2}} = 50\ 000$. Розв'язавши його, дістанемо $T = 4{,}86$. Саме стільки років потрібно, щоб приріст капіталу становив 50 000.

18 *Знайти обсяг виробленої продукції за п'ять років, якщо виробнича функція Кобба—Дугласа має вигляд $f(t) = AK^{\alpha}(t)L^{\beta}(t)e^{\lambda t}$, де t — час (років), $K(t) = (100 - 3t)^2$, $L(t) = (t+1)^2$, $A = \lambda = 1$, $\alpha = \beta = 0{,}5$.*

Підставивши функцію $f(t) = (t+1)(100 - 3t)e^t$ у формулу (11.9), дістанемо

$$q = \int_0^5 f(t)dt = \int_0^5 (t+1)(100 - 3t)e^t\, dt = \int_0^5 e^t(-3t^2 + 97t + 100)dt.$$

Застосувавши двічі формулу інтегрування частинами, матимемо

$$q = (-3t^2 + 97t + 100)e^t\Big|_0^5 - (97 - 6t)e^t\Big|_0^5 - 6e^t\Big|_0^5 = 64\ 825.$$

19 *За даними досліджень розподілу доходів населення деякої країни крива Лоренца (див. рис. 11.10) описується функцією $y = \frac{x}{3 - 2x}$, де y — частка сукупного доходу, яку одержує частина населення x. Обчислити коефіцієнт Джині.*

Використовуючи формулу для обчислення коефіцієнта Джині $k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}}$, дістанемо $S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2} = 0{,}5$, а

$$S_{OBAC} = \int_0^1\left(x - \frac{x}{3 - 2x}\right)dx = \int_0^1\left(x + \frac{x - 1{,}5 + 1{,}5}{2x - 3}\right)dx = \int_0^1\left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{2x - 3}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 + \frac{1}{2}x\Bigg|_0^1 + \frac{3}{4}\ln|2x - 3|\Bigg|_0^1 = 1 - 0{,}75\ln 3 \approx 0{,}176.$$

Тоді $k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = \frac{0{,}176}{0{,}5} = 0{,}352$.

20 *Знайти середнє значення витрат виробництва, якщо вони визначаються формулою $C(x) = 3x^2 + 4x + 1$, де x — обсяг виробленої продукції, $0 \le x \le 3$, і обчислити обсяг виробництва, за якого витрати набувають середнього значення.*

Використовуючи формулу (11.10), знайдемо середнє значення витрат виробництва

$$C_{сер} = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} C(t)dt = \frac{1}{3 - 0}\int_0^3 (3x^2 + 4x + 1)dx = \frac{1}{3}(x^3 + 2x^2 + x)\Big|_0^3 = 16.$$

Оскільки функція витрат $C(x) = 3x^2 + 4x + 1$ неперервна при $0 \le x \le 3$, то в деякій точці x_0 вона досягає свого середнього значення, тобто $C(x_0) = C_{\text{сер}}$ або $3x_0^2 + 4x_0 + 1 = 16$. Це рівняння має корені $x_0^1 = -3$ і $x_0^2 = 5/3$. Отже, обсяг виробництва, за якого витрати набувають середнього значення, дорівнює 5/3.

21 *Під будівництво задано неперервний грошовий потік зі швидкістю $I(t) = -t^2 + 20t + 5$ (млрд грн./рік) протягом 20 років із річною процентною ставкою $p = 5$ %. Знайти дисконтну вартість цього потоку.*

Якщо $I = I(t)$ — швидкість грошового потоку (тобто за інтервал часу від t до $t + dt$ він наближено дорівнює $I(t)dt$), $0 \le t \le T$, то для визначення грошового потоку $\Pi = \Pi(t)$ використаємо формулу $\Pi = \int\limits_0^T I(t)e^{-pt}dt$. Дістанемо

$$\Pi = \int\limits_0^{20} (-t^2 + 20t + 5)e^{-0{,}05t}dt.$$

Для обчислення цього інтеграла спочатку зробимо заміну: $s = -0{,}05t$, $t = -20s$, $dt = -20ds$. При цьому нові межі інтегрування $s_н = 0$, $s_в = -1$. Потім застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\Pi = \int\limits_0^{20} (-t^2 + 20t + 5)e^{-0{,}05t}dt = -20\int\limits_0^{-1} (-400s^2 - 400s + 5)ds =$$

$$= 20\int\limits_{-1}^{0} (-400s^2 - 400s + 5)e^s\,ds =$$

$$= 20\left((-400s^2 - 400s + 5)\,e^s \Big|_{-1}^{0} + \int\limits_{-1}^{0} (800s + 400)e^s\,ds \right) =$$

$$= 20\left(5 - 5e^{-1} + (800s + 400)\Big|_{-1}^{0} + 800\int\limits_{-1}^{0} e^s\,ds \right) =$$

$$= 20(5 - 5e^{-1} + 400 + (800 - 400)e^{-1} - 800) =$$

$$= 20(1195e^{-1} - 395) \approx 892.$$

Остаточно маємо $\Pi = 892$ млрд грн.

22 *Знайти надлишок споживачів і виробників у пропозиції встановлення ринкової рівноваги, якщо функції попиту й пропозиції мають вигляд $p = 186 - q^2$, $p = 20 + \frac{11}{2}q$ відповідно.*

Розв'язавши систему $\begin{cases} p = 186 - q^2, \\ p = 20 + \frac{11}{2}q, \end{cases}$ знайдемо точку рівноваги: $p_0 = 12$, $q_0 = 42$. Тоді, використовуючи формули (11.23) і (11.24), дістанемо

$$S_н = \int\limits_0^{q} f(q)dq - p_0q_0 = \int\limits_0^{12} (186 - q^2)dq - 12 \cdot 42 = 1152,$$

$$S_{\text{под. вар}} = p_0q_0 - \int\limits_0^{q_0} f(q)dq = 12 \cdot 42 - \int\limits_0^{12}\left(20 + \frac{11}{6}q \right)dq =$$

$$= 504 - \left(20q + \frac{11}{6}\frac{q^2}{2} \right)\Bigg|_0^{12} = 132.$$

Розділ 12

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

12.1 Основні поняття теорії звичайних диференціальних рівнянь

Математичне моделювання економічних і природничих процесів приводить до необхідності розв'язування рівнянь, які, крім незалежних змінних і залежних від них шуканих функцій, містять також похідні або диференціали від невідомих функцій. Такі рівняння називають *диференціальними*.

У цьому розділі викладаються елементи звичайних диференціальних рівнянь, коли невідомі функції залежать від однієї змінної. Теорія диференціальних рівнянь, коли невідомі функції залежать від багатьох змінних (рівняння з частинними похідними), складніша й тут не розглядатиметься.

➡ **Означення 12.1.** *Рівняння, які пов'язують незалежну змінну x, шукану функцію $y(x)$ та її похідні або диференціали до деякого порядку n, називають* ***диференціальними рівняннями n-го порядку***.

➡ **Означення 12.2.** ***Порядком диференціального рівняння*** *називають найвищий порядок похідної або диференціала від шуканої функції, яка входить у це рівняння.*

Загальний вигляд звичайного диференціального рівняння n-го порядку

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \qquad (12.1)$$

де F — деяка відома функція; x — незалежна змінна; $y(x)$ — шукана функція; $y'(x)$, $y''(x)$, ..., $y^{(n)}(x)$ — її похідні.

➡ **Означення 12.3.** *Функцію $y = \varphi(x)$ називають* ***розв'язком (або інтегралом) диференціального рівняння*** *(12.1), якщо вона n разів неперервно диференційовна на деякому проміжку X і підставлення якої в рівняння (12.1) перетворює його на тотожність.*

■ **Приклад 12.1.** Нехай $y = f(x)$ — неперервна на проміжку X функція, $y = F(x)$ — її первісна. Тоді

$$F'(x) = f(x), \qquad (12.2)$$

і для знаходження первісної ми дістали звичайне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язки відомі: $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + C$, $x_0 \in X$, C — довільна стала.

Диференціальне рівняння (12.2) має нескінченну множину розв'язків. Це справджується для всіх звичайних диференціальних рівнянь.

Щоб виділити єдиний розв'язок рівняння (12.2), достатньо задати значення первісної $y = F(x)$ у довільній точці: $F(x_0) = F_0$. Тоді розв'язок єдиний:

$$F(x) = F_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

Якщо задачу про знаходження всіх розв'язків диференціального рівняння вдається звести до обчислення скінченного числа інтегралів і похідних від відомих функцій і до алгебричних операцій, то кажуть, що *рівняння інтегрується в квадратурах*. Але клас таких рівнянь досить вузький. Тому для дослідження диференціальних рівнянь застосовують наближені й чисельні методи їх розв'язання.

➡ **Означення 12.4.** ***Загальним розв'язком рівняння*** *(12.1) називатимемо n-параметричну сім'ю функцій $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$, з якої за відповідного вибору значень параметрів можна дістати розв'язок рівняння (12.1), що задовольняє початкові умови:*

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Сукупність функцій, яка містить усі розв'язки даного рівняння, не завжди вдається виразити у вигляді явної функції незалежної змінної. *Цю сім'ю можна записати у вигляді неявної функції $\Phi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$, і тоді її називають* ***загальним інтегралом рівняння*** *(12.1).*

➡ **Означення 12.5.** ***Частинним розв'язком рівняння** (12.1) називають розв'язок, який можна дістати із загального розв'язку при деяких конкретних значеннях параметрів* $c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0$.

✓ *Зауваження 12.1.* Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називають ***інтегруванням*** цього рівняння, а графік розв'язку — ***інтегральною кривою*** даного рівняння.

У теорії диференціальних рівнянь потрібно дати відповіді на такі запитання:

1. Чи існує розв'язок диференціального рівняння?
2. Яка множина розв'язків диференціального рівняння?
3. Як знайти розв'язок диференціального рівняння?
4. Якщо розв'язків диференціального рівняння багато, то як відрізнити один розв'язок від іншого й як виділити конкретний розв'язок?
5. Якщо не вдається знайти розв'язок у явному вигляді, то як визначити властивості розв'язків?
6. Якщо не вдається знайти точний розв'язок, то як знайти наближений розв'язок?

Відповіді на ці запитання ми шукатимемо в процесі вивчення даного розділу.

12.2 Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь

12.2.1. Задача про вільне падіння матеріальної точки

Рух матеріальної точки масою m під дією зовнішніх сил описується другим законом Ньютона: $ma = F$. Нехай точка рухається вздовж осі Ox і $x(t)$ — її абсциса в момент часу t. Тоді її швидкість становитиме $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$, а прискорення — $a(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2}$. Отже, функція $x(t)$ задовольняє диференціальне рівняння другого порядку

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x(t), \frac{dx}{dt}\right). \tag{12.3}$$

Якщо точка рухається в тривимірному просторі й її радіус-вектор — $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то рівняння руху матиме вигляд

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\left(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right). \tag{12.4}$$

Рівняння (12.4) — це система трьох звичайних диференціальних рівнянь із трьома невідомими.

Щоб визначити положення точки в момент часу t, необхідно знати її положення й швидкість у початковий момент часу t_0:

$$x(t_0) = x_0, \quad \frac{dx(t_0)}{dt} = v_0. \tag{12.5}$$

12.2.2. Задача про нагромадження капіталу

Нехай підприємство (фірма) з початковим капіталом K_0 розпочало діяльність, мета якої — нагромадження капіталу. Функція капіталу $K = K(t)$ із часом змінюється. Опишемо динаміку цього процесу.

Позначимо через $K(t)$ капітал підприємства (фірми) в момент часу t, а через $K(t+\Delta t)$ — у момент часу $t+\Delta t$. Тоді різниця $\Delta K = K(t+\Delta t) - K(t)$ дає приріст капіталу за інтервал часу Δt. Цей приріст складається з доходу за інтервал часу Δt і повних витрат виробництва. В загальному випадкові цей приріст визначається формулою

$$\Delta K = \Delta R - \Delta C, \tag{12.6}$$

де $\Delta R = R(t+\Delta t) - R(t)$ — приріст функції доходу; $\Delta C = C(t+\Delta t) - C(t)$ — приріст функції повних витрат підприємства (фірми).

Співвідношення (12.6) і є, взагалі кажучи, рівнянням нагромадження капіталу. Для його розв'язання потрібно знати функції доходу $R = R(t)$ і повних витрат $C = C(t)$ підприємства (фірми). Ця проблема — одна з важливих у теорії моделювання економічних процесів.

Розглянемо, наприклад, випадок, коли прирости функцій ΔR і ΔC мають вигляд $\Delta R = \alpha K(t)\Delta t$ і $\Delta C = \beta K(t)\Delta t$. Додатні коефіцієнти α і β характеризують інтенсивність зміни доходу й повних витрат підприємства (фірми) відповідно. Тоді співвідношення (12.6) запишемо у вигляді

$$\Delta K = \lambda K(t)\Delta t, \qquad (12.7)$$

де $\lambda = \alpha - \beta$.

Поділимо співвідношення (12.7) на $\Delta t \neq 0$. Перейшовши до границі при $\Delta t \to 0$, дістанемо диференціальне рівняння

$$\frac{dK}{dy} = \lambda K(t). \qquad (12.8)$$

12.2.3. Задача про рух фондів

Позначимо через $K = K(t)$ обсяг фондів (у натуральній або вартісній формі) у момент часу t. Під фондами розуміють обладнання, прилади, приміщення тощо. Все це може ламатися, спрацьовуватися, старіти й т. д. Про цей процес кажуть, що фонди вибувають. Швидкість вибуття фондів виражається через коефіцієнт вибуття. Так, якщо за 10 років фонди повністю оновлюються, то коефіцієнт вибуття дорівнює 0,1.

Позначимо коефіцієнт вибуття через μ. Отже, вибуття веде до зменшення фондів за рік на величину $\mu K(t)$, а за інтервал часу Δt — на величину $\mu K(t)\Delta t$ (вважається, що вибуття фондів відбувається рівномірно).

Натомість інвестиції — вкладання грошей — ведуть до збільшення фондів. Припустимо, що інвестиції в розмірі I (де I — константа) за рік дадуть збільшення фондів на величину ρI (можна було б вважати, що $\rho = 1$, але частина інвестицій іде на заробітну плату проектувальникам, будівельникам, тобто не на пряме збільшення фондів). Тоді за час Δt інвестиції в разі рівномірного вкладання їх дадуть збільшення фондів на величину $\rho I\Delta t$.

Розглянемо довільний момент часу t та його приріст Δt. Тоді зміна фондів за час Δt становитиме

$$K(t + \Delta t) = K(t) - \mu K(t)\Delta t + \rho I\Delta t, \qquad (12.9)$$

і при $\Delta t \to 0$ дістанемо диференціальне рівняння

$$K'(t) = \mu K(t) + \rho I. \qquad (12.10)$$

12.2.4. Демографічна задача

Нехай чисельність населення країни в момент часу t визначається функцією $L = L(t)$. Природно припустити, що зростання населення за інтервал часу Δt пропорційне чисельності населення $L(t)$ і Δt. Тоді

$$L(t + \Delta t) = L(t) - \alpha L(t)\Delta t. \qquad (12.11)$$

При $\Delta t \to 0$ дістанемо диференціальне рівняння

$$L'(t) = \alpha L(t)\Delta t, \qquad (12.12)$$

загальним розв'язком якого, як буде показано далі, є функція $L(t) = L_0 e^{-\alpha t}$, де L_0 — чисельність населення в початковий момент спостереження.

Такий закон росту називається *експоненціальним*. Але ясно, що цей процес не може бути довготривалим, бо включаться протидійні механізми: зниження життєвого рівня, заходи щодо обмеження народжуваності тощо, й зростання чисельності населення загальмується.

12.2.5. Задача про рекламу

Нехай торговельними фірмами реалізується продукція, про яку в момент часу t знають лише x покупців із числа потенційних n. Після оголошення реклами швидкість зміни кількості покупців, яким відомо про продукцію, пропорційна як кількості покупців, що знають про товар, так і кількості покупців, котрим про нього нічого не відомо.

Визначимо закон зміни в часі кількості покупців x, які знають про продукцію, якщо в початковий момент часу ($t = 0$) про неї дізналися n/γ чоловік (час відлічується від моменту оголошення реклами), γ — задане число.

Оскільки швидкість зміни кількості покупців, які знають про продукцію, виражається похідною $x'(t)$, то дістанемо диференціальне рівняння

$$x'(t) = kx(n - x), \qquad (12.13)$$

де x — кількість покупців, які знають про продукцію; $n - x$ — кількість тих, що не знають про неї в момент часу t; k — коефіцієнт пропорційності.

12.3 Диференціальні рівняння першого порядку

12.3.1. Основні поняття

➡ **Означення 12.6.** *Диференціальне рівняння вигляду* $F(x, y, y') = 0$, *де* x *— невідома змінна,* y *і* y' *— відповідно шукана функція та її похідна, називають **диференціальним рівнянням першого порядку**.*

➡ **Означення 12.7.** ***Розв'язком диференціального рівняння першого порядку** називають функцію* $y = \varphi(x)$, *підставлення якої в дане рівняння перетворює його на тотожність.*

Наприклад, функція $y = x^2$ тотожно перетворює в нуль ліву частину рівняння $xy' - 2x^2 = 0$, тому вона є розв'язком цього рівняння.

У теорії диференціальних рівнянь основною задачею є пошук відповіді на питання про існування та єдиність розв'язку рівняння. Цю відповідь дає теорема Коші, яку сформулюємо без доведення.

ТЕОРЕМА 12.1
(Коші)

Нехай задано диференціальне рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$. Якщо функція $f(x, y)$ та її похідна $f'_y(x, y)$ неперервні в деякій області D площини xOy, то в деякому околі довільної внутрішньої точки $(x_0; y_0)$ цієї області існує єдиний розв'язок заданого рівняння, який задовольняє умову $y = y_0$ при $x = x_0$.

➡ **Означення 12.8.** *Графік розв'язку диференціального рівняння називають **інтегральною кривою**.*

В області D міститься багато інтегральних кривих. Теорема Коші гарантує, що в разі виконання певних умов через кожну внутрішню точку області D проходить тільки одна інтегральна крива.

Умови, які задають значення функції y_0 у фіксованій точці x_0, називають ***початковими умовами*** й записують у такій формі: $y(x_0) = y_0$.

Задача знаходження розв'язку рівняння, який задовольняє початкові умови, називають ***задачею Коші***, тобто з множини інтегральних кривих виокремлюють ту, яка проходить через задану точку $(x_0; y_0)$ в області D.

Якщо умови теореми Коші не виконуються, то через деякі точки площини xOy або не проходить жодна інтегральна крива, або проходить більше ніж одна. Ці точки називають ***особливими точками*** даного диференціального рівняння.

➡ **Означення 12.9.** ***Загальним розв'язком диференціального рівняння** називають функцію* $y = \varphi(x, C)$, *підставлення якої в рівняння перетворює його на тотожність.* Загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку залежить від однієї довільної сталої C.

*Задачу про знаходження розв'язку диференціального рівняння називають **задачею інтегрування диференціального рівняння**.*

➡ **Означення 12.10.** ***Частинним розв'язком диференціального рівняння** називають функцію* $y = \varphi(x, C_0)$, *яку дістають при певному значенні сталої* $C = C_0$.

Загальний розв'язок $y = \varphi(x, C)$ описує сукупність інтегральних кривих на площині xOy.

Початкові умови фіксують довільну сталу й дають змогу вибрати із сукупності інтегральних кривих рівняння криву $y = \varphi(x, C)$, що проходить через дану точку $(x_0; y_0)$.

■ **Приклад 12.2.** *Розв'яжемо рівняння* $y' = 2x$.

Права частина рівняння задовольняє умови теореми Коші в усіх точках площини xOy, оскільки функції $f(x, y) = 2x$ і $f'_y(x, y) = 0$ визначені й неперервні на площині xOy. Загальним розв'язком цього рівняння є функція $y = x^2 + C$, де C — довільна стала, яка описується сукупністю парабол (рис. 12.1).

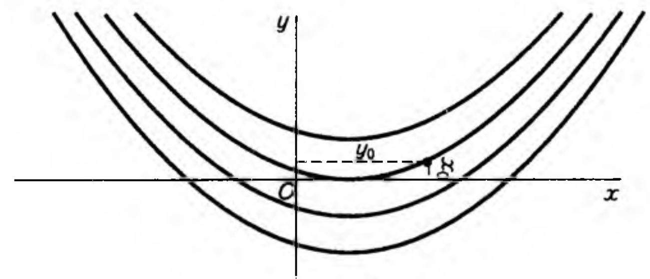


Рис. 12.1

Для знаходження частинного розв'язку задамо довільні початкові умови вигляду $y(x_0) = y_0$ і підставимо їх у формулу загального розв'язку.

Дістанемо $C = y_0 + x_0^2$. Тому частинний розв'язок виділяє із сукупності парабол одну, що проходить через точку $(x_0; y_0)$.

12.3.2. Рівняння з відокремлюваними змінними

Означення 12.11. *Диференціальне рівняння вигляду*

$$y' = f_1(x)f_2(y), \tag{12.14}$$

*де $f_1(x)$ і $f_2(y)$ — неперервні функції, називають **рівнянням із відокремлюваними змінними.***

Зазначимо, що права частина рівняння (12.14) є добутком двох функцій співмножників, одна з яких залежить тільки від x, а інша — тільки від y.

Це рівняння розв'язується ***методом відокремлення змінних***.

Запишемо похідну $y' = \frac{dy}{dx}$ та помножимо на dx і поділимо на $f_2(y)$ обидві частини рівняння (12.14) за умови, що $f_2(y) \neq 0$. Тоді дістанемо

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \tag{12.15}$$

У цьому рівнянні змінна y входить тільки в ліву частину, а змінна x — тільки в праву, тобто *змінні відокремлені.*

Оскільки в рівнянні (12.15) диференціали рівні, то їхні невизначені інтеграли відрізняються лише на сталу, тобто, інтегруючи обидві частини рівняння, дістанемо

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C, \tag{12.16}$$

де C — довільна стала.

Диференціальне рівняння вигляду

$$f_1(x)f_2(y)dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0 \tag{12.17}$$

при $f_2(y) \neq 0$, $\varphi_1(x) \neq 0$ зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними вигляду (12.14). Поділивши рівняння на $\varphi_1(x)f_2(y)$, матимемо

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0.$$

Тоді

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = C$$

є загальним інтегралом рівняння (12.17).

Приклад 12.3. *Розв'яжемо задачу Коші для диференціального рівняння $2y'\sqrt{x} = y$, $y(4) = 1$.*

Перепишемо рівняння у вигляді

$$y' = \frac{y}{2\sqrt{x}}.$$

Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Підставивши замість y' вираз $\frac{dy}{dx}$, дістанемо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2\sqrt{x}}.$$

Відокремивши змінні: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ і зінтегрувавши рівняння: $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, матимемо

$$\ln|y| = \sqrt{x} + \ln C.$$

Дістали загальний розв'язок рівняння $y = Ce^{\sqrt{x}}$.

Щоб визначити значення сталої C, підставимо в загальний розв'язок початкову умову: $y(4) = Ce^{\sqrt{4}} = 1$, звідки $C = e^{-2}$.

Отже, розв'язок задачі Коші матиме вигляд

$$y = e^{\sqrt{x}-2}.$$

Це й є частинний розв'язок даного рівняння.

Приклад 12.4. *Розв'яжемо рівняння $xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2$.*

Запишемо $y' = \frac{dy}{dx}$ і підставимо в задане рівняння, помноживши яке на dx, дістанемо

$$x(1 + x^2)y\,dy - (1 + y^2)dx = 0.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними вигляду (12.17). Відокремивши змінні, тобто, поділивши рівняння на $x(1 + x^2)(1 + y^2)$, матимемо

$$\frac{y\,dy}{1 + y^2} - \frac{dx}{x(1 + x^2)} = 0.$$

Зінтегрувавши обидві частини рівняння, дістанемо

$$\int \frac{y\,dy}{1+y^2} - \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = C_1, \quad \frac{1}{2}\ln(1+y^2) - \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln C,$$

$$\ln(1+y^2) = \ln\frac{Cx^2}{1+x^2}.$$

Після операції потенціювання матимемо $y^2+1 = \dfrac{Cx^2}{1+x^2}$ або $y^2 = \dfrac{(C-1)x^2-1}{1+x^2}$, звідки

$$y = \pm\frac{(C-1)x^2-1}{1+x^2},$$

де C — довільна стала, $C > 1$.

12.3.3. Однорідні диференціальні рівняння

➡ **Означення 12.12.** *Диференціальне рівняння першого порядку називають* ***однорідним****, якщо воно має вигляд*

$$f(x, y)dx = g(x, y)dy, \tag{12.18}$$

де $f(x, y)$ і $g(x, y)$ — однорідні функції однакового степеня.

Поняття однорідного диференціального рівняння пов'язане з однорідними функціями.

➡ **Означення 12.13.** *Функцію $f(x, y)$ називають* ***однорідною n-го степеня*** *(за змінними x і y), якщо для довільного t виконується рівність $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$.*

■ **Приклад 12.5.** *Визначимо, чи будуть однорідними такі функції:*

① $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 4xy^2 - 5y^3$; ② $f(x, y) = \dfrac{x-y}{x+y}$; ③ $f(x, y) = xy + 1$.

① Підставивши у вираз $f(x, y)$ значення tx, ty замість змінних x та y, матимемо

$$f(tx, ty) = t^3x^3 - 3x^2t^2yt + 4txt^2y^2 - 5t^3y^3 =$$

$$= t^3(x^3 - 3x^2y + 4xy^2 - 5y^3) = t^3 f(x, y).$$

Отже, дана функція однорідна третього степеня.

② Оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{tx - ty}{tx + ty} = \frac{t(x-y)}{t(x+y)} = \frac{x-y}{x+y} = f(x, y),$$

то дана функція однорідна першого степеня.

③ Оскільки

$$f(tx, ty) = tx\,ty + 1 = t^2xy + 1,$$

то дана функція неоднорідна.

Розглянемо ***метод розв'язування однорідного диференціального рівняння*** (12.18). Введемо допоміжну функцію t від змінної x, тобто зробимо заміну $t = y/x$ або $y = tx$ і $dy = t\,dx + x\,dt$, яка дає змогу звести рівняння (12.18) до рівняння з відокремлюваними змінними.

■ **Приклад 12.6.** *Розв'яжемо рівняння* $y' + \dfrac{x^2+y^2}{xy} = 0$.

Спочатку переконаємося, що дане рівняння однорідне. Перепишемо його у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2+y^2}{xy} \quad \text{або} \quad xy\,dy = -(x^2+y^2)dx.$$

Розглянемо функції $f(x, y) = xy$ і $g(x, y) = x^2 + y^2$. Тоді

$$f(tx, ty) = tx\,ty = t^2xy = t^2 f(x, y),$$

$$g(tx, ty) = t^2x^2 + t^2y^2 = t^2(x^2+y^2) = t^2 g(x, y).$$

Отже, функції $f(x, y)$ і $g(x, y)$ однорідні другого степеня, й дане рівняння однорідне за означенням.

Зробимо заміну: $y = tx$ і $dy = t\,dx + x\,dt$. Тоді

$$t^2x(x\,dt + t\,dx) = -(x^2 + t^2x^2)dx,$$

$$t^2x^2\,dt + tx^3\,dx = -x^2\,dx - t^2x^2\,dx.$$

Дістали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$x^2(2t^2+1)dx = -tx^3\,dt.$$

Скорочуємо на x^2, причому $x = 0$ — особливий розв'язок рівняння. Тоді рівняння набирає вигляду

$$\frac{dx}{x} = -\frac{t}{2t^2+1}dt.$$

Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\ln|x| + \ln C = -\frac{1}{4}\ln|2t^2+1| \text{ або } 2t^2+1 = Cx^4.$$

Зробивши зворотну заміну, дістанемо загальний розв'язок рівняння:

$$2\frac{y^2}{x^2} + 1 = Cx^4.$$

■ **Приклад 12.7.** *Знайдемо загальний розв'язок рівняння*

$$x\cos(y/x)(y\,dx + x\,dy) - y(\sin(y/x)(x\,dy - y\,dx)) = 0.$$

Легко переконатися, що дане рівняння однорідне. Зробимо заміну: $y = tx$, $dy = t\,dx + x\,dt$. Підставивши вирази для y і dy у дане рівняння, дістанемо

$$x\cos t(tx\,dx + x(t\,dx + x\,dt)) - tx(\sin t(x(t\,dx + x\,dt) - tx\,dx) = 0.$$

Після спрощень матимемо

$$x\cos t(2\,tx\,dx + x^2dt) - tx\sin t(x^2\,dt) = 0,$$

$$2\,tx^2\cos t\,dx + x^3\cos t\,dt - tx^3\sin t\,dt = 0,$$

$$2\,tx^2\cos t\,dx + x^3(\cos t - t\sin t)dt = 0.$$

Дістали рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремивши змінні та зінтегрувавши рівняння, матимемо

$$\frac{2x^2\,dx}{x^3} + \frac{(\cos t - t\sin t)dt}{t\sin t} = 0,$$

$$2\frac{dx}{x} + \frac{dt}{t} - \operatorname{tg} t\,dt = 0,$$

$$2\int\frac{dx}{x} = \int\operatorname{tg} t\,dt - \int\frac{dt}{t},$$

$$2\ln|x| + \ln C = \ln|\cos t| - \ln|t|.$$

Пропотенціювавши, дістанемо загальний розв'язок рівняння:

$$Cx^2 = \frac{\cos t}{t} \text{ або } Cx^2 = \frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} \text{ або } Cxy = \cos\frac{y}{x}.$$

12.3.4. Лінійні диференціальні рівняння

➡ **Означення 12.14.** *Рівняння вигляду*

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{12.19}$$

*де $p(x)$ і $f(x)$ — неперервні функції, називають **лінійним диференціальним рівнянням першого порядку**.*

Невідома функція та її похідна входять у дане рівняння в першому степені, тобто лінійно, що й пояснює назву рівняння.

Якщо $f(x) = 0$, то (12.19) називають ***лінійним однорідним рівнянням***; якщо функція $f(x) \neq 0$, то (12.19) називають ***лінійним неоднорідним рівнянням***.

Візьмемо лінійне однорідне рівняння

$$y' + p(x)y = 0, \tag{12.20}$$

що відповідає неоднорідному рівнянню (12.19).

Розглянемо метод розв'язування лінійних диференціальних рівнянь — ***метод варіації сталої***. Цей метод, що використовується для розв'язування неоднорідного рівняння (12.19), базується на розв'язанні однорідного рівняння (12.20).

Рівняння (12.20) можна розв'язати методом відокремлення змінних:

$$\frac{dy}{y} = -p(x),$$

звідки

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C_1|.$$

Після операції потенціювання дістанемо загальний розв'язок однорідного рівняння (12.19):

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \tag{12.21}$$

де $C = \pm C_1$.

Загальний розв'язок рівняння (12.19) шукатимемо у вигляді (12.21), вважаючи сталу C новою невідомою функцією від аргументу x:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Щоб знайти функцію $C(x)$, підставимо розв'язок (12.21) у рівняння (12.19):

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x).$$

Після зведення подібних членів матимемо

$$C'(x) = f(x)e^{\int p(x)dx}. \qquad (12.22)$$

Інтегруючи рівняння (12.22), дістанемо вираз для $C(x)$:

$$C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx} + C_1,$$

підставлення якого у формулу загального розв'язку однорідного рівняння (12.21) приводить до остаточного вигляду розв'язку неоднорідного рівняння (12.19):

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[C_1 + \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx\right], \qquad (12.23)$$

де C_1 — довільна стала.

Розглянемо інший метод розв'язування лінійних диференціальних рівнянь — ***метод Бернуллі***. Зробимо заміну: $y(x) = u(x)v(x)$, де $u(x)$ і $v(x)$ — нові невідомі функції. Виразивши із заміни похідну: $y' = u'v + v'u$ і підставивши в рівняння (12.19), дістанемо

$$u'v + v'u + puv = f \quad \text{або} \quad u'v + u(v' + pv) = f.$$

Доберемо функцію v таким чином, щоб вона задовольняла рівняння

$$v' + pv = 0. \qquad (12.24)$$

Тоді друга функція має задовольняти рівняння

$$u'v = f. \qquad (12.25)$$

Рівняння (12.24) є рівнянням із відокремленими змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v,$$

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx,$$

$$\ln v = -\int p(x)dx + C.$$

Покладемо $C = 0$. Тоді

$$v = e^{-\int p(x)dx}. \qquad (12.26)$$

Підставивши (12.26) у (12.25), дістанемо відносно $u(x)$ диференціальне рівняння першого порядку з відокремленими змінними:

$$u'(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x).$$

Розв'яжемо його:

$$u'(x) = f(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Інтегруючи рівняння, матимемо вираз для $u(x)$:

$$u(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx} + C_1.$$

Зробимо зворотну заміну:

$$y(x) = u(x)v(x) = \left(\int f(x)e^{\int p(x)dx} + C_1\right)e^{-\int p(x)}dx,$$

тобто справджується формула (12.23).

■ **Приклад 12.8.** *Розв'яжемо рівняння* $y' + \frac{1}{x}y = 3x$.

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Запишемо відповідне йому лінійне однорідне рівняння

$$y' + \frac{1}{x}y = 0,$$

яке є рівнянням із відокремлюваними змінними. Знайдемо його загальний розв'язок:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad \text{або} \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \quad \text{або} \quad \ln|y| = -\ln|x| + \ln C.$$

Дістанемо загальний розв'язок $y = C/x$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $y = \frac{C(x)}{x}$, де $C(x)$ — невідома функція.

Знайдемо похідну:

$$y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} = \frac{1}{x}C'(x) - \frac{1}{x^2}C(x).$$

Підставивши y та y' у початкове рівняння, дістанемо

$$\frac{1}{x}C'(x) - \frac{1}{x^2}C(x) + \frac{1}{x}\frac{C(x)}{x} = 3x,$$

звідки

$$\frac{1}{x}C'(x) = 3x.$$

Тоді $C'(x) = 3x^2$. Отже,

$$C(x) = x^3 + C_1.$$

Підставивши добуте значення $C(x)$, знайдемо шуканий розв'язок $y = \frac{C_1}{x} + x^2$.

12.4 Диференціальні рівняння другого порядку

12.4.1. Основні поняття

Означення 12.15. *Диференціальне рівняння вигляду*

$$F(x, y, y', y'') = 0, \qquad (12.27)$$

де x — невідома змінна, y і y', y″ — відповідно шукана функція та її похідні, називають ***диференціальним рівнянням другого порядку***.

Розглядатимемо рівняння, які можна записати у вигляді

$$y'' = f(x, y, y'). \qquad (12.28)$$

Означення 12.16. ***Розв'язком диференціального рівняння другого порядку*** *(12.27) називають функцію $y = \varphi(x)$, яка перетворює дане рівняння на тотожність.*

Справедлива теорема існування й єдності розв'язку рівняння другого порядку.

ТЕОРЕМА 12.2
(Коші)

Нехай функція $f(x, y, y')$ та її частинні похідні f'_y і $f'_{y'}$ неперервні в деякій області D простору змінних (x, y, y'). Тоді в деякому околі довільної внутрішньої точки $M_0(x_0; y_0; y'_0)$ цієї області існує єдиний розв'язок заданого рівняння (12.28), який задовольняє початкові умови

$$x = x_0,\ y = y_0,\ y' = y'_0. \qquad (12.29)$$

Задачу відшукання розв'язку рівняння (12.28) за заданими початковими умовами називають ***задачею Коші***.

Означення 12.17. ***Загальним розв'язком диференціального рівняння (12.28)*** *називають функцію $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, якщо вона є розв'язком заданого рівняння при довільних значеннях сталих C_1, C_2, які можуть бути визначені єдиним способом за заданих початкових умов (12.29).*

Означення 12.18. ***Частинним розв'язком диференціального рівняння (12.28)*** *називають загальний розв'язок рівняння при фіксованих значеннях сталих C_1, C_2, тобто функцію $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$.*

Приклад 12.9. *Розв'яжемо рівняння $y'' = 0$. Знайдемо частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$.*

Після дворазового інтегрування заданого рівняння дістанемо загальний розв'язок $y = C_1x + C_2$, де C_1, C_2 — довільні сталі. Цей розв'язок є сукупністю прямих у довільних напрямах, причому через кожну точку площини xOy проходить нескінченна кількість таких прямих. Тому для виокремлення частинного розв'язку, що проходить через точку $(x_0; y_0)$, необхідно задати кутовий коефіцієнт прямої, яка збігається зі своєю дотичною.

Знайдемо частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$, тобто пряму, що проходить через точку $(1; 2)$ із кутовим коефіцієнтом $k = y'(1) = 1$. Підставлення початкових умов у загальний розв'язок рівняння приводить до системи лінійних рівнянь відносно сталих C_1, C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ C_1 = 1, \end{cases}$$

звідки $C_1 = 1$, $C_2 = 1$. Отже, шуканий частинний розв'язок — це пряма $y = x + 1$.

12.4.2. Диференціальні рівняння, які допускають зниження порядку

Є три види рівняння $y'' = f(x, y, y')$, які заміною змінної (шуканої функції) зводяться до рівнянь першого порядку.

1. Рівняння вигляду

$$y'' = f(x). \qquad (12.30)$$

Введемо нову функцію $z = z(x)$ заміною $z(x) = y'$. Тоді дане рівняння другого порядку перетворюється на рівняння першого порядку $z' = f(x)$, розв'язком якого є функція

$$z(x) = \int f(x)dx + C_1.$$

Оскільки $z(x) = y'$, то повторним інтегруванням знаходимо загальний розв'язок рівняння (12.30):

$$y(x) = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_1x + C_2,$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

■ **Приклад 12.10.** *Знайдемо загальний розв'язок рівняння* $y'' = \sin x$.

Це диференціальне рівняння другого порядку вигляду (12.30). Зробимо заміну: $z(x) = y'$. Тоді дане рівняння можна записати у вигляді $z' = \sin x$ або $\frac{dz}{dx} = \sin x$, звідки

$$dz = \sin x\, dx.$$

Інтегруючи останню рівність, дістанемо

$$\int dz = \int \sin x\, dx \quad \text{або} \quad z = -\cos x + C_1,$$

тобто $y' = -\cos x + C_1$ або $\frac{dy}{dx} = -\cos x + C_1$, звідки $dy = (-\cos x + C_1)dx$.

Знову інтегруючи, дістанемо

$$\int dy = \int(-\cos x + C_1)dx \quad \text{або} \quad y = -\sin x + C_1x + C_2.$$

Це й є загальний розв'язок рівняння.

2. Рівняння вигляду

$$y'' = f(x, y'). \qquad (12.31)$$

У цьому рівнянні немає шуканої функції y. Отже, можна знизити його порядок, зробивши заміну $z(x) = y'$, $z'(x) = y''$. Тоді дістанемо рівняння першого порядку вигляду $z'(x) = f(x, z)$. Знайшовши загальний розв'язок цього рівняння: $z(x) = \varphi(x, C_1)$, повторним інтегруванням дістанемо шуканий загальний розв'язок рівняння (12.31):

$$y(x) = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2,$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

■ **Приклад 12.11.** *Знайдемо загальний розв'язок рівняння* $y'' = y' = 0$.

Це диференціальне рівняння другого порядку вигляду (12.31). Зробимо заміну: $z(x) = y'$, $z'(x) = y''$. Тоді задане рівняння можна записати у вигляді $z' + z = 0$ або $\frac{dz}{dx} = -z$, звідки $\frac{dz}{z} = -dx$. Інтегруючи останню рівність, матимемо

$$\int \frac{dz}{z} = -\int dx \quad \text{або} \quad \ln|z| = -x + \ln C_1 \quad \text{або} \quad z = C_1e^{-x},$$

тобто $y' = C_1e^{-x}$ або $\frac{dy}{dx} = C_1e^{-x}$, звідки $dy = C_1e^{-x}dx$. Знову інтегруючи, дістанемо

$$\int dy = \int (C_1e^{-x})dx + C_2 \quad \text{або} \quad y = -C_1e^{-x} + C_2.$$

Це й є загальний розв'язок рівняння.

3. Рівняння вигляду

$$y'' = f(y', y''). \qquad (12.32)$$

Це рівняння не містить незалежної змінної. Введемо нову функцію, залежну від y, зробивши заміну $z(y) = y'$. Тоді за правилом диференціювання складної функції

$$y'' = \frac{d}{dx}(z(y)) = \frac{dz}{dy}y' = \frac{dz}{dy}z.$$

Рівняння (12.32) перетвориться на диференціальне рівняння першого порядку відносно функції $z(y)$:

$$z\frac{dz}{dy} = f(y, z).$$

Загальний розв'язок цього рівняння $z(y) = \varphi(y, C_1)$. Зробивши зворотну заміну, матимемо рівняння першого порядку відносно функції $y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1),$$

з якого методом відокремлення змінних дістанемо рівняння

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2,$$

де C_1, C_2 — довільні сталі. З цього рівняння можна знайти загальний розв'язок (12.32).

■ **Приклад 12.12.** *Знайдемо загальний розв'язок рівняння* $y'' - (y')^2 = 0$.

Це диференціальне рівняння другого порядку вигляду (12.32). Зробивши заміну $z(y) = y'$, зведемо його до рівняння першого порядку

$$z\frac{dz}{dy} - z^2 = 0.$$

Перший розв'язок цього рівняння $z = 0$, або $y = C$, де C — довільна стала. Скоротивши обидві частини рівняння на z, дістанемо рівняння $\frac{dz}{dy} - z = 0$, загальний розв'язок якого $z = C_1e^y$. Після зворотної заміни матимемо рівняння першого порядку

$$\frac{dy}{dx} = C_1e^y.$$

Відокремимо змінні: $e^{-y}\,dy = C_1dx$, звідки $e^{-y} = C_1x + C_2$ або остаточно

$$y(x) = -\ln(C_1x + C_2),$$

де C_1, C_2 — довільні сталі. Цей розв'язок містить і розв'язок $y = C$, добутий раніше (при $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$).

12.4.3. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

➡ **Означення 12.19.** ***Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку*** *називають диференціальне рівняння вигляду*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \qquad (12.33)$$

де y — шукана, двічі неперервно диференційовна функція, а $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ — неперервні на проміжку (a, b) функції.

Якщо $f(x) \equiv 0$, *то рівняння (12.33) називають* ***лінійним однорідним рівнянням,*** *а при* $f(x) \neq 0$ — ***лінійним неоднорідним рівнянням.***

Розв'язавши рівняння (12.33) відносно другої похідної шуканої функції $y'' = -p(x)y' - q(x)y + f(x)$, бачимо, що воно є окремим випадком рівняння $y'' = \varphi(x, y, y')$ і задовольняє умови теореми існування та єдиності розв'язку (теореми Коші). Тому за будь-яких початкових умов $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $(x \in (a, b))$ рівняння (12.33) має єдиний розв'язок.

Розглянемо властивості лінійних однорідних рівнянь другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \qquad (12.34)$$

ТЕОРЕМА 12.3

Якщо функції $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ — розв'язки рівняння (12.34), то функція $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ також є розв'язком цього рівняння, де C_1, C_2 — довільні сталі.

Доведення

Підставивши функцію $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ у рівняння (12.34) і зібравши члени при C_1 і C_2, дістанемо тотожності, які дорівнюють нулю, оскільки за умовою теореми $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ — розв'язки цього рівняння.

Теорему доведено.

➡ **Означення 12.20.** *Два розв'язки $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ лінійного однорідного рівняння другого порядку називають* ***лінійно залежними*** *на проміжку (a, b), якщо існують такі числа λ_1 і λ_2, одночасно не нульові, що для довільного $x \in (a, b)$ виконується рівність*

$$\lambda_1y_1(x) + \lambda_2y_2(x) = 0.$$

У цьому разі функції $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ пропорційні, тобто

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \lambda, \quad \lambda = \text{const}.$$

*У противному разі функції називають **лінійно незалежними**, й вони не пропорційні, тобто*

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \lambda, \quad \lambda = \text{const}.$$

➡ **Означення 12.21.** *Функціональний визначник*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

*називають **визначником Вронського**, або **вронськіаном**.*

ТЕОРЕМА 12.4

Якщо функції $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ лінійно залежні на (a, b), то визначник Вронського, складений із них, дорівнює нулю на цьому проміжку; якщо функції лінійно незалежні на (a, b), то визначник Вронського відмінний від нуля на цьому проміжку.

Доведення

Нехай функції $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ лінійно залежні на проміжку (a, b). Тоді ці функції пропорційні, тобто $y_1(x) = \lambda y_2(x)$, а отже, $y_1'(x) = \lambda y_2'(x)$. Це означає, що у визначнику Вронського пропорційні стовпці, тобто визначник дорівнює нулю.

Другу частину теореми доведемо від супротивного. Нехай функції $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ лінійно залежні на проміжку (a, b). Припустимо, що визначник $W(x)$ дорівнює нулю на цьому проміжку. Тоді стовпці необхідно пропорційні, а отже, пропорційні й ці функції, звідки випливає їхня лінійна залежність на проміжку (a, b), що суперечить умові теореми.

Теорему доведено.

ТЕОРЕМА 12.5
(про структуру загального розв'язку лінійного однорідного рівняння)

Якщо розв'язки рівняння (12.34) $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ лінійно незалежні на проміжку (a, b), то функція

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{12.35}$$

є загальним розв'язком цього рівняння, де C_1, C_2 — довільні сталі.

Доведення

Функція $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ є розв'язком рівняння (12.34). Необхідно показати, що вона є загальним розв'язком, тобто що з неї можна виокремити частинний розв'язок, який задовольняє довільні початкові умови.

Для розв'язання задачі Коші візьмемо довільні початкові умови $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$. Підставивши їх у функцію (12.35), дістанемо систему двох лінійних рівнянь відносно невідомих C_1, C_2:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0'. \end{cases}$$

Визначником цієї системи є визначник Вронського $W(x_0)$, і внаслідок лінійної незалежності $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ він не дорівнює нулю, тобто система має єдиний розв'язок $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$. Підставивши ці значення в (12.35), дістанемо частинний розв'язок, який задовольняє вибрані початкові умови. Таким чином, розв'язок (12.35) є загальним для рівняння (12.34), що й треба було довести.

ТЕОРЕМА 12.6

Для визначника Вронського справджується формула Ліувілля—Остроградського:

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int p(x)dx}. \tag{12.36}$$

Доведення

Диференціюючи $W(x)$, дістанемо диференціальне рівняння

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ -p(x)y_1'(x) - q(x)y_1(x) & -p(x)y_2'(x) - q(x)y_2(x) \end{vmatrix} = -p(x)W(x).$$

Зінтегрувавши диференціальне рівняння $W'(x) = -p(x)W(x)$, дістанемо рівняння (12.36).

♦ **Наслідок.** *Якщо визначник Вронського перетворюється в нуль у деякій точці $x = x_0$, а $y = p(x)$ — неперервна функція, то $W(x) = 0$.*

Розглянемо основні властивості розв'язків лінійного неоднорідного рівняння (12.33).

ТЕОРЕМА 12.7
(про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння)

Загальний розв'язок рівняння (12.33) складається із суми його частинного розв'язку й загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (12.34):

$$y_{\text{заг}}(x) = y_{\text{од}}(x) + y_{\text{неод}}(x). \qquad (12.37)$$

Доведення

Нехай $y_{\text{од}} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, де C_1, C_2 — довільні сталі, а $y_{\text{неод}}$ — частинний розв'язок неоднорідного рівняння (12.34).

Покажемо, що функція (12.37) — це розв'язок рівняння (12.34). Справді, підставивши в це рівняння похідні функцій $y_{\text{од}}$ і $y_{\text{неод}}$ і згрупувавши доданки, дістанемо, що (12.37) є розв'язком.

Тепер покажемо, що функція (12.37) є загальним розв'язком неоднорідного рівняння (12.34). Розглянемо різницю $y(x) - y_{\text{неод}}(x)$, де $y(x)$ — довільний розв'язок рівняння (12.34). Ця різниця є розв'язком однорідного рівняння, в чому легко переконатися, підставивши його й згрупувавши відповідні доданки:

$$(y(x) - y_{\text{неод}}(x))'' + p(x)(y(x) - y_{\text{неод}}(x))' + q(x)(y(x) - y_{\text{неод}}(x)) =$$

$$= (y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x)) -$$

$$- (y''_{\text{неод}}(x) + p(x)y'_{\text{неод}}(x) + q(x)y_{\text{неод}}(x)) = 0.$$

Отже, цю різницю можна записати у вигляді частинного розв'язку однорідного рівняння (12.34)

$$y(x) - y_{\text{неод}}(x) = y_{\text{од}} = C_1^0y_1(x) + C_2^0y_2(x),$$

де C_1^0, C_2^0 — певні значення сталих C_1, C_2 у формулі (12.34). Таким чином, довільний розв'язок рівняння (12.33) можна дістати за формулою (12.37) добором довільних сталих C_1, C_2, а це й означає, що функція (12.37) є загальним розв'язком неоднорідного рівняння (12.33).

Теорему доведено.

Отже, щоб знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння (12.33), потрібно:

1) знайти загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (12.34);

2) знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння (12.33).

Задача визначення частинного розв'язку неоднорідного рівняння в загальному випадкові досить складна. Але є ***метод варіації довільної сталої***, який грунтується на використанні відомого розв'язку однорідного рівняння.

Нехай $y_{\text{од}} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ — загальний розв'язок однорідного рівняння (12.34). Припустимо, що частинний розв'язок неоднорідного рівняння (12.33) має аналогічний вигляд, але довільні сталі C_1, C_2 є функціями від змінної x:

$$y_{\text{неод}} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x). \qquad (12.38)$$

Диференціюючи рівність (12.38), дістанемо

$$y'_{\text{неод}} = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

Визначимо функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ так, шоб виконувалося співвідношення

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0. \qquad (12.39)$$

Тоді

$$y'_{\text{неод}} = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

Диференціюючи цю рівність, матимемо

$$y''_{\text{неод}} = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y''(x).$$

Підставивши $y_{\text{неод}}$, $y'_{\text{неод}}$, $y''_{\text{неод}}$ у рівняння (12.33) і згрупувавши доданки при $C_1(x)$, $C_2(x)$, дістанемо

$$C_1(x)(y''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)) + C_2(x)(y_2''(x) + p(x)y_2'(x) +$$

$$+ q(x)y_2(x)) + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Оскільки $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ — розв'язки рівняння (12.34), то множники при $C_1(x)$, $C_2(x)$ дорівнюють нулю. Рівність спрощується:

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Об'єднуючи її з рівністю (12.39), дістанемо систему лінійних рівнянь відносно $C_1'(x)$, $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{12.40}$$

Визначник цієї системи — визначник Вронського, й він не дорівнює нулю, оскільки складений із лінійно незалежних функцій $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$. Це означає, що система має єдиний розв'язок. Нехай $C_1'(x) = \varphi_1(x)$, $C_2'(x) = \varphi_2(x)$ — розв'язок системи (12.40). Інтегруючи ці вирази, дістанемо $C_1(x)$, $C_2(x)$. Підставивши їх у рівняння (12.33), знайдемо його частинний розв'язок.

12.4.4. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо важливий і поширений клас лінійних диференціальних рівнянь, в яких функції $y = p(x)$, $y = q(x)$ сталі.

➡ **Означення 12.22.** ***Лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами*** *називають диференціальне рівняння вигляду*

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{12.41}$$

де y — шукана, двічі неперервно диференційовна функція; p, q — деякі дійсні числа.

Розв'язок рівняння (12.41) шукатимемо у вигляді $y = e^{kx}$, де k — деяке число. Підставляємо цю функцію в рівняння (12.41):

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0.$$

Скоротивши обидві частини рівняння на e^{kx}, дістанемо квадратне рівняння

$$k^2 + pk + q = 0, \tag{12.42}$$

яке називають ***характеристичним рівнянням*** для (12.41).

Отже, якщо k — розв'язок рівняння (12.42), то $y = e^{kx}$ — розв'язок однорідного рівняння (12.41).

Вигляд розв'язку рівняння (12.41) істотно залежить від того, які корені має характеристичне рівняння (12.42). Позначимо ці корені через k_1, k_2.

ТЕОРЕМА 12.8
(про структуру загального розв'язку лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами)

1. Якщо корені характеристичного рівняння (12.42) дійсні й різні ($k_1 \neq k_2$), то загальний розв'язок рівняння (12.41) має вигляд

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}. \tag{12.43}$$

2. Якщо корені характеристичного рівняння (12.42) дійсні й рівні ($k_1 = k_2 = k$), то загальний розв'язок рівняння (12.41) має вигляд

$$y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}. \tag{12.44}$$

3. Якщо корені характеристичного рівняння (12.42) комплексні ($k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$), то загальний розв'язок рівняння (12.41) має вигляд

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \tag{12.45}$$

У всіх трьох випадках C_1, C_2 — довільні сталі.

Достатньо переконатися в тому, що кожен із доданків у правих частинах рівностей (12.43)—(12.45) буде розв'язком рівняння (12.41), а потім, за визначником Вронського, — що кожна пара функцій у цих рівностях лінійно незалежна.

Розглянемо приклади відшукання загальних розв'язків лінійних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

■ **Приклад 12.13.** *Знайдемо загальний розв'язок рівняння $y'' + 5y' + 6y = 0$.*

Запишемо характеристичне рівняння, яке відповідає даному диференціальному рівнянню:

$$k^2 + 5k + 6 = 0.$$

Його корені $k_1 = -2$, $k_2 = -3$. Загальний розв'язок рівняння

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}.$$

■ **Приклад 12.14.** *Знайдемо загальний розв'язок рівняння* $y'' - 8y' + 16y = 0$.

Характеристичне рівняння, що відповідає даному диференціальному рівнянню, має вигляд $y'' - 8y' + 16y = 0$ або $(k - 4)^2 = 0$. У нього один кратний корінь $k_1 = k_2 = 4$. Загальний розв'язок рівняння

$$y = (C_1 + C_2x)e^{4x}.$$

■ **Приклад 12.15.** *Знайдемо загальний розв'язок рівняння* $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Відповідне характеристичне рівняння має вигляд $k^2 - 2k + 2 = 0$. У нього комплексно-спряжені корені $k_1 = 1 + i$, $k_2 = 1 - i$. Отже, загальний розв'язок рівняння

$$y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

➡ **Означення 12.23.** ***Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами*** *називають диференціальне рівняння вигляду*

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{12.46}$$

де y — шукана, двічі неперервно диференційовна функція; p, q — деякі дійсні числа; f(x) — відома неперервна функція.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння є сумою загального розв'язку $y_{\text{од}}(x)$ відповідного однорідного рівняння (12.41) та частинного розв'язку $y_{\text{неод}}(x)$ неоднорідного рівняння (12.46):

$$y_{\text{заг}}(x) = y_{\text{од}}(x) + y_{\text{неод}}(x).$$

Якщо $f(x)$ — поліном, показникова чи тригонометрична функція або їх комбінації, то частинний розв'язок рівняння (12.46) можна знайти ***методом невизначених коефіцієнтів***, використовуючи вигляд правої частини $f(x)$ рівняння. При цьому треба знайти корені k_1, k_2 характеристичного рівняння (12.42) і керуватися такими *рекомендаціями*.

1. Якщо права частина рівняння (12.46) — поліном:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = P_n(x),$$

тобто є многочленом із відомими коефіцієнтами a_0, a_1, ..., a_n, то частинний розв'язок $y_{\text{неод}}(x)$ неоднорідного рівняння шукають у вигляді

- $y_{\text{неод}}(x) = Q_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n$ при $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$;
- $y_{\text{неод}}(x) = x^r(b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n) = x^rQ_n(x)$ при $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$,

де r — число коренів характеристичного рівняння (12.42), що дорівнюють нулю, а невідомі коефіцієнти b_0, b_1, ..., b_n многочлена $Q_n(x)$ знаходяться методом невизначених коефіцієнтів після підстановки розв'язку $y_{\text{неод}}(x)$ та його похідних у ліву частину диференціального рівняння.

2. Якщо права частина має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x}P_n(x), \tag{12.47}$$

то частинний розв'язок $y_{\text{неод}}(x)$ неоднорідного рівняння шукають у такому вигляді:

- $y_{\text{неод}}(x) = e^{\alpha x}Q_n(x)$ при $k_1 \neq \alpha$, $k_2 \neq \alpha$;
- $y_{\text{неод}}(x) = e^{\alpha x}xQ_n(x)$ при $k_1 = \alpha$, $k_2 \neq \alpha$;
- $y_{\text{неод}}(x) = e^{\alpha x}x^2Q_n(x)$ при $k_1 = k_2 = \alpha$,

де $Q(x)$ — многочлен того самого степеня, що й $P_n(x)$, але з невідомими коефіцієнтами, які знаходять методом невизначених коефіцієнтів.

✓ *Зауваження 12.2.* Випадок $\alpha = 0$ не виключається. При цьому $f(x) = P_n(x)$, а $y_{\text{неод}}(x) = Q_n(x)x^r$, де r — число коренів характеристичного рівняння (12.42), які дорівнюють нулю.

3. Якщо права частина має вигляд

$$f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x, \tag{12.48}$$

де a, b, β — відомі дійсні числа, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукають у вигляді

$$y_{\text{неод}}(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)x^r,$$

де r — кількість коренів характеристичного рівняння (12.42), що дорівнюють βi.

4. Якщо права частина має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_k(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x), \tag{12.49}$$

де α, β — відомі дійсні числа, $P_k(x)$ і $Q_m(x)$ — многочлени, що можуть бути як однакового степеня, так і різних (якщо вони різних степенів, то нехай n — їхній найвищий степінь; при $n = 0$ ці многочлени — сталі величини), то:

• коли число $\gamma = \alpha + \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння, частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукають у вигляді

$$y_{\text{неод}} = e^{\alpha x}(\overline{P_n}(x)\cos\beta x + \overline{Q_n}(x)\sin\beta x),$$

де $\overline{P_n}(x)$ і $\overline{Q_n}(x)$ — многочлени степеня $n = \max\{k, m\}$, коефіцієнти яких визначаються підстановкою невідомої функції в неоднорідне рівняння (12.46);

• коли число $\gamma = \alpha + \beta i$ є коренем характеристичного рівняння кратності r, частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукають у вигляді

$$y_{\text{неод}} = x^r e^{\alpha x}(\overline{P_n}(x)\cos\beta x + \overline{Q_n}(x)\sin\beta x).$$

5. Якщо права частина $f(x)$ є сумою функцій вигляду пп. 1—4, то частинний розв'язок дорівнює сумі відповідних функцій.

Невизначені коефіцієнти знаходять таким методом. У задане рівняння підставляють у відповідному вигляді $y_{\text{неод}}$, $y'_{\text{неод}}$ і $y''_{\text{неод}}$ і порівнюють коефіцієнти при відповідних степенях незалежної змінної в лівій і правій частинах рівності. Далі на прикладах буде показано, як це робиться практично.

■ **Приклад 12.16.** *Розв'яжемо рівняння* $y'' + 5y' + 6y = 56e^{5x}$.

Запишемо характеристичне рівняння, яке відповідає даному диференціальному рівнянню: $k^2 + 5k + 6 = 0$. Його корені $k_1 = -2$, $k_2 = -3$. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{од}} = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}.$$

Знаходимо частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Права частина рівняння має вигляд $f(x) = 56e^{5x}$. У цьому разі $P_k(x) = 1$ і $Q_m(x) = 0$; $\alpha = 5$, $\beta = 0$; $\gamma = \alpha + \beta i = 5$ не є коренем характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок шукатимемо у вигляді $y_{\text{неод}} = Ae^{5x}$ ($A = \text{const}$). Тут $\overline{P_0} = A$ (загальний вигляд многочлена нульового степеня). Знаходимо похідні: $y'_{\text{неод}} = 5Ae^{5x}$, $y''_{\text{неод}} = 25Ae^{5x}$. Підставивши $y_{\text{неод}}$, $y'_{\text{неод}}$ і $y''_{\text{неод}}$ у задане рівняння, дістанемо

$$25Ae^{5x} + 5\cdot 5Ae^{5x} + 6Ae^{5x} = 56Ae^{5x},$$

тобто

$$56Ae^{5x} = 56e^{5x},$$

звідки $A = 1$.

Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння $y_{\text{неод}} = e^{5x}$, а загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + e^{5x}.$$

■ **Приклад 12.17.** *Розв'яжемо рівняння* $y'' + 3y' - 4y = x^2$.

Запишемо характеристичне рівняння, яке відповідає даному диференціальному рівнянню: $k^2 + 3k - 4 = 0$. Його корені $k_1 = -4$, $k_2 = 1$. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{од}} = C_1e^{-4x} + C_2e^{x}.$$

Знаходимо частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Права частина рівняння має вигляд $f(x) = x^2$. У цьому разі $P_k(x) = x^2$ і $Q_m(x) = 0$; $\alpha = 0$, $\beta = 0$; $\gamma = \alpha + \beta i = 0$ не є коренем характеристичного рівняння кратності 1. Тому частинний розв'язок шукатимемо у вигляді $y_{\text{неод}} = Ax^2 + Bx + C$. Знаходимо похідні: $y'_{\text{неод}} = 2Ax + B$, $y''_{\text{неод}} = 2A$. Підставивши $y_{\text{неод}}$, $y'_{\text{неод}}$ і $y''_{\text{неод}}$ у задане рівняння, дістанемо

$$2A + 2Ax^2 + Bx + C = x^2.$$

Зібравши коефіцієнти при відповідних степенях x, матимемо

$$\begin{array}{c|r} x^2 & 2A = 1, \\ x & B = 0, \\ x^0 & 2A + C = 0, \end{array}$$

звідки $A = 1/2$, $B = 0$, $C = -1$.

Отже, частинний розв'язок заданого рівняння

$$y_{\text{неод}} = \frac{1}{2}x^2 - 1,$$

а загальний розв'язок

$$y = C_1e^{-4x} + C_2e^{x} + \frac{1}{2}x^2 - 1.$$

■ **Приклад 12.18.** *Розв'яжемо рівняння* $y'' + 4y = \cos 2x$.

Запишемо характеристичне рівняння, яке відповідає даному диференціальному рівнянню: $k^2 + 4 = 0$. Його корені $k_1 = -2i$, $k_2 = 2i$. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{од}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Знаходимо частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Права частина рівняння має вигляд $f(x) = \cos 2x$. У цьому разі $P_k(x) = 1$ і $Q_m(x) = 0$; $\alpha = 0$, $\beta = 2$; $\gamma = \alpha + \beta i = 2i$ є коренем характеристичного рівняння кратності 1. Тому частинний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$y_{\text{неод}} = x(A \cos 2x + B \sin 2x).$$

Підставивши $y_{\text{неод}}$, $y'_{\text{неод}}$ і $y''_{\text{неод}}$ у задане рівняння й зібравши коефіцієнти при відповідних степенях x, дістанемо систему рівнянь для визначення A і B:

$$4B = 1, \quad -4A = 0,$$

звідки $A = 0$, $B = 1/4$.

Отже, частинний розв'язок заданого рівняння

$$y_{\text{неод}} = \frac{1}{4} x \sin 2x,$$

а його загальний розв'язок

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x.$$

■ **Приклад 12.19.** *Розв'яжемо рівняння* $y'' - 6y' + 8y = 3e^{2x}$.

Запишемо характеристичне рівняння, яке відповідає даному диференціальному рівнянню: $k^2 - 6k + 8 = 0$. Його корені $k_1 = 4$, $k_2 = 2$. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{одн}} = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x}.$$

Знаходимо частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Права частина рівняння має вигляд $f(x) = 3e^{2x}$. У цьому разі $P_k(x) = 3$ і $Q_m(x) = 0$; $\alpha = 2$, $\beta = 0$; $\gamma = \alpha + \beta i = 2$ є коренем характеристичного рівняння кратності 1. Тому частинний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$y_{\text{неод}} = Axe^{2x}.$$

Знаходимо похідні:

$$y'_{\text{неод}} = 2Axe^{2x} + Ae^{2x} = Ae^{2x}(2x + 1),$$

$$y''_{\text{неод}} = 2Ae^{2x}(2x + 1) + 2Ae^{2x} = 4Ae^{2x}(x + 1).$$

Підставимо $y_{\text{неод}}$, $y'_{\text{неод}}$ і $y''_{\text{неод}}$ у задане рівняння:

$$\begin{array}{r|l} 8 & y = Axe^{2x}, \\ -6 & y' = Ae^{2x}(2x + 1), \\ 1 & y'' = 4Ae^{2x}(x + 1) \\ \hline \end{array}$$

$$3e^{2x} = e^{2x}(8Ax - 12Ax - 6A + 4A + 4Ax).$$

Поділивши рівняння на $e^{2x} \neq 0$, дістанемо рівняння для визначення невідомого коефіцієнта A:

$$3 = -2A, \quad A = -3/2.$$

Отже, частинний розв'язок заданого рівняння

$$y_{\text{неод}} = -\frac{3}{2} x e^{2x},$$

а його загальний розв'язок

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x} - \frac{3}{2} x e^{2x}$$

або

$$y = C_1 e^{4x} + \left(C_2 - \frac{3}{2} x\right) e^{2x}.$$

12.5 Застосування методів диференціальних рівнянь в економічних моделях

12.5.1. Модель демографічного процесу

Зі статистичних даних відомо, що для даного регіону кількість новонароджених і померлих за одиницю часу пропорційна чисельності населення з коефіцієнтами пропорційності k_1 і k_2 відповідно. Знайдемо *закон зміни чисельності населення в часі*, інакше кажучи, опишемо демографічний процес у регіоні.

Нехай $y = y(t)$ — кількість мешканців регіону в момент часу t. Приріст населення Δy за час Δt дорівнює різниці між кількістю народжених і кількістю померлих за цей час, тобто

$$\Delta y = k_1 y\Delta t - k_2 y\Delta t \quad \text{або} \quad \frac{\Delta y}{\Delta y} = ky,$$

де $k = k_1 - k_2$.

Переходячи до границі при $\Delta t \to 0$, дістанемо рівняння

$$y' = ky. \tag{12.50}$$

Це диференціальне рівняння першого порядку з відокремленими змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{dy}{dt} = ky, \quad \frac{dy}{y} = k\ dt, \quad \int \frac{dy}{y} = k\int dt, \quad \ln|y| = kt + C_1, \quad y = e^{kt + C_1},$$

$$y = Ce^{kt}, \tag{12.51}$$

де C — довільна стала, що визначається початковими умовами (чисельністю населення в початковий момент часу).

12.5.2. Модель рівноважного зростання випуску продукції

Нехай продукція деякої фірми продається за фіксованою ціною p. Позначимо через $q(t)$ обсяг продукції, реалізованої в момент часу t. Тоді на цей момент часу дістанемо доход $R(t) = pq(t)$. Припустимо, що частина доходу використовується на інвестиції у виробництво реалізованої продукції, тобто

$$I(t) = mpq(t), \tag{12.52}$$

де m — норма інвестицій (стале число), причому $0 < m < 1$.

Якщо виходити з припущення про ненасичення ринку (тобто про повну реалізацію продукції, що виробляється), то в результаті розширення виробництва буде одержано приріст доходу, частина якого знову використовуватиметься для розширення випуску продукції. Це приведе до зростання швидкості випуску продукції (*акселерації*), причому швидкість випуску пропорційна збільшенню інвестицій, тобто

$$q'(t) = lI(t), \tag{12.53}$$

де $1/l$ — норма акселерації. Підставивши (12.53) у (12.52), дістанемо

$$q' = lmpq(t)$$

або

$$q' = kq(t), \tag{12.54}$$

де $k = lmp$.

Рівняння (12.54) — це диференціальне рівняння першого порядку з відокремленими змінними, загальний розв'язок якого $q = Ce^{kt}$, де C — довільна стала.

Нехай у початковий момент часу $t = t_0$ обсяг продукції становить q_0. Тоді $q_0 = Ce^{kt_0}$

Виразимо сталу: $C = q_0 e^{-kt_0}$ і підставимо її значення в загальний розв'язок. Дістанемо частинний розв'язок рівняння (12.53), тобто розв'язок задачі Коші

$$q_0 = q_0 e^{k(t - t_0)}. \tag{12.55}$$

Зазначимо, що математичні моделі мають властивість загальності. Так, рівняння (12.55) описує також динаміку росту цін за постійної інфляції, процес розмноження бактерій, процес радіоактивного розпаду.

12.5.3. Модель зростання випуску продукції в умовах конкуренції

Припустимо, що деяка фірма випускає продукцію й продає її за ціною p за одиницю. Позначимо через $q = q(t)$ обсяг продукції, яка реалізована в момент часу t. Нехай ціна залежить від обсягу продукції.

Тоді $p = p(q)$ — спадна функція, тобто зі збільшенням обсягу випуску продукції її ціна на ринку зменшується. Це означає, що $\frac{dp}{dq} < 0$. У момент часу t фірма одержує доход $R(t) = p(q(t))q(t)$. Якщо частина доходу використовується на інвестиції $I(t)$ у виробництво реалізованої продукції, то за умови ненасиченості ринку швидкість випуску продукції пропорційна збільшенню інвестицій, тобто $q' = kq$, $k = lmp$, де m — це норма інвестицій, $1/l$ — норма акселерації, p — стала ціна.

У випадку, коли ціна $p = p(q)$, дістанемо диференціальне рівняння першого порядку відносно q із відокремленими змінними

$$q' = \alpha p(q)q, \tag{12.56}$$

де $\alpha = lm$. Оскільки всі співмножники в правій частині цього рівняння додатні, то й $q' > 0$, тобто функція $q = q(t)$ зростаюча. Характер зростання функції визначається її другою похідною. Диференціюючи рівняння (12.56), дістанемо

$$q'' = \alpha\left(q'p(q) + q\frac{dp}{dq}q'\right) = \alpha q'\left(p + \frac{dp}{dq}q\right). \tag{12.57}$$

Оскільки еластичність попиту $E_p(q) = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q}$, то рівність (12.57) можна записати у вигляді

$$q'' = \alpha q'p\left(1 + \frac{dp}{dq}\frac{q}{p}\right) = \alpha q'p\left(1 + \frac{1}{E_p(q)}\right).$$

Ураховуючи, що $\frac{dq}{dp} < 0$, а отже, й $E_p(q) < 0$, остаточно дістанемо

$$q'' = \alpha q'p\left(1 - \frac{1}{|E_p(q)|}\right). \tag{12.58}$$

Із рівності (12.58) випливає, що за еластичного попиту, тобто коли $|E_p(q)| > 1$, $q'' > 0$, графік функції $q = q(t)$ має напрям опуклості вниз, а це означає прогресивне зростання; за нееластичного попиту, тобто при $|E_p(q)| < 1$, $q'' < 0$, графік функції $q = q(t)$ має напрям опуклості вгору, що означає вповільнене зростання (насичення).

Розглянемо залежність ціни від попиту $p = p(q)$ у вигляді лінійної функції (рис. 12.2)

$$p(q) = a - bq, \quad a > 0, \quad b > 0. \tag{12.59}$$

Тоді рівняння (12.56) і (12.58) набирають вигляду

$$q' = \alpha(a - bq)q \tag{12.60}$$

і

$$q'' = \alpha q'(a - bq) \tag{12.61}$$

відповідно.

Зі співвідношень (12.60) і (12.61) дістанемо, що $q' = 0$ при $q = 0$ і $q = \frac{a}{b}$, $q'' > 0$ при $q < \frac{a}{2b}$, $q'' < 0$ при $q > \frac{a}{2b}$. Отже, $q = \frac{a}{2b}$ — точка перегину графіка функції $q = q(t)$.

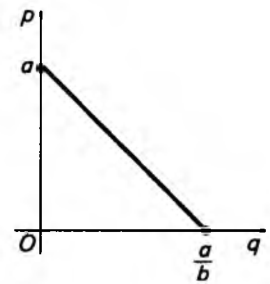


Рис. 12.2

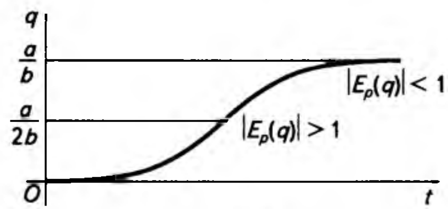


Рис. 12.3

Графік функції $q = q(t)$ — однієї з інтегральних кривих диференціального рівняння (рис. 12.3) — називають *логістичною кривою*.

12.5.4. Динамічна модель Кейнса

Розглянемо балансову модель, що охоплює основні компоненти динаміки економіки. Нехай $y(t)$, $E(t)$, $S(t)$, $I(t)$ — відповідно національний доход, державні витрати, споживання та інвестиції. Всі ці величини розглядаються як функції часу t. Оскільки сума всіх витрат має дорівнювати національному доходові, то балансове рівняння запишемо у вигляді

$$y(t) = S(t) + I(t) + E(t).$$

Загальне споживання складається з внутрішнього споживання деякої частини національного доходу в народному господарстві й кінцевого (автономного) споживання. Тому можемо записати рівняння

$$S(t) = a(t)y(t) + b(t),$$

де $a(t)$ — коефіцієнт схильності до споживання, $0 < a(t) < 1$; $b(t)$ — кінцеве споживання.

Розмір інвестицій не може бути довільним. Він визначається добутком норми акселерації $k(t)$, значення якої характеризується рівнем технології інфраструктури даної держави, на граничний національний доход, тобто виконується співвідношення

$$I(t) = k(t)y'(t) .$$

У результаті дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y(t) = S(t) + I(t) + E(t), \\ S(t) = a(t)y(t) + b(t), \\ I(t) = k(t)y'(t). \end{cases} \tag{12.62}$$

Припустимо, що функції $a(t)$, $b(t)$, $k(t)$ і $E(t)$ задані й є характеристиками функціонування й еволюції даної держави. Потрібно визначити динаміку національного доходу $y = y(t)$ як функції часу t.

З другого й третього рівнянь системи (12.62) підставимо вирази для $S(t)$ і $I(t)$ у перше. Матимемо

$$y(t) = a(t)y(t) + b(t) + k(t)y'(t) + E(t)$$

або

$$k(t)y'(t) - (1 - a(t))y(t) = -b(t) - E(t)$$

або

$$y'(t) - \frac{1 - a(t)}{k(t)} y(t) = -\frac{b(t) + E(t)}{k(t)}. \tag{12.63}$$

Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно $y(t)$. Є достатньо складна формула загального розв'язку цього рівняння. Проаналізуємо просту ситуацію, коли параметри задачі a, b і k сталі.

Тоді рівняння (12.63) зводиться до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y' - \frac{1-a}{k} y = -\frac{b+E}{k}. \tag{12.64}$$

Як відомо, загальний розв'язок неоднорідного рівняння є сумою деякого його частинного розв'язку та загального розв'язку відповідного однорідного рівняння $y' - \dfrac{1-a}{k} y = 0$.

За частинний розв'язок рівняння (12.64) візьмемо так званий рівноважний розв'язок, коли $y' = 0$, тобто

$$y_{\text{р}} = \frac{b+E}{1-a}. \tag{12.65}$$

Легко бачити, що ця величина додатна. Загальний розв'язок однорідного рівняння задається формулою $\tilde{y} = C\exp\left(\dfrac{1-a}{k} t\right)$. Таким чином, загальний розв'язок рівняння (12.64) має вигляд

$$y(t) = \frac{b+E}{1-a} + Ce^{\frac{1-a}{k}t}. \tag{12.66}$$

Інтегральні криві рівняння (12.64) показано на рис. 12.4.

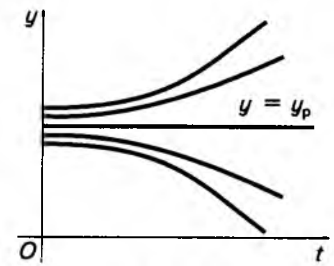


Рис. 12.4

Якщо в початковий момент часу $y_0 < y_{\text{р}}$, то $C = y_0 - y_{\text{р}} < 0$, і криві відхиляються вниз від рівноважного розв'язку, тобто при заданих параметрах задачі a, b, k і E національний доход із часом зменшується, оскільки показник експоненти в (12.66) додатний. Якщо $y_0 > y_{\text{р}}$, то $C > 0$, і національний доход зростає — інтегральні криві відхиляються вгору від рівноважної прямої $y = y_р$.

12.5.5. Неокласична модель зростання

Нехай $y = f(K, L)$ — національний доход, де f — однорідна виробнича функція першого степеня ($f(tK, tL) = rf(K, L)$); K — обсяг капіталовкладень (виробничих фондів); L — витрати праці.

Розглянемо таку величину, як фондоозброєність $k = K/L$. Тоді продуктивність праці виражається формулою

$$F(k) = \frac{f(K, L)}{L}. \tag{12.67}$$

Опишемо динаміку фондоозброєності в часі t. Модель базується на таких припущеннях:

1) відбувається природній приріст трудових ресурсів, тобто

$$L' = \alpha L; \tag{12.68}$$

2) інвестиції використовуються на збільшення виробничих фондів і на амортизацію, тобто

$$I = K' + \beta K, \tag{12.69}$$

де β — норма амортизації.

Якщо l — норма інвестицій, то $I = ly = K' + \beta K$, або

$$K' = lf(K, L) - \beta K. \tag{12.70}$$

З означення фондоозброєності $k = K/L$ випливає, що

$$\ln k = \ln K - \ln L.$$

Диференціюючи цю рівність за t, маємо

$$\frac{k'}{k} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L}.$$

Підставивши в добуту рівність вирази (12.68) і (12.70), дістанемо рівняння відносно невідомої функції k:

$$\frac{k'}{k} = \frac{lf(K, L)}{K} - \frac{\beta K}{K} - \frac{\alpha L}{L}$$

або

$$k' = \frac{lkf(K, L)}{K} - \beta k - \alpha k$$

або

$$k' = lF(k) - (\alpha + \beta)k, \tag{12.71}$$

де $F(k)$ визначена за формулою (12.67). Рівняння (12.71) — це диференціальне рівняння першого порядку з відокремленими змінними.

З умови $k' = 0$ випливає, що $lF(k) - (\alpha + \beta)k = 0$, тобто $k_{ст} = \text{const}$ є коренем цього нелінійного алгебричного рівняння, який, своєю чергою, є ***стаціонарним розв'язком рівняння*** (12.71).

■ **Приклад 12.20.** *Для виробничої функції $f(K, L) = \sqrt{KL}$ знайдемо інтегральні криві та стаціонарний розв'язок.*

Запишемо

$$F(k) = \frac{f(K, L)}{L} = \frac{\sqrt{KL}}{L} = \sqrt{\frac{K}{L}} = \sqrt{k}.$$

Оскільки $k = K/L$, то рівняння (12.71) має вигляд

$$k' = l\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k \tag{12.72}$$

або

$$\frac{dk}{dt} = \sqrt{k}(l - (\alpha + \beta)\sqrt{k}).$$

Стаціонарний розв'язок цього рівняння можна знайти з рівності

$$l\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k = 0 \quad \text{або} \quad \sqrt{k}(l - (\alpha + \beta)\sqrt{k}) = 0.$$

Маємо систему

$$\left[\begin{aligned} k_1 &= 0, \\ (\alpha + \beta)\sqrt{k} &= l; \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} k_1 &= 0, \\ \sqrt{k} &= \frac{l}{\alpha + \beta}; \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} k_1 &= 0, \\ k_2 &= \frac{l^2}{(\alpha + \beta)^2}, \end{aligned}\right.$$

ненульовий частинний розв'язок якої $k_{ст} = \dfrac{l^2}{(\alpha + \beta)^2}$.

Диференціальне рівняння (12.72) розв'язуємо методом відокремлення змінних:

$$\frac{dk}{\sqrt{k}(l - (\alpha + \beta)\sqrt{k})} = dt.$$

Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{dk}{\sqrt{k}(l-(\alpha+\beta)\sqrt{k})} = \int dt.$$

Зробимо заміну $\sqrt{k} = z$: $\frac{dk}{2\sqrt{k}} = dz$ або $\frac{dk}{\sqrt{k}} = 2dz$. Зінтегруємо рівняння:

$$\int \frac{2dz}{(l-(\alpha+\beta)z)} = \int dt,$$

$$-\frac{1}{\alpha+\beta}\int \frac{d(l-(\alpha+\beta)z)}{l-(\alpha+\beta)z} = \frac{1}{2}\int dt,$$

$$\int \frac{d(l-(\alpha+\beta)z)}{l-(\alpha+\beta)z} = -\frac{\alpha+\beta}{2}\int dt,$$

$$l-(\alpha+\beta)\sqrt{k} = Ce^{-\frac{\alpha+\beta}{2}t},$$

$$\ln|l-(\alpha+\beta)z| = -\frac{\alpha+\beta}{2}t + \ln C,$$

$$(\alpha+\beta)\sqrt{k} = l - Ce^{-\frac{\alpha+\beta}{2}t},$$

$$\sqrt{k} = -\frac{l}{\alpha+\beta} + Ce^{-\frac{\alpha+\beta}{2}t},$$

$$k = \left(Ce^{-\frac{\alpha+\beta}{2}t} - \frac{l}{\alpha+\beta}\right)^2. \qquad (12.73)$$

Сукупність інтегральних кривих відхиляється вгору й униз від стаціонарного розв'язку (рис. 12.5), тобто $k \to k_{ст}$ при $t \to \infty$. Отже, при

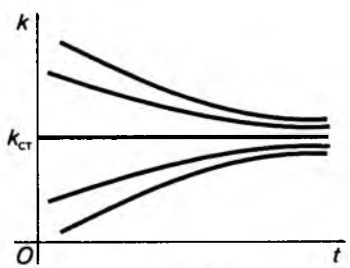


Рис. 12.5

незмінних вхідних параметрах задачі l, α і β функція фондоозброєності прямує до стаціонарного значення незалежно від початкових умов. У такому разі кажуть, що $k = k_{ст}$ є точкою стійкої рівноваги.

?

Контрольні запитання

1. Яке рівняння називають диференціальним?
2. Що таке порядок диференціального рівняння?
3. Як формулюється означення загального розв'язку, частинного розв'язку, загального інтеграла диференціального рівняння?
4. Що таке інтегральна крива? Які її властивості?
5. У чому полягає задача Коші для диференціального рівняння першого порядку?
6. Як формулюється теорема існування та єдності розв'язку задачі Коші для рівнянь першого порядку?
7. Що таке особливий розв'язок диференціального рівняння?
8. Яке диференціальне рівняння першого порядку називають рівнянням із відокремлюваними змінними?
9. Як розв'язується диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними?
10. Яке диференціальне рівняння першого порядку називають однорідним?
11. Як однорідне диференціальне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними?
12. Яке диференціальне рівняння першого порядку називають лінійним (однорідним, неоднорідним)?
13. Як формулюється теорема про структуру розв'язків лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку?
14. Які властивості розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку?

15. Які є основні типи й методи інтегрування диференціальних рівнянь другого порядку, що допускають зниження степеня?
16. Як записується загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами в різних випадках?
17. У чому полягає задача Коші для диференціальних рівнянь другого порядку?
18. Як формулюється теорема про структуру розв'язків лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку?
19. У чому полягає метод невизначених коефіцієнтів знаходження частинних розв'язків лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку?
20. В яких економічних моделях застосовуються методи знаходження розв'язків диференціальних рівнянь?

Приклади розв'язування задач

1 *Розв'язати рівняння* $\frac{dy}{dx} = y^2$.

Запишемо

$$\frac{dy}{y^2} = dx \quad \text{і} \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int dx + C.$$

Отже,

$$-\frac{1}{y} = x + C.$$

Із цього випливає, що $y = -\frac{1}{x+C}$ є загальним розв'язком даного рівняння. Рівняння $y_2 = 0$ має розв'язок $y = 0$.

Отже, всі розв'язки даного рівняння задаються формулами

$$y = -\frac{1}{x+C}, \quad y = 0.$$

Перша з формул задає сім'ю гіпербол, а друга — множину точок осі Ox. Якщо задати початкові умови і розв'язати задачу Коші $y(x_0) = y_0$, то дістанемо розв'язки вигляду

$$y = \frac{y_0}{1 - y_0(x - x_0)}, \quad y = 0.$$

2 *Розв'язати рівняння* $xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2$.

Позначимо $y' = \frac{dy}{dx}$ і підставимо в задане рівняння. Помноживши рівняння на dx, дістанемо рівняння $x(1 + x^2)y\,dy - (1 + y^2)dx = 0$, яке є рівнянням із відокремлюваними змінними. Відокремивши змінні (тобто поділивши рівняння на $x(1 + x^2)(1 + y^2)$), матимемо

$$\frac{y\,dy}{1 + y^2} - \frac{dx}{x(1 + x^2)} = 0.$$

Зінтегруємо це рівняння:

$$\int \frac{y\,dy}{1 + y^2} - \int \frac{dx}{x(1 + x^2)} = C_1,$$

$$\frac{1}{2}\ln(1 + y^2) - \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{1}{2}\ln C, \quad \ln(1 + y^2) = \ln\frac{Cx^2}{1 + x^2}.$$

Після операції потенціювання дістанемо $y^2 + 1 = \frac{Cx^2}{1 + x^2}$ або $y^2 = \frac{(C-1)x^2 - 1}{1 + x^2}$, звідки

$$y = \pm\frac{(C-1)x^2 - 1}{1 + x^2},$$

де C — довільна стала, $C > 1$.

3 *Розв'язати рівняння* $y' = \frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}$.

Це однорідне диференціальне рівняння. Зробимо заміну: $y(x) = xu(x)$, $y'(x) = u(x) + xu'(x)$. Тоді для нової невідомої $u(x)$ матимемо рівняння з відокремлюваними змінними

$$u + xu' = u + \cos u,$$

звідки

$$x\frac{du}{dx} = \cos u \quad \text{або} \quad \frac{du}{\cos u} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи праву й ліву частини рівняння, дістанемо

$$\int \frac{du}{\cos u} = \int \frac{dx}{x} \quad \text{або} \quad \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)\right| = \ln x + \ln C,$$

звідки

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) = Cx, \ \frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} = \operatorname{arctg} Cx \quad \text{або} \quad u = 2 \operatorname{arctg} Cx - \frac{\pi}{2}.$$

Оскільки $u = y/x$, то

$$y = 2x \operatorname{arctg} Cx - \frac{\pi}{2}$$

є загальним розв'язком рівняння.

4 *Розв'язати рівняння* $(x + 2y - 1)dx = (2x + 4y + 3)dy$.

Перепишемо задане рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y - 1}{2x + 4y + 3}.$$

Зробимо заміну $u = x + 2y$. Тоді $u' = 1 + 2y'$ і $y' = \frac{u' - 1}{2}$. Підставивши добуті вирази в рівняння, дістанемо

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx} - \frac{1}{2} = \frac{u - 1}{2u + 3} \quad \text{або} \quad \frac{du}{dx} = \frac{4u + 1}{2u + 3}.$$

Відокремимо змінні та зінтегруємо:

$$\int \frac{2u + 3}{4u + 1} du = \int dx.$$

Обчисливши інтеграли, дістанемо

$$\frac{1}{2}u + \frac{5}{8}\ln|4u + 1| = x + C.$$

Після повернення до невідомої y матимемо загальний інтеграл рівняння:

$$\frac{1}{2} + y + \frac{5}{8}\ln|4x + 8y + 1| = C.$$

5 *Розв'язати рівняння* $y' + \frac{1}{x}y = 3x$.

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Запишемо відповідне лінійне однорідне рівняння

$$y' + \frac{1}{x}y = 0,$$

яке є рівнянням із відокремлюваними змінними. Знайдемо його загальний розв'язок:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad \text{або} \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \quad \text{або} \quad \ln|y| = -\ln|x| + \ln C, \quad \text{або} \quad y = \frac{C}{x}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $y = \frac{C(x)}{x}$, де $C(x)$ — невідома функція. Знайдемо похідну:

$$y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} = \frac{1}{x}C'(x) - \frac{1}{x^2}C(x).$$

Підставляючи y та y' у початкове рівняння, дістанемо

$$\frac{1}{x}C'(x) - \frac{1}{x^2}C(x) + \frac{1}{x}\frac{C(x)}{x} = 3x,$$

звідки

$$\frac{1}{x}C'(x) = 3x, \quad C'(x) = 3x^2.$$

Отже,

$$C(x) = x^3 + C_1.$$

Підставивши добуте значення $C(x)$, знайдемо шуканий розв'язок:

$$y = \frac{C_1}{x} + x^2.$$

6 *Розв'язати рівняння* $y'' = 1 - y'^2$.

Позначимо $y' = z$. Тоді $y'' = z'$, і задане рівняння перепишеться у вигляді

$$z' = 1 - z^2.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремивши змінні, дістанемо

$$\frac{dz}{1 - z^2} = dx.$$

Після інтегрування матимемо

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| = x + \frac{1}{2}\ln C_1 \quad \text{або} \quad z = 1 - \frac{2}{C_1e^{2x}+1}.$$

Оскільки $z = \frac{dy}{dx}$, то

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{2}{C_1e^{2x}+1} \quad \text{і} \quad y = \int\left(1 - \frac{2}{C_1e^{2x}+1}\right)dx.$$

Обчислимо інтеграл:

$$y = x + \ln|C_1 + e^{-2x}| + C_2.$$

Дістали загальний розв'язок заданого рівняння.

7 *Розв'язати рівняння* $y'' + 3y' + 2y = 0$.

Відповідне характеристичне рівняння $k^2 + 3k + 2 = 0$ має корені $k_1 = -2$ та $k_2 = -1$. Отже, загальним розв'язком диференціального рівняння є функція

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}.$$

8 *Розв'язати рівняння* $y'' + 2y' + 10y = 0$.

Відповідне характеристичне рівняння $k^2 + 2k + 10 = 0$ має комплексно-спряжені корені $k_1 = -1 + 3i$, $k_1 = -1 - 3i$, $\alpha = -1$, $\beta = 3$. Загальний розв'язок диференціального рівняння записується у вигляді

$$y = e^{-x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$$

9 *Розв'язати рівняння* $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Оскільки характеристичне рівняння $k^2 - 6k + 9 = 0$ має кратний корінь $k_1 = k_2 = 3$, то загальний розв'язок диференціального рівняння записується у вигляді

$$y = (C_1 + C_2x)e^{3x}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 1
Матриці. Визначники

Варіант № 1

1. Обчислити добутки матриць:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $(2 \quad 3 \quad 4)\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Знайти значення $f(A)$, де $f(A) = A^3 + A^2 - 7A + 4E$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти невідому матрицю X із рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

4. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} a & a & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

5. Обчислити $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

Варіант № 2

1. Обчислити добутки матриць:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Знайти значення $f(A)$, де $f(A) = A^2 + 5A + E$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти невідому матрицю X із рівняння

$$X\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

5. Обчислити $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n$.

Варіант № 3

1. Обчислити добутки матриць:

а) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Знайти значення $f(A)$, де $f(A) = A^3 - 2A^2 - A + 2E$,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти невідому матрицю X із рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

5. Обчислити $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n$.

Варіант № 4

1. Обчислити добутки матриць:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 5 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Знайти значення $f(A)$, де $f(A) = A^3 - 7A^2 + 18A - 5E$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти невідому матрицю X із рівняння

$$X\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

5. Обчислити $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^n$.

Завдання 2
Методи розв'язування систем лінійних рівнянь

Варіант № 1

1. Розв'язати методом Гаусса системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 15x_4 - 17x_5 = 26, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 8, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 6x_4 - 4x_5 = 11. \end{cases}$

2. Розв'язати матричним способом системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 8. \end{cases}$

3. Користуючися формулами Крамера, розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$

4. Дослідити, при яких значеннях параметра λ система лінійних рівнянь буде визначеною, невизначеною, несумісною, й розв'язати цю систему при тих значеннях λ, при яких вона буде визначеною:

$$\begin{cases} (2-\lambda)x + 6y = 1, \\ 6x + (2-\lambda)y = 1. \end{cases}$$

Варіант № 2

1. Розв'язати методом Гаусса системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 2, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 + 5x_5 = -6, \\ x_1 + 4x_2 - 13x_3 + 6x_4 - 12x_5 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -6, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 = -8, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -8. \end{cases}$

2. Розв'язати матричним способом системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ 2x_1 + x_2 = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

3. Користуючися формулами Крамера, розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = -2. \end{cases}$

4. Дослідити, при яких значеннях параметра λ система лінійних рівнянь буде визначеною, невизначеною, несумісною, й розв'язати цю систему при тих значеннях λ, при яких вона буде визначеною:

$$\begin{cases} 5x + 5y = 4 + \lambda x, \\ 7x + 3y = 1 + \lambda x. \end{cases}$$

Варіант № 3

1. Розв'язати методом Гаусса системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$

2. Розв'язати матричним способом системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

3. Користуючися формулами Крамера, розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5, \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5. \end{cases}$

4. Дослідити, при яких значеннях параметра λ система лінійних рівнянь буде визначеною, невизначеною, несумісною, й розв'язати цю систему при тих значеннях λ, при яких вона буде визначеною:

$$\begin{cases} \lambda x + (\lambda + 1)y = 5, \\ 3x + 4y = 5. \end{cases}$$

Варіант № 4

1. Розв'язати методом Гаусса системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$

2. Розв'язати матричним способом системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4, \\ 4x_1 - 5x_2 = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

3. Користуючися формулами Крамера, розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 12, \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 - 7x_2 + x_3 - 3x_4 = 4, \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 16. \end{cases}$

4. Дослідити, при яких значеннях параметра λ система лінійних рівнянь буде визначеною, невизначеною, несумісною, й розв'язати цю систему при тих значеннях λ, при яких вона буде визначеною:

$$\begin{cases} \lambda x + (\lambda + 10)y = -1, \\ (\lambda - 10)x + (\lambda + 1)y = 2. \end{cases}$$

Завдання 3
Лінійні економічні задачі

Варіант № 1

1. Задано матрицю доходів інвесторів $R = \begin{pmatrix} 0,95 & 1,05 \\ 1,05 & 1,05 \\ 1,40 & 1,21 \end{pmatrix}$ і матрицю, що характеризує портфельні інвестиції $P = (1000 \;\; 5000 \;\; 15\,000)$. Визначити, який прибуток гарантовано інвесторам.
2. Задано лінійну матрицю торгівлі трьох країн $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

   Знайти торговельні бюджети для збалансованої торгівлі трьох країн за умови, що сума бюджетів $X_1 + X_2 + X_3 = 35\,000$ грош. од.
3. Побудувати матричну модель умовної двогалузевої виробничої системи, якщо задано матрицю A прямих матеріальних витрат і матрицю обсягу кінцевої продукції Y: $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,05 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix}$. Визначити:

   а) коефіцієнти повних витрат;
   б) матрицю валового випуску X та план (валовий випуск) кожної галузі;
   в) коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат.
4. У таблиці наведено дані про виконання балансу за звітний період (в умовних грошових одиницях):

Галузь виробництва	Споживання		Обсяг кінцевої продукції	Обсяг валового випуску
	1	2		
1	100	160	240	500
2	275	40	85	400

Обчислити необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо обсяг кінцевої продукції першої галузі збільшиться вдвоє, а другої — залишиться на попередньому рівні.

Варіант № 2

1. Задано матрицю доходів інвесторів $R = \begin{pmatrix} 0,90 & 1,20 \\ 1,05 & 1,05 \\ 1,20 & 1,90 \end{pmatrix}$ і матрицю, що характеризує портфельні інвестиції $P = (1000 \;\; 7000 \;\; 12\,000)$. Визначити, який прибуток гарантовано інвесторам.
2. Задано лінійну матрицю торгівлі трьох країн $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

   Знайти торговельні бюджети для збалансованої торгівлі трьох країн за умови, що сума бюджетів $X_1 + X_2 + X_3 = 41\,000$ грош. од.
3. Побудувати матричну модель умовної двогалузевої виробничої системи, якщо задано матрицю A прямих матеріальних витрат і матрицю обсягу кінцевої продукції Y: $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 500 \\ 100 \end{pmatrix}$. Визначити:

   а) коефіцієнти повних витрат;
   б) матрицю валового випуску X та план (валовий випуск) кожної галузі;
   в) коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат.
4. У таблиці наведено дані про виконання балансу за звітний період (в умовних грошових одиницях):

Галузь виробництва	Споживання		Обсяг кінцевої продукції	Обсяг валового випуску
	1	2		
1	100	20	180	300
2	155	45	150	350

Обчислити необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо обсяг кінцевої продукції першої галузі збільшиться втроє, а другої — залишиться на попередньому рівні.

Варіант № 3

1. Задано матрицю доходів інвесторів $R = \begin{pmatrix} 0,80 & 1,30 \\ 1,05 & 1,05 \\ 1,90 & 0,20 \end{pmatrix}$ і матрицю, що характеризує портфельні інвестиції $P = (1000\ \ 5000\ \ 15\,000)$. Визначити, який прибуток гарантовано інвесторам.

2. Задано лінійну матрицю торгівлі трьох країн $Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

   Знайти торговельні бюджети для збалансованої торгівлі трьох країн за умови, що сума бюджетів $X_1 + X_2 + X_3 = 70\,000$ грош. од.

3. Побудувати матричну модель умовної двогалузевої виробничої системи, якщо задано матрицю A прямих матеріальних витрат і матрицю обсягу кінцевої продукції Y: $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \end{pmatrix}$. Визначити:
   а) коефіцієнти повних витрат;
   б) матрицю валового випуску X та план (валовий випуск) кожної галузі;
   в) коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат.

4. У таблиці наведено дані про виконання балансу за звітний період (в умовних грошових одиницях):

Галузь виробництва	Споживання		Обсяг кінцевої продукції	Обсяг валового випуску
	1	2		
1	200	140	160	500
2	125	150	125	400

Обчислити необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо обсяг кінцевої продукції першої галузі збільшиться втроє, а другої — залишиться на попередньому рівні.

Варіант № 4

1. Задано матрицю доходів інвесторів $R = \begin{pmatrix} 0,7 & 1,4 \\ 1,05 & 1,05 \\ 1,85 & 0,25 \end{pmatrix}$ і матрицю, що характеризує портфельні інвестиції $P = (4000\ \ 3000\ \ 15\,000)$. Визначити, який прибуток гарантовано інвесторам.

2. Задано лінійну матрицю торгівлі трьох країн $Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

   Знайти торговельні бюджети для збалансованої торгівлі трьох країн за умови, що сума бюджетів $X_1 + X_2 + X_3 = 90\,000$ грош. од.

3. Побудувати матричну модель умовної двогалузевої виробничої системи, якщо задано матрицю A прямих матеріальних витрат і матрицю обсягу кінцевої продукції Y: $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \end{pmatrix}$. Визначити:
   а) коефіцієнти повних витрат;
   б) матрицю валового випуску X та план (валовий випуск) кожної галузі;
   в) коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат.

4. У таблиці наведено дані про виконання балансу за звітний період (в умовних грошових одиницях):

Галузь виробництва	Споживання		Обсяг кінцевої продукції	Обсяг валового випуску
	1	2		
1	20	200	180	400
2	135	300	65	500

Обчислити необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо обсяг кінцевої продукції першої галузі збільшиться вдвоє, а другої — залишиться на попередньому рівні.

Завдання 4
Вектори

Варіант № 1

1. Знайти довжину вектора $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k}$ і його напрямні косинуси.
2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 120°$, і $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Знайти $|\vec{a} - \vec{b}|$.
3. Дано вектори $\vec{a} = (2; 3)$, $\vec{b} = (1; -3)$, $\vec{c} = (-1; 3)$. Визначити, при якому значенні α вектори $\vec{p} = \vec{a} + \alpha\vec{b}$ і $\vec{q} = \vec{a} + \alpha\vec{c}$ колінеарні.
4. З'ясувати, чи буде система векторів $\vec{x}_1 = (4; 3; 2; 1)$, $\vec{x}_2 = (1; 2; 3; 4)$, $\vec{x}_3 = (5; 6 ; 5; 0)$ лінійно залежною.
5. Дано вектори $\vec{a} = (2; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; -1; 2)$, $\vec{c} = (2; 2; -1)$, $\vec{d} = (3; 7; -7)$. Показати, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис. Знайти розклад вектора $\vec{d}$ у базисі векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
6. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (4; -2; -3)$ і $\vec{b} = (0; 1; 3)$ й утворює з віссю Oy тупий кут. Знайти координати вектора $\vec{c}$, якщо $|\vec{c}| = 26$.
7. У просторі двох товарів із цінами (2, 4) вказати кілька наборів товарів вартістю 8, 16, 24 (умов. грош. од.). Нехай ціни змінилися: (3, 3). Навести приклади товарів, які подешевшали, подорожчали, вартість яких не змінилася.

Варіант № 2

1. Знайти довжину вектора $\vec{a} = 20\vec{i} + 30\vec{j} - 60\vec{k}$ і його напрямні косинуси.
2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $2\pi/3$. Знайти довжину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$.
3. Дано вектори $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (-3; 4)$, $\vec{c} = (2; 1)$. Визначити, при якому значенні α вектори $\vec{p} = \vec{b} + \alpha\vec{a}$ і $\vec{q} = \vec{a} + \alpha\vec{c}$ колінеарні.
4. З'ясувати, чи буде система векторів $\vec{x}_1 = (1; 2; 1; 1)$, $\vec{x}_2 = (-1; 3; 2; 1)$, $\vec{x}_3 = (-21; -1; 2; -11)$ лінійно залежною.
5. Дано вектори $\vec{a} = (3; -5; 2)$, $\vec{b} = (4; 5; 1)$, $\vec{c} = (-3; 0; -4)$, $\vec{d} = (-4; 5; -16)$. Показати, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис. Знайти розклад вектора $\vec{d}$ у базисі векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

6. Вектор $\vec{d}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (1; 0; -1)$ і $\vec{b} = (2; 3; 4)$ й утворює з віссю Oz тупий кут. Знайти координати вектора $\vec{d}$, якщо $|\vec{d}| = \sqrt{6}$.
7. У просторі двох товарів із цінами (3, 5) указати кілька наборів товарів вартістю 15, 30, 45 (умов. грош. од.). Нехай ціни змінилися: (4, 4). Навести приклади товарів, які подешевшали, подорожчали, вартість яких не змінилася.

Варіант № 3

1. Знайти довжину вектора $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ і його напрямні косинуси.
2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, й $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$.
3. Визначити, при яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = (-2; 3; \beta)$ і $\vec{b} = (\alpha; -6; 2)$ колінеарні.
4. З'ясувати, чи буде система векторів $\vec{x}_1 = (4; 3; 2; 1)$, $\vec{x}_2 = (2; 3; 4; 5)$, $\vec{x}_3 = (6; 6; 6; 6)$ лінійно залежною.
5. Дано вектори $\vec{a} = (2; 1; -1)$, $\vec{b} = (1; -1; 2)$, $\vec{c} = (3; -2; 1)$, $\vec{d} = (-8; 9; -1)$. Показати, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис. Знайти розклад вектора $\vec{d}$ у базисі векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
6. Вектор $\vec{d}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (3; 2; 2)$ і $\vec{b} = (18; -22; -5)$ й утворює з віссю Oy тупий кут. Знайти координати вектора $\vec{d}$, якщо $|\vec{d}| = 14$.
7. У просторі двох товарів із цінами (2, 9) указати кілька наборів товарів вартістю 18, 36, 54 (умов. грош. од.). Нехай ціни змінилися: (4, 7). Навести приклади товарів, які подешевшали, подорожчали, вартість яких не змінилася.

Варіант № 4

1. Знайти довжину вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$, і його напрямні косинуси.
2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\pi/3$, і $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Обчислити довжину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.
3. Дано вектори $\vec{p} = (-1; 3)$ і $\vec{q} = (5; 4)$. Визначити, при якому значенні α вектори $\vec{a} = \alpha\vec{p} + 17\vec{q}$ і $\vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$ колінеарні.

4. З'ясувати, чи буде система векторів $\vec{x}_1 = (1;\ 2;\ 3;\ 4)$, $\vec{x}_2 = (4;\ 3;\ 2;\ 1)$, $\vec{x}_3 = (1;\ 1\ ;\ 1;\ 1)$ лінійно залежною.

5. Задано вектори $\vec{a} = (4;\ 5;\ 2)$, $\vec{b} = (3;\ 0;\ 1)$, $\vec{c} = (-1;\ 4;\ 2)$, $\vec{d} = (5;\ 7;\ 8)$. Показати, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис. Визначити координати вектора $\vec{d}$ у базисі векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

6. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (3;\ 2;\ 3)$ і $\vec{b} = (-1;\ -2;\ -5)$ й утворює з віссю Oy тупий кут. Знайти координати вектора $\vec{c}$, якщо $|\vec{c}| = \sqrt{11}$.

7. У просторі двох товарів із цінами (4, 3) вказати кілька наборів товарів вартістю 12, 24, 48 (умов. грош. од.). Нехай ціни змінилися: (2, 5). Навести приклади товарів, які подешевшали, подорожчали, вартість яких не змінилася.

Завдання 5
Елементи аналітичної геометрії

Варіант № 1

1. Трикутник задано вершинами $A(2;\ 1)$, $B(3;\ 0)$, $C(4;\ 4)$. Визначити:
   а) рівняння сторони трикутника AB;
   б) рівняння середньої лінії трикутника MN, яка паралельна стороні AB;
   в) рівняння висоти, опущеної з вершини C;
   г) значення кута BAC;
   д) відстань від точки C до сторони AB.
   Зробити рисунок.

2. Знайти точку рівноваги, області прибутків і збитків компанії, яка щомісяця виготовляє x (тис. од.) виробів із ціною $p = 4$ грн. за одиницю, якщо суму загальних щомісячних витрат задано функцією $y_в = 600 + 2x$.

3. Задано залежність попиту $q = q(p)$ і пропозиції $s = s(p)$ від ціни p: $q = 800 - 10p$, $s = 200 + 10p$. Знайти рівноважну ціну й доход за рівноважної ціни. Побудувати графік функції доходу.

4. У просторі двох товарів описати бюджетну множину для векторів цін $\vec{p} = (7;\ 3)$ при доході $R = 42$. Записати її межу за допомогою звичайних і векторних нерівностей. Бюджетну множину та її межу зобразити графічно.

5. Записати рівняння кола, діаметр якого — відрізок прямої $x - y + 7 = 0$, який відтинається гіперболою $xy = -6$.

6. Записати канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1;\ -2;\ 1)$ перпендикулярно до площини, яка проходить через точки $M_1(3;\ 4;\ 6)$, $M_2(3;\ -2;\ -3)$, $M_3(6;\ 3;\ 2)$.

7. Знайти проекцію точки $M_1(1;\ -2;\ 1)$ на площину $x + 4y + 3z - 2 = 0$.

Варіант № 2

1. Трикутник задано вершинами $A(10;\ 13)$, $B(13;\ 6)$, $C(1;\ 1)$. Визначити:
   а) рівняння сторони трикутника AB;
   б) рівняння середньої лінії трикутника MN, яка паралельна стороні AB;
   в) рівняння висоти, опущеної з вершини C;
   г) значення кута BAC;
   д) відстань від точки C до сторони AB.
   Зробити рисунок.

2. Знайти точку рівноваги, області прибутків і збитків компанії, яка щомісяця виготовляє x (тис. од.) виробів із ціною $p = 7$ грн. за одиницю, якщо суму загальних щомісячних витрат задано функцією $y_в = 1000 + 5x$.

3. Задано залежність попиту $q = q(p)$ і пропозиції $s = s(p)$ від ціни p: $q = 400 - 20p$, $s = 70 + 10p$. Знайти рівноважну ціну й доход за рівноважної ціни. Побудувати графік функції доходу.

4. У просторі двох товарів описати бюджетну множину для векторів цін $\vec{p} = (5;\ 3)$ при доході $R = 60$. Записати її межу за допомогою звичайних і векторних нерівностей. Бюджетну множину та її межу зобразити графічно.

5. Записати рівняння кола, діаметр якого — відрізок прямої $5x - 4y + 40 = 0$, що лежить між осями координат.

6. Записати рівняння гіперболи, що проходить через фокуси еліпса $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ і фокуси якої лежать у вершинах еліпса.

7. Записати канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-6;\ 1;\ 3)$ перпендикулярно до площини, яка проходить через точки $M_1(2;\ 3;\ 0)$, $M_2(1;\ 2;\ 2)$, $M_3(-1;\ 0;\ -3)$.

Варіант № 3

1. Трикутник задано вершинами $A(-1; 7)$, $B(5; 3)$, $C(-2; -16)$. Визначити:
   а) рівняння сторони трикутника AB;
   б) рівняння середньої лінії трикутника MN, яка паралельна стороні AB;
   в) рівняння висоти, опущеної з вершини C;
   г) значення кута BAC;
   д) відстань від точки C до сторони AB.
   Зробити рисунок.
2. Знайти точку рівноваги, області прибутків і збитків компанії, яка щомісяця виготовляє x (тис. од.) виробів із ціною $p = 10$ грн. за одиницю, якщо суму загальних щомісячних витрат задано функцією $y_в = 2000 + 5x$.
3. Задано залежність попиту $q = q(p)$ і пропозиції $s = s(p)$ від ціни p : $q = 600 - 8p$, $s = 120 + 8p$. Знайти рівноважну ціну й доход за рівноважної ціни. Побудувати графік функції доходу.
4. У просторі двох товарів описати бюджетну множину для векторів цін $\bar{p} = (5; 8)$ при доході $R = 120$. Записати її межу за допомогою звичайних і векторних нерівностей. Бюджетну множину та її межу зобразити графічно.
5. Записати рівняння кола, описаного навколо трикутника, сторони якого лежать на прямих $x - y + 4 = 0$, $3x + y - 16 = 0$ і $x + 2y - 2 = 0$.
6. Записати рівняння гіперболи, що проходить через фокуси еліпса $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$ і фокуси якої лежать у вершинах еліпса.
7. Записати канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(6; 1; 2)$ перпендикулярно до площини, яка проходить через точки $M_1(3; 4; 2)$, $M_2(4; 5; 2)$, $M_3(7; 3; -2)$.

Варіант № 4

1. Трикутник задано вершинами $A(-3; 0)$, $B(1; 4)$, $C(3; -2)$. Визначити:
   а) рівняння сторони трикутника AB;
   б) рівняння середньої лінії трикутника MN, яка паралельна стороні AB;
   в) рівняння висоти, опущеної з вершини C;
   г) значення кута BAC;
   д) відстань від точки C до сторони AB.
   Зробити рисунок.

2. Знайти точку рівноваги, області прибутків і збитків компанії, яка щомісяця виготовляє x (тис. од.) виробів із ціною $p = 8$ грн. за одиницю, якщо суму загальних щомісячних витрат задано функцією $y_в = 1000 + 6x$.
3. Задано залежність попиту $q = q(p)$ і пропозиції $s = s(p)$ від ціни p : $q = 400 - 5p$, $s = 100 + 5p$. Знайти рівноважну ціну й доход за рівноважної ціни. Побудувати графік функції доходу.
4. У просторі двох товарів описати бюджетну множину для векторів цін $\bar{p} = (4; 9)$ при доході $R = 36$. Записати її межу за допомогою звичайних і векторних нерівностей. Бюджетну множину та її межу зобразити графічно.
5. Знайти відстань від фокуса параболи $y^2 = 4x$ до точок перетину її з колом $x^2 + y^2 = 12$.
6. Записати канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1; -2; 1)$ перпендикулярно до площини, яка проходить через точки $M_1(3; 4; 6)$, $M_2(3; -2; -3)$, $M_3(6; 3; 2)$.
7. Знайти проекцію M точки $M_2(2; -1; 3)$ на пряму $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}$.

Завдання 6
Границя й неперервність функції

Варіант № 1

1. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - x - 1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{3x^2 - 4x + 5}{5x^4 - 3x + 2}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+3} - x)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin 5x - \sin 7x}$; е) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{2x}$;

є) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$; ж) $\lim\limits_{x\to +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

2. Порівняти нескінченно малі функції при $x \to 0$:

   а) $\alpha(x) = \sqrt{1+x} - 1$ і $\beta(x) = x$;

   б) $\alpha(x) = \sqrt[3]{1+x^2} - 1$ і $\beta(x) = x$.

3. Дослідити на неперервність функції та визначити характер точок розриву:

   а) $f(x) = \begin{cases} e^x, & -4 \le x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ x-1, & 1 < x \le 4; \end{cases}$

   б) $f(x) = \arccos\dfrac{1}{x}$;

   в) $f(x) = e^{1/x}$.

4. Функція $f(x)$ не визначена в точці $x_0 = 0$. Задати значення $f(x_0)$ так, щоб $f(x)$ стала неперервною в точці x_0, якщо $f(x) = \dfrac{\sin x}{2x}$.

Варіант № 2

1. Обчислити границі:

   а) $\lim\limits_{x \to -1/3} \dfrac{x^2 - 1/9}{1+3x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2x+3}}{x^2 + x}$;

   в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5\pi x}{\sin 2\pi x}$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{2x}$;

   д) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$; е) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$;

   є) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[7]{1+x} - \sqrt{1+x}}{x}$; ж) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}$.

2. Порівняти нескінченно малі функції при $x \to 0$:

   а) $\alpha(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$ і $\beta(x) = x^2$;

   б) $\alpha(x) = \ln(1 - x^3)$ і $\beta(x) = x^3$.

3. Дослідити на неперервність функції та визначити характер точок розриву:

   а) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & -2 \le x \le 0, \\ x^2 + 2, & 0 < x \le 2; \end{cases}$

   б) $f(x) = \dfrac{1}{2x + 5^{\frac{1}{5-x}}}$;

   в) $f(x) = 2^{\operatorname{ctg} x}$.

4. Функція $f(x)$ не визначена в точці $x_0 = 0$. Задати значення $f(x_0)$ так, щоб $f(x)$ стала неперервною в точці x_0, якщо $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

Варіант № 3

1. Обчислити границі:

   а) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$; б) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$;

   в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 7x}{x}$; г) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 3x^4)^{1/x^4}$;

   д) $\lim\limits_{x \to \infty} x(5^{1/x} - 1)$; е) $\lim\limits_{x \to 10} \dfrac{\lg(x-9)}{x-10}$;

   є) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[7]{x}}$; ж) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 3 \operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

2. Порівняти нескінченно малі функції при $x \to 0$:

   а) $\alpha(x) = x\sqrt{x}$ і $\beta(x) = x$;

   б) $\alpha(x) = \sin^2(3\sqrt{x})$ і $\beta(x) = 9x$.

3. Дослідити на неперервність функції та визначити характер точок розриву:

   а) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 < x \le 2; \end{cases}$

   б) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$;

   в) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}}$.

4. Функція $f(x)$ не визначена в точці $x_0 = 0$. Задати значення $f(x_0)$ так, щоб $f(x)$ стала неперервною в точці x_0, якщо $f(x) = \dfrac{4^x - 1}{2x}$.

Варіант № 4

1. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x^2-3x}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{1/x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-x^2}{x-2}$; е) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)$;

є) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

2. Порівняти нескінченно малі функції при $x\to 0$:

а) $\alpha(x)=\arcsin 2x$ і $\beta(x)=x$;

б) $\alpha(x)=e^{2x}-e^{4x}$ і $\beta(x)=\sin 3x$.

3. Дослідити на неперервність функції та визначити характер точок розриву:

а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}, & x\neq 1,\\ 1, & x=1;\end{cases}$

б) $f(x)=\dfrac{|x|-x}{2x}$;

в) $f(x)=5^{\frac{1}{2-x}}$.

4. Функція $f(x)$ не визначена в точці $x_0=0$. Задати значення $f(x_0)$ так, щоб $f(x)$ стала неперервною в точці x_0, якщо $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$.

Завдання 7
Похідні й диференціали

Варіант № 1

1. Знайти похідні функцій:

а) $y=x^{\ln x}$;

б) $x=e^{-t}\sin t,\ \ y=e^{t}\cos t$;

в) $x\sin y+y\sin x=0$;

г) $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\cos x+\dfrac{1}{3}\sin^3 x$;

д) $y=\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$;

е) $y=e^x-\sin e^x\cos^3 e^x-\sin^3 e^x\cos e^x$.

2. Обчислити диференціали функцій:

а) $y=\dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x-6}{x+6}$; б) $y=\arccos\dfrac{1}{x}$.

3. Знайти наближене значення функції $y=\sqrt[4]{x}$ у точці $x_0=15{,}8$.
4. Визначити кут між кривими $y=x-x^2$ і $y=x^2-x$.
5. Знайти похідну n-го порядку функції $y=x^n\sqrt{x}$.
6. Знайти похідну шостого порядку функції $y=e^x\sin x$, використовуючи формулу Лейбніца.
7. Знайти y''_{xx} функцій:

а) $x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t)$; б) $x^3+y^3-3xy=0$.

8. Обчислити диференціал d^3y для функції $y=x(\ln x-1)$.

Варіант № 2

1. Знайти похідні функцій:

а) $y=(x^2+1)^{x^3}$;

б) $x=e^{-t},\ \ y=t^3,\ \ t\in \boldsymbol{R}$;

в) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$;

г) $y = \arccos\frac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}$;

д) $y = \ln\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$;

е) $y = xe^x(\sin x - \cos x) + e^x \cos e^x$.

2. Обчислити диференціали функцій:

а) $y = \text{arctg}\, e^{2x}$; б) $y = \sin(\ln x)$.

3. Знайти наближене значення функції $f(x) = \sqrt[5]{x}$ у точці $x_0 = 0{,}95$.
4. Визначити абсциси точок, в яких дотичні до графіка функції $y = 5x^5 - 3x^3 + x + 2$ паралельні прямій $x - y = 0$.
5. Знайти похідну n-го порядку функції $y = \frac{1 + x}{1 - x}$.
6. Знайти похідну п'ятого порядку функції $y = \frac{x^2}{x - 1}$, використовуючи формулу Лейбніца.
7. Знайти y''_{xx} функцій:

а) $x = e^{2t}$, $y = e^{3t}$, $t \in \boldsymbol{R}$; б) $x^2 - y^2 = a^2$.

8. Обчислити диференціал третього порядку для функції $y = e^x \ln x$.

Варіант № 3

1. Знайти похідні функцій:

а) $y = (\sin x)^{\cos x}$;

б) $x = t^3 + 3t + 1$, $y = 3t^5 + 5t^3 + 1$;

в) $\frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}\sqrt[3]{\frac{y}{x}} = 0$;

г) $y = \ln(3x^2 + \sqrt{9x^4})$;

д) $y = x^2\sqrt{a^2 - x^2} + a^2/2$;

е) $y = \ln \text{tg}\frac{x}{2} + \cos x + \frac{1}{3}\text{tg}^3 \sin x$.

2. Обчислити диференціали функцій:

а) $y = \ln(2x^3 + 3x^2)$; б) $y = \sqrt{x}\, \arcsin\sqrt{x}$.

3. Знайти наближене значення функції arctg 1,05.
4. Визначити рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2$, паралельної прямій $4x - y - 1 = 0$.
5. Знайти похідну n-го порядку функції $y = 2^x + 2^{-x}$.
6. Знайти похідну четвертого порядку функції $y = x^2 \sin 3x$, використовуючи формулу Лейбніца.
7. Знайти y''_{xx} функцій:

а) $x = \arccos\sqrt{t}$, $y = \sqrt{t - t^2}$; б) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$.

8. Обчислити d^2y для функції $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4})$.

Варіант № 4

1. Знайти похідні функцій:

а) $y = (x^2 + 1)^{\cos x}$;

б) $x = \left(\frac{2}{3}\sqrt{t} + 1\right)t$, $y = \sqrt{t}e^{\sqrt{t}}$;

в) $xy^2 + y^2 \ln x - 4 = 0$;

г) $y = \arccos(2e^{2x} - 1)$;

д) $y = \frac{\text{arctg}\, x}{x} - \ln\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$;

е) $y = \ln\frac{\sqrt{x^4 + 1} - x^2}{\sqrt{x^4 + 1} + x^2}$.

2. Обчислити диференціали функцій:

а) $y = \sin(\ln x)$; б) $y = \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2$.

3. Знайти наближене значення ln 8,194, якщо відомо, що ln 9 = 2,1972.
4. Визначити, під яким кутом перетинаються графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$.

5. Знайти похідну n-го порядку функції $y = \ln(2x + 3)$.
6. Знайти похідну п'ятого порядку функції $y = x \cos x$, використовуючи формулу Лейбніца.
7. Знайти y''_{xx} функцій:

   а) $x = \ln \operatorname{tg} \dfrac{t}{2}, \quad y = \ln \operatorname{tg} t$; б) $\operatorname{arctg} y = x + y$.

8. Обчислити диференціал третього порядку для функції $y = x \sin x$.

Завдання 8
Застосування похідної до дослідження функцій

Варіант № 1

1. Обчислити границі, використовуючи правила Лопіталя:

   а) $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\ln \sin 2x}{\ln 3x}$;

   б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\pi/2 - \operatorname{arctg} x}{\ln(1 + 1/x^2)}$;

   в) $\lim\limits_{x \to \pi/2} (x - \pi/2) \operatorname{tg} x$;

   г) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$;

   д) $\lim\limits_{x \to 0+} \left(\ln \dfrac{1}{x} \right)^x$.

2. Розкласти многочлен $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$ за степенями двочлена $(x - 2)$.
3. Записати формулу Маклорена для функції $f(x) = \ln(5 - 4x)$.
4. Дослідити функції та побудувати їхні графіки:

   а) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$; б) $y = \sqrt[3]{(x + 1)^2} - \sqrt[3]{x^2} + 1$;

   в) $y = xe^{-x}$; г) $y = x \ln x$.

Варіант № 2

1. Обчислити границі, використовуючи правила Лопіталя:

   а) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{\ln x}$;

   б) $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\ln(\sin 5\pi x)}{\ln(\sin 2\pi x)}$;

   в) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-3x}$;

   г) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x - 1} \right)$;

   д) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x)^x$.

2. Розкласти многочлен $f(x) = 7x^3 + 12x^2 + 3x + 1$ за степенями двочлена $(x - 2)$.
3. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x) = x \ln(1 + x)$.
4. Дослідити функції та побудувати їхні графіки:

   а) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$; б) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

   в) $y = x - \ln(1 + x)$; г) $y = xe^{\frac{-x^2}{2}}$.

Варіант № 3

1. Обчислити границі, використовуючи правила Лопіталя:

   а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x^2}$;

   б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4}{e^x}$;

   в) $\lim\limits_{x \to 1+} \ln x \ln(x - 1)$;

   г) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right)$;

д) $\lim\limits_{x \to 0}(1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$.

2. Розкласти многочлен $f(x) = x^6 - 4x^5 + x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ за степенями двочлена $(x + 1)$.
3. Записати формулу Тейлора для функції $f(x) = \ln(2x + 1)$ в околі точки $x_0 = 1/2$.
4. Дослідити функції та побудувати їхні графіки:

а) $y = \dfrac{x^3}{3(x-1)^2}$; б) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$;

в) $y = x + \operatorname{arctg} x$; г) $y = x^{\frac{2}{3}} e^{\frac{-x^2}{3}}$.

Варіант № 4

1. Обчислити границі, використовуючи правила Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}$;

в) $\lim\limits_{x \to 0+} x^{\alpha} \ln x,\ \ \alpha > 0$;

г) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - \sqrt{x})$;

д) $\lim\limits_{x \to 0+} (\ln(x + e))^{1/x}$.

2. Розкласти многочлен $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ за степенями двочлена $(x - 2)$.
3. Записати формулу Маклорена для функції $f(x) = e^{\cos x}$.
4. Дослідити функції та побудувати їхні графіки:

а) $y = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$; б) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$;

в) $y = 2x - \arcsin x$; г) $y = x^2 e^{4x}$.

Завдання 9
Застосування похідної в економічних задачах

Варіант № 1

1. Задано функції попиту $q = q(p)$ і пропозиції $s = s(p)$:

$$q = 1400 - 5p,\ \ s = 1100 + 5p.$$

Визначити:
а) рівноважну ціну;
б) еластичність попиту й пропозиції за рівноважної ціни;
в) доход за рівноважної ціни;
г) ціну, за якої доход буде максимальним;
д) ціну одиниці продукції, за якої попит буде еластичним.

2. Фірма реалізує свою продукцію за ціною $p = 40$ за одиницю, а витрати виробництва при цьому визначаються функцією $C(x) = 4x + 3x^3$. Знайти оптимальний для фірми обсяг випуску продукції та відповідний йому прибуток. Побудувати графік функції прибутку залежно від обсягу випуску продукції.
3. Залежність між витратами виробництва фірми C (умов. грош. од.) та обсягом випуску продукції x (од.) виражається функцією $C(x) = 10x - 0{,}04x^3$. Визначити середні й граничні витрати виробництва, якщо обсяг випуску продукції $x = 5$ од., та оптимальний для фірми обсяг випуску продукції.
4. Залежність між собівартістю одиниці продукції y (умов. грош. од.) та обсягом випуску продукції x (од.) виражається функцією $y = -0{,}3x + 900$. Знайти еластичність собівартості за обсягу випуску продукції $x = 500$. Визначити, за якого обсягу випуску продукції собівартість буде еластичною.
5. Виробнича функція фірми $y = 10\sqrt[3]{x}$, де обсяг основних фондів x та обсяг випуску продукції y задано у вартісній формі. Обсяг основних фондів становить 27 умов. грош. од. Знайти середню й граничну фондовіддачу та еластичність випуску за фондами. Розв'язати основну задачу фірми й визначити оптимальний обсяг випуску продукції, якщо ціна на неї вдвоє більша за ціну ресурсу.

Варіант № 2

1. Задано функції попиту $q = q(p)$ і пропозиції $s = s(p)$:

$$q = 1500 - 10p,\ \ s = 100 + 10p.$$

Визначити:
а) рівноважну ціну;
б) еластичність попиту й пропозиції за рівноважної ціни;
в) доход за рівноважної ціни;
г) ціну, за якої доход буде максимальним;
д) ціну одиниці продукції, за якої попит буде еластичним.

2. Фірма реалізує свою продукцію за ціною $p = 4$ за одиницю, а витрати виробництва при цьому визначаються функцією $C(x) = x + x^3$. Знайти оптимальний для фірми обсяг випуску продукції та відповідний йому прибуток. Побудувати графік функції прибутку залежно від обсягу випуску продукції.

3. Залежність між витратами виробництва фірми C (умов. грош. од.) та обсягом випуску продукції x (од.) виражається функцією $C(x) = 0{,}05x^2 + 20x + 700$, а ціна одиниці продукції $p(x) = 30 - 0{,}1x$. Визначити середні й граничні витрати виробництва, якщо обсяг випуску продукції $x = 10$ од., та оптимальний для фірми обсяг випуску продукції.

4. Залежність між витратами виробництва цигарок y та вмістом шкідливих речовин у них x (%) має вигляд $y = \dfrac{10\,000}{x} - 100$. Визначити середні й граничні витрати виробництва, якщо вміст шкідливих речовин у цигарках становить $x = 10$ %. Знайти оптимальний для фірми обсяг випуску продукції.

5. Виробнича функція фірми $y = 40\sqrt[4]{x^3}$, де обсяг основних фондів x та обсяг випуску продукції y задано у вартісній формі. Обсяг основних фондів становить 16 умов. грош. од. Знайти середню й граничну фондовіддачу та еластичність випуску за фондами. Розв'язати основну задачу фірми й визначити оптимальний обсяг випуску продукції, якщо ціна на неї вдвоє більша за ціну ресурсу.

Варіант № 3

1. Задано функції попиту $q = q(p)$ і пропозиції $s = s(p)$:

$$q = 2000 - 20p, \quad s = 200 + 10p.$$

Визначити:
а) рівноважну ціну;
б) еластичність попиту й пропозиції за рівноважної ціни;
в) доход за рівноважної ціни;
г) ціну, за якої доход буде максимальним;
д) ціну одиниці продукції, за якої попит буде еластичним.

2. Фірма реалізує свою продукцію за ціною $p = 28$ за одиницю, а витрати виробництва при цьому визначаються функцією $C(x) = 4x + 2x^3$. Знайти оптимальний для фірми обсяг випуску продукції та відповідний йому прибуток. Побудувати графік функції прибутку залежно від обсягу випуску продукції.

3. Залежність між витратами виробництва фірми C (умов. грош. од.) та обсягом випуску продукції x (од.) виражається функцією $C(x) = 1000x - 0{,}05x^4$. Визначити середні й граничні витрати виробництва, якщо обсяг випуску продукції $x = 10$ од., та оптимальний для фірми обсяг випуску продукції.

4. Валовий продукт деякої держави змінюється з часом t і виражається формулою ВВП = $100 + t$, а кількість населення змінюється за законом К = $200 + 4t$. Знайти швидкість зміни частки валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина.

5. Виробнича функція фірми $y = 30\sqrt[4]{x}$, де обсяг основних фондів x та обсяг випуску продукції y задано у вартісній формі. Обсяг основних фондів становить 81 умов. грош. од. Знайти середню й граничну фондовіддачу та еластичність випуску за фондами. Розв'язати основну задачу фірми й визначити оптимальний обсяг випуску продукції, якщо ціна на неї вдвоє більша за ціну ресурсу.

Варіант № 4

1. Задано функції попиту $q = q(p)$ і пропозиції $s = s(p)$:

$$q = 1800 - 10p, \quad s = 1200 + 10p.$$

Визначити:
а) рівноважну ціну;
б) еластичність попиту й пропозиції за рівноважної ціни;
в) доход за рівноважної ціни;
г) ціну, за якої доход буде максимальним;
д) ціну одиниці продукції, за якої попит буде еластичним.

2. Фірма реалізує свою продукцію за ціною $p = 400$ за одиницю, а витрати виробництва при цьому визначаються функцією $C(x) = 25x + 5x^3$. Знайти оптимальний для фірми обсяг випуску продукції та відповідний йому прибуток. Побудувати графік функції прибутку залежно від обсягу випуску продукції.

3. Обсяг випуску продукції u (од.) фірми виражається функцією $u = -t^3 + 10t^2 - 100t + 10$, де t — робочий час (год). Визначити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни через годину після початку роботи й за годину до її завершення, $t \in [0; 8]$.

4. Валовий продукт деякої держави змінюється з часом t і виражається формулою ВВП = $50 + t$, а кількість населення змінюється за законом К = $100 + 2t$. Знайти швидкість зміни частки валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина.

5. Виробнича функція фірми $y = 50\sqrt{x}$, де обсяг основних фондів x та випуск продукції y задано у вартісній формі. Обсяг основних фондів становить 100 умов. грош. од. Знайти середню й граничну фондовіддачу та еластичність випуску за фондами. Розв'язати основну задачу фірми й визначити оптимальний обсяг випуску продукції, якщо ціна на неї вдвоє більша за ціну ресурсу.

Завдання 10
Функції багатьох змінних

Варіант № 1

1. Знайти й графічно зобразити область визначення функції
$$z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 9)(18 - x^2 - y^2)}.$$

2. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{3 - \sqrt{x^2 y + 9}}{5x^2 y}$.

3. Побудувати лінії рівня функції $z = |x| + |y|$.

4. Обчислити повний диференціал dz і частинну похідну $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ функції
$$z = \ln\frac{x}{y} + \operatorname{arctg}(x^y).$$

5. За допомогою повного диференціала наближено обчислити $(2{,}01)^{3{,}04}$.

6. Перевірити, чи виконується для функції $z = \sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$ співвідношення $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{2}$.

7. Знайти grad z у точці M_0 та $\dfrac{dz}{dl}$ у точці M_0:
$$z = \ln(3x^2 + 2y^2 - xy), \quad M_0(1;\ 1), \quad \vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j}.$$

Варіант № 2

1. Знайти й графічно зобразити область визначення функції
$$z = \frac{x}{y} + \ln(xy).$$

2. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ y \to \infty}} \left(\dfrac{y + 2}{y + 1}\right)^{xy}$.

3. Побудувати лінії рівня функції $z = \sqrt{\dfrac{y^2}{4} + \dfrac{x^2}{16} - 1}$.

4. Обчислити повний диференціал dz і частинну похідну $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ функції
$$z = e^{xy} - \arcsin\frac{x^2}{y + 1}.$$

5. За допомогою повного диференціала наближено обчислити $(1{,}03)^4\,(2{,}01)^3$.

6. Перевірити, чи виконується для функції $z = y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ співвідношення
$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

7. Знайти grad z у точці M_0 та $\dfrac{dz}{dl}$ у точці M_0:
$$z = \ln(x^2 + y^2 - 2x + 1), \quad M_0(-1;\ 1), \quad \vec{l} = -\vec{i} + 2\vec{j}.$$

Варіант № 3

1. Знайти й графічно зобразити область визначення функції
$$z = \sqrt{2xy + y^2}.$$

2. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{(1 + x)(1 - y)}{\sqrt{1 + x - y}}$.

3. Побудувати лінії рівня функції $z = 1 - |x| - |y|$.

4. Обчислити повний диференціал dz і частинну похідну $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ функції

$$z = e^{xy} - \arcsin\frac{x}{y+1}.$$

5. За допомогою повного диференціала наближено обчислити $\sqrt{3,95^2 + 3,15^2}$.

6. Перевірити, чи виконується для функції $z = xe^{-\frac{y}{x}}$ співвідношення

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

7. Знайти grad z у точці M_0 та $\frac{dz}{d\vec{l}}$ у точці M_0:

$$z = \mathrm{arctg}(x^3 y^2),\ \ M_0(2;\ -1),\ \ \vec{l} = 5\vec{i} + 2\vec{j}.$$

Варіант № 4

1. Знайти й графічно зобразити область визначення функції

$$z = \sqrt{(8 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)}.$$

2. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\mathrm{arctg}(x+y)}{x+y}$.

3. Побудувати лінії рівня функції $z = x^2 + y^2 - 2y + 4$.

4. Знайти повний диференціал dz і частинну похідну $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ функції

$$z = x\cos 2y - \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

5. За допомогою повного диференціала наближено обчислити $\sqrt{1,01^2 + 2,05^2}$.

6. Перевірити, чи виконується для функції $z = x^y$ співвідношення

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} - (1 + y\ln x)\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

7. Знайти grad z у точці M_0 та $\frac{dz}{d\vec{l}}$ у точці M_0:

$$z = \ln(4x^3 + 2y^2),\ \ M_0(3;\ 1),\ \ \vec{l} = 5\vec{i} - 2\vec{j}.$$

Завдання 11
Екстремуми функцій багатьох змінних

Варіант № 1

1. Знайти екстремуми функцій:

а) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$;

б) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, $x > 0$, $y > 0$;

в) $z = e^{-x^2 - y^2}(2x^2 + y^2)$.

2. Знайти найбільше й найменше значення функцій в області D:

а) $z = x^2 y(4 - x - y)$, D: $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 6$;

б) $z = x + y$, D: $x^2 + y^2 \le 1$.

3. Знайти умовні екстремуми функцій:

а) $z = x^2 + y^2$ за умови $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$;

б) $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ за умови $y - x = \pi/4$.

Варіант № 2

1. Знайти екстремуми функцій:

а) $z = x^3 + y^3 - 9xy$;

б) $z = xy(4 - x)(4 - y)$;

в) $z = x^3 y^2 (6 - x - y)$.

2. Знайти найбільше й найменше значення функцій в області D:

а) $z = x^3 + 3y^2 - x - 18y - 4$, D: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$;

б) $z = x^2 - y^2$, D: $x^2 + y^2 \le 1$.

3. Знайти умовні екстремуми функцій:

а) $z = xy$ за умови $4x - 3y = 12$;

б) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ за умови $x + y = 2$.

Варіант № 3

1. Знайти екстремуми функцій:

   а) $z = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y + 1$;

   б) $z = e^{-\frac{x}{2}}(x + y^2)$;

   в) $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad x > 0, \quad y > 0.$

2. Знайти найбільше й найменше значення функцій в області D:

   а) $z = x^3 + y^3 - 3xy, \quad D: 0 \le x \le 2, \ -1 \le y \le 2$;

   б) $z = x^2 - 2y^2 + 4xy, \quad D: x = 0, \ y = 0, x + y \le 1.$

3. Знайти умовні екстремуми функцій:

   а) $z = x^2 + y^2 + 3xy$ за умови $x + y = 1$;

   б) $z = x + y$ за умови $x^2 + y^2 = 1$.

Варіант № 4

1. Знайти екстремуми функцій:

   а) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2 + 6$;

   б) $z = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$;

   в) $z = 1 - (x^2 + y^2)^{2/3}$.

2. Знайти найбільше й найменше значення функцій в області D:

   а) $z = x^2 - xy + y^2, \quad D: |x| + |y| \le 1$;

   б) $z = x^2y(2 - x - y), \ D: x = 0, \ y = 0, \ x + y = 6.$

3. Знайти умовні екстремуми функцій:

   а) $z = x^3 - y^3$ за умови $x + y = 1$;

   б) $z = x^2 - xy + y^2$ за умови $x^2 + y^2 = 1$.

Завдання 12
Застосування функцій багатьох змінних в економічних задачах

Варіант № 1

1. Нехай фірма випускає два види товарів в обсязі x і y, на які встановлено ціну за одиницю $p_x = 8$ і $p_y = 10$ грн. відповідно; $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$ — функція витрат фірми. Визначити її максимальний прибуток.

2. У таблиці вміщено дані про пробіг автомобіля x (тис. км) та витрату оливи y (л):

x_i	50	70	90	110	130
y_i	0,2	0,5	0,8	1,1	1,3

   Припускаючи, що між змінними x і y існує лінійна залежність, знайти емпіричну формулу $y = ax + b$ методом найменших квадратів.

3. Виробнича функція фірми має вигляд $f(x, y) = \sqrt{x}\sqrt[4]{y}$, де x, y — обсяги першого й другого ресурсів відповідно. Ціни за їхню одиницю — $p_x = 40$ і $p_y = 20$ умов. грош. од. Знайти максимальний прибуток, який може одержувати фірма, якщо ціна на її продукцію становить $p_0 = 80$ умов. грош. од.

4. Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох ресурсів x_1 та x_2 і виражається функцією $P(x_1, x_2) = 8000 - x_1^2 - x_2^2 + 40x_1 + 60x_2$. Кількість ресурсів обмежена квотою $x_1 + x_2 = 100$. Визначити витрати ресурсів x_1 і x_2, що забезпечують максимальний прибуток підприємства, та обчислити його.

Варіант № 2

1. Нехай фірма випускає два види товарів в обсязі x і y, на які встановлено ціни за одиницю $p_x = 24$ і $p_y = 30$ грн. відповідно; $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$ — функція витрат фірми. Знайти її максимальний прибуток.

2. У таблиці наведено дані про ціну товару x (умов. грош. од.) та рівень продажів y (тис. од.):

x_i	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0
y_i	200	160	120	90	80

Припускаючи, що між змінними x і y існує лінійна залежність, знайти емпіричну формулу $y = ax + b$ методом найменших квадратів.

3. Виробнича функція фірми має вигляд $f(x, y) = \sqrt{x}\sqrt[4]{y}$, де x, y — обсяги першого й другого ресурсів відповідно. Ціни за їхню одиницю — $p_x = 50$ і $p_y = 25$ умов. грош. од. Знайти максимальний прибуток, який може одержувати фірма, якщо ціна на її продукцію становить $p_0 = 100$ умов. грош. од.

4. Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох ресурсів x_1 та x_2 і виражається функцією $P(x_1, x_2) = 90\,000 - x_1^2 - 2x_2^2 + 40x_1 + 120x_2$. Кількість ресурсів обмежена квотою $x_1 + x_2 = 200$. Визначити витрати ресурсів x_1 і x_2, що забезпечують максимальний прибуток підприємства, та обчислити його.

Варіант № 3

1. Нехай фірма випускає два види товарів в обсязі x і y, на які встановлено ціну за одиницю $p_x = 72$ і $p_y = 90$ грн. відповідно; $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$ — функція витрат фірми. Визначити її максимальний прибуток.

2. У таблиці вміщено дані про ціну на нафту x (доларів за барель) і ціну на акції певної нафтовидобувної компанії y (доларів):

x_i	35	38	45	47	53
y_i	5,0	5,8	6,2	7,1	7,9

Припускаючи, що між змінними x і y існує лінійна залежність, знайти емпіричну формулу $y = ax + b$ методом найменших квадратів.

3. Виробнича функція фірми має вигляд $f(x, y) = \sqrt{x}\sqrt[4]{y}$, де x, y — обсяги першого й другого ресурсів відповідно. Ціни за їхню одиницю — $p_x = 10$ і $p_y = 5$ умов. грош. од. Знайти максимальний прибуток, який може одержувати фірма, якщо ціна на її продукцію становить $p_0 = 20$ умов. грош. од.

4. Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох ресурсів x_1 та x_2 і виражається функцією $P(x_1, x_2) = 10\,000 - 2x_1^2 - 4x_2^2 + 60x_1 + 80x_2$. Кількість ресурсів обмежена квотою $x_1 + x_2 = 100$. Визначити витрати

ресурсів x_1 і x_2, що забезпечують максимальний прибуток підприємства, та обчислити його.

Варіант № 4

1. Нехай фірма випускає два види товарів в обсязі x і y, на які встановлено ціни за одиницю $p_x = 216$ і $p_y = 270$ грн. відповідно; $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$ — функція витрат фірми. Знайти її максимальний прибуток.

2. У таблиці наведено дані про доход людини x (грн.) та її витрати на продукти харчування y (грн.):

x_i	300	400	500	600	700
y_i	180	210	250	270	290

Припускаючи, що між змінними x і y існує лінійна залежність, знайти емпіричну формулу $y = ax + b$ методом найменших квадратів.

3. Виробнича функція фірми має вигляд $f(x, y) = \sqrt{x}\sqrt[4]{y}$, де x, y — обсяги першого й другого ресурсів відповідно. Ціни за їхню одиницю $p_x = 60$ і $p_y = 30$ умов. грош. од. Знайти максимальний прибуток, який може одержувати фірма, якщо ціна на її продукцію становить $p_0 = 120$ умов. грош. од.

4. Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох ресурсів x_1 та x_2 і виражається функцією $P(x_1, x_2) = 25\,000 - x_1^2 - x_2^2 + 30x_1 + 100x_2$. Кількість ресурсів обмежена квотою $x_1 + x_2 = 155$. Визначити витрати ресурсів x_1 і x_2, що забезпечують максимальний прибуток підприємства, та обчислити його.

Завдання 13
Невизначений інтеграл

Варіант № 1

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int x\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$;   б) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$;

в) $\int \frac{2\cdot 3^x + 3\cdot 2^x}{3^x}dx$;   г) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$.

2. Обчислити інтеграли, використовуючи відповідні заміни:

а) $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$;   б) $\int 2^{-x^2}x\,dx$;

в) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$;   г) $\int \sin^3 x\cos x\,dx$.

3. Обчислити інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами:

а) $\int (x^2+2x+3)\cos x\,dx$;   б) $\int x\ln x\,dx$;

в) $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$;   г) $\int e^{2x}\sin x\,dx$.

4. Обчислити інтеграли від дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{(2x+1)dx}{x^2-5x+4}$;   б) $\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x}dx$.

Варіант № 2

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$;   б) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$;

в) $\int \frac{3^{x+1}-5^{x-1}}{15^x}dx$;   г) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

2. Обчислити інтеграли, використовуючи відповідні заміни:

а) $\int \frac{dx}{x\ln x}$;   б) $\int \frac{3^x\,dx}{\sqrt{1-9^x}}$;

в) $\int x^3(x^4-1)dx$;   г) $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin x}$.

3. Обчислити інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами:

а) $\int (x^2+5x+7)e^{3x}dx$;   б) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$;

в) $\int x^2\operatorname{arctg} x\,dx$;   г) $\int e^{x/2}\cos x\,dx$.

4. Обчислити інтеграли від дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{7x-3}{x^3+2x^2-3x}dx$;   б) $\int \frac{x^2\,dx}{1-x^4}$.

Варіант № 3

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{x^2}dx$;   б) $\int 2\cos^2\frac{x}{2}dx$;

в) $\int \frac{e^{-x}+e^{-3x}}{e^x}dx$;   г) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}}$.

2. Обчислити інтеграли, використовуючи відповідні заміни:

а) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos x}}$;   б) $\int \frac{\ln x+2}{x\sqrt{\ln x}}dx$;

в) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^{4x}}}$;   г) $\int x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$.

3. Обчислити інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами:

а) $\int (x^2+2x+3)e^{-x}dx$;   б) $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$;

в) $\int x^2\operatorname{arctg} x\,dx$;   г) $\int 3^x\cos x\,dx$.

4. Обчислити інтеграли від дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{dx}{(x^2+2)(x-1)}$;   б) $\int \frac{x^5\,dx}{x^3-1}$.

Варіант № 4

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{x^{3/4}+x^{2/3}+x^{1/2}}{x}\,dx$;   б) $\int \mathrm{tg}^2\,x\,dx$;

в) $\int \left(\frac{e^{-2x}+e^{3x}}{e^x}\right)dx$;   г) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}$.

2. Обчислити інтеграли, використовуючи відповідні заміни:

а) $\int 2^{x^2}\,x\,dx$;   б) $\int \frac{5^x\,dx}{\sqrt{1-25^x}}$;

в) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$;   г) $\int x\sqrt[3]{x^2-1}\,dx$.

3. Обчислити інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами:

а) $\int (2x^2+3x)e^{-x}\,dx$;   б) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$;

в) $\int \arcsin x\,dx$;   г) $\int e^{x/2}\sin 2x\,dx$.

4. Обчислити інтеграли від дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$;   б) $\int \frac{6x^2-13x+4}{x^3-3x^2+2x}\,dx$.

Завдання 14
Визначені й невласні інтеграли. Застосування в економічних задачах

Варіант № 1

1. Користуючись формулою Ньютона—Лейбніца, обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos^2(x/2)}$;   б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$;   в) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx$.

2. Обчислити інтеграли, зробивши відповідні заміни:

а) $\int\limits_0^1 (2x^3+1)^4 x^2\,dx$;   б) $\int\limits_0^2 \frac{4x\,dx}{\sqrt{1+2x^2}}$;   в) $\int\limits_0^{-\pi/6} e^{\sin x}\cos x\,dx$.

3. Обчислити інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами:

а) $\int\limits_1^4 x\ln x\,dx$;   б) $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$.

4. Обчислити невласні інтеграли:

а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$;   б) $\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln x}$.

5. Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = \arcsin x$;   б) $y = \arccos x$;   в) $y = 0$.

6. Знайти обсяг випуску продукції фірми за 5 років, якщо виробнича функція Кобба—Дугласа має вигляд $g(t) = (2t+1)e^{3t}$.

7. Розподіл прибуткового податку деякої країни виражається функцією

$y = \frac{19}{20}x^2 + \frac{1}{20}x$ (крива Лоренца), де x — частина населення, що

сплачує податки, а y — відповідна частка загального податку населення. Обчислити коефіцієнт Джині.

8. Визначити дисконтний дохід за 5 років за процентної ставки 10 %, якщо початкові капіталовкладення становили 40 млн грн., а очікуване щорічне зростання капіталу — 2 млн грн.

Варіант № 2

1. Користуючись формулою Ньютона—Лейбніца, обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x}$; б) $\int\limits_{-1}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; в) $\int\limits_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})dx$.

2. Обчислити інтеграли, зробивши відповідні заміни:

а) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{2\sin x + 1}}$; б) $\int\limits_1^{\sqrt{6}} \frac{32x\, dx}{(x^2+1)^5}$; в) $\int\limits_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x \ln x}$.

3. Обчислити інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами:

а) $\int\limits_0^{1/2} \arcsin x\, dx$; б) $\int\limits_0^1 xe^{-x}\, dx$.

4. Обчислити невласні інтеграли:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{5x}\, dx$; б) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$.

5. Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = e^x$; б) $y = e^{-x}$; в) $x = 1$.

6. Продуктивність праці робітника протягом дня задано функцією $f(t) = \frac{3}{4t+5} + 5$. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітниками за першу годину робочого часу.

7. За даними дослідження в розподілі доходів у деякій країні крива Лоренца описується функцією $y = 7 - \sqrt{49 - x^2}$, де x — частина населення, а y — частка його доходів. Обчислити коефіцієнт Джині.

8. Визначити дисконтний доход за 3 роки за процентної ставки 5 %, якщо початкові капіталовкладення становили 10 млн грн., а очікуване шорічне збільшення капіталу — 1 млн грн.

Варіант № 3

1. Користуючись формулою Ньютона—Лейбніца, обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$; б) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; в) $\int\limits_5^{5\sqrt{3}} \frac{dx}{25+x^2}$.

2. Обчислити інтеграли, зробивши відповідні заміни:

а) $\int\limits_0^2 \sqrt{x^3+1}\, x^2\, dx$; б) $\int\limits_e^{e^2} \frac{1+\ln x}{x} dx$; в) $\int\limits_0^1 e^{-x^3} x^2\, dx$.

3. Обчислити інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами:

а) $\int\limits_0^{\pi/4} x \sin 2x\, dx$; б) $\int\limits_0^1 \arccos x\, dx$.

4. Обчислити невласні інтеграли:

а) $\int\limits_4^{\infty} \frac{dx}{(x-3)^3}$; б) $\int\limits_0^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

5. Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = (x-4)^2$; б) $y = 16 - x^2$.

6. Знайти обсяг випуску продукції підприємством за 5 років, якщо виробнича функція $f(t) = (1 + 0{,}05t)e^{2t}$.

7. За даними дослідження розподілу доходів у деякій країні крива Лоренца описується функцією $y = 5 - \sqrt{25 - x^2}$, де x — частина населення, а y —частка його доходів. Обчислити коефіцієнт Джині.

8. Визначити дисконтний доход за 3 років за процентної ставки 7 %, якщо початкові капіталовкладення становили 30 млн грн., а очікуване щорічне зростання капіталу — 3 млн грн.

Варіант № 4

1. Користуючись формулою Ньютона—Лейбніца, обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_0^1 \frac{(x+\sqrt{x})dx}{\sqrt[3]{x}}$; б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 x - \sin^2 x)dx$; в) $\int\limits_{1/3}^{\sqrt{3}/3} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

2. Обчислити інтеграли, зробивши відповідні заміни:

а) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{2} \sqrt[3]{(x^4-8)^2}\, x^3\, dx$; б) $\int\limits_{3\pi/2}^{2\pi} \sqrt{1-\cos x}\, \sin x\, dx$; в) $\int\limits_{1/3}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4-9x}}$.

3. Обчислити інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами:

а) $\int\limits_0^1 x \operatorname{arctg} x\, dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} x^2 \cos x\, dx$.

4. Обчислити невласні інтеграли:

а) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = e^{2x}$; б) $y = e^{\ 2x}$; в) $x = 2$.

6. Продуктивність праці робітників підприємства виражається функцією $f(t) = \frac{10}{t+2} + 1$. Знайти обсяг випуску продукції (у вартісній формі) за восьмигодинний робочий день.

7. Розподіл доходів населення деякої країни виражається функцією $y = 4 - \sqrt{16 - x^2}$ (крива Лоренца), де x — частина населення, а y — частка його доходів. Обчислити коефіцієнт Джині.

8. Визначити дисконтний доход за 3 роки за процентної ставки 10 %, якщо початкові капіталовкладення становили 20 млн грн., а очікуване щорічне зростання капіталу — 2 млн грн.

Завдання 15
Диференціальні рівняння

Варіант № 1

1. Розв'язати диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними:

а) $y(1+x^2)y' = 1 + y^2$;

б) $xy\, dx = (x+1)dy$;

в) $dy - 2\sqrt{y} \ln x\, dx = 0$.

2. Розв'язати однорідні диференціальні рівняння:

а) $(x^2 + y^2)dx - 2xy\, dy = 0$;

б) $(2x + 3y)dx + (x - 2y)dy = 0$.

3. Розв'язати лінійні диференціальні рівняння:

а) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$;

б) $y' + \frac{xy}{1-x^2} = \arcsin x + x,\ \ y(0) = 1$.

Варіант № 2

1. Розв'язати диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними:

а) $x(1+y^2)dx - y(1+x^2)dy = 0$;

б) $e^x\, dx - y^3(1+e^x)dy = 0$;

в) $y' = e^{x+y},\ \ y(0) = 0$.

2. Розв'язати однорідні диференціальні рівняння:

а) $xy' = y \ln \frac{y}{x}$;

б) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$.

3. Розв'язати лінійні диференціальні рівняння:

а) $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x,\ \ y(0) = 0$;

б) $y' + y \cos x = e^{-\sin x},\ \ y(0) = 1$.

Варіант № 3

1. Розв'язати диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними:

а) $(1 + x^2)y^3\,dx - x^3(1 + y^2)dy = 0$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg} y}{\cos^2 x}dx + \dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 y}dy = 0$;

в) $e^y\left(\dfrac{dy}{dx} + 1\right) = 1,\quad y(0) = 1.$

2. Розв'язати однорідні диференціальні рівняння:

а) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$;

б) $(5x - 7y)dy + (x + y)dx = 0.$

3. Розв'язати лінійні диференціальні рівняння:

а) $xy' - y = x^2 \cos x,\quad y(\pi/2) = 0$;

б) $x \ln x\, y' + y = 2 \ln x.$

Варіант № 4

1. Розв'язати диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними:

а) $\dfrac{x^2}{x^3 + 5}dx + \dfrac{y^2}{y^3 + 5}dy = 0$;

б) $xy' = y \ln y$;

в) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy^2 + y^2}{x^2 y - x^2},\quad y(1) = 1.$

2. Розв'язати однорідні диференціальні рівняння:

а) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x}$;

б) $(2x + y)dx + (x - y)dy = 0.$

3. Розв'язати лінійні диференціальні рівняння:

а) $xy' + y = xy^2 \ln x$;

б) $y' - y = e^x.$

Список рекомендованої літератури

1. *Anthony M., Biggs N.* Mathematics for economics and finance: Methods and modelling. — Cambridge University Press, 1998.
2. *Ашманов С. А.* Математические модели и методы в экономике. — М., 1980.
3. *Барковський А. В., Барковська Н. В.* Математика для економістів: Вища математика. — К.: НАУ, 1997.
4. *Бугір М. К.* Математика для економістів. — Тернопіль, 1998.
5. *Валєєв К. Г., Джалладова І. А.* Вища математика: У 2 ч. — Ч. 1. — К.: КНЕУ, 2001.
6. *Валєєв К. Г., Джалладова І. А.* Вища математика: У 2 ч. — Ч. 2. — К.: КНЕУ, 2002.
7. *Вища* математика: У 2 кн. — 2-ге вид. / За ред. Г. Л. Кулініча. — К.: Либідь, 2003.
8. *Вища* математика: Основні означення, приклади і задачі / За ред. Г. Л. Кулініча. — К.: Либідь, 1992.
9. *Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н.* Математические методы анализа экономики. — М.: ДИС, 1997.
10. *Керекеша П. В.* Лекції і вправи з вищої математики. — Одеса: Астропрнт, 2003.
11. *Красс М. С., Чупрынов Б. П.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. — М.: ДЕЛО, 2000.
12. *Кремер Н.* Высшая математика для экономистов. — М.: ЮНИТИ, 1998.
13. *Макконел К. Р., Брю С. Л.* Экономикс. — М.: Республика, 1992.
14. *Малыхин В. И.* Математика в экономике. — М.: ИНФРА-М, 1999.
15. *Міхайленко В. М., Федоренко Н. Д.* Математичний аналіз для економістів. — К.: Європейський ун-т, 2002.
16. *Пономаренко О. І., Перестюк М. О., Бурим В. М.* Основи математичної економіки. — К.: ІНФОРМТЕХНІКА, 1995.
17. *Руководство* к решению задач с экономическим содержанием по курсу высшая математика / Под ред. А. И. Карасева и Н. Ш. Кремера. — М.: Экономическое образование, 1989.
18. *Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В., Шандра И. Г.* Математика в экономике. — М.: Финансы и статистика, 1999.
19. *Chiang A. C.* Fundamental Methods of Mathematical Economics. — N. Y.: McGraw-Hill, 1974.
20. *Шипачев В. С.* Основы высшей математики. — М.: Высш. шк., 1989.

ЗМІСТ

Передмова . . . 3

Вступ . . . 5

Розділ 1. МЕТОДИ Й МОДЕЛІ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ . . . 7

1.1. Основні відомості про матриці . . . 7
1.2. Дії над матрицями . . . 9
1.2.1. Лінійні операції над матрицями . . . 9
1.2.2. Добуток матриць . . . 11
1.2.3. Піднесення матриць до степеня . . . 12
1.2.4. Транспонування матриць . . . 13
1.3. Визначники квадратних матриць та їхні властивості . . . 14
1.4. Обернена матриця . . . 20
1.5. Ранг матриці . . . 21
1.6. Системи лінійних рівнянь . . . 23
1.7. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь . . . 27
1.7.1. Матричний метод . . . 27
1.7.2. Застосування формул Крамера для розв'язування систем лінійних рівнянь . . . 28
1.7.3. Метод Гаусса . . . 29
1.7.4. Застосування методу Гаусса для обчислення оберненої матриці . . . 34
1.8. Лінійні економічні моделі . . . 35
1.8.1. Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки (балансовий аналіз) . . . 35
1.8.2. Модель рівноважних цін . . . 42
1.8.3. Лінійна модель міжнародної торгівлі . . . 44
Контрольні запитання . . . 47
Приклади розв'язування задач . . . 48

Розділ 2. МЕТОДИ Й МОДЕЛІ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ . . . 77

2.1. Вектори на площині й у просторі . . . 77
2.1.1. Поняття вектора . . . 77
2.1.2. Лінійні операції над векторами . . . 78
2.1.3. Проекція вектора на вісь. Координати вектора . . . 80
2.2. n-Вимірні вектори й дії над ними . . . 82
2.3. Вимірність і базис лінійного простору . . . 85
2.4. Скалярний добуток векторів і його властивості . . . 90
2.5. Простір товарів. Вектор цін . . . 94
Контрольні запитання . . . 96
Приклади розв'язування задач . . . 97

Розділ 3. МЕТОДИ Й МОДЕЛІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ . . . 105

3.1. Рівняння лінії на площині . . . 105
3.2. Рівняння прямої на площині . . . 107
3.2.1. Рівняння прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора . . . 107
3.2.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом . . . 108
3.2.3. Рівняння прямої, що проходить через дану точку в даному напрямі . . . 109
3.2.4. Канонічне рівняння прямої . . . 110
3.2.5. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки . . . 111
3.2.6. Рівняння прямої у відрізках . . . 112
3.2.7. Загальне рівняння прямої . . . 112
3.2.8. Взаємне розміщення двох прямих . . . 113
3.3. Моделі й задачі економічного змісту . . . 116
3.3.1. Модель рівноваги ринку . . . 116
3.3.2. Модель рівноваги доходів і збитків компаній . . . 119
3.3.3. Бюджетні множини й лінії бюджетного обмеження . . . 121
3.4. Лінії другого порядку . . . 124
3.4.1. Коло . . . 124
3.4.2. Еліпс . . . 125
3.4.3. Гіпербола . . . 127
3.4.4. Парабола . . . 129
3.5. Площина й пряма в просторі . . . 131
3.5.1. Рівняння площини . . . 131
3.5.2. Відстань від точки до площини . . . 133

3.5.3. Взаємне розміщення двох площин ... 134
3.5.4. Рівняння прямої в просторі ... 135
3.5.5. Відстань від точки до прямої. Відстань між прямими ... 137
3.5.6. Взаємне розміщення двох прямих ... 137
3.5.7. Взаємне розміщення прямої й площини ... 138
Контрольні запитання ... 139
Приклади розв'язування задач ... 141

Розділ 4. МНОЖИНИ Й ПОСЛІДОВНОСТІ ... 175
4.1. Методи теорії множин ... 175
4.1.1. Множини. Основні поняття ... 175
4.1.2. Числові множини ... 179
4.1.3. Обмежені числові множини ... 180
4.2. Числові послідовності ... 182
4.2.1. Границя числової послідовності ... 185
4.2.2. Павутинна модель ринку ... 187
4.2.3. Нескінченно малі й нескінченно великі послідовності ... 191
4.2.4. Основні властивості збіжних послідовностей ... 194
4.2.5. Граничний перехід у нерівностях ... 197
4.2.6. Число *e* ... 199
4.2.7. Задача про неперервне нарахування процентів ... 201
4.2.8. Терема про вкладені відрізки ... 203
Контрольні запитання ... 203
Приклади розв'язування задач ... 205

Розділ 5. ФУНКЦІЇ ТА ЇХНІ ГРАФІКИ ... 212
5.1. Функції однієї змінної ... 212
5.1.1. Способи задання функції ... 212
5.1.2. Властивості функцій ... 217
5.2. Елементарні функції ... 219
5.3. Застосування функцій в економічній теорії ... 233
5.4. Границя функції ... 237
5.4.1. Означення границі функції в точці ... 237
5.4.2. Нескінченно малі й нескінченно великі функції ... 239
5.4.3. Властивості й порівняння нескінченно малих функцій ... 241
5.4.4. Однобічні границі ... 242

5.4.5. Основні теореми про границі ... 244
5.4.6. Перша важлива границя ... 248
5.4.7. Друга важлива границя ... 250
5.4.8. Границя показниково-степеневої функції ... 253
5.5. Неперервність функції ... 254
5.5.1. Основні поняття ... 254
5.5.2. Класифікація точок розриву функції ... 256
5.5.3. Властивості неперервних функцій ... 256
5.5.4. Економічна інтерпретація неперервності ... 258
5.5.5. Властивості функцій, неперервних на відрізку ... 259
Контрольні запитання ... 262
Приклади розв'язування задач ... 264

Розділ 6. МЕТОДИ Й МОДЕЛІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ ... 279
6.1. Похідна функції ... 279
6.1.1. Поняття похідної ... 279
6.1.2. Задачі, що приводять до поняття похідної ... 281
6.1.3. Однобічні похідні ... 285
6.1.4. Диференційовність функції ... 286
6.2. Диференціал функції ... 288
6.2.1. Означення й геометричний зміст диференціала ... 288
6.2.2. Наближені обчислення за допомогою диференціала ... 290
6.2.3. Економічне застосування диференціала. Мультиплікатор ... 290
6.3. Правила диференціювання ... 291
6.3.1. Диференціювання суми, добутку й частки функцій ... 291
6.3.2. Диференціювання складної та оберненої функцій ... 294
6.3.3. Диференційовність елементарних функцій ... 295
6.3.4. Похідна показниково-степеневої функції ... 296
6.3.5. Похідна неявної функції ... 297
6.3.6. Похідна функції, заданої параметрично ... 298
6.4. Похідні й диференціали вищих порядків ... 299
6.4.1. Похідні вищих порядків ... 299
6.4.2. Похідні вищих порядків функцій, заданих параметрично й неявно ... 301
6.4.3. Формула Лейбніца для похідної *n*-го порядку добутку двох функцій ... 303
6.4.4. Диференціали вищих порядків ... 304

6.5. Застосування похідних до дослідження функцій 306
6.5.1. Основні теореми диференціального числення 306
6.5.2. Формула Тейлора 312
6.5.3. Формула Маклорена. Розвинення деяких елементарних функцій 314
6.5.4. Застосування формули Маклорена до обчислення границь 316
6.6. Застосування похідної до обчислення границь 317
6.6.1. Правила Лопіталя. Розкриття невизначеностей типу $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$ 317
6.6.2. Розкриття невизначеностей типу $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^{∞} 320
6.7. Дослідження функцій і побудова їхніх графіків 323
6.7.1. Умови монотонності функції 323
6.7.2. Умови локального екстремуму 324
6.7.3. Напрями опуклості й точки перегину графіка функції 327
6.7.4. Асимптоти графіка функції 331
6.7.5. Схема дослідження функції й побудова її графіка за допомогою похідної 332
Контрольні запитання 335
Приклади розв'язування задач 336

Розділ 7. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ В ЕКОНОМІЧНОМУ АНАЛІЗІ 360
7.1. Еластичність 360
7.1.1. Еластичність функції 360
7.1.2. Властивості еластичності 363
7.1.3. Застосування еластичності в економічному аналізі 367
7.1.4. Еластичність і податкова політика 369
7.2. Теорія однoресурсної фірми 372
7.3. Прийняття оптимальних рішень в економічних дослідженнях 375
7.3.1. Оптимальні ціна, граничні витрати та обсяг виробництва фірми 375
7.3.2. Задача вибору фірмою оптимального обсягу виробництва 375
7.3.3. Закон спадної ефективності виробництва 379

7.4. Оптимізація оподаткування підприємств 381
Контрольні запитання 384
Приклади розв'язування задач 385

Розділ 8. МЕТОДИ Й МОДЕЛІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ 391
8.1. Поняття функції багатьох змінних 391
8.1.1. Означення функції двох змінних 391
8.1.2. Означення функції багатьох змінних. Способи задання функції 392
8.1.3. Функції багатьох змінних, які використовуються в економічній теорії 395
8.2. Границя й неперервність функції 397
8.2.1. Границя функції двох змінних 397
8.2.2. Неперервність функції двох змінних 401
8.2.3. Частинні й повний приріст функції двох змінних 402
8.3. Диференційовність функції двох змінних 403
8.3.1. Частинні похідні першого порядку 403
8.3.2. Необхідна умова диференційовності функції 405
8.3.3. Достатня умова диференційовності функції 406
8.3.4. Повний диференціал функції двох змінних 408
8.3.5. Застосування повного диференціала в наближених обчисленнях 409
8.3.6. Диференціювання складних функцій 409
8.3.7. Похідна за напрямом 413
8.3.8. Градієнт функції 415
8.3.9. Економічне застосування градієнта 418
8.4. Похідні й диференціали вищих порядків 420
8.4.1. Частинні похідні вищих порядків 420
8.4.2. Диференціали вищих порядків 423
8.4.3. Формула Тейлора для функції двох змінних 425
8.5. Локальні екстремуми 426
8.5.1. Локальні екстремуми функції двох змінних 426
8.5.2. Необхідні й достатні умови локального екстремуму функції двох змінних 427
8.5.3. Алгоритм дослідження функції двох змінних на екстремум 428
8.5.4. Квадратичні форми 429
8.5.5. Локальні екстремуми функції багатьох змінних 431

8.5.6. Необхідні й достатні умови локального екстремуму функції багатьох змінних . . . 432
8.5.7. Найбільше й найменше значення функції в області . . . 434
8.6. Метод найменших квадратів . . . 436
8.6.1. Метод найменших квадратів можливої лінійної залежності між змінними . . . 436
8.6.2. Вирівнювання за допомогою кривих
8.7. Умовні екстремуми . . . 442
8.7.1. Умовні екстремуми функції двох змінних . . . 444
8.7.2. Метод невизначених множників Лагранжа знаходження точок умовного екстремуму . . . 445
8.7.3. Умовні екстремуми функції багатьох змінних . . . 448
Контрольні запитання . . . 451
Приклади розв'язування задач . . . 453

Розділ 9. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ В ЕКОНОМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ . . . 472
9.1. Аналіз економічних задач за допомогою виробничих функцій . . . 472
9.1.1. Виробничі функції багатьох змінних . . . 472
9.1.2. Властивості виробничих функцій . . . 475
9.1.3. Економічні характеристики процесу виробництва . . . 476
9.2. Еластичність функції багатьох змінних . . . 478
9.2.1. Означення еластичності функції двох змінних . . . 478
9.2.2. Властивості еластичності . . . 481
9.2.3. Попит на конкурентні товари . . . 483
9.3. Задачі оптимізації виробництва . . . 486
9.3.1. Задача багаторесурсної фірми . . . 486
9.3.2. Задача оптимального розподілу ресурсів . . . 489
9.3.3. Задача оптимального розподілу товарів . . . 491
9.3.4. Задача визначення мінімальних витрат фірми . . . 493
9.3.5. Задача цінової дискримінації . . . 495
9.4. Задачі теорії споживання . . . 497
9.4.1. Гранична корисність і гранична норма заміщення . . . 497
9.4.2. Функції попиту споживача . . . 499
Контрольні запитання . . . 502
Приклади розв'язування задач . . . 504

Розділ 10. МЕТОДИ Й МОДЕЛІ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ . . . 508
10.1. Первісна й невизначений інтеграл . . . 508
10.1.1. Первісна . . . 508
10.1.2. Основні властивості невизначеного інтеграла . . . 510
10.1.3. Інтеграли від основних елементарних функцій . . . 512
10.2. Основні методи інтегрування . . . 513
10.2.1. Метод безпосереднього інтегрування . . . 514
10.2.2. Метод заміни змінної (метод підстановки) . . . 515
10.2.3. Метод інтегрування частинами . . . 517
10.2.4. Рекурентні формули . . . 520
10.2.5. Методи інтегрування ірраціональних і трансцендентних функцій . . . 521
10.3. Інтегрування дробово-раціональних функцій . . . 523
10.3.1. Основні поняття про дробово-раціональні функції . . . 523
10.3.2. Інтегрування простих дробів . . . 524
10.3.3. Розкладання правильних дробів на найпростіші . . . 525
10.3.4. Метод невизначених коефіцієнтів . . . 526
10.4. Визначений інтеграл . . . 533
10.4.1. Інтегральні суми та їхні основні властивості . . . 533
10.4.2. Задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла . . . 537
10.4.3. Основні властивості визначеного інтеграла . . . 540
10.4.4. Основна формула інтегрального числення . . . 543
10.5. Методи обчислення визначених інтегралів . . . 544
10.5.1. Метод безпосереднього інтегрування . . . 545
10.5.2. Метод підстановки . . . 545
10.5.3. Метод інтегрування частинами . . . 547
10.6. Невласні інтеграли . . . 549
10.6.1. Невласні інтеграли першого роду . . . 549
10.6.2. Невласні інтеграли другого роду . . . 550
10.7. Наближені формули для обчислення визначених інтегралів . . . 551
10.7.1. Формула прямокутників . . . 552
10.7.2. Формула трапецій . . . 554
Контрольні запитання . . . 556
Приклади розв'язування задач . . . 558

Розділ 11. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ . . . 578

11.1. Геометричні застосування . . . 578

11.1.1. Обчислення площ плоских фігур . . . 578

11.1.2. Обчислення довжини дуг кривих ліній . . . 581

11.1.3. Обчислення об'ємів тіл обертання . . . 583

11.1.4. Обчислення площ поверхонь тіл обертання . . . 585

11.2. Фізичні застосування . . . 587

11.2.1. Обчислення роботи змінної сили . . . 587

11.2.2. Обчислення пройденого шляху . . . 587

11.3. Економічні застосування . . . 589

11.3.1. Застосування в динамічних процесах . . . 589

11.3.2. Обчислення середніх значень економічних функцій . . . 590

11.3.3. Визначення приросту капіталу за відомими інвестиціями . . . 593

11.3.4. Оцінка ступеня нерівномірності розподілу доходів населення . . . 594

11.3.5. Застосування у фінансових задачах . . . 595

11.3.6. Застосування в задачах реалізації товарів . . . 597

Контрольні запитання . . . 601

Приклади розв'язування задач . . . 602

Розділ 12. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ . . . 614

12.1. Основні поняття теорії звичайних диференціальних рівнянь . . . 614

12.2. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь . . . 616

12.2.1. Задача про вільне падіння матеріальної точки . . . 616

12.2.2. Задача про нагромадження капіталу . . . 617

12.3.3. Задача про рух фондів . . . 618

12.2.4. Демографічна задача . . . 619

12.2.5. Задача про рекламу . . . 619

12.3. Диференціальні рівняння першого порядку . . . 620

12.3.1. Основні поняття . . . 620

12.3.2. Рівняння з відокремлюваними змінними . . . 622

12.3.3. Однорідні диференціальні рівняння . . . 624

12.3.4. Лінійні диференціальні рівняння . . . 627

12.4. Диференціальні рівняння другого порядку . . . 630

12.4.1. Основні поняття . . . 630

12.4.2. Диференціальні рівняння, які допускають зниження порядку . . . 632

12.4.3. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку . . . 634

12.4.4. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами . . . 640

12.5. Застосування методів диференціальних рівнянь в економічних моделях . . . 648

12.5.1. Модель демографічного процесу . . . 648

12.5.2. Модель рівноважного зростання випуску продукції . . . 648

12.5.3. Модель зростання випуску продукції в умовах конкуренції . . . 649

12.5.4. Динамічна модель Кейнса . . . 651

12.5.5. Неокласична модель зростання . . . 654

Контрольні запитання . . . 657

Приклади розв'язування задач . . . 658

Завдання для самостійної роботи . . . 663

Список рекомендованої літератури . . . 709

Навчальне видання

Грисенко Марина Віталіївна

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

МЕТОДИ Й МОДЕЛІ, ПРИКЛАДИ Й ЗАДАЧІ

Художній редактор *О. Г. Григір*
Технічний редактор *Т. О. Щур*
Коректори *А. І. Бараз, А. В. Бородавко, Л. Ф. Іванова*
Комп'ютерна верстка *М. Б. Гутмана*

Підп. до друку 22.11.06. Формат 60×84/16. Папір офс. № 1.
Гарнітура Таймс. Офсетний друк. Умов.-друк. арк. 41,85. Обл.-вид. арк. 33,0.
Тираж 10 500 пр. Вид. № 4380. Зам. № 6-726.

Видавництво «Либідь»
01004 Київ, вул. Пушкінська, 32

Свідоцтво про державну реєстрацію № 404 від 06.04.01

Віддруковано на ВАТ «Білоцерківська книжкова фабрика»,
Україна, м. Біла Церква, вул. Л. Курбаса, 4.

М. В. Грисенко
Г85 Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. — К.: Либідь, 2007. — 720 с.
ISBN 978-966-06-0436-0.

Системно викладено базові математичні поняття, твердження, методи й моделі, що використовуються в економіці. Вивчення математичних методів поєднано зі змістовим розглядом економічних моделей. Матеріал охоплює такі розділи математики: методи й моделі лінійної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу, диференціального числення функцій однієї та багатьох змінних, інтегрального числення та елементи теорії диференціальних рівнянь. Усі теоретичні твердження викладені чітко, аргументовано й у стислій формі. Там, де це можливо, розкривається економічний зміст математичних понять.

Застосування відповідних теоретичних методів і моделей ілюструється добірками економічних задач із розв'язаннями до кожного розділу. Наприкінці вміщено завдання для самостійної роботи студентів з опанування курсу вищої математики для економістів.

Для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

ББК 22.1я73

ISBN 978-966-06-0436-0