Задорожний В.В., Паславська І.М.

Моделювання економічної динаміки

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Здрок В.В., Паславська І.М.

МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як підручник для студентів вищих навчальних закладів

Львів
Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка
2007

УДК 330.3:330.46(075.8)
ББК У018.527.В61я73
З-46

Рецензенти:
д-р екон. наук *В.В. Вітлінський*
(Київський національний економічний університет
імені Вадима Гетьмана);
д-р екон. наук *В.І. Єлейко*
(Львівська комерційна академія);
д-р екон. наук *Л.Г. Ліпич*
(Луцький державний технічний університет)

Рекомендовано до друку Міністерством освіти і науки України як підручник для студентів вищих навчальних закладів (Лист за №1.4/18-Г-1281 від 01.12.2006 р.)

Здрок В.В., Паславська І.М.
З-46 Моделювання економічної динаміки: Підручник для студентів вищих навчальних закладів. – Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. – 244 с.
ISBN 978-966-613-545-5

Підручник присвячено розгляду динамічних аспектів функціонування економічних систем.

Книга містить сім розділів, у яких розкрито сутність трендових моделей економічної динаміки, статичних та динамічних виробничих функцій, факторних і лагових моделей економічного розвитку, моделювання динаміки валового внутрішнього продукту та національного доходу, теоретичних структурних моделей економічної динаміки. Описано також принципи побудови та дослідження лінійних моделей попиту та пропозиції.

Теоретичний матеріал книги проілюстровано прикладами, водночас значну увагу приділено економічній інтерпретації результатів.

Підручник розрахований на широке коло студентів економічних спеціальностей, аспірантів, фахівців, котрі у своїх дослідженнях застосовують методи моделювання економічної динаміки.

Іл. 57. Бібл. 37. Табл. 3.

ISBN 978-966-613-545-5

ПЕРЕДМОВА

Економічна динаміка – розділ економічної науки, у якому досліджують детерміновану поведінку економічних систем у часі.

З кібернетичної точки зору економічні системи є складними динамічними системами. Складність та динамізм економічних систем зумовлені загальним збільшенням обсягів матеріального і нематеріального виробництва; зростанням темпів науково-технічного прогресу, появою нових високопродуктивних технологій; процесами світової інтеграції та кооперації, які ведуть до збільшення різноманітності світової економіки; нестабільністю політичних процесів та іншими факторами.

Дослідження динаміки поведінки економічних систем дає змогу визначити перспективи їхнього розвитку, виявити можливі резерви, розробити комплекс адаптивних управлінських рішень, які забезпечать ефективне функціонування економічних об'єктів.

Економічна статика вивчає допустимі та оптимальні стани економічних систем. Економічна динаміка досліджує процеси, тобто послідовність станів і переходи від одних станів до інших, визначає можливі та оптимальні траєкторії розвитку систем.

У рамках статичного підходу передбачається, що ресурсно-технологічні можливості виробника і структура потреб споживача незмінні, в економічній динаміці особлива увага звертається на те, як зміни в часі впливають на взаємодію факторів виробництва та споживання.

Методологічним апаратом економічної динаміки є економіко-математичне моделювання, методи математичного аналізу, диференціального та варіаційного числення, теорії катастроф.

Відомі вчені П. Самуельсон та В. Фріск дають таке означення динамічної системи: "...систему називають динамічною, якщо її поведінка в часі визначена функціональними рівняннями, в яких змінні в різні моменти часу включені у явному вигляді", іншими словами, економічна система динамічна, якщо всі значення змінних, що описують її стан, упорядковані в часі. Методи економічної динаміки передбачають, що закономірності поведінки системи, зумовлені дією внутрішніх та зовнішніх факторів, детерміновані.

Працюючи над підручником автори використали книги [6], [25], [29].

Книга містить сім розділів.

Перший розділ присвячений розгляду основних характеристик швидкості та інтенсивності економічної динаміки. Описано основні типи економічного розвитку, а також трендові моделі, що їм відповідають.

Другий розділ містить особливості побудови та аналізу у економічній динаміці факторних та лагових моделей.

У третьому та четвертому розділах розглянуто основні види статичних виробничих функцій, а також макроекономічних динамічних функцій, які будують на їхній основі.

У п'ятому розділі проаналізовано та досліджено особливості застосування макроекономічних моделей у дослідженнях проблем економічного зростання – динаміки валового внутрішнього продукту та національного доходу, взаємозв'язку основних факторів економічного зростання, пропорцій між споживанням та нагромадженням.

У шостому розділі описано три теоретичні структурні моделі: модель В. Леонтьєва, модель Дж. фон Неймана та модель Л. Канторовича. Ці моделі є інструментом аналізу кількісних взаємозв'язків між технологією виробництва, структурою виробництва та темпами економічного зростання.

Сьомий розділ містить опис динамічних моделей, результатом дослідження яких є знаходження точки рівноваги попиту та пропозиції.

Теоретичний матеріал книги проілюстровано прикладами, водночас значну увагу приділено економічному тлумаченню результатів.

Автори книги намагалися показати, що математичне моделювання суттєво розширює можливості економічного аналізу, дає можливість отримати якісно нові результати, є важливим інструментом дослідження економічної динаміки. Разом з тим, викладення матеріалу ведеться не як опис застосувань певних розділів математики до розв'язання різних економічних задач, а як аналіз проблем розвитку економічних систем за допомогою методів математичного моделювання.

Матеріал підручника буде цілком зрозумілим для читачів, ознайомлених з основами диференціального та інтегрального числення, лінійної алгебри, теорії диференціальних рівнянь, економетрії, методами оптимізації.

РОЗДІЛ 1

ТРЕНДОВІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

1.1. Траєкторії та динамічні ряди

В основі динамічного аналізу економічних систем, явищ, процесів лежить поняття ***траєкторії.***

Траєкторія – це функція від часу, яка описує стан об'єкта дослідження (значення деякого показника, що розглядається):

$$Q = Q(t), \quad t \in [0, T],$$

де $[0, T]$ – скінченний відрізок часу, на якому визначена траєкторія.

В теоретичних моделях економічної динаміки досліджуються також нескінченні траєкторії $Q = Q(t)$, для яких $t \in [0, \infty)$. В ретроспективному аналізі можуть бути досліджені траєкторії $Q = Q(t)$, для яких $t \in [T_1, T_2]$, де початковий момент часу T_1 може бути від'ємним.

При дослідженні траєкторій час t можна враховувати *дискретно* (моментами, інтервалами) або *неперервно*. Якщо час враховувати дискретно, то моделі економічної динаміки будуть описані скінченно-різницевими рівняннями, якщо ж неперервно – диференціальними рівняннями.

Динамічний (часовий) ряд – це таблиця значень траєкторії, для якої час змінюється дискретно.

За часовою ознакою економічні показники поділяють на *моментні* та *інтервальні*. Моментні показники дають кількісну характеристику об'єкту дослідження на певний момент часу: чисельність населення Львівської області на початок 2007 року, курс гривні щодо євро на 28 січня 2007 року, об'єм основних фондів деякого підприємства на кінець 2006 року. Інтервальні показники характеризують об'єкт дослідження за певний період часу: обсяг виготовленої продукції деякого підприємства за рік, прибуток за місяць, виручка торговельного підприємства за один робочий день.

Інтервальні показники володіють властивістю динамічної адитивності, тобто для них можна застосовувати операцію сумування при переході від менших інтервалів часу до більш тривалих. Моментні показники не є адитивними у часі.

Відповідно до показника, значення якого утворює траєкторію, динамічні ряди поділяють на моментні та інтервальні.

У математичній статистиці динамічний ряд розглядають як реалізацію випадкового процесу. У стаціонарних випадкових процесах, для яких характерна рівновага щодо певного середнього рівня, основні характеристики обчислюють за однією реалізацією процесу (за результатами одного досліду). Проте динамічні ряди економічних показників здебільшого нестаціонарні, їм властиві тенденції, які відображають динамічність економіки. До цих тенденцій можна віднести:

- нарощування виробничих ресурсів;
- підвищення науково-технічного рівня;
- вдосконалення управління системою тощо.

Разом з тим, поряд з динамічністю економічним процесам властива інерційність, яка насамперед проявляється у типі розвитку (напрямок, темпи, коливання).

1.2. Характеристики швидкості та інтенсивності динаміки

Динамічний ряд містить перелік моментів часу $t_0, t_1, t_2, \dots, t_T$ та відповідних значень траєкторії $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_T$. Значення траєкторії $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_T$ називають ***рівнями ряду***.

Розрахунок характеристик динаміки ряду ґрунтується на порівнянні рівнів ряду. Рівень ряду, відносно якого проводять порівняння, називають ***базовим*** (базою). База порівняння може бути постійною або змінною. За постійну базу приймають один певний рівень ряду, здебільшого – це початковий рівень Q_0. Змінною базою служить попередній рівень. Характеристики динаміки, обчислені відносно постійної бази, називають ***базовими***, а характеристики, обчислені відносно змінної бази, – ***ланцюговими***.

Основними показниками економічного розвитку є:

1) абсолютний приріст;
2) темп зростання;
3) темп приросту;
4) абсолютне прискорення;
5) відносне прискорення.

1.2.1. Абсолютний приріст

Базовий абсолютний приріст:

$$\delta_{t/0} = Q_t - Q_0.$$

Ланцюговий абсолютний приріст:

$$\delta_{t/t-1} = Q_t - Q_{t-1}.$$

Абсолютний приріст за одиницю часу характеризує швидкість динаміки. Знак абсолютного приросту засвідчує напрямок динаміки (якщо абсолютний приріст додатний, то значення рівнів ряду зростають, а якщо від'ємний, то спадають).

1.2.2. Темп зростання

Базовий темп зростання:

$$\eta_{t/0} = \frac{Q_t}{Q_0}.$$

Ланцюговий темп зростання:

$$\eta_{t/t-1} = \frac{Q_t}{Q_{t-1}}.$$

Темп зростання характеризує інтенсивність динаміки. Темп зростання може бути виражений числом (коефіцієнт зростання) або у відсотках.

1.2.3. Темп приросту

Базовий темп приросту:

$$\rho_{t/0} = \frac{Q_t - Q_0}{Q_0}.$$

Ланцюговий темп приросту :

$$\rho_{t/t-1} = \frac{Q_t - Q_{t-1}}{Q_{t-1}}.$$

Темп приросту характеризує відносну швидкість, тобто прискорення динаміки. Темп приросту в прикладних застосуваннях виражають у відсотках.

1.2.4. Абсолютне прискорення

Абсолютне прискорення:

$$\varphi_t = \delta_{t+1/t} - \delta_{t/t-1}.$$

Якщо $\varphi_t > 0$, то спостерігається прискорення динаміки, а якщо $\varphi_t < 0$, то маємо уповільнення динаміки.

1.2.5. Відносне прискорення

Відносне прискорення:

$$\chi_t = \frac{\varphi_t}{\delta_{t/t-1}}.$$

Відносне прискорення характеризує темп приросту абсолютного приросту.

Між абсолютними та відносними показниками динаміки існують такі взаємозв'язки:

1. Якщо абсолютні прирости зменшуються або залишаються постійними, то темпи зростання та приросту обов'язково зменшуються.
2. Якщо абсолютні прирости збільшуються, то можливі три випадки зміни темпів зростання та приросту: зменшення, стабільність та збільшення.
3. Якщо темпи зростають, то абсолютні прирости (за абсолютною величиною) завжди збільшуються.

4. Якщо темпи спадають, то можливі три випадки зміни абсолютних приростів: зменшення, стабільність та збільшення.

Досліджуючи економічну динаміку можна порівнювати інтенсивність динаміки різних траєкторій. Для цього використовують ***коефіцієнти випередження та еластичності.***

Коефіцієнтом випередження k називають відношення темпів зростання двох динамічних рядів.

За допомогою коефіцієнта випередження порівнюють відносну швидкість динаміки однакового змісту для різних об'єктів або динаміки різного змісту для одного об'єкта. Наприклад, за рік фондоозброєність праці в одній галузі зросла на 50%, а в іншій – на 25%. Тоді коефіцієнт випередження темпу зростання фондо-озброєності першої галузі, порівняно з другою, становить: k=1,5:1,25=1,2.

Для однієї галузі можна порівнювати, наприклад, динаміку фондоозброєності та продуктивності праці. Якщо у певній галузі фондоозброєність зросла на 50%, а продуктивність праці – на 65%, то коефіцієнт випередження зростання продуктивності праці, порівняно із зростанням фондоозброєності, становить: k=1,65:1,50=1,1.

Коефіцієнтом еластичності γ називають відношення темпів приросту двох взаємопов'язаних показників.

Коефіцієнт еластичності показує, на скільки відсотків зміниться один показник при зміні іншого на 1%.

Наприклад, протягом року ціна на деякий товар зросла на 5%, а попит зменшився на 10%. Тоді цінова еластичність попиту на товар становить: $\gamma = \frac{-10}{5} = -2$, тобто із зростанням ціни на товар на 1% попит на цей товар зменшиться на 2%.

1.2.6. Правила взаємного переходу між базовими та ланцюговими показниками

Для базових та ланцюгових абсолютних показників справедливі такі правила взаємного переходу:

1. Сума послідовних ланцюгових приростів дорівнює базовому абсолютному приросту:

$$\sum_{t=1}^{l} \delta_{t/t-1} = \sum_{t=1}^{l} (Q_t - Q_{t-1}) = Q_l - Q_0 = \delta_{l/0}, \qquad l = \overline{2,T}.$$

2. Різниця між наступним і попереднім базовими абсолютними приростами дорівнює відповідному ланцюговому абсолютному приросту:

$$\delta_{t/0} - \delta_{t-1/0} = (Q_t - Q_0) - (Q_{t-1} - Q_0) = Q_t - Q_{t-1} = \delta_{t/t-1}, \; t = \overline{2,T}.$$

3. Добуток послідовних ланцюгових темпів зростання дорівнює базовому темпу зростання:

$$\prod_{t=1}^{l} \eta_{t/t-1} = \prod_{t=1}^{l} \frac{Q_t}{Q_{t-1}} = \frac{Q_l}{Q_0} = \eta_{l/0}, \qquad l = \overline{2,T}.$$

Наслідок. Будь-який член динамічного ряду можна виразити через Q_0 та ланцюгові темпи зростання:

$$Q_l = Q_0 \prod_{t=1}^{l} \eta_{t/t-1}, \qquad l = \overline{2,T}.$$

4. Частка від ділення наступного базового темпу зростання на попередній дорівнює відповідному ланцюговому темпу зростання:

$$\frac{\eta_{t/0}}{\eta_{t-1/0}} = \frac{\dfrac{Q_t}{Q_0}}{\dfrac{Q_{t-1}}{Q_0}} = \frac{Q_t}{Q_{t-1}} = \eta_{t/t-1}, \qquad t = \overline{2,T}.$$

Правила взаємного переходу між базовими та ланцюговими показниками справджуються завдяки адитивності абсолютних приростів та мультиплікативності ланцюгових темпів зростання.

Ланцюгові темпи приросту не володіють властивістю мультиплікативності.

1.2.7. Неперервні характеристики швидкості та інтенсивності динаміки

У разі теоретичного аналізу зручно розглядати час та показники зростання як неперервні величини, що володіють властивістю диференційовності (неперервно-диференційовані величини). Це дає змогу використовувати для характеристики поведінки траєкторії апарат диференціального числення. Такі характеристики економічної динаміки називають *неперервними*.

1. Неперервний абсолютний приріст:

$$\hat{\delta}(t) = \frac{dQ(t)}{dt}.$$

2. Неперервний темп приросту:

$$\hat{\rho}(t) = \frac{\hat{\delta}(t)}{Q(t)} = \frac{\frac{dQ(t)}{dt}}{Q(t)} = \frac{d\ln Q(t)}{dt}.$$

3. Неперервне абсолютне прискорення:

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{d\hat{\delta}(t)}{dt} = \frac{d^2Q(t)}{dt^2}.$$

4. Неперервне відносне прискорення:

$$\hat{\chi}(t) = \frac{\hat{\varphi}(t)}{\hat{\delta}(t)} = \frac{\frac{d\hat{\delta}(t)}{dt}}{\hat{\delta}(t)} = \frac{d\ln\hat{\delta}(t)}{dt}.$$

1.3. Середні характеристики динаміки

З плином часу абсолютні прирости та темпи зростання динамічних рядів змінюються, тому постає проблема узагальнення характерних динамічному ряду властивостей, узагальнення типових характеристик розвитку. Для узагальнюючого оцінення швидкості та інтенсивності зміни динамічного ряду використовують середні характеристики, серед яких основними є:

1) середній рівень;
2) середній абсолютний приріст;
3) середній темп зростання;
4) середній темп приросту.

Для обчислення середніх характеристик економічної динаміки використовують різні способи, які здебільшого орієнтовані на розв'язування різних змістовних економічних задач.

1.3.1. Середній рівень

Залежно від специфіки динамічного ряду застосовують такі способи обчислення середнього рівня:

1. Для інтервального динамічного ряду, рівні якого динамічно адитивні, використовують ***середню арифметичну просту:***

$$\overline{Q} = \frac{\sum_{t=0}^{T} Q_t}{T+1}.$$

2. Для моментного динамічного ряду середню арифметичну просту обчислюють за формулою:

$$\overline{Q} = \frac{Q_0 + Q_T}{2}.$$

3. Якщо у моментному ряді є $T+1$ рівень з однаковими інтервалами у часі, то використовують ***середню хронологічну:***

$$\overline{Q} = \frac{\frac{Q_0 + Q_T}{2} + \sum_{t=1}^{T-1} Q_t}{T}.$$

4. Для моментних рядів із змінними інтервалами у часі використовують ***середню арифметичну зважену:***

$$\overline{Q} = \frac{\sum_{t=1}^{n} Q_t D_t}{\sum_{t=1}^{n} D_t},$$

де D_t – інтервал часу між суміжними моментами;

n – кількість інтервалів часу.

Середній рівень використовують для узагальнення коливних рядів. Наприклад, при аналізі динаміки сільсько-господарського виробництва оперують не річними, а більш сталими середньорічними показниками.

Для обчислення середнього абсолютного приросту, середнього темпу зростання та середнього темпу приросту найчастіше використовують два підходи:

– враховуючи загальний абсолютний приріст за весь період ($\bar{\delta}_1$, $\bar{\eta}_1$, $\bar{\rho}_1$);
– враховуючи суму абсолютних рівнів за період ($\bar{\delta}_2$, $\bar{\eta}_2$, $\bar{\rho}_2$).

1.3.2. Середній абсолютний приріст

Середній абсолютний приріст згідно з першим підходом розраховують за формулою:

$$\bar{\delta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T} \delta_{t/t-1}}{T} = \frac{Q_T - Q_0}{T}.$$

За другим підходом:

$$\bar{\delta}_2 = \frac{2\sum_{t=1}^{T} \delta_{t/0}}{T(T+1)} = \frac{2\left(\sum_{t}^{T} Q_t - T Q_0\right)}{T(T+1)}.$$

Знаючи $\bar{\delta}_2$, можна визначити суму значень показника за T інтервалів часу:

$$\sum_{t=1}^{T} Q_t = \frac{T\left(2Q_0 + (T+1)\bar{\delta}_2\right)}{2}.$$

Середній абсолютний приріст характеризує абсолютну швидкість динаміки.

Якщо $\bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_2$, то ланцюгові абсолютні прирости постійні; якщо $\bar{\delta}_1 > \bar{\delta}_2$ – послідовно зростають; якщо $\bar{\delta}_1 < \bar{\delta}_2$ – послідовно спадають.

1.3.3. Середній темп зростання

Відповідно до першого підходу середній темп зростання розраховують за формулою:

$$\bar{\eta}_1 = \sqrt[T]{\prod_{t=1}^{T} \eta_{t/t-1}} = \sqrt[T]{\eta_{T/0}} = \sqrt[T]{\frac{Q_T}{Q_0}}.$$

Середній темп зростання $\overline{\eta}_1$ називають ***середнім геометричним темпом зростання***.

За другим підходом $\overline{\eta}_2$ визначають як додатний корінь рівняння порядку Т:

$$\sum_{t=1}^{T}(\overline{\eta}_2)^t = \frac{\sum_{t=1}^{T} Q_t}{Q_0}.$$

Середній темп зростання $\overline{\eta}_2$ називають ***середнім параболічним (поліноміальним) темпом зростання.***

Якщо $\overline{\eta}_1 = \overline{\eta}_2$, то ланцюгові темпи зростання постійні протягом усього періоду; якщо $\overline{\eta}_1 > \overline{\eta}_2$, то ланцюгові темпи зростання збільшуються; якщо $\overline{\eta}_1 < \overline{\eta}_2$, то ланцюгові темпи зростання зменшуються.

1.3.4. Середній темп приросту

Оскільки $\rho_{t/t-1} = \dfrac{Q_t - Q_{t-1}}{Q_{t-1}} = \dfrac{Q_t}{Q_{t-1}} - 1 = \eta_{t/t-1} - 1$, то за першим підходом

$$\overline{\rho}_1 = \overline{\eta}_1 - 1,$$

а за другим –

$$\overline{\rho}_2 = \overline{\eta}_2 - 1.$$

1.4. Типи економічного розвитку та їхні трендові моделі

1.4.1. Згладжування динамічних рядів і трендові моделі

Загалом у складі динамічного ряду можна виділити чотири компоненти:

1. Головна (вікова) тенденція або тренд.

2. Регулярні коливання відносно тренду (цикли).

3. Сезонні коливання відносно тренду.

4. Випадкова компонента, яка відображає вплив факторів стохастичного характеру.

Однією із найважливіших задач дослідження економічної динаміки є встановлення загальної закономірності (тенденції) розвитку. Для розв'язання цієї задачі використовують різноманітні методи зменшення коливальності ряду, серед яких можна виділити дві групи:

- згладжування ряду за допомогою середніх (методи згладжування);
- аналітичне вирівнювання ряду (моделі тренду).

Суть методів згладжування полягає в укрупненні інтервалів часу та заміні вихідного (первинного) ряду рядом середніх за інтервалами. У середніх коливання рівнів первинного ряду взаємно врівноважуються, внаслідок чого основна тенденція розвитку вирізняється чіткіше.

Серед методів згладжування можна виділити:

1) метод ступінчастої середньої;
2) метод плинної середньої;
3) метод зваженої плинної середньої;
4) методи подвійного згладжування.

Наприклад, метод плинної середньої полягає в тому, що середні показники розраховують послідовно для періодів $[1,l]$ $[2,l+1]$ $[3,l+2]\ldots$. Ряд плинних середніх коротший за первинний на $l-1$ рівень.

Аналітичне вирівнювання динамічного ряду – це метод вираження головної тенденції розвитку у вигляді функції показника від часу. Таку функцію називають моделлю тренду.

Таким чином, динамічний ряд, який відображає деякий економічний процес, у межах періоду з більш-менш стабільними умовами розвитку виявляє певну закономірність динаміки – головну тенденцію. Різні економічні процеси або один і той же процес, але у різні періоди свого розвитку, можуть суттєво відрізнятись за характеристиками розвитку. За основу типізації економічного розвитку зручно взяти динаміку абсолютних приростів. У цьому випадку можна виділити щонайменше чотири ***типи економічного розвитку:***

1. ***Рівномірний (постійний, стабільний) розвиток*** – характеризується постійним або близьким до нього абсолютним приростом.

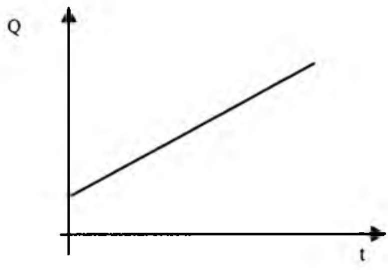

Рис. 1. Рівномірне зростання

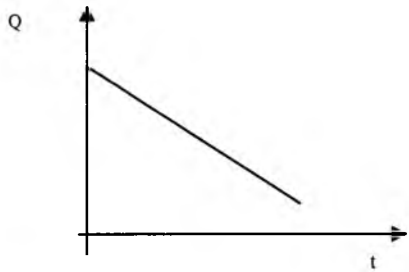

Рис. 2. Рівномірне спадання

2. ***Прискорений розвиток*** – характеризується абсолютним приростом, який з плином часу збільшується (для спадання – за абсолютною величиною).

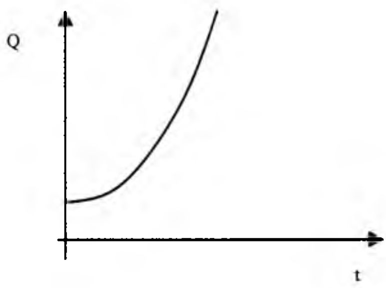

Рис. 3. Прискорене зростання

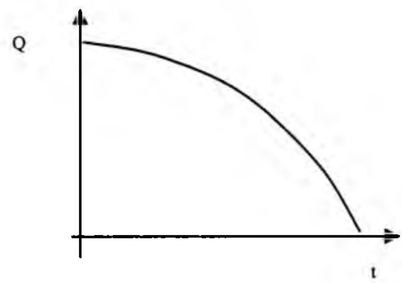

Рис. 4. Прискорене спадання

3. ***Уповільнений розвиток*** – характеризується абсолютним приростом, який з плином часу зменшується (для спадання – за абсолютною величиною).

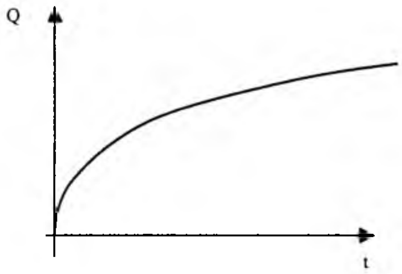

Рис. 5. Уповільнене зростання

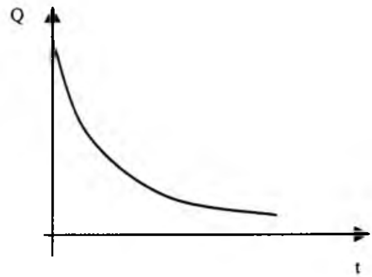

Рис. 6. Уповільнене спадання

4. ***Розвиток із якісною зміною характеристик динаміки протягом періоду часу, який розглядають.***

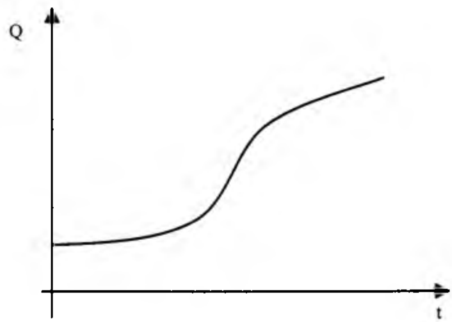

Рис. 7. Розвиток із зміною характеристик динаміки

Зауваження 1. Економічна динаміка може бути охарактеризована як систематичним зростанням, так і систематичним спаданням (зниженням) значень економічних показників. У більшості випадків досліджують прогресуючий розвиток соціально-економічних систем, економіко-математичні моделі використовують для вдосконалення ефективності їхнього функціонування. В цьому випадку більшість показників, які характеризують розвиток системи, зростають. Саме тому в літературі вживають термін "економічне зростання", а напрямок в економіко-математичній науці названо “Аналіз економічного зростання”. Проте навіть при прогресуючому розвитку соціально-економічних систем є низка показників, для яких прогресивне “зростання” – це спадання значень показника, наприклад, питомі виробничі витрати, рівень використання ручної праці, рівень виробничого травматизму, втрати при виробництві, простій устаткування, рівень захворюваності певними хворобами, рівень смертності населення серед окремих вікових груп, рівень злочинності тощо.

В окремі періоди може спостерігатись спадання розвитку економіки, і цей процес, без сумніву, потребує свого самостійного дослідження. У зв'язку з цим замість терміна “економічне зростання” доцільніше використовувати термін “економічний розвиток” або “економічна динаміка”.

Зауваження 2. Для теоретичних досліджень важливою є властивість гладкості моделі тренду. З огляду на це обираючи трендові моделі перевагу надають диференційованим функціям.

Зауваження 3. На відміну від фактичної траєкторії динаміки $Q(t)$ модель тренду будемо позначати $x(t)$, а замість фактичного значення показника динаміки ряду Q_t будемо використовувати позначення x_t.

Зауваження 4. Для спрощення викладення матеріалу будемо вважати, що часовим інтервалом у динамічному ряді є один рік.

Зауваження 5. Для всіх трендових моделей вважаємо, що $t \geq 0$.

1.4.2. Трендові моделі рівномірного розвитку

Рівномірний розвиток найчастіше описують лінійною моделлю тренду.

1. *Лінійна модель тренду*:

$$x(t) = a + bt,\ a > 0, \tag{1.1}$$

де a – теоретичний рівень базового року;
b – постійний щорічний абсолютний приріст:

$$b = \frac{dx(t)}{dt} = \hat{\delta}.$$

Темп приросту динаміки, яку описують лінійною моделлю тренду,

$$\hat{\rho}(t) = \frac{d \ln x(t)}{dt} = \frac{b}{a + bt}.$$

Якщо апроксимується динаміка минулого розвитку (ретроспективний аналіз), то параметри a і b можуть збігатися з фактичним рівнем базового року Q_0 і середнім абсолютним приростом $\bar{\delta}_1$ відповідно.

При $b > 0$ маємо модель рівномірного зростання, при $b < 0$ – модель рівномірного спадання.

Очевидно, що при $b > 0$ темп приросту з плином часу монотонно спадає й асимптотично наближається до 0, а при $b < 0$ темп приросту (темп спадання) за модулем монотонно зростає в області визначення функції $(x(t) \geq 0)$.

До рівномірного розвитку відносять також процеси, які характеризуються незначними коливаннями абсолютних приростів. Для опису динаміки таких процесів використовують комбіновані трендові моделі. Розглянемо дві з них.

2. *Комбінована лінійно-гіперболічна модель тренду*:

$$x(t) = a + bt + \frac{c}{t}. \tag{1.2}$$

Абсолютний приріст динаміки, яку описують лінійно-гіперболічною моделлю:

$$\hat{\delta}(t) = b - \frac{c}{t^2}.$$

Очевидно, що характер розвитку в початкові періоди (при малих t) залежить від знака параметра c. Якщо $c > 0$, то з плином часу абсолютний приріст монотонно зростає, при $c < 0$ абсолютний приріст з плином часу монотонно спадає. В подальші періоди часу розвиток стабілізується і наближається до рівномірного:

$$\lim_{t \to \infty} \hat{\delta}(t) = b.$$

3. *Комбінована параболічно-логарифмічна модель тренду:*

$$x(t) = a + b \ln t + c \ln^2 t. \tag{1.3}$$

Абсолютний приріст динаміки, яку описують параболічно-логарифмічною моделлю:

$$\hat{\delta}(t) = \frac{b + 2c\ln t}{t}.$$

Характер розвитку визначають за знаком та величиною параметрів b та c. З плином часу розвиток наближається до рівномірного з нульовим абсолютним приростом:

$$\lim_{t\to\infty}\hat{\delta}(t) = 0.$$

Недоліком комбінованих трендових моделей (1.2), (1.3) є те, що вони не визначені в початковий період часу $t = 0$.

1.4.3. Трендові моделі прискореного розвитку

Найчастіше прискорений розвиток описують показниковою та експоненційною моделями тренду.

1. *Показникову модель тренду*

$$x(t) = a(1+b)^t, \quad a > 0 \tag{1.4}$$

використовують для опису дискретних процесів. У цій моделі:

a – теоретичний початковий рівень;

$b = \rho$ – дискретний темп приросту.

2. *Експоненційну модель тренду*

$$x(t) = ae^{bt}, \quad a > 0 \tag{1.5}$$

використовують для опису неперервних процесів. У цій моделі:

a – теоретичний початковий рівень;

$b = \hat{\rho}$ – неперервний темп приросту:

$$\hat{\rho}(t) = \frac{d\ln x(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(a + bt\right) = b.$$

При $b > 0$ трендові моделі (1.4), (1.5) описують прискорене зростання, а при $-1 < b < 0$ – прискорене спадання. Проаналізуємо модель для випадку $b > 0$.

Абсолютні прирости $\hat{\delta}(t)$ динаміки, яку описують за допомогою моделей (1.4), (1.5), неперервно зростають:

– для моделі (1.4)

$$\hat{\delta}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = a(1+b)^t \ln(1+b) = (a\ln(1+b))(1+b)^t;$$

– для моделі (1.5)

$$\hat{\delta}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = abe^{bt}.$$

Зауважимо, що при вирівнюванні динамічного ряду за допомогою показникової функції (1.4), яка збігається з експоненційною (1.5), значення параметра b не обов'язково має бути рівне середньому темпу приросту $\overline{\rho}_1$, одержаному за формулою

$$\overline{\rho}_1 = \overline{\eta}_1 - 1 = \sqrt[t]{\frac{Q_t}{Q_0}} - 1$$

і не обов'язково, щоб $a = Q_0$.

Порівняємо два еквівалентні представлення (1.4), (1.5) трендової моделі однієї і тої ж траєкторії $x(t)$:

$$a(1+b)^t = ae^{bt}, \qquad 1+b = e^b, \qquad 1+\rho = e^{\hat{\rho}}.$$

Розкладаючи функцію e^x в степеневий ряд Тейлора-Маклорена, маємо

$$e^{\hat{\rho}} = 1 + \frac{\hat{\rho}}{1!} + \frac{\hat{\rho}^2}{2!} + \ldots + \frac{\hat{\rho}^n}{n!} + \ldots;$$

$$1+\rho = 1 + \hat{\rho} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\hat{\rho}^i}{i!},$$

тобто

$$1+\rho > 1+\hat{\rho}, \quad \rho > \hat{\rho}.$$

Отже, лише при достатньо малих значеннях ρ і $\hat{\rho}$ та обмеженому t еквівалентні представлення показникової та експоненціальної функцій можна рахувати еквівалентними моделями тренду.

Наприклад, при $b = 0{,}05$ і $t = 5 (1+b)^t \approx 1{,}276$; $e^{bt} \approx 1{,}284$, а при $b = 0{,}10$ і $t = 20$ $(1+b)^t \approx 6{,}724$; $e^{bt} \approx 7{,}389$. У першому випадку різниця становить 0,008, тобто менше одного відсоткового пункту, у другому різниця становить 0,665, тобто більше 66 відсоткових пунктів.

3. Трендові моделі (1.4), (1.5) описують економічний розвиток з постійною відносною швидкістю динаміки. В рамках прискореного розвитку можна виділити динаміку з постійним абсолютним прискоренням $\hat{\varphi}$. Такий розвиток описують *трендовою моделлю у вигляді параболи другого порядку:*

$$x(t) = a + bt + ct^2, \quad a > 0, \ b > 0, \ c > 0. \tag{1.6}$$

Абсолютний приріст динаміки, яку описують трендовою моделлю (1.6):

$$\hat{\delta}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = b + 2ct.$$

Абсолютне прискорення динаміки

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{d\hat{\delta}(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = 2c = const.$$

Темп приросту динаміки:

$$\hat{\rho}(t) = \frac{d\ln x(t)}{dt} = \frac{b + 2ct}{a + bt + ct^2}.$$

Темп приросту динаміки, яку описують трендовою моделлю (1.6), може змінюватись двома способами:

1) монотонно спадає;
2) на початковому інтервалі часу зростає, а потім спадає.

Дослідимо зміну темпу приросту динаміки, яку описують моделлю (1.6), тобто знайдемо проміжки монотонності функції

$$\hat{\rho}(t) = \frac{b + 2ct}{a + bt + ct^2}.$$

Для цього необхідно розв'язати систему нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{d\hat{\rho}(t)}{dt} > 0 \\ \dfrac{d\hat{\rho}(t)}{dt} < 0 \end{array}\right.$$

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \frac{2c(a+bt+ct^2)-(b+2ct)(b+2ct)}{(a+bt+ct^2)^2}.$$

Отже, знак $\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt}$ збігається зі знаком чисельника

$$2ac+2bct+2c^2t^2-b^2-4bct-4c^2t^2=-2c^2t^2-2bct+2ac-b^2.$$

Знайдемо проміжки знакосталості параболи

$$y(t)=-2c^2t^2-2bct+(2ac-b^2).$$

$$2c^2t^2-2bct+(2ac-b^2)=0;$$

$$2c^2t^2+2bct-(2ac-b^2)=0;$$

$$D=(2bc)^2+4\cdot 2c^2\cdot(2ac-b^2)=4b^2c^2+16ac^3-8b^2c^2=$$
$$=16ac^3-4b^2c^2;$$

$$D=4c^2(4ac-b^2).$$

Якщо $4ac-b^2<0$, то парабола $y(t)=-2c^2t^2-2bct+$ $+(2ac-b^2)$ коренів не має і вона завжди від'ємна. До речі, при $t>0$ $y(t)=-2c^2t^2-2bct+(2ac-b^2)<0$, якщо $2ac-b^2<0$, тобто $2ac<b^2$.

Якщо ж $4ac-b^2\ge 0$, то парабола $y(t)$ має два корені:

$$t_{1,2}=\frac{-2bc\pm 2c\sqrt{4ac-b^2}}{4c^2}=\frac{-b\pm\sqrt{4ac-b^2}}{2c},$$

серед яких при додатних параметрах b,c і $2ac>b^2$ лише один додатний:

$$t_0=\frac{-b+\sqrt{4ac-b^2}}{2c}.$$

В цій точці $\hat{\rho}(t)$ досягає свого максимуму і відбувається перехід зростання на спадання.

Отже:

1. Якщо $2ac<b^2$, то $\hat{\rho}(t)$ монотонно спадає на всьому інтервалі $[0,\infty)$.

2. Якщо $2ac > b^2$, то на проміжку $\left[0, \frac{-b+\sqrt{4ac-b^2}}{2c}\right]$ $\hat{\rho}(t)$ монотонно зростає, а на проміжку $\left[\frac{-b+\sqrt{4ac-b^2}}{2c}, \infty\right)$ монотонно спадає.

Трендова модель (1.6) добре відображає основні тенденції розвитку багатьох економічних процесів на сучасному етапі, коли абсолютні прирости продовжують збільшуватись, а темпи приросту спадають.

3. Більш широкими апроксимаційними властивостями володіють трендові моделі, які описуються многочленами вищих порядків. Так, наприклад, *трендова модель у вигляді параболи третього порядку*:

$$x(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 \tag{1.7}$$

при додатних параметрах a, b, c, d має зростаючий абсолютний приріст:

$$\hat{\delta}(t) = b + 2ct + 3dt^2,$$

зростаюче абсолютне прискорення:

$$\hat{\varphi}(t) = 2c + 6dt,$$

і постійний приріст абсолютного прискорення:

$$\frac{d\hat{\varphi}(t)}{dt} = \frac{d^3x(t)}{dt^3} = 6d = const.$$

Якщо деякі параметри кубічної параболи брати від'ємними, то трендова модель (1.7) може описувати більш складні траєкторії розвитку.

Недоліком трендових моделей у вигляді многочленів вищих порядків є необхідність оцінювання великого числа параметрів.

4. Для аналізу динаміки прискореного розвитку зручно використовувати також *узагальнену експоненційну модель тренду.* Таку модель використовують тоді, коли темп приросту $\hat{\rho}(t)$, який

властивий деякому економічному процесу, змінний, причому функція, яка його задає, відома: $\hat{\rho} = \hat{\rho}(t),$.

Побудуємо узагальнену економічну модель тренду цього процесу.

$$\hat{\rho}(t) = \frac{d \ln x(t)}{dt};$$

$$d \ln x(t) = \hat{\rho}(t) dt;$$

$$\ln x(t) = \int_0^t \hat{\rho}(t) dt + C;$$

$$x(t) = e^{\int_0^t \hat{\rho}(t) dt + C} = e^C \cdot e^{\int_0^t \hat{\rho}(t) dt}.$$

При заданій початковій умові:

$$x(0) = x_0, \quad C = x_0.$$

Остаточно маємо:

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t \hat{\rho}(t) dt}. \qquad (1.8)$$

Як функції, що задають темп приросту $\hat{\rho}(t)$, можуть бути використані лінійна, експоненційна, параболічна та інші.

5. Для аналізу динаміки прискореного розвитку використовують також інші трендові моделі, наприклад:

– степеневу (мультиплікативну) модель тренду:

$$x(t) = at^b, \ a > 0, \ b > 1; \qquad (1.9)$$

– кінетичну модель тренду:

$$x(t) = ae^{bt} \cdot t^c, \ a > 0; \qquad (1.10)$$

– комбіновану експоненційно-логарифмічно-степеневу модель тренду:

$$x(t) = ae^{bt} (\ln t)^c, \ a > 0. \qquad (1.11)$$

У деяких випадках трендові моделі (1.9) – (1.11) мають кращі статистичні оцінки вирівнювання динамічного ряду, ніж моделі (1.4) – (1.8), проте в разі їхнього використання ускладнюється економічна інтерпретація характеристик динаміки.

1.4.4. Трендові моделі уповільненого розвитку

При побудові трендових моделей динаміки уповільненого розвитку доцільно виділити два типи такого розвитку:

- уповільнений розвиток, який не має межі (розвиток без насичення);
- уповільнений розвиток, який має межу (розвиток з насиченням).

Моделями тренду, які описують динаміку уповільненого розвитку, що не має межі, можуть бути:

1. *Лінійно-логарифмічна модель тренду:*

$$x(t)a + b\ln t,\ \ a > 0, b > 0. \qquad (1.12)$$

Абсолютний приріст динаміки, яку описують трендовою моделлю (1.12), $\hat{\delta}(t) = \frac{b}{t}$ з плином часу спадає.

2. *Степенева модель тренду*:

$$x(t) = at^b,\ \ a > 0, 0 < b < 1. \qquad (1.13)$$

Абсолютний приріст динаміки, яку описують трендовою моделлю (1.13), $\hat{\delta}(t) = abt^{b-1}$ з плином часу спадає.

3. Крім того, для апроксимації динаміки уповільненого розвитку без межі можна використовувати трендові моделі динаміки прискореного розвитку, деякі параметри яких від'ємні. Наприклад, квадратична парабола (1.6) при $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$ дає абсолютні прирости, які щорічно зменшуються на $2c$, тому вона може бути використана для опису динаміки уповільненого розвитку без межі при $t \le -\frac{b}{2c}$.

Моделями тренду, які описують динаміку уповільненого розвитку з насиченням, можуть бути:

4. *Гіперболічна трендова модель першого порядку* (*узагальнена зворотна модель*):

$$x(t) = a + \frac{b}{t}. \qquad (1.14)$$

Очевидно, що $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = a$ – межа насичення.

Абсолютний приріст $\hat{\delta}(t) = -\frac{b}{t^2}$ з плином часу спадає за абсолютною величиною.

При $b < 0$ узагальнена зворотна модель описує динаміку уповільненого зростання із верхньою межею, а при $b > 0$ – динаміку уповільненого спадання із нижньою межею.

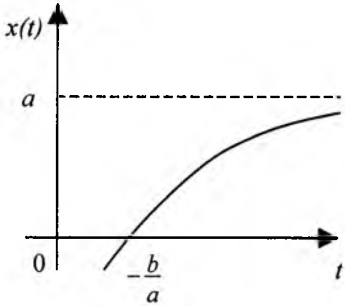

Рис. 8. Узагальнена зворотна модель ($b < 0$)

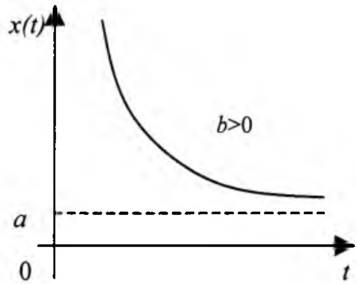

Рис. 9. Узагальнена зворотна модель ($b > 0$)

Яскравими прикладами використання зворотної моделі в економічних дослідженнях є криві Енгеля і Філіпса.

Крива Енгеля:

$$x(t) = a + \frac{b}{t}, \quad a > 0, b < 0.$$

Наприкінці XIX ст. німецький статистик Е. Енгель сформулював емпіричні закони споживання і побудував криві, відповідно до яких із зростанням доходу доля витрат на харчування зменшується, а доля витрат на одяг і житло залишається стабільною. Криві, які пов'язують споживчі витрати на товари із загальними витратами або доходом, називають кривими Енгеля. Очевидно, що крива Енгеля для певного товару вказує на такі особливості:

- критичний рівень доходу $-\frac{b}{a}$, нижче від якого товар не буде куплено;
- межу насичення (стелю) a, яку не можна збільшити, скільки б не зростав дохід.

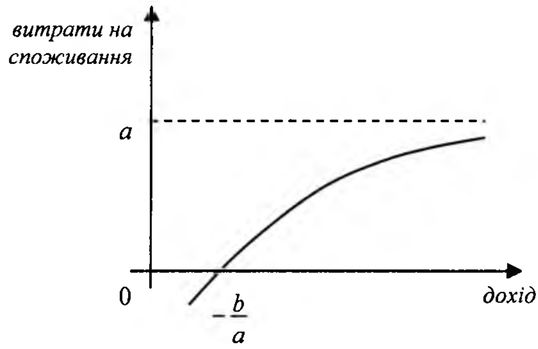

Рис. 10. Крива Е. Енгеля

Крива Філіпса:

$$x(t) = a + \frac{b}{t}.$$

Англійський економіст Філіпс, аналізуючи дані про норми відсотка зміни заробітної плати і відсотка безробіття для Англії за період з 1861 по 1957рр., побудував криву, яка описує залежність норми зміни заробітної плати від норми безробіття і яку називають кривою Філіпса.

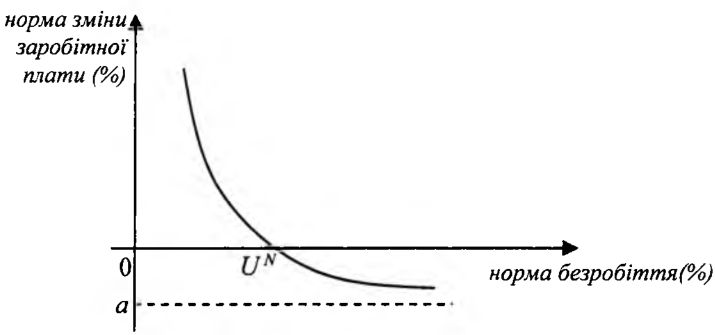

Рис. 11. Крива Філіпса

Крива Філіпса показує такі особливості:

– межа насичення a є границею зміни заробітної плати;
– точка U^N є значенням природної норми безробіття: коли норма безробіття менша за U^N, то норма зміни заробітної плати додатна, коли норма безробіття більша, ніж U^N, норма зміни заробітної плати від'ємна.

Криву Філіпса в макроекономіці використовують для розрахунків мінімальної заробітної плати, компенсації за безробіття тощо.

Зауваження. Криві Енгеля та Філіпса є регресійними економетричними моделями, що описують залежність між двома економічними показниками, проте можуть бути використані і для моделювання динаміки окремих економічних показників.

5. *Гіперболічна трендова модель другого порядку*:

$$x(t) = a - \frac{b}{t} - \frac{c}{t^2},\ a > 0,\ \text{b} > 0,\ \text{c} > 0. \qquad (1.15)$$

Очевидно, що $\lim\limits_{t \to \infty} x_t = a$ – межа насичення.

Абсолютний приріст $\hat{\delta}(t) = \frac{b}{t^2} + \frac{2c}{t^3} = \frac{2c + bt}{t^3}$ з плином часу спадає.

6. *Модифікована експоненційна трендова модель:*

$$x(t) = a - be^{-t},\ a > 0,\ \text{b} > 0,\ a > \text{b}. \qquad (1.16)$$

$\lim\limits_{t \to \infty} x_t = a$ – межа насичення;

$\hat{\delta}(t) = be^{-t}$ – абсолютний приріст, який з плином часу спадає.

7. *Трендова модель у вигляді функції Торнквіста.*

Аналогічно Енгелю, принцип розмежування груп товарів за типами функцій попиту (споживання) від доходу використав шведський економіст Л.Торнквіст. Він запропонував спеціальний тип функцій (функції Торнквіста) для груп товарів: першої необхідності (перша функція Торнквіста), другої необхідності (друга функція Торнквіста), предметів розкоші (третя функція Торнквіста). Перша функція Торнквіста має вигляд:

$$x(t) = \frac{at}{b + t},\ \ a > 0,\ \ \text{b} > 0. \qquad (1.17)$$

$\lim\limits_{t\to\infty} x_t = a$ – межа насичення;

$\hat{\delta}(t) = \dfrac{abt}{(b+t)^2}$ – абсолютний приріст, який з плином часу спадає.

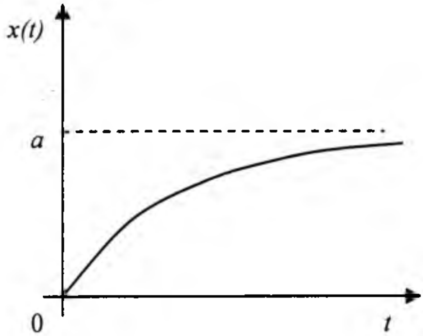

Рис. 12. Перша функція Торнквіста

1.4.5. Трендові моделі розвитку із зміною характеристик динаміки

Характерною властивістю трендових моделей, що описують економічний розвиток із зміною характеристик динаміки, є наявність точки перегину траєкторії $t = t^*$, в якій абсолютне прискорення рівне нулю і змінює свій знак:

$$\hat{\varphi}(t^*) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = 0\,.$$

Такою властивістю володіє ряд моделей, розглянутих попередньо, але параметри яких мають різні знаки. При дослідженні трендових моделей динаміки цього типу обмежимося випадком, коли прискорене зростання змінюється уповільненим зростанням. Для такої ситуації можна використати наступні моделі:

1. *Параболічно-логарифмічна модель тренду*

$$x(t) = a + b\ln t + c\ln^2 t, \quad a > 0, b > 0, c > 0. \tag{1.18}$$

Абсолютний приріст динаміки:

$$\widehat{\delta}(t)=\frac{dx(t)}{dt}=\frac{b}{t}+2c\frac{\ln t}{t}.$$

Абсолютне прискорення:

$$\widehat{\varphi}(t)=\frac{d\widehat{\delta}(t)}{dt}=-\frac{b}{t^2}+2c\frac{\frac{1}{t}\cdot t-\ln t}{t^2}=-\frac{b}{t^2}+2c\frac{1-\ln t}{t^2}=\frac{2c-b-2c\ln t}{t^2}.$$

Знайдемо точку перегину траєкторії t^*:

$$\varphi(t)=0;$$

$$2c-b-2c\ln t=0;$$

$$2c\ln t=2c-b;$$

$$\ln t=1-\frac{b}{2c};$$

$t^*=e^{1-\frac{b}{2c}}$ – точка перегину траєкторії.

Дослідимо проміжки монотонності абсолютного приросту $\widehat{\delta}(t)$ динаміки, яку описують за допомогою моделі (1.16).

Якщо $\frac{d\widehat{\delta}(t)}{dt}>0$, то абсолютний приріст зростає:

$$\frac{2c-b-2c\ln t}{t^2}>0;$$

$$2c\ln t<2c-b;$$

$$\ln t<1-\frac{b}{2c};$$

$$t<e^{1-\frac{b}{2c}}.$$

Якщо $\frac{d\widehat{\delta}(t)}{dt}<0$, то абсолютний приріст спадає:

$$\frac{2c-b-2c\ln t}{t^2}<0;$$

$$2c\ln t > 2c - b;$$

$$\ln t > 1 - \frac{b}{2c};$$

$$t > e^{1-\frac{b}{2c}}.$$

2. *Трендова модель у вигляді параболи третього порядку*

$$x(t) = a + bt + ct^2 + dt^3, \quad a > 0, b > 0, c > 0, d < 0. \qquad (1.19)$$

Абсолютний приріст:

$$\hat{\delta}(t) = b + 2ct + 3dt^2.$$

Абсолютне прискорення:

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{d\hat{\delta}(t)}{dt} = 2c + 6dt.$$

Знайдемо точку перегину траєкторії t^*:

$$\varphi(t) = 0;$$

$$2c + 6dt = 0;$$

$t^* = -\dfrac{c}{3d}$ – точка перегину траєкторії.

Якщо $t < -\dfrac{c}{3d}$, то $\hat{\delta}(t)$ зростає, якщо $t > -\dfrac{c}{3d}$, то $\hat{\delta}(t)$ спадає.

3. *Трендова модель у вигляді логістичної функції*

$$x(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}}, \quad a > 0, b > 0, c > 0. \qquad (1.20)$$

Абсолютний приріст динаміки:

$$\hat{\delta}(t) = \frac{abce^{-ct}}{(1 + be^{-ct})^2}.$$

Абсолютне прискорення:

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{d\hat{\delta}(t)}{dt} = abc\frac{-ce^{-ct}(1 + be^{-ct}) - e^{-ct} - 2(1 + be^{-ct})(-bce^{-ct})}{(1 + be^{-ct})^4} =$$

$$= abc^2\frac{-e^{-ct}(1 + be^{-ct})(1 + be^{-ct} - 2be^{-ct})}{(1 + be^{-ct})^4} = abc^2\frac{e^{-ct}(be^{-cr} - 1)}{(1 + be^{-ct})^3}.$$

Знайдемо точку перегину траєкторії t^*:

$$\varphi(t) = 0;$$

$$be^{-ct} - 1 = 0;$$

$$be^{-ct} = 1;$$

$$e^{-ct} = b^{-1};$$

$$-ct = -\ln b;$$

$t^* = \dfrac{\ln b}{c}$ – точка перегину траєкторії.

Якщо $t < \dfrac{\ln b}{c}$, то абсолютний приріст зростає, якщо $t > \dfrac{\ln b}{c}$, то абсолютний приріст спадає. Оскільки $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = a$, то логістична модель при $t > \dfrac{\ln b}{c}$ характеризує уповільнений розвиток з насиченням.

Логістичну модель тренду можна застосовувати в більш загальному вигляді:

$$x(t) = \frac{1}{ab^t + c}, \quad a > 0, 0 < b < 1, c > 0. \tag{1.21}$$

Абсолютний приріст динаміки:

$$\hat{\delta}(t) = -\frac{ab^t \ln b}{(ab^t + c)^2}.$$

Абсолютне прискорення:

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{d\hat{\delta}(t)}{dt} = -a\ln b\frac{b^t \ln b(ab^t + c)^2 - b^t \cdot 2(ab^t + c) - ab^t \ln b}{(ab^t + c)^4} =$$

$$= -a\ln b\frac{b^t \ln b(ab^t + c)(ab^t + c - 2ab^t)}{(ab^t + c)^4} = -a(\ln b)^2 \frac{b^t (c - 2ab^t)}{(ab^t + c)^3} =$$

$$= a\ln^2 b\frac{b^t (ab^t - c)}{(ab^t + c)^3}.$$

Знайдемо точку перегину траєкторії t^*:

$$\varphi(t) = 0;$$

$$ab^t - c = 0;$$

$$ab^t = c;$$

$$b^t = \frac{c}{a};$$

$$t \ln b = \ln\left(\frac{c}{a}\right);$$

$t^* = \dfrac{\ln\frac{c}{a}}{\ln b}$ – точка перегину траєкторії.

t^* можна знаходити ще й за такою формулою:

$$t^* = \log_b\left(\frac{c}{a}\right).$$

Дослідимо властивості логістичної моделі тренду:

$$x(0) = \frac{1}{a+c};$$

$$x(t^*) = \frac{1}{ab^{\log_b(\frac{c}{a})}} = \frac{1}{a\frac{c}{a} + c} = \frac{1}{2c};$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{1}{c}.$$

Логістична крива має такий вигляд:

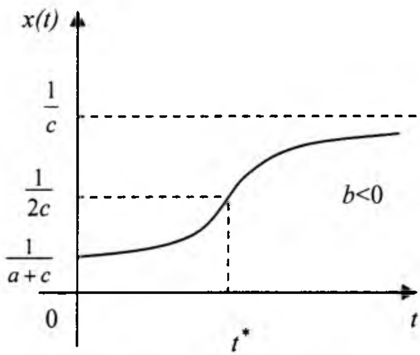

Рис. 13. Логістична крива

Таким чином, логістична крива – це S-подібна крива з нижньою межею $\frac{1}{a+c}$; верхньою межею насичення $\frac{1}{c}$ та з точкою перегину $t^* = \frac{\ln\frac{c}{a}}{\ln b}$.

4. *Трендова модель у вигляді кривої Гомперця.*

Криву Гомперця широко використовують для опису процесів у демографії, маркетингу, дослідженні ринку, збуту продукції. Вона має такий вигляд:

$$x(t) = e^{ab^t + c}, \quad 0 < b < 1. \tag{1.22}$$

$\lim\limits_{t \to \infty} x_t = e^c$ — межа насичення.

Абсолютний приріст динаміки:

$$\hat{\delta}(t) = e^{ab^t + c} ab^t \ln b = a \ln b \cdot b^t e^{ab^t + c}.$$

Отже, при $a > 0$ крива Гомперця описує уповільнене спадання із нижньою межею e^c:

$$x(0) = x_0 = e^{a+c}.$$

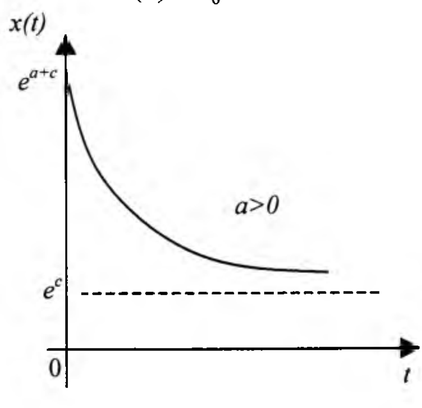

Рис. 14. Крива Гомперця (a>0)

Дослідимо поведінку кривої при $a < 0$.

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{d\hat{\delta}(t)}{dt} = a\ln b(b^t \ln b \cdot e^{ab^t+c} + b^t \cdot e^{ab^t+c} \cdot ab^t \ln b) =$$

$$= a(\ln b)^2 \cdot b^t e^{ab^t+c}(1+ab^t).$$

Знайдемо точку перегину траєкторії t^*:

$$\tilde{\varphi}(t) = 0;$$

$$1 + ab^t = 0;$$

$$ab^t = -1;$$

$$b^t = -\frac{1}{a};$$

$$t^* = \log_b(-\frac{1}{a});$$

$$t^* = \frac{\ln(-\frac{1}{a})}{\ln b}$$ – точка перегину траєкторії.

$$x(t^*) = e^{c-1}.$$

Крива Гомперця при $a < 0$ має вигляд:

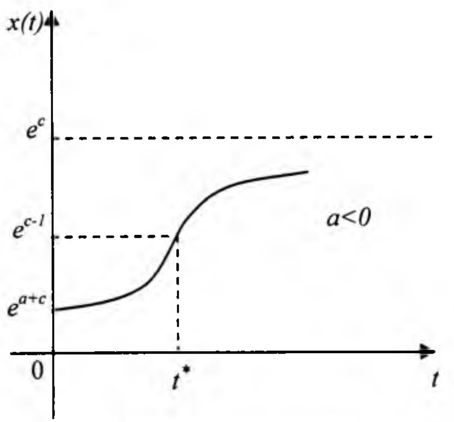

Рис. 15. Крива Гомперця (a<0)

Отже, крива Гомперця при $a < 0$ має форму S-подібної кривої, яка спочатку зростає дуже швидко, а потім дуже повільно. Такою функцією описують типову еволюцію продажу товару.

Більш загальні задачі аналізу динаміки із змінними тенденціями розвитку розв'язують за допомогою ***сплайн-функцій***.

1.4.6. Сплайн - функції

Як ми вже зазначали, важливою вимогою до функції тренду є її гладкість. Проте підібрати гладку функцію з невеликим числом параметрів для всього аналізованого часового інтервалу не завжди вдається. В такій ситуації задачу згладжування динамічного ряду можна розв'язувати за допомогою сплайн-функції, що являє собою кусково-гладку функцію, окремі куски якої з'єднані гладко.

Як куски сплайн-функції здебільшого вибирають поліноми, тому загальне означення сплайн-функції дамо за цим припущенням.

Поліноміальним сплайном n–го степеня називають складену з кусків поліномів степеня не вище n неперервну кусково–поліноміальну функцію, всі похідні якої до порядку n-1 включно неперервні.

Методику побудови сплайн-функції проілюструємо на прикладі ***лінійного сплайну***, тобто поліноміального сплайну першого степеня.

Лінійний сплайн $S(t)$ ***– це неперервна кусково-лінійна функція від t.***

Вісь часу $t \in [0,\infty)$ ділять на k частин $[0,t_1]$, $[0,t_2]$,..., $[t_{k-1},\infty)$ точками $t_1,t_2,...,t_{k-1}$, які називають ***точками перелому***, або ***стикування***. Тоді лінійний сплайн $S(t)$ являє собою k-1 прямолінійні відрізки і промінь.

$$x(t) = a_{j-1} + b_{j-1}(t - t_{j-1}), \quad t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1,2,...,k-1, \quad t_0 = 0;$$

$$x(t) = a_{k-1} + b_{k-1}(t - t_{k-1}), \quad t \in [t_{k-1}, \infty), \qquad (1.23)$$

де $a_0, a_1,...a_{k-1}; b_0, b_1,...b_{k-1}$ – параметри сплайну.

Інколи точками перелому (стикування) називають точки $x(t_1)$, $x(t_2)$, $x(t_3)$, $...x(t_{k-1})$.

Якщо замість змінної t ввести k нових змінних ϖ_j, $j = \overline{1,k}$

$$\varpi_j = \begin{cases} t - t_{j-1}, & при \quad t \geq t_{j-1} \\ 0, & при \quad t < t_{j-1} \end{cases},$$

то лінійний сплайн можна записати так:

$$S(t) = a_1 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j \varpi_j , \qquad (1.24)$$

де $\beta_1 = b_1$, $\beta_j = b_j - b_{j-1}$, $j = \overline{2,k}$.

Лінійний сплайн, порівняно з поліноміальними сплайнами більш високих степенів, має такі переваги:

1. Очевидна економічна інтерпретація – розвиток з кусково-постійними абсолютними приростами (скороченнями).

2. Менша кількість параметрів.

3. Можливість використання досить простого і добре розробленого математичного апарату – лінійної алгебри, лінійного програмування.

Використання сплайнів ефективне, коли на аналізованому часовому періоді характер розвитку змінюється, тобто досліджують розвиток із зміною характеристик динаміки.

Водночас сплайн може з'єднувати як куски однакових функцій з різними параметрами, так і різні види функцій. За допомогою сплайнів зручно „відновлювати" відсутні елементи динамічного ряду (наприклад, через недоліки в статистиці). Останній кусок сплайну можна використати для прогнозування.

1.5. Побудова та використання трендових моделей

1.5.1. Етапи побудови трендових моделей

Побудова трендових моделей складається з таких етапів:

1. Вибір класу функцій тренду $F(t): \left\{ f_k(t) \in F(t), k = \overline{1,K} \right\}$.

На сьогодні розроблено пакети програм побудови й аналізу трендових моделей, які включають десятки функцій. Для побудови трендової моделі деякого економічного показника доцільно обмежити множину функцій, відібравши лише ті, які відображають головні особливості динаміки цього показника, насамперед його тип розвитку. Цього досягають за допомогою якісного економічного аналізу динамічного ряду показника.

2. Оцінення параметрів функцій $f_k(t) \in F(t)$.

Оцінення параметрів трендових моделей проводять за допомогою методів регресійного аналізу. Для лінійних і лінеаризованих моделей найбільш широко використовують модифікації методу найменших квадратів. Розроблені також більш складні методи оцінення параметрів нелінійних моделей.

3. Розрахунок значень формальних критеріїв апроксимації.

Щоб охарактеризувати близькість тренду до динамічного ряду використовують такі формальні критерії:

– суму квадратів відхилень значень тренду від фактичних значень траєкторії (сума квадратів помилок) S^2 (S_x – стандартна похибка оцінки моделі);
– коефіцієнт детермінації R^2;
– залишкову дисперсію σ^2.

4. Аналіз залишкової компоненти динамічного ряду.

Раніше уже було вказано, що у складі динамічного ряду можна виділити чотири компоненти:

1) головну тенденцію (тренд);
2) регулярні коливання відносно тренду (цикли);
3) сезонні коливання;
4) випадкову компоненту (залишок), яка відображає вплив різноманітних факторів стохастичного характеру.

Трендові моделі процесів макроекономіки основані на розкладанні динамічного ряду на дві компоненти: трендову і залишкову. Залишкова компонента має відповідати низці формальних вимог, серед яких можна виділити:

– незалежність;
– сталість дисперсії;
– нормальний закон розподілу.

Якщо ці вимоги не виконуються, то трендова модель частіше за все буває не цілком адекватною динамічному ряду.

5. Вибір функції тренду.

Результатом виконання попередніх етапів (один – чотири) є побудова здебільшого кількох функцій тренду для одного показника. Вибирають кращу (найбільш підходящу) функцію шляхом співставлення:

1) значень формальних критеріїв апроксимації;
2) процедур оцінювання параметрів моделі за їхньою складністю;
3) властивостей залишкової компоненти;
4) можливостей економічної інтерпретації;
5) поведінки функції та її параметрів;
6) використання моделі у ретроспективному аналізі і прогнозуванні.

Отже, ця задача є компромісною, багатокритеріальною, слабко формалізованою.

Очевидно, що чим більше параметрів має модель тренду, тим точніше вона апроксимує динамічний ряд. Наприклад, якщо динамічний ряд має *n* значень показника, то завжди можна побудувати поліном *n-1* степеня

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i$$

такий, що його значення для $t=0,1,\ldots,\ n-1$ збігаються із значенням динамічного ряду. (Згідно з теоремою Вейєрштраса для всякої неперервної в інтервалі $[a,b]$ функції $f(t)$ і довільного $\varepsilon > 0$ існує поліном $p(t)$ степеня $n(\varepsilon)$ такий, що $|p(t) - f(t)| < \varepsilon$ для будь-якого t з інтервалу $[a,b]$).

Для визначення параметрів полінома необхідно розв'язати систему *n* рівнянь з *n* невідомими $a_i, i = \overline{0, n-1}$.

Проте із збільшенням числа параметрів моделі, як правило, погіршується надійність оцінення параметрів. У зв'язку з цим вибір „кращої" функції тренду за допомогою системи статистичних характеристик – це пошук компромісу „точність – надійність". Крім того, максимальне наближення функцій тренду до динамічного ряду не дає змоги позбавитися випадкової компоненти, а, отже, чіткіше виявити головну тенденцію розвитку.

Таким чином, якщо функція тренду має відносно кращі значення формальних критеріїв, але містить велику кількість параметрів і не має досить чіткої економічної інтерпретації (відповідність типу економічного розвитку, поведінка характеристик динаміки і т. п.), то перевагу надають більш простій за методикою оцінювання параметрів та економічною інтерпретацією функції.

При виборі функції тренду важливо враховувати, чи будуть її використовувати лише для ретроспективного аналізу, чи також для прогнозування. У першому випадку необхідно, щоб функція добре згладжувала весь динамічний ряд, в другому – перевагу надають функціям, які мають кращі характеристики апроксимації для останньої частини динамічного ряду, оскільки тенденції розвитку в кінці ретроспективного періоду, зазвичай, найбільше впливають на майбутній розвиток.

1.5.2. Методи оцінювання параметрів моделей тренду

Основне завдання під час побудови трендових моделей – це розрахунок невідомих параметрів функцій тренду та аналіз обраної моделі. Оцінюють невідомі параметри по-різному: лінеаризовані функції шляхом перетворень зводять до лінійної регресії, квадратичні функції зводять до багатофакторної регресії, для інших функцій використовують ітеративні методи, метод трьох точок, метод Тейла тощо.

Для лінеаризованих моделей зберігається вся методологія досліджень, яку детально описано у випадку лінійної регресійної моделі.

Наведемо приклади лінеаризації деяких нелінійних функцій тренду, які широко використовують на практиці.

1. *Степенева (мультиплікативна) трендова модель:*

$$x(t) = at^b, a > 0. \qquad (1.25)$$

Залежно від знаку і величини параметра b степенева функція описує різні типи економічного розвитку:

1) $b>1$ – прискорене зростання;
2) $0<b<1$ – уповільнене зростання;
3) $b<0$ – уповільнене спадання;

4) $b=1$ – рівномірне зростання (степенева функція перетворюється у лінійну).

Логарифмуючи обидві частини рівності (1.25), одержимо:

$$\ln x(t) = \ln a + b \ln t .$$

Проведемо заміну змінних і введемо нові позначення:

$$\ln x(t) = y;$$

$$\ln t = z;$$

$$\ln a = B_0;$$

$$b = B_1 .$$

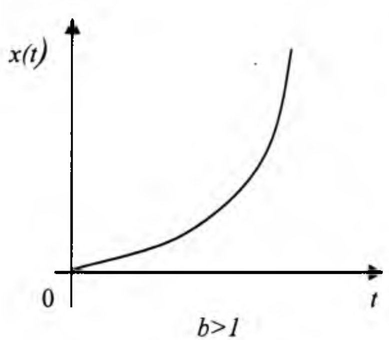

Рис. 16. Графік степеневої функції при b>1 (прискорене зростання)

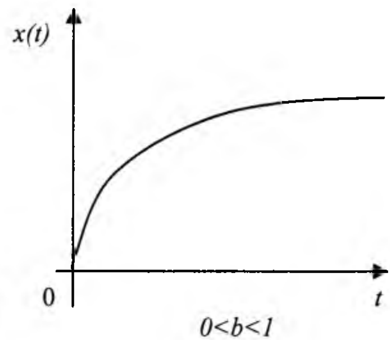

Рис. 17. Графік степеневої функції при 0<b<1 (уповільнене зростання)

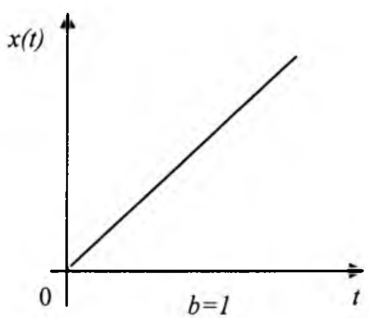

Рис. 18. Графік степеневої функції при b=1 (рівномірне зростання)

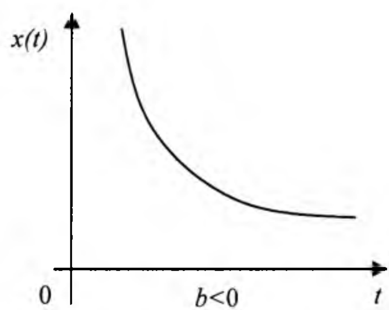

Рис. 19. Графік степеневої функції при $b<0$ (уповільнене спадання)

Маємо модель парної лінійної регресії

$$y = B_0 + B_1 z .$$

2. *Показникова функція:*

$$x(t) = ab^t, a > 0, b > 0 . \qquad (1.26)$$

При $b > 1$ функція описує прискорене зростання, при $0<b<1$ – прискорене спадання.

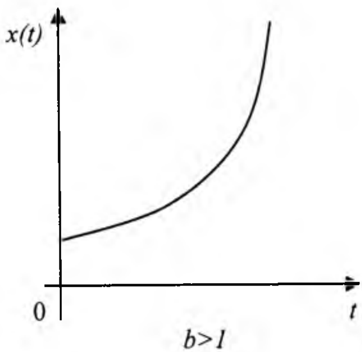

Рис. 20. Графік показникової функції при b>1 (прискорене зростання)

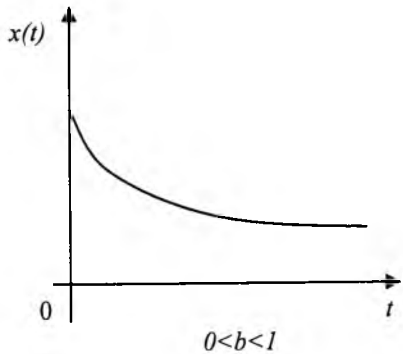

Рис. 21. Графік показникової функції при 0<*b*<1 (прискорене спадання)

На практиці для опису різних економічних процесів використовують такі форми показникової функції:

$$x(t) = a(1+b)^t ;$$

$$x(t) = ae^{bt} ;$$

$$x(t) = e^{a+bt} ;$$

$$x(t) = 10^{a+bt} .$$

Усі ці форми шляхом введення нових позначень зводять до основної форми (1.26).

Логарифмуючи обидві частини рівності (1.26), одержимо:

$$\ln x(t) = \ln a + (\ln b)t .$$

Проведемо заміну змінних і введемо нові позначення:

$$\ln x(t) = y;$$

$$\ln a = B_0;$$

$$b = B_1.$$

Маємо модель парної лінійної регресії:

$$y = B_0 + B_1 t.$$

Описуючи економічні процеси, для яких характерне прискорене зростання або спадання і які обмежені знизу, широко використовують модифіковану показникову функцію. Модифікована показникова функція має вигляд:

$$x(t) = ab^t + c, b > 0. \qquad (1.27)$$

При $b > 1$ модель (1.27) описує прискорене зростання, при $0<b<1$ –прискорене спадання.

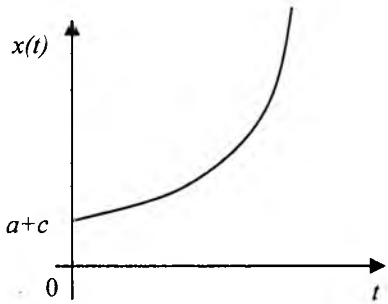

Рис. 22. Графік модифікованої показникової функції при $b>1$ (прискорене зростання)

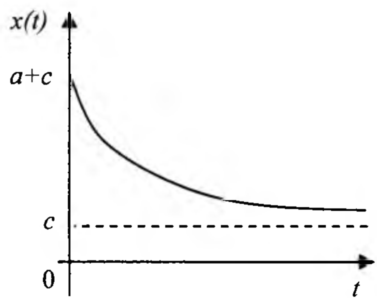

Рис. 23. Графік модифікованої показникової функції при $0<b<1$ (прискорене спадання)

Очевидно, що крива Гомперця:

$$x(t) = e^{ab^t + c}$$

шляхом заміни $y(t) = \ln x(t)$ зводиться до модифікованої показникової функції.

Логістична крива

$$x(t) = \frac{1}{ab^t + c}$$

шляхом заміни $y(t) = \frac{1}{x(t)}$ також зводиться до модифікованої показникової функції.

Наявність третього параметра c перешкоджає зведенню моделі (1.27) до лінійної. Оцінення параметрів моделі (1.27) можна провести на основі нелінійної регресії, яка потребує ітеративної процедури мінімізації суми квадратів помилок нелінійної функції трьох змінних. Проте в особливих випадках невідомі параметри моделі (1.27) можна розрахувати за допомогою досить простих методів, до яких належить, наприклад, метод трьох точок.

Розглянемо метод трьох точок побудови трендової моделі (1.27).

Припустимо, що нам задано динамічний ряд із значеннями траєкторії розвитку $Q_1, Q_2, ..., Q_T$ для $t = \overline{1,T}$, який ми хочемо апроксимувати модифікованою показниковою функцією, тобто побудувати модель тренду (1.27).

Алгоритм методу трьох точок складається із трьох етапів:

1. Розділимо дані динамічного ряду на три підмножини D_1, D_2, D_3, однакові за кількістю елементів. Точніше:

   1) якщо всю кількість елементів можна поділити без залишку на 3, тобто $T = 3\tau$, матимемо три підмножини з кількістю елементів у кожній $\tau = \frac{T}{3}$;
   2) якщо $T = 3\tau + 1$, то у множини D_1, D_3 включаємо по τ елементів, а у множину D_2 включаємо $\tau + 1$ елемент;
   3) якщо $T = 3\tau + 2$, то у множини D_1, D_3 включаємо по $\tau + 1$ елемент, а в множину D_2 включаємо τ елементів.

2. Обчислюємо значення медіан Me_1, Me_2, Me_3 у підмножинах D_1, D_2, D_3. Відповідні моменти часу позначимо t_1, t_2, t_3.

Нагадаємо, що медіана – це характеристика центру розподілу, тобто значення показника, яке припадає на середину упорядкованого динамічного ряду, ділить його на дві рівні частини. Визначаючи медіану, використовують кумулятивні частоти, або кумулятивні частки. Якщо динамічний ряд розглядати як варіаційний ряд розподілу, то абсолютну чисельність i-ї групи вважають частотою f_i, а відносну частоту i-ї групи називають часткою d_i. Кумулятивна частота S_{f_i} – це обсяг сукупності зі значеннями варіант, які не перевищують Q_i. Аналогічно визначають кумулятивну частку S_{d_i}.

У дискретному ряді медіаною буде значення показника, кумулятивна частота якого перевищує половину обсягу сукупності

$$S_{f_i} \geq 0{,}5\sum_{i=1}^{m} f_i ,$$

де m – кількість груп, або кумулятивна частка якого $S_{d_i} \geq 0{,}5$.

В інтервальному ряді за цим принципом визначають медіанний інтервал, а значення медіани всередині інтервалу обчислюють за формулою:

$$Me = Q_{me} + h\frac{0{,}5\sum_{i=1}^{m} f_i S_{f_{me-1}}}{f_{me}},$$

де Q_{me} – нижня межа медіанного інтервалу;

h – ширина медіанного інтервалу;

$S_{f_{me-1}}$ – кумулятивна частота передмедіанного інтервалу.

3. Розв'язуємо систему трьох нелінійних рівнянь з трьома невідомими a,b,c:

$$\begin{cases} Me_1 = ab^{t_1} + c, \\ Me_2 = ab^{t_2} + c, \\ Me_3 = ab^{t_3} + c. \end{cases} \qquad (1.28)$$

Віднімемо від третього рівняння друге, а від другого – перше:

$$\begin{cases} a(b^{t_3} - b^{t_2}) = Me_3 - Me_2, \\ a(b^{t_2} - b^{t_1}) = Me_2 - Me_1. \end{cases} \tag{1.29}$$

Поділимо почленно перше рівняння одержаної системи на друге:

$$\frac{b^{t_3} - b^{t_2}}{b^{t_2} - b^{t_1}} = \frac{Me_3 - Me_2}{Me_2 - Me_1};$$

$$\frac{b^{t_2}\left(b^{t_3 - t_2} - 1\right)}{b^{t_1}\left(b^{t_2 - t_1} - 1\right)} = \frac{Me_3 - Me_2}{Me_2 - Me_1};$$

$$b^{t_2 - t_1}\frac{b^{t_3 - t_2} - 1}{b^{t_2 - t_1} - 1} = \frac{Me_3 - Me_2}{Me_2 - Me_1}.$$

Оскільки $t_2 - t_1 = t_3 - t_2$, то, ввівши позначення $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \Delta$, для визначення параметра b одержимо таке рівняння:

$$b^{\Delta} = \frac{Me_3 - Me_2}{Me_3 - Me_1}.$$

З цього рівняння

$$b = \left(\frac{Me_3 - Me_2}{Me_3 - Me_1}\right)^{\frac{1}{\Delta}}$$

$$\left(\text{або } \ln b = \frac{1}{\Delta}\ln\frac{Me_3 - Me_2}{Me_2 - Me_1}, \text{ звідси } b = e^{\frac{1}{\Delta}\ln\frac{Me_3 - Me_2}{Me_2 - Me_1}} \right).$$

Із будь-якого рівняння системи (1.29) визначаємо параметр a, а із будь-якого рівняння системи (1.28) визначаємо параметр c.

Для практичних розрахунків іноді медіани замінюють середніми значеннями (проте в цьому випадку, взагалі кажучи, $t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$).

1.5.3. Прогнозування на основі трендових моделей

Суть методики економічного прогнозування за допомогою трендів полягає в часовій екстраполяції трендів.

У цьому разі керуються твердженням, що виявлена тенденція динаміки зберігається і в майбутньому. Більш конкретні умови правомірності і допустимості екстраполяції трендів можуть бути сформульовані так:

1) часовий період, для якого побудований тренд, має бути достатнім для виявлення тенденції розвитку;

2) процес, який аналізують, є динамічно стійкий і йому властива інерційність, тобто для значних змін характеристик динаміки процесу, зокрема, переходу до іншого типу розвитку, необхідний значний період;

3) у майбутньому не очікують сильних зовнішніх збурень, які можуть серйозно вплинути на тенденцію розвитку;

4) інтервал довіри прогнозу із заданою ймовірністю задовольняє потрібну точність.

Для побудови інтервалу довіри прогнозу спочатку розраховують стандартну похибку оцінки моделі (середня квадратична похибка тренду) S_x, задається ймовірність α, а потім за таблицями нормального закону розподілу або за таблицями розподілу Стьюдента знаходять імовірнісний коефіцієнт t_α. Інтервал довіри прогнозованого значення тренду має вигляд:

$$x_t - t_\alpha S_x \leq Q_t \leq x_t + t_\alpha S_x \,.$$

Зазначимо, що прогнозування за допомогою трендів – один із найпоширеніших методів статистичного прогнозування. На сьогодні розроблено багато більш досконалих (проте, зазвичай і більш складних) методів прогнозування.

1.5.4. Приклади трендових моделей

1. *Модель зростання капіталу*

Припустимо, що в банк покладено капітал C_0 під річний відсоток r. Тоді процес зростання капіталу (прискорене зростання) описують показниковою функцією тренду

$$C(t) = C_0(1+r)^t, \qquad (1.30)$$

або експоненційною функцією

$$C(t) = C_0 e^{rt}. \qquad (1.31)$$

Модель (1.30) називають дискретною, з нею зручніше працювати, коли t набуває цілих значень.

Модель (1.31) називають неперервною, її використовують, коли t змінюється неперервно.

З моделей (1.30), (1.31) легко отримати так зване правило 70, що поширене у фінансових розрахунках. З його допомогою можна визначити такий інтервал часу t, через який початковий капітал подвоїться.

Наприклад, використовуючи модель (1.30), маємо:

$$C(t) = 2C_0;$$

$$C_0(1+r)^t = 2C_0;$$

$$(1+r)^t = 2;$$

$$t\ln(1+r) = \ln 2;$$

$$t = \frac{\ln 2}{\ln(1+r)} \approx \frac{0.6931}{\ln(1+r)} \approx \frac{0.70}{\ln(1+r)}.$$

2. *Модель приведення витрат до поточного часу*

Порівнюючи різні інвестиційні проекти, порівнюють передусім кошти, які на них необхідно витратити, та майбутні прибутки, які вони приноситимуть. Найпростіше це зробити, оцінюючи майбутні витрати та прибутки у вартості поточного року.

Заощаджуючи в банку А гривень у поточному році при ставці відсотка r, через t років отримаємо $B = A(1+r)^t$ гривень.

Відповідно B гривень, отриманих у t році при ставці відсотка r, у поточному році коштують $A = B(1+r)^{-t}$ гривень. Величину A називають приведеними витратами B гривень через t років до поточного часу при нормі відсотка r.

Приведені витрати можна також визначити для потоку платежів. Наприклад, при нормі відсотка r приведені витрати платежу B_1, який ми мали б через t_1 років, платежу B_2 через t_2

років і т.д., платежу B_n відповідно через t_n років визначають за формулою:

$$A = B_1(1+r)^{-t_1} + B_2(1+r)^{-t_2} + ... + B_n(1+r)^{-t_n}.$$

3. *Модель довічної ренти*

Довічна рента – це послідовність однакових платежів у рівновіддалені інтервали для певного проміжку часу.

Приведені витрати P ренти A, яку виплачують наприкінці кожного з N років при постійній нормі відсотка r, що його нараховують неперервно, обчислюють за формулою:

$$P = Ae^{-r\cdot 1} + Ae^{-r\cdot 2} + ... + Ae^{-r\cdot N} = A\left(e^{-r} + e^{-2r} + ... + e^{-Nr}\right).$$

У дужках маємо суму N членів геометричної прогресії.

Використовуючи формулу $S_n = \frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$, отримаємо:

$$P = A\frac{e^{-r}\left(1-e^{-Nr}\right)}{1-e^{-r}} = A\frac{1-e^{-Nr}}{e^r - 1}.$$

Використовуючи припущення, що ренту отримують довічно ($N \to \infty$), маємо:

$$P = \frac{A}{e^r - 1}.$$

Якщо відсоток нараховують щорічно, приведені витрати P ренти A краще подавати у вигляді:

$$P = \frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + ... + \frac{A}{(1+r)^N} = A\left(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + ... + \frac{1}{(1+r)^N}\right) =$$

$$= A\frac{\frac{1}{1+r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right)}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{A}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right).$$

Використовуючи припущення, що ренту отримують довічно $(N \to \infty)$, маємо:

$$P = \frac{A}{r}.$$

РОЗДІЛ 2

ФАКТОРНІ ТА ЛАГОВІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОГО РОЗВИТКУ

2.1. Екстенсивні та інтенсивні фактори розвитку

Економічний розвиток – процес взаємодії багатьох факторів, серед яких важливо розрізняти *екстенсивні* та *інтенсивні*. Поєднання цих двох груп факторів визначає тип економічного зростання.

Екстенсивне зростання – це збільшення виробництва виключно за рахунок кількісного збільшення ресурсів попередньої якості.

Інтенсивне зростання – це зростання виробництва виключно за рахунок його вдосконалення (в тому числі і підвищення якості ресурсів) при незмінних кількісних обсягах ресурсів.

У реальній економіці здебільшого ознаки екстенсивного та інтенсивного розвитку поєднані. Залежно від переважання екстенсивних чи інтенсивних факторів розвитку можна говорити про переважно екстенсивний чи переважно інтенсивний типи економічного розвитку.

Зрозуміло, що екстенсивний чи переважно екстенсивний шлях розвитку може бути використаний лише в обмежені періоди часу, оскільки він призводить до неминучого вичерпування джерел зростання.

Необхідною умовою збереження високих темпів розвитку при збільшенні ролі інтенсивних факторів є підвищення ефективності використання виробничих ресурсів – збільшення виходу продукції на одиницю затрат.

З огляду на це важливими задачами економічної динаміки є вимірювання та прогнозування ефективності виробництва.

Основними частковими показниками економічної ефективності є: продуктивність праці, фондовіддача, випуск продукції на одиницю витраченої сировини та матеріалів і т.п. Загальною властивістю всіх цих показників є те, що вони характеризують дію кожного виробничого фактора зокрема (однофакторний підхід).

Методологія визначення сукупної (інтегральної) ефективності факторів ґрунтується на вивченні процесу їхньої взаємодії (багатофакторний підхід).

2.2. Однофакторні моделі економічного зростання

Однофакторна модель економічного зростання виражає залежність динаміки обсягу виробництва $y(t)$ ***від динаміки одного із виробничих факторів*** x_{it} ***:***

$$y(t) = f_i(x_{it}). \tag{2.1}$$

Функція (2.1) є динамічним варіантом виробничої функції, основаної на припущенні про взаємодоповнення виробничих факторів. Ця функція умовно „приписує” результат виробництва якомусь одному виробничому фактору залежно від його кількості, якості, ефективності використання. Для дослідження динаміки виробництва у залежності від виробничих ресурсів, природних ресурсів, тощо будують особливі однофакторні моделі. Всі однофакторні моделі економічного зростання об’єднані умовою:

$$y(t) = \min_i f_i(x_{it}). \tag{2.2}$$

З функцією (2.1) пов’язані такі часткові показники використання ресурсів:

1) середні

$$\mu_{it} = \frac{y(t)}{x_{it}}, \ t = 0, 1, 2, \dots; \tag{2.3}$$

2) граничні

$$v_{i[t_1,t_2]} = \frac{y_{t_2} - y_{t_1}}{x_{it_2} - x_{it_1}}. \qquad (2.4)$$

Очевидно, що середні та граничні показники ефективності ресурсів є змінними величинами: вони змінюються у часі, і залежать від величини ресурсу.

При аналізі економічної динаміки часто виникає питання щодо частки приросту продукції, одержаної за рахунок екстенсивних та інтенсивних факторів. Для відповіді на це питання в рамках однофакторного підходу обсяг виробництва подамо у вигляді добутку двох величин – кількості однорідного ресурсу та ефективності його використання:

$$y(t) = x_{it} \cdot \mu_{it}$$

(таке подання випливає з формули (2.3)). Приріст цієї функції за будь-який проміжок часу Δt становить:

$$\Delta y(t) = (x_{it} + \Delta x_{it})(\mu_{it} + \Delta\mu_{it}) - x_{it} \cdot \mu_{it} =$$
$$= \mu_{it} \cdot \Delta x_{it} + x_{it} \cdot \Delta\mu_{it} + \Delta x_{it} \cdot \Delta\mu_{it}.$$

Отже, приріст виробництва розкладають на три складові, економічний зміст яких можна інтерпретувати так:

1) $\mu_{it} \cdot \Delta x_{it}$ – приріст, одержаний за рахунок приросту витрат ресурсу (екстенсивна складова);
2) $x_{it} \cdot \Delta\mu_{it}$ – приріст, одержаний за рахунок приросту ефективності використання ресурсу (інтенсивна складова);
3) $\Delta x_{it} \cdot \Delta\mu_{it}$ – приріст, одержаний за рахунок взаємодії приростів кількості та ефективності використання ресурсу (спірна складова).

Наведемо геометричну інтерпретацію розкладання приросту виробництва на три складові: екстенсивну, інтенсивну та спірну.

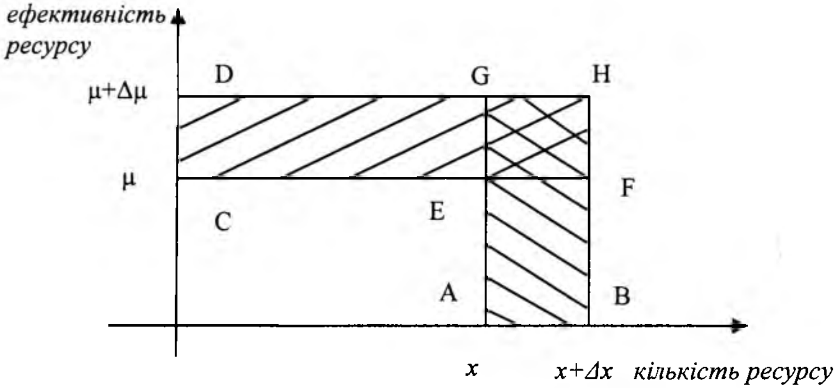

Рис. 24. Графічна інтерпретація розкладання загального приросту виробництва на частини

Загальний приріст виробництва дорівнює всій заштрихованій площі. Чистий приріст за рахунок збільшення кількості ресурсу (екстенсивна складова) рівний площі прямокутника ABFE, чистий приріст за рахунок збільшення ефективності використання ресурсу (інтенсивна складова) рівний площі прямокутника CDGE. Приріст, одержаний за рахунок взаємодії обох факторів (спірна складова) рівний площі прямокутника EFHG.

Формально спірну складову уже не можна розкласти на частини. Найбільш поширена методика, яку, зокрема, використовували у минулому в ЦСУ СРСР, цілком приєднує її до інтенсивної складової (наприклад, при розрахунку приросту виробництва, одержаного за рахунок зростання чисельності робітників та за рахунок збільшення продуктивності праці весь отриманий ефект відносили до фактора зростання продуктивності праці).

У літературі пропонують і інші варіанти, наприклад, поділ спірної компоненти навпіл, розподіл її величини пропорційно до Δx та $\Delta\mu$ тощо.

Величину $\lambda_{x_{it}} = \dfrac{\mu_i \Delta x_i}{\Delta y(t)}$ називають ***часткою екстенсивних факторів зростання***, а величину $\lambda_{\mu_{it}} = \dfrac{x_i \Delta\mu_i}{\Delta y(t)}$ – ***часткою інтенсивних факторів зростання***.

Підвищення ефективності використання виробничих факторів та інтенсифікація виробництва – взаємопов'язані, але не тотожні поняття. Зростання ефективності – необхідна умова інтенсифікації зростаючого виробництва. Проте не всяке зростання ефективності означає, що здійснюється інтенсифікація. Ознакою інтенсифікації є частка приросту, отриманого за рахунок збільшення ефективності виробничих факторів.

2.3. Багатофакторні моделі економічного зростання

Багатофакторна модель на відміну від однофакторної відображає взаємодію низки виробничих факторів із урахуванням зміни їхньої якості, ефективності використання, а також загальних наслідків науково-технічного прогресу та вдосконалення організації виробництва.

Багатофакторна модель економічного зростання має вигляд:

$$y(t) = f(X_t, A_t, t), \qquad (2.5)$$

де X_t – вектор фізичних об'ємів виробничих ресурсів;
A_t – вектор параметрів, які характеризують якість та ефективність ресурсів.

Функція (2.5) є динамічним варіантом виробничої функції із взаємозамінними ресурсами, але на відміну від статичної функції її параметри змінюються у часі і вона може явно включати змінну часу. Модель (2.5) здебільшого будують використовуючи емпіричні динамічні ряди об'ємів виробництва і виробничих ресурсів, тобто як багатофакторне рівняння регресії.

На основі функції (2.5) визначають середні μ_{it} і граничні ν_{it} показники ефективності використання ресурсів:

$$\mu_{it} = \frac{f(X_t, A_t, t)}{x_{it}}, \qquad (2.6)$$

$$\nu_{it} = \frac{\partial f(X_t, A_t, t)}{\partial x_{it}}. \qquad (2.7)$$

Перевага показників ефективності (2.6)–(2.7) порівняно з аналогічними показниками (2.3)–(2.4) однофакторної моделі, полягає у тому, що у них враховано поєднання всіх основних виробничих факторів. Завдяки цьому за їхньою допомогою можна дослідити поєднання виробничих факторів, які приводять, наприклад, до найбільшого зростання продуктивності праці чи до найбільшої економії деяких природних ресурсів і т.п.

Ознакою підвищення ефективності використання виробничих факторів в динаміці виробництва є нерівності:

$$\frac{d\mu_{it}}{dt} > 0,$$

$$\frac{d\nu_{it}}{dt} > 0.$$

Якщо середня ефективність *i*-го ресурсу зростає, то темп приросту виробництва буде вищим за темп приросту відповідного ресурсу.

В основі багатофакторного аналізу ролі екстенсивних та інтенсивних факторів економічного зростання лежить розкладання повного приросту функції (2.5) на складові та економічна інтерпретація цього розкладу.

Проте формально повний приріст функції *n* змінних як суму *n* доданків, які відповідають приростам аргументів (якщо вони не прямують до нуля), представити не можна. З огляду на це неможливо отримати точних однозначних оцінок вкладу кожного фактора у приріст функції. Економічний зміст цього висновку очевидний: ефект взаємодії факторів не можна представити як суму ефектів дії кожного фактора зокрема, його досягають лише у сукупній взаємодії всіх факторів (властивість емерджентності будь-якої кібернетичної системи).

У разі використання багатофакторних моделей приріст об'єму виробництва умовно розкладають на складові таким чином:

$$\Delta f(X, A, t) = \Delta f(X) + \Delta f(A) + \Delta f(t), \tag{2.8}$$

де $\Delta f(X) = \sum_{i \in M} \Delta f(x_i)$, $\Delta f(x_i)$ – приріст, отриманий за рахунок збільшення фізичного об'єму *i*-го ресурсу;

$\Delta f(A) = \sum_{j \in N} \Delta f(a_j)$, $\Delta f(a_j)$ – приріст, отриманий за рахунок підвищення ефективності використання j-го ресурсу;

$\Delta f(t)$ – приріст, отриманий за рахунок загального економічного прогресу виробництва, який відображає сукупну взаємодію всіх факторів.

Відповідно:

$\lambda_{екс} = \dfrac{\Delta f(X)}{\Delta f(X, A, t)}$ – частка екстенсивних факторів зростання;

$\lambda_{інт} = \dfrac{\Delta f(A)}{\Delta f(X, A, t)}$ – частка інтенсивних факторів зростання;

$\lambda_t = \dfrac{\Delta f(t)}{\Delta f(X, A, t)}$ – частка факторів загального економічного прогресу (часто її приєднують до $\lambda_{інт}$).

При теоретичних дослідженнях багатофакторних моделей часто використовують неперервний (граничний) варіант формули (2.8):

$$dy = \sum_{i \in M} \frac{\partial f(X, A, t)}{\partial x_i} dx_i + \sum_{j \in N} \frac{\partial f(X, A, t)}{\partial a_j} da_j + \frac{\partial f(X, A, t)}{\partial t} dt, \quad (2.9)$$

тобто повний диференціал функції $y(t) = f(X_t, A_t, t)$.

2.4. Виробничі цикли

Процес суспільного відтворення – це взаємне переплетення багатьох часткових циклічних процесів відтворення, що суттєво відрізняються своєю тривалістю. Тривалість циклу суспільного виробництва, який зв'язує в одне ціле всі часткові виробничі процеси, зазвичай, приймають рівним одному року. Проте це лише теоретичне припущення, прийнятне для аналізу відтворення валового внутрішнього продукту загалом. Виробничі цикли конкретних видів продукції суттєво відрізняються своєю тривалістю. Наприклад, у багатьох галузях промисловості, які створюють предмети праці і предмети споживання, тривалість виробничих циклів вимірюють хвилинами, годинами, днями, в будівництві – роками, лісовому господарстві – десятиріччями.

Цикли, що входять у систему суспільного відтворення – відтворення населення, основних фондів, природного середовища, – мають тривалість, яка багатократно перевищує тривалість процесів матеріального виробництва. Важливою характеристикою відтворення населення, основних фондів, елементів біосфери є тривалість життя. Це поняття належить до великих неоднорідних систем і має досить складну статистичну структуру.

В процесі функціонування суспільного виробництва виникають задачі поєднання, синхронізації часткових циклів відтворення. Зміна в одному процесі відтворення здебільшого спричиняє зміну в динаміці інших процесів. Це потребує розроблення комплексних динамічних моделей, які характеризують взаємопов'язані процеси.

2.5. Лагові моделі

Взаємозв'язки між елементами соціально-економічного процесу, як правило, не є миттєвими. Між причиною і наслідком, стимулюючою дією та її ефектом, вкладенням ресурсів і одержанням продукції практично завжди існує певний проміжок часу, який називають *часовим лагом* (лагом запізнення, просто лагом).

Найпростіша *лагова модель* має такий вигляд:

$$y(t) = f(x_{t-\tau}), \tag{2.10}$$

де τ – лаг.

Величину $y(t)$ в момент часу t визначають за значенням величини x у момент часу $t-\tau$. Моделі такого типу широко використовують у ретроспективному динамічному аналізі та прогнозуванні.

Якщо лагове співвідношення пов'язує значення одного і того ж показника у різні моменти часу, то така модель називається *авторегресійною*:

$$y(t) = f(y_{t-\tau}).$$

Авторегресійна лінійна модель загального вигляду виражає значення показника у певний момент часу через значення цього ж показника у попередні моменти:

$$y(t) = \sum_{\tau=0}^{\Theta} a_\tau y_{t-\tau} + \varepsilon_t ,$$

де a_τ – коефіцієнти лінійної регресії;

Θ – найбільше значення авторегресійного лага;

ε_t – випадкова (залишкова) компонента.

У схемі циклу суспільного відтворення лаги наявні у більшості зв'язків:

- між вкладенням виробничих ресурсів та випуском продукції;
- між розподілом продукції на розширення виробничих факторів і підвищення матеріального та культурного рівня життя населення і т.д.

У моделюванні економічної динаміки розрізняють два основні види лагів: *інвестиційні* та *демографічні*.

Інвестиційний лаг охоплює період часу від початку проектування об'єкта до його введення в дію на повну потужність. У багатьох випадках в інвестиційному лазі виділяють будівельний лаг – від початку будівництва об'єкта до введення його у дію.

Демографічний лаг охоплює період від народження людини до вступу у працездатний вік (16 років) або до початку трудової діяльності після одержання загальної освіти та професійної підготовки (17–23 роки).

В більшості соціально-економічних процесів лаг не є строго визначеною величиною, а розподілений у часі. Якщо значення лага є чітко визначеним (модель (2.10)), то його називають *зосередженим*. Якщо лаг набуває значення з певного проміжку часу, то його називають *розподіленим*.

Лінійна модель розподіленого лага має вигляд:

$$y(t) = \sum_{\tau=1}^{\Theta} \omega_\tau y_{t-\tau} + \varepsilon_t ,$$

де ω_τ – невід'ємні параметри, сукупність яких називають ***структурою лага***.

В багатьох задачах економічної динаміки часовий лаг є характеристикою не запізнення подій, а їхнього випередження. Наприклад, обсяг інвестицій у приріст основних фондів, які здійснюються у році t, визначають за тим, які виробничі потужності, тобто нові основні виробничі фонди необхідно ввести в наступні роки в деякий період $[t+\tau_{\min}, \ t+\tau_{\max}]$. В цьому випадку взаємозв'язок інвестицій x та введених у дію основних фондів y описують такою моделлю із розподіленим лагом:

$$x(t)=\sum_{\tau=1}^{\Theta} f(y_{t+\tau})\,. \tag{2.11}$$

Для інтервалу $\tau_{\max}-\tau_{\min}$ можна визначити різні статистичні характеристики моделі: середню величину лага, лагову структуру (закон розподілу лага) тощо. Для нашого прикладу лагова структура – це частки введення в дію основних фондів у кожному році.

РОЗДІЛ 3

СТАТИЧНІ ВИРОБНИЧІ ФУНКЦІЇ. ФУНКЦІЇ ВИРОБНИЧИХ ВИТРАТ

3.1. Загальні відомості про виробничі функції та функції виробничих витрат

Виробничі можливості економічної системи в будь-який момент часу можна визначити за двома групами факторів:

- технологічними умовами виробництва, вираженими залежностями між витратами різних видів ресурсів і випуском продукції;
- обсягами та якістю наявних ресурсів.

Співвідношення між виробничими витратами і випуском продукції є основними елементами більшості моделей економічних процесів.

Нехай $X=(x_i)$, $i\in M$, $M=\{1,2,...,m\}$ – вектор витрат ресурсів, M – множина всіх видів ресурсів; $Y=(y_j)$, $j\in N$, $N=\{1,2,...,n\}$ – вектор обсягів виробництва, N – множина всіх видів продукції.

Сукупність технологічних умов економічної системи може бути формально описана як множина Z пар (X,Y) у просторі R^{m+n}.

При моделюванні економічних систем нас зазвичай цікавлять найбільш раціональні перетворення ресурсів у продукти.

Технологію (X^*,Y^*) називають ефективною, якщо вона володіє властивістю: із умов $(X,Y)\in Z$, $X\leq X^*$, $Y\geq Y^*$ випливає, що $(X,Y)=(X^*.Y^*)$, тобто не існує інших технологій, які дають можливість отримати не менші обсяги продукції при не більших витратах.

Множину всіх ефективних технологій позначимо Z^*.

Виробничі ресурси ділять на два типи: відтворювальні і невідтворювальні. Очевидно, що відтворювальні ресурси водночас є і продуктами і ресурсами. Множину M розіб'ємо на дві підмножини: M_1 – відтворювальні ресурси, $i_1 \in M_1$, $M_1 \subset N$ і M_2 – невідтворювальні ресурси, $i_2 \subset M_2$, $M_2 \subset N$. Відповідно вектор витрат ресурсів X представимо як суму двох складових X_1 та X_2, де $X_1=(x_{i_1})$, $i_1 \in M_1$, $X_2=(x_{i_2})$, $i_2 \in M_2$. Зрозуміло, що обсяги невідтворювальних ресурсів у будь-який заданий момент часу обмежені: $X_2 \leq R$, $R=(r_{i_2})$, $i_2 \in M_2$.

Крім того, при моделюванні економічних процесів виробництва необхідно враховувати відмінності у витратах предметів праці й основних фондів. Предмети праці повністю витрачаються в одному виробничому циклі, основні фонди використовують багатократно. Таким чином, витрати предметів праці мають розмірність потоку, обсяги використання основних фондів у кожному виробничому циклі мають розмірність запасу. При моделюванні економічних процесів на макрорівні витрати і випуск проміжних продуктів, які повністю споживаються у сфері виробництва, можна не розглядати. В цьому випадку вектор X буде включати витрати лише невідтворювальних ресурсів, а вектор Y – обсяги випуску лише кінцевої продукції.

Множину виробничих можливостей економічної системи можна представити у вигляді:

$$\begin{cases} (X,Y) \in Z, \\ X_2 \leq R. \end{cases}$$

Якщо економічна система зацікавлена в отриманні найбільших обсягів кінцевої продукції при найменших витратах, то загальну модель виробничого планування формулюють як задачу векторної оптимізації

$$Y \to \max$$

$$\begin{cases} (X,Y) \in Z^*, \\ X_2 \leq R. \end{cases}$$

Загальною виробничою функцією економічної системи називають функцію $Y=F(X)$, яка описує множину Z^* і характеризує максимально можливі обсяги виробництва продукції при певних витратах ресурсів.

Ці об'єми виробництва є максимальними в тому сенсі, що при заданих витратах ресурсів не можна збільшити виробництво жодного продукту, не зменшивши виробництво принаймні одного іншого продукту.

Загальна виробнича функція – це своєрідна математична модель виробництва, що володіє внутрішніми екстремальними властивостями, свого роду „оптимізуючий чорний ящик". За даними про входи X вона дає змогу визначити ефективні виходи Y.

Побудова й аналіз загальної виробничої функції економічної системи – складне завдання, тому в прикладних дослідженнях використовують часткові випадки виробничих функцій.

Розрізняють два типи виробничих функцій: виробничі функції із взаємозамінними ресурсами і виробничі функції із взаємодоповнюючими ресурсами.

Разом із виробничими функціями під час дослідження виробничих можливостей економічної системи широко використовують *функції виробничих витрат.*

Функцією виробничих витрат ресурсу i–го виду від обсягу випуску всієї продукції Y називають функцію

$$x_i=\varphi_i(Y).$$

Функції виробничих витрат можна інтерпретувати як функції, обернені до виробничих функцій із взаємодоповнюваними ресурсами.

При побудові виробничих функцій і функцій виробничих витрат використовують два основних підходи: дескриптивний (статистичний) і оптимізаційний.

Суть дескриптивного підходу полягає в тому, що функцію будують, обробляючи спостереження про співвідношення витрат і випуску продукції.

При оптимізаційному підході вид і параметри функції визначають в результаті розв'язку задач параметричного програмування.

Відзначимо, що процес побудови виробничої функції чи функції виробничих витрат включає всі етапи економіко-математичного моделювання, як і будь-який процес створення економіко-математичної моделі.

3.2. Виробничі функції із взаємозамінними ресурсами

Одним із часткових випадків загальної виробничої функції є функція виробництва одного продукту

$$y_j = f_j(X_j),\ X_j = (x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{mj}),$$

яка характеризує максимально можливий обсяг випуску продукту j залежно від витрат всіх ресурсів.

Припущення про взаємозамінність ресурсів означає, що один і той самий обсяг випуску продукції може бути отриманий при різних комбінаціях ресурсів, які відрізняються своєю вартістю.

Приведемо основні властивості виробничих функцій виробництва одного продукту із взаємозамінними ресурсами (для спрощення індекс j будемо упускати):

1. Якщо X=0, то Y=0.

2. Якщо $X^A \geq X^B$, то $f(X^A) \geq f(X^B)$, причому, якщо $X^A > X^B$, то $f(X^A) > f(X^B)$.

З цієї властивості випливає, що при X>0 матимемо Y>0.

Наведені властивості відображають реальні умови виробництва і правила розумного господарювання. Наприклад, з другої властивості можемо зробити такий висновок: якщо збільшення виробничих витрат будь-якого ресурсу s більше величини x'_S приводить до скорочення обсягу виробництва, то необхідно використати у виробництві лише x'_S ресурсу s, а надлишок $(x_S - x'_S)$ залишити у резерві; якщо ж при ненульових витратах багатьох ресурсів, але при $x_s=0$ $y=0$, то це означає, що ресурс s є абсолютно необхідний у виробництві (наприклад, праця, енергія, тощо).

Виробничі функції можуть бути задані або у аналітичній формі, або як таблиця.

Множину точок виробничої функції, що задовольняє рівняння постійного випуску $f(X) = Q$, називають ізоквантою.

Із загальних властивостей виробничих функцій випливають такі властивості ізоквант:

1. Ізокванти ніколи не перетинаються між собою.
2. Більшому випуску продукції відповідає більш віддалена від початку координат ізокванта.
3. Якщо всі ресурси є абсолютно необхідними для виробництва, то ізокванти не мають спільних точок з осями координат.

3.3. Показники використання ресурсів

Ефективність використання ресурсів характеризують за допомогою двох основних показників:

1. Середня ефективність ресурсу:

$$\mu_i = \frac{f(X)}{x_i}.$$

2. Гранична ефективність ресурсу:

$$\nu_i = \frac{\partial f(X)}{\partial x_i}.$$

З другої властивості виробничих функцій випливає, що $\nu_i \geq 0$.

Якщо $\nu_{ii} = \dfrac{\partial \nu_i}{\partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f(X)}{\partial x_i^2} < 0$, то це означає, що гранична ефективність ресурсу спадає.

Цю умову називають *законом спадної граничної ефективності ресурсів.*

Закон діє при незмінному науково-технічному рівні виробництва та незмінній якості ресурсів.

Наприклад, якщо у виробництві деякого продукту постійно збільшувати витрати праці, зберігаючи незмінними обсяги інших ресурсів, то гранична продуктивність праці буде зменшуватися через зменшення оснащення одиниці праці засобами виробництва.

Графічну інтерпретацію закону спадної граничної ефективності ресурсів можна проілюструвати так:

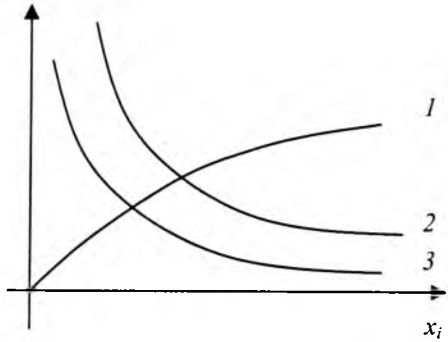

Рис. 25. Спадна гранична ефективність ресурсів:

1 – зміна обсягу випуску продукції (уповільнене зростання);
2 – зміна середньої ефективності ресурсу μ_i;
3 – зміна граничної ефективності ресурсу ν_i.

Зовсім по-іншому змінюється середня і гранична ефективність певного ресурсу в разі збільшення витрат інших ресурсів. В цьому випадку здебільшого справджуються співвідношення:

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f(X)}{x_i \partial x_k} > 0, \quad i \neq k,$$

$$\nu_{ik} = \frac{\partial \nu_i}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_i \partial x_k} > 0, \quad i \neq k.$$

Це пояснюється тим, що збільшення витрат ресурсу k поліпшує виробничі умови використання ресурсу i. Наприклад, продуктивність праці залежить не лише від якості самої праці, але і від умов прикладення праці (зокрема, продуктивність праці зростає при зростанні фондоозброєності).

Зміну випуску продукції при невеликих витратах декількох ресурсів наближено можна виразити повним диференціалом виробничої функції:

$$dy = \sum_{i \in M} \nu_i dx_i .$$

Умови еквівалентної взаємозаміни ресурсів у точці X^0 випливають з рівняння:

$$\sum_{i \in M} \nu_i (X^0) dx_i = 0 .$$

Зокрема, граничну норму еквівалентної взаємозаміни даних двох ресурсів k та l визначають за допомогою функції:

$$\nu_{kl} = \frac{dx_k}{dx_l} = -\frac{\nu_l(X^0)}{\nu_k(X^0)} \leq 0 .$$

Процесу еквівалентного заміщення одних ресурсів іншими відповідає рух уздовж ізокванти. Якщо витрати ресурсу k збільшуються, то для збереження обсягу виробництва на попередньому рівні витрати ресурсів l можна зменшити.

Стає очевидною така властивість ізоквант: ізокванти – це спадні функції по відношенню до осі координат OX (тобто вони мають від'ємний нахил).

Геометрично граничні норми еквівалентної взаємозаміни визначають за положенням площин, дотичних до ізоквант. У просторі двох ресурсів норма еквівалентної взаємозаміни – це тангенс кута між дотичною до ізокванти і відповідною віссю координат.

Комбінації ресурсів, для яких граничні норми еквівалентної взаємозаміни однакові, утворюють у просторі ресурсів криві, які називають ізоклиналями.

Графічна інтерпретація граничних норм еквівалентної взаємозаміни двох ресурсів має такий вигляд:

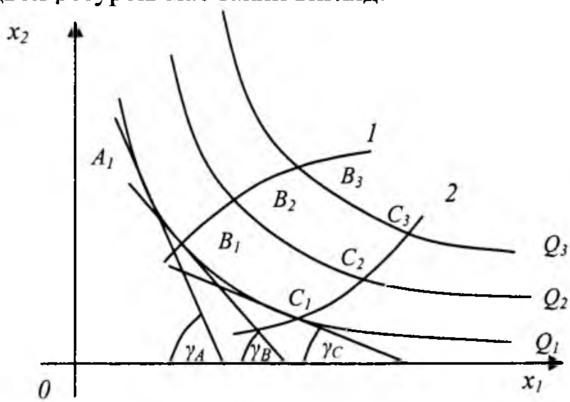

Рис. 26. Граничні норми еквівалентної взаємозаміни двох ресурсів:

Q_1 , Q_2 , Q_3 – ізокванти, які відповідають обсягам продукції Q_1 , Q_2 , Q_3;
1, 2 – ізоклиналі;
$tg\,\gamma_A$, $tg\,\gamma_B$, $tg\,\gamma_C$ – норми еквівалентної заміни другого ресурсу першим у точках A_1, B_1, C_1.

У разі збільшення використання ресурсу l його гранична ефективність спадає, тому додаткові витрати цього ресурсу звільняють все менше ресурсу k. Отже, гранична норма еквівалентної взаємозаміни двох ресурсів зменшується:

$$\frac{d\gamma_{kl}}{dx} = \frac{d}{dx_l}\left(-\frac{dx_k}{dx_l}\right) < 0 .$$

Це означає, що в просторі двох ресурсів ізокванти є графіками угнутих функцій. Якщо ця особливість граничних норм еквівалентної взаємозаміни поширюється на множину всіх ресурсів, то ізокванти мають ще дві додаткові властивості:

1. Множини $\{X : f(X) \geq 0\}$ опуклі.
2. Осі координат є асимптотами ізоквант.

Для характеристики впливу кожного ресурсу на зростання виробництва, крім показників середньої та граничної ефективності, використовують також *коефіцієнти еластичності випуску продукції від витрат ресурсів.*

Коефіцієнт еластичності δ_i показує відношення відносного приросту виробництва до відносного приросту витрат ресурсу і:

$$\delta_i = \lim_{\Delta x_i} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x_i}{x_i}} = \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{y} .$$

Наприклад, якщо в деякій точці X^0 $\delta_i = 0{,}02$, то це означає, що при збільшенні x_i на α відсотків, y зростає на 2α відсотків (твердження справедливе при достатньо малих α).

Розглянемо ізокванти трьох виробничих функцій, які проходять через одну точку A (X_1^0, X_2^0), $X_1^0 = X_2^0$ і відрізняються коефіцієнтами еластичності в цій точці.

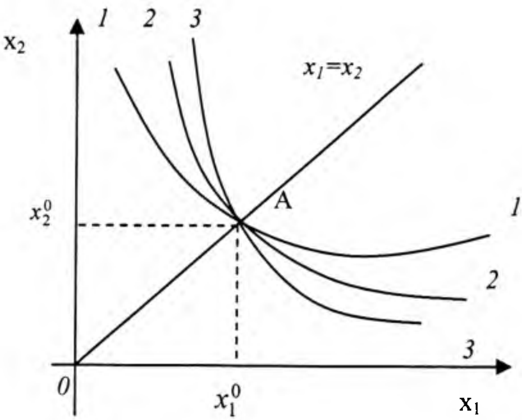

Рис. 27. Залежність ізоквант від коефіцієнтів еластичності:

Ізокванта *1*, для якої $\delta_1 > \delta_2$ має менший нахил до осі OX_1;
Ізокванта *2*, для якої $\delta_1 = \delta_2$, симетрична відносно прямої $x_1 = x_2$;
Ізокванта *3*, для якої $\delta_1 < \delta_2$, має відносно більший нахил до осі OX_1.

Разом з поняттям коефіцієнта еластичності випуску продукції від витрат ресурсів у теорії виробничих функцій використовують *коефіцієнт еластичності взаємозаміни ресурсів.*

Коефіцієнт еластичності заміни ресурсів δ_{kl} ***характеризує відношення відносної зміни співвідношення витрат ресурсів k та l до відносної зміни граничної норми еквівалентної взаємозаміни цих ресурсів:***

$$\delta_{kl} = \frac{\partial \frac{x_k}{x_l}}{\frac{x_k}{x_l}} \div \frac{\partial \gamma_{kl}}{\gamma_{kl}} = \frac{\partial \frac{x_k}{x_l}}{\partial \gamma_{kl}} \cdot \gamma_{kl} \frac{x_l}{x_k}.$$

Наприклад, якщо $\delta_{kl} = 0{,}05$, то це свідчить про те, що для збільшення норми граничної заміни ресурсів γ_{kl} на *1%* необхідно збільшити співвідношення витрат ресурсів *k* та *l* на *5%*.

Чим вища еластичність заміни ресурсів, тим в більш широких межах вони можуть бути взаємозамінними. При $\sigma_{kl} \to +\infty$ меж взаємозамінних ресурсів не існує, і, навпаки, при $\sigma_{kl} = 0$ можливості взаємозаміни немає. В цьому випадку ресурси взаємодоповнюють один одного й обов'язково їх слід використовувати у певному комплекті.

Наведемо графічну ілюстрацію використання коефіцієнтів еластичності взаємозаміни ресурсів.

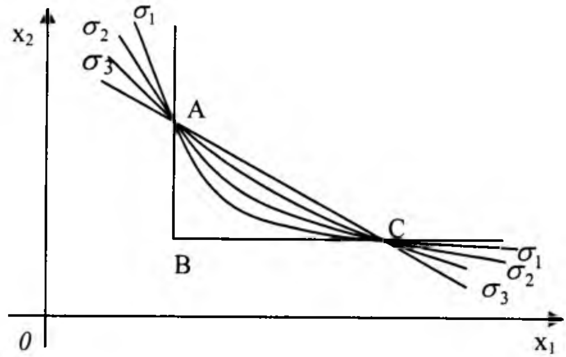

Рис. 28. Залежність ізоквант від коефіцієнтів еластичності взаємозаміни ресурсів:
прямокутна ламана ABC – ізокванта при $\sigma = 0$;
інші три ізокванти мають еластичності $0 < r_1 < r_2 < r_3$;
пряма AC – ізокванта з еластичністю $\sigma = \infty$.

Гранична норма заміни ресурсів на ізокванті AC не змінюється:

$$\gamma_{12} = -\frac{a_2}{a_1},$$

де $a_1x_1 + a_2x_2 = Q$ – рівняння AC.

3.4. Типові виробничі функції із взаємозамінними ресурсами

3.4.1. Однорідні виробничі функції

В теоретичних та прикладних економічних дослідженнях найчастіше використовують *однорідні виробничі функції*, зручні для змістовної інтерпретації і розрахунків.

Функцію y=f(X) називають однорідною n-го степеня, якщо вона відповідає умові:

$$f(\lambda X)=\lambda^n f(X).$$

Для виробничої функції це означає, що при збільшенні витрат всіх ресурсів у λ разів обсяг виробництва зростає у λ^n разів. Показник степеня однорідності n характеризує зміну ефективності виробництва із збільшенням виробничих витрат.

Теоретично можливі три випадки:

1) n=1 – ефективність залишається незмінною;
2) n<1 – ефективність спадає;
3) n>1 – ефективність зростає.

В умовах незмінної технології виробництва (при сталому науково-технічному рівні) можуть мати місце всі три випадки.

Якщо однорідні виробничі функції $y=f_1(X)$ та $y=f_2(X)$ відповідають умові

$$f_1(X)=(f_2(X))^{\frac{n_2}{n_1}},$$

то вони мають одне і те ж сімейство ізоквант, але для функцій з більшим показником степеня ізокванти зсунуті до початку координат.

Для однорідних функцій справедлива формула Ейлера:

$$\sum_{i\in M}\frac{\partial y}{\partial x_i}x_i=ny. \qquad (3.1)$$

Поділивши обидві частини цього рівняння на y, одержимо:

$$\sum_{i\in M}\frac{\partial y}{\partial x_i}\cdot\frac{x_i}{y}=n.$$

Оскільки $\frac{\partial y}{\partial x_i}\cdot\frac{x_i}{y}=\delta_i$ – коефіцієнт еластичності, то отримуємо формулу:

$$\sum_{i\in M}\delta_i=n, \qquad (3.2)$$

тобто сума коефіцієнтів еластичності випуску продукції за витраченими ресурсами рівна показнику степеня однорідності виробничої функції.

Проаналізуємо детальніше економічний зміст формули (3.1) при $n=1$:

$$\sum_{i \in M} \frac{\partial y}{\partial x_i} x_i = y. \tag{3.3}$$

Оскільки $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ – гранична ефективність одиниці ресурсу i, то $\frac{\partial y}{\partial x_i} x_i$ можна інтерпретувати як загальний обсяг продукції, виробленої за рахунок ресурсу i. Весь обсяг виробництва y згідно з формулою (3.3) можна розкласти на частини, вироблені за рахунок використання кожного ресурсу зокрема. Крім того, при $n=1$:

$$\sum_{i \in M} \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{y} = \sum_{i \in M} \delta_i = 1. \tag{3.4}$$

З останньої рівності випливає, що якщо всі коефіцієнти еластичності невід'ємні, то кожен з них не може бути більшим від одиниці.

Формули (3.3) та (3.4) використовують у теорії „трьох факторів виробництва" і теорії „ставлення" для пояснення процесу створення вартості. В процесі виробництва виділяють три основні види ресурсів (фактори): капітал, працю і землю. З ними порівнюють відповідні величини вартості продукції і, таким чином, обґрунтовують принципи розподілу створюваної вартості на прибуток, заробітну плату і ренту. Наведена економічна інтерпретація формул (3.3) та (3.4) має умовний характер. Насправді продукцію можна створювати лише шляхом поєднання ресурсів, і, якщо деякий ресурс абсолютно необхідний, то жодні витрати інших ресурсів не можуть привести до створення продукції (при $x_s=0$, $y=0$).

3.4.2. Степеневі виробничі функції

В теоретичних та прикладних економічних дослідженнях часто використовують таку степеневу виробничу функцію:

$$y = a \prod_{i \in M} x_i^{\alpha_i}. \tag{3.5}$$

Параметр a інтерпретують як показник загальної ефективності ресурсів.

Функція має низку переваг, зокрема:

- включає невелике число параметрів, які мають явний економічний зміст;
- має похідні вищих порядків;
- у більшості випадків задовільно згладжує емпіричні дані;
- зручна для оцінення параметрів (шляхом логарифмування).

У виробничу функцію (3.5) включають лише абсолютно необхідні ресурси, тобто, якщо деякий $x_s=0$, то $y=0$.

Основні показники використання ресурсів мають таку аналітичну форму:

- середня ефективність ресурсу s:

$$\mu_s = a x_s^{\alpha_s - 1} \prod_{i \neq s} x_i^{\alpha_i} ;$$

- гранична ефективність ресурсу s:

$$\nu_s = a \alpha_s x_s^{\alpha_s - 1} \prod_{i \neq s} x_i^{\alpha_i} = \alpha_s \mu_s ;$$

- гранична норма еквівалентної заміни ресурсів:

$$\gamma_{kl} = \frac{\alpha_l x_k}{\alpha_k x_l} ;$$

- коефіцієнт еластичності за ресурсом i:

$$\delta_i = \alpha_i ;$$

- коефіцієнт еластичності заміни ресурсів:

$$\delta_{kl} = 1 .$$

Із формули норми еквівалентної заміни ресурсів випливає, що ізоклиналь степеневої виробничої функції є лінійною функцією:

$$\gamma_{kl} = c_{kl} = const ,$$

$$\frac{\alpha_l x_k}{\alpha_k x_l} = c_{kl} ,$$

$$\frac{x_k}{x_l} = c_{kl} \frac{\alpha_k}{\alpha_l}.$$

Зміну граничної ефективності ресурсів, залежно від обсягів витрат, яку характеризують другими частковими похідними, визначають за формулами:

$$v_{ss} = a\alpha_s(\alpha_s - 1)x_s^{\alpha_s - 2} \prod_{i \neq s} x_i^{\alpha_i},$$

$$v_{kl} = a\alpha_k\alpha_l x_k^{\alpha_k - 1} x_l^{\alpha_l - 1} \prod_{i \neq k,l} x_i^{\alpha_i}.$$

Очевидно, що $v_{ss} < 0$, коли $\alpha_s(\alpha_s - 1) < 0$, зокрема, коли $0 < \alpha_s < 1$. Величини v_{kl} додатні при додатних значеннях α_k і α_l.

Частковим випадком степеневої виробничої функції (3.5) є функція першого степеня, для якої $\sum_{i \in M} \alpha_i = 1,\ \alpha_i > 0$. Коефіцієнти еластичності такої функції $\delta_i = \alpha_i$ визначають умовний розклад обсягу виробництва на частини, які створюють за рахунок використання кожного ресурсу окремо.

В макроекономічних дослідженнях виробничі функції вперше були використані американськими вченими К. Коббом та П. Дугласом у 20-х роках XX ст. Для вивчення зв'язку між загальним обсягом валового внутрішнього продукту (національного доходу) та двома найважливішими факторами виробництва (робочою силою та основними фондами) вони побудували функцію:

$$y = aL^{\alpha_L} C^{\alpha_C}, \tag{3.6}$$

де L – витрати праці (labor),

C – витрати виробничих фондів (capital),

$\alpha_L + \alpha_C = 1$.

Виробничу функцію (3.6) згодом стали називати функцією Кобба-Дугласа.

На сьогоднішній день макроекономічні виробничі функції використовують як інструмент прогнозування обсягів валового внутрішнього продукту, кінцевого продукту і національного доходу для аналізу порівняльної ефективності основних факторів економічного зростання.

На сучасному етапі розвитку економіки важливою умовою зростання виробництва і продуктивності праці є збільшення фондоозброєності праці. За умови $\alpha_L + \alpha_C = 1$ із функції Кобба-Дугласа отримуємо рівність:

$$\frac{y}{L} = a\left(\frac{C}{L}\right)^{\alpha_C}, \tag{3.7}$$

яка виражає співвідношення між продуктивністю праці $\frac{y}{L}$ та фондоозброєністю $\frac{C}{L}$. Оскільки $0 < \alpha_C < 1$, то формула (3.7) показує, що продуктивність праці зростає повільніше, ніж фондоозброєність праці. Необхідно зауважити, що цей висновок (як і більшість результатів аналізу, який проводять на основі статичних виробничих функцій) справедливий лише для статичного випадку, тобто в рамках стабільних технічних умов та якісних характеристик ресурсів.

Оскільки параметри макроекономічних виробничих функцій здебільшого визначають шляхом оброблення динамічних рядів, які відображають вплив науково-технічного прогресу та інших факторів інтенсифікації виробництва, то сума коефіцієнтів еластичності (степінь однорідності) для побудованих виробничих функцій більша за одиницю.

3.4.3. Виробничі функції з постійною еластичністю заміни

Останніми роками в багатьох економічних дослідженнях стали широко використовувати виробничу функцію з постійною еластичністю заміни ресурсів (функцію ПЕЗ). Вона має такий загальний вигляд:

$$y = a_0\left(\sum_{i\in M} a_i x_i^{-\rho}\right)^{-\frac{n}{\rho}}. \tag{3.8}$$

Функція (3.8) – це однорідна функція степеня n. Щоб її побудувати необхідно розв'язати диференціальне рівняння:

$$\sigma_{kl} = \frac{\partial \frac{x_k}{x_l}}{\partial \gamma_{kl}} \cdot \gamma_{kl} \frac{x_l}{x_k} = \sigma = const,$$

$$\gamma_{kl} = \frac{dx_k}{dx_l}.$$

У функції ПЕЗ всі еластичності заміни ресурсів σ_{kl} рівні між собою: $\sigma_{kl} = \sigma$, водночас $\sigma = \frac{1}{1+\rho}$, тобто $\rho = \frac{1-\sigma}{\sigma}$. Якщо $\rho > 0$, то $0 < \sigma < 1$, якщо $-1 < \rho < 0$, то $\sigma > 1$. При $\sigma = 1$ ($\rho = 0$) функція ПЕЗ перетворюється у степеневу функцію (3.5). Таким чином, степенева виробнича функція (в т.ч. макроекономічна функція Кобба-Дугласа) є частковим випадком функції ПЕЗ.

Як було зазначено попередньо, величина σ визначає форму ізокванти. Якщо $\sigma \to +\infty$ ($\rho \to 1$), то форма ізокванти наближається до лінійної, а якщо $\sigma \to 0$ ($\rho \to +\infty$) – до прямокутної.

Розглянемо детальніше макроекономічну двофакторну функцію ПЕЗ:

$$y = a_0(a_L L^{-\rho} + a_C C^{-\rho})^{-\frac{n}{\rho}}. \tag{3.9}$$

Експериментальні дослідження показали, що для такої функції характерні значення $\rho > 0$ і, отже, $0 < \sigma < 1$.

Функцію (3.9) можна подати у вигляді:

$$y = \frac{a_0}{(a_L \frac{1}{L^\rho} + a_C \frac{1}{C^\rho})^{\frac{n}{\rho}}}. \tag{3.10}$$

Аналіз цієї функції при $\rho > 0$ свідчить, що вона має багато спільних властивостей із функцією Кобба-Дугласа. Проте на відміну від функції Кобба-Дугласа функція (3.10) при необмеженому зростанні L або C має границю.

Поряд з виробничими функціями, які мають специфічні властивості (наприклад, постійні коефіцієнти еластичності, постійну еластичність заміни ресурсів), в економічному аналізі та прогнозуванні використовують і функції більш загального вигляду.

Прикладом такої функції може бути макроекономічна функція:

$$y = y_0 e^{\mu z} C^{\alpha} L^{1-\alpha} . \qquad (3.11)$$

Ця функція відрізняється від функції Кобба-Дугласа множником $e^{\mu z}$, де z – фондоозброєність праці $\left(z = \frac{C}{L} \right)$. Вона має змінні коефіцієнти еластичності заміни національного доходу за факторами C та L:

$$\delta_C = \alpha + \mu z,$$

$$\delta_L = 1 - \delta_C .$$

3.5. Виробничі функції із взаємодоповнюючими ресурсами. Функції виробничих витрат

3.5.1. Загальний аналіз функцій із взаємодоповнюючими ресурсами та функцій виробничих витрат

В умовах сучасного виробництва можливості заміни ресурсів часто є обмеженими жорсткими технологічними вимогами. Зміни в структурі використовуваних ресурсів здебільшого можна пояснити не стільки зміною ресурсів у рамках однієї і тієї ж технології виробництва, скільки зміною самих технологій або поєднання кількох жорстких технологій. У граничному випадку при нульовій еластичності заміни ресурсів одержуємо виробничу функцію із взаємодоповнюючими ресурсами.

Виробничу функцію із взаємодоповнюючими ресурсами можна представити у вигляді:

$$y = \min_{s \in M} f_s(x_s) , \qquad (3.12)$$

де $f_s(x_s)$ – обсяг виробництва, який може бути одержаний при використанні ресурсу s у кількості x_s за умови, що інші ресурси є в достатній кількості.

Максимальний обсяг виробництва визначається „вузьким місцем", тобто кількістю такого ресурсу, який забезпечує найменший обсяг виробництва.

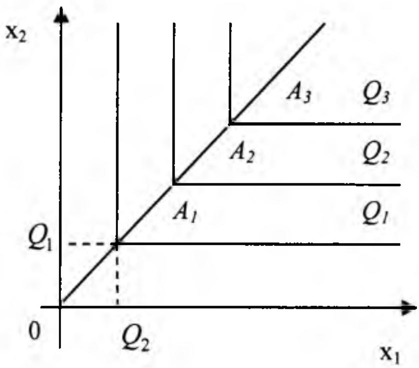

Рис. 29. Постійні співвідношення витрат

Ізокванти функції (3.12) у просторі двох ресурсів являють собою прямі кути. Їхнє розміщення визначено мінімальними витратами ресурсів для досягнення заданих обсягів виробництва.

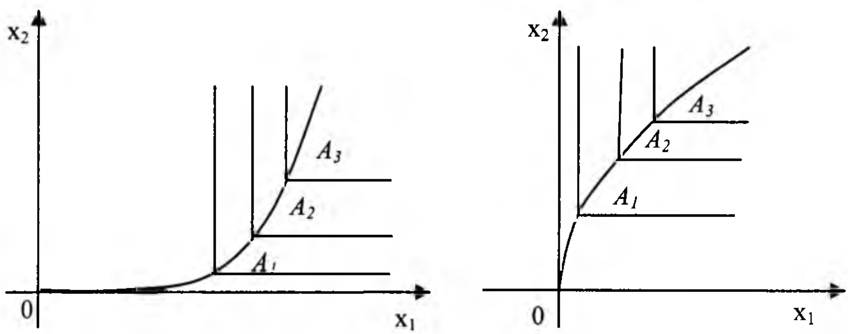

Рис. 30. Змінні співвідношення витрат

Криві $OA_1A_2A_3$ характеризують мінімальні витрати ресурсів, які забезпечують різні обсяги виробництва. Ці криві відображають векторні функції $X = \Phi(y)$. Всі інші ізокванти, які не лежать на цих кривих, є неефективними комбінаціями ресурсів.

Від виробничої функції (3.12) можна перейти до сімейства обернених функцій, які характеризують залежність витрат ресурсів від обсягів виробництва:

$$x_s = \varphi_s(y), \quad s \in M\,. \tag{3.13}$$

Функції (3.13) називають ***функціями виробничих витрат***. Так, $\varphi_s(y)$ – це мінімальна кількість ресурсу s, потрібна для випуску продукції в обсязі y.

Для аналізу функцій виробничих витрат використовують такі показники:

- середні витрати ресурсу s:

$$g_s = \frac{x_s}{y}\,;$$

- граничні витрати ресурсу s:

$$h_s = \frac{dx_s}{dy}\,.$$

Граничні витрати h_s характеризують приріст витрат ресурсу s при збільшенні випуску продукції на малу величину.

Величини загальних, середніх та граничних витрат x_s, g_s, h_s можуть бути розраховані у вартісному вираженні (калькуляція витрат) з використанням постійних або змінних цін. Позначимо величини витрат у вартісному вираженні відповідно u, g, h:

$$u=\varphi(y),$$

$$g=\frac{u}{y},$$

$$h=\frac{du}{dy}.$$

Проаналізуємо співвідношення різних показників витрат у вартісному виразі.

При y=1 загальні витрати завжди рівні середнім: $u(1)=g(1)$.

Загальні витрати є сумою граничних витрат:

$$u(y) = \int_0^y h(y)dy\,.$$

Співвідношення між середніми та граничними витратами залежать від властивостей функції $u = \varphi(y)$. Функцію u можна представити у вигляді $u = gy$. Тоді

$$h = \frac{du}{dy} = g + \frac{dg}{dy},$$

$$\frac{dg}{dy} = h - g.$$

Знак і величина похідної $\frac{dg}{dy}$ характеризують зміну середніх витрат. Якщо $\frac{dg}{dy} > 0$, то середні витрати зростають, якщо $\frac{dg}{dy} < 0$, то середні витрати спадають, якщо $\frac{dg}{dy}$=0, то середні витрати залишаються постійними. Звідси випливають такі співвідношення:

– середні витрати зростають, якщо граничні витрати вищі за середні:

$$\frac{dg}{dy} > 0, \quad h - g > 0, \quad h > g;$$

– середні витрати спадають, якщо граничні витрати нижчі за середні:

$$\frac{dg}{dy} < 0, \quad h - g < 0, \quad h < g;$$

– середні витрати залишаються постійними, якщо вони дорівнюють граничним:

$$\frac{dg}{dy} = 0, \quad h - g = 0, \quad h = g.$$

Нехай p – ціна певного виду продукції. Тоді $z = py$ – валова продукція (обсяг виготовленої продукції у вартісному вираженні), а $\pi = z - u$ – прибуток. При y=1матимемо $z=p$ ($z=py$), а також $u=g$ ($u=gy$). Оскільки $\pi = z - u = py - gy$, то $\pi = 0$ лише при умові $p=g$.

Головна задача у сфері виробництва – співставлення величин z і u. Така задача виникає в економічних системах будь-якого рівня.

Зазвичай при управлінні економічними системами встановлюють такі об'єми виробництва, щоб збільшити прибуток. У цьому випадку можливими є дві основні ситуації:

1. Максимальний прибуток π обмежений та існує оптимальний обсяг виробництва y^*. Тоді необхідною умовою досягнення максимального прибутку є $\dfrac{d\pi}{dy}=0$:

$$\pi(y)=z(y)-u(y);$$

$$\frac{d\pi}{dy}=\frac{dz}{dy}-\frac{du}{dy}=0.$$

Оптимальний обсяг виробництва y^* є розв'язком рівняння:

$$\frac{dz(y^*)}{dy}-\frac{du(y^*)}{dy}=0\cdot$$

Отже оптимального обсягу виробництва можна досягти лише при рівності граничних витрат граничній валовій продукції:

$$h(y^*)=\frac{dz(y^*)}{dy}.$$

При фіксованих цінах $p=p^0$:

$$z(y)=p^0y,$$

$$\frac{dz}{dy}=p^0,$$

тому необхідною умовою оптимуму є умова:

$$h(y^*)=p^0.$$

2. Максимальний прибуток π необмежений і оптимального обсягу виробництва y^* не існує. В цьому випадку при збільшенні виробництва прибуток необмежено зростає.

3.5.2. Лінійні функції виробничих витрат

1. *Лінійна однорідна функція:*

$$u=ay,\ a>0\cdot \tag{3.14}$$

Характеризує виробництво із постійною ефективністю витрат $g=h=a$. При фіксованій ціні $p > a$ кожна одиниця продукції забезпечує постійний прибуток $\pi = (p-a)y$. Оптимального обсягу виробництва не існує, прибуток не обмежений зверху.

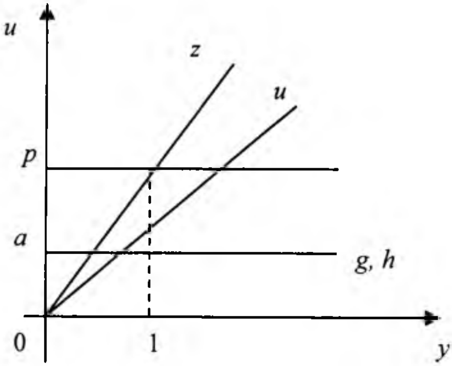

Рис. 31. Лінійна однорідна функція виробничих витрат

2. Лінійна неоднорідна функція:

$$u = ay + b, \ a > 0, \ b > 0. \qquad (3.15)$$

Середні витрати $g = a + \frac{b}{y}$ є спадною нелінійною функцією (гіперболою), яка при збільшенні обсягу виробництва y асимптотично наближається до граничних витрат $h = a$. Необхідною умовою рентабельності виробництва є умова $p > a$. Із формули прибутку

$$\pi = z - u = py - ay - b;$$

$$\pi = (p-a)y - b$$

випливає, що прибуток стає нульовим при $y = \frac{b}{p-a}$, а потім необмежено зростає при збільшенні y.

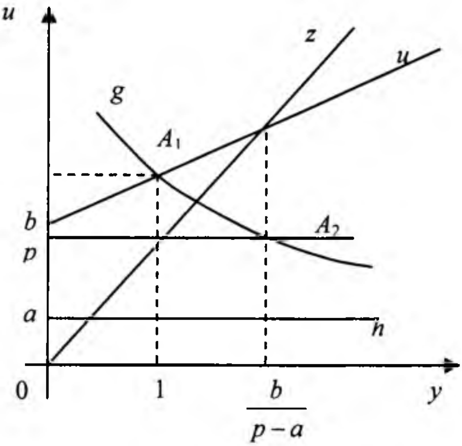

Рис. 32. Лінійна неоднорідна функція виробничих витрат

3.5.3. Нелінійні функції виробничих витрат

1. *Нелінійна функція зростаючої ефективності витрат:*

$$u = \varphi_1(y), \tag{3.16}$$

де $\dfrac{d^2\varphi_1}{dy^2} < 0$.

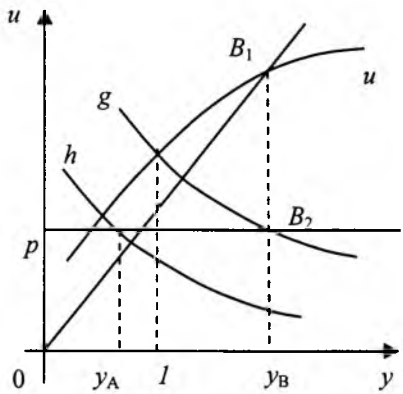

Рис. 33. Нелінійна функція зростаючої ефективності витрат

Проведемо економічний аналіз на основі графічної інтерпретації. Середні g та граничні h витрати є спадними функціями, причому граничні витрати завжди є нижчі за середні. З початковим ростом обсягу виробництва загальні витрати a спочатку перевищують прибуток. При $y = y_B$ середні витрати зменшуються до рівня ціни (точка B_2) та досягається рівність функцій z та u (точка B_1). У точці A при $y = y_A$ граничні витрати зрівнюються з ціною і кожна вироблена одиниця продукції буде давати прибуток. Таким чином, якщо продукція в кількості y_A вже вироблена, то вигідно збільшувати обсяг виробництва. Збиток на відрізку $[0, y_A]$ рівний прибутку на відрізку $[y_B, y_A]$. Продукція, виготовлена після точки y_B, дає вже чистий прибуток. Функція витрат (3.16) відображає позитивний економічний ефект концентрації виробництва у багатьох галузях.

2. *Нелінійна функція спадної ефективності витрат*:

$$u = \varphi_2(y), \tag{3.17}$$

де $\dfrac{d^2\varphi_2}{dy^2} > 0$.

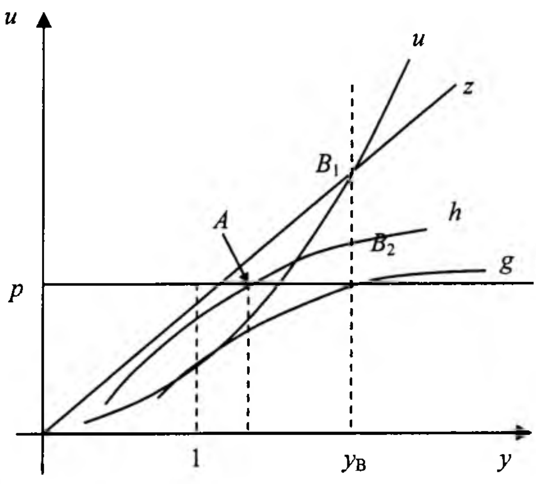

Рис. 34. Нелінійна функція спадної ефективності витрат

Проведемо економічний аналіз на основі графічної інтерпретації. Загальні витрати u ростуть швидше, ніж загальна виручка z. Середні g та граничні h витрати збільшуються, причому граничні витрати вищі за середні. При $y = y_A$ граничні витрати зрівнюються з ціною (точка A) і дальший випуск продукції стає невигідним, оскільки кожна чергова одиниця продукції призводить до зростання збитків. Якщо $y = y_B$, то загальний прибуток стає рівним нулю.

Функція витрат (3.17) характерна для галузей і підприємств, діяльність яких тісно пов'язана з використанням природних ресурсів.

3. *Функція змінної ефективності витрат.*

Функція змінної ефективності витрат має точку перегину. Наприклад, для функції, зображеної на рис. 35, такою точкою є точка C_1. На проміжку $[0, y_C]$ функція веде себе так, як функція (3.16), а при $y > y_C$ вона подібна до функції (3.17).

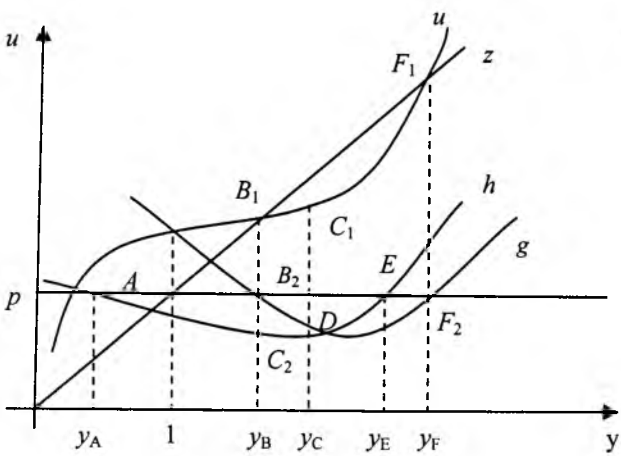

Рис. 35. Функція змінної ефективності витрат

Середні і граничні витрати спочатку зменшуються (середні вищі за граничні), а потім збільшуються (спочатку граничні, а потім середні). Мінімум граничних витрат (точка C_2) і точка перегину функції C_1 відповідають одному і тому ж обсягу виробництва y_C. Перетин кривих g та h (точка D) відповідає мінімуму середніх витрат. Виробництво спочатку є збитковим. При $y = y_A$ граничні витрати зрівнюються з ціною (точка A) і дальший приріст виробництва в інтервалі $[y_A, y_E]$ дає прибуток. Якщо $y = y_B$, то досягається рівність загальних витрат і виручки (точка B_1). На інтервалі $[y_B, y_F]$ обсяг виготовленої продукції забезпечує прибуток. При $y = y_E$ зростаючі ганичні вирати знову зрівнюоиться з ціною, а при $y > y_E$ виробництво знову стає збитковим. Оптимальний обсяг виробництва рівний y_E.

Функція змінної ефективності витрат відображає залежність між витратими і випуском продукції в такій досить типовій для реального виробництва ситуації: зі збільшенням виробництва ефективність витрат спочатку зростає, а потім при досягненні певного рівня виробництва починає спадати, наприклад, через складнощі управління економічною системою, погіршення умов виробництва, зростання транспортних витрат тощо.

3.5.4. Зв'язок між виробничими функціями із взаємозамінними ресурсами та функціями виробничих витрат

Функції виробничих витрат є оберненими щодо виробничих функцій із взаємозамінними ресурсами. Отже, виробничі функції із взаємозамінними ресурсами і функції виробничих витрат відображають протилежні принципи поєднання ресурсів у виробничих процесах і поєднують різні системи економічних показників. У зв'язку з цим може скластися думка, що між виробничими функціями із взаємозамінними ресурсами і функціями виробничих витрат нічого спільного немає. Проте ця думка хибна.

В результаті аналізу виробничих функцій із взаємозамінними ресурсами було введено поняття ізоклиналі – кривої у просторі ресурсів з однаковими нормами еквівалентної заміни γ_{kl}. Кожна ізоклиналь ψ задається рівнянням, яке описує умови сталості відношень граничної ефективності кожної пари ресурсів. Саме тому взаємозаміну ресурсів у виробництві можна розглядати як перехід від однієї ізоклиналі до іншої.

Розглянемо цей факт на прикладі макроекономічної виробничої фукнкції Кобба-Дугласа:

$$y = aL^{\alpha_L} C^{\alpha_C} ,$$

де L – витрати праці;
C – витрати виробничих фондів (капіталу);
$\alpha_L + \alpha_C = n$.

Ізоклиналь виробничої функції Кобба-Дугласа визначають за допомогою рівняння:

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial L}}{\frac{\partial y}{\partial C}} = \gamma_\psi ,$$

де γ_ψ – значення норми еквівалента заміни двох ресурсів L та C.

Оскільки

$$\frac{\partial y}{\partial L} = a\alpha_L L^{\alpha_L - 1} C^{\alpha_C} ,$$

$$\frac{\partial y}{\partial C} = a\alpha_C L^{\alpha_L} C^{\alpha_C - 1},$$

то рівняння ізоклиналі набуває вигляду:

$$\frac{\alpha_L C}{\alpha_C L} = \gamma_\psi . \tag{3.18}$$

Таким чином, ізоклиналь функції Кобба-Дугласа – це промінь, що виходить з початку координат. У кожній точці цього променя співвідношення використовуваних ресурсів однакове. Різним співвідношенням використовуваних ресурсів L та C при зміні обсягів виробництва відповідають різні промені.

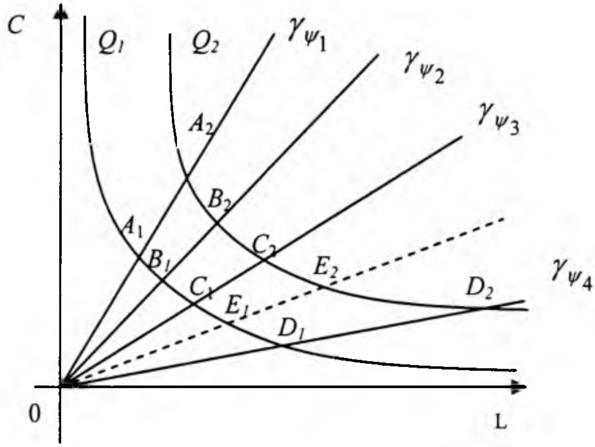

Рис. 36. Ізоклиналі виробничої функції Кобба-Дугласа

Q_1, Q_2 – ізокванти, що відповідають різним обсягам виготовленої продукції; $0A_1A_2$, $0B_1B_2$, $0C_1C_2$, $0D_1D_2$ – ізоклиналі, що відповідають різним нормам еквівалентності заміни двох ресурсів γ_{ψ_1}, γ_{ψ_2}, γ_{ψ_3}, γ_{ψ_4}.

Нехай $y_{\psi}, L_{\psi}, C_{\psi}$ – обсяги виробництва та витрат ресурсів, які відповідають певному співвідношенню ресурсів (ізоклиналі) (3.18). Тоді за допомогою рівняння (3.18) витрати одного ресурсу можна виразити через витрати другого:

$$L_{\psi} = \frac{\alpha_L C_{\psi}}{\alpha_C \gamma_{\psi}}, \tag{3.19}$$

$$C_{\psi} = \frac{\alpha_C \gamma_{\psi} L_{\psi}}{\alpha_L}. \tag{3.20}$$

Якщо „вузьким місцем" виробництва є праця, то на основі виробничої функції Кобба-Дугласа отримаємо рівність:

$$y_{\psi} = aL^{\alpha_L}\left(\frac{\alpha_C \gamma_{\psi} L_{\psi}}{\alpha_L}\right)^{\alpha_C} = a\left(\frac{\alpha_C \gamma_{\psi}}{\alpha_L}\right)^{\alpha_C} L^{\alpha_L+\alpha_C}. \tag{3.21}$$

Якщо обсяг виробництва лімітується лише основними фондами, то на основі виробничої функції Кобба-Дугласа отримаємо рівність:

$$y_\psi = a\left(\frac{\alpha_L C_\psi}{\alpha_C \gamma_\psi}\right)^{\alpha_L} C^{\alpha_C} = a\left(\frac{\alpha_L}{\alpha_C \gamma_\psi}\right)^{\alpha_L} C^{\alpha_L+\alpha_C}. \quad (3.22)$$

При збалансованості ресурсів рівності (3.21) та (3.22) повинні виконуватися одночасно.

Введемо позначення:

$$\frac{1}{a\left(\frac{\alpha_C \gamma_\psi}{\alpha_L}\right)^{\alpha_C}} = \alpha_{L\psi},$$

$$\frac{1}{a\left(\frac{\alpha_L}{\alpha_C \gamma_\psi}\right)^{\alpha_L}} = \alpha_{C\psi}.$$

Враховуючи, що $\alpha_L + \alpha_C = n$, де n – степінь однорідності виробничої функції, на основі рівностей (3.21) та (3.22) отримуємо виробничу функцію із взаємозамінними ресурсами, яка відповідає значенню норми еквівалентної заміни ресурсів γ_ψ (ψ-му співвідношенню ресурсів):

$$y_\psi = \min\left\{\frac{1}{\alpha_{L\psi}} L_\psi^n;\ \frac{1}{\alpha_{C\psi}} C_\psi^n\right\}. \quad (3.23)$$

Від виробничої функції із взаємозамінними ресурсами (3.23) можемо перейти до виробничої функції витрат:

$$\begin{cases} L_\psi = \alpha_{L\psi}^{1/n} y_\psi^{1/n}, \\ C_\psi = \alpha_{C\psi}^{1/n} y_\psi^{1/n}. \end{cases} \quad (3.24)$$

Якщо деяких обсягів виробництва продукції y_ψ можна досягти при різних співвідношеннях витрат γ_ψ, $\psi = \overline{1,k}$, загальний обсяг виробництва становитиме:

$$y = \sum_{\psi=1}^{k} y_\psi .$$

Загальні обсяги витрат ресурсів при різних γ_ψ, $\psi = \overline{1,k}$ приблизно рівні:

$$L = \sum_{\psi=1}^{k} \alpha_{L\psi}^{1/n} y_\psi^{1/n} ,$$

$$C = \sum_{\psi=1}^{k} \alpha_{C\psi}^{1/n} y_\psi^{1/n} .$$

Разом з тим, чим більшим є k, тим точніший результат. Геометрично цей факт пояснюють так. Точки A_l, B_l, C_l, D_l відповідають кількостям витрачених ресурсів для одержання одного і того ж обсягу виробництва. Ламана лінія $A_lB_lC_lD_l$ апроксимує відповідну ізокванту функції Кобба-Дугласа. Чим більше проведено ізоклиналей (базових співвідношень витрат ресурсів), тим краще ламана лінія апроксимує ізокванту.

Результати аналізу макроекономічної дво啊ресурсної виробничої функції Кобба-Дугласа можна перенести і на випадок виробничої функції з багатьма ресурсами s, $s \in M$. Одержуємо таку систему функцій виробничих витрат:

$$x_s = \sum_{\psi=1}^{k} \alpha_{S\psi}^{1/n} y_\psi^{1/n} ,\ s \in M ,$$

де $\alpha_{s\psi}$ – витрати ресурсу s на виробництво одиниці продукції при ψ -й комбінації ресурсів.

Отже, взаємозаміну ресурсів у процесі виробництва можна враховувати, поєднуючи фіксовані комбінації взаємодоповнюваних ресурсів. Необхідною умовою переходу від виробничих функцій із взаємодоповнюваними ресурсами до функцій виробничих витрат є лінійність рівнянь ізоклиналей.

РОЗДІЛ 4

МАКРОЕКОНОМІЧНІ ДИНАМІЧНІ ВИРОБНИЧІ ФУНКЦІЇ

4.1. Застосування макроекономічних динамічних виробничих функцій для моделювання економічного розвитку

На макроекономічному рівні найважливішими факторами виробництва є праця та виробничі фонди, а результатом – валовий внутрішній продукт (національний дохід). Тому доцільно розглядати *двофакторну макроекономічну динамічну виробничу функцію (МДВФ)*, яка має такий загальний вигляд:

$$y(t) = f(L(t), K(t), t), \tag{4.1}$$

де $y(t)$ – обсяг валового внутрішнього продукту або національного доходу;

$L(t)$ – робоча сила (затрати праці);

$K(t)$ – основні виробничі фонди.

Використання МДВФ як самостійної моделі економічного розвитку передбачає, що $y(t)$ визначають за заданими траєкторіями $L(t)$ та $K(t)$. Крім цього, можна задавати траєкторії $y(t)$ для будь-якого одного фактора і на основі цього з (4.1) визначати траєкторію другого фактора. За допомогою МДВФ можна розв'язувати такі задачі динамічного аналізу:

- дослідження динаміки ефективності виробничих факторів (продуктивності праці, фондовіддачі) і сукупної ефективності виробництва;

- оцінювання ролі екстенсивних та інтенсивних факторів економічного розвитку;
- оцінювання внеску кожного фактора в загальний приріст виробництва.

Аналіз динаміки продуктивності праці $\frac{y(t)}{L(t)}$ та фондовіддачі $\frac{y(t)}{K(t)}$ за допомогою МДВФ, а не на основі фактичних динамічних рядів, дає змогу:

1) елімінувати вплив випадкових факторів;
2) врахувати ефект взаємодії з іншими виробничими факторами.

Головною проблемою специфікації МДВФ є відображення в ній впливу науково-технічного прогресу (НТП). У теорії виробничих функцій використовують дві основні форми НТП:

- нейтральний, тобто такий, що не належить до конкретних факторів зокрема і не змінює їхньої відносної ефективності;
- матеріалізований у певних виробничих факторах (ненейтральний), тобто такий, що відображений у підвищенні їхньої ефективності.

МДВФ із урахуванням нейтрального НТП має вигляд:

$$y(t) = A(t)F(L(t), K(t), t)\,, \qquad (4.2)$$

де $A(t)$ – функція, яка відображає сукупний вплив усіх факторів, які не враховані у МДВФ.

На практиці досить часто $A(t)$ має вигляд експоненційної функції виду:

$$A(t) = a_0 e^{\lambda t}\,, \qquad (4.3)$$

де a_0 – параметр масштабування і початкової ефективності виробництва (загальної базової ефективності);
λ – неперервний темп приросту виробництва за рахунок інших факторів.

Параметр λ будемо називати *автономним темпом приросту.*

МДВФ із урахуванням матеріалізованого НТП має вигляд:

$$y(t) = f(a_L(t)L(t), a_K(t)K(t), t), \tag{4.4}$$

де $a_L(t), a_K(t)$ – функції ефективності виробничих факторів, за допомогою яких обсяги ресурсів, використовуваних у різні моменти часу, приводять до однакової якості.

Враховуючи обидві форми НТП, МДВФ записують у такому вигляді:

$$y(t) = A(t) f(a_L(t)L(t), a_K(t)K(t), t). \tag{4.5}$$

На основі МДВФ (4.5) загальний приріст виробництва Δy можна умовно розкласти на п'ять складових, які зумовлені приростами $\Delta A, \Delta a_L, \Delta L, \Delta a_K, \Delta K$. Окремі складові цього розкладу можна групувати за двома ознаками:

1) приріст за рахунок екстенсивних факторів $\Delta L, \Delta K$ та за рахунок інтенсивних факторів $\Delta A, \Delta a_L, \Delta a_K$;
2) приріст за рахунок праці $\Delta a_L, \Delta L$ та за рахунок виробничих фондів $\Delta a_K, \Delta K$.

За економічною ефективністю розрізняють три типи НТП: працезберігаючий (фондомісткий), фондозберігаючий (працемісткий), симетричний (Д. Хікс, Р. Харрод, Р. Солоу).

4.2. Динамічна функція Кобба-Дугласа

В теоретичному та прикладному динамічному макроекономічному аналізі найчастіше застосовують два види МВФ: мультиплікативну функцію Кобба-Дугласа (ФКД) та функцію з постійною еластичністю заміни ресурсів (ПЕЗ).

Порівняно з іншими, ці функції мають такі переваги:

- чітка економічна інтерпретація;
- показники економічної динаміки, ефективності та інтенсифікації, які відповідають цим функціям, мають зручну аналітичну форму.

Загальними властивостями функцій Кобба-Дугласа і ПЕЗ є однорідність і постійна еластичність заміни ресурсів.

Нагадаємо, що функцію $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають однорідною степеня n, якщо

$$f(rx_1, rx_2, ..., rx_n) = r^n f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

де r – довільне число.

Коефіцієнт постійної еластичності заміни двох ресурсів σ обчислюють за формулою:

$$\sigma = \frac{\partial \frac{x_K}{x_L}}{\frac{x_K}{x_L}} \div \frac{\partial \gamma_{KL}}{\gamma_{Kl}},$$

де x_K, x_L – обсяги виробничих ресурсів;

γ_{KL} – гранична норма еквівалентної заміни праці виробничими фондами.

Динамічна функція Кобба-Дугласа для двох виробничих факторів має вигляд:

$$y(t) = A(t)(L(t))^{\alpha_L}(K(t))^{\alpha_K}, \tag{4.6}$$

де α_L – коефіцієнт еластичності випуску за працею;

α_K – коефіцієнт еластичності випуску за фондами.

Подальшу динамізацію ФКД можна проводити шляхом включення до її складу динамічних коефіцієнтів еластичності.

При побудові динамічної функції Кобба-Дугласа *A(t)* найчастіше беруть у вигляді (4.3). Із врахуванням цього динамічна ФКД має вигляд:

$$y(t) = a_0 e^{\lambda t}(L(t))^{\alpha_L}(K(t))^{\alpha_K}. \tag{4.7}$$

Степінь однорідності ФКД визначають сумою $\alpha_L + \alpha_K$. Для статичної ФКД приймають однорідність першого степеня: $\alpha_L + \alpha_K = 1$ (постійна віддача ресурсів). Для динамічної ФКД приймають $\alpha_L + \alpha_K > 1$. Ця умова відображає зростання загальної ефективності виробничих факторів в економічній динаміці.

Здійснимо нормування коефіцієнтів еластичності ресурсів:

$$\frac{\alpha_L}{\alpha_L + \alpha_K} = \beta,$$

$$\frac{\alpha_K}{\alpha_L + \alpha_K} = 1 - \beta .$$

Динамічна ФКД набуде вигляду:

$$y(t) = a_0 e^{\lambda t}((L(t))^{\beta}(K(t))^{1-\beta})^{\alpha_L+\alpha_K} . \tag{4.8}$$

Прологарифмуємо обидві частини рівняння (4.7):

$$\ln y(t) = \ln a_0 + \lambda t + \alpha_L \ln(L(t)) + \alpha_K \ln(K(t)) .$$

Одержану рівність продиференціюємо по t. Ураховуючи, що для траєкторії $Q(t)$ $\dfrac{d \ln Q(t)}{dt} = \hat{\rho}(t)$ – неперервний темп приросту, отримаємо рівність:

$$\rho_y = \lambda + \alpha_L \rho_L + \alpha_K \rho_K , \tag{4.9}$$

де ρ_y – темп приросту національного доходу;

ρ_L, ρ_K – темпи проросту затрат праці та основних фондів відповідно.

Рівняння (4.9) показує, що темп приросту національного доходу є сумою автономного темпу і зваженої суми темпів приросту виробничих факторів.

Якщо $\rho_y > \rho_L$ і $\rho_y > \rho_K$, то це означає збільшення ефективності обох виробничих факторів (зростання ефективності праці та зростання фондовіддачі).

У разі $\rho_K > \rho_y > \rho_L > 0$, $\lambda > 0$ може бути лише при $\alpha_K < 1$, тобто за умови зменшення фондовіддачі.

4.3. Динамічна функція із постійною еластичністю заміни ресурсів

Динамічна функція ПЕЗ має вигляд:

$$y(t) = A(t)(\alpha_L (L(t))^{-\omega} + \alpha_K (K(t))^{-\omega})^{-\frac{\nu}{\omega}} , \tag{4.10}$$

де α_L, α_K – параметри степеня працемісткості та фондомісткості;

ν – степінь однорідності функції (коефіцієнт віддачі на масштаб), який характеризує інтенсифікацію виробництва;

$\omega = \frac{1-\sigma}{\sigma}$, σ – еластичність заміни ресурсів.

При $0 < \sigma < 1$ маємо $\omega > 0$.

У найпростішому варіанті динамічної функції ПЕЗ *A(t)* приймають у вигляді (4.3), $\alpha_K = 1 - \alpha_L, \nu = 1$. Отже, у динамічній функції ПЕЗ макротехнологія характеризується шістьма параметрами: $a_0, \lambda, \alpha_L, \alpha_K, \omega, \nu$. Нейтральний НТП характеризують параметрами $a_0, \lambda,\ \nu$, а ненейтральний - $\alpha_L, \alpha_K, \omega$.

Порівняно з динамічною функцією Кобба-Дугласа, функція ПЕЗ має такі переваги:

- дає змогу більш явно розділити влив НТП між двома виробничими факторами;
- еластичність заміни ресурсів не задають апріорно рівною 1, а оцінюють.

Узагальнення функції (4.10) проводять шляхом динамізації параметрів $\alpha_L, \alpha_K, \omega, \nu$, зокрема, за допомогою трендових моделей.

При $\sigma > 1$ динамічна функція ПЕЗ досягає максимуму (границі зростання) при умові збільшення одного фактора і постійному рівні іншого.

4.4. Однофакторні макроекономічні функції

Однофакторні макроекономічні виробничі функції виражають залежність кінцевої продукції (національного доходу) від затрат живої праці та виробничих фондів і мають вигляд:

$$y(t) = \varphi_L(L(t), t),$$

$$y(t) = \varphi_K(K(t), t).$$

Зокрема, функція від затрат праці може мати такий вигляд:

$$y(t) = A(t) L^{\alpha_L}(t). \qquad (4.11)$$

Функція від затрат виробничих фондів може мати такий вигляд:

$$y(t) = A(t) K^{\alpha_K}(t). \qquad (4.12)$$

Функцію (4.11) використовують для попереднього прогнозу $y(t)$ при заданих $L(t)$. Для аналізу динаміки продуктивності праці можна використати функцію:

$$\frac{y}{L}(t) = A(t)L^{\alpha_K - 1}(t). \tag{4.13}$$

Більш змістовним є виведення однофакторних функцій показників ефективності виробництва із двофакторних, наприклад, із функції Кобба-Дугласа (4.8).

Для прикладу, виведемо з динамічної ФКД функцію продуктивності праці $v(t) = \dfrac{y(t)}{L(t)}$ залежно від фондоозброєності $k(t) = \dfrac{K(t)}{L(t)}$:

$$v(t) = a_0 e^{\lambda t} k^{1-\beta}(t), \tag{4.14}$$

де $1\text{-}\beta$ – коефіцієнт еластичності за фондами;
β – коефіцієнт еластичності за працею.

Оскільки $1\text{-}\beta<1$, то при малих λ продуктивність праці зростає повільніше, ніж фондоозброєність.

Аналогічно до формули (4.9) можна отримати рівність:

$$\rho_v = \lambda + (1-\beta)\rho_K. \tag{4.15}$$

Залежність продуктивності праці від фондоозброєності можна зобразити як самостійну макроекономічну виробничу функцію, наприклад:

$$v(t) = C_0 e^{\pi t} k^{\mu}(t), \tag{4.16}$$

де параметри C_0, π, μ оцінюють самостійно.

РОЗДІЛ 5

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ВАЛОВОГО ВНУТРІШНЬОГО ПРОДУКТУ ТА НАЦІОНАЛЬНОГО ДОХОДУ

5.1. Загальні принципи побудови макроекономічних моделей

Макроекономічними моделями називають моделі процесів національної економіки, які оперують макроекономічними показниками: валовий внутрішній продукт, національний дохід, обсяг основних фондів, трудові ресурси країни і т. п.

У рамках макроекономічного моделювання можна досліджувати функціональну структуру економічних агрегатів, наприклад, поділ національного виробництва на два підрозділи: виробництво засобів виробництва і виробництво предметів споживання; поділ національного доходу на два складники: фонди споживання і нагромадження; поділ основних фондів і трудових ресурсів на дві групи: ті, що їх використовують у виробництві і ті, що їх використовують у невиробничій сфері. Галузеву структуру національної економіки досліджують за допомогою міжгалузевих моделей. Для вивчення ресурсно-технологічного аспекту економічної динаміки використовують ще більш деталізовані моделі.

Позитивним у макроекономічних моделях є:

- мала розмірність;
- доступність для глибокого математичного аналізу;
- можливість дослідження загальноекономічних процесів при невеликій кількості вихідних даних;
- швидкість проведення багатоваріантних розрахунків.

Макроекономічні моделі – це ефективний інструмент теоретичних досліджень функціонування національної економіки, зокрема, кількісних взаємозв'язків факторів економічного розвитку, динаміки найважливіших пропорцій розвитку.

Крім того, макроекономічні моделі мають і важливе прикладне значення. Їх використовують для вироблення концепції економічного і соціального розвитку, вивчення можливих альтернатив економічної політики та їхніх довгострокових наслідків, для прогнозування і планування системи узагальнених показників національної економіки.

5.2. Моделі динаміки валового внутрішнього продукту та національного доходу

Будуючи моделі цієї групи, функціонувння національної економіки розглядають як замкнений процес із властивими йому потенційними можливостями. Моделі різняться між собою умовами регулювання динаміки споживання та нагромадження, виходячи із суспільних потреб і поставлених цілей. При побудові моделей допускається, що експорт та імпорт рівні між собою (зовнішнє сальдо дорівнює нулю), втрати включають у використаний національний дохід. За таких умов обсяги виробленого та використаного національного доходу є рівними.

Введемо позначення:

x – валовий внутрішній продукт (ВВП);

y – національний дохід;

a – ***матеріаломісткість ВВП*** ($0 < a < 1$).

ВВП – це сукупність створених матеріальних благ за певний період, наприклад, за рік. Його визначають як суму валової продукції галузей матеріального виробництва: промисловості, сільського господарства, лісового господарства, будівництва, Вантажного транспорту, зв'язку (у тій частині, що обслуговує матеріальне виробництво), торгівлі та громадського харчування, матеріально-технічного забезпечення, заготівлі сільськогосподарської продукції та інших галузей матеріального виробництва.

За матеріально-речовим складом ВВП ділять на засоби виробництва та предмети споживання; за вартістю – на вартість спожитих засобів виробництва (перенесена вартість) та заново створену вартість (необхідний і додатковий продукт).

Національний дохід – частина ВВП, яка залишається після відрахування спожитих засобів виробництва. Це дуже важливий показник результативності суспільного виробництва, національної економіки. Виробництво національного доходу на душу населення характеризує ступінь економічного розвитку країни. Національний дохід призначений не тільки для споживання, але й для нагромадження. Від розмірів національного доходу залежать масштаби та шляхи зростання виробництва, а, отже, можливості розвитку суспільства у перспективі.

Національний дохід можна обчислювати у ринкових або порівняльних цінах. При використанні порівняльних цін аналізують динаміку фізичного обсягу національного доходу.

Основними факторами, що впливають на зростання національного доходу, є чисельність працівників, зайнятих у сфері матеріального виробництва, та продуктивність праці.

Матеріаломісткість ВВП – це відношення вартості використаної сировини, матеріалів, палива, енергії до вартості випущеної продукції.

Баланс виробництва і розподілу ВВП для кожного моменту (проміжку) часу описують рівнянням:

$$x=ax + y. \tag{5.1}$$

З рівняння (1) маємо:

$$x=\frac{1}{1-a}y. \tag{5.2}$$

Коефіцієнт $A = \frac{1}{1-a}$ характеризує співвідношення ВВП та національного доходу і називається ***мультиплікатором*** ВВП.

Із врахуванням динаміки матеріаломісткості виробництва співвідношення між ВВП і використаним національним доходом має вигляд:

$$x(t)=A(t)y(t). \tag{5.3}$$

В динамічних макроекономічних моделях використаний національний дохід поділяють, як мінімум, на дві частини, які виконують різні функції в процесі розширеного виробництва:

- нагромадження основних виробничих фондів: $u(t)$ (коротко – нагромадження);
- решта використовуваного національного доходу (невиробниче споживання, невиробниче нагромадження, приріст матеріальних резервів, втрати): $c(t)$ (коротко – споживання).

Отже динаміку національного доходу описують рівнянням:

$$y(t)=u(t)+c(t). \tag{5.4}$$

На основі рівняння (5.4) можна побудувати ряд моделей відтворення національного доходу. Вони відрізняються між собою насамперед двома ознаками:

- типом залежності між виробничим нагромадженням і приростом національного доходу;
- способом регулювання співвідношення між нагромадженням і споживанням та динамікою споживання.

5.3. Найпростіша модель відтворення національного доходу

Найпростішу модель відтворення національного доходу будують на основі рівняння (5.4), використовуючи два припущення:

- пропорційність виробничого нагромадження і приросту національного доходу в той же момент часу;
- незалежність (екзогенність) динаміки споживання.

Перше припущення виражають за допомогою формули:

$$u(t)=b\frac{dx(t)}{dt},$$

де b – ***капіталомісткість*** ВВП (відношення сукупного капіталу до ВВП).

Згідно з формулою (5.3) при заданому постійному значенні мультиплікатора А

$$\frac{dx(t)}{dt} = A\frac{dy(t)}{dt}.$$

Отже:

$$u(t) = bA\frac{dy(t)}{dt} = B\frac{dy(t)}{dt}. \qquad (5.5)$$

Рівняння (5.5) називають ***найпростішою моделлю відтворення національного доходу.***

Найпростіша модель відтворення національного доходу виражається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку. Це рівняння має нескінченну множину розв'язків, сукупність яких може бути представлена як сума загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і деякого часткового розв'язку рівняння (5.5). Шукана траєкторія *y(t)* однозначно виділяється із множини розв'язків початковою умовою $y(0) = y_0$.

Розглянемо лінійне однорідне рівняння першого порядку:

$$y(t) = B(t)\frac{dy(t)}{dt}.$$

Загальний розв'язок цього рівняння знаходять за допомогою методу відокремлених змінних:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dt}{B(t)};$$

$$\ln y(t) = \int_0^t \frac{ds}{B(s)} + const;$$

$$y_{заг}(t) = Ke^{\int_0^t \frac{ds}{B(s)}}, \qquad (5.6)$$

де K – довільна стала величина.

Якщо у рівнянні (5.5) *c(t)=0*, то в цьому випадку (5.6) є загальним розв'язком рівняння (5.5). З початкової умови $y(0) = y_0$ знаходимо $K = y_0$ і маємо розв'язок рівняння (5.5) при *c(t)=0*:

$$y(t) = y_0 e^{\int_0^t \frac{ds}{B(s)}} . \tag{5.7}$$

У випадку незмінної капіталомісткості приросту національного доходу $B(t)=B$ загальний розв'язок однорідного рівняння набуває вигляду:

$$y_{заг}(t) = K e^{\frac{1}{B}t} , \tag{5.8}$$

а розв'язок рівняння (5.5) при $c(t)=0$:

$$y_{заг}(t) = y_0 e^{\frac{1}{B}t} . \tag{5.9}$$

Аналогічно розраховують траєкторії економічного розвитку з постійною нормою нагромадження $c(t)=(1-\alpha)y(t)$. У цьому випадку рівняння (5.5) також зводять до однорідного:

$$y(t) = B(t)\frac{dy(t)}{dt} + (1-\alpha)y(t) ;$$

$$y(t) = \frac{1}{\alpha}B(t)\frac{dy(t)}{dt} .$$

Для побудови часткових розв'язків неоднорідного рівняння (5.5) ($c(t) \neq 0$) використаємо метод варіації довільної сталої. Згідно з цим методом частковий розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$y_{заг}(t) = K(t) e^{\frac{1}{B}t} , \tag{5.10}$$

де $K(t)$ – невідома функція.

Підставимо цей розв'язок у рівняння (5.5):

$$K(t)e^{\frac{1}{B}t} = B\left(\frac{dK(t)}{dt}e^{\frac{1}{B}t} + K(t)\frac{1}{B}e^{\frac{1}{B}t}\right) + c(t) ;$$

$$B\frac{dK(t)}{dt}e^{\frac{1}{B}t}+c(t)=0\,;$$

$$\frac{dK(t)}{dt}=-\frac{c(t)}{B}e^{-\frac{1}{B}t}\,;$$

$$K(t)=-\frac{1}{B}\int c(t)e^{-\frac{1}{B}t}dt\,. \qquad (5.11)$$

Можливий будь-який розв'язок цього рівняння, тому значення *K(0)* можна вибирати довільно. Розглянемо деякі конкретні випадки.

При $c(t)=c(0)=const$ маємо:

$$K(t)=-\frac{c(0)}{B}\int e^{-\frac{1}{B}t}dt=c(0)e^{-\frac{1}{B}t}\,.$$

Тоді частковий розв'язок (5.10) неоднорідного рівняння (5.5) матиме вигляд:

$$y_{част}=c(0)\,,$$

а загальний розв'язок рівняння (5.5) буде таким:

$$y(t)=Ke^{\frac{1}{B}t}+c(0)\,. \qquad (5.12)$$

При $c(t)=c(0)\ e^{rt}$ (експоненційне зростання споживання) маємо:

$$K(t)=-\frac{1}{B}\int c(0)e^{rt}e^{-\frac{1}{B}t}dt\,;$$

$$K(t)=-\frac{c(0)}{B}\int e^{\left(r-\frac{1}{B}\right)t}dt\,;$$

$$K(t) = \frac{c(0)}{1-Br} e^{\left(r-\frac{1}{B}\right)t}, \quad r \neq \frac{1}{B};$$

$$y_{част}(t) = \frac{c(0)}{1-Br} e^{rt}.$$

Загальний розв'язок рівняння (5.5) має вигляд:

$$y(t) = Ke^{\frac{1}{B}t} + \frac{c(0)}{1-Br} e^{rt}. \tag{5.13}$$

Якщо $r = \frac{1}{B}$, то

$$K(t) = -\frac{c(0)}{B} t;$$

$$y_{част}(t) = -\frac{c(0)}{B} t e^{\frac{1}{B}t}.$$

Загальний розв'язок рівняння (5) в цьому випадку виглядатиме так:

$$y(t) = Ke^{\frac{1}{B}t} - \frac{c(0)}{B} t e^{\frac{1}{B}t}. \tag{5.14}$$

5.4. Аналіз найпростішої моделі відтворення національного доходу

5.4.1. Випадок відсутності споживання

Найпростіша модель відтворення національного доходу

$$y(t) = B(t)\frac{dy(t)}{dt} + c(t) \tag{5.15}$$

показує, що при сталому значенні капіталомісткості приросту національного доходу (акселератора моделі В), динаміка національного доходу визначається динамікою споживання. Проаналізуємо поведінку траєкторії $y(t)$ при різних гіпотезах щодо динаміки $c(t)$.

Припустимо, що $c(t)=0$. Очевидно, ця гіпотеза про те, що ввесь національний дохід спрямовується на розширення виробництва і споживання відсутнє, нереальна. Проте вона дає змогу оцінити максимально можливий темп збільшення національного доходу, обмежений лише матеріаломісткістю та фондомісткістю виробництва. Розв'язок рівняння (5.15) при $c(t)=0$ має вигляд:

$$y(t) = y(0)e^{\frac{1}{B}t} \, . \tag{5.16}$$

Величину $\hat{\rho} = \dfrac{1}{B}$ називають ***технологічними темпом приросту*** національного доходу (темп приросту $\hat{\rho}(t) = \dfrac{\hat{\delta}(t)}{y(t)} = \dfrac{dy(t)}{dt} \Big/ y(t) = \dfrac{y(0)\frac{1}{B}e^{\frac{1}{B}t}}{y(0)e^{\frac{1}{B}t}} = \dfrac{1}{B}$, де $\hat{\delta}(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$ — неперервний абсолютний приріст).

Якщо коефіцієнт капіталоміскості національного доходу є функцією від часу: $B=B(t)$, то розв'язок рівняння (5.15) при $c(t)=0$ матиме вигляд:

$$y(t) = y(0)e^{\int_0^t \frac{ds}{B(s)}}$$

або

$$y(t) = y(0)e^{\frac{1}{\beta(t)}} \, , \tag{5.17}$$

де $\dfrac{1}{\beta(t)} = \displaystyle\int_0^t \frac{ds}{B(s)}$.

Темп приросту $\hat{\rho}(t) = \dfrac{\hat{\delta}(t)}{y(t)}$,

$$\hat{\delta}(t) = \frac{dy(t)}{dt} = y(0)e^{\frac{1}{\beta(t)}} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\beta(t)}\right),$$

$$\hat{\rho}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\beta(t)}\right).$$

Розглянемо деякі конкретні випадки зміни коефіцієнта капіталомісткості B.

1. Капіталомісткість приросту національного доходу експоненційно залежить від часу: $B(t) = B(0)e^{kt}$. Тоді

$$\frac{1}{\beta(t)} = \int_0^t \frac{ds}{B(s)} = \int_0^t \frac{ds}{B(0)e^{kt}} = \frac{1}{B(0)}\int_0^t e^{-kt} ds = -\frac{1}{kB(0)} e^{-ks}\Bigg|_0^t =$$

$$= -\frac{1}{kB(0)}\left(e^{-ks} - 1\right) = \frac{1 - e^{-kt}}{kB(0)}.$$

Траєкторія зміни національного доходу: $y(t) = y(0)e^{\frac{1-e^{-kt}}{kB(0)}}$.

Темп приросту національного доходу: $\hat{\rho}(t) = \dfrac{1 - e^{-kt}}{B(0)}$.

Якщо $k > 0$, то зростання національного доходу уповільнюється ($B(t)$ зростає, темп приросту національного доходу спадає) і національний дохід сягає верхньої межі:

$$y_{\max} = y(0)e^{\frac{1}{kB(0)}}.$$

Якщо $k < 0$, то відбувається прискорене зростання національного доходу ($B(t)$ спадає, темп приросту національного доходу збільшується).

2. Капіталомісткість національного доходу лінійно залежить від часу:

$$B(t) = B(0) \pm \Delta_B t, \quad \Delta_B > 0\,.$$

Розглянемо два випадки:

1. $B(t) = B(0) + \Delta_B t, \quad \Delta_B > 0$.

В цьому випадку:

$$\frac{1}{\beta(t)} = \int_0^t \frac{ds}{B(s)} = \int_0^t \frac{ds}{B(0)+\Delta_B S} = \frac{1}{\Delta_B}\ln\left|B(0)+\Delta_B S\right|\Big|_0^t =$$

$$= \frac{1}{\Delta_B}\left(\ln\left(B(0)+\Delta_B t\right) - \ln B(0)\right) = \frac{1}{\Delta_B}\ln\frac{B(0)+\Delta_B t}{B(0)} = \frac{1}{\Delta_B}\ln\left(1+\frac{\Delta_B t}{B(0)}\right).$$

Траєкторія зміни національного доходу:

$$y(t) = y(0)e^{\frac{1}{\Delta_B}\ln\left(1+\frac{\Delta_B}{B(0)}t\right)} = y(0)\left(1+\frac{\Delta_B}{B(0)}t\right)^{\frac{1}{\Delta_B}}.$$

За таких умов темп приросту національного доходу спадає.

2. $B(t) = B(0) - \Delta_B t, \quad \Delta_B > 0, \quad t \in \left[0, \ \frac{B(0)}{\Delta_B}\right]$.

Тоді

$$\frac{1}{\beta(t)} = \int_0^t \frac{ds}{B(s)} = \int_0^t \frac{ds}{B(0)-\Delta_B S} = -\frac{1}{\Delta_B}\ln\left|B(0)-\Delta_B S\right|\Big|_0^t =$$

$$= -\frac{1}{\Delta_B}\left(\ln\left(B(0)-\Delta_B t\right) - \ln B(0)\right) = \frac{1}{\Delta_B}\ln\frac{B(0)}{B(0)-\Delta_B t}.$$

Траєкторія зміни національного доходу:

$$y(t) = y(0)e^{\frac{1}{\Delta_B}\ln\left(\frac{B(0)}{B(0)-\Delta_B t}\right)} = y(0)\left(\frac{B(0)}{B(0)-\Delta_B t}\right)^{\frac{1}{\Delta_B}}.$$

Темп приросту національного доходу зростає.

5.4.2. Випадок незмінної величини споживання

Нехай величина споживання з плином часу є незмінною:

$$c(t) = c(0) = const\,.$$

В цьому випадку загальний розв'язок рівняння (5.15) буде таким:

$$y(t) = Ke^{\frac{1}{B}t} + c(0)\,. \qquad (5.18)$$

При $t = 0$ маємо:

$$y(0) = K + c(0)\,,$$

звідки

$$K = y(0) - c(0)\,.$$

Таким чином, національний дохід змінюється за законом

$$y(t) = (y(0) - c(0))e^{\frac{1}{B}t} + c(0)\,. \qquad (5.19)$$

Очевидно, $y(t) > 0$, якщо $y(0) > c(0)$, тобто в початковий момент часу споживається не ввесь національний дохід.

З рівності (5.19) видно, що національний дохід зростає прискореним темпом. Темп приросту національного доходу $\hat{\rho}(t) = \dfrac{\hat{\delta}(t)}{y(t)}$, де $\hat{\delta}(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} = \dfrac{1}{B}(y(0) - c(0))e^{\frac{1}{B}t}$ – неперервний абсолютний приріст. Отже,

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{B}\left(\frac{(y(0) - c(0))e^{\frac{1}{B}t}}{(y(0) - c(0))e^{\frac{1}{B}t} + c(0)}\right).$$

На початку періоду темп приросту становить:

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{B}\left(\frac{y(0) - c(0)}{y(0)}\right) = \frac{1}{B}\left(1 - \frac{c(0)}{y(0)}\right).$$

При $t \to \infty$ темп приросту зростає до $\frac{1}{B}$, а доля споживання $\frac{c(0)}{y(t)}$ зменшується до 0:

$$\lim_{t \to \infty} \hat{\rho}(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{B} \left(\frac{(y(0) - c(0))e^{\frac{1}{B}t}}{(y(0) - c(0))e^{\frac{1}{B}t} + c(0)} \right) = \frac{1}{B},$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{c(0)}{y(t)} = 0 .$$

5.4.3. Випадок зростаючої величини споживання

Нехай споживання збільшується з неперервним темпом приросту r за експоненційним законом:

$$c(t) = c(0)e^{rt} .$$

Загальний розв'язок рівняння (5.15) має вигляд:

$$y(t) = Ke^{\frac{1}{B}t} + \frac{c(0)}{1 - Br} e^{rt} . \qquad (5.20)$$

З рівняння (5.20) при $t = 0$ маємо:

$$y(0) = K + \frac{c(0)}{1 - Br},$$

звідси

$$K = y(0) - \frac{c(0)}{1 - Br} .$$

Отже, національний дохід змінюється за законом

$$y(t) = (y(0) - \frac{c(0)}{1 - Br})e^{\frac{1}{B}t} + \frac{c(0)}{1 - Br} e^{rt} . \qquad (5.21)$$

У моделі (5.21) керуючим параметром є r. Вважаючи, що $y(0) > c(0)$, проаналізуємо динаміку національного доходу для деяких конкретних випадків.

1. Темп приросту споживання більший за технологічний темп росту національного доходу: $r > \frac{1}{B}$, $Br > 1$.

В цьому випадку перший доданок функції (5.21) додатний, а другий – від'ємний, причому темп зростання другого доданка більший, ніж у першого.

Знайдемо темп приросту національного доходу:

$$\hat{\rho}(t) = \frac{\hat{\delta}(t)}{y(t)}.$$

Неперервний абсолютний приріст:

$$\hat{\delta}(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{B}\left(y(0) - \frac{c(0)}{1-Br}\right)e^{\frac{1}{B}t} + r\frac{c(0)}{1-Br}e^{rt};$$

$$\hat{\rho}(t) = \frac{\frac{1}{B}\left(y(0) - \frac{c(0)}{1-Br}\right)e^{\frac{1}{B}t} + r\frac{c(0)}{1-Br}e^{rt}}{\left(y(0) - \frac{c(0)}{1-Br}\right)e^{\frac{1}{B}t} + \frac{c(0)}{1-Br}e^{rt}}.$$

У початковий момент часу темп приросту національного доходу рівний:

$$\hat{\rho}(0) = \frac{\frac{1}{B}\left(y(0) - \frac{c(0)}{1-Br}\right) + r\frac{c(0)}{1-Br}}{y(0)} = \frac{\frac{1}{B}y(0) + \left(r - \frac{1}{B}\right)\frac{c(0)}{1-Br}}{y(0)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{B}y(0) + \frac{Br-1}{B}\cdot\frac{c(0)}{1-Br}}{y(0)} = \frac{\frac{1}{B}y(0) - \frac{1}{B}\cdot c(0)}{y(0)} = \frac{1}{B}\left(1 - \frac{c(0)}{y(0)}\right).$$

З плином часу темп приросту національного доходу неперервно зменшується і в деякий момент часу $t = t_1$ стане рівним 0.

Величину t_1 визначаються із рівняння $\frac{dy(t)}{dt}=0$:

$$\frac{1}{B}\left(y(0)-\frac{c(0)}{1-Br}\right)e^{\frac{1}{B}t}+r\frac{c(0)}{1-Br}e^{rt}=0;$$

$$\frac{1}{B}\left(y(0)-\frac{c(0)}{1-Br}\right)e^{\frac{1}{B}t}=-r\frac{c(0)}{1-Br}e^{rt}; \tag{5.22}$$

$$e^{\left(\frac{1}{B}-r\right)t}=-Br\frac{\frac{c(0)}{1-Br}}{y(0)-\frac{c(0)}{1-Br}};$$

$$e^{\left(\frac{1}{B}-r\right)t}=-Br\frac{c(0)}{(1-Br)y(0)-c(0)};$$

$$\frac{1-Br}{B}t=\ln\left(-Br\frac{c(0)}{(1-Br)y(0)-c(0)}\right);$$

$$t_1=\frac{B}{1-Br}\ln\left(-\frac{Br\,c(0)}{(1-Br)y(0)-c(0)}\right).$$

На проміжку $[0,t_1]$ доля споживання зростає від $\frac{c(0)}{y(0)}$ до 1:

$$\frac{c(t)}{y(t)}=\frac{c(0)e^{rt}}{\left(y(0)-\frac{c(0)}{1-Br}\right)e^{\frac{1}{B}t}+\frac{c(0)}{1-Br}e^{rt}}.$$

При $t=0$:

$$\frac{c(t)}{y(t)}=\frac{c(0)}{y(0)}.$$

При $t=t_1$:

$$\frac{c(t)}{y(t)}=\frac{c(0)e^{rt_1}}{\left(y(0)-\frac{c(0)}{1-Br}\right)e^{\frac{1}{B}t_1}+\frac{c(0)}{1-Br}e^{rt_1}}. \tag{5.23}$$

З рівності (5.22) маємо:

$$\left(y(0)-\frac{c(0)}{1-Br}\right)e^{\frac{1}{B}t_1}=-Br\frac{c(0)}{1-Br}e^{rt_1};$$

$$\frac{c(t_1)}{y(t_1)}=\frac{c(0)e^{rt_1}}{-Br\frac{c(0)}{1-Br}e^{rt_1}+\frac{c(0)}{1-Br}e^{rt_1}}=\frac{c(0)e^{rt_1}}{c(0)e^{rt_1}}=1.$$

Після моменту часу $t=t_1$ нагромадження стає від'ємним, а обсяг національного доходу абсолютно зменшується. В деякий момент часу $t=t_1$ національний дохід стає рівним нулю.

Таким чином, розв'язок (5.21) при $r>\frac{1}{B}$ має економічний зміст лише на проміжку $[0,t_1]$. Необхідно зауважити, що в реальних умовах розвитку економічної системи цей проміжок є досить короткий. Наприклад, для динаміки ВВП та національного доходу СРСР у 1980-их роках XX століття:

- матеріаломісткість ВВП a=0,6;
- відношення ВВП та національного доходу $A=\frac{1}{1-a}$=2,5;
- капіталомісткість ВВП b=1,4;
- капіталомісткість приросту національного доходу B=bA=3,5;
- технологічний темп приросту $\hat{\rho}=\frac{1}{B}$=0,286 (до речі, при зростанні національного доходу за законом $y(t)=y(0)e^{\frac{1}{B}t}$ технологічний темп приросту $\hat{\rho}=0{,}286$ дає приріст національного доходу 33,1% за рік);
- частка споживання $\frac{c(0)}{y(0)}=0{,}8$.

Якщо при таких реальних даних взяти темп приросту споживання r=0,29 (всього на 0,004 більше за технологічний темп приросту національного доходу!), то одержимо $t_1=0{,}86$, $t_2=4{,}33$.

2. Темп приросту споживання рівний технологічному темпу приросту національного доходу: $r=\frac{1}{B}$, $Br=1$.

У цьому випадку загальний розв'язок рівняння (5.15) має вигляд:

$$y(t)=Ke^{\frac{1}{B}t}-\frac{c(0)}{B}t\,e^{\frac{1}{B}t}. \quad (5.24)$$

З цього рівняння при $t=0$ маємо $K=y(0)$. Отже:

$$y(t)=y(0)e^{\frac{1}{B}t}-\frac{c(0)}{B}t\,e^{\frac{1}{B}t}=\left(y(0)-\frac{c(0)}{B}t\right)e^{\frac{1}{B}t}. \quad (5.25)$$

Динаміка траєкторії (5.25) подібна до поведінки функції (5.21) при $r>\frac{1}{B}$. Знайдемо темп приросту національного доходу $\hat{\rho}(t)=\frac{\hat{\delta}(t)}{y(t)}$.

Неперервний абсолютний приріст:

$$\hat{\delta}(t)=\frac{dy(t)}{dt}=\frac{1}{B}y(0)e^{\frac{1}{B}t}-\frac{c(0)}{B}e^{\frac{1}{B}t}-\frac{c(0)}{B^2}te^{\frac{1}{B}t}=$$

$$=\frac{1}{B}\left(y(0)-c(0)-\frac{c(0)}{B}t\right)e^{\frac{1}{B}t};$$

$$\hat{\rho}(t)=\frac{1}{B}\frac{y(0)-c(0)-\frac{c(0)}{B}t}{y(0)-\frac{c(0)}{B}t}=\frac{1}{B}\left(1-\frac{Bc(0)}{By(0)-c(0)t}\right).$$

У початковий момент часу темп приросту національного доходу рівний $\frac{1}{B}\left(1-\frac{c(0)}{y(0)}\right)$. З плином часу темп приросту національного доходу зменшується і в деякий момент часу $t=t_1$ стає рівним нулю:

$$y(0)-c(0)-\frac{c(0)}{B}t=0;$$

$$\frac{c(0)}{B}t=y(0)-c(0);$$

$$t_1=B\left(\frac{y(0)}{c(0)}-1\right).$$

На проміжку $[0,t_1]$ частка споживання зростає від $\frac{c(0)}{y(0)}$ до

1. Після цього нагромадження стає від'ємним, обсяг національного доходу зменшується і в деякий момент часу $t=t_2$ національний дохід стає рівним нулю.

$$y(0)-\frac{c(0)}{B}t=0;$$

$$\frac{c(0)}{B}t=y(0);$$

$$t_2=B\frac{y(0)}{c(0)}.$$

У реальних умовах розвитку економіки проміжок часу $[0,t_1]$, на якому розв'язок (5.25) при $r=\frac{1}{B}$ має економічний зміст, досить малий (для даних попереднього прикладу t_1=3,5(1,25--1)=3,5·0,25=0,875).

3. Темп приросту споживання менший за технологічний темп приросту національного доходу: $r<\frac{1}{B}$, $Br<1$.

У цьому випадку траєкторію зміни національного доходу описують функцією:

$$y(0)-\frac{c(0)}{1-Br}=\frac{By(0)}{1-Br}\left(\frac{1-Br}{B}-\frac{\frac{c(0)}{y(0)}}{B}\right)=\frac{By(0)}{1-Br}\left(\frac{1-\frac{c(0)}{y(0)}}{B}-r\right).$$

Очевидно, що величина $1-\frac{c(0)}{y(0)}=\alpha_0$ є нормою виробничого нагромадження в початковий момент часу. Введемо величину $\rho_0=\frac{1}{B}\alpha_0=\frac{\alpha_0}{B}$ – добуток норми виробничого нагромадження на технологічний темп приросту національного доходу або відношення норми виробничого нагромадження до капіталомісткості національного доходу. Використовуючи коефіцієнт ρ_0, маємо:

$$y(t)=By(0)\frac{\rho_0-r}{1-Br}e^{\frac{1}{B}t}+\frac{c(0)}{1-Br}e^{rt}. \qquad (5.26)$$

Із рівності (5.26) випливає, що динаміка національного доходу залежить від співвідношення між r та ρ_0.

Якщо $r=\rho_0$, то економічне зростання здійснюється з постійною нормою нагромадження α_0. Відхилення r від ρ_0 означає економічний розвиток із змінною нормою нагромадження (спадною або зростаючою).

Подібні аналітичні результати можна одержати, якщо в найпростішій моделі відтворення національного доходу $c(t)=c(0)+c_1t$, тобто споживання зростає з постійним темпом c_1.

5.4.4. Економічний розвиток із постійною та змінною нормами нагромадження

В рамках умов відтворення національного доходу з темпом приросту споживання r та технологічним темпом приросту національного доходу $r < \frac{1}{B}$ проаналізуємо три типи економічного розвитку, які відрізняються темпами зростання споживання і динамікою норми нагромадження:

1) $r = \rho_0$;
2) $r > \rho_0$;
3) $r < \rho_0$.

1. *Постійна норма нагромадження* $r = \rho_0$.

У цьому випадку траєкторію зміни національного доходу описують функцією:

$$y(t) = \frac{c(0)}{1 - Br} e^{rt}. \tag{5.27}$$

Темп зростання національного доходу рівний темпу приросту споживання:

$$\hat{\rho}(t) = \frac{\hat{\delta}(t)}{y(t)};$$

$$\hat{\delta}(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{c(0)}{1 - Br} re^{rt};$$

$$\hat{\rho}(t) = r.$$

Оскільки $\frac{c(0)}{1 - Br} = y(0)$ і $r = \rho_0 = \frac{\alpha_0}{B}$, то модель (5.27) можна записати у вигляді:

$$y(t) = y(0)\, e^{\frac{\alpha_0}{B} t}. \tag{5.28}$$

Модель (5.28) називають моделлю Харрода-Домара. Її можна побудувати ще іншим способом. Розглянемо найпростішу модель відтворення національного доходу:

$$y(t) = B(t)\frac{dy(t)}{dt} + c(t).$$

Оскільки $\alpha_0 = 1 - \frac{c(0)}{y(0)}$, то $\frac{c(0)}{y(0)} = 1 - \alpha_0$, $c(0) = (1 - \alpha_0) y(0)$, а, отже, динаміку споживання можна подати як:

$$c(t) = (1 - \alpha_0)y(t),$$

де α_0 – норма нагромадження;

1-α_0 – норма споживання.

Найпростіша модель відтворення національного доходу набуває вигляду:

$$y(t) = B\frac{dy(t)}{dt} + (1 - \alpha_0)y(t);$$

$$\alpha_0 y(t) = B\frac{dy(t)}{dt};$$

$$y(t) = \frac{B}{\alpha_0} \cdot \frac{dy(t)}{dt}. \qquad (5.29)$$

Розв'яжемо однорідне диференціальне рівняння першого порядку (5.29):

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\alpha_0}{B}dt;$$

$$\ln(y(t)) = \frac{\alpha_0}{B}t + const;$$

$$y(t) = Ke^{\frac{\alpha_0}{B}t};$$

$$K = y(0);$$

$$y(t) = y(0)e^{\frac{\alpha_0}{B}t}.$$

Відповідно до моделі Харрода-Домара при постійній нормі виробничого нагромадження темп приросту національного доходу $\hat{\rho}(t) = \frac{\alpha_0}{B}$, тобто прямо пропорційний нормі нагромадження і обернено пропорційний капіталомісткості приросту національного доходу. На відміну від найпростішої моделі відтворення національного доходу та її часткових випадків норма нагромадження в моделі Харрода-Домара не визначається вихідними даними, а розглядається як регульований параметр (екзогенна змінна). Зокрема, частковим випадком моделі Харрода-Домара при $\alpha_0 = 1$ є модель (5.16) ($c(t) = 0$).

Проте модель Харрода-Домара може бути використана і для розв'язання оберненої задачі: при заданому темпі приросту національного доходу ρ_0 визначити необхідну норму нагромадження $\alpha = B\rho_0$.

На основі моделі Харрода-Домара аналізують вплив кожного з трьох факторів на темпи приросту національного доходу:

– норми виробничого нагромадження α;
– матеріаломісткості ВВП a;
– капіталомісткості ВВП b.

Щоб оцінити вплив параметрів α, a, b на темп приросту національного доходу, використовують часткові похідні $\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial a}$, $\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial b}$.

Нагадаємо, що темп приросту національного доходу $\hat{\rho}(t) = \hat{\rho} = \frac{\alpha}{B}$, де $B = bA$, $A = \frac{1}{1-a}$ – мультиплікатор ВВП (відношення ВВП до національного доходу). Отже,

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}(\alpha, a, b) = \frac{\alpha(1-a)}{b},$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \alpha} = \frac{1-a}{b},$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial a} = -\frac{\alpha}{b},$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial b} = -\frac{\alpha(1-a)}{b^2}.$$

Якщо для оцінення впливу окремого фактора на темп приросту національного доходу використовувати величину еластичності темпу приросту за відповідним фактором, то отримаємо:

$$E_\alpha = \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \alpha} : \frac{\hat{\rho}}{\alpha} = \frac{1-a}{b} : \frac{1-a}{b} = 1;$$

$$E_a = \frac{\partial\hat{\rho}}{\partial a} : \frac{\hat{\rho}}{a} = -\frac{\alpha}{b} : \frac{\alpha(1-a)}{b \cdot a} = -\frac{\alpha}{b} \cdot \frac{b \cdot a}{\alpha(1-a)} = -\frac{\alpha}{(1-a)};$$

$$E_b = \frac{\partial\hat{\rho}}{\partial b} : \frac{\hat{\rho}}{b} = -\frac{\alpha(1-a)}{b^2} : \frac{\alpha(1-a)}{b^2} = -1.$$

Наведені значення еластичності темпу приросту національного доходу за факторами α і b свідчать, що норма виробничого нагромадження та капіталомістніcть ВВП рівнозначні за впливом на темп приросту національного доходу.

Проілюструємо результати аналізу моделі Харрода-Домара на конкретних даних (динаміка ВВП та національного доходу СРСР у 80-х роках XX століття).

- матеріаломісткість ВВП a=0,6;
- відношення ВВП до національного доходу $A = \frac{1}{1-a}$ =2,5;
- капіталомісткість ВВП b=1,4;
- капіталомісткість приросту національного доходу B=bA=3,5;
- норма виробничого нагромадження $\alpha = 0{,}2$;
- темп приросту національного доходу $\hat{\rho}$=0,057.

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\alpha} = \frac{1-a}{b} = \frac{1}{B} = 0{,}286;$$

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial a} = -\frac{\alpha}{b} = -0{,}143;$$

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial b} = -\frac{\alpha(1-a)}{b^2} = -0{,}041.$$

Значення часткових похідних показують, що найбільш суттєво на темп приросту національного доходу впливає норма нагромадження, черговий за впливом фактор – матеріаломісткість ВВП і найменший вплив має капіталомісткість.

Якщо ж, ураховуючи величину еластичності темпу приросту національного доходу за нормою нагромадження та капіталомісткості $E_\alpha = |E_b| = 1$, вважати, що фактори α і b рівнозначні за впливом, то можна зробити висновок: щоб підвищити темп приросту національного доходу до певної величини (на певну величину), необхідно або збільшити норму нагромадження на деяку величину, або зменшити капіталомісткість на відповідну величину.

Наприклад, щоб підвищити $\hat{\rho}$ від 0,057 до 0,080 (на 0,023) необхідно або збільшити α на $\frac{0{,}023}{0{,}286} = 0{,}081$ $\left(d\hat{\rho} = \frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\alpha} d\alpha, \quad d\alpha = \frac{\partial\hat{\rho}}{\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\alpha}} \right)$,

або зменшити b на $\frac{0{,}023}{0{,}041} = 0{,}561$.

Зауваження. Розрахунки можна виконати так:

$$\Delta\alpha = 0{,}20\left(\frac{0{,}080}{0{,}057} - 1\right) = 0{,}20 \cdot 0{,}404 = 0{,}081;$$

$$\Delta\alpha = B\Delta\hat{\rho} = 3{,}5 \cdot 0{,}023 = 0{,}081;$$

$$\Delta b = 1{,}4\left(\frac{0{,}080}{0{,}057} - 1\right) = 1{,}4 \cdot 0{,}404 = 0{,}561.$$

При умові зміни коефіцієнта B у часі динаміку національного доходу при постійній нормі нагромадження α_0 визначають за допомогою рівняння:

$$y(t) = y(0)e^{\frac{\alpha_0}{\beta(t)}}, \tag{5.30}$$

де $\frac{1}{\beta(t)} = \int_0^t \frac{ds}{B(s)}$.

Розглянемо випадок, коли капіталомісткість приросту національного доходу змінюється за експоненційним законом:

$$B(t) = B(0)e^{kt}.$$

В цьому випадку:

$$\frac{1}{\beta(t)}=\int_0^t \frac{ds}{B(0)e^{kt}}=\frac{1}{B(0)}\int_0^t e^{-kt}ds=-\frac{1}{kB(0)}e^{-ks}\Big|_0^t=$$

$$=-\frac{1}{kB(0)}(e^{-kt}-1)=\frac{1}{kB(0)}(1-e^{-kt});$$

$$y(t)=y(0)e^{\frac{\alpha_0}{kB(0)}(1-e^{-kt})}\,. \tag{5.31}$$

Динаміка національного доходу залежить від коефіцієнта *k*. Якщо $k>0$, то капіталомісткість приросту національного доходу збільшується, а зростання національного доходу затухає і має верхню межу (стелю) $y_{max}=y(0)e^{\frac{\alpha_0}{kB(0)}}$. Якщо $k<0$, то капіталомісткість приросту національного доходу зменшується, а національний дохід зростає прискореними темпами.

Аналіз моделі (5.31) для реальних даних дає такі результати (α_0=0,2; *B(0)*=3,5):

Таблиця 5.1

t	$\hat{\rho}$	
	k=0,2	*k=-0,02*
0	0,057	0,057
5	0,052	0,063
10	0,047	0,070
20	0,038	0,085

Розглянемо випадок, коли капіталомісткість національного доходу змінюється лінійно:

$$B(t)=B(0)\pm\Delta_B t,\quad \Delta_B>0\,.$$

При $B(t) = B(0) + \Delta_B t$ маємо:

$$\frac{1}{\beta(t)} = \int_0^t \frac{ds}{B(s)} = \int_0^t \frac{ds}{B(0) + \Delta_B s} = \frac{1}{\Delta_B} \ln(B(0) + \Delta_B s)\Big|_0^t =$$

$$= \frac{1}{\Delta_B}\left(\ln(B(0) + \Delta_B t) - \ln(B(0))\right) = \frac{1}{\Delta_B} \ln \frac{B(0) + \Delta_B t}{B(0)} =$$

$$= \frac{1}{\Delta_B} \ln\left(1 + \frac{\Delta_B}{B(0)} t\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta_B}{B(0)} t\right)^{\frac{1}{\Delta_B}};$$

$$y(t) = y(0)\left(1 + \frac{\Delta_B}{B(0)} t\right)^{\frac{\alpha_0}{\Delta_B}}. \tag{5.32}$$

Модель (5.32) описує уповільнене зростання національного доходу.

При $B(t) = B(0) - \Delta_B t$, $t \in \left[0, \frac{B(0)}{\Delta_B}\right]$ маємо:

$$\frac{1}{\beta(t)} = \int_0^t \frac{ds}{B(s)} = \int_0^t \frac{ds}{B(0) - \Delta_B s} = -\frac{1}{\Delta_B} \ln(B(0) - \Delta_B s)\Big|_0^t =$$

$$= -\frac{1}{\Delta_B}\left(\ln(B(0) - \Delta_B t) - \ln(B(0))\right) = \frac{1}{\Delta_B} \ln \frac{B(0)}{B(0) - \Delta_B t};$$

$$y(t) = y(0)\left(\frac{B(0)}{B(0) - \Delta_B t}\right)^{\frac{B(0)}{\alpha_0}}. \tag{5.33}$$

Модель (5.33) описує прискорене зростання національного доходу.

2. Спадна норма нагромадження $r > \rho_0$.

В даному випадку перший доданок розв'язку (5.26) – від'ємний, а другий – додатний. При цьому перший доданок за абсолютною величиною зростає швидше, ніж другий $\left(r < \frac{1}{B}\right)$.

Унаслідок цього темп приросту національного доходу спадає, норма нагромадження зменшується до нуля, а потім стає від'ємною.

Можна також визначити момент часу t_1, коли темп приросту національного доходу стає нульовим, та момент часу t_2, коли досягається нульовий обсяг національного доходу.

3. Зростаюча норма нагромадження $r < \rho_0$.

В цьому випадку обидва доданки розв'язку (5.26) додатні, водночас перший доданок зростає швидше ніж другий $\left(r < \frac{1}{B}\right)$. Темп приросту національного доходу зі зміною часу від 0 до ∞ неперервно зростає від ρ_0 до $\frac{1}{B}$. Норма нагромадження також неперервно збільшується від α_0 в початковий момент часу до одиниці у границі.

Зобразимо графічно розглянуті три варіанти динаміки та структури національного доходу та виробничого нагромадження, які відрізняються співвідношенням темпів r і ρ_0 при експоненційному зростанні споживання.

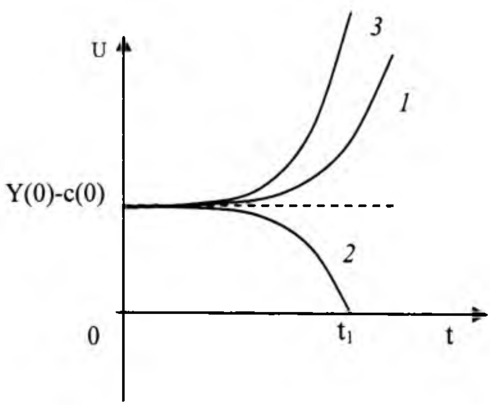

Рис. 37. Динаміка виробничого нагромадження

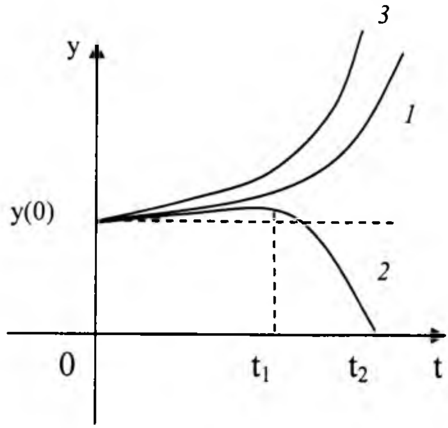

Рис. 38. Динаміка національного доходу:
$1 - r = \rho_0$; $2 - r > \rho_0$; $3 - r < \rho_0$.

Зауважимо, що поведінка розв'язку (5.21) при $r \geq \frac{1}{B}$ якісно подібна до варіанта 2, а поведінка розв'язків (5.16), (5.19) та (5.21) при $r < \frac{1}{B}$ якісно подібна до варіанта 3.

Аналіз найпростішої моделі динаміки національного доходу показує, що на необмеженому інтервалі часу при постійній капіталомісткості приросту національного доходу „інтереси" споживання і нагромадження врівноважуються при $r = \rho_0$. Якщо $r > \rho_0$, то реального виграшу в обсязі споживання досягають лише на невеликому відрізку $[0, t_1]$, після чого траєкторія розвитку втрачає економічний зміст. Якщо $r < \rho_0$, то темп зростання національного доходу збільшується лише за рахунок випереджуючого зростання нагромадження. Очевидно, що і такий тип економічного розвитку („нагромадження заради нагромадження") може бути доцільним тільки на обмеженому інтервалі часу. Таким чином, в умовах монотонно спадної або монотонно зростаючої норми нагромадження протягом тривалого часу траєкторія економічного розвитку виявляє суттєві недоліки.

5.5. Моделі економічного розвитку з лагами капітальних вкладень

5.5.1. Модель відтворення національного доходу із зосередженим лагом

Одним із припущень, яке використовують при побудові найпростішої моделі відтворення національного доходу, є пропорційність виробничого нагромадження і приросту національного доходу в один і той же момент часу. Проте насправді процесу відтворення завжди властиві інвестиційні лаги.

Нехай $\bar{\tau}$ – зосереджений лаг між виробничим нагромадженням та приростом національного доходу. Тоді із урахуванням цього лага величина нагромадження становитиме:

$$u(t) = B\frac{dy(t+\bar{\tau})}{dt}.$$

Загальна модель відтворення національного доходу набуде вигляду:

$$y(t) = B\frac{dy(t+\bar{\tau})}{dt} + c(t). \tag{5.34}$$

Проаналізуємо модель (5.34) у разі постійної норми нагромадження.

Якщо норма виробничого нагромадження α постійна, отримуємо:

$$c(t) = (1-\alpha)y(t);$$

$$y(t) = B\frac{dy(t+\bar{\tau})}{dt} + (1-\alpha)y(t);$$

$$y(t) - \frac{B}{\alpha}\frac{dy(t+\bar{\tau})}{dt} = 0. \tag{5.35}$$

Модель (5.35) являє собою диференціальне рівняння із загаювальним аргументом (аргументом із запізненням). Такі рівняння ще називають диференціально-різницевими. Розв'язок рівняння (5.35) будемо шукати у вигляді:

$$y(t) = y(0)e^{\lambda t},$$

де λ – поки що невідомий темп приросту національного доходу.

Продиференціюємо цей вираз у точці $t + \bar{\tau}$:

$$\frac{dy(t+\bar{\tau})}{dt} = y(0)\lambda e^{\lambda(t+\bar{\tau})} = y(0)\lambda e^{\lambda t} e^{\lambda \bar{\tau}}.$$

Підставимо отримані значення $\frac{dy}{dt}(t+\bar{\tau})$ у рівняння (5.35):

$$y(t)e^{\lambda t} - \frac{B}{\alpha} y(0)e^{\lambda t} e^{\lambda \bar{\tau}} = 0;$$

$$1 - \frac{B}{\alpha} \lambda e^{\lambda \bar{\tau}} = 0;$$

$$\lambda e^{\lambda \bar{\tau}} = \frac{\alpha}{B}. \qquad (5.36)$$

За допомогою рівняння (5.36) визначають темп приросту національного доходу λ. З часткового випадку рівняння (5.36) при $\alpha = 1$ отримуємо рівняння для визначення максимально можливого (технологічного) темпу приросту національного доходу $\hat{\lambda}$:

$$\hat{\lambda} e^{\hat{\lambda} \bar{\tau}} = \frac{1}{B}.$$

При $\bar{\tau} = 0$ $\hat{\lambda} = \frac{1}{B} = \hat{\rho}$ – технологічний темп приросту.

Аналіз рівняння (5.36) показує, що при збільшенні $\bar{\tau}$ λ монотонно спадає. Залежність темпу приросту національного доходу λ від величини інвестиційного лага $\bar{\tau}$ при постійній нормі нагромадження графічно можна зобразити так:

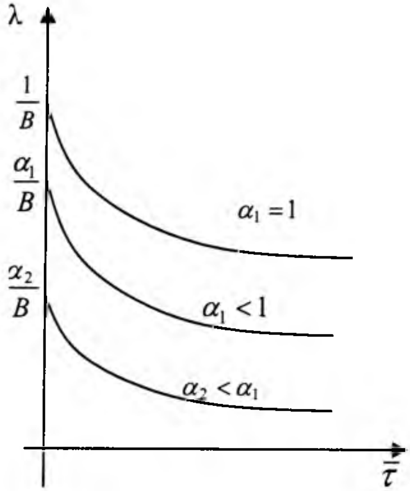

Рис. 39. Залежність темпу приросту національного доходу від величини інвестиційного лага

На цьому рисунку дано графіки $\lambda(\bar{\tau})$ при B = 3,5 для трьох значень α : α_1 =1; α_2 =0,2; α_3 =0,1. Значення $\lambda(\bar{\tau})$ наведено у таблиці:

Таблиця 5.2

$\bar{\tau}$	$\lambda(\bar{\tau})$		
	$\alpha_0 = 1$	$\alpha_0 = 0{,}2$	$\alpha_0 = 0{,}1$
0	0,286	0,057	0,029
1	0,226	0,054	0,028
2	0,194	0,052	0,027
3	0,171	0,049	0,026
4	0,154	0,047	0,025

Зменшення темпу приросту національного доходу при зростанні інвестиційного лага пояснюють тим, що зростаюча величина нагромадження „заморожується" і не використовується для розширення виробництва.

Щоб обчислити темп приросту національного доходу λ при невеликих значеннях $\bar{\tau}$, використовують наближену формулу:

$$\lambda \approx \frac{\alpha}{B + \alpha\bar{\tau}} . \qquad (5.37)$$

Отже, із врахуванням лага, по-перше, технологічний темп приросту національного доходу зменшується із $\frac{1}{B}$ до $\frac{1}{B+\bar{\tau}}$; по-друге, збільшення долі нагромадження α хоча і веде до підвищення темпу приросту національного доходу, але повільніше від пропорційного підвищення.

Дійсно, без урахування лага темп приросту національного доходу $\hat{\rho} = \frac{\alpha}{B}$, тобто зростає пропорційно до частки нагромадження α. Швидкість зміни темпу приросту в залежності від збільшення α $\left(\frac{d\hat{\rho}}{d\alpha}\right)$ в цьому випадку рівна $\frac{1}{B}$.

Із урахуванням лага швидкість зміни темпу приросту національного доходу в залежності від α $\left(\frac{d\lambda}{d\alpha}\right)$ рівна:

$$\frac{d\lambda}{d\alpha} \approx \frac{B + \alpha\bar{\tau} - \alpha\bar{\tau}}{(B + \alpha\bar{\tau})^2} = \frac{B}{(B + \alpha\bar{\tau})^2} = \frac{1}{B\left(1 + \frac{\bar{\tau}}{B}\alpha\right)^2} .$$

Для обчислення темпу приросту національного доходу λ при великих значеннях $\bar{\tau}$ використовують наближену формулу:

$$\lambda \approx \frac{\ln \bar{\tau}}{\bar{\tau}} . \qquad (5.38)$$

Проаналізуємо модель (5.34) при заданій траєкторії споживання $c(t) = c(0)e^{rt}$, тобто динаміку споживання задано експоненційною функцією із неперервним темпом *r*. Розв'язок рівняння (5.34) в цьому випадку будемо шукати у вигляді:

$$y(t) = Ge^{\lambda t} + He^{rt} , \qquad (5.39)$$

де λ – темп приросту національного доходу;

r – темп приросту споживання;
G, H – невідомі коефіцієнти.

В цьому випадку:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \lambda G e^{\lambda t} + rHe^{rt}.$$

Модель відтворення національного доходу (5.34) набуде вигляду:

$$Ge^{\lambda t} + He^{rt} = \lambda BGe^{\lambda(t+\bar{\tau})} + rBHe^{r(t+\bar{\tau})} + c(0)e^{r(t)}. \qquad (5.40)$$

Враховуючи вигляд шуканого розв'язку (5.39) і рівняння (5.40) в початковий момент часу $t=0$, отримуємо систему лінійних рівнянь для знаходження невідомих параметрів G та H:

$$\begin{cases} G + H = y(0), \\ G + H = \lambda BGe^{\lambda\bar{\tau}} + rBHe^{r\bar{\tau}} + c(0). \end{cases}$$

Запишемо цю систему в нормальному вигляді:

$$\begin{cases} G + H = y(0), \\ \left(1 - \lambda Be^{\lambda\bar{\tau}}\right)G + \left(1 - rBe^{r\bar{\tau}}\right)H = c(0). \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримуємо формули для обчислення параметрів G та H траєкторії (5.39):

$$G = y(0) - \frac{c(0)}{1 - rBe^{r\bar{\tau}}};$$

$$H = \frac{c(0)}{1 - rBe^{r\bar{\tau}}}.$$

Остаточно траєкторія динаміки національного доходу при заданій динаміці споживання $c(t) = c(0)e^{rt}$ матиме вигляд:

$$y(t) = \left(y(0) - \frac{c(0)}{1 - rBe^{r\bar{\tau}}} \right) e^{\lambda t} + \frac{c(0)}{1 - rBe^{r\bar{\tau}}} e^{rt}. \qquad (5.41)$$

Необхідно зауважити, що розв'язок рівняння (5.34) у вигляді (5.39) можна знайти у випадках, коли $1 - rBe^{r\bar{\tau}} \neq 0$. Якщо $1 - rBe^{r\bar{\tau}} = 0$, тобто неперервний темп приросту споживання збігається з технологічним темпом приросту національного доходу, то траєкторію динаміки національного доходу у вигляді (5.39) подати неможливо.

Проаналізуємо розв'язок (5.41) для двох характерних випадків:

1. Темп приросту споживання більший, ніж технологічний темп приросту національного доходу $\left(r > \hat{\lambda}\right)$.

2. Темп приросту споживання менший, ніж технологічний темп приросту національного доходу $\left(r < \hat{\lambda}\right)$.

1. З нерівності $r > \hat{\lambda}$ випливає, що $1 - rBe^{r\bar{\tau}} > 1$. Це означає, що $G > 0,\ H < 0$. Оскільки темп приросту другого доданка траєкторії (5.41) вищий, ніж першого, темп приросту національного доходу зменшується і в деякий момент часу t_1 стане рівним нулю. Після цього моменту часу обсяг національного доходу буде зменшуватися. Отже, на проміжку $[0, t_1]$ доля споживання зростає до 1, а на проміжку (t_1, ∞) траєкторія (5.41) втрачає економічний сенс.

2. З нерівності $r < \hat{\lambda}$ випливає нерівність $1 - rBe^{r\bar{\tau}} < 1$. Перший доданок розв'язку (5.41) може бути додатний, від'ємний або рівний нулю, другий доданок завжди додатний. Поведінка траєкторії динаміки національного доходу залежить від знака параметра G. Тут можливі три випадки:

1) $G = 0$, тобто $rBe^{r\bar{\tau}} = 1 - \dfrac{c(0)}{y(0)} = \alpha(0)$. В цьому випадку розвиток проходить з постійною нормою нагромадження $\alpha(0)$ та постійним темпом приросту r_0, який визначають з рівняння:

$$re^{r\bar{\tau}} = \frac{\alpha(0)}{B}.$$

Траєкторія зміни національного доходу має вигляд:

$$y(t) = y(0)e^{r_0 t}.$$

2) $G < 0$, тобто $rBe^{r\bar{\tau}} > \alpha(0)$. Траєкторія динаміки національного доходу має складну норму нагромадження та складний темп

приросту національного доходу. Поведінка траєкторії аналогічна випадку $r > \hat{\lambda}$.

3) $G > 0$, тобто $rBe^{r\bar{\tau}} < \alpha(0)$. Отже, доданки траєкторії (5.41) зростають, причому перший доданок зростає швидше, ніж другий. Темп приросту національного доходу і норма нагромадження неперервно збільшуються до своїх верхніх меж $\hat{\lambda}$ та 1 відповідно.

5.5.2. Модель відтворення національного доходу із розподіленим лагом

Виробниче нагромадження $u(t)$ з розподіленим лагом визначають за формулою:

$$u(t) = \sum_{\tau=t}^{t+\Theta} B(t,\tau)\frac{dy(\tau)}{dt}, \tag{5.42}$$

де $B(t,\tau)$ – витрати капітальних вкладень у момент часу t, необхідні для отримання одиниці приросту національного доходу в момент часу τ. Загальні витрати капітальних вкладень розподіляються на проміжку $[t, t+\Theta]$ тривалістю Θ років. Загальна капіталомісткість в момент часу t становить $\sum_{s=t-\tau}^{t} B(s,t)$.

Континуальний аналог формули (5.42) має вигляд:

$$u(t) = \int_{t}^{\infty} B(t,\tau)\frac{dy(\tau)}{dt}d\tau, \tag{5.43}$$

де $\int_{t}^{\infty} B(t,\tau)dt = B(t)$.

При побудові моделі відтворення національного доходу із розподіленим лагом функцію $B(t,\tau)$ частіше всього беруть спадною від τ, наприклад, $B(t,\tau)=\frac{B}{\sigma}e^{\frac{t-\tau}{\sigma}}$, де параметр σ характеризує степінь розподіленості лага (чим більше значення σ, тим більше розтягнутий лаг). Крім того, будемо вважати, що норма нагромадження α постійна. В цьому випадку $u(t) = dy(t)$. При таких припущеннях з формули (5.43) маємо:

$$dy(t)=\frac{B}{\sigma}\int_{t}^{\infty}e^{\frac{t-\tau}{\sigma}}\frac{dy(\tau)}{dt}d\tau .$$

Розв'язком рівняння є траєкторія:

$$y(t)=y(0)e^{\frac{\alpha}{B+\alpha\sigma}} .$$

Урахування розподіленого лага при зростанні доходу з постійною нормою нагромадження спричиняє зменшення постійного темпу приросту національного доходу з $\frac{\alpha}{B}$ до $\frac{\alpha}{B+\alpha\sigma}$. Аналогічний висновок (див. формулу (5.37)) отримано для моделі динаміки національного доходу із зосередженим лагом при малих його значеннях.

5.6. Оптимізація динаміки національного доходу

5.6.1. Критерії та умови оптимізації

Макроекономічні показники: національний дохід – $y(t)$, нагромадження основних виробничих фондів – $u(t)$ та невиробниче споживання, приріст матеріальних оборотних засобів, державних матеріальних резервів тощо – $c(t)$, якими оперують за допомогою макромоделей динаміки національного доходу, несуть різне функціонально-цільове навантаження. Очевидно, що виробниче нагромадження $u(t)$ – головне джерело розширення виробництва та найважливіша умова зростання споживання. Динаміка споживання $c(t)$, в свою чергу, найбільшою мірою відображає кінцеву ціль розвитку національної економіки. У зв'язку з цим для оптимізації динаміки національного доходу за фіксований період часу $[0,T]$ як цільову функцію природно взяти функцію, яка максимізує сумарний фонд споживання за цей період:

$$C(T)=\int_0^T c(t)dt\,. \tag{5.44}$$

Проте цільова функція (5.44) має той недолік, що її застосування ґрунтується на припущенні про довільний розподіл споживання в часі: важливо максимізувати лише сумарне споживання. В більш загальному підході до максимізації споживання за заданий періодураховують структуру споживання, а також той факт, що ефект від одиниці споживання (споживчий ефект) в різні моменти часу нерівнозначний і може бути виміряний за допомогою деякої відомої функції $q=q(t)$.

Функцію $q=q(t)$, яка порівнює („зважує") споживання в різні моменти часу, називають ***зважувальною функцією споживання***. При виборі зважувальної функції за основу беруть гіпотезу про існування споживчих переваг у часі (діахронну нерівноцінність споживання): корисний ефект благ сьогодення вищий, ніж корисний ефект благ майбутнього. Відповідно до цієї гіпотези зважувальна функція споживання $q=q(t)$ повинна володіти такими властивостями:

1) $q(t)>0$, тобто сумарний рівень споживання в будь-який момент часу зростає;

2) $q(t)$ – монотонно спадна функція;

3) $\lim\limits_{t\to\infty} q(t)=0$, тобто вага споживання віддаленого майбутнього наближається до нуля.

Є два підходи до наукового пояснення та кількісного оцінення переваг споживання у часі.

Перший підхід – соціологічний. Згідно з ним суспільні переваги споживання у часі відображають соціально-психологічні оцінки майбутнього, насамперед динаміку добробуту. Наприклад, якщо суспільство оптимістично оцінює перспективи свого розвитку (високі темпи економічного зростання, сприятливий зовнішньополітичний стан, екологічна рівновага тощо), то масова поведінка споживачів буде основана на припущенні про недоцільність стримування теперішнього споживання і перенесення його на майбутнє, тому що в майбутньому можливості збільшення споживання станут більш сприятливими. Очевидно, що таку ситуацію відображає зважувальна функція споживання $q = q(t)$, яка досить швидко спадає. Більш поміркованій суспільній оцінці майбутнього відповідає інший стереотип споживчої поведінки: турбота про збереження досягнутого рівня споживання та підготовка умов для його дальшого зростання. Таку споживчу поведінку моделює зважувальна функція споживання, яка повільно спадає.

Таким чином, з соціологічної точки зору, зважувальна функція споживання повинна бути спадною функцією, параметри якої можуть бути оцінені за результатами соціологічних опитувань.

Другий підхід до оцінювання переваг споживання у часі – імітаційний. У його основі лежить аналіз результатів моделювання динаміки економічного розвитку при різних зважувальних функціях споживання. Імітацію розвитку національної економіки здійснюють на основі макроекономічної моделі, а зважувальну функцію споживання вибирають з умови досягнення ефективної траєкторії економічного розвитку.

При побудові макроекономічних моделей оптимізації динаміки національного доходу зважувальну функцію споживання часто зображують у вигляді експоненційної функції:

$$q(t) = e^{-\omega t}, \quad \omega > 0. \tag{5.45}$$

Використовують також показникову зважувальну функцію споживання

$$q(t) = (1-\omega)^t, \quad 0 < \omega < 1. \tag{5.46}$$

Параметр ω в обох зважувальних функціях споживання називається ***дисконтом споживання***. Для функції (5.45) дисконт споживання співпадає з неперервним темпом спадання ваги споживання.

В початковий момент часу $t = 0$ споживання має вагу $q(0) = 1$, потім вага споживання спадає і $\lim\limits_{t \to \infty} q(t) = 0$.

Отже, більш загальна максимізуюча цільова функція, яка використовується для оптимізації динаміки національного доходу за фіксований період часу $[0,T]$ (максимізації дисконтованого споживання), має вигляд

$$\widetilde{C}(T)=\int_0^T q(t)c(t)dt. \tag{5.47}$$

Можливості оптимізації динаміки національного доходу, траєкторія якої задається рівнянням

$$y(t)=B\frac{dy(t)}{dt}+c(t),$$

полягають у регулюванні співвідношення між споживанням $c(t)$ та нагромадженням $u(t)=y(t)-c(t)$. Підходи до оптимізації динаміки національного доходу, які ми будемо розглядати, відрізняються переважно за характером регулювання норми виробничого нагромадження. В усіх оптимізаційних динамічних моделях національного доходу рівняння $u(t)=y(t)-c(t)$ вважають обмеженням, змінна $c(t)$ стає ендогенною.

5.6.2. Оптимізація з нерегульованою нормою нагромадження

Розглянемо три модифікації оптимізаційної моделі динаміки національного доходу, що відрізняються цільовими функціями та врахуванням інвестиційного лага.

Максимізація сумарного споживання без врахування дисконтування споживання та інвестиційного лага.

Оптимізаційна динамічна модель у цьому випадку має вигляд:

$$\begin{cases} y(t)=B\dfrac{dy}{dt}+c(t), \\ C(T)=\displaystyle\int_0^T c(t)dt\to\max. \end{cases} \tag{5.48}$$

Модель (5.48) можна розглядати як задачу оптимального управління із критерієм

$$\int_0^T (y(t) - u(t))dt \to \max .$$

Задача оптимального управління в загальній постановці має вигляд:

$$\begin{cases} \int_0^T \varphi(x,u,t)dt \to \max & (5.49) \\ \dfrac{dx}{dt} = f(x,u,t) & (5.50) \\ u(t) \in U, \quad t \in [0,T] & (5.51) \\ X(0) = x_0, & (5.52) \end{cases}$$

де $x = x(t)$ – шукана траєкторія фазової змінної;

$u = u(t)$ – управління, яке в кожен момент часу задовольняє задані умови (5.51).

Шукана траєкторія $x = x(t)$ є розв'язком диференціального рівняння (5.50) із початковою умовою (5.52); управління $u(t)$ відоме, але його вибір повинен максимізувати заданий інтегральний функціонал (5.49).

В основі розв'язку задачі (5.49) – (5.52) лежить *принцип Понтрягіна.* Введемо двоїсту до $x(t)$ змінну $p(t)$, яку можна інтерпретувати як двоїсту оцінку диференціального обмеження (5.50) в момент часу $t \in [0,T]$, і побудуємо функцію Гамільтона

$$H(x,p,u,t) = p_0 \varphi(x,u,t) + pf(x,u,t),$$

де p_0 може набувати значення 0 або 1.

Для задач оптимального управління, до яких зводяться оптимізаційні динамічні моделі національного доходу, $p_0 = 1$. Отже, функція Гамільтона в нашому випадку

$$H(x,p,u,t) = \varphi(x,u,t) + pf(x,u,t).$$

Для двоїстої змінної $p(t)$ побудуємо диференціальне рівняння

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H(x,p,u,t)}{\partial x}$$

з кінцевою умовою $p(T) = 0$.

Згідно принципу максимуму Понтрягіна, ***якщо*** $u = u^*(t)$ – ***оптимальне управління в задачі (5.49) – (5.52),*** $x = x(t)$ – ***оптимальна траєкторія, яка відповідає управлінню*** $u^*(t)$, ***а*** $p = p(t)$ – ***розрахована для*** $x(t)$ ***та*** $u^*(t)$ ***траєкторія двоїстої змінної, то для всіх*** $t \in [0,T]$:

$$H(x(t), p(t), u^*(t), t) = \max_{u \in U} H(x(t), p(t), u, t).$$

В оптимізаційній динамічній моделі (5.48) фазовою змінною є величина національного доходу $y(t)$, керуючою змінною – величи-на нагромадження (інвестицій) $u(t)$. Модель (5.48) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \int_0^T (y-u)dt \to \max & (5.53) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{B}u & (5.54) \\ 0 \le u(t) \le y(t), \quad t \in [0,T] & (5.55) \\ Y(0) = y_0, & (5.56) \end{cases}$$

Функція Гамільтона для задачі (5.53)-(5.56) має вигляд:

$$H(y,p,u) = y - u + \frac{p}{B}u,$$

а рівняння для двоїстої змінної з кінцевою умовою

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad p(T) = 0.$$

Враховуючи функцію Гамільтона для задачі (5.53)-(5.56), маємо:

$$\frac{dp}{dt} = -1, \quad \mathrm{p(T)} = 0;$$

$$p(t) = -t + c, \quad P(T) = 0;$$

$$p(t) = T - t.$$

Отже, функція Гамільтона набуває вигляду:

$$H = \left(\frac{T - t}{B} - 1 \right) u + y.$$

Максимум цієї функції за змінною u (оптимальне управління $u^*(t)$) при обмеженнях (5.55) визначають за формулою:

$$u^*(t) = \begin{cases} y(t), \ \text{якщо} \ \dfrac{T-t}{B} - 1 > 0, \ \text{тобто}, \ t < T - B \\ 0, \ \text{якщо} \ \dfrac{T-t}{B} - 1 < 0, \ \text{тобто}, \ t > T - B \end{cases} \tag{5.57}$$

При $t = T - B$ величина оптимального управління невизначена.

Функція (5.57) показує, що розв'язок оптимізаційної динамічної моделі (5.48) суттєво залежить від величини T, тобто оптимальні траєкторії економічного розвитку істотно різняться для короткострокового ($T < B$) і довгострокового ($T > B$) періодів планування, при цьому межу, що розділяє ці періоди, визначають за допомогою величини капіталомісткості національного доходу B. Проаналізуємо поведінку оптимальної траєкторії динаміки національного доходу для вказаних двох періодів часу:

1. При $T < B$ маємо таку оптимальну траєкторію:

$$u^*(t) = 0,$$

$$y^*(t) = c^*(t) = y^*(0),$$

$$a^*(t) = 0,$$

$$C^*(T) = y(0)T .$$

Інакше кажучи, коли тривалість планового періоду не перевищує коефіцієнта капіталомісткості національного доходу, нагромадження й економічне зростання взагалі неефективні. У цьому випадку динамічний оптимум — це просте відтворення національного доходу і його повне використання на споживання. Отже, величина B характеризує мінімальний термін, у рамках якого нагромадження може бути ефективним з погляду „інтересів" споживання. У цьому сенсі динамічна модель при $T \leq B$ подібна до статичної.

Очевидно, що, принаймні, в рамках короткострокового і середньострокового планування виробниче нагромадження не може розглядатися як цілком ендогенна змінна. Необхідно забезпечувати визначений рівень нагромадження, враховуючи інтереси розвитку в післяплановому періоді.

2. При $T > B$ оптимальна траєкторія якісно змінюється в точці $t = T - B$.

Для $t \in [0, T\text{-}B)$ маємо:

$$y^*(t) = y(0)e^{\frac{1}{B}t},$$

$$u^*(t) = y^*(t),$$

$$c^*(t) = 0,$$

$$a^*(t) = 1,$$

тобто на першому етапі планового періоду ввесь національний дохід використовується на нагромадженняня і збільшується максимально можливим (технологічним) темпом.

Для $t \in [T\text{-}B, T]$ оптимальна траєкторія має вигляд:

$$y^*(t) = y^*(T - B) = y(0)e^{\left(\frac{T}{B} - 1\right)},$$

$$u^*(t) = 0,$$

$$c^*(t) = y^*(t),$$

$$a^*(t) = 0.$$

Обсяг національного доходу стабілізується і весь використовується на споживання:

$$C(T) = By(0)e^{\left(\frac{T}{B}-1\right)}.$$

У точці $t = T\text{-}B$ відбувається *„релейне перемикання"* режиму відтворення національного доходу, що є необхідною умовою досягнення максимуму C(T).

Відзначимо, що перше релейне перемикання відбувається в точці $t=0$: скачок нагромадження з $u(0)$ до $y(0)$ і падіння споживання від $c(0)$ до нуля.

Оптимальні траєкторії розвитку при $T>B$ зображено на рис. 40. Національний дохід — крива *KLM*, нагромадження — *KLNP*, споживання — *ONLM*. Площа заштрихованого прямокутника *NLMP* дорівнює $C^*(T)$.

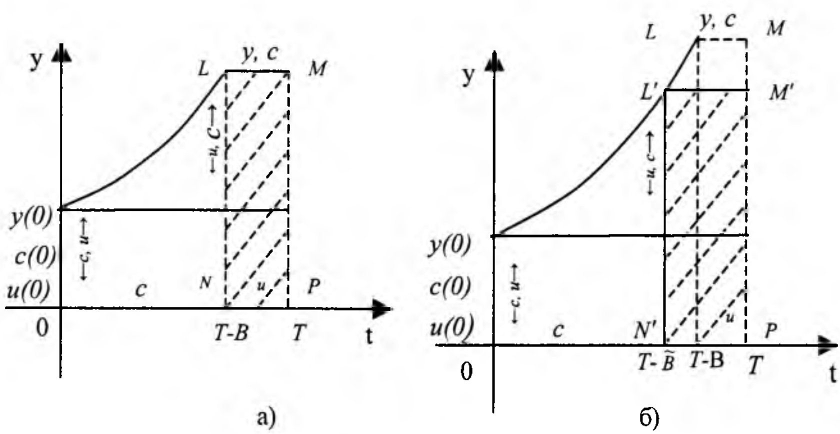

Рис. 40. Траєкторії розвитку в задачах оптимального управління (y — національний дохід; c — споживання; u — виробниче нагромадження): а) без дисконтування споживання; б) з дисконтуванням споживання

Головними недоліками розв’язку задачі (5.57) є його сильна залежність від величини T і релейна зміна структури національного доходу. Очевидно, що економічно неприпустимі періоди розвитку як з повною відсутністю споживання, так і простого відтворення з відсутністю нагромадження. Неприйнятним є також різний вимір траєкторії розвитку, залежно від величини T: при її зменшенні (так, що $T<B$) стає неефективним нагромадження, при значному ж збільшенні (чи використанні принципу ковзного планування) момент споживання взагалі не настає. Важливим теоретичним результатом аналізу задачі (5.48) є виявлення особливо важливої ролі коефіцієнта B у процесі (динаміці і структурі) відтворення.

5.6.3. Максимізація дисконтованого споживання

Можна припустити, що релейний характер динаміки національного доходу в оптимізаційній моделі зумовлений недоліком застосовуваної цільової функції, в якій рівні обсяги споживання в різні моменти часу враховують як рівноцінні. Тому доцільно проаналізувати модель з цільовою функцією (5.45):

$$\begin{cases} y(t) = B\dfrac{dy(t)}{dt} + c(t), \\ \widetilde{C}(T) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\omega t} c(t)dt. \end{cases} \tag{5.58}$$

Для дослідження моделі (5.58) також можна застосувати принцип максимуму Понтрягіна.

Поведінка розв'язку (5.58) істотно залежить від того, чи витримується умова $\omega B < 1$. Оскільки загальноприйняті оцінки параметра ω знаходяться в інтервалі [0,05;0,10], нерівність виконується з великим запасом. Цю обставину використовують для подальшого аналізу.

Важливу роль в аналізі розв'язку відіграє величина „скоригованої капіталомісткості”:

$$\widetilde{B} = -\frac{1}{\omega}\ln(1-\omega B).$$

Функція $\tilde{B}(\omega)$ є зростаючою при $\omega = \left(0, \frac{1}{B}\right)$. При малому ω коефіцієнт $\tilde{B}$ мало відрізняється від B: $\lim\limits_{\omega \to \infty} \tilde{B}(\omega) = B$.

Наприклад, $\tilde{B}$ (0,05)= 3,85, $\tilde{B}$(0,10) = 4.31.

Аналіз моделі (5.58) приводить до висновку, що якісний характер її оптимальної траєкторії не змінюється, порівняно з розв'язком моделі (5.48).

1. При Т$\le \tilde{B}$ національний дохід не зростає і ввесь використовується на споживання. Оскільки $\tilde{B}$>В, то тривалість періоду, у рамках якого нагромадження неефективне, збільшується, порівняно із задачею на максимум недисконтованого сумарного споживання.

2. При Т>$\tilde{B}$ оптимальна траєкторія має релейне перемикання в точці t=T-$\tilde{B}$. Зростання з максимальним темпом $\rho = \frac{1}{B}$ закінчується раніше, ніж у моделі (5.48). Максимальний рівень національного доходу $y^*(T - B) = y(0)e^{\frac{T}{B}}(1 - \omega B)^{\frac{1}{\omega B}}$ менший, ніж у точці перемикання моделі (5.48). Хоча „етап споживання" стає більш тривалим, сумарний фонд споживання $C^* = By^*(T - \tilde{B})$ стає меншим через більш низький постійний рівень споживання.

На рис. 41 зображено траєкторії розвитку, що відповідають максимуму дисконтованого споживання та їхньому зсуненню, порівняно з графіком на рис.40 а. Площа $N'L'M'P$ менша площі $NLMP$.

При B = 3,5, ω = 0,05 і T = 10 максимальний рівень національного доходу (3480) досягається в t = 6,15; C'(10) = 13398. При збільшенні дисконту споживання до ω = 0,10 максимуму національного доходу досягають раніше (у t = 5,69), але його обсяг зменшується (3051). Знижується і сумарний обсяг споживання (13150).

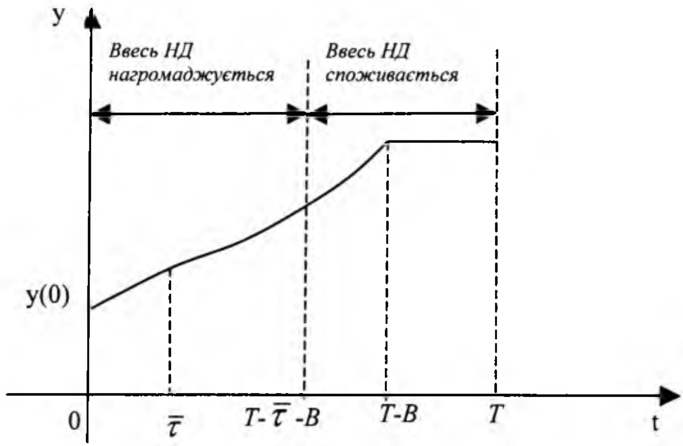

Рис. 41. Зростання національного доходу в задачі оптимального управління з інвестиційним лагом

Отже, дисконтування споживання трохи згладжує недоліки оптимального розв'язку моделі (5.48). Однак надія на те, що завдяки дисконтуванню можна усунути релейний характер динаміки національного доходу і сильну залежність оптимальної траєкторії від величини T, не виправдалася. Очевидно, необхідні більш радикальні способи регулювання динаміки і структури національного доходу.

5.6.4. Оптимізація з урахуванням інвестиційного лага

Відзначимо основні особливості оптимального розв'язку задачі, що включає зосереджений інвестиційний лаг $\bar{\tau}$ (відповідно до (5.34)).

При $t \in [0, \bar{\tau}]$ динаміку національного доходу визначає динаміка нагромадження в передплановому періоді: $y(t) = y_0(t)$. На цій ділянці можна управляти тільки розподілом національного доходу. Оптимальний розв'язок має вигляд:

$$u^*(t) = 0,$$

$$c^*(t) = y_0(t).$$

Принцип максимуму застосовується при $T > \bar{\tau}$.

Якщо $\bar{\tau} < T \le \bar{\tau} + B$, то, як і раніше, нагромадження неефективне й увесь національний дохід треба направляти на споживання.

Максимальне значення $y(t)$ досягається в точці $\bar{\tau}$. Інвестиційний лаг збільшує тривалість планового періоду, у рамках якого нагромадження неефективне з точки зору інтересів споживання.

Розвиток з релейним перемиканням здійснюється при $T > \bar{\tau} + B$. Тут, на відміну від оптимальних розв'язків (5.48), (5.58), виділяються чотири (а не два) періоди розвитку:

а) при $t \in [0, \bar{\tau}]$ динаміка обсягу національного доходу визначена: $y^*(t) = y_0(t)$, увесь національний дохід направляється на нагромадження;

б) при $t \in [\bar{\tau}, T - \bar{\tau} - B]$ дохід зростає максимально можливим темпом і, як і раніше, ввесь використовується на нагромадження;

в) при $t \in [T - \bar{\tau} - B, T - B]$ національний дохід продовжує зростати, але вже ввесь спрямовується на споживання;

г) при $t \in [T - B, T]$ обсяг національного доходу залишається незмінним і ввесь використовується на споживання: $y^*(t) = y(T - B)$.

Таким чином, при $T > \bar{\tau} + B$ основні якісні характеристики оптимальних траєкторій зберігаються і з урахуванням інвестиційного лага. Але при цьому момент релейного перемикання зміщується до початку планового періоду, і з'являються два періоди інерційного зростання доходу $t \in [0, \bar{\tau}]$ і $t \in [T - \bar{\tau} - B, T - B]$, що дорівнюють за тривалістю величині лага (рис. 41).

5.6.5. Оптимізація з динамічними і структурними обмеженнями

Розглянемо два підходи до покращення якісних властивостей оптимальних траєкторій. Вони обидва пов'язані із включенням додаткових умов, які обмежують різкі зміни темпів і структури національного доходу.

1. *Включення умови неперервного зростання споживання.*

Найпростіший спосіб одержання гладкої траєкторії споживання — заміна інтегральної цільової функції $C(T)$ умовою максимізації параметра неперервного зростання споживання:

$$\begin{cases} c(t) = c(0)e^{rt}, \\ r \to \max \quad . \end{cases} \tag{5.59}$$

Цю задачу вже було досліджено (випадки, коли $r > \rho_0$). Динаміку національного доходу описують рівнянням (5.21). Нагромадження неперервно зменшується і в точці t_1 дорівнює нулю. Одночасно нульовим стає і темп приросту національного доходу. Отже, максимізація споживання здійснюється на шкоду майбутньому економічному розвитку.

Розглянемо більш гнучку умову неперервного зростання споживання. Для цього розділимо обсяг споживання на дві частини: екзогенну (зростаючу з мінімально необхідним темпом $r < \rho_0$) і ендогенну (оптимізовану):

$$\begin{cases} c(t) = c_1(t) + c_2(t), \\ c_1(t) = c(0)e^{rt}, \\ C_2(T) = \int\limits_0^T c_1(t)dt \to \max. \end{cases} \tag{5.60}$$

Застосування принципу максимуму Понтрягіна дає такі результати:

1. При $T \le B$ одержуємо такий же розв'язок, як і для задачі (5.48). Це очевидно, оскільки умова зростання $c_1(t)$

перекривається зростанням $c_2(t)$. Як і раніше, нагромадження в межах періоду тривалістю $T \leq B$ неефективне.

2. При $T>B$ оптимальна траєкторія, як і для моделей (5.48), (5.58), має декілька характерних відрізків з границею $t = T - B$.

На першому відрізку темп приросту національного доходу неперервно збільшується, на нагромадження виділяється максимально допустима частина національного доходу, споживання зростає мінімально необхідним темпом r (рис. 42).

Формула для визначення t_1, набуває вигляду:

$$t_1 = \frac{B}{1-Br}\ln\left[1+\frac{\alpha(0)(1-Br)}{Br-\alpha(0)}\right].$$

Оскільки розв'язок має економічний сенс тільки на відрізку $t \in [0, t_1]$, то вихідну постановку можна трансформувати в такий спосіб: $\{t_1(r) \geq T, r \to \max\}$. При цьому гарантується невід'ємність нагромадження до кінця планового періоду $[0,T]$. Логічно ще більше підсилити постановку задачі: припустити, що $u(T) > u^* > 0$.

Для $t \in [0,T\text{-}B]$ маємо:

$$y^*(t) = \left[y(0) - \frac{c(0)}{1-Br}\right]e^{\frac{1}{B}} + \frac{c(0)}{1-Br}e^{rt};$$

$$u^*(t) = y^*(t) - c(0)e^{rt};$$

$$c^*(t) = c(0)e^{rt};$$

$$\max y(t) = y^*(T-B) = \left[y(0) - \frac{c(0)}{1-Br}\right]e^{\left(\frac{T}{B}-1\right)} + \frac{c(0)}{1-Br}e^{(T-B)}.$$

На другому відрізку обсяг національного доходу залишається незмінним і ввесь використовується на споживання (рис. 42).

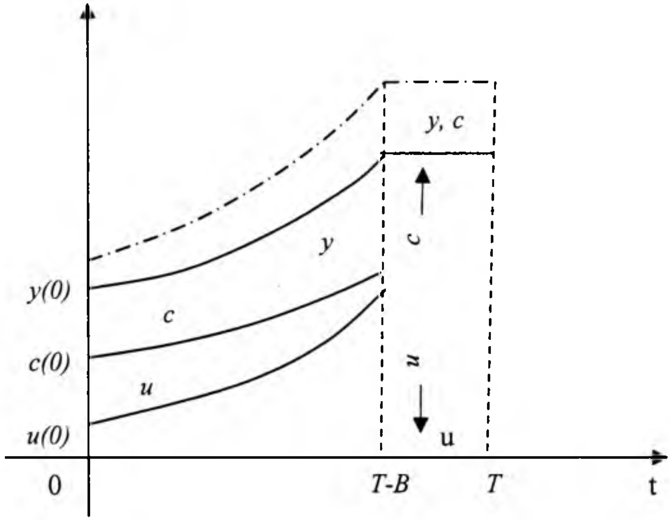

Рис. 42. Траєкторії розвитку в задачі оптимального управління з мінімальним зростанням споживання (— · — · — · — · — – позначено динаміку національного доходу з рис. 40 а)

Наприклад, при колишніх вихідних даних Т=10 і r=0,03 максимальний річний рівень національного доходу (досягається в t=6,5) дорівнює 1060, c^* (6,5) = 583, а C^* (10) = 7155, що в 1,88 раза менше, ніж у задачі (5.48) з аналогічними вихідними даними. Якщо ж прийняти r = 0,05, то $y^*(6{,}5) = 921$, c^* (6,5) = 664, B^* = 6910.

Таким чином, одночасність виконання умов задачі оптимізаційної моделі (5.48) з вимогами гарантованого зростання споживання дає змогу одержувати згладжені траєкторії розвитку. Шляхом регулювання величини r знаходимо розв'язок з різним сполученням близьких і довгострокових цілей економічного розвитку. Так, збільшуючи r, ми прискорюємо зростання споживання на першому етапі розвитку (до $t=T\text{-}B$), але зменшується рівень річного споживання на другому етапі і сумарне споживання за плановий період. Зменшуючи r, ми програємо в споживанні на першому етапі, але виграємо на другому і в сумі.

Недоліком отриманих траєкторій є відсутність нагромадження на відрізку $t \in [T\text{-}B, T]$, унаслідок чого виключається зростання споживання в післяплановому періоді.

Цей "ефект хвоста" планового періоду фіксованої тривалості був наявний і в раніше аналізованих оптимальних розв'язках. Щоб уникнути цього в цій постановці задачі, вчинимо так само, як з траєкторією споживання на першому етапі. Введемо для $t>T\text{-}B$ умову $u(t) = u(T-B)e^{s(t-T+B)}$, де s — мінімально необхідний темп приросту нагромадження, що забезпечує збільшення національного доходу в інтересах споживання у післяплановому періоді (рис. 43).

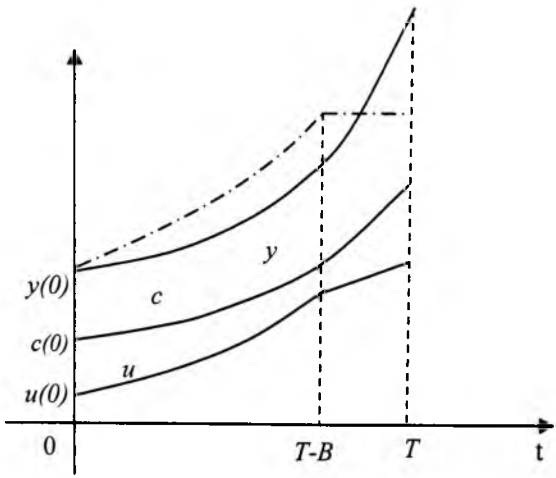

Рис. 43. Траєкторії розвитку в задачі оптимального управління з мінімальним зростанням споживання (на відрізку [*0, T-B*]) і нагромадження (на відрізку [*T-B,T*]); (—·—·—·— – позначено динаміку національного доходу з рис. 40 а)

Наприклад, при $s = r = 0{,}03$ одержуємо $y^{*}(10)=1562$, що майже в півтора рази перевищує максимум національного доходу у варіанті без нагромадження на відрізку [*T-B, T*]. Однак споживання при цьому скорочується як наприкінці періоду, де $c^{*}(10)=1033$, так і за період загалом: $C^{*}(10) = 6260$.

Заміна цільової функції в (5.60) на дисконтоване ендогенне споживання $\widetilde{C}_2(T) = \int_0^T e^{-\omega t} c_2(t)dt$ дає можливість ще більшою мірою поєднати інтереси поточного і майбутнього споживання.

5.6.6. Оптимізація при заданому інтервалі зміни норми нагромадження

Введемо в задачу (5.48) додаткові обмеження на мінімальне (γ^-) і максимальне (γ^+) значення норми виробничого нагромадження: $a(t) \in \left[\gamma^-, \gamma^+\right]$. Аналіз розширеної задачі оптимального управління, що включає умову

$$\gamma^- y(t) \le u(t) \le \gamma^+ y(t), \tag{5.61}$$

приводить до результатів, наближених до оптимального розв'язку попередньої задачі з гарантованим зростанням споживання, а на окремих відрізках планового періоду одержуємо розв'язок моделі з постійною нормою нагромадження (5.27).

1. При $T<B$ нагромадження здійснюється на мінімально допустимому рівні, що забезпечує деяке зростання національного доходу і споживання. Усі „вільні" ресурси національного доходу спрямовано на споживання.

Формули, що визначають оптимальний розв'язок:

$$u^*(t) = \gamma^- y^*(t),$$

$$c^*(t) = (1-\gamma^-)y^*(t),$$

$$y^*(t) = y(0)e^{\frac{\gamma^-}{B}t},$$

$$C^*(t) = \frac{\left(1-\gamma^-\right)}{\gamma^-}y(0)B\left(e^{\frac{\gamma^-}{B}T} - 1\right).$$

2. При $T>B$ оптимальна траєкторія, як і раніше, має два характерні відрізки з перемиканням у точці $t=T-B$.

На першому відрізку норма нагромадження максимальна. Споживання спочатку знаходиться на мінімально допустимому рівні, але зростає високими темпами, що дорівнює темпу нагромадження і національного доходу:

$$u^*(t) = \gamma^+ y^*(t),$$

$$y^*(t) = y(0)e^{\frac{\gamma^-}{B}t}$$

$$c^*(t) = (1-\gamma^+)y^*(t),$$

тобто маємо розв'язок (5.27) при $\alpha_0 = \gamma^+$.

На другому відрізку норма нагромадження мінімальна, відповідно знижується темп національного доходу. Отримуємо розв'язок (5.27) при початковому $y(t) = y(T-B)$ і $\alpha_0 = \gamma^-$. Сумарне споживання за період $[0,T]$ є меншим, ніж у задачі (5.48).

Шляхом зміни проміжку $[\gamma^-,\gamma^+]$ можна досягати зміни обсягів і темпів споживання і нагромадження на відрізках розвитку $[0,T\text{-}B]$ і $[T\text{-}B,T]$. Однак уникнути релейного перемикання в момент $t=T\text{-}B$ не вдається, але при звуженні проміжку $[\gamma^-,\gamma^+]$ перемикання стає менш різким (рис. 44).

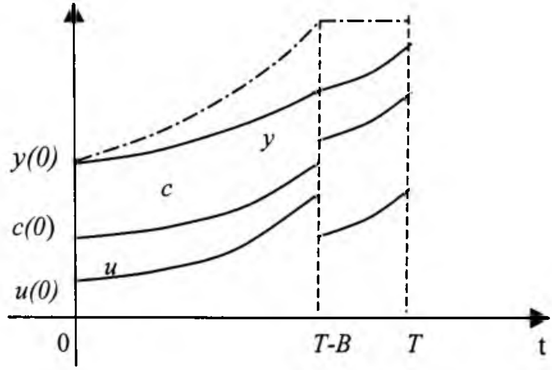

Рис. 44. Траєкторії розвитку в задачі оптимального управління при заданому інтервалі виміру норми нагромадження (—·—·—·—·– – позначено динаміку національного доходу з рис. 40 а)

Очевидно, що звуження зазначеного проміжку наближає аналізовану модель до моделі (5.27) з постійною нормою нагромадження α_0. Виникає питання про те, до якої норми нагромадження варто прагнути, чи можна оптимізувати її значення.

Для $t \in [T\text{-}B,T]$ маємо:

$$y^*(t) = y^*(T-B)e^{\frac{\gamma^-}{B}(t-T+B)} = y(0)e^{\frac{\gamma^- t+(\gamma^+-\gamma^-)(T-B)}{B}},$$

$$u^*(t) = \gamma^- y^*(t),$$

$$c^*(t) = (1 - \gamma^-) y^*(t).$$

5.6.7. Оптимізація з постійною нормою нагромадження

Розглянемо дві постановки задачі оптимізації норми виробничого нагромадження з метою максимізації інтегрального фонду споживання або інтегрального споживчого ефекту за більш-менш тривалий період часу.

Нехай норма нагромадження $\alpha \in [0,1]$ є незмінною протягом планового періоду $[0,T]$. Потрібно визначити величину α^*, при якій максимізується сумарний фонд споживання

$$C(T) = \int_0^T c(t)dt.$$

Визначення α^* одночасно означає знаходження оптимального постійного темпу приросту національного доходу $\rho^* = \frac{\alpha^*}{B}$.

Відповідно до (5.30) $c(t) = y(0)(1-\alpha)e^{\frac{\alpha}{B}t}$, звідки

$$C(T) = y(0)(1-\alpha)\int_0^T e^{\frac{\alpha}{B}t} dt.$$

Отже, необхідно знайти α^* за таких умов:

$$\begin{cases} (1-\alpha)\int_0^T e^{\frac{\alpha}{B}t} dt \to \max, \\ \alpha \in [0,1]. \end{cases} \tag{5.62}$$

Відзначимо, що коли прийняти α = 0, то в початковий момент часу споживання буде максимальним ($c(0)=y(0)$), але далі воно не буде зростати і його сумарний обсяг за період становитиме $C=y_0T$. Якщо ж вибрати $\alpha>0$, то в початковий момент часу споживання буде меншим, ніж максимально можливе значення, але потім буде зростати. Тому при деякій тривалості планового періоду позитивна норма нагромадження забезпечуватиме більший сумарний фонд споживання, ніж нульова норма нагромадження.

Оптимальна норма нагромадження як функція тривалості планового періоду має такі властивості:

1. При $T \in [0,\ 2B]$ маємо $\alpha^*(T) = 0$. Це означає, що національний дохід не зростає $y^*(t) = y(0)$;

2. При $T>2B$ величина $\alpha^*(T)$ додатна і монотонно зростає із зростанням Т;

3. $\lim\limits_{T\to\infty}\alpha^*(T)=1$.

При $\alpha>0$ для функції C справедливий вираз

$$C = By(0)\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\left(e^{\frac{\alpha T}{B}}-1\right).$$

Щодо величини $\alpha^*(T)$ справедлива асимптотична умова

$$\alpha^*(T) \cong 1-\frac{B}{T}$$

і двобічне оцінення

$$1-\frac{2B}{T} \le \alpha^*(T) \le 1-\frac{B}{T}.$$

Оптимальний темп приросту національного доходу (і рівні йому темпи споживання і нагромадження) при постійній нормі нагромадження також є зростаючою функцією від тривалості планового періоду: $\rho_y^*(T)=\dfrac{\alpha^*(T)}{B}$. Для оптимального темпу ρ_y^* існує асимптотична умова

$$\rho_y^* \cong \frac{1}{B}-\frac{1}{T}$$

і двобічне оцінення

$$\frac{1}{B}-\frac{2}{T} \le \rho_y^* \le \frac{1}{B}-\frac{1}{T}.$$

Отже, аналіз поставленої задачі підтверджує отримані раніше висновки (але при інших кількісних оцінках) про важливу роль коефіцієнта капіталомісткості і тривалість планового періоду для визначення оптимуму споживання і нагромадження.

Графіки функцій $\alpha^*(T)$ і $\rho^*_y(T)$ зображено на рисунку:

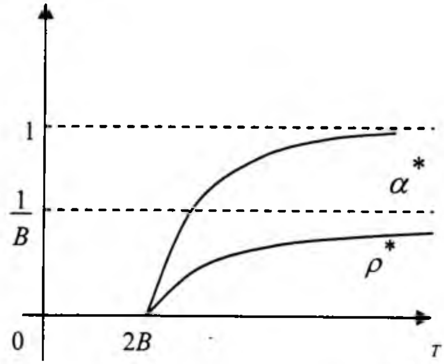

Рис. 45. Залежність оптимальної норми нагромадження α^* та оптимального темпу приросту національного доходу ρ^* від тривалості планового періоду

Таблиця 5.3

T	α^*	ρ^*	$C(\alpha^*)$	$C(0,2)$
5	0	0	3000	2778
7	0	0	4200	4131
10	0,41	0,12	6729	6475
15	0,67	0,19	17234	11394
20	0,78	0,22	50489	17940

При B=3,5 плановий період, у рамках якого нагромадження ефективне з точки зору збільшення сумарного фонду споживання, повинен тривати більше семи років. Очевидно, що зменшення коефіцієнта B скорочує тривалість мінімального періоду, необхідного для ефективного нагромадження. У таблиці подано оптимальні значення норми нагромадження, темпу приросту національного доходу, сумарного фонду споживання при зростаючій тривалості планового періоду. Для порівняння подано значення сумарного фонду споживання при α=0,2.

Норма нагромадження $\alpha = 0{,}2$ і відповідний їй темп приросту національного доходу $\rho_y = 0{,}057$ оптимальні при $T = 8{,}14$. Із збільшенням T оптимальна норма нагромадження швидко зростає і пропорційно зростає оптимальний темп приросту.

Недолік розглянутого підходу оптимізації норми нагромадження проявляється в тому, що оптимальний розв'язок сильно залежить від обраної тривалості планового періоду. Цей недолік, хоча б частково, може бути пояснений тим, що корисні ефекти від споживання в різні моменти часу передбачають однаковими. У зв'язку з цим доцільно розглянути задачу з максимізацією дисконтованого споживання, тобто з цільовою функцією

$$\widetilde{C} = y(0)(1-\alpha)\int_0^T e^{-\omega t} e^{\frac{\alpha}{B}t}\,dt = y(0)(1-\alpha)\int_0^T e^{\left(\frac{\alpha}{B}-\omega\right)t}\,dt\,.$$

Таким чином, необхідно знайти $\widetilde{\alpha}^*$ з умов:

$$\begin{cases} (1-\alpha)\displaystyle\int_0^T e^{\left(\frac{\alpha}{B}-\omega\right)t}\,dt \to \max, \\ \alpha \in [0{,}1]. \end{cases} \qquad (5.63)$$

Властивості максимізованої функції $\widetilde{C}(\alpha)$, що включає дисконт споживання ω, істотно залежать від того, чи є $\dfrac{\alpha}{B} - \omega > 0$ при $\alpha \in [0{,}1]$. Для цього необхідно, щоб $\omega < \dfrac{1}{B}$, а ця умова (як було описано вище) виконується. Тоді при досить великому α можна домогтися необмеженого збільшення дисконтованого споживання із зростанням тривалості планового періоду.

Якщо в задачі (5.62) критичною тривалістю планового періоду є $T=2B$, то в задачі (5.63) таким критичним значенням є $\widetilde{T}$, що зумовлено неявно рівнянням $e^{\omega\widetilde{T}} = 1 + \dfrac{\omega\widetilde{T}}{1-\omega B}$ і задовольняє умову $2B \le \widetilde{T}(\omega) \le \dfrac{2B}{1-\omega B}$. Це означає, що з урахуванням дисконту споживання тривалість планового періоду, в межах якого нагромадження стає ефективним, збільшується. Властивості оптимальної норми нагромадження якісно не змінюються.

Введення дисконту споживання в максимізовану цільову функцію хоча і сповільнює зростання оптимальної норми нагромадження зі збільшенням Т, але не змінює асимптотичної залежності оптимальної норми нагромадження від тривалості планового періоду: $\tilde{\alpha}^* \cong 1-\frac{B}{T}$. Графіки функцій $\tilde{\alpha}^*(T)$ і $\rho_y^*(T)$ якісно не змінюються, порівняно з поданими на рис. 45, за винятком того, що $\tilde{\alpha}^*$ стає додатною при $T > \tilde{T}$.

Оптимальна норма нагромадження $\tilde{\alpha}^*$ має такі властивості:

1) при $T \in [0, \tilde{T}]$ $\tilde{\alpha}^*(T) = 0$;

2) при $T > \tilde{T}$ величина $\tilde{\alpha}^*(T)$ додатна і монотонно зростає;

3) $\lim\limits_{T\to\infty} \tilde{\alpha}^*(T) = 1$;

4) при $T > \dfrac{2B}{1-\omega B}$ справедлива рівність:

$$\tilde{\alpha}^* = \omega B + (1-\omega B)\alpha^*[T(1-\omega B)].$$

Наприклад, якщо ω=0,05, то нагромадження стає ефективним при T>7,45, якщо ж ω=0,10, то при T > 8,07. Норма нагромадження α=0,2 і відповідний їй темп приросту національного доходу ρ=0,057 оптимальні при T=8,7 (якщо ω=0,05) і T = 9,4 (якщо ω = 0,10). При T = 20 маємо $\tilde{\alpha}^*$=0,76 (якщо ω=0,05) і $\tilde{\alpha}^*$=0,73 (якщо ω=0,10).

При оптимізації постійної норми нагромадження виявляється сильна залежність розв'язку від вибору тривалості планового періоду. Ця властивість об'єктивно відображає зростаючий пріоритет нагромадження в інтересах підвищення життєвого рівня населення при розширенні горизонту передбачення.

Разом з тим у точці t = 0 доводиться різко змінювати співвідношення між споживанням і нагромадженням. В силу структурних обмежень, які не враховують у макромоделі (різний матеріально-речовий склад фондів споживання і нагромадження), подібний різкий маневр важко здійснити. Тому варто розглянути можливість більш плавної зміни співвідношення між споживанням і нагромадженням.

5.6.8. Вихід на режим зростання з постійною нормою нагромадження

Кожна з розглянутих нами задач оптимізації динаміки національного доходу „у чистому вигляді” має певні недоліки. Очевидно, що за допомогою тільки формальних методів оптимізації співвідношення споживання і нагромадження, неможливо домогтися прийнятних результатів. Проведений аналіз дає змогу сформулювати ряд вимог до динаміки національного доходу і його структури:

1) норма нагромадження не повинна необмежено наближатися до 0 і 1 (з огляду на недоліки розв'язків (5.26) при $r \neq \rho_0$);

2) повинні бути згладжені релейні перемикання споживання і нагромадження;

3) одержуваний розв'язок (у тому числі і з постійною оптимальною нормою нагромадження) на початку періоду не повинен надто залежати від обраної його тривалості.

Ці вимоги можна виконати, поєднуючи розглянуті вище постановки задач (як із заданням траєкторій $c(t)$, так і з максимізацією споживання) на різних інтервалах довгострокового планового періоду відповідно до поставлених цілей.

Розглянемо задачу поступового виходу на режим зростання з постійною нормою нагромадження.

Початкова норма нагромадження становить $\alpha(0)$. Протягом планового періоду $[0,T]$ необхідно вийти на більш високу норму $\tilde{\alpha}$ і надалі підтримувати її постійною.

Перехідний режим розвитку визначають на відрізку $[0,\tilde{t}\,]$, так що $\alpha(\tilde{t}\,) = \alpha(\tilde{t} < T)$. Поступове збільшення $\alpha(t)$ може бути забезпечено, зокрема, при постійному темпі приросту споживання $r < \frac{\alpha(0)}{B}$. Тоді відповідно до (5.26) при $t \in [0,\tilde{t}\,]$ норма нагромадження буде монотонно збільшуватися від α_0 до $\tilde{\alpha}$.

Формула для розрахунку монотонно зростаючої норми нагромадження:

$$\alpha(t) = 1 - \frac{1}{\left[1 - \frac{1}{1 - Br}\right] e^{\frac{1-Br}{B}t} + \frac{1}{1 - Br}}.$$

Момент $\tilde{t}$ досягнення заданої норми нагромадження визначають з рівняння $\alpha(t) = \tilde{\alpha}$, що має єдиний розв'язок (див. рис. 46 а). Це точка перетину зростаючої кривої $\alpha(t)$ та ординати $\alpha(t) = \tilde{\alpha}$. Збільшуючи r, можна збільшувати $\tilde{t}$, і навпаки. Наприклад, потрібно перейти від вихідної норми нагромадження α(0)=0,17 до $\tilde{\alpha}$ =0,20. При r = 0,03 одержуємо $\tilde{t}$ = 0,64, при r = 0,04 одержуємо $\tilde{t}$ = 2,96.

Постійну норму нагромадження може не задавати, а визначати одночасно з переходом на режим розвитку з оптимальною нормою нагромадження, залежно від тривалості решти планового періоду. Тоді $\tilde{\alpha}$ і $\tilde{t}$ визначають з рівняння $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(T - \tilde{t})$, що також має єдиний розв'язок (див. рис. 46 б). Це точка перетину зростаючої кривої $\alpha(t)$ і спадної кривої $\alpha^*(T - \tilde{t})$, розрахованих шляхом оптимізації постійної норми нагромадження. Нехай r = 0,03, T = 20. У цьому випадку перетин двох кривих відбувається в $\tilde{t}$ =0,9 і $\alpha(\tilde{t}) = \alpha^*(T - \tilde{t}) = 0{,}5$.

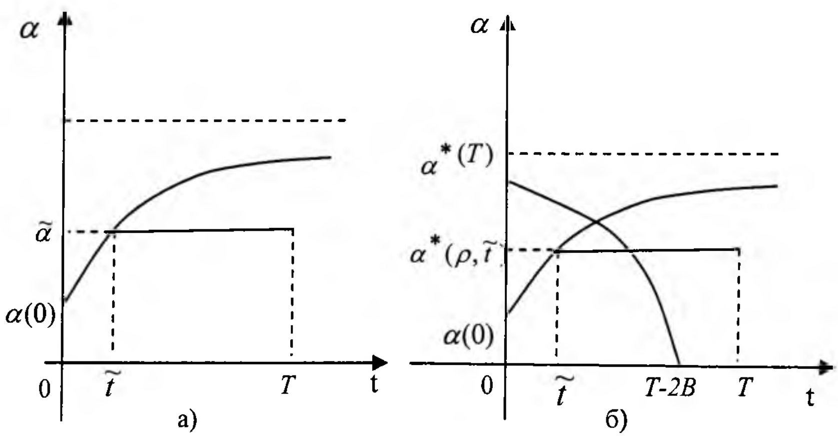

Рис. 46. Динаміка норми нагромадження: поступове збільшення до фіксованої постійної (а) і постійної оптимальної (б)

Викладений підхід застосуємо і в тому випадку, коли початкову норму нагромадження необхідно зменшити: $\tilde{\alpha} < \alpha(0)$. Тоді варто вибрати $r > \dfrac{\alpha(0)}{B}$. Це забезпечує поступове зниження $\alpha(t)$ до $\tilde{\alpha}$ за проміжок $\left[0, \tilde{t}\right]$, де $\tilde{t} < T$.

Розглянуті макромоделі виявляють якісні властивості оптимальних траєкторій національного доходу при різних способах економічного регулювання. Кожна модель окремо має певні недоліки, що зазвичай є гіпертрофованими перевагами (граничне використання тієї чи іншої можливості одержання кращого розв'язку з погляду формального критерію). Теоретична і практична цінність моделей цього типу істотно зростає при їхньому комплексному застосуванні.

РОЗДІЛ 6

ТЕОРЕТИЧНІ СТРУКТУРНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

За цільовим призначенням економіко-математичні моделі поділяють на ***теоретико-аналітичні*** та ***прикладні***. Теоретико-аналітичні моделі використовують для дослідження загальних властивостей і закономірностей економічних процесів, а прикладні – для розв'язку конкретних економічних задач.

Залежно від способу вираження співвідношень між зовнішніми умовами, внутрішніми параметрами і шуканими величинами економіко-математичні моделі поділяють на структурні і функціональні. Структурні моделі відображають внутрішню організацію об'єкта дослідження, його складові частини, внутрішні параметри, їхні зв'язки із входами і виходами і т.п.

Структурна модель економічної динаміки включає опис матеріально-речової структури економічної системи та взаємозв'язків між окремими видами виробництва.

Досліджуючи структурні моделі економічної динаміки, головну увагу приділяють аналізу якісних властивостей розв'язків та зв'язків із вхідними (початковими) припущеннями. Для структурних моделей економічної динаміки найбільш важливими є такі проблеми:

– визначення множини технологічно допустимих траєкторій;
– вивчення якісних властивостей траєкторій;
– розроблення методів вибору ефективних та оптимальних траєкторій.

Заради справедливості необхідно зауважити, що „гарних" результатів теоретичного моделювання економічної динаміки досягають найчастіше за рахунок сильного спрощення опису реальних економічних процесів. Через це теоретичні моделі служать методологічною основою при створенні прикладних моделей економічної динаміки.

До найбільш відомих теоретичних моделей економічної динаміки належать:

- модель В. Леонтьєва;
- модель Дж. фон Неймана;
- модель Л.В. Канторовича.

Василь Леонтьєв (1906 – 1999 рр.) – американський економіст російського походження; професор Гарвардського університету у Кембриджі, пізніше у Нью-Йорку; творець методу економіко-математичного аналізу витрати-виробництво (Input-Output) для вивчення міжгалузевих впливів. Отримав Нобелівську премію у 1973 р.

Джон фон Нейман (1903–1957 рр.) – американський математик угорського походження; академік Американської академії мистецтв і наук, Національної академії США, почесний доктор багатьох університетів у США і за кордоном. Найвищі наукові досягнення: математичне обґрунтування квантової механіки, теорія необмежених операторів, ергодична теорія, роботи у теорії ігор, теорії автоматів, теорії множин, економічній теорії.

Леонід Віталійович Канторович (1912–1986 рр.) – радянський математик, економіст, академік АН СРСР; професор Ленінградського університету. Відомий своїми фундаментальними працями з функціонального аналізу, проблем використання обчислювальної математики в економічних дослідженнях та ін. Отримав Нобелівську премію у 1975 р.

6.1. Динамічні міжгалузеві моделі

6.1.1. Динамічна модель Леонтьєва

Відмінною ознакою теоретичних міжгалузевих динамічних моделей є опис співвідношень „витрати — випуск" у формі матриць міжгалузевого балансу, де кожен вид продукції представлений тільки одним виробничим способом, а в межах кожного способу передбачено випуск лише одного виду продукту. Місце динамічних міжгалузевих моделей серед моделей економічної динаміки визначають за трьома факторами:

1. Вони є деталізованими (дезагрегованими) аналогами моделей відтворення валового внутрішнього продукту (ВВП) і національного доходу.

2. Моделі є узагальненням статичних (балансових і оптимізаційних) міжгалузевих моделей.

3. Моделі є теоретико-методологічною основою прикладних динамічних моделей з матрицями міжгалузевого балансу.

Запропонована В. Леонтьєвим динамічна міжгалузева модель є класичним прикладом використання систем диференціальних рівнянь у дослідженні проблем економічного зростання. Її місце в системі моделей народногосподарського рівня можна трактувати двояко:

1) як дезагрегування найпростішої моделі відтворення ВВП продукту і національного доходу;

2) як динамізацію статичної моделі міжгалузевого балансу.

Побудуємо модель згідно з першим методом.

Найпростіша модель відтворення валового внутрішнього продукту:

$$x(t) = ax(t) + b\frac{dx(t)}{dt} + c(t)\,. \tag{6.1}$$

При дезагрегуванні цієї моделі до галузевого рівня ендогенні та екзогенні змінні $x(t)$, $\frac{dx(t)}{dt}$, $c(t)$ замінюються векторами-стовпцями $X(t)$, $\frac{dX(t)}{dt}$, $C(t)$, а параметри a і b –

квадратними матрицями A і B. Отримуємо систему лінійних диференціальних рівнянь першого степеня з постійними коефіцієнтами, нерозв'язану відносно похідних і відому як динамічна модель В. Леонтьєва:

$$X(t) = AX(t) + B\frac{dX(t)}{dt} + C(t), \qquad (6.2)$$

де $X(t) = [x_j(t)]$ – вектор-стовпець обсягів виробництва;

$\frac{dX(t)}{dt} = \left[\frac{dx_j(t)}{dt}\right]$ – вектор-стовпець абсолютних приростів виробництва;

$C(t)$ – вектор-стовпець споживання (разом із невиробничим нагромадженням);

$A = (a_{ij})$ – матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат (на відміну від коефіцієнтів статичного міжгалузевого балансу коефіцієнти в динамічній моделі включають також витрати на відшкодування вибуття і капітальний ремонт основних виробничих фондів) ($i, j \in J,\ J = \{1,\ldots,n\}$);

$B=(b_{ij})$ — матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів виробництва (витрати виробничого нагромадження на одиницю приросту відповідних видів продукції) ($i, j \in J,\ J = \{1,\ldots,n\}$).

Нагадаємо, що статичну модель міжгалузевого балансу записують так:

$$X=AX+Y,$$

або

$$X = (E- A)^{-1}Y,$$

де $(E - A)^{-1}$ – матриця коефіцієнтів повних потреб у випуску продукції для одержання одиниць відповідних видів кінцевої продукції.

Відповідність між статичною і динамічною моделями міжгалузевого балансу для кожного t встановлюють за допомогою матричного рівняння:

$$Y(t) = B\frac{dX(t)}{dt} + C(t). \qquad (6.3)$$

Оскільки $\frac{dX(t)}{dt} = (E - A)^{-1} \frac{dY(t)}{dt}$, то замість (6.2) можна досліджувати систему диференціальних рівнянь:

$$Y(t) = B(E - A)^{-1} \frac{dY(t)}{dt} + C(t), \tag{6.4}$$

де $B(E - A)^{-1}$ – матриця коефіцієнтів повної приростної капіталомісткості, тобто повних витрат виробничого нагромадження на одиничні прирости елементів використовуваного національного доходу.

Припускають, що матриця A продуктивна. У подальшому аналізі зручно вважати матрицю A нерозкладною, а матрицю B — невиродженою. Тоді

$$(E-A)^{-1} > E+A,$$
$$B(E-A)^{-1} > B.$$

Далі розглянемо також випадок, коли матриці B і $B(E - A)^{-1}$ включають не все виробниче нагромадження, а тільки нагромадження основних виробничих фондів.

На перший погляд ці припущення неприпустимо штучні, оскільки дійсні матриці A, як правило, розкладні, а матриці B мають нульові рядки (зокрема, за галузями, що виробляють тільки предмети споживання). Однак після зведення системи (6.4) до рівнянь тільки для фондоутворюючих галузей обидва припущення стають цілком правомірними.

Очевидно, що економічне значення мають тільки розв'язки $X(t)>0$. Аналогічну вимогу в моделі без зовнішньої торгівлі може бути накладено на вектор $Y(t)$. Як буде описано далі, економічним передумовам моделі (6.2) відповідають тільки неспадні траєкторії $X(t)$, тобто $\frac{dX(t)}{dt} \geq 0$.

Розв'язок системи (6.4) при $\frac{dY(t)}{dt} \geq 0$ через невід'ємність матриць $(E - A)^{-1}$ та $B(E - A)^{-1}$ гарантує, що $Y(t) \geq 0$, і $\frac{dX(t)}{dt} \geq 0$. Однак останні умови можуть бути виконані і тоді, коли окремі компоненти вектора $\frac{dY(t)}{dt}$ від'ємні.

Відповідно до теорії диференціальних рівнянь розв'язок систем (6.2) і (6.4) здійснюють в три етапи:

а) визначають загальний розв'язок однорідної системи рівнянь при $C(t)$=0;

б) знаходять частковий розв'язок неоднорідної системи;

в) з початкових умов розраховують невизначені сталі загального розв'язку.

6.1.2. Динаміка замкнутої виробничої системи

Проаналізуємо систему однорідних рівнянь:

$$Y(t) = B(E - A)^{-1}\frac{dY(t)}{dt}. \qquad (6.5)$$

Економічний зміст розв'язку цієї системи полягає в тому, що він характеризує граничні технологічні можливості розвитку виробництва при заданих матрицях A і B, коли всі ресурси національного доходу спрямовуються на розширене відтворення.

Природно, виникає питання: чи існують траєкторії системи (6.5), аналогічні траєкторії зростання національного доходу з постійним технологічним темпом $\hat{\rho}$?

Дезагреговані аналоги закону зростання з постійним технологічним темпом $\hat{\rho}$ для векторів національного доходу і валового продукту мають вигляд:

$$Y(t) = Y(0)e^{\mu t}, \qquad (6.6)$$

$$X(t) = X(0)e^{\mu t}. \qquad (6.7)$$

Відповідно до (6.6) і (6.7) з постійним темпом зростають не тільки національний дохід і валовий продукт загалом (як скалярні величини), але й обсяги виробництва продукції, а також обсяги використання національного доходу за кожною з галузей. Отже, галузева структура валового продукту і національного доходу для траєкторій (6.6) та (6.7) залишається незмінною. Відповідь на поставлене питання передбачає дослідження системи (6.5) при різних матрицях A та B.

Загальний розв'язок системи (6.5) може бути поданий у вигляді:

$$Y_1(t) = \sum_{l=1}^{n} d_l K_l e^{\lambda_l t}, \qquad (6.8)$$

де λ_l — корені характеристичного рівняння n-го порядку

$$\det(E - \lambda B(E - A)^{-1}) = 0\,. \qquad (6.9)$$

(λ_l збігаються з величинами, оберненими до власних значень матриці $B(E-A)^{-1}$);

K_l — відповідні до λ_l, власні вектори матриці $B(E-A)^{-1}$, тобто нетривіальні розв'язки системи однорідних рівнянь

$$\left[E - \lambda_l B(E - A)^{-1}\right] K_l = 0\,. \qquad (6.10)$$

Деякі корені λ_l, можуть виявитися комплексними. Разом з тим, будь-якому комплексному кореню відповідає спряжений до нього. Кожна пара комплексно спряжених коренів $\lambda = \alpha \pm i\beta$ подана в (6.8) парою доданків $Ce^{\alpha t}\cos\beta t + De^{\alpha t}\sin\beta t$, де C і D — постійні вектори розмірності n, що породжують коливання з постійною частотою p та амплітудою $e^{\alpha t}$.

Величини d_l у формулі (6.8) є невизначеними сталими, що однозначно визначаються з початкової умови $Y_1(0) = Y(0)$, або згідно з (6.7):

$$\sum_{l=1}^{n} d_l K_l = Y(0). \qquad (6.11)$$

Остання рівність є системою з n лінійних рівнянь відносно $d_1, \ldots, d_l$, яка має єдиний розв'язок.

У загальному випадку немає підстав розраховувати на те, що у розв'язку системи (6.11) відмінною від нуля буде єдина компонента d_l. Отже, у типовій ситуації єдина траєкторія системи (6.5), яка виходить з початкової точки $Y(0)$, є комбінацією експонент, що зростають різними темпами. Тому розвиток точно за законом (6.6) є неможливим. Останнє твердження вказує на істотну відмінність міжгалузевої моделі від її макроекономічного прототипу.

Але певна схожість розв'язків однорідних макроекономічної та міжгалузевої моделей зберігається. Це стає очевидним з наведених нижче міркувань.

Відповідно до прийнятих припущень матриця $B(E-A)^{-1}$ додатна. Відповідно до теореми Перрона вона має додатне власне число $\hat{s}$ (корінь Фробеніуса – Перрона), що за абсолютною величиною є більшим ніж усі інші власні числа цієї матриці, а також відповідний строго додатний власний вектор $\hat{K}$. При цьому власні вектори, що відповідають відмінним від $\hat{s}$ власним значенням, з необхідністю мають компоненти різних знаків.

З теорії невід'ємних матриць відомо, що корінь Фробеніуса – Перрона знаходиться між максимальною і мінімальною сумами елементів стовпців матриці $B(E-A)^{-1}$. Позначимо через $\widetilde{B}_j = \sum_{i \in J} \beta_{ij}$ суму елементів j-го стовпця цієї матриці, тобто повну капіталомісткість продукції j-ї галузі.

Тоді

$$\min_j \widetilde{B}_j \le \hat{s} \le \max_j \widetilde{B}_j .$$

Разом з тим, параметр $\hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{s}}$, що належить розв'язку (6.8) як показник експоненти, знаходиться в проміжку

$$\min_j \frac{1}{\widetilde{B}_j} \le \hat{\lambda} \le \max_j \frac{1}{\widetilde{B}_j} . \tag{6.12}$$

Таким чином, показник експоненти є оберненою величиною до деякої середньої з повних галузевих капіталомісткостей. У випадку ж їхньої рівності ($\hat{B}_j = B_0,\ j = 1,\dots,n$) $\hat{\lambda}$ збігається з $\hat{\rho} = \frac{1}{B_0}$, що стає підставою називати величину $\hat{\lambda}$ технологічним темпом приросту в міжгалузевій динамічній моделі (6.2).

Траєкторія $Y_1(t)$, пов'язана з початковими умовами рівностями (6.11), є сумою експонент. Очевидно, що при $t \to \infty$ в ній починає переважати доданок з максимальною (серед номерів l з $d_l \neq 0$) дійсною частиною λ_l. Можливі дві взаємовиключні ситуації:

1) домінуючою є експонента $e^{\hat{\lambda}t}$;

2) домінує інший доданок з темпом λ_l, який відмінний від $\hat{\lambda}$.

У першому випадку темпи приросту продукції кожної галузі при $t \to \infty$ прямують до технологічного темпу зростання $\hat{\lambda}$, а гранична галузева структура національного доходу визначається пропорціями між компонентами власного вектора $\hat{K}$.

У другому випадку динаміка $Y_1(t)$ усе більше визначається власним вектором K_l, що відповідає власному значенню $\frac{1}{\lambda_l} \neq \hat{s}$ з матриці $B(E-A)^{-1}$. Такий власний вектор, як було зазначено вище, обов'язково має компоненти різних знаків. Тому при досить великих t у розв'язку $Y_1(t)$ неодмінно з'являються від'ємні компоненти і тим самим втрачається економічний зміст розв'язку. Ще раніше спадні компоненти з'являються у траєкторії

$$X_1(t) = \sum_{l=1}^{n} d_l (E-A)^{-1} K_l e^{\lambda_l t}, \tag{6.13}$$

що також суперечить припущенням моделі. Така ситуація є дуже ймовірною. Наприклад, матриця $B(E-A)^{-1}$ може мати додатне власне число $s_l < \hat{s}$. Тоді в сумі (6.8) з'явиться доданок виду $d_l K_l e^{\lambda_l t}$, де $\lambda_l = \frac{1}{s_l} > \hat{\lambda}$, а вектор K_l має компоненти різних знаків. Завдяки рівності $s_l K_l = B(E-A)^{-1} K_l$ вектор $(E-A)^{-1} K_l$, що входить у суму (6.13) при $e^{\lambda_l t}$, також має знакозмінні компоненти, внаслідок чого стають від'ємними деякі компоненти $\frac{dX_1}{dt}$.

Отже, розв'язок (6.8), у якому домінує доданок з темпом, відмінним від $\hat{\lambda}$, економічно неприйнятний.

Зазначені особливості розв'язків однорідного рівняння (6.5) є принциповими відмінними рисами міжгалузевої моделі (6.2), порівняно з її макроекономічним аналогом, де розв'язок втрачає допустимість тільки в результаті надмірних вимог до зростання споживання.

6.1.3. Економічне зростання при різних траєкторіях споживання

Проаналізуємо траєкторії економічного розвитку, що враховують динаміку споживання. Подамо загальний розв'язок системи (6.4) у вигляді суми загального розв'язку однорідної системи $Y_1(t)$ і часткового розв'язку неоднорідної системи $Y_2(t)$:

$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t). \qquad (6.14)$$

Траєкторію споживання розглядатимемо у вигляді $C(t) = C(0)e^{rt}$, тобто вважатимемо, що компоненти вектора споживання зростають з однаковим постійним темпом $r \geq 0$, причому $C(0) \geq 0$. При $r = 0$ маємо $C(t) = C(0) = const$.

Частковий розв'язок $Y_2(t)$ визначають так:

$$Y_2(t) = \left[E - rB(E - A)^{-1}\right]^{-1} C(0)e^{rt}, \qquad (6.15)$$

а невизначені сталі q_l загального розв'язку знаходяться з розв'язку системи рівнянь:

$$\sum_{l=1}^{n} q_l K_l = Y(0) - \left[E - rB(E - A)^{-1}\right]^{-1} C(0). \qquad (6.16)$$

Отже, загальний розв'язок (6.14) набуває вигляду:

$$Y(t) = \sum_{l=1}^{n} q_l K_l e^{\lambda_l t} + \left[E - rB(E - A)^{-1}\right]^{-1} C(0)e^{rt}. \qquad (6.17)$$

При відомих (однозначно визначених) значеннях K_l, λ_l часткові розв'язки знаходять шляхом вказування темпу приросту споживання r і розрахунку, відповідних заданому r, значень q_l.

Аналіз максимально допустимого значення r можна проводити так, як і аналіз макромоделі у випадку, коли темп приросту споживання дорівнює технологічному темпу приросту національного доходу.

Покажемо, що r не повинно перевищувати технологічного темпу приросту. Дійсно, з $r > \hat{\lambda}$ випливає:

а) доданок $Y_2(t)$ у (6.17) зростає за абсолютною величиною швидше, ніж доданок, що містить $e^{\hat{\lambda}t}$;

б) матриця $rB(E-A)^{-1}$ непродуктивна і через це вектор $Y_2(t)$ не може бути невід'ємним.

Оскільки деякі компоненти $Y_2(t)$ від'ємні, то починаючи з деякого t у векторі $Y(t)$ з'являються від'ємні компоненти, що економічно неприпустимо. Робимо висновок: необхідною умовою існування траєкторії зростання національного доходу, що має економічну інтерпретацію, є $r < \hat{\lambda}$.

Невід'ємність $Y_2(t)$ згідно з (6.5) еквівалентна нерівності $\left[E - rB(E-A)^{-1}\right]^{-1} C(0) \geq 0$. Це означало б, що рівняння

$$Y - rB(E-A)^{-1} Y = C(0)$$

при $C(0) \geq 0$ має невід'ємний розв'язок $Y = \hat{Y}$. У цьому випадку, згідно з визначенням продуктивності, матриця $rB(E-A)^{-1}$, будучи нерозкладною, виявилася б продуктивною. Тим часом відомо, що умовою продуктивності $rB(E-A)^{-1}$ є нерівність $r < \hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{s}}$.

Можуть бути проаналізовані якісно різні ситуації в рамках виконання умови $0 < r\hat{\lambda} < 1$. Тут проявляються схожі властивості результатів макроекономічної і міжгалузевої моделей. Однак повної еквівалентності результатів не існує. Відмінності поведінки розв'язку (6.17) при різних r від поведінки розв'язку макромоделі можна пояснити впливом міжгалузевих зв'язків, галузевої структури початкових умов (векторів $Y(0)$ і C_0).

Однією з найбільш характерних властивостей макромоделі відтворення національного доходу є існування траєкторії з незмінною функціональною структурою (співвідношенням споживання і нагромадження) і постійним темпом приросту $r_0 = \frac{1-c_0}{By(0)}$, де c_0 — задане число, $c_0 < y(0)$.

Для міжгалузевої моделі при заданих векторах $y(0) \geq 0$ і $C_0 \leq Y(0)$ можна поставити питання про існування траєкторії пропорційного зростання (при незмінній галузевій і функціональній структурі) з темпом $r_0 > 0$. Шуканий темп r_0 повинен задовольняти систему з n рівнянь:

$$r_0 B(E - A)^{-1} Y(0) = Y(0) - C_0.$$

У загальному випадку така система не має розв'язку.

Питання про пропорційне зростання з постійним темпом можна вирішувати з іншої точки зору.

У макромоделі знайдемо c_0, що задовольняє умову $0 < c_0 < y(0)$, зафіксувавши $0 < r_0 < \frac{1}{B}$. Аналогічна задача формально реалізовується і для міжгалузевої моделі. Розрахунок C_0 при заданих $Y(0)$ і $r_0 < \lambda$ здійснюють за формулою

$$C_0 = E - r_0 B(E - A)^{-1} Y(0).$$

Може виявитися, однак, що отримана структура вектора C_0 неприйнятна з точки зору соціально-економічних критеріїв.

6.1.4. Міжгалузева динамічна модель і аналіз пропорцій розширеного відтворення

Зв'язок результатів міжгалузевої динамічної моделі і макромоделі розширеного відтворення може бути посилений за допомогою класифікації та агрегування галузей за функціональним призначенням продукції, що ними виготовляється. Замість „знеособлених" галузей, представлених тільки порядковими номерами, варто виділяти галузі, що виконують особливі функції в процесі відтворення.

Поділимо все виробництво на три галузі: виробництво знарядь праці (галузь 1), виробництво предметів праці (галузь 2), виробництво предметів споживання (галузь 3). В результаті отримуємо тригалузеву систему, яку можна досліджувати за допомогою міжгалузевої динамічної моделі.

У зазначеній тригалузевій системі лише галузь 1 здійснює капітальні вкладення, галузь 2 забезпечує тільки проміжне споживання, а ввесь фонд споживання забезпечує галузь 3.

Запишемо систему рівнянь, зважаючи на функціональне призначення продукції трьох галузей:

$$\begin{cases} x_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + a_{13}x_3(t) + b_{11}\dfrac{dx_1}{dt} + b_{12}\dfrac{dx_2}{dt} + b_{13}\dfrac{dx_3}{dt}; \\ x_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + a_{23}x_3(t); \\ x_3(t) = c(t). \end{cases}$$

Підставивши $x_2(t)$ і $x_3(t)$ у перше рівняння, отримаємо диференціальне рівняння такого вигляду:

$$x_1(t) = \tilde{a}x_1(t) + \tilde{b}\frac{dx_1}{dt} + \tilde{g}_1 c(t) + g_2\frac{dc}{dt},$$

де

$$\tilde{a} = a_{11} + \frac{a_{12}a_{21}}{1 - a_{22}},$$

$$\tilde{b} = b_{11} + \frac{b_{12}a_{21}}{1 - a_{22}},$$

$$\tilde{g}_1 = a_{13} + \frac{a_{12}a_{23}}{1 - a_{22}},$$

$$\tilde{g}_2 = b_{13} + b_{12}\frac{a_{23}}{1 - a_{22}}.$$

Завдяки продуктивності матриці A величина $\tilde{a} < 1$. Технологічний темп приросту, який досягається при $c(t) = 0$, дорівнює

$$\hat{\lambda} = \frac{1 - \tilde{a}}{\tilde{b}}.$$

При $c(t) = c_0 e^{rt}$ траєкторія $x_1(t)$ має вигляд:

$$x_1(t) = \left[x_1(0) - \frac{(\tilde{g}_1 + r\tilde{g}_2)c_0}{1 - \tilde{a} - r\tilde{b}} \right] e^{\hat{\lambda}t} + \frac{(\tilde{g}_1 + r\tilde{g}_2)c_0}{1 - \tilde{a} - r\tilde{b}} e^{rt}.$$

Зокрема, при сталому рівні споживання (r=0) отримуємо:

$$x_1(t) = \left[x_1(0) - \frac{\tilde{g}_1 c_0}{1-\tilde{a}} \right] e^{\hat{\lambda} t} + \frac{\tilde{g}_1 c_0}{1-\tilde{a}},$$

тобто темп приросту виробництва знарядь праці дуже швидко прямує до величини $\hat{\lambda}$.

Пропорційне зростання всіх галузей виробництва $x_1(t) = x_i(0)e^{r_0 t}$ ($i = 1,2,3$) існує при $r_0 = \dfrac{(1-\tilde{a})x_1(0) - \tilde{g}_1 c_0}{\tilde{b} x_1(0) + \tilde{g}_2 c_0}$ і при цьому $0 \le r_0 < \hat{\lambda}$.

При $0 < r < r_0$ темпи приросту виробництва галузей 1 і 2 збільшуються в границі до $\hat{\lambda}$. Виробництво у 1 та 2 галузях зростає випереджуючими темпами, і їхня частка у валовому продукті неперервно збільшується. Відповідно зростає частка виробничого нагромадження і знижується частка споживання (як і в макромоделях).

При $r > r_0$ темпи приросту виробництва галузей 1 і 2 необмежено зменшуються; відповідні траєкторії виходять за межі допустимої області. Водночас збільшується частка третьої галузі у валовому продукті та фонді споживання – у використовуваному національному доході.

Залежності темпів приросту виробництва знарядь праці і предметів праці від темпу споживання r зображено на рис. 47.

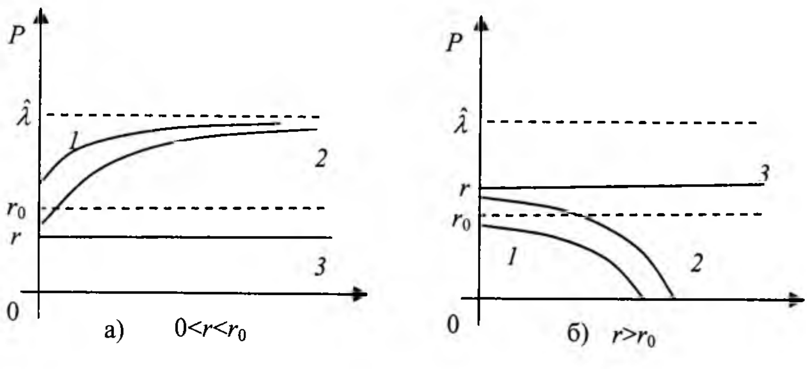

Рис. 47. Залежність динаміки темпів приросту виробництва галузей від темпу приросту споживання:
1 - виробництво знарядь праці; *2* - виробництво предметів праці;
3 - виробництво предметів споживання.

Зміни галузевої структури валового внутрішнього продукту при зміні темпу споживання показано на рис. 48.

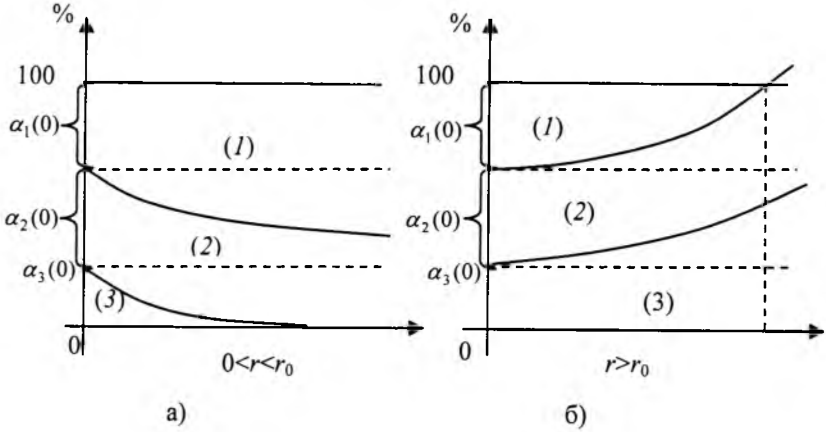

Рис. 48. Залежність динаміки галузевої структури валового внутрішнього продукту від темпу приросту споживання:
α_1 - частка виробництва знарядь праці; α_2 - частка виробництва предметів праці; α_3 - частка виробництва предметів споживання.

При $0 < r < r_0$ (рис. 48 а) частка виробництва знарядь праці зростає, а частка предметів споживання зменшується. При $r > r_0$ (рис. 48 б) структурні зміни протилежні. Частка виробництва предметів праці відносно стійка щодо темпу споживання. Це пояснюється тим, що виробництво предметів праці однаково необхідне при будь-якому співвідношенні між виробництвом знарядь праці і предметів споживання, а також між нагромадженням основних виробничих фондів і використанням продукції на невиробничі потреби.

6.1.5. Узагальнення найпростішої динамічної міжгалузевої моделі

У динамічній моделі В. Леонтьєва зроблено низку припущень, що спрощують, полегшують розв'язок системи диференціальних рівнянь і відповідний теоретичний аналіз. Однак ці припущення звужують можливості коректного перенесення результатів аналізу моделі на економічну дійсність. Поряд з критичною оцінкою припущень розглянутої моделі важливо описати шляхи її удосконалення.

1. Включення умов „необоротності” капітальних вкладень і перехід до системи нерівностей.

В умовах (6.2) вектор виробничого нагромадження (чистих капітальних вкладень) пов’язаний з приростами виробництва співвідношенням

$$U(t) = B\frac{dX}{dt}.$$

Таке співвідношення передбачає тільки невід’ємні похідні $\frac{dx_j(t)}{dt}$. Якщо $\frac{dx_j(t)}{dt} < 0$, то $u_{ij} = b_{ij}\frac{dx_j(t)}{dt} < 0$. Формально це означає повернення ресурсів у баланси продукції за повними нормами капіталомісткості (повне деінвестування), що не відповідає дійсності.

Тому розв’язки систем (6.2) і (6.4) можна використовувати тільки тоді, коли вони задовольняють додаткову умову:

$$\frac{dX}{dt} \geq 0. \tag{6.18}$$

Така умова виконується далеко не для будь-якої траєкторії (6.2), зокрема, вона порушується:

а) при домінуванні у розв’язку однорідної системи складової, що зростає з темпом, що відрізняється від технологічного;

б) при зростанні споживання з темпом $r > r_0$;

в) на початковому відрізку інших траєкторій.

Строго кажучи, додаткова умова (6.18) не є необхідною. Адже важливо не заборонити від’ємні прирости, а виключити феномен „оборотності” капітальних вкладень. Тому більш обґрунтованим є безпосереднє включення в модель умов „необоротності” капіталовкладень:

$$u_{ij} = b_{ij}\left[\frac{dx_j(t)}{dt}\right]_+, \tag{6.19}$$

де

$$\left[\frac{dx_j(t)}{dt}\right]_+ = \begin{cases} \dfrac{dx_j(t)}{dt}, \ \textit{якщо} \ \dfrac{dx_j(t)}{dt} \ge 0; \\ 0, \ \textit{якщо} \ \dfrac{dx_j(t)}{dt} < 0. \end{cases}$$

Відзначимо, що припущення абсолютної необоротності капіталовкладень є надто жорстким. Матеріальні елементи основних виробничих фондів, що вивільняються, можуть частково перерозподілятися. Це можна врахувати наступним чином.

Якщо $\dfrac{dx_j(t)}{dt} < 0$, то в баланс продукції надходить $\bar{u}_{ij} = \bar{b}_{ij}\dfrac{dx_j(t)}{dt}$, де $0 \le \bar{b}_{ij} < b_{ij}$. Однак теоретичне дослідження моделі з такими умовами помітно ускладнюється.

Із урахуванням умови (6.19) динамічна міжгалузева модель набуває вигляду:

$$X(t) = AX(t) + B\left[\frac{dX}{dt}\right]_+ + C(t). \qquad (6.20)$$

Однак система рівнянь (6.20) може не мати допустимих траєкторій, що проходять через задану початкову точку $X(0) \ge 0$. Така ситуація виникає, якщо, наприклад, $C(t) = 0$, а вектор $X(0)$ не належить „конусу допустимості". „Конус допустимості" визначається умовою $B^{-1}(E - A)X \ge 0$, без виконання якої рівність $\left[\dfrac{dX}{dt}\right]_+ = B^{-1}(E - A)X$ є неможливою. У зв'язку з цим доцільно замінити систему рівнянь (6.20) системою нерівностей:

$$X(t) \ge AX(t) + B\left[\frac{dX}{dt}\right]_+ + C(t). \qquad (6.21)$$

Завдяки цьому вдається уникнути багатьох проблем, що виникали при попередньому аналізі.

Так, модель замкнутої виробничої системи

$$X(t) \ge AX(t) + B\left[\frac{dX}{dt}\right]_+ \qquad (6.22)$$

на відміну від рівняння (6.8) має розв'язок при будь-якому початковому значенні $X(0) \geq 0$:

$$X(t) = X(0)e^{\lambda t}.$$

Підставивши його в (6.22), отримують нерівність:

$$X(0) - AX(0) \geq \lambda BX(0),$$

що виконується при всіх λ з проміжку $[0,\ \lambda(X(0))\ ]$, де

$$\lambda(X(0))) = \min_{i \in J} \frac{x_i(0) - \sum\limits_{j \in J} a_{ij} x_j(0)}{\sum\limits_{j \in J} b_{ij} x_j(0)}. \qquad (6.23)$$

Справджується нерівність $\lambda(X(0)) \leq \hat{\lambda}$, яка перетворюється на рівність, якщо вектор $(E\text{-}A)X(0)$ пропорційний власному вектору $\hat{K}$, який відповідає $\hat{\lambda}$.

Отже, у моделі замкнутої виробничої системи (6.22) максимально можливий постійний темп приросту виробництва всіх галузей λ існує при будь-якому початковому стані $X(0) \geq 0$.

Модель (6.21), що включає траєкторію споживання $C(t) = C_0 e^{rt}$, при не дуже великому початковому векторі споживання C_0 має розв'язок $X(t) = X(0)e^{rt}$, який зростає з таким самим темпом, що й C(t). Справді, підставивши $X(t) = X(0)e^{rt}$ і $C(t) = C_0 e^{rt}$ у (6.21), отримуємо

$$X(0) \geq AX(0) + rBX(0) + C_0.$$

І якщо, наприклад, задане значення C_0 задовольняє нерівність $(E - A)X(0) > C_0$, то максимально можливий темп приросту r_0 дорівнює:

$$r_0 = \min_{i \in J} \frac{x_i(0) - \sum\limits_{j \in J} a_{ij} x_j(0) - c_{0i}}{\sum\limits_{j \in J} b_{ij} x_j(0)}.$$

При цьому окремі компоненти фактичного споживання $\widetilde{C}(t)$ можуть перевищувати заданий закон зростання: $\widetilde{C}(t)=(C_0+\Delta C_0)e^{rt}$, де вектор $\Delta C_0 \geq 0$, а окремі його компоненти Δc_{0i} дорівнюють:

$$\Delta c_{0i} = x_{i0} - \sum_{j\in J} a_{ij} x_j(0) .$$

Для моделі (6.21) при слабких обмеженнях на C_0 можна довести існування траєкторії, на якій обсяги виробництва всіх галузей і фактичне споживання зростають з постійним темпом приросту r_0.

2. Урахування резервів виробничих потужностей.

У моделі В. Леонтьєва припускають, що приріст виробництва може бути здійснений тільки за рахунок виробничого нагромадження: з $u_{ij}(t)=0$ випливає $\frac{dx_j(t)}{dt}=0$. Насправді розширення виробництва може відбуватися і в результаті більш повного використання наявних виробничих потужностей (основних виробничих фондів).

Позначивши через $M_j(t)$ максимально можливий обсяг виробництва продукції j-ї галузі на діючих основних фондах у році t, можемо ввести умови:

$$x_j(t) \leq M_j(t) .$$

І тому, якщо $x_j(t) < M_j(t)$, стає припустимим $u_{ij}(t)=0$ при $\frac{dx_j(t)}{dt} > 0$.

Отже, введення додаткових умов $x_j(t) \leq M_j(t),\ \ j \in J$ могло б уточнити розв'язок системи (6.2).

3. Побудова міжгалузевих моделей з інвестиційними лагами.

У моделі В. Леонтьєва, так само як і в найпростішій макромоделі відтворення, передбачено миттєвість перетворення виробничого нагромадження (капітальних вкладень) у прирости виробництва. Надмірна спрощеність цієї умови була відзначена неодноразово.

Природне вдосконалення моделі — включення інвестиційних лагів (зосереджених і розподілених). Так, якщо визначати інвестиційний лаг у кожній j-й галузі як зосереджений і рівний $\bar{\tau}_j$, то система рівнянь виробництва і розподілу продукції (національного доходу) набуває вигляду:

$$x_i(t) = \sum_{j \in J} a_{ij} x_j(t) + \sum_{j \in J} b_{ij} \frac{dx_j}{dt}(t + \bar{\tau}_j) + c_i(t), \quad i \in J. \qquad (6.24)$$

Інвестиційні лаги можуть диференціюватися не тільки за галузями – „споживачами" капітальних вкладень, але й за матеріально-речовими елементами капітальних вкладень (продукція машинобудування, будівництва і т. ін.). Позначивши через τ_{ij} лаг капіталовкладень, що надходять з i-ї галузі і забезпечують приріст виробництва в j-й галузі, одержуємо таку систему рівнянь:

$$x_i(t) = \sum_{j \in J} a_{ij} x_j(t) + \sum_{j \in J} b_{ij} \frac{dx_j}{dt}(t + \tau_{ij}) + c_i(t), \quad i \in J. \qquad (6.25)$$

У динамічну міжгалузеву модель можуть бути включені також і розподілені лаги, при цьому змінюється зміст матриці B.

Методи розв'язування систем диференціальних рівнянь з лагами (запізнілими аргументами) розроблено досить добре, однак якісний аналіз розв'язків істотно ускладнюється.

4. Врахування динаміки коефіцієнтів матеріаломісткості і капіталомісткості виробництва.

Одним з найбільш сильних припущень аналізованої моделі є незмінність у часі матриць матеріальних і капітальних витрат A і B. Завдяки нього вдається зробити низку висновків про властивості траєкторій (зокрема, довести існування технологічного темпу приросту і відповідної траєкторії пропорційного зростання). Але при цьому поза моделлю залишається найважливіший фактор економічної динаміки – науково-технічний прогрес.

Включення в модель матриць $A(t)$ і $B(t)$, що залежать від часу, підвищує її прикладне значення. Теоретичний аналіз узагальненої моделі залишається доступним при досить простих законах зміни $A(t)$ і $B(t)$, наприклад, при рівномірній зміні всіх коефіцієнтів матриці або коефіцієнтів окремих рядків матриці.

6.1.6. Оптимізаційні моделі з матрицями міжгалузевого балансу

Попередньо ми описували можливості переходу від макроекономічної моделі з екзогенною траєкторією споживання до оптимізаційних моделей, у яких максимізується сумарне споживання (або дисконтоване сумарне споживання) за плановий період. Спробуємо застосувати ці підходи для аналізу міжгалузевої динаміки.

Нехай максимізується сумарний фонд споживання за плановий період

$$\int_0^T GC(t)dt,$$

де порівняння різних споживчих благ здійснюється за допомогою вектора постійних коефіцієнтів $G=(g_i)>0$. Максимізація цієї функції здійснюється за умов:

$$\begin{cases} X(t)=AX(t)+B\dfrac{dX(t)}{dt}+C(t); \\ \dfrac{dX(t)}{dt}\geq 0; \\ X(0)=X_0. \end{cases} \tag{6.26}$$

Включення умови $\dfrac{dX(t)}{dt}\geq 0$ гарантує „необоротність” капіталовкладень, але, разом з тим, істотно звужує область вибору.

Із (6.26) виведемо співвідношення для $Y(t)$, $\dfrac{dY(t)}{dt}$, $U(t)$:

$$U(t)=B(E-A)^{-1}\frac{dY(t)}{dt};$$

$$\frac{dY(t)}{dt}=(E-A)B^{-1}U(t);$$

$$\frac{dX(t)}{dt}=(E-A)^{-1}\frac{dY(t)}{dt}=B^{-1}U(t).$$

Зауважимо, що коли $\dfrac{dX(t)}{dt} = B^{-1}U(t) \geq 0$, то і $U(t) \geq 0$.

Сформулюємо задачу оптимального управління:

$$\begin{cases} \int_0^T G[Y(t) - U(t)]dt \to \max; \\ \dfrac{dY(t)}{dt} = (E - A)B^{-1}U(t); \\ U(t) \leq Y(t); \\ B^{-1}U(t) \geq 0; \\ Y(0) = Y_0. \end{cases} \qquad (6.27)$$

Оптимізаційна модель дає змогу знаходити такі траєкторії, які дають більшу (не меншу) величину сумарного споживання $\int_0^T GC(t)dt$, порівняно з будь-якою екзогенною траєкторією споживання (зокрема, такою, що зростає постійними темпами), і котра задовольняє умови (6.26).

При аналізі макроекономічної задачі оптимального управління було встановлено, що максимізації сумарного споживання досягають шляхом зосередження всіх ресурсів національного доходу в різні моменти часу або цілком на споживанні, або на виробничому нагромадженні при миттєвій (релейній) зміні режиму відтворення.

Досліджуючи задачі (6.27) з використанням принципу максимуму Понтрягіна, виявляють властивості, аналогічні властивостям макроекономічної задачі оптимізації національного доходу із незмінною нормою нагромадження.

Існує величина $T_0 > 0$ така, що:

а) коли $T \leq T_0$, то виробництво не збільшується й увесь національний дохід споживається:

$$y_i^*(t) = c_i^*(t) = y_i(0), \quad u_i^*(t) = 0, \quad i \in J;$$

б) коли $T > T_0$, то аналогічна ситуація має місце наприкінці планового періоду на відрізку $[T - T_0, T_0]$, де ввесь національний дохід також цілком витрачається на споживання.

Виробниче нагромадження здійснюється на відрізку $[0, T-T_0]$, однак не можна гарантувати, що $u_i^*(t) > 0$ для всіх галузей.

Особливість оптимальної траєкторії міжгалузевої моделі полягає також у тому, що в кожен момент часу продукція певної галузі не обов'язково має бути витрачена або тільки на споживання, або тільки на нагромадження. Різні галузі „поводять" себе порізному. Для будь-якого $t \in [0, T_0]$ виділяють дві підмножини (можливо такі, що перетинаються) галузей $J_1(t)$, $J_2(t) \subseteq J$. При $i \subseteq J_1(t)$ всю продукцію, що виходить зі сфери виробництва, спрямовують на нагромадження:

$$u_i^*(t) = y_i^*(t).$$

При $i \subseteq J_1(t)$ обсяги виробництва не зростають:

$$\frac{dx_i^*(t)}{dt} = 0 .$$

Зокрема, при $t > T - T_0$ маємо $J_2(t) = J$.

Отже, поведінка оптимального розв'язку істотно залежить від тривалості планового періоду. При досить великій величині T оптимальна траєкторія обов'язково містить скачкоподібні зміни споживання і нагромадження, принаймні для продукції деяких галузей. Моменти цих структурних перебудов визначаються більш складними залежностями, ніж у макроекономічній моделі.

Для пом'якшення різких змін (згладжування) оптимальної траєкторії задачі (6.27) можна використовувати ряд методів:

а) поділ споживання на екзогенно та ендогенно зумовлені частини й умови неперервного зростання споживання (зокрема, максимізація темпу r);

б) задання нижніх і верхніх меж норми виробничого нагромадження.

Однак в оптимізаційних міжгалузевих моделях число різких змін траєкторії є у багато разів більшим, ніж у макроекономічних моделях, і тому здебільшого зазначених методів буде недостатньо. Для згладжування оптимальних траєкторій можуть знадобитися більш диференційовані і гнучкі регулятори.

Наприклад, можна пов'язати між собою вектори $C(t)$ і $U(t)$ таким чином, щоб уникнути зміни структури кінцевої продукції. У найпростішому випадку $c_i(t) = h_i y_i(t)$, де $0 \le h_i \le 1$ – незмінні норми споживання продукції галузей. Тоді $u_i(t) = (1 - h_i) y_i(t)$. Коефіцієнти h_i можна розглядати і як змінні величини. Зокрема, прийнявши $h_i(t) = h_i(0)\pi(t)$, де $\pi(t) > 0$, будемо контролювати не тільки структуру використання продукції кожної галузі, але й загальне співвідношення між споживанням і нагромадженням. Якщо встановлюється $\pi(t) > 1$, то це означає збільшення норми споживання, порівняно з початковим моментом часу, якщо ж вважати $\pi(t) < 1$, то збільшується частка нагромадження.

У більш загальному вигляді

$$C(t) = H(t)Y(t),$$

де $H(t) = \lfloor h_{ij}(t) \rfloor$ – змінна в часі матриця взаємозв'язку споживання і використовуваного національного доходу; елементи матриці $H(t)$ беруть з деякого фіксованого класу гладких функцій, в межах якого і здійснюють оптимізацію.

Очевидно, що приєднання такого виду умов до задачі (6.27) неминуче зменшує значення цільової функції споживання. Однак забезпечується гладкість динаміки споживання, нагромадження і виробництва. Паралельно зменшується сильна залежність оптимальних розв'язків від тривалості планового періоду і знижується гострота проблеми „хвоста" планового періоду (зменшення деформації структури виробництва і розподілу продукції наприкінці періоду).

6.2. Моделі зростаючої економіки

6.2.1. Основні поняття в моделюванні зростаючої економіки

У теоретичних динамічних моделях зростаючої економіки використовують низку формалізованих понять. Розглянемо насамперед такі: технологія, або технологічний процес, технологічна множина, ефективна технологія й ефективна технологічна множина, ефективна траєкторія, технологічний і економічний темпи зростання, магістраль.

Нехай $X(t)$ – n-вимірний вектор затрат у момент t, $Y(t+1)$ – n- вимірний вектор випуску продукції в момент $t+1$. Час у моделі враховують дискретно $t=0,1,...,T(T\leq\infty)$ і відрізок часу між сусідніми моментами $[t,t+1]$ називають елементарним відрізком часу.

Серед різних пар векторів (X,Y) розглядають технологічно допустимі пари, які називають технологіями, або технологічними процесами.

Технологічна допустимість пари (X,Y) означає можливість, використовуючи технологію періоду t, отримати в момент $t+1$ із затрачених у момент t інгредієнтів вектора X вектор продукції Y. Сукупність усіх можливих допустимих технологій (X,Y) у момент часу t утворює технологічну множину Z_t.

Звичайні припущення про властивості технологічних множин гарантують, що множина Z_t є замкнутим опуклим конусом у просторі R_+^{2n}. Для обґрунтування різних результатів математичної теорії економічної динаміки використовують також додаткові припущення про структуру технологічної множини, серед яких відзначимо такі три:

1. Неможливість виробництва за відсутності витрат: якщо $(X,Y)\in Z$ і X=0, то Y=0.

2. Перетворюваність: для кожного X>0 існує принаймні один вектор Y, такий, що $(X,Y)\in Z$. Інакше кажучи, передбачається, що будь-який набір X у разі використання деякої технології може бути перетворений у деякий інший набір.

Ця умова буде виконана, зокрема, коли технологічна множина Z задовольняє таку умову: якщо $(X,Y)\in Z$ і $X_1\geq X$, $Y_1\geq Y$, то $(X_1,Y_1)\in Z$.

3. Продуктивність: існує технологічний процес $(\hat{X},\hat{Y})\in Z$, такий, що $\hat{Y}$>0. Ця вимога означає принципову можливість виробити всі продукти.

Проблему опису технологічних процесів різної тривалості в межах розглянутої схеми, що оперує з елементарним відрізком часу для опису переходу системи з одного стану в інший, розв'язують на основі розширеного тлумачення поняття „продукт”. До кількості продукції включається також кількість незавершеної продукції на різних етапах виробничого процесу.

Введемо поняття ефективності для технологічної множини та її елементів.

Нехай (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) — два допустимих технологічних процеси і $(X_1, Y_1) \neq (X_2, Y_2)$. Процес (X_1, Y_1) вважають більш ефективним, ніж процес (X_2, Y_2), якщо виконується співвідношення $-X_1 \geq -X_2$, $Y_1 \geq Y_2$. Процес $(X^*, Y^*) \in Z$ є ефективним (оптимальним за Парето), якщо не існує іншого допустимого технологічного процесу, більш ефективного, ніж (X^*, Y^*). Доводять таку теорему про властивості ефективних технологічних процесів.

Теорема 1.

I. Нехай p, q — додатні вектори цін, які служать для оцінки відповідно витрат і результатів у всіх допустимих технологічних процесах. Якщо технологічний процес $(\hat{X}, \hat{Y})$ максимізує прибуток $\pi = qY - pX$ у цих цінах серед усіх допустимих технологічних процесів, то $(\hat{X}, \hat{Y})$ є ефективним.

II. Якщо $(\hat{X}, \hat{Y})$ — ефективний технологічний процес, то існують невід'ємні вектори p і q, не рівні нулю одночасно, такі, що прибуток $\pi = qY - pX$ у цих цінах досягає максимуму на технологічному процесі $(\hat{X}, \hat{Y})$.

Технологічно можлива траєкторія є послідовністю:

$$\{(X_t, Y_{t+1}) \in Z_t,\ t = 0, 1, \ldots, T-1\}.$$

Така траєкторія допустима, якщо вектор X_0 збігається із заданим початковим станом $\overline{X}_0$. Допустимі траєкторії різняться, зокрема, способами „зв'язування” у них різних технологічних процесів (X_t, Y_{t+1}). Розглянемо два типи таких траєкторій.

Для першого типу траєкторій характерним є те, що $Y_{t+1} = X_{t+1}$, тобто продукти відтворюються в замкнутій виробничій системі без будь-яких „входів” і „виходів”. Тоді технологічно допустима траєкторія є послідовністю:

$$\{X_t\},\ t = 0,1,\ldots,T,$$
$$(X_t, X_{t+1}) \in Z_t.$$

Траєкторію $\{X^*_t\}$, $t=0,1,\ldots,T$, $T<\infty$ називають ефективною (у кінцевому стані), якщо для всякої допустимої траєкторії $\{X_t\}$, $t=0,1,\ldots,T$ зі співвідношення $X_T \geq X^*_T$ випливає, що $X_T = X^*_T$.

Далі будемо припускати, що $Z_t = Z$ при $t = 0,\ldots,T$, тобто технологічна множина не змінюється в часі.

Це вкрай сильне припущення, що ігнорує науково-технічний прогрес. Однак ряд результатів математичної теорії економічної динаміки залишаються правильними і при відмові від спрощуючої гіпотези, але за відповідної модифікації формулювань.

Для траєкторій першого типу встановлюють аналог теореми 1, яка характеризує ефективні технологічні процеси.

Теорема 2.

І. Якщо $\{\hat{X}_t\}$, $t = 0,1,\ldots,T$, $T < \infty$ – ефективна траєкторія, то існує вектор цін $p \geq 0$, такий, що $p\hat{X}_T \geq pX_T$ для всіх допустимих траєкторій $\{X_t\}$, $t = 0,1,\ldots,T$, що починаються в точці $\overline{X}_0$.

ІІ. Нехай задано довільний вектор $p>0$. Тоді існує ефективна траєкторія $\{\hat{X}_t\}$, $t = 0,1,\ldots,T$, $T < \infty$, що максимізує величину pX_T серед усіх допустимих траєкторій, які починаються в точці $\overline{X}_0$.

Цей тип траєкторії використовують тоді, коли досліджують граничні можливості зростання. Невиробниче використання в цьому випадку можна враховувати у векторах X_t як додаткові нормативні затрати.

Другий вид траєкторій враховує споживання в явному вигляді. Виготовлену продукцію розподіляють на дві частини – виробниче і невиробниче споживання: $Y_t = X_t + C_t$. Для такого виду траєкторій поняття ефективності трансформується. Виділення ефективних траєкторій серед допустимих здійснюється тільки шляхом порівняння векторів споживання.

Траєкторію $\{X_t^*, X_{t+1}^* + C_{t+1}^*\} \in Z_t, t = 0,...,T-1$ називають ефективною, якщо для будь-якої траєкторії $\{X_t, X_{t+1} + C_{t+1}\} \in Z_t, t = 0,...,T-1$ із співвідношень $C_t \geq C_t^*$ випливає, що $C_t = C_t^*$, $t = 1,...,T$.

Для траєкторій другого типу доводять теорему про ефективність, що є аналогічною до попередньої теореми.

Теорема 3.

І. Якщо $\left\{\hat{X}_t, \hat{X}_{t+1} + \hat{C}_{t+1}\right\}$ $t = 0,1,\ldots,T-1$, $T < \infty$ — ефективна траєкторія, то існує траєкторія цін $\{P_t\}, P_t \geq 0$, $t = 1,\ldots,T$, така, що величина прибутку $\sum_{t=1}^{T-1} \pi_t = \sum_{t=1}^{T-1} (P_{t+1}Y_{t+1} - P_t X_t) = \sum_{t=1}^{T} P_t C_t$ досягає максимуму на цій траєкторії.

ІІ. Нехай задано траєкторію цін $\{P_t\}, P_t \geq 0$, $t = 1,\ldots,T$. Тоді існує ефективна траєкторія $\left\{\hat{X}_t, \hat{X}_{t+1} + \hat{C}_{t+1}\right\}$ $t = 0,1,\ldots,T-1$, на якій максимізується прибуток $\sum_{t=1}^{T-1} \pi_t = \sum_{t=1}^{T-1} (P_{t+1}Y_{t+1} - P_t X_t) = \sum_{t=1}^{T} P_t C_t$.

Важливою характеристикою множини Z є технологічний темп зростання, який визначають таким чином.

Кожному технологічному процесу $(X, Y) \in Z$ відповідає число $\eta(X, Y) = \min_{i=\overline{1,n}} \frac{y_i}{x_i}$, яке є темпом зростання цього технологічного процесу.

Технологічним темпом зростання називають число:

$$\eta_0 = \max\{\eta_0(X, Y) \mid (X, Y) \in Z\}.$$

При звичайних припущеннях щодо Z технологічному темпу зростання η_0 відповідає траєкторія:

$$\{X_t \mid X_t = \eta_0^t X_0\}, \quad t = 1,...,T.$$

Її називано траєкторією максимального збалансованого зростання або магістраллю. Вперше існування магістралі в структурних моделях економічної динаміки зауважив Дж. фон Нейман. Тому магістраль ще називають нейманівською траєкторією, або ж нейманівським променем. Магістраль не залежить від тривалості планового періоду, вона є ефективною траєкторією для будь-якого скінченного інтервалу часу.

Особливі властивості магістралі полягають у тому, що на ній досягається максимальний (технологічний) темп зростання за незмінної структури (незмінних співвідношень всіх інгредієнтів). Для широкого класу інших ефективних траєкторій доводяться теореми про магістраль, які встановлюють їхню „близькість" до магістралі (у тому чи іншому розумінні) для великої кількості моментів часу.

6.2.2. Модель Неймана

Першою та найбільш відомою абстрактною моделлю зростаючої економіки є модель Дж. фон Неймана, сформульована на початку 30-х років XX століття.

Модель Неймана задається парою матриць A і B. Матриця $A=(a_{ij})\geq 0$ характеризує затрати продуктів $i=1,...,m$ при використанні різноманітних технологічних способів $j=1,...,n$ з одиничною інтенсивністю. Матриця $B=(b_{ij})\geq 0$ об'єднує коефіцієнти випуску відповідних продуктів, при використанні різноманітних технологічних способів, з одиничною інтенсивністю.

Обидві матриці мають однакову розмірність $m\times n$. Коефіцієнти затрат та випуску продукції є невід'ємними. Далі припускають, що для кожного технологічного способу необхідними є затрати деякого продукту, тобто для кожного j існує деяке i, таке, що

$$a_{ij}>0$$

і кожен продукт може бути виготовлений яким-небудь технологічним способом, тобто для кожного i існує деяке j, таке, що

$$b_{ij}>0 .$$

Із цих умов випливає вимога, що кожен стовпець матриці A та кожен рядок матриці B повинні мати принаймні один додатний елемент.

У своїй роботі Нейман зробив більш сильне припущення: $a_{ij}+b_{ij}>0$, для всіх i та j, тобто будь-який продукт є або затратами, або випуском в кожному технологічному способі. Більш слабке припущення, яке ми тут використовуємо, було запропоновано Кемені, Моргенштерном і Томпсоном.

Інтенсивність використання технологічних способів позначимо вектором $Z = (Z_j) \geq 0$.

Технологічну множину моделі Неймана можна представити таким чином:

$$\{(X,Y) \mid X = AZ, Y = BZ, Z \geq 0\}.$$

Найбільш характерне припущення моделі Неймана полягає в тому, що всю виготовлену в момент часу t продукцію витрачають на виробництво продукції в момент часу $t+1$:

$$BZ(t) \geq AZ(t+1). \qquad (6.28)$$

Остаточно модель Неймана є задачею максимізації темпу зростання замкнутої виробничої системи:

$$\begin{cases} \eta \to \max, \\ BZ \geq \eta AZ. \end{cases} \qquad (6.29)$$

При $\eta > 1$ маємо розширене відтворення, при $\eta = 1$ – просте відтворення, при $0 < \eta < 1$ – звужене відтворення.

Максимальне число η, при якому виконується умова (6.29), називають технологічним темпом зростання і позначають $\hat{\eta}$. Вектор $\hat{Z}$, при якому досягається $\hat{\eta}$, називають оптимальним. Як вже було зазначено, цей вектор (нейманівський промінь) є магістраллю.

Темпи зростання виробництва окремих продуктів η_i визначають за допомогою відношення:

$$\eta_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij} z_j}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j}.$$

Очевидно, що технологічний темп зростання всієї економіки дорівнює мінімальному з максимально можливих темпів зростання окремих продуктів:

$$\hat{\eta} = \max_{z} \min_{i} \ \eta_i . \qquad (6.30)$$

Існування додатного $\hat{\eta}$ доводять, враховуючи вимоги про те, що кожен стовпець матриці A та кожен рядок матриці B повинні мати принаймні один додатний елемент.

За аналогією до моделі міжгалузевого балансу вводять поняття продуктивності. Технологічна множина моделі Неймана є продуктивною, якщо існує $Z \geq 0$, такий, що $(B - A)Z > 0$. Це означає можливість перевищення випуску продукції над затратами ресурсів одночасно для всіх видів продукції. Якщо технологічна множина продуктивна, то $\hat{\eta} > 1$, і, таким чином, маємо розширене виробництво.

Виробничо-технологічним співвідношенням (6.28), (6.29) можна поставити у відповідність систему ціннісних співвідношень. Для цього введемо вектор цін $P = (p_i)$.

Загальна оцінка продукції, що вироблена j-тим способом при використанні його з одиничною інтенсивністю, дорівнює $\sum_{i=1}^{m} p_i b_{ij}$, а загальні витрати в ціннісному виразі – $\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$. Тоді величина

$$\beta_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i b_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}}$$

є показником рентабельності j-го технологічного способу.

Задачу визначення ціннісних співвідношень формулюють таким чином: знайти невід'ємний вектор P та число β, для яких

$$\begin{cases} \beta \to \min, \\ PB \leq \beta PA. \end{cases} \qquad (6.31)$$

Величину $\hat{\beta}$ прийнято називати економічним темпом зростання моделі, а відповідний вектор цін $\hat{P}$ – оптимальним. Величина $\hat{\beta}$ відображає мінімальний рівень рентабельності, при якому сумарна оцінка виготовленої продукції не перевищує сумарної оцінки затрат сировини за всіма технологічними способами, тобто:

$$\hat{\beta} = \min_{P} \max_{j} \ \beta_j . \qquad (6.32)$$

Задачі, які визначають оптимальну структуру виробництва та цін, технологічний та економічний темпи зростання, називають двоїстими.

Наголосимо на тому, що задачі (6.29) та (6.31) є однорідними, і відповідно оптимальні вектори $\hat{Z}$ та $\hat{P}$ визначають лише з точністю до додатного множника. Ця властивість пов'язана із замкнутістю моделі і відрізняє (6.29) та (6.31) від двоїстих задач математичного програмування.

Розглянемо тепер зв'язок між зазначеною парою двоїстих задач. Будемо, як і раніше, припускати напівдодатність векторів b_i та a_j для всіх $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Доведено, що для розглянутих задач завжди справджується нерівність:

$$\hat{\beta} \le \hat{\eta} . \qquad (6.33)$$

Якщо матриці A та B нерозкладні, то

$$\hat{\beta} = \hat{\eta} . \qquad (6.34)$$

Розглянемо можливість розв'язання системи нерівностей:

$$(B - \eta A)Z \ge 0, \quad Z \ge 0, \qquad (6.35)$$

$$P(B - \beta A) \le 0, \quad P \ge 0, \qquad (6.36)$$

$$P(B - \eta A)Z = 0, \qquad (6.37)$$

$$P(B - \beta A)Z = 0. \qquad (6.38)$$

Розв'язок (Z, P, η, β) системи (6.35) – (6.38), що задовольняє умову $PBZ > 0$, існує, причому $p_i = 0$ тоді і тільки тоді, коли

$$\eta \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j < \sum_{j=1}^{n} b_{ij} z_j \quad (i = 1, \ldots, m);$$

$z_j = 0$ тоді і тільки тоді, коли

$$\beta\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_j > \sum_{i=1}^{n} b_{ij} p_j \quad j=(1,\ldots,n).$$

Для будь-якого набору (Z,P,η,β), що задовольняє умови (6.29), (6.31), (6.38), має місце співвідношення $\hat{\eta}=\hat{\beta}>0$.

Наведені умови подібні до умов двоїстої задачі лінійного програмування, і їм може бути дана аналогічна інтерпретація:

а) для оптимальних технологічних способів сумарна оцінка випуску продукції рівна сумарній оцінці витрат ресурсів;

б) якщо в технологічному способі сумарна оцінка витрат перевищує сумарну оцінку випуску продукції, то такий спосіб не є оптимальним;

в) якщо оптимальна оцінка продукту додатна, то для такого продукту балансове співвідношення виробництва і розподілу продукції реалізується як рівність;

г) якщо баланс виробництва і розподілу продукції виконується як строга нерівність, то ціна цього виду продукції дорівнює нулю.

Розглянемо частковий випадок моделі Неймана. Нехай в кожному технологічному способі випускають тільки один продукт і кожен продукт виробляють тільки одним технологічним способом. Це означає, що кількість продуктів рівна кількості способів $(i,j=1,\ldots,n)$, матриця B – одинична, матриця A є матрицею міжгалузевого балансу, $Z=X$ і означає вектор обсягів виробництва.

Задача максимізації темпу зростання виробництва в цьому випадку матиме вигляд:

$$\begin{cases}\eta\to\max,\\ X\ge\eta AX.\end{cases}\tag{6.39}$$

Важливою властивістю задачі є те, що розв'язок задовольняє умову:

$$\hat{X}=\hat{\eta}A\hat{X}.\tag{6.40}$$

Випуск усіх продуктів зростає однаковими темпами, і перевиробництво будь-яких продуктів відсутнє. Співвідношення (6.40) можна записати у вигляді

$$A\hat{X} = \left(\frac{1}{\hat{\eta}}\right)\hat{X}, \qquad (6.41)$$

де $\frac{1}{\hat{\eta}}$ – додатне власне значення матриці A (корінь Фробеніуса - Перрона);

$\hat{X}$ – власний вектор, що відповідає цьому власному значенню.

У такий спосіб встановлюють відповідність між математичним поняттям власного значення матриці й економічним поняттям максимального темпу зростання виробництва. Необхідною і достатньою умовою розширеного виробництва (існування $\hat{\eta} > 1$) є продуктивність матриці A.

Задача визначення темпу економічного зростання і збалансованих цін для описаної ситуації має вигляд:

$$\begin{cases} \beta \to \min, \\ P \le \beta P A. \end{cases} \qquad (6.42)$$

Якщо матриця A нерозкладна, то $\hat{\beta} = \hat{\eta}$, а оптимальні вектори $\hat{X}$ та $\hat{P}$ строго додатні й єдині (з точністю до додатного множника).

6.2.3. Використання результатів теоретичного аналізу моделей зростаючої економіки

Дуже важливий результат аналізу моделей зростаючої економіки полягає в доведенні існування магістралі – траєкторії максимального збалансованого зростання (тобто з постійним в часі максимально можливим темпом зростання і незмінною структурою виробництва).

В моделі Неймана траєкторія $\left(\hat{\eta}^t \hat{Z}\right)_{t=0}^{\infty}$ є магістраллю в просто-рі інтенсивностей технологічних способів, а траєкторія $\left(\hat{\eta}^t B\hat{Z}\right)_{t=0}^{\infty}$ – магістраллю в просторі випусків продукції. Магістраль не залежить від тривалості планового періоду й є ефективною траєкторією для будь-якого скінченного інтервалу часу.

Аналіз багатьох динамічних моделей економіки спонукає до висновку, що магістраль є недопустимою траєкторією при заданому початковому стані і (або) не є оптимальною траєкторією при різних цільових функціях (не є єдиною ефективною траєкторією). Проте висновки, отримані з аналізу теоретичних моделей, мають винятково важливе значення.

Для широкого класу моделей економічної динаміки доводять ***теореми про магістраль***.

Теореми про магістраль — це твердження про те, що за достатньої тривалості планового періоду оптимальна траєкторія динамічної моделі, незалежно від початкового стану і цільової функції (або заданого кінцевого стану), в тому чи іншому розумінні близька до магістралі.

Модель, для якої справджується теорема про магістраль, називають ***магістральною моделлю***.

По-різному класифікують теореми про магістраль. Найбільш розповсюдженим є поділ їх на теореми про магістраль у слабкій, сильній і найсильнішій формах. Перші встановлюють лише факт близькості (за кутовою відстанню) більшості точок траєкторії до точок магістралі. Теореми про магістраль у сильній формі встановлюють, що точки, далекі від магістралі, можуть належати тільки до початку і кінця кожної оптимальної траєкторії. Теореми в найсильнішій формі встановлюють, що більшість станів траєкторії лежить на магістралі.

У багатьох випадках умови таких теорем є занадто обмежувальними. Тому доводять також твердження про близькість оптимальних траєкторій до ширших множин, що містять, як правило, нейманівський промінь. У таких випадках під магістраллю розуміють цю ширшу множину.

Зокрема, з теорем про магістраль у сильній і найсильнішій формах випливає, що за будь-якого початкового стану $\overline{X_0}$ і кінцевого стану $\overline{X_T}$ (визначених нормативно або за допомогою цільової функції за період $[0,T]$, так, що $\overline{X_T} > \overline{X_0}$) оптимальна траєкторія складається з трьох відрізків:

1) рух від $\overline{X_0}$ у напрямку до магістралі;

2) рух по магістралі чи дуже близько (паралельно) до неї;

3) рух від магістралі до $\overline{X_T}$ (див. рис. 49).

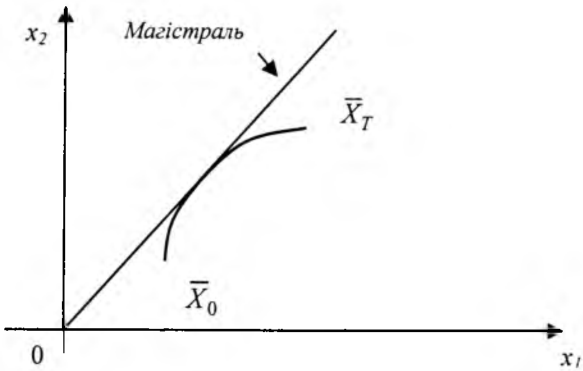

Рис. 49. Оптимальна траєкторія та магістраль для двох технологічних способів чи двох видів продукції

Теореми про магістралі стверджують, що тривалість стартового та фінішного відрізків траєкторії не залежать від тривалості планового періоду. Тому із збільшенням планового періоду все більша частина траєкторії проходитиме по магістралі або безпосередньо близько до неї. Отже, поведінка оптимальної траєкторії при досить довгому плановому періоді залежить в основному від структурних параметрів моделі і менше від цільових функцій, початкових та кінцевих умов.

Інакше кажучи, саме другий (магістральний) відрізок оптимальної траєкторії відображає головні динамічні й структурні закономірності модельованої системи.

Можливість використання теоретичних результатів моделей, схожих на модель Неймана, істотно стримується нереалістичністю їхніх економічних передумов. До них насамперед належать:

- відсутність у явному вигляді невиробничого споживання продукції;
- відсутність обмежених (невідтворюваних чи обмежено відтворюваних) ресурсів;
- незмінність у часі технологічної множини.

Головним напрямком узагальнення і розвитку теоретичних моделей розглянутого типу є поглиблення і розширення вихідних припущень з метою більш повного відображення реальних факторів економічного розвитку.

Модель Неймана не враховує в явному вигляді невиробниче споживання. Цей недолік усувається двома способами.

Перший спосіб реалізовують в межах вихідної моделі Неймана. Кожен коефіцієнт витрат a_{ij} визначають як суму величин $\overline{a}_{ij}$ і c_{ij}. У цьому разі $\overline{a}_{ij}$ є нормативом виробничого споживання i-го продукту при використанні j-го способу з одиничною інтенсивністю, а c_{ij} – нормативом невиробничого споживання i-го продукту способом j. Обсяг невиробничого споживання i-ї продукції визначають з оптимального розв'язку моделі $(\hat{\eta}, \hat{Z})$ як $\hat{c}_i = \sum_j c_{ij} \hat{z}_j$.

Очевидно, що всі компоненти невиробничого споживання зростають з технологічним темпом $\hat{\eta}$.

Другий спосіб врахування споживання пов'язаний з узагальненням моделі. Досліджуються траєкторії виду:

$$(X_t, X_{t+1} + C_{t+1}) \in Z_t,\ t = 0, ..., T-1;\ X_0 = \overline{X}_0.$$

Оптимальну траєкторію можна визначити за допомогою динамічної цільової функції споживання, наприклад:

$$U = \sum_{t=0}^{T} u_t(C_t),$$

де $C_t \geq 0$.

Включення в модель Неймана в явному вигляді обмежень щодо зовнішніх ресурсів (у вигляді додаткових нерівностей) призводить до того, що її найбільш привабливі властивості втрачаються. Припустимо, що для якого-небудь невідтворюваного s-го ресурсу, що витрачається при виробництві хоча б одного продукту, задається ліміт $q_s(t) = q_s$. Тоді незмінний темп зростання, який задовольняє це обмеження, не буде перевищувати одиницю, тобто розширене відтворення при незмінній структурі виробництва неможливе. Якщо ж s-й ресурс збільшується з темпом η_s, то темп зростання моделі не може перевищувати η_s. Водночас можна враховувати не тільки зростання фізичного обсягу ресурсу, але й зростання його „автономної" ефективності, яке не залежить від матриць *A* і *B*, наприклад „трендовий" темп продуктивності праці.

Очевидно, органічне поєднання умов моделей зростаючої економіки та обмежень щодо зовнішніх ресурсів можливе тільки при змінних технологічних матрицях *A* і *B*.

Сильним припущенням моделі Неймана і деяких інших модифікацій моделей зростаючої економіки є гіпотеза про незмінність у часі матриць *A* і *B*, що означає абстрагування від надзвичайно важливого фактора економічного розвитку — науково-технічного прогресу. Тому важливе значення має розроблення узагальнених моделей магістрального типу при умові змінних у часі технологічних матриць.

Найпростіший вигляд таких матриць $A(t)$ і $B(t)$ – зміна всіх коефіцієнтів матриць з однаковим і постійним темпом. У цьому випадку модель повністю зберігає магістральні властивості, а технологічний темп зростання включає темп зміни матриць. Аналогічні властивості доводять для моделі зі змінними коефіцієнтами, що прямують до скінченних границь (тобто для матриць з асимптотично сталими коефіцієнтами). У цьому випадку оптимальна траєкторія виявляється близькою до магістралі для граничних матриць.

Для більш загальних випадків динаміки матриць *A* і *B* доводять теореми про косу магістраль, коли асимптотичні траєкторії, до яких наближаються оптимальні, не обов'язково мають постійні темпи зростання і незмінну структуру виробництва (ці властивості можуть бути характерними для окремих часових інтервалів).

Інший прийом аналізу магістральних властивостей моделей зі змінними технологічними коефіцієнтами зводиться до розв'язування „задачі про переслідування", коли при зміні матриць щоразу знаходиться нова магістраль, до якої наближається відповідна оптимальна траєкторія.

Побудова узагальнених теоретичних моделей зростаючої економіки істотно полегшує аналіз прикладних динамічних моделей, надаючи йому необхідної цілеспрямованості.

6.3. Динамічна модель Л.В. Канторовича

Оптимізаційній динамічній моделі Л.В. Канторовича відводять важливе місце в поширенні і розвитку принципів оптимального планування. Вона є узагальненням відомої „основної задачі виробничого планування" і її формулюють як задачу лінійного програмування. На її основі можна оптимізувати розвиток різноманітних економічних об'єктів (підприємства, галузі, регіону, економіки загалом). Але ця узагальненість моделі ускладнює відображення специфічних особливостей об'єктів, які моделюють (наприклад, для економіки загалом – це взаємозалежності між виробництвом, інвестиціями, основними фондами). Тому модель Л.В. Канторовича справедливо відносять до класу теоретичних моделей.

6.3.1. Динамічні виробничі способи

В моделі Канторовича економічна система представлена як об'єднання двох сфер: сфери виробництва, що включає різні види діяльності, і сфери споживання, що включає використання різноманітних видів благ.

Час у моделі враховують дискретно. Часовий такт може бути різноманітним (рік, два, три і т.д.). Ми зупинимося на модельній постановці з річним тактом, що має найбільше практичне застосування.

Опис виробничої сфери (її технологічної множини) будують на основі „наскрізних" динамічних виробничих способів. Компонентами (інгредієнтами) виробничих способів є коефіцієнти випуску продукції зі знаком „плюс" і коефіцієнти витрат різноманітних видів продукції і ресурсів зі знаком „мінус". Вектор A_ψ, що характеризує виробничий спосіб, включає стільки частин, скільки виділяється часових інтервалів. Разом з тим, той самий продукт чи ресурс s, який розглядають в різні періоди часу, виступає як особливий інгредієнт:

$$A_\psi = \begin{bmatrix} A_{\psi 1} \\ \vdots \\ A_{\psi T} \end{bmatrix} = (a_{s\psi t}), \text{ де } t = 1, \ldots, T.$$

Динамічні способи відображають характеристики як уже наявного виробництва (на момент 1), так і процес створення і функціонування нових потужностей. Якщо θ – термін створення нової потужності і t_0 – рік початку її створення, то відповідний виробничий спосіб має на відрізку $[t_0, t_0+\theta]$ тільки недодатні компоненти, додатні компоненти (тобто коефіцієнти випуску) з'являться тільки з $(t_0+\theta+1)$-го року. Науково-технічний прогрес проявляється в тенденції зниження коефіцієнтів затрат і збільшення коефіцієнтів випуску однойменних інгредієнтів із збільшенням t.

Припускають, що динамічні виробничі способи мають властивості адитивності (тобто можливе одночасне застосування декількох способів) і автономності (характеристики одного способу не залежать від застосування інших способів). Припускають також, що множини видів продукції M_t^1 і невідтворюваних ресурсів M_t^2 змінюються в часі. Якщо залучення в господарський процес нових видів ресурсів не передбачають, то при наближенні до кінця планового періоду множина M_t^2 скорочується, оскільки деякі види ресурсів стають відтворюваними і переходять у множину M_t^1. Розширення множини M_t^1 відбувається також за рахунок появи нових видів продукції і предметів споживання. З іншого боку, внаслідок процесу морального старіння припиняються виробництво і використання деяких видів продукції.

Загальні результати функціонування всіх способів за кожним інгредієнтом s у році t представлені сумою $\sum\limits_{\psi \in N} a_{s\psi t} x_{\psi}$, де N – множина виробничих способів.

Для кожного року t множину інгредієнтів виробничих способів поділяють на дві підмножини: відтворюваних продуктів і ресурсів M_t^1 та невідтворюваних ресурсів M_t^2. Коефіцієнти виробничого способу ψ, що належать до M_t^1, позначимо $a_{s_1 \psi t}$, $s_1 \in M_t^1$, а ті, що належать M_t^2 - $a_{s_2 \psi t}$, $s_2 \in M_t^2$.

6.3.2. Основні співвідношення моделі

Введемо позначення змінних і обсягів ресурсів: x_ψ — інтенсивність застосування способу $\psi \in N$; y_{s_1t} — обсяг невиробничого використання продукції s_1 у році t; r_{s_2t} — кількість невідтворюваного ресурсу s_2 у році t.

Для кожного року t модель включає в себе дві групи балансів:

– виробництва та розподілу продукції:

$$\sum_{\psi \in N} a_{s_1\psi t} X_\psi - y_{s_1t} \geq 0, \quad s_1 \in M^1, \quad t = \overline{1,T}; \tag{6.43}$$

– ресурсів, нездатних до відновлення:

$$\sum_{\psi \in N} a_{s_2\psi t} X_\psi \leq r_{s_2t}, \; s_2 \in M^2, \; t = \overline{1,T}. \tag{6.44}$$

У складі продукції, що використовується для споживання та на інші потреби, не пов'язані з розвитком виробництва, виділяють змінну (що максимізується, $\bar{y}_{s_1t}$) і екзогенну (що фіксується, q_{s_1t}) частини:

$$y_{s_1t} = \bar{y}_{s_1t} + q_{s_1t}. \tag{6.45}$$

Загальна структура оптимізаційної динамічної моделі припускає можливість різноманітної формалізації вибору структури споживання і цільових функцій споживання. Розглянемо найбільш прості способи формалізації, ідеї яких запропонував Л.В. Канторович.

Нехай для кожного року t рівень тої частини споживання, що максимізується, характеризується величиною z_t (наприклад, це число комплектів споживчих благ), структура цієї частини споживання задається коефіцієнтами $\mu_{s_1t} \geq 0$. Тоді:

$$\bar{y}_{s_1t} \geq \mu_{s_1t} z_t, \; s_1 \in M^1, \; t = \overline{1,T}. \tag{6.46}$$

Цільова функція моделі U визначена на векторі ($z_1,\dots,z_T$), тобто

$$U = \varphi(z_1,\dots,z_T). \tag{6.47}$$

Можна використовувати такі варіанти цільової функції:

$$z_T \to \max,$$

або

$$\sum_{t=1}^{T} z_t \to \max,$$

або

$$\sum_{t=1}^{T} q_t z_t \to \max,$$

де q_t – дисконтний множник споживання.

Динамічна модель, яка об'єднує умови (6.43), (6.44), (6.46), (6.47), має такий загальний вигляд:

$$\begin{cases} \sum\limits_{\psi\in N} a_{s_1\psi t} x_\psi - \mu_{s_1 t} z_t \ge q_{s_1 t}, \; s_1 \in M^1, \; t = \overline{1,T}; \\ \sum\limits_{\psi\in N} a_{s_2\psi t} x_\psi \le r_{s_2 t}, \; s_2 \in M^2, \; t = \overline{1,T}; \\ x_\psi \ge 0; \; \psi \in N; \\ \varphi(z_1,\dots,z_T) \to \max. \end{cases} \tag{6.48}$$

Аналіз моделі (6.48) для лінійних цільових функцій φ та цільових функцій, які зводяться до лінійних, оснований на теорії лінійного програмування. Модель має розв'язок, якщо:

1) матриця виробничих способів $A_1 = (a_{s_1\psi t})$, що включає в себе тільки коефіцієнти випуску і витрат інгредієнтів $s_1 \in M_1$, має властивість продуктивності, аналогічну властивості продуктивності матриці $(E - A)$ статичного міжгалузевого балансу, тобто існує невід'ємний вектор $X = (x_\psi)$, що забезпечує отримання додатної кінцевої продукції $\overline{Y} + Q = (\overline{y}_{s_1 t} + q_{s_1 t}) > 0$;

2) значення екзогенної величини $q_{s_1 t}$ не є надто великі; необхідно, щоб при $z_t = 0$, $t = \overline{1,T}$ були виконані умови (6.44).

Важливою характеристикою оптимального плану є кількість виробничих способів, які увійшли до нього, тобто число додатних змінних x_ψ^*. З теорії лінійного програмування випливає, що оптимальний план у випадку невиродженості містить стільки ж додатних основних і додаткових змінних (що зводять нерівності до рівностей), скільки є обмежень. При цьому число додатних основних змінних дорівнює числу обмежень, які в оптимальному плані перетворюються на рівності. Для моделі (6.48) єдиність і невиродженість оптимального плану можна вважати як типову властивість.

Нехай n – число виробничих способів, m_t — число інгредієнтів для року t, $\varphi(z_1,...,z_T)$ – лінійна функція. Тоді число обмежень (6.43), (6.44) становитиме $\sum_{t=1}^{T} m_t$, а число змінних x_ψ і z_t – відповідно $n+T$. Типовою вимогою до оптимального плану є $z_t > 0$, $t = \overline{1,T}$. Отже, при гіпотезі єдиності і невиродженості оптимального плану максимальне число використовуваних у ньому виробничих способів дорівнює $\sum_{t=1}^{T} m_t - T$. Якщо ж склад інгредієнтів залишається незмінним, то максимальне число використовуваних виробничих способів дорівнює $m(T$-1). У дійсності число використовуваних способів буде дорівнювати $\sum_{t=1}^{T} m_{lt} - T$, де m_{lt} – число інгредієнтів, за якими в оптимальному плані нерівності виконуються як рівності ($m_{lt} \leq m_t$).

Залежність між числом інгредієнтів, тривалістю планового періоду і числом виробничих способів, які входять до оптимального плану, має істотне значення для вибору „раціональної геометрії" прикладних оптимізаційних моделей. Очевидно, що при малому числі інгредієнтів, включених у модель, і невеликій тривалості планового періоду інформація про велике число виробничих способів може бути корисно використана тільки частково. Навпаки, якщо кількість виробничих способів, уведених в модель, буде малою, порівняно з числом інгредієнтів, то в оптимальному плані значна частина ресурсів буде недовикористана, а деякі види продукції виготовлятимуть у надлишку. Отже, при конструюванні моделі для практичного застосування параметри її розмірності мають бути добре „збалансовані".

6.3.3. Динамічні оптимальні оцінки

Згідно з теорією лінійного програмування кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі. В оптимізаційних моделях ці змінні називають ***оптимальними оцінками*** і вони виконують функції порівняння витрат і результатів.

Позначимо вектор оптимальних оцінок продукції:

$$V = (v_{s_1 t}),\ s_1 \in M_t^1,\ t = \overline{1,T}$$

і вектор оптимальних оцінок невідтворюваних ресурсів:

$$W = (w_{s_2 t}),\ s_2 \in M_t^2,\ t = \overline{1,T}\ .$$

Специфіка оптимальних оцінок динамічної моделі полягає в тому, що вони порівнюють суспільно необхідні витрати, дефіцитність продукції і ресурсів та суспільну корисність продукції, яку виготовляють і використовують, у часі.

Типовою є ситуація, коли оцінки відтворюваної продукції зменшуються в часі, що є насамперед наслідком використання більш ефективних технологій. Динаміка оцінок природних ресурсів формується під впливом двох взаємопов'язаних тенденцій: зменшення питомих витрат ресурсів унаслідок науково-технічного прогресу й абсолютного скорочення (аж до повного вичерпання) доступних для використання ресурсів. Тому можливим є чергування зростання і зниження цих оцінок у часі.

За допомогою динамічних оптимальних оцінок визначають співвідношення еквівалентної заміни різночасових випусків і витрат. Умовою еквівалентної заміни є рівність

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{s_1\in M_t^1} v_{s_1 t}\Delta q_{s_1 t} = \sum_{t=1}^{T}\sum_{s_2\in M_t^2} w_{s_2 t}\Delta r_{s_2 t}. \qquad (6.49)$$

Співвідношення (6.49) дає можливість визначити умови еквівалентної заміни динаміки залучення ресурсів у виробничий процес (в межах стійкості базису). Можна вивести, наприклад, співвідношення еквівалентної заміни ресурсів l та k в роки t' та t'':

$$\frac{\Delta r_{kt'}}{\Delta r_{kt''}} = -\frac{w_{kt''}}{w_{kt'}};$$

$$\frac{\Delta r_{lt'}}{\Delta r_{kt''}} = -\frac{w_{kt''}}{w_{lt'}};$$

$$\frac{\Delta r_{lt''}}{\Delta r_{lt'}} = -\frac{w_{lt'}}{w_{lt''}};$$

$$\frac{\Delta r_{lt''}}{\Delta r_{kt'}} = -\frac{w_{kt'}}{w_{lt''}} \text{ і т.д.}$$

Оптимальні оцінки різних років можна нормувати. Найбільш простий спосіб нормування полягає в переході до векторів оцінок, які мають однакові покомпонентні суми для кожного року:

$$\overline{V}^t = \beta^t V^t;$$

$$\overline{W}^t = \beta^t W^t,$$

де

$$\beta^t = \left(\sum_{s_1\in M_t^1} v_{s_1 t} + \sum_{s_2\in M_t^2} w_{s_2 t}\right)^{-1}.$$

Коефіцієнти β^t характеризують відносну загальну ефективність використання продукції і ресурсів у різні роки планового періоду. З їхньою допомогою можна приводити оптимальні оцінки до якогось конкретного одного року.

Оптимальні оцінки є важливим інструментом сумісності різночасових витрат і результатів виробничої діяльності.

З умов задачі, двоїстої до (6.48), маємо

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{s_1\in M_t^1} a_{s_1\psi t} v_{s_1 t} \le \sum_{t=1}^{T}\sum_{s_2\in M_t^2} a_{s_2\psi t} w_{s_2 t}, \quad \psi\in N \tag{6.50}$$

або у відносних оцінках

$$\sum_{t=1}^{T}\beta^t\left(\sum_{s_1\in M_t^1} a_{s_1\psi t}\bar{v}_{s_1 t} - \sum_{s_2\in M_t^2} a_{s_2\psi t}\bar{w}_{s_2 t}\right)\le 0, \quad \psi\in N. \tag{6.51}$$

Вектор сумарних відносних оцінок граничного випуску в році t позначимо через

$$\overline{\Phi}^t = \left\{\sum_{s_1\in M_t^1} a_{s_1\psi t}\bar{v}_{s_1 t}\right\}_{\psi\in N},$$

а вектор сумарних відносних оцінок граничних витрат ресурсів позначимо через

$$\overline{\Psi}^t = \left\{\sum_{s_2\in M_t^2} a_{s_2\psi t}\bar{w}_{s_2 t}\right\}_{\psi\in N}.$$

Тоді, відповідно до (6.51), маємо:

$$\sum_{t=1}^{T}\beta^t\overline{\Phi}^t \le \sum_{t=1}^{T}\beta^t\overline{\Psi}^t. \tag{6.52}$$

Економічний зміст умови (6.52) такий: в оптимальному плані сумарна оцінка загального граничного випуску продукції за кожним видом діяльності за плановий період не перевищує сумарної оцінки загальних граничних витрат.

Умову (6.52) можна записати інакше. Через $\Delta\overline{P}^t$ позначимо вектор покомпонентної різниці між векторами $\overline{\Phi}^t$ і $\overline{\Psi}^t$. Тоді отримуємо:

$$\sum_{t=1}^{T}\beta^t\Delta\overline{P}^t \le 0. \tag{6.53}$$

Компоненти вектора $\Delta\overline{P}^t = \left(\Delta\overline{P}_\psi^t\right)_{\psi\in N}$ інтерпретують як прибуток, отриманий від ψ -го виду діяльності в році t, виміряний у відносних оптимальних оцінках. В оптимальному плані отриманий за ввесь плановий період прибуток від кожного виду виробничої діяльності недодатний. Якщо ж виробничий спосіб ψ входить в оптимальний план ($x_{\psi}^{*} > 0$), то для цього способу сумарний за плановий період прибуток строго рівний нулю:

$$\sum_{t=1}^{T} \beta^{t} \Delta \overline{P}_{\psi}^{t} = 0 \quad \text{для} \quad x_{\psi}^{*} > 0. \tag{6.54}$$

Отже, коефіцієнти β^{t} порівнюють результати господарської діяльності в часі. З (6.54) випливає, що необов'язково, щоб в усі роки планового періоду прибуток виробничих способів, які ввійшли в оптимальний план, був невід’ємний. Можливими є збитки, наприклад, у перші роки планового періоду. Однак збиток, що з’явився, має бути компенсований прибутком інших періодів з урахуванням зміни загальної ефективності використання продукції і ресурсів. Якщо неможливо отримати перевищення надходжень над витратами, то цей вид діяльності не входить в оптимальний план, тобто

$$x_{\psi}^{*} = 0, \text{ якщо } \sum_{t=1}^{T} \beta^{t} \Delta \overline{P}_{\psi}^{t} < 0.$$

За допомогою оптимальних оцінок можна оцінити ефективність нового виробничого способу, що не був включений у розрахунок оптимального плану. Використання нового способу ψ буде ефективним, якщо

$$\sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{s_1 \in M_t^1} a_{s_1 \psi t} v_{s_1 t} + \sum_{s_2 \in M_t^2} a_{s_2 \psi t} w_{s_2 t} \right) =$$

$$= \sum_{t=1}^{T} \beta^{t} \left(\sum_{s_1 \in M_t^1} a_{s_1 \psi t} \overline{v}_{s_1 t} + \sum_{s_2 \in M_t^2} a_{s_2 \psi t} \overline{w}_{s_2 t} \right) > 0.$$

Якщо ж ліва частина нерівності від’ємна, то такий спосіб неефективний і недоцільно вводити його у вхідну інформацію для знаходження оптимального плану. Таким чином, аналіз динамічних оптимальних оцінок дає змогу так коригувати вхідну інформацію макроекономічних моделей, що в результаті це приводить до кращих оптимальних розв'язків.

РОЗДІЛ 7

ЛІНІЙНІ МОДЕЛІ ПОПИТУ І ПРОПОЗИЦІЇ

7.1. Павутиноподібна модель ринку

Функції попиту та пропозиції є основними складовими моделі ринку товарів, оскільки вони відображають процес прийняття оптимальних рішень учасниками ринку.

Завдяки властивостям кривих попиту та пропозиції точка рівноваги є стійкою в тому розумінні, що, якщо ціна є строго фіксованою та дорівнює рівноважній ціні $p = p^*$, то виробник постачає на ринок товар в обсязі $Q^* = S(p^*)$ і водночас він максимізує свій прибуток. Одночасно споживач формує попит $Q^* = D(p^*)$ і намагається максимізувати свою корисність. При встановленні на ринку досконалої конкуренції рівноважної ціни обсяг товару, що пропонується виробником, дорівнює обсягу попиту на товар споживача.

Динамічні нерівноважні моделі ринку використовують для аналізу зміни змінних (ціни, попиту, пропозиції) в часі, коли ціна в початковий момент відрізняється від рівноважної. При цьому процес встановлення рівноважної ціни може бути описаний різними моделями при використанні одних і тих самих функцій попиту і пропозиції.

Розглянемо дискретну модель дослідження стійкості цін та обсягів товарів на ринку, який описують за допомогою традиційних кривих попиту та пропозиції з урахуванням часового лага.

Нехай для ринку деякого товару характерні такі функції попиту та пропозиції:

$$D = D(p);$$

$$S = S(p).$$

Умову рівноваги задають як $D(p) = S(p)$, а ціну встановлюють на такому рівні, при якому весь запропонований товар буде проданим. Графічно умову рівноваги зображено на рис. 50.

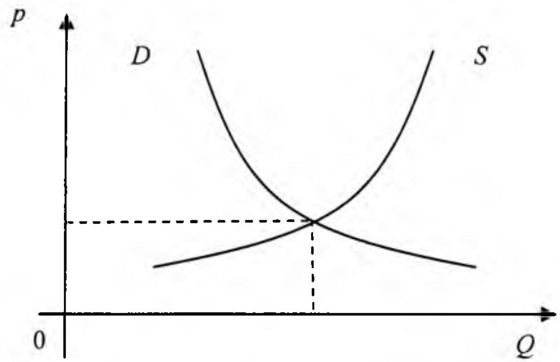

Рис. 50. Рівновага на ринку товарів

Ціну рівноваги p^* задають рівнянням $D(p^*) = S(p^*)$. Потрібно зазначити, що воно має багато розв'язків. Обсяг купівлі-продажу продукції Q^* задають рівністю:

$$Q^* = D(p^*) = S(p^*).$$

Виробники, плануючи свою діяльність на майбутній період, приймають рішення на основі поточних цін. Однак виробничий цикл має певну тривалість і, як наслідок, товар з'явиться на ринку лише після завершення цього циклу. Припустимо, що тривалість виробничого циклу дорівнює одному елементарному відрізку часу й у модель включається часовий лаг.

Виробники формують пропозицію товару на основі цін попереднього періоду, тобто

$$Q^s(t) = S_t(p_{t-1}).$$

Крива попиту характеризує залежність обсягу попиту на товар від ціни товару в цьому періоді, тобто

$$Q^D(t) = D_t(p_t).$$

Ще одна гіпотеза, якої притримуються при побудові цієї моделі, твердить, що ринок завжди знаходиться в стані локальної рівноваги. Цю гіпотезу можна трактувати за Л.Вальрасом наступним чином. Абстрактне поняття „ринок" замінюють на функціонування деякої людини-аукціоніста, яка приймає рішення на реальному ринку. Цей аукціоніст спочатку встановлює довільні ціни на товари, а потім учасники ринку здійснюють умовні угоди та сповіщають про їхні результати аукціоністу. Якщо попит на деякий товар виявився більшим або меншим від пропозиції, то аукціоніст змінює початкові ціни, регулюючи тим самим величини попиту на товар. Кінцеві угоди здійснюються лише після того, як було досягнуто точку рівноваги.

Отже, дія павутиноподібної моделі є такою: при заданій ціні попереднього періоду p_{t-1} обсяг пропозиції товару на ринку у поточному періоді $S_t(p_{t-1})$ та ціна p_t повинні бути встановлені на такому рівні, щоб увесь запропонований товар був проданим. Інакше це твердження можна зобразити за допомогою рівності:

$$Q(t) = D(p_t) = S(p_{t-1}).$$

Із цього рівняння можна знайти ціну p_t у поточний момент часу при відомому значенні p_{t-1}. При відомих значеннях p_0 та Q_0 схема розв'язку проста:

$$Q_0 \to p_0 = D^{-1}(Q_0) \to Q_1 = S(p_0) \to p_1 = D^{-1}(Q_1) \to Q_2 = S(p_1) \to \dots$$

Загалом зміна p_t характеризується різницевим рівнянням першого порядку (одноінтервальне відставання):

$$D(p_t) = S(p_{t-1}). \quad (7.1)$$

Розглянемо частковий випадок павутиноподібної моделі, у якій функції попиту та пропозиції є лінійними:

$$S(p) = \alpha + \gamma\, p_{t-1},$$

$$D(p) = \beta + \varphi\, p_t,$$

$$S(p) = D(p).$$

Для цих функцій справджуються умови:

- $\gamma > 0$, оскільки функція пропозиції є зростаючою;
- $\varphi < 0$, оскільки функція попиту є спадною;
- $\beta > \alpha > 0$ або $D(0) > S(0) > 0$, оскільки припускають, що при нульовій ціні на товар попит на нього є більшим, ніж пропозиція.

Рівняння, що описує рівновагу для такої системи, має вигляд:

$$D(p_t) = S(p_{t-1})$$

або

$$\beta + \varphi\, p_t = \alpha + \gamma\, p_{t-1}.$$

Знайдемо рівноважні ціну p^* та обсяг продажу продукції Q^*, які задовольняють рівняння:

$$Q^* = \beta + \varphi\, p^* = \alpha + \gamma\, p^*.$$

Звідси

$$p^* = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \varphi},$$

$$Q^* = \frac{\beta\gamma - \varphi\alpha}{\gamma - \varphi}.$$

Розв'язок моделі можна продемонструвати графічно. На рис. 51 D та S є відповідно прямими попиту та пропозиції, а точка рівноваги Q^* знаходиться на їхньому перетині. В динамічній моделі пряма D має той самий зміст, що і в статичній моделі, однак ордината для прямої S відображає обсяг пропозиції залежно від цін попереднього періоду.

Ціна в початковий момент часу рівна p_0. Точка V_0^S на прямій S відповідає обсягу пропозиції в період часу $t=1$. Цей запропонований обсяг товару продається у період часу $t=1$ за ціною p_1 і йому відповідає обсяг попиту V_1^D з тим самим значенням ординати Q_1. У період часу $t=2$ рух проходить спочатку по вертикалі від точки V_1^D до точки V_2^S, що відповідає ординаті Q_2, а потім по горизонталі до точки V_2^D. Остання точка відповідає ціні p_2. Продовження цього процесу утворює криву, яку називають павутиною, або спіраллю (рис.51). Тому в літературі павутиноподібну модель іноді називають "динамічною спіраллю".

У випадку, зображеному на рис. 51, послідовність цін p_t прямує до рівноважного рівня p^*, і, таким чином, тут з часом встановлюється рівновага.

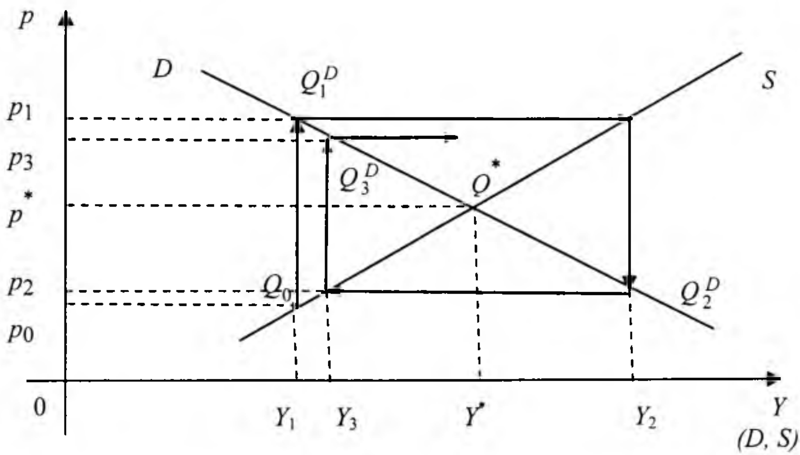

Рис. 51. Графічний розв'язок павутиноподібної моделі аналізу попиту та пропозиції на ринку

Дослідимо детально питання: чи завжди у цій моделі ітераційний процес приводить до рівноваги?

Виразимо p_t через p_{t-1} і в результаті отримаємо таке рекурентне співвідношення:

$$p_t = \frac{\alpha - \beta}{\varphi} + \frac{\gamma}{\varphi} p_{t-1}.$$

Послідовно використовуючи це співвідношення, отримаємо:

$$p_1 = \frac{\alpha - \beta}{\varphi} + \frac{\gamma}{\varphi} p_0;$$

$$p_2 = \frac{\alpha - \beta}{\varphi} + \frac{\gamma}{\varphi}\left(\frac{\alpha - \beta}{\varphi} + \frac{\gamma}{\varphi}\right) p_0 \quad ;$$

$$\vdots$$

Або в загальному вигляді

$$p_t = \frac{\alpha - \beta}{\varphi}\left(1 + \frac{\gamma}{\varphi} + \left(\frac{\gamma}{\varphi}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\gamma}{\varphi}\right)^{t-1}\right) + \left(\frac{\gamma}{\varphi}\right)^t p_0, \; t = 1,2\ldots\,.$$

Вираз у дужках є сумою геометричної прогресії:

$$S_n = a_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Якщо $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$.

Для павутиноподібної моделі $q = \frac{\gamma}{\varphi}$, $a_1 = \frac{\alpha - \beta}{\varphi}$. Звідси отримуємо вираз для розрахунку ціни p_t у будь-який момент часу t:

$$p_t = \frac{\alpha - \beta}{\varphi} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\gamma}{\varphi}\right)^t}{1 + \frac{\gamma}{\varphi}} + \left(\frac{\gamma}{\varphi}\right)^t p_0. \tag{7.2}$$

Існують три можливих випадки:

1. При $\frac{\gamma}{\varphi} < 1$ матимемо $\left(\frac{\gamma}{\varphi}\right)^t \to 0$ і $p_t \to \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \varphi} = p^*$, тобто при більш стрімкому нахилі кривої пропозиції, ніж у кривої попиту, процес є збіжним і рівновага є стійкою (рис. 52).

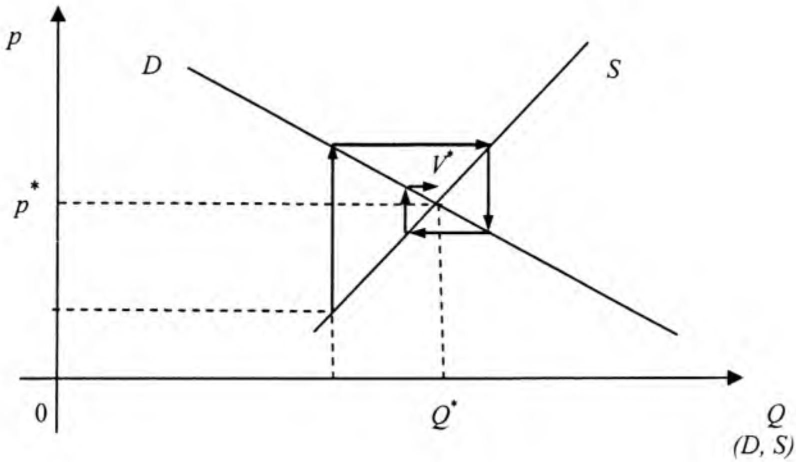

Рис. 52. Графічний розв'язок павутиноподібної моделі аналізу попиту та пропозиції на ринку при $\frac{\gamma}{\varphi} < 1$

2. Якщо $\frac{\gamma}{\varphi} > 1$, тобто більш стрімким є нахил кривої попиту, то $\left(\frac{\gamma}{\varphi}\right)^t \to \infty$ і процес є розбіжним. У наслідок цього рівновага є нестійкою (рис. 53).

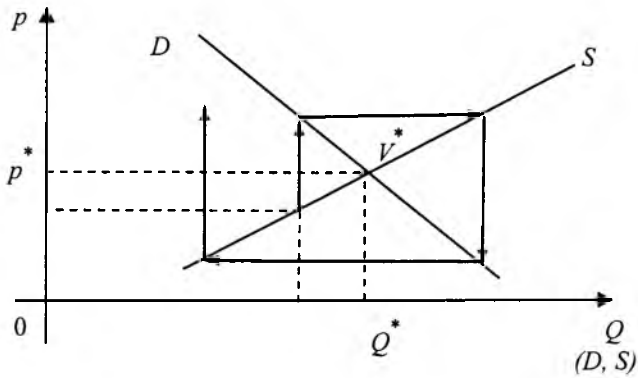

Рис. 53. Графічний розв'язок павутиноподібної моделі аналізу попиту та пропозиції на ринку при $\frac{\gamma}{\varphi} > 1$

3. При $\frac{\gamma}{\varphi}=1$, тобто при $\gamma=\varphi$, ряд значень p_t будуть складатися із послідовності p_0 та $(-p_0)$. Відповідно p_t будуть послідовно більші або менші від рівноважного значення p^* на одну і ту ж величину, що дорівнює початковій різниці p_0 - p^*, тобто простежуватиметься регулярне коливання (рис. 54).

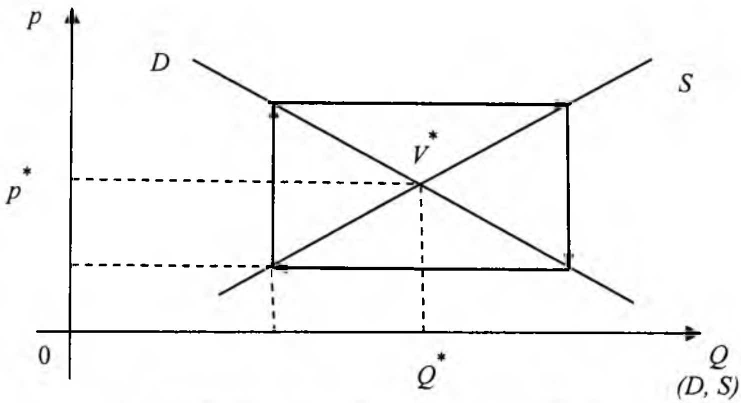

Рис. 54. Графічний розв'язок павутиноподібної моделі аналізу попиту та пропозиції на ринку при $\frac{\gamma}{\varphi}=1$

Отже, визначальним для стійкості системи є менш сильна, згладжуюча реакція на зміну ціни тієї функції, яка має часовий лаг (у нашому випадку це функція пропозиції).

Третій випадок є надзвичайно рідкісним і його можна вважати тривіальним – на його основі не можна побудувати жодної теорії циклу.

В дійсності при $\frac{\gamma}{\varphi}>1$ нескінченно зростаючих коливань не буде, оскільки при великих відхиленнях від рівноважного стану лінійне наближення стає нереалістичним. В більш адекватній нелінійній моделі встановлюються нелінійні коливання великої, але скінченної, амплітуди, які є прообразом економічних циклів зростання та спаду виробництва.

Аналогічно можна проаналізувати павутиноподібну модель, припускаючи, що часовий лаг є характерним для функції попиту.

Дослідимо детальніше випадок із згасаючими коливаннями. Замість незмінних у часі кривих попиту та пропозиції візьмемо криві, які під впливом зовнішніх факторів змінюються в часі або регулярно, або циклічно. В цьому випадку ще до повного згасання коливань, що відображені на рис. 51, деяке зміщення кривих D або S призведе до нових збурень, і коливання з'являться знову.

Лінійну модель можна трактувати алгебраїчно для описаного випадку при паралельному переміщенні кривих попиту та пропозиції. Дискретну динамічну модель подамо у вигляді:

$$Q_t = \beta_t + \varphi\, p_t = \alpha_t + \gamma\, p_{t-1},$$

де β_t, α_t характеризують переміщення кривих у момент $t = 0, 1, 2, 3, 4\ldots$.

Різницеве рівняння відносно ціни матиме вигляд:

$$p_t = \frac{\gamma}{\varphi} p_{t-1} + \frac{\alpha_t - \beta_t}{\varphi}. \qquad (7.3)$$

Для розв'язку рівняння (7.3) необхідно лише визначити різницю $\alpha_t - \beta_t$, яка визначає переміщення кривих попиту та пропозиції.

У неперервній моделі ціна є функцією від часу: $p = p(t)$. Попит і пропозиція (потоки за одиницю часу) також є функціями від часу. В описаній павутиноподібній моделі враховують запізнення пропозиції. Цьому наближено відповідає припущення про зміну ціни на стороні попиту, а не пропозиції. Тоді отримуємо модель, яка рівносильна моделі з неперервним запізненням пропозиції. В цьому випадку функція попиту $D(p)$ залежить від p та $\frac{dp}{dt}$, а $S(t)$ – лише від p. Модель діє аналогічно: в кожен момент часу ціну встановлюють на такому рівні, при якому обсяг попиту дорівнює обсягу пропозиції, тобто виконується рівність:

$$Q = D\left(p, \frac{dp}{dt}\right) = S(p).$$

Якщо функції попиту та пропозиції є лінійними, то

$$Q = \beta + \varphi\, p + \varphi_1 \frac{dp}{dt} = \alpha + \gamma p\,. \tag{7.4}$$

Припустимо, що $p(t) = p^*$ та $Q(t) = Q^*$ для всіх t, тобто для спільного стану рівноваги обох змінних:

$$Q^* = \beta + \varphi\, p^* = \alpha + \gamma p^*\,. \tag{7.5}$$

Від (7.4) віднімемо (7.5) і припустимо, що $\overline{p} = p - p^*$ і $\overline{Q} = Q - Q^*$. Оскільки $\dfrac{d\overline{p}}{dt} = \dfrac{dp}{dt}$, то:

$$\overline{x} = \varphi\, \overline{p} + \varphi_1 \frac{d\overline{p}}{dt} = \gamma\, \overline{p}\,.$$

Рівняння (7.4) та (7.5) є диференціальними рівняннями першого порядку. Припустимо, що

$$\mu = \frac{\gamma - \varphi}{\varphi_1}\,.$$

Тоді диференціальне рівняння відносно $p(t)$ матиме вигляд:

$$\frac{d\overline{p}}{dt} = \mu\, \overline{p}\,.$$

Для розв'язку цього рівняння зазначимо, що $\dfrac{1}{\overline{p}} \cdot \dfrac{d\overline{p}}{dt} = \dfrac{d}{dt} \ln \overline{p}$.

Тоді

$$\frac{d}{dt} \ln \overline{p} = \mu\,,$$

$$\ln \overline{p} = const + \mu\, t\,,$$

$$\overline{p} = p_0 e^{\mu t}\,,$$

$$p = p^* + (p_0 - p^*) e^{\mu t}\,.$$

При $\varphi < 0$, $\varphi_1 < 0$ та $\gamma > 0$ отримаємо $\mu < 0$. Унаслідок цього ціна $p(t)$ монотонно рухається у часі до ціни рівноваги p^*, оскільки $\overline{p} \to 0$, $e^{-t} \to 0$.

Менш поширеним є випадок, коли $\gamma < 0$. Але як тільки $-\gamma < -\varphi$, тобто кут нахилу прямої D до осі OP на площині POQ є більшим, ніж кут нахилу прямої S, то отримаємо той же результат, що і в попередньому випадку. Диференціальне рівняння цієї моделі має менше розв'язків, ніж відповідне різницеве.

Розглянуті дискретна та неперервна моделі є достатньо спрощеними. Вони частково динамічні, оскільки встановлюють співвідношення попиту та пропозиції лише одного товару і враховують ціну лише даного товару, нехтуючи динаміку цін на інші товари, а також доходи споживачів. Незважаючи на такі спрощуючі гіпотези, слід зазначити, що моделі містять основні характеристики динаміки попиту і пропозиції і дають можливість відобразити деякі властивості, що є характерними для всіх динамічних моделей попиту та пропозиції. Основними такими властивостями є:

Властивість* 1. *Модель передбачає деякі функціональні співвідношення

В цьому випадку це – ринковий попит покупців і пропозиція продавців. Кожне з них є функцією ціни. Ці функції є, по суті, побудованими на основі минулого або прогнозованого у майбутньому. Ціна або задана покупцям і продавцям ззовні, або прогнозується ними. Попит трактують як плановану або прогнозовану величину купівлі товару, пропозицію – як плановану або прогнозовану величину продажу, причому ввесь обсяг пропозиції припадає на початок проміжку часу t. Продавці сподіваються, що ціна буде такою ж, як і в попередній період p_{t-1}, і відповідно прогнозують продати товар у обсязі $S_t=S(p_{t-1})$. Покупці звертають увагу лише на фактичну ціну і відповідно до цього планують купівлю товару в обсязі $D_t = D(p_t)$.

Властивість 2. Форма функції є заданою

Задачу знаходження рівноваги можна спростити, розглядаючи частковий випадок при певній визначеній формі функції (наприклад, лінійній $D(p) = \beta + \varphi\, p$), або прийнявши наближення до цієї форми функції (наприклад, лінійну апроксимацію в обмеженій області навколо точки рівноваги). Це можна здійснити, розкладаючи в ряд Тейлора функцію попиту з малою різницею $p\text{-}p^*$ в околі точки p^*:

$$D(p) = D(p^*) + D'(p^*)(p - p^*) = \beta + \varphi p .$$

Прийнята в задачі лінійна (або деяка інша) форма повинна мати хороші апроксимаційні властивості або давати можливість отримати зручне спрощення. Так, коефіцієнт φ може бути або коефіцієнтом при p у лінійній функції попиту, або нахилом прямої попиту в точці рівноваги. В останньому випадку він може наближено відображати малі варіації р навколо p^*.

Властивість 3. Необхідно точно визначити умови, при яких діє модель

Для цього потрібно перейти від *очікуваних* і планованих на основі минулого величин до реалізованих *фактично.* Потрібно точно визначити специфічну природу зв'язків між *фактичними* значеннями змінних і механізм переходу *прогнозованих* величин у *фактичні.* В моделі, з рухом товару на одному ринку, відносини, що фактично склалися між покупцями та продавцями, характеризуються рівністю обсягів купівлі та продажу *(*Q_t, за означенням). Далі перехід від очікуваних величин до фактичних здійснюється „методом рівноваги", де ціна і є „врівноважуючою" змінною. На початку періоду t продавці очікують, що ціна буде p_{t-1} і пропонують для продажу продукцію S_t. Зміни запасів не передбачають (хоча можливо, що товар має обмежений термін споживання), тому пропозиція має бути рівною Q_t (обсяг продажу дорівнює обсягу купівлі товару). Як наслідок, в процесі встановлення ринкової рівноваги попит стає рівним пропозиції, оскільки ціна досягає такого рівня, при якому пропозиція повністю поглинається. Всі економічні очікування реалізуються. Виняток становить лише ціна p_{t-1}, на яку очікували продавці. Вона не збігається з фактичною ціною p_t.

За допомогою дуже невеликої модифікації цієї дискретної моделі можна абсолютно змінити умови її дії, ввівши ступінчасту функцію (метод послідовного порушення рівноваги). У момент t-1 виробники випускають таку кількість товарів, яка відповідає домінуючій у цей момент ціні p_{t-1}. Наприкінці періоду ввесь обсяг товарів купують продавці, тому його можна продати протягом наступного періоду t у обсязі S_t. На початку періоду t на основі всіх відомих на цей момент даних продавці встановлюють ціну продажу p_t. Покупці приймають рішення, скільки товару вони куплять при такому рівні ціни (D_t). В моделі передбачають, що продавці прогнозують завжди вірно і встановлюють ціни на такому рівні, при якому вони можуть продати ввесь запас товарів: $S_t=D_t$ – обсяг купівлі-продажу.

В моделі необхідно передбачити і варіювання обсягів попиту і пропозиції — як засіб страхування при неправильному встановленні цін продавцями. Нехай встановлена ними ціна p_t така, що обсяг попиту D_t перевищує кількість товарів S_t . За наявності торгових запасів попит (рівний обсягу купівлі-продажу) можна перекрити за рахунок їхнього зменшення. Пропозиція S_t у цьому випадку буде меншою від фактичного обсягу продажу, і різницю доведеться відшкодувати за рахунок запасів. У результаті покупці реалізують свої плани (обсяг попиту дорівнюватиме фактичному обсягу купівлі), але продавцям доведеться провести несподівані вилучення запасів. З іншого боку, якщо запасів немає або вони дуже малі, то попит не вдасться задовольнити, і його вимушене скорочення призведе до обмеження споживання або інших дій. Тоді передбачуваний попит буде зменшений до величини фактичних обсягів купівлі товару, і у покупців виникнуть незаплановані заощадження, продавці ж реалізують свої плани. В більшості моделей зазвичай припускають, що плани купівлі реалізовуються (очікуваний попит дорівнює фактичному обсягу купівлі), а можлива різниця компенсується вкладеннями. Таке припущення може мати місце, однак воно не є необхідним.

Властивість 4. Умову дії моделі, яка задовольняється у фактичних ринкових відносинах, записують як рівняння з відповідною змінною

В цьому випадку ціна є саме тою врівноважуючою змінною. Задача полягає в тому, щоб зосередити найбільшу увагу на одній змінній p_t і позбутися решти змінних (D_t, S_t і, звичайно, фактичного значення Q_t). Решту змінних можна знайти після того, як визначена найважливіша змінна p_t. Рівняння павутиноподібної моделі є найпростішою формою різницевого рівняння з одноінтервальним запізненням (p_t і p_{t-1} входять у рівняння в явному вигляді). Необхідно знайти розв'язок цього рівняння. У випадку рівноваги без запізнення питання зводиться до знаходження одного або декількох значень p, що є сумісними з умовами рівноваги. При наявності запізнення в скінченно-різницевому рівнянні в розв'язку має бути передбачено, що є заданими і визначеними якісь початкові значення або умови, в даному випадку це є початкова ціна p_0. Рівняння характеризує дію моделі в кожний період часу, але результат за ввесь період часу залежить від існуючої початкової конфігурації. Модель може „стартувати" лише з якогось початкового стану. Економічно це означає, що зміну ціни в часі можна визначити, лише знаючи початкове порушення рівноваги ціни або відхилення її від стану рівноваги. Той факт, що в досліджуваному випадку потрібно знати лише одне початкове значення, є випадковим. Він є результатом існування лише одноінтервального запізнення, тобто того, що відповідне скінченно-різницеве рівняння буде першого порядку. При багаторазовому або розподіленому запізненні скінченно-різницеве рівняння матиме більш високий порядок, тому необхідно знати не одне, а декілька початкових значень.

Властивість 5. Розв'язок різницевих рівнянь у деяких випадках може бути зведений до методу розв'язування та аналізу диференціальних рівнянь

Розв'язок істотно спрощується за допомогою рекурсивної моделі. Це означає: якщо задано всі змінні до періоду часу $t-1$ включно, то модель забезпечує одержання одного за одним значень змінних для періоду t. В цьому випадку при заданих p_{t-1} отримують спочатку $Q_t=S_t$, а потім p_t.

При дослідженні розв'язків моделей попиту і пропозиції постає питання щодо їхньої економічної інтерпретації. Першим завжди виникає таке питання: чи існує стан рівноваги ціни, сумісний з рівнянням? Відповідь можна дати, підставивши у рівняння $p_t=p^*$ для всіх t. Якщо таке p^* існує, то це і є статичний рівень. Однак можливою є й ситуація, коли рівноважного значення p^* не існує.

Використовують й інший штучний прийом. Визначивши p^*, необхідно прослідкувати не зміну первинної величини p_t, а її відхилення від стану рівноваги: $\hat{p}_t = p_t - p^*$. Це має економічний сенс, оскільки дослідників цікавить саме відхилення ціни від стану рівноваги. Математично найкращий спосіб переходу до такого методу аналізу є віднімання рівняння, що характеризує точку p^*, від рівняння, що виражає p_t.

Павутиноподібна динамічна модель ринку відображає той факт, що статика і динаміка точки рівноваги попиту та пропозиції тісно взаємопов'язані. Модель описує переміщення навколо стану рівноваги або відхилення від нього. Проте стійке існування стану рівноваги ціни (тобто один раз досягнуте, воно зберігається постійно), сумісної з моделлю, не передбачає, що за будь-яким відхиленням відбуватиметься повернення в початковий статичний стан. Переміщення може здійснюватися в напрямку віддалення від початкового статичного стану або бути спрямованим до якогось іншого стану, що є відмінним від початкового. І, навпаки, питання про „стійкість" стану рівноваги ціни в статичному випадку необхідно і можна розглядати лише з точки зору динамічної моделі. Стан рівноваги є стійким, якщо початкове збурення породжує зворотний динамічний рух до стану рівноваги, а не вбік від нього і не до якого-небудь іншого стану.

Неперервна модель має, загалом, ті ж властивості і відрізняється лише в акцентуванні або в деталях. Функції моделі відображають залежність попиту і пропозиції від ціни та швидкості її зміни. Прогнози і плани покупців та продавців розглядають як неперервно адаптивні до руху цін у часі. Ці прогнози, щоб бути сумісними, мають бути ланками одного ланцюга. Модель, яка відображає співвідношення очікуваних величин попиту і пропозиції, діє знову за методом наближення до стану рівноваги. Ринкові сили неперервно змінюють ціни так, щоб пропозиція була повністю реалізована. Ціна є змінною, яка забезпечує рівновагу, що змінюється від одного моменту часу до іншого задля підтримки рівності попиту і пропозиції. Основна відмінність неперервної моделі ринку від дискретної полягає в інтерпретації моделі з точки зору рішень покупців і продавців. У дискретному аналізі одиницею часу було вибрано інтервал прийняття рішень або перегляду планів, характерною межею була відмінність між очікуваннями (намірами) і їхнім здійсненням (реалізацією). Все це зникає в неперервній моделі, оскільки припускають, що ухвалення рішень, їхній перегляд і пристосування до обставин, які змінилися, відбувається неперервно. Проте багато властивостей дискретної моделі можна ввести і в неперервну. Наприклад, запізнення або зміни запасів.

При побудові неперервної моделі використовують диференціальні рівняння щодо змінної $p(t)$ (а не скінченно-різницеві, як у випадку дискретної моделі).

7.2. Модель ринкової рівноваги Л. Вальраса

Важливим питанням економічної теорії є ринковий механізм узгодження взаємодії попиту й пропозиції. Згідно із законом попиту поведінка споживача залежить від ціни пропозиції, за якою виробник пропонує йому товар. Ціна пропозиції — вихідна ціна, яку потім узгоджують з ціною попиту, тобто тією, яку може і збирається заплатити споживач. Це дає можливість уточнити характеристику законів попиту й пропозиції.

Закон попиту — це зміна величини попиту під впливом не ціни загалом, а ціни пропозиції, яку встановлює виробник. Тобто закон попиту показує в чистому вигляді „ринок продавця”.

Закон пропозиції — це зміна величини пропозиції під впливом не ціни загалом, а ціни попиту, яку встановлює покупець. Тобто закон пропозиції показує „ринок покупця”.

Отже, взаємодія попиту й пропозиції започаткувала ринкові відносини. У процесі цієї взаємодії досягнуто компромісу у вигляді ринкової ціни товару, за якою його купують і продають.

Взаємодію попиту й пропозиції в ринковій економіці можна проаналізувати за допомогою графіка (рис. 55). Стан ринкової системи, при якому попит дорівнює пропозиції, називають рівновагою.

В початковий момент часу система може не перебувати у стані рівноваги, і зумовлювати це можуть принаймні два такі фактори: система була виведена зі стану рівноваги внаслідок впливу деяких випадкових факторів, або ж система ніколи не знаходилась у рівноважному стані. Оскільки природним є прагнення до стану рівноваги, то виникають два питання:

1. Чи досягне система стану рівноваги?
2. Який період часу необхідний для його досягнення?

Дослідимо можливість досягнення стану рівноваги у випадку, коли величини попиту та пропозиції залежать лише від рівня ціни.

При відсутності рівноваги можуть мати місце такі ситуації:

– попит перевищує пропозицію;
– пропозиція перевищує попит.

При ціні p^* запропонована й потрібна кількість товару одна й та ж і дорівнює Q^*. Ціна p^* показує, що в цьому випадку плани покупців і продавців збіглися, їхнє економічне становище стабільне. А тепер припустимо, що ринкові умови раптово змінилися: ціна товару встановилася на рівні p_1. За таких умов виробнику невигідно виготовляти товар, оскільки не перекриваються витрати, а споживач, навпаки, за цією ціною хотів би купити більше товару.

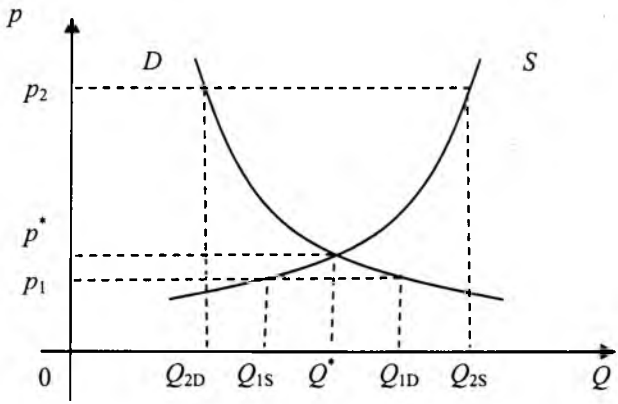

Рис. 55. Ринкова рівновага

Коли величина попиту перевищує запропоновану його кількість, виникає нестача товару, тобто дефіцит. Величина попиту більша від величини пропозиції: $D > S$ (рис. 55).

Протилежна ситуація виникає, коли ціна зростає і дорівнює p_2. За таких умов виробнику вигідно виготовляти й постачати на ринок більшу кількість товару, але ціна, що зросла, не всім покупцям досяжна. Складається економічна ситуація перевиробництва або надлишку товарів. При перевиробництві величина пропозиції товару за ціною p_2 перевищує величину попиту: $S > D$.

Проблему досягнення рівноваги розглядали А. Маршалл і Л. Вальрас.

Згідно з механізмом формування рівноважної ціни за Л. Вальрасом, кількість товару – залежна змінна, а ціна – незалежна змінна (рис. 56). Функції попиту й пропозиції за Л. Вальрасом виглядають так:

$$Q_D=D(p);\ Q_S=S(p),$$

а умову рівноваги визначають як рівність величин попиту та пропозиції:

$$D(p)=S(p)\ .$$

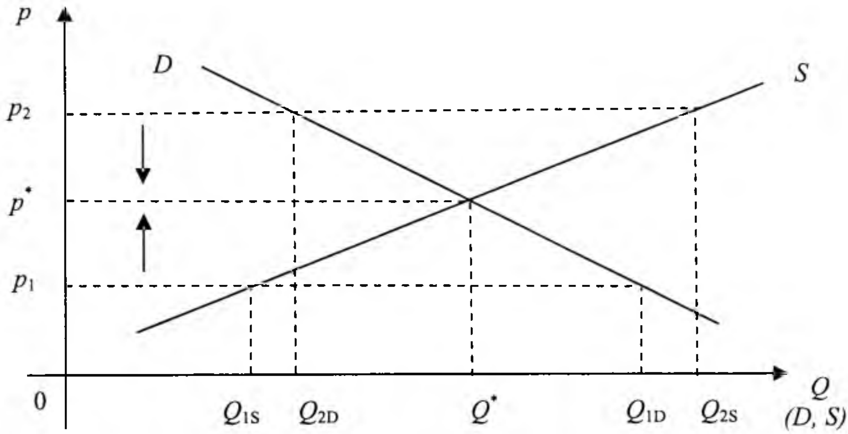

Рис. 56. Модель встановлення рівноважної ціни за Л. Вальрасом

При ціні p_1 обсяг попиту дорівнює Q_{1D}, а обсяг пропозиції — Q_{1S} ($Q_{1D}>Q_{1S}$), тобто виникає надлишок попиту – дефіцит. Конкуренція покупців піднімає ціну p_1 вгору – до рівня рівноваги p_0. При ціні p_2 обсяг попиту Q_{2D}, а обсяг пропозиції – Q_{1S} ($Q_{1I}>Q_{2D}$), тобто виникає надлишок пропозиції. Конкуренція продавців буде зміщувати ціну P_2 до рівня рівноваги p^* .

Модель встановлення рівноважної ціни за Л. Вальрасом ґрунтується на зміні динаміки ціни в напрямку досягнення стану рівноваги. Він розробив „модель коригування ринкових цін”, яка характеризує короткостроковий період.

Відповідно до механізму формування рівноважної ціни за А. Маршаллом, кількість товару – незалежна змінна, функція попиту й пропозиції виглядають так:

$$P_D=D(Q);\ P_S=S(Q),$$

а умову рівноваги визначають, як рівність ціни попиту та ціни пропозиції:

$$p_D=p_S.$$

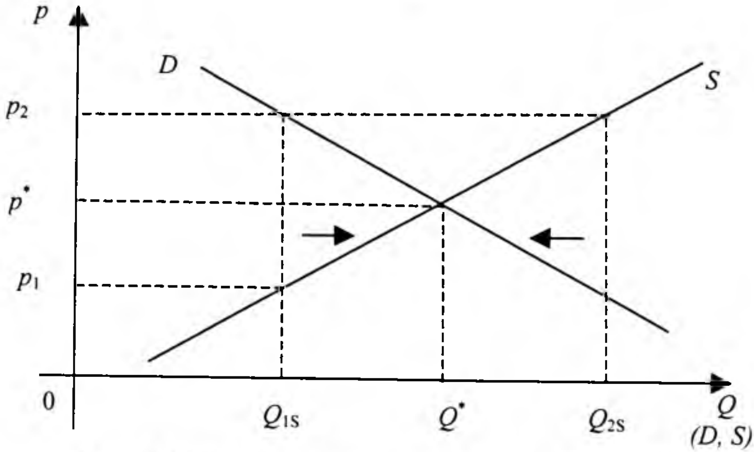

Рис. 57. Модель встановлення рівноважної ціни за А. Маршаллом

При обсязі пропозиції Q_{1S} ціна попиту p_2 буде вищою, ніж ціна пропозиції p_1 ($p_2 > p_1$), тобто у продавця виникає стимул збільшити обсяг пропозиції товарів на ринку до обсягу Q^*. При обсязі пропозиції Q_{2S} ціна пропозиції p_2 буде вищою, ніж ціна попиту, за таких же умов ціна p_2 буде знижуватися до рівня p^*. У разі рівноважного обсягу ціна попиту дорівнює ціні пропозиції: $p_1 = p_2 = p^*$.

Модель А.Маршалла ґрунтується на зміні динаміки обсягів товару в напрямку досягнення стану рівноваги. Її назвали „моделлю коригування випуску", і відображає вона ринкові процеси у довгостроковому періоді.

Важливою характеристикою станів, відмінних від стану рівноваги, є величина надлишкового попиту, яку можна визначити як

$$E(p)=D(p)-S(p),$$

де $E(p)$ – надлишковий попит;

$D(p)$ – функція попиту;

$S(p)$ – функція пропозиції;

p – ціна.

Як бачимо, надлишковий попит є додатною величиною, якщо $D(p) > S(p)$, та від'ємною величиною, якщо $D(p) < S(p)$. У точці рівноваги величина надлишкового попиту дорівнює нулю.

З величиною надлишкового попиту тісно пов'язана ціна надлишкового попиту, яку визначають як різницю між ціною, яку покупці готові заплатити за деякий заданий обсяг товару, та ціною, що може спонукати збільшення пропозиції до цього обсягу.

Додатному значенню величини надлишкового попиту відповідає від'ємне значення ціни надлишкового попиту і навпаки.

Таким чином, якщо $D(p) > S(p)$ і надлишковий попит додатний, а його ціна від'ємна, то незадоволений попит призводить до збільшення рівня ціни. Якщо $D(p) < S(p)$ і надлишковий попит від'ємний, а його ціна додатна, то збільшиться обсяг пропозиції, оскільки товар вигідно буде постачати на ринок.

Використовуючи введені поняття, суть вище розглянутих підходів можна сформулювати наступним чином:

1. Згідно з припущеннями А. Маршалла пропозиція товару зростає, якщо ціна надлишкового попиту є додатною, і, навпаки, пропозиція товару знижується, якщо ціна надлишкового попиту від'ємна.

2. Відповідно до припущень Л. Вальраса ціна зростає, якщо величина надлишкового попиту є додатною, і, навпаки, ціна знижується, якщо величина надлишкового попиту є від'ємною.

Рівновага в цьому випадку означатиме, що економічні стимули переміщують траєкторію зміни ціни в напрямку до точки рівноваги. Стійкість рівноваги, згідно з моделлю Л. Вальраса, означає, що збільшення ціни при додатному значенні надлишкового попиту зменшує його, тобто

$$\frac{dE(p)}{dp} = \frac{d(D(p) - S(p))}{dp} < 0, \qquad (7.6)$$

$$\frac{dD}{dp} - \frac{dS}{dp} < 0 . \qquad (7.7)$$

З іншого боку, якщо притримуватись моделі А. Маршалла, то збільшення кількості товару, спричинене додатною ціною надлишкового попиту, зменшує цю ціну. Ціна надлишкового попиту є оберненою функцією до $E(p)$, тобто

$$E^{-1}(q) = p_D(q) - p_S(q) ,$$

де $p_D(q)$ – функція, обернена до $D(p)$;

$p_S(q)$ – функція, обернена до $S(p)$.

Отже, отримуємо, що для ціни надлишкового попиту повинні виконуватись умови

$$\frac{dE^{-1}(q)}{dq} = \frac{d(p_D(q) - p_S(q))}{dq} < 0 , \qquad (7.8)$$

$$\frac{dp_D(q)}{dq} - \frac{dp_S(q)}{dq} < 0 . \qquad (7.9)$$

Із властивостей похідних взаємно обернених функцій маємо:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_D}{dq} &= \left(\frac{dD}{dp}\right)^{-1} \\ \frac{dp_S}{dq} &= \left(\frac{dS}{dp}\right)^{-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{dD}{dp}\right)^{-1} - \left(\frac{dS}{dp}\right)^{-1} < 0 . \qquad (7.10)$$

Нехай функції попиту та пропозиції лінійні:

$$S(p) = \alpha + \gamma\, p ,$$

$$D(p) = \beta + \varphi\, p .$$

Для цього випадку нерівність (7.7) набуде вигляду:

$$\frac{dD}{dp} = \varphi ,\ \frac{dS}{dp} = \gamma \qquad \Rightarrow \varphi - \gamma < 0 \Leftrightarrow \varphi < \gamma . \qquad (7.11)$$

Таким чином, система прямує до стану рівноваги, якщо кут нахилу прямої пропозиції є більшим від кута нахилу прямої попиту.

Використовуючи модель А. Маршалла, отримаємо:

$$p_D(q) = \frac{1}{\varphi}(q - \beta), \quad p_S(q) = \frac{1}{\gamma}(q - \alpha) \cdot$$

Із нерівності (7.10) маємо:

$$\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\gamma} < 0. \tag{7.12}$$

Функція попиту є спадною і $\varphi < 0$, а функція пропозиції є зростаючою і $\gamma > 0$. Тому нерівність (7.11) виконується автоматично. Нерівність (7.12) також виконується автоматично:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\varphi} < 0 \\ \gamma > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\gamma} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\varphi} < \frac{1}{\gamma}.$$

Аналогічно можна довести виконання умов (7.7) та (7.10).

Оскільки $D(p)$ є спадною, то

$$\frac{dD}{dp} < 0 \Rightarrow \left(\frac{dD}{dp}\right)^{-1} < 0.$$

Оскільки $S(p)$ є зростаючою, то

$$\frac{dS}{dp} > 0 \Rightarrow \left(\frac{dS}{dp}\right)^{-1} > 0.$$

Унаслідок цього обидві нерівності (7.7) та (7.10) виконуються.

Можна зробити висновок, що моделі Л. Вальраса та А. Маршалла дають однаковий результат для нормального випадку (функція попиту – спадна, а функція пропозиції – зростаюча).

Розглянемо динаміку поведінки ціни, тобто її асимптотичну стійкість. Згідно з моделлю Л. Вальраса маємо:

$$\dot{p} = f(D(p) - S(p)), \tag{7.13}$$

де $\dot{p} = \dfrac{dp(t)}{dt}$; f – функція надлишкового попиту.

Функція f має той самий знак, що і величина надлишкового попиту; $f(0)=0$, тобто нульове значення надлишкового попиту свідчить про те, що система знаходиться у стані рівноваги; $f'(0)>0$, тобто при переході від від'ємних до додатних значень функція зростає.

Для розв'язку диференціального рівняння (7.13) необхідно знати точний вигляд функцій *f, D, S*. Для спрощення розрахунків лінеаризуємо функції шляхом розкладу у ряд Тейлора до першого степеня в околі точки рівноваги ($D=S$, $p=p^*$):

$$\dot{p}=c(D(p)-S(p))=c(\varphi(p-p^*)+D^*-\gamma(p-p^*)+S^*), \qquad (7.14)$$

де $c=f'(0)$;

$$\varphi=\left(\frac{dD}{dp}\right)\Bigg|_{p=p^*};$$

$$\gamma=\left(\frac{dS}{dp}\right)\Bigg|_{p=p^*}.$$

У стані рівноваги $D^*=S^*$, тому

$$\dot{p}=c(\varphi-\gamma)(p-p^*), \qquad (7.15)$$

$$\dot{p}-c(\varphi-\gamma)p=-c(\varphi-\gamma)p^*. \qquad (7.16)$$

Рівнянню (7.16) відповідає однорідне рівняння:

$$\dot{p}-c(\varphi-\gamma)p=0. \qquad (7.17)$$

Характеристичний корінь рівняння:

$$\lambda=c(\varphi-\gamma). \qquad (7.18)$$

Загальний розв'язок рівняння:

$$p(t)=A(t)e^{c(\varphi-\gamma)t}. \qquad (7.19)$$

Підставляючи вираз (7.19) у (7.16) отримаємо:

$$A'(t)e^{c(\varphi-\gamma)t}+A(t)c(\varphi-\gamma)e^{c(\varphi-\gamma)t}-c(\varphi-\gamma)e^{c(\varphi-\gamma)t}=-c(\varphi-\gamma)p^*,$$

$$A'(t)=-c(\varphi-\gamma)p^*e^{-c(\varphi-\gamma)t},$$

$$A(t)=p^*e^{-c(\varphi-\gamma)t}+C. \qquad (7.20)$$

Для функції ціни $p(t)$ маємо:

$$p(t) = p^* + Ce^{c(\varphi-\gamma)t}, \tag{7.21}$$

де константу C знаходимо із умов:

$$p(0) = p_0 = p^* + Ce^0 \Rightarrow C = p_0 - p^*.$$

Константа C дорівнює початковому відхиленню ціни від стану рівноваги.

Отже, остаточно отримаємо:

$$p(t) = (p_0 - p^*)e^{c(\varphi-\gamma)t} + p^*. \tag{7.22}$$

Рівновага є асимптотично стійкою, якщо при збільшенні t ціна $p(t) \to p^*$. Така ситуація можлива, коли

$$\Delta p = p(t) - p^* \to 0.$$

Відповідно до формули (7.22) $\Delta p \to 0$, якщо $(p_0 - p^*)e^{c(\varphi-\gamma)t} \to 0$, а це можливо лише за умови $c(\varphi-\gamma) < 0$. Оскільки $c = f'(0) > 0$, то отримуємо умову збіжності $\varphi - \gamma < 0$, яка збігається з умовою (7.11).

Аналогічно для моделі А. Маршалла маємо диференціальне рівняння:

$$\dot{q} = g(p_D(q) - p_S(q)), \tag{7.23}$$

де $\dot{q} = \dfrac{dq(t)}{dt}$; g – функція, знак якої співпадає зі знаком її аргументу; $g(0) = 0$; $g'(0) > 0$.

Далі отримаємо:

$$q(t) = Ae^{k\left(\frac{1}{\varphi}-\frac{1}{\gamma}\right)t} + q^*,$$

$$k = g'(0) > 0,\ A = q(0) - q^*. \tag{7.24}$$

Умова стійкості має вигляд:

$$\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\gamma} < 0.$$

Такі самі результати можна отримати, використовуючи теорему Лагранжа про стійкість. Для цього достатньо перевірити стійкість розв'язку однорідного рівняння (7.17). Розглянемо функцію $V(p) = p^2$, яка має такі властивості:

$$V(0) = 0,$$

$$V(p) > 0, \ p \neq 0,$$

$$V'(p) = 2pp' = ppc(\varphi - \gamma) = p^2 c(\varphi - \gamma).$$

Для того, щоб виконувалась третя умова теореми Лагранжа, необхідно, щоб $\varphi - \gamma < 0$, що збігається з умовою (7.11).

Моделі Л. Вальраса та А. Маршалла не завжди дають однаковий результат. У „простих ненормальних" ситуаціях, коли одна із функцій попиту чи пропозиції не є типовою, результати застосування моделей дають суперечливі умови стійкості. У „повністю ненормальних" ситуаціях, коли і функція попиту, і функція пропозиції не є типовими, результати застосування моделей збігаються.

Стійкість рівноваги суттєво ускладнюється, якщо розглядати запізнення реакції попиту чи пропозиції на зміну ціни. Такі процеси аналізують за допомогою павутиноподібної моделі ринку.

Проаналізуємо стійкість загальної рівноваги Л. Вальраса. У дійсності функції попиту та пропозиції товару залежать від цін на всі товари, тобто надлишковий попит на деякий товар j є функцією від величин цін на всі товари на ринку:

$$E_j = E_j(p_1, \ldots, p_m), \quad j = \overline{1, m}, \tag{7.25}$$

де E_j – надлишковий попит на товар j.

Стан рівноваги означає, що надлишковий попит на всі товари дорівнює нулю. Цьому стану відповідає вектор рівноважних цін p^*.

Назвемо стійкість ***недосконалою***, якщо при зміні ціни товару j зміни у цінах на решту товарів є такими, що на всіх інших ринках рівновага відновилась.

Умова стійкості означає, що ціна зумовлює зміну власного надлишкового попиту у протилежному напрямку, тобто

$$\frac{dE_j}{dp} < 0\,. \qquad (7.26)$$

Знайдемо умову рівноваги недосконалої стійкості. У точці рівноваги матимемо

$$dE_j = a_{j1}dp_1 + a_{j2}dp_2 + \ldots + a_{jm}dp_m, \quad j = \overline{1,m}, \qquad (7.27)$$

де $a_{jk} = \left.\dfrac{dE_j}{dp_k}\right|_{p=p^*}$.

Припустимо, що ціна товару j змінилась, а інші ціни також змінилися відповідно до умов недосконалої стійкості. Тоді отримаємо систему із m рівнянь з m невідомими dp_i:

$$\begin{cases} dE_j = a_{j1}dp_1 + a_{j2}dp_2 + \ldots + a_{jm}dp_m, \\ dE_k = a_{j1}dp_1 + a_{j2}dp_2 + \ldots + a_{jm}dp_m = 0, \quad k = \overline{1,m}, \quad k \neq j. \end{cases} \qquad (7.28)$$

Розв'язавши систему, отримаємо:

$$dp_j = dE_j \cdot \frac{D_{jj}}{D}, \qquad (7.29)$$

де $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}$ – якобіан функції надлишкового попиту;

D_{jj} – головний мінор (m-1)-го порядку визначника D.

Із (7.29) отримуємо:

$$\frac{dE_j}{dp_j} = \frac{D}{D_{jj}}\,. \qquad (7.30)$$

Враховуючи умову (7.26), матимемо, що $\dfrac{D}{D_{jj}} < 0$, і відповідно величини D та D_{jj} повинні мати різні знаки для будь-якого j.

Назвемо стійкість ***досконалою***, якщо при зміні ціни одного товару виконується одна із умов:

1) ціни на решту товарів залишаються незмінними;

2) підмножина із k цін відновлює рівновагу, а решта $(m$-k-$1)$ цін залишаються незмінними.

Стійкість у першому випадку означає, що

$$\begin{cases} dE_j = a_{jj} dp_j, \\ dE_k = a_{kj} dp_j, \quad k = \overline{1,m}, \quad k \neq j, \end{cases}$$

$$\frac{dE_j}{dp_j} = a_{jj}, \tag{7.31}$$

$$a_{jj} < 0. \tag{7.32}$$

Для визначення умов стійкості у другому випадку припустимо, що ціна p_j змінюється, а ціна p_h змінюється так, щоб відновити рівновагу на ринку h. Тоді отримаємо:

$$\begin{cases} dE_j = a_{jj} dp_j + a_{jh} dp_h, \\ dE_h = a_{hj} dp_j + a_{hh} dp_h = 0. \end{cases} \tag{7.33}$$

Розв'яжемо цю систему відносно dp_j:

$$dp_j = \frac{\begin{vmatrix} dE_j & a_{jh} \\ 0 & a_{hh} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jh} \\ a_{hj} & a_{hh} \end{vmatrix}} = dE_j \frac{a_{hh}}{\begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jh} \\ a_{hj} & a_{hh} \end{vmatrix}}. \tag{7.34}$$

Звідки

$$\frac{dE_j}{dp_j} = \frac{\begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jh} \\ a_{hj} & a_{hh} \end{vmatrix}}{a_{hh}}. \tag{7.35}$$

Враховуючи умови (7.26) та (7.32) можна стверджувати, що

$$\begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jh} \\ a_{hj} & a_{hh} \end{vmatrix} > 0. \tag{7.36}$$

Умова (7.36) повинна виконуватися для будь-якої пари (j,h) оскільки в процесі можуть брати участь будь-які два ринки.

Унаслідок цього всі головні мінори другого порядку визначника D повинні бути додатними.

Для загального випадку необхідною та достатньою умовою досконалої стійкості є те, що всі головні мінори r-го порядку якобіана функції надлишкового попиту D повинні мати знак $(-1)^r$, $r=1,\ldots,m$.

Для визначення умов асимптотичної стійкості розглянемо систему диференціальних рівнянь:

$$\dot{p}_j = F_j(E_j(p_1,\ldots,p_m)), \quad j=\overline{1,m}, \tag{7.37}$$

де $\dot{p}_j = \dfrac{dp_j(t)}{dt}$; функції F_j мають той самий знак, що і аргумент;

$$F_j(0)=0;$$

$$\left.\frac{dF_j}{dE_j}\right|_{E_j=0} > 0\,.$$

Здійснимо лінеаризацію рівнянь (7.37) в околі точки рівноваги:

$$(p_j - p_j^*)' = k_j a_{j1}(p_1 - p_1^*) + k_j a_{j2}(p_2 - p_2^*) + \ldots + k_j a_{jm}(p_m - p_m^*), \quad j=\overline{1,m}, \tag{7.38}$$

де $k_j = \left.\dfrac{dF_j}{dE_j}\right|_{E_j=0}$; $a_{jk} = \dfrac{dE_j}{dp_k}$; p_j^* - ціна рівноваги для товару j.

Позначимо

$$b_{jk} = k_j a_{jk}\,,$$

$$\overline{p}_j = p_j - p_j^*\,.$$

Тоді систему (7.38) можна записати у вигляді:

$$\dot{\overline{p}} = B\,\overline{p}\,, \tag{7.39}$$

де $\dot{\overline{p}}$ – матриця-стовпець $\left(\dfrac{d\overline{p}_1}{dt}, \dfrac{d\overline{p}_2}{dt}, \ldots, \dfrac{d\overline{p}_n}{dt},\right)^T$;

$B = (b_{jk})$, $j = \overline{1,m}$; $k = \overline{1,m}$ – квадратна матриця розмірності $m \times m$;

$\overline{p}$ – матриця-стовпець $(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \ldots, \overline{p}_m)$.

Загальний розв'язок системи:

$$\overline{p}(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i K_i e^{\lambda_i t}, \tag{7.40}$$

де λ_i – власні числа матриці B;

K_i – власні вектори матриці B.

Асимптотична стійкість означає, що $\lim\limits_{t \to \infty} \overline{p}_t = 0$ і дійсні частини всіх власних чисел розв'язку (7.40) повинні бути від'ємними.

У частковому випадку для двох ринків характеристичне рівняння системи має вигляд:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 .$$

Умови досконалої стійкості (7.32) та (7.36) в цьому випадку є достатніми умовами асимптотичної стійкості. Проте для моделей вищої розмірності ці умови не є ані необхідними, ані достатніми, за винятком особливих ситуацій, якими можуть бути: симетрія ($a_{ij} = a_{ji}$); чиста взаємозамінність ($a_{ii} < 0$, $a_{ij} > 0$); вирівнюючий вплив ціни ($a_{ii} < 0$).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Аронович А.Б., Афанасьев М.Ю., Суворов Б.П.* Сборник задач по исследованию операций. – М.: Изд-во Москов. гос. ун-та, 1997.
2. *Бандура О.В.* Деякі аспекти аналізу макроекономічної динаміки: ресурсна (енергетична) модель економічного циклу. – Миколаїв: ІЛЛІОН, 2004.
3. *Вагнер Г.* Основы исследования операций: В 2 т. – М.: Мир, 1972.
4. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. – М.: Сов. радио, 1972.
5. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. – М.: Мир, 1985.
6. *Гранберг А.Г.* Динамические модели народного хозяйства: Учеб. пособие. – М.: Экономика, 1985.
7. *Грешилов А.А.* Как принять наилучшее решение в реальных условиях. – М.: Радио и связь, 1991.
8. *Грубер Й.* Эконометрия: Учебное пособие. – Киев, 1996. – Т.1. Введение в эконометрию.
9. *Джонстон Дж.* Эконометрические методы. –М.: Статистика, 1988.
10. *Дрейпер Смит.* Прикладной регрессионный анализ. В 2 т. – М.: Мир, 1988.
11. *Єлейко В.* Основи економетрії: У 2 ч. – Львів: Марка Лтд, 1995.
12. *Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н.*, Математические методы в экономике: Учебник / Под общ. ред. д.э.н., проф. А.В.Сидоровича. – М.: Дело и Сервис , 2004.
13. *Здрок В.В.* Прикладна економетрія: У 2 ч. Ч. I. Симультативні моделі: Навч. посібник. – Львів: Видавн. центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004.
14. *Здрок В.В., Лагоцький Т.Я.* Прикладна економетрія: У 2 ч. Ч. II. Дистрибутивно-лагові та авторегресивні моделі: Навч.

посібник. – Львів: Видавн. центр ЛНУ імені Івана Франка, 2005.
15. Исследование операций: В 2 т. / Под ред. *Дж. Моццера, С. Элмаграби*. – М.: Мир, 1981. – Т. 1. Методологические основы и математические методы.
16. Исследование операций: В 2 т. / Под ред. *Дж. Моццера, С. Элмаграби*. – М.: Мир, 1981. – Т. 2. Методологические основы и математические методы.
17. *Кобринский Н.Е., Майминас Е.З., Смирнов А.Д.* Экономическая кибернетика. –М.: Экономика., 1982.
18. *Козицький В.А., Лавренюк С.П., Олісневич Н.О.* Основи математичної економіки. Теорія споживання: Навч. посібник. – Львів: Піраміда, 2004.
19. *Козицький В.А., Лавренюк С.П., Олісневич Н.О.* Основи математичної економіки. Теорія фірми: Навч. посібник. – Львів: Піраміда, 2005.
20. *Корольов О.А.* Економетрія: Навч. посібник. – К.: Київський національний торгово-економічний університет, 2000.
21. *Кофман А., Фор Р.* Займёмся исследованием операций. – М.: Мир, 1968.
22. *Кочура Є.В., Косарєв В.М.*, Моделювання макроекономічної динаміки: Навч. посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2003.
23. *Красс И.А.* Математические модели экономической динамики.– М.: Советское Радио, 1985.
24. *Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И.* Высшая математика. Математическое программирование. – Минск: Вышэйш. шк., 1994.
25. *Лук'яненко І.Г., Краснікова Л.І.* Економетрика: Підручник. – К.: Знання, 1998.
26. *Лысенко Ю.Г., Петренко В.Л.* и др. Экономическая динамика: Учеб. пособие. – Донецк: ДонГУ, 2000.
27. *Лысенко Ю.Г., Петренко В.Л., Забродский В.А.* и др. Экономическая кибернетика: Учеб. пособие. – Донецк: ДонГУ, 1999.
28. *Марюта А.Н., Бойцун Н.Е.* Статистические методы и модели в экономике. – Днепропетровск: Пороги, 2002.

29. Моделирование экономической динамики: Учеб. пособие / *Клебанова Т.С., Дубровина Н.А., Полякова О.Ю., Раевнева Е.В.* и др.: 2-е изд., стереотип. – Харьков: Изд.дом „ИНЖЭК”, 2005.
30. *Наконечний С.І., Терещенко Т.О., Романюк Т.П.* Економетрія. –К.: КНЕУ, 2000.
31. *Панчишин С.М.* Макроекономіка: Навч. посібник. –К.: Либідь, 2001.
32. *Раяцкас Р.Л., Плакунов М.К.* Производственные функции в экономическом анализе. – Вильнюс: Минтис, 1984.
33. Статистические методы анализа экономической динамики /Под ред. *Рябушкина Т.В., Френкеля А.А.* –М.: Наука, 1983.
34. *Таха Х.* Введение в исследование операций: В 2 т. – М.: Мир, 1985.– Т. 1.
35. *Таха Х.* Введение в исследование операций: В 2 т. – М.: Мир, 1985. – Т. 2.
36. *Фромкис В.А.* Введение в теорию и методы оптимизации для экономистов. – СПб: Питер, 2002.
37. *Черников Д.А.* Темпы и пропорции экономического роста. – М.: Экономика , 1982.

Зміст

Навчальне видання

Здрок Валентин Володимирович

Паславська Ірина Мирославівна

МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

Редактор *Л. Макітринська*

Технічний редактор *С.Сеник*

Комп'ютерне верстання *Н. Мрака*

Видруковано з готових діапозитивів у книжковій друкарні «КОЛО»
(Свідоцтво серії ДК № 498 від 20.06.2001 року)
вул. Бориславська, 8, м. Дрогобич, Україна, 82100,
тел.: +380 3244 29060, ел. пошта: kolodruk@gmail.com
Замовлення № 1478

Підп. до друку 05 .09.2007. Формат 60×90/16. Папір друк.
Друк на різогр. Умовн. друк. арк. 15,3. Обл.-вид. арк. 15,9.
Тираж 500 прим. Зам.

Видавничий центр Львівського національного університету
імені Івана Франка. 79000 Львів, вул. Дорошенка, 41