Б. В. Гриньов, І. К. Кириченко

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

ПІДРУЧНИК ДЛЯ ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ

ГІМНАЗІЯ

Б. В. Гриньов
І. К. Кириченко

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для вищих технічних навчальних закладів

Затверджено Міністерством освіти і науки України

Харків
«Гімназія»
2008

УДК 378:516
ББК 22.151.54я73
Г 85

Видано за рахунок державних коштів
Продаж заборонено

Затверджено
Міністерством освіти і науки України
(Лист № 1.4/18–Г–1697.1 від 15.10.07 р.)

Гриньов Б. В., Кириченко І. К.
Г 85 Аналітична геометрія: Підруч. для вищих техн. навч. закладів.— Харків: Гімназія, 2008.— 340 с.
ISBN 978-966-8319-92-1.

Підручник є третьою частиною першого тому загального курсу вищої математики. У третій книзі розглядаються загальні розділи аналітичної геометрії: системи координат, лінії на площині, пряма лінія на площині, лінії другого порядку, площина в просторі, пряма лінія в просторі, пряма лінія та площина в просторі, поверхні та лінії в просторі, геометрія арифметичного простору. Підручник містить теоретичні відомості, доведення теорем, короткі історичні довідки щодо виникнення основних понять, термінології та символіки. Викладання теоретичного матеріалу ілюструється великою кількістю прикладів, значна частина яких є його продовженням. Наприкінці кожної глави наведено вправи для самостійного закріплення пройденого матеріалу.

Пропонується студентам інженерно-технічних та інженерно-педагогічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 378:516
ББК 22.151.54я73

ISBN 978-966-8319-92-1

ЗМІСТ

... У величезному саду геометрії кожен може підібрати собі букет за смаком

Давід Гільберт

Аналітична геометрія як наука виникла в першій половині XVII століття. Основи її були закладені французьким математиком Ферма (1601–1665) та видатним французьким філософом, математиком і фізиком Рене Декартом (1596–1650), якого і вважають засновником аналітичної геометрії. Довгий час аналітичну геометрію називали "декартовою геометрією".

З другої половини XVII століття геометричні об'єкти в аналітичній геометрії почали вивчати за допомогою алгебри. Це нововведення, на той час розвитку математики, належить французькому математику Вієту (1540–1603), якому, до речі, належить і сам вираз "аналітична".

Зараз аналітична геометрія розглядає методи дослідження, в основі яких лежить поняття координат. Саме в такому значенні ця наука бере початок від Ісаака Ньютона (1643–1727) після появи у світ 1736 року його книги «Geometria Analytica» ("Аналітична геометрія»).

Метод координат передбачає визначення положення точки на прямій, площині чи в просторі відповідно однією, двома чи трьома координатами. При цьому кожній лінії чи поверхні відповідає одне або декілька рівнянь, які є зв'язуючим ланцюгом координат будь-якої точки геометричного об'єкта, що вивчається.

Таким чином, геометричним властивостям ліній чи поверхонь відповідають алгебраїчні співвідношення, які дозволяють визначати положення та форму самої лінії чи поверхні й зрештою дають змогу вивчати геометричні об'єкти алгебраїчним, тобто "аналітичним" за виразом Вієта, методом.

Глава 1
Системи координат

§ 1.1 ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПРЯМІЙ

Розглянемо пряму лінію (рис. 1.1).

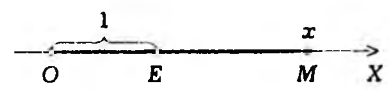


Рис. 1.1

Виберемо на прямій точку O, яку будемо називати початком відліку. Будемо вважати напрям зліва направо додатним, а протилежний — від'ємним. Домовимося додатний напрям позначати стрілкою. Пряма, на якій обрано додатний напрям, називається *віссю* й позначається OX. Частина прямої, що обмежена двома точками, називається *відрізком*. Візьмемо на прямій OX довільну точку M. Відрізок OM, як видно з рис. 1.1, напрямлений у додатний бік, вздовж осі OX. Число x називається *координатою* точки M. Кожній точці осі OX відповідає єдине дійсне число x — її координата, і, навпаки, кожному дійсному числу x відповідає єдина точка осі, тобто між точками осі й дійсними числами — їх координатами, існує взаємно однозначна відповідність. Виберемо на прямій OX одиницю масштабу, нехай це буде довжина відрізка OE.

Пряма лінія, на якій вибрано початок відліку, додатний напрям та одиницю масштабу, називається числовою віссю.

Довжину відрізка у вибраному масштабі будемо позначати $|x|$ або OM. Число x, яке дорівнює величині відрізка OM на числовій осі, називається *декартовою координатою* точки M.

Напрямленим називається відрізок, в якого зазначені початок і кінець. Напрям відрізка є напрям від точки початку до кінцевої точки. Якщо початком є точка B, а кінцем точка C, то напрямлений відрізок будемо позначати символом $\overline{BC}$.

На рис. 1.2 зображені напрямлені відрізки $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ і $\overline{EF}$. Видно, що напрям $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ однаковий і збігається з напрямом осі, а $\overline{FE}$ має протилежний напрям.

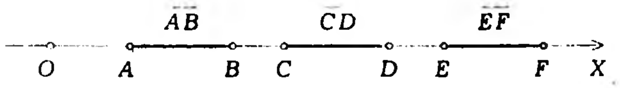


Рис. *1.2*

Величиною напрямленого відрізка називається довжина відрізка, взята зі знаком плюс, якщо напрямки відрізка та осі збігаються й навпаки — зі знаком мінус, якщо їхні напрямки протилежні.

Отже, відрізки $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ мають додатні величини, а відрізок $\overline{FE}$ має від'ємну величину. Відрізок, в якого початок і кінець збігаються, називається *нульовим відрізком* і має нульову величину. Очевидно, що протилежні відрізки, наприклад, $\overline{FE}$ і $\overline{EF}$, мають рівні довжини, але протилежні величини.

У зв'язку зі сказаним, можна ввести також таке означення декартових координат на прямій: декартовою координатою точки M називають число x, що дорівнює величині напрямленого відрізка $\overline{OM}$.

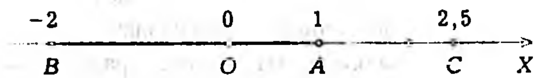


Рис. *1.3*

Два напрямлених відрізки називаються *рівними*, якщо після переміщення будь-якого з них уздовж спільної осі їх початки та кінці збігаються.

Розглянемо тепер поняття суми напрямлених відрізків і добутку відрізка на число.

На рис. 1.2 зображені відрізки $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$. Якщо сумістити кінець першого (точку B) з початком другого (точку C), то одержимо напрямлений відрізок $\overline{AD}$, який називається *сумою* відрізків $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$. Тобто:

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} . \qquad (1.1)$$

Добутком напрямленого відрізка $\overline{AB}$ на число λ називається відрізок $\overline{AM}$, довжина якого є $|\lambda| \cdot AB$, а напрям збігається (протилежний) із напрямком $\overline{AB}$, якщо $\lambda > 0$ $(\lambda < 0)$, тобто:

$$\overline{AM} = \lambda \overline{AB} . \qquad (1.2)$$

На рис. 1.3 точка A має координату $(+1)$, точка C — $(+2,5)$, а точка B — (-2).

Далі будемо використовувати такі позначення: $A(1)$, $C(2,5)$, $B(-2)$, а для довільної точки M — $M(x)$.

Розглянемо на числовій осі дві точки $A(x_1)$ і $B(x_2)$. Установимо зв'язок між координатами x_1, x_2, величиною відрізка $\overline{AB}$ і його довжиною. Згідно з (1.1) величини відрізків OA, OB і AB пов'язані співвідношенням:

$$OA + AB = OB$$

або

$$x_1 + AB = x_2 ,$$

звідки одержимо:

$$AB = x_2 - x_1 . \qquad (1.3)$$

Отже, величина AB напрямленого відрізка $\overline{AB}$ дорівнює різниці координат кінця та початку відрізка.

Згідно з означенням величина відрізка AB може відрізнятися від довжини (додатного числа) лише знаком, отже:

$$d = |AB| = |x_2 - x_1| \qquad (1.4)$$

є *відстань* між точками $A(x_1)$ і $B(x_2)$.

Інколи відстань між точками AB з метою конкретизації точок позначають d_{AB}. Таким чином, *відстань між двома довільними точками числової осі дорівнює абсолютній величині різниці їх координат.*

Приклад.

1. Обчислити величини відрізків $\overline{AB}$, $\overline{BA}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$, а також відстані між точками A і B, B і C, C і D, якщо $A(-5)$, $B(1)$, $C(2)$ і $D(4)$.

Згідно з формулою (1.3) маємо:

$$AB = (+1) - (-5) = 6 ,$$
$$BA = (-5) - (+1) = -6 ,$$
$$CB = 1 - 2 = -1 ,$$
$$CD = 4 - 2 = 2 .$$

Відповідні відстані обчислимо за допомогою формули (1.4):

$$d_{AB} = |AB| = 6 \text{ (од. довжини)} ,$$
$$d_{BA} = |BA| = |-6| = 6 \text{ (од. довжини)}, \quad \text{тобто} \quad d_{AB} = d_{BA} ,$$
$$d_{CB} = |CB| = |-1| = 1 \text{ (од. довжини)} ,$$
$$d_{CD} = |CD| = 2 \text{ (од. довжини)} .$$

Розглянемо на числовій прямій дві задані точки $M_1(x_1)$ і $M_2(x_2)$. Нехай довільна точка $M(x)$ цієї прямої ділить відрізок M_1M_2 у деякому відношенні λ. Домовимося вважати, що відношення λ буде мати знак плюс, якщо ці відрізки напрямлені по прямій в один бік, і знак мінус, якщо їх напрями протилежні. Зі сказаного випливає, що відношення λ, в якому точка M ділить відрізок M_1M_2, буде додатним, коли точка M знаходиться на даній прямій між точками M_1 і M_2 (рис. 1.4 а), і від'ємним, якщо точка M знаходиться на прямій зовні відрізка M_1M_2 (рис. 1.4 б-в).

Знайдемо координату x точки M. Оскільки згідно з (1.4) $|M_1M| = x - x_1$ і $|MM_2| = x_2 - x$, то:

$$|\lambda| = \frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|} .$$

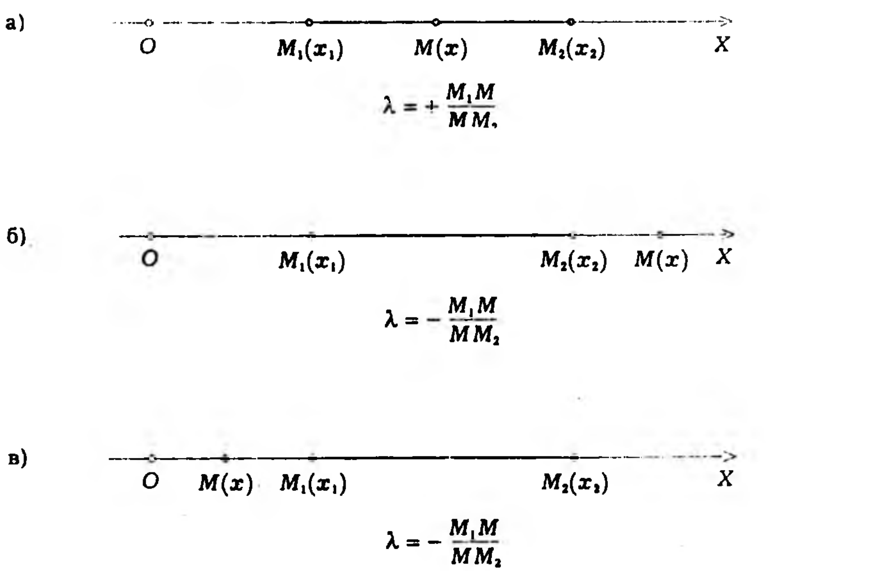


Рис. 1.4

Оскільки різниці $x - x_1$ і $x_2 - x$ мають однакові знаки, якщо відрізки $\overline{M_1M}$ і $\overline{MM_2}$ напрямлені в один бік по осі OX (рис. 1.4 а), й різні, коли напрями цих відрізків протилежні

(рис. 1.4 б, в), то відношення $(x - x_1)/(x_2 - x)$ дорівнює λ не тільки за абсолютною величиною, але й за знаком, тобто:

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x} .$$

Звідки знаходимо:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} . \qquad (1.5)$$

Формула (1.5) визначає *координати довільної точки, яка ділить відрізок за даним відношенням.*

Приклади.

2. **Визначити координату середини відрізка, кінцями якого є точки $M_1(x_1)$ та $M_2(x_2)$.**

Точка $M(x)$, що є серединою відрізка M_1M_2, ділить цей відрізок у відношенні $\lambda = 1$, оскільки $M_1M = MM_2$.

Тоді:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} ,$$

тобто *координата середини відрізка дорівнює півсумі координат його кінців.*

3. **Відрізок AB осі OX ділиться на чотири рівні частини точками $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, $M_3(x_3)$, $x_1 < x_2 < x_3$. Відомі координати точок A і M_3 (найближчої до точки B): $x_A = -5$, $x_3 = 4$. Знайти координати решти точок.**

Зобразимо точки на числовій осі.

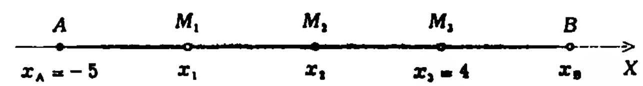


Рис. 1.5

Точка B ділить відрізок AM_3 у відношенні:

$$\lambda_B = -\frac{AB}{BM_3} = -4 .$$

Звідки за формулою (1.5):

$$x_B = \frac{x_A + \lambda_B x_3}{1 + \lambda_B} = \frac{-5 + (-4)4}{1 + (-4)} = 7 \ .$$

Точка M_1 ділить відрізок AM_3 у відношенні:

$$\lambda_1 = +\frac{AM_1}{M_1 M_3} = \frac{1}{2} \ .$$

Тоді:

$$x_1 = \frac{x_A + \lambda_1 x_3}{1 + \lambda_1} = \frac{-5 + \frac{1}{2}\cdot 4}{1 + \frac{1}{2}} = -2 \ .$$

Нарешті, точка M_2 ділить відрізок AM_2 у відношенні:

$$\lambda_2 = +\frac{AM_2}{M_2 M_3} = 2 \ .$$

Тоді:

$$x_2 = \frac{x_A + \lambda_2 x_3}{1 + \lambda_2} = \frac{-5 + 2\cdot 4}{1 + 2} = 1 \ .$$

Таким чином, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_B = 7$.

Насамкінець розглянемо випадок, коли з тих чи інших причин, за початок відліку числової осі доводиться замість раніше обраної точки O брати іншу точку O'. Така операція називається *перенесенням початку координат.*

Будемо позначати координати точок відносно "нового" початку відліку через x'. Координата точки O' стосовно "старого" початку відліку нехай буде x_0 (рис. 1.6).

З рис. 1.6, оскільки координати всіх трьох точок додатні, знаходимо:

$$x = x' + x_0 \quad \text{або} \quad x' = x - x_0 \ . \qquad (1.6)$$

Перша з цих формул виражає "стару" координату через "нову", а друга — "нову" через "стару". Ці формули, в чому легко переконатися, будуть правильними при будь-якому розміщенні точок O, O', M на осі OX.

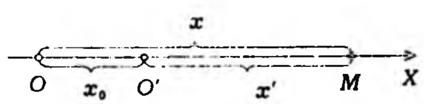


Рис. 1.6

§ 1.2 ПРЯМОКУТНІ ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ

Для визначення положення точки на площині розглянемо на площині дві взаємно перпендикулярні осі OX та OY (рис. 1.7).

Точку їх перетину (точку O) будемо вважати спільним початком відліку. Домовимося вважати напрями осі OX зліва направо та осі OY знизу вгору додатними. Задамо єдиний для обох осей масштаб, наприклад, нехай одиницею довжини буде відрізок OE.

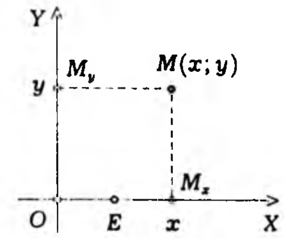


Рис. 1.7

Пара взаємно перпендикулярних осей зі спільним початком відліку та вибраним масштабом називається декартовою прямокутною системою координат на площині. Осі OX та OY називаються *координатними осями*, причому горизонтальна вісь OX називається *віссю абсцис*, а вертикальна вісь OY — *віссю ординат*. Точка O називається *початком* координат. Числа x та y, що є координатами точки M, називаються відповідно *абсцисою* та *ординатою* точки M. Якщо опущені перпендикуляри з точки M на осі позначити M_x та M_y, то проекції точки M на вісь абсцис — OM_x та вісь ординат — OM_y будуть її координатами, тобто $x = OM_x$, $y = OM_y$. Таким чином, можна сказати, що декартовими координатами на площині є величини напрямлених відрізків $\overline{OM_x}$ та $\overline{OM_y}$.

Отже, положення будь-якої точки M площини визначається положенням її проекцій на координатних осях, тобто координатами x і y, що будемо позначати $M = M(x;\ y)$.

Необхідно підкреслити, що порядок запису чисел x і y є істотним, тобто пари чисел $(x;\ y)$ і $(y;\ x)$ визначають, узагалі, різні точки площини. Отже, *довільній точці площини відповідає впорядкована пара дійсних чисел.*

Вище зазначалося, що між точками числової осі та множиною дійсних чисел існує взаємно однозначна відповідність. Виникає питання про відповідність між множиною точок площини та множиною впорядкованих пар дійсних чисел x і y (координат). Можна довести, що ця відповідність також взаємно однозначна.

Координатні осі ділять площину на чотири *квадранти* (рис. 1.8), або *чверті.*

Квадранти I і II (III і IV) утворюють верхню (нижню) півплощину, квадранти I і IV (II і III) відповідно — праву й ліву півплощини. Очевидно, що в межах кожного квадранта знаки обох координат зберігаються. Точки осі OX мають нульову ординату, а точки осі OY — нульову абсцису.

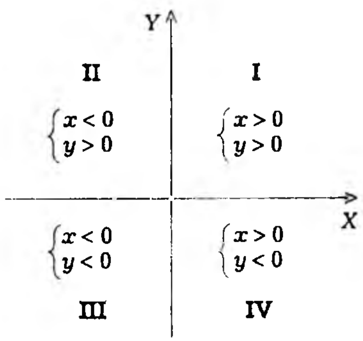


Рис. *1.8*

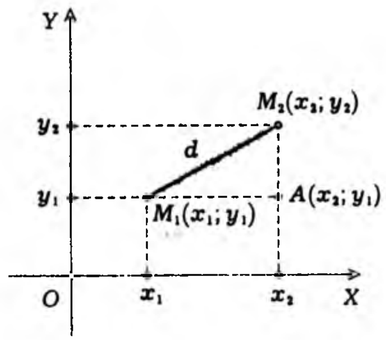


Рис. *1.9*

Обчислимо відстань на площині між довільними точками $M_1(x_1;\ y_1)$ та $M_2(x_2;\ y_2)$ (рис. 1.9).

Розглянемо прямокутний трикутник M_1M_2A, звідки:

$$d = M_1M_2 = \sqrt{M_1A^2 + AM_2^2}\ .$$

Оскільки $M_1A = x_2 - x_1$, $AM_2 = y_2 - y_1$, то остаточно відстань d між двома точками $M_1(x_1;\ y_1)$ та $M_2(x_2;\ y_2)$ визначається формулою:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ . \qquad (1.7)$$

Тобто, *відстань між двома точками на площині дорівнює кореню квадратному із суми квадратів різниць їх координат.*

В окремому випадку, коли точка M_1 збігається з початком координат, то припустивши у формулі (1.7) x_1, y_1 рівними нулю, а x_2, y_2 рівними x, y, одержимо формулу для відстані від початку координат до довільної точки $M(x;\ y)$ на площині:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}\ . \qquad (1.8)$$

Тобто, *відстань від довільної точки площини до початку координат дорівнює кореню квадратному із суми квадратів її координат.*

Приклади.

1. Знайти відстань від точки $A(1;\ 2)$ до початку координат.

Згідно з формулою (1.8) маємо:

$$d = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \ \text{(од. довжини)}\ .$$

2. Обчислити відстань між точками $A(2;\ 7)$ і $B(5;\ 3)$.

Згідно з (1.7) маємо:

$$d = \sqrt{(5-2)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 \ \text{(од. довжини)}\ .$$

Розглянемо на площині дві точки $M_1(x_1;\ y_1)$ та $M_2(x_2;\ y_2)$. Визначимо координати довільної точки $M(x;\ y)$, що ділить відрізок M_1M_2 в заданому відношенні λ (рис. 1.10).

Величина λ буде дорівнювати:

$$|\lambda| = \frac{M_1M}{MM_2}\ .$$

Знак λ залежить від того, де розташована точка M — усередині відрізка M_1M_2 чи зовні. Для випадку, зображеного на рисунку 1.10, $|\lambda| = \lambda$. Якщо спроектувати точки M_1, M, M_2 на вісь OX, то

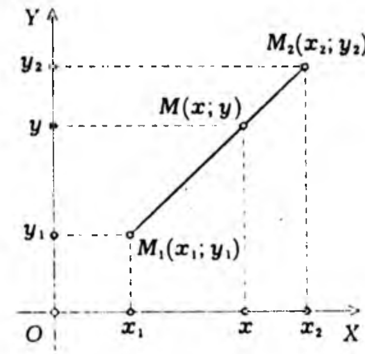


Рис. *1.10*

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}\ .$$

Аналогічно знаходимо:

$$\lambda = \frac{y - y_1}{y_2 - y}\ ,$$

звідки остаточно отримуємо:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\ . \qquad (1.9)$$

Зокрема при $\lambda = 1$, тобто коли точка $M(x;\ y)$ ділить відрізок навпіл, одержимо:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}\ . \qquad (1.10)$$

Приклад.

3. Знайти координати точки C перетину медіан трикутника, вершини якого знаходяться в точках $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, $M_3(x_3;\ y_3)$.

Побудуємо довільний трикутник $M_1M_2M_3$ (рис. 1.11). Розглянемо медіану M_1N. З означення медіани маємо:

$$x_N = \frac{x_2 + x_3}{2} \quad ;$$

$$y_N = \frac{y_2 + y_3}{2} \quad .$$

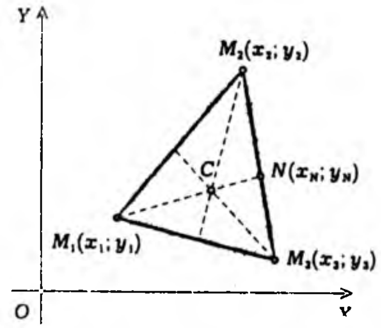


Рис. *1.11*

Як відомо зі шкільного курсу математики, точка перетину медіан ділить їх у відношенні 2:1, ураховуючи від відповідної вершини, тобто:

$$\lambda = \frac{M_1C}{CN} = 2 \quad .$$

Тоді, згідно з формулами (1.9), маємо:

$$x_C = \frac{x_1 + \lambda x_N}{1 + \lambda} = \frac{x_1 + 2x_N}{1 + 2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad ;$$

$$y_C = \frac{y_1 + \lambda y_N}{1 + \lambda} = \frac{y_1 + 2y_N}{1 + 2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \quad . \qquad (1.11)$$

Таким чином, *координати точки перетину медіан трикутника дорівнюють середньому арифметичному відповідних координат його вершин*. Цьому твердженню можна надати й фізичного змісту. Якщо ми візьмемо однорідну трикутну платівку, то точка перетину її медіан буде й точкою центра ваги цієї трикутної платівки.

4. Знайти координати точки M, яка ділить відрізок $\overline{AB}$ між точками $A(2;\ 4)$ і $B(-7;\ 5)$ у відношенні 1:2.

З умови маємо, що:

$$\lambda = \frac{AM}{MB} = \frac{1}{2} \quad ,$$

тоді, згідно з формулами (1.9), буде:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda} = \frac{2 + \frac{1}{2}\cdot(-7)}{1 + \frac{1}{2}} = -1 \quad ,$$

$$y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda} = \frac{4 + \frac{1}{2}\cdot 5}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{13}{3} \quad .$$

5. Знайти координати точки M, що ділить відрізок $\overline{AB}$, де $A(2;\ -3)$, $B(5;\ 4)$, на рівні частини.

З умови $AM = MB$, отже, $\lambda = \frac{AM}{MB} = 1$. Звідки одержимо:

$$x = \frac{2 + 1\cdot 5}{1 + 1} = \frac{7}{2} = 3{,}5\ ; \qquad y = \frac{-3 + 1\cdot 4}{1 + 1} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \quad .$$

Установимо зв'язок між координатами довільної точки в різних декартових системах координат на площині.

Розглянемо перенесення початку координат у нову точку, зберігаючи при цьому попередній напрям координатних осей. Таке перенесення називається *паралельним перенесенням координат*.

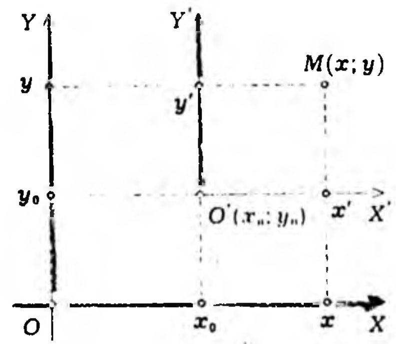


Рис. *1.12*

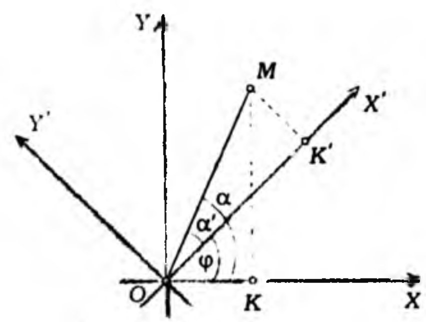


Рис. *1.13*

Нехай XOY є "стара", а $X'O'Y'$ — "нова" системи координат на площині. Припустимо, що вони мають однакову орієнтацію, тобто найкоротший поворот від осі OX до осі OY і від осі $O'X'$ до $O'Y'$ здійснюється в одному напрямку, наприклад, проти годинникової стрілки (такий напрям називається додатним). Нехай "нова" система $X'O'Y'$ одержана за допомогою паралельного перенесення вздовж осі OX на відстань x_0 і вздовж осі OY на відстань y_0 (рис. 1.12). Для зручності розглянемо випадок, коли $x_0 > 0$ і $y_0 > 0$.

Якщо $O'(x_0;\ y_0)$, то, як видно з рис. 1.12, координати довільної точки M у системах XOY та $X'O'Y'$ при паралельному перенесенні координат зв'язані співвідношеннями:

$$x = x' + x_0 \quad \text{або} \quad x' = x - x_0 \ ,$$
$$y = y' + y_0 \quad \text{або} \quad y' = y - y_0 \ . \quad (1.12)$$

Нехай тепер "нова" система координат $X'O'Y'$ одержана за допомогою повороту "старої" системи XOY навколо початку координат на кут φ у додатному напрямі (рис. 1.13). Побудуємо напрямлений відрізок $\overline{OM}$ і позначимо кути, утворені ним з осями OX та OX' відповідно через α та α'. Вони зв'язані з кутом φ співвідношенням:

$$\alpha = \alpha' + \varphi \ . \quad (1.13)$$

З прямокутних трикутників OKM та $OK'M$ маємо:

$$\begin{cases} OK = OM\cos\alpha\,, \\ MK = OM\sin\alpha \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} OK' = OM\cos\alpha'\,, \\ MK' = OM\sin\alpha'\,. \end{cases}$$

Але OK, MK — це "старі" координати точки M — x, y, а OK', MK' — "нові" координати точки M — x', y', тобто:

$$\begin{cases} x = OM\cos\alpha\,, \\ y = OM\sin\alpha \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x' = OM\cos\alpha'\,, \\ y' = OM\sin\alpha'\,. \end{cases}$$

Ураховуючи співвідношення (1.13), маємо:

$$x = OM\cos(\alpha' + \varphi) = OM(\cos\alpha'\cos\varphi - \sin\alpha'\sin\varphi) \ ,$$
$$y = OM\sin(\alpha' + \varphi) = OM(\cos\alpha'\sin\varphi + \sin\alpha'\cos\varphi) \ .$$

Звідси знаходимо формули, які виражають "старі" координати x та y через "нові" координати x' та y':

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\,, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \ . \end{aligned} \quad (1.14)$$

Легко переконатися, що в загальному випадку, коли координатна система $X'O'Y'$ одержана з XOY за допомогою і паралельного перенесення, і повороту, то замість осей (1.12) та (1.14), одержимо:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + x_0\,, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + y_0 \ . \end{aligned} \quad (1.15)$$

Таким чином, координати довільної точки в декартовій системі XOY лінійно виражаються через координати в будь-якій іншій декартовій системі.

Якщо з формул (1.14) знайти x' і y', то ми одержимо формули оберненого перетворення:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi\,, \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi \ . \end{aligned} \quad (1.16)$$

Як видно з формул (1.16), обернене перетворення є поворот координатних осей на кут φ у протилежному напрямі, тобто на кут $-\varphi$.

Формули (1.15) у цьому випадку набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi - x_0\,, \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi - y_0 \ . \end{aligned} \quad (1.17)$$

Таким чином, формули (1.12), (1.14), (1.16), що виражають паралельне перенесення й поворот координатних осей, є окремим випадком формул (1.15) та (1.17), які носять назву *лінійних перетворень площини* та можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}\,, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \ . \end{aligned} \quad (1.18)$$

Якщо число (визначник, складений з коефіцієнтів "старої" системи координат)

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0 \ ,$$

то перетворення називається *невиродженим* або *афінним*. Наприклад, перетворення (1.16) афінне, оскільки:

$$\Delta = \cos\varphi\cos\varphi - (-\sin\varphi)\sin\varphi = 1 \neq 0 \ .$$

Можна довести, що афінні перетворення мають такі **властивості:**

1. *Афінне перетворення є бієктивне відображення площини на себе.*
2. *Два послідовних афінних перетворення є афінне перетворення.*
3. *Перетворення, обернене до афінного, є афінне перетворення.*
4. *Афінне перетворення переводить пряму лінію в пряму лінію й не порушує паралельності прямих ліній.*

Отже, два послідовних повороти на кути φ_1 та φ_2 є афінне перетворення — поворот на кут $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Афінним перетворенням є також поворот на кут $-\varphi$, оскільки він здійснює перетворення обернене до (1.18).

§ 1.3 ПОЛЯРНІ КООРДИНАТИ

Крім декартових на площині можна побудувати велику кількість інших систем координат, тобто таких, які дають можливість характеризувати положення точки на площині за допомогою двох числових параметрів (координат). Після декартової системи координат найпоширенішою є так звана полярна система координат.

Для побудови полярної системи координат обирається точка O, яка називається *полюсом*, а також промінь (напіввідрізок) $\overline{OP}$, що виходить із полюса, який називається *полярною віссю*. На полярній осі задається масштаб (рис. 1.14).

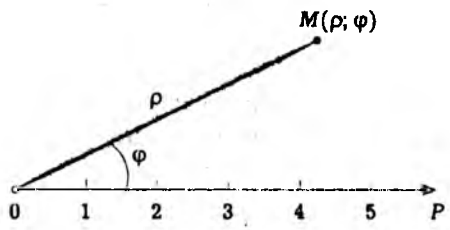


Рис. *1.14*

Положення будь-якої точки M площини (крім полюса) визначається її відстанню ρ до полюса O та кутом φ, на який треба повернути полярну вісь проти годинникової стрілки (додатний напрям), щоб сумістити її з променем $\overline{OM}$. Відстань ρ називається *полярним радіусом*, а кут φ — *полярним кутом* точки M. Полюс має нульовий полярний радіус, а його полярний кут невизначений.

Числа ρ і φ називаються *полярними координатами* точки M, що позначається $M(\rho;\ \varphi)$.

Якщо ми бажаємо, як і у випадку декартової системи координат, установити взаємно однозначну відповідність між точками площини та їх полярними координатами, то потрібно обумовити межі зміни значень ρ і φ. Для цього досить уважати, що ρ набуває тільки додатних значень, тобто $\rho > 0$, а кут φ від 0 до 2π, тобто $0 < \varphi \le 2\pi$ або від $-\pi$ до π, тобто $-\pi < \varphi \le \pi$.

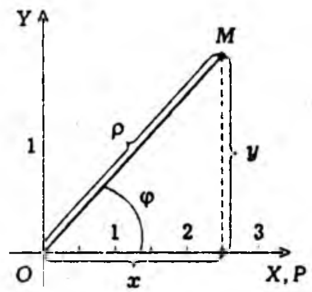


Рис. *1.15*

У деяких випадках доцільно розглядати полярні кути й більші за 2π, а також від'ємні кути.

Установимо зв'язок полярних і декартових координат.

Припустимо для зручності, що полюс полярної системи координат збігається з початком декартової системи координат, а полярна вісь збігається з додатною піввіссю OX (рис. 1.15).

Як видно з рисунка, зв'язок між декартовими координатами x, y та полярними координатами ρ, φ має вигляд:

$$x = \rho\cos\varphi\,, \qquad y = \rho\sin\varphi\ . \tag{1.19}$$

Формули оберненого переходу мають такий вигляд:

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}\,; \qquad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,; \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ . \tag{1.20}$$

Слід зазначити, що для визначення полярного кута недостатньо знати значення тільки $\sin\varphi$ або тільки $\cos\varphi$. Для обчислення φ необхідно знати ще й квадрант, де знаходиться точка M, який визначається знаками x і y, тобто знаками $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$ одночасно. Корисно також мати на увазі формулу

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{y}\ , \tag{1.21}$$

яку легко отримати з формул (1.19) або з рис. 1.15 безпосередньо.

Приклади.

1. Визначити декартові координати точки $M\left(2;\ \frac{3\pi}{4}\right)$.

Згідно з формулами (1.19), маємо:

$$x = \rho\cos\varphi = 2\cos\frac{3\pi}{4} = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}\ ,$$

$$y = \rho\sin\varphi = 2\sin\frac{3\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\ .$$

Таким чином, у декартовій системі координат матимемо

$$M(-\sqrt{2};\ \sqrt{2})\ .$$

2. Визначити полярні координати точки $M(2\sqrt{3};\ -2)$.

Згідно з формул (1.20) знаходимо:

$$\rho = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4\ ;$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}\ .$$

Звідки випливає, що $\varphi = -\pi/6 + 2\pi k$, де $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Значення $\varphi = -\pi/6$ називається головним значенням полярного кута. Таким чином, полярні координати точки M будуть:

$$\rho = 4, \quad \varphi = -\pi/6 \qquad \text{або} \qquad \rho = 4, \quad \varphi = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}.$$

3. Знайти полярні координати точок $A(1; \sqrt{3})$ і $B(2; -2)$.

Користуючись формулами (1.20), одержимо:

$$\rho_A = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Оскільки $\cos\varphi$ і $\sin\varphi$ додатні, то точка A знаходиться в першій чверті, тоді згідно з (1.21) маємо $\varphi_A = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \pi/3$, отже $A(2; \pi/3)$.

Аналогічно обчислюємо:

$$\rho_B = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Оскільки $\cos\varphi = x/\rho = 1/\sqrt{2} > 0$, а $\sin\varphi = y/\rho = -1/2 < 0$, то точка B знаходиться в четвертій чверті, отже:

$$\varphi = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} \qquad \text{або} \qquad \varphi = \frac{7\pi}{4}.$$

Остаточно маємо:

$$B\left(2\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{або} \qquad B\left(2\sqrt{2}; \frac{7\pi}{4}\right).$$

§ 1.4 ПРЯМОКУТНІ ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ В ПРОСТОРІ

Розглянемо три взаємно перпендикулярні осі OX, OY, OZ у просторі (рис. 1.16).

Осі OX, OY, OZ називаються відповідно осями *абсцис, ординат й аплікат*. Точка перетину осей O називається *початком* координат. Точку O будемо вважати за початок відліку на кожній координатній осі. Виберемо один і той же масштаб для всіх осей і виберемо на кожній з них додатний напрям. *Трійка взаємно перпендикулярних осей зі спільним початком відліку й однаковою одиницею масштабу називається декартовою прямокутною системою координат у просторі.*

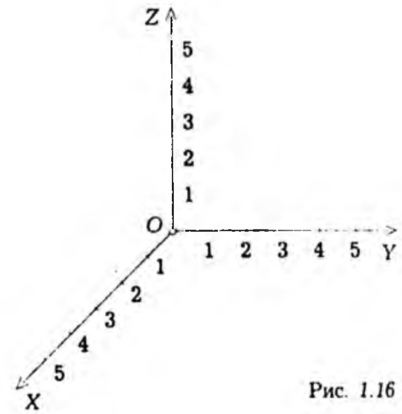


Рис. 1.16

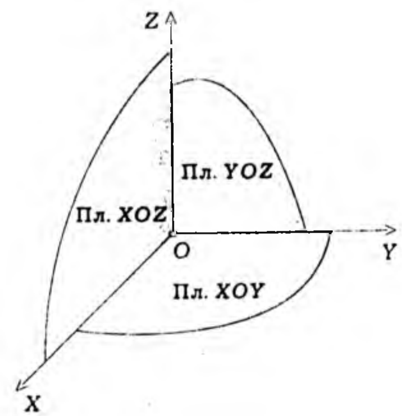


Рис. 1.17

У залежності від взаємної орієнтації осей OX, OY, OZ розрізняють дві системи прямокутних декартових координат у просторі — праву та ліву. У правій системі координат (рис. 1.16), якщо дивитися з боку додатного напряму осі OZ, поворот найкоротшим шляхом від додатної частини осі OX до додатної частини осі OY відбувається проти годинникової стрілки; у лівій системі координат навпаки — за годинниковою стрілкою.

Три координатні осі попарно визначають три *координатні площини* (рис. 1.17): площини XOY, XOZ та YOZ.

Якщо ми візьмемо довільну точку в просторі M й опустимо перпендикуляри на координатні осі OX, OY і OZ, та позначимо відповідні проекції M_x, M_y, M_z, то ми одержимо на осях координат напрямлені відрізки $\overline{OM_x}$, $\overline{OM_y}$, $\overline{OM_z}$ (рис. 1.18).

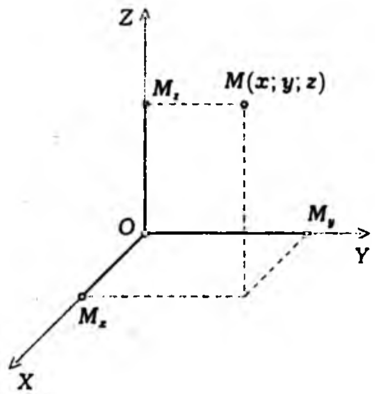


Рис. 1.18

Таким чином, декартовими координатами x, y і z точки M простору є величини напрямлених відрізків $\overline{OM_x}$, $\overline{OM_y}$ і OM_z відповідно, а їхні напрями визначають знаки цих координат. Отже, будь-якій точці в просторі відповідає впорядкована трійка дійсних чисел x, y, z, що позначається так: $M = M(x;\ y;\ z)$.

Очевидно, що точка, яка знаходиться на одній з координатних площин, має рівною нулю одну з трьох координат. Наприклад, точка $M(0;\ 1;\ -2)$ лежить у площині YOZ. Точка, яка знаходиться на одній із трьох координатних осей, має дві рівні нулю координати. Наприклад, точка $M_2(0;\ 4;\ 0)$ знаходиться на осі OY.

Три координатні площини ділять простір на вісім *октантів*, які в аналітичній геометрії нумеруються так, як показано на рис. 1.19.

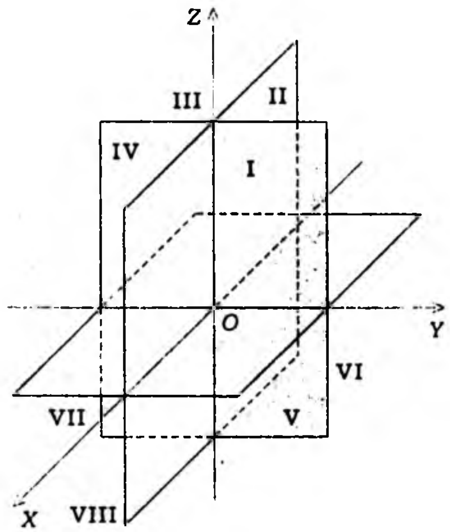


Рис. 1.19

Кожному октанту відповідає певна комбінація знаків координат, що можна записати у вигляді такої таблиці:

Октанти	x	y	z
I	+	+	+
II	−	+	+
III	−	−	+
IV	+	−	+
V	+	+	−
VI	−	+	−
VII	−	−	−
VIII	+	−	−

Комбінації знаків координат за октантами ніде не збігаються. Тому між точками простору з одного боку й упорядкованими трійками дійсних чисел x, y, z, тобто їх координатами, з іншого боку, існує взаємно однозначна відповідність.

Таким чином, декартові координати на прямій, площині та в просторі дозволяють установити взаємно однозначну відповідність між їхніми точками і, відповідно, множинами дійсних чисел, упорядкованих пар дійсних чисел і упорядкованих трійок дійсних чисел.

Розглянемо в просторі дві точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ та $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Легко переконатися, що M_1M_2 буде діагоналлю прямокутного паралелепіпеда, довжини ребер якого дорівнюватимуть $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$. Використовуючи відому теорему про квадрат діагоналі паралелепіпеда, одержимо формулу для відстані $d = M_1M_2$ між двома точками в просторі:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ . \quad (1.22)$$

Якщо на прямій M_1M_2 взяти довільну точку $M(x;\ y;\ z)$, яка ділить відрізок у відношенні $\lambda = M_1M\ /\ MM_2$, і розглянути проекції точок M_1, M, M_2 на осі OX, OY, OZ, то одержимо:

$$\lambda = \frac{M_{1x}M_x}{M_xM_{2x}} = \frac{M_{1y}M_y}{M_yM_{2y}} = \frac{M_{1z}M_z}{M_zM_{2z}}$$

або

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{z - z_1}{z_2 - z}\ .$$

Звідси знаходимо формули для координат довільної точки $M(x;\ y;\ z)$, яка ділить даний відрізок у заданому відношенні λ:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};\qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda};\qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}\ . \quad (1.23)$$

Приклад.

Знайти координати точки M, яка ділить відрізок $\overline{AB}$ між точками $A(1;\ 2;\ 3)$ та $B(3;\ 2;\ 1)$ у відношенні $1:2$.

З умови випливає, що $\lambda = AB/MB = 1/2$. Тоді згідно з (1.23), маємо:

$$x = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{1+\frac{1}{2}\cdot 3}{1+\frac{1}{2}} = \frac{5}{3}\ ;$$

$$y = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{2+\frac{1}{2}\cdot 2}{1+\frac{1}{2}} = 2\ ;$$

$$z = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda} = \frac{3+\frac{1}{2}\cdot 1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{7}{3}\ .$$

Тобто $M\left(\frac{5}{3};\ 2;\ \frac{7}{3}\right)$.

При паралельному перенесенні декартових координат у просторі координати "старої" системи $(x,\ y,\ z)$ і "нової" $(x',\ y',\ z')$ пов'язані співвідношеннями, аналогічними (1.12):

$$x = x' + x_0\,, \qquad y = y' + y_0\,, \qquad z = z' + z_0\ , \tag{1.24}$$

де $x_0,\ y_0,\ z_0$ — відстані перенесення початку координат на кожній з осей.

Формули для переходу від "старих" координат $(x,\ y,\ z)$ до "нових" $(x',\ y',\ z')$ при повороті однієї системи координат відносно другої на кут φ мають ті самі властивості, що й відповідні формули на площині ((1.14),(1.16)), але ми їх розглядати не будемо, оскільки їх виведення технічно значно складніше.

§ 1.5 ЦИЛІНДРИЧНІ КООРДИНАТИ

Положення точки $M(x;\ y;\ z)$ простору XYZ, однозначно визначається заданням трьох числових величин $x,\ y,\ z$. Утім, крім декартових координат, існують й інші види координатних систем, які визначають положення точки в просторі за допомогою трьох числових величин — її координат. Ця властивість є спільною для всіх просторових координатних систем, аналогічно тому, як ми вже бачили, що положення точки на площині (а в загальному випадку — на поверхні) визначається двома координатами, а на лінії — однією. Найпоширенішими просторовими координатами, після декартових, є циліндричні координати та сферичні координати. Розглянемо перші з них.

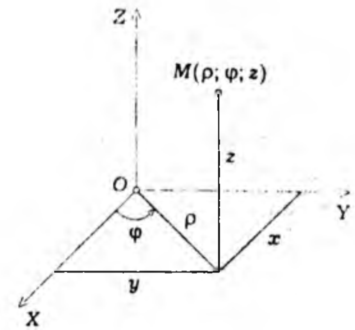


Рис. *1.20*

Циліндричною системою координат називаються координати $\rho,\ \varphi,\ z$, які, якщо сумістити їх початок з початком декартової системи координат, мають вигляд, зображений на рис. 1.20.

Азимутальний кут φ, розташований в площині XOY, бере свій відлік від додатного напряму осі OX проти годинникової стрілки. Тобто *циліндричні координати в просторі є полярні координати на площині, до яких добавляється третя просторова декартова координата* z.

Очевидно, що область зміни циліндричних координат є: $0 \le \rho < \infty$, $0 < \varphi \le 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Областю зміни азимутального кута φ замість $0 < \varphi \le 2\pi$ інколи вважають $-\pi < \varphi \le \pi$, при цьому кут φ відлічується проти годинникової стрілки від від'ємного напряму осі OX.

Зв'язок між циліндричними та декартовими координатами, якщо вони розташовані так, як показано на рис. 1.20, ураховуючи співвідношення (1.19), має вигляд:

$$x = \rho\cos\varphi\,, \qquad y = \rho\sin\varphi\,, \qquad z = z\ . \tag{1.25}$$

Циліндричні координати використовуються при розгляді різних задач, пов'язаних з тілами обертання, зокрема циліндрів, конусів тощо, причому вісь OZ звичайно розташовують уздовж їх осі обертання.

З'ясуємо, яким геометричним змістом володіє кожна з координат ρ, φ, z на конкретному прикладі циліндричної поверхні.

Нехай є круговий циліндр C (рис. 1.21). Тоді будь-яка його внутрішня точка M є точкою перетину трьох поверхонь: циліндричної поверхні c з радіусом, який дорівнює відстані точки M від осі циліндра C; півплощини P, що проходить через вісь циліндра C і через ту твірну c циліндра, на якій знаходиться точка M; площини Q, що проходить через точку M, перпендикулярно до осі циліндра C.

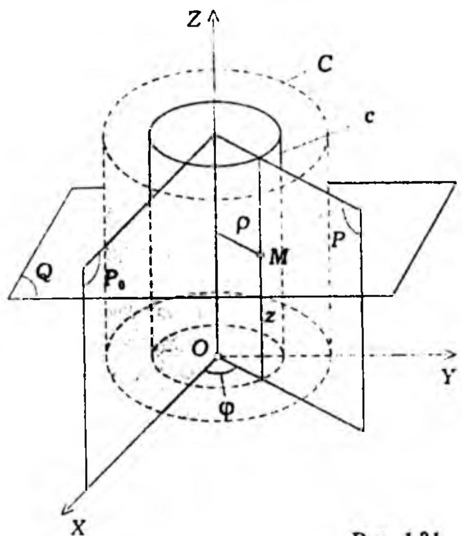


Рис. 1.21

Якщо позначити через ρ відстань точки M від осі циліндра C, через φ — кут, утворений півплощиною P, з півплощиною P_0, що відповідає початку відліку кута φ, а через z — відстань площини Q від основи циліндра C (z може бути як додатною величиною, так і від'ємною), то ми одержимо три координати ρ, φ, z, які повністю описують положення точки M у просторі, тобто $M(\rho;\ \varphi;\ z)$.

Таким чином, *циліндричні координати* ρ, φ, z *довільної точки простору, розташованої всередині будь-якої поверхні обертання, відповідно характеризують: відстань від осі обертання, кут оберту навколо осі обертання й зміщення вздовж осі обертання.*

§ 1.6 СФЕРИЧНІ КООРДИНАТИ

Сферичною системою координат називаються координати ρ, φ, ϑ, які, якщо сумістити їх початок з початком декартової системи координат, мають вигляд, зображений на рис. 1.22.

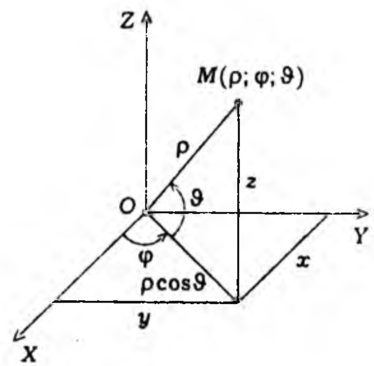


Рис. 1.22

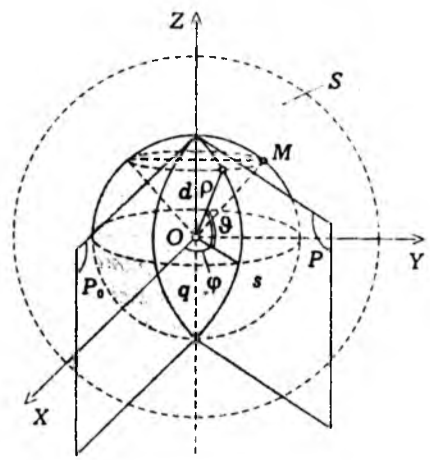


Рис. 1.23

З рис. 1.22 неважко знайти зв'язок між сферичними та декартовими системами координат:

$$x = \rho\cos\vartheta\cos\varphi, \qquad y = \rho\cos\vartheta\sin\varphi, \qquad z = \rho\sin\varphi\ . \qquad (1.26)$$

Областю зміни сферичних координат є: $0 \le \rho < \infty$, $0 < \varphi \le \le 2\pi$, $-\pi/2 < \vartheta \le \pi/2$.

Сферичні координати частіше всього використовуються при розгляді кола задач, пов'язаних зі сферичними та конічними поверхнями.

Розглянемо геометричний зміст сферичних координат на прикладі кулі. Нехай є куля S. Будь-яка її внутрішня точка M є точкою перетину трьох поверхонь (рис. 1.23): сфери s, з радіусом, який дорівнює відстані до точки M від центра O кулі s; півплощини P, що проходить через діаметр d кулі s і через точку M;

конічної поверхні, що проходить через точку M, віссю якої є діаметр d, а вершина якого знаходиться в центрі кулі S.

Якщо позначити через ρ відстань до точки M від центра кулі s (тобто радіус-вектор точки M); через φ — кут, що утворює півплощина P з півплощиною P_0 на момент початку відліку кута φ; через ϑ — кут нахилу твірної конуса до площини великого кола, перпендикулярного діаметру d, то ми одержимо сферичні координати ρ, φ, ϑ.

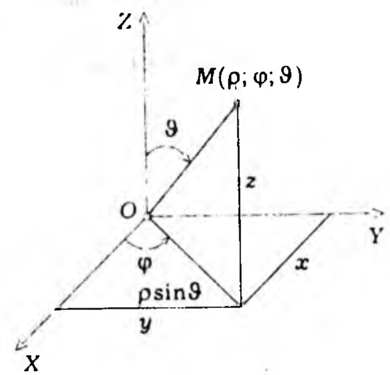


Рис. 1.24

Таким чином, *сферичні координати ρ, φ, ϑ будь-якої точки простору M, що розташована всередині сферичної поверхні, відповідно характеризують: довжину радіуса-вектора цієї точки, кут, утворений проекцією цього радіуса-вектора на площину великого круга, перпендикулярного діаметру кулі, та кут відхилу цього радіуса-вектора від площини великого круга.*

Сферичні координати, для випадку розташування довільної точки простору на сферичній поверхні, за схожістю форми Землі з формою кулі, називають ще географічними координатами, при цьому кут φ називається довготою, а кут ϑ — широтою даної точки.

Слід зазначити, що сферичні координати можна визначити ще й так, як показано на рис. 1.24.

Зв'язок між декартовими та сферичними координатами в цьому випадку матиме вигляд:

$$x = \rho \sin\vartheta \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\vartheta \sin\varphi, \qquad z = \rho \cos\vartheta . \qquad (1.27)$$

Областю зміни сферичних координат, зображених на рис. 1.24, є: $0 \le \rho < \infty$, $0 < \varphi \le 2\pi$, $0 \le \vartheta \le \pi$.

Порівнюючи даний варіант сферичних координат з попереднім, бачимо, що назву географічних у цьому випадку можна застосувати лише умовно, тому що відлік широти ϑ згідно з рис. 1.23 ведеться не від "екватора" до "полюсів", як у географії, а від "північного полюса" до "південного полюса". Дане порівняння дає можливість твердити, що означення сферичних координат згідно з рис. 1.22 є більш природним, що дає нам підставу користуватися ним і надалі.

Насамкінець зазначимо, що розглянуті нами декартові, циліндричні та сферичні координати є окремим випадком ортогональних координат, тобто таких координат, осі яких утворюють прямий кут. У загальному випадку можна ввести трійку будь-яких просторових координат, наприклад, u, v, w, які відповідають властивості ортогональності. Такі координати називаються *узагальненими*. Узагальнених координатних систем безліч, і доцільність їх вибору в кожному окремому випадку залежить від умови тієї чи іншої розв'язуваної задачі.

ВПРАВИ

1. Обчислити величину відрізка $\overline{AB}$ і його довжину, якщо: 1) $A(4)$, $B(7)$; 2) $A(-2)$, $B(3)$; 3) $A(-4)$, $B(-1)$.

2. Обчислити відношення λ, в якому точка C ділить відрізок AB, якщо: 1) $A(3)$, $B(15)$ і $C(-8)$; 2) $A(10)$, $B(4)$ і $C(6)$; 3) $A(-12)$, $B(-2)$ і $C(-5)$.

3. Знайти відстань між двома точками, заданими в полярній системі координат.

1) $A(5;\ \pi/6)$ і $B(2;\ \pi/2)$;

2) $A(10;\ -2\pi/3)$ і $B(1;\ \pi/3)$;

3) $A(7;\ \pi/4)$ і $B(3;\ 5\pi/4)$.

4. Обчислити координати середини сторін трикутника ABC, якщо $A(3;\ 7)$, $B(-5;\ 1)$ і $C(6;\ 8)$.

5. Обчислити довжину медіани трикутника ABC, проведеної з вершини A, якщо $A(3;\ -5)$, $B(-3;\ 9)$, $C(4;\ 5)$.

6. Написати формули перетворення координат (напрям осей не змінюється), якщо початок координат перенесено в точку: 1) $A(3;\ -4)$; 2) $B(-5;\ 0)$; 3) $C(-2;\ -7)$.

7. Обчислити координати точок $A(-3;\ 1)$, $B(1;\ -2)$ і $C(4;\ 5)$, якщо початок координат (напрям осей не змінюється) перенесено: 1) у точку A; 2) у точку B; 3) у точку C.

8. Обчислити координати точок $A(1;\ 2)$, $B(-3;\ 0)$ і $C(5;\ -6)$ у "новій" системі координат, якщо координатні осі повернуті на кут:

1) $\varphi = \pi/3$; 2) $\varphi = \pi$; 3) $\varphi = -\pi/4$.

9. Початок координат перенесено в точку $O'(-3;\ 2)$, а координатні осі повернуто на кут $\varphi = \pi/6$. Обчислити координати точок $A(3;\ \pi)$, $B(2;\ -\pi/2)$, $C(7;\ 2\pi/3)$ у "старій" системі, якщо в "новій" системі $A(2;\ 5)$, $B(11;\ -3)$ і $C(-\sqrt{3};\ 0)$.

10. Обчислити декартові координати точок

$$A(3;\ \pi),\quad B(2;\ -\pi/2),\quad C(7;\ 2\pi/3),$$

якщо полюс $O(2;\ 3)$, а полярна вісь має однаковий напрям з віссю абсцис.

Глава 2

Лінії на площині

§ 2.1 РІВНЯННЯ ЛІНІЇ

У попередній главі було показано, що в декартовій системі координат кожній точці площини відповідає пара дійсних чисел, і, навпаки, кожній такій парі чисел відповідає певна точка площини, тобто між множиною точок площини та множиною упорядкованих пар дійсних чисел (координат) існує взаємно однозначна відповідність.

Тому будь-які два числа x та y, які поставлені у відповідність кожній точці площини і називаються координатами цієї точки, однозначно характеризують її положення відносно координатних осей. Це дозволяє за допомогою координат розв'язувати велику кількість геометричних задач, навіть не уявляючи реального розташування відповідних точок площини й не користуючись допомогою будь-яких креслень. Цей метод відіграє основоположну роль в аналітичній геометрії і називається *методом координат*.

Точка й системи точок є першими геометричними об'єктами при вивченні аналітичної геометрії. *Множина точок, об'єднана певними загальними й характерними тільки для них геометричними властивостями, називається геометричним місцем точок.* Геометричне місце точок на площині в загальному випадку утворює лінію.

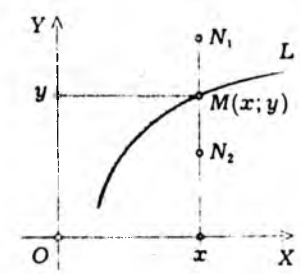


Рис. 2.1

Розглянемо на площині XOY довільну лінію L (рис. 2.1). Очевидно, що координати будь-якої точки $M(x;\ y)$, яка належить лінії L, не можуть бути довільними. Дійсно, припустимо, що абсциса точки M дорівнює x, тоді ординату можна знайти як проекцію саме цієї точки M на вісь OY. Як видно з рис. 2.1, точки N_1 і N_2 не належать лінії L, хоча їх абсциси дорівнюють x. Отже, абсцисам будь-яких точок лінії L відповідають цілком певні ордината, тобто між координатами точок існує функціональний зв'язок.

Підсумовуючи сказане, ми приходимо до висновку, що лініям на площині відповідають деякі рівняння з двома змінними величинами x та y. *Рівняння зі змінними x та y, яке задовольняють координати будь-якої точки, що належить цій лінії, і не задовольняють координати жодної точки, не розташованої на ній, називається рівнянням даної лінії.* Координати x та y довільної точки лінії, що входять у це рівняння, називаються *поточними* координатами.

У загальному вигляді рівняння лінії на площині в прямокутній декартовій системі координат має вигляд:

$$F(x, y) = 0 . \qquad (2.1)$$

Рівняння лінії (2.1) називається *рівнянням лінії в загальному вигляді.*

Із означення рівняння лінії випливає, що, коли при підстановці координат точки в дане рівняння отримаємо тотожність, то точка розташована на відповідній лінії; якщо ж тотожність не отримується, то точка не розташована на цій лінії. Останнє твердження є критерієм перевірки проходження лінії через ту чи іншу точку.

Запис рівнянь ліній дає можливість замінити їхні геометричні дослідження розв'язком чисто алгебраїчних задач, які розв'язуються значно простіше, ніж геометричні, а також визначати властивості ліній за допомогою дослідження їхніх рівнянь. При цьому слід зазначити, що, оскільки кожне рівняння можна переписати в різноманітних рівнозначних формах, то слід мати на увазі, що одна й та ж лінія може описуватися різними за формою запису рівняннями.

Задачі, дослідження яких вивчає аналітична геометрія, можна умовно поділити на два типи. Перший: знаходження рівнянь геометричного місця точок, які відповідають певним відомим нам властивостям. Другий: визначення властивостей ліній за відомими нам рівняннями.

Сформулюємо загальні положення першого типу задач.

Для того щоб скласти рівняння лінії, необхідно:

1) *узяти довільну точку даної лінії з поточними координатами x та y;*

2) *записати у вигляді рівності загальну властивість даного геометричного місця точок;*

3) *виразити величини цієї рівності за допомогою координат.*

Приклади.

1. **Пряма лінія, яка ділить відрізок навпіл і перпендикулярна до нього.**

Розглянемо пряму лінію L та дві задані точки, наприклад, $A(2;1)$ і $B(-3;4)$. За умовою лінія L перпендикулярна до відрізка AB (рис. 2.2).

Розглянемо *пряму лінію L як геометричне місце точок, рівновіддалених від точок A і B.* Нехай $M(x;y)$ — довільна точка цієї прямої. Рівність

$$AM = BM \qquad (2.2)$$

описує загальну властивість усіх точок цієї прямої (якщо точка M не знаходиться на даній прямій, то $AM \neq BM$). Для того щоб скласти рівняння прямої, залишається виразити відстані AM та BM через поточні координати точки M й отримані вирази підставити в рівність (2.2). Тоді, згідно з формулою (1.7), маємо:

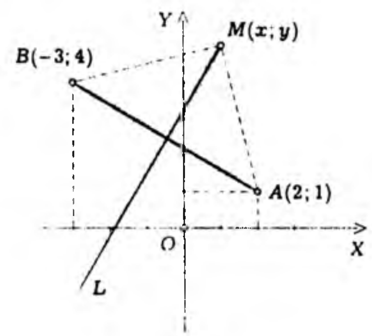


Рис. 2.2

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2} . \qquad (2.3)$$

Це рівняння і є рівнянням даної прямої L. Але його запис можна значно спростити, підносячи обидві частини рівності (2.3) до квадрата й переносячи всі члени рівності в один бік. Остаточно маємо:

$$10x - 6y + 15 = 0 . \qquad (2.4)$$

Покажемо тепер, що коли точка не належить до нашого геометричного місця точок (тобто до прямої L), то її координати не будуть задовольняти рівняння (2.4). Дійсно, нехай $K(x;y)$ — така точка. Тоді виконується одна з двох нерівностей:

$$AK < BK ; \qquad AK > BK$$

або в координатах

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} < \sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2} ,$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} > \sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2} .$$

Перша з цих нерівностей зводиться до вигляду

$$10x - 6y + 15 > 0 ,$$

а друга — до вигляду

$$10x - 6y + 15 < 0 .$$

Отже, координати точки K рівняння (2.4) не задовольняють.

2. **Коло радіуса R з центром на початку координат.** Розглянемо відоме зі шкільного курсу математики рівняння *кола* з центром у точці $O(0;0)$, тобто *геометричного місця точок, рівновіддалених від початку координат* (рис. 2.3).

Припустимо, що $M(x;y)$ будь-яка точка кола з поточними координатами x та y. Відстань між точками O та M згідно з формулою (1.8), є:

$$OM = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} =$$
$$= \sqrt{x^2+y^2} .$$

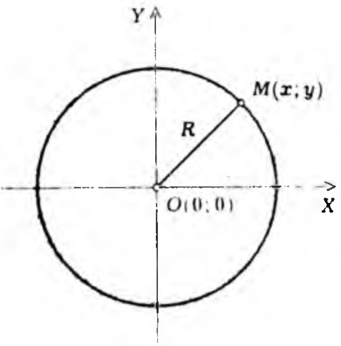


Рис. 2.3

З означення кола випливає, що відстань до точки M від центра O є величина стала й дорівнює радіусу R. Тоді:

$$\sqrt{x^2+y^2} = R . \qquad (2.5)$$

Підносячи обидві частини рівності (2.5) до квадрата, остаточно отримуємо:

$$x^2+y^2 = R^2 . \qquad (2.6)$$

Отже, рівняння (2.6) є рівнянням кола радіуса R з центром у точці $O(0;0)$.

Візьмемо конкретний випадок, наприклад, нехай $R = 5$. Тоді рівняння (2.6) матиме вигляд:

$$x^2+y^2 = 25 . \qquad (2.7)$$

Розглянемо декілька точок, наприклад,

$$A(5;0), \quad B(2;3), \quad C(-4;5) .$$

З'ясуємо, розташовані на даному колі вибрані нами точки чи ні? Підставляючи координати точки A до рівняння кола (2.7), отримуємо тотожність:

$$5^2+0^2 = 25 .$$

Таким чином, точка A належить колу. Для точки B отримуємо нерівність:

$$2^2+3^2 < 25 ,$$

тому точка B колу не належить і розташована всередині кола радіуса 5, оскільки її відстань від початку координат

$$OB = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} < 5 .$$

Підстановка до рівняння координат точки $C(-4;5)$ призводить до нерівності:

$$(-4)^2+5^2 > 25 .$$

Отже, точка C не розташована на колі й знаходиться зовні кола радіуса 5, оскільки її відстань до початку координат

$$OC = \sqrt{(-4)^2+5^2} = \sqrt{41} > 5 .$$

Підсумовуючи розглянуте, можна зробити висновок.

1). *Якщо радіус кола $R = a$, де a — довільне додатне число, то рівняння кола радіуса $R = a$ з центром на початку координат матиме вигляд:*

$$x^2+y^2 = a^2 . \qquad (2.8)$$

2). *Координати будь-якої точки, яка знаходиться всередині кола радіуса $R = a$, задовольняють нерівності:*

$$x^2+y^2 < a^2 , \qquad (2.9)$$

а для координат будь-якої точки, розташованої поза даним колом, виконується нерівність:

$$x^2+y^2 > a^2 . \qquad (2.10)$$

3. **Лемніската Бернуллі.** *Ця лінія вперше згадується в роботі Я. Бернуллі (1654–1705) у 1694 році. Свою назву отримала у зв'язку зі схожістю на цифру вісім або по-в'язку. Грецькою мовою слово "пов'язка", "стрічка", "бант" вимовляється як "лемніската" ("λημνίσκος").*

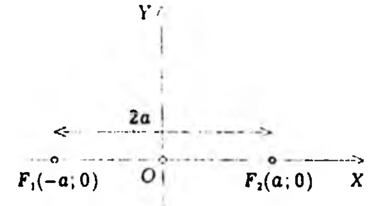


Рис. 2.4

Геометричне місце точок, добуток відстаней яких до двох даних точок F_1 і F_2 є величина стала й дорівнює a^2, де a — половина відстані між ними, називається лемніскатою Бернуллі.

Виберемо початок координат у середині відрізка F_1F_2, довжина якого, за умовою, дорівнює $2a$. Вісь OX направимо вздовж F_1F_2 (рис. 2.4).

Координати точок F_1 та F_2 при такому виборі координатної системи будуть відповідно дорівнювати: $x_1 = -a$, $y_1 = 0$, $x_2 = a$, $y_2 = 0$, тобто $F_1(-a;0)$, $F_2(a;0)$. Якщо $M(x;y)$ — довільна точка даного геометричного місця точок, то за умовою

$$F_1M \cdot F_2M = a^2 .$$

Оскільки, згідно з формулою (1.7),

$$F_1M = \sqrt{(x+a)^2+(y-0)^2}, \qquad F_2M = \sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2} ,$$

то шукане рівняння даного геометричного місця точок матиме вигляд:

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2+y^2} = a^2 .$$

Після піднесення обох частин рівності до квадрата та нескладних алгебраїчних перетворень вона перепишеться в більш простому вигляді:

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0 . \qquad (2.11)$$

Дослідження та графік даної лінії наведені нижче (рис. 2.21).

4. **Цисоїда Діоклеса.** *Лінія була винайдена старогрецьким геометром Діоклесом (II ст. до н. е.), при побудові двох середніх пропорціональних. Цю лінію він застосовував для розв'язування відомої Делійської задачі, або задачі про подвоєння куба.*

Розглянемо коло діаметра $OD = 2a$ й дотичну до неї DE (рис. 2.5). З точки O, діаметрально протилежної точці D, проведемо промінь OE й на ньому відкладемо відрізок OP, рівний відрізку BE, розташованому між колом і дотичною. Якщо промінь OE будемо обертати навколо точки O, то точка P опише лінію. Геометричне місце точок P називається *цисоїдою Діоклеса*. Знайдемо її рівняння.

Нехай координати довільної точки P дорівнюють $(x; y)$. Тоді з рис. 2.5 маємо:

$$OP = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad ED^2 = OE \cdot BE ,$$

звідки:

$$BE = \frac{ED^2}{OE} .$$

З прямокутного трикутника OED знаходимо:

$$ED = 2a\cdot \operatorname{tg}\varphi = 2a\cdot\frac{y}{x}; \qquad OE = \frac{2a}{\cos\varphi} = \frac{2a\sqrt{x^2+y^2}}{x} .$$

Оскільки

$$OP = BE ,$$

то

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{4a^2y^2x}{x^2\cdot 2a\sqrt{x^2+y^2}} .$$

Звідки остаточно одержуємо рівняння цисоїди Діоклеса:

$$x^3 = y^2(2a-x) . \qquad (2.12)$$

Лінія зображена на рис. 2.6.

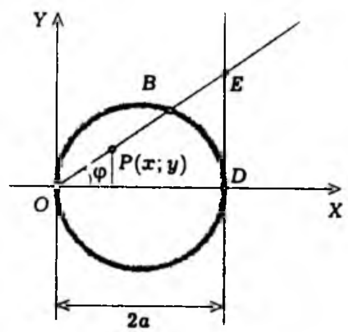


Рис. 2.5

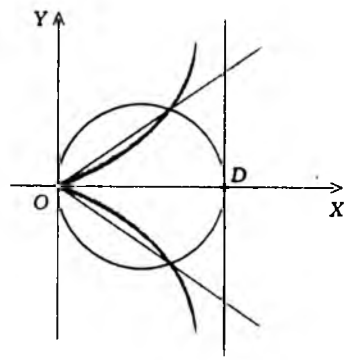


Рис. 2.6

Слід зазначити, що рівняння лінії на площині (2.1) у деяких випадках доцільно розв'язати відносно однієї зі змінних, тобто зв'язок між змінними величинами x та y записати у вигляді:

$$y = f(x) \qquad (2.13)$$

або

$$x = q(y) . \qquad (2.14)$$

Рівняння (2.13) та (2.14) називаються *рівняннями лінії в явному вигляді.*

Якщо повернутися до попередніх прикладів, то, наприклад, рівняння (2.4) в явному вигляді може бути записане:

$$y = \frac{10}{6}x + \frac{15}{6} , \qquad (2.15)$$

а рівняння (2.6)

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2} . \qquad (2.16)$$

При цьому знаки "+", "−" у (2.16) відповідають точкам кола відповідно у верхній та нижній півплощинах.

Щодо рівнянь ліній (2.11) та (2.12), то їхній запис в явному вигляді через громіздкість не має сенсу. Рівняння лемніскати Бернуллі має зручну форму запису в полярній системі координат (див. § 2.3).

Розглянемо тепер приклади, які є ілюстрацією другого типу задач аналітичної геометрії, а саме: визначення властивостей лінії за її рівнянням.

Приклади.

5. **Координатна вісь.** Переконаємося, що рівняння

$$y = 0 , \qquad (2.17)$$

визначає координатну вісь.

Дійсно, у будь-якої точки, яка належить осі OX, проекція на вісь OY є точка O, тобто її ордината y дорівнює нулю. З іншого боку, якщо $y = 0$, тобто проекція на вісь OY є точка O, то відповідна точка лежить на осі OX.

6. **Лемніската Бернуллі.** Проведемо дослідження рівняння відомої нам уже лінії (2.11).

Оскільки змінні x та y у рівнянні лемніскати Бернуллі в прямокутній декартовій системі координат

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2) \qquad (2.18)$$

входять тільки в парних степенях, то лемніската симетрична відносно координатних осей. Звідси випливає, що коли на лемніскаті лежить деяка точка $M_1(x_0;\ y_0)$, то одночасно з нею на лемніскаті розташовані ще три точки: $M_2(x_0;\ -y_0)$, $M_3(-x_0;\ y_0)$ та $M_4(-x_0;\ -y_0)$.

Розкриваючи дужки в рівнянні (2.18) та розв'язуючи біквадратне рівняння відносно x^2 (корені $(x^2)_{1,2} = -y^2$ та $(x^2)_{3,4} = 2a^2 - y^2$), можна зробити висновок, що фігура, обмежена лемніскатою, стиснута по осі OY та розтягнута вздовж осі OX.

Припустивши в (2.18) $y = 0$, одержимо межі зміни лінії від $-\sqrt{2}a$ до $\sqrt{2}a$ вздовж осі OX (рис. 2.21).

7. **Локон Аньєзі.** *Лінія була відкрита й досліджена в 1748 році італійською жінкою-математиком Марією Аньєзі (1718–1799). Спочатку отримала назву "верзієра", від латинського "vertete", що означає обертати. Але у зв'язку з тим, що ця назва лінії схожа на італійське слово "versiera", що означає "відьма" або "привид", через 125 років після її відкриття лінія одержала назву "локон Аньєзі" на честь її першодослідника.*

Нехай є коло з діаметром $2a$, розташоване таким чином, що його центр знаходиться в точці $O'(0;\ a)$ (рис. 2.7), а також січна OA. Візьмемо довільну точку $M(x;\ y)$. Якщо відрізки CB і AM паралельні осі OX, а BM паралельний осі OY, то геометричне місце точок M називається *локоном Аньєзі*.

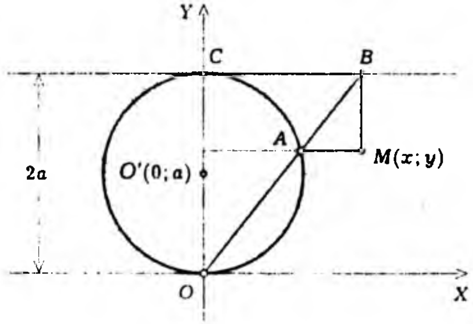


Рис. *2.7*

Рівняння даної лінії має вигляд:

$$x^2 y = 4a^2(2a - y) \quad (2.19)$$

З рівняння лінії безпосередньо видно, що вона симетрична відносно осі OY: зміна знака x не змінює значення y, оскільки x увіходить у рівняння в другому степені. Розв'яжемо рівняння (2.19) відносно y:

$$y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2} \quad (2.20)$$

Вважаючи сталу $a > 0$, бачимо, що при всіх значеннях x ордината $y > 0$. Це означає, що крива повністю розташована у верхній півплощині. Видно також, що зі збільшенням абсолютної величини x ордината y зменшується. При $x = 0$ ордината $y = 2a$. Побудувавши деяку кількість точок лінії, переконуємося, що лінія має вигляд, зображений на рис. 2.8.

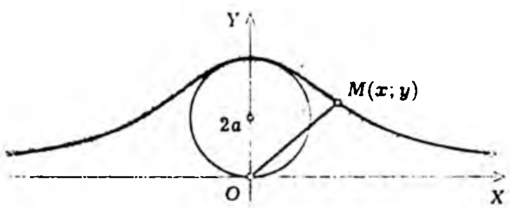


Рис. *2.8*

Якщо центр твірного кола й дотична CB (рис. 2.7) зсунені по осі OY, то лінія, яка утворюється аналогічною побудовою, називається *агвінеєю Ньютона* і є узагальненням локона Аньєзі.

На закінчення даного параграфа слід зазначити, що рівняння лінії, записане в декартовій системі координат у загальному вигляді (2.1), має декілька особливих випадків. Розглянемо їх.

1. Якщо ліва частина рівняння $F(x,\ y) = 0$ може бути розкладена на множники, то, прирівнявши до нуля кожний зі співмножників окремо, отримаємо декілька нових рівнянь, кожне з яких визначає деяку лінію. Наприклад, рівняння $x^2 - y^2 = 0$ або $(x + y)\cdot(x - y) = 0$ визначає пару прямих ліній $x + y = 0$ та $x - y = 0$, або $y = x$ та $y = -x$, що є бісектрисами координатних кутів.

2. Якщо рівняння (2.1) уміщає тільки одну з поточних координат. Наприклад, $y - 2 = 0$, або $y = 2$. Очевидно, що це пряма лінія, паралельна осі OX і яка знаходиться від неї на відстані 2 одиниць.

3. Може скластися так, що рівняння (2.1), яке пов'язує координати x та y, визначає геометричне місце, що складається з декількох окремих точок або навіть однієї точки. Наприклад, рівняння $x^2 + y^2 = 0$ визначає точку $O(0;\ 0)$, а рівнянню
$$(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 4)^2 = 0 \quad (2.21)$$
відповідає геометричне місце, яке складається з чотирьох точок:
$$(1;\ 2),\quad (1;\ -2),\quad (-1;\ 2),\quad (-1;\ -2)\ .$$

4. Існують випадки, коли рівняння $F(x,\ y) = 0$ не визначає ніякого геометричного місця точок. Так, наприклад, рівняння:
$$x^2 + y^2 + a = 0 \quad (a > 0)\ , \quad (2.22)$$
не має жодної пари дійсних значень координат x та y. У тому випадку, коли рівняння виконується, а значить хоча б одна зі змінних $x,\ y$ має уявне значення, то кажуть, що рівняння відповідає уявному місцю точок.

§ 2.2 ПЕРЕТИН ДВОХ ЛІНІЙ

При розгляді задач, де відомі дві лінії з рівняннями $F_1(x, y) = 0$ і $F_2(x, y) = 0$, може виникнути питання про знаходження точки перетину цих ліній. Координати шуканої точки в загальному випадку визначаються системою рівнянь:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (2.23)$$

Дійсно, якщо існує точка їхнього перетину, то, очевидно, що вона належить обом лініям одночасно. Тому координати її повинні задовольняти кожне з даних рівнянь, та навпаки, кожна точка, координати якої задовольняють ці два рівняння, знаходиться на обох лініях. Таким чином, *щоб знайти точки перетину двох даних ліній, потрібно спільно розв'язати їхні рівняння.* Кожне дійсне рішення цієї системи рівнянь дає точку перетину. Якщо ж система несумісна або в усіх її розв'язках хоча б одна з координат x чи y має уявне значення, то це означає відсутність точок перетину.

Приклади.

1. Знайти точки перетину ліній $x^2 + y^2 = 16$ (коло) та $x - y + 4 = 0$ (пряма лінія).

Для того щоб знайти точки перетину, потрібно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x - y + 4 = 0. \end{cases}$$

З останнього рівняння знаходимо: $y = x + 4$.

Тоді:

$$x^2 + (x+4)^2 = 25$$

або

$$x^2 + 4x = 0,$$

звідки $x_1 = 0$, $x_2 = -4$. Підставляючи ці значення x у раніше знайдений вираз для y, отримуємо: $y_1 = 4$; $y_2 = 0$. Таким чином, дані лінії (коло та пряма лінія) мають дві точки перетину $(0; 4)$ та $(-4; 0)$.

2. Знайти точки перетину ліній:

$$-y + x^2 = 0 \quad \text{та} \quad -y^2 + x = 0 \quad \text{(параболи).}$$

Утворюємо систему:

$$\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ x - y^2 = 0. \end{cases}$$

Після підстановки $y = x^2$ в друге рівняння одержимо:

$$x - x^4 = 0 \quad \text{або} \quad x(1 - x^3) = 0.$$

Отже, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, звідки: $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.

Таким чином, існують два розв'язки, а отже, і дві точки перетину даних ліній (парабол): $(0; 0)$, $(1; 1)$.

3. Чи перетинаються лінії, рівняння яких мають вигляд $2x - (1/3)y + 1 = 0$ та $6x - y - 2 = 0$ (прямі лінії)?

Утворюємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - \frac{1}{3}y + 1 = 0, \\ 6x - y - 2 = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння знаходимо $y = 6x - 2$. Після підстановки в перше одержимо:

$$2x - 2x + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6} \neq 0.$$

Отже, система несумісна, тобто дані лінії не перетинаються.

§ 2.3 РІВНЯННЯ ЛІНІЙ У ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТАХ

Узагальнюючи рівняння (2.1), можна сказати, що в будь-якій системі координат на площині рівняння між цими координатами визначають деяку лінію. Рівнянням лінії в полярній системі координат (див. § 1.3) ми будемо називати таке рівняння зі змінними ρ та φ, яке задовольняють полярні координати будь-якої точки, яка належить цій лінії, та не задовольняють координати точок, які їй не належать. У загальному вигляді це рівняння матиме вигляд:

$$F(\rho, \varphi) = 0 \ . \quad (2.24)$$

Рівняння лінії, розв'язане відносно ρ, матиме вигляд:

$$\rho = f(\varphi) \ . \quad (2.25)$$

Досліджуючи форму лінії за її рівнянням, полярними координатами користуються в тих випадках, коли рівняння лінії в полярних координатах має більш простий вигляд. Головним чином це лінії, що утворюються в результаті обертання. Розглянемо рівняння найбільш відомих ліній, що знаходять широке застосування при розв'язку цілого ряду задач у техніці. При цьому слід зазначити, що при побудові ліній, заданих рівняннями в полярних координатах, для значення радіуса-вектора довільної точки M припускаються не тільки додатні значення ρ, але й від'ємні $-\rho$, а відповідні точки площини розташовуються не тільки на самому промені φ, а й на його продовженні $\varphi \pm \pi$. Іншими словами, у загальному вигляді точки площини в полярній системі координат можуть бути записані як $M((-1)^n\rho;\ \varphi + \pi n)$, де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Приклади.

1. **Коло радіуса R з центром у полюсі** (рис. 2.9).

У декартовій системі координат рівняння кола радіуса R з центром на початку координат має вигляд (2.6) $x^2 + y^2 = R^2$. Якщо сумістити початок декартової системи координат з полюсом полярної системи координат (рис. 1.15) і скористатися формулами переходу від декартової системи координат до полярної (1.19), то одержимо рівняння, що шукали:

$$\rho = R \ . \quad (2.26)$$

Як бачимо, в полярній системі координат рівняння кола радіуса R з центром у полюсі має дуже простий вигляд. Цей результат є очевидним, оскільки при будь-якому положенні точки M з поточними координатами ρ та φ на колі радіус-вектор ρ незалежно від значення полярного кута φ незмінно дорівнює R.

2. **Коло радіуса R, яке проходить через полюс з центром на полярній осі** (рис. 2.10).

Візьмемо на колі довільну точку $M(\rho;\ \varphi)$, координатами якої будуть кут φ та довжина ρ відрізка OM. Точка K — кінець діаметра кола, яке знаходиться на полярній осі. Побудуємо допоміжний трикутник OMK, в якому кут при вершині M прямий, оскільки вписаний у коло кут спирається на діаметр. Якщо сумістити полюс з центром декартової системи координат, то центр кола в декартовій системі буде $C(R;\ 0)$. З прямокутного трикутника OMK рівняння, що шукали, матиме вигляд:

$$\rho = 2R\cos\varphi \ . \quad (2.27)$$

Слід зазначити, що коли скористатися формулами переходу від полярної системи координат до декартової (1.20), то рівняння цього ж кола в декартових координатах матиме вигляд:

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2 \ . \quad (2.28)$$

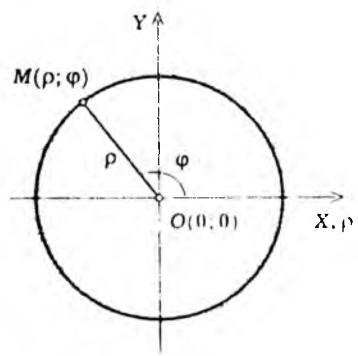


Рис. 2.9

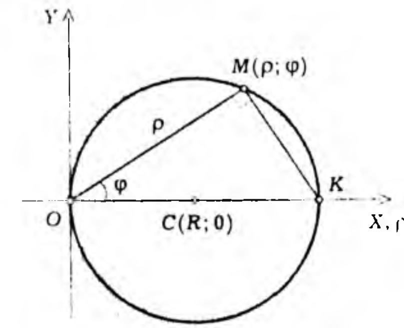


Рис. 2.10

3. **Спіраль Архімеда.** *Лінія названа на честь відомого старогрецького математика, фізика й механіка Архімеда (бл. 287–212 до н. е.), який уперше провів її детальне дослідження. Відкриття самої лінії за деякими джерелами належить Конону Самоському, однак її рівняння було записане аж у кінці XVII століття.*

Спіраль Архімеда — це лінія, яку утворює траєкторія точки, що рівномірно рухається вздовж деякої прямої лінії й одночасно рівномірно обертається навколо деякої точки. Тобто в полярній системі координат при початковому розташуванні точки в полюсі спіраллю Архімеда буде лінія, утворена накладанням рівномірного обертання навколо полюса та рівномірного руху вздовж полярної осі.

Виберемо точку O (рис. 2.11) за полюс системи, початкове положення OP прямої OM — за полярну вісь. Нехай у початковий момент руху точка M знаходиться в полюсі. Відстань OM, яку пройде точка M уздовж прямої ON, та полярний кут φ через рівномірність одночасного руху зростають однаково пропорційно часу. Отже, відстань ρ та кут φ пропорційні одне одному й рівняння спіралі Архімеда матиме вигляд:

$$\rho = a\varphi \ , \quad (2.29)$$

де a — коефіцієнт пропорційності.

На рис. 2.11 зображена спіраль для додатних значень полярного кута φ. Якщо взяти від'ємні значення φ, то ми одержимо спіраль, симетричну першій відносно перпендикуляра до полярної осі (рис. 2.12) (суцільна лінія — додатні ρ, пунктирна — від'ємні ρ).

Кожна зі спіралей утворює нескінченну множину витків навколо полюса. Відстань між сусідніми точками кожної лінії, розташованими на одному й тому ж промені, дорівнює $2a\pi$.

Використовуючи формули (1.20), отримаємо рівняння спіралі Архімеда в декартовій системі координат:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

або

$$x^2 + y^2 = a^2 \operatorname{arctg}^2 \left(\frac{y}{x} \right) . \qquad (2.30)$$

Спіраль Архімеда використовується в техніці для перетворення рівномірно обертового руху на рівномірно зворотно-поступальний. Наприклад, відомий у техніці механізм, кулачок, має форму двох складених один з одним напіввитків спіралі Архімеда, що обертаються навколо полюса.

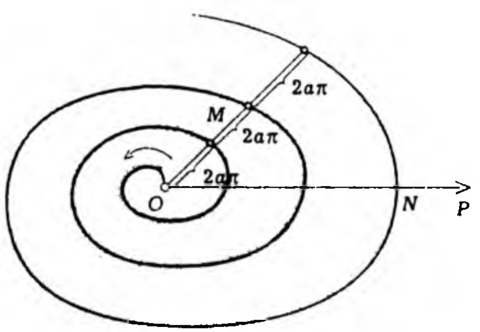


Рис. *2.11*

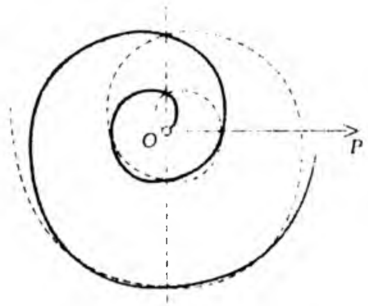


Рис. *2.12*

4. **Логарифмічна спіраль.** *Лінію відкрили французький математик і фізик Рене Декарт (1596–1650) та італійський математик і фізик Еванджеліст Торрічеллі (1608–1647) незалежно один від одного в середині XVII століття. Детальне вивчення її властивостей належить Я. Бернуллі (1654–1705), який назвав її "spira mirabilis", тобто "дивна спіраль". Інваріантність кривої відносно різних перетворень надала їй містичного змісту. Я. Бернуллі навіть побажав мати її зображення на своїй могилі. Свою назву лінія отримала завдяки її спільними з логарифмами властивостями.*

Логарифмічна спіраль — це графік показникової функції в полярних координатах, тобто:

$$\rho = a e^{k\varphi} , \qquad (2.31)$$

де a і k додатні сталі величини. Якщо рівняння (2.31) розв'язати відносно кута φ, то функціональна залежність $\varphi = \varphi(\rho)$ матиме вигляд натурального логарифма:

$$\varphi \sim \ln \rho ,$$

звідки й походить назва даної лінії. Ця лінія нескінченно накручена на полюс, ніколи його не досягаючи. Щоб накреслити цю лінію, достатньо надати φ довільних значень, наприклад, на відрізку від $-\pi$ до π:

φ	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
ρ	$ae^{-k\pi}$	$ae^{-\frac{k\pi}{2}}$	a	$ae^{\frac{k\pi}{2}}$	$ae^{k\pi}$

Далі при необмеженому зростанні кута φ полярний радіус необмежено зростатиме. Лінія перетинатиме полярну вісь у точках, кратних $a(e^{2\pi k})^n$, де кожному значенню n відповідає певна точка перетину. Якщо ж кут φ необмежено зменшувати до від'ємної нескінченності, то полярний радіус прямує до нуля, а крива необмежено наближатиметься до полюса O, закручуючись навколо нього. Тому точка O називається асимптотичною точкою логарифмічної спіралі (рис. 2.13).

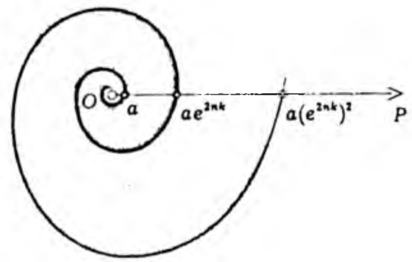


Рис. *2.13*

Слід зазначити таку властивість логарифмічної спіралі. Якщо ми візьмемо її рівняння з другим коефіцієнтом подібності, наприклад, $\rho = b e^{k\varphi}$, то ми отримаємо лінію $\rho = a e^{k(\varphi + \alpha)}$, де $\alpha = (1/k)\ln(b/a)$, тобто ми отримаємо ту ж саму початкову спіраль, повернуту навколо полюса за годинниковою стрілкою на кут α радіан. Таким чином, *логарифмічна спіраль подібна сама собі з будь-яким коефіцієнтом подібності.* Із усіх ліній на площині ця виняткова властивість, окрім логарифмічної спіралі, належить тільки прямій лінії.

Логарифмічна спіраль має ще одну цікаву властивість: якщо обертати її навколо точки O, то складається враження, що спіраль скручується або розкручується.

5. **Гіперболічна спіраль.** *Лінія була відкрита в 1704 році французьким математиком П'єром Варіньйоном (1654–1722). Він же вперше записав її рівняння в полярних координатах і дослідив її властивості. Незалежно від Варіньйона пізніше до цієї лінії дійшов І. Бернуллі (1667–1748).*

Рівняння *гіперболічної спіралі* в полярних координатах має вигляд:

$$\rho = \frac{\alpha}{\varphi} , \qquad (2.32)$$

де α — коефіцієнт пропорційності. Графік цієї лінії зручно побудувати, якщо для простоти обчислень покласти $\alpha = \pi$. Тоді, надаючи полярному куту певні значення, маємо:

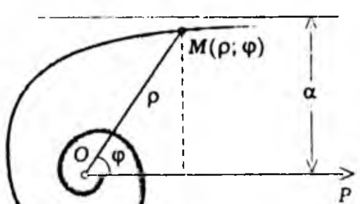


Рис. *2.14*

[illegible]	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π	3π	4π	...
[illegible]	∞	4	2	4/3	1	4/5	2/3	4/7	1/2	1/3	1/4	...

Звідси видно, що при необмеженому зростанні кута φ, лінія необмежено наближається до полюса O, закручуючись навколо нього. У загальному випадку графік має вигляд (рис 2.14).

6. **Чотирипелюсткова роза.** *Чотирипелюсткова та трипелюсткова рози належать до сім'ї розоподібних кривих або так званих кривих Ґранді. Їх математичне означення, питання симетрії, а також найбільш важливі властивості були вперше розглянуті флорентійським ченцем Ґранді на початку XVIII століття. Він також розглянув криві, що мають нескінченну кількість пелюсток.*

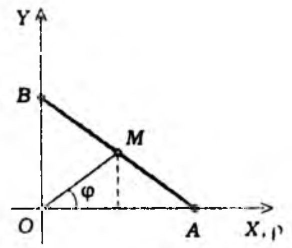


Рис. *2.15*

Геометричне місце точок, які знаходяться на прямій лінії, що сполучає декартові координати OX та OY й одночасно є основою перпендикуляра, опущеного з центра цієї системи координат, утворює лінію, яка в полярній системі координат має дуже просте рівняння та називається *чотирипелюстковою розою*. Побудуємо відрізок AB (рис. 2.15) постійної довжини $2a$, де точки A та B постійно рухаються осями координат.

З початку координат проведемо на пряму AB перпендикуляр OM. Після суміщення полюса полярної системи координат з центром декартової з прямокутних трикутників OMA та ABO маємо:

$$\rho = OM = OA\cos\varphi \qquad (2.33)$$

та

$$OA = AB\sin\varphi = 2a\sin\varphi \ . \qquad (2.34)$$

Підставляючи рівність (2.34) у (2.33), знаходимо рівняння чотирипелюсткової рози:

$$\rho = a\sin 2\phi \ . \qquad (2.35)$$

З рівняння видно, що максимальне значення ρ отримується при значеннях кута, кратних $\pi/4$. Графік лінії має вигляд (рис. 2.16).

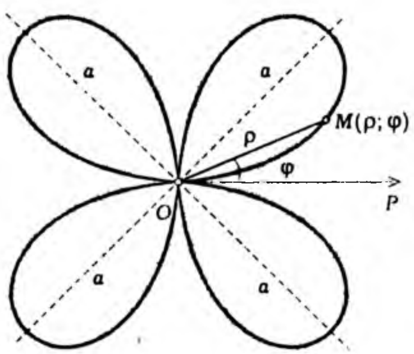


Рис. *2.16*

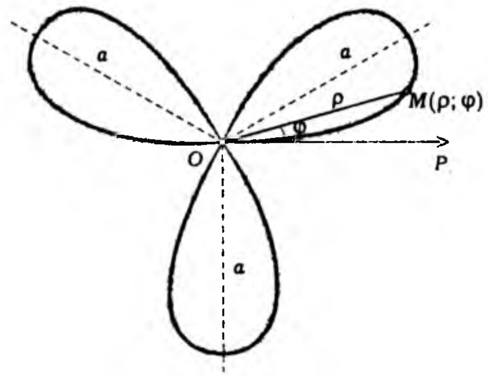


Рис. *2.17*

7. **Трипелюсткова роза.** Якщо в рівнянні лінії (2.35) змінити аргумент синуса на 3φ, ми одержимо лінію, схожу з попередньою за формою, але яка матиме не чотири "пелюстки", а три, тобто *трипелюсткову розу*. Її рівняння в полярній системі координат має вигляд:

$$\rho = a\sin 3\varphi \ . \qquad (2.36)$$

З рівняння (2.36) видно, що максимальне значення ρ буде при кутах φ, кратних $\pi/3$, що й обумовлює кількість "пелюсток" рози. Графік цієї лінії має вигляд (рис. 2.17).

8. **Кардіоїда.** *Лінія була відкрита наприкінці XVII століття голландським математиком Коєрсма. Утім свою назву вона отримала в 1741 році від італійського вченого Кастільона (1708–1794). Термін складається з грецьких слів "καρδία" – "серце" та "εἶδος" – "вид", "зовнішність". Буквальний зміст назви – "серцеподібна", тобто "схожа на серце".*

Геометричне місце точок, котре знаходиться на прямій лінії, початок якої лежить на колі, а кінець відстає від кола на відстань його подвійного радіуса, утворює лінію, що називається *кардіоїдою*. Візьмемо довільну точку O на колі радіуса a і вважатимемо її за полюс, а полярну вісь сумістимо з діаметром кола OB (рис. 2.18).

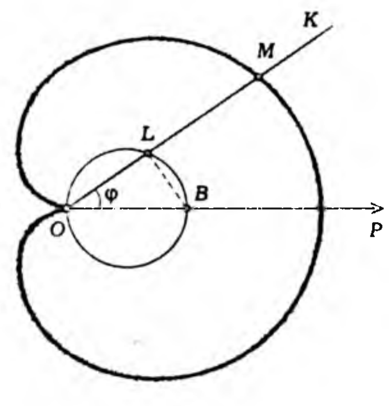


Рис. *2.18*

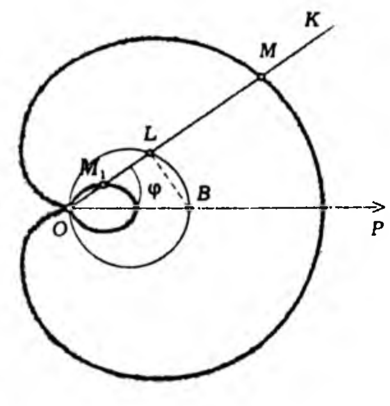


Рис. *2.19*

Проведемо з неї промінь OK і від точки L його перетину з колом відкладемо відрізок LM, рівний $2a$. Лінія, яка утворюється точкою M при обертанні променя, і буде кардіоїдою. Безпосередньо з рисунка знаходимо:

$$\rho = OL + LM \ .$$

Оскільки

$$LM = 2a \ , \qquad OL = OB\cos\varphi = 2a\cos\varphi \ ,$$

то шукане рівняння кардіоїди матиме вигляд:

$$\rho = 2a(1 + \cos\varphi) \ . \qquad (2.37)$$

З рівняння видно, що для того, щоб кардіоїда описувалася повністю, достатньо зміни кута φ на проміжку від 0 до 2π, або від $-\pi$ до π.

Геометрично форму кардіоїди можна визначити як лінію, яку описує деяка фіксована точка кола, що рухається по другому колу того ж радіуса.

Форму кардіоїди, наприклад, мають кулачкові механізми у швейних машинах, які приводять у коливний рух штовхачі, що подають нитку до шпульки.

9. **Слимак Паскаля.** *Лінія була винайдена на початку XVII століття французьким математиком Етьєном Паскалем (1588–1651), батьком видатного математика та фізика Блеза Паскаля (1623–1662).*

Розглянемо задачу, аналогічну попередній, з тією лише різницею, що нехай відрізок LM дорівнює не подвійному радіусу кола, а довільній додатній величині (рис. 2.19).

У цьому випадку при повному оберті променя OK точка M утворює криву, яка називається *слимаком Паскаля*. Безпосередньо з рисунка знаходимо:

$$\rho = OM = OL + LM \ .$$

Підставляючи в цю рівність значення

$$OL = 2a\cos\varphi \ , \quad LM = b \ ,$$

отримуємо рівняння слимака Паскаля в полярних координатах:

$$\rho = 2a\cos\varphi + b \ . \qquad (2.38)$$

З даного рівняння видно, що форма лінії залежить від співвідношення між сталими $2a$ і b. Якщо $b < 2a$, крива матиме вигляд, зображений на рис. 2.18. На рис. 2.20 зображена крива для випадку $b > 2a$.

Якщо $b = 2a$, то рівняння слимака Паскаля перетвориться на рівняння кардіоїди (2.37). Таким чином, рівняння кардіоїди є окремим випадком рівняння слимака Паскаля. У декартових координатах рівняння слимака Паскаля матиме вигляд

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - b^2(x^2 + y^2) = 0 \ . \qquad (2.39)$$

У техніці слимак Паскаля використовується для викреслювання профілю ексцентрикових механізмів з метою утворення їхніми складовими частинами гармонічних коливань.

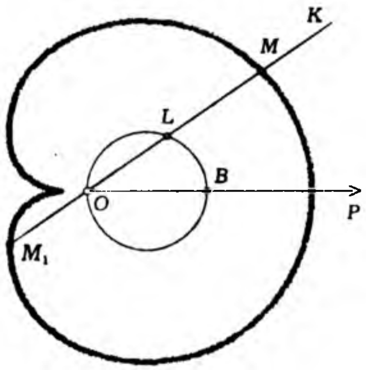


Рис. *2.20*

10. **Лемніската Бернуллі.** У § 2.1 було одержане рівняння лемніскати Бернуллі в декартових координатах:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) \ .$$

Оскільки x та y увіходять у це рівняння тільки в парних степенях, то лінія лемніскати симетрична відносно координатних осей. Користуючись формулами (1.19), одержимо рівняння *лемніскати Бернуллі* в полярних координатах:

$$\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi \ . \qquad (2.40)$$

З цього рівняння видно, що $\rho = a\sqrt{2}$ при $\varphi = 0$. Якщо φ збільшувати від 0 до $\pi/4$, то ρ зменшуватиметься від $a\sqrt{2}$ до 0. При $\pi/4 < \varphi < \pi/2$ ρ набуватиме уявних значень, тобто на лемніскаті не буде точок, для яких φ змінюватиметься в указаних межах. Тому для побудови лемніскати, через її симетрію, достатньо розглянути φ від 0 до $\pi/4$. Графік лінії лемніскати Бернуллі при суміщенні полюса з центром декартової системи координат має вигляд, зображений на рис. 2.21.

У техніці форму лемніскати Бернуллі мають перехідні лінії на закругленнях малого радіуса, наприклад, залізничні колії в гірській місцевості або трамвайні колії на вузьких міських вулицях.

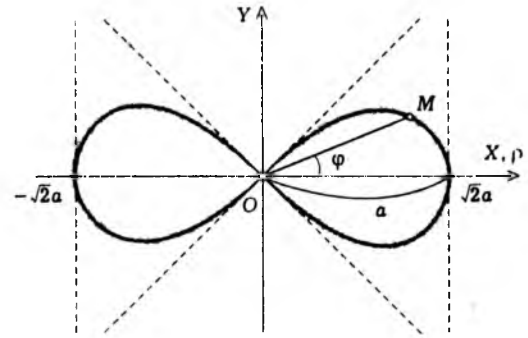


Рис. *2.21*

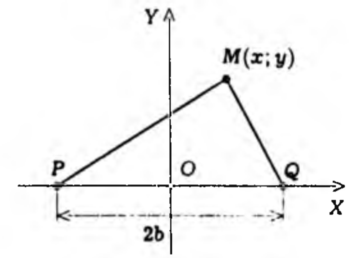


Рис. *2.22*

11. **Овал Кассіні.** *Лінія була відкрита наприкінці XVII століття французьким астрономом Джованні Кассіні (1625–1712), який, не погоджуючись із працями Йоганна Кеплера (1571–1630), уважав, що планети рухаються навколо Сонця не по еліпсах, а по кривих четвертого порядку, які є геометричними місцями точок, добуток відстаней яких від двох даних точок сталий. Ця сім'я кривих називається овалами Кассіні.*

Геометричне місце точок, добуток відстаней яких від двох даних точок P і Q є величиною сталою й дорівнює a^2, утворює лінію, що називається *овалом Кассіні*. Візьмемо в декартовій системі координат дві точки P і Q, розташовані на осі OX симетрично відносно початку координат $O(0;\ 0)$ (рис. 2.22).

Позначимо відстань між ними через $2b$. Тоді координати точок P і Q будуть $(-b;\ 0)$ та $(b;\ 0)$. Нехай $M(x;\ y)$ — довільна точка, розташована на даній лінії. Тоді, згідно з означенням овалу Кассіні:

$$MP \cdot MQ = a^2 \ , \qquad (2.41)$$

або, виражаючи відрізки MP та MQ через координати за формулою (1.7), маємо:

$$\sqrt{(x + b)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x - b)^2 + y^2} = a^2 \ .$$

Звільняючись від радикалів, остаточно отримуємо рівняння овалу Кассіні в декартовій системі координат:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2b^2(x^2 - y^2) = a^4 - b^4 \ . \qquad (2.42)$$

З даного рівняння видно, що оскільки координати x та y увіходять у нього в парних степенях, то лінія симетрична відносно осей OX та OY і замкнена згідно з її означенням.

Графік лінії Кассіні для випадку $a > b$ зображений на рис. 2.23.

Користуючись формулами (1.19), одержимо рівняння овалу Кассіні в полярній системі координат:

$$\rho^2(\rho^2 - 2b^2\cos 2\varphi) = a^4 - b^4 \quad . \qquad (2.43)$$

Як видно з даного рівняння, в окремому випадку $a = b$ овал Кассіні переходить у лемніскату Бернуллі (2.40).

Овал Кассіні широко застосовується в електродинаміці та оптиці.

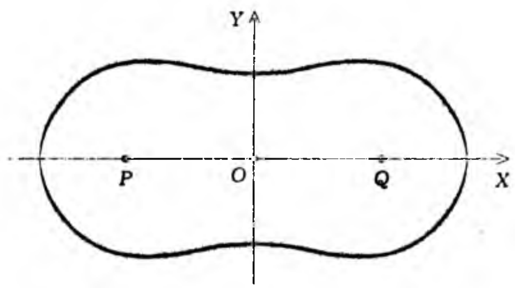


Рис. *2.23*

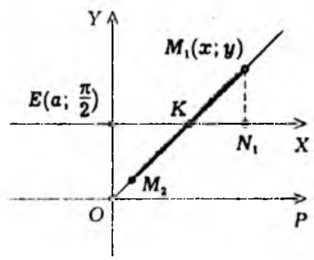


Рис. *2.24*

12. Конхоїда Нікомеда. *Лінія була відкрита давньогрецьким геометром Нікомедом (III–II ст. до н. е.). Назву отримала від грецького філософа Прокла (410–485) через свою схожість із раковиною. Нікомед також винайшов прилад для її механічного креслення. І. Ньютон (1643–1727) застосував її для геометричного розв'язування рівнянь третього степеня.*

Через точку $E(a;\ \pi/2)$ проведена пряма, паралельна до полярної осі (рис. 2.24).

Довільний промінь OK перетинає цю пряму в точці K. На промені по обидва боки від точки K відкладені відрізки $KM_1 = KM_2 = b$. Якщо пряма OK буде обертатися навколо точки O, то точки M_1 та M_2 опишуть деяку лінію. Геометричне місце точок M_1 та M_2 називається *конхоїдою Нікомеда.*

Сумістивши пряму, що проходить через точку E, з віссю OX декартової системи координат, розглянемо два подібних трикутника: BM_1N_1 та KOE. Нехай координати довільної точки M_1 будуть $(x;\ y)$. Тоді маємо:

$$\frac{y}{KN_1} = \frac{a}{OK} \quad .$$

Оскільки $OK = x - KN_1$ і $KN_1 = \sqrt{b^2 - y^2}$, одержимо таке рівняння:

$$\frac{y}{\sqrt{b^2 - y^2}} = \frac{a}{x - \sqrt{b^2 - y^2}}$$

або

$$xy = (a + y)\sqrt{b^2 - y^2} \quad .$$

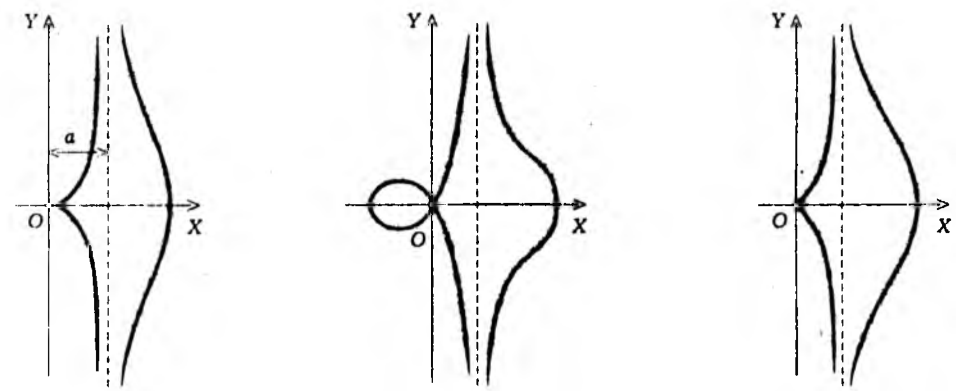
Остаточно рівняння конхоїди Нікомеда в декартовій системі координат матиме вигляд:

$$x^2y^2 = (a + x)^2(b^2 - x^2) \quad \text{або} \quad (y^2 + x^2)(x - a)^2 - b^2x^2 = 0 \quad . \qquad (2.44)$$

Користуючись формулами (1.19), одержимо рівняння лінії (2.44) у полярній системі координат:

$$\rho = \frac{a}{\sin\varphi} + b \quad . \qquad (2.45)$$

Вигляд конхоїди Нікомеда зображений на рис. 2.25 для випадків: а) $b < a$; б) $b > a$; в) $b = a$.



а) б) в)

Рис. *2.25*

13. Строфоїда. *Лінія була відома ще геометрам стародавньої Греції й отримала свою назву від грецьких слів "στρόφος" — "кручена стрічка" та "εἶδος" — "вид".*

Якщо взяти пряму $x = a$, що перетинає вісь OX у точці A й довільний промінь OB у точці B, і на цьому промені по обидва боки відкласти відрізки BM_1 та BM_2, рівні AB, то геометричне місце точок M_1 та M_2 при обертанні променя OB утворює лінію, що називається *строфоїдою* (рис. 2.26).

Якщо сумістити полюс полярної системи координат з центром декартової системи координат, то безпосередньо з рис. 2.26 випливає:

$$\rho = OB \pm AB \quad .$$

Оскільки

$$OB = \frac{a}{\cos\varphi}, \qquad AB = a\,\mathrm{tg}\,\varphi \quad ,$$

то рівняння лінії строфоїди в полярній системі координат матиме вигляд:

$$\rho = \frac{a(1 \pm \sin\varphi)}{\cos\varphi} \quad . \qquad (2.46)$$

У декартовій системі координат це рівняння буде:

$$y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a-x} \quad (2.47)$$

Строфоїда належить до геометричних ліній, що мають назву *вузли*. Рівняння вузла в загальному випадку в полярній системі координат має вигляд:

$$\rho = \operatorname{arctg} k\varphi \ .$$

При $k = 1/2$ дане рівняння описує строфоїду.

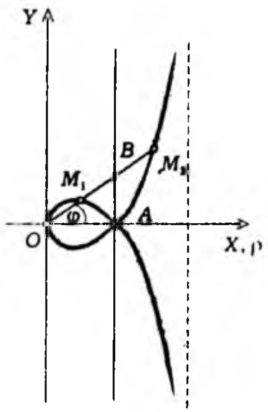


Рис. 2.26

На закінчення слід сказати про *координатні лінії*, тобто про ті лінії, на яких перша або друга координата зберігають постійні значення. У декартовій системі координат ці лінії утворюють дві сім'ї прямих, паралельних першій або другій осі координат (рис. 2.27).

У полярних координатах лінії $\rho = \text{const}$ утворюють *сім'ю концентричних кіл*, а лінії $\varphi = \text{const}$ — *сім'ю променів*, що виходять із полюса (рис. 2.28).

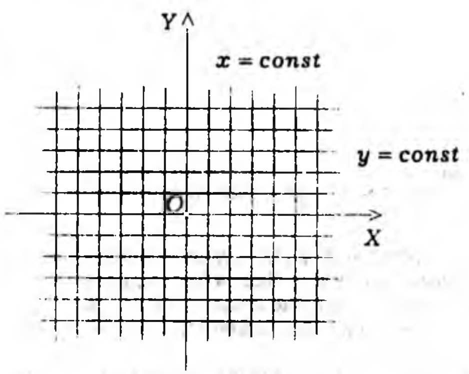


Рис. 2.27

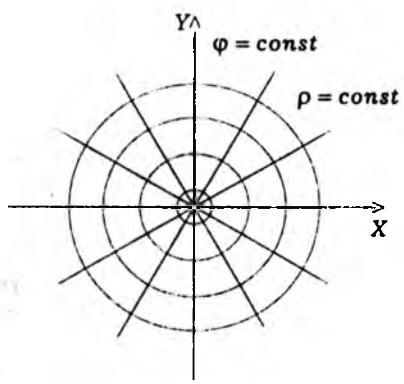


Рис. 2.28

§ 2.4 ПАРАМЕТРИЧНЕ ЗАДАННЯ ЛІНІЙ

Інколи буває зручно користуватися рівняннями лінії, де поточні декартові координати x та y виражені в залежності від деякої допоміжної змінної величини, наприклад t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \quad (2.48)$$

Така форма запису рівняння лінії називається *параметричною*, а величина t називається *параметром*. Геометричний зміст цього параметра t може бути найрізноманітнішим. Параметр визначає положення точки $(x;\ y)$ на площині. При зміні t точка на площині переміщується, описуючи при цьому деяку лінію, задану, таким чином, параметрично (2.48).

Щоб перейти до рівняння лінії, записаного в загальній формі (2.1), достатньо з будь-якого рівняння системи (2.48) знайти параметр t і підставити його в друге рівняння.

Проте слід зазначити, що, по-перше, це не завжди можливо, а по-друге, як було сказано на початку даного параграфа, інколи користування параметричною формою задання лінії має ряд переваг над іншими.

Розглянемо тепер декілька найбільш важливих прикладів параметричного задання ліній.

1. **Коло.** Розглянемо коло радіуса r з центром на початку координат (рис 2.29). Положення довільної точки M можна визначити за допомогою кута t, який утворює з додатним напрямом осі OX радіус кола OM.

Дійсно, з прямокутного трикутника OMK маємо:

$$x = r\cos t\ ,$$
$$y = r\sin t\ ,$$
$$0 \le t < 2\pi\ . \quad (2.49)$$

Ми отримали параметричні рівняння кола. Зазначимо, що, підносячи рівності (2.49) до квадрата й додаючи їх, ми одержимо відоме рівняння кола (2.6) у прямокутних декартових координатах: $x^2 + y^2 = r^2$.

Якщо центр кола знаходиться не на початку координат, а, наприклад, у точці $M_0(x_0;\ y_0)$, то, зберіга-

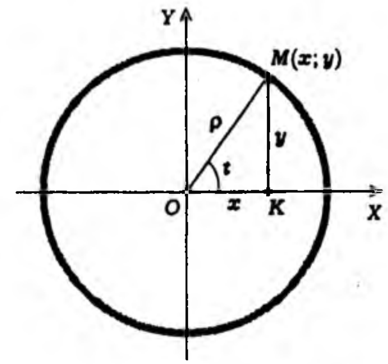


Рис. 2.29

ючи той же зміст параметра t, можна легко одержати таке параметричне рівняння кола:

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos t, \\ y = y_0 + r\sin t. \end{cases} \quad (2.50)$$

2. **Еліпс.** Розглянемо два концентричних кола з центром на початку координат та радіусами a і b ($a > b$) (рис. 2.30).

Проведемо з початку координат довільний промінь під кутом t до осі OX і позначимо через $M_1(x_1;\ y_1)$ та $M_2(x_2;\ y_2)$ точки його перетину з обома колами. З рівнянь (2.49) маємо: $x_1 = b\cos t$, $y_1 = b\sin t$, $x_2 = a\cos t$, $y_2 = a\sin t$.

Через точку M_1 проведемо пряму, паралельну осі OX, а через M_2 — пряму, паралельну осі OY. Ці прямі перетинаються в деякій точці $M(x;\ y)$. Точка M має спільну абсцису з точкою M_2 та спільну ординату з точкою M_1, тому:

$$\begin{cases} x = a\cos t\ , \\ y = b\sin t\ . \end{cases} \quad (2.51)$$

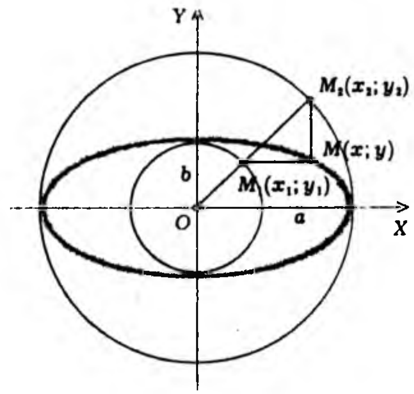


Рис. *2.30*

Коли промінь OM_2 обертається навколо початку координат, то точка M описує лінію, яка називається *еліпсом*. Рівняння (2.51) і є параметричне рівнянням еліпса. Очевидно, що кут t, який у даному випадку є параметром, змінюється від 0 до 2π. Величини a і b називаються *півосями* еліпса.

Підносячи до квадрата та додаючи обидва рівняння (2.51), одержимо рівняння еліпса в прямокутних декартових координатах:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ . \quad (2.52)$$

Детальніше про дану лінію мова буде йти в § 4.2.

3. **Циклоїда.** *Назва цієї лінії походить від грецьких слів "κύκλος" — "коло" та "εἶδος" — "вигляд", "зовнішність", тобто "схожа на коло". Історія відкриття цієї лінії невідома. Назву їй дав видатний італійський фізик, астроном і математик Галілео Галілей (1564–1642), який першим почав вивчати властивості цієї кривої.*

Циклоїдою називається лінія, яку описує фіксована точка кола при переміщенні по нерухомій прямій лінії. Розглянемо таку лінію, яка в початковому положенні знаходиться на початку координат і яка утворюється надалі переміщенням кола радіуса a вздовж осі OX. Нехай $M(x;\ y)$ — довільна точка циклоїди (рис. 2.31).

Тоді:

$$x = OP = OQ - PQ\ .$$

Оскільки ми розглядаємо чисто геометричну інтерпретацію побудови лінії, тобто не враховуючи ковзання, то довжина відрізка OQ буде дорівнювати довжині дуги MQ, яка своєю чергою дорівнює at.

Беручи до уваги, що $PQ = MN$ і дорівнює $a\sin t$ із прямокутного трикутника MCN, де $t = \angle MCN$, то:

$$x = MQ - PQ = at - a\sin t = a(t - \sin t)\ .$$

Аналогічно:

$$y = PM = QN = QC - NC = a - a\cos t = a(1 - \cos t)\ .$$

Таким чином, параметричне рівняння циклоїди має вигляд:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases} \quad (2.53)$$

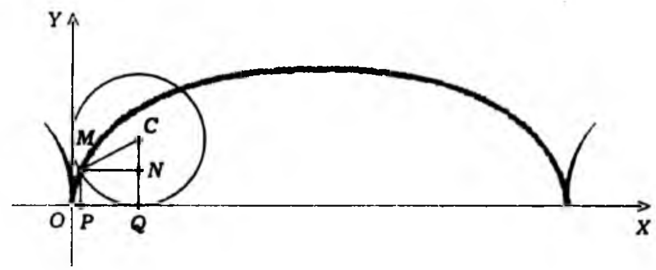


Рис. *2.31*

Лінія (2.53) складається з нескінченної множини повторюваних арок, кожна з яких відповідає одному повному оберту кола, переміщенням котрого утворена циклоїда. Таким чином, першій від початку координат арці відповідає змінення параметра t в межах від 0 до 2π, другій — від 2π до 4π і т.д.

Циклоїда є найбільш загальним представником цілого класу ліній, які носять назву *рулети*. До них належать також *укорочені* та *подовжені циклоїди*, що утворюються точкою, розташованою відповідно всередині або зовні кола, котра обертається вздовж прямої лінії, при цьому подовжені циклоїди мають точки самоперетину. Якщо ж розглянути точки кола, що рухаються по другому колу всередині та зовні його, то ми одержимо лінії, які називаються відповідно *гіпоциклоїдами* та *епіциклоїдами*. В окремому випадку при співвідношенні радіусів кіл $1:4$ гіпоциклоїда називається *астроїдою*, а при співвідношенні радіусів кіл $1:2$ гіпоциклоїда перетворюється на *пряму лінію*. Епіциклоїда при співвідношенні радіусів кіл $1:1$ перетворюється на вже відому нам лінію — *кардіоїду*. Всі ці лінії відіграють дуже важливу роль у теорії механізмів машин.

4. **Астроїда.** *Назва лінії походить від грецьких слів "ἄστρον" — "зірка" та "εἶδος" — "вигляд", "зовнішність", тобто "зіркоподібна". Термін у 1838 році запровадив чеський астроном і математик Йосиф Літтров (1781–1840), вивчаючи криві, що утворюються при обертанні багатьох кіл, одного над одним, так званих вищих епіциклів.*

Астроїдою називається лінія, яку утворює фіксована точка кола, яка переміщається всередині другого кола вчетверо більшого радіуса.

Нехай початок координат збігається з центром нерухомого кола, а вісь OX напрямлена по радіусу цього кола в точку A, яка є початковим положенням фіксованої точки рухомого кола на нерухомому. Радіус нерухомого кола a, рухомого — у чотири рази менше (рис. 2.32).

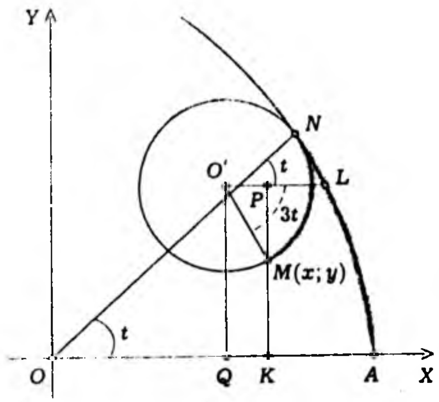


Рис. *2.32*

Нехай точка N — точка дотику рухомого кола з нерухомим, коли центр рухомого кола переміститься в точку O'. Кут зміни центрів обох кіл відносно осі OX у процесі руху одного кола відносно іншого позначимо через t, тобто $\angle NOA = t$. Відповідне положення фіксованої точки рухомого кола позначимо через $M(x;\, y)$.

Оскільки ми розглядаємо суто геометричне обертання, тобто переміщення відбувається без ковзання, то довжина дуги $\breve{AN}$, на яку перемістилося по нерухомому колу рухоме, дорівнює довжині дуги $\breve{MN}$ останнього:

$$\breve{AN} = \breve{MN} .$$

Однак радіус рухомого кола в чотири рази менший за радіус нерухомого, тому центральний кут $NO'M$, на який обернулося мале коло, в чотири рази більший від кута NOA, тобто $\angle NO'M = 4t$.

Проведемо допоміжну пряму $O'L$, паралельну осі OX, опустимо на неї перпендикуляр MP з точки M й опустимо перпендикуляр $O'Q$ на вісь OX з точки O'. Тоді з рис. 2.32 маємо: $\angle NO'L = t$, $\angle LO'M = 3t$, $OO' = (3/4)a$, $O'M = (1/4)a$, $OK = x$, $KM = y$.

З прямокутних трикутників $O'PM$ та OQO' знаходимо:

$$O'P = O'M\cos 3t, \qquad MP = O'M\sin 3t ,$$

$$OQ = OO'\cos t, \qquad QO' = OO'\sin t .$$

Оскільки

$$OK = OQ + QK = OQ + O'P , \quad KM = KP - MP = QO' - MP ,$$

то

$$x = \frac{3}{4}a\cos t + \frac{1}{4}a\cos 3t , \qquad y = \frac{3}{4}a\sin t - \frac{1}{4}a\sin^3 t .$$

Користуючись відомими тригонометричними формулами для косинуса та синуса потрійного кута:

$$\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t , \qquad \sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t ,$$

одержуємо остаточно параметричні рівняння астроїди:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t , \\ y = a\sin^3 t . \end{cases} \qquad (2.54)$$

Надаючи куту t, який у даному рівнянні відіграє роль параметра, значення в межах від 0 до 2π, отримуємо лінію, яка зображена на рис. 2.33. Пунктиром зображені кола, які утворюють дану лінію.

Виключаючи параметр t з рівнянь (2.54), можна отримати рівняння астроїди в декартовій системі координат. Для цього підносимо рівності (2.54) до степеня $2/3$ й додаємо їх. Маємо:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \qquad (2.55)$$

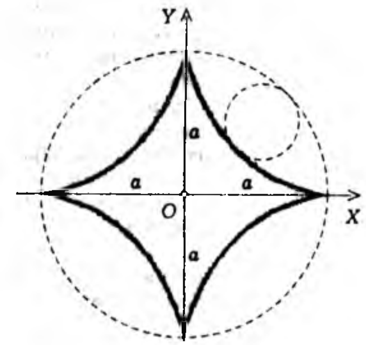


Рис. *2.33*

5. Гіпоциклоїда. *Назва лінії походить від грецьких слів "ὑπό" — "під" та "κυκλοειδής" — "утворена колом" і належить німецькому математику Лагіру (1640–1717), який першим провів її систематичне дослідження.*

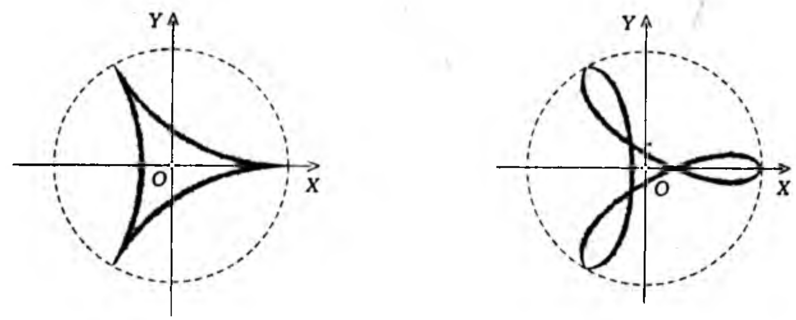
Якщо розглянути приклад, аналогічний до попереднього, коли коло радіуса r рухається без ковзання всередині кола радіуса R, то в загальному випадку при $R > r$, довільна точка кола, яке переміщається, опише лінію, що має назву *гіпоциклоїда*.

Провівши обчислення, аналогічні прикладу 4, одержимо її рівняння в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = r(m-1)\cos t + r\cos(m-1)t , \\ y = r(m-1)\sin t - r\sin(m-1)t , \end{cases} \qquad (2.56)$$

де величина $m = R/r$ і називається *модулем гіпоциклоїди*. Вигляд лінії залежить від величини m. На рис. 2.34 наведені випадки, коли $m = 3$ (*лінія Штайнера*) і $m = 3/2$. Пунктиром зображене нерухоме коло.

Для окремого випадку $m = 2$ гіпоциклоїда переходить у відрізок *прямої лінії*, а при $m = 4$ рівняння (2.56) переходить у рівняння *астроїди* (2.54).



а) $m = 3$ б) $m = \frac{3}{2}$

Рис. *2.34*

6. **Епіциклоїда.** *Назва лінії походить від грецьких слів "ἐπί" — "на", що використовується в назвах фігур, побудованих на будь-якій лінії, і "κύκλος" — "коло", тобто "на колі" й належить німецькому математику Лагіру (1640–1717), який виконав першу систематизовану працю про епіциклоїди. Проте перші згадки про епіцикли дуже давні й належать Аполлонію (бл. 262–бл. 190 до н. е.), Гіппарху (180–125 до н. е.), Птолемею (бл. 100–178) та інш. стародавнім ученим при поясненні ними руху небесних тіл.*

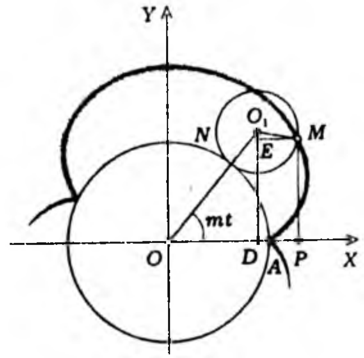
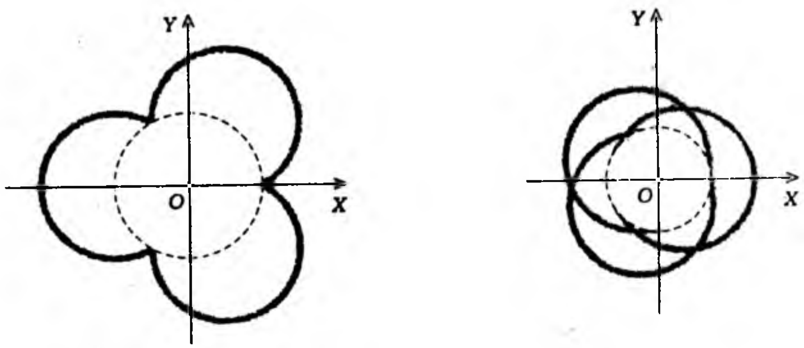


Рис. *2.35*

Якщо розглянути коло радіуса r, що рухається без ковзання по іншому колу радіуса R, то лінія, яка утворюється фіксованою точкою рухомого кола, називається *епіциклоїдою*.

Помістимо початок координат у центр нерухомого кола й направимо вісь OX через точку A, яка в початковому стані збігається з довільною точкою $M(x;\ y)$ рухомого кола (рис. 2.35).



а) $m = 3$ б) $m = \frac{3}{2}$

Рис. *2.36*

Позначимо кут MO_1N між радіусами кіл через t. Розглянемо співвідношення радіусів кіл $m = r/R$, яке називається їх *модулем*. Оскільки переміщення одного кола по іншому припускається без ковзання, то $\breve{AN} = \breve{MN}$, або $R \cdot \angle NOA = rt$, звідки:

$$\angle NOA = \frac{r}{R}t = mt \ .$$

З рисунка маємо:

$$x = OP = OD + DP = OD + EM = (R + r)\cos mt + r\sin\angle MO_1E \ ,$$

$$y = MP = O_1D - O_1E = (R + r)\sin mt - r\cos\angle MO_1E \ .$$

Оскільки

$$\sin\angle MO_1E = \sin(t - \angle OO_1D) = \sin\left[t - \left(\frac{\pi}{2} - mt\right)\right] = -\cos(t + mt) \ ,$$

$$\cos\angle MO_1E = \sin(t + mt) \ ,$$

то остаточно одержимо рівняння епіциклоїди в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = R(1 + m)\cos mt - mR\cos(1 + m)t, \\ y = R(1 + m)\sin mt - mR\sin(1 + m)t. \end{cases} \qquad (2.57)$$

Вигляд лінії (2.57) залежить від співвідношення $m = r/R$. На рис. 2.36 показані лінії для $m = 3$ і $m = 3/2$. Пунктиром показане нерухоме коло.

В окремому випадку $m = 1$, тобто, коли $r = R$ епіциклоїда перетворюється в *кардіоїду* (див. § 2.3).

7. **Евольвента кола.** *Назва лінії походить від латинського слова "evolvere" — "розгортати" й уперше зустрічається в працях про маятникові годинники голландського фізика та математика Хрістіана Гюйгенса (1629–1695). Узагальнення поняття евольвенти належить знаменитому фізику Реомюру (1683–1757).*

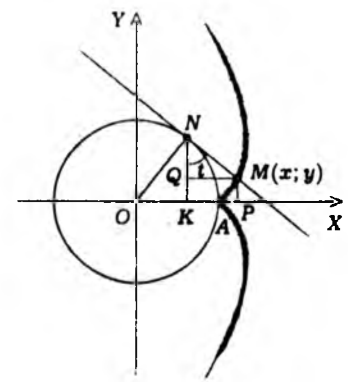


Рис. *2.37*

Лінія, яку описує довільна точка дотичної до кола прямої лінії, що рухається по ньому, називається *евольвентою* або *розгорткою кола*.

Розглянемо коло $x^2 + y^2 = a^2$ та пряму, початкове положення якої $x = a$ (рис. 2.37).

Візьмемо довільну точку N дотику прямої до кола. Уведемо кут $t = \angle AON$. Згідно з означенням лінії, довжина дуги NA дорівнює довжині відрізка NM, де $M(x;\ y)$ — точка шуканої траєкторії, яка в початковому положенні збігалася з точкою A. З рисунка видно, що:

$$x = OP = OK + KP = OK + QM = a\cos t + NM\sin t =$$
$$= a\cos t + at\sin t \ ,$$

$$y = MP = QK = NK - NQ = a\sin t - MN\cos t = a\sin t - at\cos t \ .$$

Таким чином, рівняння евольвенти кола в параметричній формі матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases} \qquad (2.58)$$

8. **Локон Аньєзі.** Означення рівняння в декартовій системі координат (2.20) і графік (рис. 2.8) даної лінії наведені в § 2.1. Але інколи користуються рівняннями локона Аньєзі в параметричній формі. Наведемо їх без доведення:

$$\begin{cases} x = a\operatorname{ctg} t, \\ y = a\sin^2 t, \end{cases} \qquad (2.59)$$

де t — кут між радіус-вектором довільної точки лінії OM (рис. 2.8) та додатним напрямом осі OX.

9. **Декартів листок.** *Перші згадки про цю лінію належать французькому математику та фізику Рене Декарту (1596–1650), який дав їй назву "листок" ("feuille" — франц.) у 1638 р. Повна форма лінії була визначена Х. Гюйгенсом (1629–1695) та І. Бернуллі (1667–1748). Остаточна назва лінії як "листок Декарта" належить Даламберу (1717–1783).*

Лінія має вигляд, наведений на рис. 2.38.

Наведемо без доведення її рівняння в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}, \end{cases} \qquad (2.60)$$

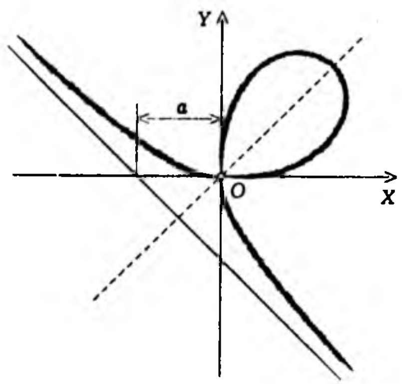


Рис. 2.38

де t є тангенс кута між радіус-вектором довільної точки кривої та додатним напрямом осі OX.

Рівняння даної лінії в декартовій системі координат має вигляд:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \ . \qquad (2.61)$$

З нього видно, що дана лінія симетрична відносно бісектриси $y = x$.

10. **Цисоїда Діоклеса.** Рівняння розглянутої нами в § 2.1 лінії — цисоїди Діоклеса в декартовій системі координат має вигляд (2.12). Це ж рівняння може бути записане й у параметричній формі

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{t^2+1}, \\ y = \dfrac{a}{t(t^2+1)}, \end{cases} \qquad (2.62)$$

де a — радіус кола, розташованого на осі OX (рис. 2.5), а параметр t пробігає значення від $-\pi$ до π. Лінія зображена на рис. 2.6.

§ 2.5 АЛГЕБРАЇЧНІ ЛІНІЇ

В усіх прикладах даної глави, розглянуті нами рівняння ліній у прямокутній декартовій системі координат, являли собою многочлени відносно двох змінних величин x та y. Якщо в загальному рівнянні лінії (2.1) функція $F(x, y)$ є поліном $P(x, y)$ степеня n, то така лінія називається алгебраїчною лінією n-го порядку. Її рівняння в декартовій системі координат може бути записане:

$$P(x, y) = 0 \ . \qquad (2.63)$$

Так пряма лінія (2.4) — це алгебраїчна лінія першого порядку; коло (2.6), еліпс (2.52) — лінії другого порядку; цисоїда Діоклеса (2.12), локон Аньєзі (2.19), Декартів листок (2.61) — лінії третього порядку; лемніската Бернуллі (2.11), слимак Паскаля (2.39), овал Кассіні (2.42), конхоїда Нікомеда (2.44), строфоїда (2.47) — лінії четвертого порядку.

Слід зазначити, що порядок лінії визначається за рівнянням, записаним тільки в декартовій системі координат. Так, наприклад, рівняння кола в полярній системі координат (2.26) має перший степінь, а з його запису в декартовій системі координат видно, що це лінія другого порядку.

Порядок алгебраїчної лінії не змінюється при переході від однієї декартової системи координат до іншої. Дійсно, наприклад, при паралельному перенесенні (1.12) рівняння (2.63) матиме вигляд:

$$P(x' + x_0,\ y' + y_0) = 0 \ . \qquad (2.64)$$

Тоді при розкритті дужок у виразах $(x' + x_0)$, $(x' + x_0)^2$, $(x' + x_0)^3, \ldots$ й аналогічних зі змінною y, степінь одержаного полінома не може стати вище початкового. Подібна ситуація буде й при інших перетвореннях координат.

Таким чином, *порядок алгебраїчної лінії інваріантний відносно перетворення координат.*

Лінії, які не описуються рівняннями (2.63), але в загальному випадку мають вигляд (2.1), називаються *трансцендентними.* До таких ліній належать відомі зі шкільного курсу математики синусоїда, тангенсоїда, графіки показникової та логарифмічної функцій. Трансцендентними лініями є також спіралі. Наприклад, з рівняння спіралі Архімеда (2.30) у декартовій системі координат

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \ ,$$

видно, що ця лінія трансцендентна. Слід зазначити, що трансцендентними лініями є також усі нескінченні лінії з тими чи іншими властивостями періодичності.

ВПРАВИ

1. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від двох даних точок $M_1(-2;\ 4)$, $M_2(6;\ 8)$.

2. Знайти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від початку координат та точки $A(2;\ 6)$. Визначити належність точок $K(7;\ 1)$, $L(2;\ 5)$, $M(1;\ 3)$, $N(-2;\ 4)$ даному геометричному місцю точок.

3. Написати рівняння лінії в кожному з таких випадків: 1) відстань до осі OY дорівнює a; 2) відстань до осі OX дорівнює b; 3) відстані до координатних осей рівні між собою.

4. Скласти рівняння лінії, довільна точка якої вчетверо далі від осі OY, ніж від осі OX.

5. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від початку координат на 6 одиниць. Чи знаходяться на даній лінії точки

$$K(6;\ 0),\quad L(3;\ 4),\quad M(7;\ 2),\quad N(5;\ \sqrt{11})\ ?$$

6. Визначити геометричне місце точок, відстань яких до точки $A(6;\ 0)$ утричі більше за відстань до точки $B(2/3;\ 0)$.

7. Визначити геометричне місце точок, відстань яких до точки $A(4;\ 0)$ удвічі менше за відстань до точки $B(1;\ 0)$.

8. Знайти геометричне місце точок, для яких різниця квадратів відстаней до двох даних точок є величина стала.

9. Знайти точки перетину лінії $3x+4y-12=0$ із координатними осями.

10. Знайти точки перетину кола $x^2+y^2=36$ із координатними осями.

11. Знайти геометричне місце точок, рівновіддалених від точок перетину ліній $x^2+y^2=25$ та $4x-3y=0$.

12. Знайти геометричне місце точок, рівновіддалених від осі OX і точки $M(0;\ 2)$. Визначити точки перетину даної лінії з координатними осями.

13. Побудувати точки в полярній системі координат: $A(2;\ 0)$, $B(3;\ \pi/4)$, $C(1;\ \pi/2)$, $D(4;\ \pi)$, $E(2;\ 3\pi/4)$, $F(-2;\ 0)$, $G(-3;\ \pi/4)$, $K(1;\ -\pi/2)$, $L(4;\ -\pi)$, $M(-2;\ \pi/3)$.

14. Записати в полярних координатах рівняння ліній:

$$1)\ xy = 1/2;\quad 2)\ x\cos\alpha - y\sin\alpha - p = 0;$$
$$3)\ y-2x=0;\quad 4)\ x^2+y^2 = 2ay.$$

15. Побудувати лінії: 1) $\varphi = \pi/3$; 2) $\rho = a/\cos\varphi$; 3) $\rho = 2(1+2\cos\varphi)$.

16. Написати рівняння ліній у декартових координатах та побудувати їх: 1) $\rho\sin\varphi = b$; 2) $\rho^2\cos 2\varphi = a^2$; 3) $\rho = a\cos\varphi$.

17. Побудувати лінію $x=t^2$, $y=3t$.

18. Скласти рівняння ліній у декартовій системі координат, якщо:

1) $x = 2t,\quad y = (1/3)t$;

2) $x = 5t^2-1,\quad y = 10t^2+4$;

3) $x = 2\cos t,\quad y = 2\sin t$;

4) $x = 3\cos t,\quad y = 4\sin t$.

Глава 3

Пряма лінія на площині

Пряма лінія, як видно з попередньої глави, є найбільш простою лінією на площині. Якщо ми на площині задамо систему координат, то положення прямої лінії відносно цієї системи можна визначити різноманітними способами. Кожен із цих способів визначається тими чи іншими величинами, які характеризують пряму лінію, тобто параметрами, і в залежності від цього існують різні види рівнянь прямої лінії.

Спільним для всіх рівнянь прямої лінії є те, що всі вони першого степеня, оскільки пряма лінія — це алгебраїчна лінія першого порядку. В аналітичній геометрії замість терміна "прямі лінії" часто вживається термін лінії першого порядку.

§ 3.1 ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ

Якщо в рівнянні (2.63) зліва знаходиться многочлен першого степеня, то це рівняння є рівнянням прямої лінії. До нього входять змінні величини тільки першого степеня. Тому рівняння прямої лінії в загальному вигляді може бути записане:

$$Ax + By + C = 0 \quad (3.1)$$

Це рівняння називається *загальним рівнянням прямої*. Підкреслимо, що *тільки пряма лінія може бути зображена в декартовій системі координат рівнянням першого степеня* відносно поточних координат x та y.

Геометричний зміст рівняння (3.1) не зміниться, якщо до обох його частин застосовувати будь-які тотожні алгебраїчні перетворення або перенести будь-яку частину його членів у другу частину рівності. Тобто і до, і після таких перетворень рівнянню будуть відповідати координати одних і тих же точок площини.

Пряма лінія $Ax + By + C = 0$ ділить координатну площину на дві півплощини. Для точок однієї з них $Ax + By + C > 0$, а для точок другої $Ax + By + C < 0$. При цьому, якщо в рівнянні прямої $C < 0$ і $Ax + By + C < 0$, то фіксована точка $M_0(x_0;\ y_0)$ і початок координат знаходяться по один бік від прямої; якщо ж $C < 0$ і $Ax + By + C > 0$, то точка $M_0(x_0;\ y_0)$ і початок координат розташовані по різні боки від прямої $Ax + By + C = 0$. Для випадку $C > 0$ — навпаки.

Розглянемо окремі випадки рівняння (3.1).

1. $C = 0$. У цьому випадку рівняння (3.1) має вигляд

$$Ax + By = 0 \quad (3.2)$$

і визначає пряму лінію, яка проходить через початок координат, оскільки це рівняння виконується при $x = y = 0$.

2. $A = 0$. Рівняння (3.1) матиме вигляд:

$$By + C = 0 \quad (3.3)$$

або

$$y = b\ , \quad (3.4)$$

де $b = -C/B$. Для всіх точок цієї прямої лінії ордината y матиме постійне значення. При цьому пряма лінія розташована на координатній площині паралельно осі OX на відстані b від неї, зокрема, вище осі OX, якщо b — число додатне, і нижче осі OX, якщо b — число від'ємне.

3. $B = 0$. Рівняння (3.1) матиме вигляд:

$$Ax + C = 0 \quad (3.5)$$

або

$$x = a\ , \quad (3.6)$$

де $a = -C/A$. Для всіх точок цієї прямої лінії абсциса x матиме постійне значення.

Пряма, паралельна осі OY і розташована на відстані a від неї. При a додатних пряма розташована праворуч від осі OY, при a від'ємних — ліворуч.

4. $C = 0,\ A = 0$. Рівняння (3.1) матиме вигляд:

$$By = 0$$

або

$$y = 0\ . \quad (3.7)$$

У цьому випадку пряма збігається з віссю OX.

5. $C = 0,\ B = 0$. Рівняння (3.1) матиме вигляд:

$$Ax = 0$$

або

$$x = 0\ . \quad (3.8)$$

У цьому випадку пряма збігається з віссю OY.

Якщо розглянути дві прямі, розташовані на площині, то їх взаємне розташування визначається системою рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

1. Якщо прямі перетинаються, тобто мають одну спільну точку, то координати цієї точки належать обом рівнянням одночасно. Отже, для знаходження координат точки перетину прямих потрібно розв'язати систему рівнянь (3.9). Помноживши перше рівняння системи на B_2, а друге на B_1 і віднявши його від першого, маємо:

$$(A_1B_2 - A_2B_1)x + C_1B_2 - C_2B_1 = 0\ . \quad (3.10)$$

Помноживши перше рівняння на A_2, а друге на A_1, аналогічно одержимо:

$$(A_1B_2 - A_2B_1)y + C_2A_1 - C_1A_2 = 0\ . \quad (3.11)$$

За умови $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, знаходимо:

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \qquad y = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}\ . \quad (3.12)$$

Формули (3.12) визначають координати точки перетину двох прямих.

Тобто *необхідною умовою перетину двох прямих є* $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ або

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} . \quad (3.13)$$

2. Якщо прямі паралельні, то формули (3.12) утрачають свій зміст, тобто $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$. Таким чином, *необхідною умовою паралельності двох прямих є пропорційність коефіцієнтів у їх рівняннях при відповідних змінних величинах*:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} . \quad (3.14)$$

3. Якщо прямі збігаються, то з рівнянь (3.10) та (3.11) знаходимо:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} , \quad (3.15)$$

тобто *необхідною умовою збігу прямих є пропорційність відповідних коефіцієнтів їх рівнянь*. У цьому випадку одне з рівнянь системи (3.9) отримуємо з другого множенням усіх його членів на деякий спільний множник.

Приклади.

1. Побудувати пряму лінію $3x - 4y - 12 = 0$. Визначити, де розташовані точки, для яких:

1) $3x - 4y - 12 > 0$;

2) $3x - 4y - 12 < 0$.

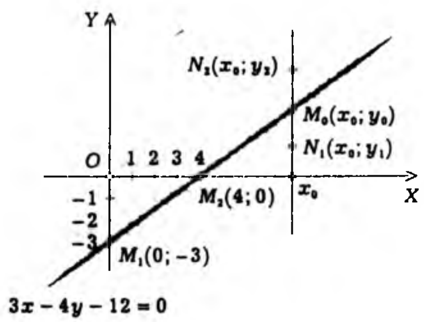


Рис. *3.1*

Для того щоб побудувати пряму, достатньо знати дві її довільні точки. Нехай, наприклад, $x_1 = 0$, тоді з рівняння лінії, знаходимо: $y_1 = -3$. Одержимо точку $M_1(0; -3)$. Якщо $y_2 = 0$, тоді з того ж рівняння знаходимо $x_2 = 4$. Одержимо другу точку $M_2(4; 0)$. Побудуємо точки M_1 та M_2 і проведемо через них пряму лінію. Пряма M_1M_2 й буде шуканою лінією (рис. 3.1).

Візьмемо три точки площини $N_1(x_0; y_1)$, $N_2(x_0; y_2)$ і $M_0(x_0; y_0)$, з яких точка M_0 лежить на прямій $3x - 4y - 12 = 0$, а точки N_1 і N_2 по різні боки від неї. Оскільки всі три точки мають одну й ту ж абсцису, то вона знаходиться на прямій, перпендикулярній осі OX.

Припустимо, що $y_1 < y_0 < y_2$, тобто точка N_1 розташована нижче прямої, а N_2 — вище. Після підстановки цих точок у рівняння прямої знайдемо:

$$3x_0 - 4y_0 - 12 = 0 , \quad 3x_0 - 4y_1 - 12 < 0 ,$$
$$3x_0 - 4y_2 - 12 > 0 .$$

Таким чином, перша нерівність умови відповідає точкам, що розташовані нижче прямої $3x - 4y - 12 = 0$, а друга нерівність — відповідає точкам, розташованим вище даної прямої.

2. Побудувати пряму лінію $3x - 4y = 0$.

Ця пряма проходить через початок координат $O(0; 0)$. Для знаходження будь-якої іншої точки нехай, наприклад, $x = 3$, знаходимо $y = 4$. Будуємо точку $M(3; 4)$ та проводимо шукану пряму через дві відомі точки O та M (рис. 3.2).

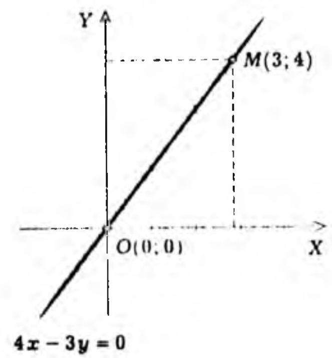


Рис. *3.2*

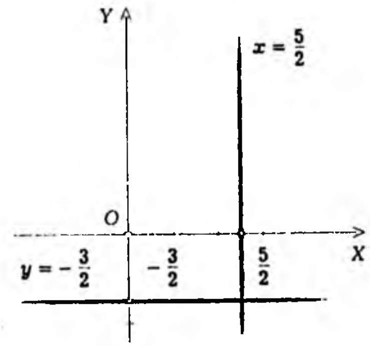


Рис. *3.3*

3. Побудувати прямі лінії: 1) $2x - 5 = 0$; 2) $2y + 3 = 0$.

Перша пряма паралельна осі OY. З рівняння $2x - 5 = 0$ знаходимо $x = 5/2$. Отже, шукана пряма проходить від осі OY на відстані $5/2$ одиниць масштабу (рис. 3.3).

Аналогічно друга пряма $2y + 3 = 0$, або $y = -3/2$, паралельна осі OX і відтинає на осі OY відрізок, рівний $3/2$, нижче від осі OX (рис. 3.3).

4. Знайти точку перетину прямих ліній $2x + 5y - 1 = 0$ і $x - 2y - 3 = 0$.

Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + 5y - 1 = 0, \\ x - 2y - 3 = 0, \end{cases}$$

знаходимо координати шуканої точки перетину даних прямих: $x = 17$ та $y = 7$.

5. Визначити взаємне розташування прямих ліній, заданих рівняннями:

а) $x - 2y + 3 = 0$ та $2x - 4y + 1 = 0$;

б) $x - 2y + 3 = 0$ та $2x - 4y + 6 = 0$.

У першому випадку прямі паралельні, оскільки згідно з умови (3.14):

$$\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{3}{1} .$$

У другому випадку прямі збігаються, оскільки виконується умова (3.15):

$$\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} = \frac{3}{6} .$$

§ 3.2 РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ З КУТОВИМ КОЕФІЦІЄНТОМ

Розглянемо на площині XOY пряму лінію не паралельну осі OY. Положення її буде визначене, якщо відомі кут нахилу α прямої до осі абсцис та величина b відрізка, що відтинається цією прямою на осі ординат (рис. 3.4). Причому кут α, це кут, на який треба повернути проти годинникової стрілки вісь OX відносно точки її перетину з прямою до суміщення з нею, тобто кут α змінюється від 0 до π. Якщо пряма паралельна осі OX, то $\alpha = 0$.

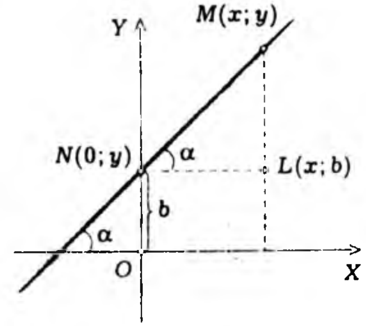


Рис. 3.4

Візьмемо на прямій довільну точку $M(x;\ y)$. Проведемо через точку N пряму, паралельну осі OX, й опустимо з точки M перпендикуляр на вісь OX. Побудуємо допоміжний трикутник NLM, в якому $NL = x$, а $LM = y - b$. З трикутника NLM маємо:

$$LM = NL \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

або

$$y - b = x \operatorname{tg}\alpha .$$

Якщо позначити $\operatorname{tg}\alpha = k$ та перенести b в праву частину рівності, то одержимо рівняння:

$$y = kx + b , \quad (3.16)$$

яке називається *рівнянням прямої лінії з кутовим коефіцієнтом.* Величина k називається *кутовим коефіцієнтом і дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до додатного напряму осі* OX. Кутовий коефіцієнт характеризує напрям прямої. Якщо кутовий коефіцієнт дорівнює нулю, то пряма паралельна осі абсцис. При додатному значенні кутового коефіцієнта кут нахилу прямої до осі OX буде гострим, причому чим більше значення кутового коефіцієнта, тим більшим є кут її нахилу до осі OX. Якщо кутовий коефіцієнт від'ємний, то кут нахилу прямої до осі OX буде тупим. Якщо пряма, перпендикулярна до осі OX (паралельна осі OY), то вона не має кутового коефіцієнта, оскільки тангенс $90°$ не існує.

Для простоти виводу рівняння (3.16) ми обрали кут α гострим (рис. 3.4). Легко переконатися, що рівняння (3.16) не зміниться, якщо пряма утворюватиме з віссю OX не гострий, а тупий кут.

В окремому випадку, якщо пряма проходитиме через початок координат, то $b = 0$ й рівняння її матиме вигляд:

$$y = kx \; . \qquad (3.17)$$

Якщо пряма паралельна осі OX, то її кутовий коефіцієнт k дорівнюватиме нулю й рівняння прямої буде:

$$y = b \; . \qquad (3.18)$$

Зокрема, якщо й $b = 0$, то ми одержимо рівняння осі OX:

$$y = 0 \; . \qquad (3.19)$$

При виведенні рівняння (3.16) ми припустили, що пряма не паралельна осі OY. Дійсно, у цьому випадку кут α дорівнює $\pi/2$ й кутовий коефіцієнт не має свого значення ($\operatorname{tg}\alpha = \infty$), і тоді рівняння (3.16) утрачає свій зміст.

Слід зауважити, що рівняння (3.16) можна отримати також із загального рівняння прямої лінії (3.1). Дійсно, якщо розв'язати його відносно y (припускаючи, що $B \neq 0$), то одержимо:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \; .$$

Позначивши $-\dfrac{A}{B} = k$ і $-\dfrac{C}{B} = b$, отримаємо:

$$y = kx + b \; .$$

Знайшовши з цього рівняння дві довільні точки й побудувавши лінію, можна переконатися, що геометричний зміст параметрів k та b є саме таким, якого вони набули при їх означенні.

Приклади.

1. Написати рівняння прямої лінії, паралельної бісектрисі першого координатного кута, якщо відомо, що вона відтинає на осі OY відрізок, рівний п'яти одиницям.

   Шукана пряма лінія, як і бісектриса першого координатного кута, утворює з віссю OX кут $\alpha = 45°$, тому $k = \operatorname{tg}45° = 1$. Підставляючи в рівняння $y = kx + b$ значення $k = 1$ та $b = 5$, одержимо шукане рівняння $y = x + 5$.

2. Побудувати пряму лінію $y = 3x + 2$.

   Нехай у рівнянні прямої лінії $y = 3x + 2$, $x = 0$, тоді одержимо $y = 2$. Отримаємо точку $M(0;\,2)$. Припустивши, $x = 1$, одержимо $y = 5$. Отримаємо другу точку $N(1;\,5)$. Будуємо точки M та N і через них проводимо пряму (рис. 3.5)

3. Визначити параметри k та b прямих ліній:

$$2x + 5y - 10 = 0, \quad 3y + 7 = 0 \; ,$$
$$2x - 9y = 0 \; .$$

   Розв'язуючи перше рівняння відносно y, одержимо:

$$y = -\frac{2}{5}x + \frac{10}{5}$$

   або

$$y = -\frac{2}{5}x + 2 \; .$$

   Порівнюючи це рівняння з рівнянням $y = kx + b$, знаходимо $k_1 = -2/5$, $b_1 = 2$.

   Аналогічно розв'язуючи два інших рівняння відносно y, одержимо:

$$y = -7/3 \, , \quad \text{звідки} \quad k_2 = 0 \, , \quad b_2 = -7/3 \; ;$$

$$y = (4/9)x \, , \quad \text{звідки} \quad k_3 = 4/9 \, , \quad b_3 = 0 \; .$$

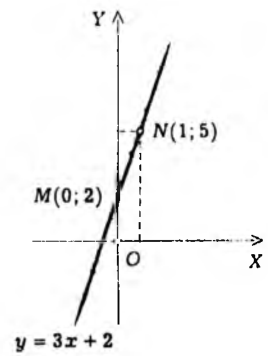


Рис. 3.5

§ 3.3 КУТ МІЖ ДВОМА ПРЯМИМИ. УМОВИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ТА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТІ ДВОХ ПРЯМИХ

Розглянемо дві довільні прямі лінії $y_1 = k_1x + b_1$ та $y_2 = k_2x + b_2$, які перетинаються. Знайдемо гострий кут φ між ними.

Позначимо через α_1 та α_2 кути, які утворюють ці прямі з додатним напрямом осі OX (рис. 3.6). Нехай φ буде гострий кут між прямими, а θ — тупий. Із властивості зовнішнього кута трикутника, утвореного прямими з віссю OX, маємо:

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1 .$$

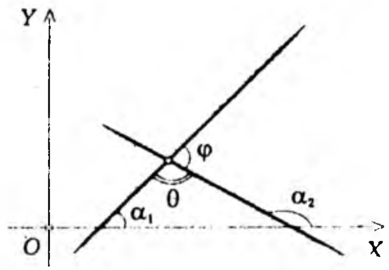


Рис. 3.6

Тоді для гострого кута φ між даними прямими маємо

$$\varphi = \pi + (\alpha_2 + \alpha_1)$$

$$\text{tg}\varphi = \text{tg}(\pi + (\alpha_2 - \alpha_1)) = \text{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\text{tg}\alpha_2 - \text{tg}\alpha_1}{1 + \text{tg}\alpha_1 \text{tg}\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

або для тупого $\theta = \pi - \varphi$ і

$$\text{tg}\,\theta = \text{tg}(\pi - \varphi) = -\text{tg}\,\varphi = -\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} .$$

Обидва випадки можна об'єднати в одну формулу:

$$\text{tg}\,\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right| . \quad (3.20)$$

Модуль, який знаходиться в правій частині формули (3.20), дає можливість знаходити гострий кут між двома прямими незалежно від розташування однієї прямої відносно другої.

Слід зауважити, що коли хоча б одна з даних прямих паралельна осі OY, то формула (3.20) утрачає зміст. У цьому випадку, вважаючи, наприклад, що паралельна осі OY друга пряма ($\alpha_2 = \pi/2$), кут між прямими знаходиться за формулою $\varphi = \pi/2 - \alpha_1$ і $\varphi = \pi/2 + \alpha_2$, якщо перша пряма паралельна осі OY ($\alpha_1 = \pi/2$).

Якщо прямі, що перетинаються, задані своїми загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{та} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 ,$$

то їхні кутові коефіцієнти мають значення:

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2} .$$

Підставляючи ці значення у формулу (3.20), одержимо:

$$\text{tg}\varphi = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right| . \quad (3.21)$$

Відзначимо, що ця формула, на відміну від формули (3.20), придатна й для того випадку, коли одна з прямих паралельна осі OY.

Якщо прямі паралельні, то кути α_1 та α_2, утворені ними з віссю OX, будуть рівні між собою, тому $\text{tg}\alpha_1 = \text{tg}\alpha_2$ або

$$k_1 = k_2 . \quad (3.22)$$

Рівність (3.22) називається *умовою паралельності* двох прямих. Таким чином, *необхідною й достатньою умовою паралельності двох прямих є рівність їх кутових коефіцієнтів.*

Якщо прямі взаємо перпендикулярні, то $\varphi = \pi/2$ і знаменник формули (3.20) перетворюється на нуль. Звідки

$$k_1 \cdot k_2 = -1 . \quad (3.23)$$

Рівність (3.23) називається *умовою перпендикулярності* двох прямих. Таким чином, *необхідною й достатньою умовою перпендикулярності двох прямих є рівність мінус одиниці добутку їх кутових коефіцієнтів.*

Для випадку, коли прямі лінії задані своїми загальними рівняннями, формули (3.22) та (3.23) перепишуться у вигляді:

1) *умова паралельності прямих*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} ; \quad (3.24)$$

2) *умова перпендикулярності прямих*

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 . \quad (3.25)$$

При цьому формула (3.24) знаходиться в повній відповідності з формулою (3.14).

Приклади.

1. Знайти кут між прямими лініями, заданими рівняннями:

$$y = -\frac{2}{5}x + 3 \quad \text{та} \quad y = \frac{3}{7}x + \frac{2}{7} \ .$$

Підставляючи у формулу (3.20) значення кутових коефіцієнтів $k_1 = -2/5$, $k_2 = 3/7$, маємо:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{\frac{3}{7} - \left(-\frac{2}{5}\right)}{1 + \left(-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{7}\right)} \right| = \frac{\frac{29}{35}}{\frac{29}{35}} = 1 \ ,$$

звідки $\varphi = 45°$.

2. Знайти кут між прямими $2x - 3y = 0$ та $15x + 5y + 7 = 0$.

Перепишемо рівняння прямих у вигляді (3.16):

$$y = \frac{2}{3}x \quad \text{та} \quad y = -3x - \frac{7}{5} \ ,$$

звідки $k_1 = \frac{2}{3}$, $k_2 = -3$.

Отже,

$$\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| = \left| \frac{-3 - \frac{2}{3}}{1 - (-3)\left(\frac{2}{3}\right)} \right| = \frac{11}{3} \ .$$

Звідки

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{11}{3} \approx 75° \ .$$

3. Знайти кут між прямими $6x + 8y + 5 = 0$ та $2x - 4y - 3 = 0$.

Підставляючи у формулу (3.21) значення $A_1 = 6$, $B_1 = 8$, $A_2 = 2$, $B_2 = -4$, знаходимо:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{6 \cdot (-4) - 2 \cdot 8}{6 \cdot 2 + 8(-4)} \right| = \left| \frac{-24 - 16}{12 - 32} \right| = \left| \frac{-40}{-20} \right| = 2 \ ,$$

звідки $\varphi = \operatorname{arctg} 2$.

4. Які з даних прямих:

$$1)\ 3x - 15y + 16 = 0 \ ; \quad 2)\ 3x + 15y - 8 = 0 \ ;$$

$$3)\ 6x - 30y + 13 = 0 \ ; \quad 4)\ 30x + 6y + 7 = 0 \ ,$$

паралельні, а які перпендикулярні?

Перша й третя прямі паралельні, оскільки виконується умова (3.24). Дійсно: $A_1 = 3$; $B_1 = -15$, $A_2 = 6$, $B_2 = -30$. Тоді:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \ ; \quad \frac{B_1}{B_2} = \frac{-15}{-30} = \frac{1}{2} \ ; \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \ .$$

Третя та четверта прямі перпендикулярні, оскільки виконується умова (3.25):

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 6 \cdot 30 + (-30) \cdot 6 = 0 \ .$$

Перша та четверта прямі також перпендикулярні.

§ 3.4 РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ДАНУ ТОЧКУ В ДАНОМУ НАПРЯМІ

Припустимо, що є точка $M_0(x_0;\ y_0)$ і відомо кутовий коефіцієнт k_0, який визначає напрям прямої лінії, що проходить через точку M_0. Будемо шукати рівняння прямої лінії у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом

$$y = k_0 x + b \ . \qquad (3.26)$$

Невідомий коефіцієнт b знайдемо з умови проходження лінії через точку M_0. Оскільки точка $M_0(x_0;\ y_0)$ знаходиться на даній прямій, то її координати відповідають рівнянню (3.26), тобто:

$$y_0 = k_0 x_0 + b \ . \qquad (3.27)$$

Віднімаючи (3.27) від (3.26), одержимо *рівняння прямої лінії, що проходить через дану точку* $(x_0;\ y_0)$ *за даним напрямом*, означеним кутовим коефіцієнтом k_0:

$$y - y_0 = k_0(x - x_0) \ . \qquad (3.28)$$

Відзначимо, що у формі (3.28) може бути записане рівняння будь-якої прямої, за винятком прямої паралельної осі OY. Це випливає безпосередньо з умови побудови рівняння виду (3.26).

Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0;\ y_0)$ паралельно осі OY, матиме вигляд:

$$x = x_0 \ .$$

Приклади.

1. Скласти рівняння прямої лінії, що проходить через точку $(-4;\ 5)$, і нахиленої до осі OX під кутом $135°$.

Рівняння прямої можна записати у вигляді (3.28). При цьому $x_0 = -4$, $y_0 = 5$, $k_0 = \operatorname{tg}135° = \operatorname{tg}(180° - 45°) = -\operatorname{tg}45° = -1$. Тоді

$$y - 5 = -1(x + 4)$$

або

$$x + y - 1 = 0 \ .$$

2. Скласти рівняння прямої лінії, що проходить через точку $A(1;\ 3)$ паралельно до прямої $2x - y + 3 = 0$.

Перепишемо рівняння даної прямої у вигляді (3.16):

$$y = 2x + 3 \ ,$$

звідки її кутовий коефіцієнт $k_1 = 2$. Оскільки дана й шукана прямі паралельні, то за умови паралельності двох прямих (3.22) знаходимо кутовий коефіцієнт шуканої прямої:

$$k_2 = k_1 = 2 \ .$$

Підставляючи координати точки A й кутовий коефіцієнт k_2 в формулу (3.28), знаходимо рівняння шуканої прямої:

$$y - 3 = 2(x - 1)$$

або

$$y = 2x + 1 \ .$$

3. Скласти рівняння прямої лінії, що проходить через точку $(-2;\ 3)$ перпендикулярно до прямої $3x - y + 4 = 0$.

Кутовий коефіцієнт k_1 даної прямої $y = 3x + 4$ дорівнює 3. За умови перпендикулярності двох прямих (3.23) знаходимо кутовий коефіцієнт шуканої прямої:

$$3k_2 = -1 \ , \quad \text{звідки} \quad k_2 = -\frac{1}{3} \ .$$

Таким чином, шукане рівняння матиме вигляд:

$$y - 3 = -\frac{1}{3}(x + 2)$$

або

$$x + 3y - 7 = 0 \ .$$

4. Знайти рівняння прямої лінії, що проходить через точку $(4;\ -1)$ й утворює кут $45°$ із прямою $5x - 2y + 7 = 0$.

Переписавши рівняння даної прямої у вигляді $y = (5/2)x + 7/2$, знаходимо її кутовий коефіцієнт, який дорівнює $5/2$. Кутовий коефіцієнт шуканої прямої знаходимо за формулою (3.20). Але оскільки в умові задачі не обумовлено, від якої з прямих ведеться відлік кута, то дана задача матиме два розв'язки.

У першому випадку вважатимемо у формулі (3.20) $k_1 = 5/2$, $\varphi = 45°$, а k_2 — шуканий кутовий коефіцієнт. Тоді матимемо:

$$1 = \frac{k_2 - \frac{5}{2}}{1 + \frac{5}{2}k_2} \ , \quad \text{звідки} \quad k_2 = -\frac{7}{3} \ ,$$

і шукане рівняння матиме вигляд:

$$y + 1 = -\frac{7}{3}(x - 4)$$

або

$$7x + 3y - 25 = 0 \ .$$

У другому випадку вважатимемо у формулі (3.20) $k_2 = 5/2$, $\varphi = 45°$. Тоді

$$1 = \frac{\frac{5}{2} - k_1}{1 + \frac{5}{2}k_1} \ , \quad \text{звідки} \quad k_1 = \frac{3}{7} \ .$$

Отже, шукане рівняння матиме вигляд:

$$y + 1 = \frac{3}{7}(x - 4)$$

або

$$3x - 7y - 19 = 0 \ .$$

Відзначимо, що оскільки кожна зі знайдених нами прямих утворює з даною прямою кут $45°$, то вони перпендикулярні між собою. Дійсно, їх кутові коефіцієнти дорівнюють $-7/3$ та $3/7$. Очевидно, що умова перпендикулярності двох прямих (3.23) виконується.

§ 3.5 ЖМУТОК ПРЯМИХ

Якщо в рівнянні (3.28) при заданих координатах x_0 та y_0 довільним способом змінювати кутовий коефіцієнт k_0, то таке рівняння буде визначати будь-яку з прямих, що проходить через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ (окрім прямої $x = x_0$, паралельної осі OY). Усі ці прямі утворюють *жмуток прямих* з центром у точці $M_0(x_0;\ y_0)$ (рис. 3.7).

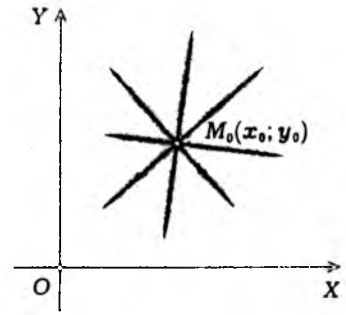


Рис. 3.7

Рівняння

$$y - y_0 = k(x - x_0) \ , \quad (3.29)$$

де k — довільне число, називається рівнянням *жмутка прямих* з центром у точці $M_0(x_0;\ y_0)$.

Рівняння (3.29) припускає, що центр жмутка відомий. Для випадку, коли центр жмутка не задається безпосередньо, його можна визначити, розв'язавши спільно рівняння будь-якої пари прямих, що належать даному жмутку.

Проте формула (3.29) не є єдиною формою запису рівняння жмутка прямих. Його можна визначити не тільки за допомогою координат його центра, а й за допомогою рівнянь двох довільних прямих цього жмутка.

Нехай є дві непаралельні прямі, задані своїми загальними рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \ . \quad (3.30)$$

Складемо рівняння:

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \ , \quad (3.31)$$

де λ — довільний параметр.

При будь-якому значенні λ рівняння (3.31) визначає пряму лінію, оскільки воно є рівнянням першого степеня відносно змінних x та y, а отже й рівнянням деякої прямої на площині. Можна показати, що ця пряма проходить через точку $M_0(x_0;\ y_0)$, яка належить жмутку прямих. Дійсно, оскільки точка $(x_0;\ y_0)$ належить кожній із даних прямих, то

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0 \ ,$$

звідки $$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 + \lambda(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0 \ .$$

Таким чином, точка M_0 знаходиться на прямій (3.31) за будь-яких значень параметра λ. Рівняння (3.31) за будь-яких значень λ визначає деяку пряму зі жмутка з центром у точці M_0.

Доведемо тепер, що завжди можна вибрати таке значення λ, щоб рівняння (3.31) визначало будь-яку заздалегідь відому пряму з даного жмутка. Нехай ця пряма визначена таким чином, що вона повинна проходити через точку $P(x_1;\ y_1)$ з відомими координатами, на відміну від точки M_0. Підставляючи x_1 та y_1 у співвідношення (3.31), маємо:

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 + \lambda(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = 0 \ . \qquad (3.32)$$

У виразі (3.32) принаймні один із двох доданків $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 = 0$ або $A_2x_1 + B_2y_1 + C_2 = 0$ буде відмінним від нуля, оскільки в протилежному випадку точка P була б точкою перетину прямих (3.30) і збігалася б із точкою M_0. Нехай $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 \neq 0$. Тоді з (3.32) рівняння знаходимо:

$$\lambda = -\frac{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1}{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2} \ . \qquad (3.33)$$

Таким чином, рівняння (3.31) є рівнянням будь-якої прямої зі жмутка з центром у точці M_0 перетину двох даних прямих (3.30). Отже, рівняння (3.31) буде рівнянням жмутка прямих.

Рівняння (3.31) простіше за рівняння (3.29) і в деяких випадках при розв'язку задач більш корисне.

Параметр λ неможливо визначити тільки в тому випадку, коли точка $P(x_1;\ y_1)$ буде перебувати на прямій $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, бо при цьому формула (3.33) втрачає зміст. Рівняння цієї останньої прямої, очевидно, можна отримати з рівняння:

$$\mu(A_1x + B_1y + C_1) + (A_2x + B_2y + C_2) = 0 \ ,$$

припустивши параметр μ рівним нулю.

Приклади.

1. Скласти рівняння жмутка прямих, що проходить через точку $M(4; -5)$. Серед прямих даного жмутка вибрати пряму, паралельну прямій $2x - 3y + 5 = 0$, і пряму, перпендикулярну їй.

Підставляючи координати точки M у рівняння (3.29), одержимо рівняння жмутка прямих, що проходить через точку M:

$$y + 5 = k(x - 4) \ ,$$

де k може набувати будь-яких дійсних значень.

При кожному фіксованому значенні k одержимо цілком визначену пряму. Серед цієї множини прямих виберемо ту, що паралельна

прямій $2x - 3y + 5 = 0$. Розв'язавши останнє рівняння відносно y, маємо:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \ ,$$

звідки $k = 2/3$, де k — кутовий коефіцієнт даної прямої. Шукана пряма, згідно з рівнянням (3.22), також матиме кутовий коефіцієнт k.

Підставляючи це значення k в рівняння жмутка, знаходимо рівняння шуканої прямої

$$y + 5 = \frac{2}{3}(x - 4)$$

або

$$2x - 3y - 23 = 0 \ .$$

З умови перпендикулярності двох прямих (3.23) знаходимо кутовий коефіцієнт прямої, перпендикулярної даній: $k = -3/2$. Тоді друга шукана пряма запишеться рівнянням

$$y + 5 = -\frac{3}{2}(x - 4)$$

або

$$3x + 2y - 2 = 0 \ .$$

2. Написати рівняння прямої лінії, що проходить через точку перетину ліній $x + 2y - 3 = 0$ і $3x - y + 5 = 0$ та точку $M(3; -2)$.

Запишемо рівняння жмутка прямих, що проходить через точку перетину даних прямих:

$$x + 2y - 3 + \lambda(3x - y + 5) = 0 \ . \qquad (3.34)$$

Параметр λ визначимо з умови проходження шуканої прямої через точку M:

$$3 + 2\cdot(-2) - 3 + \lambda(3\cdot 3 - (-2) + 5) = 0 \ ,$$

звідки $\lambda = 1/4$. Підставляючи це значення в рівняння жмутка (3.34), одержимо рівняння шуканої прямої:

$$x + 2y - 3 + \frac{1}{4}(3x - y + 5) = 0$$

або $$x + y - 1 = 0 \ .$$

3. Скласти рівняння прямої лінії, що проходить через точку перетину прямих $2x - y - 3 = 0$ і $x - 2y + 3 = 0$ перпендикулярно до прямої $y = x$.

Перший спосіб. Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0, \\ x - 2y + 3 = 0, \end{cases}$$

знаходимо координати точки перетину прямих: $x = 3$, $y = 3$.

З умови перпендикулярності прямих (3.23) кутовий коефіцієнт шуканої прямої $k_0 = -1$. Тоді її рівняння одержимо з формули (3.28):

$$y - 3 = -1(x - 3)$$

або

$$x + y - 6 = 0 \ .$$

Другий спосіб. Шукане рівняння можна записати у вигляді (3.31):

$$2x - y - 3 + \lambda(x - 2y + 3) = 0 \qquad (3.35)$$

або

$$(2+\lambda)x + (-1-2\lambda)y + 3(-1+\lambda) = 0 \ .$$

Кутовий коефіцієнт цієї лінії буде:

$$k = \frac{2+\lambda}{1+2\lambda} \ .$$

Тоді, враховуючи те, що кутовий коефіцієнт шуканої прямої, згідно з умовою (3.23) $k_0 = -1$, маємо:

$$\frac{2+\lambda}{1+2\lambda} = -1 \ ,$$

звідки $\lambda = -1$.

Підставляючи це значення λ у рівняння даного жмутка прямих (3.35), одержимо шукане рівняння прямої:

$$2x - y - 3 + (-1)\cdot(x - 2y + 3) = 0$$

або

$$x + y - 6 = 0 \ .$$

4. Через точку перетину прямих $x - 2y + 3 = 0$ та $x + 5y - 2 = 0$ провести пряму під кутом 45° до першої з них.

Запишемо рівняння жмутка прямих:

$$x - 2y + 3 + \lambda(x + 5y - 2) = 0$$

або

$$(1+\lambda)x + (-2+5\lambda)y + 3 - 2\lambda = 0 \ .$$

Звідси знаходимо кутовий коефіцієнт прямої жмутка:

$$k = \frac{1+\lambda}{2-5\lambda} \ . \quad (3.36)$$

Кутовий коефіцієнт першої з даних прямих $k_1 = 1/2$. За формулою (3.20) для кута між прямими при $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}45° = 1$ маємо:

$$1 = \left| \frac{k_2 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}k_2} \right| \ ,$$

звідки знаходимо два значення k_2: $(k_2)_1 = 3$, $(k_2)_2 = -1/3$. Підставляючи ці значення в (3.36), знаходимо $\lambda_1 = 5/16$, $\lambda_2 = 5/2$. Тоді рівняння шуканих прямих матимуть вигляд:

$$x - 2y + 3 + \frac{5}{16}(x + 5y - 2) = 0$$

або

$$21x - 57y + 38 = 0 \ ,$$

$$x - 2y + 3 + \frac{5}{2}(x + 5y - 2) = 0$$

або

$$7x + 21y - 4 = 0 \ .$$

§ 3.6 РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ДВІ ЗАДАНІ ТОЧКИ

Знайдемо рівняння прямої лінії, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1;\ y_1)$ та $M_2(x_2;\ y_2)$. Будемо вважати, що $x_1 \neq x_2$ та $y_1 \neq y_2$, тобто пряма лінія не паралельна жодній із осей координат.

Рівняння жмутка прямих ліній, що проходить через точку $M_1(x_1;\ y_1)$, матиме вигляд:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \ , \quad (3.37)$$

де k — довільний параметр. Щоб виділити з цього жмутка пряму лінію, яка проходить через точку $M_2(x_2;\ y_2)$, потрібно координати цієї точки підставити в рівняння (3.37):

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \ . \quad (3.38)$$

Із рівності (3.38) знаходимо значення:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \ . \quad (3.39)$$

Формула (3.39) виражає кутовий коефіцієнт прямої лінії через координати двох довільних її точок.

Підставляючи (3.39) у (3.37), *одержимо рівняння прямої лінії, що проходить через дві задані точки* $M_1(x_1;\ y_1)$ та $M_2(x_2;\ y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \ . \quad (3.40)$$

Якщо пряма буде паралельна осі абсцис, то $y_2 - y_1 = 0$, а якщо осі ординат, то $x_2 - x_1 = 0$, і тоді формула (3.40) у даній формі запису втрачає свій зміст. У цих випадках рівняння ліній матимуть вигляд $y = y_1$ та $x = x_1$ відповідно. Їх можна отримати також із формули (3.40), але записавши її у вигляді:

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1) \ , \quad (3.41)$$

а потім припустивши, що $x_1 = x_2$ або $y_1 = y_2$ відповідно.

Таким чином, рівнянням (3.41) на відміну від рівняння (3.40), можна користуватися для будь-якої пари заданих точок.

Насамкінець розглянемо випадок, коли три довільні точки $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, $M_3(x_3;\ y_3)$ розташовані на одній прямій лінії. Скориставшись формою запису рівняння прямої лінії у вигляді (3.40), а також умовою знаходження третьої точки на даній лінії, знаходимо:

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \ . \quad (3.42)$$

Формула (3.42) є *умовою знаходження трьох даних точок на одній прямій лінії.*

Приклади.

1. Скласти рівняння прямих ліній, що є медіанами трикутника з вершинами $A(3;\ 4)$, $B(3;\ 2)$, $C(-1;\ 2)$.

Позначимо середини сторін AB, BC, CA відповідно через D, E, F. Згідно з формулами (1.10) знаходимо координати цих точок: $D(3;\ 3)$, $E(1;\ 2)$, $F(1;\ 3)$. Підставляючи в рівняння (3.40) координати точок D і E, знаходимо рівняння медіани DE:

$$\frac{y-3}{2-3} = \frac{x-3}{1-3}$$

або

$$x - 2y + 3 = 0 \ .$$

Рівняння медіан EF і DF отримуємо безпосередньо. Оскільки абсциси точок E і F та ординати точок D і F рівні між собою, то в першому випадку пряма EF буде паралельна осі OY, у другому — пряма DF паралельна осі OX. Їхні рівняння будуть відповідно такими:

$$x = 1 \quad \text{або} \quad x - 1 = 0$$

та

$$y = 3 \quad \text{або} \quad y - 3 = 0 \ .$$

2. Написати рівняння сторін і висот трикутника з вершинами $A(-4;\ 3)$, $B(2;\ 5)$, $C(6;\ -2)$.

Складемо рівняння сторони AB. Користуючись формулою (3.40), маємо:

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{x-x_A}{x_B-x_A} \quad \Rightarrow \quad \frac{y-3}{5-3} = \frac{x+4}{2+4}$$

або

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{13}{3} \ .$$

З цього рівняння знаходимо кутовий коефіцієнт прямої AB: $K_{AB} == 1/3$.

Аналогічно знаходимо рівняння сторони BC:

$$\frac{y-5}{-2-5} = \frac{x-2}{6-2} \quad \text{або} \quad y = -\frac{7}{4}x + \frac{17}{2}$$

та її кутовий коефіцієнт $k_{BC} = -1/2$, і рівняння сторони AC:

$$\frac{y-3}{-2-3} = \frac{x+4}{6+4} \quad \text{або} \quad y = -\frac{1}{2}x + 1$$

та її кутовий коефіцієнт $k_{AC} = -1/2$.

Рівняння висоти, опущеної з точки $C(6;\ -2)$ на сторону AB, визначається рівнянням (3.28). Її кутовий коефіцієнт знаходимо з умови перпендикулярності прямих (3.23):

$$k = -\frac{1}{k_{AB}} = -3 \ .$$

Тоді

$$y + 2 = -3(x - 6) \quad \text{або} \quad 3x + y - 16 = 0 \ .$$

Аналогічно знаходимо рівняння висоти, опущеної з точки $B(2;\ 5)$ на сторону AC:

$$y - y_B = -\frac{1}{k_{AC}}(x - x_B) \quad \Rightarrow \quad y - 5 = 2(x - 2)$$

або

$$2x - y + 1 = 0$$

і рівняння висоти, опущеної з точки $A(-4;\ 3)$ на сторону BC:

$$y - y_A = -\frac{1}{k_{BC}}(x - x_A) \quad \Rightarrow \quad y - 3 = \frac{4}{7}(x + 4)$$

або

$$4x - 7y + 37 = 0 \ .$$

3. Скласти рівняння прямої лінії, що проходить через точку перетину прямих $x + 2y - 3 = 0$ та $x - 2y + 5 = 0$ і через точку $(1;\ 5)$.

Перший спосіб. Знаходимо координати точки перетину двох даних прямих ліній, для чого розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0, \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (-3;\ 3) \ .$$

Запишемо рівняння шуканої лінії за двома даними точками:

$$\frac{y-3}{5-3} = \frac{x+3}{1+3} \quad \Rightarrow \quad \frac{y-3}{2} = \frac{x+3}{4}$$

або

$$x - 2y + 9 = 0 \ .$$

Другий спосіб. Запишемо рівняння жмутка прямих ліній, що визначає точку перетину двох даних ліній:

$$x + 2y - 3 + \lambda(2x - y + 9) = 0 \ . \qquad (3.43)$$

Щоб виділити з цього жмутка пряму лінію, що проходить через дану точку $(1;\ 5)$, підставимо координати цієї точки в рівняння (3.43):

$$1 + 10 - 3 + \lambda(2 - 5 + 9) = 0 \ ,$$

звідки $\lambda = -4/3$.

Підставляючи це значення λ у формулу (3.43), знаходимо шукане рівняння лінії:

$$x + 2y - 3 - \frac{4}{3}(2x - y + 9) = 0$$

або

$$x - 2y + 9 = 0 \ .$$

4. Написати рівняння прямої лінії, що проходить через точку M перетину прямих $5x - y + 10 = 0$, $8x + 4y + 9 = 0$ і паралельна прямій $x + 3y = 0$.

Перший спосіб. Знаходимо точку перетину прямих:

$$\begin{cases} 5x - y + 10 = 0, \\ 8x + 4y + 9 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad M\left(-\frac{49}{28};\ \frac{35}{28}\right) \ .$$

Кутовий коефіцієнт шуканої прямої, згідно з умовою паралельності двох прямих, буде дорівнювати $k = -1/3$, оскільки рівняння лінії $x + 3y = 0$ може бути записане у вигляді $y = -(1/3)x$.

Тоді, згідно з формулою (3.28), рівняння шуканої прямої матиме вигляд:

$$y - \frac{35}{28} = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{49}{28}\right) \quad \text{або} \quad x + 3y - 2 = 0 \ .$$

Другий спосіб. Запишемо рівняння жмутка прямих, що проходить через точку M:

$$5x - y + 10 + \lambda(8x + 4y + 9) = 0$$

або

$$(5 + 8\lambda)x + (-1 + 4\lambda)y + 10 + 9\lambda = 0 \ . \qquad (3.44)$$

Кутовий коефіцієнт шуканої прямої з даного жмутка прямих (3.44) буде дорівнювати:

$$k = \frac{5 + 8\lambda}{1 - 4\lambda}$$

і згідно з умовою дорівнює $-1/3$.

Тоді

$$-\frac{1}{3} = \frac{5 + 8\lambda}{1 - 4\lambda} \quad \text{або} \quad \lambda = -\frac{4}{5} \ .$$

Підставляючи це значення λ у співвідношення (3.44), знаходимо шукане рівняння прямої лінії:

$$5x - y + 10 - \frac{4}{5}(8x + 4y + 9) = 0$$

або

$$x + 3y - 2 = 0 \ .$$

§ 3.7 РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ У ВІДРІЗКАХ НА ОСЯХ

Нехай є пряма лінія, яка в загальному випадку перетинає обидві осі координат у точках $M_1(a;\ 0)$ та $M_2(0;\ b)$, тобто відтинає на осях координат OX та OY відрізки a і b відповідно (рис. 3.8)

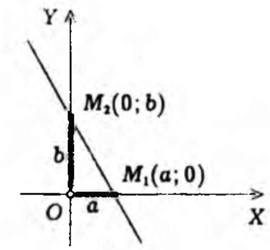


Рис. 3.8

Оскільки нам відомі дві точки $M_1(a;\ 0)$ і $M_2(0;\ b)$, через які проходить пряма лінія, то запишемо її рівняння, скориставшись формулою (3.40):

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0} \ .$$

Спростивши цей вираз, знаходимо рівняння:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ . \qquad (3.45)$$

Це рівняння називається *рівнянням прямої лінії у відрізках на осях.*

Рівняння (3.45) можна отримати також із загального рівняння прямої лінії

$$Ax + By + C = 0 \ .$$

Дійсно, припустимо, що пряма не проходить через початок координат, тобто $C \neq 0$, і не паралельна жодній із координатних осей. Тоді, поділивши обидві частини рівності $Ax + By = -C$ на C, одержимо:

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1$$

або

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ ,$$

де $a = -\dfrac{C}{A}, \quad b = -\dfrac{C}{B}$.

Приклади.

1. Знайти відрізки, що відтинає на осях координат пряма лінія $3x - 4y - 12 = 0$.

Запишемо рівняння прямої лінії у вигляді: $$3x - 4y = 12 \ .$$

Розділимо обидві частини рівності на 12. Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$$

або

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1 \ .$$

Порівнюючи його з (3.45), знаходимо відповідно: $a = 4$ — відрізок, що відтинає пряма лінія по осі OX, $b = -3$ — відрізок, що відтинає дана лінія по осі OY (рис. 3.9).

2. Знайти рівняння прямої лінії, що проходить через точку $M(3;\ 4)$ та утворює в першій чверті з осями координат трикутник, площа якого дорівнює 25 квадратним одиницям.

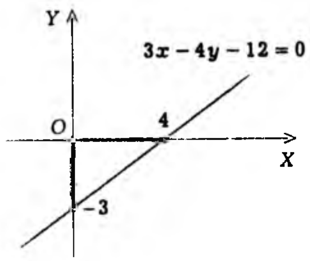


Рис. 3.9

Нехай пряма лінія відтинає на осях координат відрізки a і b. Оскільки, згідно з умовою, $a > 0$ та $b > 0$ і $(a \cdot b)/2 = 25$, то $ab = 50$.

Будемо шукати рівняння прямої лінії у вигляді (3.45). Ураховуючи, що пряма проходить через точку $M(3;\ 4)$, маємо:

$$\frac{3}{a} + \frac{4}{b} = 1 \qquad \text{або} \qquad 4a + 3b = ab \ .$$

Тоді, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} ab = 50, \\ 4a + 3b = ab, \end{cases}$$

знаходимо:

$$a_1 = 5, \quad b_1 = 10 \qquad \text{і} \qquad a_2 = \frac{15}{2}, \quad b_2 = \frac{20}{3} \ .$$

Обидві пари значень a і b придатні, оскільки умова $a > 0$ і $b > 0$ виконується. Отже, задача має два розв'язки:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{10} = 1 \qquad \text{і} \qquad \frac{x}{\frac{15}{5}} + \frac{y}{\frac{20}{3}} = 1$$

або

$$2x + y - 10 = 0 \qquad \text{і} \qquad 8x + 9y - 60 = 0 \ .$$

3. Маємо точки $A(-6;\ 0)$ і $B(0;\ 8)$. Через середину відрізка AB провести пряму, що відтинає на осі OX відрізок, утричі більший, ніж на осі OY.

Визначимо координати середини відрізка за формулами (1.10). Маємо $M(-3;\ 4)$. Рівняння прямої лінії будемо шукати у вигляді (3.45). Оскільки згідно з умовою $a = 3b$, то

$$\frac{x}{3b} + \frac{y}{b} = 1 \ .$$

Для визначення b скористаємося умовою проходження прямої через точку $M(-3;\ 4)$:

$$-\frac{3}{3b} + \frac{4}{b} = 1 \ ,$$

звідки $b = 3$, а, отже, $a = 9$. Таким чином, рівняння шуканої прямої матиме вигляд:

$$\frac{x}{9} + \frac{y}{3} = 1$$

або

$$x + 3y - 9 = 0 \ .$$

§ 3.8 ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ ЛІНІЇ

Розглянемо пряму лінію L, яка задана своїм загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, і довільну точку $M_0(x_0;\ y_0)$ (рис. 3.10). Знайдемо відстань d від даної точки M_0 до прямої L.

Проведемо через точку M_0 пряму N, перпендикулярну до прямої L, і позначимо через $M_1(x_1;\ y_1)$ точку перетину прямих L і N. Шукана відстань d дорівнює відстані між двома точками $d = M_0M_1$, яка виражається формулою (1.7):

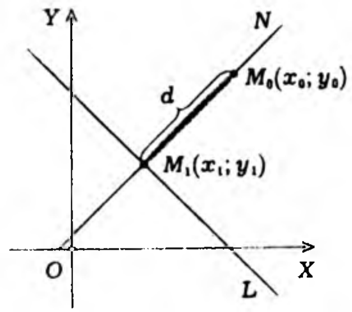


Рис. 3.10

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}\ .$$

Для її знаходження побудуємо рівняння прямої N. З умови перпендикулярності прямих N і L знаходимо кутовий коефіцієнт прямої N:

$$k_N = -\frac{1}{k_L} = -\frac{1}{-\frac{A}{B}} = \frac{B}{A}\ .$$

Знаючи $k_N = B/A$ і точку $M_0(x_0;\ y_0)$, рівняння прямої N, згідно з формулою (3.28), можна записати у вигляді:

$$y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0)$$

або

$$B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0\ .$$

Координати точки $M_1(x_1;\ y_1)$, в якій перетинаються прямі L і N, відповідають рівнянням обох цих прямих, тому:

$$Ax_1 + By_1 + C = 0\ , \qquad B(x_1 - x_0) - A(y_1 - y_0) = 0\ . \tag{3.46}$$

Додаючи і віднімаючи $Ax_0 + By_0$, перепишемо першу з цих рівностей у вигляді:

$$A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) = -(Ax_0 + By_0 + C)\ . \tag{3.47}$$

Підносячи до квадрата рівність (3.47) і другу з рівностей (3.46) і додаючи їх почленно, одержимо:

$$(A^2 + B^2)[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] = (Ax_0 + By_0 + C)^2\ .$$

Звідси знаходимо формулу для визначення відстані d від точки до прямої:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\ . \tag{3.48}$$

З формулою (3.48), яка визначає довжину перпендикуляра d, опущеного з даної точки на пряму лінію, пов'язане поняття відхилення. *Відхиленням δ називається число d взяте зі знаком плюс, якщо точка й початок координат розташовані по різні боки від даної прямої, і зі знаком мінус, якщо вони розташовані по один бік від прямої*, тобто:

$$\delta = \pm d \qquad \text{або} \qquad d = |\delta|\ . \tag{3.49}$$

Приклади.

1. Визначити відстань від точки $M_0(2;\ 5)$ до прямої $4x - 3y + 12 = 0$.

Користуючись формулою (3.48), знаходимо:

$$d = \frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot (-5) + 12|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|8 + 15 + 12|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{35}{5} = 7 \ \text{(од. довжини)}\ .$$

Оскільки в чисельнику під знаком модуля знаходиться додатна величина, яка означає, що відхилення $\delta > 0$, то можна зробити висновок, що дані точка й пряма знаходяться по один бік від початку координат.

2. Дано трикутник з вершинами $A(0;\ 5)$, $B(-3;\ 1)$, $C(-1;\ -2)$. Знайти довжину висоти, опущеної з точки C.

Один зі способів рішення даної задачі — це знаходження відстані від точки C до прямої AB. Запишемо рівняння цієї прямої, як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки (3.40):

$$\frac{y - 5}{1 - 5} = \frac{x - 0}{-3 - 0} \qquad \text{або} \qquad 4x - 3y + 15 = 0\ .$$

Тоді за формулою (3.48) маємо:

$$d = \left| \frac{4 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) + 15}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \right| = 5\ .$$

Отже, довжина висоти дорівнює 5 (од. довжини).

3. Знайти відстань між двома паралельними прямими

$$3x - 4y + 10 = 0 \qquad \text{і} \qquad 6x - 8y + 15 = 0\ .$$

Визначимо будь-яку точку на одній із прямих. Припустивши в першій прямій, наприклад, $x = 0$, маємо: $y = 2{,}5$. Знайдемо тепер відстань від точки $(0;\ 2{,}5)$, яка розташована на першій прямій, до другої прямої за формулою (3.48):

$$d = \left|\frac{6\cdot 0 - 8\cdot 2,5 + 15}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}}\right| = 0,5 \ \text{(од. довжини)} .$$

Дане значення $d = 0,5$ і буде відстанню між даними паралельними прямими.

4. Написати рівняння бісектриси внутрішнього кута трикутника ABC при вершині B, якщо $A(2;\ 2)$, $B(5;\ 6)$, $C(8;\ 2)$.

Складемо рівняння сторін AB і BC за формулою (3.40):

$$AB: \quad \frac{x-2}{5-2} = \frac{y-2}{6-2} \quad \text{або} \quad 4x - 3y - 2 = 0 ,$$

$$BC: \quad \frac{x-8}{5-8} = \frac{y-2}{6-2} \quad \text{або} \quad 4x + 3y - 38 = 0 .$$

Для будь-якої точки $M(x;\ y)$, що належить бісектрисі кута при вершині B, буде виконуватися рівність

$$d_1 = d_2 ,$$

де

$$d_1 = \frac{|4x - 3y - 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|4x - 3y - 2|}{5}$$

відстань від точки $M(x;\ y)$ до сторони AB, а

$$d_2 = \frac{|4x + 3y - 38|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|4x + 3y - 38|}{5}$$

відстань від точки $M(x;\ y)$ до сторони BC.

Тоді

$$\frac{|4x - 3y - 2|}{5} = \frac{|4x + 3y - 38|}{5}$$

або

$$4x - 3y - 2 = \pm(4x + 3y - 38) . \qquad (3.50)$$

Рівність (3.50) зі знаком "+" дає лінію $y = 6$, а зі знаком "−" — лінію $x = 5$. Одне з цих рівнянь є рівнянням бісектриси внутрішнього кута B трикутника ABC, друге — рівнянням бісектриси зовнішнього кута. Визначити, яка з бісектрис кута B буде зовнішньою, а яка внутрішньою, можна за допомогою такого способу. Оскільки вершини A і C знаходяться по один бік від бісектриси зовнішнього кута B, то при підстановці їх координат у рівняння цієї бісектриси одержимо числа одного знака. У той же час вершини A і C розташовані по різні боки від бісектриси внутрішнього кута B, тому підстановка координат точок A і C в рівняння цієї бісектриси дає числа різних знаків. Звідси видно, що $y = 6$ — це зовнішня бісектриса кута B в трикутнику ABC, а лінія $x = 5$ є шуканою бісектрисою внутрішнього кута B.

§ 3.9 НОРМАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ

Розглянемо на площині XOY пряму лінію L. Проведемо через початок координат допоміжну вісь l, перпендикулярну до даної прямої. Виберемо на ній додатний напрям від початку координат у бік даної прямої (рис. 3.11). Положення даної прямої лінії L відносно осей координат можна охарактеризувати двома параметрами: її відстанню p від початку координат та кутом α між додатними напрямами осі OX та перпендикуляра l.

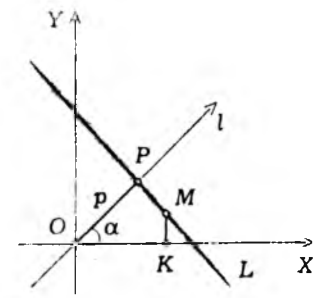


Рис. 3.11

Нехай $M(x;\ y)$ — довільна точка даної прямої L. Розглянемо ламану лінію $OKMP$ та обчислимо її проекцію на пряму l. Очевидно, що ця проекція буде дорівнювати p. З іншого боку

$$\text{пр}_l OKMP = \text{пр}_l OK + \text{пр}_l KM + \text{пр}_l MP .$$

Оскільки згідно з означенням (див. курс «Векторна алгебра»):

$$\text{пр}_l OK = x\cos(-\alpha) = x\cos\alpha ,$$

$$\text{пр}_l KM = y\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = x\sin\alpha ,$$

$$\text{пр}_l MP = 0 ,$$

то

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$$

або

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 . \qquad (3.51)$$

Це рівняння називається *нормальним рівнянням прямої лінії*. Воно виконується для координат x та y будь-якої точки, розташованої на даній прямій. Якщо ж ця точка не лежить на даній прямій L, то в цьому випадку проекція відповідної ламаної не буде дорівнювати p, а значить і рівняння (3.51) не буде рівнянням даної лінії.

Рівняння прямої лінії у вигляді (3.51) має дві особливості:

1) зі змісту рівняння випливає, що величина p повинна бути завжди невід'ємною, тобто:

$$p \geq 0, \quad \text{або} \quad -p \leq 0 ; \qquad (3.52)$$

2) з основної тригонометричної тотожності

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \qquad (3.53)$$

випливає, що сума квадратів коефіцієнтів при змінних величинах рівняння повинна дорівнювати одиниці.

До нормального вигляду можна звести рівняння прямої лінії, записане в загальному вигляді:

$$Ax + By + C = 0 . \qquad (3.54)$$

Для цього потрібно помножити (3.54) на такий множник μ, щоб виконувалася рівність (3.53), тобто:

$$\mu^2 A^2 + \mu^2 B^2 = 1 .$$

Звідки знаходимо:

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} . \qquad (3.55)$$

З умови (3.52) випливає, що знак μ повинен бути протилежним вільному члену C рівняння (3.54). Множник μ, який визначається формулою (3.55), називається *нормувальним множником*.

Порівнюючи помножене на μ загальне рівняння прямої

$$\mu Ax + \mu by + \mu C = 0$$

з нормальним рівнянням прямої лінії (3.51), знаходимо:

$$\cos\alpha = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} ; \qquad \sin\alpha = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} ;$$

$$p = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} . \qquad (3.56)$$

Таким чином, загальне рівняння прямої лінії, зведене до нормального вигляду за допомогою нормувального множника, запишеться так:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 , \qquad (3.57)$$

де параметри нормального рівняння визначаються формулами (3.56).

Слід відзначити, що відстань від точки до прямої можна обчислити також, користуючись нормальним рівнянням прямої лінії. Порівнюючи формули (3.48) і (3.57) та враховуючи (3.56), маємо:

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p| . \qquad (3.58)$$

Таким чином, *відстань від точки $M_0(x_0;\ y_0)$ до прямої дорівнює абсолютній величині лівої частини нормального рівняння цієї прямої, в якій змінні координати замінені координатами точки M_0.*

Приклади.

1. Скласти рівняння прямої лінії, якщо відомо, що її відстань від початку координат дорівнює $\sqrt{2}$ і перпендикуляр, опущений на неї з початку координат, утворює з віссю OX кут $\alpha = 45°$.

Згідно з умовою $p = \sqrt{2}$ і $\alpha = 45°$, тому $\cos\alpha = \sin\alpha = \sqrt{2}/2$. Підставляючи ці значення в рівняння (3.51), маємо:

$$x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = 0 ,$$

звідки знаходимо рівняння шуканої прямої:

$$x + y - 2 = 0 .$$

2. Визначити довжину перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму $x - y + 3 = 0$, і кут, що утворює цей перпендикуляр з віссю OX.

Зведемо рівняння прямої до нормального вигляду (3.51), для чого знайдемо нормувальний множник за формулою (3.55):

$$\mu = \frac{1}{-\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Тоді

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{3}{\sqrt{2}} = 0 ,$$

звідки $\cos\alpha = -1/\sqrt{2}$, $\sin\alpha = 1/\sqrt{2}$, $p = 3/\sqrt{2}$. Отже, $\alpha = 45°$, $p = (3/\sqrt{2})$ (од. довжини).

3. Знайти відстань від точки $(5;\ -5)$ до прямої $3x - 4y + 10 = 0$.

Зводимо дане рівняння прямої лінії до нормального виду (3.51), помноживши його на нормувальний множник:

$$\mu = \frac{1}{-\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = -\frac{1}{5} .$$

Одержимо

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0 .$$

Тоді, згідно з формулою (3.58), маємо:

$$d = \left|-\frac{3}{5}(5) + \frac{4}{5}(-5) - 2\right| = |-37| = 37 \text{ (од. довжини)} .$$

Порівнюючи даний вираз із формулою (3.49), бачимо, що відхилення $\delta = -37$, звідки можна зробити висновок, що дана точка розташована відносно даної прямої з того ж боку, що й початок координат.

§ 3.10 ВЕКТОРНЕ ТА КАНОНІЧНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ

Рівняння прямої лінії можна скласти, користуючись допоміжним вектором. Нехай є пряма лінія L і вектор $\mathbf{s} = (l;\ m)$, паралельний даній прямій. Такий *довільний ненульовий вектор, паралельний даній лінії, називається напрямним вектором*. Координати цього вектора l і m називаються *напрямними коефіцієнтами прямої*.

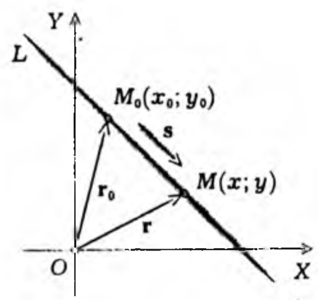


Рис. 3.12

Слід відзначити, що для напрямного вектора неістотні його довжина, точка прикладання та напрям. Значення має лише його паралельність даній лінії.

Складемо рівняння прямої лінії L, що проходить через дану точку $M_0(x_0;\ y_0)$ і має напрямний вектор $\mathbf{s} = (l;\ m)$. Цих двох умов достатньо для визначення положення прямої лінії на площині.

Розглянемо на прямій L довільну точку $M(x;\ y)$ (рис. 3.12). Позначимо радіус-вектори точок M_0 і M відповідно через $\mathbf{r}_0$ і $\mathbf{r}$. Тоді $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. Оскільки вектор $\overrightarrow{M_0M}$ лежить на прямій L, то він колінеарний вектору $\mathbf{s}$. Ураховуючи те, що необхідною умовою колінеарності векторів є рівність нулю їх векторного добутку (див. курс «Векторна алгебра»), то

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{s} = 0\ . \qquad (3.59)$$

Рівняння (3.59) називається *векторним рівнянням* прямої лінії, що проходить через дану точку M_0 паралельно даному вектору $\mathbf{s}$.

Рівнянню (3.59) можна дати іншу математичну інтерпретацію. Оскільки вектори $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ і $\mathbf{s}$ колінеарні, то, скориставшись умовою колінеарності двох векторів, яка складається в пропорційності відповідних координат, можна записати:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}\ . \qquad (3.60)$$

Рівняння (3.60) називається *канонічним рівнянням* прямої лінії, що проходить через дану точку $M_0(x_0;\ y_0)$ паралельно напрямному вектору $\mathbf{s} = (l;\ m)$.

Слід відзначити, що згідно з початковим припущенням при виведенні формул (3.59) і (3.60), напрямний вектор $\mathbf{s}$ не може бути

нульовим. Утім можуть бути такі випадки, коли одна з координат вектора $\mathbf{s}$ (l або m) буде дорівнювати нулю. Тоді рівняння

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{0} \quad \text{або} \quad \frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{m}$$

потрібно розглядати як пропорції. Рівняння прямих ліній у цих випадках матимуть вигляд $y = y_0$ або $x = x_0$ відповідно.

Рівняння прямої лінії в канонічній формі запису дає можливість визначення кута між двома прямими лініями. Нехай, наприклад, є дві прямі лінії, задані рівняннями:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} \quad \text{і} \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}\ . \qquad (3.61)$$

Цим прямим відповідають напрямні вектори $\mathbf{s}_1 = (l_1;\ m_1)$ і $\mathbf{s}_2 = (l_2;\ m_2)$. Задача визначення кута φ між прямими (3.61) у даному випадку зводиться до визначення кута між напрямними векторами. Користуючись формулою (2.1) курсу «Векторна алгебра», маємо:

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1| \cdot |\mathbf{s}_2|} \qquad (3.62)$$

або в координатній формі

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\ \sqrt{l_2^2 + m_2^2}}\ . \qquad (3.63)$$

Аналогічно формулам (1.44) й (2.21) курсу «Векторна алгебра», для прямих ліній, заданих рівняннями в канонічній формі, можуть бути записані умови паралельності прямих

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{l_1}{l_2} \qquad (3.64)$$

та перпендикулярності прямих

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0\ . \qquad (3.65)$$

Приклади.

1. Указати особливість розташування прямої лінії, якщо її напрямний вектор $\mathbf{s} = 2\mathbf{j}$.

   Координати напрямного вектора дорівнюють $(0;\ 2)$. Оскільки проекція напрямного вектора $\mathbf{s}$ на вісь OX дорівнює нулю, то $\mathbf{s}$ паралельний осі OY. Отже, пряма також паралельна осі OY.

2. Скласти канонічне рівняння прямої лінії, що проходить через точки $A(2;\ -3)$ і $B(-1;\ 7)$.

Вектор $\overrightarrow{AB} = (-3;\ 10)$ буде напрямним вектором шуканої прямої. Щоб знайти канонічне рівняння прямої, потрібно знати координати будь-якої точки, розташованої на ній. Візьмемо будь-яку з двох даних точок, наприклад, $A(2;\ -3)$. Тоді за формулою (3.60) матимемо:

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+3}{10} .$$

3. Дано дві суміжні вершини $A(14;\ 7)$ і $B(2;\ 1)$ паралелограма $ABCD$ і точка $O(3;\ -1)$ перетину його діагоналей. Скласти рівняння сторін цього паралелограма (рис. 3.13).

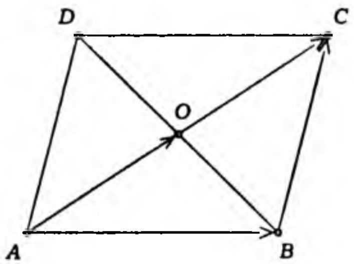


Рис. 3.13

Складемо вектор $\overrightarrow{AB} = (-12;\ -6)$. Тоді за формулою (3.60) знайдемо рівняння прямої, на якій знаходиться сторона AB:

$$\frac{x-2}{-12} = \frac{y-1}{-6}$$

або

$$x - 2y = 0 .$$

Вектор $\overrightarrow{AB}$ буде напрямним вектором прямої, на якій лежить сторона CD. Оскільки точка $O(3;\ -1)$ ділить діагональ BD на два рівних відрізки, знайдемо координати точки D зі співвідношення

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_D}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_D = 2\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_B$$

або

$$x = 2 \cdot 3 - 2 = 4 , \qquad y = 2 \cdot (-1) - 1 = -3 ,$$

тобто $D(4;\ 3)$. Тоді за формулою (3.60) знаходимо рівняння прямої лінії, на якій знаходиться сторона CD:

$$\frac{x-4}{-12} = \frac{y+3}{-6} \qquad \text{або} \qquad x - 2y - 10 = 0 .$$

Вектор $\overrightarrow{BC}$ може бути напрямним вектором прямих, на яких лежать сторони BC і AD. Користуючись означенням різниці векторів та властивостями паралелограма, маємо:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB} .$$

Оскільки

$$\overrightarrow{AO} = (3-14;\ 1-7) = (-11;\ -8) ,$$

$$\overrightarrow{AB} = (2-14;\ 1-7) = (-12;\ -6) ,$$

то

$$\overrightarrow{BC} = (-22+12;\ -16+6) = (-10;\ -10) .$$

Знаючи $A(14;\ 7)$ і $B(2;\ 14)$, за формулою (3.60) знаходимо рівняння сторін AD і BC:

$$\frac{x-14}{-10} = \frac{y-7}{-10} \qquad \text{або} \qquad x - y - 7 = 0 ,$$

$$\frac{x-2}{-10} = \frac{y-1}{-10} \qquad \text{або} \qquad x - y - 1 = 0 .$$

§ 3.11 РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ДАНУ ТОЧКУ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ДАНОМУ ВЕКТОРУ

Нехай на площині XOY є лінія, що проходить через точку $M_0(x_0;\ y_0)$, і нормальний вектор $\mathbf{n} = (A;\ B)$, перпендикулярний до цієї прямої. *Нормальним вектором прямої лінії на площині називається будь-який ненульовий вектор, який належить цій площині й ортогональний даній прямій.* Слід відзначити, що для нормального вектора, як і для напрямного, не має значення його довжина, точка прикладання та напрям. Істотним є лише його перпендикулярність даній лінії. Візьмемо на даній прямій довільну точку $M(x;\ y)$ (рис. 3.14).

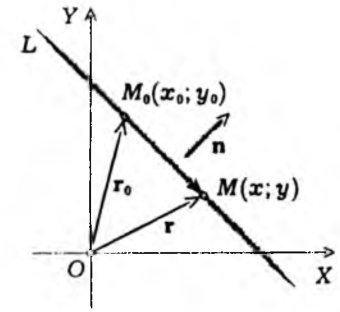


Рис. 3.14

Позначимо радіус-вектори точок $M_0(x_0;\ y_0)$ та $M(x;\ y)$ через $\mathbf{r}_0 = (x_0;\ y_0)$ та $\mathbf{r} = (x;\ y)$ відповідно. Тоді $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. Оскільки вектор $\mathbf{n}$ перпендикулярний прямій L, то він ортогональний будь-якому вектору, паралельному цій прямій. Отже, $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$. А оскільки два вектори ортогональні тоді і тільки тоді, коли їхній скалярний добуток дорівнює нулю, то

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 . \qquad (3.66)$$

Рівняння (3.66) називається *векторним рівнянням прямої лінії, що проходить через дану точку M_0 перпендикулярно даному вектору* $\mathbf{n}$. У координатній формі рівняння (3.66), згідно з формулою (2.18) курсу «Векторна алгебра», матиме вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 . \qquad (3.67)$$

Отже, рівняння (3.67) є *векторним рівнянням прямої лінії, що проходить через дану точку M_0 перпендикулярно даному вектору* $\mathbf{n}$ *у координатній формі.*

Розкриваючи дужки в (3.67), матимемо:

$$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0 .$$

Позначивши $C = -Ax_0 - By_0$, ми бачимо, що рівняння (3.67) перетворюється на загальне рівняння прямої лінії:

$$Ax + By + C = 0 \ .$$

Таким чином, *загальне рівняння прямої лінії еквівалентне рівнянню прямої, що проходить через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{n} = (A;\ B)$. Причому коефіцієнти A і B при змінних величинах x і y в загальному рівнянні прямої лінії дорівнюють відповідним координатам нормального вектора цієї лінії, а коефіцієнт C загального рівняння прямої лінії дорівнює добутку координат нормального вектора на відповідні координати будь-якої точки, що знаходиться на цій лінії, взятому з протилежним знаком.*

Упровадження поняття нормального вектора до прямої дає ще одну можливість, окрім (3.20) та (3.62), визначення кута між двома прямими лініями. Нехай, наприклад, є дві прямі лінії L_1 і L_2, задані своїми загальними рівняння:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{та} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \ .$$

Цим прямим відповідають нормальні вектори $\mathbf{n}_1 = (A_1;\ B_1)$ і $\mathbf{n}_2 = (A_2;\ B_2)$. Не важко переконатися, що задача визначення кута між прямими зводиться до визначення кута φ між нормальними векторами цих прямих. Тоді

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} \qquad (3.68)$$

або в координатній формі

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \ . \qquad (3.69)$$

Умова паралельності прямих L_1 і L_2 еквівалентна умові колінеарності нормальних векторів $\mathbf{n}_1$ і $\mathbf{n}_2$, тобто пропорційності відповідних координат:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \ . \qquad (3.70)$$

Умова перпендикулярності прямих еквівалентна умові ортогональності їх нормальних векторів і може бути виражена рівністю нулю їхнього скалярного добутку:

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \qquad (3.71)$$

або в координатній формі:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \ . \qquad (3.72)$$

Формули (3.70) та (3.72) знаходяться в повній відповідності з формулами (3.24) та (3.25).

Насамкінець відзначимо, що при розв'язуванні задач на пряму лінію, знаючи нормальний вектор прямої лінії, завжди можна знайти її напрямний вектор, і навпаки. Наприклад, якщо відомо нормальний вектор прямої $\mathbf{n} = (A;\ B)$, то напрямним вектором можна взяти вектор $\mathbf{s} = (-B;\ A)$. Дійсно, в такому випадку матимемо:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = A \cdot (-B) + B \cdot A = 0 \ , \qquad (3.73)$$

що доводить їх ортогональність.

Приклади.

1. Указати особливість розташування прямої, нормальний вектор якої $\mathbf{n} = (5;\ 0)$.

   Оскільки проекція нормального вектора $\mathbf{n}$ на вісь OY дорівнює нулю, то вектор $\mathbf{n}$ перпендикулярний осі OY, а пряма паралельна осі OY.

2. Маємо координати точок $A(2;\ 1)$ і $B(4;\ -5)$. Знайти рівняння прямої лінії, що проходить через точку A перпендикулярно відрізку AB.

   Вектор $\overrightarrow{AB} = (4-2;\ -5-1) = (2;\ -6)$ є нормальним вектором прямої. Тоді рівняння прямої лінії, що проходить через точку A, згідно з (3.67), буде:

   $$2(x-2) - 6(y-1) = 0 \quad \text{або} \quad x - 3y + 1 = 0 \ .$$

3. Через точку $A(1;\ -2)$ провести пряму, паралельну прямій $2x + 3y + 1 = 0$.

   Вектор $\mathbf{n} = (2;\ 3)$ є нормальним вектором даної прямої, а отже, нормальним вектором і шуканої прямої. Оскільки шукана пряма проходить через точку $A(1;\ -2)$, то за формулою (3.67) матимемо:

   $$2(x-1) + 3(y+2) = 0 \quad \text{або} \quad 2x + 3y + 4 = 0 \ .$$

4. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2}$ з перпендикулярною їй прямою, що проходить через точку $A(-1;\ 3)$.

   Якщо дві прямі на площині перпендикулярні, то нормальний вектор однієї з них є напрямним вектором іншої, і навпаки. Тому напрямний вектор даної прямої $\mathbf{s} = (1;\ -2)$ є нормальним вектором шуканої прямої, що проходить через точку $A(-1;\ 3)$. Тоді за формулою (3.67) отримуємо рівняння шуканої прямої:

   $$1 \cdot (x+1) - 2 \cdot (y-3) = 0 \quad \text{або} \quad x - 2y + 7 = 0 \ .$$

   Точку перетину двох перпендикулярних прямих знаходимо, розв'язуючи систему рівнянь:

   $$\begin{cases} \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{-2}, \\ x - 2y + 7 = 0. \end{cases}$$

   Маємо: $\left(\frac{3}{5};\ \frac{19}{5}\right)$.

5. Знайти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M(3;\ 5)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{n} = (1;\ -4)$.

Перший спосіб. За формулою (3.67) запишемо рівняння прямої, що проходить через точку $M(3;\ 5)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{n} = (1;\ -4)$:

$$1 \cdot (x - 3) - 4 \cdot (y - 5) = 0 \quad \text{або} \quad 1 \cdot (x - 3) = 4 \cdot (y - 5) .$$

Запишемо дане рівняння у вигляді пропорції:

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y-5}{1} .$$

Отримане рівняння є канонічним рівнянням шуканої прямої.

Другий спосіб. Оскільки нам відомий нормальний вектор прямої $\mathbf{n} = (1;\ -4)$, то напрямним вектором прямої буде вектор $\mathbf{s} = (-4;\ 1)$. Тоді за формулою (3.60) одержимо канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M(3;\ 5)$:

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y-5}{1} .$$

6. Знайти точку P, яка є проекцією точки $Q(1;\ 2)$ на пряму:

$$1)\ \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-5} ; \qquad 2)\ 3x + 5y + 1 = 0 .$$

1). Напрямний вектор $\mathbf{s} = (2;\ -5)$ даної прямої є нормальним вектором перпендикулярної до неї прямої. Тоді за формулою (3.67) одержимо рівняння прямої, що перпендикулярна даній і проходить через точку $Q(1;\ 2)$:

$$2(x - 1) - 5(y - 2) = 0 \quad \text{або} \quad 2x - 5y + 8 = 0 .$$

Точка перетину прямих

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-5}, \\ 2x - 5y + 8 = 0 \end{cases}$$

і буде шуканою проекцією точки Q, тобто $P\left(\frac{69}{29};\ \frac{74}{29}\right)$.

2). Нормальний вектор даної прямої $\mathbf{n} = (3;\ 5)$ є напрямним вектором перпендикулярної до неї прямої. Тоді за формулою (3.60) одержимо канонічне рівняння прямої, що перпендикулярна до даної і проходить через точку $Q(1;\ 2)$:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{5} .$$

Розв'язавши систему

$$\begin{cases} 3x + 5y + 1 = 0, \\ \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{5}, \end{cases}$$

знаходимо точку $P(-4/17;\ -1/17)$, яка є точкою перетину даних прямих, а отже, шуканою проекцією точки Q.

7. Знайти точку Q, симетричну точці $P(-8;\ 12)$ відносно прямої $4x + 7y + 13 = 0$.

Точки P і Q знаходяться на перпендикулярі до даної прямої та на однаковій відстані від неї. Нормальний вектор даної прямої $\mathbf{n} = (4;\ 7)$

є напрямним вектором перпендикулярної до неї прямої, що проходить через точку $P(-8;\ 12)$. За формулою (3.60) одержимо рівняння цього перпендикуляра:

$$\frac{x+8}{4} = \frac{y-12}{7} \quad \text{або} \quad 7x - 4y + 104 = 0 .$$

Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x + 7y + 13 = 0, \\ 7x - 4y + 104 = 0, \end{cases}$$

знаходимо точку перетину N даної і перпендикулярної до неї прямих: $N = (-12;\ 5)$. Оскільки точка N є серединою відрізка PQ, то за формулами (1.10) знаходимо координати точки $Q(-16;\ -2)$.

8. Маємо вершини трикутника $A(-1;\ 3)$, $B(3;\ -2)$, $C(5;\ 3)$. Знайти рівняння висоти CK, опущеної з вершини C на сторону AB, та медіани BM, проведеної з вершини B.

Вектор $\overrightarrow{AB} = (4;\ -5)$ перпендикулярний шуканій висоті CK, отже, є нормальним вектором цієї прямої.

Знаючи координати точки $C(5;\ 3)$ за формулою (3.67), запишемо рівняння прямої, на якій лежить висота CK:

$$4(x - 5) - 5(y - 3) = 0 \quad \text{або} \quad 4x - 5y - 5 = 0 .$$

Точка M є серединою відрізка AC, тому користуючись (1.10), знаходимо її координати $(2;\ 3)$. Оскільки відомо координати двох точок B і M, то за формулою (3.40) запишемо рівняння прямої лінії, на якій лежить медіана BM:

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y-3}{-2-3} \quad \text{або} \quad 5x + y - 13 = 0 .$$

§ 3.12 ВЕКТОРНО-ПАРАМЕТРИЧНЕ ТА ПАРАМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ

Розглянемо пряму лінію, що проходить через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ і має заданий напрямний вектор $\mathbf{s} = (l;\ m)$ (рис. 3.12). Вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\mathbf{s}$ колінеарні. Отже, згідно з умови (5.15), існує такий скаляр t, що

$$\overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{s} \quad \text{або} \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{s} .$$

Перепишемо останнє рівняння у вигляді

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{s} . \qquad (3.74)$$

Це рівняння називається *векторно-параметричним рівнянням прямої лінії*. Множник t в цьому рівнянні є параметром, який залежить від положення поточної точки $M(x;\ y)$ відносно даної точки $M_0(x_0;\ y_0)$ на прямій. Очевидно, що у випадку, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ має однаковий напрям з напрямним вектором прямої, параметр t додатний; у випадку, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\mathbf{s}$ протилежні за напрямом, параметр t від'ємний.

Запишемо рівняння (3.74) в координатній формі:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt. \end{cases} \qquad (3.75)$$

Ці рівняння називаються *параметричними рівняннями прямої лінії*. Підкреслимо, що в даному рівнянні x, y — координати змінної точки прямої; x_0, y_0 — координати заданої точки на прямій; l, m — координати напрямного вектора прямої $\mathbf{s}$; t — параметр.

Відзначимо, що параметричні рівняння прямої (3.75) можна отримати безпосередньо з канонічного рівняння (3.60). Дійсно, прирівнявши співвідношення в рівнянні (3.60) до числа t, маємо:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = t .$$

Звідки випливає, що:

$$x - x_0 = lt, \quad y - y_0 = mt ,$$

або

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt. \end{cases}$$

І навпаки, з параметричних рівнянь неважко отримати канонічне рівняння. Виразимо параметр t з першого та другого рівнянь (3.75):

$$t = \frac{x - x_0}{l}, \quad t = \frac{y - y_0}{m} .$$

Прирівнюючи праві частини обох рівностей, отримаємо канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} .$$

Приклади.

1. Скласти параметричні рівняння прямої лінії, що проходить через точки $A(3;\ -2)$ і $B(-1;\ 5)$.

Знаходимо напрямний вектор шуканої прямої: $\overrightarrow{AB} = (-4;\ 7)$. Візьмемо точку A, розташовану на даній прямій AB, і за формулою (3.60) побудуємо її канонічне рівняння:

$$\frac{x - 3}{-4} = \frac{y + 2}{7} .$$

Прирівнюючи обидві частини рівності до параметра t, маємо:

$$\frac{x - 3}{-4} = t, \quad \frac{y + 2}{7} = t ,$$

звідки шукані рівняння мають вигляд:

$$\begin{cases} x = 3 - 4t, \\ y = -2 + 7t. \end{cases}$$

2. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $A(3;\ -1)$ та утворює кут 45° із прямою заданою рівненнями:

$$\begin{cases} x = -t + 4, \\ y = 3t - 1. \end{cases}$$

Вилучаючи параметр t, одержимо:

$$y = -3x + 11 .$$

Кутовий коефіцієнт даної прямої $k_1 = -3$. Кутовий коефіцієнт шуканої прямої знайдемо з умови, що один із кутів між прямими дорівнює $45°$, тобто $\operatorname{tg}\varphi = \pm 1$. Скориставшись формулою (3.20), знаходимо два значення k_2: $-1/2$, 2. Таким чином, шуканих прямих буде дві. Знаходимо їхні рівняння за формулою (3.28):

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 3) \quad \text{і} \quad y + 1 = 2(x - 3)$$

або

$$x + 2y - 1 = 0 \quad \text{і} \quad 2x - y - 7 = 0 .$$

§ 3.13 ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ЛІНІЙНОЇ НЕРІВНОСТІ З ДВОМА НЕВІДОМИМИ

Як було відзначено в § 3.1, довільна пряма лінія ділить площину на дві півплощини. Розглянемо це питання з іншої точки зору. Якщо записати рівняння прямої лінії у вигляді

$$Ax + By + C = 0 \ ,$$

то координати будь-якої точки півплощини, що не належить до прямої, задовольняють нерівності:

$$Ax + By + C > 0 \quad \text{або} \quad Ax + By + C < 0 \ .$$

Підставивши до них координати будь-якої точки, легко переконатися, що точки однієї з півплощин відповідають нерівності

$$Ax + By + C \geq 0 \ ,$$

а іншої півплощини

$$Ax + By + C \leq 0 \ .$$

Дійсно, за допомогою нормувального множника $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ можна перетворити ці нерівності на такі:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p \geq 0 \qquad (3.76)$$

або

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p \leq 0 \ . \qquad (3.77)$$

Однак ліві частини нерівностей (3.76) та (3.77) є відхиленням точок від прямої, що ділить площину на дві півплощини, тобто:

$$\delta \geq 0 \quad \text{або} \quad \delta \leq 0 \ .$$

Звідси випливає, що точки, які мають відхилення одного знака, належать до однієї півплощини.

Таким чином, *для того щоб точки належали до однієї півплощини, необхідно й достатньо, щоб вони мали відхилення одного знака від межі півплощин.*

Приклад.

Дано пряму:

$$x - 2y - 1 = 0 \ .$$

У яких площинах лежать точки $A(1;\ 2)$ і $B(-1;\ -2)$?

Переписуємо рівняння прямої лінії в нормальному вигляді, користуючись формулами (3.56):

$$\frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{2y}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \ ,$$

звідки відхилення точки A:

$$\delta_A = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{4}{\sqrt{5}} < 0 \ ,$$

а точки B:

$$\delta_B = \frac{-1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} > 0 \ .$$

Отже, точки A і B лежать у різних півплощинах відносно даної прямої лінії.

Точка $A(1;\ 2)$ лежить в одній півплощині з початком координат ($\delta < 0$). Її координати задовольняють нерівності:

$$1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 1 = -4 < 0 \ .$$

Точка $B(-1;\ -2)$ лежить у другій півплощині ($\delta > 0$). Її координати задовольняють нерівності:

$$1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) - 4 = 2 > 0 \ .$$

§ 3.14 РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ В ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Положення прямої лінії на площині в полярній системі координат визначається її відстанню p від полюса O та кутом α між полярною віссю та віссю l, що проходить через полюс перпендикулярно до даної прямої (рис. 3.15).

Додатним напрямом осі l вважається напрям від полюса до даної прямої (якщо пряма проходить через полюс, то додатний напрям осі l вважається довільним).

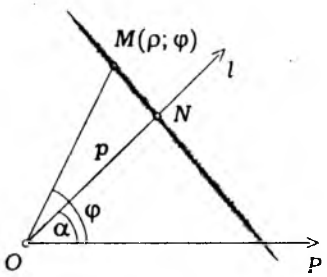


Рис. 3.15

Виберемо на даній прямій лінії довільну точку $M(\rho;\ \varphi)$. Проекція відрізка OM на вісь l буде дорівнювати p. З іншого боку з трикутника OMN проекція OM на вісь l дорівнює $\rho\cos(\varphi-\alpha)$. Звідки маємо:

$$\rho\cos(\varphi-\alpha) = p\ . \quad (3.78)$$

Дане рівняння і є *рівнянням прямої лінії в полярній системі координат.*

Приклади.

1. Скласти в полярній системі координат рівняння прямої лінії L, яка утворює з полярною віссю кут ϑ і відтинає на полярній осі відрізок a.

Візьмемо на даній прямій довільну точку $M(\rho;\ \varphi)$ (рис. 3.16).
Проведемо з полюса вісь l перпендикулярну до даної прямої L. Позначимо точки перетину даної прямої з осями l і P відповідно через N і K. Трикутники OMN та ONK прямокутні. За теоремою про суміжні кути, $\angle NKO$ в трикутнику ONK дорівнює $\pi-\vartheta$. Тоді з трикутника ONK знаходимо:

$$ON = OK\sin(\pi-\vartheta) \quad \text{або} \quad p = a\sin\varphi\ . \quad (3.79)$$

Оскільки сума кутів трикутника дорівнює $180°$, то $\angle NKO$ в трикутнику OMK дорівнюватиме $\theta-\varphi$. Тоді з трикутника OMN знаходимо:

$$ON = OM\sin(\vartheta-\varphi) \quad \text{або} \quad p = \rho\sin(\vartheta-\varphi)\ . \quad (3.80)$$

Прирівнюючи праві частини отриманих виразів (3.79) і (3.80) для величини p відрізка ON, маємо:

$$\rho\sin(\vartheta-\varphi) = a\sin\vartheta\ . \quad (3.81)$$

Дане рівняння і є шуканим рівнянням прямої лінії.

2. Скласти рівняння прямої лінії в полярній системі координат, якщо відомо, що вона проходить через точку $A(5;\ \pi/3)$ перпендикулярно до неї і утворює з полярною віссю кут $30°$.

Параметр рівняння прямої лінії в полярній системі координат знаходимо з умови її проходження через точку A. Оскільки згідно з умовою кут $\alpha = \pi/6$, то за формулою (3.78) маємо:

$$5\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = p \quad \text{або} \quad p = \frac{5\sqrt{3}}{2}\ .$$

Таким чином шукане рівняння прямої лінії в полярній системі координат матиме вигляд

$$\rho\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2}\ .$$

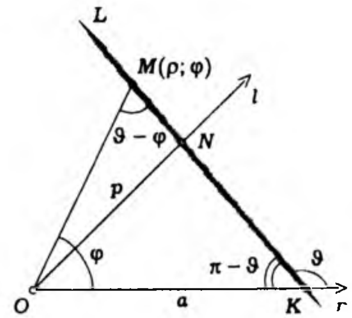


Рис. 3.16

ВПРАВИ

1. Дослідити, як розташовані відносно осей координат прямі лінії:

$$а)\ 3x - 2y = 0\,; \quad б)\ 3x - 2y + 5 = 0\,;$$

$$в)\ 3x + 5 = 0\,; \quad г)\ 4y - 7 = 0\,; \quad д)\ 5x = 0\ .$$

Побудувати дані лінії.

2. Скласти рівняння прямих, які відтинають на осі OY відрізок $b = 2$ та нахилені до осі OX відповідно під кутами

$$\alpha_1 = 30°, \quad \alpha_2 = 45°, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 135°\ .$$

3. Звести до вигляду рівнянь із кутовими коефіцієнтами такі рівняння прямих:

$$3x - y + 2 = 0\,; \quad 4x + 2y - 5 = 0\,;$$

$$2x + 7y = 0\,; \quad 3y - 8 = 0\,; \quad 5x + 9 = 0\ .$$

4. Обчислити площу трикутника, сторони якого лежать на прямих, заданих рівняннями:

$$x - 3y + 11 = 0\,;$$

$$5x + 2y - 13 = 0\,; \quad 9x + 7y - 3 = 0\ .$$

5. Через точку $M(1;\ -2)$ провести пряму, паралельну прямій $4x + 7y - 3 = 0$, і пряму, перпендикулярну даній прямій.

6. Знайти внутрішні кути трикутника, сторони якого лежать на прямих:

$$4x - 3y + 3 = 0\,; \quad 3x + 4y + 4 = 0\,;$$

$$x - 7y + 18 = 0\ .$$

7. Через точку перетину прямих $3x + 5y - 8 = 0$ і $4x - 7y + 3 = 0$ провести пряму, перпендикулярну першій з них, і пряму, паралельну прямій $2x + 6y - 2 = 0$.

8. Сторони трикутника задані рівняннями $7x - 6y + 9 = 0$, $5x + 2y - 25 = 0$, $3x + 10y + 29 = 0$. Знайти координати вершин і рівняння висот трикутника.

9. Дано трикутник з вершинами $P(-4;\ 0)$, $Q(0;\ 4)$, $R(2;\ 2)$. Знайти рівняння його медіан.

10. Дано вершини трикутника $A(6;\ 0)$, $B(0;\ 6)$, $C(-4;\ 4)$. Скласти рівняння сторін трикутника, вершинами якого є середини сторін даного трикутника.

11. На прямій $x - 2y + 2 = 0$ знайти точку, рівновіддалену від точок $M_1(-2;\ 3)$, $M_2(2;\ -1)$.

12. Знайти точку, симетричну точці $A(5;\ 5)$ відносно прямої

$$x + y - 3 = 0\ .$$

13. Знайти проекцію точки $M(-5;\ 4)$ на пряму $x - y - 5 = 0$.

14. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $2x - y + 1 = 0$ і $x - y + 2 = 0$ та утворює з віссю OX кут $\alpha = 135°$.

15. Знайти відрізки, що відтинаються на осях координат прямими: $2x + 3y - 6 = 0$; $y = 4x - 2$; $y = 6 - 3x$; $3x - 2y + 12 = 0$.

16. При яких значеннях A пряма $Ax + 5y - 40 = 0$ відтинає на координатних осях рівні відрізки?

17. Звести до нормального вигляду дані рівняння прямих:

$$5x + 12y - 26 = 0\,; \quad y = 3x + 5\,; \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\ .$$

18. Написати рівняння прямої, що паралельна даній прямій $4x + 3y - 15 = 0$ і розташована від неї на відстані $d = 2$.

19. Знайти відстань між паралельними прямими

$$5x - 12y - 26 = 0 \quad і \quad 5x - 12y - 65 = 0\ .$$

20. Дано рівняння основ трапеції: $3x - 4y - 15 = 0$; $3x - 4y - 35 = 0$. Обчислити довжину її висоти.

21. Скласти рівняння бісектрис кутів, утворених прямими

$$4x - 3y - 10 = 0 \quad \text{і} \quad 9x - 12y - 7 = 0 .$$

22. Дано центр квадрата $O(4;\ 3)$ і рівняння сторони $x - y - 5 = 0$. Написати рівняння решти його сторін.

23. Знайти відстань прямої $x + y - 1 = 0$ від точки $A(5;\ 3)$.

24. Через вершину $A(2;\ 3)$ трикутника провести пряму, паралельну стороні AB, якщо $A(-1;\ -2)$, $B(0;\ 4)$.

25. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $M(5;\ 1)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{n} = (0;\ 1)$.

26. Пряма з напрямним вектором $\mathbf{s} = (1;\ 2)$ проходить через точку $M(3;\ -2)$. Знайти кутовий коефіцієнт прямої і відрізок, що відтинається нею на осі OY.

27. Скласти в полярній системі координат рівняння прямих ліній, що: а) проходить через точку $M_0(3;\ \pi/12)$ та утворює з полярною віссю кут $45°$; б) проходить через точку $A(2;\ \pi/6)$ і паралельна полярній осі; в) проходить через точку $B(5;\ \pi/4)$ та перпендикулярна полярній осі.

Глава 4

Лінії другого порядку

У попередній главі було показано, що будь-яке рівняння першого степеня відносно змінних x та y, тобто рівняння вигляду $Ax + By + C = 0$, визначає на площині пряму лінію. Таким чином, прямі лінії — це лінії першого порядку.

Лінії, які визначаються рівнянням другого степеня відносно змінних x та y, називаються лініями другого порядку. Загальне рівняння лінії другого порядку може бути записане у вигляді:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 . \qquad (4.1)$$

При відповідному виборі системи координат рівняння кожної лінії другого порядку можна звести до найбільш простого вигляду, тобто до канонічного вигляду.

До ліній другого порядку належать еліпс, окремим випадком якого є коло, гіпербола та парабола. Крім того, у деяких виняткових випадках лінії другого порядку відносно змінних x та y можуть визначати дві прямі, точку або уявне геометричне місце точок.

У § 2.1 ми отримали рівняння кола (2.6), радіуса R з центром на початку координат $O(0;\ 0)$:

$$x^2 + y^2 = R^2 \ .$$

Аналогічно, виходячи з означення кола, можна отримати його рівняння для випадку довільного розміщення його центра. *Колом називається геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки, що називається центром кола.* Нехай точка $M_0(x_0;\ y_0)$ — довільна точка даного кола (рис. 4.1).

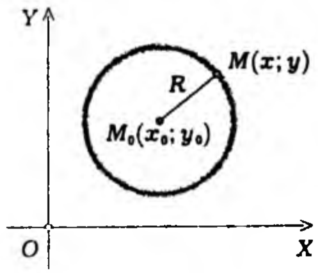


Рис. 4.1

Тоді відстань точки $M(x;\ y)$ від точки $M_0(x_0;\ y_0)$ буде дорівнювати радіусу цього кола R. Використовуючи формулу (1.7) для відстані між двома точками, рівняння кола запишеться у вигляді:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$$

або, підносячи до квадрата:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \ . \qquad (4.2)$$

Вираз (4.2) є рівняння кола радіуса R з центром у довільній точці площини $M_0(x_0;\ y_0)$.

В окремому випадку $x_0 = y_0 = 0$ рівняння (4.2) перетворюється в рівняння кола радіуса R з центром на початку координат (2.6).

Для будь-якої точки площини $M_1(x_1;\ y_1)$, розташованої всередині даного кола, відстань від центра кола буде менша за R, тому:

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 < R^2 \ . \qquad (4.3)$$

І навпаки, для будь-якої точки площини $M_2(x_2;\ y_2)$, розташованої від центра даного кола на відстані більшій за R, матимемо:

$$(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 > R^2 \ . \qquad (4.4)$$

Рівняння кола набирає значно простішого вигляду в полярній системі координат. Це питання детально розглянуте нами в § 2.3.

Приклади.

1. Скласти рівняння кола радіуса $R = 3$ з центром у точці $(3;\ -2)$.

Скориставшись рівнянням (4.2), маємо:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 0 \ .$$

2. Знайти координати центра та радіус кола:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 39 = 0 \ .$$

Виділяємо в даному рівнянні повні квадрати:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 39 = (x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) - 9 - 16 - 39 = 0$$

або

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 64 \ .$$

Таким чином, згідно з формулою (4.2), центр даного кола знаходиться в точці $(3;\ -4)$, а радіус його дорівнює восьми.

3. Написати рівняння дотичних до кола з центром у точці $(6;\ 8)$ і радіусом $R = 2$, якщо координати точки, через яку проходить дотична, дорівнюють $(0;\ 1)$.

Оскільки дотичні проходять через точку, що відтинає на осі OY відрізок $b = 1$, то рівняння дотичних будемо шукати у вигляді $y = kx + 1$.

Дотична до кола має з ним спільну точку, тому знайдемо k, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} (x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 4, \\ y = kx + 1. \end{cases}$$

Розкриваючи дужки в першому рівнянні, маємо:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 12x - 16y + 96 = 0, \\ y = kx + 1. \end{cases}$$

Тоді

$$x^2 + (kx + 1)^2 - 12x - 16(kx + 1) + 96 = 0$$

або

$$(1 + k)^2 x^2 + 2(k - 6)x + 81 = 0 \ .$$

Рівняння матиме два рівних корені, коли дискримінант його дорівнюватиме нулю, тобто:

$$(k - 6)^2 - 81 = 0 \quad \text{або} \quad k - 6 = \pm 9 \ .$$

Звідки знаходимо $k_1 = 15$, $k_2 = -3$. Отже, рівняння шуканих дотичних матимуть вигляд $y = 15x + 1$ та $y = -3x + 1$.

Еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней яких до двох даних точок, що називаються фокусами, є величина стала.

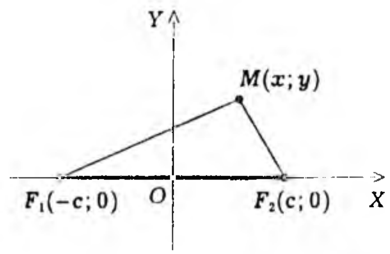


Рис. 4.2

Виберемо для зручності виводу рівняння еліпса його фокуси F_1 і F_2, розташованими на осі OX, симетрично відносно початку координат. Позначимо відстань F_1F_2 через $2c$. Лінія F_1F_2 називається *фокальною віссю* еліпса, а відстань F_1F_2 — *фокальною відстанню*. Тоді координати фокусів будуть $F_1(-c;\ 0)$ і $F_2(c;\ 0)$. Нехай $M(x;\ y)$ довільна точка еліпса (рис. 4.2).

Згідно з означенням

$$MF_1 + MF_2 = 2a \ , \quad (4.5)$$

де $2a$ — стала величина. Користуючись формулою (1.7), маємо:

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\ , \quad MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \ . \quad (4.6)$$

Підставляючи ці значення в рівність (4.5), знаходимо:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \ . \quad (4.7)$$

Вираз (4.7) і є рівнянням еліпса, але його можна звести до більш простого, тобто до канонічного вигляду. Для цього переносимо один з коренів у праву частину й підносимо обидві частини рівності до квадрата, розкриваючи при цьому дужки:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \\ + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \ .$$

Тоді

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx \ . \quad (4.8)$$

Знову підносячи обидві частини рівності (4.8) до квадрата, маємо:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \ . \quad (4.9)$$

Поділивши обидві частини рівності (4.9) на $a^2(a^2 - c^2)$, одержимо:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \ . \quad (4.10)$$

Із трикутника F_1MF_2, враховуючи, що сума довжин двох сторін трикутника завжди більша за довжину третьої, маємо $MF_1 + MF_2 > F_1F_2$ або $a > c$, тому, припустивши:

$$a^2 - c^2 = b^2 \ , \quad (4.11)$$

остаточно одержимо:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ . \quad (4.12)$$

Рівняння (4.12) називається *канонічним рівнянням еліпса*.

За даним рівнянням еліпса можна дослідити його форму.

1). Оскільки змінні координати $(x;\ y)$ увіходять до (4.12) тільки в другому степені, то рівняння еліпса зберігає свій вигляд при заміні x на $-x$ та y на $-y$. Із цього випливає, що коли на еліпсі розташована деяка точка $(x_0;\ y_0)$, то одночасно з нею на еліпсі будуть також розташовані ще три точки: $(x_0;\ -y_0)$, $(-x_0;\ y_0)$, $(-x_0;\ -y_0)$. Тобто осі координат є осями симетрії еліпса.

Як уже відзначалося, вісь симетрії еліпса, на якій розташовані фокуси, називається фокальною віссю. Точка перетину осей симетрії називається *центром* еліпса. Для еліпса, заданого рівнянням (4.12), фокальна вісь збігається з віссю OX, а центр є початком координат.

2). З рівняння (4.12) випливає, що кожний доданок лівої його частини не перевищує одиниці (оскільки їх сума дорівнює одиниці), тобто:

$$\frac{x^2}{a^2} \le 1 \ , \quad \frac{y^2}{b^2} \le 1 \ .$$

Звідки знаходимо, що для всіх точок еліпса:

$$-a \le x \le a \ , \quad -b \le y \le b \ . \quad (4.13)$$

Таким чином, еліпс повністю розташований усередині прямокутника, обмеженого нерівностями (4.13). З (4.13) випливає, що точки перетину еліпса з осями координат: $x = \pm a$ та $y = \pm b$. Ці точки називаються *вершинами* еліпса. Отже, вершинами еліпса є точки:

$$A_1(-a;\ 0), \quad A_2(a;\ 0), \quad B_1(0;\ -b), \quad B_2(0;\ b) \ .$$

Відрізки A_1A_2 і B_1B_2, які з'єднують протилежні вершини еліпса, дорівнюють $2a$ і $2b$ і називаються відповідно *великою* й *малою осями*. Величини a і b називаються відповідно *великою* й *малою півосями* еліпса.

Проведене дослідження рівняння (4.12) дає можливість побудувати еліпс (рис. 4.3).

Форма еліпса, як видно з рис. 4.3, залежить від величини відношення b/a довжин його малої та великої півосей. Чим менше це співвідношення, тим більше “сплюснутим” буде еліпс. У граничному випадку $b/a = 0$ еліпс перетворюється на здвоєну вісь. При збільшенні величини b/a еліпс буде “витягуватися” й у граничному випадку $b = a$, тобто, коли відношення b/a буде дорівнювати одиниці, еліпс перетворюється на коло: $x^2 + y^2 = a^2$.

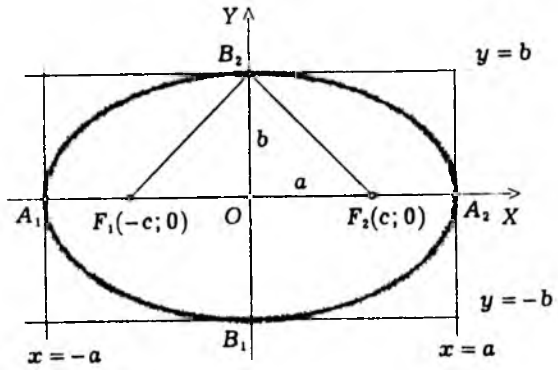


Рис. 4.3

Проте, в аналітичній геометрії для характеристики форми еліпса користуються не відношенням його півосей, а іншою величиною — *ексцентриситетом* ε, який дорівнює відношенню половини відстані між фокусами до його великої півосі, тобто:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} . \quad (4.14)$$

Оскільки $0 < c < a$, то ексцентриситет для різних еліпсів буде змінюватися в межах $0 < \varepsilon < 1$. Чим більшим є ексцентриситет, тим більша відстань від центра еліпса до його фокусів і тим більше він буде “сплюснутим” (у граничному випадку $\varepsilon = 1$, еліпс перетворюється на здвоєну велику вісь); чим меншим буде значення ексцентриситету, тим більше його форма буде наближатися до форми кола (у граничному випадку $\varepsilon = 0$ фокуси збігаються до центра, і еліпс перетворюється на коло). Таким чином, ексцентриситет — це безмірна величина, яка виражає степінь

“сплюснутості” або “витягнутості” еліпса. Якщо зафіксувати велику вісь еліпса, то графічна залежність його форми від ексцентриситету матиме вигляд, зображений на рис. 4.4.

Визначимо відстані довільної точки еліпса $M(x; y)$ до її фокусів F_1 і F_2. Ці відстані MF_1 і MF_2 позначаються відповідно через r_1 і r_2 і називаються *фокальними радіусами* еліпса. Згідно з означенням еліпса

$$r_1 + r_2 = 2a , \quad (4.15)$$

де фокальні радіуси r_1 і r_2 визначаються формулами (4.6). Підносячи їх до квадрата та віднімаючи одну від іншої, матимемо:

$$r_1^2 - r_2^2 = 4cx$$

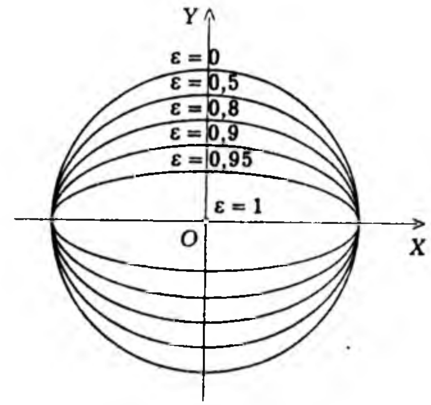


Рис. 4.4

або

$$(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 4cx .$$

Скориставшись співвідношенням (4.15), одержимо:

$$r_1 - r_2 = 2\frac{c}{a}x . \quad (4.16)$$

Розв'язуючи спільно систему рівнянь (4.15) та (4.16), знаходимо:

$$r_1 = a + \frac{c}{a}x, \quad r_2 = a - \frac{c}{a}x \quad (4.17)$$

або

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x . \quad (4.18)$$

Розглянемо ще одну важливу характеристику еліпса. Побудуємо пряму $x = l$ $(l > a)$, паралельну осі OY (рис. 4.5).

Відстань d_2 точки M до прямої $x = l$ буде дорівнювати $d_2 = l - x$, а відстань r_2 тієї ж точки M до полюса F_2, згідно з (4.18), буде $r_2 = a - \varepsilon x$. Тоді відношення r_2/d_2 буде дорівнювати:

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{a - \varepsilon x}{l - x} = \varepsilon\frac{\frac{a}{\varepsilon} - x}{l - x} .$$

Звідси випливає, що відношення r_2/d_2 буде мати постійне значення й дорівнюватиме ε, якщо $l = a/\varepsilon$.

Зважаючи на симетрію, подібний висновок можна зробити й відносно лівого фокуса F_1 та прямої $x = -l = -a/\varepsilon$.

Дві прямі лінії, перпендикулярні до фокальної осі еліпса й розташовані на відстані a/ε від його центра, називаються *директрисами* еліпса. Звідки випливає важлива властивість еліпса: *відношення відстаней довільної точки еліпса до фокуса й відповідної директриси є величина стала й дорівнює ексцентриситету цього еліпса*, тобто:

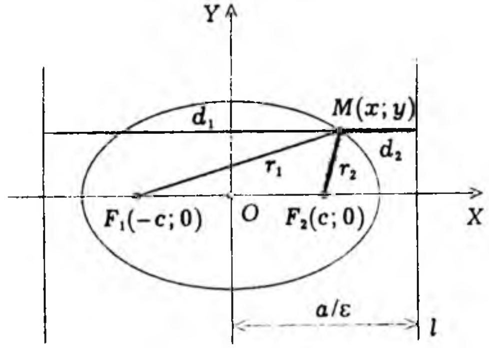


Рис. 4.5

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon \quad . \qquad (4.19)$$

Відзначимо одну цікаву особливість еліпса, яка є дуже корисною при його побудові. З умови (4.11), переписаної у вигляді

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad , \qquad (4.20)$$

випливає, що гіпотенузи прямокутних трикутників F_2OB_2 та F_1OB_2 (рис. 4.3) дорівнюють великій півосі a. Дійсно, (4.20), наприклад, для трикутника F_2OB_2, перепишеться у вигляді

$$a^2 = OB_2^2 + OF_2^2 \quad ,$$

звідки $F_2B_2 = a$. Аналогічно з трикутника F_1OB_2 знаходимо $F_1B_2 = a$.

Канонічне рівняння еліпса (4.12) відповідає тому випадку, коли фокальна вісь F_1F_2 розташована на координатній осі OX. Очевидно, що еліпс може бути розташований і навпаки, коли координатні осі OX і OY поміняються місцями (рис. 4.6).

Велика вісь і фокуси такого еліпса будуть розташовані на осі OY, а мала вісь — на осі OX. Рівняння такого еліпса матиме вигляд:

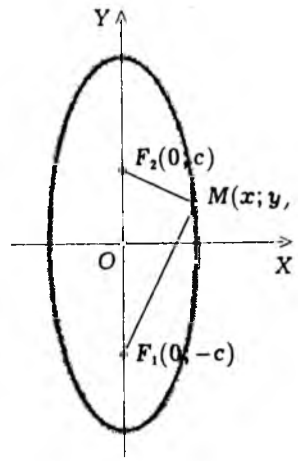


Рис. 4.6

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \qquad (4.21)$$

де $b > a$. Слід пам'ятати, що для такого еліпса співвідношення (4.11) матиме вигляд:

$$b^2 - c^2 = a^2 \quad , \qquad (4.22)$$

а ексцентриситет $\varepsilon = c/b$. Координати фокусів його будуть $F_1(0; -c)$ і $F_2(0; c)$.

Насамкінець слід відзначити, що рівняння еліпса (4.12) та (4.21) відповідають тому випадку, коли осі еліпса розташовані на осях координат. У загальному ж випадку осі еліпса можуть бути розташовані довільно відносно осей координат. Розглянемо тепер еліпс, центр якого не збігається з початком координат, але осі симетрії паралельні осям координат. Нехай центр еліпса знаходиться в точці $M_0(x_0;\ y_0)$, а його півосі, як і раніше, дорівнюють a і b, причому a — піввісь, що паралельна осі OX і $a > b$. (рис. 4.7).

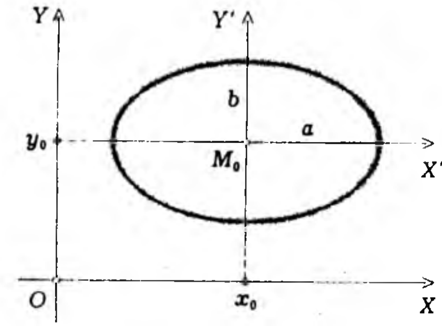


Рис. 4.7

Розташуємо в точці $M_0(x_0;\ y_0)$ початок допоміжної системи координат, осі якої M_0X' і M_0Y' паралельні осям OX і OY.

У цій "новій" системі координат еліпс буде мати рівняння:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad . \qquad (4.23)$$

Оскільки, згідно з формулами (1.12):

$$x' = x - x_0 , \qquad y' = y - y_0 ,$$

то, повертаючись до "старої" системи координат, одержимо:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad . \qquad (4.24)$$

Таким чином, (4.24) є канонічне рівняння еліпса з центром у точці $M_0(x_0;\ y_0)$ та великою й малою півосями a і b, паралельними координатним осям OX та OY відповідно.

Приклади.

1. Знайти півосі, ексцентриситет і координати фокусів еліпса:

$$16x^2 + 9y^2 = 144 \ .$$

Зводимо дане рівняння до канонічного вигляду:

$$\frac{16x^2}{144} + \frac{9y^2}{144} = 1$$

або

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \ .$$

Отже, $a = 3$ і $b = 4$, звідки $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{7}$ і $\varepsilon = c/b = (\sqrt{7})/4$. Фокуси розташовані в точках $F_1(-\sqrt{7};\ 0)$ і $F_2(\sqrt{7};\ 0)$.

2. Знайти точки перетину еліпса: $2x^2 + y^2 = 1$ і прямої $x - y + 1 = 0$.

Точки перетину двох ліній визначаємо за допомогою системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1, \\ x - y + 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи її, знаходимо дві шукані точки: $(0;\ 1)$ і $(-2/3;\ 1/3)$.

3. Написати рівняння еліпса, симетричного відносно координатних осей, якщо відомо, що він проходить через точки $A(3\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$ і $B(6;\ 0)$.

Рівняння шуканого еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

Визначимо a^2 і b^2 з умови проходження еліпса через точки A і B. Підставляючи координати цих точок у дане рівняння, маємо:

$$\frac{18}{a^2} + \frac{8}{b^2} = 1, \qquad \frac{36}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1 \ ,$$

звідки $a^2 = 36$, $b^2 = 16$.

Таким чином, шукане рівняння матиме вигляд:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1 \ .$$

4. На еліпсі $16x^2 + 25y^2 = 400$ знайти точку, відстань якої від правого фокуса в чотири рази менша за відстань від лівого фокуса.

Зведемо рівняння еліпса до канонічного вигляду, поділивши обидві частини рівності на 400:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \ ,$$

звідки $a = 5$, $b = 4$. Тоді $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$, $\varepsilon = c/a = 3/5$. Згідно з формулами (4.18) знаходимо відстані до фокусів:

$$r_1 = 5 + \frac{3}{5}x, \qquad r_2 = 5 - \frac{3}{5}x \ .$$

За умовою $r_1 = 4r_2$, отже:

$$5 + \frac{3}{5}x = 4\left(5 - \frac{3}{5}x\right) \ ,$$

звідки $x = 5$. Підставляючи це значення в рівняння еліпса, знаходимо: $y = 0$. Шукана точка матиме координати $(5;\ 0)$.

5. Знайти ексцентриситет і директриси еліпса:

$$x^2 + 3y^2 = 6 \ .$$

Запишемо рівняння еліпса у вигляді:

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1 \ .$$

Порівнюючи отримане рівняння з канонічним рівнянням (4.12), знаходимо: $a^2 = 6$, $b^2 = 2$. Отже, $c^2 = a^2 - b^2 = 4$, звідки $c = 2$ і $\varepsilon = c/a = 2/\sqrt{6}$.

Рівняння директрис у загальному вигляді:

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{a^2}{c} \ .$$

Отже, рівняння директрис даного еліпса будуть: $x = 3$ і $x = -3$.

6. Довести, що параметричні рівняння

$$\begin{cases} x = -1 + 2\cos t, \\ y = \ \ 1 + 3\sin t, \end{cases}$$

визначають еліпс, і знайти його півосі, фокусну відстань і ексцентриситет.

Параметричні рівняння еліпса були розглянуті нами в § 2.4. Перепишемо дані параметричні рівняння у вигляді:

$$\begin{cases} x + 1 = 2\cos t, \\ y - 1 = \ \sin t \end{cases}$$

звідки

$$\frac{(x+1)^2}{4} + (y-1)^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

або

$$\frac{(x+1)^2}{4} + (y-1)^2 = 1 \ .$$

Дана лінія є еліпс із півосями $a = 2$ та $b = 1$, центр якого міститься в точці $(-1;\ 1)$.

Тоді:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3} \ ,$$

отже, фокусна відстань:

$$F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{3} \ ,$$

а ексцентриситет:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

§ 4.3 ГІПЕРБОЛА

Гіперболою називається геометричне місце точок, різниця відстаней яких до двох даних точок, що називаються фокусами, є величина стала.

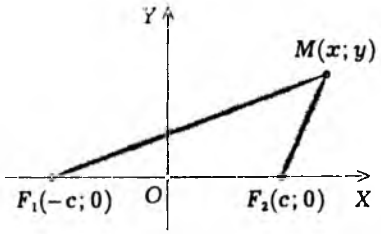


Рис. 4.8

Виберемо, для зручності виводу рівняння гіперболи, осі координат стосовно її фокусів F_1 і F_2 так само, як і в попередньому параграфі для еліпса (рис. 4.8).

Залишимо для гіперболи ті самі позначення: $2a$ — стала величина в означенні гіперболи; $2c$ — відстань між фокусами F_1 і F_2, яка називається *фокальною відстанню* гіперболи. Координати фокусів будуть ті ж самі, що й у еліпсів у попередньому параграфі: $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$. Нехай $M(x;\ y)$ — довільна точка гіперболи.

Згідно з означенням гіперболи:

$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a \qquad (4.25)$$

або

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a\ . \qquad (4.26)$$

Вираз (4.26) є рівнянням гіперболи. Знак "+" у правій частині рівності відповідає випадку $MF_1 > MF_2$, тобто, коли довільна точка гіперболи $M(x;\ y)$ розташована в I або IV координатних чвертях, і знак "−" — $MF_2 > MF_1$, тобто, коли $M(x;\ y)$ розташована у II або IV координатних чвертях. Зведемо дане рівняння до канонічного вигляду. Зробивши ті ж самі перетворення, що й у попередньому параграфі, одержимо:

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)\ ,$$

де тепер величина $a^2 - c^2 < 0$, оскільки $2a$ є різниця двох сторін трикутника F_1MF_2, а $2c$ — його третя сторона, звідки $a < c$.

Поділивши обидві частини рівності на додатну величину $a^2(c^2-a^2)$, маємо:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1\ .$$

Уважаючи $c^2 - a^2 = b^2$, остаточно отримуємо канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ . \qquad (4.27)$$

Проведемо дослідження форми гіперболи за її рівнянням (4.27).

1). Оскільки рівняння (4.27) містить у собі тільки квадрати поточних координат, то осі координат є осями симетрії гіперболи. Вісь симетрії гіперболи, на якій розташовані її фокуси, називається *фокальною віссю*. Точка перетину осей симетрії називається *центром* гіперболи. Для гіперболи, заданої рівнянням (4.27), фокальна вісь збігається з віссю OX, а центром є початок координат.

2). З рівняння (4.27) випливає, що $x^2/a^2 \ge 1$ (оскільки $x^2/a^2 = 1 + y^2/b^2$), звідки маємо $|x| \ge a$. Таким чином, у вертикальній смузі між паралельними осі OY прямими $x = -a$ і $x = a$ точок кривої немає.

Точки $x = \pm a$ при $y = 0$ є точками перетину гіперболи з віссю OX: $A_1(-a;\ 0)$ і $A_2(a;\ 0)$. Ці точки називаються *вершинами* гіперболи. Відстань між ними дорівнює $2a$.

Припустивши в (4.27) $x = 0$, одержимо $y^2 = -b^2$ або $y = \pm\sqrt{-b^2} = \pm ib$. Це означає, що вісь OY гіпербола не перетинає. У зв'язку з цим вісь симетрії, що перетинає гіперболу, називається *дійсною віссю* симетрії (фокальна вісь), а вісь симетрії, що не перетинає гіперболу, — *уявною віссю* симетрії. Відрізок A_1A_2, що з'єднує вершини гіперболи й дорівнює $2a$, є дійсною віссю гіперболи. Якщо на уявній осі симетрії гіперболи відкласти по обидва боки від її центра O відрізки OB_1 і OB_2 довжиною b, то відрізок B_1B_2, що дорівнює $2b$, є уявною віссю гіперболи. Величини a і b називаються відповідно *дійсною* й *уявною півосями* гіперболи.

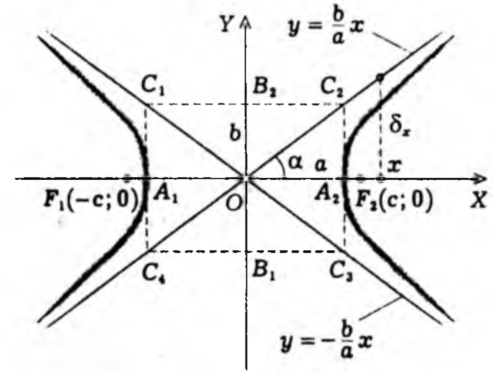


Рис. 4.9

Проведене дослідження рівняння гіперболи дає можливість побудувати її (рис. 4.9).

Зображений на рис. 4.9 пунктиром прямокутник $C_1C_2C_3C_4$ з центром у точці O та сторонами $C_1C_2 = 2a$, $C_2C_3 = 2b$, паралельними осям симетрії гіперболи, називається *осьовим прямокутником* гіперболи. Сама гіпербола дотикається вертикальних сторін цього прямокутника в їхніх серединах, що є вершинами гіперболи. Гілки гіперболи при зростанні абсолютного значення x прямують до нескінченності, наближаючись при цьому все ближче й ближче до прямих ліній, що є діагоналями осьового прямокутника. Ці лінії називаються *асимптотами* гіперболи. Знайдемо їх рівняння. З трикутника OA_2C_2 тангенс кута нахилу діагоналі буде дорівнювати відношенню b/a, що дорівнює кутовому коефіцієнту асимптоти, яка знаходиться в I і III координатних чвертях, тобто $k = \operatorname{tg}\alpha = b/a$. Та оскільки дана асимптота проходить через початок координат, то згідно з (3.17) її рівняння матиме вигляд $y = (b/a)x$. Аналогічно рівняння асимптоти, що проходить через II і IV координатні чверті, буде $y = -(b/a)x$. Таким чином, рівняння асимптот гіперболи можна записати однією формулою:

$$y = \pm\frac{b}{a}x \ . \qquad (4.28)$$

При цьому неважко побачити, що гілки гіперболи при необмеженому зростанні абсолютної величини x усе ближче й ближче підходять до прямих (4.28). Дійсно, з рівняння (4.27) величина ординати для правої гілки гіперболи матиме значення:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \ .$$

Тоді різниця δ_x між ординатами асимптоти й гіперболи буде:

$$\delta_x = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \ . \qquad (4.29)$$

З (4.29) видно, що коли x необмежено зростає, то δ_x прямує до нуля, залишаючись при цьому додатною величиною, а отже, дана гілка гіперболи необмежено наближається до прямої $y = (b/a)x$, залишаючись увесь час знизу, оскільки $x > \sqrt{x^2 - a^2}$.

Отже, гіпербола складається з двох нез'єднаних між собою гілок, які розташовані в кутах між прямими $y = (b/a)x$ і $y = -(b/a)x$ і необмежено наближаються до цих прямих.

Відзначимо особливість гіперболи, що є корисною при її побудові. Співвідношення між величинами a, b і c у гіперболи можна переписати у вигляді:

$$c^2 = a^2 + b^2 \ . \qquad (4.30)$$

Оскільки в прямокутному трикутнику OA_2C_2 катети $OA_2 = a$, $A_2C_2 = b$, то гіпотенуза OC_2 з (4.30) буде дорівнювати c. Тобто відстань c від центра гіперболи до її фокуса OF_2 дорівнює половині довжини діагоналі осьового прямокутника $C_1C_2C_3C_4$.

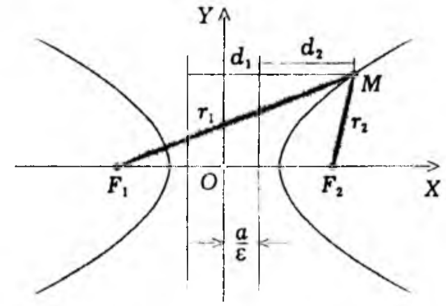


Рис. 4.10

Форма гіперболи залежить від кута нахилу асимптоти до її дійсної осі, тобто від величини відношення b/a. Чим менша ця величина, тим менший кут між асимптотами, які обмежують гіперболу, і тим більше "сплюснута" сама гіпербола. Навпаки, чим більша величина b/a, тим ширше будуть розташовані гілки гіперболи.

Одначе, так само, як і для еліпса, для характеристики форми гіперболи в аналітичній геометрії користуються не величиною b/a, а величиною $\varepsilon = c/a$, яка називається *ексцентриситетом* гіперболи. Ураховуючи (4.30) для ексцентриситету гіперболи, одержимо:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \ . \qquad (4.31)$$

Оскільки в гіперболи $c > a$, то ексцентриситет гіперболи $\varepsilon > 1$.

Формулу (4.31) можна записати в іншому вигляді, враховуючи, що відношення b/a з трикутника OA_2C_2 (рис. 4.9) дорівнює $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \sec\alpha \ . \qquad (4.32)$$

Отже, *ексцентриситет гіперболи є секанс кута нахилу її асимптоти до дійсної осі.*

Так само, як і в попередньому параграфі, через ексцентриситет можна виразити фокальні радіуси гіперболи r_1 і r_2, тобто, відстані від довільної точки гіперболи $M(x;\ y)$ до її фокусів F_1 і F_2 (рис. 4.10).

Унаслідок означення гіперболи (4.25)

$$r_1 - r_2 = \pm 2a \ , \qquad (4.33)$$

де знак "+" стосується правої гілки гіперболи, а знак "−" — лівої. З іншого боку, як і в попередньому параграфі, знаходимо:

$$r_1^2 - r_2^2 = 4cx \ . \qquad (4.34)$$

Переписавши вираз (4.34) у вигляді

$$(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 4cx$$

і підставивши до нього (4.33), маємо:

$$r_1 + r_2 = \pm 2\frac{c}{a}x \quad . \qquad (4.35)$$

Розв'язавши спільно систему рівнянь (4.33) і (4.35), знаходимо:

$$\begin{aligned} &r_1 = a + \frac{c}{a}x, \quad r_2 = -a + \frac{c}{a}x \quad \text{(права гілка)}, \\ &r_1 = -a - \frac{c}{a}x, \quad r_2 = a - \frac{c}{a}x \quad \text{(ліва гілка)} \end{aligned} \qquad (4.36)$$

або

$$\begin{aligned} &r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = -a + \varepsilon x \quad \text{(права гілка)}, \\ &r_1 = -a - \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x \quad \text{(ліва гілка)}. \end{aligned} \qquad (4.37)$$

За аналогією до попереднього параграфа назвемо прямі $x = \pm a/\varepsilon$, перпендикулярні до фокальної осі гіперболи й розташовані на відстані a/ε від її центра, ***директрисами*** гіперболи. Оскільки для гіперболи $\varepsilon > 1$ та $a/\varepsilon < a$, то директриси розташовані між її вершинами.

Знайдемо відношення для довільної точки гіперболи $M(x;\ y)$ її фокального радіуса до директриси (враховуючи симетрію гіперболи, розглянемо його тільки відносно правого фокуса). Відстань d_1 до лівої директриси буде $d_1 = a/\varepsilon - x$, відстань d_2 до правої директриси буде $d_2 = x - a/\varepsilon$. Тоді, користуючись формулами (4.37), маємо:

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{-a + \varepsilon x}{x - \dfrac{a}{\varepsilon}} \quad \text{(права гілка)};$$

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{a - \varepsilon x}{\dfrac{a}{\varepsilon} - x} \quad \text{(ліва гілка)}.$$

В обох випадках відношення r_2/d_2 буде однаковим і дорівнюватиме ε. Аналогічний результат буде й для відношень r_1/d_1 відносно лівого фокуса гіперболи. Таким чином,

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon \quad . \qquad (4.38)$$

Отже, *відношення відстаней від будь-якої точки гіперболи до фокуса та відповідної директриси є величина стала й дорівнює ексцентриситету* ε.

Окремим різновидом гіперболи є гіпербола, в якої довжини дійсної й уявної півосей рівні між собою, тобто $a = b$. Така гіпербола називається *рівносторонньою*. Її рівняння матиме вигляд:

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad . \qquad (4.39)$$

Осьовим прямокутником такої гіперболи буде квадрат. Кутові коефіцієнти асимптот такої гіперболи будуть дорівнювати $k = \pm b/a = \pm 1$, а самі асимптоти матимуть рівняння

$$y = \pm x \quad , \qquad (4.40)$$

будуть перпендикулярні між собою й поділятимуть кути між її осями навпіл. Для такої гіперболи $c = a\sqrt{2}$ і $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Може статися так, що осі a і b в гіперболи поміняються місцями, тоді все, що ми розглядали вище, залишиться без зміни, якщо величини x і y та a і b навзаєм замінити.

Цікаво розглянути дві гіперболи, в яких осі збігаються та рівні, але дійсна вісь однієї з них є уявною іншої, і навпаки. Такі гіперболи називаються *спряженими*. Асимптоти таких гіпербол збігаються, оскільки збігаються їхні осьові прямокутники, а в суміжних кутах між ними будуть розташовані гіперболи (рис. 4.11).

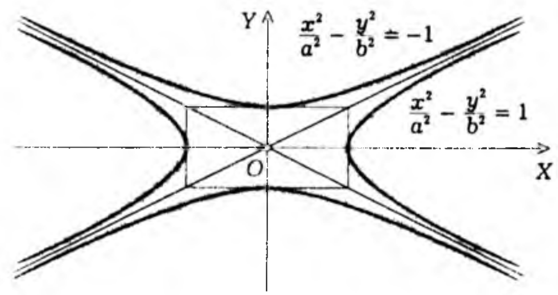


Рис. *4.11*

Рівняння однієї з них є (4.27):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ ,$$

а іншої, спряженої з нею:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

або

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad , \qquad (4.41)$$

оскільки міняються місцями осі координат OX і OY та півосі гіпербол a і b.

Відзначимо, що відстань c від центра до фокусів в обох спряжених гіперболах одна й та ж і визначається формулою (4.30), але ексцентриситети різні: $\varepsilon_1 = c/a$, $\varepsilon_2 = c/b$, причому в загальному випадку (якщо гіперболи не є рівнобічні) $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$.

Для випадку, коли центр гіпербол $M_0(x_0;\ y_0)$ не збігається з початком координат, але осі симетрії його будуть паралельні осям координат, то за аналогією до попереднього параграфа, одержимо для них рівняння:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (4.42)$$

і

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1 \ . \qquad (4.43)$$

Приклади.

1. Знайти півосі, фокуси, ексцентриситет і рівняння асимптот гіперболи:

$$9x^2 - 4y^2 = 16 \ .$$

Перепишемо дане рівняння в канонічному вигляді:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1 \ .$$

Звідки одержимо:

$$a = \frac{4}{3}, \qquad b = 2, \qquad c = \sqrt{a^2+b^2} = \frac{2}{3}\sqrt{13} \ ,$$

і ексцентриситет:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2} \ .$$

Фокуси гіперболи розташовані в точках $F_1(-(2/3)\sqrt{13};\ 0)$ і $F_2((2/3)\sqrt{13};\ 0)$.

Рівняння асимптот мають такий вигляд:

$$y = \frac{b}{a}x = \frac{3}{2}x \qquad і \qquad y = -\frac{b}{a}x = -\frac{3}{2}x \ .$$

2. Скласти рівняння гіперболи, симетричної відносно координатних осей, якщо відомо, що вона перетинає вісь OY і проходить через точки $K(24;\ 5\sqrt{5})$ і $N(0;\ 5)$. Знайти її фокуси.

Рівняння гіперболи будемо шукати у вигляді:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \ .$$

Підставляючи координати точок K і N у це рівняння, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{125}{b^2} - \dfrac{24^2}{a^2} = 1, \\ \dfrac{25}{b^2} = 1 . \end{cases}$$

Розв'язуючи її, знаходимо: $b^2 = 25$, $a^2 = 144$. Таким чином, шукане рівняння матиме вигляд:

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1 \ .$$

За формулою (4.30) знаходимо $c = \sqrt{144+25} = 13$. Фокуси даної гіперболи розташовані на осі OY і мають координати: $F_1(0;\ -13)$ і $F_2(0;\ 13)$.

3. Знайти відстань від фокуса гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

до її асимптоти.

Ураховуючи симетрію гілок гіперболи, знайдемо відстань від фокуса $F_2(c;\ 0)$ до асимптоти $y = (b/a)x$.

Шукана відстань є відстанню від точки $F_2(c;\ 0)$ до прямої $(b/a)x - y = 0$. За формулою (3.48) маємо:

$$d = \frac{\left|\frac{b}{a}\cdot c - 0\right|}{\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = b \ .$$

4. Довести, що добуток відстаней будь-якої точки гіперболи до її асимптот є величина стала.

Рівняння асимптот гіперболи мають вигляд:

$$y = \pm\frac{b}{a}x \qquad \text{або} \qquad bx \pm ay = 0 \ .$$

Нехай $M(x;\ y)$ — довільна точка гіперболи. Її відстані до асимптот за формулою (3.48) будуть дорівнювати:

$$d_1 = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad d_2 = \frac{|bx+ay|}{\sqrt{a^2+b^2}} \ ,$$

звідки

$$d_1 d_2 = \frac{|b^2x^2 - a^2y^2|}{a^2+b^2} \ . \qquad (4.44)$$

З рівняння гіперболи (4.27)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

знаходимо

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \ . \quad (4.45)$$

Підставляючи співвідношення (4.45) у формулу (4.44), одержимо:

$$d_1 d_2 = \frac{a^2b^2}{c^2} \ ,$$

що й треба було довести.

Отже, *добуток відстаней від будь-якої точки гіперболи до її асимптот є величина стала й дорівнює частці, чисельник якої є добуток квадратів її півосей, а знаменник — квадрат фокальної піввідстані.*

5. Довести, що графіком функції

$$y = \frac{k}{x}$$

є рівнобічна гіпербола.

Для доведення необхідно здійснити перетворення координат, а саме: поворот координатних осей на кут $\varphi = 45°$. Згідно з формулами (1.15), маємо:

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \ ,$$

$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \ .$$

Після підстановок у рівняння рівнобічної гіперболи

$$x \cdot y = k$$

одержимо

$$\frac{(x' - y')}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(x' + y')}{\sqrt{2}} = k$$

або

$$x'^2 - y'^2 = 2k \ .$$

Звідки

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \ ,$$

де $a = b = \sqrt{2k}$. А це, очевидно, є рівняння рівнобічної гіперболи.

§ 4.4 ПАРАБОЛА

Параболою називається геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки, що називається фокусом, і даної прямої, що називається директрисою.

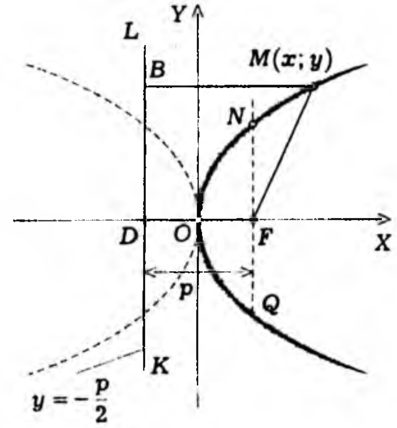


Рис. 4.12

Нехай вісь OX проходить через фокус параболи F перпендикулярно до директриси KL і напрямлена від директриси до фокуса. За початок координат виберемо точку O, що є серединою відрізка DF від фокуса F до директриси KL, довжину якого позначимо p (рис. 4.12).

Величина p називається *параметром* параболи. Тоді координати фокуса F будуть $(p/2;\ 0)$, а рівняння директриси буде $x = -p/2$.

Візьмемо на параболі довільну точку $M(x;\ y)$. Тоді координати точки B, що є проекцією точки M на директрису, будуть $(-p/2;\ y)$.

Згідно з означенням параболи

$$MF = MB \ , \quad (4.46)$$

або, враховуючи формулу (1.7),

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2} \ . \quad (4.47)$$

Зведемо рівняння параболи (4.47) до канонічного виду. Підносячи обидві частини рівності до квадрата та розкриваючи дужки, одержимо:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \ ,$$

звідки

$$y^2 = 2px \ . \quad (4.48)$$

Рівняння (4.48) є канонічним рівнянням параболи.

Проведемо дослідження форми параболи за її рівнянням (4.48).

1). З (4.48) видно, що x не може набувати від'ємних значень. Дійсно, розв'язавши (4.48) відносно x, маємо:

$$x = \frac{y^2}{2p} ,$$

де $2p > 0$. Звідси випливає, що вся парабола розташована справа від осі OY.

2). Оскільки в рівнянні (4.48) поточна змінна y увіходить у другому степені, то це означає, що кожному значенню x відповідає два значення y, рівних за абсолютною величиною, але протилежних за знаком, тобто $y = \pm\sqrt{x}$. Звідси випливає, що вісь OX буде віссю симетрії параболи. Вісь симетрії параболи називається *віссю* параболи. Припустивши в (4.48) $x = 0$, одержуємо $y = 0$, тобто парабола проходить через початок координат. Ця точка називається *вершиною* параболи. Відзначимо, що парабола має лише одну вершину, тоді, як гіпербола — дві, а еліпс — чотири.

При необмеженому зростанні x абсолютна величина $|y|$ також буде необмежено зростати.

Нагадаємо про один цікавий факт, який є корисним при побудові параболи. Точка параболи N (рис. 4.12), що знаходиться над фокусом F, має ординату, рівну параметру p. Дійсно, оскільки абсциса точки N буде та ж сама, що й у фокуса F, тобто $x = p/2$, то, підставляючи її в рівняння (4.48), маємо:

$$y^2 = 2p \cdot \frac{p}{2} = p^2 ,$$

звідки $y = \pm p$. Ордината точки N буде p, а точки Q буде $-p$. Довжина хорди QN параболи, що проходить через її фокус перпендикулярно осі параболи, дорівнює $2p$. Отже, число p дорівнює довжині фокального радіуса, перпендикулярного осі симетрії. У зв'язку з цим число p іноді називають *фокальним параметром* параболи.

Поняття *ексцентриситету* для параболи вводиться за аналогією до виразів (4.19) для еліпса та (4.38) для гіперболи. Відстань MF довільної точки параболи M до її фокуса F називається за аналогією до еліпса та гіперболи *фокальним радіусом* параболи (рис. 4.13).

Тоді, згідно з означенням параболи $r = d$ або $r/d = 1$. Тому ексцентриситет параболи вважаємо рівним одиниці: $\varepsilon = 1$.

Порівнюючи поняття директриси та ексцентриситету еліпса, гіперболи та параболи, знаходимо спільну властивість, що притаманна лініям другого порядку, а саме: *відношення відстаней довільної точки $M(x;\ y)$ будь-якої з цих кривих до фокуса й до відповідної директриси є величина стала й дорівнює ексцентриситету кривої.*

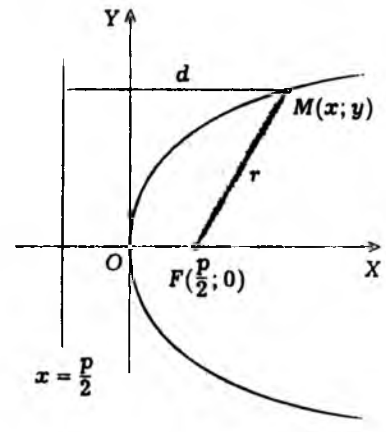


Рис. 4.13

У зв'язку з цим для розглянутих вище ліній другого порядку можна ввести спільне означення: *лінії другого порядку є геометричні місця точок, відношення відстаней яких до фокуса й до відповідної директриси є величина стала* й дорівнює ексцентриситету ε, причому для еліпса $\varepsilon < 1$, для гіперболи $\varepsilon > 1$, для параболи $\varepsilon = 1$.

Для параболи, що визначається рівнянням (4.48), віссю симетрії є вісь OX. Неважко переконатися, що існує ще одна парабола при даній осі симетрії (на рис. 4.12 вона зображена пунктиром). Її рівняння буде:

$$y^2 = -2px . \tag{4.49}$$

При цьому $p > 0$, координати фокуса будуть дорівнювати $F(-p/2;\ 0)$, рівняння директриси буде $x = p/2$, а гілки її будуть направлені вліво.

Віссю симетрії параболи може бути й вісь OY. Тоді в рівнянні параболи координати x і y поміняються місцями і її рівняння матиме вигляд:

$$x^2 = 2py . \tag{4.50}$$

Вершина її, як і раніше, буде знаходитися на початку координат, а сама парабола розташована над віссю OX і гілки її спрямовані вгору. Фокусом такої параболи буде точка $F(0;\ p/2)$, директрисою — пряма $y = -p/2$ (рис. 4.14).

При тій же осі симетрії, але з гілками, спрямованими вниз, буде парабола:

$$x^2 = -2py , \tag{4.51}$$

де $p > 0$, координати фокуса $F(0;\ -p/2)$, директриса — пряма $y = p/2$.

Рівняння парабол (4.48) і (4.49) можна об'єднати в одне:

$$y^2 = 2px \ , \quad (4.52)$$

а рівняння парабол (4.50) і (4.51) в:

$$x^2 = 2py \ , \quad (4.53)$$

якщо в цих рівняннях розглядати p як коефіцієнт, що може набувати як додатних, так і від'ємних значень, а параметром параболи вважати $|p|$.

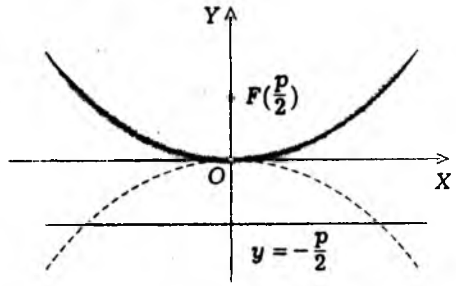


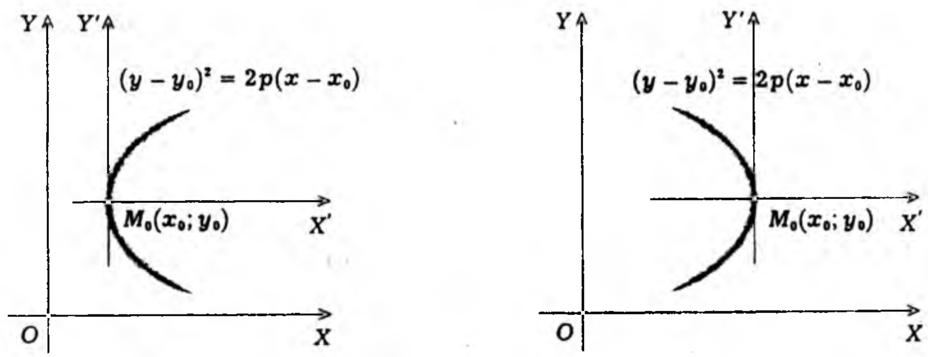
Рис. 4.14

При $p > 0$ парабола буде напрямлена в додатному напрямі відповідної осі координат, а при $p < 0$ — у від'ємному.

Якщо вершина параболи буде розташована не на початку координат, а в довільній точці $M_0(x_0;\ y_0)$, але осі симетрії $(M_0X',\ M_0Y')$ будуть паралельні осям координат, то рівняння парабол (4.52) матимуть вигляд:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \ , \quad (4.54)$$

при $p > 0$ — рис. 4.15 а), при $p < 0$ — рис. 4.15 б),



а) $p > 0$ б) $p < 0$

Рис. 4.15

а рівняння парабол (4.53) матимуть вигляд:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \ , \quad (4.55)$$

при $p > 0$ — рис. 4.16 а), при $p < 0$ — рис. 4.16 б).

Насамкінець покажемо, що графіком многочлена другого степеня, або, як його ще називають, квадратного тричлена

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0) \ , \quad (4.56)$$

є парабола.

Дійсно, виділивши повний квадрат у правій частині, рівність (4.56) можна переписати у вигляді:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

або

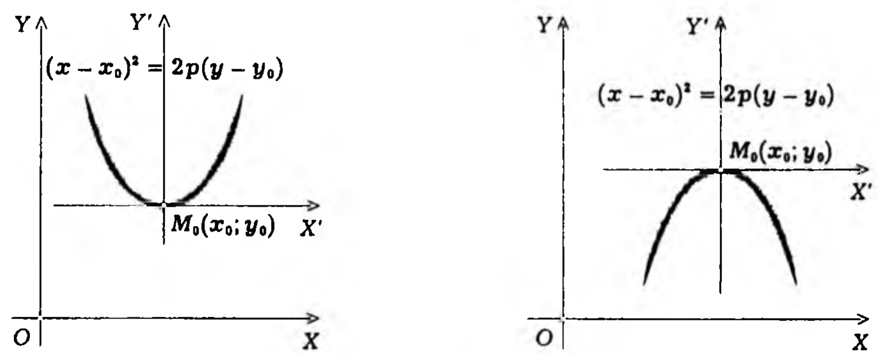
$$y - y_0 = a(x - x_0)^2 \ , \quad (4.57)$$

де $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

Користуючись далі формулою (1.12) для паралельного перенесення координат, одержимо:

$$y' = ax'^2 \ , \quad (4.58)$$

тобто рівняння параболи.



а) $p > 0$ б) $p < 0$

Рис. 4.16

Приклади.

1. Знайти фокус, рівняння директриси та фокальний радіус точки $A(1;\,4)$ параболи:
$$y^2 = 16x \ .$$

Параметр параболи:
$$p = \frac{16}{2} = 8 \ ,$$
отже, фокус є точка
$$F\left(\frac{p}{2};\,0\right) \quad \text{або} \quad F(4;\,0) \ .$$

Рівняння директриси має такий вигляд:
$$x = -\frac{p}{2} \quad \text{або} \quad x = -4 \ .$$

Відстань точки $A(1;\,4)$ до фокуса є
$$r = \frac{p}{2} + x = \frac{8}{2} + 1 = 5 \ .$$

2. Написати рівняння параболи, фокус якої $F(0;\,+5)$, а рівняння директриси має вигляд:
$$y + 5 = 0 \ .$$

Очевидно, що вісь OY — вісь симетрії параболи. Параметр параболи є відстань від фокуса до директриси ($y = -5$), тобто:
$$p = 10 \ .$$

Отже,
$$x^2 = 2py \quad \text{або} \quad x^2 = 20y \ .$$

Останнє рішення остаточно перепишемо у вигляді:
$$y = \frac{1}{20}x^2 \ .$$

3. Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі OY, якщо вона проходить через точки перетину прямої $x + y = 0$ і кола $x^2 + (y+4)^4 = 16$.

Знайдемо точки перетину прямої та кола, для чого розв'яжемо систему рівнянь
$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + (y+4)^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + y^2 + 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (-y)^2 + y^2 + 8y = 0 \ ,$$
$$2y(y+4) = 0 \ , \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0\,; \quad y_2 = -4\,; \quad x_1 = 0\,; \quad x_2 = 4 \ .$$

Отже, точки $O(0;\,0)$ і $M(4;\,-4)$ — шукані точки перетину.

Рівняння параболи, симетричної відносно осі OY, що проходить через початок координат, має вигляд:
$$x^2 = 2py \ .$$

Визначимо параметр p з умови, що парабола проходить через точку $M(4;\,-4)$:
$$4^2 = 2p(-4) \ ,$$

звідки
$$2p = -4 \ .$$

Отже, шукане рівняння параболи має вигляд:
$$x^2 = -4y \ .$$

4. Дано параболу $y^2 = 6x$. Скласти рівняння хорди, що проходить через точку $(4;\,1)$ і ділиться в цій точці на дві рівні частини.

Знайдемо рівняння шуканої хорди у вигляді (3.28):
$$y - 1 = k(x-4) \quad \Rightarrow \quad y = k(x-4) + 1 \ .$$

Для знаходження точок перетину хорди з параболою розв'язуємо систему
$$\begin{cases} y^2 = 6x, \\ y = k(x-4) + 1, \end{cases}$$
звідки
$$x^2 - \frac{2(4k^2 - k + 3)}{k^2} + \frac{16k^2 - 8k + 1}{k^2} = 0 \ .$$

Згідно з теоремою Вієта знаходимо для коренів x_1 і x_2:
$$x_1 + x_2 = \frac{2(4k^2 - k + 3)}{k^2} \ .$$

Оскільки $(4;\,1)$ середина хорди, то:
$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{4k^2 - k + 3}{k^2} = 4 \ ,$$
звідки $k = 3$.

Таким чином, одержимо рівняння шуканої хорди:
$$y - 1 = 3(x-4)$$
або
$$3x - y - 11 = 0 \ .$$

5. Знайти фокус, вершину, параметр і директрису параболи:
$$y = x^2 - 5x + 6 \ .$$

Перепишемо квадратний тричлен у вигляді:
$$y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$
або
$$y + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \ .$$

Зробимо заміну координат:
$$y' = y + \frac{1}{4}\,; \qquad x' = x - \frac{5}{2} \ ,$$
тоді
$$y = x'^2 \ . \tag{4.59}$$

Таким чином, вершина параболи знаходиться в точці $A(5/2;\,-1/4)$. Її віссю симетрії є пряма:
$$x - \frac{5}{2} = 0 \ .$$

З рівняння (4.59) випливає, що $2p = 1$, звідки $p = 1/2$. Фокус є точка, яка лежить на осі симетрії на відстані $p/2 = 1/4$ від вершини, тобто точка $F(5/2;\ 0)$. Рівняння директриси в системі $X'OY'$ має вигляд:

$$y' = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{4} \ ,$$

а в системі XOY матимемо

$$y + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

або

$$y = -\frac{1}{2} \ .$$

§ 4.5 ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Візьмемо рівняння кола (4.2): $$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \ ,$$

розкриємо дужки й усі члени перенесемо по один бік від знака рівності. Тоді рівняння набуде вигляду:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ , \qquad (4.60)$$

де $A = C = 1 (AC = 1)$, $D = -2x_0$, $E = -2y_0$, $F = x_0^2 + y_0^2 - R^2$. При цьому повинна виконуватися умова $x_0^2 + y_0^2 - F > 0$.

Для випадку $x_0^2 + y_0^2 - F = 0$ рівняння (4.2) набуде вигляду:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0 \ . \qquad (4.61)$$

Це рівняння задовольняє *єдина точка* площини $M_0(x_0;\ y_0)$, тому рівняння (4.61) є рівнянням кола з нульовим радіусом. Кажуть, що в цьому випадку *коло вироджується в точку*.

Для випадку $x_0^2 + y_0^2 - F < 0$, можна покласти $x_0^2 + y_0^2 - F = -R^2$, і тоді рівняння (4.2) набуде вигляду:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = -R^2 \ . \qquad (4.62)$$

Оскільки ліва частина цієї рівності не може бути від'ємною, то на площині не існує точок, які могли б задовольняти це рівняння. Тому рівняння (4.62) не визначає ніякої лінії. Інколи кажуть, що (4.62) є рівнянням *уявного кола*.

Візьмемо рівняння еліпса (4.24):

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \ .$$

Розкривши дужки та звівши подібні члени, дане рівняння зводимо до вигляду (4.60): $$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ , \qquad (4.63)$$

де $A = b^2$, $C = a^2 (AC > 0)$, $D = -2Ax_0$, $E = -2Cy_0$, $F = Ax_0^2 + Cy_0^2 - AC$. При цьому, оскільки добуток $AC > 0$, повинна виконуватися умова $Ax_0^2 + Cy_0^2 - F > 0$.

Для випадку $Ax_0^2 + Cy_0^2 - F = 0$ рівняння еліпса (4.24) набуде вигляду: $$A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = 0 \ .$$

Це рівняння, як і аналогічне рівняння кола (4.61), визначає *єдину точку* площини $M_0(x_0;\ y_0)$.

Для випадку $Ax_0^2 + Cy_0^2 - F < 0$ рівняння (4.24) набуде вигляду:

$$\frac{(x-x_0)^2}{\dfrac{F-(Ax_0^2+Cy_0^2)}{A}} + \frac{(y-y_0)^2}{\dfrac{F-(Ax_0^2+Cy_0^2)}{B}} = -1 \ . \quad (4.64)$$

Ліва частина цієї рівності при будь-яких значеннях x і y невід'ємна, отже, цьому рівнянню не відповідає жодна точка площини. Кажуть, що в цьому випадку рівняння (4.64) визначає *уявний еліпс*.

Якщо в рівнянні гіперболи (4.42)

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

розкрити дужки та звести подібні члени, то воно набуде вигляду:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ , \quad (4.65)$$

де $A = b^2$, $C = -a^2$ $(AC < 0)$, $D = -2Ax_0$, $E = -2Cy_0$, $F = Ax_0^2 + Cy_0^2 + AC$. При цьому, оскільки добуток $AC < 0$, повинна виконуватися умова $Ax_0^2 + Cy_0^2 - F > 0$.

Для випадку $Ax_0^2 + Cy_0^2 - F < 0$ ми одержимо рівняння гіперболи:

$$\frac{(x-x_0)^2}{\dfrac{Ax_0^2+Cy_0^2-F}{-A}} + \frac{(y-y_0)^2}{\dfrac{Ax_0^2+Cy_0^2-F}{C}} = -1 \ , \quad (4.66)$$

яка є гіперболою (4.43), *спряженою* з розглянутою нами.

Для випадку, коли $Ax_0^2 + Cy_0^2 - F = 0$, рівняння (4.42) набуде вигляду:

$$A(x-x_0)^2 + C(y-y_0)^2 = 0 \ . \quad (4.67)$$

Ураховуючи, що для гіперболи $A > 0$, а $C < 0$, ліва частина рівності (4.67) може бути представлена у вигляді:

$$[\sqrt{A}(x-x_0) + \sqrt{-C}(y-y_0)][\sqrt{A}(x-x_0) - \sqrt{-C}(y-y_0)] = 0 \ , \quad (4.68)$$

звідки видно, що дане рівняння визначає *дві прямі лінії*, що перетинаються в точці $M_0(x_0;\ y_0)$.

Візьмемо рівняння параболи (4.54):

$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0) \ .$$

Розкривши дужки та звівши подібні члени, одержимо:

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ , \quad (4.69)$$

де $A = 0$, $C = 1$ $(AC = 0)$, $D = -2p$, $E = -2y_0$, $F = y_0^2 + 2px_0 = Cy_0^2 - Dx_0$.

Для випадку $D = 0$ рівняння (4.69) матиме вигляд:

$$Cy^2 + Ey + F = 0 \ . \quad (4.70)$$

Якщо корені даного рівняння y_1 та y_2 дійсні й різні, то дане рівняння визначає *дві прямі*, паралельні осі OX; якщо корені дійсні й рівні, то ці *прямі збігаються*. Якщо ж дискримінант рівняння (4.70) буде від'ємним, то дане рівняння ніякого геометричного місця точок не визначає. Кажуть, що в цьому випадку парабола "розпадається" на дві *уявні лінії*.

Якщо ж узяти параболу (4.55)

$$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0) \ ,$$

то її рівняння, після аналогічних перетворень, набуде вигляду:

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \ , \quad (4.71)$$

в якого $A = 1$, $C = 0$ $(AC = 0)$, і у випадку $E = 0$ воно визначатиме або дві, або одну пряму паралельну осі OY, або *дві уявні прямі*.

Узагальнюючи рівняння (4.60), (4.63), (4.65), (4.69) і (4.71), їх можна об'єднати в одне, яке, не беручи до уваги їхніх коефіцієнтів, може бути записане у вигляді:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ . \quad (4.72)$$

Вище розглянуте дослідження рівняння (4.72) дає можливість стверджувати, що воно завжди визначає або еліпс при $AC > 0$ (при $A = C$ — коло), або гіперболу при $AC < 0$, або параболу при $AC = 0$ з можливими випадками виродження: еліпса (кола) — в точку або уявний еліпс (коло); гіперболи — в пару прямих, що перетинаються; параболи — в пару паралельних або таких, що збігаються прямих, або уявних прямих.

Повернемося тепер до загального рівняння ліній другого порядку:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ .$$

Перейдемо в ньому за допомогою формул (1.14) до координат x', y', повернених відносно x, y на деякий кут α:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \ , \qquad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \ .$$

У результаті одержимо:

$$A(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + B(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) +$$
$$+ C(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + D(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) +$$
$$+ E(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + F = 0 \ . \quad (4.73)$$

Якщо розкрити дужки та звести подібні члени, то коефіцієнт при $x'y'$ матиме вигляд:

$$-2A\cos\alpha\sin\alpha + B\cos^2\alpha - B\sin^2\alpha + 2C\sin\alpha\cos\alpha =$$
$$= B\cos 2\alpha + (C - A)\sin 2\alpha \ .$$

Прирівнявши його до нуля, одержимо:

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{B}{A - C} \ . \quad (4.74)$$

Таким чином, загальне рівняння лінії другого порядку (4.1) при повороті координатних осей на кут α, визначений умовою (4.74), перетворюється на рівняння вигляду (4.72):

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0 \ ,$$

де A', C', D', E' — нові коефіцієнти, отримані з виразу (4.73) після зведення подібних членів.

Підсумовуючи, можна зробити висновки:

Висновок 1. *Лінії другого порядку (не враховуючи випадків розпаду й виродження) можуть бути тільки еліпсами (зокрема, колами), гіперболами й параболами.*

Висновок 2. *Рівняння другого степеня відносно змінних x і y не може визначати на площині нічого іншого, окрім еліпса (кола), гіперболи, параболи та випадків їх розпаду й виродження.*

Відзначимо ще одну особливість. Можна довести, що величина $AC - B^2 > 0$ при будь-якому перетворенні координат (1.15) зберігає свій знак і своє числове значення. Тобто *величина $AC - B^2$ є інваріантом відносно перетворення координат*. Таким чином завжди можна визначити тип лінії другого порядку безпосередньо за коефіцієнтами її загального рівняння (4.1):

при $AC - B^2 > 0$ буде лінія *еліптичного типу* (еліпс або коло, точка, уявний еліпс або уявне коло; при цьому коло буде тільки при $A = C$ і $B = 0$);

при $AC - B^2 < 0$ буде лінія *гіперболічного типу* (гіпербола або пара прямих, що перетинаються);

при $AC - B^2 = 0$ буде лінія *параболічного типу* (парабола, пара паралельних прямих, що можуть збігатися в одну пряму, або пара уявних прямих).

Інваріантна величина $AC - B^2$, від знака якої залежить тип лінії другого порядку, називається *дискримінантом* лінії другого порядку.

Приклади.

1. Яка лінія визначається рівнянням $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$?

Виділивши в даному виразі повні квадрати, маємо:

$$(x^2 - 2\cdot 3\cdot x + 9) - 9 + (y^2 + 2\cdot 2\cdot y + 4) - 4 - 3 = 0$$

або

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16 \ .$$

Порівнюючи даний вираз із (4.2), приходимо до висновку, що дане рівняння є рівняння кола радіуса $R = 4$ з центром у точці $(3; -2)$.

2. Яке геометричне місце точок визначається рівнянням

$$4x^2 + 4y^2 + 8x - 12y + 13 = 0 \ ?$$

Розділивши обидві частини рівності на 4, одержимо:

$$x^2 + y^2 + 2x - 3y + \frac{13}{4} = 0 \ .$$

Виділяючи повні квадрати, маємо:

$$(x^2 + 2x + 1) + \left(y^2 - 2\cdot\frac{3}{2}y + \frac{9}{4}\right) - 1 - \frac{9}{4} - \frac{13}{4} = 0$$

або

$$(x + 1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \ .$$

Таким чином, дане геометричне рівняння визначає точку $(-1; 3/2)$.

3. Яку лінію визначає рівняння $4x^2 + y^2 - 8x + 2y - 11 = 0$?

Доповнюємо вирази $4x^2 - 8x$ та $y^2 + 2y$ до повних квадратів:

$$4x^2 - 8x = 4(x^2 - 2x + 1 - 1) = 4(x - 1)^2 - 4 \ ,$$
$$y^2 + 2y = y^2 + 2y + 1 - 1 = (y + 1)^2 - 1 \ .$$

Тоді дане рівняння матиме вигляд:

$$4(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 16 \ .$$

Поділивши обидві частини рівності на 16, маємо:

$$\frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{(y + 1)^2}{16} = 1 \ .$$

Порівнюючи з (4.24), приходимо до висновку, що дана лінія — еліпс із півосями $a = 2$, $b = 4$ та з центром у точці $(1; -1)$.

4. Що визначає рівняння $x^2 + 2y^2 + 6x - 4y + 11 = 0$?

Зробивши ті ж самі перетворення, що й у попередньому прикладі, маємо:

$$(x + 3)^2 + 2(y - 1)^2 = 0 \ .$$

Дане рівняння визначає єдину точку $(-3; 1)$.

5. Що визначає рівняння $$x^2 + 3y^2 + 4x + 6y + 19 = 0 \ ?$$

Після виділення повних квадратів рівняння зводиться до вигляду:
$$(x+2)^2 + 3(y+1)^2 = -12$$
або
$$\frac{(x+2)^2}{12} + \frac{(y+1)^2}{4} = -1 .$$

Це рівняння уявного еліпса.

6. Яку лінію визначає рівняння $$x^2 - 4y^2 - 6x - 8y - 7 = 0 \ ?$$

Доповнюючи члени з x та y до повних квадратів, маємо:
$$(x-3)^2 - 4(y+1)^2 = 12 .$$

Поділивши обидві частини рівності на 12, приходимо до рівняння гіперболи:
$$\frac{(x-3)^2}{12} - \frac{(y+1)^2}{3} = 1 .$$

Центр гіперболи, розташований у точці $(3; -1)$, дійсна піввісь $a = 2\sqrt{3}$, уявна — $b = \sqrt{3}$. Дійсна вісь паралельна осі OX.

7. Яку лінію визначає рівняння $$2x^2 - 3y^2 + 8x + 6y + 11 = 0 \ ?$$

Доповнюючи члени з x та y до повних квадратів, маємо:
$$2(x+2)^2 - 3(y-1)^2 = -6 ,$$
звідки
$$\frac{(x+2)^2}{3} - \frac{(y-1)^2}{2} = -1 .$$

Це рівняння гіперболи з центром у точці $(-2; 1)$, дійсною піввіссю $b = \sqrt{2}$ та уявною $a = \sqrt{3}$. Дійсна вісь гіперболи паралельна осі OY.

8. Що визначає рівняння $$4x^2 - y^2 + 8x - 8y - 12 = 0 \ ?$$

Після доповнення членів з x та y до повних квадратів одержимо рівняння:
$$4(x+1)^2 - (y+4)^2 = 0 .$$

Ліва частина рівності розпадається на множники:
$$(2x - y - 2)(2x + y + 6) = 0 .$$

Отже, дане рівняння визначає дві прямі:
$$2x - y - 2 = 0 \quad \text{і} \quad 2x + y + 6 = 0 ,$$
які перетинаються в точці $(-1; -4)$.

9. Яку лінію визначає рівняння
$$36x^2 - 12xy + 29y^2 + 168x - 76y + 20 = 0 \ ?$$

Оскільки $AC - B^2 = 36 \cdot 29 - (-12)^2 = 900 > 0$, то дана лінія — еліптичного типу.

За формулою (4.74) визначаємо:
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{B}{A - C} = -\frac{12}{7} .$$

Тоді
$$\cos 2\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \pm \frac{7}{25} .$$

Знак "$-$" відповідатиме гострому куту $(\pi/2 < 2\alpha < \pi)$. Вважаючи $\cos 2\alpha = -7/25$, знаходимо:
$$\sin\alpha = +\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \frac{4}{5} ; \qquad \cos\alpha = +\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \frac{3}{5} .$$

Зробимо перетворення координат за формулами (1.14). Тоді:
$$x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' ; \qquad y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' .$$

Підставляючи ці значення x та y у рівняння лінії, маємо:
$$4x'^2 + 9y'^2 + 8x' - 36y' + 4 = 0 .$$

Доповнимо члени з x' та y' до повних квадратів:
$$4(x'+1)^2 + 9(y'-2)^2 = 36 ,$$
звідки, поділивши обидві частини рівності на 36, остаточно одержимо:
$$\frac{(x'+1)^2}{9} + \frac{(y'-2)^2}{4} = 1 .$$

Дане рівняння визначає еліпс із півосями $a = 3$ і $b = 2$, центр якого, стосовно координатних осей OX' і OY' знаходиться в точці $O'(-1; 2)$ й осі якого паралельні осям OX' і OY'.

Розташування еліпса стосовно "старої" (XOY) і "нової" $(X'OY')$ систем координат зображено на рис. 4.17

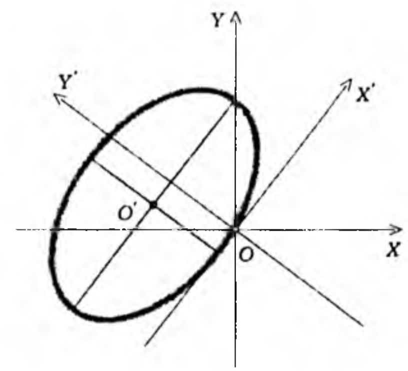


Рис. 4.17

§ 4.6 ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Виведемо загальне рівняння ліній другого порядку в полярних координатах, користуючись загальною властивістю еліпсів, гіпербол і парабол.

Нехай є будь-яка з даних ліній. Розглянемо фокус F (будь-який, якщо їх два) та відповідну йому директрису L. Виберемо полярну систему координат таким чином, що полюс O збігається з фокусом F, а полярна вісь була напрямлена вздовж осі симетрії лінії в бік, протилежний директрисі L.

Нехай є на лінії довільна точка $M(\rho;\ \varphi)$. З'єднаємо її відрізком FM з фокусом і проведемо перпендикуляр MK на директрису. Крім того, з точки F проведемо перпендикуляр FR до полярної осі й до перетину з лінією в точці R, а з точки R проведемо перпендикуляр RQ на директрису (рис. 4.18).

Позначимо $FR = p$ й назвемо це число фокальним параметром.

На підставі загальної властивості ліній другого порядку маємо:

$$\frac{FM}{KM} = \varepsilon\ . \qquad (4.75)$$

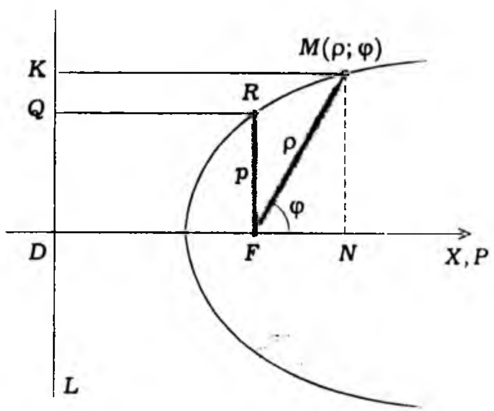


Рис. 4.18

Ураховуючи, що $FM = \rho$, а $KM = DF + \rho\cos\varphi$ з трикутника FMN, перепишемо відношення (4.75) у вигляді:

$$\frac{\rho}{DF + \rho\cos\varphi} = \varepsilon\ . \qquad (4.76)$$

З тих же міркувань

$$\frac{FR}{QR} = \varepsilon \qquad \text{або} \qquad \frac{p}{DF} = \varepsilon\ ,$$

звідки

$$DF = \frac{p}{\varepsilon}\ . \qquad (4.77)$$

Підставляючи відношення (4.77) у формулу (4.76), одержимо:

$$\frac{\rho}{\frac{\rho}{\varepsilon} + \rho\cos\varphi} = \varepsilon\ ,$$

звідки

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}\ . \qquad (4.78)$$

Рівняння (4.78) називається *рівнянням лінії другого порядку в полярних координатах*. При $\varepsilon < 1$ лінія буде еліпсом, при $\varepsilon > 1$ — гілкою гіперболи, при $\varepsilon = 1$ — параболою.

Фокальний параметр p для параболи визначається безпосередньо з її рівняння. Для того щоб визначити фокальний параметр для еліпса або параболи, скористаємося особливістю цих ліній, яка полягає в тому, що фокальний параметр є ординатою точки кривої, абсциса якої дорівнює абсцисі відповідного фокуса в декартовій системі координат.

Підставляючи замість координат точки $M(x;\ y)$ у рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ координати точки $(-c;\ p)$, одержимо:

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1 \qquad \text{або} \qquad \frac{p^2}{b^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}\ ,$$

звідки

$$p = \frac{b^2}{a}\ .$$

Аналогічно, підставляючи в рівняння гіперболи координати точки $(c;\ p)$, маємо:

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{p^2}{b^2} = 1 \qquad \text{або} \qquad \frac{p^2}{b^2} = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}\ ,$$

звідки

$$p = \frac{b^2}{a}\ .$$

Таким чином, у рівнянні ліній другого порядку в полярній системі координат фокальний параметр p для еліпса й гіперболи пов'язаний з відповідними параметрами a і b формулою

$$p = \frac{b^2}{a}. \quad (4.79)$$

Рівняння (4.78) використовується для розрахунків руху двох тіл під дією їх взаємного тяжіння. Наприклад, орбіти планет Сонячної системи або штучних супутників Землі є еліпси, в одному з фокусів яких міститься Сонце або Земля. Орбіта штучних супутників Землі при виході за межі її тяжіння є вже не еліпс, а парабола. Необхідна для виходу на цю орбіту швидкість (друга космічна швидкість) у зв'язку з цим називається параболічною швидкістю.

§ 4.7 ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЯК КОНІЧНІ ПЕРЕРІЗИ

Еліпс, гіпербола та парабола були відомі грецьким математикам більш ніж дві тисячі років тому. Перший, найбільш повний твір, в якому були розглянуті ці лінії, належить Аполлонію, котрий написав його в III столітті до нашої ери. Аполлоній дав їм назву, розв'язуючи геометричну задачу про перетворення даного прямокутника на рівновеликий прямокутник при заданій основі.

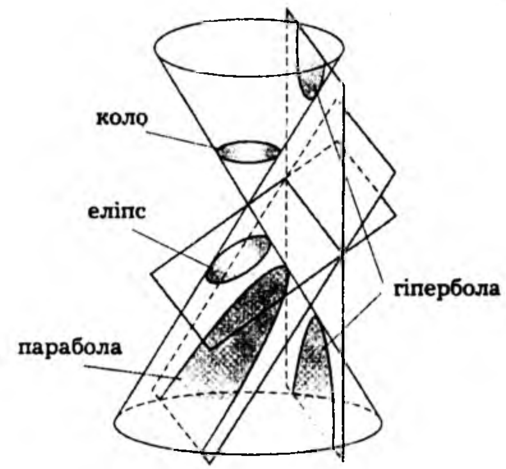


Рис. 4.19

Грецькі математики вивчали ці криві, не користуючись методами сучасної аналітичної геометрії, а методами відомої на той час геометрії, яка є основою існуючої зараз елементарної геометрії. Лінії другого порядку були отримані ними як перерізи прямого кругового конуса площинами, нахиленими під різними кутами до його осі. У зв'язку з цим ці лінії отримали назву *конічні перерізи* (рис. 4.19).

Якщо взяти в просторі кругову конічну поверхню та провести площину, паралельну двом твірним конуса, тобто так, щоб вона перетинала дві порожнини конуса, то в перерізі ми одержимо *гіперболу*. Перетинаючи конус площиною, кут нахилу якої до осі конуса дорівнює куту між твірною конуса та його віссю, одержимо *параболу*. У цьому випадку площина перетинає тільки одну порожнину конуса. Збільшуючи кут нахилу площини до осі конуса таким чином, щоб він був більшим, ніж кут між твірною та віссю, в перерізі одержимо *еліпс*, і в окремому випадку, коли кут нахилу площини до осі конуса стане прямим, у перерізі одержимо *коло*. В усіх цих випадках січна площина не повинна проходити через вершину конуса.

ВПРАВИ

1. Скласти рівняння кола, якщо відомі його центр $(-1;\ 3)$ та радіус $R = 4$.

2. Скласти рівняння дотичних до кола

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0 .$$

3. Скласти рівняння кола, діаметром якого є відрізок AB, де $A(4;\ 2)$, $B(12;\ 8)$.

4. Написати рівняння кола, що проходить через три точки: $(2;\ 1)$, $(6;\ 3)$, $(9;\ 2)$.

5. Скласти рівняння кола, центр якого знаходиться в точці $M_0(2;\ -3)$ і яке дотикається лінії $4x + 3y - 19 = 0$.

6. Знайти півосі, фокуси та ексцентриситет еліпса $4x^2 + 9y^2 = 16$.

7. Написати канонічне рівняння еліпса, якщо:

1) півосі еліпса відповідно дорівнюють 7 і 6;
2) відстань між фокусами дорівнює 24 і велика вісь 26;
3) більша піввісь дорівнює 10 і ексцентриситет дорівнює 0,8;
4) мала піввісь дорівнює 12 і ексцентриситет дорівнює 5/13;
5) ексцентриситет дорівнює 0,6 і відстань між фокусами 6;
6) сума півосей дорівнює 18 і відстань між фокусами 12.

8. Дано ексцентриситет еліпса ε. Знайти відношення його півосей.

9. Знайти точку дотику прямої $x - 3y - 12 = 0$ з еліпсом

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1 .$$

10. Скільки дотичних можна провести до еліпса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$ з точок $A(1;\ 2)$, $B(0;\ 4)$, $C(5;\ 3)$?

11. Скласти рівняння директрис еліпса $\frac{x^2}{125} + \frac{y^2}{100} = 1$.

12. Знайти рівняння еліпса, відстань між фокусами якого дорівнює 8, а відстань між директрисами 24.

13. Дано еліпс $x^2 + 2y^2 = 8$. Провести хорду, що проходить через точку $M_0(1;\ 1)$ і ділиться в ній навпіл.

14. Знайти півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння асимптот і директрис гіперболи $9x^2 - 16y^2 = 144$.

15. Знайти фокуси, вершини, ексцентриситет, рівняння асимптот еліпса $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$.

16. Написати канонічне рівняння гіперболи, якщо:

1) відстань між фокусами дорівнює 10 і ексцентриситет 5/3;
2) дійсна піввісь дорівнює $\sqrt{20}$ і гіпербола проходить через точку $(-10;\ 4)$.

17. На гіперболі $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ взята точка, абсциса якої дорівнює 3. Обчислити фокальні радіуси цієї точки.

18. Знайти рівняння гіперболи, вершини якої знаходяться у фокусах, а фокуси у вершинах еліпса $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1$.

19. Знайти залежність між ексцентриситетом гіперболи й кутом між її асимптотами.

20. Знайти ексцентриситет гіперболи, якщо відомо, що відстань між її директрисами в чотири рази менша за відстань між фокусами.

21. Скласти рівняння параболи, якщо її фокус знаходиться в точці $F(5; 0)$, директриса є віссю ординат, а вісь симетрії — вісь абсцис.

22. На параболі $y^2 = 16x$ знайти точку, фокальний радіус якої дорівнює 5.

23. Дано параболу $x^2 = 16y$. Через точку $(2; 5/2)$ провести хорду, яка ділиться в ній навпіл.

24. Знайти дотичні до параболи $x^2 = 4y$ у точці $(0; -1)$.

25. Дано параболу $x^2 = 4y$. Визначити довжину її хорди, що проходить через точку $(2; 3)$ паралельно прямій $x - 2y + 5 = 0$.

26. Знайти рівняння параболи та її директриси, якщо парабола проходить через точки перетину прямої $y - x = 0$ і кола $x^2 + y^2 + 8x = 0$ й симетрична відносно осі OX.

27. Звести до канонічного вигляду рівняння лінії $y = x^2 + 4x + 5$.

28. Яку лінію визначає рівняння $y = 2x^2 + 8x + 12$?

29. Визначити вид лінії, рівняння якої
$$9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 109 = 0 .$$

30. Визначити вид лінії, рівняння якої
$$xy - 2x - y + 6 = 0 .$$

31. Звести рівняння лінії $\rho = \dfrac{2}{1 - 3\cos\varphi}$ до канонічного вигляду в прямокутних координатах.

Глава 5
Площина в просторі

§ 5.1 НОРМАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

Розглянемо в просторі систему прямокутних декартових координат $OXYZ$ і деяку площину P (рис. 5.1). Положення площини в просторі відносно даної системи координат буде повністю визначене, якщо відома її відстань $\mathbf{p}$ від початку координат, тобто довжина перпендикуляра OD, опущеного з точки O на площину, та одиничний вектор $\mathbf{n}$, напрямлений уздовж перпендикуляра OD, тобто перпендикулярний до площини й напрямлений від точки O до площини.

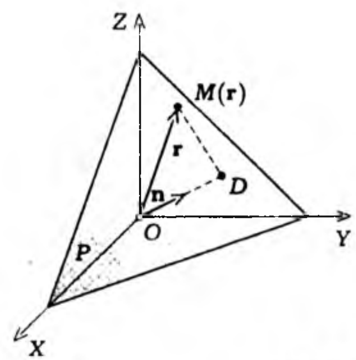


Рис. 5.1

Нехай $M(x; y; z)$ — довільна точка площини. Будемо позначати її $M(\mathbf{r})$, оскільки її положення в просторі характеризується координатами $(x; y; z)$, або, що те ж саме, радіус-вектором $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, тобто $M(x; y; z) \equiv M(\mathbf{r})$.

Очевидно, що при будь-якому положенні точки $M(\mathbf{r})$ на площині P, проекція її радіус-вектора $\mathbf{r}$ на напрям вектора $\mathbf{n}$ завжди дорівнюватиме p, тобто:
$$Пр_{\mathbf{n}}\mathbf{r} = p . \qquad (5.1)$$

Однак, оскільки вектор $\mathbf{n}$ одиничний, то (див. формулу (2.5) курсу «Векторна алгебра») $Пр_{\mathbf{n}}\mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}$. Тоді рівність (5.1) матиме вигляд:
$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = p \qquad (5.2)$$

або

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}-p = 0\ . \qquad (5.3)$$

Рівність (5.3) є умовою знаходження точки $M(\mathbf{r})$ на даній площині P. Вектор $\mathbf{n}$, що входить у рівняння (5.3), називається *нормальним вектором* площини. У зв'язку з цим рівняння (5.3) називається *нормальним рівнянням* площини *у векторній формі* або *векторним рівнянням* площини.

Рівняння (5.3) можна записати в координатній формі. Оскільки, згідно з формул (1.32) і (1.38) курсу «Векторна алгебра», вектори $\mathbf{n}$ і $\mathbf{r}$ в координатній формі мають вигляд

$$\mathbf{n} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k} \quad \text{і} \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\ ,$$

то, користуючись формулою скалярного добутку в координатній формі рівняння (5.3), можна переписати у вигляді:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0\ . \qquad (5.4)$$

Рівняння (5.4) називається *нормальним рівнянням* площини *в координатній формі* або *нормальним рівнянням площини*. Параметрами цього рівняння є p — відстань площини від початку координат, та α, β, γ — кути, що утворює нормальний вектор площини $\mathbf{n}$ з додатними напрямами координатних осей.

Для випадку проходження площини P через початок координат нормальне рівняння площини матиме вигляд:

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = 0 \qquad (5.5)$$

або

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0\ . \qquad (5.6)$$

§ 5.2 ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

Будь-яке рівняння першого степеня відносно змінних координат x, y, z вигляду

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (5.7)$$

визначає деяку площину в координатному просторі та називається *загальним рівнянням* площини. Доведемо це твердження. Уведемо допоміжний вектор

$$\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k} = (A;\ B;\ C)\ . \qquad (5.8)$$

Тоді рівняння (5.7) перепишеться у вигляді:

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{r} + D = 0\ , \qquad (5.9)$$

де $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ — радіус-вектор довільної точки $M(x;\ y;\ z)$, координати якої задовольняють рівняння (5.7).

Зведемо рівняння (5.9) до вигляду (5.3). Для цього розділимо рівнвсть (5.9) на числовий множник $\pm N = \pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. Тоді

$$\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{N}}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0\ . \qquad (5.10)$$

Позначивши $\dfrac{\mathbf{N}}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \equiv \mathbf{n}$, де $\mathbf{n}$ — одиничний вектор, і $\dfrac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = -p$, рівняння (5.10) набере вигляду векторного рівняння площини:

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} - p = 0\ ,$$

а отже, визначає деяку площину. Таким чином, твердження, що рівняння (5.7) є загальним рівнянням площини, доведене.

Оскільки величина $p \geq 0$, то знак перед радикалом $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ повинен бути протилежним знаку вільного члена D рівняння (5.7). При цьому напрям одиничного вектора $\mathbf{n} = \mathbf{N}/\pm|\mathbf{N}|$ при $D > 0$ буде збігатися з напрямом вектора $\mathbf{N}$, а при $D < 0$ буде протилежним йому. Оскільки вектор $\mathbf{N}$ колінеарний вектору $\mathbf{n}$, то вектор $\mathbf{N} = (A;\ B;\ C)$ розташований перпендикулярно до площини

$$Ax + By + Cz + D = 0\ .$$

При $D = 0$ відстань $p = 0$ і за напрям вектора $\mathbf{n}$ можна вибрати будь-який із двох можливих напрямів.

Поділивши обидві частини рівняння (5.7) на $\pm|\mathbf{N}| = \pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, де знак перед радикалом протилежний знаку D, ми зводимо рівняння (5.7) до вигляду (5.3), або, що те ж саме, до вигляду (5.4):

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y+$$

$$+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z+\frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0\,. \quad (5.11)$$

Тому множник

$$\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad (5.12)$$

називається *нормувальним множником* рівняння площини.

З рівняння (5.11) можна знайти вирази для напрямних косинусів вектора $\mathbf{N}$ і відстані p площини від початку координат:

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\qquad \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,$$

$$\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,, \quad (5.13)$$

$$p=\frac{-D}{\pm\sqrt{(A)^2+B^2+C^2}}\,. \quad (5.14)$$

За загальним рівнянням площини $Ax+By+Cz+D=0$ можна визначити особливості її розташування відносно координатних осей. Розглянемо окремі випадки цього рівняння.

1. $D=0$. Рівняння набере вигляду $Ax+By+Cz=0$. Площина проходить через початок координат, оскільки координати $x = y = z = 0$ задовольняють рівняння цієї площини.

2. Один з коефіцієнтів при змінних координатах дорівнює нулю, і

   а) $D\neq 0$, тоді площина паралельна відповідній координатній осі:

   $A=0$, $By+Cz+D=0$ — площина паралельна осі OX;

   $B=0$, $Ax+Cz+D=0$ — площина паралельна осі OY;

   $C=0$, $Ax+By+D=0$ — площина паралельна осі OZ;

   б) $D=0$, тоді площина проходить через відповідну координатну вісь:

   $A=0$, $By+Cz=0$ — площина проходить через вісь OX;

   $B=0$, $Ax+Cz=0$ — площина проходить через вісь OY;

   $C=0$, $Ax+By=0$ — площина проходить через вісь OZ.

3. Два коефіцієнти при змінних координатах дорівнюють нулю, і

   а) $D\neq 0$, тоді площина паралельна відповідній координатній площині:

   $B=0$, $C=0$, $Ax+D=0$ — площина паралельна площині OYZ;

   $A=0$, $C=0$, $By+D=0$ — площина паралельна площині OXZ;

   $A=0$, $B=0$, $Cz+D=0$ — площина паралельна площині OXY;

   б) $D=0$, тоді площина збігається з відповідною координатною площиною:

   $B=0$, $C=0$, $Ax=0$ або $x=0$ — площина OYZ;

   $A=0$, $C=0$, $By=0$ або $y=0$ — площина OXZ;

   $A=0$, $B=0$, $Cz=0$ або $z=0$ — площина OXY.

Випадок $A=B=C=0$ виключається, оскільки рівняння $D=0$ не несе ніякого геометричного змісту, через відсутність змінних координат.

Приклади.

1. Скласти рівняння площин, якщо відомо:
   1) площина перпендикулярна осі OZ і проходить через точку $M_0(1;\,-2;\,3)$;
   2) площина проходить через вісь OY і точку $M_0(4;\,2;\,-5)$;
   3) площина паралельна осі OX і проходить через дві точки $M_1(1;\,1;\,2)$ і $M_2(5;\,3;\,-2)$.

1). Площина, що перпендикулярна осі OZ, буде паралельна координатній площині OXY, і її рівняння матиме вигляд: $Cz+D=0$.

Підставляючи в це рівняння координати точки $M_0(1;\,-2;\,3)$, одержимо $C\cdot 3+D=0$, звідки $D=-3C$. Отже, $Cz-3C=0$, або $C(z-3)=0$. Утім, оскільки $C\neq 0$, то отримаємо шукане рівняння $z-3=0$, або $z=3$.

2). Оскільки площина проходить через вісь OY, то її рівняння матиме вигляд: $Ax+Cz=0$.

Підставляючи в це рівняння координати точки $M_0(4;\,2;\,-5)$, отримуємо $A\cdot 4+C\cdot(-5)=0$, звідки $A=(5/4)C$. Таким чином, площина має рівняння $(5/4)Cx+Cz=0$, або $5x+4z=0$, оскільки $C\neq 0$.

3). Оскільки площина паралельна осі OX, то її рівняння не містить у собі змінної x, тобто матиме вигляд:

$$By + Cz + D = 0 \ .$$

Оскільки площина проходить через дві точки $M_1(1;\ 1;\ 2)$ і $M_2(5;\ 3;\ -2)$, то

$$\begin{cases} B + 2C + D = 0, \\ 3B - 2C + D = 0, \end{cases}$$

звідки $B = -D/2$, $C = -D/4$. Отже, шукане рівняння матиме вигляд:

$$-(D/2)y - (D/4)z + D = 0 \quad \text{або} \quad 2y + z - 4 = 0 \ .$$

2. Знайти напрямні косинуси та довжину перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину:

$$10x - 2y - 11z + 45 = 0 \ .$$

Зводимо рівняння площини до нормального виду. Обчислимо нормувальний множник. Оскільки $D = 45 > 0$, то у формулі (5.12) беремо знак мінус:

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{10^2 + (-2)^2 + (-11)^2}} = -\frac{1}{15} \ .$$

Помноживши обидві частини даного рівняння площини на нормувальний множник, одержимо нормальне рівняння:

$$-\frac{10}{15}x + \frac{2}{15}y + \frac{11}{15}z - \frac{45}{15} = 0$$

або

$$-\frac{2}{3}x + \frac{2}{15}y + \frac{11}{15}z - 3 = 0 \ .$$

Звідки, згідно з формулами (5.13)–(5.14), знаходимо:

$$\cos\alpha = -\frac{2}{3}, \quad \cos\beta = \frac{2}{15}, \quad \cos\gamma = \frac{11}{15}, \quad p = 3 \ .$$

§ 5.3 ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПЛОЩИНИ

Визначимо відстань d від точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ до площини, заданої векторним рівнянням (5.3). Нехай точка M_1 — основа перпендикуляра, опущеного на дану площину з точки M_0 (рис. 5.2).

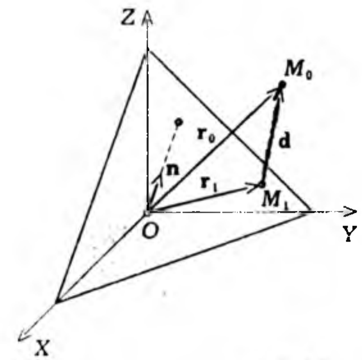


Рис. 5.2

Позначимо $\overrightarrow{OM_1} = \mathbf{r}_1$, $\overrightarrow{M_1M_0} = \mathbf{d}$. Оскільки точка M_1 знаходиться на даній площині, то, згідно з рівнянням (5.3), маємо:

$$\mathbf{r}_1\mathbf{n} = p \ . \qquad (5.15)$$

Оскільки вектори $\mathbf{d}$ і $\mathbf{n}$ колінеарні, то шукана відстань d може бути визначена за формулою:

$$d = |\mathbf{d}\cdot\mathbf{n}| \ , \qquad (5.16)$$

причому скалярний добуток $\mathbf{d}\cdot\mathbf{n}$ додатний, якщо точка M_0 і початок координат знаходяться по різні боки від заданої площини (оскільки $\mathbf{n}$ і $\mathbf{d}$ однаково напрямлені), і від'ємний, якщо вони знаходяться по один бік від неї ($\mathbf{n}$ і $\mathbf{d}$ мають протилежні напрями).

З трикутника OM_1M_0 вектор $\mathbf{d} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1$, тому:

$$d = |(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{n}| \quad \text{або} \quad d = |\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{n} - \mathbf{r}_1\cdot\mathbf{n}| \ , \qquad (5.17)$$

звідки

$$d = |\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{n} - p| \ . \qquad (5.18)$$

Формула (5.18) і визначає величину відстані від даної точки M_0 до даної площини.

Ураховуючи, що $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$, формулу (5.18) можна переписати в координатній формі:

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p| \ . \qquad (5.19)$$

Таким чином, *відстань від точки до площини дорівнює абсолютній величині результату підстановки координат даної точки в ліву частину нормального рівняння площини.* При цьому результат цієї підстановки додатний, якщо дана точка M_0 і початок координат O знаходяться по різні боки від площини, і від'ємний, якщо точки M_0 і O розташовані по один бік від площини.

Для випадку, коли площина задана своїм загальним рівнянням (5.7), то, звівши його за допомогою нормувального множника (5.12) до нормального вигляду, для визначення відстані d від даної точки M_0 до даної площини одержимо формулу:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} . \quad (5.20)$$

Числа $+d$, для випадку, коли точка та початок координат розташовані по різні боки від даної площини, і $-d$, для випадку, коли вони розташовані по один бік від даної площини, називаються *відхиленням* даної точки від площини й позначаються δ.

Очевидно, що:

$$\delta = \pm d \quad \text{або} \quad d = |\delta| . \quad (5.21)$$

Приклади.

1. Визначити відстань від точок $M_1(1;\ 2;\ 5)$ і $M_2(-9;\ -1;\ 0)$ до площини

$$x - 2y + 3z + 7 = 0 .$$

Знаходимо нормувальний множник

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = -\frac{1}{\sqrt{14}}$$

і нормальне рівняння площини:

$$\frac{x - 2y + 3z + 7}{-\sqrt{14}} = 0 .$$

Шукані відстані визначаємо за формулою (5.20):

$$d_1 = \left|\frac{1 - 2\cdot 2 + 3\cdot 5 + 7}{-\sqrt{14}}\right| = \left|-\frac{19}{\sqrt{14}}\right| = \frac{19}{\sqrt{14}} ,$$

$$d_2 = \left|\frac{-9 - 2\cdot(-1) + 3\cdot 0 + 7}{-\sqrt{14}}\right| = \left|-\frac{-9 + 2 + 7}{\sqrt{14}}\right| = 0 .$$

Точка M_1 знаходиться по один бік від заданої площини, що й початок координат, оскільки під знаком модуля в d_1 знаходиться від'ємна величина. Точка M_2 розташована на даній площині.

2. На осі OX знайти точку, рівновіддалену від точки $A(9;\ -2;\ 2)$ і від площини $3x - 6y + 2z - 3 = 0$.

Нехай $M(x;\ 0;\ 0)$ — шукана точка $(y = 0,\ z = 0)$, оскільки вона розташована на осі OX. Знайдемо відстань від цієї точки до даної площини та даної точки A:

$$d_1 = \frac{|3\cdot x - 6\cdot 0 + 2\cdot 0 - 3|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2}} = \frac{|3x - 3|}{7} = \frac{3|x - 1|}{7} ,$$

$$d_2 = MA = \sqrt{(9 - x)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{x^2 - 18x + 89} .$$

Згідно з умовою $d_1 = d_2$, тому:

$$7\sqrt{x^2 - 18x + 89} = 3|x - 1| .$$

Підносячи до квадрата обидві частини даної рівності, після спрощення одержимо:

$$5x^2 - 108x + 544 = 0 ,$$

звідки $x_1 = 8,\ x_2 = 13,6$.

Таким чином, умову задачі задовольняють дві точки: $(8;\ 0;\ 0)$ і $(13,6;\ 0;\ 0)$.

3. На осі OZ знайти точку, рівновіддалену від двох площин:

$$2x - 2y + z - 3 = 0 \quad \text{і} \quad x + 2y - 2z + 12 = 0 .$$

Нехай $M(0;\ 0;\ z)$ — шукана точка площини. Знайдемо відстані цієї точки від даних площин за формулою (5.20):

$$d_1 = \frac{|2\cdot 0 - 2\cdot 0 + z - 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|z - 3|}{3} ,$$

$$d_2 = \frac{|1\cdot 0 + 2\cdot 0 - 2z + 12|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|-2z + 12|}{3} .$$

За умовою $d_1 = d_2$, тому

$$\frac{|z - 3|}{3} = \frac{|-2z + 12|}{3} ,$$

$$z - 3 = \pm(-2z + 12) .$$

Розв'язуючи рівняння $z - 3 = -2z + 12$ і $z - 3 = -(-2z + 12)$, знаходимо $z_1 = 5,\ z_2 = 9$. Таким чином, умову задачі задовольняють дві точки: $M_1(0;\ 0;\ 5)$ і $M_2(0;\ 0;\ 9)$.

4. Визначити, чи знаходяться точки $M_1(1;\ -1;\ 2)$ і $M_2(-2;\ 1;\ 3)$ в одному, в суміжних або вертикальних кутах, утворених при перетині двох площин:

1) $3x - 2y + 4z - 10 = 0,\quad x + 3y - 5z + 6 = 0$;

2) $3x + 4y - z - 5 = 0,\quad x - y - z - 3 = 0$;

3) $5x - 6y + 2z + 7 = 0,\quad x + y - 3z + 8 = 0$.

Знайдемо відхилення даних точок відносно кожної з площин за формулою (5.20):

1). Відхилення точок M_1 і M_2 від першої площини:

$$\delta_1 = \frac{3\cdot 1 - 2\cdot(-1) + 4\cdot 2 - 10}{\sqrt{9 + 4 + 16}} > 0 ,$$

$$\delta_2 = \frac{3\cdot(-2) - 2\cdot 1 + 4\cdot(-3) - 10}{\sqrt{9 + 4 + 16}} < 0$$

і від другої площини:

$$\delta_1' = \frac{1 + 3\cdot(-1) - 5\cdot 2 + 6}{-\sqrt{1 + 9 + 25}} > 0 ,$$

$$\delta_2' = \frac{-2+3\cdot 1-5\cdot(-3)+6}{-\sqrt{1+9+25}} < 0 \ .$$

Оскільки відхилення δ_1 і δ_2 різних знаків, то точки M_1 і M_2 розташовані по різні боки від першої площини, і оскільки δ_1' і δ_2' також різних знаків, то з тієї ж причини — і від другої. Отже, точки M_1 і M_2 знаходяться у вертикальних кутах.

2). Відхилення точок M_1 і M_2 від першої площини:

$$\delta_1 = \frac{2\cdot 1+4\cdot(-1)-2-5}{\sqrt{4+16+1}} < 0 \ ,$$

$$\delta_2 = \frac{2\cdot(-2)+4\cdot 1-(-3)-5}{\sqrt{4+16+1}} < 0$$

і від другої площини

$$\delta_1' = \frac{1-(-1)-2-3}{\sqrt{1+1+1}} < 0 \ ,$$

$$\delta_2' = \frac{-2-1-(-3)-3}{\sqrt{1+1+1}} < 0 \ .$$

Точки M_1 і M_2 розташовані по один бік від кожної площини, оскільки всі відхилення одного знака. Отже, вони знаходяться в одному куті.

3). Відхилення точок M_1 і M_2 від першої площини:

$$\delta_1 = \frac{5\cdot 1-6\cdot(-1)+2\cdot 2+7}{-\sqrt{25+36+4}} < 0 \ ,$$

$$\delta_2 = \frac{5\cdot(-2)-6\cdot 1+2\cdot(-3)+7}{-\sqrt{25+36+4}} > 0$$

і від другої площини:

$$\delta_1' = \frac{1+(-1)-3\cdot 2+8}{-\sqrt{1+1+9}} < 0 \ ,$$

$$\delta_2' = \frac{1\cdot(-2)+1-3\cdot(-3)+8}{-\sqrt{1+1+9}} < 0 \ .$$

Точки M_1 і M_2 розташовані по різні боки від першої площини та по один бік від другої. Отже, вони знаходяться в суміжних кутах.

§ 5.4 КУТ МІЖ ДВОМА ПЛОЩИНАМИ. УМОВИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ТА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТІ ПЛОЩИН

Розглянемо дві площини, задані своїми рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 , \qquad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \ . \quad (5.22)$$

Їхніми нормальними векторами будуть $\mathbf{N}_1 = A_1\mathbf{i}+B_1\mathbf{j}+C_1\mathbf{k}$ та $\mathbf{N}_2 = A_2\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+C_2\mathbf{k}$, відповідно.

Кутом φ між двома площинами є будь-який із двох суміжних двогранних кутів, утворених цими площинами. Оскільки напрями перпендикулярів до площин збігаються з напрямами їхніх нормальних векторів $\mathbf{N}_1$ і $\mathbf{N}_2$, то кутом між площинами можна вважати кут між векторами $\mathbf{N}_1$ і $\mathbf{N}_2$ (рис. 5.3).

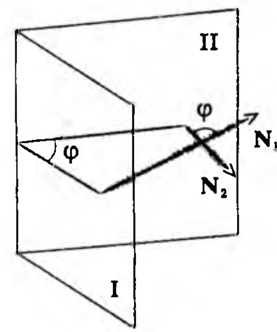


Рис. 5.3

Тоді, згідно з формулою (2.15) (курс «Векторна алгебра»), маємо:

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{N}_1\cdot\mathbf{N}_2}{|\mathbf{N}_1|\cdot|\mathbf{N}_2|} \quad (5.23)$$

або

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\ \sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \ . \quad (5.24)$$

У випадку, коли площини паралельні, їхні нормальні вектори $\mathbf{N}_1 = (A_1;\ B_1;\ C_1)$ та $\mathbf{N}_2 = (A_2;\ B_2;\ C_2)$ будуть колінеарні. Тоді, згідно з формулою (1.44) (курс «Векторна алгебра»), матимемо:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \ . \quad (5.25)$$

Ця рівність є *умовою паралельності двох площин.*

Таким чином, *необхідною й достатньою умовою паралельності двох площин є пропорційність коефіцієнтів при відповідних змінних координатах.*

Якщо в умові (5.25) припустити:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda \ ,$$

то вона може бути записана у вигляді:

$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2 \ . \quad (5.26)$$

Очевидно, що *необхідною й достатньою умовою збігу* двох площин є

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \ , \quad (5.27)$$

тобто пропорційність усіх відповідних коефіцієнтів.

У випадку, коли площини перпендикулярні, вектори $\mathbf{N}_1$ і $\mathbf{N}_2$ будуть ортогональні один до одного. Тоді:

$$\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2 = 0 \ , \quad (5.28)$$

або

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \ . \quad (5.29)$$

Ця рівність є *умовою перпендикулярності двох площин.*

Таким чином, *необхідною й достатньою умовою перпендикулярності двох площин є рівність нулю суми добутків коефіцієнтів при відповідних змінних координатах.*

Приклади.

1. Знайти кут між площинами

$$11x - 8y - 7z + 5 = 0 \quad \text{і} \quad 7x + 2y - 8z - 3 = 0 \ .$$

Скориставшись формулою (5.24), маємо:

$$\cos\varphi = \frac{11 \cdot 7 + (-8) \cdot 2 + (-7) \cdot (-8)}{\sqrt{121 + 64 + 49}\ \sqrt{49 + 4 + 64}} = \frac{117}{\sqrt{234}\ \sqrt{117}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ ;$$

$$\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ \ .$$

2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(-1;\ 2;\ 1)$ паралельно площині $3x - 2y + 5z - 1 = 0$.

Запишемо рівняння шуканої площини у вигляді:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \ .$$

Згідно з умовою паралельності площин (5.25), маємо:

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{-2} = \frac{C}{5} = \lambda \ .$$

Тоді $A = 3\lambda,\ B = -2\lambda,\ C = 5\lambda$ і

$$3\lambda x - 2\lambda y + 5\lambda z + D = 0 \ .$$

Підставляючи в це рівняння координати точки M_0, маємо:

$$-3\lambda - 4\lambda + 5\lambda + D = 0 \ .$$

Звідки знаходимо $D = 2\lambda$. Тоді рівняння шуканої площини матиме вигляд:

$$3x - 2y + 5z + 2 = 0 \ .$$

3. Скласти рівняння площини, паралельної площині $x + 2y - 2z + 7 = 0$ і віддаленої від точки $M(2;\ 3;\ -1)$ на відстань $d = 5$.

Користуючись умовою (5.25), запишемо рівняння шуканої площини у вигляді:

$$x + 2y - 2z + D = 0 \ .$$

Відстань від точки M до цієї площини, згідно з формулою (5.20), буде дорівнювати:

$$d = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) + D|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{|10 - D|}{3} \ .$$

Оскільки, згідно з умовою, $d = 5$, то:

$$\frac{|10 - D|}{3} = 5 \quad \text{або} \quad 15 = \pm(10 - D) \ ,$$

звідки $D_1 = -5,\ D_2 = 25$.

Таким чином, умову задачі задовольняють дві площини:

$$x + 2y - 2z - 5 = 0 \quad \text{і} \quad x + 2y - 2z + 25 = 0 \ .$$

4. Скласти рівняння площини, що проходить через початок координат перпендикулярно до площин

$$2x - 3y + z - 1 = 0 \quad \text{і} \quad x - 2y - z + 1 = 0 \ .$$

Оскільки шукана площина проходить через початок координат, то її рівняння матиме вигляд:

$$Ax + By + Cz = 0 \ .$$

Коефіцієнти A, B, C не можуть дорівнювати нулю одночасно. Припустимо, що $A \neq 0$, тоді рівняння перепишеться у вигляді:

$$x + by + cz = 0 \ ,$$

де $b = B/A,\ c = C/A$.

Користуючись умовою перпендикулярності площин (5.29), одержимо:

$$\begin{cases} 2 - 3b + c = 0, \\ 1 - 2b - c = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 3b - c = 2, \\ 2b + c = 1. \end{cases}$$

Звідки $b = 3/5,\ c = -1/5$.

Рівняння шуканої площини матиме вигляд:

$$5x + 3y - z = 0 \ .$$

§ 5.5 РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ У ВІДРІЗКАХ НА ОСЯХ

Розглянемо площину, що перетинає всі три координатних осі й не проходить через початок координат. Її рівняння може бути записане у вигляді:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad , \qquad (5.30)$$

де жоден з коефіцієнтів A, B, C, D не дорівнює нулю. Позначимо через a, b, c величини відрізків, що відтинає площина на осях координат (рис. 5.4).

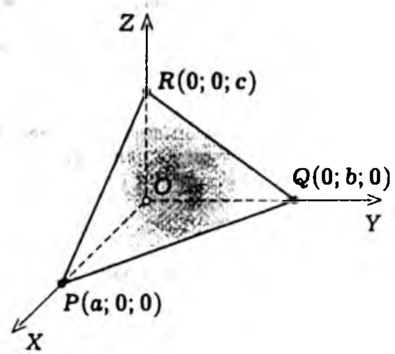


Рис. 5.4

Оскільки точка $P(a;\ 0;\ 0)$ знаходиться на осі OX, то рівняння (5.30) матиме вигляд:

$$Ax + D = 0 \ ,$$

звідки

$$A = -\frac{D}{a} \ .$$

Аналогічно з рівнянь $By + D = 0$ для точки $Q(0;\ b;\ 0)$ і $Cz + D = 0$ для точки $R(0;\ 0;\ c)$ знаходимо:

$$B = -\frac{D}{b}, \qquad C = -\frac{D}{c}$$

Підставляючи значення A, B і C в рівняння (5.30), маємо:

$$-D\frac{x}{a} - D\frac{y}{b} - D\frac{z}{c} + D = 0 \ ,$$

звідки

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \ . \qquad (5.31)$$

Дане рівняння називається *рівнянням площини у відрізках на осях*.

Приклади.

1. Визначити відрізки, що відтинає на осях координат площина

$$2x - 3y + 4z - 12 = 0 \ .$$

Перепишемо рівняння площини у вигляді:

$$2x - 3y + 4z = 12 \ .$$

Поділимо обидві частини рівності на 12:

$$\frac{x}{6} - \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1 \qquad \text{або} \qquad \frac{x}{6} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{3} = 1 \ .$$

Порівнюючи з виразом (5.31), знаходимо: $a = 6$, $b = -4$, $c = 3$.

2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $N(3;\ 8;\ -4)$ і відтинає на осі абсцис відрізок $a = -3$, а на осі ординат відрізок $b = 2$.

Скориставшись рівнянням площини у відрізках на осях (5.31), маємо:

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{c} = 1 \ .$$

Оскільки, згідно з умовою, точка N розташована на площині, то:

$$\frac{3}{-3} + \frac{8}{2} + \frac{4}{c} = 1 \ ,$$

звідки $c = -2$.

Отже, шукане рівняння площини матиме вигляд:

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-2} = 1 \qquad \text{або} \qquad 2x - 3y + 3z + 6 = 0 \ .$$

§ 5.6 РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ДАНУ ТОЧКУ. В'ЯЗКА ПЛОЩИН

Нехай на площині P є точка $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, яка задана своїм радіус-вектором $\mathbf{r}_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ (рис. 5.5).

Знайдемо рівняння цієї площини.

Виберемо довільний вектор $\mathbf{N} = (A;\ B;\ C)$, перпендикулярний даній площині, і довільну точку $M(x;\ y;\ z)$ цієї площини, яка визначається радіус-вектором $\mathbf{r} = (x;\ y;\ z)$. Тоді вектори $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ і $\mathbf{N}$ будуть взаємно перпендикулярні, що виявиться в рівності нулю їхнього скалярного добутку:

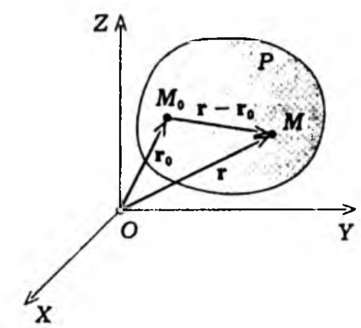


Рис. 5.5

$$\mathbf{N} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0\ . \qquad (5.32)$$

Ця рівність є умовою того, що точка M знаходиться на даній площині й виконується для будь-яких точок цієї площини.

Формула (5.32) є *векторним рівнянням площини, що проходить через дану точку.*

У той же час за умови, що точка $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ задана, а вектор $\mathbf{N}(A;\ B;\ C)$ — довільний, рівняння (5.32) можна розглядати як рівняння однієї з площин зі всієї сукупності площин, що проходять через дану точку M_0.

Сукупність площин, що проходять через одну й ту ж точку, називається в'язкою площин, а рівняння (5.32) — *рівнянням в'язки площин.*

Для випадку, коли вектор $\mathbf{N}$ перпендикулярний площині P, заданий, формула (5.32) є *векторним рівнянням площини, що проходить через дану точку, перпендикулярно даному вектору.*

Ураховуючи, що $\mathbf{N} = (A;\ B;\ C)$, а

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)\ ,$$

рівняння (5.32) може бути переписане в координатній формі:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0\ . \qquad (5.33)$$

Рівняння (5.33) при заданій точці $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ є *рівнянням площини, що проходить через дану точку*, й водночас *рівнянням в'язки площин у координатній формі.*

За умови, що, крім точки M_0, заданий також вектор $\mathbf{N}(A;\ B;\ C)$, перпендикулярний площині, рівняння (5.33) є *рівнянням площини, що проходить через дану точку, перпендикулярно даному вектору.*

Слід відзначити, що формулу (5.33) можна отримати безпосередньо, якщо рівняння шуканої площини записати в загальному вигляді:

$$Ax + By + Cz + D = 0\ . \qquad (5.34)$$

Тоді *умова проходження площини через дану точку* $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ запишеться у вигляді:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0\ . \qquad (5.35)$$

Віднімаючи вираз (5.35) від виразу (5.34), одержимо рівняння (5.33).

Приклади.

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(5;\ 2;\ -3)$, перпендикулярної вектору $\mathbf{N} = (2;\ -1;\ 4)$. З'ясувати, чи розташовані на ній точки $M_1(1;\ 2;\ -1)$, $M_2(4;\ 5;\ 1)$ і $M_3(-6;\ 2;\ -3)$.

Підставляючи в рівняння (5.33) координати точки M_0 і вектора $\mathbf{N}$, одержимо:

$$2(x - 5) - (y - 2) + 4(x + 3) = 0$$

або

$$2x - y + 4z + 4 = 0\ .$$

Підставляючи послідовно в це рівняння координати точок M_1, M_2, M_3, маємо:

$$2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 4 = 0\ ;$$

$$2 \cdot 4 - 1 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 4 > 0\ ;$$

$$2 \cdot (-6) - 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 4 < 0\ .$$

Отже, точка M_1 лежить на даній площині. Точки M_2 і M_3 їй не належать, але слід зазначити, що оскільки результати підстановки їх координат у рівняння площини мають різні знаки, то вони розташовані по різні боки від неї.

2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(-1;\ 2;\ 1)$, паралельно площині $3x - 2y + 5z - 1 = 0$ (див. приклад 2 § 5.4).

Оскільки шукана й дана площини паралельні, то нормальний вектор $\mathbf{N}(3;\ -2;\ 5)$ даної площини буде нормальним вектором і шуканої площини. Тоді за формулою (5.33) маємо:

$$3(x + 1) - 2(y - 2) + 5(z - 1) = 0$$

або

$$3x - 2y + 5z + 2 = 0\ .$$

3. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2;\ 4;\ -3)$ паралельно векторам $\mathbf{a} = (2;\ 3;\ 1)$ і $\mathbf{b} = (5;\ 3;\ -2)$.

Оскільки шукана площина паралельна векторам $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, то векторний добуток $\mathbf{N} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ буде її нормальним вектором. Знайдемо:

$$\mathbf{N} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -9\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 9\mathbf{k} = (-9;\ 9;\ -9)\ .$$

Тоді за формулою (5.33) маємо:

$$-9(x-2) + 9(y-4) - 9(z+3) = 0\ ,$$

або

$$x - y + z + 5 = 0\ .$$

4. Знайти площину, що проходить через точки $M_1(0;\ -1;\ 1)$ і $M_2(4;\ 0;\ 2)$ паралельно вектору $\mathbf{a} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Шукана площина за умовою паралельна вектору $\mathbf{a}$, а вектор $\overline{M_1M_2} = (4;\ 1;\ 1)$ лежить на ній, тому вектор

$$\mathbf{N} = \overline{M_1M_2} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 20\mathbf{k} = (-6;\ 4;\ 20)$$

буде її нормальним вектором.

Тоді, користуючись формулою (5.33), маємо:

$$-6(x+0) + 4(y+1) + 20(z-1) = 0$$

або

$$3x - 2y - 10z + 8 = 0\ .$$

5. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2;\ -3;\ 5)$ перпендикулярно площинам

$$2x + y - 2z + 1 = 0 \quad \text{і} \quad x + y + z - 5 = 0\ .$$

Нормальні вектори $\mathbf{N}_1(2;\ 1;\ -2)$ і $\mathbf{N}_2(1;\ 1;\ 1)$ паралельні шуканій площині. Таким чином, задача зводиться до знаходження рівняння площини, що проходить через дану точку M_0, паралельно двом відомим векторам $\mathbf{N}_1$ і $\mathbf{N}_2$ (див. приклад 3).

Відповідь: $3x - 4y + z - 23 = 0$.

6. Скласти рівняння площини, що проходить через дві точки $M_1(4;\ 5;\ 2)$ і $M_2(6;\ 2;\ 4)$, перпендикулярно площині $x + 2y + z - 4 = 0$.

Нормальний вектор даної площини $\mathbf{N} = (1;\ 2;\ 1)$ паралельний шуканій площині, і задача зводиться до знаходження рівняння площини, що проходить через дві точки M_1 і M_2 паралельно відомому вектору $\mathbf{N}$ (див. приклад 4).

Відповідь: $x - z - 2 = 0$.

7. Скласти рівняння площини, що проходить через три точки

$$M_1(2;\ 3;\ 1),\quad M_2(3;\ 1;\ 4) \quad \text{і} \quad M_3(2;\ 1;\ 5)\ .$$

Утворимо вектори $\overrightarrow{M_1M_2} = (1;\ -2;\ 3)$ і $\overrightarrow{M_1M_3} = (0;\ -2;\ 4)$. Вони знаходяться на шуканій площині, отже, вектор:

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k} = (-2;\ -4;\ -2)$$

буде її нормальним вектором.

Тоді, знаючи вектор $\mathbf{N}$ і взявши будь-яку з трьох даних точок, наприклад M_1, за формулою (5.33) знаходимо рівняння шуканої площини:

$$-2(x-2) - 4(y-3) - 2(z-1) = 0$$

або

$$x + 2y + z - 9 = 0\ .$$

§ 5.7 РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ТРИ ЗАДАНІ ТОЧКИ

Нехай є три задані точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ і $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$, через які проходить площина. Позначимо їх радіус-вектори відповідно через $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$.

Розглянемо довільну точку $M(x;\ y;\ z)$ цієї площини з радіус-вектором $\mathbf{r}$. Вектори $\overrightarrow{M_1M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\overrightarrow{M_1M_3} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$ знаходяться в цій площині, а отже, компланарні. Тоді, згідно з умовою компланарності трьох векторів (2.52) курсу «Векторна алгебра», їх мішаний добуток буде дорівнювати нулю:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 0 \ . \quad (5.36)$$

Рівняння (5.36) є *векторним рівнянням площини, що проходить через три задані точки.* Оскільки вектори

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = (x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1) \ ,$$

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1) \ ,$$

$$\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = (x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1) \ ,$$

то рівність (5.36) можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \ . \quad (5.37)$$

Формула (5.37) є *рівняння площини, що проходить через три задані точки в координатній формі.*

Рівняння (5.37) можна одержати також, користуючись формулою (5.33). Дійсно, рівняння площини, що проходить через точку M_1, буде:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \ . \quad (5.38)$$

Знайдемо коефіцієнти A, B, C з умови проходження даної площини через точки M_2 і M_3:

$$\begin{cases} A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0, \\ A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) + C(z_3 - z_1) = 0. \end{cases} \quad (5.39)$$

Вважаючи, що $C \neq 0$, матимемо:

$$\begin{cases} \dfrac{A}{C}(x_2 - x_1) + \dfrac{B}{C}(y_2 - y_1) + (z_2 - z_1) = 0, \\ \dfrac{A}{C}(x_3 - x_1) + \dfrac{B}{C}(y_3 - y_1) + (z_3 - z_1) = 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \dfrac{A}{C}(x_2 - x_1) + \dfrac{B}{C}(y_2 - y_1) = -(z_2 - z_1), \\ \dfrac{A}{C}(x_3 - x_1) + \dfrac{B}{C}(y_3 - y_1) = -(z_3 - z_1). \end{cases} \quad (5.40)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (5.40) за методом Крамера, знаходимо:

$$\frac{A}{C} = \frac{\begin{vmatrix} -(z_2 - z_1) & y_2 - y_1 \\ -(z_3 - z_1) & y_3 - y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}} \ , \quad (5.41)$$

$$\frac{B}{C} = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & -(z_2 - z_1) \\ x_3 - x_1 & -(z_3 - z_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}} \ . \quad (5.42)$$

Підставляючи відношення (5.41) і (5.42) у систему (5.40), одержимо:

$$(x - x_1)\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} - (y - y_1)\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (z - z_1)\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \ . \quad (5.43)$$

Вираз (5.43) є не що інше, як визначник лівої частини рівняння (5.37), розкритий за елементами першого рядка.

Слід відзначити, що для випадку, коли всі три дані точки розташовані на одній прямій, рівняння (5.37) утрачає зміст. Це пов'язано з тим, що вектори $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ і $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$ будуть колінеарні, тому відповідні елементи двох останніх рядків визначника лівої частини рівняння будуть пропорційні, а, отже, сам визначник тотожньо перетворюється на нуль при будь-яких значеннях x, y, z. Геометрично це означає, що через кожну точку простору проходить площина, в якій розташовані три дані точки, тобто кількість таких площин нескінченна.

Приклади.

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точки: $M_1(1;\ 3;\ 2)$, $M_2(4;\ -5;\ 6)$, $M_3(-3;\ 1;\ 2)$.

Згідно з рівнянням (5.37), маємо:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+2 \\ 4-1 & -5-3 & 6+2 \\ -3-1 & 1-3 & 2+2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+2 \\ 3 & -8 & 8 \\ -4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 .$$

Розкриваючи визначник за елементами першого рядка, одержимо:

$$(x-1)\begin{vmatrix} -8 & 8 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} + (z+2)\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

або

$$8x + 22y + 19z - 36 = 0 .$$

2. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(0;\ -1;\ 1)$ і $M_2(4;\ 0;\ 2)$ паралельно вектору $\mathbf{a} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$ (див. приклад 4 § 5.6).

Нехай $M(x;\ y;\ z)$ — довільна точка шуканої площини. Тоді вектори $\overrightarrow{M_1M} = (x;\ y+1;\ z-1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (4;\ 1;\ 1)$ і $\mathbf{a} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$ — компланарні. Отже, рівняння площини, згідно з формулою (5.36), матиме вигляд:

$$\overrightarrow{M_1M}\ \overrightarrow{M_1M_2}\ \mathbf{a} = 0$$

або в координатній формі:

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Розкриваючи визначник за елементами першого рядка, маємо:

$$x\cdot(-6) - (y+1)\cdot(-4) + (z-1)\cdot 20 = 0$$

або

$$3x - 2y - 10z + 8 = 0 .$$

3. Знайти площину, що проходить через точку $M_0(2;\ 4;\ -3)$, паралельно векторам $\mathbf{a} = (2;\ 3;\ 1)$ і $\mathbf{b} = (5;\ 3;\ -2)$ (див. приклад 3 § 5.6).

Нехай $M(x;\ y;\ z)$ — довільна точка площини. Тоді вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\overrightarrow{M_0M} = (x-2;\ y-4;\ z+3)$ — компланарні вектори й рівняння шуканої площини, згідно з (5.36), формулою матиме вигляд:

$$\overrightarrow{M_0M}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b} = 0$$

або в координатній формі:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Розкриваючи визначник за елементами першого рядка, матимемо:

$$(x-2)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - (y-4)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + (z+3)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

або

$$x - y + z + 5 = 0 .$$

4. Дано тетраедр із вершинами $A(2;\ -1;\ 3)$, $B(1;\ -1;\ 5)$, $C(6;\ 2;\ 5)$, $D(3;\ -2;\ -5)$. Знайти довжину висоти, опущеної з вершини D на грань ABC.

Складемо рівняння площини ABC, як площини, що проходить через відомі три точки. За формулою (5.37), маємо:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1-2 & -3+1 & 5-3 \\ 6-2 & 2+1 & 5-3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Звідки

$$2x - 2y - z - 3 = 0 .$$

Довжину шуканої висоти знайдемо за формулою (5.20) як відстань від точки D до площини ABC.

$$d = \frac{|2\cdot 3 - 2\cdot(-3) - (-5) - 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|12|}{3} = 4 \ \text{(од. довжини)} .$$

§ 5.8 ПЕРЕТИН ТРЬОХ ПЛОЩИН

Три площини, у випадку довільного їх розташування в просторі, визначають точку. Щоб знайти координати цієї точки, необхідно розв'язати систему рівнянь, кожне з яких визначає одну з площин:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \end{cases} \tag{5.44}$$

оскільки координати точки перетину одночасно належать усім трьом площинам.

1. Якщо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \tag{5.45}$$

цієї системи відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок, який виражається формулами Крамера (див. (2.10) курсу «Вища алгебра»):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\Delta},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}}{\Delta}. \tag{5.46}$$

2. Якщо визначник Δ дорівнює нулю, і принаймні один з його мінорів відмінний від нуля й відмінний від нуля принаймні один із двох відповідних мінорів третього порядку таблиці

$$\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{matrix}, \tag{5.47}$$

то система (5.44) несумісна. Це означає, що одна з площин паралельна лінії перетину двох інших.

3. Якщо визначник Δ дорівнює нулю, і принаймні один з його мінорів, наприклад,

$$\delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

але відповідно:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix} = 0,$$

то система (5.44) зводиться до двох рівнянь. У цьому випадку всі три площини проходять через одну пряму лінію.

4. Якщо разом із визначником Δ і всі його мінори дорівнюють нулю, але принаймні один з мінорів другого порядку з таблиці (5.47) не дорівнює нулю, то три площини не мають спільної точки, тобто паралельні між собою.

5. Якщо ж разом із визначником Δ всі його мінори й усі мінори другого порядку таблиці (5.47) дорівнюють нулю, то система рівнянь зводиться до одного рівняння. Це означає, що площини перетинаються в нескінченній множині точок, тобто збігаються в одну.

Приклади.

1. Знайти точку перетину трьох площин:

$$x - y + z = 0, \quad x - y + 1 = 0, \quad x + 2y - z + 2 = 0.$$

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ x - y + 1 = 0, \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x - y + z = 0, \\ x - y = -1, \\ x + 2y - z = -2, \end{cases}$$

знаходимо координати шуканої точки: $(-1;\ 0;\ 1)$.

2. Довести, що площини $5x - 3y - 26z - 3 = 0$, $10x + 3y + 11z - 42 = 0$, $20x - 39y - 23z + 96 = 0$, $10x + 21y + 2z + 21 = 0$ утворюють тетраедр. Виявити розташування точки $M_0(1;\ 1;\ 2)$.

Чотири площини утворюють тетраедр, якщо будь-які три з них перетинаються в одній точці й жодна з них не збігається з іншою.

Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x - 3y - 26z - 3 = 0, \\ 10x + 3y + 11z - 42 = 0, \\ 20x - 39y - 23z + 96 = 0, \end{cases}$$

одержимо точку $M_1(3;\ 4;\ 0)$.

Аналогічно із системи рівнянь

$$\begin{cases} 5x - 3y - 26z - 3 = 0, \\ 10x + 3y + 11z - 42 = 0, \\ 10x + 21y + 2z + 21 = 0 \end{cases}$$

одержимо другу точку $M_2(4;\ -3;\ 1)$.

Із системи рівнянь

$$\begin{cases} 5x - 3y - 26z - 3 = 0, \\ 20x - 39y - 23z + 96 = 0, \\ 10x + 21y + 2z + 21 = 0 \end{cases}$$

одержимо третю точку $M_3(-4;\ 1;\ -1)$.

Із системи рівнянь

$$\begin{cases} 10x + 3y + 11z - 42 = 0, \\ 20x - 39y - 23z + 96 = 0, \\ 10x + 21y + 2z + 21 = 0 \end{cases}$$

знаходимо четверту точку $M_4(-1;\ -1;\ 5)$.

Оскільки отримані точки M_1, M_2, M_3, M_4 різні, то дані площини утворюють тетраедр $M_1M_2M_3M_4$.

Виявимо розташування точки M_0 відносно тетраедра $M_1M_2M_3M_4$. Якщо M_0 розташована всередині тетраедра, то вона й кожна його вершина розташовані по один бік від протилежної грані.

Розглянемо точки M_0 і M_1. Для точки M_1 протилежною є грань, що утворює площина $10x + 21y + 2z + 21 = 0$. Підставляючи координати точок M_0 і M_1 у ліву частину рівняння цієї площини, одержимо:

$$10 \cdot 3 + 21 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 21 > 0\,, \qquad 10 \cdot 1 + 24 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 21 > 0\ .$$

Отже, точки M_0 і M_1 знаходяться по один бік від грані $M_2M_3M_4$.

Для точки M_2 протилежною буде грань, що розташована в площині $20x - 39y - 23z + 96 = 0$. Підставляючи координати точок M_0 і M_2 в ліву частину цього рівняння, одержимо:

$$20 \cdot 4 - 39 \cdot (-3) - 23 \cdot 1 + 96 > 0\,, \qquad 20 \cdot 1 - 39 \cdot 1 - 23 \cdot 2 + 96 > 0\ .$$

Таким чином, точки M_0 і M_2 розташовані по один бік від грані $M_1M_3M_4$.

Оскільки

$$10 \cdot (-4) + 3 \cdot 1 + 11 \cdot (-1) - 42 < 0\,, \qquad 10 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 11 \cdot 2 - 42 < 0\ ,$$

то точки M_0 і M_3 розташовані по один бік від грані $M_1M_2M_4$.

Аналогічно переконуємося, що точки M_0 і M_4 розташовані по один бік від грані $M_1M_2M_3$.

Отже, точка M_0 розташована всередині тетраедра $M_1M_2M_3M_4$.

ВПРАВИ

1. Визначити, яке з рівнянь є нормальним:

1) $3x - 6y + 2z + 21 = 0$;

2) $2x - y + z - 6 = 0$;

3) $x - 2y + 2z - 6 = 0$.

2. Знайти напрямні косинуси й довжину перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину

$$10x - 2y - 11z + 45 = 0\ .$$

3. Визначити відстань точки $M_0(0;\ 6;\ 0)$ до площини

$$2x + 10y - 11z - 15 = 0\ .$$

4. Дано тетраедр із вершинами $A(3;\ 4;\ 0)$, $B(4;\ -3;\ 1)$, $C(-4;\ 1;\ -1)$, $D(-1;\ -1;\ 5)$. Знайти довжину висоти, опущеної з вершини D.

5. На осі OY знайти точку, рівновіддалену від площин

$$x + y - z + 1 = 0 \quad \text{і} \quad x - y + z - 5 = 0\ .$$

6. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(5;\ 2;\ 0)$ і віддалена від точки $A(6;\ -1;\ 1)$ на відстань 1 і від точки $B(0;\ 5;\ 4)$ на відстань 3.

7. Довести, що площина $5x - 3y + 4z - 2 = 0$ перетинає відрізок, що сполучає початок координат з точкою $M(1;\ 2;\ 3)$.

8. Скласти рівняння площини в кожному з таких випадків:

1) площина перпендикулярна осі OZ і проходить через точку $M_0(4;\ -6;\ 6)$;

2) площина паралельна осі OY і проходить через точки $M_1(1;\ 2;\ -1)$ і $M_2(2;\ -3;\ -4)$;

3) площина проходить через точку $M_0(6;\ -5;\ 5)$ і вісь OZ.

9. Знайти кут між площинами

$$x - y + z = 0 \quad \text{і} \quad 2x - 2y + 3 = 0\ .$$

10. Знайти відстань від точки $M_0(-4;\ 0;\ 1)$ до площини
$$x - 2y + 2z - 5 = 0 \ .$$

11. Знайти відстань між паралельними площинами
$$2x + 4y - 6z + 1 = 0 \quad \text{і} \quad x + 2y - 3z = 0 \ .$$

12. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2;\ -1;\ -3)$, паралельно площині
$$5x - 4y + 6z - 3 = 0 \ .$$

13. Скласти рівняння площини, паралельної площині $x + 2y - 2z + 7 = 0$ і віддаленої від точки $A(4;\ 3;\ -2)$ на відстань $d = 7$.

14. Через початок координат провести площину, перпендикулярну площині $5x - 2y + 5z - 10 = 0$, якщо відомо, що вона утворює з площиною $x - 4y - 8z + 12 = 0$ кут $\alpha = 45°$.

15. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2;\ -3;\ 1)$ перпендикулярно до площин
$$3x - y + 2z - 1 = 0 \quad \text{і} \quad 4x + 5y - 3z + 2 = 0 \ .$$

16. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $A(1;\ -1;\ 2)$ і $B(3;\ 1;\ 2)$, перпендикулярно до площини
$$4x - 5y + 3z - 2 = 0 \ .$$

17. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(4;\ -3;\ 5)$ і відтинає на осях координат рівні відрізки.

18. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1;\ 0;\ 1)$, $M_2(2;\ 3;\ 0)$ і $M_3(-1;\ 7;\ -2)$.

19. Грані тетраедра розташовані в площинах
$$x + y + z - 1 = 0\,, \qquad x - y - 1 = 0\ ,$$
$$x - z - 1 = 0\,, \qquad z - 1 = 0\ .$$
Чи знаходиться початок координат усередині цього тетраедра?

Глава 6

Пряма лінія в просторі

§ 6.1 ПАРАМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ

Положення прямої лінії в просторі вважається цілком визначеним, якщо відома будь-яка точка, розташована на ній і вектор $\mathbf{s}$, паралельний цій прямій. Виберемо на даній прямій довільну точку M (рис. 6.1).

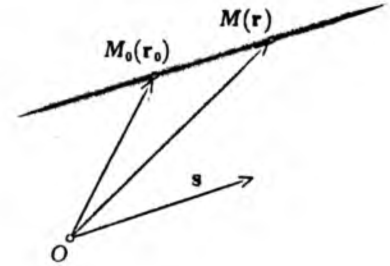


Рис. 6.1

Позначимо радіус-вектори точок M_0 і M через $\mathbf{r}_0$ і $\mathbf{r}$ відповідно.

Тоді вектори $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ і $\mathbf{s}$ будуть колінеарні. Згідно з умовою колінеарності двох векторів (див. формулу (1.15) курс «Векторна алгебра»), матимемо:
$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{s}\ , \qquad (6.1)$$
де t — деякий числовий параметр, котрий набуває різних значень залежно від положення довільної точки M на даній прямій лінії.

Рівняння (6.1) називається *параметричним рівнянням* прямої лінії *у векторній формі* або *векторним рівнянням* прямої лінії.

Рівняння (6.1) можна переписати також у вигляді:
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{s}t\ . \qquad (6.2)$$

Вектор $\mathbf{s}$ називається *напрямним* вектором прямої лінії.

У випадку, коли вектор $\mathbf{s}$ буде одиничним, матимемо $t = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ або $t = |\overrightarrow{M_0M}|$. Тобто параметр t буде модулем вектора $\overrightarrow{M_0M}$, якщо вважати, що його напрям збігається з напрямом вектора $\mathbf{s}$. Таким чином, геометричним змістом параметра t у випадку, коли напрямний вектор $\mathbf{s}$ одиничний, є відстань від змінної точки $M(x;\ y;\ z)$ до фіксованої точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, взята зі знаком "+" або "–" залежно від того, будуть вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і s однаково чи протилежно напрямлені.

Запишемо рівняння (6.2) в координатній формі. Позначимо координати точки M через $(x;\ y;\ z)$, точки M_0 через $(x_0;\ y_0;\ z_0)$, а напрямного вектора s через $(m;\ n;\ p)$. Тоді $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$, $\mathbf{s} = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k}$ і рівняння (6.2) набере вигляду системи рівнянь:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \tag{6.3}$$

Рівняння (6.3) називаються *параметричними рівняннями* прямої лінії *в координатній формі* або *параметричними рівняннями* прямої лінії.

Оскільки координати вектора є його проекції на координатні осі, а вектор s паралельний даній прямій, то його координати характеризують напрям цієї прямої в просторі, тому числа m, n, p називаються *напрямними коефіцієнтами* прямої лінії.

У випадку, коли s є одиничним вектором, коефіцієнти m, n, p будуть косинусами кутів α, β, γ, утворених напрямним вектором з відповідними координатними осями OX, OY, OZ. У цьому випадку рівняння (6.3) матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\cos\beta, \\ z = z_0 + t\cos\gamma. \end{cases} \tag{6.4}$$

З рівнянь (6.4) знаходимо:

$$\cos\alpha = \frac{x - x_0}{t} = \frac{x - x_0}{\left|\overrightarrow{M_0M}\right|},$$

$$\cos\beta = \frac{y - y_0}{t} = \frac{y - y_0}{\left|\overrightarrow{M_0M}\right|},$$

$$\cos\gamma = \frac{z - z_0}{t} = \frac{z - z_0}{\left|\overrightarrow{M_0M}\right|}, \tag{6.5}$$

тобто напрямні косинуси $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ вектора s є також напрямними косинусами прямої лінії. Утім, оскільки з іншого боку

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \tag{6.6}$$

то координати напрямного вектора m, n, p називають також *кутовими коефіцієнтами* прямої лінії.

Повернемося до рівнянь (6.3). Їм можна надати фізичного змісту. Якщо в них розглядати параметр t як час, то ці рівняння визначатимуть прямолінійний і рівномірний рух деякої матеріальної точки $M(x;\ y;\ z)$. Координати напрямного вектора $(m,\ n,\ p)$ в цьому разі становлять координати вектора лінійної швидкості $\mathbf{v}$ матеріальної точки M. Величина швидкості буде постійною й визначатиметься формулою

$$v = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}. \tag{6.7}$$

На початку руху при $t = 0$ координати точок M і M_0 збігатимуться.

Приклади.

1. Скласти параметричні рівняння прямих ліній, що проходять через точку $M(5;\ -1;\ -4)$ в кожному з таких випадків:
   1) паралельно вектору $\mathbf{a} = (1;\ 2;\ -5)$;
   2) паралельно прямій $x = 3 + 6t$, $y = 2 - 4t$, $z = 7 - t$;
   3) паралельно осі OX;
   4) перпендикулярно площині $x + 2y + 3z - 5 = 0$.

1). Скористаємося формулами (6.3). Тоді рівняння шуканої прямої матиме вигляд:

$$x = 5 + t; \quad y = -1 + 2t; \quad z = -4 - 5t.$$

2). Оскільки шукана пряма паралельна даній прямій лінії $x = 3 + 6t$, $y = 2 - 4t$, $z = 7 - t$, то вони мають спільний напрямний вектор $\mathbf{s} = (6;\ -4;\ -1)$. Підставляючи значення $x_0 = 5$, $y_0 = -1$, $z_0 = -4$ і координати вектора $\mathbf{s}$ у рівняння (6.3), одержимо рівняння шуканої прямої:

$$x = 5 + 6t, \quad y = -1 - 4t, \quad z = -4 - t.$$

3). За напрямний вектор шуканої прямої лінії можна взяти орт $\mathbf{i} = (1;\ 0;\ 0)$, тоді її рівняння матимуть вигляд:

$$x = 5 + t, \quad y = -1, \quad z = -4.$$

4). Згідно з умовою нормальний вектор $\mathbf{N} = (1;\ 2;\ 3)$ площини $x + 2y + 3z - 5 = 0$ паралельний шуканій прямій, тому її рівняння матимуть вигляд:

$$x = 5 + t, \quad y = -1 + 2t, \quad z = -4 + 3t.$$

2. Відомо параметричні рівняння руху матеріальної точки $M(x;\ y;\ z)$

$$x = 1 + 4t, \quad y = 5 - 2t, \quad z = -3 + 4t\ .$$

Визначити її швидкість.

Згідно з формулою (6.7) маємо:

$$v = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} \ \text{(од. швидкості)}\ .$$

3. Відомо рівняння руху матеріальної точки $M(x;\ y;\ z)$:

$$x = 2 + 2t, \quad y = -2 - 2t, \quad z = 1 + t\ .$$

Обчислити відстань, пройдену точкою M за проміжок часу від $t_1 = 1$ до $t_2 = 6$.

Визначимо початок і кінець прямолінійного шляху точки M. При $t = 1$ знаходимо:

$$x = 2 + 2 \cdot 1 = 4, \quad y = -2 - 2 \cdot 1 = -4, \quad z = 1 + 1 = 2\ ,$$

тобто $M_1(4;\ -4;\ 2)$. Аналогічно при $t = 6$ одержимо другу точку $M_2(14;\ -14;\ 7)$.

Пройдена відстань дорівнює довжині відрізка M_1M_2:

$$d = M_1M_2 = \sqrt{(14-4)^2 + (-14+4)^2 + (7-2)^2} =$$

$$= \sqrt{225} = 15 \ \text{(од. шляху)}\ .$$

§ 6.2 КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ

Рівняння прямої лінії можна записати за допомогою системи двох рівнянь першого степеня між змінними координатами. Якщо в рівняннях (6.3) вилучити параметр t, то ми одержимо:

$$\frac{x - x_0}{m} = t, \quad \frac{y - y_0}{n} = t, \quad \frac{z - z_0}{p} = t\ . \qquad (6.8)$$

Звідки

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}\ . \qquad (6.9)$$

Рівняння (6.9) називаються *канонічними* рівняннями прямої лінії. При цьому $x_0,\ y_0,\ z_0$ — координати деякої точки M_0, розташованої на даній прямій, а $m,\ n,\ p$ — координати деякого вектора $\mathbf{s}$, паралельного їй.

Система з будь-яких двох рівнянь (6.9) зображує пряму лінію, як перетин двох площин. Наприклад:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \quad \frac{x - x_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}\ . \qquad (6.10)$$

Рівняннями (6.9) користуються й у тому випадку, коли одна або дві координати напрямного вектора $\mathbf{s}$ дорівнюють нулю. Усі три координати $m,\ n,\ p$ одночасно дорівнювати нулю не можуть, оскільки $\mathbf{s} \neq 0$. У цьому випадку форму запису рівнянь (6.9) треба розуміти умовно, як це було відзначено в § 3.10.

Нехай, наприклад, $m = 0$, а $n \neq 0$. Тоді згідно зі сказаним у § 3.10 з формули (6.10) одержимо:

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} \quad \text{або} \quad n(x - x_0) = 0(y - y_0)\ ,$$

тобто

$$x - x_0 = 0\ . \qquad (6.11)$$

Той самий результат можна отримати також із рівнянь (6.3) безпосередньо, припустивши $m = 0$.

Відзначимо, що рівності $m = 0$ і (6.11) мають один і той самий геометричний зміст: перша з них показує, що пряма перпендикулярна до осі OX, а друга, що пряма знаходиться в площині, перпендикулярній до осі OX.

Рівняння (6.9) у випадку, коли напрямний вектор $\mathbf{s}$ одиничний, матимуть вигляд:

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\nu}\ . \qquad (6.12)$$

Приклади.

1. Скласти канонічні рівняння прямої лінії, якщо відомо її напрямний вектор $\mathbf{s} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ та одну з її точок $M_0(1;\ 4;\ -2)$.

Користуючись формулою (6.9), маємо:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z+2}{6}\ .$$

2. Скласти рівняння прямої лінії, паралельної осі OZ, якщо відомо, що вона проходить через точку $M_0(2;\ 1;\ -3)$.

У даному випадку за напрямний вектор прямої лінії можна взяти орт $\mathbf{k} = (0;\ 0;\ 1)$. Тоді, згідно з формулою (6.9), рівняння шуканої лінії матимуть вигляд:

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+3}{1}\ .$$

3. Як розташована в просторі пряма лінія, рівняння якої

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}\ ?$$

Ця пряма проходить через початок координат, оскільки $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, перпендикулярно осі OZ, оскільки $p = 0$ та утворює з осями координат OX і OY рівні кути, оскільки $m = n = 1$. Отже, дана пряма є бісектриса кута, утвореного осями OX і OY, що проходить у I і III чвертях площини XOY.

4. Скласти параметричні рівняння прямої лінії, що проходить через точку $M_0(1;\ 3;\ 1)$ паралельно прямій

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{1}\ .$$

Напрямний вектор даної прямої $\mathbf{s} = (0;\ 3;\ 1)$ за умовою паралельний шуканій прямій, а отже, буде і її напрямним вектором. Тоді згідно з (6.9) її канонічне рівняння матиме вигляд:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{1}\ .$$

Прирівнюючи кожне зі співвідношень до деякого параметра t:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{1} = t\ ,$$

знаходимо параметричні рівняння шуканої прямої

$$x = 1\ , \quad y = 3(1+t)\ , \quad z = 1+t\ .$$

5. Скласти канонічні рівняння прямої лінії, що проходить через точку $M_0(-1;\ 0;\ 2)$ паралельно прямій

$$x = 2t-3\ , \quad y = -2t+1\ , \quad z = 5t\ .$$

Напрямний вектор даної прямої $\mathbf{s} = (2;\ -2;\ 5)$. Тоді за формулою (6.9) канонічні рівняння шуканої прямої матимуть вигляд:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{5}\ .$$

6. Відомі вершини трикутника $A(1;\ -1;\ 3)$, $B(3;\ -4;\ 9)$ і $C(-5;\ 11;\ 7)$. Знайти канонічні рівняння бісектриси AK внутрішнього кута при вершині A (рис. 6.2).

Напрямним вектором бісектриси AK може бути вектор $\mathbf{s} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$, де $\mathbf{l}_1$ і $\mathbf{l}_2$ орти векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ відповідно.

Оскільки

$$\overrightarrow{AB} = (2;\ -3;\ 6)\ ,$$

$$|\overrightarrow{AB}| = 7$$

і

$$\overrightarrow{AC} = (-6;\ 12;\ 4)\ ,$$

$$|\overrightarrow{AC}| = 14\ ,$$

то

$$\mathbf{l}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \left(\frac{2}{7};\ -\frac{3}{7};\ \frac{6}{7}\right)\ ,$$

$$\mathbf{l}_2 = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \left(-\frac{3}{7};\ \frac{6}{7};\ \frac{2}{7}\right)\ .$$

Звідки

$$\mathbf{s} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 = \left(-\frac{1}{7};\ \frac{3}{7};\ \frac{8}{7}\right)\ .$$

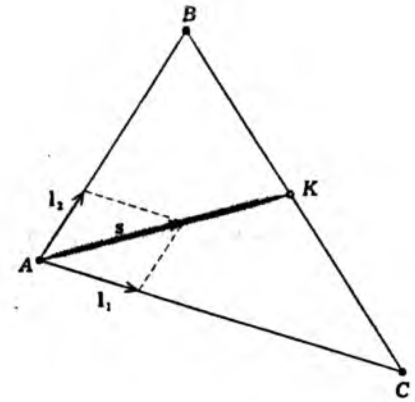


Рис. 6.2

Тоді, згідно з формулою (6.9), канонічні рівняння шуканої прямої матимуть вигляд:

$$\frac{x-1}{-\frac{1}{7}} = \frac{y+1}{\frac{3}{7}} = \frac{z-3}{\frac{8}{7}} \quad \text{або} \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{8}\ .$$

§ 6.3 РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ДВІ ЗАДАНІ ТОЧКИ

Нехай є пряма лінія, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ та $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ (рис. 6.3).

Вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

можна розглядати як напрямний вектор даної прямої, що проходить через точки M_1 і M_2. Тоді канонічні рівняння цієї прямої згідно з (6.9) можуть бути записані, як рівняння прямої, що проходить через точку M_1 (або M_2) паралельно вектору $\mathbf{s}$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\ . \qquad (6.13)$$

Рівняння (6.13) і є *рівняннями прямої лінії, що проходить через дві задані точки.*

Їх можна отримати й безпосередньо, користуючись формулою (6.9) для прямої лінії, що проходить через задану точку M_1 паралельно будь-якому вектору $\mathbf{s}$ з умови проходження її через точку M_2:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}\ . \qquad (6.14)$$

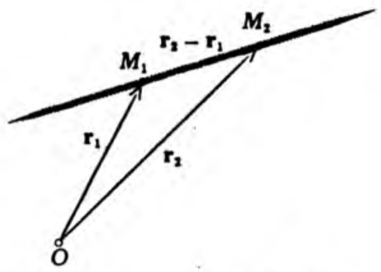


Рис. 6.3

Підставляючи тепер у (6.9) замість величин m, n, p величини $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ як їм пропорційні, одержимо рівняння (6.13).

Приклади.

1. Скласти рівняння прямої лінії, що проходить через початок координат і точку $M_0(1;\ 1;\ 1)$.

Користуючись формулою (6.13), одержимо:

$$\frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{y - 0}{1 - 0} = \frac{z - 0}{1 - 0} \quad \text{або} \quad x = y = z\ .$$

2. Скласти канонічні рівняння діагоналей паралелограма, вершини якого знаходяться в точках $A(2;\ 4;\ 6)$, $B(-3;\ 5;\ 4)$ і $C(8;\ -6;\ 2)$.

Запишемо рівняння діагоналі AC, як рівняння прямої лінії, що проходить через точки A і C. Користуючись формулою (6.13), маємо:

$$\frac{x - 2}{8 - 2} = \frac{y - 4}{-6 - 4} = \frac{z - 6}{2 - 6} \quad \text{або} \quad \frac{x - 2}{3} = \frac{y - 4}{-5} = \frac{z - 6}{-2}\ .$$

Оскільки точка D невідома, то рівняння діагоналі BD запишемо як рівняння прямої лінії, що проходить через точки B і O, де O — точка перетину діагоналей. Точка O є серединою відрізка AC, тому її координати дорівнюють півсумі відповідних координат його кінців, тобто $(5;\ -1;\ 4)$. Тоді рівняння діагоналі AD матимуть вигляд:

$$\frac{x + 3}{5 + 3} = \frac{y - 5}{-1 - 5} = \frac{z - 4}{4 - 4} \quad \text{або} \quad \frac{x + 3}{4} = \frac{y - 5}{-3} = \frac{z - 4}{0}\ .$$

Отримані рівняння можна записати також у вигляді:

$$\frac{x + 3}{4} = \frac{y - 5}{-3}\,, \qquad z - 4 = 0\ .$$

3. Розв'яжемо задачу 6 з попереднього параграфа, користуючись формулою (6.13).

Знайдемо спочатку точку K перетину бісектриси зі стороною BC. З елементарної геометрії відомо, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на частини, пропорційні прилеглим сторонам. Оскільки

$$AB = \sqrt{(3 - 1)^2 + (-4 + 1)^2 + (9 - 3)^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7\ ,$$

$$AC = \sqrt{(-5 - 1)^2 + (11 + 1)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{36 + 144 + 16} = 14\ ,$$

то

$$\lambda = \frac{AC}{AB} = \frac{CK}{BK} = \frac{14}{7} = 2\ .$$

Згідно з формулами (1.23) знаходимо координати точки K:

$$x_K = \frac{x_C + \lambda x_B}{1 + \lambda} = \frac{-5 + 2 \cdot 3}{1 + 2} = \frac{1}{3}\ ,$$

$$y_K = \frac{y_C + \lambda y_B}{1 + \lambda} = \frac{11 + 2 \cdot (-4)}{1 + 2} = 1\ ,$$

$$z_K = \frac{z_C + \lambda z_B}{1 + \lambda} = \frac{7 + 2 \cdot 9}{1 + 2} = \frac{25}{3}\ .$$

Запишемо тепер канонічні рівняння прямої AK, як прямої лінії, що проходить через точки A і K:

$$\frac{x - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{y + 1}{1 + 1} = \frac{z - 3}{\frac{25}{3} - 3} \quad \text{або} \quad \frac{x - 1}{-\frac{2}{3}} = \frac{y + 1}{\frac{6}{3}} = \frac{z - 3}{\frac{16}{3}}\ .$$

Остаточно маємо:

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y + 1}{3} = \frac{z + 3}{8}\ .$$

§ 6.4 ПРЯМА ЛІНІЯ, ЯК ПЕРЕТИН ДВОХ ПЛОЩИН. ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ

Геометричне місце спільних точок двох непаралельних площин, що перетинаються в просторі, визначає пряму лінію. Тому пряму лінію можна задати за допомогою системи рівнянь двох площин, для яких ця пряма є їх лінією перетину:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (6.15)$$

Рівняння (6.15) називаються *загальними рівняннями прямої лінії в координатній формі.*

Рівняння двох даних площин, як відомо, можна записати у векторній формі: $\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{r} + D_1 = 0$ і $\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{r} + D_2 = 0$,

де $\mathbf{N} = (A_1;\ B_1;\ C_1)$, $\mathbf{N}_2 = (A_2;\ B_2;\ C_2)$ — їхні нормальні вектори, а $\mathbf{r} = (x;\ y;\ z)$ — радіус-вектор довільної точки площин.

Тоді сукупність цих рівнянь:

$$\begin{cases} \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{r} + D_1 = 0, \\ \mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{r} + D_2 = 0, \end{cases} \qquad (6.16)$$

можна розглядати як рівняння прямої лінії, що є лінією перетину даних площин.

Рівняння (6.16) називаються *загальними рівняннями прямої лінії у векторній формі.*

Оскільки задання прямої лінії канонічними рівняннями (6.9) має ряд переваг через наочність змісту їхніх параметрів x_0, y_0, z_0 та m, n, p, то в аналітичній геометрії часто виникає питання про перехід від рівнянь прямої лінії, записаних у вигляді (6.15) або (6.16), до їх запису в канонічній формі. За напрямний вектор даної лінії можна взяти векторний добуток нормальних векторів даних площин $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$, оскільки будь-який вектор, перпендикулярний до векторів $\mathbf{N}_1$ та $\mathbf{N}_2$, буде паралельним до обох площин, а отже, і до даної лінії. Тоді

$$\mathbf{s} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \qquad (6.17)$$

і канонічні рівняння прямої лінії матимуть вигляд:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \qquad (6.18)$$

де x_0, y_0, z_0 — координати однієї з точок, розташованих на даній прямій лінії.

При виборі будь-якої точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, розташованої на даній прямій, одну з координат можна задати цілком довільно. Як правило за точку M_0 вважають точку перетину прямої (6.15) з будь-якою з координатних площин, наприклад, із площиною XOY. Припустивши в системі рівнянь (6.15) $z_0 = 0$, останні дві координати x_0 та y_0 точки $M(x_0;\ y_0;\ 0)$ знаходять із системи рівнянь

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + D_1 = 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (6.19)$$

Якщо система рівнянь (6.19) виявиться несумісною, то замість $z = 0$ беруть $x = 0$ або $y = 0$ і знаходять одну з точок $M_0(0;\ y_0;\ z_0)$ або $M_0(x_0;\ 0;\ z_0)$ відповідно.

Приклади.

1. Скласти рівняння прямої лінії, утвореної перетином площини $3x - 7y + 4z - 3 = 0$ з координатною площиною XOZ.

   Рівняння площини XOZ є $y = 0$. Тоді рівняння шуканої прямої має вигляд:

$$\begin{cases} 3x - 7y + 4z - 3 = 0, \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 3x + 4z - 3 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

2. Знайти точку перетину прямої лінії $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0, \\ 2x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$ з координатною площиною XOY.

   Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0, \\ 2x + y - z - 3 = 0, \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ 2x + y - 3 = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

   знаходимо точку перетину даної прямої з площиною XOY:

$$M_0(2;\ -1;\ 0).$$

3. Скласти рівняння осі OX.

Вісь OX можна розглядати як лінію перетину двох площин XOZ і XOY. Рівняння площини XOZ є $y = 0$, а рівняння площини XOY є $z = 0$. Тому вісь OX має рівняння

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

4. Скласти канонічні рівняння прямої лінії

$$\begin{cases} 3x - 4y + 5z - 10 = 0, \\ 6x - 5y + z - 17 = 0. \end{cases}$$

Нормальними векторами кожної з даних площин, що при перетині утворюють дану пряму лінію, є $\mathbf{N}_1 = (3; -4; 5)$ і $\mathbf{N}_2 = (6; -5; 1)$. Тоді напрямним вектором даної прямої лінії буде

$$\mathbf{s} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -4 & 5 \\ 6 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 21\mathbf{i} - 27\mathbf{j} + 9\mathbf{k} .$$

Візьмемо будь-яку точку даної прямої. Припустимо, наприклад, $z_0 = 0$. Тоді дані рівняння матимуть вигляд:

$$\begin{cases} 3x - 4y - 10 = 0, \\ 6x - 5y - 17 = 0, \end{cases}$$

звідки знаходимо дві інші координати фіксованої точки M_0: $x_0 = 2$, $y_0 = -1$. Отже, $M_0(2; -1; 0)$.

Таким чином, канонічні рівняння даної прямої лінії матимуть вигляд:

$$\frac{x-2}{21} = \frac{y+1}{-27} = \frac{z}{9} \quad \text{або} \quad \frac{x-2}{7} = \frac{y+1}{-9} = \frac{z}{3} .$$

5. Довести паралельність прямих ліній

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0. \end{cases}$$

Прямі лінії паралельні тоді, коли колінеарні їхні напрямні вектори.

Напрямний вектор першої прямої $\mathbf{s}_1 = (3; -2; 1)$. За напрямний вектор другої прямої можна взяти $\mathbf{s}_2 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$, де $\mathbf{N}_1 = (1; 1; -1)$ і $\mathbf{N}_2 = (1; -1; -5)$ — нормальні вектори площин, що визначають другу пряму лінію. Отже,

$$\mathbf{s}_2 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k} = (-6; 4; -2) .$$

Оскільки координати векторів $\mathbf{s}_1$ і $\mathbf{s}_2$ пропорційні

$$\frac{3}{-6} = \frac{-2}{4} = \frac{1}{-2} ,$$

то вектори $\mathbf{s}_1$ і $\mathbf{s}_2$ колінеарні, а отже, дані прямі паралельні.

6. Довести, що прямі

$$\begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + 3t, \\ z = 1 - 6t \end{cases}$$

взаємно перпендикулярні.

Дві прямі лінії перпендикулярні, якщо перпендикулярні їх напрямні вектори $\mathbf{s}_1$ і $\mathbf{s}_2$, тобто $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = 0$.

За напрямний вектор першої прямої будемо вважати $\mathbf{s}_1 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$, де $\mathbf{N}_1 = (2; 1; -4)$ і $\mathbf{N}_2 = (4; -1; -5)$ — нормальні вектори площин, що утворюють першу пряму.

Знаходимо:

$$\mathbf{s} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 6\mathbf{k} = (-9; -6; -6) .$$

Напрямний вектор другої прямої $\mathbf{s}_2 = (2; 3; -6)$. Оскільки

$$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = (-9) \cdot 2 + (-6) \cdot 3 + (-6) \cdot (-6) = 0 ,$$

то вектори $\mathbf{s}_1$ і $\mathbf{s}_2$, а отже, і дані прямі перпендикулярні.

§ 6.5 ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ДВОХ ПРЯМИХ ЛІНІЙ У ПРОСТОРІ

Розглянемо дві прямі, задані своїми рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\quad \text{і}\quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}\;. \qquad (6.20)$$

Напрямні вектори даних прямих є $\mathbf{s}_1=(m_1;\ n_1;\ p_1)$ і $\mathbf{s}_2=(m_2;\ n_2;\ p_2)$ відповідно. Перша пряма проходить через точку з координатами $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, позначимо її через M_1, а її радіус-вектор через $\mathbf{r}_1$. Друга пряма проходить через точку з координатами $(x_2;\ y_2;\ z_2)$, позначимо її через M_2, а її радіус-вектор через $\mathbf{r}_2$. Сполучивши точки M_1 і M_2, одержимо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$. Очевидно, що у випадку, коли дані прямі лінії розташовані в одній площині, три вектори $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$, $\mathbf{s}_1$ і $\mathbf{s}_2$ будуть компланарні, а це означає, що їх мішаний добуток дорівнюватиме нулю:

$$(\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_2)\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)=0\;, \qquad (6.21)$$

або в координатній формі:

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\end{vmatrix}=0\;. \qquad (6.22)$$

Рівність (6.22) є *необхідною й достатньою умовою належності двох прямих ліній одній площині.*

Відзначимо окремі випадки взаємного розташування двох прямих ліній в одній площині.

1. Якщо у визначнику (6.22) всі рядки пропорційні між собою, тобто

$$m_2=\lambda m_1\,,\qquad n_2=\lambda n_1\,,\qquad p_2=\lambda p_1\;,$$

$$x_2-x_1=\mu m_1\,,\qquad y_2-y_1=\mu n_1\,,\qquad z_2-z_1=\mu p_1\;, \qquad (6.23)$$

то прямі лінії (6.20) *збігаються.*

2. Якщо у визначнику (6.22) тільки перші два рядки пропорційні між собою, тобто

$$m_2=\lambda m_1\,,\qquad n_2=\lambda n_1\,,\qquad p_2=\lambda p_1\;, \qquad (6.24)$$

то прямі лінії (6.20) *паралельні.*

3. Якщо у визначнику (6.22) жодна з умов (6.23) — (6.24) не виконується, то прямі лінії (6.20) *перетинаються.*

У загальному випадку, коли мішаний добуток трьох векторів $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ і $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ (6.22) не дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\end{vmatrix}\neq 0\;, \qquad (6.25)$$

прямі лінії (6.20) *мимобіжні.*

Приклади.

1. **Дослідити взаємне розташування двох прямих ліній у кожному з таких випадків:**

1) $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z+3}{4}$ і $\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-5}{-2}$;

2) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-4}{-2}$ і $\dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y-8}{-10}=\dfrac{z-9}{-10}$;

3) $x=6+2t,\ y=5-t,\ z=3+2t$ і $x=10+4t,\ y=3-2t,\ x=7+4t$;

4) $x=1+2t,\ y=7+t,\ z=3+4t$ і $x=6+3t,\ y=-1-2t,\ z=-2+t$.

Якщо прямі перетинаються, знайти точку їх перетину.

1). Визначник (6.22) в даному випадку набирає вигляду

$$\Delta=\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4\\ 3 & -1 & -2\\ -4-1 & 2-2 & 5-(-3)\end{vmatrix}.$$

Обчисливши його, знаходимо $\Delta=-74\neq 0$. Отже, дані прямі лінії мимобіжні.

2). Визначник (6.22) має вигляд:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2\\ 5 & -10 & -10\\ 7-2 & 8+3 & 9-4\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2\\ 1 & -2 & -2\\ 5 & 11 & 5\end{vmatrix}=0\;.$$

Оскільки $\Delta=0$ і перші два рядки пропорційні, то дані прямі паралельні.

3). Оскільки у визначнику (6.22)

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2\\ 4 & -2 & 4\\ 10-6 & 3-5 & 7-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2\\ 4 & -2 & 4\\ 4 & -2 & 4\end{vmatrix}$$

всі рядки пропорційні між собою, то дані прямі лінії збігаються.

4). Оскільки визначник (6.22) дорівнює нулю, тобто

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 6-1 & -1-7 & -2-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 9 \\ 21 & -8 & 27 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 21 & 27 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

і жоден з рядків не пропорційний іншому, то прямі перетинаються.

Знайдемо спільну точку даних прямих ліній. Рівняння другої прямої перепишемо у вигляді:

$$x = 6 + 3s\,, \qquad y = -1 - 2s\,, \qquad z = -2 + s \ ,$$

де s — деякий параметр. Прирівнюючи відповідні координати, одержимо систему рівнянь:

$$1 + 2t = 6 + 3s\,, \qquad 7 + t = -1 - 2s\,, \qquad 3 + 4t = -2 + s \ .$$

Розв'язуючи спільно, наприклад, перші два рівняння, знаходимо: $t = -2$, $s = -3$. Третє рівняння системи при знайдених t і s природньо перетворюється на тотожність. Підставляючи значення t в рівняння першої прямої або значення s у рівняння другої прямої, одержимо точку їх перетину $O(-3;\ 5;\ -5)$.

2. Знайти рівняння проекції прямої лінії $\dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y+1}{-5} = \dfrac{z-5}{4}$ на площину $x - 3y + 2z - 7 = 0$.

Проекція прямої на площину є лінія перетину цієї площини й площини, що проходить через дану пряму, перпендикулярно даній площині.

Запишемо рівняння площини, що проходить через пряму

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-5}{4} \ ,$$

перпендикулярно площині $x - 3y + 2z - 7 = 0$. Нехай $M(x;\ y;\ z)$ — довільна точка шуканої площини, $M_0(2;\ -1;\ 5)$ — точка прямої, що належить цій площині. Тоді вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x-2,\ y+1,\ z-5)$, напрямний вектор даної прямої $\mathbf{s} = (6;\ -5;\ 4)$ і нормальний вектор даної площини $\mathbf{N} = (1;\ -3;\ 2)$ знаходяться в одній площині, тобто їх мішаний добуток $\overrightarrow{M_0M}\,\mathbf{s}\,\mathbf{N} = 0$, або

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-5 \\ 6 & -5 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Розкривши визначник, знаходимо $2x - 8y - 13z + 53 = 0$.

Таким чином, шукана проекція визначається своїм загальним рівнянням:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z - 7 = 0, \\ 2x - 8y - 13z + 53 = 0. \end{cases}$$

§ 6.6 КУТ МІЖ ДВОМА ПРЯМИМИ ЛІНІЯМИ. УМОВИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ТА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТІ ДВОХ ПРЯМИХ ЛІНІЙ

Розглянемо дві прямі лінії:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{і} \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} \ . \qquad (6.26)$$

Очевидно, що кутом між двома прямими лініями буде кут між їх напрямними векторами $\mathbf{s}_1 = (m_1;\ n_1;\ p_1)$ і $\mathbf{s}_2 = (m_2;\ n_2;\ p_2)$. Позначимо його φ. Тоді

$$\cos\varphi = \pm\frac{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1| \cdot |\mathbf{s}_2|} \qquad (6.27)$$

або

$$\cos\varphi = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\,\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \ . \qquad (6.28)$$

Знак "+" чи "−" у формулі (6.28) вибирається залежно від того, який із двох кутів між прямими лініями розглядається: гострий чи тупий відповідно.

Якщо прямі (6.26) перпендикулярні, то їх напрямні вектори також перпендикулярні, тому з формул (6.27) і (6.28) маємо:

$$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = 0 \ , \qquad (6.29)$$

або в координатній формі

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0 \ . \qquad (6.30)$$

Співвідношення (6.29) і (6.30) є *умовами перпендикулярності двох прямих ліній у векторній та координатній формах* відповідно.

У випадку, коли лінії (6.26) паралельні між собою, їх напрямні вектори $\mathbf{s}_1$ і $\mathbf{s}_2$ будуть колінеарні. Тоді, згідно з формулою (1.15) курсу «Векторна алгебра» одержимо:

$$\mathbf{s}_1 = \lambda\mathbf{s}_2 \ , \qquad (6.31)$$

або в координатній формі

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \ . \qquad (6.32)$$

Співвідношення (6.31) і (6.32) є *умовами паралельності двох прямих ліній у векторній та координатній формах* відповідно.

Приклади.

1. Знайти кут між прямими лініями:

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{-8} \quad \text{і} \quad \frac{x+11}{11} = \frac{y-3}{-8} = \frac{z+5}{-7}.$$

Перша пряма лінія має напрямний вектор $\mathbf{s}_1 = (7;\ 2;\ -8)$, друга — $\mathbf{s}_2 = (11;\ -8;\ -7)$. Згідно з формулою (6.28) маємо:

$$\cos\varphi = \frac{7\cdot 11 + 2\cdot(-8)\cdot(-7)}{\sqrt{7^2+2^2+(-8)^2}\cdot\sqrt{11^2+(-8)^2+(-7)^2}} =$$

$$= \frac{117}{\sqrt{117}\sqrt{234}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, $\varphi = 45°$.

2. Скласти рівняння прямої лінії, що проходить через точку $M_0(2;\ -3;\ 5)$ перпендикулярно до ліній

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+5}{2} \quad \text{і} \quad \frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{3} = \frac{x+7}{-2}.$$

Рівняння будь-якої прямої, що проходить через точку M_0, матиме вигляд:

$$\frac{x-2}{m} = \frac{y+3}{n} = \frac{z-5}{p}.$$

Шукана пряма за умовою перпендикулярна двом даним, тому коефіцієнти $m,\ n,\ p$ згідно з (6.30) задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} (-1)m + 2n + 2p = 0, \\ 6m + 3n - 2p = 0. \end{cases}$$

Оскільки коефіцієнти $m,\ n,\ p$ пропорційні між собою, то їх достатньо визначити з точністю до постійного множника. Припустимо, $m = 1$. Одержимо:

$$\begin{cases} 2n + 2p = 1, \\ 3n - 2p = -6. \end{cases}$$

Звідки знаходимо $n = -1$, $p = 3/2$. Таким чином, один із напрямних векторів шуканої прямої матиме координати $(1;\ -1;\ 3/2)$, а її рівняння матимуть вигляд:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-5}{\frac{3}{2}}$$

або

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-5}{3}.$$

3. Скласти рівняння прямої лінії, що проходить через точку $M_0(1;\ -3;\ 0)$ паралельно прямій:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 17 = 0, \\ x + 4y - 2z + 8 = 0. \end{cases}$$

Рівняння шуканої прямої, що проходить через дану точку M_0, можна записати у вигляді:

$$\frac{x-1}{m} = \frac{y+3}{n} = \frac{z}{p}.$$

Оскільки шукана пряма й дана пряма за умовою паралельні, то коефіцієнти $m,\ n,\ p$ і координати напрямного вектора даної лінії, які згідно з формулою (6.17) дорівнюють

$$\mathbf{s} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -14\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 11\mathbf{k} = (-14;\ 9;\ 11),$$

задовольняють умову паралельності двох прямих (6.32):

$$\frac{m}{-14} = \frac{n}{9} = \frac{p}{11}.$$

Тоді рівняння шуканої прямої лінії буде

$$\frac{x-1}{-14} = \frac{y+3}{9} = \frac{z}{11}.$$

§ 6.7 ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ ЛІНІЇ

Розглянемо пряму лінію, задану своїм рівнянням:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} . \quad (6.33)$$

Позначивши радіус-вектор точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, що належить даній лінії, через $\mathbf{r}_1$, а радіус-вектор довільної точки M_0 через $\mathbf{r}_0$, знайдемо відстань від точки M_0 до даної прямої лінії.

Напрямний вектор $\mathbf{s} = (m,\ n,\ p)$ і вектор $\overrightarrow{M_1M_0} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1$ утворюють паралелограм M_1M_0BA, площа якого дорівнює модулю векторного добутку $\mathbf{s} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)$ (рис. 6.4). З іншого боку, площа цього паралелограма дорівнює $|M_0K| \cdot |M_1A| = d \cdot |\mathbf{s}|$, де d — шукана відстань від даної точки M_0 до даної лінії (6.33). Тоді з рівності

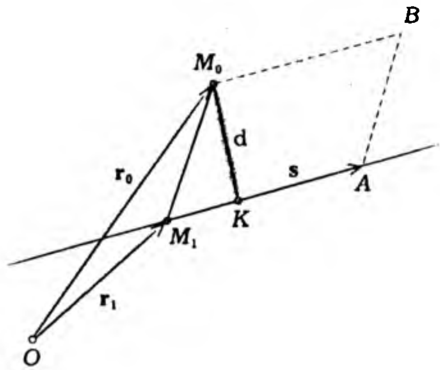


Рис. 6.4

$$d \cdot |\mathbf{s}| = |\mathbf{s} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)|$$

знаходимо формулу для визначення відстані від точки до прямої лінії:

$$d = \frac{|\mathbf{s} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)|}{|\mathbf{s}|} , \quad (6.34)$$

або в координатній формі:

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} n & p \\ y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m & p \\ x_0 - x_1 & z_0 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m & n \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} . \quad (6.35)$$

Формула (6.35) визначає відстань від точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до прямої лінії, заданої координатами будь-якої точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, розташованої на ній, та її напрямного вектора $\mathbf{s} = (m,\ n,\ p)$.

Приклад.

Знайти відстань від точки $M(1;\ -2;\ 3)$ до прямої лінії

$$x = 9 - 2t , \quad y = 4 - 4t , \quad z = 7 + 4t .$$

Оскільки координати точки, розташованої на даній лінії, $x_1 = 9$, $y_1 = 4$, $z_1 = 7$ і напрямний вектор $\mathbf{s} = (-2;\ -4;\ 4)$, то згідно з формулою (6.35) маємо

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -2-4 & 3-7 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1-9 & 3-7 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 1-9 & -2-4 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{40^2 + 40^2 + (-20)^2}}{\sqrt{4 + 16 + 16}} = \frac{\sqrt{3600}}{\sqrt{36}} = 10 .$$

Таким чином шукана відстань дорівнює 10 (од. довжини).

Розглянемо дві мимобіжні прямі лінії

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{і} \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}\,, \qquad (6.36)$$

напрямні вектори яких $\mathbf{s}_1=(m_1;\ n_1;\ p_1)$ і $\mathbf{s}_2=(m_2;\ n_2;\ p_2)$ відповідно. Позначимо радіус-вектор точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, розташованої на першій лінії, через $\mathbf{r}_1$, а радіус-вектор точки $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, розташованої на другій лінії, через $\mathbf{r}_2$ (рис. 6.5).

Побудуємо на векторах $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ — після паралельного переносу його початку в точку M_1 і $\overrightarrow{M_1M_2}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ — паралелепіпед. Найкоротша відстань між даними прямими лініями (6.36) буде висотою цього паралелепіпеда.

Об'єм даного паралелепіпеда дорівнює модулю мішаного добутку векторів $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ і $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$:

$$V=\left|\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\right|\,. \qquad (6.37)$$

З іншого боку,

$$V=d\cdot\left|\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_2\right|\,, \qquad (6.39)$$

де d — висота паралелепіпеда, що є в той же час і найкоротшою відстанню між даними прямими лініями, а модуль векторного добутку $|\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_2|$ після суміщення початків векторів $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ — площа основи паралелепіпеда.

Прирівнявши між собою рівності (6.37) і (6.38), знаходимо:

$$d=\frac{\left|\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\right|}{\left|\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_2\right|}\,, \qquad (6.39)$$

або в координатній формі

$$d=\pm\frac{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}}\,. \qquad (6.40)$$

Формула (6.40) визначає найкоротшу відстань між двома прямими лініями, заданими координатами точок $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, розташованими на них, та напрямними векторами

$$\mathbf{s}_1=(m_1;\ n_1;\ p_1)$$

і

$$\mathbf{s}_2=(m_2;\ n_2;\ p_2)\,.$$

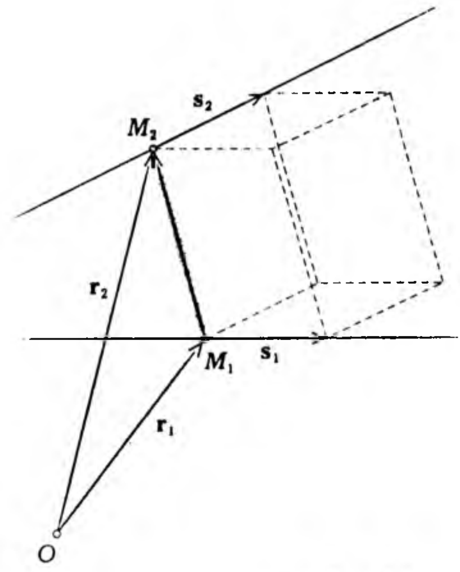


Рис. 6.5

Знак плюс у виразі (6.40) береться, коли визначник, розташований у чисельнику, додатний, а знак мінус — у протилежному випадку.

Слід відзначити, що для знаходження відстані між паралельними прямими лініями зовсім не обов'язково користуватися фомулами (6.39) або (6.40). У цьому випадку достатньо взяти будь-яку точку однієї з прямих ліній і за допомогою формул (6.34) або (6.35) обчислити відстань від неї до іншої прямої лінії.

Приклад.

Обчислити відстань між мимобіжними прямими

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z-1}{3} \quad \text{і} \quad \frac{x-5}{2}=\frac{y-8}{0}=\frac{z-2}{-3}\,.$$

По-перше, потрібно переконатися, що дані прямі мимобіжні. Дійсно, визначник (6.25) відмінний від нуля, тобто:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 5-3 & 8-7 & 2-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=28\,.$$

Підставляючи відповідні значення координат векторів $\mathbf{s}_1=(2;\ -2;\ 3)$ і $\mathbf{s}_2=(2;\ 0;\ -3)$ та точок $M_1(3;\ 7;\ 1)$ і $M_2(5;\ 8;\ 2)$ у формулу (6.40) і враховуючи, що обчислений вище визначник Δ додатний, маємо:

$$d = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 5-3 & 8-7 & 2-1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}^2}} =$$

$$= \frac{28}{\sqrt{12^2 + (-24)^2 + 8^2}} = \frac{28}{28} = 1 .$$

Отже, шукана відстань між даними прямими лініями дорівнює 1 (од. довжини).

ВПРАВИ

1. Скласти параметричні рівняння прямої лінії, що проходить через точку $M_0(1; -2; 3)$ паралельно вектору $\mathbf{s} = (2; 3; 4)$.

2. Скласти параметричні рівняння прямої лінії, якщо відомо, що вона проходить через початок координат, перпендикулярно площині $4x - 3y + 5z - 7 = 0$.

3. Матеріальна точка $M(x; y; z)$ рухається рівномірно й прямолінійно в напрямку, протилежному вектору $\mathbf{a} = (-1; 2; -2)$ зі швидкістю $V = 12$ од. швидкості. Скласти рівняння руху точки M, якщо відомо, що до початку руху її координати дорівнювали $(3; -2; 7)$.

4. Написати канонічні рівняння прямої лінії, яка проходить через точку $A(2; -1; 3)$ паралельно осі OX.

5. Скласти канонічні рівняння прямої лінії, що проходить через точку $M_0(6; 2; -3)$ паралельно вектору $\mathbf{s} = (1; -2; -3)$.

6. Знайти напрямні косинуси прямої лінії

$$\frac{x-5}{6} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{3} .$$

7. Скласти канонічні рівняння сторін трикутника з вершинами $A(2; -4; 3)$, $B(4; 6; 7)$, $C(5; 2; -8)$.

8. Дано трикутник з вершинами $A(4; -1; 1)$, $B(7; 4; -5)$, $C(-5; 13; 8)$. Скласти канонічні рівняння бісектриси внутрішнього кута при вершині A.

9. Скласти канонічні рівняння прямої лінії, що проходить через точки $M_1(1; 2; 3)$ і $M_2(-1; 3; 1)$.

10. Звести до канонічного вигляду загальне рівняння прямої лінії:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0 . \end{cases}$$

11. Знайти кут між прямими лініями

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-10} = \frac{z-7}{1} \quad \text{і} \quad \frac{x-4}{-11} = \frac{y+5}{8} = \frac{z-6}{7} .$$

12. Знайти кут між прямими лініями

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{1} \quad \text{і} \quad x = t-7, \ y = -2t+5, \ z = 3t-4 .$$

13. Знайти кут між прямими лініями

$$\begin{cases} x+y-4=0, \\ \sqrt{2y}-z-1=0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x-y=0, \\ \sqrt{2y}-z-\sqrt{2}=0 . \end{cases}$$

14. Скласти рівняння прямої лінії, якщо відомо, що вона проходить через точку $M_0(4;\ 7;\ -5)$ перпендикулярно до ліній

$$x = 3+2t, \quad y = 8-t, \quad z = -1+4t$$

і

$$x = 1+3t, \quad y = -5+t, \quad z = 6+t .$$

15. Знайти відстань від точки $M_0(7;\ -2;\ 3)$ до прямої

$$x = 3-t, \quad y = -5-2t, \quad z = 1+2t .$$

16. Знайти відстань між прямими лініями

$$\frac{x-3}{-6} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{1} \quad \text{і} \quad \frac{x+2}{3} = \frac{z-3}{-1}, \quad y-4=0 .$$

17. Знайти відстань між паралельними прямими

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{2} \quad \text{і} \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2} .$$

Глава 7

Пряма лінія та площина в просторі

§ 7.1 КУТ МІЖ ПРЯМОЮ ЛІНІЄЮ ТА ПЛОЩИНОЮ

Кутом між прямою лінією та площиною вважається будь-який із двох суміжних кутів, утворених прямою та її проекцією на площину.

Розглянемо пряму лінію l, задану своїми канонічними рівнянням

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} , \tag{7.1}$$

і площину P, задану загальним рівнянням

$$Ax + By + Cz + D = 0 . \tag{7.2}$$

Позначимо кут між прямою лінією та площиною через φ, а кут, що утворюється напрямним вектором прямої лінії $\mathbf{s} = (m;\ n;\ p)$ і нормальним вектором площини $\mathbf{N} = (A;\ B;\ C)$, через ϑ (рис. 7.1). Очевидно, що $\vartheta = (\pi/2) - \varphi$.

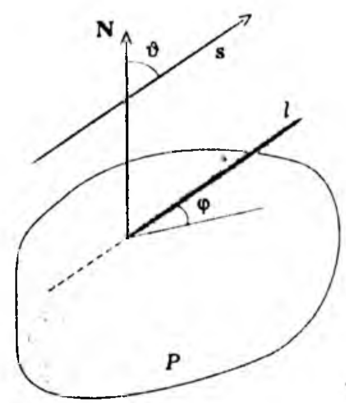


Рис. 7.1

Косинус кута ϑ між векторами $\mathbf{s}$ і $\mathbf{N}$ виражається формулою

$$\cos\vartheta = \frac{\mathbf{N}\cdot\mathbf{s}}{|\mathbf{N}|\cdot|\mathbf{s}|} , \tag{7.3}$$

звідки

$$\sin\varphi = \frac{|\mathbf{N}\cdot\mathbf{s}|}{|\mathbf{N}|\cdot|\mathbf{s}|} . \tag{7.4}$$

Формула (7.4) виражає кут між площиною та прямою лінією. Чисельник тут записаний за абсолютною величиною, оскільки $\sin\varphi \ge 0$.

У координатній формі вираз (7.4) матиме вигляд:

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} . \quad (7.5)$$

Приклад.

Обчислити кут між прямою лінією $\frac{x-5}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$

і площиною $4x - 2y - 2z + 7 = 0$.

Ураховуючи, що $A = 4$, $B = -2$, $C = -2$, $m = 1$, $n = 1$, $p = -2$, згідно з формулою (7.5) маємо

$$\sin\varphi = \frac{|4 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + (-2) \cdot (-2)|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}} = \frac{1}{2} .$$

Отже, $\varphi = 30°$.

§ 7.2 УМОВА ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ТА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТІ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ І ПЛОЩИНИ

Умова паралельності прямої лінії l і площини P, як видно з рис. 7.1, збігається з умовою перпендикулярності векторів $\mathbf{N}$ і $\mathbf{s}$. Тоді з формули (7.3) одержимо

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{s} = 0 , \quad (7.6)$$

або в координатній формі

$$Am + Bn + Cp = 0 . \quad (7.7)$$

Вираз (7.7) і є *умовою паралельності прямої лінії та площини*. Умова перпендикулярності прямої лінії та площини збігається з умовою колінеарності векторів $\mathbf{N}$ і $\mathbf{s}$, тобто

$$\mathbf{N} = \lambda \mathbf{s} , \quad (7.8)$$

або в координатній формі

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} . \quad (7.9)$$

Отже, вираз (7.9) і є *умовою перпендикулярності прямої лінії та площини.*

Слід відзначити, що оскільки координати напрямного вектора прямої лінії $(m;\ n;\ p)$, як видно з її рівняння (7.1), пропорційні відповідним величинам $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, то формулу (7.7) можна переписати у вигляді

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 . \quad (7.10)$$

Геометричним змістом виразу (7.10) є геометричне місце всіх прямих ліній, що проходять через дану точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ паралельно площині $Ax + By + Cz + D = 0$.

Приклади.

1. При яких значеннях n і A пряма лінія $\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{n} = \frac{z-1}{6}$ перпендикулярна площині $Ax - 2y + 3z - 5 = 0$?

   Умова (7.9) у даному випадку матиме вигляд:
   $$\frac{A}{2} = \frac{-2}{n} = \frac{3}{6} ,$$
   звідки маємо $\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$ і $\frac{-2}{n} = \frac{1}{2}$. Отже, $A = 1$, $n = -4$.

2. Скласти рівняння прямої лінії, якщо відомо, що вона проходить через точку $M_0(3;\ -2;\ 4)$ перпендикулярно площині $5x + 3y - 7z + 1 = 0$.

Оскільки пряма лінія за умовою перпендикулярна площині, то її нормальний вектор $\mathbf{N} = (5;\ 3;\ -7)$ буде напрямним вектором прямої. Отже,

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{-7} .$$

3. Скласти рівняння площини, якщо відомо, що вона проходить через точку $M_0(1;\ 0;\ 3)$ перпендикулярно до прямої

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-2} .$$

Напрямний вектор прямої $\mathbf{s} = (5;\ 2;\ -2)$ є нормальним вектором перпендикулярної до неї площини. Тоді за формулою (7.10) маємо:

$$5(x-1) + 2(y-0) - 2(z-3) = 0 ,$$

або

$$5x + 2y - 2z + 1 = 0 .$$

§ 7.3 ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

Можливі три випадки взаємного розташування прямої та площини в просторі.

1. *Пряма та площина перетинаються.* Розглянемо пряму лінію

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \qquad (7.11)$$

і площину

$$Ax + By + Cz + D = 0 . \qquad (7.12)$$

Для того щоб знайти їх точку перетину, необхідно записати рівняння прямої лінії (7.11) у параметричній формі

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt . \qquad (7.13)$$

Підставляючи значення x, y, z з (7.13) у (7.12), одержимо:

$$(Am + Bn + Cp)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0 .$$

Якщо $Am + Bn + Cp \neq 0$, тобто пряма не паралельна площині (див. формулу (7.7)), то звідси знаходимо єдине значення параметра t:

$$t_0 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp} . \qquad (7.14)$$

Підставляючи дане значення t_0 в параметричні рівняння прямої лінії

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \qquad (7.15)$$

одержимо координати точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ перетину прямої (7.11) із площиною (7.12):

$$x_1 = x_0 - \frac{m(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{Am + Bn + Cp} ,$$

$$y_1 = y_0 - \frac{n(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{Am + Bn + Cp} ,$$

$$z_1 = z_0 - \frac{p(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{Am + Bn + Cp} . \qquad (7.16)$$

2. *Пряма та площина паралельні.* Якщо в (7.14) $Am + Bn + Cp = 0$, а $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то рівняння матиме вигляд $0 \cdot t + \text{const} = 0$ і розв'язку не матиме. Геометрично це означає, що пряма лінія паралельна площині й перетинати її не буде, а умова

$$Am + Bn + Cp = 0 , \quad (7.17)$$

як відомо, є умовою (7.7) паралельності прямої (7.11) і площини (7.12).

3. *Пряма знаходиться в площині.* Якщо в рівнянні (7.13) $Am + Bn + Cp = 0$ і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ одночасно, то рівняння матиме вигляд $0 \cdot t = 0$, і йому буде відповідати будь-яке значення t. Тобто будь-яка точка прямої буде точкою її перетину з площиною. Геометрично це буде означати, що пряма лінія розташована в площині, а одночасне виконання рівностей

$$Am + Bn + Cp = 0 \quad \text{і} \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \quad (7.18)$$

є умовою знаходження прямої лінії (7.11) в площині (7.12).

Приклади.

1. Знайти проекцію точки $P(3;\ 2;\ -1)$ на площину

$$x - 5y + 4z - 31 = 0 . \quad (7.19)$$

Задача зводиться до знаходження основи перпендикуляра, опущеного з даної точки на площину. Рівняння будь-якої прямої, що проходить через точку P, матиме вигляд:

$$\frac{x-3}{m} = \frac{y-2}{n} = \frac{z+1}{p} .$$

Користуючись умовою перпендикулярності прямої та площини (7.9), підставимо в дане рівняння прямої замість коефіцієнтів m, n, p пропорційні їм величини $A = 1,\ B = -5,\ C = 4$:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+1}{4} . \quad (7.20)$$

Для знаходження проекції точки P на площину потрібно знайти точку перетину площини (7.19) і прямої (7.20). Користуючись формулами (7.16), знаходимо: $x_1 = 4,\ y_1 = -3,\ z_1 = 3$. Отже, проекцією точки P на площину буде точка з координатами $(4;\ -3;\ 3)$.

2. Знайти відстань від точки $P(5;\ -6;\ 7)$ до прямої

$$\frac{x-7}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{1} . \quad (7.21)$$

Щоб знайти відстань від точки P до прямої, потрібно знайти точку перетину даної прямої та площини, що проходить через точку P перпендикулярно цій прямій.

Складемо рівняння в'язки площин (5.33) з центром у точці P:

$$A(x-5) + B(y+6) + C(z-7) = 0 . \quad (7.22)$$

Ураховуючи, що площина (7.22) і пряма (7.21) перпендикулярні, рівняння (7.22) набуде вигляду:

$$-2(x-5) + 3(y+6) + (z-7) = 0 \quad \text{або} \quad 2x - 3y - z - 21 = 0 . \quad (7.23)$$

Розв'язуючи спільно систему рівнянь (7.21) і (7.23), одержимо координати точки Q перетину прямої та площини (формули (7.16)): $Q(9;\ -2;\ 3)$. Тоді шукана відстань дорівнюватиме:

$$|PQ| = \sqrt{(9-5)^2 + (-2+6)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-4)^2} =$$
$$= \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \quad \text{(од. довжини)} .$$

§ 7.4 ЖМУТОК ПЛОЩИН

Через будь-яку пряму в просторі можна провести безліч площин. *Сукупність усіх площин, що проходять через одну й ту ж пряму лінію, називається* ***жмутком площин.***

Нехай є пряма лінія, рівняння якої зображено перетином двох площин:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{7.24}$$

Будь-яку площину, що проходить через дану лінію (7.24), можна записати у вигляді

$$q_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + q_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \tag{7.25}$$

при відповідному виборі числових значень q_1 і q_2. Дійсно, при будь-яких значеннях q_1 і q_2 рівняння (7.25) є рівнянням першого степеня відносно змінних координат x, y, z, а отже, дане рівняння визначає площину. І навпаки, якщо площина проходить через лінію перетину двох площин (7.24), то вона належить площині (7.25). Дійсно, нехай $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — довільна точка перетину площин (7.24). Її координати будуть відповідати обом рівнянням (7.24), тобто

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0,$$

$$A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0. \tag{7.26}$$

Однак тоді координати точки M_0 будуть відповідати й рівнянню (7.25):

$$q_1(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1) + q_2(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) = 0. \tag{7.27}$$

Отже, площина (7.25) проходить через будь-яку спільну точку площин (7.24), а отже, і через лінію їх перетину.

Рівняння будь-якої площини P із сукупності рівнянь площин (7.25) можна виділити, якщо відома будь-яка точка $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, яка належить цій площині P і в загальному випадку не належить площинам (7.24). Дійсно, з тотожності

$$q_1(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1) + q_2(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_i + D_2) = 0$$

знаходимо співвідношення

$$\frac{q_2}{q_1} = -\frac{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1}{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2x_1 + D_2}. \tag{7.28}$$

Підставляючи (7.28) у рівність (7.25), одержимо рівняння шуканої площини P.

Рівнянню (7.25) можна надати більш зручну форму, припустивши в ньому $\lambda = (q_2/q_1)(q_1 \neq 0)$:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \tag{7.29}$$

Рівняння (7.29) називається ***рівнянням жмутка*** площин, що проходить через дану пряму лінію (7.24). Число λ називається ***параметром*** жмутка площин.

Відзначимо, що рівняння (7.29) визначає будь-яку площину жмутка, за винятком другої з площин (7.24), тому що для цього потрібно покласти $q_1 = 0$. У цьому випадку потрібно користуватися рівнянням жмутка площин, записаному у формі (7.25). Рівняння жмутка площин (7.29) дає змогу розв'язувати велику кількість різноманітних просторових задач аналітичної геометрії.

Приклади.

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(4;\ -1;\ 1)$ і пряму лінію

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 7 = 0, \\ 4x + 2y - 6z - 5 = 0. \end{cases}$$

Запишемо рівняння жмутка площин (7.29), що проходить через дану пряму:

$$(2x - 3y + 5z - 7) + \lambda(4x + 2y - 6z - 5) = 0.$$

Підставляючи в дане рівняння координати точки M_0, маємо:

$$(2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 - 7) + \lambda(4 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) - 6 \cdot 1 - 5) = 0,$$

звідки $\lambda = -3$.

Отже, рівняння шуканої площини буде

$$10x + 9y - 23z - 8 = 0.$$

2. Скласти рівняння проекції прямої лінії

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 1 = 0, \\ x + 5y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

на площину $3x - 4y + z - 8 = 0$.

Складемо рівняння жмутка площин, що проходить через дану пряму лінію:

$$2x - 3y + 4z - 1 + \lambda(x + 5y - 2z + 3) = 0 \tag{7.30}$$

або

$$(2 + \lambda)x + (5\lambda - 3)y + (4 - 2\lambda)z + (-1 + 3\lambda) = 0. \tag{7.31}$$

Із цього жмутка площин виділимо площину, перпендикулярну до даної. Ураховуючи умову перпендикулярності двох площин (5.29), маємо:

$$3(2 + \lambda) - 4(5\lambda - 3) + (4 - 2\lambda) = 0.$$

Звідки $\lambda = 32/19$. Підставляючи дане значення λ в (7.31), знаходимо рівняння площини, перпендикулярної даній (7.30):

$$60x + 53y + 32z + 47 = 0 . \qquad (7.32)$$

Рівняння шуканої проекції можна записати у вигляді рівняння лінії перетину даної за умовою площини та площини (7.32):

$$\begin{cases} 3x - 4y + z - 8 = 0, \\ 60x + 53y + 32z + 47 = 0. \end{cases}$$

ВПРАВИ

1. Знайти кут між прямою лінією $\frac{x-8}{-2} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z-9}{4}$ і площиною $6x - 3y - 3z + 1 = 0$.

2. Знайти проекцію точки $P(1; 2; -3)$ на площину $6x - y + 3z - 41 = 0$.

3. Знайти точку перетину прямої лінії $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ з площиною $3x + 5y - z - 2 = 0$.

4. При якому значенні m пряма лінія $\frac{x-3}{m} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{6}$ паралельна площині $2x - 5y + 3z - 7 = 0$?

5. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму лінію
$$\begin{cases} 3x - y + 2z + 9 = 0, \\ x + z - 3 = 0, \end{cases}$$
і: 1) через точку $A(4; -2; -3)$; 2) паралельно осі OX; 3) паралельно осі OY; 4) паралельно осі OZ.

6. Знайти точку Q, симетричну точці $P(2; 7; 1)$ відносно площини $x - 4y + z + 7 = 0$.

7. При яких значеннях чисел B і D пряма лінія $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{7}$ знаходиться в площині $4x + By - 2z + D = 0$?

8. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(4; -3; 1)$ паралельно прямим лініям
$$\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3} \quad \text{і} \quad \frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2} .$$

9. Скласти рівняння площини, якщо відомо, що вона проходить через точки $A(1; -1; 2)$ і $B(1; 0; 1)$ паралельно прямій лінії
$$x = 4t + 1, \quad y = 2t + 3, \quad z = t.$$

10. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(3; 1; -2)$ та пряму лінію
$$\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}.$$

11. Скласти рівняння площини, якщо відомо, що вона проходить через пряму $\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{-3}$ паралельно прямій $\frac{x+5}{4} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{2}$.

12. Через пряму лінію $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ провести площину перпендикулярно до площини $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

13. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(-1; 0; 4)$ на пряму лінію
$$x = 1 + t, \quad y = 2t, \quad z = 4 - t.$$

Глава 8

Поверхні та лінії в просторі

§ 8.1 РІВНЯННЯ ПОВЕРХНІ

Будь-яке рівняння
$$F(x, y, z) = 0 \tag{8.1}$$
визначає в просторі декартових координат x, y, z деяку поверхню. Співвідношення (8.1) називається *загальним рівнянням поверхні* й відображає загальну властивість, притаманну будь-якій змінній точці простору $M(x; y; z)$, що належить даній поверхні.

Таким чином, *геометричне місце точок простору, координати яких задовольняють спільне рівняння, називається поверхнею.*

За виглядом лівої частини рівняння (8.1) поверхні діляться на два типи: алгебраїчні та трансцендентні.

Якщо ліва частина рівняння $F(x; y; z)$ являє собою поліном відносно змінних x, y, z, то така поверхня називається *алгебраїчною*. Степінь даного полінома відносно x, y, z визначає *порядок алгебраїчної поверхні.*

Рівняння алгебраїчної поверхні першого степеня в загальному вигляді буде
$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{8.2}$$

Як було показано вище (див. § 5.2), таке рівняння визначає в тривимірному просторі площину.

Отже, *поверхні першого порядку — це площини.*

У даній главі детально будуть розглянуті алгебраїчні поверхні другого порядку, тобто такі поверхні, рівняння яких у декартовій системі координат є алгебраїчними рівняннями другого степеня.

У загальному випадку алгебраїчних рівнянь ліва частина рівності (8.1) може бути многочленом будь-якого степеня відносно змінних x, y, z. Дослідження алгебраїчних рівнянь вище другого степеня взагалі дуже складне й розглядатися нами не буде.

Основними завданнями при вивченні алгебраїчних поверхонь є:

1) складання рівняння поверхні як даного геометричного місця точок;
2) дослідження форми та геометричних властивостей поверхні за даним її рівнянням.

У випадку трансцендентних поверхонь, їх рівняння, так само як і форма, можуть бути настільки складними, що утворити їхні рівняння або побудувати таку поверхню за відомою вже трансцендентною функцією можливо лише за допомогою сучасної комп'ютерної техніки.

На рис. 8.1−8.2 зображені частини трансцендентних поверхонь, рівняння яких відповідно мають вигляд:

$$\sin(x^2 + y^2) - z = 0 \;, \quad (8.3)$$

$$\mathrm{arctg}\, xy - z = 0 \;. \quad (8.4)$$

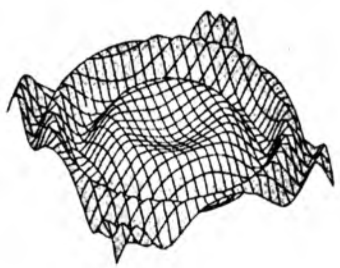


Рис. *8.1*

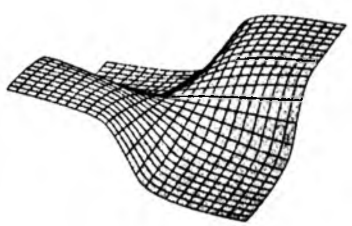


Рис. *8.2*

Відзначимо, що за аналогією до того, як для рівняння лінії $F(x, y) = 0$ існують винятки, коли воно визначає не лінію, а вироджується в точку або розпадається в сукупність ізольованих точок, або зовсім не має геометричного змісту (уявне геометричне місце точок), власне так само й рівняння поверхні $F(x;\ y;\ z) = 0$ у деяких випадках виродження та розпадання визначає не поверхню, а сукупність ізольованих точок чи деяку лінію, чи пару площин, або зовсім може не мати ніякого геометричного змісту (уявна поверхня).

Якщо розглянути два рівняння $F_1(x, y, z) = 0$ і $F_2(x, y, z) = 0$, кожне з яких визначає деяку поверхню в прос-

торі, то в сукупності вони будуть визначати *лінію в просторі*, тобто систему рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0\,, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (8.5)$$

у загальному випадку можна розглядати як *рівняння лінії в просторі, утвореної перетином двох поверхонь*. Координати будь-якої точки даної лінії задовольняють обидва рівняння (8.5), оскільки ця точка розташована одночасно на обох поверхнях.

Якщо ми розглянемо три рівняння $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$ і $F_3(x, y, z) = 0$, кожне з яких визначає деяку поверхню в просторі, то в сукупності вони будуть визначати *точку в просторі*, тобто система рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0\,, \\ F_2(x, y, z) = 0\,, \\ F_3(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (8.6)$$

у загальному випадку визначає *точку в просторі, утворену перетином трьох поверхонь*.

Рівняння поверхні може бути записане не тільки в декартовій системі координат (8.1), а й у будь-якій іншій просторовій системі координат.

У циліндричній системі координат рівняння поверхні матиме вигляд

$$F(\rho, \varphi, z) = 0 \;. \quad (8.7)$$

У сферичній системі координат рівняння поверхні запишеться у вигляді

$$F(\rho, \varphi, \vartheta) = 0 \;. \quad (8.8)$$

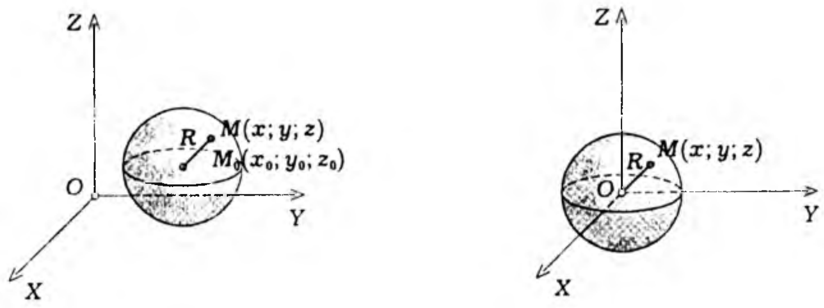
У випадку узагальнених тривимірних координат u, v, w рівняння поверхні можна записати співвідношенням

$$F(u, v, w) = 0 \;. \quad (8.9)$$

§ 8.3 СФЕРА

Сферою називається геометричне місце точок простору, рівновіддалених від даної точки, що називається центром сфери.

Нехай центром сфери є точка $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, а її радіус дорівнює R (рис. 8.3 а)).



а) б)

Рис. 8.3

Виберемо на сферичній поверхні довільну точку $M(x;\ y;\ z)$. Відстань до цієї точки від центра, згідно з означенням, дорівнює R, тобто

$$|M_0 M| = R\ . \qquad (8.15)$$

Користуючись формулою (1.22) для відстані між двома точками $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ і $M(x;\ y;\ z)$, одержимо:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R\ . \qquad (8.16)$$

Рівняння (8.16) і є рівнянням сфери. Однак його можна звести до більш простого вигляду. Підносячи обидві частини рівності (8.16) до квадрата, остаточно одержимо:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2\ . \qquad (8.17)$$

Рівняння (8.17) є *рівнянням сфери* з центром у точці $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ і радіусом R.

В окремому випадку, коли центр сфери збігається з початком координат $O(0;\ 0;\ 0)$ (рис. 8.3 б)), рівняння сфери матиме вигляд

$$x^2+y^2+z^2 = R^2\ . \qquad (8.18)$$

§ 8.2 ПАРАМЕТРИЧНЕ ЗАДАННЯ ПОВЕРХНІ

Поверхню в просторі можна задати рівняннями, які містять у собі два параметри, наприклад, u і v. Тоді рівняння поверхні запишуться у вигляді

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v). \end{cases} \qquad (8.10)$$

Необхідність задання кожної з координат саме двома параметрами, а не будь-якою іншою їх кількістю, обумовлена тим, що точка на поверхні має два степені свободи.

Покажемо, що рівняння (8.10) зводяться до рівняння виду (8.1). Дійсно, із системи будь-яких двох рівнянь із (8.10), наприклад

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases} \qquad (8.11)$$

можна в загальному випадку виразити u і v через x і y:

$$u = u(x,y), \qquad v = v(x,y)\ . \qquad (8.12)$$

Підставляючи рівняння (8.12) у систему (8.10), маємо:

$$z = z(u(x,y),\ v(x,y)) \equiv z(x,y)\ , \qquad (8.13)$$

звідки

$$z - z(x,y) = 0 \qquad (8.14)$$

або

$$F(x,y,z) = 0\ .$$

Таким чином, рівняння (8.10) є *параметричними рівняннями поверхні в просторі.*

Слід відзначити, що у випадках виродження поверхні в точку, лінію або пару площин перехід від рівняння поверхні (8.1) до її параметричного задання (8.10) або навпаки неможливий.

Розкриваючи дужки в рівнянні (8.17), рівняння сфери запишемо у вигляді:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xx_0 - 2yy_0 - 2zz_0 + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2) = 0$$

або

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dx + 2Ey + 2Fz + H = 0 \ , \quad (8.19)$$

де $A = B = C = 1$, $D = -x_0$, $E = -y_0$, $F = -z_0$, $H = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2$.

З рівняння (8.19) випливає: 1) *рівняння сфери є алгебраїчне рівняння другого порядку, тобто сфера — це алгебраїчна поверхня другого порядку;* 2) *у рівнянні сфери коефіцієнти при квадратах змінних x^2, y^2, z^2 рівні між собою й дорівнюють одиниці, а коефіцієнти при добутках змінних величин xy, yz, zx відсутні, тобто дорівнюють нулю.*

Таким чином, за зовнішнім виглядом алгебраїчного рівняння другого степеня можна відразу зробити висновок, чи визначає воно сферу, чи ні.

Проведемо дослідження випадків виродження сфери в точку або уявну сферу.

У рівнянні другого порядку, що описує сферу, коефіцієнти A, B, C рівні між собою, тому позначимо $B = C \equiv A$ й запишемо вираз (8.19) у вигляді

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + 2Dx + 2Ey + 2Fz + H = 0 \ . \quad (8.20)$$

Поділивши всі коефіцієнти на A $(A \neq 0)$ і виділивши повні квадрати, перепишемо рівність (8.20) у вигляді

$$\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 + \left(z + \frac{F}{A}\right)^2 = \frac{1}{A^2}(D^2 + E^2 + F^2) - \frac{1}{A}H \ , \quad (8.21)$$

або, ввівши позначення $x_0 = -D/A$, $y_0 = -E/A$, $z_0 = -F/A$, $h = -H/A$ у вигляді

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + h \ . \quad (8.22)$$

У залежності від знака правої частини цього рівняння можуть бути такі випадки:

1. Якщо $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + h > 0$, то, припустивши $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + h = R^2$ з рівняння (8.22), одержимо:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \ , \quad (8.23)$$

що, як відомо, є рівнянням *сфери* з центром у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

2. Якщо $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + h = 0$, то рівняння (8.22) набере вигляду:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0 \ . \quad (8.24)$$

Дане рівняння задовольняється тільки при

$$x = x_0 , \quad y = y_0 , \quad z = z_0 \ . \quad (8.25)$$

Таким чином, у цьому випадку рівняння (8.24) є *рівнянням сфери, що виродилася в точку*, тобто сфери з нульовим радіусом.

3. Якщо $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + h < 0$, то, припустивши $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + h = -R^2$, рівняння (8.22) набере вигляду

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = -R^2 \ . \quad (8.26)$$

Очевидно, що дане рівняння не задовольняється жодною з точок простору. Тому рівняння (8.26) є рівняння *уявної сфери*.

Отже, алгебраїчне рівняння другого степеня (8.19) визначає сферу за таких умов:

$$\begin{cases} A = B = C , \\ D^2 + E^2 + F^2 - AH > 0 . \end{cases}$$

При вивченні будь-якої поверхні уявлення про її вигляд часто дає можливість отримати так званий *метод перерізів*. Суть його полягає в знаходженні ліній перетину даної поверхні з різними системами площин, наприклад площин, паралельних координатним.

Так, розрізаючи сферичну поверхню площинами $z = z_0$, $y = y_0$ і $x = x_0$, ми будемо отримувати кола з радіусами, рівними радіусу сфери. Це підтверджується виглядом рівнянь, в які перетворюється рівняння сфери за відповідних умов:

$$1) \text{ при } \ z = z_0 \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \ ; \quad (8.27)$$

$$2) \text{ при } \ y = y_0 \quad (x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \ ; \quad (8.28)$$

$$3) \text{ при } \ x = x_0 \quad (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \ . \quad (8.29)$$

При значеннях z у проміжку $(z_0 - R, z_0 + R)$, y у проміжку $(y_0 - R, y_0 + R)$ і x у проміжку $(x_0 - R, x_0 + R)$ відповідні перерізи сфери будуть утворювати також кола, але вже з меншими радіусами.

Насамкінець відзначимо, що найпростіший вигляд рівняння сфери матиме у сферичних координатах. Користуючись формулами переходу від декартових координат до сферичних (1.26), рівняння сфери з центром на початку координат (8.18) матиме вигляд

$$\rho = R \ . \quad (8.30)$$

Зовнішній вигляд рівняння кола на площині (2.6) і рівняння сфери в просторі (8.18) схожий. Це пов'язано з тим, що коло є проекцією сфери на площину, як і одночасно з тим полярні координати є проекцією на площину сферичних.

Приклади.

1. Яку поверхню визначає рівняння $x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z-2 = 0$?

Доповнюючи члени, що містять x, y, z, до повних квадратів, маємо:

$$(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2 = 16 .$$

Отже, дана поверхня є сфера з центром у точці $M_0(-1;\ -2;\ 3)$ і радіусом $R = 4$.

2. Яку поверхню визначає рівняння

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y-4z+9 = 0 \ ?$$

Дане рівняння зводиться до вигляду

$$(x+1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2 = 0$$

і визначає точку $M_0(-1;\ -2;\ 2)$. Це випадок виродження сфери в точку.

3. Яка поверхня визначається рівнянням

$$x^2+y^2+z^2+2x^2+3y^2+5z^2+11 = 0 \ ?$$

Дане рівняння зводиться до вигляду

$$(x+1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+\left(z+\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{3}{2}$$

і визначає уявну сферу з дійсним центром у точці $M_0\left(-1;\ -\frac{3}{2};\ -\frac{5}{2}\right)$ та уявним радіусом $R = i\sqrt{3/2}$.

4. Знайти точки перетину сфери $(x-4)^2+(y+5)^2+(z-6)^2 = 81$ із прямою лінією $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-4}{-2}$.

Зводячи рівняння даної лінії до параметричного вигляду $x = 3-t$, $y = -3+2t$, $z = 4-2t$ і підставляючи дані значення x, y, z у рівняння сфери, одержимо:

$$(-1-t)^2+(2+2t)^2+(-2-2t)^2 = 81 .$$

Звідки $t_1 = -4$, $t_2 = 2$. Підставляючи ці значення параметра в параметричні рівняння прямої лінії, одержимо відповідно дві точки перетину даних сфери та прямої лінії: $M_1(7;\ -11;\ 12)$, $M_2(1;\ 1;\ 0)$.

§ 8.4 ЦИЛІНДРИЧНІ ПОВЕРХНІ

Поверхня, утворена обертанням деякої прямої лінії l, залишаючись паралельною сама із собою, вздовж довільної замкненої лінії L, називається циліндричною (рис. 8.4).

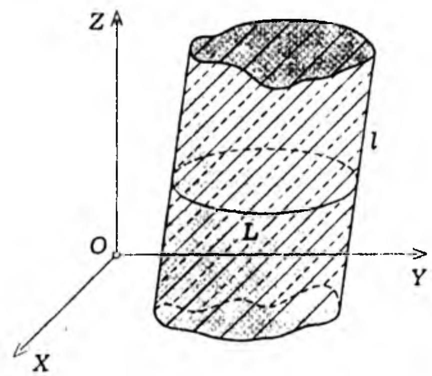


Рис. 8.4

Пряма лінія l називається *твірною*. Однак оскільки всі лінії, паралельні твірній l, паралельні й між собою, то всі паралельні лінії, що утворюють дану поверхню, називаються твірними. Довільна замкнена лінія L називається *напрямною* лінією.

Очевидно, що напрямна лінія L не може бути розташована в площині, паралельній твірним, інакше циліндрична поверхня вироситься в площину.

Розташування циліндричних поверхонь у просторі відносно осей координат у загальному випадку може бути цілком довільним. Ми будемо розглядати тільки такі циліндричні поверхні, твірні яких паралельні одній з координатних осей. Такі циліндричні поверхні називаються *прямими циліндрами*.

Розглянемо циліндричну поверхню, твірні якої паралельні осі OZ. Рівняння такої поверхні має вигляд $F(x,\ y) = 0$, тобто не містить у собі змінної z.

Доведемо, що коли рівняння має вигляд $F(x,\ y) = 0$, то ця поверхня циліндрична з твірними, паралельними осі OZ. Дійсно, якщо точка $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ належить даній поверхні, то для будь-якої точки $M(x;\ y;\ z)$, розташованій на прямій, що паралельна осі OZ і проходить через точку M_0, маємо: $x = x_0$, $y = y_0$. Звідки випливає, що координати точки M задовольняють рівняння даної поверхні. Це доводить, що дана поверхня утворена прямими, паралельними осі OZ, а отже, є циліндричною з твірними, паралельними осі OZ. Навпаки, будь-яка циліндрична поверхня з твірними, паралельними осі OZ, може бути задана рівнянням виду $F(x,\ y) = 0$. Дійсно, напрямну лінію L у цьому випадку можна взяти в координатній площині XOY і її рівняння $F(x,\ y) =$

$= 0$, якщо розглядати його в просторі, буде визначати дану циліндричну поверхню.

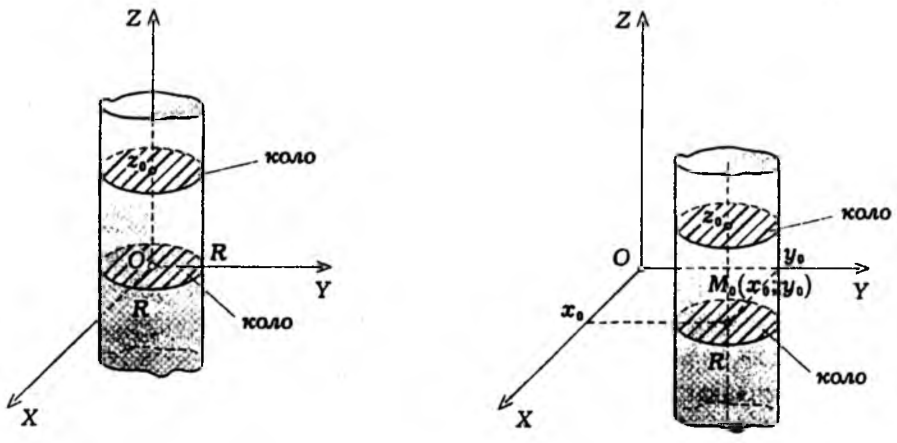
Отже, рівняння $F(x, y) = 0$ визначає циліндричну поверхню, твірні якої паралельні осі OZ.

Аналогічно рівняння вигляду $F(y, z) = 0$, тобто рівняння, що не містить у собі змінної x, є рівнянням циліндричної поверхні з твірними, паралельними осі OX; рівняння вигляду $F(x, z) = 0$, тобто рівняння, що не містить у собі змінної y, є рівнянням циліндричної поверхні з твірними, паралельними осі OY.

Підсумовуючи вище сказане, можна зробити висновок, що тип і вигляд циліндричної поверхні залежить від типу та вигляду напрямної лінії, а *порядок рівняння напрямної лінії визначає порядок циліндричної поверхні.*

Ми будемо розглядати тільки *циліндричні поверхні другого порядку*, тобто такі циліндричні поверхні, в яких напрямними лініями є лінії другого порядку.

Лінії другого порядку, як відомо, чотири: еліпс, окремим випадком якого є коло, гіпербола та парабола. Таким чином, існує чотири види циліндричних поверхонь другого порядку, власне стільки, скільки видів ліній другого порядку: *круговий циліндр, еліптичний циліндр, гіперболічний циліндр, параболічний циліндр.*



а)

б)

Рис. 8.5

Розглянемо детальніше дані поверхні, вважаючи, для зручності викладу, що їхні твірні паралельні осі OZ, а значить напрямні лінії розташовані в площині XOY.

1. **Круговий циліндр.** Рівняння *кругового циліндра, в якого напрямна лінія є коло з центром на початку координат* (рис. 8.5 а)), має вигляд

$$x^2 + y^2 = R^2 \ . \qquad (8.31)$$

Віссю симетрії такого циліндра є вісь OZ. Оскільки його твірні паралельні осі OZ, то при будь-якому перерізі $z = z_0$ ми одержимо коло, рівняння якого буде (8.31).

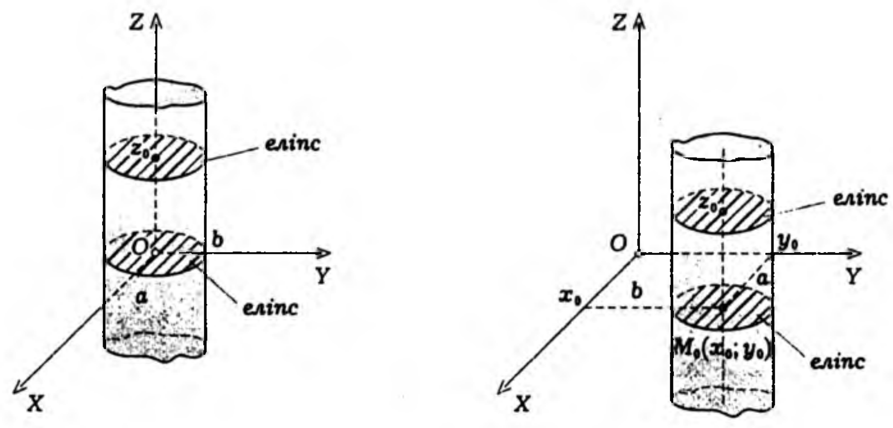
Якщо центр напрямного кола буде знаходитися не на початку координат, а в довільній точці площини XOY, наприклад $M_0(x_0;\ y_0)$, то рівняння такого крутового циліндра (рис. 8.5 б)) матиме вигляд:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \ . \qquad (8.32)$$

Віссю такого крутового циліндра є пряма лінія, паралельна осі OZ: $x = x_0$, $y = y_0$. Рівняння лінії в перерізі $z = z_0$ буде (8.32).

2. **Еліптичний циліндр.** Рівняння *еліптичного циліндра*, в якого напрямна лінія є еліпс із центром на початку координат (рис. 8.6 а)), має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ . \qquad (8.33)$$



а)

б)

Рис. 8.6

Якщо центр напрямного еліпса знаходиться в довільній точці $M_0(x_0;\ y_0)$ площини XOY (рис. 8.6 б)), то його рівняння буде

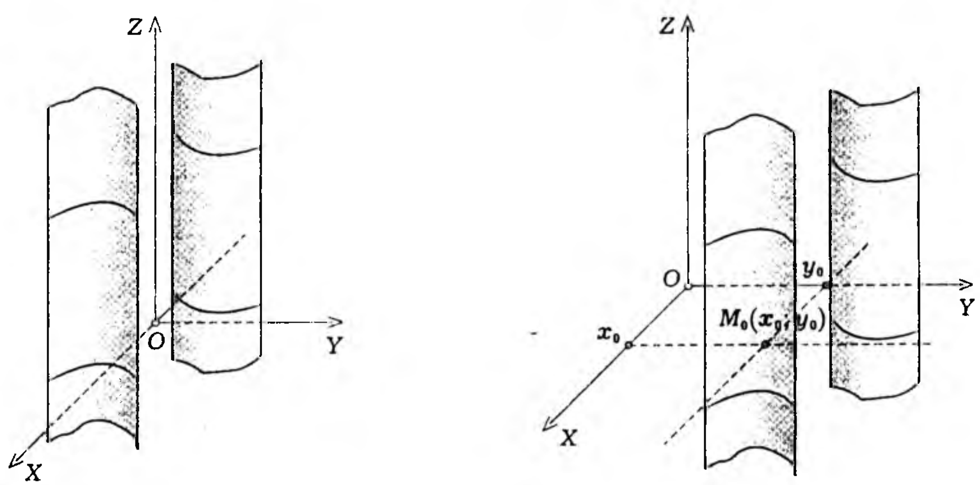
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \ . \quad (8.34)$$

У перерізі $z = z_0$ рівняння напрямної лінії даних еліптичних циліндрів відповідно буде (8.33) та (8.34).

Відзначимо, що круговий циліндр є окремим випадком еліптичного при $a = b = R$ у рівняннях (8.33)–(8.34).

3. **Гіперболічний циліндр.** Рівняння *гіперболічного циліндра*, для якого центр осьового чотирикутника напрямної гіперболи розташований на початку координат (рис. 8.7 а)), має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ . \quad (8.35)$$



а) б)

Рис. 8.7

Якщо центр осьового чотирикутника напрямної гіперболи розташований у довільній точці $M_0(x_0;\ y_0)$ площини XOY (рис. 8.7 б)), то рівняння гіперболічного циліндра буде:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \ . \quad (8.36)$$

У перерізах циліндра при $z = z_0$ ми одержимо гіперболи (8.35) або (8.36).

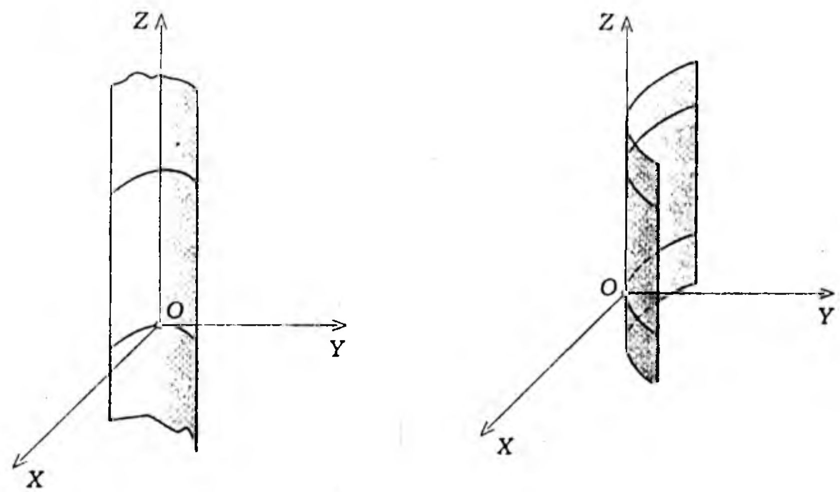
Звісно, що коли напрямна гіпербола гіперболічного циліндра буде спряжена до розглянутих нами, то його поверхні будуть розташовані симетрично відносно осі OX.

4. **Параболічний циліндр.** Рівняння *параболічного циліндра*, для якого вершина напрямної гіперболи розташована на початку координат, має вигляд (рис. 8.8 а)):

$$y^2 = 2px \quad (8.37)$$

або (рис. 8.8 б))

$$x^2 = 2py \ . \quad (8.38)$$



а) б)

Рис. 8.8

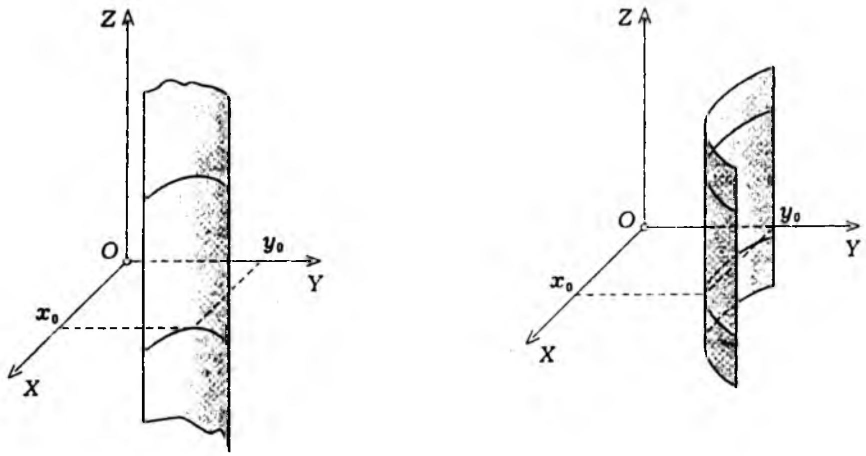
Якщо вершина напрямної гіперболи розташована в довільній точці $M_0(x_0;\ y_0)$ площини XOY, то рівняння параболічного циліндра матиме вигляд (рис. 8.9 а))

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \quad (8.39)$$

або (рис. 8.9 б))

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \quad . \qquad (8.40)$$

Зрозуміло, що в перерізах параболічного циліндра при $z = z_0$ ми одержимо параболи (8.37)–(8.40).



а) б)

Рис. 8.9

Приклади.

1. Яку поверхню визначає рівняння $x^2 + y^2 = 8x$?

Оскільки дане рівняння не містить у собі змінної z, то дана поверхня циліндр, твірна якого паралельна осі OZ. Напрямна лінія даного циліндра $x^2 + y^2 = 8x$, або, після виділення повного квадрата,

$$(x - 4)^2 + y^2 = 16$$

є в площині XOY коло з центром, розташованим на осі OX у точці $(4;\ 0)$, і радіусом $R = 4$.

Отже, дане рівняння визначає круговий циліндр, вісь якого є пряма лінія $x = 4,\ y = 0$.

2. Яка поверхня визначається рівнянням $16y^2 - 25z^2 = 400$?

Напрямна лінія цього циліндра $16y^2 - 25z^2 = 400$ є в площині YOZ гіперболою з дійсною віссю OY, центром на початку координат та півосями 5 і 4:

$$\frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{16} = 1 \quad .$$

Отже, дане рівняння визначає гіперболічний циліндр.

3. Визначити вид поверхні $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 9 = 0$.

Виділивши повні квадрати, маємо:

$$(x - 3)^2 + 4(y + 2)^2 = 16 \quad .$$

Звідки

$$\frac{(x - 3)^2}{16} + \frac{(y + 2)^2}{4} = 1 \quad .$$

Порівнюючи з (8.34), робимо висновок, що дана поверхня є еліптичним циліндром із твірними, паралельними осі OZ, та півосями напрямного еліпса $a = 4,\ b = 2$.

Поверхня, утворена обертанням деякої прямої лінії l, проходячи при цьому через одну й ту ж точку S, уздовж довільної замкненої лінії L, називається конічною (рис. 8.10).

Пряма лінія l називається *твірною* цієї поверхні, дана точка S — її *вершиною*, а довільна замкнена лінія L — *напрямною лінією*.

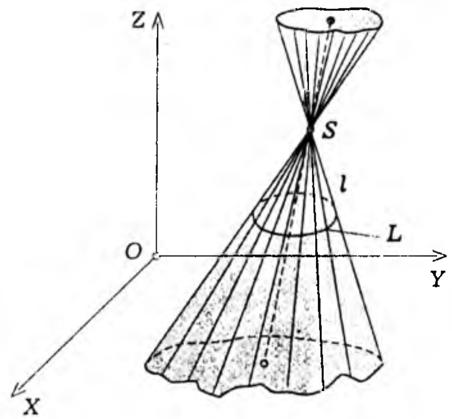


Рис. *8.10*

Розташування конічних поверхонь, так само як і циліндричних, відносно осей координат у загальному випадку може бути довільним. Ми будемо розглядати конічні поверхні, вісь симетрії яких паралельна одній з координатних осей.

Якщо в рівнянні (8.1)

$$F(x,\, y,\, z) = 0$$

ліва частина рівності є однорідною функцією будь-якого степеня, тобто $F(\lambda x,\, \lambda y,\, \lambda z) = \lambda^n F(x,\, y,\, z)$, то така поверхня є конічною, з вершиною на початку координат. Доведемо це твердження.

Дійсно, нехай на даній поверхні розташована деяка точка $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$. Тоді $F(x_0,\, y_0,\, z_0) = 0$, оскільки координати точки M_0 повинні задовольняти рівняння поверхні. Візьмемо тепер будь-яку точку N з координатами $(\lambda x_0,\, \lambda y_0,\, \lambda z_0)$, де λ — деяке дійсне число. Тоді одержимо

$$F(\lambda x_0,\, \lambda y_0,\, \lambda z_0) = \lambda^n F(x_0,\, y_0,\, z_0) = \lambda^n \cdot 0 = 0 \,. \quad (8.41)$$

Якщо тепер надавати числу λ різних значень, то кожного разу ми будемо одержувати на поверхні різне значення точки N. Звідси випливає, що дана поверхня конічна, з центром на початку координат. Причому значення $\lambda > 0$ відповідають верхній частині конуса, а $\lambda < 0$ — нижній.

Ми будемо розглядати тільки той випадок, коли степінь однорідності функції $F(x,\, y,\, z)$ дорівнює двом, тобто конічні поверхні другого порядку.

До конічних поверхонь другого порядку належать *круговий та еліптичний конуси*. Розглянемо їх детальніше, вибравши при цьому для зручності осі симетрій конічних поверхонь паралельними координатній осі OZ.

1. Еліптичний конус. Поверхня, рівняння якої

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \,, \quad (8.42)$$

є *еліптичним конусом* (рис. 8.11 а). Дійсно, оскільки ліва частина рівняння (8.42) є однорідною функцією відносно змінних $x,\, y,\, z$, то, згідно зі сказаним вище, дане рівняння є конічною поверхнею з вершиною на початку координат.

Розглянемо перерізи даної поверхні площинами, паралельними координатним:

1). Площина $z = z_0$, паралельна площині XOY. При $z_0 = 0$ одержимо рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \,, \quad (8.43)$$

звідки випливає, що лінія перетину поверхні з площиною $z = 0$ вироджується в точку.

При $z_0 \neq 0$ (як додатних, так і від'ємних) у перерізах одержимо еліпси:

$$\frac{x^2}{\frac{a^2 z_0^2}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^2 z_0^2}{c^2}} = 1 \,, \quad (8.44)$$

звідки й назва даної конічної поверхні. Півосі цих еліпсів будуть зростати при зростанні абсолютної величини z_0.

2). Площина XOZ $(y = 0)$. У перерізі буде лінія

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \,, \quad (8.45)$$

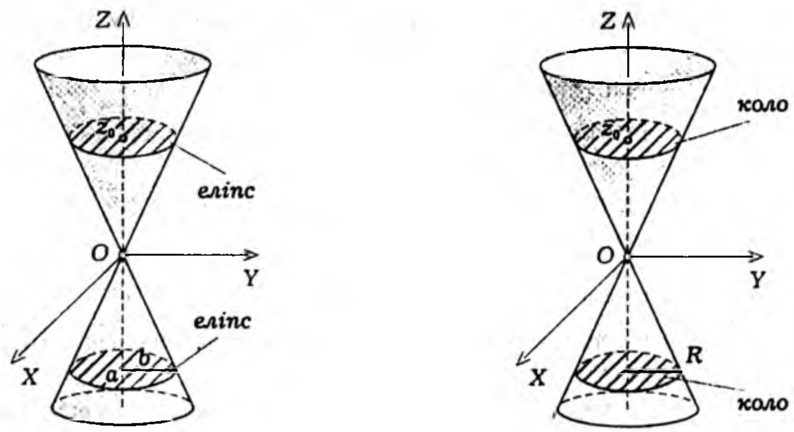
яка розпадається на дві перетинні прямі лінії:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0, \\[2ex] \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = 0. \end{cases} \quad (8.46)$$

3). *Площина* YOZ $(x = 0)$. У перерізі аналогічно буде пара перетинних ліній

$$\begin{cases} \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 0, \\[2mm] \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} = 0. \end{cases} \qquad (8.47)$$

Розглянувши дані перерізи, можна зобразити дану поверхню (рис. 8.11 а)). Вона симетрична відносно початку координат, а координатні площини є її площинами симетрії.



а) б)

Рис. *8.11*

2. **Круговий конус.** В окремому випадку формули (8.42), при $a = b$, ми одержимо

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \ . \qquad (8.48)$$

Дана поверхня є *круговий конус* (рис. 8.11 б)). Дійсно, в перерізі площиною $z = z_0$, паралельною координатній площині XOY, формули (8.43) і (8.44) матимуть вигляд

$$x^2 + y^2 = 0, \qquad \text{при} \quad z_0 = 0 \qquad (8.49)$$

і

$$x^2 + y^2 = \frac{b^2 z_0^2}{c^2}, \qquad \text{при} \quad z_0 \neq 0 \ . \qquad (8.50)$$

Рівність (8.50) є рівнянням кола з радіусом $R = (bz_0)/c$, який вироджується в точку при $z_0 = 0$. При зростанні абсолютної величини z_0 радіус кола зростає.

Перерізи площинами $y = 0$ і $x = 0$, як і у випадку еліптичного конуса, дають пари перетинних прямих.

Оскільки (8.48) є окремим випадком (8.42), то можна сказати, що існує одна конічна поверхня другого порядку, це еліптичний конус, який часто називають просто конусом, окремим випадком якого є круговий конус.

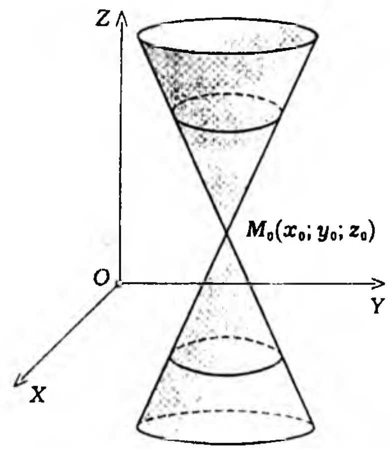


Рис. *8.12*

Рівняння конічної поверхні (8.42), вершина якої в загальному випадку розташована в довільній точці простору $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, матиме вигляд (рис. 8.12)

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 0 \ . \qquad (8.51)$$

Приклади.

1. Визначити тип поверхні $9x^2 - 18y^2 + 4z^2 - 18x + 8z + 13 = 0$.

Доповнюючи доданки зі змінними x, y, z до повних квадратів, одержимо

$$9(x - 1)^2 - 18y^2 + 4(z + 1)^2 = 0$$

або

$$\frac{(x - 1)^2}{4} - \frac{y^2}{2} + \frac{(z + 1)^2}{9} = 0 \ .$$

Це рівняння конічної поверхні другого порядку з вершинами в точці $M_0(1;\ 0;\ -1)$ і віссю симетрії, паралельною осі OY: $x - 1 = 0$, $z + 1 = 0$. Дана конічна поверхня є еліптичний конус, оскільки в перерізі $y = y_0$ маємо еліпс із півосями $\sqrt{2}y_0$ і $(3/2)y_0$.

2. Яку поверхню визначає рівняння

$$-9x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8y + 8z + 8 = 0 \quad ?$$

Доповнюючи відповідні доданки до повних квадратів, одержимо:

$$-9x^2 + 4(y-1)^2 + 4(z+1)^2 = 0 \quad .$$

Дана поверхня є круговим конусом з вершиною в точці $M_0(0;\ 1;\ -1)$ і віссю симетрії $y-1=0,\ z+1=0$, паралельною осі OX. У перерізі $x = x_0$ маємо коло, радіус якого $R = (3/2)x_0$.

3. Скласти рівняння конуса, описаного навколо сфери $x^2+y^2+z^2=4$, якщо відомо, що вершина конуса знаходиться в точці $M_0(0;\ 0;\ 8)$.

Запишемо параметричні рівняння прямої лінії, що проходить через точку $M_0(0;\ 0;\ 8)$:

$$x = mt, \qquad y = nt, \qquad z = 8+pt \quad . \qquad (8.52)$$

Знайдемо точки перетину цієї прямої зі сферою, вимагаючи, щоб ці точки збігалися, тобто, щоб пряма дотикалася сфери. Підставляючи рівняння (8.52) в рівняння сфери, одержимо квадратне рівняння відносно t:

$$(mt)^2 + (nt)^2 + (8+pt)^2 = 4$$

або

$$(m^2+n^2+p^2)t^2 + 16pt + 60 = 0 \quad . \qquad (8.53)$$

Рівняння (8.53) має рівні корені, коли його дискримінант дорівнює нулю, тобто:

$$64p^2 - 60(m^2+n^2+p^2) = 0$$

або

$$p^2 - 15(m^2+n^2) = 0 \quad . \qquad (8.54)$$

Таким чином, координати напрямного вектора прямої лінії, що проходить через точку M_0 і дотикається до даної сфери, зв'язані співвідношенням (8.54). Підставляючи в цю рівність вирази для $m,\ n,\ p$ з рівняння (8.52), одержимо рівняння конуса

$$15(x^2+y^2) - (z-8)^2 = 0 \quad .$$

Це круговий конус з віссю симетрії, паралельною осі OZ. Якщо припустити $z = z_0$, то в перерізі одержимо коло радіуса $R = (z_0-8)/(\sqrt{15})$.

У попередніх двох параграфах ми розглядали випадки, коли лінією обертання була пряма лінія. Такі поверхні обертання (циліндричні та конічні) називаються *поверхнями обертання першого порядку*. У загальному випадку лінія обертання може бути довільною. Розглянемо загальні положення поверхонь обертання.

§ 8.6 ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

У загальному випадку поверхнею обертання називається поверхня, утворена обертанням деякої лінії L навколо нерухомої прямої лінії l. Нерухома пряма лінія l називається *віссю обертання*, а лінія L, що обертається — *лінією обертання* (рис. 8.13).

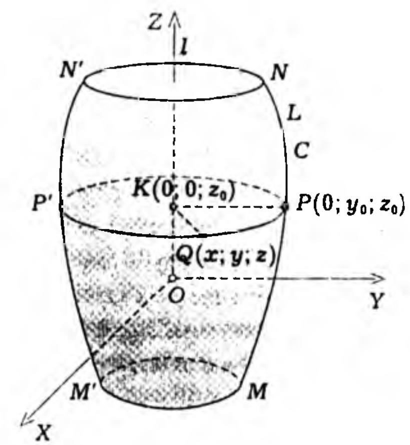


Рис. 8.13

Виберемо за вісь обертання вісь OZ, а лінію L розмістимо в площині YOZ. Рівняння поверхні обертання матиме вигляд

$$F(y, z) = 0 \quad . \qquad (8.55)$$

Обертаючись навколо осі OZ, лінія L утворює поверхню $MM'N'N$.

Розглянемо на лінії L довільну точку $P(0;\ y;\ z)$, яка при обертанні навколо осі OZ утворює коло PQP', розташоване в площині $z = z_0$, перпендикулярній до осі OZ, з центром на цій осі в точці $K(0;\ 0;\ z_0)$ і радіусом $R = y_0$.

Рівняння даного кола має вигляд:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = y_0^2, \\ z = z_0. \end{cases} \qquad (8.56)$$

Дане рівняння задовольняє будь-яка точка $Q(x;\ y;\ z)$, розташована на цьому колі.

Тим часом координати точки P задовольняють рівняння лінії L (8.55):

$$F(y_0, z_0) = 0 \quad . \qquad (8.57)$$

Після знаходження x_0 і y_0 із системи (8.56) рівність (8.57) перепишеться у вигляді:

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0 \quad . \qquad (8.58)$$

Рівняння (8.58) є рівнянням даної поверхні обертання, оскільки його задовольняють координати будь-якої точки $Q(x;\ y;\ z)$ цієї поверхні.

Таким чином, *щоб отримати рівняння поверхні, утвореної обертанням навколо осі OZ лінії L, розташованої в площині YOZ, потрібно в рівнянні цієї лінії замінити y на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$.*

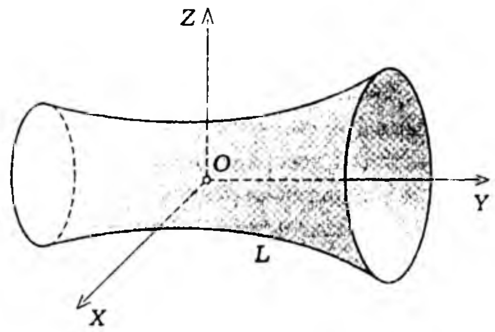


Рис. *8.14*

Зрозуміло, що це правило можна поширити на випадок будь-якого розташування лінії L та обертання її навколо будь-якої з координатних осей. Якщо, наприклад, лінія L розташована в площині XOY (рис. 8.14), то її рівняння буде

$$F(x, y) = 0 \quad , \quad (8.59)$$

а рівняння поверхні, утвореної її обертанням навколо осі OY, матиме вигляд:

$$F(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y) = 0 \quad . \quad (8.60)$$

Порівнюючи формули (8.58) і (8.60), можна зробити цікаві висновки, характерні для поверхонь обертання:

Висновок 1. *Дві з трьох координат у рівнянні поверхні обертання входять у це рівняння тільки у вигляді суми їх квадратів.*

Висновок 2. *Віссю обертання є та вісь, координата якої входить у рівняння поверхні обертання окремо від інших.*

У довільному випадку вигляд поверхні обертання залежить від виду лінії L, що її утворює. Ми далі розглянемо тільки ті поверхні, що утворюються в результаті обертання ліній другого порядку: еліпса, гіперболи, параболи. Такі поверхні називаються поверхнями *обертання другого порядку*. До них належать чотири поверхні: *еліпсоїд, однопорожнинний гіперболоїд, двопорожнинний гіперболоїд, еліптичний параболоїд.*

За вісь обертання цих поверхонь виберемо вісь OZ і будемо вважати, що лінії L розташовані в площині YOZ.

§ 8.7 ЕЛІПСОЇД

Розглянемо поверхню, лінією обертання якої є еліпс

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad . \quad (8.61)$$

Обертаючись навколо осі OZ, він описує поверхню, рівняння якої, згідно з формулою (8.58), має вигляд:

$$\frac{x^2+y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad . \quad (8.62)$$

Дане рівняння (8.62) визначає поверхню, яка називається *еліпсоїдом обертання*.

Якщо еліпс (8.61) обертається навколо своєї малої осі $(c < b)$, то еліпсоїд обертання має вигляд, зображений на рис. 8.15 а), і його називають "сплющеним"; якщо ж віссю обертання є велика вісь еліпса $(c > b)$, то його називають "витягнутим" (рис. 8.15 б)).

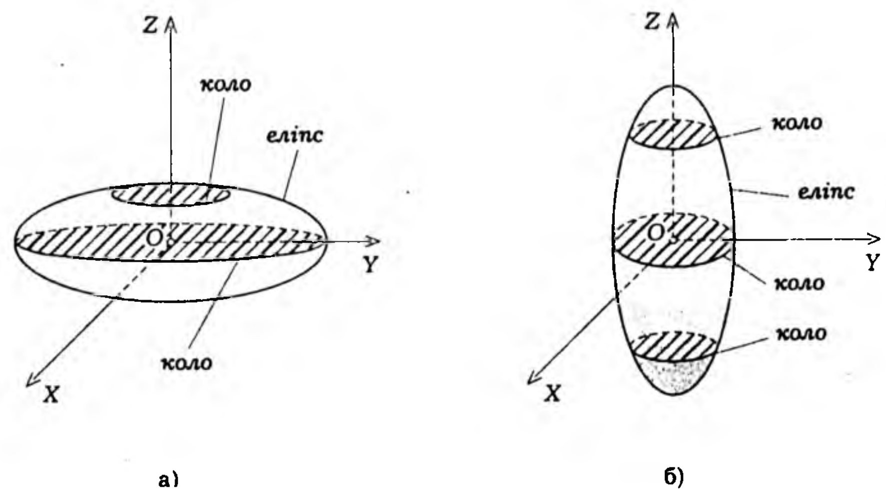


Рис. *8.15*

Розглянемо переріз еліпсоїда площиною $z = z_0$ $(|z_0| \le c)$, паралельною площині XOY. У перерізі буде коло, рівняння якого

$$\frac{x^2+y^2}{b^2} = 1 - \frac{z_0^2}{c^2} \quad (8.63)$$

і радіус

$$R = b\sqrt{1 - \frac{z_0^2}{c^2}} \ . \quad (8.64)$$

Кожному фіксованому значенню z_0 відповідає своє коло. Отже, при зміні значення z_0 від $-c$ до $+c$ коло (8.63) утворює еліпсоїд обертання.

Розглянемо тепер поверхню, в якій замість кола (8.63) є еліпс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z_0^2}{c^2} \ , \quad (8.65)$$

розташований у площині $z = z_0$, паралельній площині XOY, півосі якого відповідно дорівнюють

$$a\sqrt{1 - \frac{z_0^2}{c^2}} \quad \text{і} \quad b\sqrt{1 - \frac{z_0^2}{c^2}} \ .$$

При зміні z_0 від $-c$ до $+c$ цей еліпс утворює поверхню, рівняння якої

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ . \quad (8.66)$$

Поверхня, що визначається рівнянням (8.66), називається *трьохосьовим еліпсоїдом*, а величини a, b, c — півосями еліпсоїда.

Рівняння (8.66) містить тільки квадрати координат. Тобто, коли припустити, що довільна точка $M(x;\ y;\ z)$ розташована на еліпсоїді, то й точки з координатами $(\pm x;\ \pm y;\ \pm z)$ при довільному виборі їх знаків також знаходяться на еліпсоїді. Звідси випливають висновки:

Висновок 1. *Початок координат є центром симетрії еліпсоїда.*

Висновок 2. *Координатні площини є площинами симетрії еліпсоїда.*

Якщо розглянути перерізи еліпса його координатними площинами, то з (8.66) при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ відповідно одержимо еліпси (рис. 8.16):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ , \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ , \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ . \quad (8.67)$$

Розглянемо переріз еліпсоїда площиною $z = z_0$, перпендикулярною координатній осі OZ.

При $|z_0| < c$ рівняння (8.66) перепишеться у вигляді

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{z_0^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{z_0^2}{c^2}\right)} = 1 \ . \quad (8.68)$$

Чим меншим буде значення z_0, тим більші півосі матиме еліпсоїд. Свого найбільшого значення півосі досягнуть при $z_0 = 0$.

При $|z_0| = c$, $z_0 = \pm c$ рівняння (8.66) буде:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \ . \quad (8.69)$$

Лінія перетину вироджується в точки $(0;\ 0;\ c)$ і $(0;\ 0;\ -c)$. Площини $z_0 = c$ будуть дотикатися даної поверхні.

При $|z_0| > c$ одержимо

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0 \ . \quad (8.70)$$

У цьому випадку рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z_0^2}{c^2} \quad (8.71)$$

є рівнянням уявного місця точок, тобто точок перетину поверхні (8.66) з площиною $z = z_0$ не існує.

Аналогічні результати будуть і в перерізах даної поверхні площинами, паралельними координатним площинам XOZ і YOZ.

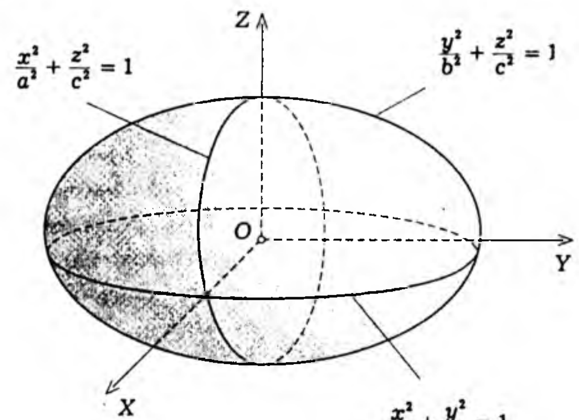


Рис. 8.16

Рівняння (8.66) визначає загальний випадок еліпсоїда, коли всі три півосі a, b і c не є рівними між собою. Якщо будь-які дві з півосей рівні, то трьохосьовий еліпсоїд перетвориться на *еліпсоїд обертання*. Наприклад, якщо $a = b \neq c$, то ми з трьохосьового еліпсоїда (8.66) одержимо еліпсоїд обертання (8.62) з віссю обертання OZ.

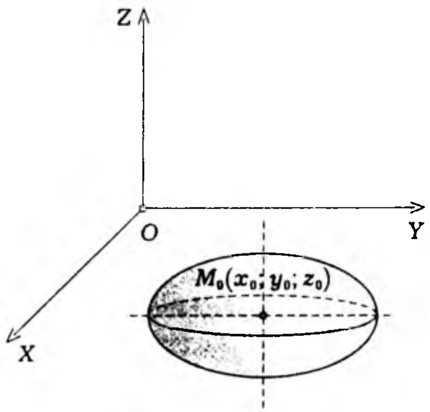


Рис. *8.17*

Якщо всі три півосі рівні між собою: $a = b = c = R$, то трьохосьовий еліпсоїд (8.66) перетворюється на *сферу* (8.18) із центром на початку координат і радіусом R.

Рівняння трьохосьового еліпсоїда (8.66), центр симетрії якого в загальному випадку розташований не на початку координат, а в довільній точці простору $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, з площинами симетрії, паралельними координатним площинам, матиме вигляд (рис. 8.17):

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1\ . \qquad (8.72)$$

§ 8.8 ОДНОПОРОЖНИННИЙ ГІПЕРБОЛОЇД

Розглянемо поверхню, лінією обертання якої є гіпербола

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\ . \qquad (8.73)$$

Обертаючись навколо осі OZ, вона описує поверхню, рівняння якої, згідно з (8.58), має вигляд:

$$\frac{x^2+y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\ . \qquad (8.74)$$

Дане рівняння визначає поверхню, яка називається *однопорожнинним гіперболоїдом обертання* (рис. 8.18).

Якщо розглянути його переріз площиною $z = z_0$, паралельною площині XOY, то в перерізі одержимо коло, рівняння якого буде

$$\frac{x^2+y^2}{b^2} = 1 + \frac{z_0^2}{c^2} \qquad (8.75)$$

і радіус якого

$$R = b\sqrt{1 + \frac{z_0^2}{c^2}}\ . \qquad (8.76)$$

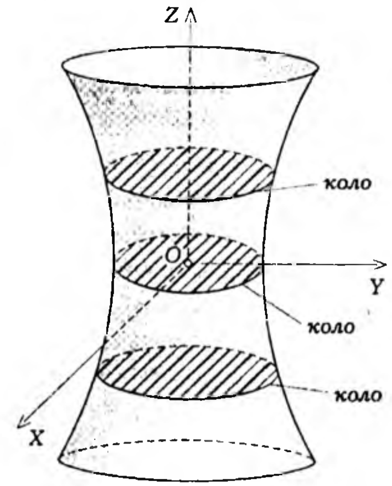


Рис. *8.18*

Кожному фіксованому значенню z_0 відповідає своє коло. Отже, при зміні значення z_0 від $-\infty$ до $+\infty$ коло (8.75) утворює однопорожнинний гіперболоїд обертання.

Розглянемо тепер поверхню, в якій замість кола (8.75) є еліпс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z_0^2}{c^2}\ , \qquad (8.77)$$

розташований у площині $z = z_0$, паралельній площині XOY, півосі якого дорівнюють

$$a\sqrt{1 + \frac{z_0^2}{c^2}} \quad \text{і} \quad b\sqrt{1 + \frac{z_0^2}{c^2}}\ . \qquad (8.78)$$

При зміні z_0 від $-\infty$ до $+\infty$ цей еліпс утворює поверхню, рівняння якої

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \ . \quad (8.79)$$

Поверхня, що визначається рівнянням (8.79), називається *однопорожнинним гіперболоїдом.*

Оскільки рівняння (8.79) містить у собі тільки квадрати координат, то за аналогією до еліпсоїда можна зробити висновки, що:

Висновок 1. *Початок координат є центром симетрії однопорожнинного гіперболоїда.*

Висновок 2. *Координатні площини є площинами симетрії однопорожнинного гіперболоїда.*

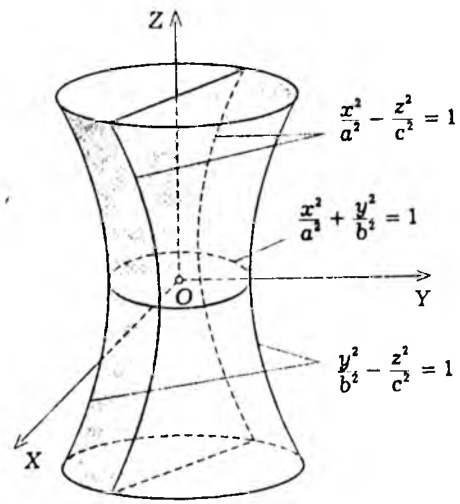


Рис. *8.19*

Якщо розглянути перерізи однопорожнинного гіперболоїда координатними площинами (рис. 8.19), то з (8.79) при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ відповідно одержимо дві гіперболи

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{і} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (8.80)$$

і еліпс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ . \quad (8.81)$$

Розглянемо переріз однопорожнинного гіперболоїда площиною $z = z_0$, паралельною площині XOY. Лінія перетину буде еліпс

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 + \frac{z_0^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 + \frac{z_0^2}{c^2}\right)} = 1 \ . \quad (8.85)$$

З даного рівняння видно, що перерізи поверхні площинами, паралельними площині XOY, є еліпси, півосі яких досягають свого найменшого значення при $z_0 = 0$. З віддаленням площини

$z = z_0$ від координатної площини XOY, тобто в міру зростання $|z_0|$, півосі еліпса будуть необмежено зростати.

Якщо в рівнянні (8.79) припустити $a = b$, то однопорожнинний гіперболоїд перетворюється на *однопорожнинний гіперболоїд обертання* (8.74).

Рівняння однопорожнинного гіперболоїда (8.79), центр симетрії якого в загальному випадку розміщений не на початку координат, а в довільній точці простору $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, з площинами симетрії, паралельними координатним площинам, матиме вигляд (рис. 8.20):

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1 \ . \quad (8.83)$$

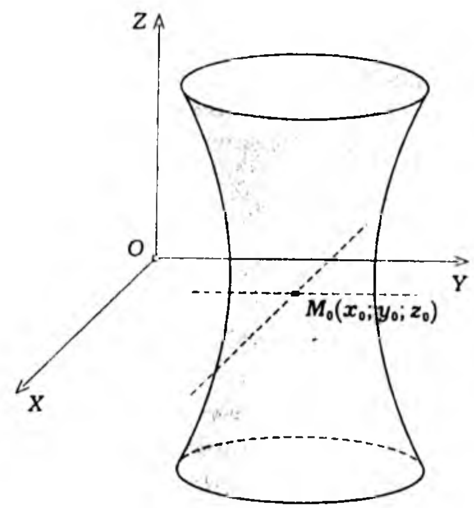


Рис. *8.20*

§ 8.9 ДВОПОРОЖНИННИЙ ГІПЕРБОЛОЇД

Якщо лінію обертання (8.73) замінити спряженою їй гіперболою

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 , \qquad (8.84)$$

то при обертанні її навколо осі OZ ми одержимо поверхню

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 , \qquad (8.85)$$

яка називається *двопорожнинним гіперболоїдом обертання* (рис. 8.21).

Якщо розглянути його переріз площиною $z = z_0$ ($|z_0| \geq c$), перпендикулярною до осі обертання OZ, то в перерізі отримаємо коло, рівняння якого буде

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1 \qquad (8.86)$$

і радіус якого

$$R = b\sqrt{\frac{z_0^2}{c^2} - 1} . \qquad (8.87)$$

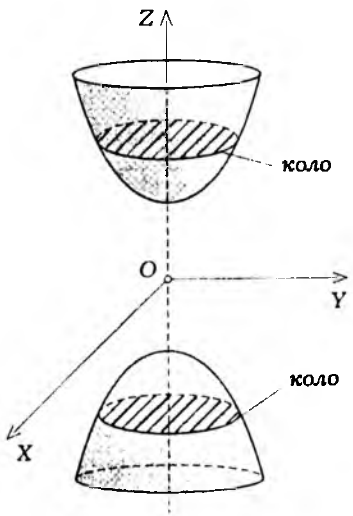


Рис. 8.21

Кожному фіксованому значенню z_0 відповідатиме своє коло. Отже, при зміні z_0 від $+c$ до $+\infty$ коло (8.86) утворює одну порожнину гіперболоїда (верхню), а при зміні z_0 від $-c$ до $-\infty$ коло (8.86) утворює другу його порожнину (нижню).

Розглянемо тепер поверхню, в якої замість кола (8.86) є еліпс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2} - 1 , \qquad (8.88)$$

розташований у площині $z = z_0$, паралельній площині XOY, півосі якого дорівнюють

$$a\sqrt{\frac{z_0^2}{c^2} - 1} \quad \text{і} \quad b\sqrt{\frac{z_0^2}{c^2} - 1} . \qquad (8.89)$$

При зміні z_0 від $-\infty$ до $-c$ і від $+c$ до $+\infty$ цей еліпс утворює двопорожнинну поверхню, рівняння якої

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 . \qquad (8.90)$$

Поверхня, що визначається рівнянням (8.90), називається *двопорожнинним гіперболоїдом.*

Оскільки в рівнянні (8.90) координати знаходяться тільки у квадратах, то так само, як і для попередніх поверхонь обертання, можна зробити висновки, що:

Висновок 1. *Початок координат є центром симетрії двопорожнинного гіперболоїда.*

Висновок 2. *Координатні площини є площинами симетрії двопорожнинного гіперболоїда.*

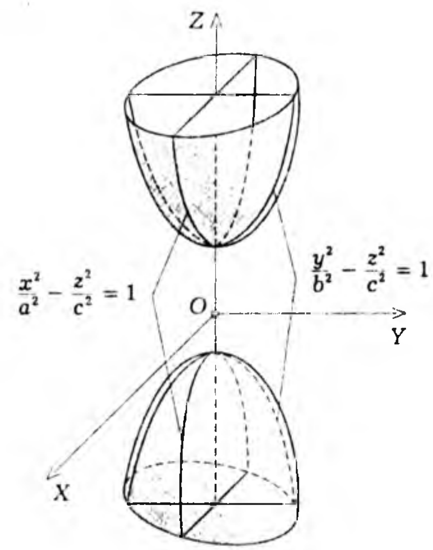


Рис. 8.22

Якщо розглянути перерізи двопорожнинного гіперболоїда координатними площинами, то з (8.90) при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ відповідно одержимо (рис. 8.22) дві гіперболи

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{і} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad (8.91)$$

та уявне місце точок

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 . \qquad (8.92)$$

Переріз двопорожнинного гіперболоїда площиною $z = z_0$, паралельною площині XOY, при $|z_0| > c$ дає еліпс

$$\frac{x^2}{a^2\left(\frac{z_0^2}{c^2} - 1\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(\frac{z_0^2}{c^2} - 1\right)} = 1 , \qquad (8.93)$$

півосі якого в міру віддалення площини $z = z_0$ від координатної площини, тобто зростання $|z_0|$, збільшуються.

При $z_0 = \pm c$ рівняння (8.90) задовольняють лише точки $(0;\ 0;\ \pm c)$ — вершини гіперболоїда, тобто площини $z = \pm c$ дотикаються даної поверхні.

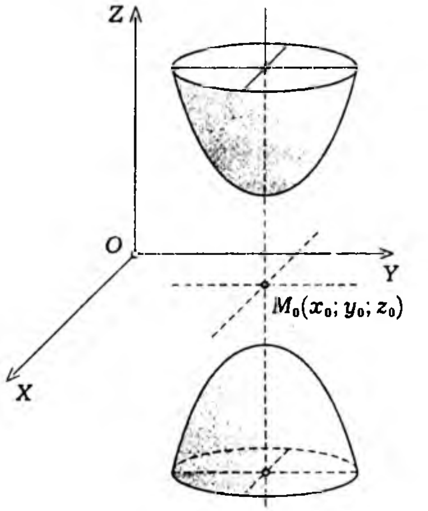


Рис. *8.23*

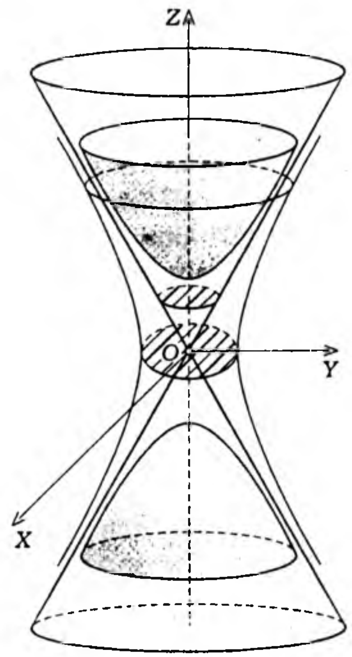


Рис. *8.24*

При $|z_0| < c$ рівняння (8.90) є рівнянням уявного місця точок, тобто в цьому випадку площина поверхню не перетинає.

Якщо в рівнянні (8.90) припустити, що $a = b$, то двопорожнинний гіперболоїд перетворюється на *двопорожнинний гіперболоїд обертання*.

Рівняння двопорожнинного гіперболоїда (8.90), центр симетрії якого в загальному випадку розміщений не на початку координат, а в довільній точці простору $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, з площинами симетрії, паралельними координатним площинам (рис. 8.23), матиме вигляд:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = -1 . \quad (8.94)$$

Цікаво відзначити, що коли обертати навколо осі OZ спільні асимптоти розглянутих нами спряжених гіпербол (8.73) і (8.84), які є лініями обертання двох типів гіперболоїдів, то ми одержимо конус обертання, що є круговим конусом (8.48) (рис. 8.24).

Дійсно, рівняння асимптот спряжених гіпербол у площині YOZ має вигляд

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 , \quad (8.95)$$

а рівняння конуса обертання запишеться тоді так:

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 .$$

Оскільки порожнини гіперболоїдів обох видів, утворених обертанням спряжених гіпербол, необмежено наближаються при $z \to \infty$ до порожнин конуса, утворених спільними асимптотами цих гіпербол, то круговий конус (8.48) називається *асимптотичним конусом гіперболоїдів* обох типів (рис. 8.24).

Якщо в площині YOZ узяти параболу

$$y^2 = 2qz \quad (q > 0) \ , \quad (8.96)$$

то при обертанні її навколо осі OZ ми одержимо поверхню

$$x^2 + y^2 = 2qz \ , \quad (8.97)$$

яка називається *параболоїдом обертання* (рис. 8.25).

Якщо розглянути його переріз площиною $z = z_0$ $(z_0 \geq 0)$, перпендикулярною до осі обертання OZ, то в перерізі матимемо коло, рівняння якого буде

$$x^2 + y^2 = 2qz_0 \quad (8.98)$$

і радіус якого

$$R = \sqrt{2qz_0} \ . \quad (8.99)$$

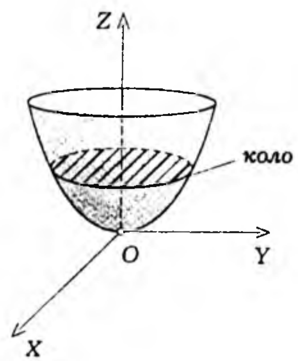


Рис. 8.25

Оскільки для кожного фіксованого значення z_0 буде своє коло, то при зміні z_0 від 0 до $+\infty$ коло утворює *параболоїд обертання.*

Якщо замість кола (8.98) взяти еліпс

$$\frac{x^2}{2pz_0} + \frac{y^2}{2qz_0} = 1 \qquad (p > 0, \ q > 0) \ , \ (8.100)$$

розташований у площині $z = z_0$, паралельній площині XOY, півосі якого дорівнюють

$$\sqrt{2pz_0} \qquad \text{і} \qquad \sqrt{2qz_0} \ , \ (8.101)$$

то при пробіганні значень z_0 від 0 до $+\infty$, цей еліпс опише поверхню

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \ . \ (8.102)$$

Дана поверхня називається *еліптичним параболоїдом.*

Оскільки рівняння (8.102) містить у собі тільки квадрати координат x і y, то площинами симетрії поверхні будуть площини XOZ і YOZ. Таким чином, для еліптичного параболоїда тільки дві координатні площини є площинами його симетрії.

Якщо розглянути перерізи еліптичного параболоїда координатними площинами (рис. 8.26), то з (8.102) при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ відповідно одержимо дві параболи

$$y^2 = 2qz \qquad \text{і} \qquad x^2 = 2pz \ (8.103)$$

і точку, що є початком координат.

Переріз еліптичного параболоїда площиною $z = z_0$, паралельною площині XOY, при $z_0 > 0$ дає еліпс

$$\frac{x^2}{2pz_0} + \frac{y^2}{2qz_0} = 1 \ , \ (8.104)$$

півосі якого зростають при збільшенні z_0.

При $z_0 = 0$ рівняння (8.102) задовольняє лише точка $(0;\ 0;\ 0)$ — вершина параболоїда, тобто площина $z = 0$ лише дотикається даної поверхні.

При $z_0 < 0$ рівняння (8.102) матиме вигляд

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} < 0 \ , \ (8.105)$$

що є рівнянням уявного місця точок. Тобто при $z_0 < 0$ площини $z = z_0$, паралельні площині XOY, дану поверхню не перетинають.

Якщо в рівнянні (8.102) припустити $p = q$, то еліптичний параболоїд перетворюється на *параболоїд обертання.*

У загальному випадку, коли вісь симетрії еліптичного параболоїда (8.102) проходить не через початок координат, а через довільну точку простору $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, його рівняння, за умови, що площини симетрії будуть паралельні координатним площинам XOZ і YOZ (рис. 8.27), матиме вигляд:

$$\frac{(x - x_0)^2}{p} + \frac{(y - y_0)^2}{q} = 2(z - z_0) \ . \ (8.106)$$

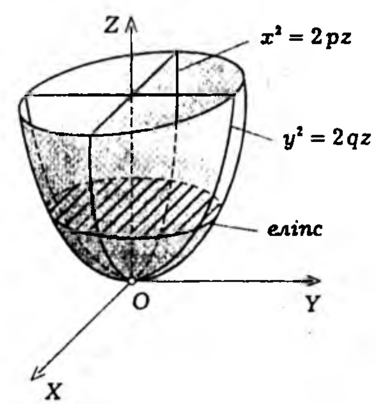


Рис. 8.26

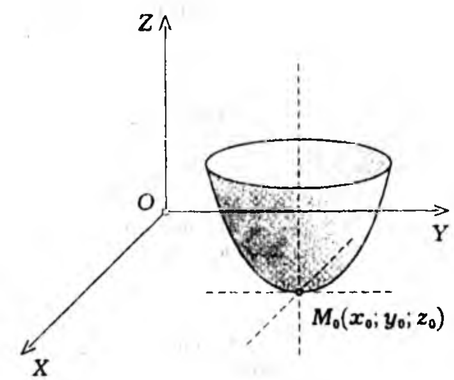


Рис. 8.27

Приклади.

1. Визначити вид поверхні

$$9x^2 + 16y^2 + 36z^2 - 18x + 64y - 216z + 253 = 0 \ .$$

Доповнюючи відповідні члени в лівій частині рівняння до повних квадратів, маємо:

$$9(x^2 - 2x + 1 - 1) + 16(y^2 + 4y + 4 - 4) + 36(z^2 - 6z + 9 - 9) + 253 = 0 \ ,$$

$$9(x - 1)^2 + 16(y + 2)^2 + 36(z - 3)^2 = 144 \ .$$

Поділивши обидві частини рівності на 144, одержимо

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{9} + \frac{(z-3)^2}{4} = 1 \ .$$

Порівнюючи даний вираз із формулою (8.72), приходимо до висновку, що дана поверхня є *тривісний еліпсоїд* з півосями $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$ і центром у точці $M_0(1;\ -2;\ 3)$.

2. Яку поверхню визначає рівняння

$$4x^2 - 9y^2 + 36z^2 - 16x - 54y - 72z - 65 = 0 \ ?$$

Виділивши в лівій частині рівняння повні квадрати, одержимо

$$4(x - 2)^2 - 9(y + 3)^2 + 36(z - 1)^2 = 36 \ .$$

Поділивши обидві частини рівності на 36, одержимо поверхню другого порядку з центром симетрії в точці $M_0(2;\ -3;\ 1)$:

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{1} = 1 \ .$$

Проведемо її дослідження методом перерізів.
У перерізі поверхні площиною $z = 1$ одержимо гіперболу

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{4} = 1 \ .$$

У перерізі площиною $x = 2$ — гіперболу:

$$-\frac{(y+3)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{1} = 1 \ .$$

А в перерізі площиною $y = -3$ — еліпс:

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(z-1)^2}{1} = 1 \ .$$

Площина $z = z_0$, паралельна площині XOY, перетинає поверхню по гіперболі

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{4} = 1 - \frac{z_0^2}{1} \ .$$

Площина $x = x_0$, паралельна площині YOZ, перетинає поверхню по гіперболі

$$-\frac{(y+3)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{1} = 1 - \frac{x_0^2}{9} \ .$$

Площина $y = y_0$, паралельна площині XOZ, перетинає поверхню по еліпсу

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(z-1)^2}{1} = 1 + \frac{y_0^2}{4}$$

Аналізуючи результати дослідження методом перерізів, робимо висновок, що дана поверхня є *однопорожнинний гіперболоїд* з віссю обертання, паралельною осі OY (рис. 8.28).

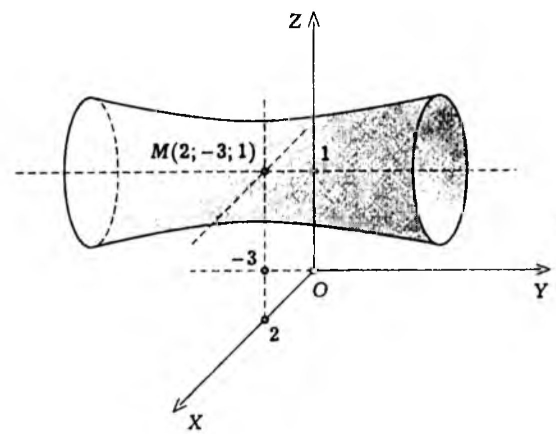


Рис. *8.28*

Дійсно, порівнюючи рівняння даної поверхні

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{1} = 1$$

з рівнянням (8.83), приходимо до висновку, що дана поверхня є однопорожнинний гіперболоїд з центром у точці $(2;\ -3;\ 1)$.

3. Визначити вид поверхні $-18x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 36x + 8z + 27 = 0$.

Доповнюючи до повних квадратів ліву частину даної рівності, одержимо

$$-18(x - 1)^2 + 9y^2 + 4(z + 1)^2 + 36 = 0$$

або

$$-\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{(z+1)^2}{9} = -1 \ .$$

Порівнюючи даний вираз з формулою (8.94), приходимо до висновку, що дана поверхня є *двопорожнинний гіперболоїд* з вершинами в точках $M_1(1+\sqrt{2};\ 0;\ -1)$, $M_2(1-\sqrt{2};\ 0;\ -1)$ і віссю симетрії $y = 0$, $z + 1 = 0$, паралельною координатній осі OX (рис. 8.29).

4. Визначити тип поверхні, заданої рівнянням

$$(y+1)^2 + z^2 - 18x + 18 = 0 \ .$$

Перепишемо рівняння у вигляді

$$\frac{(y+1)^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 2(x-1) \ .$$

Це рівняння *еліптичного параболоїда* з вершиною в точці $M_0(1;\,-1;\,0)$ і віссю обертання $y+1=0$, $z=0$, паралельною координатній осі OX (рис. 8.30).

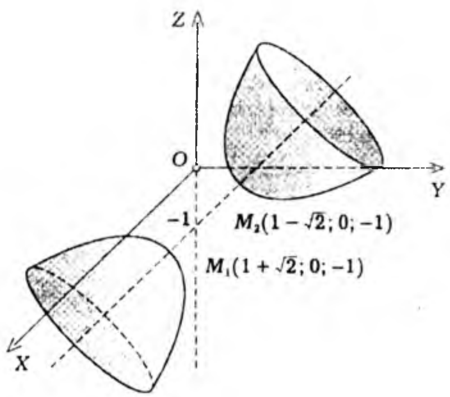


Рис. *8.29*

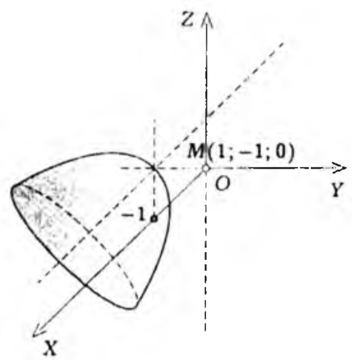


Рис. *8.30*

§ 8.11 ГІПЕРБОЛІЧНИЙ ПАРАБОЛОЇД

***Гіперболічним параболоїдом* називається поверхня, утворена рухом вершини параболи, що зберігає незмінними свої форму й напрям, по другій параболі, напрямленій у протилежний бік і розташованій у площині, перпендикулярній до площини першої параболи.**

Виберемо за початок координат вершину нерухомої параболи, розташуємо її в площині YOZ, а вісь OZ направимо вздовж осі цієї параболи, в протилежний бік її гілок (рис. 8.31).

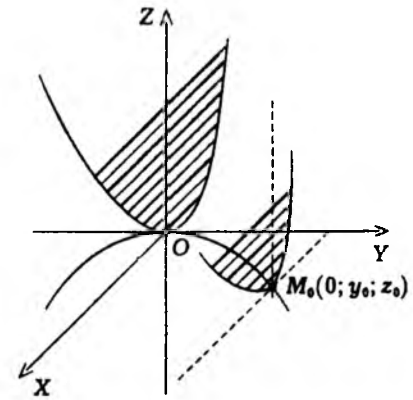


Рис. *8.31*

Рівняння цієї параболи в площині YOZ матиме вигляд:

$$y^2 = -2qz \quad (q > 0) \qquad (8.107)$$

або

$$\frac{y^2}{q} = -2z \ . \qquad (8.108)$$

Площини, в яких знаходиться вісь рухомої параболи при її переміщенні вздовж нерухомої параболи, будуть паралельні площині XOZ. Якщо позначити через x_0, y_0, z_0 змінні координати вершини рухомої параболи, то вони будуть задовольняти рівняння (8.108) нерухомої параболи:

$$\frac{y_0^2}{q} = -2z_0 \ . \qquad (8.109)$$

Рівняння рухомої параболи для кожного фіксованого значення $y = y_0$ матиме вигляд

$$(x-x_0)^2 = 2p(z-z_0) \qquad (p > 0) \qquad (8.110)$$

або, враховуючи, що $x_0 = 0$:

$$\frac{x^2}{p} = 2(z-z_0) \ . \qquad (8.111)$$

Віднімаючи (8.109) від (8.111), одержимо

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y_0^2}{q} = 2z \ .$$

Якщо тепер урахувати, що в процесі руху однієї параболи вздовж другої величина y_0 змінюється від $-\infty$ до $+\infty$, то ми одержимо рівняння гіперболічного параболоїда:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \ . \quad (8.112)$$

Розглянемо перерізи даної поверхні площинами, паралельними координатним площинам.

1). У перерізах площинами $z = z_0$, паралельними координатній площині XOY, при $z_0 > 0$ одержимо гіперболи

$$\frac{x^2}{2pz_0} - \frac{y^2}{2qz_0} = 1 \quad (8.113)$$

з півосями $\sqrt{2pz_0}$ і $\sqrt{2qz_0}$, дійсні осі яких паралельні координатній осі OX.

При $z_0 < 0$ рівняння (8.113) є рівнянням гіпербол, дійсними осями яких будуть прямі, паралельні осі OY.

При $z_0 = 0$ площина XOY перетинає параболоїд по лінії

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0 \ , \quad (8.114)$$

що розпадається на дві перетинні прямі лінії:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0, \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0, \\ z = 0. \end{cases} \quad (8.115)$$

2). У перерізі площинами $x = x_0$, паралельними площині YOZ, одержимо параболи, рівняння яких будуть

$$y^2 = -2q\left(z - \frac{x_0^2}{2p}\right) \ . \quad (8.116)$$

Ці параболи своїми гілками напрямлені вниз і за формою збігаються з нерухомою параболою, але зі зміщеною вершиною $(x_0;\ 0;\ x_0^2/(2p))$, яка розташована на параболі $x^2 = 2pz$, $y = 0$.

При $x_0 = 0$ парабола (8.116) перетворюється на початкову нерухому параболу $y^2 = -2qz$.

3). У перерізі площинами $y = y_0$, паралельними площині XOZ, одержимо параболи

$$x^2 = 2p\left(z + \frac{y_0^2}{2q}\right) \ . \quad (8.117)$$

При будь-якому значенні y_0 це одна з тих парабол, рухом якої був утворений даний параболоїд.

При $y_0 = 0$ отримаємо таку саму параболу $x^2 = 2pz$, розташовану в площині XOZ, з вершиною на початку координат, віссю симетрії OZ і напрямленими вверх гілками.

Проведене дослідження дає можливість побудувати дану поверхню (рис. 8.32).

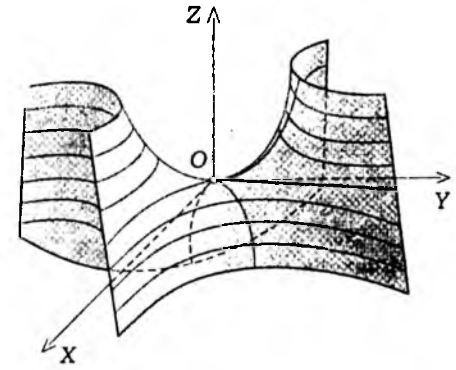


Рис. *8.32*

Гіперболічний параболоїд має вигляд сідла, тому цю поверхню інколи називають *сідлоподібною поверхнею.*

Оскільки рівняння (8.112) містить у собі тільки квадрати координат x і y, то площини XOZ і YOZ є площинами симетрії гіперболічного параболоїда, що видно також із рис. 8.32.

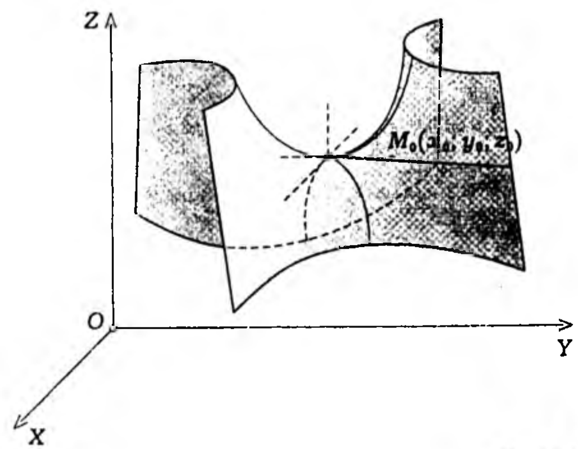


Рис. *8.33*

Таким чином, для гіперболічного параболоїда тільки дві координатні площини є площинами його симетрії.

У загальному випадку, коли вершина та вісь нерухомої параболи, що використовуються в означенні гіперболічного параболоїда (8.112), проходять не через початок координат, а через довільну точку простору $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, то його рівняння за умови, що його площини симетрії залишаються паралельними координатним площинам XOZ і YOZ (рис. 8.33), матиме вигляд:

$$\frac{(x - x_0)^2}{p} - \frac{(y - y_0)^2}{q} = 2(z - z_0) \quad . \ (8.118)$$

Приклад.

Яка поверхня визначається рівнянням

$$4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y - 72z + 184 = 0 \quad ?$$

Виділивши в лівій частині рівності повні квадрати й розділивши всю рівність на 36, одержимо

$$\frac{(x - 1)^2}{9} - \frac{(y + 2)^2}{4} = 2(z - 3) \quad .$$

Порівнюючи даний вираз із формулою (8.118), робимо висновок, що дана поверхня є *гіперболічний параболоїд*, площини симетрії якого проходять через точку $M_0(1;\ -2;\ 3)$.

§ 8.12 ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Рівняння поверхні другого порядку в загальному випадку (див. § 8.1) може бути записане у вигляді рівняння другого степеня відносно змінних координат $x,\ y,\ z$:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxz + 2Exy + 2Fyz + Gx + $$
$$+ Hy + Kz + L = 0 \quad . \ (8.119)$$

Утім завжди можна вибрати таку декартову систему координат, в якій рівняння поверхні другого порядку не матиме членів з добутками координат, тобто буде мати вигляд (порівняйте з формулою (8.19)):

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dx + 2Ey + 2Fz + H = 0 \quad . \ (8.120)$$

Перехід від однієї декартової системи $OXYZ$ до іншої, наприклад, $OX'Y'Z'$, можна зробити за допомогою повороту координатних осей. Таке перетворення матиме вигляд (див. § 1.2):

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3, \\ y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3, \\ x = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3, \end{cases} \quad (8.121)$$

де $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1$ — кути, утворені осями $OX,\ OY,\ OZ$ відповідно з осями $OX',\ OY',\ OZ'$.

При дослідженні рівняння (8.120) можна виявити тип поверхні другого порядку.

Так, якщо коефіцієнти $A,\ B,\ C$ відмінні від нуля й одного знака, а коефіцієнт $H < 0$, то дана поверхня буде *еліпсоїдом* (з можливим випадком *еліпсоїда обертання* або *сфери*). При $H > 0$ або $H = 0$ ми одержимо випадок виродження еліпсоїда в *уявну поверхню* або *точку*.

Якщо коефіцієнти $A,\ B,\ C$ відмінні від нуля, але мають різні знаки, то ця поверхня буде *конусом* (з можливим випадком *кругового конуса*) або одним з *гіперболоїдів* (з можливим випадком *гіперболоїдів обертання*).

Якщо один з коефіцієнтів $A,\ B,\ C$ дорівнює нулю, а один з відповідних йому коефіцієнтів $D,\ E,\ F$ відмінний від нуля, то дана поверхня буде *параболоїдом* (з можливим випадком *параболоїда обертання*).

В усіх інших випадках поверхня другого порядку буде *циліндром*, або одною з видів її виродження в *пряму лінію*, *пару площин* чи *уявну поверхню*.

У процесі дослідження рівняння (8.120) для виявлення типу поверхні члени з однойменними координатами доповнюються до повних квадратів. Рівняння, яке ми при цьому одержимо, описує поверхню, зміщену в просторі відносно початку координат.

Для того щоб звести рівняння поверхні до найбільш зручного його вигляду, що відповідає симетричному розташуванню поверхні відносно початку координат, користуються формулами для паралельного перенесення координатних осей (див. § 1.4) системи $OXYZ$ відносно системи $O'X'Y'Z'$:

$$x = x' + x_0, \quad x = y' + y_0, \quad z = z' + z_0 \tag{8.122}$$

або

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0, \quad z' = z - z_0, \tag{8.123}$$

де x, y, z — координати деякої точки в системі координат $OXYZ$; x', y', z' — координати тієї ж точки в системі координат $O'X'Y'Z'$; x_0, y_0, z_0 — координати початку координат O' в системі координат $OXYZ$.

Рівняння поверхонь, розташованих симетрично відносно початку координат, мають найпростіший вигляд і називаються *канонічними*.

Приклади.

1. Визначити тип поверхні, заданої рівнянням $z = xy$.

Уведемо нову систему координат $OX'Y'Z'$, отриману із системи $OXYZ$ поворотом її на кут $\varphi = \pi/4$ відносно осі OZ (рис. 8.34).

Скористаємося формулами (8.121) перетворення координат при повороті координатних осей. Оскільки $\alpha_1 = \pi/4$, $\alpha_2 = (3/\pi)4$, $\alpha_3 = \pi/2$, $\beta_1 = \pi/4$, $\beta_2 = \pi/4$, $\beta_3 = \pi/2$, $\gamma_1 = \pi/2$, $\gamma_2 = \pi/2$, $\gamma_3 = 0$, то формули (8.121) наберуть вигляду:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x' - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y', \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y', \\ z = z'. \end{cases}$$

Підставляючи ці співвідношення в рівняння $z = xy$, одержимо:

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2)$$

або

$$x'^2 - y'^2 = 2z'.$$

Це рівняння гіперболічного параболоїда (8.112) при $p = q = 1$. Отже, рівняння $z = xy$ є рівнянням *гіперболічного параболоїда* (рис. 8.35).

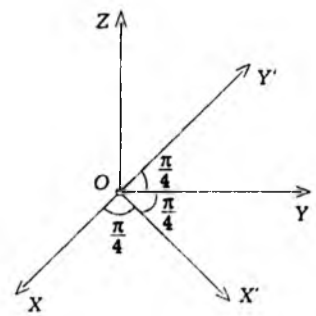


Рис. 8.34

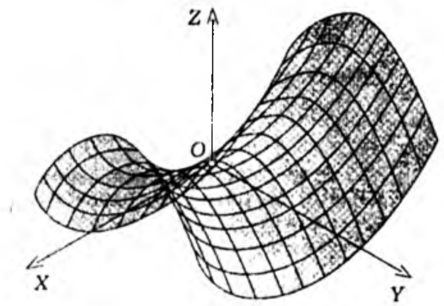


Рис. 8.35

2. Яку поверхню визначає рівняння $x^2 + 4x - y + z = 0$?

Доповнюючи до повного квадрата члени з x, одержимо:

$$(x + 2)^2 = y - z + 4.$$

Повернемо осі координат OX і OY в їх площині на кут $\varphi = 45°$ за годинниковою стрілкою відносно осі OX. Тоді, згідно з формулами (8.121), маємо:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}y - \dfrac{\sqrt{2}}{2}z, \\ z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}y + \dfrac{\sqrt{2}}{2}z. \end{cases}$$

Наше рівняння в системі координат $O'X'Y'Z'$ запишеться так:

$$(x' + 2)^2 = \sqrt{2}(y' + 2\sqrt{2}).$$

Зробимо паралельне перенесення координат згідно з формулами (8.122):

$$x'' = x' + 2, \quad y'' = y' + 2\sqrt{2}, \quad z'' = z'.$$

Остаточно одержимо:

$$x''^2 = \sqrt{2}y''.$$

Отже, наша поверхня є *параболічний циліндр* із твірними, паралельними осі OZ (рис. 8.36).

3. Яку поверхню визначає рівняння $4x^2 + z^2 + 8x + 16y + 6z - 3 = 0$?

Доповнюючи члени з x і z до повних квадратів, маємо

$$4(x+1)^2+(z+3)^2+16(y-1) = 0$$

або

$$\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(z+3)^2}{8} = -2(y-1) \ .$$

Скориставшись формулами (8.123) для паралельного перенесення координат
$$x' = x+1 \, , \quad y' = y-1 \, , \quad z' = z+3 \ ,$$
зводимо дане рівняння до канонічного вигляду:
$$\frac{x'^2}{2}+\frac{z'^2}{8} = -2y' \ .$$

Отже, дане рівняння визначає еліптичний параболоїд з віссю симетрії, паралельною координатній осі OY. Параболоїд напрямлений у від'ємний бік осі OY, оскільки в правій частині рівняння перед y стоїть знак мінус (рис. 8.37).

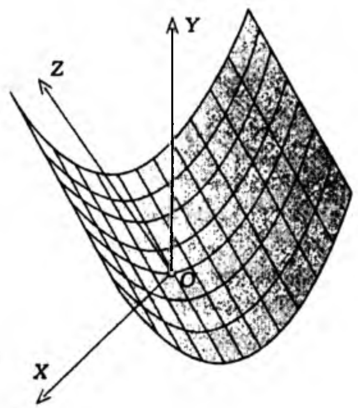


Рис. *8.36*

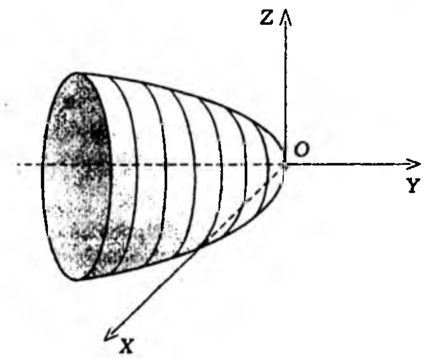


Рис. *8.37*

§ 8.13 ОГЛЯД ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

У попередньому параграфі було показано, що при відповідному виборі прямокутної декартової системи координат у просторі рівняння поверхні другого порядку завжди можна звести до найбільш простого, тобто канонічного вигляду. Будь-яке рівняння другого степеня відносно змінних x, y, z належить до одного з дев'яти типів канонічних рівнянь поверхонь другого порядку. Наведемо їх за структурою лівих частин.

1. Еліпсоїд (рис. 8.16)
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1 \ , \quad (8.124)$$
з можливими окремими випадками:

1) еліпсоїд обертання, при $a = b$ (рис. 8.15)
$$\frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1 \ ;$$

2) сфера, при $a = b = c = R$ (рис. 8.3 б))
$$x^2+y^2+z^2 = R^2 \ .$$

2. Однопорожнинний гіперболоїд (рис. 8.19)
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = 1 \ , \quad (8.125)$$
з можливим окремим випадком:

однопорожнинний гіперболоїд обертання, при $a = b$ (рис. 8.18)
$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = 1 \ .$$

3. Двопорожнинний гіперболоїд (рис. 8.22)
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = -1 \ , \quad (8.126)$$
з можливим окремим випадком:

двопорожнинний гіперболоїд обертання, при $a = b$ (рис. 8.21):
$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = -1 \ .$$

4. Конус (рис. 8.11 а))
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = 0 \ , \quad (8.127)$$

з можливим окремим випадком:

круговий конус, при $a = b$ (рис. 8.11 б))

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 .$$

5. Еліптичний параболоїд (рис. 8.26)

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z , \quad (8.128)$$

з можливим окремим випадком:

параболоїд обертання, при $p = q$ (рис. 8.25)

$$x^2 + y^2 = 2qz .$$

6. Гіперболічний параболоїд (рис. 8.32)

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z . \quad (8.129)$$

7. Еліптичний циліндр (рис. 8.6 а))

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 , \quad (8.130)$$

з можливим окремим випадком:

круговий циліндр, при $a = b = R$ (рис. 8.5 а)):

$$x^2 + y^2 = R^2 .$$

8. Гіперболічний циліндр (рис. 8.7 а))

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 . \quad (8.131)$$

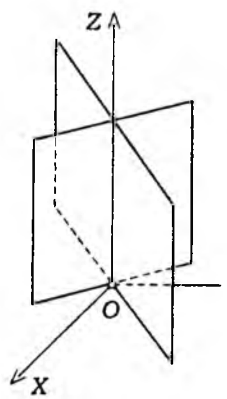


Рис. *8.38*

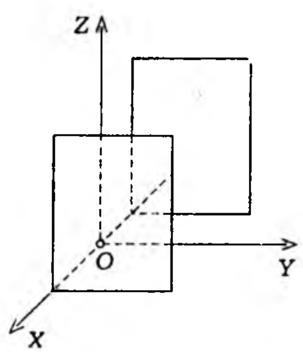


Рис. *8.39*

9. Параболічний циліндр (рис. 8.8 а))

$$y^2 = 2px . \quad (8.132)$$

Можна показати, що крім перелічених дев'яти типів (8.124–8.132) поверхонь другого порядку, інших не існує. Однак рівняння другого степеня можуть виражати, крім поверхонь у буквальному розумінні, й інші образи, які умовно, за виглядом їх рівнянь, теж можна назвати поверхнями. Це випадки виродження перерахованих вище дев'яти поверхонь у точку, пряму лінію або пару площин.

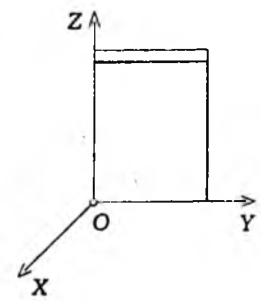


Рис. *8.40*

10. Точка $O(0;\ 0;\ 0)$ або уявний конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 . \quad (8.133)$$

11. Пряма лінія $x = 0,\ y = 0$ або пара уявних перетинних площин

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 . \quad (8.134)$$

12. Пара перетинних площин (рис. 8.38)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 . \quad (8.135)$$

13. Пара паралельних площин (рис. 8.39)

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 . \quad (8.136)$$

14. Пара збіжних площин (рис. 8.40)

$$x^2 = 0 . \quad (8.137)$$

Серед поверхонь другого порядку існують також три суто уявні поверхні, що являють собою уявні геометричні місця точок.

15. Уявний еліпсоїд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 . \quad (8.138)$$

16. Уявний еліптичний циліндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 . \quad (8.139)$$

17. *Пара уявних паралельних площин*

$$\frac{x^2}{a^2} = -1 . \quad (8.140)$$

Рівняння (8.138–8.140) не задовольняють координати жодної з точок простору.

§ 8.14 ЛІНІЇ В ПРОСТОРІ

Як було відзначено в § 8.1, будь-яку лінію в просторі можна розглядати як перетин двох поверхонь. Нехай

$$F_1(x, y, z) = 0 \quad \text{і} \quad F_2(x, y, z) = 0 \qquad (8.141)$$

є рівняння двох поверхонь, перетин яких дає деяку лінію L. Координати будь-якої точки лінії L задовольняють обидва рівняння (8.141), оскільки лінія одночасно належить обом поверхням. Отже, будь-яка точка лінії L задовольняє систему рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \qquad (8.142)$$

Можна зробити висновок, що *лінія в просторі є геометричне місце точок, координати яких задовольняють систему рівнянь* (8.142).

Лінію в просторі можна задати також параметрично, виразивши координати x, y і z її довільної точки через допоміжний параметр t:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \qquad (8.143)$$

Якщо для довільної точки $M(x;\ y;\ z)$ просторової лінії ввести радіус-вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$, то рівняння (8.143) можна записати у векторній формі:

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}\ . \qquad (8.144)$$

Таким чином, *параметричні рівняння просторової лінії є проекціями на координатній осі її змінного радіус-вектора.*

Розглянемо параметричні рівняння *гвинтової лінії*, однієї з найбільш поширених просторових ліній у математиці.

Гвинтовою лінією називається лінія, яку утворює точка при одночасному рівномірному переміщенні та обертанні вздовж певної осі.

Довільна точка гвинтової лінії бере участь у двох рухах одночасно: в рівномірному обертанні вздовж певної осі та в рівномірному переміщенні в напрямі, паралельному цій осі. Можна вважати, що переміщення точки вздовж осі відбувається по поверхні, від вигляду якої залежить і рівняння гвинтової лінії (рис. 8.41).

1. Циліндрична гвинтова лінія. Розглянемо прямий круговий циліндр із довільною точкою $M(x;\ y;\ z)$, напрямною лінією якого є коло радіуса a.

Вісь гвинтової лінії розташуємо на початку координат і сумістимо з віссю OZ, уважаючи, що рух точки відбувається за її додатним напрямом. Коли початкова точка гвинтової лінії A переміститься в точку M, то її проекція на площину XOY перейде в точку B, яка разом з точкою M розташована на загальній твірній кругового конуса. Утворений при цьому кут AOB позначимо через t і вважатимемо за параметр гвинтової лінії.

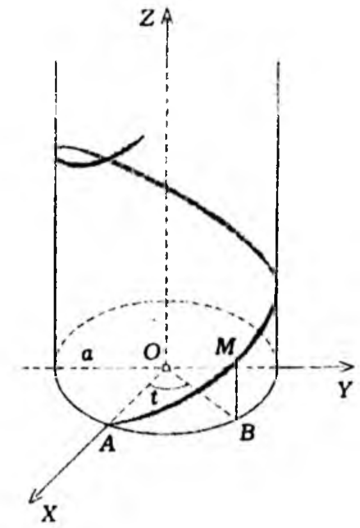


Рис. 8.41

З огляду на рівномірність обох рухів довільної точки M відношення поступального переміщення BM до довжини дуги, що описує її проекція на площину XOY, буде величиною сталою, тобто

$$\frac{BM}{\breve{AB}} = \lambda\ . \qquad (8.145)$$

Однак, оскільки довжина дуги $\breve{AB} = at$, то з формули (8.145) маємо $BM = \lambda at$. З іншого боку, $BM = z$, отже,

$$z = \lambda at\ . \qquad (8.146)$$

Дві інші координати точки M ті самі, що й у точки B, тобто згідно з формулами (1.19) маємо:

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t\ . \qquad (8.147)$$

Позначивши $\lambda a = b$, одержуємо *параметричні рівняння циліндричної гвинтової лінії*:

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt\ . \qquad (8.148)$$

При повному оберті точки M кут t збільшиться на 2π, а точка M знову опиниться на тій самій твірній, що й була. Відстань h, яку опише при цьому точка M, називається *кроком* гвинтової лінії. При цьому

$$h = b(t + 2\pi) - bt = 2\pi b\ , \qquad (8.149)$$

звідки

$$b = \frac{h}{2\pi} \quad (8.150)$$

Ураховуючи (8.150), рівняння гвинтової лінії (8.148), можемо записати у вигляді

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t, \qquad z = \frac{h}{2\pi}t \quad (8.151)$$

2. Конічна гвинтова лінія. У даному випадку довільна точка $M(x;\ y;\ z)$, обертаючись навколо осі, одночасно з цим також переміщується вздовж неї по круговій конічній поверхні. Наведемо параметричні рівняння даної просторової лінії без їх виведення:

$$x = ae^t\cos t, \qquad y = ae^t\sin t, \qquad z = ae^t \quad (8.152)$$

де зміст параметра t такий самий, як і у випадку циліндричної гвинтової лінії.

ВПРАВИ

1. Скласти рівняння сфери, якщо відомо, що вона проходить через точку $M_1(4;\ 2;\ 2)$ та має центр у точці $M_0(1;\ -1;\ -1)$.

2. Скласти рівняння сфери, якщо відомо, що точки $M_1(4;\ -3;\ 7)$ і $M_2(2;\ 1;\ 3)$ є кінцями одного з її діаметрів.

3. Скласти рівняння сфери, якщо відомо, що її центр знаходиться в точці $M_0(4;\ 2;\ 3)$ і вона дотикається площини

$$6x - 3y + 2z + 4 = 0 .$$

4. Знайти центр і радіус сфери

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 12x - 10y + 8z + 1 = 0 .$$

5. Яку поверхню визначає рівняння $x^2 + y^2 = 25$?

6. Скласти рівняння однопорожнинного гіперболоїда обертання, одержаного обертанням гіперболи $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$, навколо осі OZ.

7. Дослідити перерізи однопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 .$$

8. Скласти рівняння кругового циліндра, якщо відомо параметричні рівняння його осі $x = t$, $y = 1 + 2t$, $z = -3 - 2t$ і точку $N(1;\ -2;\ 1)$ на його поверхні.

9. Напрямна лінія конуса задана рівнянням $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, $z = 0$. Вершина конуса знаходиться в точці $S(5;\ 0;\ 3)$. Скласти рівняння конуса.

10. Скласти рівняння кругового циліндра, описаного навколо сфер:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 36 ,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36 .$$

11. Визначити вид поверхні:

а) $3x^2 - 4y^2 + 6z^2 + 24x + 8y - 36z + 122 = 0$;

б) $y^2 - 4x - 6y + 17 = 0$;

в) $2x^2 - 6y^2 + 3x^2 - 12x - 24y - 24z + 30 = 0$;

г) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 2x + 8y + 27z - 18 = 0$;

ґ) $x^2 + 2y^2 + 6x - 18y - 8z + 49 = 0$;

д) $x^2 - 3y^2 + 8x + 6y + 10 = 0$.

12. Довести, що рівняння $z^2 = xy$ визначає конус.

Глава 9

Геометрія арифметичного простору

§ 9.1 АРИФМЕТИЧНИЙ n-ВИМІРНИЙ ПРОСТІР

Одним з найважливіших відкриттів у геометрії було відкриття в XIX столітті геометрії Лобачевського, яке показало, що геометрія Евкліда не є єдиною несуперечливою геометричною системою. Навпаки, можливі різні несуперечливі геометричні системи. При цьому нову геометричну систему можна одержати з евклідової заміною будь-якої незалежної аксіоми іншою.

Зокрема, якщо в системі аксіом Евкліда замінити аксіому, за якою простір має три виміри, на аксіому, за якою простір має n вимірів, де n — довільне натуральне число, то ми одержимо несуперечливу геометричну систему, яка зветься *багатовимірною евклідовою геометрією*.

Перш ніж перейти до розгляду узагальнення простору, звернемо увагу на те, що такого узагальнення, перш за все, потребує практика, тому що в техніці, фізиці, економіці та інших дисциплінах доводиться вивчати об'єкти, для задання яких недостатньо трьох параметрів (координат).

З попередніх глав аналітичної геометрії ми знаємо, що довільна точка на числовій осі визначається числом або координатою, на площині — двійкою дійсних чисел, тобто своїми координатами. Аналогічно довільна точка тривимірного простору визначається трьома дійсними числами, тобто системою з трьох координат.

Проте часто доводиться розглядати такі об'єкти, для задання яких недостатньо трьох дійсних чисел. Тому вважаємо за доцільне ввести до розгляду поняття n-вимірного простору.

Визначення n-вимірного простору ми почнемо з визначення n-вимірної точки, при цьому ми будемо виходити із задання точки для випадку $n = 2$ (площина) та $n = 3$ (звичайний простір) й узагальнення будемо вести за аналогією до цього.

Будь-який упорядкований набір $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з довільних n дійсних чисел називається *n-вимірною точкою* й позначається $M(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$. При цьому числа x_i називаються *координатами точки*. Точка $O(0;\ 0;\ \ldots;\ 0)$ називається *початком координат*.

Сукупність усіх можливих n-вимірних точок називається *n-вимірним точковим простором* і позначається A^n.

Точковий n-вимірний простір називають *арифметичним простором*.

Із запровадженими поняттями ми не пов'язуємо ніяких наочних уявлень, тому що своїми органами чуття людина нездатна сприймати більше аніж три взаємно перпендикулярних напрямки.

Надалі ми будемо виходити з аналітичних основ, називаючи при цьому окремі операції та формули геометричними термінами подібно до того, як це ми звикли робити у випадках одного, двох та трьох вимірів. Завдяки цій аналогії до наочних співвідношень, що існують у навколишньому світі, ми можемо застосовувати геометричну інтуїцію до розв'язання складних задач. Відзначимо, що цей прийом широко використовується в багатьох дисциплінах.

За аналогією до аналітичної геометрії площини та простору введемо поняття відстані між двома n-вимірними точками $M(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ та $M'(x'_1;\ x'_2;\ \ldots;\ x'_n)$ як числа, яке визначається формулою

$$MM' = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + \ldots + (x_n - x'_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x'_i)^2} \quad . \qquad (9.1)$$

У випадках $n = 2$ та $n = 3$ ця формула повністю збігається з відповідними формулами (1.7) та (1.22) відстані між точками на площині та в просторі.

Цікаво відзначити, що поняття відстані, введене таким чином, має багато спільного з нашими звичайними уявленнями про поняття відстані. Зокрема, справедлива так звана *нерівність трикутника*

$$MM' \le MM'' + M''M' \quad , \qquad (9.2)$$

де MM', MM'', $M'M''$ — відстані між n-вимірними точками M, M', M'', тобто аналог так званої теореми елементарної геометрії про те, що в трикутнику сума будь-яких двох сторін більша за третю.

Будь-яке рівняння, яке задовольняють координати n-вимірних точок, будемо називати рівнянням $(n-1)$-вимірної поверхні або *гіперповерхні*. Тобто *гіперповерхнею* називається сукупність точок простору A^n, координати яких задовольняють рівняння

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad . \qquad (9.3)$$

Перетин двох гіперповерхонь узагалі дає $(n-2)$-вимірну поверхню, тобто сукупність точок, координати яких задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 , \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 , \end{cases} \qquad (9.4)$$

і так далі. *Одновимірна поверхня називається лінією.*

Рівняння гіперповерхні та m-вимірної поверхні часто подають параметрично

$$x_i = f_i(t_1, t_2, \ldots, t_m) , \qquad i = 1, 2, \ldots, n \quad . \qquad (9.5)$$

При цьому кількість параметрів збігається з вимірністю поверхні.

При $m = 1$ одержимо параметричне рівняння лінії

$$x_i = f_i(t) , \qquad i = 1, 2, \ldots, n \quad . \qquad (9.6)$$

Геометричне місце точок, для яких одна з координат дорівнює нулю, а інші довільні, називається координатною гіперплощиною. Легко помітити, що рівняння координатних гіперплощин буде

$$x_i = 0 \quad . \qquad (9.7)$$

Число координатних гіперплощин в A^n дорівнює n. Перетин $n-1$ координатних гіперплощин дає нам пряму лінію, яка називається *координатною віссю*. Вона являє собою геометричне місце точок, усі координати яких, крім i-ї, дорівнюють нулю. Точка $O(0;\ 0;\ \ldots;\ 0)$ є спільною для всіх координатних осей і називається *початком n-вимірної системи координат*.

§ 9.2 ПРЯМІ ЛІНІЇ ТА ПЛОЩИНИ В n-ВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ

Поняття прямої лінії в n-вимірному просторі вводиться за аналогією до звичайного тривимірного простору.

Перш за все згадаємо, що рівняння прямої лінії у звичайному тривимірному просторі, що проходить через дві точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ та $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, можна записати у вигляді

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{9.8}$$

або в параметричній формі

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t. \end{cases} \tag{9.9}$$

Як бачимо, в рівняннях прямої лінії координати її довільної точки є лінійні функції параметра t. Цю властивість прямої ми візьмемо за основу при означенні прямої в n-вимірному просторі.

Прямою лінією в n-вимірному просторі називається множина точок n-вимірного простору, координати яких є лінійними функціями одного й того ж параметра t:

$$x_i = a_i + b_i t, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\ , \tag{9.10}$$

причому областю зміни параметра t є вся числова вісь.

Рівняння (9.10) називають *параметричними рівняннями* прямої лінії. Вони є окремим випадком рівнянь (9.6).

Якщо вилучити з рівнянь (9.10) параметр t, то ми одержимо рівняння

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2} = \ldots = \frac{x_n - a_n}{b_n}\ , \tag{9.11}$$

які називаються *канонічними рівняннями* прямої лінії.

Якщо в (9.10) параметр t змінюється в певних межах

$$\alpha \le t \le \beta\ , \tag{9.12}$$

то відповідна множина точок прямої називається *відрізком прямої* або просто *відрізком*. Точки M_1 та M_2, які відповідають значенням $t = \alpha$ та $t = \beta$, називаються кінцями відрізка, а сам відрізок будемо позначати M_1M_2.

Таким чином, якщо параметр t задовольняє строгу нерівність $\alpha < t < \beta$, то відповідна точка буде внутрішньою точкою відрізка.

Якщо задані дві які-небудь точки $A(a_1;\ \ldots;\ a_n)$ та $B(b_1;\ \ldots;\ b_n)$, то ми будемо вважати, що вони визначають вектор $\overrightarrow{AB}$ з координатами $(b_1 - a_1;\ b_2 - a_2;\ \ldots;\ b_n - a_n)$. Точка A називається *початком* вектора, а точка B — *кінцем* вектора $\overrightarrow{AB}$. Таким чином, *координати вектора дорівнюють різницям координат його кінця та початку.*

Зокрема, якщо точка A є початком координат, то вектор $\overrightarrow{AB}$ будемо називати *радіусом-вектором* точки B.

У формулах (9.10) та (9.11) числа a_i є координати деякої точки $A(a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n)$, що лежить на прямій. Числа b_i з точністю до спільного множника дорівнюють різниці координат двох будь-яких точок прямої. Сукупність чисел b_i називається *напрямним вектором* прямої лінії.

Таким чином, будь-яка пряма лінія в n-вимірному просторі задається якою-небудь своєю точкою $A(a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n)$ та напрямним вектором $\mathbf{b}(b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_n)$.

Якщо в n-вимірному просторі задані дві точки $A'(x_1';\ x_2';\ \ldots;\ x_n')$ та $A''(x_1'';\ x_2'';\ \ldots;\ x_n'')$, то за напрямний вектор прямої лінії, що проходить через ці точки, можна взяти вектор $\overrightarrow{A'A''}$, і тоді рівняння прямої лінії, що проходить через дві задані точки, матиме вигляд:

$$x_i = x_i' + (x_i'' - x_i')t = (1 - t)x_i' + t x_i'' \tag{9.13}$$

або

$$\frac{x_1 - x_1'}{x_1'' - x_1'} = \frac{x_2 - x_2'}{x_2'' - x_2'} = \ldots = \frac{x_i - x_i'}{x_i'' - x_i'} = \ldots = \frac{x_n - x_n'}{x_n'' - x_n'}\ . \tag{9.14.}$$

Якщо для двох заданих прямих

$$x_i' = a_i' + b_i' t' \qquad \text{та} \qquad x_i'' = a_i'' + b_i'' t''\ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n\ , \tag{9.15}$$

виконується співвідношення пропорційності між коефіцієнтами b_i' та b_i'', аналогічне співвідношенню (6.32):

$$\frac{b_1'}{b_1''} = \frac{b_2'}{b_2''} = \ldots = \frac{b_i'}{b_i''} = \ldots = \frac{b_n'}{b_n''}\ , \tag{9.16}$$

то прямі лінії (9.15) називаються *паралельними*.

Для чисел b_i' та b_i'', як відомо, має місце *нерівність Коші*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} b_i' \cdot b_i''\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} (b_i')^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (b_i'')^2\ , \tag{9.17}$$

звідки

$$-1 \le \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i' \cdot b_i''}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i')^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i'')^2}} \le 1 \ . \qquad (9.18)$$

Співвідношення (9.18) можна розглядати як косинус певного кута φ.

Число φ, для якого

$$\cos\varphi = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} b_i' \cdot b_i''\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i')^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i'')^2}} \ , \qquad (9.19)$$

називається *кутом між прямими* (9.15).

Таким чином, згідно з означенням кут φ між прямими змінюється в межах: $0 \le \varphi \le \pi/2$. Легко помітити, що для паралельних прямих $\cos\varphi = 1$, тобто $\varphi = 0$.

Якщо дві прямі n-вимірного простору, що задаються рівняннями (9.15), перетинаються, тобто мають спільну точку, то при деяких значеннях параметрів t' і t'' справедливі рівності:

$$a_i' + b_i' t' = a_i'' + b_i'' t'' \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n \ . \qquad (9.20)$$

Прямі, які не перетинаються і не паралельні, називаються мимобіжними.

За аналогією до означення гіперповерхні в арифметичному просторі A^n, уводяться поняття гіперплощини як гіперповерхні, для якої функція (9.3) лінійна.

Гіперплощиною в n-вимірному просторі називається множина точок n-вимірного простору, координати x_i яких задовольняють лінійне рівняння

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0 \ , \qquad (9.21)$$

де $a_i (i = 0, 1, \ldots, n)$ — деякі дійсні числа, причому хоча б одне з чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не дорівнює нулю.

Легко помітити, що координатні гіперплощини (9.7) є окремим випадком гіперплощин (9.21) (якщо в (9.21) покласти всі $a_i = 0$, крім a_k, то одержимо рівняння $x_k = 0$).

Перетин двох гіперплощин

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + a_0 = 0 \qquad (9.22)$$

та

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n + b_0 = 0 \qquad (9.23)$$

є *множиною точок* n-вимірного простору, які одночасно належать обом гіперплощинам, тобто сукупність точок, координати яких задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + a_0 = 0 \, , \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n + b_0 = 0 \, . \end{cases} \qquad (9.24)$$

Якщо система (9.24) не має розв'язків, то гіперплощини (9.22) і (9.23) не мають спільних точок і називаються *паралельними*.

Для того щоб дві гіперплощини (9.22) і (9.23) були *паралельними*, необхідно, щоб виконувалася умова:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} \ne \frac{a_0}{b_0} \ . \qquad (9.25)$$

Якщо ж система (9.24) така, що

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{a_0}{b_0} \, , \qquad i = 1, 2, \ldots, n \ , \qquad (9.26)$$

то гіперплощини (9.22), (9.23) *збігаються*, тому що в системі (9.24) одне з рівнянь є наслідком другого.

Умови (9.25) та (9.26) аналогічні до відповідних умов (5.25) та (5.27) до площин звичайної тривимірної аналітичної геометрії.

Нехай є $n - m$ різних гіперплощин у n-вимірному просторі:

$$\begin{aligned} & a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n + a_{10} = 0 \, , \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a_{n-m,1} x_1 + \ldots + a_{n-m,n} x_n + a_{n-m,0} = 0 \, . \end{aligned} \qquad (9.27)$$

Якщо жодна з гіперплощин (9.27) не є паралельною, то перетин цих гіперплощин називається *m-вимірною площиною n-вимірного простору*, або коротко — *m-площиною*.

Таким чином, *m-площина — це множина точок n-вимірного простору, координати яких задовольняють систему лінійних рівнянь*:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n + a_{10} = 0 \, , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-m,1} x_1 + \ldots + a_{n-m,n} x_n + a_{n-m,0} = 0 \, . \end{cases} \qquad (9.28)$$

Ранг матриці системи (9.28) при цьому дорівнює $n - m$.

Систему рівнянь (9.28) називають рівнянням m-площини.

При $m = 1$ одержимо 1-площину, тобто пряму в n-вимірному просторі, при $m = 2$ — 2-площину, що має ті ж властивості, що й площина у звичайному просторі (при $n = 3$).

Якщо записати загальний розв'язок системи (9.28) і припустити для вільних змінних $x_s = t_s$, то рівняння кожної m-площини можна записати в параметричній формі:

$$x_i = x_i^0 + \sum_{s=1}^{m} b_{is} t_s, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \; , \quad (9.29)$$

де x_i^0, b_{is} — деякі дійсні числа, t_s — параметри, тобто величини, що набувають довільних значень.

Надавши параметрам t_s якихось конкретних значень, ми одержимо деяку точку m-площини. При цьому параметри t_s можна розглядати як координати точок m-площини. Отже, кожну точку m-площини можна розглядати і як m-вимірну точку арифметичного простору A_m.

Таким чином, *m-площина арифметичного простору A^n буде множиною m-вимірних точок, тобто арифметичним m-вимірним простором.*

Нехай у n-вимірному просторі задані $m+1$ точки $M_0(x_1^0; \ldots; x_n^0)$, $M_1(x_1^1; \ldots; x_n^1)$, ..., $M_m(x_1^m; \ldots; x_n^m)$. Ці точки визначають m-площину, рівняння якої можна записати у вигляді

$$x_i = x_i^0 + \sum_{s=1}^{m} (x_i^s - x_i^0) t_s, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \; . \quad (9.30)$$

Порівнюючи (9.29) і (9.30), бачимо, що величини $b_{1s}, b_{2s}, \ldots, b_{ns}$ можна розглядати як різницю відповідних координат двох точок m-площини, тобто координати вектора, початок і кінець якого належать m-площині.

Вектори $\mathbf{b}_s = (b_{1s}; \ldots; b_{ns})$ називаються напрямними векторами m-площини.

Будемо називати m-площину, що визначається точками M_0, $M_1, \ldots, M_m$, m-площиною $M_0 M_1 \ldots M_m$.

Зокрема, якщо $m = n-1$, то ми одержимо гіперплощину $M_0 M_1 \ldots M_{n-1}$, причому з (9.30) випливає

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & x_1^1 - x_1^0 & \ldots & x_1^{n-1} - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 & x_2^1 - x_2^0 & \ldots & x_2^{n-1} - x_2^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_n^0 & x_n^1 - x_n^0 & \ldots & x_n^{n-1} - x_n^0 \end{vmatrix} = 0 \; . \quad (9.31)$$

Це і є рівняння *гіперплощини*, що проходить через n точок $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$.

Користуючись властивостями визначників, вираз (9.31) можна переписати у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x_1^0 & x_1^1 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1 \\ x_2^0 & x_2^1 & \ldots & x_2^{n-1} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^0 & x_n^1 & \ldots & x_n^{n-1} & x_n \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \; . \quad (9.32)$$

Припустивши в (9.30) $x_i = x_i^n$, ми одержимо умову того, що $n+1$ точка $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}, M_n$ знаходиться в одній гіперплощині.

Будемо називати ***відстанню*** від точки $M'(x_1'; \ldots; x_n')$ до m-площини мінімальну відстань від даної точки до точок m-площини.

Відстань d від точки M' до гіперплощини

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + a_0 = 0$$

за аналогією до формули (5.20) звичайної тривимірної аналітичної геометрії дорівнює

$$d = \frac{|a_1 x_1' + \ldots + a_n x_n' + a_0|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}} \; . \quad (9.33)$$

У (9.29) числа b_{is} можна розглядати як елементи матриці $B = (b)_{ik}$, а числа x_i, x_i^0, t_s — як координати векторів, або матриці, які складаються з одного стовпця або рядка.

Тоді рівняння m-площини можна записати у вигляді

$$X = X^0 + BT \; , \quad (9.34)$$

де

$$X = (x_1 \; x_2 \ldots x_n)^T \; ,$$

$$X^0 = (x_1^0 \; x_2^0 \ldots x_n^0) \; ,$$

$$T = (t_1 \; t_2 \ldots t_n)^T \; .$$

Рівняння m-площини (9.34) називається *параметричним рівнянням m-площини в матричній формі.*

Аналогічно рівняння m-площини (9.28) можна записати в матричній формі

$$AX + A_0 = 0 \; , \quad (9.35)$$

де $A = (a)_{ik}$, $A_0 = (a_{10} \; a_{20} \ldots a_{m-n0})^T$ — матриці.

Нехай у n-вимірному просторі задані m-площина та l-площина параметричними рівняннями

$$X = X' + AT \quad (9.36)$$

та

$$X = X'' + BU \; , \quad (9.37)$$

де $$X' = (x'_1\ x'_2\ \dots\ x'_m)^T, \qquad X'' = (x''_1\ x''_2\ \dots\ x''_l)^T,$$

$$T = (t_1\ t_2\ \dots\ t_m)^T, \qquad U = (u_1\ u_2\ \dots\ u_l)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nl} \end{pmatrix}.$$

Напрямні вектори m-площини (9.36) будуть:

$$\mathbf{a}_1(a_{11}; \dots; a_{n1}), \quad \mathbf{a}_2(a_{12}; \dots; a_{n2}), \quad \dots, \quad \mathbf{a}_m(a_{1m}; \dots; a_{nm}),$$

а l-площини (9.37) —

$$\mathbf{b}_1(b_{11}; \dots; b_{n1}), \quad \mathbf{b}_2(b_{12}; \dots; b_{n2}), \quad \dots, \quad \mathbf{b}_l(b_{1l}; \dots; b_{nl}).$$

Якщо один з векторів $\mathbf{b}_s$ є лінійною комбінацією векторів $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$, то кажуть, що l-площина має спільний напрямок з m-площиною. Наприклад, у звичайному просторі $(n = 3)$ пряма (1-площина, $l = 1$), якщо вона паралельна площині (2-площина, $l = 2$), то має з нею спільний напрямок, бо її напрямний вектор є лінійною комбінацією двох неколінеарних векторів площини (рис. 9.1).

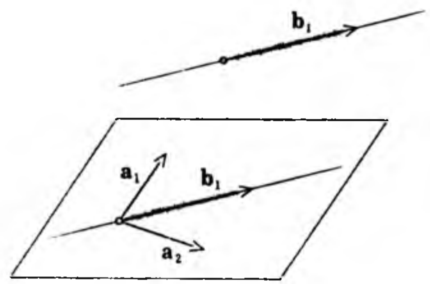


Рис. *9.1*

Дві площини у звичайному просторі ($n = 3$, $l = m = 2$), якщо вони паралельні, мають два спільних напрямки, бо кожний напрямний вектор однієї з них є лінійною комбінацією двох неколінеарних векторів іншої (рис. 9.2).

Якщо кожний з векторів $\mathbf{b}_s$ площини (9.37) лінійно виражається через вектори $\mathbf{a}_s$ площини (9.36), то кажуть, що l-площина паралельна m-площині.

Нехай площини мають однакову вимірність $(l = m)$ і визначаються системами рівнянь вигляду (9.28). Тоді для того, щоб вони були паралельними, необхідно й достатньо, аби відповідні їм системи однорідних рівнянь були еквівалентними. Зокрема, для двох гіперплощин (9.22) і (9.23) це означає умову (9.25).

Площини, які не мають спільних точок і спільних напрямків, називаються мимобіжними.

У звичайному просторі $(n = 3)$ відомо, що дві прямі (1-площини) можуть бути мимобіжними, але пряма та площина ($l = 1$, $m = 2$), а також дві площини $(l = m = 2)$ мимобіжними бути не можуть. При збільшенні виміру простору він стає більш "просторим", а тому з'являється можливість будувати мимобіжні площини різних вимірностей, а не тільки одновимірні.

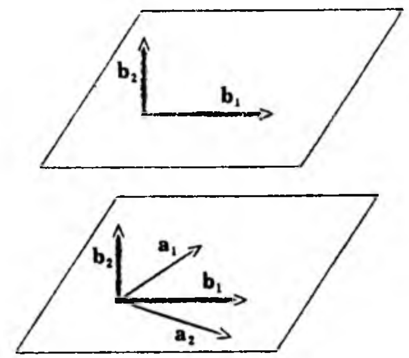


Рис. *9.2*

Якщо l-площина і m-площина мають спільні точки, то кажуть, що вони перетинаються. Їх перетином є певна d-площина. Це означає, що d напрямних векторів $\mathbf{b}_s$ є лінійною комбінацією векторів $\mathbf{a}_s$, а решта $l - d$ векторів $\mathbf{b}_s$ лінійно незалежні від векторів $\mathbf{a}_s$ (на рис. 9.3 вважається $l = m = 2$, $d = 1$).

Не виключається можливість, що d-площина складається лише з однієї точки $(d = 0)$. Це видно на прикладі двох прямих, що перетинаються, або прямої та площини ($l = 1$, $m = 2$, $d = 0$) (рис. 9.4).

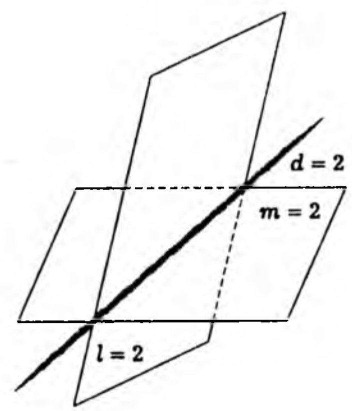


Рис. *9.3*

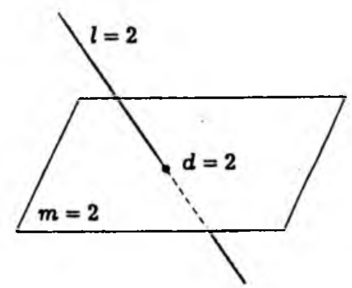


Рис. *9.4*

§ 9.3 ОПУКЛІ МНОЖИНИ

Розглянемо точковий n-вимірний простір. Будемо називати *точковою множиною* точок n-вимірного простору сукупність точок цього простору. Точкові множини будемо позначати великими латинськими літерами, наприклад X, Y тощо. Той факт, що точка $M(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ належить множині X, будемо позначати символом

$$M \in X\ . \tag{9.38}$$

Нехай у n-вимірному просторі A^n задані дві точкові множини X та Y. Множину точок з A^n, які належать обом множинам X та Y, називають *перетином* цих множин і позначають $X \cap Y$ (рис. 9.5).

Множину точок, які належать множині X або множині Y, або обом множинам одночасно, називають *об'єднанням* або *сумою* множин X та Y і позначають $X \cup Y$ (рис. 9.6).

За аналогією до тривимірного простору будемо називати *гіперсферою* множину всіх точок з A^n, однаково віддалених від заданої точки, тобто сукупність точок, координати яких задовольняють рівняння

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2 = R^2\ . \tag{9.39}$$

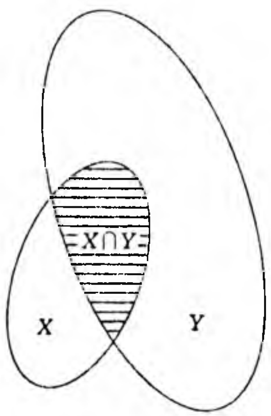


Рис. 9.5

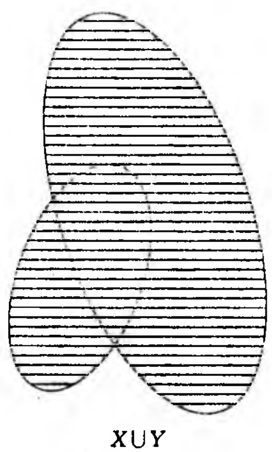


Рис. 9.6

Точку $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ будемо називати *центром* гіперсфери, а число R її *радіусом*.

Сукупність точок простору A^n, для яких виконується нерівність

$$(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2 < R^2\ , \tag{9.40}$$

називається *гіперкулею*.

Гіперкуля радіуса ε із центром у точці $M_0(x_1^0;\ \ldots;\ x_n^0)$ називається ε-околом точки M_0.

Точка M множини X називається *внутрішньою* точкою цієї множини, якщо існує такий ε-окіл точки M, усі точки якого належать множині X. Якщо ж довільний ε-окіл точки M містить як точки множини X, так і точки, що їй не належать, то точка M називається *граничною* точкою множини X (при цьому сама точка M може і не належати X).

Якщо множина X містить усі свої граничні точки, то вона називається замкненою множиною. Множина X називається *відкритою множиною*, якщо всі її точки є внутрішніми.

Гіперплощина та гіперсфера є прикладами замкнених множин, а ε-окіл — відкритої множини.

Якщо модуль координат усіх точок множини X не перевищує певного числа, то множина X називається *обмеженою*. Це значить, що існує куля скінченного радіуса , якій належать усі точки множини. Якщо ж такої кулі не існує, то множина називається *необмеженою*.

Нехай є дві точки $M_1(x_1';\ \ldots;\ x_n')$ та $M_2(x_1'';\ \ldots;\ x_n'')$ n-вимірного простору. Точка $M(x_1;\ \ldots;\ x_n)$ називається *лінійною комбінацією* точок M_1, M_2, якщо виконуються умови:

$$x_i = \alpha x_i' + \beta x_i''\ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n\ , \tag{9.41}$$

де α, β — деякі дійсні числа, причому $\alpha + \beta = 1$ або

$$x_i = (1 - \lambda)x_i' + \lambda x_i''\ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n\ , \tag{9.42}$$

якщо позначити $\beta = \lambda,\ \alpha = 1 - \lambda$.

Як ми бачили в попередньому параграфі, формула (9.42) означає, що точка M належить прямій M_1M_2. Отже, множина лінійних комбінацій двох точок є прямою, що проходить через них.

Якщо ж у (9.41) $\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$ (або у (9.42) $0 \leq \lambda \leq 1$), то лінійна комбінація називається *опуклою*.

Аналогічно можна ввести поняття лінійної опуклої комбінації трьох і більше точок: точка $M(x_1;\ \ldots;\ x_n)$ називається лінійною комбінацією точок $M_k(x_1^k;\ x_2^k;\ \ldots;\ x_n^k)$, $(k = 1, 2, \ldots, m)$, якщо

$$x_i = \alpha_1 x_i^1 + \alpha_2 x_i^2 + \ldots + \alpha_m x_i^m\ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n\ ,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = 1\ . \tag{9.43}$$

Якщо ж при цьому ще й усі $\alpha_k > 0$, то лінійна комбінація (9.43) називається опуклою комбінацією точок $M_1, M_2, \ldots, M_m$.

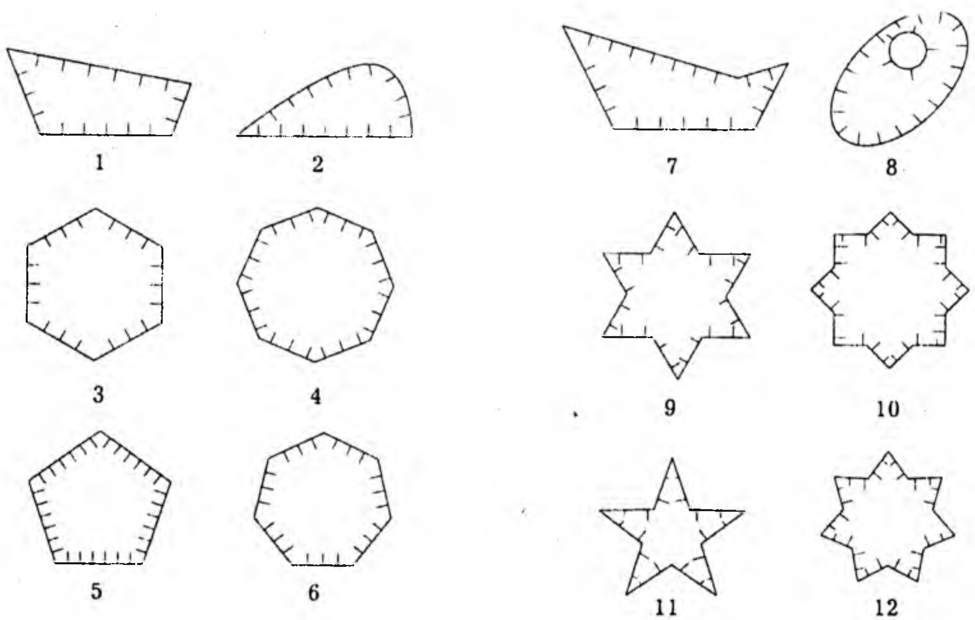
Як було показано в § 9.2, пряма, яка проходить через дві точки $M_2(x_1''; \ldots; x_n'')$ та $M_1(x_1'; \ldots; x_n')$, має рівняння

$$x_i = (1-\lambda)x_i' + \lambda x_i'', \qquad i = 1, 2, \ldots, n \ , \tag{9.44}$$

причому, якщо $0 \le \lambda \le 1$, то точка M належить відрізку M_1M_2. Отже, *відрізок є сукупність точок, які є опуклими комбінаціями кінців відрізка.*

Множина X точок n-вимірного простору називається опуклою, якщо разом з довільними своїми двома точками M_1 та M_2 вона містить і всі точки відрізка, який з'єднує ці точки.

Оскільки відрізок є сукупність опуклих комбінацій своїх кінців, то поняття опуклої множини можна визначити по-іншому: *множина X називається опуклою, якщо вона містить довільну опуклу комбінацію довільних своїх точок.*



а) б)

Рис. 9.7

Прикладом опуклих множин є m-площини, зокрема гіперплощина, пряма та площина у звичайному просторі. На рис. 9.7а) зображені приклади опуклих множин на площині (1–6), а на рис. 9.7б) — неопуклих (7–12).

Точка $M(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ опуклої множини X називається *крайньою* або *кутовою* точкою множини X, якщо її не можна подати у вигляді опуклої комбінації двох різних точок множини X.

З означення випливає, що крайня точка не може бути внутрішньою точкою будь-якого відрізка, який належить множині X, тобто вона є граничною точкою цієї множини. Однак не всі граничні точки є крайніми. Наприклад, довільні точки сторін трикутника ABC хоч і є граничними, але не є крайніми, оскільки вони є внутрішні точки відрізка (сторони), що належить трикутнику. Однак вершини трикутника є крайні точки цієї множини.

эрема 9.1 *Перетин довільного числа опуклих множин є також опукла множина.*

Дійсно, нехай маємо дві опуклі множини X та Y. За означенням перетин $X \cap Y$ є сукупністю точок, що одночасно належать як X, так і Y. Нехай M_1, M_2 — дві будь-які точки перетину $X \cap Y$. За означенням опуклості, оскільки M_1, M_2 належать X, то й довільна їх опукла комбінація M належить X. З іншого боку, оскільки M_1, M_2 належать Y, то й точка M (їх опукла комбінація) належить Y. Отже, M належить X і Y одночасно, а значить вона належить $X \cap Y$. А це означає, що $X \cap Y$ є опукла множина.

Легко побачити, що все сказане справедливе й для будь-якого числа опуклих множин.

Теорема доведена.

Розглянемо гіперплощину

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_0 = 0 \ . \tag{9.45}$$

Множини точок простору A^n, для координат яких виконуються нерівності

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_0 > 0 \tag{9.46}$$

або

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_0 < 0 \ , \tag{9.47}$$

називаються *відкритими напівпросторами.* Якщо в (9.46), (9.47) можливі й рівності, то множини X, Y називаються *замкненими напівпросторами.*

Теорема 9.2 *Напівпростори, на які розбиває простір A^n довільна гіперплощина, є опуклі множини.*

Дійсно, нехай є гіперплощина (9.45). Якщо точки $M_1(x_1'; \ldots; x_n')$ та $M_2(x_1''; \ldots; x_n'')$ належать одному й тому ж напівпростору, наприклад X, тоді

$$a_1x_1' + a_2x_2' + \ldots + a_nx_n' + a_0 > 0 \ ,$$

$$a_1x_1'' + a_2x_2'' + \ldots + a_nx_n'' + a_0 > 0 \ . \quad (9.48)$$

Нехай $\overline{M}(\bar{x}_1; \ldots; \bar{x}_n)$ є довільна точка відрізка M_1M_2, тоді за формулою (9.44):

$$\bar{x}_i = (1-\lambda)x_i' + \lambda x_i'' , \qquad 0 \le \lambda \le 1 , \quad i = 1, 2, \ldots, n \ . \quad (9.49)$$

Оскільки $1-\lambda \ge 0$, $\lambda \ge 0$, то, домноживши першу нерівність (9.48) на $1-\lambda$, а другу на λ і додавши, одержимо

$$(1-\lambda)(a_1x_1' + \ldots + a_nx_n' + a_0) + \lambda(a_1x_1'' + \ldots + a_nx_n'' + a_0) > 0$$

або

$$a_1[(1-\lambda)x_1' + \lambda x_1''] + \ldots + a_n[(1-\lambda)x_n' + \lambda x_n''] + a_0 > 0 \ .$$

Тоді за (9.49) маємо

$$a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + \ldots + a_n\bar{x}_n + a_0 > 0 \ ,$$

тобто точка $\overline{M}$ належить тому ж напівпростору, що й точки M_1, M_2, а це означає, що множина X є опуклою.

Теорема доведена.

Легко показати, що коли M_1 та M_2 належать різним напівпросторам, то на відрізку M_1M_2 знайдеться точка M, яка належить гіперплощині (9.45).

Отже, можна зробити висновок, що перетин довільного числа напівпросторів, визначених різними гіперплощинами, є опукла множина.

Можна довести, що коли множина X є опуклою та замкненою, то довільна точка M або належить X, або існує така гіперплощина, де всі точки x знаходяться в іншому напівпросторі, визначеному цією гіперплощиною, і точка M туди не входить.

Іншими словами, існує гіперплощина, яка розділяє точку M та множину X.

Нехай M є гранична точка опуклої множини X. Гіперплощина, яка проходить через M і така, що всі точки множини X знаходяться в одному й тому ж напівпросторі відносно цієї гіперплощини, називається *опорною* гіперплощиною до X у точці M.

§ 9.4 ОПУКЛІ МНОГОГРАННИКИ В n-ВИМІРНИХ ПРОСТОРАХ

Нехай у n-вимірному просторі є пряма лінія

$$x_i = x_i^0 + a_it \ . \quad (9.50)$$

Якщо в (9.50) параметр t набуває тільки невід'ємних значень ($t \ge 0$), то сукупність таких точок ми будемо називати *променем* або *напівпрямою* з вершиною $x^0(x_1^0; \ldots; x_n^0)$. Легко побачити, що за вершину променя можна взяти довільну точку прямої (9.50). Це буде відповідати тому, що в (9.50) параметр t набирає значення $t = t_0$ (тоді вершиною буде точка $A(x_1^0 + a_1t_0; \ldots; x_n^0 + a_nt_0)$).

Якщо в (9.50) параметр t набирає значення $0 \le t \le 1$, (або $\alpha \le t \le \beta$), то відповідна множина точок є *відрізком* з кінцями в точках $A(x_1^0; \ldots; x_n^0)$ та $B(x_1^0 + a_1; \ldots; x_n^0 + a_n)$.

Довжиною відрізка будемо називати відстань між його кінцями.

Нехай тепер є m-площина

$$x_i = x_i^0 + \sum_{s=1}^{m} a_{is}t_s \ . \quad (9.51)$$

Якщо в (9.51) одному з параметрів t_s надавати тільки невід'ємні значення $t_s \ge 0$, а іншим параметрам — довільні дійсні значення, то ми одержимо *m-напівплощину*, межею якої є $(m-1)$-площина

$$x_i = x_i^0 + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \ne s}}^{m} a_{i\alpha}t_\alpha \ .$$

Якщо в (9.51) усім параметрам t_s надавати тільки значення $0 \le t_s \le 1$, то ми одержимо *m-паралелепіпед* з вершинами

$$A_0(x_i^0), \quad A_1(x_i^0 + a_{i1}), \quad A_{12}(x_i^0 + a_{i1} + a_{i2}), \quad \ldots ,$$

$$A_{12\ldots m}(x_i^0 + a_{i1} + \ldots + a_{im}) \ .$$

Надавши в (9.51) значення $0 \le t_s \le 1$ всім параметрам, окрім t_k, а параметру t_k — значення $t_k = 0$ або $t_k = 1$, ми одержимо $(m-1)$-паралелепіпеди, які є гранями m-паралелепіпеда. Грані цих $(m-1)$-паралелепіпедів називаються $(m-2)$-гранями m-паралелепіпеда тощо. Отже, у m-паралелепіпеда є p-граней, де p пробігає значення від 0 до $m-1$; 0-грані m-паралелепіпеда збігаються з його вершинами; 1-грані називаються ребрами (при $m = 2$ — сторонами).

Наприклад, 4-паралелепіпед $A_0A_1 \ldots A_{1234}$ має 16 вершин, 32 ребра, 242-грані та 33-грані (рис. 9.8).

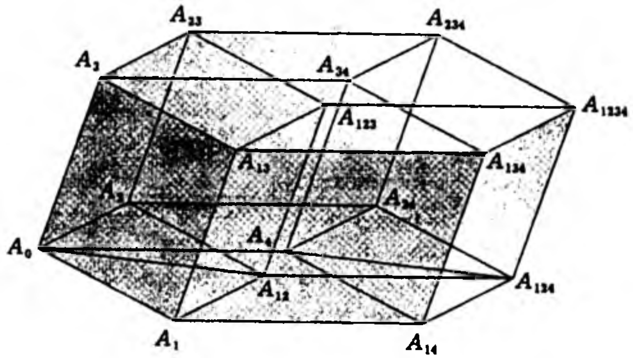


Рис. 9.8

Узагалі, можна показати, що число p-граней m-паралелепіпеда дорівнює

$$N_p^m = 2^{m-p} \cdot C_m^p \ , \qquad (9.52)$$

де C_m^p — кількість сполучень із m по p (див. додаток 2 курсу «Вища алгебра»).

На рис. 9.9 зображений 2-паралелепіпед (паралелограм) з вершинами A_0, A_1, A_2, A_{12} і сторонами A_0A_1, A_0A_2, A_1A_{12}, A_2A_{12}.

На рис. 9.10 зображений 3-паралелепіпед, який має

- 8 вершин: A_0, A_1, A_2, A_3, A_{12}, A_{13}, A_{23}, A_{123};
- 12 ребер: A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, A_1A_{12}, A_1A_{13}, A_2A_{12}, A_2A_{23}, A_3A_{13}, A_3A_{23}, $A_{12}A_{123}$, $A_{23}A_{123}$, $A_{13}A_{123}$;
- 6 граней: $A_0A_1A_{12}A_2$, $A_0A_1A_{13}A_3$, $A_0A_2A_{23}A_3$, $A_2A_{12}A_{123}A_{23}$, $A_1A_{12}A_{123}A_{13}$, $A_3A_{13}A_{123}A_{23}$.

Нехай задано $m+1$ точку n-вимірного простору

$$A_0(x_1^0;\ x_2^0;\ \ldots;\ x_n^0), \quad A_1(x_1^1;\ x_2^1;\ \ldots;\ x_n^1), \quad \ldots \ ,$$
$$A_m(x_1^m;\ x_2^m;\ \ldots;\ x_n^m) \ ,$$

які не лежать в одній $(m-1)$-площині. Сукупність точок, які є опуклими комбінаціями точок A_0, A_1, ..., A_m, утворює *m-симплекс* із вершинами A_0, A_1, ..., A_m.

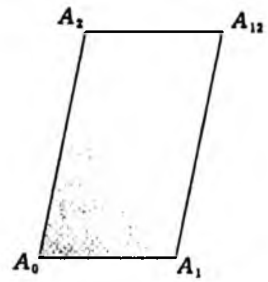


Рис. 9.9

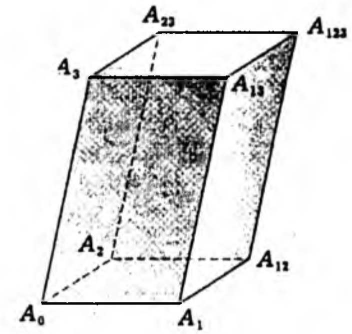


Рис. 9.10

Отже, кожна точка m-симплекса має координати

$$x_i = \sum_{\alpha=0}^{m} x_{i\alpha} t_\alpha \ , \qquad (9.53)$$

причому t_α задовольняють умову:

$$t_0 + t_1 + \ldots + t_m = 1 \ , \qquad t_\alpha \geq 0 \ , \quad \alpha = 0, 1, \ldots, n \ . \qquad (9.54)$$

Якщо в рівності (9.53) один з параметрів t_α дорівнює нулю, то ми одержимо $(m-1)$-симплекс, який називається гранню m-симплекса, грані цих $(m-1)$-симплексів називаються $(m-2)$-симплексами тощо. Отже, m-симплекс має p-грані, де p пробігає значення від 0 до $m-1$; 0-грані m-симплекса збігаються з його вершинами, 1-грані називаються ребрами (при $m = 2$ — сторонами).

На рис. 9.11 зображений 2-симплекс $A_0A_1A_2$, сторони якого — 3-відрізки A_0A_1, A_0A_2, A_1A_2.

На рис. 9.12 зображений 3-симплекс (тетраедр) $A_0A_1A_2A_3$, в якого 6 ребер — відрізки A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3; чотири 2-грані — трикутники $A_0A_1A_2$, $A_0A_1A_3$, $A_0A_2A_3$, $A_1A_2A_3$.

На рис. 9.13 зображений 4-симплекс $A_0A_1A_2A_3A_4$, в якого

- десять ребер — відрізки A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, A_0A_4, A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4;

- десять 2-граней — трикутники $A_0A_1A_2$, $A_0A_1A_3$, $A_0A_1A_4$, $A_0A_2A_3$, $A_0A_2A_4$, $A_0A_3A_4$, $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_2A_3A_4$;
- п'ять граней — тетраедри $A_0A_1A_2A_3$, $A_0A_1A_2A_4$, $A_0A_1A_3A_4$, $A_0A_2A_3A_4$, $A_1A_2A_3A_4$.

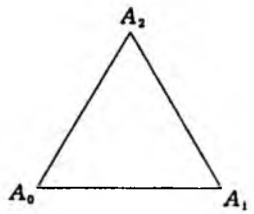


Рис. *9.11*

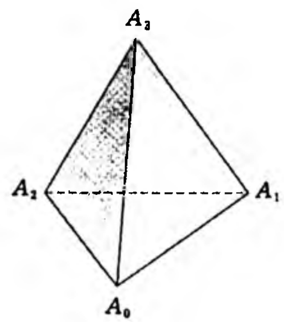


Рис. *9.12*

Оскільки довільна система $p+1$ вершин m-симплекса визначає p-грань симплекса, то число N_p^m p-граней m-симплекса дорівнює

$$N_p^m = C_{m+1}^{p+1} . \quad (9.55)$$

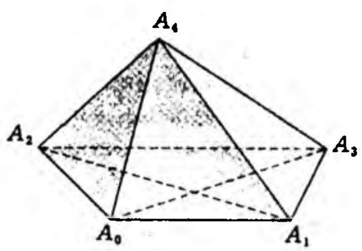


Рис. *9.13*

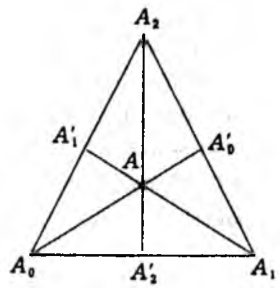


Рис. *9.14*

Будемо називати *центром ваги* m-симплекса, що визначається згідно з (9.53), (9.54), таку точку, для якої

$$t_0 = t_1 = \ldots = t_m = \frac{1}{m+1} .$$

Наведемо без доведення таку теорему.

Теорема 9.3 *Пряма лінія, що сполучає будь-яку вершину m-симплекса з його центром ваги, перетинає $(m-1)$-грань, що лежить проти даної вершини, в центрі ваги цієї грані й поділяє лінію, що з'єднує центр ваги $(m-1)$-грані з даною вершиною у відношенні $m:1$.*

Згідно з даною теоремою, якщо з'єднати центр ваги A m-симплекса з його вершиною A_i, то пряма AA_i перетинає $(m-1)$-грань, що лежить проти вершини A_i в центрі ваги A'_i цієї грані, і точка A поділяє відрізок $A_iA'_i$ у відношенні $m:1$.

Окремими випадками цієї теореми є відомі теореми з елементарної геометрії про центр ваги трикутника, який лежить на перетині його медіан і поділяє їх у відношенні $2:1$ (рис. 9.14), та про центр ваги тетраедра, який лежить на перетині відрізків, що з'єднують вершини тетраедра з центрами ваги протилежних граней, і поділяє ці відрізки у відношенні $3:1$ (рис. 9.15).

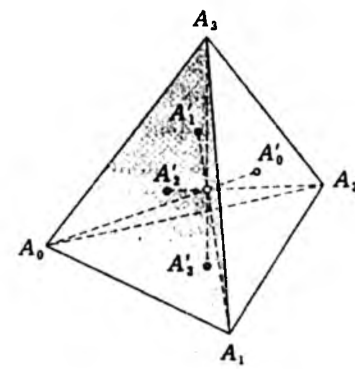


Рис. *9.15*

З формул (9.51), (9.53), (9.54) випливає, що m-паралелепіпеди та m-симплекси є опуклими множинами, а їхні вершини і тільки вони є крайніми точками цих множин.

З означення випливає, що m-паралелепіпеди та m-симплекси є обмеженими, замкненими множинами.

Будемо називати m-многогранниками (при $m = 2$ — многокутниками) фігури, які складені з m-симплексів, що прилягають один до одного по їх $(m-1)$-гранях.

Прикладами 3-многогранників є призми та піраміди у звичайному тривимірному просторі (рис. 9.16 а, б).

Симплекси та паралелепіпеди мають ту властивість, що вони знаходяться по один бік від площини довільної їх грані. Будемо називати многогранники, які мають таку властивість, *опуклими* многогранниками. Із цього означення випливає, що *опуклі многогранники можна розглядати як перетин скінченного числа m-площин.*

Оскільки m-площини мають ту властивість, що разом з довільними своїми точками A, B вони містять і всі точки відрізка

AB, то цю властивість мають і опуклі многогранники. Отже, *опуклі многогранники є окремими випадками опуклих множин.*

Легко показати, що коли опуклий многогранник є обмеженим, то він має скінченну кількість крайніх точок.

Перетин опуклого многогранника з довільною його опорною площиною має принаймні одну крайню точку.

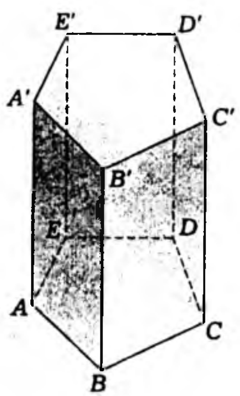
Ребро опуклого многогранника проходить через дві крайні точки та є перетином принаймні $n-1$ опорних гіперплощин опуклого многогранника.

Два ребра називаються *сусідніми*, якщо вони мають спільну вершину.

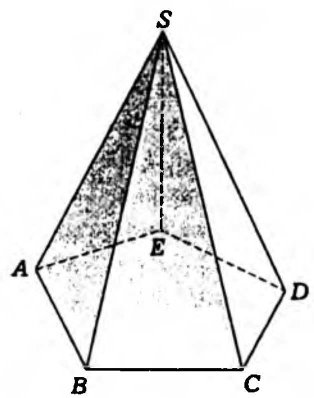
Якщо многогранник *невироджений*, тобто всі його вершини не належать якій-небудь гіперплощині, то з кожної вершини виходить принаймні n ребер.

Гіперплощина, яка проходить через $n-1$ ребер, що виходять з однієї вершини, називається $(n-1)$-вимірною гранню опуклого многогранника.

Дві вершини називаються *сусідніми*, якщо через них проходить ребро.



а)



б)

Рис. 9.16

§ 9.5 ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Нехай задана система m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{9.56}$$

Кожний розв'язок системи (9.56), тобто сукупність чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, ми можемо розглядати як точку n-вимірного арифметичного простору A^n з координатами $(c_1;\ c_2;\ \ldots;\ c_n)$.

Таким чином, множина розв'язків системи (9.56) є деяка множина точок у n-вимірному просторі A^n. Подивимося, що являє собою ця множина.

Розглянемо спочатку випадок, коли $m = 1$, тобто система (9.56) складається з одного рівняння. Ми вже бачили, що сукупність точок простору A^n, координати яких задовольняють лінійне рівняння, є гіперплощина в A^n. При цьому довільний розв'язок (9.56) $(m = 1)$ є деяка точка гіперплощини і, навпаки, довільна точка гіперплощини є деякий розв'язок лінійного рівняння (9.56).

Отже, *множина розв'язків одного лінійного рівняння з n змінними є гіперплощина в просторі A^n*, рівняння якої є дане рівняння.

Нехай тепер ми маємо систему двох рівнянь з n змінними. Кожний розв'язок цієї системи є деяка точка в A^n. Оскільки координати цієї точки повинні задовольняти кожне рівняння системи, то ця точка повинна належати перетину гіперплощин, рівняннями яких будуть рівняння системи.

Якщо ці гіперплощини паралельні, тобто не перетинаються, то система з двох лінійних рівнянь не має розв'язків, тобто несумісна. Легко побачити, що правильним буде й зворотне твердження, а саме: *якщо система несумісна, то відповідні гіперплощини паралельні.*

Якщо гіперплощини не є паралельні, то їх перетином буде $(n-2)$-вимірна площина.

Таким чином, *множина розв'язків сумісної системи двох рівнянь з n невідомими є $(n-2)$-вимірна площина в A^n.*

Звернемося тепер до загального випадку. Кожне з рівнянь системи (9.56) є певною гіперплощиною в A^n. Якщо система (9.56) несумісна, то серед m рівнянь знайдуться два рівняння, які є несумісні, тобто серед m гіперплощин (9.56), рівняння яких є рівняннями системи (9.56), знайдеться хоча б дві паралельні.

Якщо серед m рівнянь системи (9.56) є два (або більше) еквівалентних, то це значить, що відповідні їм гіперплощини збігаються. Дійсно, обидві гіперплощини складаються з одних і тих же точок.

Оскільки еквівалентні системи мають одну й ту саму множину розв'язків, то геометричне зображення розв'язків еквівалентних систем буде одним і тим самим. Отже, якщо одне з рівнянь системи (9.56) є наслідком комбінації r рівнянь цієї системи, то відповідна йому гіперплощина проходить через перетин r гіперплощин, що відповідають цим r рівнянням.

Таким чином, перетин m гіперплощин, що відповідають m рівнянням системи (9.56), збігається з перетином r гіперплощин, відповідних r базисним рівнянням системи (9.56). Оскільки базисні рівняння лінійно незалежні та несуперечливі, то відповідні r гіперплощин перетинаються по $(n-r)$-вимірній площині.

Зокрема, якщо $r = n$, то система (9.56) має єдиний розв'язок. Значить, геометричне зображення сукупності розв'язків системи (9.56) є точка (0-вимірна площина).

Отже, ми довели таку теорему.

Теорема 9.4 *Множина всіх розв'язків сумісної системи m лінійних рівнянь з n невідомими рангу r утворює $(n-r)$-вимірну площину в просторі A^n. Зокрема, якщо $n = r$, ця площина вироджується в точку.*

Оскільки гіперплощини є опуклі множини, то їх перетин є також опукла множина, а тому множина всіх розв'язків сумісної системи (9.56) утворює опуклу множину в просторі A^n.

Зокрема, якщо система (9.56) однорідна, то відповідна $(n-r)$-вимірна площина розв'язків цієї системи буде проходити через початок координат, оскільки початок координат буде належати всім гіперплощинам системи.

Нехай тепер нам дано лінійну нерівність

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_0 \geq 0 , \quad (9.57)$$

де a_i — дійсні числа.

Якщо, як і раніше, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ розглядати як координати точки в просторі A^n, то сукупність усіх точок, координати яких

задовольняють нерівності (9.57), буде замкненим напівпростором, що визначається гіперплощиною:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_0 = 0 . \quad (9.58)$$

Сукупність точок в A^n, координати яких задовольняють нерівності (9.57), називають *областю розв'язків даної нерівності*.

Таким чином, область розв'язків нерівності (9.57) є замкнений напівпростір, визначений гіперплощиною (9.58).

Приклади.

1. Нехай дано нерівність $x_1 - x_2 \geq 3$. Побудувати область розв'язків цієї нерівності.

Оскільки $n = 2$, то A^2 є звичайна площина, а гіперплощина (9.58) є пряма на цій площині: $x_1 - x_2 - 3 = 0$.

Ця пряма поділяє площину на дві напівплощини. Як відомо (див. § 3.13), точки однієї напівплощини задовольняють нерівність

$$x_1 - x_2 - 3 \geq 0 ,$$

а іншої

$$x_1 - x_2 - 3 \leq 0 .$$

Вибір відповідної напівплощини можна зробити за допомогою однієї, так званої контрольної, точки. Візьмемо, наприклад, точку $O(0;\ 0)$. Очевидно, що

$$0 - 0 - 3 \leq 0 ,$$

отже, точка $O(0;\ 0)$ і всі інші точки верхньої напівплощини задовольняють нерівність

$$x_1 - x_2 - 3 \leq 0 .$$

Таким чином робимо висновок, що область розв'язків нерівності

$$x_1 - x_2 - 3 \geq 0$$

є нижня напівплощина (рис. 9.17).

Розглянемо тепер систему лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{10} \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + a_{m0} \geq 0. \end{cases} \quad (9.59)$$

Множина точок простору A^n, координати яких задовольняють систему (9.59), називається областю розв'язків системи нерівностей.

Область розв'язків системи нерівностей (9.59) є перетин усіх областей розв'язків нерівностей, що входять у дану систему, тобто є перетин напівпросторів. Причому, оскільки кожен з напівпросторів опуклий, то і перетин їх є також опуклою множиною.

За аналогією до 2-вимірного й 3-вимірного випадків ми назвемо область у n-вимірному просторі, що є перетином скінченного числа напівпросторів, *опуклою многогранною областю*, а у випадку, коли цей перетин є обмеженою множиною, — просто *опуклим многогранником*.

Якщо система нерівностей (9.59) сумісна, то область розв'язків системи нерівностей є опуклий многогранник в A^n. З іншого боку, означення області розв'язків системи нерівностей зводиться до знаходження невід'ємних розв'язків системи рівнянь, а тому областю розв'язків системи нерівностей (9.59) є перетин скінченного числа напівпросторів та гіперплощин, тобто опуклий многогранник у просторі A^n (власне кажучи, необмежений).

Отже, справедлива така теорема.

Теорема 9.5 *Областю розв'язків системи лінійних нерівностей є опуклий многогранник.*

Даний многогранник утворюється як перетин напівпросторів, що визначаються гіперплощинами, рівняння яких одержується з нерівностей системи заміною в них знаків нерівності на знаки рівності.

Приклади.

2. Знайти область розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2 \ge 0, \\ x_1 + \frac{3}{4}x_2 - 3 \le 0, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Змінюючи знаки нерівностей на знаки рівностей у даній системі, одержимо рівняння, які визначають межі відповідних напівплощин

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2 = 0, \\ x_1 + \frac{3}{4}x_2 - 3 = 0, \\ x_1 = 0,\ x_2 = 0. \end{cases}$$

На рис. 9.18 зображені ці прямі. Стрілками показані напівплощини, що задовольняють відповідні нерівності. Видно, що областю розв'язків системи є опуклий чотирикутник $OABC$, вершини якого мають координати $O(0;\ 0)$, $A(3;\ 0)$, $B(6/7;\ 20/7)$, $C(2;\ 0)$ на площині X_1OX_2.

3. Знайти множину невід'ємних розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} -3x_1 + x_3 + x_5 + x_6 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2. \end{cases}$$

Перш за все знаходимо загальний розв'язок системи. Маємо

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ -5 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & -3 & -4 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 + x_1 - x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 - x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 - x_1 + 2x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3x_1 - x_2 \end{array}\right).$$

базис

Згідно з початковою умовою про невід'ємність розв'язків, маємо систему нерівностей

$$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0,\quad x_3 \ge 0,\quad x_4 \ge 0,\quad x_5 \ge 0,\quad x_6 \ge 0,$$

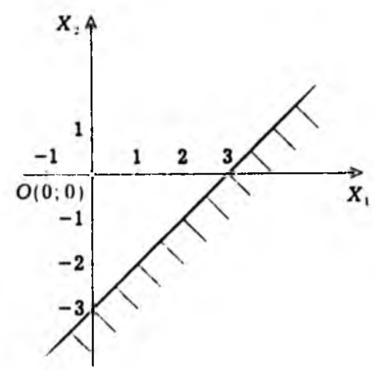


Рис. 9.17

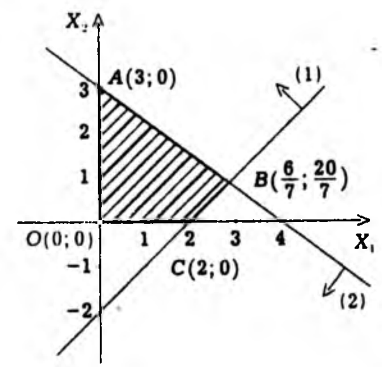


Рис. 9.18

або

$$\begin{cases} x_1 \ge 0, & (1) \\ x_2 \ge 0, & (2) \\ 1 + x_1 - x_2 \ge 0, & (3) \\ 3 - x_1 - x_2 \ge 0, & (4) \\ 2 - x_1 + 2x_2 \ge 0, & (5) \\ 3x_1 - x_2 \ge 0. & (6) \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи нерівностей є опуклий п'ятикутник $OABCD$ (рис. 9.19). Він і визначає множину невід'ємних розв'язків початкової системи.

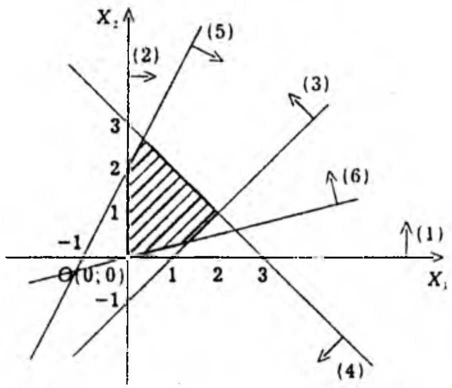


Рис. 9.19

ВПРАВИ

1. Знайти відстань від точки $A(1;\ 2;\ 0;\ -1)$ до гіперплощин.

   а) $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 1 = 0$;

   б) $x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3 = 0$.

2. Знайти множину розв'язків систем нерівностей:

   а) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 8 \ge 0, \\ x_1 + 2x_2 - 5 \le 0, \\ x_1 - x_2 - 3 \le 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 4 \le 0, \\ x_1 + 2x_2 - 7 \le 0, \\ x_1 + x_2 - 1 \ge 0, \\ x_1 - x_2 + 3 \le 0. \end{cases}$

3. Знайти крайні точки множин, що визначаються системами нерівностей:

   а) $\begin{cases} x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 \ge 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 \ge 0, \\ x_2 - x_1 \le 0, \\ x_1 + 2x_2 \ge 3. \end{cases}$

4. Знайти множину невід'ємних розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ -3x_1 + x_3 + x_5 + x_6 = 3, \\ x_2 - x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$$

Відповіді до вправ

ГЛАВА 1

1. 1) $AB = -11$, $d_{AB} = 11$; 2) $AB = 5$, $d_{AB} = 5$;
3) $AB = -3$, $d_{AB} = 3$.

2. 1) $\lambda = \frac{11}{7}$; 2) $\lambda = 2$; 3) $\lambda = \frac{7}{3}$.

3. 1) $d_{AB} = 2 - \frac{5}{2}\sqrt{3}$; 2) $d_{AB} = 5{,}5$; 3) $d_{AB} = 5\sqrt{2}$.

4. $(-1; 4)$, $(0{,}5; 4{,}5)$, $(4{,}5; 7{,}5)$.

5. $m_A = 5$.

6. 1) $x = x' + 3$, $y = y' - 4$;
2) $x = x' - 5$, $y = y'$;
3) $x = x' - 2$, $y = y' - 7$.

7. 1) $A(0; 0)$, $B(4; -3)$, $C(7; 4)$;
2) $A(-4; 3)$, $B(0; 0)$, $C(3; 7)$;
3) $A(-7; -4)$, $B(-3; -7)$, $C(0; 0)$.

8. 1) $A(1/2 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3}/2)$, $B(-3/2; 3\sqrt{3}/2)$,
$C(5/2 - 3\sqrt{3}; -3 - 5\sqrt{3}/2)$;
2) $A(-1; 2)$, $B(3; 0)$, $C(-5; 6)$;

3) $A(-\sqrt{2}/2;\ 3\sqrt{2}/2)$, $B(-3\sqrt{2}/2;\ -3\sqrt{2}/2)$, $C(11\sqrt{2}/2;\ -\sqrt{2}/2)$.

9. $A\left(\dfrac{11+2\sqrt{3}}{2};\ -\dfrac{2+5\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\dfrac{3+11\sqrt{3}}{2};\ \dfrac{7+3\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(\dfrac{3}{2};\ -\dfrac{4+\sqrt{3}}{2}\right)$.

10. $A(-1;\ 3)$, $B(2;\ 1)$, $C\left(-\dfrac{3}{2};\ \dfrac{6+7\sqrt{3}}{2}\right)$.

ГЛАВА 2

1. $2x + y - 10 = 0$.

2. $x + 3y - 10 = 0$. Точки K, M, N належать лінії.

3. 1) $x = a$, $x = -a$ (прямі, паралельні осі OY);

2) $y = b$, $y = -b$ (прямі, паралельні осі OX);

3) $y = x$ (бісектриса першої та третьої координатних четвертей), $y = -x$ (бісектриса другої та четвертої координатних четвертей).

4. $y = \pm\dfrac{1}{4}x$.

5. Коло $x^2 + y^2 = 36$. На колі знаходяться точки K, N. Точка L розташована всередині кола, точка M — зовні.

6. $x^2 + y^2 = 4$.

7. $x^2 + y^2 = 9$.

8. $x = c/a$, де a — координати двох даних точок, розташованих на осі OX, c — стала величина.

9. $(4;\ 0)$, $(0;\ 3)$.

10. $(6;\ 0)$, $(-6;\ 0)$, $(0;\ 6)$, $(0;\ -6)$.

11. $3x + 4y = 0$.

12. $y = \dfrac{x^2}{4} + 1$. $A(0;\ 1)$ — точка перетину з віссю OY. Вісь OX лінія не перетинає.

14. 1) $\rho^2 \sin 2\varphi = 1$; 2) $\rho\cos(\alpha + \varphi) = p$;

3) $\operatorname{tg}\varphi = 2$; 4) $\rho = 2a\sin\varphi$.

15. 1) пряма лінія, що проходить через початок координат під кутом $\varphi = 60°$ до осі OX;

2) пряма $x = a$;

3) слимак Паскаля.

16. 1) $y = b$; 2) $x^2 - y^2 = a^2$; 3) $x^2 + y^2 = ax$.

17. $y^2 = 9x$.

18. 1) $6y - x = 0$; 2) $y = 2x + 6$;

3) $x^2 + y^2 = 4$; 4) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

ГЛАВА 3

2. $y = (\sqrt{3}/3)x + 2$; $y = x + 2$; $y = 2$; $y = -x + 2$.

3. $y = 3x + 2$; $y = -2x + 5/2$; $y = -(2/7)x$; $y = 8/3$; $x = -9/5$.

4. $S = 17$ (од. площі).

5. $4x + 7y + 10 = 0$; $7x - 4y - 15 = 0$.

6. $90°$, $45°$, $45°$.

7. $5x - 3y - 2 = 0$; $2x + 6y - 8 = 0$.

8. $(-3; -2)$; $(3; 5)$; $(7; -5)$; $6x + 7y - 7 = 0$; $2x - 5y - 4 = 0$; $10x - 3y - 15 = 0$.

9. $3x - 5y + 12 = 0$; $3x - y + 4 = 0$; $y = 2$.

10. $x - 2y + 3 = 0$; $x + y - 3 = 0$; $2x + 5y - 21 = 0$.

11. $(0; 1)$.

12. $(-2; -2)$.

13. $(2; -3)$.

14. $x + y - 4 = 0$.

15. $a = 3$, $b = 2$; $a = -4$, $b = 6$; $a = 2$, $b = 6$; $a = 1/2$, $b = -2$.

16. $A = 5$.

17. $\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0$; $-\frac{3}{\sqrt{10}}x + \frac{1}{\sqrt{10}}y - \frac{5}{\sqrt{10}} = 0$;

$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y - \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$.

18. $4x + 3y - 25 = 0$; $4x + 3y - 5 = 0$.

19. 3.

20. 20.

21. $3x + 3y - 23 = 0$; $21x - 21y - 37 = 0$.

22. $x - y + 3 = 0$; $x + y - 3 = 0$; $x + y - 11 = 0$.

23. $\frac{7}{\sqrt{2}}$.

24. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{6}$.

25. $y = 1$.

26. $k = -2$, $b = 4$.

27. а) $\rho\cos(\pi/4 + \varphi) = 3/2$;

б) $\rho\sin\varphi = 1$;

в) $\rho\cos\varphi = 5\sqrt{2}/2$.

ГЛАВА 4

1. $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 16$.

2. $y = x$, $y = \frac{1}{7}x$.

3. $(x-8)^2 + (y-5)^2 = 25$.

4. $(x-6)^2 + (y+2)^2 = 25$.

5. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$.

6. $a = 2$, $b = 4/3$, $F_1(-2\sqrt{5}/3;\, 0)$,

$F_2(2\sqrt{5}/3;\, 0)$, $\varepsilon = \sqrt{5}/3$.

7. 1) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$; 2) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$;

3) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$; 4) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$;

5) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 6) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.

8. $\frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2}$.

9. $(3;\, -3)$.

10. З точки A — одну, з точки B — дві, з точки C — жодної.

11. $x = 25$; $x = -25$.

12. $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{32} = 1$.

13. $x + 2y - 3 = 0$.

14. $a = 4$, $b = 3$, $F_1(-5;\, 0)$, $F_2(5;\, 0)$,

$y = \pm(3/4)x$, $x = \pm 16/5$.

15. $F_1(0; -\sqrt{13})$, $F_2(0; \sqrt{13})$, $B_1(0; -3)$, $B_2(0; 3)$, $\varepsilon = \sqrt{13}/2$, $y = \pm(2/3)x$.

16. 1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1$.

17. $r_1 = 2$, $r_2 = 8$.

18. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{6} = 1$.

19. $\varepsilon = \sec\frac{\alpha}{2}$.

20. $\varepsilon = 2$.

21. $y^2 = 10x - 25$.

22. $M_1(1; 4)$, $M_2(1; -4)$.

23. $x - 4y + 8 = 0$.

24. $x + y + 1 = 0$; $x - y - 1 = 0$.

25. $3\sqrt{5}$.

26. $y^2 = -4x$.

27. $y - 1 = (x + 2)^2$.

28. Парабола з вершиною $(-2; 4)$ та віссю симетрії, паралельною осі OY.

29. Еліпс $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$.

30. Гіпербола з центром у точці $(1; 2)$.

31. $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1$ (гіпербола).

ГЛАВА 5

1. 3).

2. $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{15}$, $\cos\gamma = \frac{11}{15}$, $p = 3$.

3. 3.

4. $\frac{141}{10\sqrt{7}}$.

5. $(0; -3; 0)$.

6. $x + 2y + 2z - 9 = 0$, $y - 2 = 0$.

8. 1) $x - 4 = 0$; 2) $3x + z - 2 = 0$; 3) $7x + 6y = 0$.

9. $\arccos\frac{2}{3}$.

10. $\frac{7}{\sqrt{5}}$.

11. $\frac{1}{2\sqrt{14}}$.

12. $5x - 4y + 6z + 4 = 0$.

13. $x + 2y - 2z + 7 = 0$, $x + 2y - 2z - 35 = 0$.

14. $x + 20y + 7z = 0$, $x - z = 0$.

15. $7x - 17y - 19z - 46 = 0$.

16. $7x + 11y + 9z - 14 = 0$.

17. $x + y + z - 6 = 0$.

18. $10x + y - z - 23 = 0$.

19. Ні.

ГЛАВА 6

1. $x = 1 + 2t, \quad y = -2 + 3t, \quad z = 3 + 4t.$

2. $x = 4t, \quad y = -3t, \quad z = 5t.$

3. $x = 3 + 4t, \quad y = -2 - 8t, \quad z = 7 + 8t.$

4. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-3}{0}.$

5. $\frac{x-6}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-3}.$

6. $\cos\alpha = 6/7, \quad \cos\beta = -2/7, \quad \cos\gamma = 3/7.$

7. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-3}{2},$

   $\frac{x-4}{1} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-7}{-15},$

   $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{6} = \frac{z-3}{-11}.$

8. $\frac{x-4}{6} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{7}.$

9. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-2}.$

10. $\frac{x}{-9} = \frac{y}{-5} = \frac{z+3}{-1}.$

11. $135°.$

12. $\arccos(11/14).$

13. $60°.$

14. $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z+5}{1}.$

15. $d = 5.$

16. $31/13.$

17. $d = 3.$

ГЛАВА 7

1. $30°$.

2. $(7;\ 1;\ 0)$.

3. $(0;\ 0;\ -2)$.

4. $m = 1$.

5. 1) $23x - 2y + 21z - 33 = 0$;
   2) $y + z - 18 = 0$;
   3) $x + z - 3 = 0$;
   4) $x - y + 15 = 0$.

6. $Q(4;\ -1;\ 3)$.

7. $B = 2, \quad D = 8$.

8. $16x - 27y + 14z - 159 = 0$.

9. $3x - 4y - 4z + 1 = 0$.

10. $8x - 9y - 22z - 59 = 0$.

11. $23x - 16y + 10z - 153 = 0$.

12. $11x - 17y - 19z + 10 = 0$.

13. $\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-4}{1}$.

ГЛАВА 8

1. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 27$.

2. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 0$.

3. $(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

4. $(3;\ 2;\ 5;\ -2), \quad R = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

5. Круговий циліндр.

6. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$.

8. $8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy + 8yz + 4xz + 16x +$
   $+ 14y + 22z - 39 = 0$.

9. $10x^2 + 16y^2 + 9z^2 + 30xz + 96z - 144 = 0$.

10. $117x^2 + 18y^2 + 32xy - 32yz - 1458 = 0$.

11. а) двопорожнинний гіперболоїд;
    б) параболічний циліндр;
    в) однопорожнинний гіперболоїд;
    г) конус;
    ґ) еліптичний параболоїд;
    д) гіперболічний циліндр.

1. а) $\frac{1}{\sqrt{15}}$; б) $\frac{2}{\sqrt{7}}$.

2. а) опуклий трикутник: $(1;\,2)$, $\left(\frac{11}{3};\,\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{7}{3};\,-\frac{2}{3}\right)$;
   б) необмежений опуклий чотирикутник.

3. а) $(0;\,0)$, $(0;\,2)$, $(2;\,0)$;
   б) $(0;\,0)$, $(3;\,0)$, $(-1;\,1)$.

4. Опуклий п'ятикутник.

Предметний покажчик

А

В

Г

Д

Е

Ж

І

К

Л

М

Н

О

П

Р

С

Т

У

Ф

Ц

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

ГРИНЬОВ Борис Вікторович
КИРИЧЕНКО Ігор Костянтинович

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Підручник
для вищих технічних навчальних закладів

Відповідальний за випуск *В. Л. Маркіанов*
Редактор *М. В. Москаленко*
Комп'ютерна верстка *І. Л. Маркіанової*
Коректор *І. Л. Безсонова*

Підписано до друку 04.01.2008. Формат 70×100/16. Гарнітура Journal.
Папір офсетний. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 27,95. Обл.-вид. арк. 26,97.
Наклад 5000 прим.
Замовл. № 155
Свідоцтво ДК № 644 від 25.10.2001 р.

ТОВ ТО «Гімназія»
Україна 61103, м. Харків, вул.. Дерев'янка, 16а.
Тел. (057) 758-83-93, 719-46-80, 719-17-26

Віддруковано з готових позитивів
у друкарні ПП «Модем», м. Харків.
Тел. (057) 758-15-80, 758-15-90