

теоретична  
**МЕХАНІКА**

ЗБІРНИК  
ЗАДАЧ



# теоретична **МЕХАНІКА**

## ЗБІРНИК ЗАДАЧ

За редакцією д-ра техн. наук  
М. А. Павловського

*Рекомендовано  
Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів  
вищих навчальних закладів*

НБ ПНУС



730461

Київ  
"Техніка"  
2007

ББК 22.2я73  
Т33  
УДК 531/534(075.8)

Гриф надано Міністерством  
освіти і науки України,  
лист № 1.4/18-Г-515 від 19.07.2006 р.  
Видано за рахунок державних коштів.  
Продаж заборонено

Авторський колектив: О. С. Апостолюк, В. М. Воробійов, Д. І. Ільчишина, В. Ф. Кришталь, К. Г. Левчук, Л. М. Рижков, О. В. Чкалов, Л. М. Шальда, Н. І. Штефан

Рецензенти: *О. О. Рассказов*, засл. діяч науки і техніки України, лауреат Держ. премії України, чл.-кор. НАН України, проф.; *А. Ф. Улітко*, чл.-кор. НАН України, проф.; *Я. Ф. Каюк*, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Т33 **Теоретична механіка: Збірник задач /** О. С. Апостолюк, В. М. Воробійов, Д. І. Ільчишина та ін.; За ред. М. А. Павловського. — К.: Техніка, 2007. — 400 с.: іл.  
ISBN 966-575-059-3

Наведено короткі теоретичні відомості, методику та приклади розв'язування задач. задачі для самостійного розв'язування та індивідуальні розрахункові завдання. Збірник містить розв'язок більше ста прикладів, десять індивідуальних розрахункових завдань і більше трьохсот задач для самостійного розв'язування.

Для студентів вищих навчальних закладів,  
Прикарпатський національний університет  
імені Василя Стефаника

код 02125266  
**НАУКОВА БІБЛІОТЕКА**

к.в. №

73 468 1

ББК 22.2я73

© О. С. Апостолюк, В. М. Воробійов,  
Д. І. Ільчишина, В. Ф. Кришталь,  
К. Г. Левчук, Л. М. Рижков,  
О. В. Чкалов, Л. М. Шальда,  
Н. І. Штефан, 2007

ISBN 966-575-059-3

## ПЕРЕДМОВА

Теоретична механіка вивчає найбільш загальні закони руху і взаємодії тіл, її головне завдання — пізнання кількісних і якісних закономірностей, які спостерігаються у природі. З цього випливає, що теоретична механіка належить до фундаментальних природничих наук, оскільки природознавство в цілому вивчає різні форми руху матерії.

Значення теоретичної механіки як однієї з наукових основ техніки і технології безупинно зростає. Розвиток нових видів виробництва і нових технічних засобів висуває проблеми, які вже не можна вирішити на основі одних лише дослідних даних. Для розв'язання цих проблем потрібне моделювання, в основі якого лежить попередній точний розрахунок і наукове передбачення, що спирається на глибокі знання законів і методів теоретичної механіки.

Теоретична механіка широко застосовує певні абстракції, узагальнення, математичні методи, методи формальної логіки. Цінність теоретичної механіки полягає в її логічній досконалості.

Зрозуміло, що теоретична механіка є важливим елементом вищої освіти. Вона входить до навчальних планів багатьох технічних і природничих спеціальностей, є фундаментом для вивчення таких дисциплін, як прикладна механіка, опір матеріалів, теорія коливань, гідравліка, теорія пружності, електродинаміка, біомеханіка, теорія механізмів і машин, теорія керування рухомими об'єктами тощо. Це обумов-

лює наявність великої кількості навчальної літератури з теоретичної механіки, яку можна поділити на три групи. В першу чергу, — це підручники, в яких подається теоретичний матеріал. Невелика частина загальновідомих підручників подана в списку літератури [1–27]. Другу групу складають збірники задач з теоретичної механіки та посібники з розв'язання задач [28–33], [35], [37–27]. До третьої групи належить література, що містить типові розрахункові завдання [34], [36], [40], виконання яких потребує багато часу і виховує певні навички.

Даний посібник призначений для поглибленого вивчення теоретичної механіки. Він орієнтований, у першу чергу, на студентів вищих технічних навчальних закладів, але може бути використаний і студентами університетів при вивченні споріднених дисциплін.

На думку авторів, основний шлях вивчення будь-якої дисципліни — це самостійна робота над матеріалом, у тому числі набуття практичних навичок у розв'язанні задач. Особливістю задач з теоретичної механіки є те, що вони передбачають наявність знань із математики, фізики, креслення тощо. Для студентів молодших курсів, на яких викладається теоретична механіка, поєднання знань цих дисциплін із новою інформацією, яку містить теоретична механіка, становить певні труднощі. Мета цього посібника — допомога студенту в опануванні та система-

тизації знань завдяки засвоєнню методики розв'язання задач. Тому у кожній частині посібника наведено короткі теоретичні відомості, приклади розв'язування задач та задачі для самостійної роботи. Для більш поглибленого вивчення дисципліни у найбільш важливих розділах подано типові розрахункові завдання.

За своїм змістом посібник відповідає підручнику: Павловський М. А. Теоретична механіка. — К.: Техніка, 2002. — 512 с. Ці дві книжки разом можна розглядати як навчально-методичний комплекс з дисципліни “Теоретична механіка”.

У посібнику розділи 1, 4, § 15.2 і додатки написані К. Г. Левчук; розділи 2, 3 і 16 — Л. М. Шальдою; розділи 5, 6 і 7, крім § 7.4 — Н. І. Штефан; § 7.4 — Н. І. Штефан разом із В. Ф. Кришталем; розділи 8, 9 і 10 — Д. І. Ільчишиною; розділи 11, 17 і 18 — В. Ф. Кришталем; розділ 12 — В. М. Воробйовим; розділи 13, 14 і § 15.1 — О. С. Апостолоком; розділ 19 — О. В. Чкаловим; розділ 20 — Л. М. Рижковим.

Автори висловлюють подяку рецензентам О. О. Рассказову, А. Ф. Улітку і Я. Ф. Каюку за критичні зауваження, надані під час підготовки даного навчального посібника до друку.

## ЧАСТИНА I • СТАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

### ВИЗНАЧЕННЯ, АКсіОМИ ТА НАЙПРОСТІШІ ТЕОРЕМИ

*Сила* — міра механічної взаємодії матеріальних тіл. Сила, що діє на тіло, є вектором: вона характеризується точкою прикладення, величиною і напрямом. Точку тіла, на яку діє сила, називають *точкою прикладення сили*. Пряму, вздовж якої спрямований вектор сили, називають *лінією дії сили*. На рис. 1.1:  $\vec{F}$  — сила,  $A$  — точка прикладення сили,  $AB$  — лінія дії сили.

Дві системи сил називають *еквівалентними*, якщо, не порушуючи стану твердого тіла, одну з них можна замінити іншою.

Силу, еквівалентну даній системі сил, називають *рівнодійною* системи сил.

Вираз  $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \vec{R}$  означає, що сила  $\vec{R}$  є рівнодійною системи сил  $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$ .

Система матеріальних точок (або її окремих випадок — тверде тіло) перебуває в *рівновазі* відносно нерухомої системи відліку, якщо відносно цієї системи всі її точки знаходяться у стані спокою або рухаються рівномірно й прямолінійно з однаковими за величиною і напрямом швидкостями.

Систему сил називають *зрівноваженою*, якщо тіло, до якого вона прикладена, перебуває в рівновазі.

Статика базується на першому і третьому законах Ньютона, а також аксіомах та теоремах, наведених далі.

**Перший закон Ньютона.** *Ізольована матеріальна точка перебуває в рівновазі (зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху) доти, доки інші тіла не виведуть її з цього стану.*

**Третій закон Ньютона.** *Дія завжди дорівнює протидії і протилежно напрямлена. Сили взаємодії двох тіл дорівнюють одна одній і напрямлені у протилежні сторони.*

Зауваження. Ці сили прикладені в точках взаємодії різних тіл і тому не утворюють систему сил, еквівалентну нулеві.

В основі статки лежать аксіоми, в яких відображені властивості сил. Ці властивості встановлені дослідами і спостереженнями. Розглянемо п'ять аксіом статки.

**Аксіома I (про дві сили).** *Дві сили, прикладені до абсолютно твердого тіла, взаємно зрівноважуються (еквівалентні нулю) тільки тоді, коли вони однакові за величиною і діють уздовж однієї прямої в протилежних напрямках.*

**Аксіома II (про паралелограм сил).** *Рівнодійна двох сил, прикладених до твердого тіла в одній точці, дорівнює векторній сумі цих сил і прикладена в тій самій точці:*

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1.1)$$

Правило додавання сил можна поширити на будь-яке число сил, прикладених у одній точці:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (1.2)$$

Тіла або поверхні, що обмежують рухи системи матеріальних точок або твердого тіла і

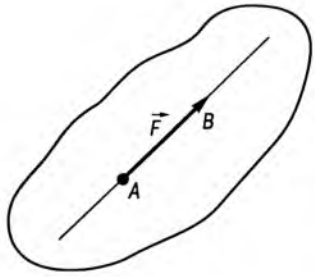


Рис. 1.1

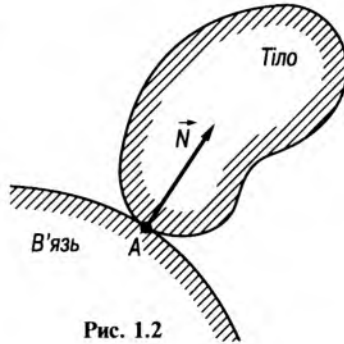


Рис. 1.2

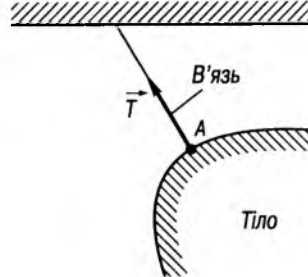


Рис. 1.3

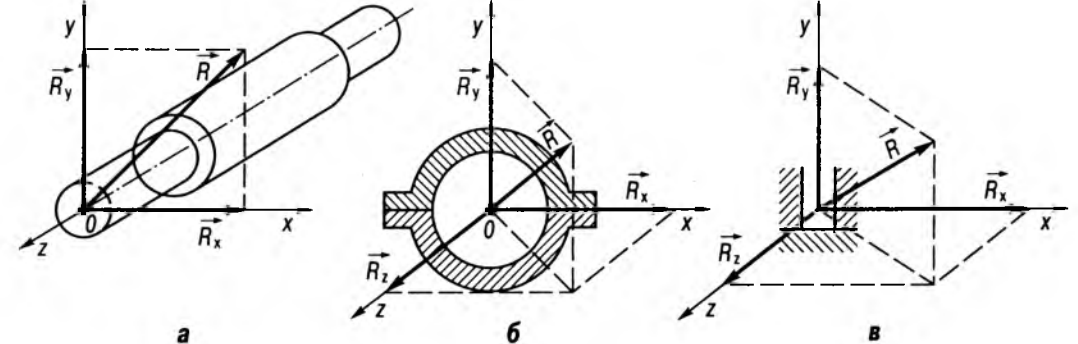


Рис. 1.5

не змінюються у разі дії сил, прикладених до них, називають *в'язями*. Дію в'язей на тіло або систему матеріальних точок характеризують силами, які називають *реакціями в'язей*.

**Аксиома III (про звільнення від в'язей).** Не змінюючи механічного стану (руху або рівноваги) системи матеріальних точок або твердого тіла, в'язь, накладену на систему або тверде тіло, можна відкинути, замінивши дію в'язі її реакцією, прикладеною до цього тіла або системи в точці взаємодії тіла і в'язі.

**Аксиома IV (про накладення нових в'язей).** Рівновага системи матеріальних точок або твердого тіла не порушиться при накладенні на них нових в'язей.

**Аксиома V (про затверднення).** Рівновага деформованого тіла не порушиться, якщо, не змінюючи його форми, розмірів, положення у просторі, подати його у вигляді відповідного абсолютно твердого тіла.

Зауваження. Аксиома дає змогу розв'язувати найпростіші задачі статички деформівних тіл (пас, ланцюг, нитка, трос тощо), застосовуючи до них методи статички твердого тіла.

**Теорема про силу як ковзний вектор.** Дія сили на тверде тіло не зміниться, якщо перенести силу вздовж лінії її дії в будь-яку точку.

**Теорема про три сили.** Якщо абсолютно тверде тіло перебуває в рівновазі під дією трьох непаралельних сил і лінії дії двох сил перетинаються, то всі сили лежать в одній

площині і їхні лінії дії перетинаються в одній точці.

Зауваження. Теорему використовують для визначення лінії дії третьої сили.

**Характеристика в'язей та їх реакцій:**

1) *ідеально гладенька поверхня* (рис. 1.2). Точка *A* контакту тіла з поверхнею може вільно ковзати вздовж неї, але не може переміститися в напрямі, протилежному нормалі до поверхні, тобто реакція ідеально гладенької поверхні  $\vec{N}$  напрямлена вздовж нормалі від поверхні;

2) *нитка, мотузка, шнур, трос, ланцюг, пас*. Їх вважають невагомими, гнучкими і нерозтяжними (рис. 1.3). Внаслідок того, що зазначені в'язі заважають тільки розтягуванню, їхні реакції напрямлені вздовж них так,

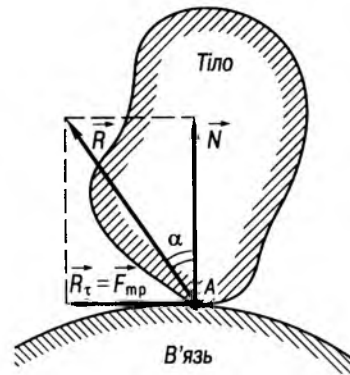


Рис. 1.4

як показано на рис. 1.3, — у бік, протилежний їх розтягуванню;

3) *шорстка поверхня*. На відміну від ідеально гладенької поверхні у цьому разі до  $\vec{N}$  додається дотична складова  $\vec{R}_t = \vec{F}_{тр}$ , яку називають *силою тертя ковзання*. Загальна реакція має дві складові:  $\vec{N}$  — нормальну і  $\vec{R}_t = \vec{F}_{тр}$  — дотичну (рис. 1.4). Найпростіші властивості тертя викладено в § 1.4;

4) *шарніри — циліндричні і сферичні* (рис. 1.5). Розмірами шарнірів і силами тертя, що виникають у них, нехтують. Напрями реакцій таких в'язей заздалегідь визначити не можна. Так, у разі циліндричного шарніра (*підшипника*) (рис. 1.5, а), який обмежує рух тіла в площині, перпендикулярній до його осі  $Oz$ , виникає реакція, розміщена в площині  $Oxy$ . Невідомий вектор реакції

в'язі в цій площині визначають за двома складовими  $\vec{R}_x$  і  $\vec{R}_y$ . Напрям реакції *сферичного шарніра* (рис. 1.5, б) або *підп'ятника* (рис. 1.5, в) невідомий. Тому його вектор реакції в'язі визначають трьома взаємно перпендикулярними складовими  $\vec{R}_x$ ,  $\vec{R}_y$  і  $\vec{R}_z$  по осях  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$ ;

5) *ідеальний стрижень* (рис. 1.6). Його вагою нехтують. Сферичні шарніри на кінцях стрижня вважають точковими. Реакція стрижня спрямована вздовж прямої, що з'єднає точкові шарніри. Наприклад, у точці *A* вона має напрям  $\vec{S}$  до тіла (рис. 1.6, а), якщо стрижень стиснуто, а якщо стрижень розтягнуто, то  $\vec{S}'$  — від тіла (рис. 1.6, б);

б) *коток або рухомий шарнір* (рис. 1.7). У місці закріплення тіла до котка тіло не може рухатися тільки в напрямі, протилежному нормалі до поверхні, на якій встанов-

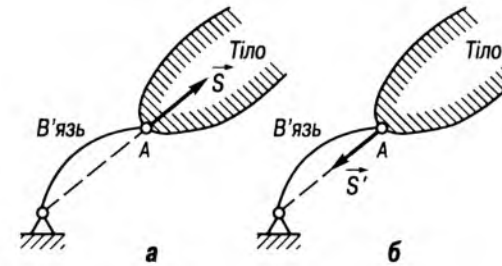


Рис. 1.6

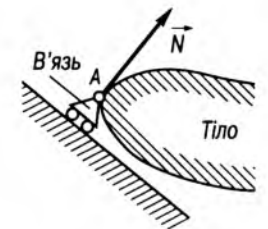


Рис. 1.7

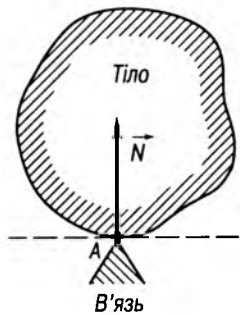


Рис. 1.8

лено коток. Отже, реакція котка буде напрямлена перпендикулярно до опорної площини котка;

7) *вістря* (рис. 1.8). У цьому випадку реакція вістря  $\vec{N}$  напрямлена вздовж нормалі від поверхні тіла, оскільки поверхня тіла гладенька;

8) *жорстке защемлення або консольне закріплення* (рис. 1.9). Для плоскої задачі невідомі

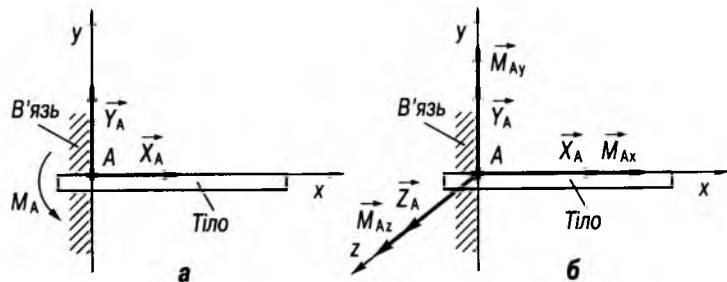


Рис. 1.9

реакція у вигляді двох її складових  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$  та момент  $\vec{M}_A$ , що виникає в опорі внаслідок обмеження поступального руху в площині  $Oxy$  та обертального руху навколо осі  $Oz$  (рис.1.9, а), для просторової — реакція у вигляді трьох її складових сил  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$  та моментів  $\vec{M}_{Ax}, \vec{M}_{Ay}, \vec{M}_{Az}$ , які виникають в опорі за умови обмеження як поступального, так і обертального рухів тіла (рис. 1.9, б).

## Розділ 1

### СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ

#### § 1.1. РІВНОВАГА ЗБІЖНОЇ СИСТЕМИ СИЛ ТА МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Системою збіжних сил називають систему таких сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці. Рівняння рівноваги збіжної системи сил мають вигляд

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \quad (1.3)$$

Умови рівноваги (1.3) можна записати і по-іншому, якщо врахувати, що збіжна система сил еквівалентна одній силі — рівнодійній  $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ . У цьому разі умовою

рівноваги збіжної системи сил є рівність

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0. \quad (1.4)$$

Вираз (1.4) означає, що багатокутник сил за умови рівноваги має бути замкненим. Якщо застосовується графічний метод розв'язання задачі, напрямки і модулі невідомих сил визначають із аналізу замкненого багатокутника сил.

Аналітичний метод розв'язання задачі пов'язаний з проектуванням сил на осі. Проекцію сили  $\vec{F}$  (рис. 1.10) на вісь  $Ox$  з ортом  $\vec{i}$  визначають так:

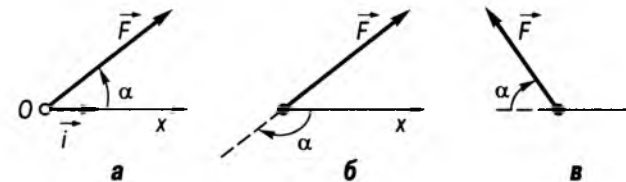


Рис. 1.10

$$F_x = \vec{F} \cdot \vec{i} = F \cos(\vec{F}, Ox). \quad (1.5)$$

Щоб визначити кут  $\alpha$  між силою та віссю, їх потрібно спрямувати з однієї точки (рис. 1.10, а), тоді проекція сили на вісь

$$F_x = F \cos \alpha. \quad (1.6)$$

Проекція сили на вісь від'ємна, коли кут між силою й віссю тупий. Тому проектування сили на вісь можна дещо спростити. У випадках, яким відповідають рис. 1.10, б, в, знак проекції визначають безпосередньо з цих рисунків, тобто знак буде "мінус":

$$F_x = -F \cos \alpha. \quad (1.7)$$

Проекція сили на вісь дорівнює нулю, коли  $\alpha = \pm 90^\circ$ , тобто вектор  $\vec{F}$  перпендикулярний до осі.

У більш загальному випадку проекції сили на осі  $Ox, Oy, Oz$  (рис. 1.11, а, б) визначають так:

$$F_x = F \cos \alpha; F_y = F \cos \beta; F_z = F \cos \gamma. \quad (1.8)$$

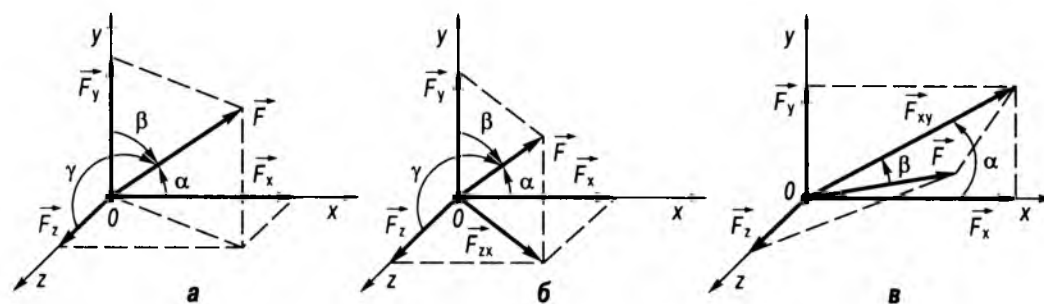


Рис. 1.11

Якщо положення вектора сили задано так, як показано на рис. 1.11, в (кут  $\beta$  розміщений у площині, перпендикулярній до площини  $Oxy$ ), то проекції сили на осі мають вигляд

$$F_x = F \cos \beta \cos \alpha;$$

$$F_y = F \cos \beta \cos(90^\circ - \alpha) = F \cos \beta \sin \alpha;$$

$$F_z = F \cos(90^\circ - \beta) = F \sin \beta. \quad (1.9)$$

Отже, коли необхідно спроектувати силу на осі  $Ox$  та  $Oy$ , то спочатку проектують її на площину  $Oxy$ , а далі вектор, який отримують після проектування ( $\vec{F}_{xy}$ ), ще раз проектують на осі в площині  $Oxy$ . Нагадаємо, що проекція вектора, у тому числі і вектора  $\vec{F}$ , на площину  $N$  (рис. 1.12) є вектором  $\vec{A'B'}$  (тобто  $\vec{F}_N$ ), початком і кінцем якого відповідно є проекції на площину  $N$  початку і кінця вектора  $\vec{F}$ .

Пропонуємо таку послідовність розв'язування задач.

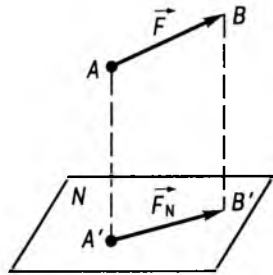


Рис. 1.12

реакцій кількості рівнянь рівноваги. Задача повинна бути статично визначеною. Особливу увагу слід звернути на вдалий вибір системи координат. Як правило, за початок координат вибирають точку, в якій перетинаються лінії дії сил системи. Якщо до системи входять перпендикулярні сили, то осі координат доцільно спрямувати вздовж цих сил. Далі записують аналітичні умови рівноваги (1.3) та розв'язують отриману систему рівнянь відносно вказаних невідомих. Аналітичними методами визначають напрямки та модулі невідомих сил. Якщо після розв'язування відповідна сила додатна, то значена сила має напрям, вказаний на рисунку. Якщо сила від'ємна, то її напрям протилежний зображеному.

## § 1.2. ПЛОСКА ЗБІЖНА СИСТЕМА СИЛ. РІВНОВАГА ПРОСТОЇ КОНСТРУКЦІЇ

### 1.2.1. Короткі теоретичні відомості

У разі плоскої системи збіжних сил, коли кількість невідомих сил, що до неї входять, не перевищує трьох, доцільно користуватись умовами рівноваги у графічній формі. Якщо система складається лише з двох сил, то застосовують аксіому I про дві сили, а якщо з трьох сил, то теорему про три сили: за аксіомою про звільнення від в'язей звільняють тіло від ідеальної в'язі (лінія дії реакції якої відома) та проводять лінію дії її реакції, визначають точку перетину трьох сил і далі знаходять лінію дії неідеальної в'язі (лінія дії реакції якої невідома), а потім за відомими лініями дії сил будують замкнений векторний трикутник сил. Конкретний напрям реакцій в'язей визначають у процесі побудови багатокутника сил.

1. Вибрати об'єкт дослідження (тіло або систему тіл), рівновагу якого будемо розглядати. Звичайно це об'єкт, до якого прикладені шукані та відомі сили.

2. Зобразити сили, які задані за умовою задачі. Для зображення користуються класифікацією, згідно з якою сили поділяють на внутрішні і зовнішні. *Внутрішні сили* — сили взаємодії між матеріальними точками даної механічної системи. *Зовнішні* — сили взаємодії між точками даної та іншої механічної системи.

При розв'язуванні задач на рівновагу зображають тільки зовнішні сили, що діють на вибраний об'єкт дослідження, оскільки внутрішні в твердому тілі утворюють зрівноважену систему сил, тобто систему сил, еквівалентну нулю.

3. Визначити кількість та тип в'язей. Згідно з аксіомою про звільнення від в'язей необхідно замінити їхню дію реакціями в'язей.

4. Далі застосувати аналітичні або графічні умови рівноваги.

5. Якщо кількість сил у системі сил перевищує три, доцільніше застосовувати умови рівноваги в аналітичній формі. За аксіомою про звільнення від в'язей звільняють тіло від них та зображають реакції в'язей, прикладених до точок тіла. За цим методом конкретний напрям реакції задають довільно. Потрібно перевірити відповідність кількості невідомих

### 1.2.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 1.1.** На рис. 1.13 зображено стрижні  $AB$  і  $BC$ , з'єднані між собою та зі стелею за допомогою шарнірів. До шарніра  $B$  на невагомій нитці підвішений вантаж вагою  $P$ . Знайти зусилля в стрижнях.

Графічний метод розв'язування. Розглянемо рівновагу системи тіл, що складається із шарніра  $B$ , нитки та вантажу  $P$ .

До неї прикладені сила ваги вантажу  $\vec{P}$  та зусилля у стрижнях  $AB$  та  $BC$ , які потрібно визначити. Реакції стрижнів напрямлені вздовж них. Отже, будемо розглядати систему, що складається з трьох сил: ваги вантажу  $\vec{P}$ , зусиль у стрижнях  $\vec{S}_1 = \vec{S}_{AB}$  і  $\vec{S}_2 = \vec{S}_{BC}$ . Цю систему зображено на рис. 1.14.

Оскільки лінії дії сил збігаються у точці  $B$ , будемо замкнений трикутник: з деякої точки відкладаємо відому силу  $\vec{P}$  (рис. 1.15), далі з початку вектора  $\vec{P}$  відкладаємо пряму, паралельну лінії дії реакції стрижня  $BC$ , а з кінця вектора  $\vec{P}$  — пряму, паралельну лінії дії реакції стрижня  $AB$ . Отримуємо замкнений трикутник сил, де сили  $\vec{S}_1$  та  $\vec{S}_2$  є зусиллями в стрижнях  $AB$  та  $BC$  відповідно. Напрями векторів розставляємо по колу за правилом векторної суми. В процесі побудови трикутника визначаємо конкретний напрям цих сил.

З геометрії конструкції визначаємо кути між лініями дії сил. Далі, аналізуючи одер-

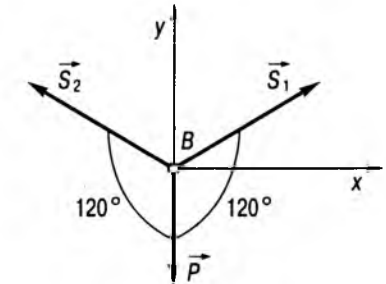


Рис. 1.14

ваний рівносторонній трикутник, знаходимо модулі сил:

$$S_1 = S_2 = P.$$

Аналітичний метод розв'язування. У цьому випадку реакції стрижнів  $\vec{S}_1$  та  $\vec{S}_2$  зображаємо відразу, оскільки далі проектуватимемо вектори на осі, а це потребує наявності вектора на рисунку. При цьому реакції  $\vec{S}_1$  та  $\vec{S}_2$  зображуємо напрямленими вздовж відповідних стрижнів у будь-якому напрямі. Прийmemo, що сили  $\vec{S}_1$  та  $\vec{S}_2$  напрямлені так, як зображено на рис. 1.14. Вводимо систему координат. Система координат може бути розташована довільно, але доцільно її початок вибрати в точці перетину сил, а осі спрямувати так, щоб полегшити проектування сил. Усі сили розташовані в площині рисунка, тому достатньо ввести лише дві осі  $Bx$  та  $By$ , як зображено на рис. 1.14.

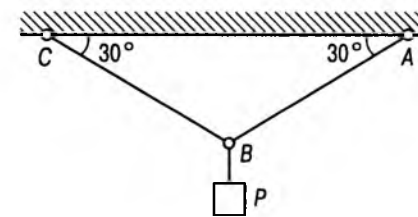


Рис. 1.13

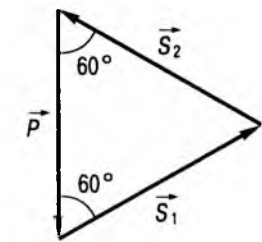


Рис. 1.15

Далі запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^3 F_{ix} = P \cos 90^\circ + S_1 \cos 30^\circ + S_2 \cos 150^\circ = S_1 \cos 30^\circ - S_2 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = P \cos 180^\circ + S_1 \cos 60^\circ + S_2 \cos 60^\circ = -P + S_1 \cos 60^\circ + S_2 \cos 60^\circ = 0.$$

З першого рівняння знаходимо  $S_1 = S_2$ . Далі маємо

$$S_1 = S_2 = \frac{P}{2 \cos 60^\circ} = P.$$

Отриманий знак плюс означає, що напрями сил  $\vec{S}_1$  та  $\vec{S}_2$  збігаються з зображеними. Стрижні  $AB$  і  $BC$  розтягнуті.

**Приклад 1.2.** Циліндр вагою 20 Н і радіусом 10 см спирається на гладеньку правильну трикутну призму і утримується в рівновазі за допомогою двох симетричних ниток  $AB$  і  $A'B'$  довжиною  $l = 15$  см (рис. 1.16). Визначити натяг ниток.

Графічний метод розв'язування. Розглянемо рівновагу циліндра. На нього діють сила ваги  $\vec{P}$ , прикладена в точці  $C$  — центрі мас і спрямована вертикально вниз, реакція гладенької опори  $\vec{N}$ , прикладена у точці  $D$  — місці контакту основи циліндра та призми й спрямована по взаємній нормалі цих тіл, і натяг ниток  $\vec{T}$  (рис. 1.17).

Оскільки система складається з трьох не-паралельних сил, то за *теоремою про три сили* лінії дії цих сил мають перетинатися в одній точці. Лінії дії сил  $\vec{P}$  і  $\vec{N}$  перетинаються у точці  $C$  — точці перетину трьох сил. Отже, лінія дії сили  $\vec{T}$  пройде через точку  $C$ , тобто у стані рівноваги циліндр займе таке положення, при якому нитки будуть паралельні його радіусу.

Тоді сили  $\vec{N}$ ,  $\vec{P}$ ,  $\vec{T}$  утворюють замкнений векторний трикутник (рис. 1.18). За *теоремою синусів* маємо  $P/\sin \alpha = T/\sin 60^\circ$ . З прямокутного  $\triangle ACD$

$$\cos \alpha = CD/AC = 2/5; \sin \alpha = \sqrt{21}/5.$$

Тоді  $T = 5P\sqrt{7}/14 \approx 18,9$  Н. Отже,  $T_{AB} = T_{A'B'} = T/2 = 9,45$  Н.

Аналітичний метод розв'язування. На рис. 1.17 зобразимо силу ваги  $\vec{P}$ , реакції в'язей  $\vec{N}$  та  $\vec{T}$ . Реакцію гладенької поверхні  $\vec{N}$  напрямляємо вздовж нормалі від поверхні призми, а загальний натяг симетричних ниток  $\vec{T}$  — паралельно лініям, які проходять через точку  $A$  кріплення до призми та центр  $C$  поперечного перерізу циліндра, як уже показано на рис. 1.18.

Вводимо систему координат. Її можна розташовувати довільно, але доцільно по-

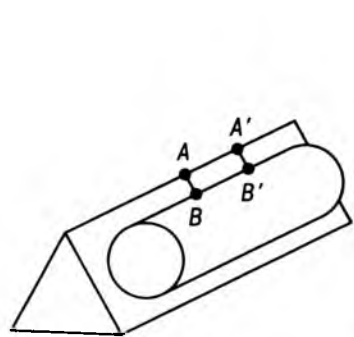


Рис. 1.16

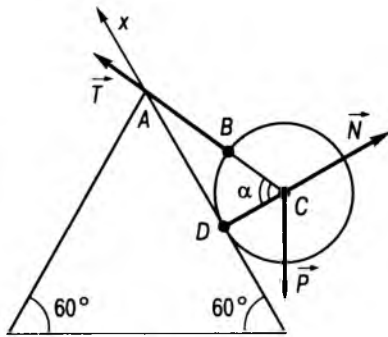


Рис. 1.17

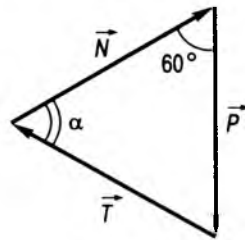


Рис. 1.18

чаток системи координат вибрати в точці  $D$ , а вісь  $Dx$  спрямувати вздовж похилої поверхні призми, як зображено на рис. 1.17, щоб позбавитись від другої невідомої  $\vec{N}$ . Далі запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^3 F_{ix} = T \sin \alpha - P \sin 60^\circ = 0 \Rightarrow T_{AB} = T_{A'B'} = T/2 = 5P \frac{\sqrt{7}}{28} \approx 9,45 \text{ Н.}$$

**Приклад 1.3.** Трикутна пластинка зі сторонами  $AB = 6$  м,  $CB = 4\sqrt{3}$  м,  $AC = 2\sqrt{21}$  м (рис. 1.19) шарнірно закріплена у вершині  $A$ , а вершина  $B$  підтримується за допомогою стрижня  $BD = 3$  м. Визначити реакцію шарніра  $A$  та зусилля у стрижні  $BD$ , якщо вага пластинки  $P = 9$  Н, а точки  $A$  і  $D$  знаходяться на одній вертикалі.

Графічний метод розв'язування. Об'єктом дослідження є пластинка. До неї прикладено: сила ваги  $\vec{P}$  (рис. 1.20) у точці  $M$  — центрі мас трикутника  $\triangle ABC$ , тобто у точці перетину медіан; зусилля  $\vec{S}$  у точці  $B$  стрижня  $BD$ ; реакція  $\vec{R}_A$  шарніра  $A$ . Отже, пластинка перебуває в рівновазі під дією трьох сил: сили ваги  $\vec{P}$ , реакції стрижня  $\vec{S}$  (напрявленої вздовж прямої  $BD$ , що сполучає шарніри) та реакції шарніра  $\vec{R}_A$ . Оскільки лінії дії сили  $\vec{P}$  і реакції стрижня

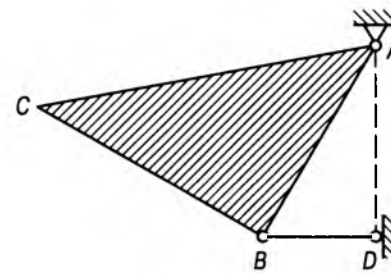


Рис. 1.19

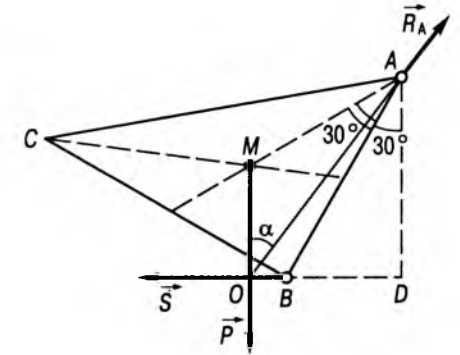


Рис. 1.20

перетинаються, то для розв'язання задачі застосуємо *теорему про три сили* (рис. 1.20).

Лінії дії реакції стрижня  $\vec{S}$  та сили  $\vec{P}$  перетинаються в точці  $O$ , тому і лінія дії реакції шарніра  $\vec{R}_A$  проходить через точку  $O$  перетину трьох сил та точку  $A$  — прикладення сили.

Розглянемо  $\triangle ABC$ , у якому  $\angle B$  визначаємо за *теоремою косинусів*:

$$\cos B = \frac{CB^2 + AB^2 - AC^2}{2 CB \cdot AB} = \frac{(4\sqrt{3})^2 + 6^2 - (2\sqrt{21})^2}{2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6} = 0,$$

тобто  $\angle B = 90^\circ$ .

Отже,  $\triangle ABC$  прямокутний. Оскільки  $M$  — точка перетину медіан, то

$$AM = \frac{2}{3} \sqrt{(AB)^2 + (CB/2)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = \frac{8}{3} \sqrt{3} \text{ м;}$$

$$\operatorname{tg} \angle MAB = \frac{CB}{2AB} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

тобто  $\angle MAB = 30^\circ$ . З прямокутного  $\triangle ABD$ :  $\sin \angle BAD = BD/AB = 1/2 \Rightarrow \angle BAD = 30^\circ$ .



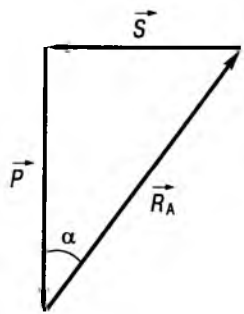


Рис. 1.21

Відстань  $OD = AM \sin 60^\circ = 4$  м;

$$AD = AB \cos 30^\circ = 3\sqrt{3} \text{ м.}$$

Далі будуємо силувий трикутник (рис. 1.21).

Знаходимо  $R_A = P/\cos \alpha$ ;  $S = P \operatorname{tg} \alpha$ , а  $\cos \alpha$  визначаємо за теоремою косинусів з  $\Delta AMO$ :

$$\cos \alpha = \frac{MO^2 + AO^2 - AM^2}{2MO \cdot AO}.$$

Обчислюємо

$$MO = AD - AM \cos 60^\circ = 5\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ м;}$$

$$AO = \sqrt{OD^2 + AD^2} = \sqrt{43} \text{ м.}$$

$$\text{Тоді } \cos \alpha = \frac{25/3 + 43 - 64/3}{2 \cdot 5/\sqrt{3} \cdot \sqrt{43}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}} = \frac{9}{\sqrt{129}}.$$

Далі визначаємо

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\sec^2 \alpha - 1} = \sqrt{43/27 - 1} = 4\sqrt{3}/9.$$

Остаточно знаходимо  $R_A = P\sqrt{129}/9 \approx$

$$\approx 11,36 \text{ Н; } S = 4P\sqrt{3}/9 \approx 6,93 \text{ Н.}$$

Аналітичний метод розв'язування. Реакцію стрижня  $\vec{S}$  прикладаємо у точці  $B$  (рис. 1.22) і напрямляємо вздовж прямої, що проходить через нерухомі шарніри  $B$  і  $D$ , а реакцію нерухомого шарніра  $A$  прикладаємо у точці  $A$  і зображаємо у ви-

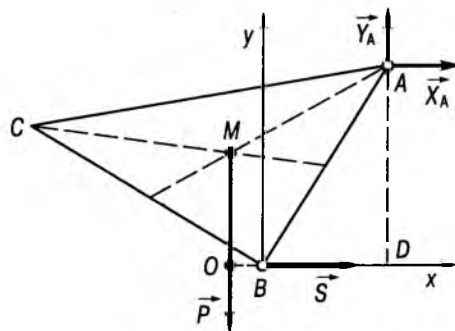


Рис. 1.22

гляді двох складових  $\vec{X}_A$  і  $\vec{Y}_A$ , оскільки напрямком його реакції невідомий.

Вводимо систему координат з початком у точці  $B$ . Вісь  $Bx$  спрямовуємо горизонтально вправо, а  $By$  — вертикально вгору.

Далі записуємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{x=1}^4 F_{ix} = X_A + S = 0 \Rightarrow X_A = -S,$$

$$\sum_{x=1}^4 F_{iy} = Y_A - P = 0 \Rightarrow Y_A = P = 9 \text{ Н,}$$

$$\sum_{x=1}^4 M_{iB} = -X_A \cdot AD + Y_A \cdot BD + P \cdot OB = 0.$$

З цього випливає, що

$$X_A = -S = \frac{(Y_A \cdot BD + P \cdot OB)}{AD} =$$

$$= \frac{P(3+1)}{3\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \approx 6,93 \text{ Н,}$$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{129} \approx 11,36 \text{ Н.}$$

**Приклад 1.4.** До невагомій рами, яка утримується в рівновазі за допомогою нерухомого шарніра  $A$  та криволінійного стрижня  $BC$ , прикладена сила  $\vec{F}$  (рис. 1.23). Знайти силу, що діє на шарнір  $A$ .

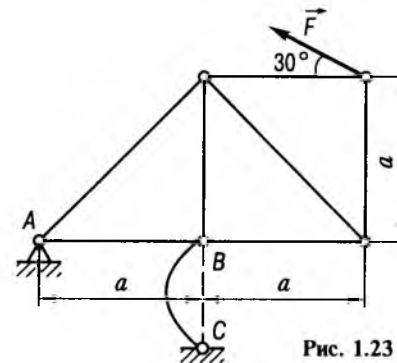


Рис. 1.23

Графічний метод розв'язування. Розглянемо рівновагу рами. Зауважимо, що сила, яка діє на шарнір  $A$ , — тиск рами (позначимо цю силу через  $\vec{R}'_A$ ), — не прикладена до рами, тому її не можна знайти з умов рівноваги рами. До рами прикладено: силу  $\vec{F}$ , зусилля  $\vec{S}$  у стрижні  $BC$  та реакцію шарніра  $\vec{R}_A$  (сили  $\vec{R}_A$  і  $\vec{R}'_A$  — сили дії та протидії, тобто  $\vec{R}_A = -\vec{R}'_A$ ). Тому спочатку знайдемо реакцію шарніра  $\vec{R}_A$  (рис. 1.24). Отже, рама перебуває в рівновазі під дією трьох сил: сили  $\vec{F}$ , реакції стрижня  $\vec{S}$  (напрявленої вздовж прямої  $BC$ , що сполучає шарніри) та реакції шарніра  $\vec{R}_A$ .

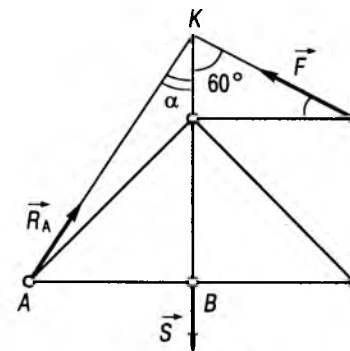


Рис. 1.24

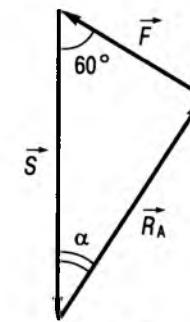


Рис. 1.25

Оскільки лінії дії сили  $\vec{F}$  і реакції стрижня перетинаються, то для розв'язування задачі застосовуємо *теорему про три сили* (рис. 1.24). Лінії дії реакції стрижня  $\vec{S}$  та сили  $\vec{F}$  перетинаються в точці  $K$ , тому і лінія дії реакції шарніра  $\vec{R}_A$  проходить через точку  $K$  (у ній перетинаються лінії дії трьох сил) та точку  $A$  прикладення сили.

Далі будуємо силувий трикутник (рис. 1.25). За теоремою синусів знаходимо  $R_A = \frac{F \sin 60^\circ}{\sin \alpha}$ . Далі з прямокутного  $\Delta ABK$

$$\text{визначаємо } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a(1+1/\sqrt{3})}{a} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Обчислюємо } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7+2\sqrt{3}}}.$$

Реакція шарніра

$$R_A = \frac{F\sqrt{7+2\sqrt{3}}}{2} \approx 1,62F.$$

Розглянувши рівновагу шарніра  $A$ , за аксіомою про дві сили визначаємо  $R'_A$ . Сила, що діє на шарнір,  $R'_A = R_A = \frac{F\sqrt{7+2\sqrt{3}}}{2} \approx 1,62F$ . Напрямок сили  $\vec{R}'_A$  протилежний напрямку сили  $\vec{R}_A$ .

Аналітичний метод розв'язування. Реакцію стрижня  $\vec{S}$  прикладаємо у

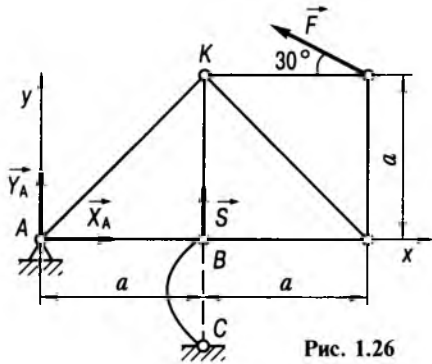


Рис. 1.26

точці  $B$  і напрямляємо вздовж прямої, що проходить через нерухомі шарніри  $B$  і  $C$ , а реакцію нерухомого шарніра  $\vec{R}_A$  прикладаємо у точці  $A$  і зображаємо у вигляді двох складових  $\vec{X}_A$  та  $\vec{Y}_A$  (рис. 1.26), оскільки напрямок його реакції невідомий. Вводимо систему координат з початком у точці  $A$ , вісь  $Ax$  спрямовуємо горизонтально вправо, а  $Ay$  — вертикально вгору. Далі записуємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^4 F_{ix} = X_A - F \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow X_A = F \sqrt{3}/2;$$

$$\sum_{i=1}^4 F_{iy} = Y_A + S + F \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow Y_A = -S - F/2;$$

$$\sum_{i=1}^4 M_{iA} = aS + aF \cos 30^\circ + 2aF \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow S = -F(\sqrt{3}/2 + 1).$$

Отже, розраховуємо  $Y_A = F(\sqrt{3} + 1)/2$ ,

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = F \sqrt{7 + 2\sqrt{3}}/2 \approx 1,62F = R'_A.$$

### 1.2.3. Задачі для самостійного розв'язування

1.1. На повітряну кульку  $A$  діє підйомна сила  $Q = 3$  Н. Кулька утримується невагомою ниткою  $OA$  довжиною  $l = 5$  м (рис. 1.27). Сила

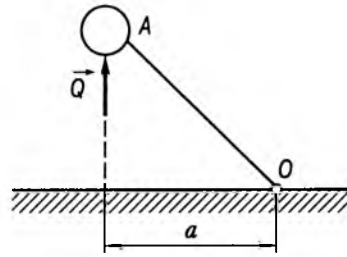


Рис. 1.27

вітру віднесла кульку на відстань  $a = 4$  м. Визначити натяг нитки, якщо сила вітру напрямлена горизонтально. Вагою кульки знехтувати.

$$\text{Відповідь: } T = Ql/\sqrt{l^2 - a^2} = 5 \text{ Н.}$$

1.2. Шарнірний стрижневий трикутник  $ABC$  може вільно обертатись навколо горизонтальної осі, яка проходить через точку  $A$  (рис. 1.28). На стрижні  $BC$  закріплено вантаж вагою  $P = 10$  Н. Визначити зусилля в стрижнях  $AB$  і  $AC$ , якщо  $AB = AC$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 15^\circ$ .

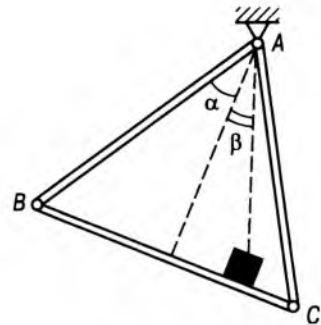


Рис. 1.28

$$\text{Відповідь: } S_{AB} = \frac{P \sin(\alpha - \beta)}{\sin 2\alpha} = 5 \text{ Н;}$$

$$S_{AC} = \frac{P \sin(\alpha + \beta)}{\sin 2\alpha} = 5\sqrt{3} \approx 8,66 \text{ Н.}$$

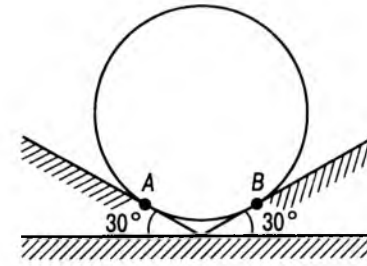


Рис. 1.29

1.3. У жолобі з абсолютно гладенькими стінками, які утворюють з горизонталлю кути по  $30^\circ$ , лежить циліндр вагою  $P = 60$  Н (рис. 1.29). Визначити тиск циліндра на стінки жолоба.

$$\text{Відповідь: } Q_A = Q_B = \frac{P}{2 \cos 30^\circ} = \frac{P\sqrt{3}}{3} \approx 34,64 \text{ Н.}$$

1.4. Визначити реакції нерухомого шарніра  $A$  і котка  $B$ , на які опирається невагомий важіль  $ADB$ , якщо перпендикулярно до  $AD$  у точці  $C$  прикладена сила  $P = 12$  кН і  $AC = 2CD = 2BD = 2$  м (рис. 1.30).

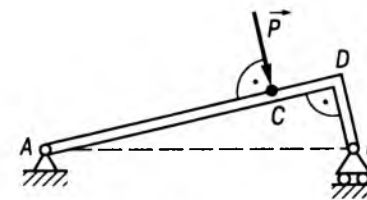


Рис. 1.30

$$\text{Відповідь: } R_A = \frac{P\sqrt{5}}{5} \approx 5,37 \text{ кН;}$$

$$R_B = \frac{P\sqrt{10}}{5} \approx 7,59 \text{ кН.}$$

1.5. Балка вагою  $P = 16$  кН може обертатись навколо горизонтальної осі, яка проходить через точку  $A$ , а кінцем  $B$  опирається на гладеньку опору (рис. 1.31). Визначити реакції опор, якщо балка з горизонтальною поверхнею утворює кут  $45^\circ$ .

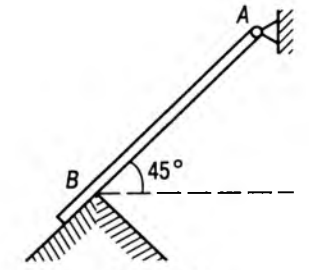


Рис. 1.31

$$\text{Відповідь: } R_A = \frac{P\sqrt{10}}{4} \approx 12,65 \text{ кН;}$$

$$N_B = \frac{P\sqrt{2}}{4} \approx 5,66 \text{ кН.}$$

1.6. Визначити реакцію стрижня  $BK$ , який підтримує у рівновазі плоский трикутник  $ABC$  вагою  $P = 36$  Н, якщо його вершина  $A$  закріплена в нерухомому шарнірі (рис. 1.32).

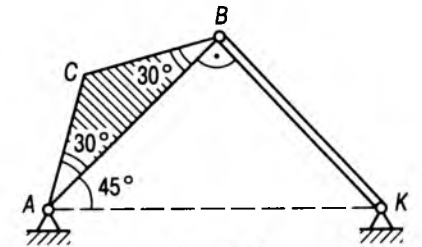


Рис. 1.32

$$\text{Відповідь: } S_{BK} = \frac{P\sqrt{2}(9 - \sqrt{3})}{36} \approx 10,25 \text{ Н.}$$

1.7. Визначити реакцію шарніра  $A$  і тиск однорідного бруска  $AB$  довжиною  $l = 6$  м



Рис. 1.33

вагою  $P = 14 \text{ Н}$  на поверхню гладкої півсфери радіуса  $R = 0,8 \text{ м}$  (рис. 1.33), якщо брусок у рівновазі нахилений до горизонту під кутом  $30^\circ$ .

Відповідь:  $R_A = \frac{7P\sqrt{633}}{211} \approx 11,69 \text{ Н};$   
 $N = \frac{15P\sqrt{3}}{14} \approx 25,98 \text{ Н}.$

**1.8.** Визначити реакцію нерухомого шарніра  $A$  і зусилля у стрижні  $CK$  квадратної ферми  $ABCD$ , до якої у точці  $B$  прикладена сила  $P = 20 \text{ кН}$  під кутом  $45^\circ$  до стрижня  $AB$  (рис. 1.34).

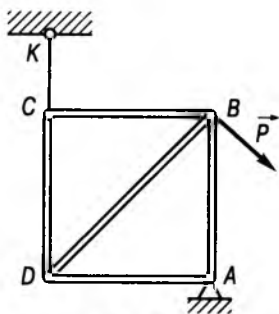


Рис. 1.34

Відповідь:  $R_A = \frac{P\sqrt{10}}{2} \approx 31,62 \text{ Н};$   
 $S_{CK} = \frac{P\sqrt{2}}{2} \approx 14,14 \text{ Н}.$

**1.9.** Визначити реакцію стрижня  $BK$ , який підтримує у рівновазі прямокутник  $ABCD$  вагою  $P = 46 \text{ Н}$ , що може обертатись навколо точки  $A$ , якщо  $AB = 2CB = 2 \text{ м}$  (рис. 1.35).

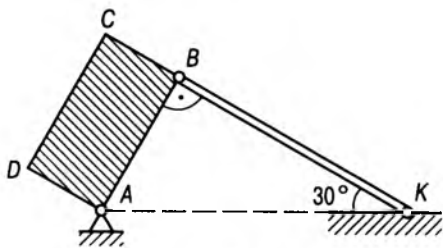


Рис. 1.35

Відповідь:  $S_{BK} = \frac{P(17\sqrt{3} - 27)}{46} \approx 2,44 \text{ Н}.$

**1.10.** Визначити реакції двох гладеньких площин, на які опирається балка  $AB$  у точках  $A$  і  $B$ , якщо її вага  $P = 132 \text{ Н}$  (рис. 1.36). Який кут утворюють площини?

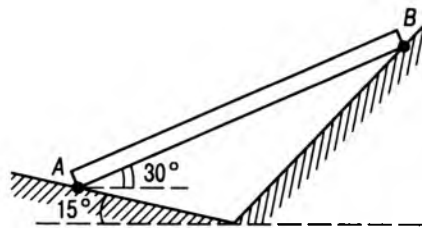


Рис. 1.36

Відповідь:  $N_A = \frac{P\sqrt{6}}{4} \approx 80,83 \text{ Н};$   
 $N_B = \frac{P\sqrt{2(5-2\sqrt{3})}}{4} \approx 57,84 \text{ Н};$   
 $\angle ACB = \arctg(1 - \sqrt{3}) \approx 143,8^\circ.$

### § 1.3. РІВНОВАГА СКЛАДЕНОЇ КОНСТРУКЦІЇ

#### 1.3.1. Короткі теоретичні відомості

Якщо конструкція складена, то потрібно скористатись методом перерізів, щоб звести систему сил до збіжної.

У такому випадку розглядають рівновагу кожного тіла окремо. При цьому інші тіла є внутрішніми в'язями для заданої системи тіл і зовнішніми для тіла, що розглядається. Зовнішні в'язі відкидають, замінивши їхню дію реакціями, прикладеними у точках контакту тіл. Проте слід пам'ятати, що внутрішні сили задовольняють третій закон Ньютона.

Насамперед розглядають рівновагу того тіла складеної конструкції, для якого задача є статично визначеною.

У деяких випадках може виявитись, що задача рівноваги для кожного тіла системи є статично невизначеною, проте її розв'язання можливе, бо загальна кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих сил — внутрішні сили входять двічі у рівняння рівноваги різних тіл. Зазначимо також, що у разі розглядання рівноваги всієї конструкції потрібно користуватися аксіомою про затверднення.

#### 1.3.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 1.5.** Розглянемо приклад 1.1 у такій постановці: потрібно знайти зусилля в стрижнях та натяг нитки (рис. 1.13).

Розв'язування. Оскільки натяг нитки є внутрішньою силою, то доцільно застосувати метод перерізів, тобто нитку слід перерізати, але етап розв'язування задачі, на якому це треба зробити, можна вибрати по-різному.

По-перше, треба відзначити, якщо розглянути рівновагу шарніра  $B$ , то доведеться визначати три невідомі сили: зусилля в стрижнях  $BC$  та  $AB$  і натяг нитки  $\vec{T}$  (рис. 1.37). Отже, знайти натяг нитки неможливо. Ця задача може бути розв'язана так. Спочатку розглядають рівновагу шарніра  $B$ , нитки та вантажу  $P$  (рис. 1.15), знаходять сили  $\vec{S}_1$  та  $\vec{S}_2$  (рис. 1.37), а далі розглядають окремо рівновагу вантажу  $P$  і знаходять натяг нитки, що, в свою чергу, може бути виконано двома способами: розглядають рівновагу шарніра  $B$ , на який діють зусилля у стрижнях  $BC$  та  $AB$  і натяг нитки  $\vec{T}$ . Тобто зрівноважуються відомі сили  $\vec{S}_1$  і  $\vec{S}_2$  та невідома сила, яку треба визначити (натяг нитки  $\vec{T}$ ). Силу  $\vec{T}$  можна знайти як графічно, так і аналітично.

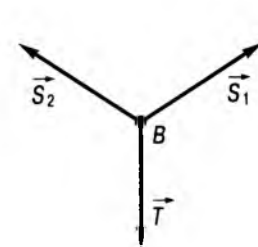


Рис. 1.37

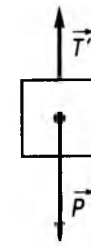


Рис. 1.38

Простіше відразу розглянути рівновагу вантажу  $P$ , на який діють сили ваги  $\vec{P}$  та натягу нитки  $\vec{T}'$  (рис. 1.38), тобто рівновагу сили, з якою відкинута верхня частина нитки діє на нижню за третім законом Ньютона. Сили  $\vec{T}$  та  $\vec{T}'$  є силами дії та протидії, тому  $\vec{T} = -\vec{T}'$ . Згідно з аксіомою про дві сили маємо  $\vec{T}' = -\vec{P}$ , тобто  $T = P$ ; відразу розглядаємо рівновагу вантажу  $P$  і знаходимо силу  $\vec{T}'$  відповідно до аксіоми про дві сили (рис. 1.38). Далі знаходимо силу  $\vec{T} = -\vec{T}'$ . А вже тепер, аналізуючи систему сил, що зображена на рис. 1.37, знаходимо сили  $\vec{S}_1$  та  $\vec{S}_2$ , розглядаючи силу  $\vec{T}$  як відому.

За кількістю обчислень усі можливі варіанти розв'язування задачі достатньо близькі. Шлях розв'язування вибирають відповідно до постановки задачі.

**Приклад 1.6.** На рис. 1.39 зображено систему тіл, аналогічну системі, зображеній на рис. 1.13, але нитка перекинута через блок  $L$ , закріплений шарнірно. Треба знайти зусилля в стрижнях.

Розв'язування. Розглянемо рівновагу системи тіл шарнір—нитка—блок—вантаж

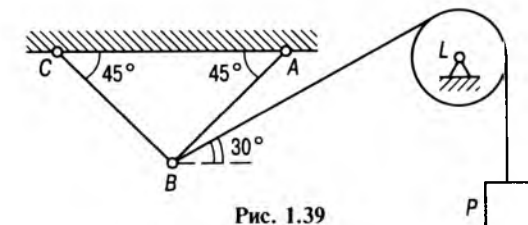


Рис. 1.39

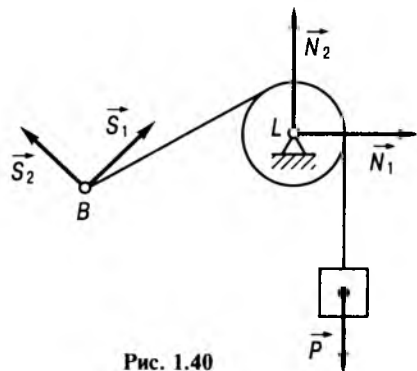


Рис. 1.40

гою нерухомого шарніра, розглянемо реакцію шарніра  $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$  (рис. 1.40). Але за таких умов ми не матимемо збіжної системи сил. Крім того, кількість невідомих сил дорівнює чотирьом, що перевищує максимальну кількість рівнянь (три) для плоскої системи сил. Тому потрібно змінити систему тіл, рівновага якої буде розглядатися.

таж, до якої прикладено систему сил: відому силу  $\vec{P}$ , зусилля  $\vec{S}_1$  та  $\vec{S}_2$  у стрижнях  $AB$  та  $BC$ , реакцію блока  $\vec{N}$ . Оскільки блок закріплений за допо-

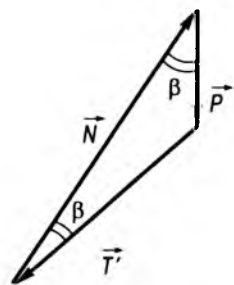
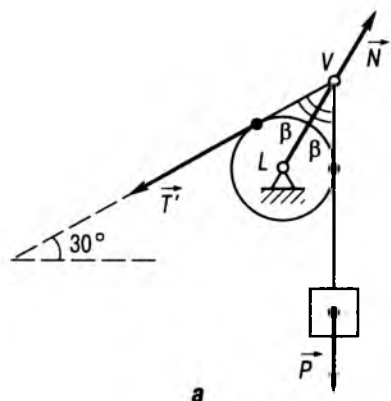


Рис. 1.41

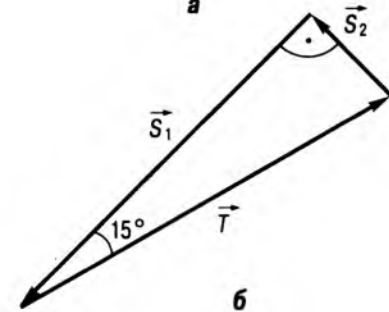
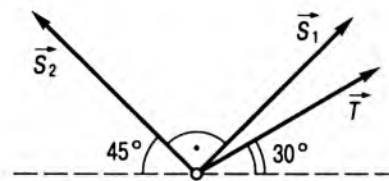


Рис. 1.42

Для виключення із розгляду реакцій  $\vec{N}_1$  та  $\vec{N}_2$  розглянемо рівновагу блока  $L$  і знайдемо спочатку натяг нитки  $\vec{T}'$ , тобто використаємо методику розв'язання, розглянуту в попередній задачі. На блок діють три сили: вага вантажу  $\vec{P}$ , натяг нитки  $\vec{T}' = -\vec{T}$  та реакція шарніра  $L$  —  $\vec{N}$  (рис. 1.41, а). Дві сили  $\vec{T}'$ ,  $\vec{P}$  перетинаються в точці  $V$ , отже, згідно з теоремою про три сили реакція шарніра  $\vec{N}$  також буде проходити через точку  $V$ . Побудуємо трикутник сил (рис. 1.41, б). Оскільки він рівнобедрений, то  $T' = P$ . Далі розглянемо рівновагу шарніра  $B$  (рис. 1.42), до яко-

го прикладено натяг нитки  $\vec{T}$ , зусилля у стрижнях  $\vec{S}_1$  і  $\vec{S}_2$ . Тут відомою є сила  $\vec{T}$ , а невідомими — сили  $\vec{S}_1$  та  $\vec{S}_2$ . Методика розв'язання збігається з наведеною у прикладі 1. Запишемо

$$S_1 = T \cos 15^\circ = P \cos 15^\circ ;$$

$$S_2 = T \sin 15^\circ = P \sin 15^\circ .$$

Таким чином, у цій задачі нитку розрізають у будь-якому разі, навіть тоді, коли за умовою задачі натяг нитки знаходити не треба. Це пояснюється тим, що потрібно виключення з розгляду реакції шарніра  $L$ .

**Приклад 1.7.** Однорідний брусок  $AB$  (рис. 1.43) довжиною  $3R$  і вагою  $16 \text{ Н}$ , який може обертатись навколо горизонтальної осі, що проходить через точку  $A$ , опирається на поверхню гладенького циліндра радіусом  $R$ . Циліндр лежить на гладенькій горизонтальній площині і утримується нерозтяжною ниткою  $AC$  довжиною  $2R$ . Визначити натяг нитки  $T$  і силу тиску бруска на шарнір  $A$ .

**Розв'язування.** Розглянемо рівновагу системи тіл брусок—циліндр, до якої прикладено сили ваги бруска  $\vec{P}$  (відома) і циліндра  $\vec{G}$  (рис. 1.44), реакції гладенької площини  $\vec{N}$ , нерухомого шарніра  $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A$  (невідомі величина і напрям), натяг нитки  $\vec{T}$ . Ця система сил не збіжна. Крім того, кількість невідомих сил (п'ять) перевищує

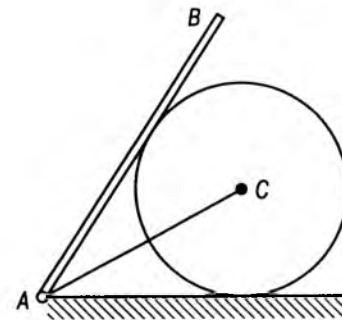


Рис. 1.43

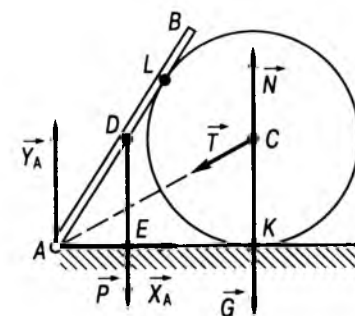


Рис. 1.44

максимальну кількість рівнянь (три) рівноваги для плоскої системи сил. Тому необхідно змінити систему тіл, рівновагу якої розглянемо.

На брусок  $AB$  (рис. 1.45, а) діють три сили: вага  $\vec{P}$ , реакція гладенької поверхні циліндра  $\vec{Q}$  та реакція шарніра  $A$  —  $\vec{R}_A$ . Дві сили  $\vec{P}$  і  $\vec{Q}$  перетинаються в точці  $O$ , отже, згідно з теоремою про три сили реакція шарніра  $\vec{R}_A$  також буде проходити через точку  $O$ . Будуємо трикутник сил (рис. 1.45, б). Оскільки з рис. 1.44  $\sin \angle LAC = R/(2R) = 0,5$ , то  $\angle LAC = \angle CAK = 30^\circ$ , а  $\angle LOD = 60^\circ$ . Далі знаходимо

$$AL = AC \cos 30^\circ = R\sqrt{3} ;$$

$$AD = AB/2 = 1,5R ;$$

$$AE = AD \cos 60^\circ = 0,75R ;$$

$$OE = ED + OD = AD \sin 60^\circ + \frac{AL - AD}{\sin 60^\circ} = R(2 - \sqrt{3}/4) ;$$

$$AO = \sqrt{OE^2 + AE^2} = R\sqrt{19 - 4\sqrt{3}}/2 ;$$

$$\sin \beta = AE/AO = 3/(2\sqrt{19 - 4\sqrt{3}}) ;$$

$$\cos \beta = (8 - \sqrt{3})/(2\sqrt{19 - 4\sqrt{3}}) ;$$

$$\text{ctg } \beta = (8 - \sqrt{3})/3 .$$

Тоді із силового трикутника (рис. 1.45, б) маємо

$$Q = P \sin \beta / \sin(\beta + 60^\circ) = 2P / (1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \beta) = P\sqrt{3}/4 = 4\sqrt{3} \approx 6,93 \text{ Н.}$$

$$R_A = P \sin 60^\circ / \sin(\beta + 60^\circ) = P\sqrt{3} / (\sin \beta + \sqrt{3} \cos \beta) = P\sqrt{19 - 4\sqrt{3}} / 4 = 4\sqrt{19 - 4\sqrt{3}} \approx 13,9 \text{ Н.}$$

Далі розглянемо рівновагу циліндра. До нього прикладено чотири сили: вага  $\vec{G}$  (рис. 1.46, а), реакції гладеньких поверхонь бруска  $\vec{Q}$  та площини  $\vec{N}$ , натяг нитки  $\vec{T}$ . Усі сили перетинаються в точці С. Отже,

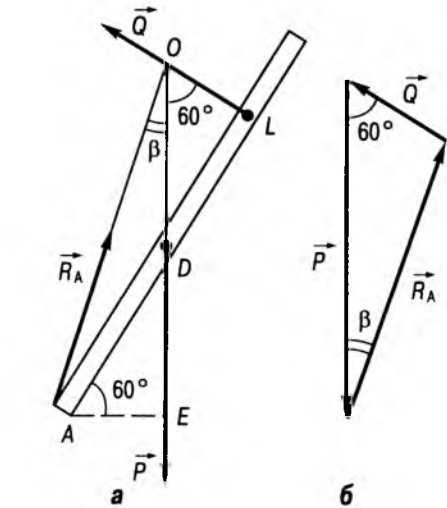


Рис. 1.45

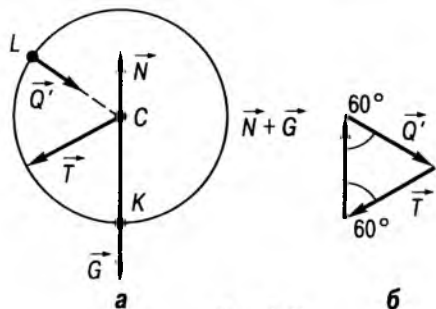


Рис. 1.46

будуємо силний трикутник (рис. 1.46, б). Оскільки він рівносторонній, то

$$T = Q = P\sqrt{3}/4 = 4\sqrt{3} \approx 6,93 \text{ Н.}$$

### 1.3.3. Задачі для самостійного розв'язування

1.11. Два невагомих стрижні  $AB$  і  $AC$  (рис 1.47) розміщені під кутами  $\alpha = 30^\circ$  і  $\beta = 60^\circ$  до горизонту та з'єднані між собою шарніром  $A$ . До цього шарніра прикріплено шнур, до кінця якого прив'язано вантаж вагою  $P$ . Визначити зусилля у стрижнях.

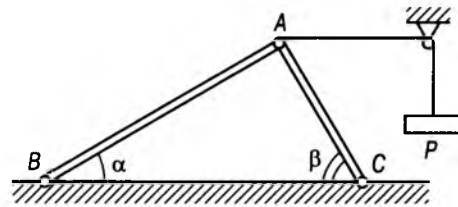


Рис. 1.47

Відповідь:  $S_{AB} = \frac{P \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = P\sqrt{3}/2$ ;  
 $S_{AC} = \frac{P \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = P/2$ .

1.12. Вантаж  $Q = 20 \text{ Н}$  зрівноважено за допомогою тросів, перекинутих через нерухомі блоки  $A$  і  $C$ , до кінців яких підвішені дві однакові противаги (рис. 1.48). Визначити вагу противаг, якщо відстань між невагомими блоками  $AC = l = 8 \text{ м}$ , а трос провис на висоту  $h = 3,5 \text{ м}$ .

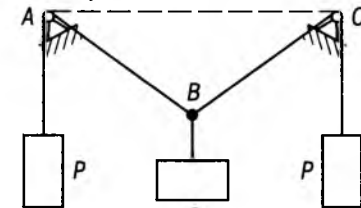


Рис. 1.48

Відповідь:  $P = \frac{Q\sqrt{l^2 - 4h^2}}{4h} = 20\sqrt{15} = 77,46 \text{ Н.}$

1.13. Дві маленькі кульки  $A$  і  $B$  (рис. 1.49) вагою  $P$  і  $Q$ , з'єднані між собою невагомим жорстким стрижнем, знаходяться у стані рівноваги всередині гладенької сферичної нерухомої чаші радіусом  $R$ . Визначити тиск кульок на чашу та зусилля у стрижні, якщо довжина стрижня  $AB = 2l$ .

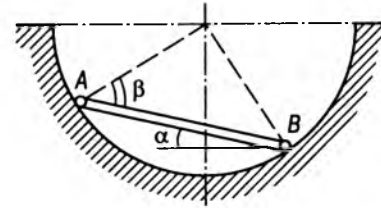


Рис. 1.49

Відповідь:  $Q_A = Q_B = \frac{P \cos \alpha}{\sin \beta}$ ;

$$S = \frac{P \cos(\beta - \alpha)}{\sin \beta},$$

де  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{(Q - P)l}{(P + Q)\sqrt{R^2 - l^2}}$ ;  $\cos \beta = \frac{l}{R}$ .

1.14. Гладенька кулька  $A$  (рис. 1.50) радіуса  $R$  дотикається до гладеньких поверхонь стіни і підлоги. З якою силою  $Q$  необхідно притиснути до неї брусок висотою  $h$  ( $h < R$ ), щоб кулька відірвалась від підлоги?

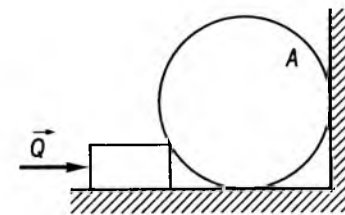


Рис. 1.50

Відповідь:  $Q = P\sqrt{2Rh - h^2} / (R - h)$ .

1.15. На вузол  $D$  (рис. 1.51) шарнірної стрижневої конструкції діє вздовж стрижня  $DB$  сила  $\vec{F}$ . Визначити зусилля у стрижнях, реакцію шарніра  $A$  і котка  $B$ , якщо всі стрижні невагом і мають однакову довжину.

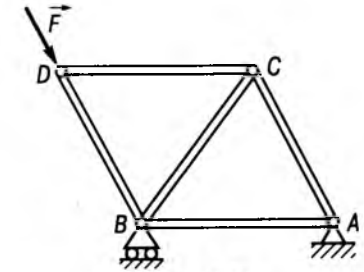


Рис. 1.51

Відповідь:  $R_A = S_{AB} = F/2$ ;  $R_B = F\sqrt{3}/2$ ;  $S_{BD} = F$ ;  $S_{CA} = S_{DC} = S_{CB} = 0$ .

1.16. На вузол  $D$  (рис. 1.52) ферми діє горизонтальна сила  $\vec{F}$ . Визначити зусилля у стрижнях, реакцію шарніра  $A$  і котка  $B$ , якщо  $AC = CB = 2CD$ . Вагою стрижнів знехтувати.

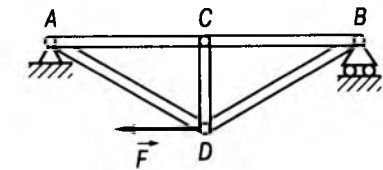


Рис. 1.52

Відповідь:  $R_A = F/4$ ;  $R_B = F\sqrt{17}/4$ ;  
 $S_{BD} = S_{AD} = F\sqrt{5}/4$ ;  $S_{CD} = 0$ ;  $S_{AC} = S_{BC} = F/2$ .

1.17. Механічна система з трьох стрижнів  $AB$ ,  $BC$  і  $CD$  (рис. 1.53) закріплена шарнірно у нерухомих точках  $A$  і  $D$ . До вузла  $B$  прикладена вертикальна сила  $P = 3 \text{ кН}$ . Яку вертикальну силу  $Q$  потрібно прикласти до вузла  $C$ ,

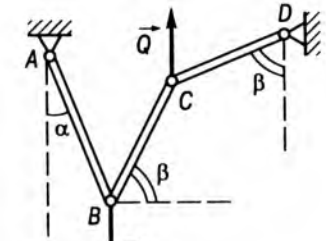


Рис. 1.53

щоб система знаходилась у рівновазі, якщо  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ?

Відповідь:  $Q = S_{AB} = S_{BC} = P\sqrt{3}/3 \approx 1,73 \text{ кН}$ ;  $S_{CD} = P = 3 \text{ кН}$ .

**1.18.** Для трьохшарнірної арки визначити реакції шарнірів  $A$ ,  $O$  і  $B$ , які виникають у результаті дії сили  $P$ , спрямованої під кутом  $30^\circ$  до вертикалі (рис. 1.54).

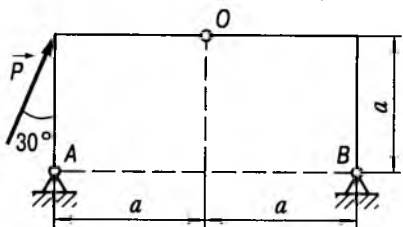


Рис. 1.54

Відповідь:  $R_O = R_B = P\sqrt{2}(4 - \sqrt{3})/13 \approx 0,25P$ ;

$R_A = P(3\sqrt{3} + 1)\sqrt{14 + 4\sqrt{3}}/26 \approx 1,09P$ .

**1.19.** Між двома взаємно перпендикулярними гладенькими площинами  $OA$  і  $OB$  (рис. 1.55) лежать два гладеньких однорідних циліндри, які дотикаються. Визначити кут  $\varphi$ , який утворює пряма, що проходить через центри циліндрів, із горизонталлю, а також сили взаємного тиску циліндрів та кожного

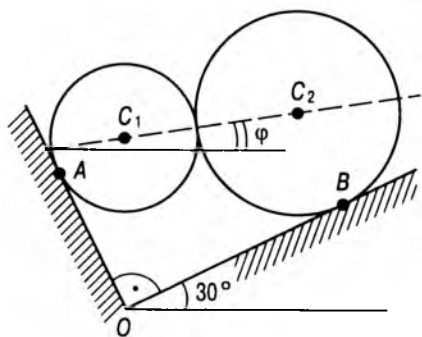


Рис. 1.55

з них на відповідні площини, якщо площина  $OB$  нахилена до горизонту під кутом  $30^\circ$ , а вага циліндрів  $P_1 = 10 \text{ Н}$ ,  $P_2 = 30 \text{ Н}$ .

Відповідь:  $\text{tg } \varphi = \frac{\sqrt{3}(3P_1 - P_2)}{3(P_1 + P_2)} = 0$ ;

$N = \frac{\sqrt{3P_1^2 + P_2^2}}{2} = 17,32 \text{ Н}$ ;  $N_1 = \frac{P_1 + P_2}{2} =$

$= 20 \text{ Н}$ ;  $N_2 = \frac{\sqrt{3}(P_1 + P_2)}{2} \approx 34,64 \text{ Н}$ .

**1.20.** Два однакових циліндри вагою  $P$ , які не торкаються один одного, підвішені на нитках до точки  $O$  (рис. 1.56). Між ними лежить третій циліндр. Визначити вагу  $Q$  цього циліндра, якщо механічна система зрівноважена, а кути  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ .

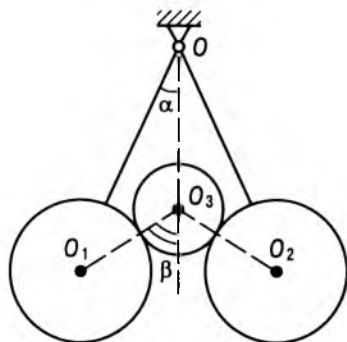


Рис. 1.56

Відповідь:  $Q = \frac{2P \text{tg } \alpha}{\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha} = P(\sqrt{3} + 1)$ .

## § 1.4. РІВНОВАГА ЗБІЖНОЇ СИСТЕМИ СИЛ З УРАХУВАННЯМ СИЛ ТЕРТЯ

### 1.4.1. Короткі теоретичні відомості

Коли тіло, що перебуває в рівновазі, утримується в'язями з тертям, то до рівнянь рівноваги необхідно приєднати додаткову умову, яку визначають за формулою

$$F_{\text{тр max}} = fN, \quad (1.10)$$

де  $f$  — коефіцієнт пропорційності, який характеризує ступінь шорсткості поверхонь контактних тіл і називається *коефіцієнтом тертя ковзання*;  $N$  — нормальна складова реакції, тобто

$$|\vec{F}_{\text{тр}}| \leq F_{\text{тр max}} = fN, \quad (1.11)$$

Методика розв'язання задач статки за наявності сил тертя ковзання така. Якщо за умовою задачі відомо, що тіло зрівноважене, то, застосовуючи графічний метод (теорему про три сили), спочатку визначають реакцію  $\vec{R}$  шорсткої поверхні і кут тертя  $\alpha$  між нормаллю до поверхні та  $\vec{R}$ . Далі записують умову (1.11) у вигляді

$$|\text{tg } \alpha| \leq f \text{ або } -f \leq \text{tg } \alpha \leq f \quad (1.12)$$

і визначають складові реакції шорсткої поверхні: нормальну  $\vec{N}$  та силу тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$  (рис. 1.4) з формул

$$F_{\text{тр}} = R \sin \alpha; \quad N = R \cos \alpha. \quad (1.13)$$

У разі застосування аналітичної форми запису рівнянь рівноваги нормальну складову реакції та силу тертя ковзання визначають з умов рівноваги. Для цього силу тертя зображають як дотичну складову реакції опори. Якщо напрям можливого руху тіла у разі відсутності сили тертя є очевидним, то силу тертя доцільно напрямляти в протилежному напрямі (це відображає той факт, що сила тертя ковзання перешкоджає можливому руху). Якщо напрям можливого руху тіла визначити неможливо або складно, силу тертя спрямовують вздовж дотичної у довільному напрямі (дійсний напрям сили тертя ковзання визначають у процесі розв'язання задачі).

Зауважимо, що на цьому етапі розв'язання задачі додаткову умову не використовують.

У разі, коли треба переконатися, що тіло перебуває в рівновазі, або тоді, коли мова

йде про порушення цього стану, розв'язання задачі слід продовжити. У випадку рівноваги треба перевірити виконання додаткових умов

$$N \geq 0; \quad -fN \leq F_{\text{тр}} \leq fN,$$

або, якщо необхідно, визначити з цих умов шукану величину (силу тертя ковзання, кут тертя і т. ін.).

### 1.4.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 1.8.** На шорсткій похилій поверхні (рис. 1.57) у стані спокою знаходиться тіло вагою  $P = 10 \text{ Н}$ , на яке діє сила  $Q$  ( $\alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ$ ). Визначити:

- 1) силу тертя ковзання, якщо  $Q = 7 \text{ Н}$ ;
- 2) величину сили  $Q$ , при якій тіло перебуватиме в стані спокою, якщо коефіцієнт тертя ковзання  $f = 0,05$ .

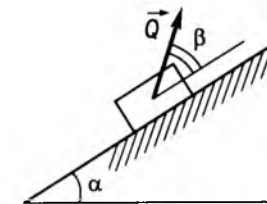


Рис. 1.57

Графічний метод розв'язування. Розглянемо рівновагу тіла, на яке діють сила  $\vec{Q}$  (рис. 1.58, а), сила ваги  $\vec{P}$  та реакція шорсткої поверхні  $\vec{R}$ . Відразу визначити напрям можливого руху тіла неможливо, бо він залежить як від величин сил  $\vec{Q}$  і  $\vec{P}$ , так і від значень кутів  $\alpha$  та  $\beta$ . Тому зобразимо реакцію шорсткої поверхні  $\vec{R}$  у довільному напрямі під невідомим кутом  $\alpha^*$ , наприклад, вправо від нормалі до поверхні. Оскільки всі три сили перетинаються в одній точці, будемо замкнутий силувий трикутник (рис. 1.59). Кут  $\alpha^*$  між силою  $\vec{R}$  і нормаллю у стані рівноваги задовольняє нерівність  $|\text{tg } \alpha^*| \leq f$ .

За теоремою синусів маємо  $\frac{P}{\cos(\alpha^* + \beta)} = \frac{Q}{\sin(\alpha - \alpha^*)}$ , звідки

$$\operatorname{tg} \alpha^* = \frac{P \sin \alpha - Q \cos \beta}{P \cos \alpha - Q \sin \beta}.$$

Для прийнятих даних отримаємо  $\operatorname{tg} \alpha^* = 0,006$ . Це означає, що сила  $\vec{R}$  напрямлена вправо від нормалі до похилої поверхні. Отже, тіло буде рухатись вгору, а в стані рівноваги згідно з умовою (1.12)

$$-f \leq \operatorname{tg} \alpha^* = \frac{P \sin \alpha - Q \cos \beta}{P \cos \alpha - Q \sin \beta} \leq f.$$

Отже,  $\sin \alpha^* = \frac{|Q \cos \beta - P \sin \alpha|}{R}$ , тоді для заданих величин відповідно до формули (1.13) маємо

$$F_{\text{тр}} = R \sin \alpha^* = |Q \cos \beta - P \sin \alpha| = |7 \cdot 0,7071 - 10 \cdot 0,5| \approx 0,05 \text{ Н};$$

$$P \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \beta - f \sin \beta} \leq Q \leq P \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \beta + f \sin \beta},$$

звідки  $6,8 \text{ Н} \leq Q \leq 7,32 \text{ Н}$ .

Аналітичний метод розв'язування. Реакцію шорсткої поверхні зображаємо у вигляді нормальної складової реакції опори  $\vec{N}$  та сили тертя ковзання  $\vec{F}_{\text{тр}}$

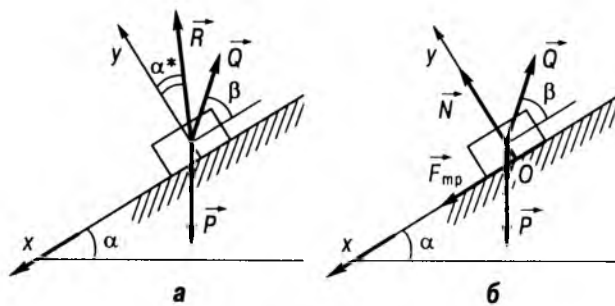


Рис. 1.58

(рис. 1.58, б). Як зазначалося, відразу визначити напрям можливого руху тіла неможливо, тому зображаємо силу тертя вздовж поверхні в довільному напрямі, наприклад донизу (рис. 1.58, б). Вводимо систему координат  $Oxy$ . Для визначення сили  $\vec{F}_{\text{тр}}$  достатньо скористатись одним рівнянням рівноваги, а саме:

$$\sum_{i=1}^4 F_{xi} = P \sin \alpha - Q \cos \beta + F_{\text{тр}} = 0.$$

Звідси знаходимо  $F_{\text{тр}} = Q \cos \beta - P \sin \alpha$ .

Для заданих величин маємо

$$F_{\text{тр}} = 7 \cdot 0,7071 - 10 \cdot 0,5 = -0,05 \text{ Н}.$$

Від'ємний знак величини  $F_{\text{тр}}$  означає, що дійсний напрям сили  $\vec{F}_{\text{тр}}$  протилежний зображеному на рис. 1.58, б. На цьому перший етап задачі завершено.

Для визначення сили  $\vec{Q}$ , при якій тіло перебуває в рівновазі, знайдемо нормальну складову реакції шорсткої поверхні  $\vec{N}$  з другого рівняння рівноваги

$$\sum_{i=1}^4 F_{yi} = -P \cos \alpha + Q \sin \beta + N = 0.$$

З нього знаходимо  $N = P \cos \alpha - Q \sin \beta$ .

Згідно з (1.11) маємо

$$|F_{\text{тр}}| = 0,05 \text{ Н} \leq f N = f (P \cos \alpha - Q \sin \beta) = 0,05 (10 \cdot 0,866 - 7 \cdot 0,7071) = 0,19 \text{ Н}.$$

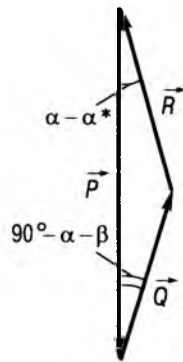


Рис. 1.59

Розглянемо другий етап розв'язування задачі. Оскільки мова йде про порушення стану спокою, то суть задачі полягає в дослідженні умови (1.11), тобто

$$|Q \cos \beta - P \sin \alpha| \leq f (P \cos \alpha - Q \sin \beta).$$

Цей вираз можна записати так:

$$-f (P \cos \alpha - Q \sin \beta) \leq P \sin \alpha - Q \cos \beta \leq f (P \cos \alpha - Q \sin \beta),$$

звідки

$$P \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \beta - f \sin \beta} \leq Q \leq P \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \beta + f \sin \beta}.$$

Для заданих параметрів отримаємо

$$6,8 \text{ Н} \leq Q \leq 7,32 \text{ Н}.$$

Зауважимо, що аналогічно розглянутій є така постановка задачі: за відомою силою  $Q$  визначити значення кута  $\alpha$ , при якому тіло починає рухатись.

**Приклад 1.9.** Визначити, при яких значеннях кута  $\alpha$  балка вагою  $P$ , що спирається на гладеньку стіну та шорстку підлогу з

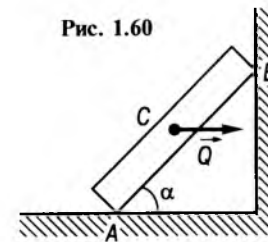


Рис. 1.60

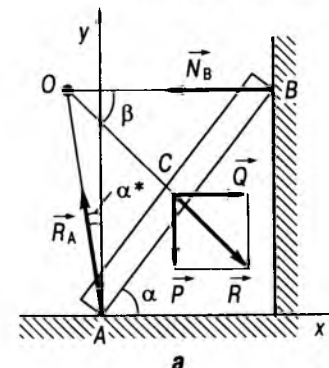
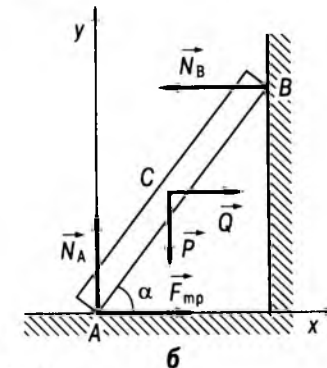


Рис. 1.61



коефіцієнтом тертя  $f$ , зрівноважена. До середини балки прикладено горизонтальну силу  $\vec{Q}$  (рис. 1.60).

Графічний метод розв'язування. Розглянемо рівновагу балки, на яку діють сила  $\vec{Q}$ , сила ваги  $\vec{P}$  та реакції гладенької стіни  $\vec{N}_B$  та шорсткої підлоги  $\vec{R}_A$  (рис. 1.61, а). Оскільки сили  $\vec{Q}$  і  $\vec{P}$  прикладені в одній точці, то за аксіомою II їх можна замінити рівнодійною  $\vec{R}$ .

Отже, балка перебуває в рівновазі під дією трьох сил  $\vec{N}_B$ ,  $\vec{R}_A$  та  $\vec{R}$ . Точка перетину їх ліній дії знаходиться в точці  $O$ . Кут між реакцією шорсткої поверхні  $\vec{R}_A$  і нормаллю до підлоги позначимо  $\alpha^*$ , наприклад, вліво від нормалі до поверхні (рис. 1.61, а). Далі будемо замкнутий силовий трикутник (рис. 1.62). За теоремою синусів з  $\triangle OBC$  і  $\triangle OAC$  маємо

$$OC = \frac{AB \sin \alpha}{2 \sin \beta} = \frac{AB \cos(\alpha - \alpha^*)}{2 \cos(\beta + \alpha^*)},$$

де  $\operatorname{ctg} \beta = Q/P$ . Звідси  $\operatorname{tg} \alpha^* = \frac{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}{2}$ .

У стані рівноваги виконується нерівність  $|\operatorname{tg} \alpha^*| \leq f$ . Отже,

$$-f \leq \frac{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}{2} \leq f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{ctg} \beta - 2f \leq \operatorname{ctg} \alpha \leq \operatorname{ctg} \beta + 2f$$

$$\text{або } Q/P - 2f \leq \operatorname{ctg} \alpha \leq Q/P + 2f.$$

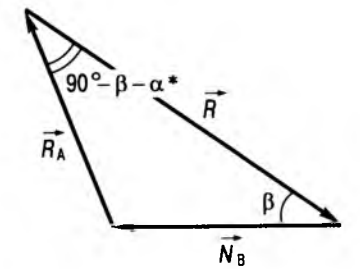


Рис. 1.62

Аналітичний метод розв'язування. Вводимо систему координат  $Ax$  (рис. 1.61, б). Зображаємо відомі сили  $\vec{P}$ ,  $\vec{Q}$ , реакцію гладенької стіни  $\vec{N}_B$  та реакцію шорсткої поверхні у вигляді нормальної складової  $\vec{N}_A$  та сили тертя ковзання  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , яку спрямуємо вздовж осі  $Ax$ .

Запишемо рівняння рівноваги балки

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^5 F_{xi} = F_{\text{тр}} + Q - N_B = 0, \\ \sum_{i=1}^5 F_{yi} = N_A - P = 0, \\ \sum_{i=1}^5 M_{Ai} = -P(AC \cos \alpha) - Q(AC \sin \alpha) + N_B(AB \sin \alpha) = 0. \end{cases}$$

Звідси  $F_{\text{тр}} = \frac{1}{2} P \operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{2} Q$ ;  $N_A = P$ .

На цьому завершено перший етап розв'язання задачі.

Переходимо до другого етапу. Розв'язуючи нерівність  $|\vec{F}_{\text{тр}}| \leq f N_A$ , одержуємо

$$\frac{Q}{P} - 2f \leq \operatorname{ctg} \alpha \leq \frac{Q}{P} + 2f.$$

Це і є розв'язок задачі.

**Приклад 1.10.** Визначити найменше значення сили  $\vec{Q}$  (рис. 1.63), при якому система зрівноважена, якщо коефіцієнт тертя ковзання між клином вагою  $P$  і кутом  $2\alpha$  та пластинками дорівнює  $f$ . Опора, на якій лежать пластинки 1, 2, гладенька.

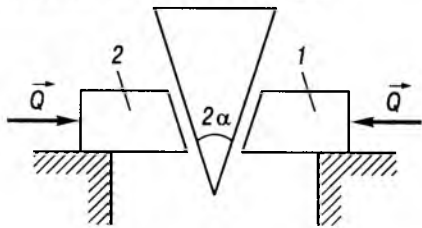


Рис. 1.63

Графічний метод розв'язування. Розглянемо рівновагу клина, на який діють три сили: сила ваги  $\vec{P}$  та реакції шорстких поверхонь тіл  $\vec{R}_{1\text{пл}}$  і  $\vec{R}_{2\text{пл}}$  (рис. 1.65, а). Згідно з теоремою про три сили, лінії дії всіх сил перетинаються в одній точці. Оскільки механічна система симетрична, поверхні тіл однакові, а реакції тіл рівні за величиною ( $R_{1\text{пл}} = R_{2\text{пл}} = R_{\text{пл}}$ ), то їх можна замінити однією їм рівнодійною  $\vec{R} = \vec{R}_{1\text{пл}} + \vec{R}_{2\text{пл}}$ , спрямованою вздовж вертикалі (рис. 1.64, б). Отже, за аксіомою I  $\vec{P} = -\vec{R}$ .

З ромба (рис. 1.65, б) маємо

$$P = 2R_{\text{пл}} \sin(\alpha + \alpha^*),$$

де  $\alpha^*$  — кут між реакцією шорсткої поверхні тіл і нормаллю до стінки клина. Далі розглянемо рівновагу правої пластинки, до якої прикладено силу  $\vec{Q}$ , силу ваги  $\vec{P}_{\text{пл}}$ , реакції гладенької опори  $\vec{N}_{\text{оп}}$  та шорсткої поверхні клина  $\vec{R}_k = -\vec{R}_{1\text{пл}} = N + F_{\text{тр}}$  за третім законом Ньютона (рис. 1.64, а). Оскільки лінії дії сил  $\vec{P}_{\text{пл}}$  і  $\vec{N}_{\text{оп}}$  збігаються, то їх можна замінити однією рівнодійною силою  $\vec{R}^* = \vec{P}_{\text{пл}} + \vec{N}_{\text{оп}}$ . Отже, пластинка перебуває в рівновазі під дією трьох сил:  $\vec{Q}$ ,  $\vec{R}^*$  та  $\vec{R}_k$ .

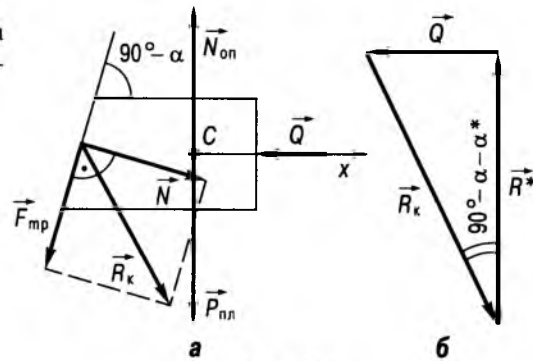


Рис. 1.64

Далі будемо замкнутий силовий трикутник (рис. 1.64, б), з якого  $Q = R_k \cos(\alpha + \alpha^*)$ .

Отже, дістанемо  $P(\cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha^* \sin \alpha) = 2Q(\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha^* \cos \alpha)$ . Звідси

$$\operatorname{tg} \alpha^* = \frac{P - 2Q \operatorname{tg} \alpha}{P \operatorname{tg} \alpha + 2Q}.$$

У стані рівноваги виконується нерівність  $|\operatorname{tg} \alpha^*| \leq f$ . Тоді

$$\begin{aligned} -f &\leq \frac{P - 2Q \operatorname{tg} \alpha}{P \operatorname{tg} \alpha + 2Q} \leq f \Rightarrow P \frac{1 - f \operatorname{tg} \alpha}{f + \operatorname{tg} \alpha} \leq \\ &\leq 2Q \leq P \frac{1 + f \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - f}. \end{aligned}$$

Отже,  $Q_{\min} = P \frac{1 - f \operatorname{tg} \alpha}{2(\operatorname{tg} \alpha + f)}$ .

Аналітичний метод розв'язування. Спочатку розглядаємо рівновагу клина. Зображаємо відомі сили: вагу клина  $\vec{P}$ , реакції пластинок  $\vec{N}_1$ ,  $\vec{N}_2$  ( $N_1 = N_2 = N$ ) та їхніх шорстких поверхонь  $\vec{F}_{\text{тр}1}$ ,  $\vec{F}_{\text{тр}2}$  ( $F_{\text{тр}1} = F_{\text{тр}2} = F_{\text{тр}}$ ), які спрямовуємо вгору — протилежно можливому руху (рис. 1.65, а). Вісь  $Oy$  напрямляємо вертикально і запишемо проекції зображених сил на цю вісь:

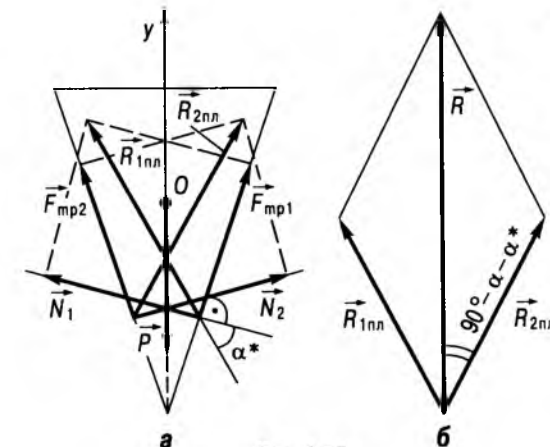


Рис. 1.65

$$\sum_{i=1}^5 F_{yi} = 2F_{\text{тр}} \cos \alpha + 2N \sin \alpha - P = 0.$$

Далі розглядаємо рівновагу правої пластинки (рис. 1.64, а) і записуємо рівняння рівноваги в проекції на вісь  $Cx$ :

$$\sum_{i=1}^5 F_{xi} = -F_{\text{тр}} \sin \alpha + N \cos \alpha - Q = 0.$$

Тоді сила тертя і реакція клина відповідно

$$F_{\text{тр}} = \frac{1}{2} P \cos \alpha - Q \sin \alpha,$$

$$N = \frac{1}{2} P \sin \alpha + Q \cos \alpha.$$

Розв'язуючи нерівність  $|\vec{F}_{\text{тр}}| \leq f N$ , одержуємо

$$\frac{1}{2} P \frac{1 - f \operatorname{tg} \alpha}{f + \operatorname{tg} \alpha} \leq Q \leq \frac{1}{2} P \frac{1 + f \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - f}.$$

Отриманий вираз є розв'язком задачі.

### 1.4.3. Задачі для самостійного розв'язування

**1.21.** Однорідна циліндрична труба вагою  $P = 600$  Н спирається на шорсткий виступ  $A$  і утримується в рівновазі горизонтальною силою  $F = 150$  Н, прикладеною до ободу труби (рис. 1.66). Визначити, при яких значеннях коефіцієнта тертя можлива рівновага.

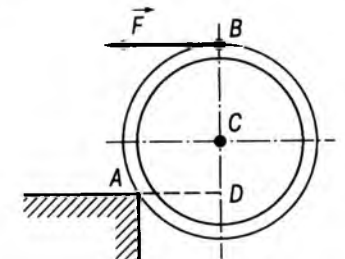


Рис. 1.66

Відповідь:  $f \geq \frac{F}{P} = 0,25$ .



1.22. Однорідна горизонтальна балка  $AB$  лежить на гладенькій площині  $CE$  і шорсткій  $CD$  (рис. 1.67). Визначити вагу балки, якщо вона утримується в рівновазі силою тертя  $F_{\text{тр}} = 10\sqrt{3}$  Н.

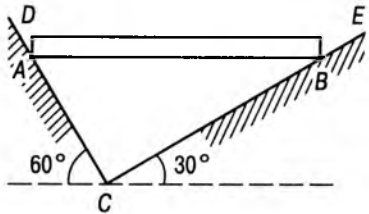


Рис. 1.67

Відповідь:  $P = F_{\text{тр}} \cdot 2\sqrt{3} = 60$  Н.

1.23. Однорідна балка спирається на дві шорсткі площини: одним кінцем на горизонтальну, а іншим на нахилену під деяким кутом (рис. 1.68). Коефіцієнт тертя площин  $f = 0,3$ . Визначити кут нахилу  $\beta$  площин, якщо балка перебуває в рівновазі.

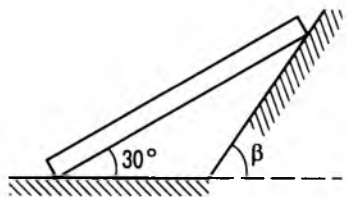


Рис. 1.68

Відповідь:  $\beta = \text{arctg} \frac{2f(1-f)}{1-2f-f^2} = \text{arctg} \frac{42}{31} \approx 53,6^\circ$ .

1.24. Вага вантажу  $P = 180$  Н, радіуси шківів  $R_1 = 10$  см,  $R_2 = 15$  см (рис. 1.69). Коефіцієнт тертя між шківом і колодкою  $f = 0,6$ .  $OA = 1$  м,  $OB = 0,25$  м. Нехтуючи вагою важеля  $OA$  і розмірами колодки, визначити величину сили  $\vec{F}$ , яку необхідно прикласти перпендикулярно до важеля, щоб утримати вантаж в рівновазі.

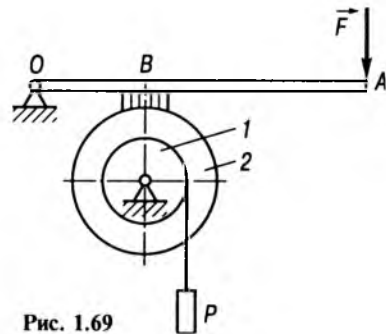


Рис. 1.69

Відповідь:  $F \geq P \frac{OB}{OA} \cdot \frac{R_1}{fR_2} = 50$  Н.

1.25. Однорідний стрижень  $AB$  вагою  $P$  і довжиною  $l$  (рис. 1.70), що розміщений у вертикальній площині, своїм кінцем  $A$  спирається на шорстку поверхню у найнижчій точці півсфери. Радіус півсфери  $R$ . Вважаючи, що виступ у точці  $C$  гладенький, визначити силу тертя, якщо стрижень перебуває в рівновазі.

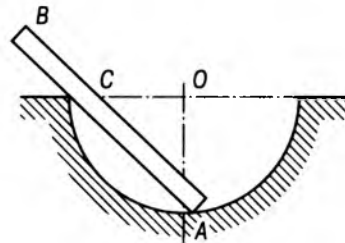


Рис. 1.70

Відповідь:  $F_{\text{тр}} = \frac{Pl\sqrt{2}}{8R}$ .

1.26. Коефіцієнт тертя між каменем і горизонтальною площиною  $f = 0,4$ . Якою повинна бути вага каменя  $Q$ , щоб людина вагою  $P_1 = 550$  Н змогла піднятися по драбині, яка має вагу  $P_2 = 100$  Н і нахилена під кутом  $60^\circ$  до підлоги, у верхню точку  $B$  (рис. 1.71)?

Тертям драбини знехтувати.

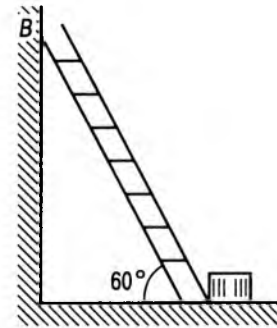


Рис. 1.71

Відповідь:  $Q \geq \frac{P_2 + 2P_1}{2f\sqrt{3}} = 500\sqrt{3}$  Н.

1.27. Однорідна шорстка балка  $AB$  вагою  $P = 600$  Н спирається точкою  $C$  на поверхню циліндричного барабана і утримується горизонтальною мотузкою  $BD$ , що прив'язана до вантажу  $M$  (рис. 1.72). Відомо, що  $AC = 0,8$  м,  $CB = 1,6$  м,  $\alpha = 30^\circ$ . Визначити найменшу вагу вантажу  $Q$  за умови, що система перебуватиме в рівновазі, якщо коефіцієнт тертя між ним і підлогою  $f = 0,6$ .

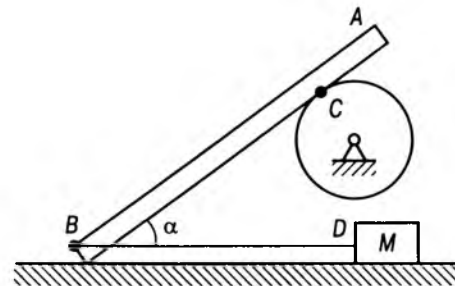


Рис. 1.72

Відповідь:  $Q = \frac{P\sqrt{3}}{4f} = 250\sqrt{3}$  Н.

1.28. Вантаж знаходиться на шорсткій площині, що нахилена під кутом  $\alpha$  до горизонту (рис. 1.73). Визначити коефіцієнт тертя між тілом та похилою площиною, якщо воно перебуває в рівновазі, коли зовнішня сила  $F$ , паралельна площині, задовольняє умову  $F_1 < F < F_2$  ( $F_1 = 10$  Н;  $F_2 = 30$  Н).

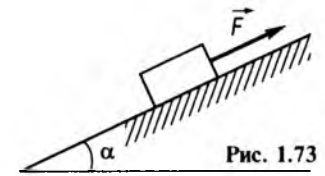


Рис. 1.73

Відповідь:  $f = \frac{F_2 - F_1}{F_2 + F_1} \text{tg} \alpha = 0,5 \text{tg} \alpha$ .

1.29. Однорідна тонка балка завдовжки  $2l$  опирається на верхній кінець стовпа висотою  $h$  і на підлогу. Визначити коефіцієнт тертя між балкою і підлогою, якщо найбільший кут нахилу балки до вертикалі в положенні рівноваги дорівнює  $\alpha$  (рис. 1.74). Тертям між балкою і стовпом знехтувати.

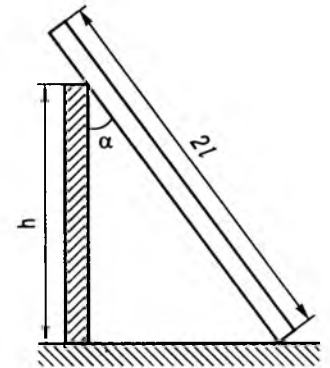


Рис. 1.74

Відповідь:  $f = \frac{l \sin \alpha \cos^2 \alpha}{h - l \sin^2 \alpha \cos \alpha}$ .

1.30. Вважаючи, що кривошип  $OA$  і шатун  $AB$  є однорідними стрижнями однакової довжини вагою  $P$  кожний (рис. 1.75), ви-

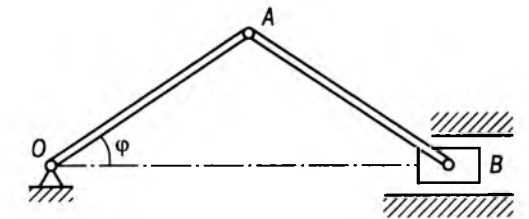


Рис. 1.75

значити найменше значення кута  $\varphi$ , при якому механізм, розміщений у вертикальній площині, перебуватиме в рівновазі, якщо коефіцієнт тертя між повзуном  $B$ , вагою  $Q$  і його напрямними дорівнює  $f$ .

$$\text{Відповідь: } \operatorname{tg} \varphi = \frac{P}{2f(P+Q)}.$$

## § 1.5. ПРОСТОРОВА ЗБІЖНА СИСТЕМА СИЛ

### 1.5.1. Короткі теоретичні відомості

Аналітичні умови рівноваги збіжної системи сил мають такий вигляд:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \quad (1.14)$$

Задача є статично визначеною, якщо кількість невідомих не перевищує трьох.

Якщо за умовою задачі осі координат не вказані, то їх необхідно вибрати самостійно.

Потім складаємо рівняння (1.14) рівноваги в проекціях на вибрані осі, розв'язуємо отриману систему рівнянь, тобто визначаємо невідомі.

### 1.5.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 1.11.** Знайти зусилля в стрижнях  $CA$ ,  $CB$ ,  $CD$ , якщо відома вага  $P$  вантажу (рис. 1.76). Площина  $ABC$  горизонтальна.

Розв'язування. Розглядаємо рівновагу шарніра  $C$ , до якого прикладено реакції стрижнів та натяг нитки. Реакції стрижнів напрямляємо вздовж них від шарніра  $C$  (рис. 1.77). Натяг нитки  $\bar{T}$  за модулем дорівнює силі  $P$ . Застосовуємо аналітичний метод розв'язання, для чого вводимо систему координат  $Oxuz$ . Рівняння рівноваги мають такий вигляд:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 F_{xi} = T - S_1 \cos \beta - S_2 \cos \alpha - S_3 \sin \gamma = 0, \\ \sum_{i=1}^4 F_{yi} = -S_3 \cos \gamma = 0, \\ \sum_{i=1}^4 F_{zi} = -S_1 \sin \beta + S_2 \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

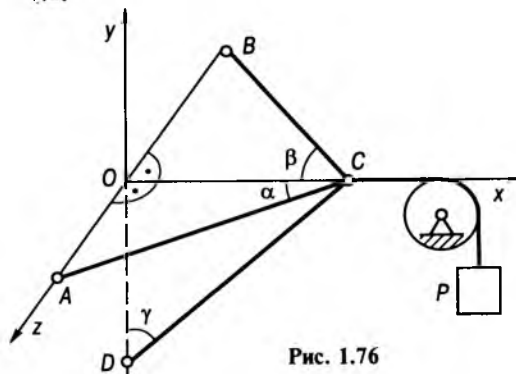


Рис. 1.76

З другого рівняння знаходимо  $S_3 = 0$ , з третього рівняння — залежність  $S_2 = S_1 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$ . Після підстановки цього виразу в перше рівняння одержуємо

$$S_1 = \frac{P \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

$$\text{Далі знаходимо } S_2 = \frac{P \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

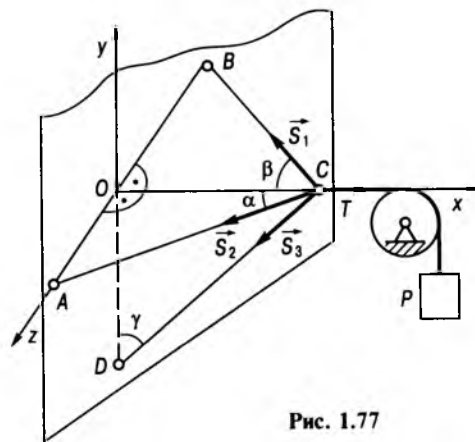


Рис. 1.77

**Приклад 1.12.** Знайти зусилля в стрижнях  $AB$ ,  $BC$  і  $BD$ , якщо до шарніра  $B$  прикладена вертикальна сила  $\bar{P}$  (рис. 1.78).

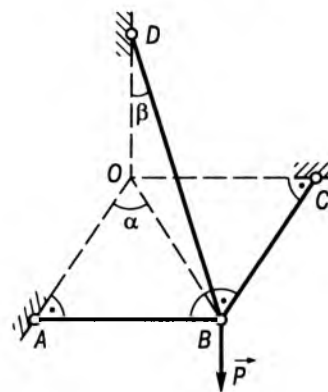


Рис. 1.78

Розв'язування. Розглядаємо рівновагу шарніра  $B$  під дією сили  $\bar{P}$  і реакцій стрижнів  $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3$  (рис. 1.79), які спрямо-

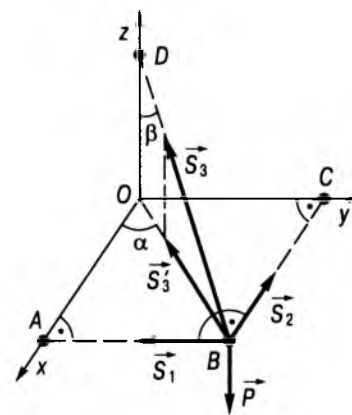


Рис. 1.79

ують вздовж відповідних стрижнів від шарніра  $B$ . Маємо збіжну систему сил з трьома невідомими силами, що відповідає кількості рівнянь рівноваги. Вводимо прямокутну систему координат  $Oxuz$ . Записуємо рівняння рівноваги

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 F_{xi} = -S_2 - S_3 \sin \beta \cos \alpha = 0, \\ \sum_{i=1}^4 F_{yi} = -S_1 - S_3 \sin \beta \sin \alpha = 0, \\ \sum_{i=1}^4 F_{zi} = -P + S_3 \cos \beta = 0. \end{cases}$$

З третього рівняння знаходимо  $S_3 = \frac{P}{\cos \beta}$ .

Далі визначаємо

$$S_2 = -S_3 \sin \beta \cos \alpha = -P \operatorname{tg} \beta \cos \alpha;$$

$$S_1 = -S_3 \sin \beta \sin \alpha = -P \operatorname{tg} \beta \sin \alpha.$$

Те, що величини  $\bar{S}_1$  та  $\bar{S}_2$  є від'ємними, означає, що сили  $\bar{S}_1$  та  $\bar{S}_2$  насправді спрямовані в протилежний бік по відношенню до зображених напрямів на рис. 1.79.

### 1.5.3. Задачі для самостійного розв'язування

**1.31.** Вантаж  $l$  вагою  $P = 60$  Н утримується в рівновазі стрижнями  $AC$ ,  $BC$  і  $DC$ , шарнірно з'єднаними у точці  $C$ , і тросом, перекинутим через блок  $E$  під кутом  $\alpha = 30^\circ$  (рис. 1.80). Визначити зусилля у стрижнях, якщо кут  $\beta = 45^\circ$ ;  $\gamma = 60^\circ$ .

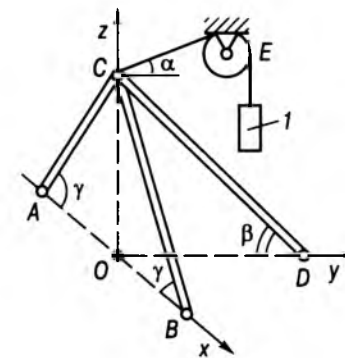


Рис. 1.80

$$\text{Відповідь: } S_{CD} = P \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \approx 73,5 \text{ Н,}$$

$$S_{AC} = S_{BC} = P \frac{\sin(\alpha + \beta)}{2 \cos \beta \sin \gamma} = 47,32 \text{ Н.}$$

1.32. Три стрижні  $AC$ ,  $BC$  і  $DC$  з'єднані шарнірно у точці  $C$  (рис. 1.81). Визначити зусилля у стрижнях, якщо вони перебувають у рівновазі під дією сили  $F = 50$  Н, яка розміщена у вертикальній площині  $Oxy$ . Кут  $\alpha = 60^\circ$ ;  $\beta = 30^\circ$ .

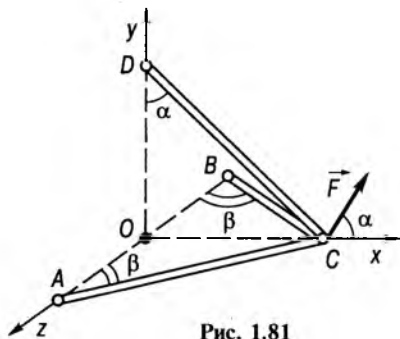


Рис. 1.81

Відповідь:  $S_{CD} = F \operatorname{tg} \alpha = 86,6$  Н,

$$S_{AC} = S_{BC} = \frac{F}{2 \sin \beta \cos \alpha} = 100 \text{ Н.}$$

1.33. Однорідна плита вагою  $G = 100$  Н утримується в рівновазі трьома тросами  $AD$ ,  $BD$  і  $CD$  (рис. 1.82). Визначити натяги у тросах, якщо кут  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\beta = 60^\circ$ . Трос  $CD$  розміщений у вертикальній площині.

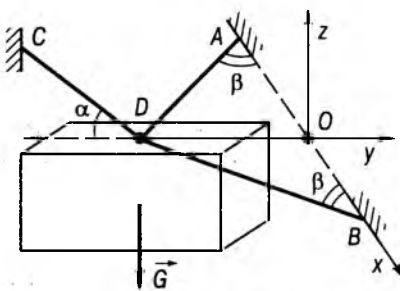


Рис. 1.82

Відповідь:  $T_{CD} = \frac{G}{\sin \alpha} = 200$  Н,

$$T_{AD} = T_{BD} = \frac{G \operatorname{ctg} \alpha}{2 \sin \beta} = 100 \text{ Н.}$$

1.34. Три стрижні  $AO$ ,  $BO$  і  $CO$  з'єднані в шарнірі  $O$  (рис. 1.83). Визначити їхні реакції, що виникають під дією сили  $F = 12$  Н, прикладеної до шарніра  $O$  і спрямованої вздовж діагоналі  $ON$ , якщо  $AB = AO = AD$ .

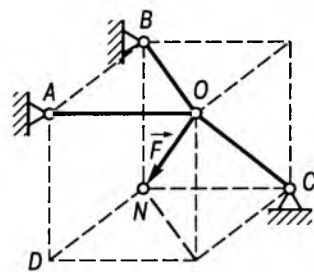


Рис. 1.83

Відповідь:  $S_{AO} = \frac{F\sqrt{3}}{3} = 6,93$  Н,

$$S_{BO} = 0, \quad S_{CO} = F\sqrt{\frac{2}{3}} = 9,8 \text{ Н.}$$

1.35. Три стрижні  $AO$ ,  $BO$  і  $CO$  з'єднані в точці  $O$  за допомогою шарніра, до якого прикладено силу  $F = 18$  Н (рис. 1.84) вздовж діагоналі  $OD$ . Визначити зусилля у стрижнях, якщо кут  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ . Вагою стрижнів знехтувати.

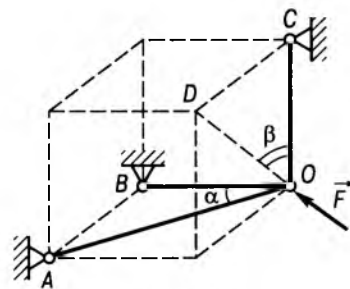


Рис. 1.84

Відповідь:  $S_{AO} = \frac{F \sin \beta}{\sin \alpha} = 25,46$  Н,

$$S_{BO} = F \sin \beta \operatorname{ctg} \alpha = 22,05 \text{ Н,}$$

$$S_{CO} = F \cos \beta = 12,73 \text{ Н.}$$

1.36. Визначити зусилля у стрижнях конструкції, якщо  $P_1 = 15$  кН;  $P_2 = 10,5$  кН;  $a = 1$  м;  $b = 3$  м;  $c = 4$  м (рис. 1.85). Сили  $\vec{P}_1$  і  $\vec{P}_2$  напрямлені вздовж стрижнів відповідно 3 і 1. Вагою стрижнів знехтувати.

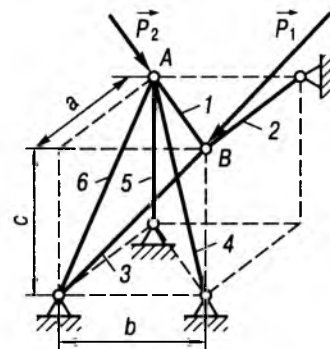


Рис. 1.85

Відповідь:  $S_1 = S_2 = 0$ ,

$$S_3 = P_1 = 15 \text{ кН,}$$

$$S_4 = P_2 \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 16,93 \text{ кН,}$$

$$S_5 = P_2 \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 13,28 \text{ кН, } S_6 = 0.$$

1.37. Сили  $\vec{P}_1$ ,  $\vec{P}_2$  і  $\vec{P}_3$  напрямлені вздовж стрижнів відповідно 3, 5 і 1. Визначити зусилля у стрижнях конструкції, якщо  $P_1 = 30$  кН,  $P_2 = 40$  кН,  $P_3 = 20$  кН,  $a = 1,2$  м,  $b = 1,4$  м,  $c = 1,8$  м (рис. 1.86). Вагою стрижнів знехтувати.

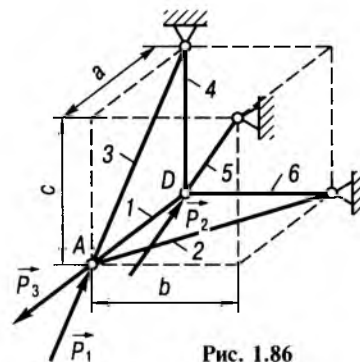


Рис. 1.86

Відповідь:  $S_1 = P_3 = 20$  кН,  $S_2 = 0$ ,

$$S_3 = P_1 = 30 \text{ кН, } S_4 = \frac{P_3 c}{a} = 30 \text{ кН,}$$

$$S_5 = P_2 + \frac{P_3 \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{a} \approx 82,95 \text{ кН,}$$

$$S_6 = \frac{P_3 b}{a} \approx 23,33 \text{ кН.}$$

1.38. Визначити опорні реакції і зусилля в стрижнях шарнірної конструкції у вигляді правильної піраміди, ребра якої нахилені до основи під кутом  $\alpha$  (рис. 1.87). Верхній вузол  $A$  навантажений вертикальною силою  $P$ , а вершини  $B, C, D$  знаходяться на рухомих шарнірах. Вагою стрижнів знехтувати.

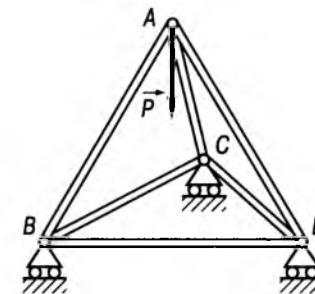


Рис. 1.87

Відповідь:  $S_{AB} = S_{AC} = S_{AD} =$

$$= \frac{P}{3 \sin \alpha}, \quad R_B = R_C = R_D = \frac{P}{3}.$$

1.39. Стрижневий трикутник з шарнірами  $A, B$  і  $C$  зрівноважено за допомогою п'яти стрижнів, з'єднаних з трикутником і горизонтальною стелею за допомогою шарнірів (рис. 1.88). Площини рівносторонніх трикутників  $DAE$  і  $FBG$  перпендикулярні до площини трикутника  $ABC$ . До вузла  $C$  прикладено вертикальну силу  $P$ . Визначити зусилля в стрижнях, якщо  $\angle BAC = \angle ABC = 30^\circ$ . Вагою стрижнів знехтувати.

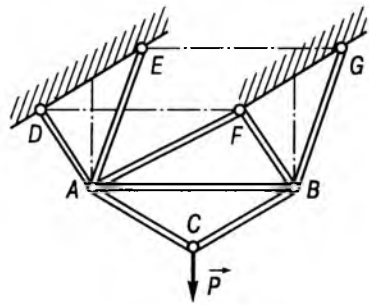


Рис. 1.88

Відповідь:  $S_{AC} = S_{BC} = P$ ,  $S_{AF} = 0$ ,  
 $S_{AD} = S_{AE} = S_{BF} = S_{BG} = P \frac{\sqrt{3}}{6}$ ,  
 $S_{AB} = P \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

1.40. У шарнірно-стрижневій конструкції вузли  $A, B, C, D$  знаходяться у вершинах горизонтально розміщеного квадрата, а вузол

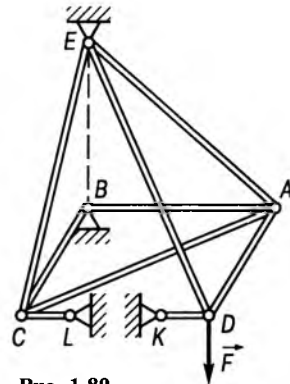


Рис. 1.89

$E$  — на одній вертикалі з вузлом  $B$ , якщо  $BE = AB$  (рис. 1.89). До вузла  $D$  прикладено вертикальну силу  $F$ . Визначити зусилля в стрижнях, нехтуючи їхньою вагою.

Відповідь:  $S_{CB} = S_{RA} = S_{DA} = S_{KD} =$   
 $= S_{CL} = -F$ ,  $S_{DE} = F\sqrt{3}$ ,  $S_{CA} = F\sqrt{2}$ ,  
 $S_{CE} = S_{AE} = 0$ .

## Розділ 2

### АБСОЛЮТНО ТВЕРДЕ ТІЛО ПІД ДІЄЮ ДОВІЛЬНОЇ ПЛОСКОЇ СИСТЕМИ СИЛ

#### § 2.1. РІВНЯННЯ РІВНОВАГИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

Необхідною і достатньою умовою рівноваги абсолютно твердого тіла під дією системи сил, довільно розмішених у площині, є рівність нулеві алгебраїчної суми проєкцій всіх сил на дві взаємно перпендикулярні осі та алгебраїчної суми моментів усіх сил відносно будь-якої точки (центра моментів):

$$\sum_{i=1}^n F_{xi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{yi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{Oi} = 0. \quad (2.1)$$

Отже, число рівнянь рівноваги дорівнює трьом. Ці рівняння можна подати не тільки у формі (2.1), а й двома рівняннями моментів і одним рівнянням проєкцій:

$$\sum_{i=1}^n M_{Ai} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{Bi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{xi} = 0 \quad (2.2)$$

або трьома рівняннями моментів відносно трьох точок, що не лежать на одній прямій:

$$\sum_{i=1}^n M_{Ai} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{Bi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{Di} = 0. \quad (2.3)$$

У випадку (2.2) пряма  $AB$  і вісь  $Ox$  неперпендикулярні.

Центр моментів доцільно вибрати в точці, в якій перетинаються лінії дії найбільшої кількості невідомих сил. Такий вибір центра моментів спрощує розв'язування задачі, оскільки зумовлює найменшу кількість невідомих сил у рівняннях рівноваги.

Коли в задачі кількість невідомих, які мають бути визначені, перевищує кількість рівнянь рівноваги, задача називається статично визначуваною. Таким чином, у випадку рівноваги абсолютно твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил статично визначуваними є лише такі задачі, в яких кількість невідомих не перевищує трьох.

#### § 2.2. РІВНЯННЯ РІВНОВАГИ СКЛАДЕНОЇ КОНСТРУКЦІЇ

Розв'язуючи задачі, в яких розглядається рівновага системи твердих тіл, недостатньо, як правило, розглядати рівновагу всієї системи в цілому, оскільки для неї можна скласти лише три рівняння рівноваги у випадку дії плоскої системи сил. У таких задачах кількість невідомих може перевищувати кількість згаданих вище рівнянь, оскільки невідомими будуть і сили взаємодії між окремими тілами конструкції.

Проте це не є підставою вважати таку задачу статично невизначуваною. Пояснюється це тим, що якщо за допомогою методу перерізів розділити конструкцію на окремі тверді тіла і скласти рівняння рівноваги для кожного тіла окремо, то кількість нових невідомих може бути меншою, ніж кількість нових рівнянь.

Задача буде статично визначуваною, якщо кількість рівнянь рівноваги для всієї системи і окремих її частин буде не менша за кількість усіх невідомих.

#### § 2.3. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

**Приклад 2.1.** Однорідна балка масою 10 кг спирається кінцем  $A$  на гладеньку горизонтальну підлогу, а кінцем  $B$  — на гладеньку похилу площину, яка утворює з горизонтом кут  $\alpha = 30^\circ$  (рис. 2.1). Кінець  $B$  балки утримується ниткою, перекинutoю через блок  $D$ , частина  $BD$  нитки паралельна похилій площині, а до другого кінця нитки підвішено тягар  $P$ .

Нехтуючи тертям, знайти вагу тягаря  $P$  і сили тиску  $N_A$  і  $N_B$  балки на підлогу і похилу площину за умови рівноваги балки.

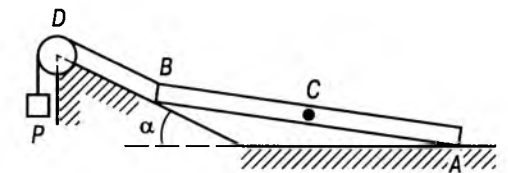


Рис. 2.1

Розв'язування. При визначенні невідомих сил потрібно дотримуватися такої послідовності дій.

1. Виділити тіло, рівновага якого розглядається. У даній задачі розглядаємо рівновагу балки  $AB$  (рис. 2.2), оскільки до неї прикладена активна сила  $m\vec{g}$ .

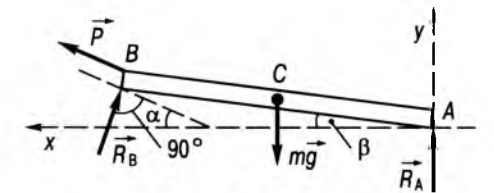


Рис. 2.2

2. Вказати задані сили. На балку діє сила ваги  $m\vec{g}$ , прикладена в її геометричному центрі  $C$ .

3. Визначити в'язі, накладені на тіло, і, застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, подумки відкинути в'язі, замінивши

їхню дію на тіло реакціями. Реакції гладеньких поверхонь у точках  $A$  і  $B$  перпендикулярні до цих поверхонь. Сила натягу нитки напрямлена вздовж неї і дорівнює  $P$ .

4. Провести аналіз системи сил і впевнитись у тому, що дана задача є статично визначуваною. Тут три невідомі сили:  $\vec{P}$ ,  $\vec{R}_A$  і  $\vec{R}_B$ ; кількість рівнянь рівноваги теж три. Отже, задача є статично означуваною.

5. Вибрати прямокутну систему координат, скласти аналітичні рівняння рівноваги.

Вибираємо початок координат у точці  $A$ , осі показано на рис. 2.2:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{xi} = P \cos \alpha - R_B \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 0, \\ \sum_{i=1}^m F_{yi} = -mg + R_A + R_B \cos \alpha + \\ + P \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_{Bi} = -mg \cdot BC \cos \beta + R_A \cdot BA \cos \beta = 0. \end{cases}$$

6. Розв'язати рівняння і обчислити невідомі величини:

$$P \cos \alpha - R_B \sin \alpha = 0,$$

$$-mg + R_A + R_B \cos \alpha + P \sin \alpha = 0.$$

Оскільки  $AB = 2BC$ , то з третього рівняння маємо  $-mg + 2R_A = 0$ , або

$$R_A = \frac{mg}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ Н.}$$

З першого рівняння знаходимо  $R_B = P \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$ .

Підставивши це значення у друге рівняння, отримуємо

$$-mg + \frac{mg}{2} + P \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} + P \sin \alpha = 0$$

або

$$P \left( \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} \right) = \frac{mg}{2},$$

звідки  $P = \frac{mg}{2} \sin \alpha = 25 \text{ Н.}$

І далі  $R_B = P \operatorname{ctg} \alpha = 25 \operatorname{ctg} 30^\circ = 43,3 \text{ Н.}$

7. Проаналізувати одержаний розв'язок. Реакції  $\vec{R}_A$  і  $\vec{R}_B$  – це сили, з якими підлога і похила площина діють на балку. За третім законом Ньютона сили тиску балки на підлогу  $\vec{N}_A$  і на похилу площину  $\vec{N}_B$  дорівнюють  $\vec{R}_A$  і  $\vec{R}_B$  відповідно, але напрямлені протилежно цим реакціям.

**Приклад 2.2.** Визначити опорні реакції балки, зображеної на рис. 2.3, якщо  $F_1 = 10 \text{ кН}$ ,  $M = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $q = 2 \text{ кН/м}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $EA = 2 \text{ м}$ ,  $AB = 6 \text{ м}$ ,  $BD = 3 \text{ м}$ .

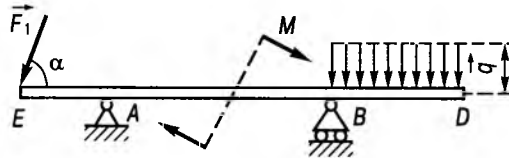


Рис. 2.3

**Розв'язування.** Розглянемо рівновагу балки  $ED$ . На неї діють сила  $\vec{F}_1$ , пара сил з моментом  $\vec{M}$  і розподілене рівномірне навантаження, інтенсивність якого дорівнює  $\vec{q}$ . Замінімо це навантаження зосередженою силою  $\vec{Q}$ , статично еквівалентною цьому навантаженню. Величина сили  $\vec{Q}$  дорівнює площі прямокутника, який зображує розподілене навантаження, тобто  $Q = q \cdot BD = 2 \cdot 3 = 6 \text{ кН}$ . Сила  $\vec{Q}$  прикладена в центрі ваги розподіленого навантаження, тобто посередині відрізка  $BD$ . Відкинувши уявно в'язі (нерухомий шарнір  $A$  і коток  $B$ ), замінимо їх дію на балку реакціями. Реакція котка  $\vec{R}_B$  перпендикулярна до площини його опори. Оскільки напрям і величина реакції шарніра  $A$  невідомі, розкладемо її на дві невідомі складові  $\vec{X}_A$  і  $\vec{Y}_A$ , напрямлені в додатний

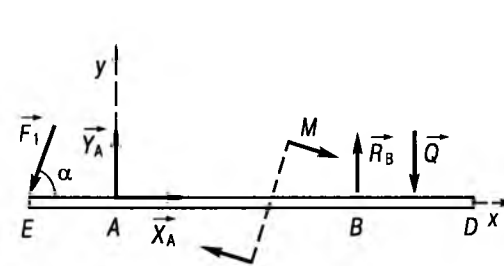


Рис. 2.4

бік осей координат  $Ax$  і  $Ay$  (рис. 2.4). Розглянемо тепер балку як вільне абсолютно тверде тіло, що знаходиться в рівновазі під дією довільної плоскої системи сил.

Невідомих сил три:  $\vec{X}_A$ ,  $\vec{Y}_A$ ,  $\vec{R}_B$ . Задача статично визначувана, оскільки рівнянь рівноваги можна скласти три:

$$\begin{cases} \sum F_{xi} = X_A - F_1 \cos \alpha = 0, \\ \sum F_{yi} = Y_A + R_B - Q - F_1 \sin \alpha = 0, \\ \sum M_{Ai} = F_1 \cdot EA \sin \alpha - M + R_B \cdot AB - \\ - Q \left( AB + \frac{BD}{2} \right) = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши наведену систему рівнянь, знайдемо

$$X_A = F_1 \cos \alpha = 5 \text{ кН},$$

$$R_B = \frac{1}{6} \left[ Q \left( AB + \frac{1}{2} BD \right) + \right.$$

$$\left. + M - F_1 \cdot EA \sin \alpha \right] = 9,6 \text{ кН},$$

$$Y_A = Q + F_1 \sin \alpha - R_B = 5 \text{ кН.}$$

Модуль  $\vec{R}_A$  обчислюємо за теоремою Піфагора:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 5\sqrt{2} \text{ кН.}$$

**Приклад 2.3.** Розглянемо приклад застосування аналітичних умов рівноваги при визначенні опорних реакцій конструкції, що складається з двох тіл. Треба знайти опорні реакції  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_D$  і силу тиску в точці  $C$

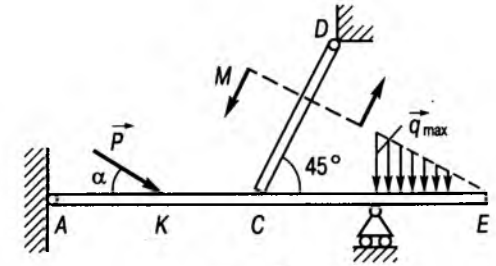


Рис. 2.5

балок одна на одну (рис. 2.5), якщо  $AB = 4l$ ,  $BC = BE = l$ ,  $AK = KC$ ,  $CD = 2l$ ,  $P = 2 \text{ Н}$ ,  $M = 4 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $l = 1 \text{ м}$ ,  $q_{\max} = 1 \text{ Н/м}$ .

**Розв'язування.** 1. Розглянемо рівновагу двох балок  $AE$  і  $CD$ , з'єднаних між собою.

2. Аналіз сил: до балки  $AE$  прикладено зосереджену силу  $P$ , нахилу під кутом  $\alpha$  до балки, та розподілене за лінійним законом навантаження, максимальна величина якого  $q_{\max} = 1 \text{ Н/м}$  прикладена в точці  $B$ .

У точці  $C$  на балку  $AE$  опирається балка  $CD$ , нахилена під кутом  $45^\circ$  до балки  $AE$ , яка утримується в точці  $D$  нерухомим циліндричним шарніром. До балки  $CD$  прикладено пару сил з моментом  $M = 4 \text{ Н} \cdot \text{м}$ , що намагається повернути балку проти ходу годинникової стрілки.

3. Проаналізуємо в'язі, тобто тіла, що утримують балку в рівновазі: у точці  $A$  балки  $AE$  знаходиться нерухомий циліндричний шарнір; у точці  $B$  балка покладена на котки; у точці  $D$  балку  $CD$  утримує нерухомий циліндричний шарнір. В опорах балок тертя відсутнє.

4. З'ясуємо, чи є задача статично визначуваною. Реакції нерухомих шарнірів  $A$  і  $D$  невідомі за величиною та напрямом. Відомо тільки, що вони лежать у площині рисунка. Це означає, що кожна реакція визначається двома алгебраїчними невідомими, наприклад її складовими вздовж двох координатних осей.

Реакція котка перпендикулярна до площини котка, тобто невідоме лише її алгебраїчне значення. Оскільки тертя в точці  $C$  відсутнє, тиск у точці балок одна на одну напрямлений вздовж нормалі до балки  $AE$ , тобто перпендикулярно до осі однієї з балок.

Таким чином, максимальна кількість алгебраїчних невідомих в задачі дорівнює шести. Кожна з балок знаходиться під дією довільної плоскої системи сил, тому для кожної з них можна скласти три аналітичні умови (рівняння) рівноваги.

Отже, для двох балок можна скласти шість рівнянь. Оскільки кількість невідомих не перевищує кількості рівнянь, задача статично визначувана.

5. Застосувавши аксіому про звільнення від в'язей, подумки відкинемо в'язі, що накладені на систему балок, замінивши їх дію відповідними реакціями. Виберемо початок системи координат в точці  $A$ . Вісь  $Ax$  направимо вздовж балки  $AE$ , вісь  $Ay$  — по вертикалі вгору (рис. 2.6).

Представимо невідому реакцію в точці двом взаємно перпендикулярними складовими  $\bar{X}_A$  і  $\bar{Y}_A$ , напрямленими вздовж осей координат  $Ax$  і  $Ay$ . Реакція  $\bar{R}_B$  перпендикулярна до площини котка, тобто паралельна осі  $Ay$ .

Оскільки розглядається рівновага всієї системи в цілому, тиск у точці  $C$  дорівнює нулеві (згідно з третім законом Ньютона сили взаємодії балок  $AE$  і  $CD$  рівні та протилежно напрямлені). Проте якщо розглядати окремо балку  $CD$ , можна помітити, що вона знаходиться в рівновазі під дією лише

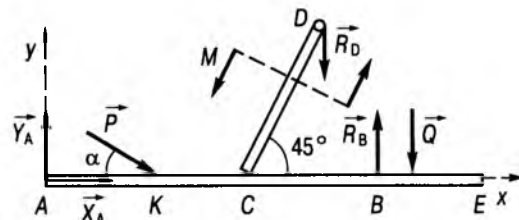


Рис. 2.6

пари сил з моментом  $M$  і двох реакцій: шарніра  $D$  та балки  $AE$ . Реакція балки прикладена в точці  $C$ . Відомо, що пару сил можна зрівноважити тільки парою сил, а тому реакції  $\bar{R}_D$  і  $\bar{R}_C$  також повинні бути парою сил, тобто вони рівні за величиною і протилежно напрямлені. Звідси робимо висновок, що  $\bar{R}_D$  паралельна  $\bar{R}_C$  і паралельна осі  $Ay$ , а якщо  $\bar{R}_C$  напрямлена вгору, то  $\bar{R}_D$  напрямлена вниз.

Замінімо розподілене по  $BE$  навантаження статично еквівалентною зосередженою силою  $Q$ , прикладеною в центрі ваги розподіленого навантаження. Відомо, що центр ваги прямокутного трикутника знаходиться на відстані  $1/3$  катетів від прямого кута. Сила  $Q$  чисельно дорівнює площі трикутника, один катет якого  $BE$ , інший —  $q_{\max}$ :

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} BE.$$

Усі сили зображено на рис. 2.6.

6. Вважатимемо систему двох балок незмінною системою і складемо для неї три рівняння рівноваги у вигляді двох сум проєкцій сил на осі  $Ax$  та  $Ay$  і суми моментів сил відносно точки  $A$ :

$$\begin{cases} \sum F_{xi} = X_A + P \cos \alpha = 0, \\ \sum F_{yi} = Y_A - P \sin \alpha + R_B - Q - R_D = 0, \\ \sum M_{Ai} = -P \cdot AK \sin \alpha + R_B AB - \\ - Q \left( AB + \frac{1}{3} BE \right) + M - R_D (AC + CD \sin 45^\circ) = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Ці три рівняння містять чотири невідомих  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Y}_A$ ,  $\bar{R}_B$ ,  $\bar{R}_D$ . Для того щоб система рівнянь стала замкненою, треба скласти ще одне рівняння. Проте для системи двох балок можна скласти лише три незалежних між собою рівняння. Тому розглянемо тепер будь-яку з балок окремо. Для даного прикладу зручніше розглянути балку  $CD$ . До неї прикладені сила  $\bar{R}_D$ , пара сил з моментом  $M$  і реакція у точці  $C$  відкинutoї балки  $AE$  (рис. 2.7).

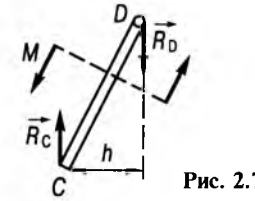


Рис. 2.7

З попереднього робимо висновок, що  $\bar{R}_C = -\bar{R}_D$ ,  $R_C = R_D$ . Балка перебуває у рівновазі під дією пар сил. Умовою її рівноваги є рівність нулеві алгебраїчної суми моментів пар сил, тобто

$$\sum M_i = M - R_D CD \sin 45^\circ = 0. \quad (2.5)$$

Момент пари сил  $(\bar{R}_C, \bar{R}_D)$  чисельно дорівнює добутку величини однієї з сил на плече пари  $h$ , де  $h = CD \sin 45^\circ$ . Момент заданої пари сил  $M > 0$ , момент пари  $(\bar{R}_C, \bar{R}_D)$  від'ємний, бо намагається повернути балку  $CD$  за годинниковою стрілкою. З рівняння (2.5)

$$\text{маємо } R_C = R_D = \frac{M}{CD \sin 45^\circ} = \frac{4}{2l \cos 45^\circ} = 2\sqrt{2} \approx 2,82 \text{ Н.}$$

$$\text{З першого рівняння системи (2.4) } X_A = -P \cos \alpha = -2 \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \approx -1,73 \text{ Н.}$$

Невідомі  $Y_A$  і  $R_B$  знаходимо з другого і третього рівнянь системи (2.4):

$$R_B = \frac{1}{AB} \left[ P \cdot AK \sin \alpha + Q \left( AB + \frac{1}{3} BE \right) - M + R_D (AC + CD \sin 45^\circ) \right] = 3 \text{ Н;}$$

$$Y_A = P \sin \alpha - R_B + Q + R_D \approx 1,3 \text{ Н.}$$

З у ва ж е н н я. Дану задачу можна розв'язати, почавши з розчленування балок, тобто розглянути спочатку рівновагу балки  $AE$ , а потім  $CD$ , або навпаки. При цьому на балку  $AE$  діє система сил, зображена на рис. 2.8. Звернемо увагу на те, що сила  $\bar{R}_C$ , прикладена до  $AE$ , змінила напрям згідно з третім законом Ньютона. Отже, не можна вказати напрям  $\bar{R}_C$ , не з'ясувавши, про яке тіло йдеться.

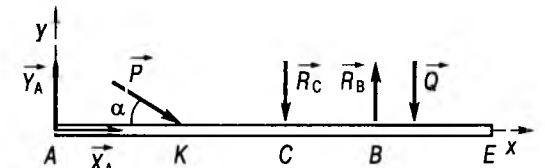


Рис. 2.8

**Приклад 2.4.** Знайти реакції жорсткого закріплення консольної балки  $AD$  (рис. 2.9), яка знаходиться під дією пари сил з моментом  $M = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}$  і зосередженої сили  $F = 2 \text{ кН}$ . Сила  $F$  прикладена в точці  $D$ , її лінія дії утворює кут  $60^\circ$  з  $AD$ ,  $AD = l = 2 \text{ м}$ .

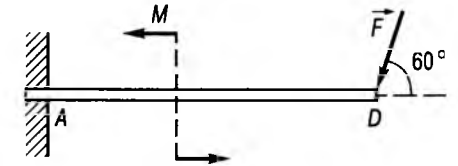


Рис. 2.9

**Розв'язування.** Розглянемо рівновагу балки  $AD$ , до якої прикладена пара сил з моментом  $M$ , яка намагається повернути балку проти ходу годинникової стрілки; в точці  $D$  прикладена зосереджена сила  $F$ .

На балку накладена в'язь — жорстке зашпелення в точці  $A$  стіни.

На підставі аксіоми про звільнення від в'язей, відкинемо подумки жорстке зашпелення в точці  $A$ , замінивши його дію відповідною реакцією: реакція зашпелення має три невідомі складові — два компоненти реакції по осях координат і момент  $\bar{M}_1$  пари сил, який називають моментом зашпелення (рис. 2.10). Таким чином, зашпелення,

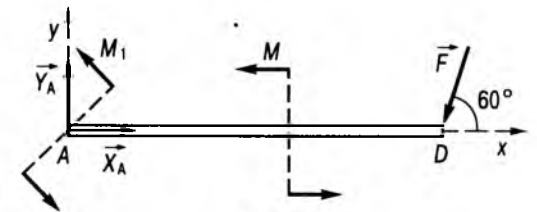


Рис. 2.10

на відміну від шарніра, створює не лише невідому за величиною та напрямом реакцію  $\vec{R}_A$ , але й пару сил з невідомим моментом  $\vec{M}_1$ . Задача є статично означуваною, оскільки невідомих три, рівнянь рівноваги можна скласти теж три. Складаємо рівняння рівноваги

$$\begin{cases} \sum F_{xi} = X_A - F \cos \alpha = 0, \\ \sum F_{yi} = Y_A - F \sin \alpha = 0, \\ \sum M_{Ai} = M + M_1 - F \cdot AD \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо ці рівняння:

$$X_A = F \cos \alpha = 2 \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ кН},$$

$$Y_A = F \sin \alpha = 2 \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,73 \text{ кН},$$

$$M_1 = F \cdot AD \sin \alpha - M = 2 \cdot 2 \sin 60^\circ - 3 = 2\sqrt{3} - 3 \approx 0,47 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

**Приклад 2.5.** Горизонтальний стрижень  $AB$  має на кінці  $A$  отвір, яким він насаджується на вертикальну круглу колоно  $CD$ . Довжина втулки  $b = 2$  см, в точці  $B_1$  на відстані  $a$  від осі  $CD$  до стрижня підвішено тягар  $P$ .

Визначити, нехтуючи вагою стрижня  $AB$ , мінімальну відстань  $a$  від тягара  $P$  до осі  $CD$ , щоб під дією його ваги стрижень залишався в рівновазі на колоні, якщо коефіцієнт тертя ковзання  $f$  між колоною і втулкою дорівнює  $0,1$  (рис. 2.11).

**Розв'язування.** Розглянемо рівновагу стрижня  $AB$ , відкинувши подумки в'язь — колоно  $CD$ . На стрижень діє вертикальна сила  $P$  — вага тягара, прикладена в точці  $B_1$ .

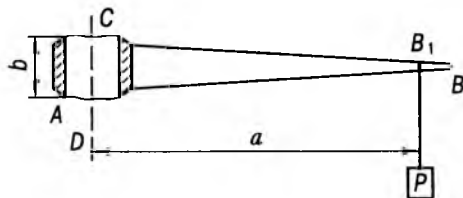


Рис. 2.11

Стрижень утримується в рівновазі завдяки силам тертя між колоною  $CD$  і внутрішньою поверхнею отвору. Ці сили можна вважати прикладеними в точках  $E$  і  $K$ . Виникають сили тертя завдяки силам нормального стиснення  $\vec{N}_E$  і  $\vec{N}_K$  між колоною і поверхнею отвору (рис. 2.12). Складаємо рівняння рівноваги стрижня. Система координат зображена на рис. 2.12.

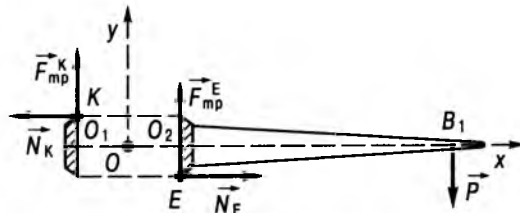


Рис. 2.12

$$\begin{cases} \sum F_{xi} = N_E - N_K = 0, \\ \sum F_{yi} = F_{\text{тр}}^E + F_{\text{тр}}^K - P = 0, \\ \sum M_{Oi} = -Pa + (N_E + N_K) \frac{b}{2} - F_{\text{тр}}^K \cdot O_1O + F_{\text{тр}}^E \cdot O_2O = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

З першого рівняння системи (2.6) робимо висновок, що  $N_E = N_K = N$ , тобто ці сили утворюють пару сил, а оскільки величина сили статичного тертя пропорційна силі нормального стиснення між поверхнями тіл (коефіцієнт тертя  $f$  — коефіцієнт пропорційності — є однаковим у точках  $E$  і  $K$ ),

то з цього випливає, що  $F_{\text{тр}}^E = F_{\text{тр}}^K = F$ . Друге і третє рівняння системи (2.6) перетворюються на такі:

$$\begin{cases} 2F - P = 0, \\ -Pa + Nb = 0. \end{cases}$$

$$\text{Звідси маємо } N = \frac{Pa}{b}, F = \frac{P}{2}.$$

Сила тертя спокою задовольняє нерівність

$$F_{\text{тр}} \leq f N,$$

тому  $F = \frac{P}{2} \leq f \frac{Pa}{b}$ , звідки

$$a \geq \frac{b}{2f} = \frac{0,02}{2 \cdot 0,1} = 0,1 \text{ м}.$$

## § 2.4. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

**2.1 [32].** Однорідна балка вагою  $600$  Н завдовжки  $4$  м опирається кінцем  $C$  (рис. 2.13) на гладеньку підлогу, а проміжною точкою  $B$  — на стовп заввишки  $3$  м. Балка знаходиться в рівновазі, утворює із стовпом кут  $30^\circ$ , в точці  $C$  до балки прив'язана мотузка, яка закріплена в точці  $A$ . Нехтуючи тертям, знайти натяг мотузки  $T$ , реакції  $R_B$  і  $R_C$  відповідно стовпа і підлоги.

Відповідь:  $T = 150$  Н,  $R_B \approx 173$  Н,  $R_C \approx 513$  Н.

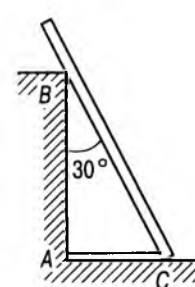


Рис. 2.13

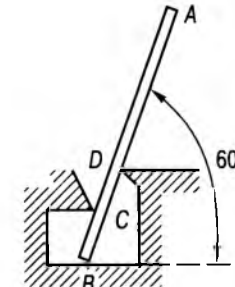


Рис. 2.14

**2.2 [32].** Однорідна балка  $AB$  вагою  $200$  Н опирається на гладеньку горизонтальну підлогу в точці  $B$  (рис. 2.14) під кутом  $60^\circ$ . Крім того, в точках  $C$  і  $D$  вона підтримується опорами без тертя. Визначити реакції опор в точках  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , якщо довжина  $AB = 3$  м,  $CB = 0,5$  м,  $BD = 1$  м.

Відповідь:  $R_B = 200$  Н,  $R_C = R_D = 300$  Н.

**2.3 [32].** Однорідна балка вагою  $100$  Н прикріплена до стіни шарніром  $A$  (рис. 2.15) і утримується в рівновазі під кутом  $45^\circ$  до вертикалі за допомогою троса, який перекинута через блок  $C$ . До другого кінця троса прикріплено тягар  $G$ , трос  $BC$  утворює з вертикаллю кут  $30^\circ$ . У точці  $D$  до балки підвішено тягар  $Q$  вагою  $200$  Н. Визначити вагу тягара  $G$  і реакцію шарніра  $A$ , якщо  $BD = 0,25AB$ . Тертям знехтувати.

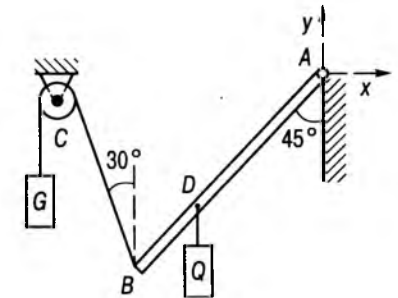


Рис. 2.15

Відповідь:  $G \approx 146$  Н,  $X_A \approx 73$  Н,  $Y_A \approx 173$  Н.

**2.4 [32].** Визначити реакцію жорсткого защемлення  $A$  консольної балки  $AB$ , яка знаходиться під дією зосередженої сили  $F$ , пари сил з моментом  $M$  і розподіленого навантаження, що змінюється так, як показано на рис. 2.16. Дано:  $F = 5$  кН,  $M = 4$  кН · м,  $q = 2$  кН/м,  $AC = 3$  м,  $CB = 4,5$  м.

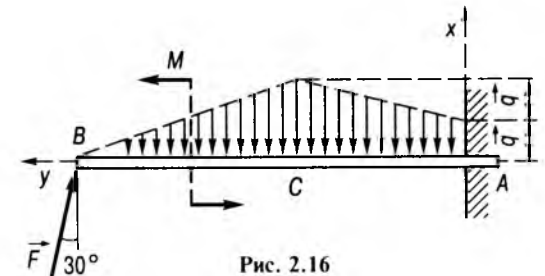


Рис. 2.16

Відповідь:  $X_A \approx 13,7$  кН,  $Y_A = 2,5$  кН,  $M_A = -27,0$  кН · м.

2.5. Однорідний стрижень завдовжки 0,4 м опирається кінцем  $A$  на жорстку стіну і підтримується у рівновазі за допомогою невагомої мотузки  $CD$  (рис. 2.17). Визначити коефіцієнт статичного тертя ковзання  $f$  між стіною і кінцем  $A$  стрижня, якщо  $BC = 0,15$  м,  $AD = 0,25$  м, а найменший кут  $\alpha$  при рівновазі стрижня дорівнює  $45^\circ$ .

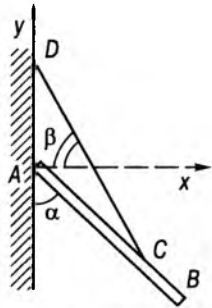


Рис. 2.17

Відповідь:  $f = \frac{AB \sin \alpha \operatorname{tg} \beta - 2AD}{AB \sin \alpha} \approx 0,6$ .

2.6. На горизонтальні балки  $AB$  і  $CC_1$  шарнірно з'єднаній системи діють сили  $F_1 = 4$  кН,  $F_2 = 6$  кН (рис. 2.18);  $AA_1 = 4$  м,  $A_1B = 1$  м,  $BB_1 = 2$  м,  $B_1C = 1$  м,  $CD = 3$  м,  $DC_1 = 2$  м,  $\angle BB_1C = 90^\circ$ . У точках  $B$  і  $C$  розміщені шарніри. Нехтуючи вагою конструкції, знайти реакції жорсткого зашемлення  $A$  і нерухомого шарніра  $D$ .

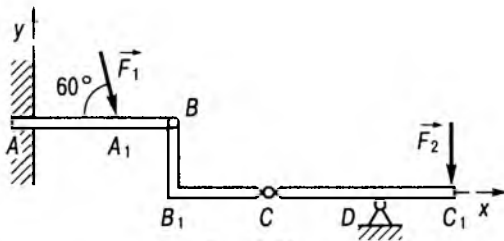


Рис. 2.18

Відповідь:  $X_A = 0$ ,  $Y_A \approx -0,536$  кН,  $M_A \approx -6,144$  кН·м,  $X_D = -2$  кН,  $Y_D = 10$  кН.

2.7. Знайти момент пари сил  $M_1$  (рис. 2.19), яку треба прикласти до кривошипа  $AB$  кривошипно-кулісного механізму при його рівновазі у положенні, коли  $AB \perp AC$ , якщо на кулісу  $CD$  діє пара сил з моментом  $M$ ,  $\angle ACD = \alpha$ ,  $AB = a$ . Тертям і вагою частин механізму нехтують. Знайти також величини реакцій шарнірів  $A$  і  $C$ .

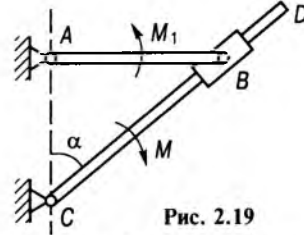


Рис. 2.19

Відповідь:  $M_1 = M \sin^2 \alpha$ ,  
 $R_A = R_C = \frac{M \sin \alpha}{a}$ .

2.8 [32]. Брусок  $AB$  (рис. 2.20), який може обертатися навколо горизонтальної осі  $A$ , опирається на поверхню гладенького циліндра радіуса  $R$ . Циліндр лежить на гладенькій горизонтальній площині і утримується ниткою  $AC$ . Вага бруска  $G = 16$  Н;  $AB = 3R$ ;  $AC = 2R$ . Визначити натяг нитки  $T$  і тиск бруска на шарнір  $A$ .

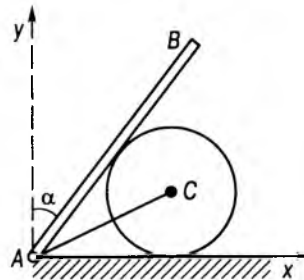


Рис. 2.20

Відповідь:  $T \approx 6,9$  Н,  $X_A = -6$  Н,  $Y_A = -12,5$  Н.

2.9. Однорідна балка  $AB$  (рис. 2.21) вагою  $P$  завдовжки  $l$  жорстко зашемлена у стінці і утворює з нею кут  $\alpha$ . Однорідний

диск вагою  $Q$  лежить між стінкою і балкою, торкаючись їх у точках  $C$  і  $D$ . Знайти сили тиску  $N_C$  і  $N_D$  диска на стіну і балку, а також реакцію жорсткого зашемлення, якщо  $BD = \frac{2l}{3}$ .

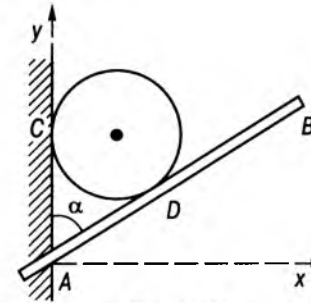


Рис. 2.21

Відповідь:  $N_C = Q \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $N_D = \frac{Q}{\sin \alpha}$ ,  
 $X_A = -Q \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $Y_A = P + Q$ ,  
 $M_A = \frac{2Q + 3P \sin^2 \alpha}{6 \sin \alpha} l$ .

2.10. Якою силою  $F$  до шків  $B$  потрібно притиснути фрикційний шків  $A$  (рис. 2.22) для того, щоб шків  $B$  знаходився у рівно-

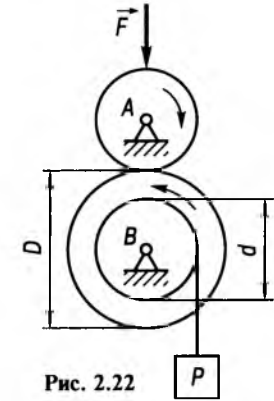


Рис. 2.22

вазі, якщо вага тягаря  $P = 50$  Н, коефіцієнт тертя  $f = 0,5$ , а відношення  $\frac{D}{d} = 2$ ?

Відповідь:  $F \geq 50$  Н.

### § 2.5. РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ "ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР СКЛАДЕНОЇ КОНСТРУКЦІЇ"

Розміри та зовнішні навантаження складених конструкцій різних варіантів схем (рис. 2.23) вказано у табл. 2.1. Визначити реакції опор конструкцій наведених схем.

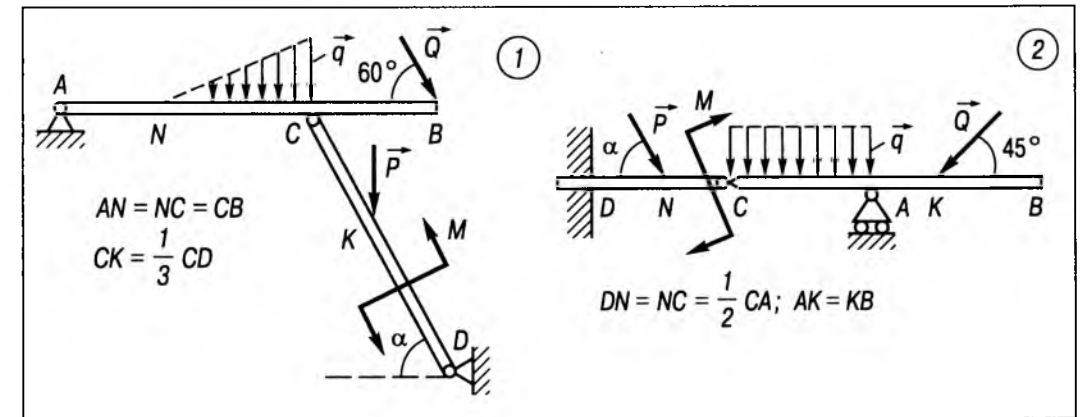


Рис. 2.23 (початок)



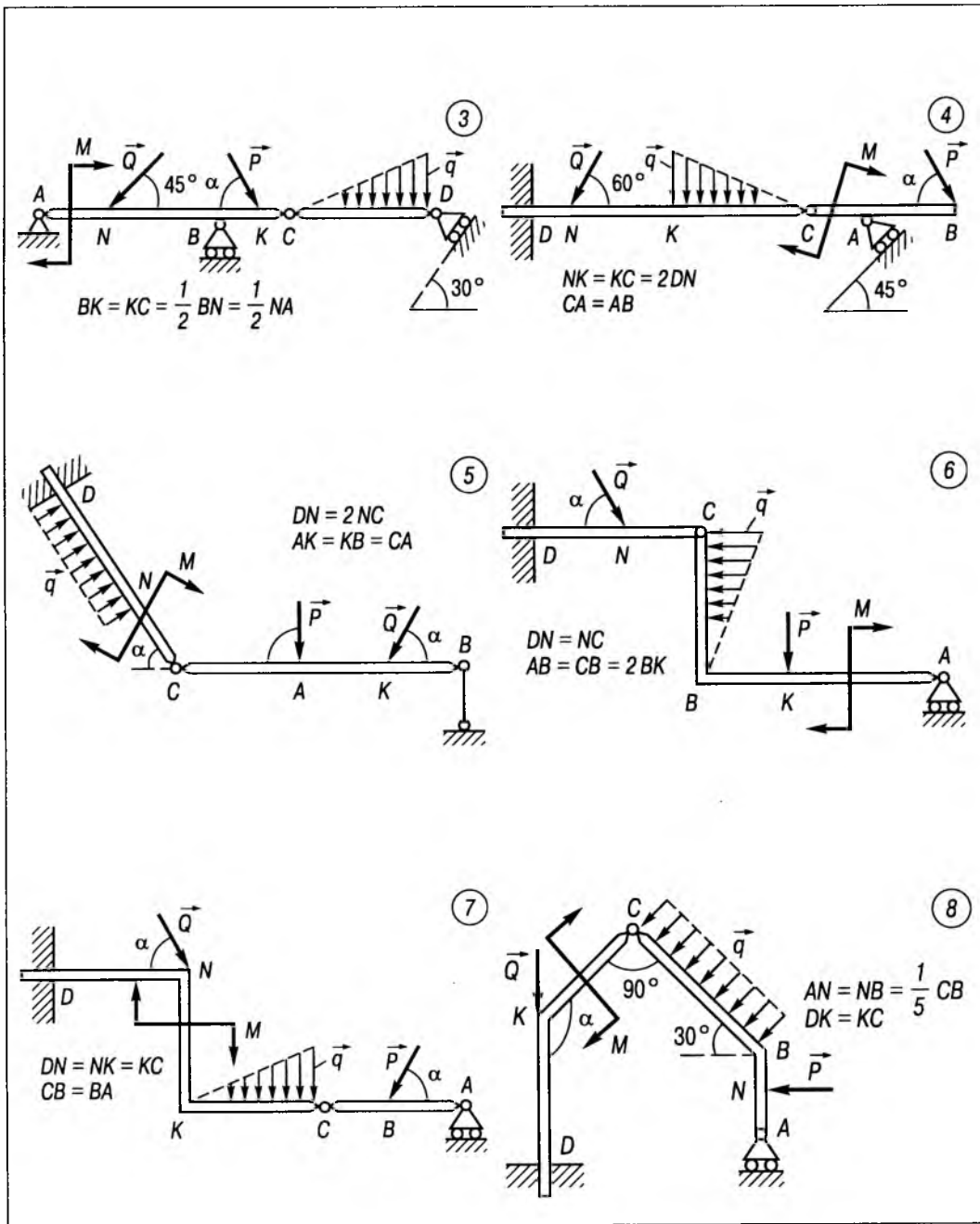


Рис. 2.23 (продолжения)

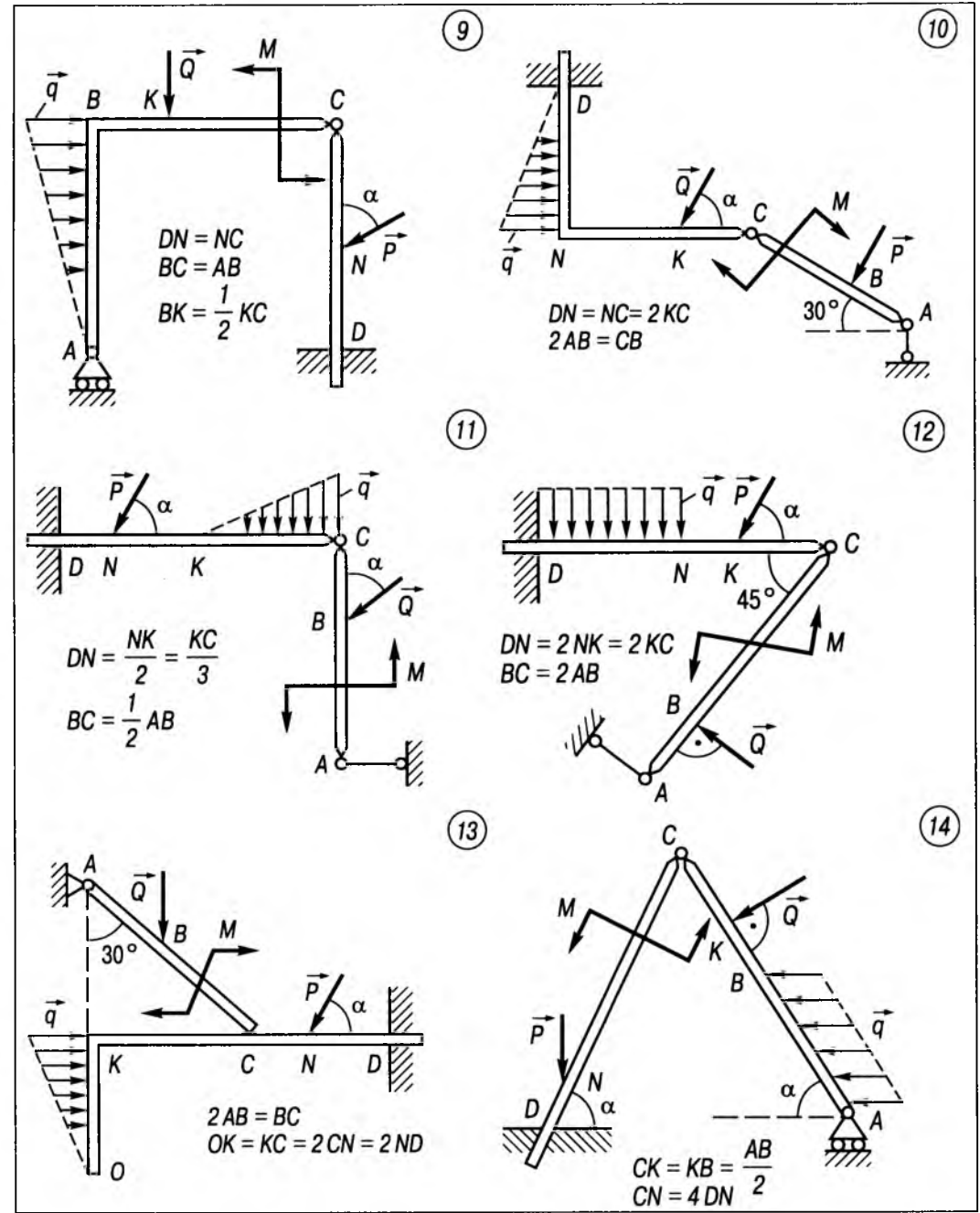


Рис. 2.23 (продолжения)

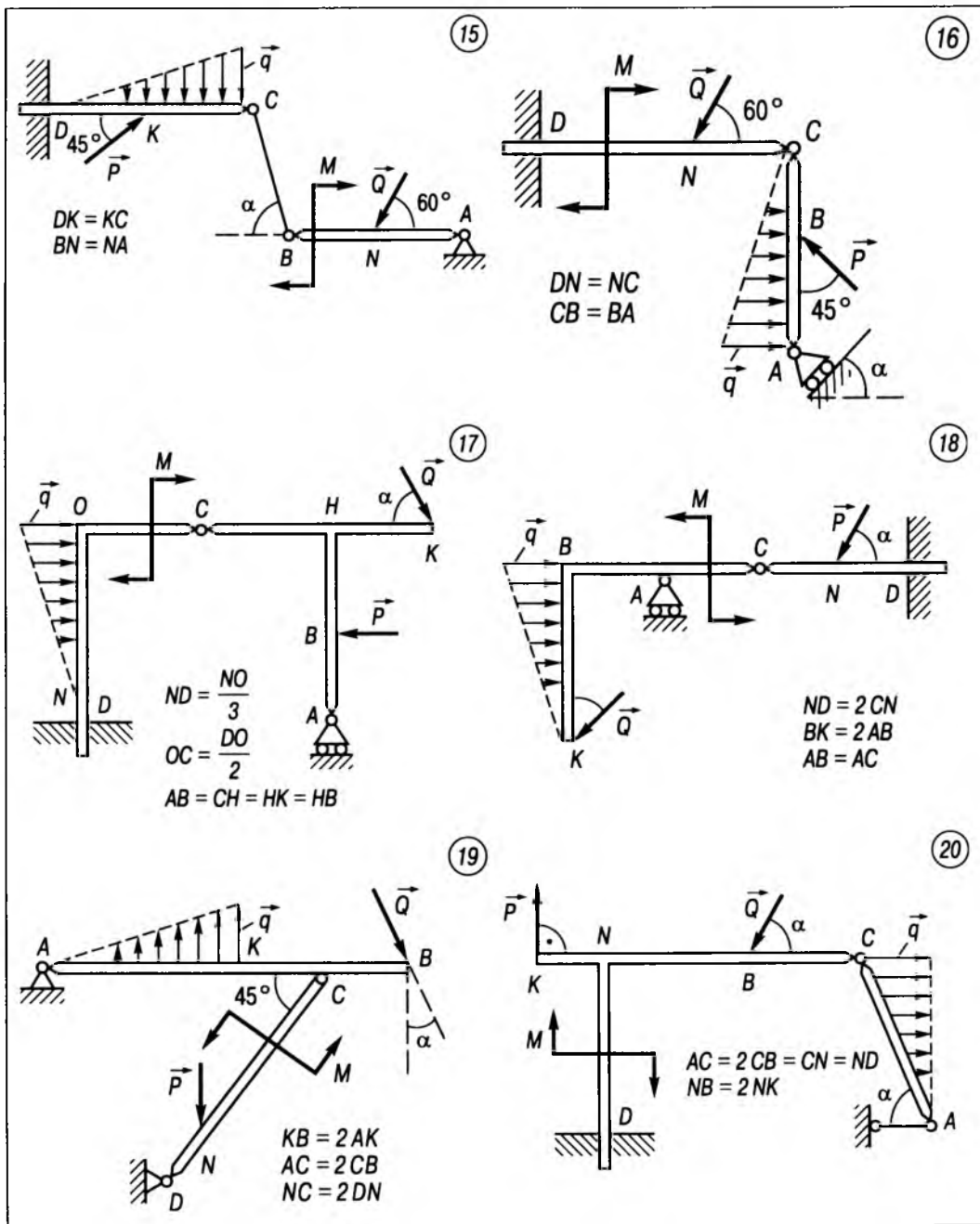


Рис. 2.23 (продолжения)

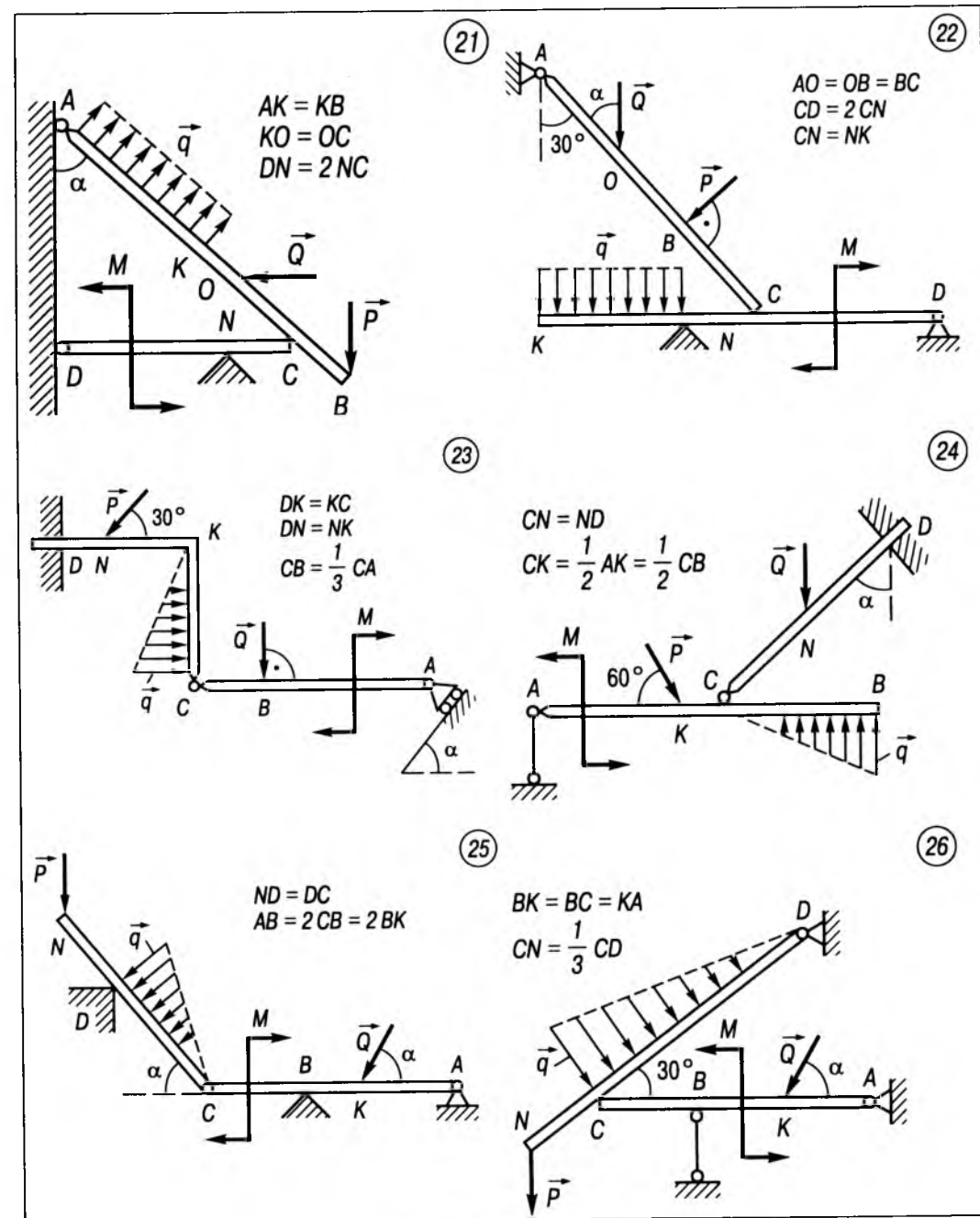


Рис. 2.23 (продолжения)

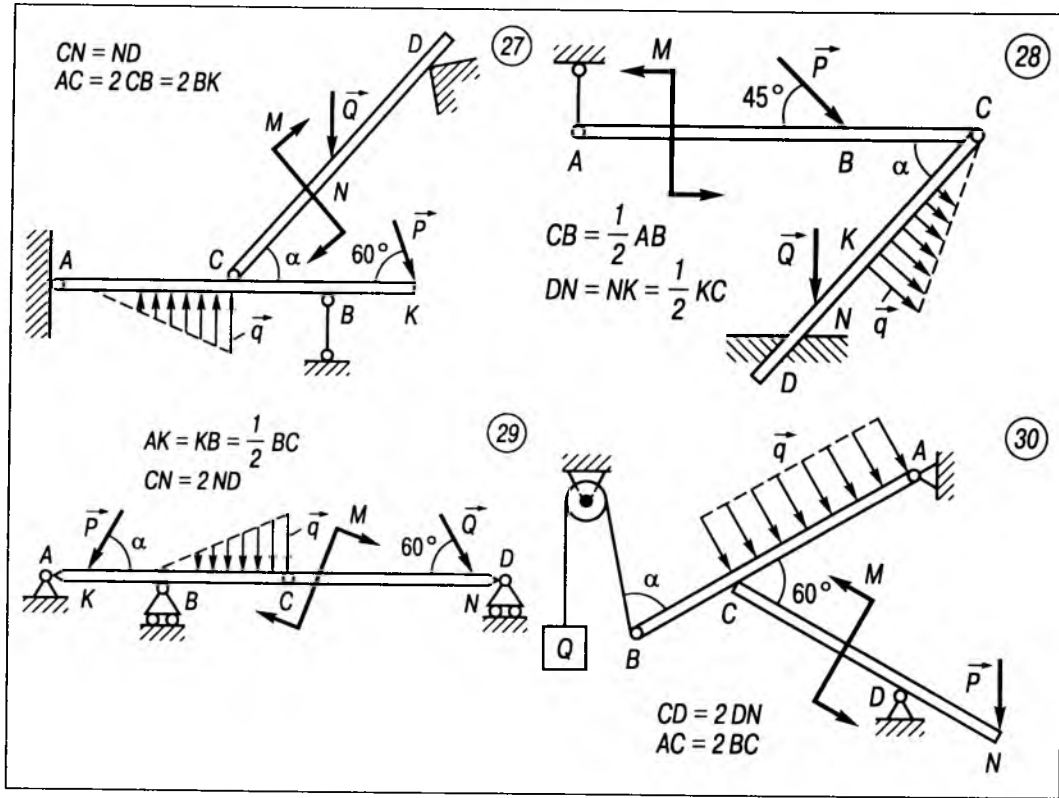


Рис. 2.23 (закінчення)

Таблиця 2.1

Номер варіанта	M, Н·м	P, Н	Q, Н	q <sub>max</sub> , Н/м	AB, м	CD, м	α, град
1	2	5	4	1,0	2	2	30
2	4	3	3	0,5	3	3	60
3	3	1	2	0,2	6	6	45
4	8	5	2	3,0	4	4	135
5	5	10	5	0,3	5	5	120
6	10	6	2	1,0	5	5	30
7	8	4	4	0,1	4	4	60
8	6	3	6	2,0	3	3	150
9	12	8	2	0,3	5	5	30
10	4	15	5	1,0	2	2	45
11	8	7	2	1,0	3	5	45
12	12	4	3	1,5	4	2	30
13	10	9	5	0,5	5	3	60
14	8	6	7	0,8	6	6	30
15	9	5	9	0,2	7	8	15
16	4	3	10	2,0	5	4	30

Номер варіанта	M, Н·м	P, Н	Q, Н	q <sub>max</sub> , Н/м	AB, м	CD, м	α, град
17	5	8	12	1,0	3	9	60
18	3	10	5	0,3	8	10	75
19	5	12	3	0,5	9	4	45
20	7	6	8	1,5	10	5	30
21	8	7	2	1,0	3	5	45
22	12	4	3	1,5	4	2	30
23	10	9	5	0,5	5	3	60
24	8	6	7	0,8	6	6	30
25	9	5	9	0,2	7	8	15
26	4	3	10	2,0	5	4	30
27	5	8	12	1,0	3	9	60
28	3	10	5	0,3	8	10	75
29	5	12	3	0,5	9	4	45
30	7	6	8	1,5	10	5	30

### Розділ 3

## ПЛОСКІ ФЕРМИ. ВИЗНАЧЕННЯ ЗУСИЛЬ У СТРИЖНЯХ

### § 3.1. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

*Ферма* — геометрично незмінна система прямолінійних стрижнів, з'єднаних між собою шарнірами. Якщо всі стрижні лежать в одній площині, ферму називають *плоскою*.

Основна мета при розв'язуванні задач про ферми — визначення внутрішніх сил, що виникають у стрижнях ферми внаслідок дії зовнішніх активних навантажень і зовнішніх реакцій опор. Умовно ці внутрішні сили називають *зусиллями*.

Ферми називають *найпростішими*, якщо вони мають найменшу можливу кількість стрижнів при заданій кількості шарнірів. Залежність між кількостями стрижнів  $n$  і шарнірів  $k$  для найпростіших ферм має вигляд

$$n = 2k - 3.$$

З'єднання стрижнів між собою називається *вузлами*, кожний шарнір збігається з вузлом ферми.

Зусилля у стрижнях ферми визначають з деякими спрощеннями, а саме:

- а) шарніри, які з'єднують стрижні ферми, вважають ідеальними точковими шарнірами без тертя;
- б) всі стрижні є абсолютно твердими;
- в) зовнішні сили, прикладені до ферми, вважають прикладеними у вузлах.

За цих припущень у стрижнях можуть виникнути тільки розтяжні й стискальні напружки. Перед тим, як розраховувати зусилля в стрижнях, слід визначити всі зовнішні реакції опор.

Найпростіше визначити зусилля у стрижнях ферми дає метод *вирізування вузлів*. Він застосовується як для графічного, так і для аналітичного розв'язування задачі.

Оскільки при використанні цього методу зусилля в кожному наступному стрижні розраховуються за визначеними раніше зу-

силлями у попередніх стрижнях, то допущена похибка при визначенні зусилля одного з стрижнів впливає на результати розрахунків зусиль усіх інших стрижнів.

*Діаграма Максвелла—Кремони*, що є значним вдосконаленням методу вирізування вузлів у графічній побудові, уможливорює мінімізацію похибки названого методу. А найзручнішим аналітичним способом, який не призводить до накопичення похибок, є спосіб Риттера (спосіб трьох моментів).

### § 3.2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

**Приклад 3.1.** Ферма, що зображена на рис. 3.1, перебуває у рівновазі під дією активних сил  $P_1 = 30$  кН і  $P_2 = 20$  кН. Розміри ферми вказані на рисунку в метрах. Знайти зусилля в стрижнях.

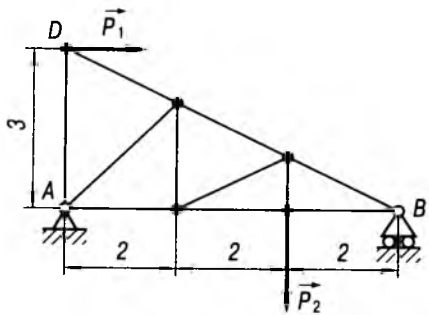


Рис. 3.1

**Розв'язування.** Ферма є статично означуваною, бо кількість стрижнів  $n = 11$ , вузлів  $k = 7$ , а  $11 = 2 \cdot 7 - 3$ .

Спочатку розглянемо ферму в цілому і знайдемо реакції зовнішніх в'язей  $\vec{R}_A$  і  $\vec{R}_B$ . Розкладемо невідому реакцію  $\vec{R}_A$  на дві складові  $\vec{X}_A$  і  $\vec{Y}_A$  (рис. 3.2), напрямки яких збігаються з додатними напрямками координат осей.

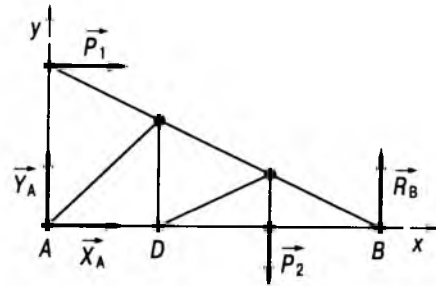


Рис. 3.2

Складемо систему рівнянь рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{xi} = X_A + P_1 = 0, \\ \sum F_{yi} = Y_A + R_B - P_2 = 0, \\ \sum M_{Ai} = -3 \cdot P_1 - 4 \cdot P_2 + 6 \cdot R_B = 0. \end{cases}$$

З неї знайдемо

$$X_A = -P_1 = -30 \text{ кН},$$

$$R_B = \frac{3 \cdot P_1 + 4 \cdot P_2}{6} = \frac{85}{6} \approx 28,33 \text{ кН},$$

$$Y_A = P_2 - R_B = 20 - \frac{85}{6} = -\frac{25}{6} \approx -8,33 \text{ кН},$$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} \approx 31,1 \text{ кН}.$$

Знаки відповідей характеризують дійсні напрямки реакцій. Для перевірки правильності знайдених реакцій складемо рівняння моментів сил відносно, наприклад, точки D:

$$\sum M_{Di} = -2Y_A - 3P_1 - 2P_2 + 4R_B.$$

Підставивши в це рівняння знайдені вище значення  $Y_A = -\frac{25}{6}$  кН і  $R_B = \frac{85}{6}$  кН,

$$\text{дістанемо, що } \sum M_{Di} = 2 \cdot \frac{25}{6} - 90 - 40 + 4 \times$$

$$\times \frac{85}{6} = 0, \text{ тобто величини } Y_A \text{ і } R_B \text{ визначені вірно.}$$

Тепер шукатимемо зусилля в стрижнях. Застосуємо графічний варіант методу вирізування вузлів, тобто побудуємо *діаграму Максвелла—Кремони*.

Зобразимо ферму в лінійному масштабі і прикладемо активні сили  $\vec{P}_1$  і  $\vec{P}_2$  та реакції в'язей.

Пронумеруємо поля, тобто частини площини, де розміщені сили, які відокремлюють лінії дії сил. Цю нумерацію показано на рис. 3.3. Поля 1–4 відповідають позначенням зовнішніх полів, поля 5–9 — внутрішніми. За допомогою їх номерів позначатимемо внутрішні (зусилля в стрижнях) і зовнішні сили. Зауважимо, що послідовність полів відповідає обходу контуру ферми за ходом годинникової стрілки. Насамперед побудуємо замкнений багатокутник зовнішніх сил, домовившись про масштаб зображення сил (рис. 3.4, а). Тут вектор  $\vec{12}$  відповідає силі  $P_1$ ,  $\vec{23}$  — реакції  $R_B$  і т. ін.

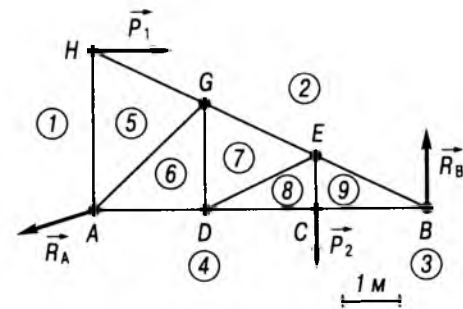


Рис. 3.3

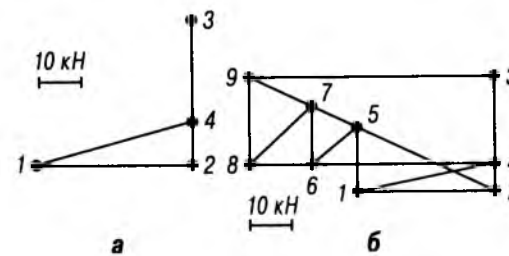


Рис. 3.4

Переходимо до визначення внутрішніх сил, застосовуючи *метод вирізування вузлів*, але всі багатокутники сил будуюмо на спільній основі, якою є багатокутник зовнішніх сил.

Починаємо з вузла, в якому перетинаються не більш як два стрижні (вузол B або H). Обходячи вузол H (рис. 3.3) за ходом годинникової стрілки, натрапляємо на сили  $P_1$ , реакцію  $\vec{25}$  стрижня HG і реакцію  $\vec{51}$  стрижня AH. Проводимо через вершину 1 (рис. 3.4, б) багатокутника зовнішніх сил пряму, паралельну реакції  $\vec{51}$ , а через вершину 2 — пряму, паралельну  $\vec{25}$ . На перетині цих прямих знаходиться точка 5. Реакція  $\vec{25}$  напрямлена до вузла H вздовж стрижня GH. Це означає, що стрижень стиснуто. Реакція  $\vec{51}$  напрямлена вздовж стрижня HA від вузла H. Стрижень HA розтягнуто.

Далі розглядаємо вузол A. Обходячи його за годинниковою стрілкою, ми натрапляємо на сили  $\vec{R}_A$ ,  $\vec{15}$  — реакцію стрижня AH, реакцію  $\vec{56}$  стрижня AG і реакцію  $\vec{64}$  стрижня AD. Реакція  $\vec{15}$  уже відома, тому проводячи через вершину 5 пряму, паралельну  $\vec{56}$  (або AG), а через вершину 4 пряму, паралельну  $\vec{64}$  (або AD), знайдемо точку 6 — точку перетину цих прямих. Стрижень AG стиснутий, а AD — розтягнутий.

Тепер вирізаємо вузол G. Ми натрапляємо на такі реакції стрижнів:  $\vec{65}$ ,  $\vec{52}$ ,  $\vec{27}$ ,  $\vec{76}$ . Реакції  $\vec{65}$  і  $\vec{52}$  відомі, тому проводимо пряму, паралельну стрижню GE, через вершину 2, а через точку 6 — пряму, паралельну стрижню GD. Дістаємо вершину 7 на перетині цих прямих. Стрижень GE стиснуто, а GD — розтягнуто.

Отже, замкнений багатокутник  $\vec{65}-\vec{52}-\vec{27}-\vec{76}$  відповідає умові рівноваги вузла G ферми. Далі розглядаємо вузли D, E і т. д.

Після обходу всіх вузлів ферми одержимо замкнену діаграму, побудова якої вимагає великої точності й уваги.

Якщо не дотримано масштаб або лінії проведено не паралельно, то в кінці побудови діаграми може виникнути похибка, тобто діаграма не буде замкненою. Похибка вважається допустимою, якщо всі зусилля в стрижнях ферми відрізняються не більш як на 5% від своєї середньої величини.

Існує зручний спосіб визначення напрямку реакції стрижня за діаграмою Максвелла—Кремони.

Припустимо, треба з'ясувати, стиснуто чи розтягнуто стрижень  $DG$ . Позначимо реакцію цифрами, наприклад,  $7\bar{6}$ . Пригадавши, що вузли обходили за ходом годинникової стрілки, бачимо, що сила  $7\bar{6}$  відноситься до вузла  $G$  (якщо реакцію назвати  $\bar{6}7$ , то вона буде пов'язана з вузлом  $D$ ).

Поклавши олівець на вектор  $7\bar{6}$  діаграми вістрям у напрямку вектора, тобто від  $7$  до  $6$  (зверху вниз), перенесемо олівець на стрижень  $GD$  ферми. Бачимо, що реакція напрямлена від вузла  $G$ , тобто стрижень розтягнуто.

При побудові діаграми Максвелла—Кремони може трапитися, що дві її вершини збігаються. Це означає, що відповідна реакція має нульове значення. Такі стрижні встановлюються у фермі лише з конструкційних міркувань.

Як зазначалося вище, метод вирізування вузлів уможливорює застосування також аналітичного способу розв'язання задачі. В цьому разі потрібно скласти рівняння рівноваги системи сил, прикладених до кожного вузла (збіжна система сил).

Не зупиняючись докладно на цьому способі, розглянемо аналітичне визначення зусиль у стрижнях, тобто *метод Ріттера* (або *метод наскрізних перерізів*).

Знову візьмемо ферму, до якої було застосовано метод вирізування вузлів. Реакції зовнішніх в'язей уже відомі. Для визначення реакції стрижнів ферми застосуємо метод перерізів. Переріз має поділити ферму

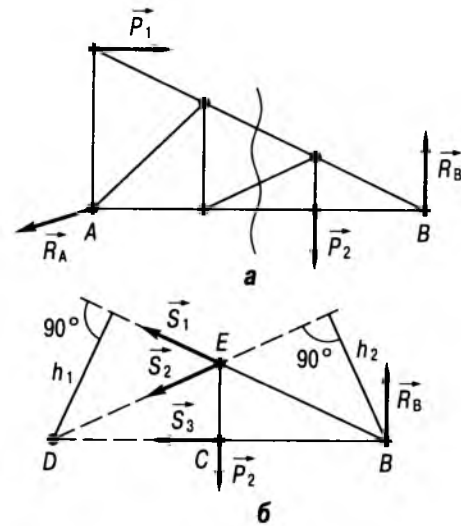


Рис. 3.5

на дві частини і проходити не більш як через три стрижні, які не виходять з одного вузла ферми. Один з можливих перерізів показано на рис. 3.5, а.

Розглядаючи лише одну з частин ферми (звичайно ту, до якої прикладено менше зовнішніх сил), а другу вважаючи в'яззю, яку ми подумки відкидаємо, прикладемо до розрізаних стрижнів реакції відкинутої частини ферми.

У прикладі розглянемо рівновагу правої частини ферми (рис. 3.5, б). На неї діють дві зовнішні сили  $\vec{P}_2$  і  $\vec{R}_B$ , а також реакції трьох стрижнів, які напрямлені у бік відкинутої частини ферми. Це означає, що ми вважаємо всі стрижні розтягнутими.

Задача статично визначувана, оскільки кількість рівнянь рівноваги (на тіло діє довільна плоска система сил) дорівнює кількості невідомих реакцій стрижнів.

Переходимо до складання рівнянь рівноваги. Головна особливість методу Ріттера полягає у тому, що в кожне рівняння рівноваги має ввійти лише одне невідоме. Тоді зменшується ймовірність виникнення помилок, оскільки наявність помилки у визна-

ченні будь-якого невідомого ніяк не позначатиметься на інших.

Найчастіше рівняння рівноваги за цим методом складають у формі моментів сил відносно *точок Ріттера*, тобто тих точок, в яких перетинаються два з трьох перерізаних стрижнів.

Так, для визначення реакції  $\bar{S}_1$  складаємо суму моментів сил відносно точки Ріттера  $D$ :

$$\sum M_{Di} = S_1 \cdot h_1 - P_2 \cdot CD + R_B \cdot DB = 0,$$

звідки

$$S_1 = \frac{P_2 \cdot CD - R_B \cdot DB}{h_1} = -\frac{40}{3} \sqrt{5} \text{ кН}.$$

Оскільки  $S_1 < 0$ , то це означає, що стрижень стиснуто (ми попередньо вважали, що всі стрижні розтягнуто).

Для стрижня  $ED$  точкою Ріттера є точка  $B$ :

$$\sum M_{Bi} = S_2 h_2 + P_2 \cdot CB = 0,$$

$$S_2 = -\frac{P_2 \cdot CB}{h_2} < 0.$$

Стрижень  $ED$  теж працює на стиск. Третьою точкою Ріттера є точка  $E$ :

$$\sum M_{Ei} = -S_3 \cdot EC + R_B \cdot CB = 0,$$

$$S_3 = \frac{R_B \cdot CB}{EC} > 0.$$

Стрижень  $CD$  розтягнуто.

Може трапитися, що два з трьох стрижнів, які перерізани, паралельні між собою. У цьому випадку одна точка Ріттера нескінченно віддаляється. Тоді замість одного рівняння моментів складають рівняння проєкцій на вісь, перпендикулярну до паралельних стрижнів.

Проводячи перерізи в інших місцях, можемо знайти за методом Ріттера реакції майже всіх стрижнів.

Як видно з попереднього викладу, обидва методи мають окремі недоліки, тому найкраща методика визначення зусиль у стрижнях ферми полягає у поєднанні методів Максвелла—Кремони і Ріттера. Після побудови діаграми Максвелла—Кремони деякі зусилля перевіряють за методом Ріттера.

**Приклад 3.2.** Визначити опорні реакції і зусилля в стрижнях ферми, до якої прикладено сили  $F_1 = 4$  кН,  $F_2 = 1$  кН (рис. 3.6).

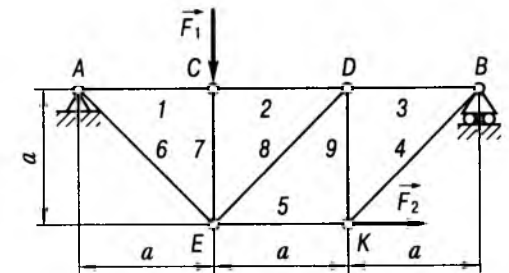


Рис. 3.6

Розв'язування. Насамперед перевіримо, чи є дана ферма статично означуваною. Кількість вузлів цієї ферми  $k = 6$ ; тоді кількість стрижнів повинна дорівнювати  $n = 2k - 3 = 9$ , що відповідає даній фермі (див. рис. 3.6). Спочатку визначимо опорні реакції ферми, що зручно зробити аналітичним методом.

До ферми прикладено дві активні сили  $\vec{F}_1$  та  $\vec{F}_2$ , реакція в'язі  $\vec{R}_B$  у точці  $B$  (коток) та дві реакції  $\vec{X}_A$ ,  $\vec{Y}_A$  у точці  $A$  (нерухомий шарнір),  $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A$  (рис. 3.7).

Запишемо систему з трьох рівнянь рівноваги, оскільки маємо плоску систему сил:

$$\begin{cases} \sum F_{xi} = -X_A + F_2 = 0, \\ \sum F_{yi} = Y_A - F_1 + R_B = 0, \\ \sum M_{zAi} = R_B \cdot 3a + F_2 a - F_1 a = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

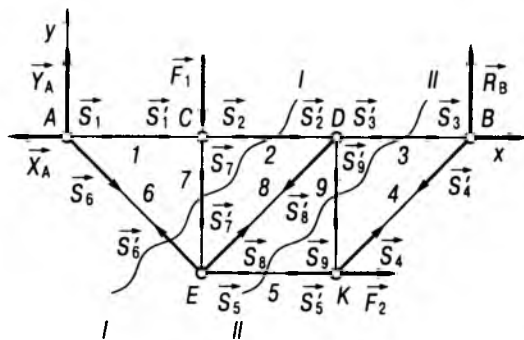


Рис. 3.7

З першого рівняння системи (3.1) отримаємо  $X_A = F_2 = 1$  кН, тобто сила спрямована протилежно осі  $Ax$ . Третє рівняння системи (3.1) перепишемо у вигляді  $3R_B + F_2 - F_1 = 0$ , або  $R_B = \frac{F_1 - F_2}{3} = 1$  кН. З другого рівняння системи (3.1) отримаємо  $Y_A = F_1 - R_B = 3$  кН. Отже, опорні реакції  $Y_A = 3$  кН,  $X_A = R_B = 1$  кН.

Далі зусилля в стрижнях ферми можна визначити трьома способами.

Графічно-аналітичний метод (вирізання вузлів). Будемо послідовно розглядати рівновагу кожного вузла (шарніра) ферми окремо. Зауважимо, що вузли ферми являють собою невідільні матеріальні точки, на які можуть діяти прикладені до них відомі сили: активні  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  і пасивні (реакції в'язей)  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_B$ . В'язями для вузлів є стрижні, що з'єднуються в них. Наприклад, вузол  $B$  обмежений двома в'язями-стрижнями 3 і 4 та перебуває під дією відомої опорної реакції  $\vec{R}_B$ , вузол  $C$  обмежений трьома в'язями-стрижнями 1, 2 і 7 та перебуває під дією відомої сили  $\vec{F}_1$ .

На підставі аксіоми про звільнення від в'язей можемо кожний з цих вузлів розглядати як вільну матеріальну точку, до якої прикладено відомі сили і реакції стрижнів.

Причому завжди матимемо збіжну плоску систему сил, для якої можна записати лише два рівняння рівноваги. Тому розгляд рівноваги вузлів ферми слід починати з того вузла, до якого прикладена хоча б одна відома сила (вузли  $A, B, C, K$ ) та не більше двох невідомих реакцій стрижнів (вузли  $A, B$ ). Отже, таким умовам відповідають у нашому прикладі лише вузли  $A$  і  $B$ .

Аналітичний метод. Виріжемо вузол  $A$ . До нього прикладено чотири сили:  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$  — реакції нерухомого шарніра у точці  $A$ , а також  $\vec{S}_1, \vec{S}_6$  — зусилля в стрижнях 1 і 6 відповідно (рис. 3.8, а).

Будемо послідовно записувати по два рівняння рівноваги для кожного вузла. Оскільки невідомо, розтягнутий стрижень чи стиснутий, то спочатку вважатимемо, що всі стрижні розтягнуті. Якщо в результаті розв'язку цих рівнянь отримаємо знак *плюс*, то це означатиме, що стрижень розтягнутий, а якщо *мінус*, то навпаки, — стиснутий. Зусилля в стрижнях 1 і 6 спрямуємо від вузла  $A$ , тобто вважатимемо, що обидва стрижні розтягуються (рис. 3.8, а). Матимемо збіжну плоску систему сил, а отже, два рівняння рівноваги:

$$\sum F_{xi} = S_1 - X_A + S_6 \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum F_{yi} = Y_A - S_6 \sin 45^\circ = 0,$$

звідки отримаємо

$$S_6 = Y_A \sqrt{2} = 3\sqrt{2} = 4,24 \text{ кН},$$

$$S_1 = X_A - S_6 \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 3 = -2 \text{ кН}.$$

Отже, стрижень 1 стиснутий, і його зусилля спрямоване до вузла  $A$ , а стрижень 6 розтягнутий — зусилля спрямоване від вузла  $B$ , як і припускалося (рис. 3.8, а).

Оскільки зусилля в стрижнях 1 і 6 відомі, то виріжемо наступний вузол  $C$  (можна  $B$ ), до якого прикладено лише два невідомі зу-

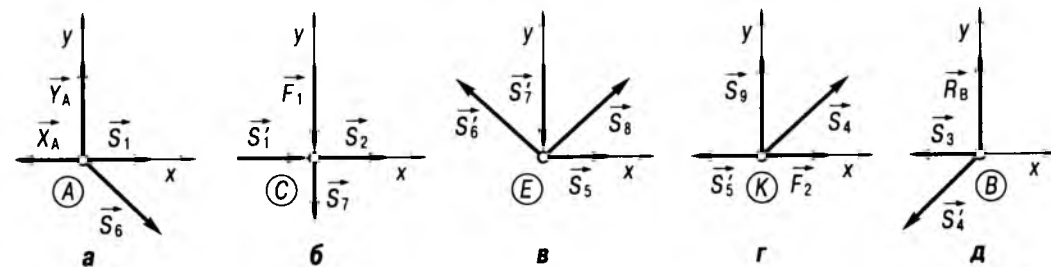


Рис. 3.8

силля в стрижнях 2 і 7. Спрямуємо зусилля від цього вузла (рис. 3.8, б). Отже, до вузла  $C$  прикладено сили  $\vec{F}_1, \vec{S}_7, \vec{S}_1', \vec{S}_2$ . Вектор сили  $\vec{S}_1'$  спрямований протилежно вектору  $\vec{S}_1$  (рис. 3.8, б) і рівний йому за величиною, бо це внутрішнє зусилля в стрижні 1.

Матимемо збіжну плоску систему сил, тобто два рівняння рівноваги:

$$\sum F_{xi} = S_1' + S_2 = 0,$$

$$\sum F_{yi} = -S_7 - F_1 = 0.$$

звідки визначимо

$$S_2 = -S_1' = -2 \text{ кН}, \quad S_7 = -F_1 = -4 \text{ кН}.$$

Отже, стрижні 2 і 7 стиснуті і їх зусилля спрямовані до вузла  $C$  (рис. 3.8, б).

Наступним виріжемо вузол  $E$ . До нього прикладено чотири сили:  $\vec{S}_5, \vec{S}_6'$  (протилежна  $\vec{S}_6$ ) і  $\vec{S}_7'$  (протилежна  $\vec{S}_7$ ),  $\vec{S}_8$  (рис. 3.8, в). Спрямувавши зусилля  $\vec{S}_5$  і  $\vec{S}_8$  від вузла  $E$  (рис. 3.8, в), записуємо два рівняння рівноваги:

$$\sum F_{xi} = S_5 + S_8 \cos 45^\circ - S_6' \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum F_{yi} = -S_7' + S_8 \sin 45^\circ + S_6' \sin 45^\circ = 0,$$

тому

$$S_8 = S_7' \sqrt{2} - S_6' = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2} = 1,41 \text{ кН},$$

$$S_5 = S_6 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_8 \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 - 1 = 2 \text{ кН}.$$

Отже, стрижні 5 і 8 розтягнуті (рис. 3.8, в).

Розглянемо вузол  $K$ . До нього прикладено чотири сили:  $\vec{F}_2, \vec{S}_4, \vec{S}_5', \vec{S}_9$ . Спрямувавши зусилля  $\vec{S}_4$  і  $\vec{S}_9$  від вузла  $K$  (рис. 3.8, г), запишемо два рівняння рівноваги:

$$\sum F_{xi} = F_2 - S_5' + S_4 \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum F_{yi} = S_9 + S_4 \sin 45^\circ = 0.$$

Отримаємо  $S_4 = -\sqrt{2} \cdot S_9 \Rightarrow F_2 - S_5 - S_9 = 0$ , звідки  $S_9 = F_2 - S_5 = -1$  кН. Сила  $S_4 = \sqrt{2} = 1,41$  кН.

Стрижень 4 розтягнутий, а 9 — стиснутий (рис. 3.8, г).

Останнім виріжемо вузол  $B$ . До нього прикладено лише три сили:  $\vec{S}_4'$ , протилежна  $\vec{S}_4$  (рис. 3.8, д),  $\vec{R}_B$  і невідоме зусилля  $\vec{S}_3$ . Зусилля  $\vec{S}_3$  спрямуємо від вузла  $B$  (рис. 3.8, д) і запишемо рівняння рівноваги в проекції на вісь  $Bx$ , тому що невідоме тільки  $\vec{S}_3$ :

$$\begin{aligned} \sum F_{xi} &= -S_3 - S_4' \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow S_3 = \\ &= -\frac{S_4}{\sqrt{2}} = -1 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Отже, стрижень 3 стиснутий (рис. 3.8, д).

Графічний метод. Виріжемо вузол  $A$ . До нього прикладено чотири сили:  $\vec{X}_A$  і  $\vec{Y}_A$  — реакції нерухомого шарніра в точці  $A$ , а також  $\vec{S}_1, \vec{S}_6$  — зусилля в стрижнях 1 і 6 відповідно. Для рівноваги збіжної системи сил достатньо, щоб векторна сума всіх сил,

прикладених до вузла  $A$ , дорівнювала нулеві:  $\vec{X}_A + \vec{Y}_A + \vec{S}_1 + \vec{S}_6 = 0$ , тобто вектори цих сил повинні утворювати замкнутий багатокутник (рис. 3.9, *a*).

Побудову починаємо з відомої сили  $\vec{Y}_A$ , потім переносимо в початок вектора  $\vec{Y}_A$  паралельно самій собі одну із сил (наприклад  $\vec{S}_6$ ), а в кінець вектора  $\vec{Y}_A$  — останню силу  $\vec{X}_A + \vec{S}_1$ , тому що  $\vec{X}_A$  і  $\vec{S}_1$  спрямовані вздовж однієї прямої. Побудувавши багатокутник, стрілки векторів розставляємо по колу так, щоб в жодній із вершин вони не збігались, тобто трикутник був замкнутим. Кути в отриманому трикутнику визначаємо з геометрії ферми (якщо це зробити важко, то силу  $\vec{Y}_A$  будемо в масштабі, а зусилля  $\vec{S}_1$  і  $\vec{S}_6$  визначаємо вимірюванням).

З силового трикутника (рис. 3.9, *a*) отримуємо

$$S_6 = \frac{Y_A}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2} \cdot Y_A = 4,24 \text{ кН},$$

$$X_A + S_1 = Y_A \Rightarrow S_1 = Y_A - X_A = 3 - 1 = 2 \text{ кН}.$$

Напрямки зусиль  $\vec{S}_1$  (стрижень 1 стискається, оскільки  $\vec{S}_1$  спрямовано до вузла, див. рис. 3.9, *a*) і  $\vec{S}_6$  (стрижень 6 розтягується, бо  $\vec{S}_6$  спрямовано від вузла, див. рис. 3.9, *a*) визначають у процесі побудови багатокутника.

Отже, зусилля в стрижнях 1 і 6 уже відомі, тому виріжемо наступний вузол  $C$  (можна  $B$ ), до якого прикладені лише два невідомих зусилля в стрижнях 2 і 7. До вузла прикладено чотири сили:  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{S}_7$ ,  $\vec{S}'_1$ ,  $\vec{S}_2$ . Вектор  $\vec{S}'_1$  спрямований протилежно  $\vec{S}_1$  (рис. 3.9, *b*), бо це внутрішнє зусилля в стрижні, і рівний йому за величиною (рис. 3.9, *b*).

Оскільки  $\vec{F}_1$  і  $\vec{S}_7$  спрямовані вздовж однієї прямої, то їх можна замінити однією силою  $\vec{F}_1 + \vec{S}_7$ . Аналогічно сили  $\vec{S}'_1$  і  $\vec{S}_2$ , що теж діють вздовж однієї прямої, замінюємо однією силою  $\vec{S}'_1 + \vec{S}_2$ .

Можна вважати, що до вузла  $C$  прикладено лише дві сили ( $\vec{F}_1 + \vec{S}_7$  і  $\vec{S}'_1 + \vec{S}_2$ ), лінії дії яких не збігаються. Тобто, щоб вузол  $C$  знаходився в рівновазі, за аксіомою про абсолютно тверде тіло обидві сили повинні дорівнювати нулеві. Запишемо

$$\vec{F}_1 + \vec{S}_7 = 0,$$

звідки  $\vec{S}_7 = -\vec{F}_1$ . Вектор  $\vec{S}_7$  спрямований назустріч  $\vec{F}_1$ , тобто до вузла, отже, стрижень 7 стискається (рис. 3.9, *b*). Аналогічно маємо  $\vec{S}'_1 + \vec{S}_2 = 0$ , тому  $\vec{S}_2 = -\vec{S}'_1$ . Вектор  $\vec{S}_2$  спрямований назустріч  $\vec{S}'_1$ , тобто до вузла, отже, стрижень 2 теж стискається (рис. 3.9, *b*).

$$\text{Зусилля } S_7 = F_1 = 4 \text{ кН}, S_2 = S_1 = 2 \text{ кН}.$$

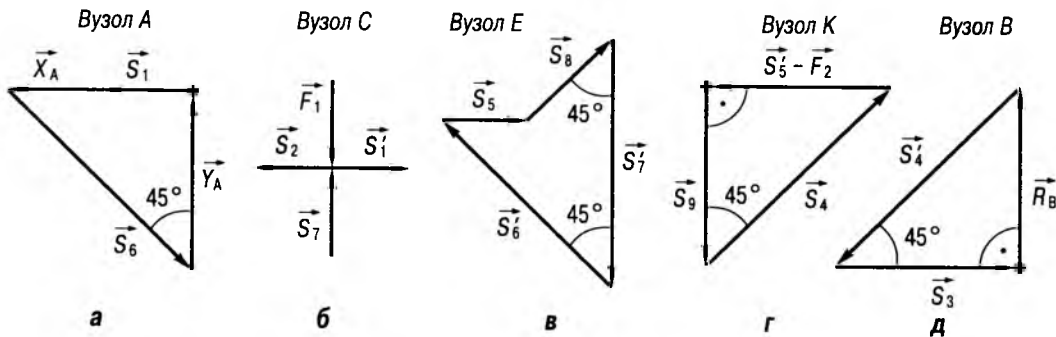


Рис. 3.9

Наступним виріжемо вузол  $E$ . До нього прикладено чотири сили (рис. 3.9, *в*):  $\vec{S}_5$ ,  $\vec{S}'_6$  (протилежна  $\vec{S}_6$ ),  $\vec{S}'_7$  (протилежна  $\vec{S}_7$ ) і  $\vec{S}_8$ . Будемо (рис. 3.9, *в*) замкнутий чотирикутник  $\vec{S}_5 + \vec{S}_8 + \vec{S}'_7 + \vec{S}'_6 = 0$ .

Побудову починаємо з відомого зусилля  $\vec{S}'_7$  (або  $\vec{S}'_6$ ), до кінця якого добудовуємо вектор зусилля  $\vec{S}'_6$ . Далі в початок  $\vec{S}'_7$  переносимо паралельно зусилля  $\vec{S}_8$ , а в кінець  $\vec{S}'_6$  — вектор  $\vec{S}_5$ . Розставляємо стрілки по колу, а кути визначаємо з геометрії ферми. Згідно з рис. 3.9, *в* записуємо  $S_7 = S_8 \cos 45^\circ + S_6 \cos 45^\circ$ , звідки  $S_8 = \sqrt{2} \cdot S_7 - S_6 = \sqrt{2} = 1,41 \text{ кН}$ ,  $S_6 \sin 45^\circ = S_5 + S_8 \sin 45^\circ$ ; отже,

$$S_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} (S_6 - S_8) = 2 \text{ кН}.$$

Зусилля  $\vec{S}_5$  і  $\vec{S}_8$  спрямовані від вузла, отже, стрижні 5 і 8 розтягнуті (рис. 3.9, *в*).

Наступним виріжемо вузол  $K$ . До нього прикладено чотири сили:  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{S}_4$ ,  $\vec{S}'_5$  і  $\vec{S}_9$ . Зусилля  $\vec{S}'_5$  (рис. 3.9, *г*) протилежне  $\vec{S}_5$  на рис. 3.9, *в*. Сили  $\vec{F}_2$  і  $\vec{S}'_5$  протилежні за напрямом і діють вздовж однієї лінії; тому їх можна замінити однією силою  $\vec{F}_2 - \vec{S}'_5$ . Будемо замкнутий векторний силовий трикутник (рис. 3.9, *г*).

Вектор  $\vec{F}_2 - \vec{S}'_5$  спрямовуємо в бік більшої сили  $\vec{S}'_5$ . Починаємо побудову з вектора  $\vec{S}'_5 - \vec{F}_2$ , бо він відомий. Вектори  $\vec{S}_9$  і  $\vec{S}_4$  добудовуємо до  $\vec{S}'_5 - \vec{F}_2$  паралельно стрижням 4 і 9 відповідно. Стрілки розставляємо по колу. З побудованого трикутника маємо  $S_9 = S_5 - F_2 = 1 \text{ кН}$ ,  $S_4 = \sqrt{2} \cdot S_9 = 1,41 \text{ кН}$ .

Зусилля  $\vec{S}_4$  спрямоване від вузла  $K$ , тобто стрижень 4 розтягнутий, а  $\vec{S}_9$  — до вузла  $K$ , отже, стрижень 9 стиснутий (рис. 3.9, *г*).

Останнім виріжемо вузол  $B$ . До нього прикладено лише три сили:  $\vec{S}'_4$ , протилежна  $\vec{S}_4$  (рис. 3.9, *д*),  $\vec{R}_B$  і невідоме зусилля  $\vec{S}_3$ . Будемо замкнутий векторний силовий трикутник (рис. 3.9, *д*). Кути визначаємо з геометрії ферми. Дістаємо

$$S_3 = R_B = 1 \text{ кН}.$$

Зусилля  $\vec{S}_3$  спрямоване до вузла  $B$ , тому стрижень 3 стиснутий (рис. 3.9, *д*).

Сили в стрижнях 2, 3, 8, 9, що збігаються в шарнірі  $D$ , вже визначені. Рівновагу вузла  $D$  використовуємо для перевірки виконаних розрахунків:

$$\begin{aligned} \sum F_{xi} &= S'_2 - S'_3 - S'_8 \cos 45^\circ = \\ &= 2 - 1 - \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \end{aligned}$$

$$\sum F_{yi} = S'_9 - S'_8 \sin 45^\circ = 1 - \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Внутрішні зусилля у всіх стрижнях ферми врівноважені, тому розрахунки виконано вірно. Зведемо їх результати.

**Зовнішні (опорні реакції), кН**

$X_A$ .....	1
$Y_A$ .....	3
$R_B$ .....	1

**Внутрішні (зусилля в стрижнях), кН**

$S_1$ .....	-2
$S_2$ .....	-2
$S_3$ .....	-1
$S_4$ .....	1,41
$S_5$ .....	2
$S_6$ .....	4,24
$S_7$ .....	-4
$S_8$ .....	+1,41
$S_9$ .....	-1

Знак “+” вказує на те, що стрижень розтягнутий, а “-”, що стиснутий.

У разі визначення зусиль у багатьох стрижнях складних ферм точність проведен-

ня прямих, паралельних напрямку стрижнів, знижується, оскільки кожен внутрішню силу відкладають двічі. Уникнути цього недоліку дає змогу графічна побудова діаграми Максвелла—Кремони.

Графічний метод із застосуванням діаграми Максвелла—Кремони. За цим методом потрібно ввести позначення сил відповідно до полів. За поля вибирають частини площини, що обмежені зовнішніми контурами ферми та лініями дії двох суміжних зовнішніх сил. Введемо поля, межами яких є: лінії дії реакцій опори  $A$  — знизу  $\bar{X}_A$ , справа  $\bar{Y}_A$ ; зліва реакція  $\bar{Y}_A$ , знизу лінія  $AB$ , справа — лінія дії зовнішньої сили  $\bar{F}_1$ ; лінія дії сили  $\bar{F}_1$  (зліва), пряма  $AB$  (знизу) та лінія дії реакції  $\bar{R}_B$  (справа); зліва лінія дії реакції  $\bar{R}_B$ , лінія  $BK$ , а знизу лінія дії сили  $\bar{F}_2$ ; зверху лінії дії реакції  $\bar{X}_A$ , сили  $\bar{F}_2$  та контур ферми — лінія  $AE$ . Вибрані поля дають можливість позначати кожен зовнішню силу, яка ці поля відмежовує. Наприклад, сила  $\bar{Y}_A$  позначатиметься  $\bar{1}-2$ , сила  $\bar{F}_1 = \bar{2}-3$ ,  $\bar{F}_2 = \bar{4}-5$  і т. д. (рис. 3.10).

Далі будемо замкнутий силовий багатокутник  $\bar{1}-2-3-4-5$  зовнішніх сил (рис. 3.11) за вже відомими опорними реакціями в'язей у вибраному масштабі: від точки  $1$  відкладаємо вгору реакцію  $Y_A = 3$  кН (отримуємо точку  $2$ ), від точки  $2$  — вниз силу  $F_1 = 4$  кН (точка  $3$ ), від точки  $3$  — вгору силу  $R_B = 1$  кН (отримуємо точку  $4$ , яка

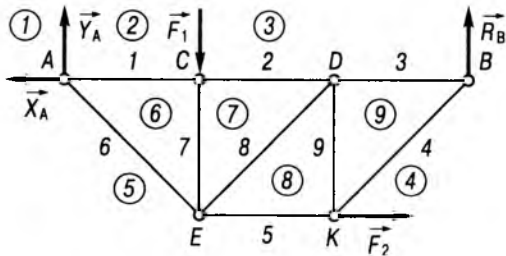


Рис. 3.10

збігається з точкою  $1$ ), далі від точки  $4$  — вправо силу  $F_2 = 1$  кН (отримуємо точку  $5$ ). В результаті побудови повинні отримати останню зовнішню силу  $\bar{5}-1 = \bar{X}_A$ . Одержана діаграма зовнішніх сил (заданих та реакцій в'язей) показана на рис. 3.11.

Приступимо до визначення зусиль у стрижнях ферми. Для позначення внутрішніх сил (зусиль у стрижнях), що діють вздовж стрижнів ферми, вказуємо додаткові поля  $6, 7, 8$  і  $9$  (рис. 3.10), за які візьмемо окремі трикутники ферми. Таким чином, ми ввели єдині позначення для всіх внутрішніх сил за допомогою полів (аналогічно, як ми це робили із зовнішніми силами). На рис. 3.10 номери полів вказано в кружечках.

За третім законом Ньютона внутрішні сили діють попарно.

Наприклад, вздовж першого стрижня діють дві внутрішні сили — сили взаємодії між вузлами  $A$  і  $C$ . Силу, прикладену до вузла  $C$  з боку вузла  $A$ , позначимо  $\bar{6}-2$ , а силу, прикладену до вузла  $A$  з боку вузла  $C$ , —  $\bar{2}-6$ .

Продовжимо побудову діаграми Максвелла—Кремони. До побудованої діаграми зовнішніх сил (рис. 3.11)  $\bar{1}-2-3-4-5$  добудуємо діаграму внутрішніх сил. Щоб отримати точку  $6$  від точки  $2$  проводимо пря-

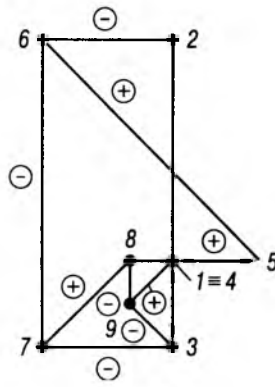


Рис. 3.11

му, паралельну стрижню  $AC$  (це сила  $\bar{2}-6$ ), а від точки  $5$  — пряму, паралельну стрижню  $AE$  (сила  $\bar{5}-6$ ). На перетині цих прямих отримуємо точку  $6$ . Аналогічно будемо точку  $7$ : від точки  $3$  проводимо пряму, паралельну стрижню  $CD$  (сила  $\bar{3}-7$ ), а від точки  $6$  — пряму, паралельну стрижню  $CE$  (сила  $\bar{6}-7$ ). На перетині побудованих прямих отримуємо точку  $7$ . Для знаходження точки  $8$  проводимо прямі: лінії дії сили  $\bar{7}-8$  паралельно стрижню  $DE$  і сили  $\bar{5}-8$  паралельно стрижню  $EK$ . Вони перетинаються в точці  $8$ . І, нарешті, отримуємо точку  $9$  на перетині прямої  $\bar{8}-9$ , паралельної стрижню  $DK$ , і прямої  $\bar{4}-9$ , паралельної стрижню  $BK$ .

Побудована діаграма (рис. 3.11) дає наочну картину стану стрижнів ферми. За її допомогою легко проаналізувати інтенсивність і характер зусиль у стрижнях та відповідно до цього зробити висновок про найнавантаженіші ділянки ферми. Це стрижні  $CE(\bar{6}-7)$  та  $AE(\bar{5}-6)$ , які потребують посилення міцності.

На діаграмі розтягнуті стрижні позначають знаком плюс "+", а стиснуті — знаком мінус "-" (рис. 3.11).

Зауваження. Іноді дві вершини діаграми збігаються. Це означає, що стрижень, який відповідає даному позначенню, має нульове зусилля. Такі стрижні встановлюють у фермі лише з конструктивних міркувань. Відзначимо також, що нульові стрижні можна визначити без побудови діаграми. Нульовими стрижні є у трьох випадках:

1) до вузла, що з'єднує тільки два стрижні, які не знаходяться на одній прямій, не прикладено

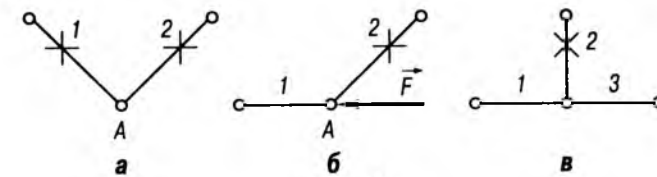


Рис. 3.12

зовнішні сили (за аксіомою про абсолютно тверде тіло) (рис. 3.12, а);

2) до вузла, що з'єднує два стрижні ферми, не розміщені на одній прямій, прикладено зовнішню силу в напрямку одного з цих стрижнів (рис. 3.12, б). У даному випадку другий стрижень — нульовий, а зусилля у першому дорівнює зовнішній силі;

3) на вузол, що з'єднує три стрижні ферми, не діють ніякі зовнішні сили, причому два з трьох стрижнів розташовані на одній прямій (рис. 3.12, в). Маємо  $S_2 = 0$  (другий стрижень нульовий), а  $S_1 = S_3$ .

Аналітичний метод — метод Ріттера (за трьома моментами). Цей метод дуже зручний, коли потрібно визначити внутрішні зусилля в одному, двох або трьох строго визначених стрижнях, оскільки дає можливість не обходити всю ферму аналогічно попереднім методам.

Для реалізації методу Ріттера застосовують переріз ферми. Слід пам'ятати, що кількість аналітичних умов рівноваги плоскої системи сил дорівнює трьом, тому переріз проводиться через три стрижні, які не виходять з одного вузла ферми. Оскільки зусилля в стрижнях ферми є внутрішніми силами, то, застосовуючи метод перерізів, переводимо їх у категорію зовнішніх.

Проведемо переріз  $I-I$  (рис. 3.7) через стрижні  $2, 6$  і  $7$ . Далі розглянемо рівновагу правої частини ферми, оскільки до неї прикладено лише дві зовнішні сили ( $\bar{F}_2$  і  $\bar{R}_B$ ), а до лівої три ( $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Y}_A$ ,  $\bar{F}_1$ ). Ліву частину ферми відкидаємо і вважаємо її в'яззю відносно правої, яка залишилась (рис. 3.13).

Замінюємо дію лівої частини реакціями, спрямованими вздовж розрізаних стрижнів. Вважатимемо, що стрижні  $2, 6$  і  $7$  розтягнуті, тому їх реакції направляємо від вузлів



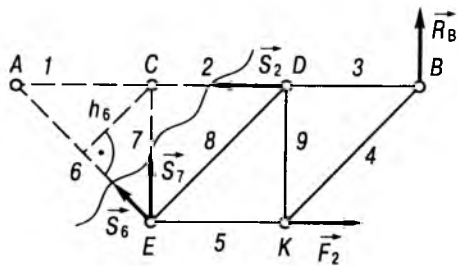


Рис. 3.13

Дта Е. Рівняння рівноваги за методом Ріттера — це три рівняння моментів відносно трьох точок Ріттера — точок перетину лінії дії попарно двох стрижнів.

Для стрижня 2 точкою Ріттера є точка перетину стрижнів 6 і 7 — точка Е. Записуємо рівняння моментів відносно цієї точки:

$$\sum M_{Ei} = R_B \cdot 2a + S_2 a = 0 \Rightarrow S_2 = -2R_B = -2 \text{ кН.}$$

Отже, стрижень 2 стиснутий.

Для стрижня 6 точкою Ріттера є точка перетину стрижнів 2 і 7, тобто точка С. Тоді

$$\sum M_{Ci} = R_B \cdot 2a + F_2 a - S_6 h_6 = 0,$$

де  $h_6 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ , звідки

$$S_6 = \sqrt{2}(2R_B + F_2) = 3\sqrt{2} = 4,24 \text{ кН.}$$

Отже, стрижень 6 розтягнутий.

Для стрижня 7 точкою Ріттера є точка перетину стрижнів 2 і 6, це точка А:

$$\sum M_{Ai} = R_B \cdot 3a + F_2 a + S_7 a = 0 \Rightarrow S_7 = -3R_B - F_2 = -4 \text{ кН.}$$

Отже, стрижень 7 стиснутий.

Може трапитися, що два з трьох стрижнів паралельні між собою. Розглянемо цей випадок на перерізі II — II (рис. 3.7). У переріз потрапили стрижні 3, 5 і 9. З міркувань, аналогічних наведеним вище, розглянемо праву частину ферми (рис. 3.14).

У цьому випадку стрижень 3 має точку Ріттера — точку К, тому перше рівняння рівноваги таке:

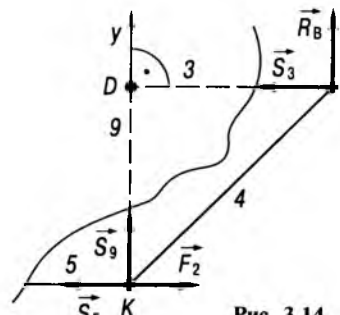


Рис. 3.14

$$\sum M_{Ki} = R_B a + S_3 a = 0,$$

звідки  $S_3 = -R_B = -1 \text{ кН.}$

Стрижень 3 стиснутий. Для визначення  $S_5$  маємо точку Ріттера — точку D, для якої

$$\sum M_{Di} = R_B a + F_2 a - S_5 a = 0,$$

тому  $S_5 = R_B + F_2 = 2 \text{ кН.}$

Стрижень 5 розтягнутий. А для визначення  $S_9$  точка Ріттера нескінченно віддалена, тому що стрижні 3 і 5 — паралельні.

Тоді складаємо рівняння проекцій сил на вісь Ду, перпендикулярну до паралельних стрижнів 3 і 5:

$$\sum F_{yi} = R_B + S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = -R_B = -1 \text{ кН.}$$

Стрижень 9 стиснутий.

### § 3.3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

3.1. Визначити опорні реакції і, застосовуючи метод вирізання вузлів, розрахувати зусилля в стрижнях ферми, зображеної на рис. 3.15, при навантаженні  $P$ . Вагою стрижнів знехтувати.

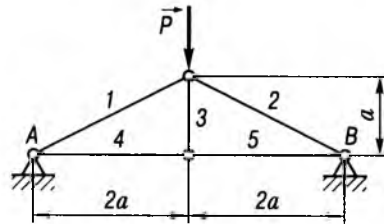


Рис. 3.15

Відповідь:  $R_A = R_B = \frac{P}{2}$ ;

$$S_1 = S_2 = -P \frac{\sqrt{5}}{2}; S_3 = 0; S_4 = S_5 = P.$$

3.2. Визначити опорні реакції і, використовуючи метод Ріттера, обчислити зусилля в стрижнях ферми (рис. 3.16) при навантаженні  $P$ . Вагою стрижнів знехтувати.

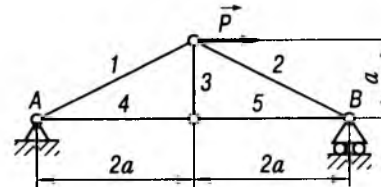


Рис. 3.16

Відповідь:  $R_A = \frac{\sqrt{17}}{4} P$ ;  $R_B = \frac{1}{4} P$ ;

$$S_1 = -S_2 = P \frac{\sqrt{5}}{4}; S_3 = 0; S_4 = S_5 = \frac{P}{2}.$$

3.3. Розрахувати опорні реакції і визначити методом вирізання вузлів зусилля в стрижнях ферми, зображеної разом з прикладеними до неї силами на рис. 3.17, якщо навантаження  $P = 12 \text{ кН}$ , а довжина стрижнів 1 і 4 — 3l, 8 і 9 — 4l. Вагу стрижнів не враховувати.

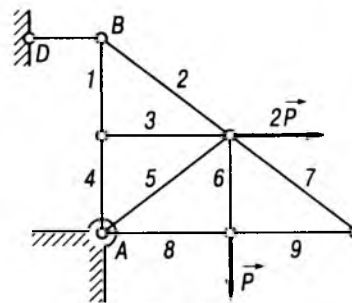


Рис. 3.17

Відповідь:  $S_{BD} = -20 \text{ кН}$ ;  $R_A = \sqrt{10} \text{ кН}$ ;

Номер стрижня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зусилля, кН	-15	+25	0	15	+5	+12			0

3.4. Обчислити опорні реакції, методом Ріттера визначити зусилля в стрижнях 2, 3, 4, 6, 7, 8, а методом вирізання вузлів — зусилля в стрижнях 1, 5, 9 ферми (рис. 3.18), якщо  $P = 6 \text{ кН}$ , а довжина стрижнів 1 і 4 — 3l, 8 і 9 — 4l. Вагою стрижнів знехтувати.

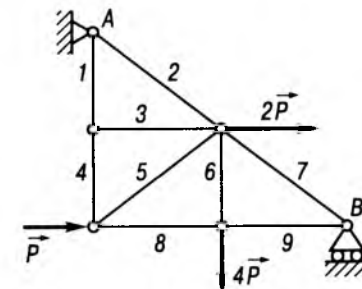


Рис. 3.18

Відповідь:  $R_A = 3\sqrt{85} \text{ кН}$ ;  $R_B = 3 \text{ кН}$ ;

Номер стрижня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зусилля, кН	+7,5	+22,5	0	+7,5	-12,5	+24	-20		+4

3.5. Розрахувати опорні реакції, методом Ріттера визначити зусилля в стрижнях 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, методом вирізання вузлів — зусилля в стрижнях 2, 9 ферми (рис. 3.19), якщо  $P_1 = 2\sqrt{3} \text{ кН}$ ,  $P_2 = 2 \text{ кН}$ ,  $P_3 = 1 \text{ кН}$ . Вагу стрижнів не враховувати.

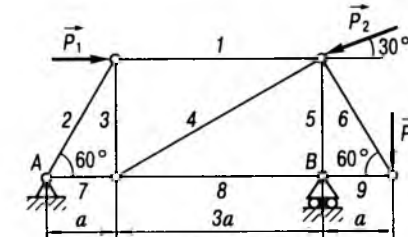


Рис. 3.19

Відповідь:  $R_A = 3 \text{ кН}$ ;  $R_B = 2 \text{ кН}$ ;

Номер стрижня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зусилля, кН	$+5 \frac{\sqrt{3}}{3}$	$+2 \frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	+2	-3		$+2 \frac{\sqrt{3}}{3}$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3.6. Визначити опорні реакції, методом Ріттера розрахувати зусилля в стрижнях 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, методом вирізання вузлів — зусилля в стрижнях 3, 8 ферми (рис. 3.20), якщо  $P_1 = P_3 = 20\sqrt{2}$  кН,  $P_2 = 40$  кН. Вагою стрижнів знехтувати.

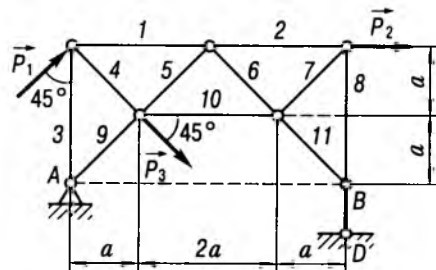


Рис. 3.20

Відповідь:  $S_{BD} = 40$  кН;  $R_A = 40\sqrt{5}$  кН;

Номер стрижня	1	2	3	4	5
Зусилля, кН	-80	0	-40	$+60\sqrt{2}$	$+40\sqrt{2}$

Номер стрижня	6	7	8	9	10	11
Зусилля, кН	$-40\sqrt{2}$	$+40\sqrt{2}$	-40	$+80\sqrt{2}$	+80	0

3.7. Обчислити опорні реакції, методом Ріттера визначити зусилля в стрижнях 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, методом вирізання вузлів — зусилля в стрижнях 3, 9 ферми, зображеної на рис. 3.21, якщо  $P_1 = P_3 = 20$  кН,  $P_2 = P_4 = 10$  кН. Вагою стрижнів знехтувати.

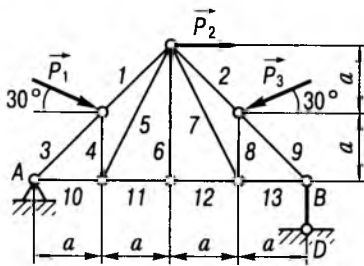


Рис. 3.21

Відповідь:  $S_{BD} = 20$  кН;  $R_A = 10\sqrt{2}$  кН;

Номер стрижня	1	2	3
Зусилля, кН	$-10\sqrt{2}(\sqrt{3}+2)$	$-10\sqrt{2}$	$-10\sqrt{2}$

Номер стрижня	4	5	6
Зусилля, кН	$-10\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$	$+5\sqrt{5}(1+\sqrt{3})$	+10

Номер стрижня	7	8	9
Зусилля, кН	$+5\sqrt{5}(1+\sqrt{3})$	$-10(1+\sqrt{3})$	$-20\sqrt{2}$

Номер стрижня	10	11	12	13
Зусилля, кН	+20	$+5\sqrt{5}(\sqrt{3}-1)$	+20	

3.8. Визначити опорні реакції, методом Ріттера розрахувати зусилля в стрижнях 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, методом вирізання вузлів — зусилля в стрижнях 1, 8 ферми (рис. 3.22), якщо  $P_1 = 30$  кН,  $P_2 = 10\sqrt{3}$  кН,  $P_3 = 10$  кН. Вагою стрижнів не враховувати.

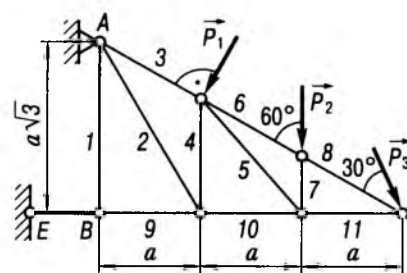


Рис. 3.22

Відповідь:  $S_{BE} = 50$  кН;  $R_A = 10\sqrt{43}$  кН;

Номер стрижня	1	2	3	4	5
Зусилля, кН	0	+50	$+10\sqrt{3}$	$-25\sqrt{3}$	$+5\sqrt{21}$

Номер стрижня	6	7	8	9	10	11
Зусилля, кН	$+10\sqrt{3}$	$-10\sqrt{3}$	$+10\sqrt{3}$	-50	-25	-10

### § 3.4. РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ "ВИЗНАЧЕННЯ ЗУСИЛЬ У СТРИЖНЯХ ПЛОСКОЇ ФЕРМИ"

Таблиця 3.2

Номер варіанта	$P_1$ , Н	$P_2$ , Н	$P_3$ , Н	$a$ , м	$h^{**}$ , мм	$\alpha$ , град
1	11	21	15	10	20	5
2	12	22	20	10	15	2
3	13	23	20	15	10	3
4	14	24	15	20	15	5
5	15	25	15	10	5	2
6	16	26	10	15	10	4
7	17	27	10	15	5	3
8	18	28	20	10	20	5
9	19	29	15	20	10	3
10	20	30	10	15	15	2

Послідовність виконання роботи:

а) відповідно до варіанта завдання зобразити ферму у певному масштабі із заданим навантаженням (рис. 3.23);

б) знайти зовнішні опорні реакції аналітичним способом при заданих зовнішніх навантаженнях (табл. 3.2) і впевнитись у тому, що нема помилок;

в) побудувати діаграму Максвелла—Кремони у певному масштабі сил; з'ясувати, стиснуто чи розтягнуто стрижні;

г) знайти за методом Ріттера зусилля стрижнів в одному перерізі; порівняти ці значення із знайденими графічним способом Максвелла—Кремони і обчислити помилку останнього.

\* Не використовується у розв'язуванні варіантів 1, 2, 11, 16, 22, 23 і 24.

\*\* Не використовується у розв'язуванні варіантів 23, 27 і 29.

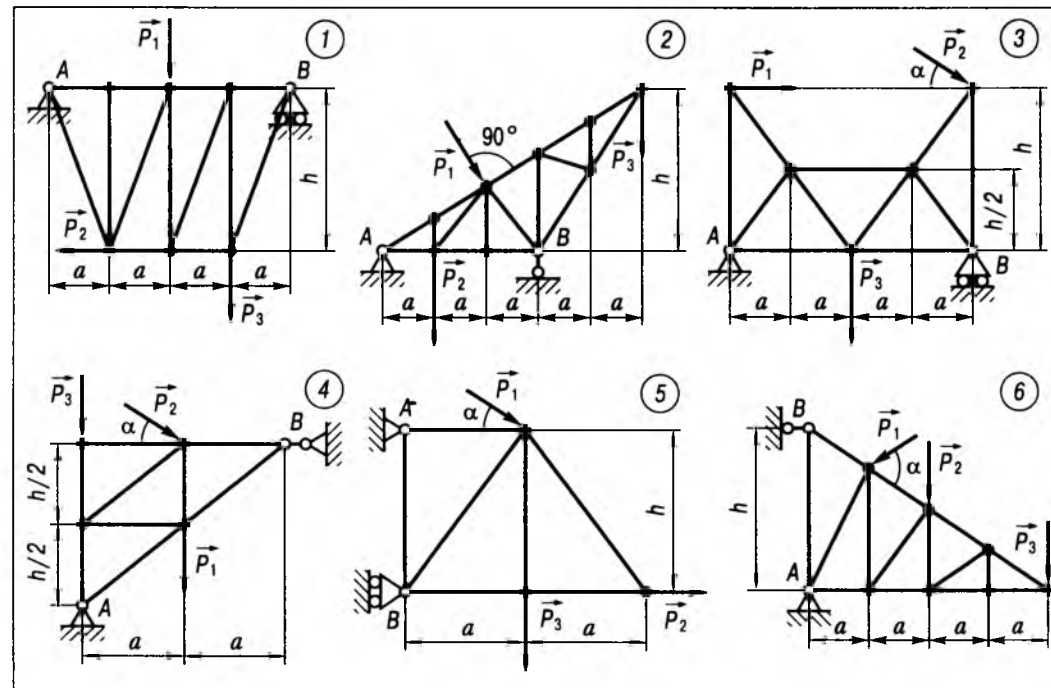


Рис. 3.23 (початок)

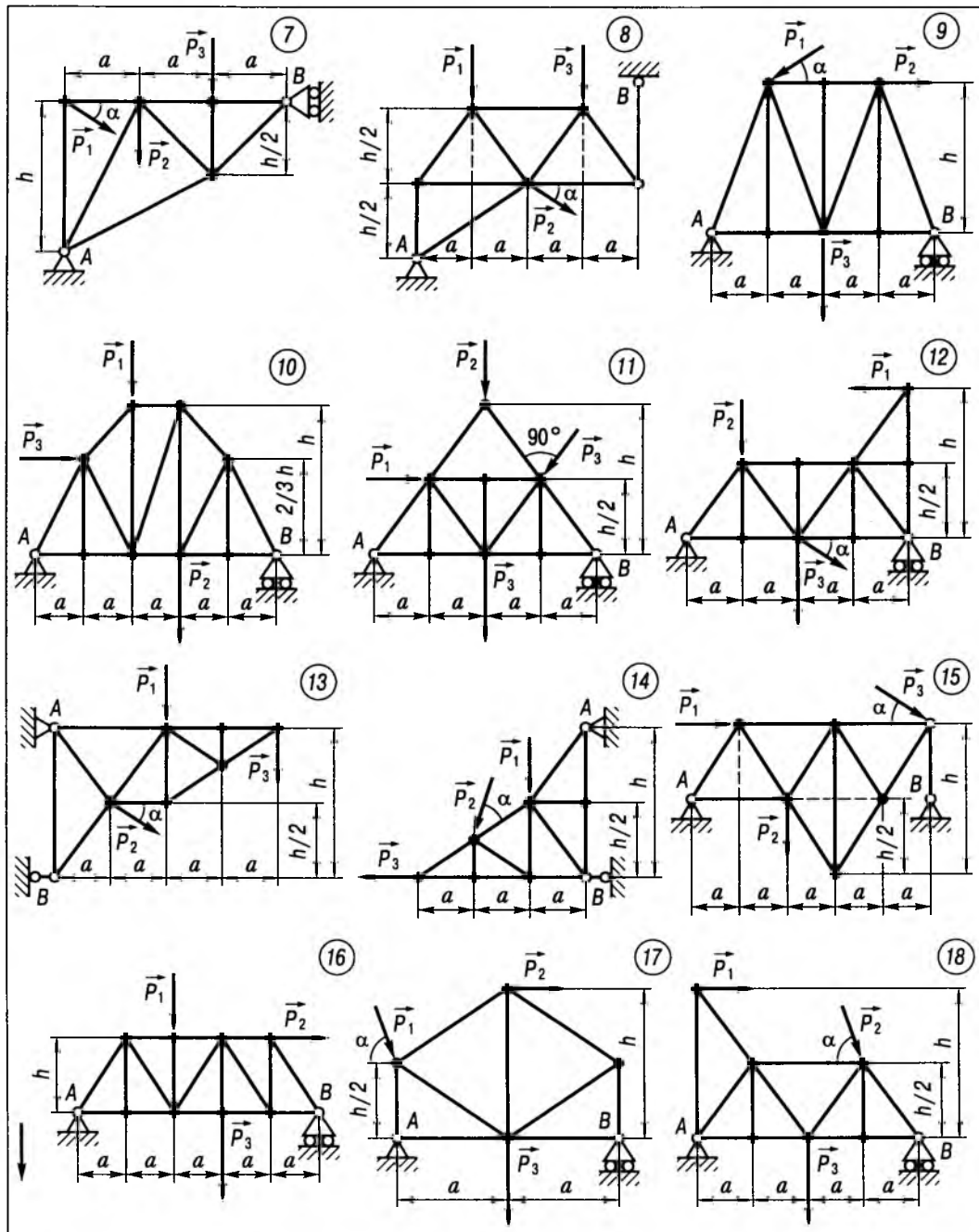


Рис. 3.23 (продовження)

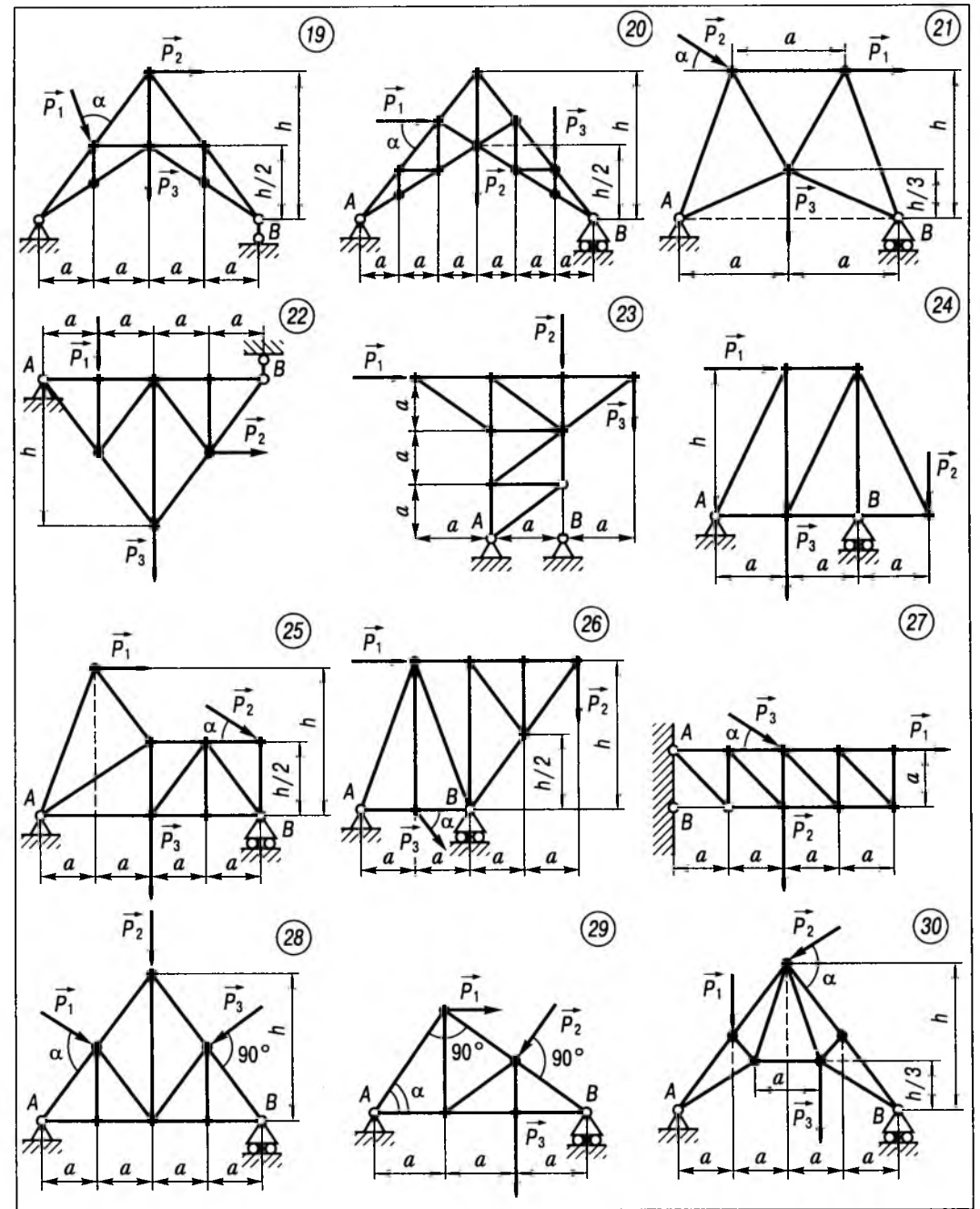


Рис. 3.23 (закінчення)

**АБСОЛЮТНО ТВЕРДЕ ТІЛО ПІД ДІЄЮ ДОВІЛЬНОЇ ПРОСТОРОВОЇ СИСТЕМИ СИЛ**

**§ 4.1. РІВНОВАГА СИСТЕМИ СИЛ, ДОВІЛЬНО РОЗМІЩЕНИХ У ПРОСТОРІ**

**4.1.1. Короткі теоретичні відомості**

Як відомо, довільну систему сил, що прикладені до абсолютно твердого тіла, можна звести до однієї сили  $\vec{R}$ , прикладеної в деякій фіксованій точці  $O$  (центр зведення), і до пари сил.

Сила  $\vec{R}$  дорівнює головному вектору системи сил, а момент пари сил  $\vec{M}_O$  — головному моменту сил:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i).$$

У випадку рівноваги системи сил головний вектор і головний момент цієї системи дорівнюють нулеві:

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M}_O = 0.$$

З цих векторних умов випливають аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил: алгебраїчні суми проєкцій усіх сил на три взаємно перпендикулярні осі та алгебраїчні суми моментів цих сил відносно трьох взаємно перпендикулярних осей дорівнюють нулеві, тобто

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i &= 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{xi} = 0; \\ \sum_{i=1}^n Y_i &= 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{yi} = 0; \\ \sum_{i=1}^n Z_i &= 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{zi} = 0. \end{aligned}$$

**4.1.2. Приклади розв'язування задач**

**Приклад 4.1.** Однорідна квадратна пластина  $ABCD$  вагою  $P = 5 \text{ Н}$  зі стороною  $a = 30 \text{ см}$  закріплена в точці  $A$  за допомогою сферичного шарніра (рис. 4.1). Сторона  $AB$  горизонтальна. У точці  $E$  пластина опирається на вістря. У точці  $H$  на пластину діє сила  $\vec{F}$ , паралельна стороні  $AB$ . Знайти реакції точок  $A, B, E$ , якщо  $CE = ED, BH = 10 \text{ см}$ ,  $F = 10 \text{ Н}$  і пластина утворює з горизонтальною площиною кут  $\alpha = 30^\circ$ .

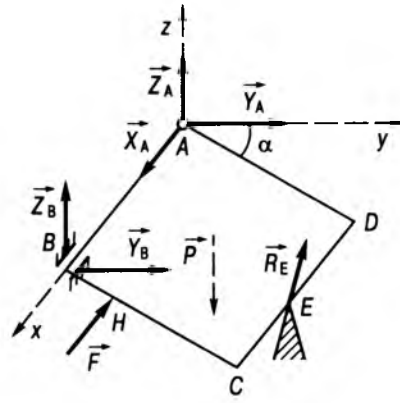


Рис. 4.1

Розв'язування: 1. Виділимо об'єкт рівноваги. У даній задачі це пластина  $ABCD$ .

2. Укажемо активні сили, що діють на пластину: сила ваги  $\vec{P}$ , прикладена в геометричному центрі пластини, і сила  $\vec{F}$ .

3. Визначимо в'язі, накладені на пластину. Ними є сферичний шарнір  $A$ , циліндричний шарнір  $B$  і вістря  $E$ .

4. Застосувавши аксіому про звільнення від в'язей, умовно в'язі відкидаємо, заміню-

ючи їхню дію на пластину реакціями. Вибираємо прямокутну декартову систему координат з початком у точці  $A$  так, як це показано на рис. 4.1. Реакція сферичного шарніра  $A$  невідома як за величиною, так і за напрямом, тому подаємо її у вигляді трьох невідомих складових  $X_A, Y_A, Z_A$ , спрямованих у додатних напрямках осей координат. Реакція циліндричного шарніра  $B$  лежить у площині, перпендикулярній до осі шарніра, тому її подамо у вигляді двох складових  $Y_B$  і  $Z_B$ . Реакція вістря  $R_E$  перпендикулярна до площини пластини  $ABCD$ .

5. Проводимо аналіз сил, що діють на пластину. Оскільки пластина звільнена від в'язей, то вона є вільним твердим тілом, що знаходиться в рівновазі під дією довільної просторової системи сил. Така система сил має шість аналітичних умов рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i &= 0, \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Z_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_{xi} &= 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{yi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{zi} = 0. \end{aligned}$$

6. Чи є статично визначуваною дана задача? У задачі шість алгебраїчних невідомих:  $X_A, Y_A, Z_A, Y_B, Z_B, R_E$ . Рівнянь рівноваги також шість. Отже, задача статично визначувана.

7. Складаємо рівняння рівноваги. Для зручності розв'язання задачі рекомендуємо спроектувати сили (рис. 4.1) на координатні площини  $Axz$  і  $Axy$

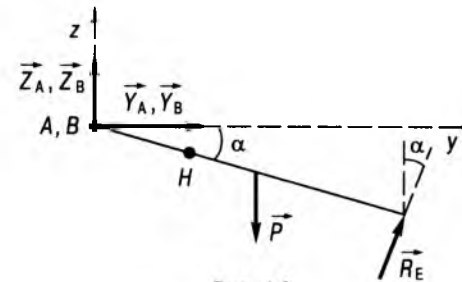


Рис. 4.2

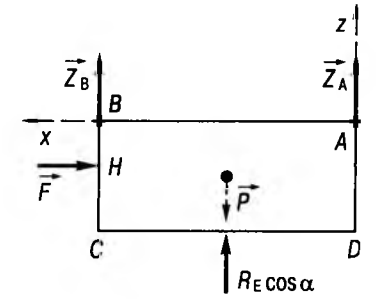


Рис. 4.3

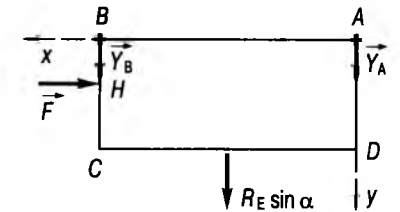


Рис. 4.4

(відповідно рис. 4.3, 4.4). Запишемо алгебраїчні суми проєкцій сил на координатні осі, прирівнявши їх до нуля. Одержуємо перші три рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n X_i = X_A - F = 0, \quad (4.1)$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = Y_A + Y_B + R_E \sin \alpha = 0, \quad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^n Z_i = Z_A + Z_B - P + R_E \cos \alpha = 0. \quad (4.3)$$

Щоб скласти рівняння моментів сил відносно координатних осей, згадаємо робоче правило. Для визначення моменту сили відносно осі треба:

- а) провести площину, перпендикулярну до цієї осі;
- б) спроектувати силу на площину;
- в) вважаючи побудовану проєкцію вектором, визначити її момент відносно точки перетину осі з цією площиною.

Розглянемо, наприклад, рис. 4.5:  $M_z(\vec{F}) = -F \cos \alpha \cdot h$ . Пояснити це можна так: якщо

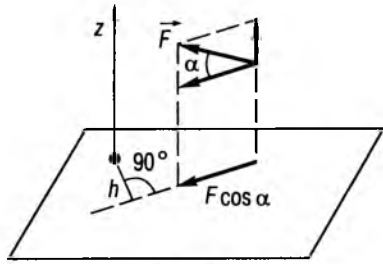


Рис. 4.5

розкласти силу на дві складові — одну паралельну осі, а другу перпендикулярну до неї, можна легко помітити, що обертального руху навколо осі може надати тільки складова, перпендикулярна до осі. Отже, тільки вона створить момент відносно цієї осі, рівний добутку даної сили на величину найкоротшої відстані її до осі. Знак моменту визначається напрямом наданого обертання: якщо з додатного напрямку осі  $Az$  обертання, спричинене силою, видно таким, що відбувається проти руху годинникової стрілки, то знак моменту додатний, якщо за годинниковою стрілкою, — то від'ємний. Якщо сила і вісь лежать в одній площині (паралельні чи перетинаються), момент сили відносно осі дорівнює нулеві.

Складемо рівняння моментів сил відносно осей координат. Відносно осі  $Ax$  створюють момент тільки сили  $\vec{P}$  і  $\vec{R}_E$ , тому що  $\vec{F}$  паралельна осі, а реакції  $\vec{R}_A$ ,  $\vec{R}_B$  перетинають вісь (див. рис. 4.2). Скористаємося робочим правилом: проведемо через середину  $AB$  площину, перпендикулярну до осі  $Ax$ . Сили  $\vec{P}$ ,  $\vec{R}_E$  виявляються такими, що лежать у цій площині. При цьому плече сили  $\vec{R}_E$  дорівнює довжині  $a$  сторони пластини, а сили  $\vec{P} - \frac{a}{2}$ . Маємо рівняння

$$\sum_{i=1}^n M_{xi} = R_E a - P \frac{a}{2} \cos \alpha = 0. \quad (4.4)$$

Складемо рівняння моментів сил відносно осі  $Ay$ . Щоб визначити момент сили  $\vec{R}_E$  відносно осі  $Ay$ , спроєкуємо силу на площину, перпендикулярну до цієї осі,  $R_{Ey} = R_E \cos \alpha$  (див. рис. 4.3), і помножимо її на найкоротшу відстань до осі  $\frac{a}{2}$ :

$$M_y(R_E) = -R_E \frac{a}{2} \cos \alpha.$$

Сила  $\vec{F}$  перпендикулярна до осі  $Ay$ , а плече її дорівнює  $BH \cdot \sin \alpha$ . Момент сили  $\vec{P}$  дорівнює  $P \frac{a}{2}$ , а  $M_y(Z_B) = -Z_B a$ . Моменти сил  $\vec{R}_A$ ,  $Y_B$  відносно осі  $Ay$  дорівнюють нулеві. Отже, маємо

$$\sum_{i=1}^n M_{yi} = -R_E \frac{a}{2} \cos \alpha + F \cdot BH \cdot \sin \alpha + P \frac{a}{2} - Z_B a = 0. \quad (4.5)$$

Спроєкувавши всі сили на площину  $Axy$  (рис. 4.4), складемо останнє рівняння:

$$\sum_{i=1}^n M_{zi} = Y_B a + F \cdot BH \cdot \cos \alpha + R_E \frac{a}{2} \sin \alpha = 0. \quad (4.6)$$

З шести складених рівнянь (4.1), (4.4), (4.5), (4.6), (4.2) і (4.3) знайдемо шість невідомих:

$$\begin{aligned} X_A &= F = 10 \text{ Н}, \\ R_E &= \frac{1}{2} P \cos \alpha = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 2,17 \text{ Н}, \\ Z_B &= -\frac{1}{2} R_E \cos \alpha + F \frac{BH}{a} \sin \alpha + \frac{P}{2} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 10 \cdot \frac{10}{30} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \approx 3,23 \text{ Н}, \\ Y_B &= -F \frac{BH}{a} \cos \alpha - \frac{1}{2} R_E \sin \alpha = \\ &= -10 \cdot \frac{10}{30} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2} \approx -3,43 \text{ Н}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_A &= -Y_B - R_E \sin \alpha = 3,43 - 2,17 \cdot \frac{1}{2} \approx 2,35 \text{ Н}, \\ Z_A &= -Z_B + P - R_E \cos \alpha = -3,23 + \\ &+ 5 - \frac{5\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,11 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Відповідь:  $X_A = 10 \text{ Н}$ ,  $Y_A = 2,35 \text{ Н}$ ,  $Z_A = -0,11 \text{ Н}$ ,  $Y_B = -3,43 \text{ Н}$ ,  $Z_B = 3,23 \text{ Н}$ ,  $R_E = 2,17 \text{ Н}$ .

Від'ємні знаки показують, що відповідні складові сил напрямлені протилежно до вказаних на рис. 4.1.

**Приклад 4.2.** Храпове колесо 1 і барабан 2 лебідки жорстко насаджені на вал  $AB$  завдовжки 0,8 м. Тягар  $M$  масою  $m = 300 \text{ кг}$  підвішено на тросі, який намотано на барабан.

Визначити опорні реакції підшипників  $A$  і  $B$ , а також зусилля  $\vec{S}$  у стопорній собачці  $ED$ , яка нахилена до горизонту під кутом  $\alpha = 60^\circ$ . Радіус барабана 2 дорівнює 0,1 м, радіус храпового колеса 1 дорівнює 0,2 м. Маса барабана разом із валом  $AB$   $m_1 = 200 \text{ кг}$ ,  $CA = BH = 0,1 \text{ м}$ ,  $HK = KC$ ,  $EC$  паралельна  $Bz$  (рис. 4.6).

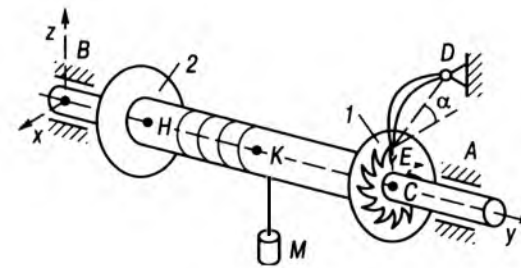


Рис. 4.6

**Розв'язування.** Розглядається рівновага вала  $AB$  разом із насадженими на нього барабаном і храповим колесом. Активні сили:  $m_1 \vec{g}$  прикладена на середині  $HC$  вала,  $m \vec{g}$  — вага тягара  $M$  є силою натягу троса.

Реакції в'язей: реакції циліндричних підшипників розкладені на дві складові кожна ( $X_A$ ,  $Y_A$ ;  $X_B$ ,  $Y_B$ ), вони напрямлені у додатний бік осей координат (рис. 4.7), реакція собачки  $ED$  напрямлена вздовж лінії  $ED$ . Реакція  $\vec{S}$  лежить у площині храпового колеса, тобто  $\vec{S} \perp Bz$ .

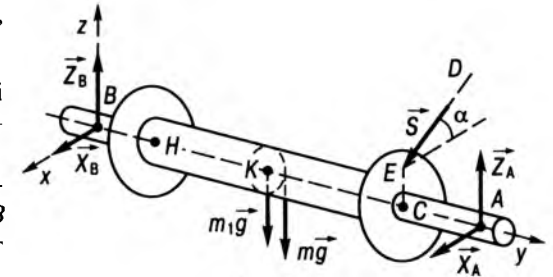


Рис. 4.7

Маємо п'ять алгебраїчних невідомих. Для просторової довільної системи сил можна скласти шість рівнянь рівноваги. Задача є статично означуваною.

Запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{xi} = X_A + X_B + S \cos \alpha = 0, \quad (4.7)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{yi} = 0, \quad (4.8)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{zi} = Z_A + Z_B - m_1 g - m g - S \sin \alpha = 0, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_{xi} &= -(m_1 + m) g \cdot BK - \\ &- S \sin \alpha \cdot BC + Z_A \cdot AB = 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{yi} = S \cos \alpha \cdot CE - m g \cdot 0,1 = 0, \quad (4.11)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{zi} = -S \cos \alpha \cdot BC - X_A \cdot AB = 0. \quad (4.12)$$

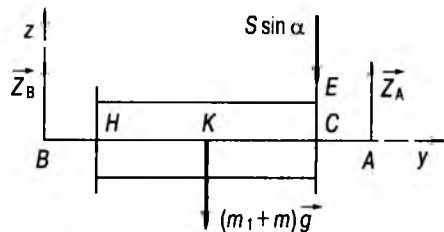


Рис. 4.8

При складанні формул (4.10), (4.11) і (4.12) застосовано рис. 4.8, 4.9 і 4.10.

Спочатку знаходимо зусилля  $S$  із рівняння (4.11):

$$S = \frac{mg \cdot 0,1}{0,2 \cos \alpha} = mg \approx 3000 \text{ Н.}$$

З рівняння (4.12) маємо

$$X_A = -\frac{S \cos \alpha \cdot BC}{AB} = -\frac{3000 \cdot 0,5 \cdot 0,7}{0,8} \approx -1312,5 \text{ Н,}$$

з рівняння (4.10)

$$Z_A = \frac{1}{AB} (S \sin \alpha \cdot BC + (m_1 + m)g \cdot BK) \approx 4773 \text{ Н.}$$

Далі  $Z_B \approx 2825 \text{ Н, } X_B \approx -187,5 \text{ Н.}$

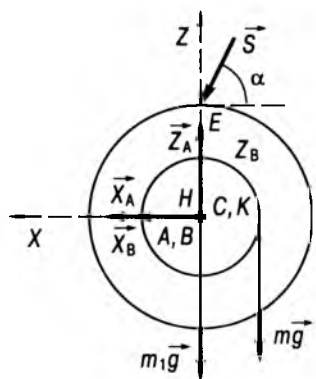


Рис. 4.9

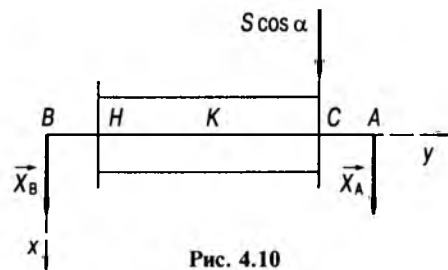


Рис. 4.10

**Приклад 4.3.** Прямокутна плита  $ABCD$  вагою  $P$  утримується в горизонтальному положенні за допомогою шістьох стрижнів 1, 2, 3, 4, 5, 6 і знаходиться в рівновазі. На плиту діє горизонтальна сила  $\vec{F}$ . Визначити реакції стрижнів, якщо  $P = 2 \text{ кН, } F = 6 \text{ кН, } a = 1 \text{ м,}$  стрижні невагомі,  $AB = DC = a, OD = a, BC = AD = 2a$  (рис. 4.11).

Розв'язування. Розглянемо рівновагу плити  $ABCD$ . На неї діють активні сили  $\vec{P}$  і  $\vec{F}$ . Звільнимось від в'язей, тобто подумки відкинемо стрижні, замінивши їх дію на плиту реакціями, кожна з яких напрямлена вздовж стрижня, оскільки стрижні ідеальні. Вважаємо всі стрижні розтягнутими, тобто всі реакції напрямлені в бік відкинутих стрижнів (рис. 4.12).

Отже, до плити прикладено довільно розташовану просторову систему сил. Можемо

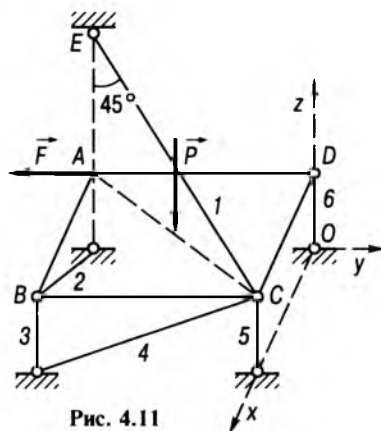


Рис. 4.11

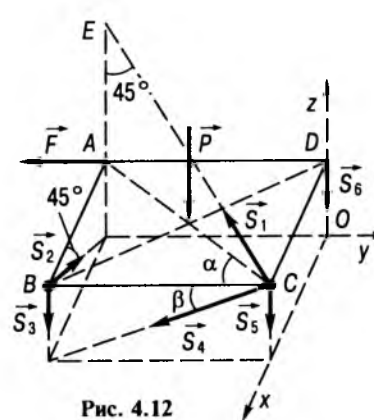


Рис. 4.12

скласти в цьому випадку шість рівнянь рівноваги; в задачі шість невідомих, тому задача статично визначувана. Система координат вказана на рис. 4.11 і 4.12, для зручності введено два кути  $\alpha$  і  $\beta$ . Запишемо

$$\sum_{i=1}^n F_{xi} = -S_2 \cos 45^\circ - S_1 \cos 45^\circ \sin \alpha = 0, \quad (4.13)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{yi} = -S_1 \cos 45^\circ \cos \alpha - S_4 \cos \beta - F = 0, \quad (4.14)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{zi} = -P + S_1 \cos 45^\circ - S_2 \cos 45^\circ - S_3 - S_4 \sin \beta - S_5 - S_6 = 0, \quad (4.15)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{xi} = Fa + Pa + S_1 \cos 45^\circ \cos \alpha \cdot a + S_2 \cos 45^\circ \cdot 2a + S_3 \cdot 2a + S_4 \cos \beta \cdot a = 0, \quad (4.16)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{yi} = P \frac{a}{2} - S_1 \cos 45^\circ \cdot a - S_1 \cos 45^\circ \times \sin \alpha \cdot a + S_3 \cdot a + S_4 \sin \beta \cdot a + S_5 \cdot a = 0, \quad (4.17)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{zi} = -S_1 \cos 45^\circ \cos \alpha \cdot a - S_2 \cos 45^\circ \cdot 2a - S_4 \cdot \cos \beta \cdot a = 0. \quad (4.18)$$

Згідно з рис. 4.12  $\alpha = \beta, \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

З рівнянь (4.14) і (4.18) маємо:

$$-S_1 \cos 45^\circ \cos \alpha - S_4 \cos \beta - F = 0,$$

$$-S_1 \cos 45^\circ \cos \alpha - S_4 \cos \beta - 2S_2 \cos 45^\circ = 0.$$

З цих двох рівнянь одержимо

$$-F + 2S_2 \cos 45^\circ = 0,$$

$$\text{або } S_2 = \frac{F}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \text{ кН.}$$

Стрижень 2 розтягнуто.

З рівняння (4.13) зусилля

$$S_1 = -\frac{S_2}{\sin \alpha} = -\frac{6}{\sqrt{2}} \sqrt{5} = -3\sqrt{10} \text{ кН.}$$

Стрижень 1 стиснуто, оскільки  $S_1 < 0$ .

З рівняння (4.14) отримаємо

$$S_4 = -\frac{1}{\cos \beta} (F + S_1 \cos 45^\circ \cos \alpha) = -\frac{\sqrt{5}}{2} \left( 6 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \right) = 0.$$

з рівняння (4.16) –

$$S_3 = -\frac{1}{2} (F + P + S_1 \cos 45^\circ \cos \alpha + 2S_2 \cos 45^\circ) = -\frac{8}{2} = -4 \text{ кН.}$$

Стрижень 3 стиснуто.

З рівняння (4.17) знаходимо

$$S_5 = -S_3 - \frac{P}{2} + S_1 \cos 45^\circ (1 + \sin \alpha) = -3\sqrt{5} \text{ кН.}$$

Стрижень 5 стиснуто.

З рівняння (4.15) зусилля

$$S_6 = -P + S_1 \cos 45^\circ - S_2 \cos 45^\circ - S_3 - S_5 = -1 \text{ кН.}$$

Стрижень 6 стиснуто.

### 4.1.3. Задачі для самостійного розв'язування

4.1. Однорідна кришка ящика вагою 100 Н утримується в рівновазі за допомогою вертикального мотузка  $EF$  (рис. 4.13). Знайти реакції завісів  $A$  і  $B$ , якщо  $CE = 0,2$  м,  $DE = 0,8$  м.

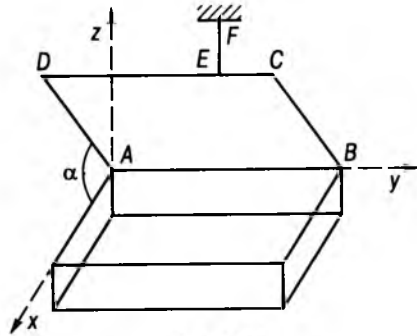


Рис. 4.13

Відповідь:  $R_A = 40$  Н,  $R_B = 10$  Н.

4.2. Мотузок сходять зі шківа  $C$  по дотичній, що утворює з вертикаллю кут  $\alpha = \arcsin 0,6$  (рис. 4.14). Радіус шківа  $R = 0,2$  м,  $AB = 0,3$  м,  $CD = 0,5$  м,  $AE = 0,6$  м,  $BC = 0,4$  м. Тертям знехтувати. Знайти вагу тягаря  $P_1$  і реакції підшипників  $B$  і  $D$ , якщо вага тягаря  $P_2 = 270$  Н. Система знаходиться в рівновазі.

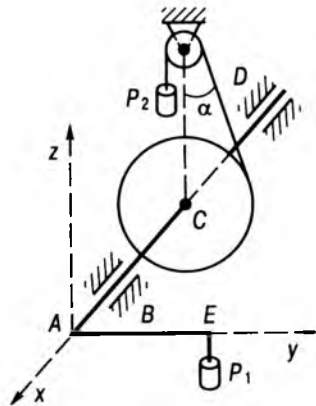


Рис. 4.14

Відповідь:  $P_1 = 90$  Н,  $Y_B = 90$  Н,  $Z_B = 0$ ,  $Y_D = 72$  Н,  $Z_D = -126$  Н.

4.3. На колінчастий стрижень  $ABCD$  (рис. 4.15) діє сила  $P = 8,5$  Н, яка за напрямом збігається з діагоналлю  $DE$  бічної грані прямої призми:  $AB = 0,09$  м,  $BC = 0,08$  м,  $CD = 0,16$  м,  $AE = 0,04$  м. Знайти реакцію закріплення  $A$ . Вагою стрижня знехтувати.

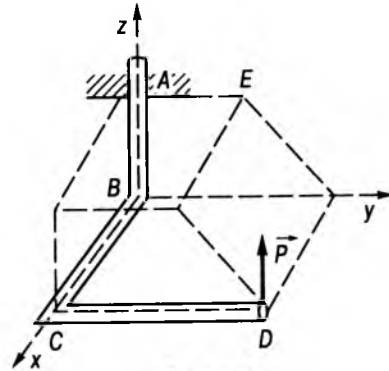


Рис. 4.15

Відповідь:  $X_A = 4$  Н,  $Y_A = 6$  Н,  $Z_A = -4,5$  Н,  $M_{Ax} = -0,18$  Н · м,  $M_{Ay} = 0$ ,  $M_{Az} = -0,16$  Н · м.

4.4. Стрижні  $AB$  і  $BC$  однакової довжини і однакової ваги  $P$  (рис. 4.16) з'єднані шарніром в точці  $B$  під прямим кутом і знаходяться в рівновазі. Стрижні прикріплено до стіни в точках  $A$  і  $C$  також шарнірами. Трос  $BD$  прикріплено до стіни в точці  $D$ , яка зна-

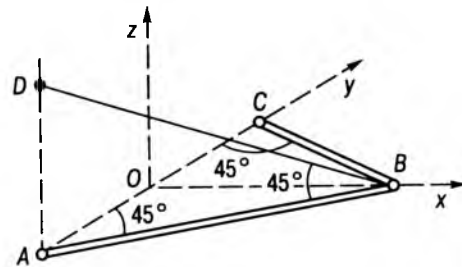


Рис. 4.16

ходиться на одній вертикалі з точкою  $A$ . Стрижні  $AB$  і  $BC$  горизонтальні, утворюють із стіною кут  $45^\circ$ . Трос утворює з горизонтом кут  $45^\circ$ . Знайти реакції шарнірів  $A$ ,  $C$  і натяг  $T$  троса  $BD$ .

Відповідь:  $T = P\sqrt{2}$ ,  $X_A = Y_A = \frac{P\sqrt{2}}{2}$ ,  $Z_A = Z_C = \frac{P}{2}$ ,  $X_C = Y_C = 0$ .

4.5. Прямокутна плита  $ABCD$  (рис. 4.17) вагою  $P$  знаходиться у рівновазі в горизонтальному положенні. У точці  $A$  сферичний шарнір, стрижні  $CK$ ,  $CN$  і трос  $BS$  невагом. Знайти реакцію  $R_A$  шарніра  $A$ , зусилля  $T_1$ ,  $T_2$  у стрижнях  $CN$  і  $CK$ , натяг  $T_3$  троса. У точці  $B$  підвішено тягар  $M$  вагою  $Q$ .  $CD = 3a$ ,  $CB = 4a$ ,  $CE = 5a$ . Систему координат зображено на рис. 4.17.

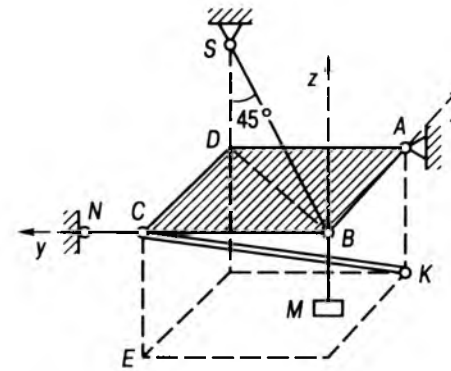


Рис. 4.17

Відповідь:  $T_1 = -\frac{4}{5}Q$ ,  $T_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}P$ ,  $T_3 = Q\sqrt{2}$ ,  $X_A = -\frac{3}{5}Q + \frac{3}{10}P$ ,  $Y_A = -\frac{2}{5}P$ ,  $Z_A = \frac{P}{2}$ . Стрижні  $CN$  і  $CK$  стиснуті.

4.6. Колінчастий вал може обертатись навколо осі  $Ax$  у підшипниках  $A$  і  $B$  (рис. 4.18). На коліно  $DEGF$  діє сила  $P = 3000$  Н, яка утворює з вертикаллю кут  $\alpha = 10^\circ$ . Сила розташована в площині, перпендикулярній до осі  $Ax$ . Знайти момент  $M$  пари сил, яку по-

трібно прикласти до вала, щоб він знаходився у рівновазі, а також реакції підшипників  $A$  і  $B$ , якщо  $\varphi = 60^\circ$ ,  $DE = 0,2$  м,  $AD = DF = FB = 0,4$  м,  $EC = CG$ .

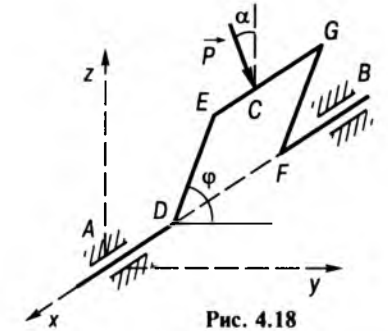


Рис. 4.18

Відповідь:  $M = 386$  Н · м,  $Y_A = Y_B = -261$  Н,  $Z_A = Z_B = 1480$  Н.

4.7. Однорідна пластина вагою 900 Н (рис. 4.19) у формі рівностороннього трикутника закріплена за допомогою петель  $A$  і  $B$  на горизонтальній осі, а точкою  $C$  опирається на гладеньку вертикальну стіну, розмішену в площині  $Oxz$ . Пластина утворює з горизонтом кут  $30^\circ$ . Знайти реакції петель  $A$  і  $B$  та стіни в точці  $C$ . Центр ваги пластини знаходиться в точці, де перетинаються медіани трикутника.

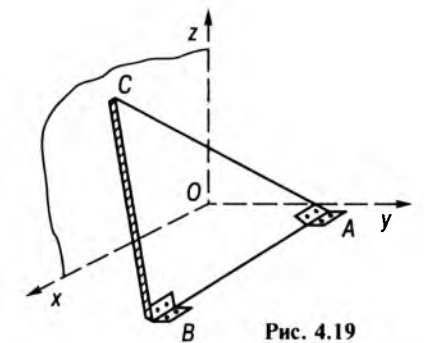


Рис. 4.19

Відповідь:  $N_C = 520$  Н,  $Y_A = Y_B = -200$  Н,  $Z_A = Z_B = 450$  Н.

4.8. На барабан вагою 160 Н намотано якірний ланцюг, натяг якого  $T = 2000$  Н (рис. 4.20). Система зрівноважена силою  $\vec{F}$ , яка прикладена до шестірни  $C$  і напрямлена по дотичній до шестерні паралельно  $\vec{T}$ . Знайти силу  $\vec{F}$ , реакції підп'ятника  $A$  і підшипника  $B$ , якщо радіус барабана  $r_1 = 0,2$  м, радіус шестірни  $r_2 = 0,4$  м, відстань  $AC = 0,1$  м,  $AB = 1,2$  м, лінія дії сили  $\vec{T}$  знаходиться вище площини шестірни на  $0,4$  м.

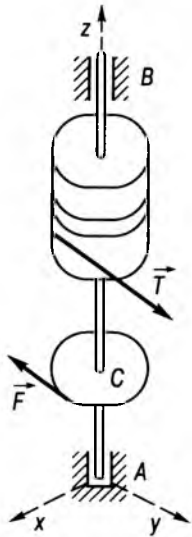


Рис. 4.20

Відповідь:  $F = 1000$  Н,  $X_A = X_B = 0$ ,  $Y_A = -250$  Н,  $Y_B = -750$  Н,  $Z_A = 160$  Н.

4.9. Колінчастий вал може обертатись у підшипниках  $A$  і  $B$  навколо горизонтальної осі  $Ax$  (рис. 4.21). На кінці  $C$  на вал насаджено шестірню радіуса  $R = 0,2$  м. В центрі  $D$  шийки горизонтального коліна прикладено силу  $\vec{F}$  під кутом  $30^\circ$  до вертикалі. Сила  $\vec{F}$  розташована в площині, паралельній площині  $Ayz$ .

Знайти силу  $Q$ , яка паралельна  $Ay$  і діє на шестірню, а також реакції підшипників, якщо  $F = 2000$  Н,  $ED = 0,15$  м,  $a = 0,15$  м,  $b = 0,2$  м,  $c = 0,25$  м.

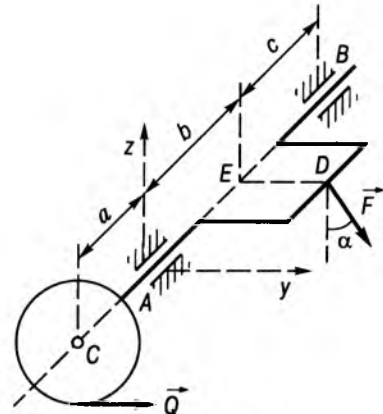


Рис. 4.21

Відповідь:  $Q = 1298$  Н,  $Y_A = -2290$  Н,  $Z_A = 962$  Н,  $Y_B = -8$  Н,  $Z_B = 768$  Н.

4.10. На рис. 4.22 показано схему механізму нахилу маніпулятора. Знайти реакції

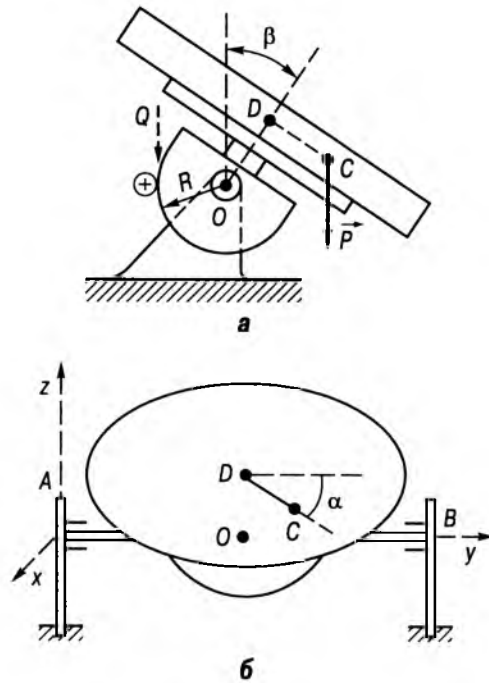


Рис. 4.22

опорних цапф\*  $A$  і  $B$  обертальної траверси\*\*, а також потрібне для рівноваги системи колоне зусилля  $Q$  ведучої шестірни, яка розміщена на одному горизонтальному рівні з цапфами у вертикальній площині і ділить відстань навпіл. Вага виробу  $P$ . Реакції опор  $A$  і  $B$  та зусилля  $Q$  визначити як функції кутів  $\alpha$  і  $\beta$ , якщо  $P = 5000$  Н,  $AB = 1$  м,  $OD = 0,6$  м,  $DC = l = 0,02$  м,  $R = 0,3$  м.

Відповідь:  $X_A = X_B = 0$ ,

$$Q = \frac{10^4}{3} (30 \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \text{ Н,}$$

\* Цапфа — опорна частина осі або вала. Цапфу, розміщену на кінці вала, називають шипом, а посередині — шийкою.

\*\* Траверса — горизонтальна балка, яка опирається на вертикальні стояки.

$$Z_A = 2500(1 + 2 \sin \beta + 0,06 \sin \alpha \cos \beta - 0,04 \sin \alpha) \text{ Н.}$$

$$Z_B = 2500(1 + 2 \sin \beta + 0,06 \sin \alpha \cos \beta + 0,04 \sin \alpha) \text{ Н.}$$

#### 4.1.4. Розрахункові завдання "Визначення реакцій опор плит"

Визначити реакції опор плити вагою  $P$ , яка є однорідною пластиною. Схеми навантажень плит для різних варіантів показано на рис. 4.23, а розміри та зовнішні навантаження вказано у табл. 4.1.

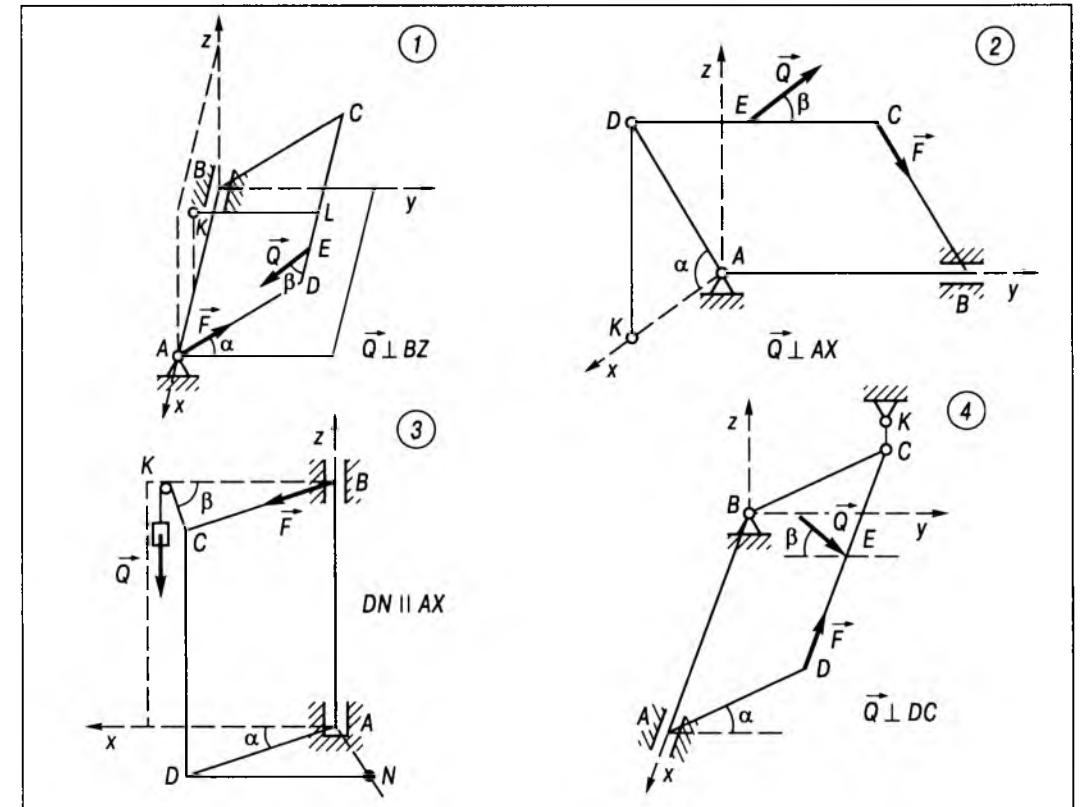


Рис. 4.23 (початок)



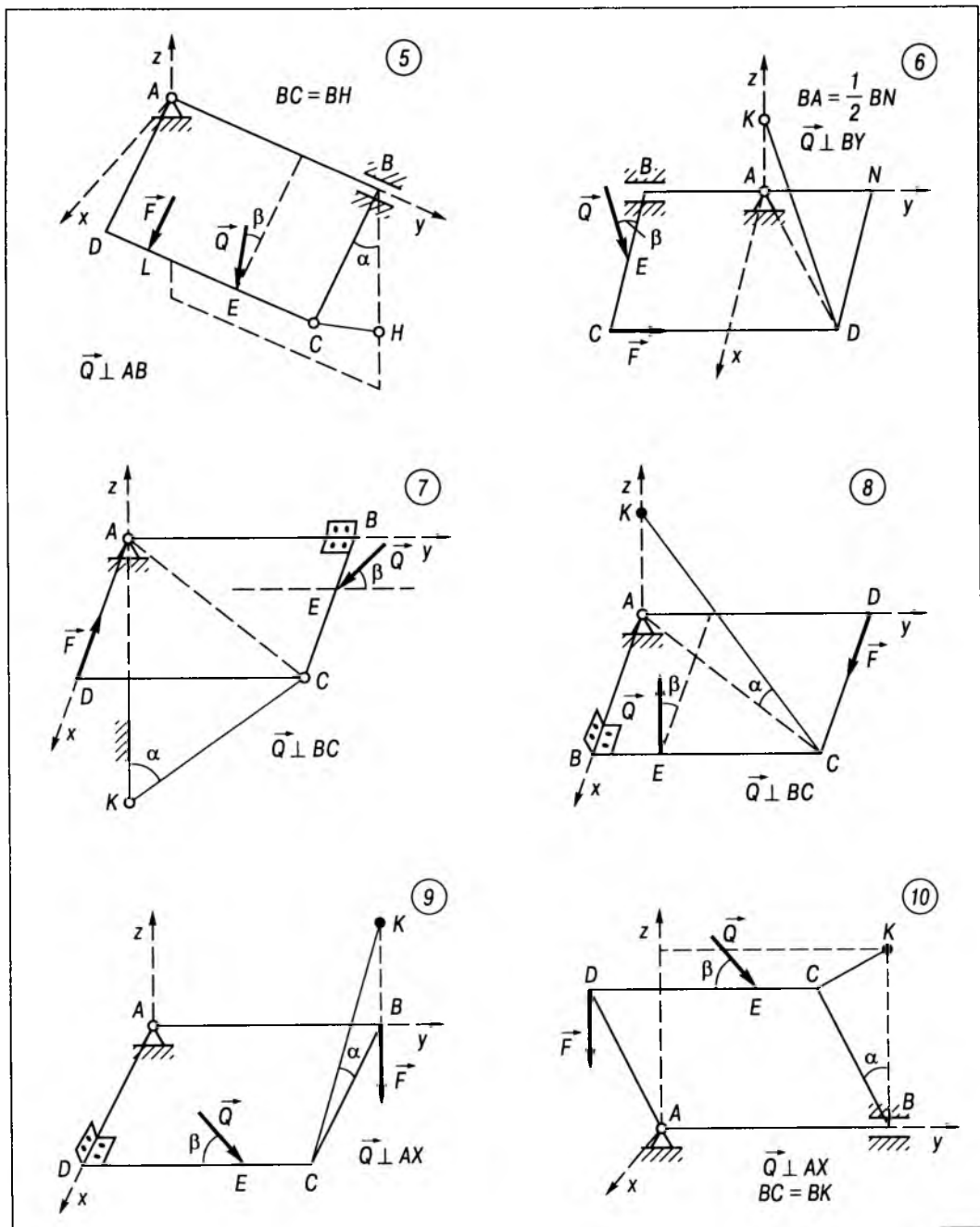


Рис. 4.23 (продовження)

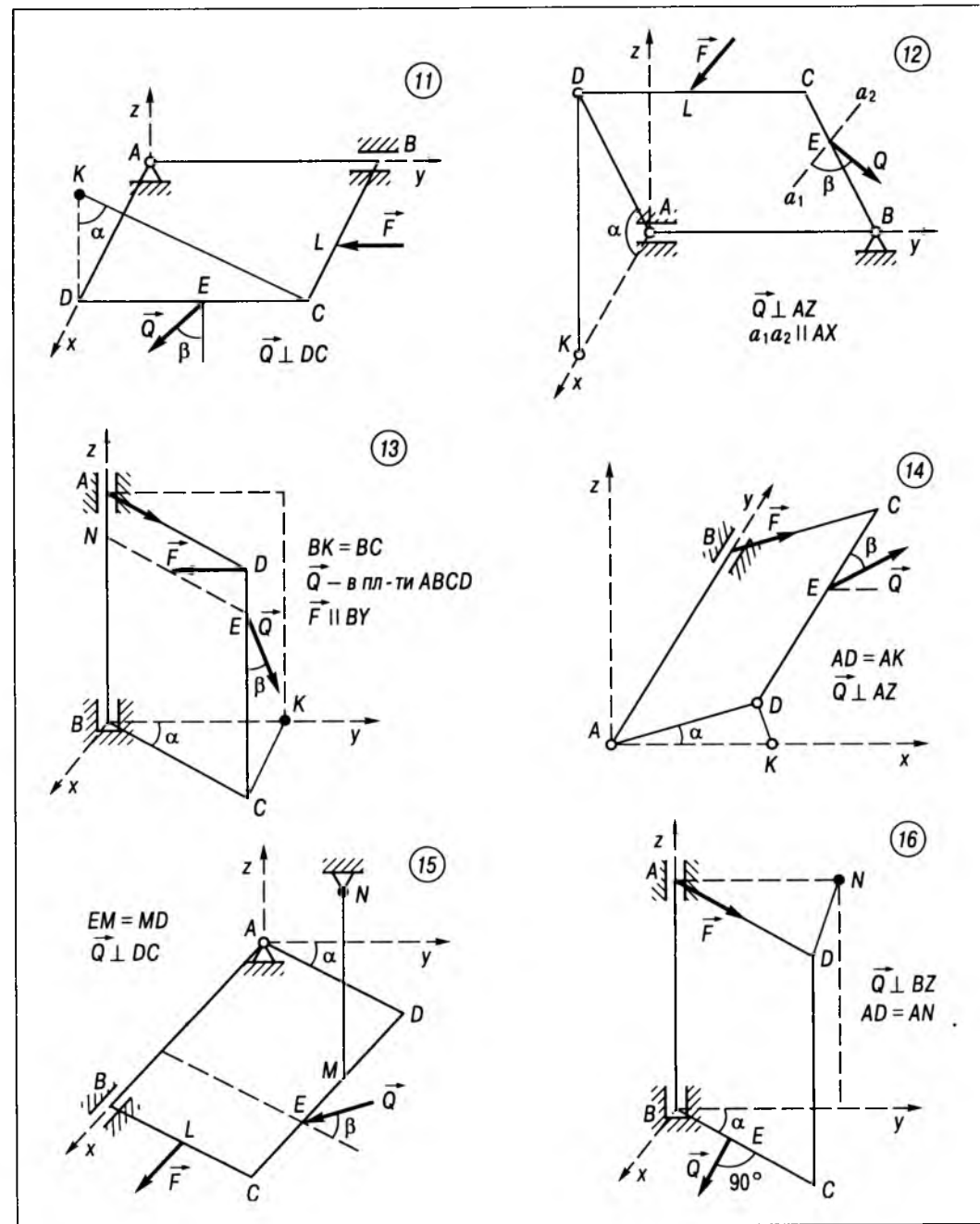


Рис. 4.23 (продовження)

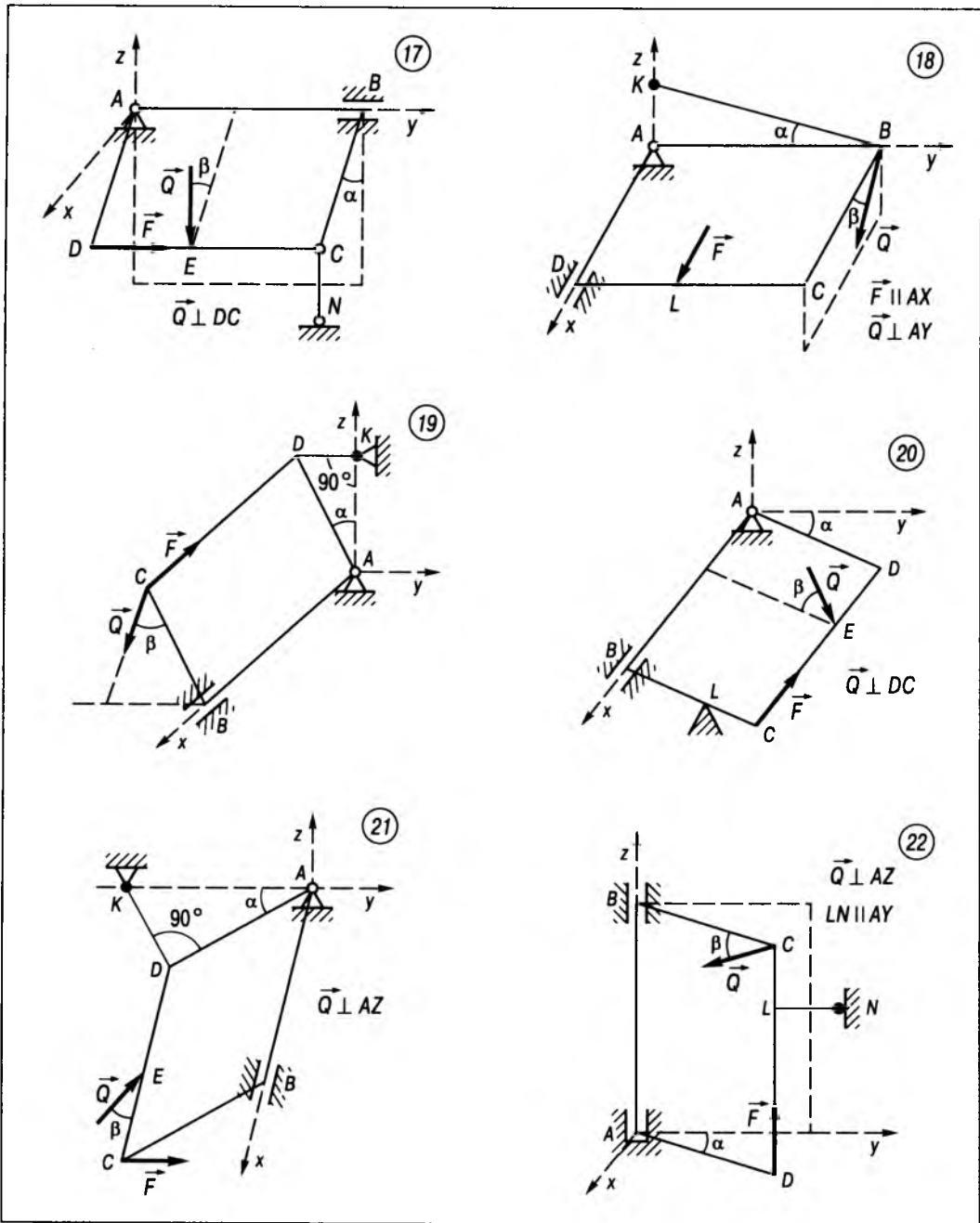


Рис. 4.23 (продовження)

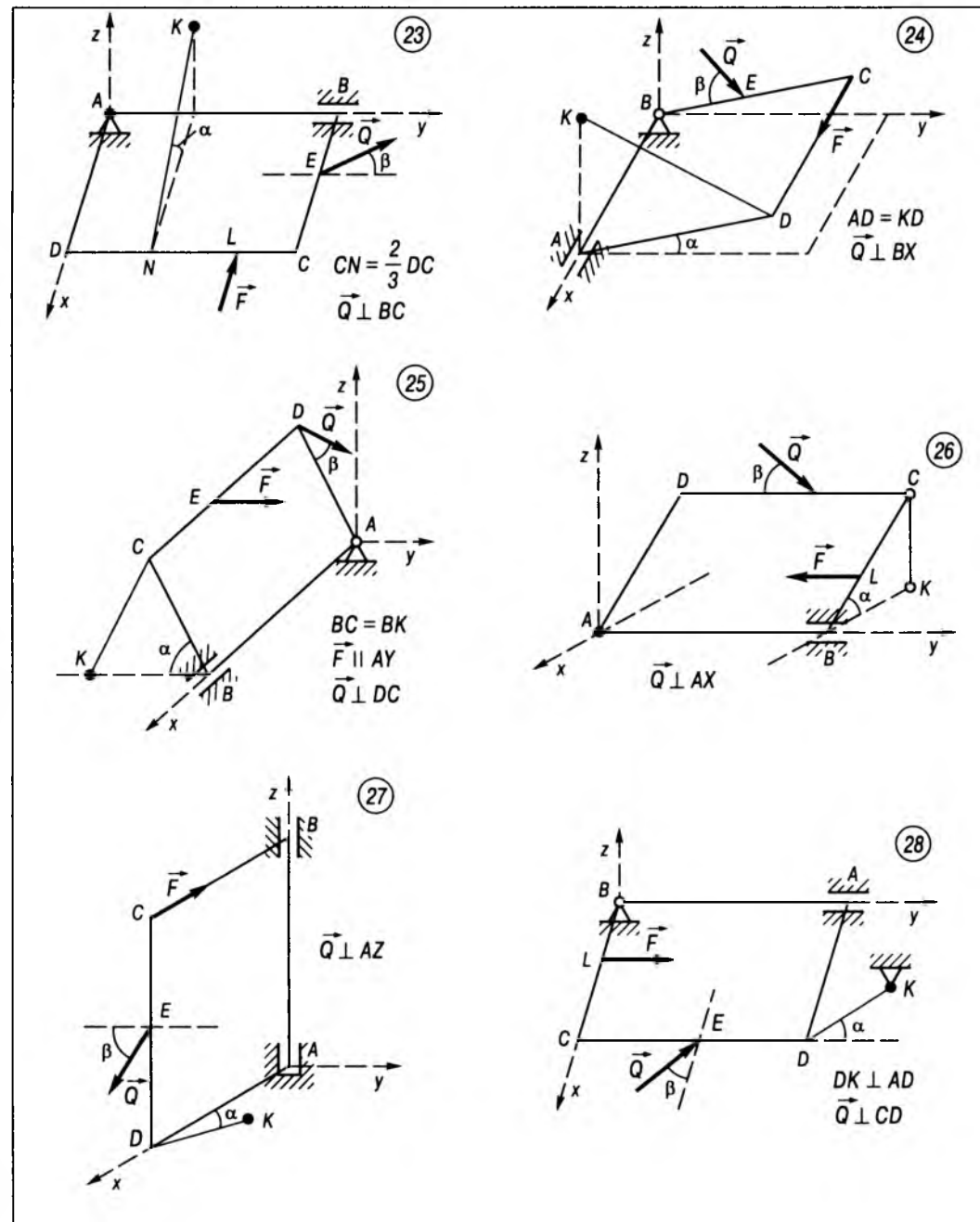


Рис. 4.23 (продовження)

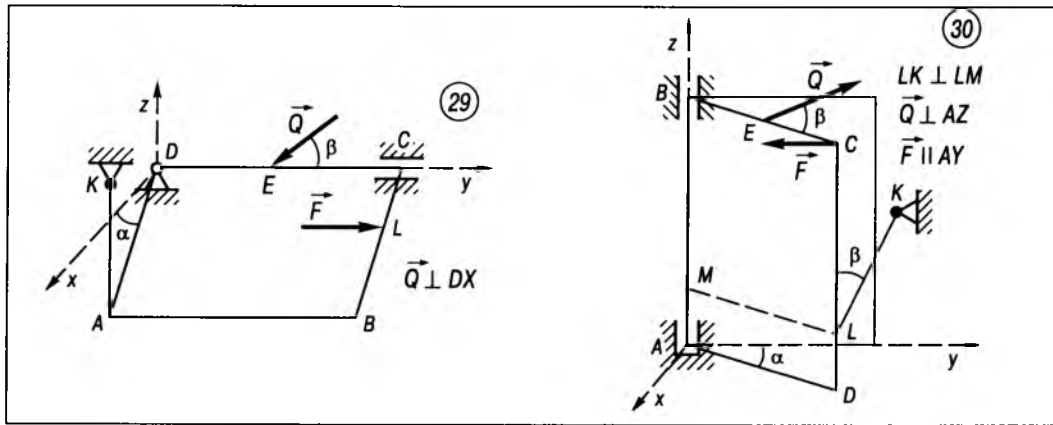


Рис. 4.23 (закінчення)

Таблиця 4.1

Номер варіанта	P, кН	F, кН	Q, кН	AB, м	BC, м	CE, м	CL, м	α, град	β, град	Номер варіанта	P, кН	F, кН	Q, кН	AB, м	BC, м	CE, м	CL, м	α, град	β, град
1	6	12	10	8	6	4	2	30	45	16	15	8	10	10	6	4	-	60	-
2	10	8	14	6	4	1	-	60	15	17	8	6	12	9	6	5	-	30	45
3	12	6	9	10	8	-	-	45	30	18	12	9	16	8	5	-	6	15	30
4	5	10	8	12	8	3	-	75	60	19	9	10	12	6	4	-	-	45	60
5	7	9	15	7	5	3	6	60	15	20	10	12	15	9	6	6	2	60	45
6	15	8	10	10	6	4	-	-	60	21	6	12	10	8	6	4	-	30	45
7	8	6	12	9	6	4	-	30	45	22	10	8	14	6	4	-	2	60	15
8	12	9	16	5	8	6	-	15	30	23	12	6	9	9	8	6	2	45	30
9	9	10	12	6	4	1	-	45	60	24	5	10	8	12	15	8	-	15	60
10	10	12	15	9	6	3	-	60	45	25	7	9	15	7	5	3	-	60	15
11	6	12	10	8	6	4	2	30	45	26	15	8	10	10	6	4	4	30	60
12	10	8	14	6	4	2	-	60	15	27	8	6	12	9	6	4	-	30	45
13	12	6	9	10	8	8	-	45	30	28	12	9	16	8	5	6	4	15	30
14	5	10	8	12	8	3	-	75	60	29	9	10	12	6	4	3	1	45	60
15	7	9	15	7	5	3	2	60	15	30	10	12	15	9	6	3	8	30	45

## § 4.2. ЗВЕДЕННЯ СИСТЕМ СИЛ ДО НАЙПРОСТІШОГО ВИГЛЯДУ

### 4.2.1. Короткі теоретичні відомості

Зведення просторової системи сил, прикладених до твердого тіла, до найпростішого вигляду полягає у знаходженні однієї сили і однієї пари сил, які є статично еквівалентними цій системі. Шукана сила дорівнює головному вектору  $\vec{F}$  просторової системи

сил, прикладеному в довільно вибраному центрі зведення  $O$ . Пара сил має момент  $\vec{M}_O$ , рівний головному моменту системи сил відносно цього ж центра зведення  $O$ .

Головний вектор  $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  не залежить від вибору центра зведення і є *першим (векторним) статичним інваріантом*  $I_1 = \vec{F}$ .

Головний момент  $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i)$  залежить від вибору центра зведення  $O$ , але

його проекція на напрям головного вектора  $\vec{F}$ , тобто  $M_O \cos(\widehat{\vec{M}_O, \vec{F}})$ , не залежить від вибору центра зведення. Цю проекцію називають *другим (скалярним) статичним інваріантом* даної системи сил (або  $I_2 = \vec{F} \cdot \vec{M}_O$ ).

Можливі результати зведення просторової системи сил до найпростішого вигляду наведено в табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Головний вектор $\vec{F}$	Головний момент $\vec{M}_O$	Другий статичний інваріант $I_2 = \vec{F} \cdot \vec{M}_O$	Вид зведення
$\vec{F} \neq 0$	$\vec{M}_O = 0$		Рівнодійна $\vec{F}$
$\vec{F} = 0$	$\vec{M}_O \neq 0$	$\vec{F} \cdot \vec{M}_O = 0$	Пара сил з моментом $\vec{M}_O$
$\vec{F} = 0$	$\vec{M}_O = 0$		Рівновага
$\vec{F} \neq 0$	$\vec{M}_O \neq 0$	$\vec{F} \cdot \vec{M}_O = 0$	Рівнодійна, яка паралельна $\vec{F}$ і прикладена в точці $O_1$
$\vec{F} \neq 0$	$\vec{M}_O \neq 0$	$\vec{F} \cdot \vec{M}_O \neq 0$	Динама (силовий гвинт) з силою $\vec{F}$ і парою сил з моментом $\vec{M}_{O_1}$

У табл. 4.2  $M_{O_1} = M_O \cos(\widehat{\vec{M}_O, \vec{F}})$ ;  $O_1$  — новий центр зведення, положення якого визначає довжина відрізка  $OO_1 = M_O \times \frac{\sin(\widehat{\vec{M}_O, \vec{F}})}{F}$ . Він перпендикулярний до

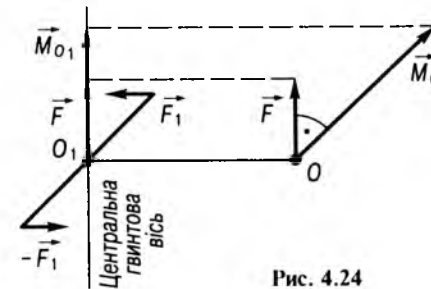


Рис. 4.24

площини, в якій розміщено головний вектор  $\vec{F}$  і головний момент  $\vec{M}_O$  (рис. 4.24).

*Динама* — це сукупність сили  $\vec{F}$  і пари сил  $(\vec{F}_1 - \vec{F}_1)$ , момент якої  $\vec{M}_{O_1}$  спрямований вздовж лінії дії цієї сили (рис. 4.25).

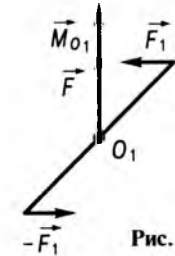


Рис. 4.25

Пряму, що проходить через точку  $O_1$ , вздовж якої спрямовані вектори  $\vec{F}$  і  $\vec{M}_{O_1}$ , називають *центральною гвинтовою віссю*.

### 4.2.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 4.4.** До якого найпростішого вигляду зводиться система сил, якщо її головний вектор  $\vec{F} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$  (Н), а головний момент відносно початку координат  $\vec{M}_O = 8\vec{j} + 10\vec{k}$  (Н · м)?

Розв'язування. За умовою задачі відомі проєкції на осі координат головного вектора ( $F_x = 4$  Н;  $F_y = 3$  Н;  $F_z = 0$ ) і головного моменту ( $M_{Ox} = 0$ ;  $M_{Oy} = 8$  Н · м;  $M_{Oz} = 10$  Н · м), тому можна визначити головний вектор і головний момент даної системи сил:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 5 \text{ Н} \neq 0;$$

$$M_O = \sqrt{M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = 2\sqrt{41} \text{ Н} \cdot \text{м} \neq 0.$$

Оскільки головний вектор і головний момент відмінні від нуля, то потрібно обчислити другий статичний інваріант:

$$\vec{F} \cdot \vec{M}_O = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 8 + 0 \cdot 10 = 24 \text{ Н}^2 \cdot \text{м} \neq 0.$$

Отже, дана система сил зводиться до динами (силового гвинта) з головним вектором  $F = 5$  Н і головним моментом

$$M_{O_1} = M_O \cos(\widehat{\vec{M}_O, \vec{F}}) = \frac{\vec{F} \cdot \vec{M}_O}{F} =$$

$$= \frac{24}{5} = 4,8 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

спрямованими вздовж центральної гвинтової осі, яка паралельна лінії дії головного вектора  $\vec{F}$  і проходить через точку  $O_1$ .

Положення цієї точки визначають за довжиною відрізка

$$OO_1 = M_O \sin(\widehat{\vec{M}_O, \vec{F}}) / F,$$

де  $\sin(\widehat{\vec{M}_O, \vec{F}}) = \frac{|\vec{F} \cdot \vec{M}_O|}{FM_O}$ , або

$$\cos(\widehat{\vec{M}_O, \vec{F}}) = \frac{\vec{F} \cdot \vec{M}_O}{FM_O} = \frac{24}{5 \cdot 2\sqrt{41}} =$$

$$= \frac{2,4}{\sqrt{41}} \Rightarrow \sin(\widehat{\vec{M}_O, \vec{F}}) = \sqrt{1 - \frac{2,4^2}{41}};$$

$$OO_1 = \frac{2\sqrt{41} \cdot 2\sqrt{8,81}}{5\sqrt{41}} = 0,8\sqrt{8,81} = 2,37 \text{ м}.$$

Запишемо рівняння центральної гвинтової осі. Оскільки  $\vec{F}$  і  $\vec{M}_O$  паралельні, то  $\vec{M}_{O_1} = a\vec{F} = M_O - OO_1 \times \vec{F}$ , де  $a = \text{const}$ . Тоді в скалярно-аналітичній формі

$$M_{O_1x} = aF_x, \quad M_{O_1y} = aF_y, \quad M_{O_1z} = aF_z,$$

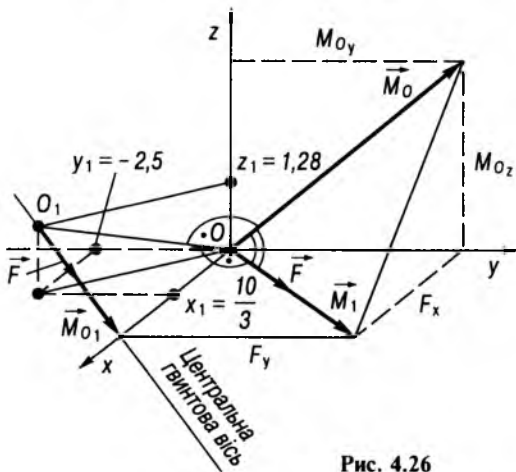


Рис. 4.26

або

$$\frac{M_{Ox} - (yF_z - zF_y)}{F_x} = \frac{M_{Oy} - (zF_x - xF_z)}{F_y} =$$

$$= \frac{M_{Oz} - (xF_y - yF_x)}{F_z} \Rightarrow \frac{3z}{4} = \frac{8-4z}{3} =$$

$$= \frac{10-3x+4y}{0} \Rightarrow 25z = 32; \quad 3x-4y = 10.$$

Отже, центральна гвинтова вісь — це пряма, яку отримуємо внаслідок перетину площин  $z = 1,28$  і  $y = 0,75x - 2,5$  (рис. 4.26).

**Приклад 4.5.** До невагомої пластини  $AOBD$  (рис. 4.27) прикладено сили  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  і  $\vec{F}_3$  паралельно осі  $Oz$ , причому  $F_3 = 2F_1 = 4F_2 = 2$  Н. Визначити відстань  $a$ , при якій система сил зводиться до рівнодійної сили, прикладеної у точці  $O$ , якщо відстань  $b = 2$  м;  $c = 1$  м.

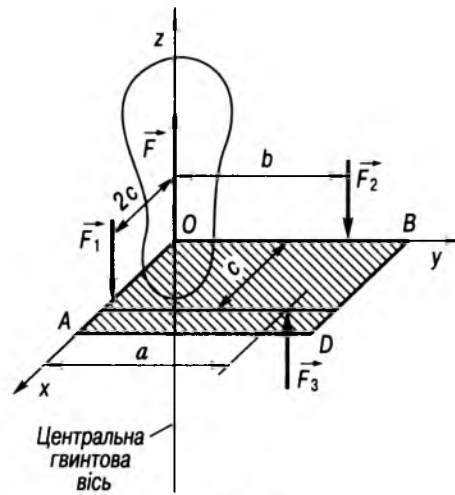


Рис. 4.27

Розв'язування. Щоб система сил зводилась до рівнодійної, прикладеної у точці  $O$ , потрібно, щоб головний момент  $\vec{M}_O$  та другий статичний інваріант  $I_2 = \vec{F} \cdot \vec{M}_O$  дорівнювали нулеві, а головний вектор  $\vec{F} \neq 0$ .

Визначимо проекції головного вектора  $\vec{F}$  і головного моменту  $\vec{M}_O$  на осі. Оскільки  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  паралельні осі  $Oz$ , то  $F_x = 0$ ,  $F_y = 0$ ,  $F_z = F_3 - F_1 - F_2 = (2 - 1 - 0,5) = 0,5$  Н,  $M_x = F_3a - F_2b = (2a - 0,5 \cdot 2)$  Н·м;  $M_y = F_1 \cdot 2c - F_3c = (1 \cdot 2 - 2 \cdot 1) = 0$ ,  $M_z = 0$ . Тоді головний вектор  $F = F_z = 0,5$  Н  $\neq 0$ ; головний момент  $M = M_x = (2a - 1) = 0 \Rightarrow a = 0,5$  м, а другий статичний інваріант  $I_2 = \vec{F} \cdot \vec{M}_O = F_x M_x + F_y M_y + F_z M_z = 0$ .

Отже, система сил зводиться до рівнодійної  $0,5$  Н (рис. 4.27), прикладеної у точці  $O$ , якщо сила  $\vec{F}_3$  знаходиться на відстані  $0,5$  м від осі  $Ox$ .

**Приклад 4.6.** Визначити модуль сили  $\vec{F}_3$ , за якого система трьох сил  $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\}$ , що прикладена до куба, зводиться до пари сил, у разі, коли відомо, що  $F_2 = 2F_1 = 10$  Н (рис. 4.28).

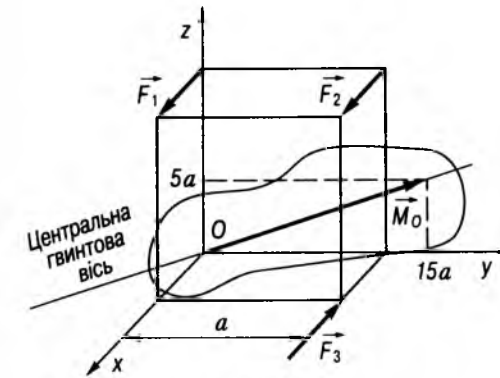


Рис. 4.28

Розв'язування. Система сил може бути зведена до пари сил, якщо головний вектор  $F = F_1 + F_2 - F_3 = 0 \Rightarrow F_3 = F_1 + F_2$  або  $F_3 = F_1 + F_2 = 15$  Н, а головний момент не дорівнює нулеві:

$$M_{Ox} = 0, \quad M_{Oy} = (F_1 + F_2)a = 15a \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{Oz} = (F_3 - F_2)a = 5a \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Тоді  $M_O = \sqrt{M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = 5a\sqrt{10}$  Н·м  $\neq 0$ . Отже, дану систему сил можна звести до пари сил, якщо сила  $F_3 = 15$  Н, а момент  $M_O = 5a\sqrt{10}$  Н·м і розмішений у площині  $Oyz$  (рис. 4.28). Напрямок моменту пари збігається з напрямком центральної гвинтової осі, а точка  $O$  є точкою зведення.

**Приклад 4.7.** На якій відстані  $OA$  від точки  $O$  розмішений головний вектор системи сил  $F = 8$  Н, якщо він і головний момент  $M_O = 26$  Н·м перпендикулярні один до одного (рис. 4.29)?



Рис. 4.29

Розв'язування. Дана система сил зводиться до рівнодійної, тому що сила  $F = 8$  Н  $\neq 0$  — головний вектор,  $M_O = 26$  Н·м  $\neq 0$  — головний момент, а другий статичний інваріант  $\vec{F} \cdot \vec{M}_O = FM_O \times \cos(\widehat{\vec{M}_O, \vec{F}}) = 8 \cdot 26 \cos 90^\circ = 0$ . При цьому центральна гвинтова вісь паралельна головному вектору  $\vec{F}$  і знаходиться на відстані

$$OA = \frac{M_O \sin(\widehat{\vec{M}_O, \vec{F}})}{F} = \frac{26 \sin 90^\circ}{8} = 3,25 \text{ м},$$

перпендикулярній до площини, в якій розміщені головний вектор  $\vec{F}_O$  і головний мо-

мент  $\vec{M}_O$ , і зміщена вправо, оскільки головний вектор  $\vec{F}$  повинен повертатись відносно старого центра зведення (точки  $O$ ) проти ходу годинникової стрілки, бо  $\vec{M}_O$  спрямований на нас (додатний напрям осі  $Ox$ ).

**Приклад 4.8.** Головний вектор  $\vec{F}$  і головний момент  $\vec{M}_O$  системи сил розміщені у площині  $Oxz$ . Визначити відстань  $OA$  до центральної гвинтової осі, якщо відомі  $F = 6$  Н,  $M_O = 7,2$  Н·м, а кут між  $\vec{M}_O$  і віссю  $Ox$  дорівнює  $60^\circ$  (рис. 4.30).

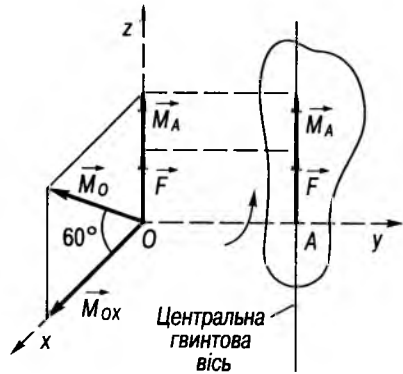


Рис. 4.30

**Розв'язування.** Відрізок  $OA$  перпендикулярний до головного вектора  $\vec{F}$  і головного моменту  $\vec{M}_O$ , які лежать у площині  $Oxz$ . Отже, відрізок  $OA$  лежить на осі  $Oy$  і спрямований вправо, тому що складова  $M_{Ox} = M_O \cos 60^\circ = 7,2 \cdot 0,5 = 3,6$  Н·м направлена на нас, тобто повертає головний вектор  $\vec{F}$ , прикладений у точці  $A$ , проти ходу годинникової стрілки.

Момент зведеної пари сил

$$M_A = M_O \sin 60^\circ = 7,2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 3,6\sqrt{3} \text{ Н}\cdot\text{м},$$

а відстань

$$OA = \frac{M_{Ox}}{F} = \frac{3,6}{6} = 0,6 \text{ м}.$$

Центральна гвинтова лінія паралельна головному вектору  $\vec{F}$ , тобто осі  $Oz$ , і проходить через точку  $A$  (рис. 4.30).

#### 4.2.3. Задачі для самостійного розв'язування

**4.11.** Задана система трьох сил  $F_1 = F_2 = F_3 = F$ . Сила  $F_2$  паралельна осі  $Oz$ , сила  $F_3$  паралельна  $Ox$ ,  $OA = a$  (рис. 4.31). До якого найпростішого вигляду зводиться задана система сил?

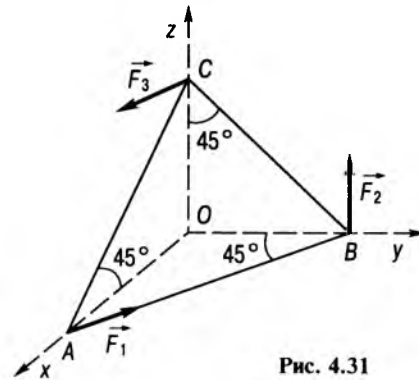


Рис. 4.31

**Відповідь:** система сил зводиться до силового гвинта (динами).

**4.12.** Задана система сил  $F_1 = F_2 = F_3 = F$  (рис. 4.32). Сила  $F_3$  розташована в коор-

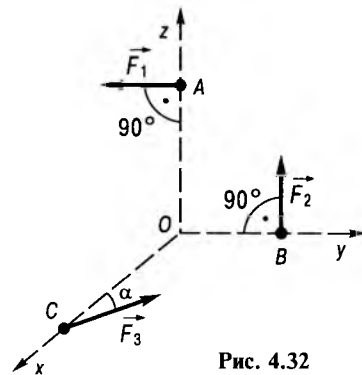


Рис. 4.32

динатній площині  $Oxz$ . Знайти значення кута  $\alpha$ , при якому система сил зводиться до рівнодійної.

$$\text{Відповідь: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{b-a}{c}.$$

**4.13.** Знайти значення сили  $F_3$  (рис. 4.33), при якому система сил  $F_1, F_2, F_3$  зводиться до пари сил, якщо  $a = 1$  м,  $F_2 = 2F_1 = 10$  Н.

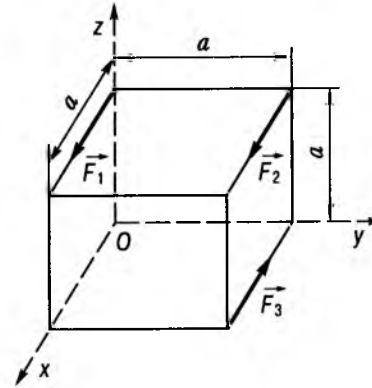


Рис. 4.33

**Відповідь:**  $F_3 = 15$  Н.

**4.14.** Задано систему сил  $F_1 = F_2 = 5$  Н (рис. 4.34), прикладену до вершин куба  $G$  і  $B$  відповідно. На куб діє також пара сил, момент якої  $M = 3$  Н·м напрямлений вздовж ребра  $BC$ ;  $OA = OB = OH = 0,2$  м. Звести систему до найпростішого вигляду.

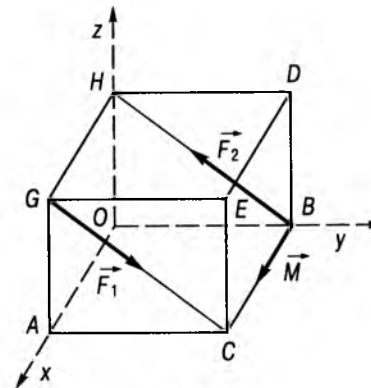


Рис. 4.34

**Відповідь:** система зводиться до пари сил, проекції її моменту на осі координат  $M_x = 3$  Н·м,  $M_y = M_z = 0,5\sqrt{2}$  Н·м.

**4.15.** Яка має бути залежність між відстанями  $a, b, d$  точок прикладення  $F_1 = F_2 = F_3 = F$  для того, щоб система сил зводилася до рівнодійної?  $OA = a$ ,  $OB = b$ ,  $OD = d$ . Сила  $F_1$  паралельна осі  $Oy$ , сила  $F_2$  — осі  $Oz$ , сила  $F_3$  — осі  $Ox$  (рис. 4.35).

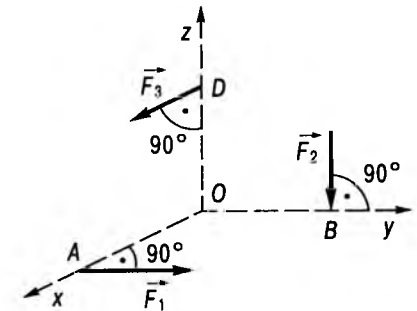


Рис. 4.35

**Відповідь:**  $d = a + b$ .

**4.16.** Визначити, до якого вигляду зводиться система трьох сил

$$\vec{F}_1 = -5\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} \text{ (Н)}, \vec{F}_2 = 4\vec{i} - \vec{j} \text{ (Н)},$$

$$\vec{F}_3 = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} \text{ (Н)},$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — орти осей  $Ox, Oy, Oz$  декартової системи координат, якщо радіуси-вектори точок, в яких прикладено сили, мають вигляд відповідно

$$\vec{r}_1 = -\vec{i} + \vec{k} \text{ (м)}, \vec{r}_2 = \vec{i} - \vec{j} \text{ (м)},$$

$$\vec{r}_3 = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \text{ (м)}.$$

**Відповідь:** система еквівалентна парі сил, проекції моменту якої на осі координат  $M_x = 1$  Н·м,  $M_y = -1$  Н·м,  $M_z = -2$  Н·м.

**4.17.** Систему сил задано їхніми складовими в декартовій системі координат:  $X_1 = -5$  Н,  $X_2 = 4$  Н,  $X_3 = 1$  Н,  $Y_1 = 3$  Н,  $Y_2 = -1$  Н,  $Y_3 = -2$  Н,  $Z_1 = 1$  Н,  $Z_2 = 0$ ,  $Z_3 = -1$  Н. Координати точок, в яких прикладено сили,  $x_1 = -1$  м,  $x_2 = 1$  м,  $x_3 = 2$  м,

$y_1 = 0, y_2 = -1 \text{ м}, y_3 = -2 \text{ м}, z_1 = 1 \text{ м}, z_2 = 0, z_3 = 1 \text{ м}$ . До якого найпростішого вигляду зводиться система сил?

Відповідь: система зводиться до пари сил, момент якої має складові  $M_x = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}, M_y = -1 \text{ Н} \cdot \text{м}, M_z = 0$ .

**4.18.** Якими мають бути величини  $X_1, Y_1, Z_1$  — складові сили  $\vec{F}_1(X_1, Y_1, Z_1)$  за умови, що система сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2(3; 5; 0), \vec{F}_3(-8; 6; -1)$ , які прикладені в точках  $A_1(0; 2; 0), A_2(-1; 0; 1), A_3(0; 0; 1)$ , еквівалентна парі сил?

Відповідь:  $X_1 = 5 \text{ Н}, Y_1 = -11 \text{ Н}, Z_1 = 1 \text{ Н}$ .

**4.19.** Знайти найпростіший вигляд системи двох сил  $\vec{F}_1(2; -3; -1)$  і  $\vec{F}_2(5; 6; -4)$ , якщо точки їх прикладання мають координати  $x_1 = 0, x_2 = 2 \text{ м}, y_1 = -1 \text{ м}, y_2 = 2 \text{ м}, z_1 = \frac{1}{3} \text{ м}, z_2 = -\frac{4}{3} \text{ м}$ .

Відповідь: система еквівалентна рівнодійній, складові якої  $R_x = 7 \text{ Н}, R_y = 3 \text{ Н}, R_z = -5 \text{ Н}$ .

**4.20.** Звести систему сил до найпростішого вигляду, якщо  $OA = OB = OE = l = 10 \text{ см}, F_1 = F_2 = 4 \text{ Н}, M = 3 \text{ Н} \cdot \text{м}$  — момент пари, яка розташована в площині  $EGHD$  (рис. 4.36).

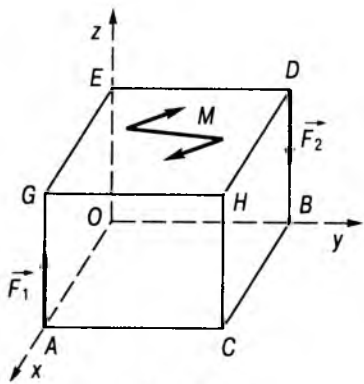


Рис. 4.36

Відповідь: система еквівалентна парі сил, складові моменту якої  $M_x = M_y = -0,4 \text{ Н} \cdot \text{м}, M_z = -3 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

### § 4.3. ЦЕНТР СИСТЕМИ ПАРАЛЕЛЬНИХ СИЛ

#### 4.3.1. Короткі теоретичні відомості

Розглянемо систему паралельних сил, яка зводиться до рівнодійної. Умови зведення системи паралельних сил до рівнодійної простіші, ніж у загальному випадку, коли повинні бути виконані дві умови:

$$\vec{F} \neq 0, \vec{F} \cdot \vec{M}_O = 0. \quad (4.19)$$

Необхідною умовою зведення просторової системи паралельних сил до рівнодійної є нерівність нулеві головного вектора цієї системи:

$$\vec{F} \neq 0. \quad (4.20)$$

Якщо умова (4.20) виконується при одночасному повороті всіх сил на однаковий кут відносно паралельних осей і якщо точки прикладання сил не змінюються, то рівнодійна  $\vec{R}$  заданої системи сил також повертається на згаданий вище кут. Причому поворот проходить навколо деякої фіксованої точки, яку називають *центром паралельних сил* (рис. 4.37).

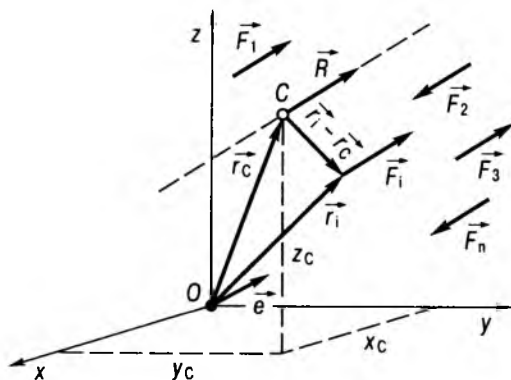


Рис. 4.37

Введемо одиничний вектор  $\vec{e}$ , паралельний лініям дії сил, тоді довільна сила  $\vec{F}_i$  може бути подана у вигляді

$$\vec{F}_i = F_i^* \cdot \vec{e}, \quad (4.21)$$

де  $F_i^* = F_i$ , якщо напрямки сили  $\vec{F}_i$  і вектора  $\vec{e}$  збігаються, і  $F_i^* = -F_i$ , якщо  $\vec{F}_i$  і  $\vec{e}$  напрямлені протилежно.

При цьому

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{e} \cdot \sum_{i=1}^n F_i^*. \quad (4.22)$$

Положення *центра паралельних сил* визначається радіусом-вектором

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot F_i^*}{\sum_{i=1}^n F_i^*} = \frac{\vec{r}_1 \cdot F_1^* + \vec{r}_2 \cdot F_2^* + \dots + \vec{r}_n \cdot F_n^*}{F_1^* + F_2^* + \dots + F_n^*}. \quad (4.23)$$

Якщо  $x_i, y_i, z_i$  — координати прикладення довільної сили  $\vec{F}_i$ , то *координати центра паралельних сил* знаходять за формулами

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i F_i^*}{\sum_{i=1}^n F_i^*} = \frac{x_1 F_1^* + x_2 F_2^* + \dots + x_n F_n^*}{F_1^* + F_2^* + \dots + F_n^*};$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i F_i^*}{\sum_{i=1}^n F_i^*} = \frac{y_1 F_1^* + y_2 F_2^* + \dots + y_n F_n^*}{F_1^* + F_2^* + \dots + F_n^*};$$

$$z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i F_i^*}{\sum_{i=1}^n F_i^*} = \frac{z_1 F_1^* + z_2 F_2^* + \dots + z_n F_n^*}{F_1^* + F_2^* + \dots + F_n^*}. \quad (4.24)$$

Вирази  $\sum_{i=1}^n x_i F_i^*, \sum_{i=1}^n y_i F_i^*, \sum_{i=1}^n z_i F_i^*$  називають *статичними моментами* заданої сис-

теми сил відносно координатних площин  $YOz, xOz, xOy$  відповідно.

Якщо початок координат вибрано в центрі паралельних сил, то

$$x_C = y_C = z_C = 0$$

і статичні моменти заданої системи сил відносно осей цієї системи координат дорівнюють нулеві.

**Центр ваги твердого тіла.** На всі частини тіла, що знаходяться поблизу поверхні Землі, діють сили ваги. Якщо тіло розбити на елементарні частинки, сили ваги яких позначити як  $\Delta \vec{P}_1, \Delta \vec{P}_2, \dots, \Delta \vec{P}_n$  (рис. 4.38), і врахувати, що розміри тіла є незначними порівняно з розмірами Землі, то сили ваги елементарних частинок тіла з достатньо високою точністю можна вважати системою паралельних сил.

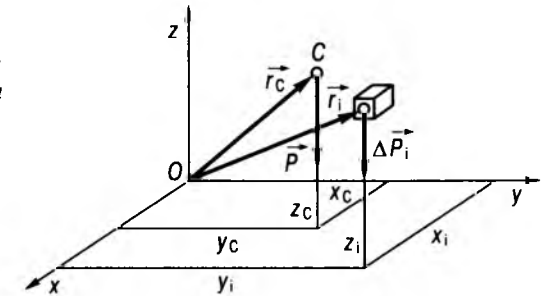


Рис. 4.38

Рівнодійну сил ваги окремих частин тіла називають *силою ваги тіла*:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \Delta \vec{P}_i. \quad (4.25)$$

Сили ваги окремих частинок тіла  $\Delta \vec{P}_i$  паралельні і спрямовані в один бік, тому вираз (4.25) запишемо так:

$$P = \sum_{i=1}^n \Delta P_i. \quad (4.26)$$

Отже, *вага тіла дорівнює сумі сил ваги окремих його частинок*.

Центр паралельних сил ваги окремих частин тіла називають *центром ваги тіла*. На рис. 4.38 центр ваги тіла позначено буквою  $C$ .

Згідно з формулою (4.23) радіус-вектор центра ваги

$$\vec{r}_C = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \Delta P_i. \quad (4.27)$$

Після переходу у виразі (4.27) до границі при  $n \rightarrow \infty$ , припустивши, що  $\Delta P_i \rightarrow 0$ , дістанемо

$$\vec{r}_C = \frac{1}{P} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \Delta P_i. \quad (4.28)$$

Границя суми в цьому виразі є інтегралом:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{P} \int_{(P)} \vec{r} \cdot dP. \quad (4.29)$$

На основі формули (4.27) в проєкціях на координатні осі отримаємо

$$x_C = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n x_i \Delta P_i; \quad y_C = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n y_i \Delta P_i; \\ z_C = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n z_i \Delta P_i, \quad (4.30)$$

де  $x_i, y_i, z_i$  — координати центра ваги  $i$ -ї частинки.

Відповідно до (4.29) дістанемо

$$x_C = \frac{1}{P} \int_{(P)} x dP; \quad y_C = \frac{1}{P} \int_{(P)} y dP; \\ z_C = \frac{1}{P} \int_{(P)} z dP. \quad (4.31)$$

Розглянемо деякі окремі випадки.

**Центр ваги однорідного твердого тіла.** Для однорідних тіл питома вага  $\gamma$  є величиною сталою по об'єму.

Вага тіла

$$P = \gamma V, \quad (4.32)$$

де  $V$  — об'єм всього тіла. Вага  $i$ -ї частинки тіла

$$\Delta P_i = \gamma \Delta V_i, \quad (4.33)$$

де  $\Delta V_i$  — об'єм  $i$ -ї частинки тіла.

Підставивши (4.32), (4.33) в (4.27) і (4.29) — (4.31), отримаємо формули, які визначають *координати центра ваги однорідного тіла*:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \Delta V_i}{V}; \quad \vec{r}_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} \vec{r} \cdot dV; \\ x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \Delta V_i}{V}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \Delta V_i}{V}; \\ z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot \Delta V_i}{V}; \quad (4.34)$$

$$x_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} x \cdot dV; \quad y_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} y \cdot dV; \\ z_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} z \cdot dV.$$

Розглянемо *однорідне плоске тіло* завтовшки  $h$ , розміщене в площині  $Oxy$  (рис. 4.39). Вага такого тіла і вага окремих його частинок

$$P = \gamma h S; \quad \Delta P_i = \gamma h \Delta S_i, \quad (4.35)$$

де  $S$  — площа тіла;  $\Delta S_i$  — площа окремої його частинки.

Підставивши (4.35) в (4.27) і (4.29) — (4.31), отримаємо формули, які визначають *координати центра ваги однорідного плоского тіла*:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \Delta S_i \quad \text{або} \quad \vec{r}_C = \frac{1}{S} \int_{(S)} \vec{r} \cdot dS,$$

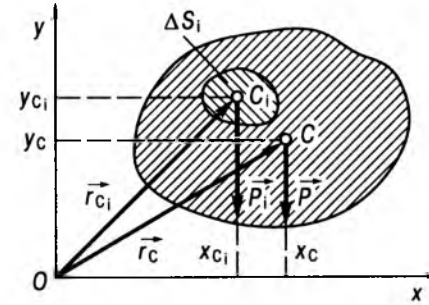


Рис. 4.39

$$x_C = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n x_i \Delta S_i, \quad y_C = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n y_i \Delta S_i$$

$$\text{або} \quad x_C = \frac{1}{S} \int_{(S)} x dS, \quad y_C = \frac{1}{S} \int_{(S)} y dS, \quad (4.36)$$

де  $x, y$  — координати центра ваги  $\Delta S_i$  частинки.

Суму добутоків площі кожного елемента плоскої фігури на відстань від нього до деякої осі, яка лежить у площині фігури, називають *статичним моментом плоскої фігури відносно цієї осі*.

Статичні моменти ( $M_x$  і  $M_y$ ) плоскої фігури (рис. 4.39) відносно осей  $Ox$  і  $Oy$  відповідно

$$M_x = \sum_{i=1}^n \Delta S_i y_i, \quad M_y = \sum_{i=1}^n \Delta S_i x_i. \quad (4.37)$$

Підставивши вирази (4.37) в (4.36), отримаємо для координат центра ваги плоскої фігури такі формули:

$$x_C = \frac{M_y}{S}, \quad y_C = \frac{M_x}{S}. \quad (4.38)$$

За цими формулами обчислюють координати центра ваги плоскої фігури, якщо відомі її статичні моменти  $M_x$  і  $M_y$ .

Якщо позначити через  $\gamma$  вагу одиниці довжини однорідного лінійного тіла, то його вагу і вагу його  $i$ -ї частинки визначають за формулами

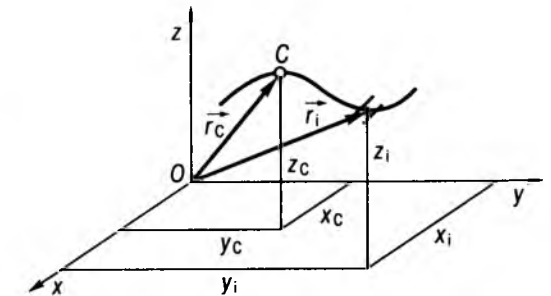


Рис. 4.40

$$P = \gamma L; \quad \Delta P_i = \gamma \Delta L_i, \quad (4.39)$$

де  $L$  — довжина тіла;  $\Delta L_i$  — довжина  $i$ -ї частинки.

Підставивши (4.39) у вирази (4.27), (4.29) — (4.31), отримаємо формули, які визначають *координати центра ваги лінійного однорідного тіла* (наприклад, дроту, стрижневої конструкції тощо, рис. 4.40):

$$\vec{r}_C = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \Delta L_i \quad \text{або} \quad \vec{r}_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} \vec{r} \cdot dL,$$

$$x_C = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \Delta L_i, \quad y_C = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n y_i \cdot \Delta L_i,$$

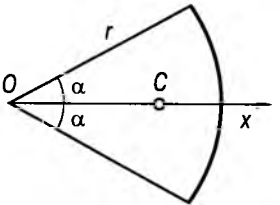
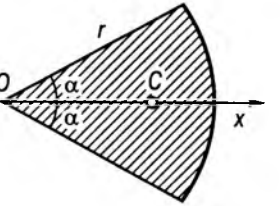
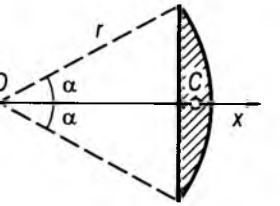
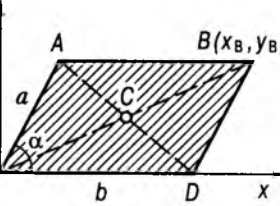
$$z_C = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n z_i \cdot \Delta L_i, \quad (4.40)$$

$$\text{або} \quad x_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} x \cdot dL, \quad y_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} y \cdot dL,$$

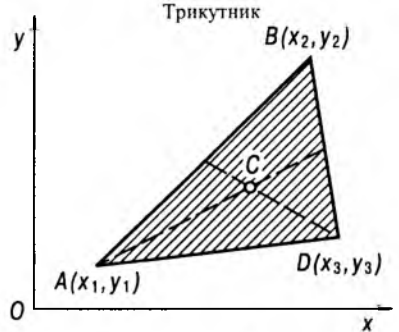
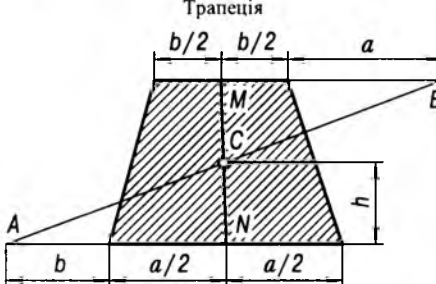
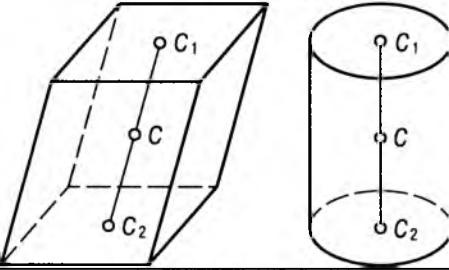
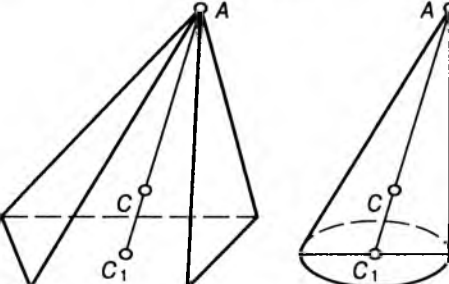
$$z_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} z \cdot dL.$$

*Центри ваги деяких найпростіших геометричних фігур*, які часто зустрічаються на практиці і за допомогою яких можна побудувати складніші фігури, зведено до табл. 4.3.

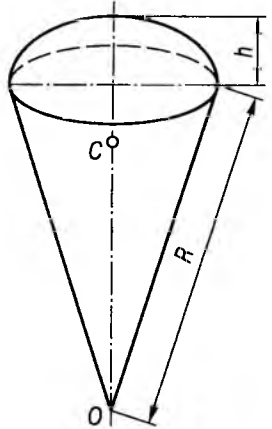
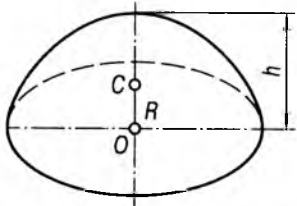
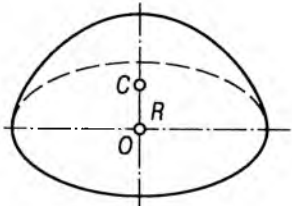
Таблиця 4.3

Фігура	Положення центра ваги	Примітка
Дуга кола 	$x_C = OC = \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \quad (4.41)$	$r$ — радіус дуги; $2\alpha$ — центральний кут, виражений у радіанах
Круговий сектор 	$x_C = OC = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \quad (4.42)$	$r$ — радіус сектора; $2\alpha$ — центральний кут у радіанах
Круговий сегмент 	$x_C = OC = \frac{4}{3} \cdot \frac{r \sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \quad (4.43)$	$r$ — радіус сегмента; $2\alpha$ — центральний кут у радіанах
Паралелограм 	$OC = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} \quad (4.44)$	Центр ваги збігається з точкою перетину діагоналей; $x_C = \frac{1}{2} x_B$ , $y_C = \frac{1}{2} y_B$

Продовження табл. 4.3

Фігура	Положення центра ваги	Примітка
Трикутник 	$x_C = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3),$ $y_C = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) \quad (4.45)$	Центр ваги збігається з точкою $C$ перетину медіан; $x_1, x_2, x_3$ — координати вершин $A, B$ і $D$ трикутника
Трапеція 	$h = \frac{H}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b} \quad (4.46)$	Центр ваги знаходиться у точці перетину прямої $AB$ і прямої $MN$ ; $H$ — висота трапеції; $a, b$ — основи трапеції
Призма і циліндр 	$C = \frac{C_1 C_2}{2} \quad (4.47)$	Центром ваги $C$ є середина відрізка, який з'єднує центри $C_1$ і $C_2$ верхньої і нижньої основ
Піраміда і конус 	$CC_1 = \frac{1}{4} AC_1 \quad (4.48)$	Центр ваги $C$ лежить на прямій, яка з'єднує вершину і центр основи



Фігура	Положення центра ваги	Примітка
<p>Кульовий сектор</p> 	$OC = \frac{3}{8}(2R - h) \quad (4.49)$	<p>Центр ваги <math>C</math> лежить на осі симетрії <math>OC</math>; <math>R</math> — радіус; <math>h</math> — висота кульового сектора</p>
<p>Кульовий сегмент</p> 	$OC = \frac{3}{4} \frac{(2R^2 - h^2)}{3R - h} \quad (4.50)$	<p>Центр ваги <math>C</math> лежить на осі симетрії <math>OC</math>; <math>R</math> — радіус; <math>h</math> — висота кульового сегмента</p>
<p>Півкуля</p> 	$OC = \frac{3}{8}R \quad (4.51)$	<p>Центр ваги <math>C</math> лежить на осі симетрії <math>OC</math>; <math>R</math> — радіус півкулі</p>

**Методи визначення центра ваги тіла.** Якщо однорідне тіло складної форми, то використовують метод розбиття. За цим методом тіло розбивають на окремі частинки (див. табл. 4.3) вагою  $P_i$ , а положення їх центрів ваги  $C_i(x_i, y_i, z_i)$  можна розрахувати за формулами (4.41)–(4.51).

Координати центра ваги однорідного тіла знаходять за формулами (4.30), (4.31) і (4.34).

Якщо однорідне тіло плоскої форми (рис. 4.41), то матимемо

$$x_C = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3}; \quad (4.52)$$

$$y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2 + y_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3},$$

де  $S_1, S_2$  і  $S_3$  — площі трикутника  $ABC'$ , прямокутника  $DKNC'$  і півкола з основою  $KN$  відповідно.

Для визначення центра ваги однорідних тіл з порожнинами (рис. 4.42) застосовують метод "від'ємної" ваги (площі). Центр ваги такого тіла визначають, вважаючи його суцільним однорідним тілом з добавленими в місцях порожнин "від'ємних" сил ваги:

$$x_C = \frac{1}{P} \left( x_0 P_0 - \sum_{i=1}^n x_i P_i \right),$$

$$y_C = \frac{1}{P} \left( y_0 P_0 - \sum_{i=1}^n y_i P_i \right), \quad (4.53)$$

$$z_C = \frac{1}{P} \left( z_0 P_0 - \sum_{i=1}^n z_i P_i \right),$$

де  $P = P_0 - \sum_{i=1}^n P_i$ ;  $P_0, x_0, y_0, z_0$  — вага та координати центра ваги суцільного тіла;  $P_i, x_i, y_i, z_i$  — "від'ємна" вага та координати

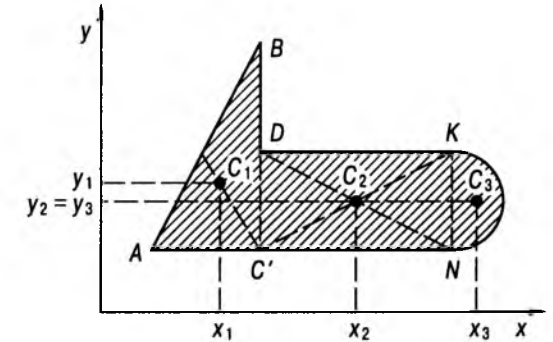


Рис. 4.41

центра ваги  $i$ -ї порожнини, "заповненої" матеріалом тіла.

Наприклад, для плоскої фігури, зображеної на рис. 4.42, матимемо:

$$x_C = \frac{x_0 S_0 - x_1 S_1}{S_0 - S_1}, \quad (4.54)$$

$$y_C = \frac{y_0 S_0 - y_1 S_1}{S_0 - S_1},$$

де  $S_0, x_0, y_0$  — площа суцільного прямокутника та координати його центра ваги;  $S_1, x_1, y_1$  — від'ємна площа круглої порожнини та координати її центра ваги.

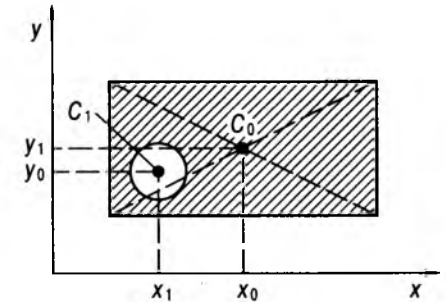


Рис. 4.42

Центр ваги тіла складної форми, якщо його не можна розбити на прості фігури, а також неоднорідного тіла, питома вага якого є змінною  $[\gamma = \gamma(x, y, z)]$ , знаходять методом інтегрування. У цьому випадку

$$x_C = \frac{1}{P} \int_{(V)} x \cdot \gamma(x, y, z) dV,$$

$$y_C = \frac{1}{P} \int_{(V)} y \cdot \gamma(x, y, z) dV, \quad (4.55)$$

$$z_C = \frac{1}{P} \int_{(V)} z \cdot \gamma(x, y, z) dV.$$

### 4.3.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 4.9.** Знайти координати центра ваги конструкції, яка складається із однорідних стрижнів (рис. 4.43, а), якщо  $OA = 0,6$  м,  $AB = 0,6$  м,  $BH = 0,3$  м,  $OD = 0,9$  м,  $DK = 0,4$  м.

**Розв'язування.** Застосуємо метод розбиття конструкції на окремі частини  $OA$ ,  $AB$ ,  $BH$ ,  $OD$ ,  $DK$ , центри ваги яких розміщені на осях їхньої симетрії.

Координати центрів ваги цих частин такі:  $C_1(0,3; 0; 0)$ ,  $C_2(0,6; 0,3; 0)$ ,  $C_3(0,6; 0,6; 0,15)$ ,

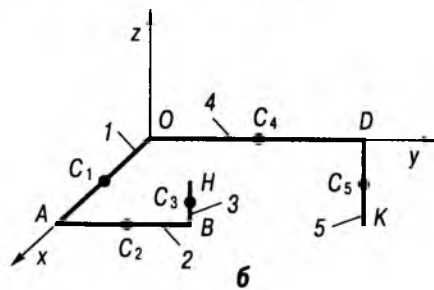
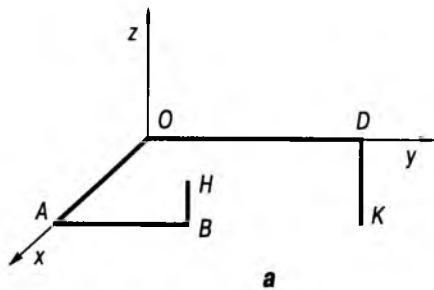


Рис. 4.43

$C_4(0; 0,45; 0)$ ,  $C_5(0; 0,9; -0,2)$  (рис. 4.43, б). Довжини окремих частин конструкції:  $L_1 = 0,6$  м;  $L_2 = 0,6$  м;  $L_3 = 0,3$  м;  $L_4 = 0,9$  м;  $L_5 = 0,4$  м.

Координати центра ваги конструкції, складеної із однорідних стрижнів, знаходимо за формулами (4.40):

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i L_i}{L} = \frac{0,3 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,9 + 0 \cdot 0,4}{0,6 + 0,6 + 0,3 + 0,9 + 0,4} \approx 0,26 \text{ м},$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i L_i}{L} = \frac{0 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,3 + 0,45 \cdot 0,9 + 0,9 \cdot 0,4}{0,6 + 0,6 + 0,3 + 0,9 + 0,4} \approx 0,4 \text{ м},$$

$$z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i L_i}{L} = \frac{0 \cdot 0,6 + 0 \cdot 0,6 + 0,15 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,9 - 0,2 \cdot 0,4}{0,6 + 0,6 + 0,3 + 0,9 + 0,4} = -0,0125 \text{ м}.$$

Отже, координати центра ваги конструкції такі:  $x_C \approx 0,26$  м;  $y_C \approx 0,4$  м;  $z_C \approx -0,013$  м.

**Приклад 4.10.** Знайти координати центра ваги плоскої фігури, що зображена на рис. 4.44, а (розміри наведено в сантиметрах).

**Розв'язування.** Для розв'язання використаємо метод розбиття в поєднанні з методом від'ємних площ. Виділимо в даній фігурі такі п'ять простих фігур (рис. 4.44, б): прямокутник  $OABN$ , круговий сектор  $ONP$ , прямокутники  $DEE_1N$ ,  $E_1KK_1M$  та трикутник  $KK_1L$ .

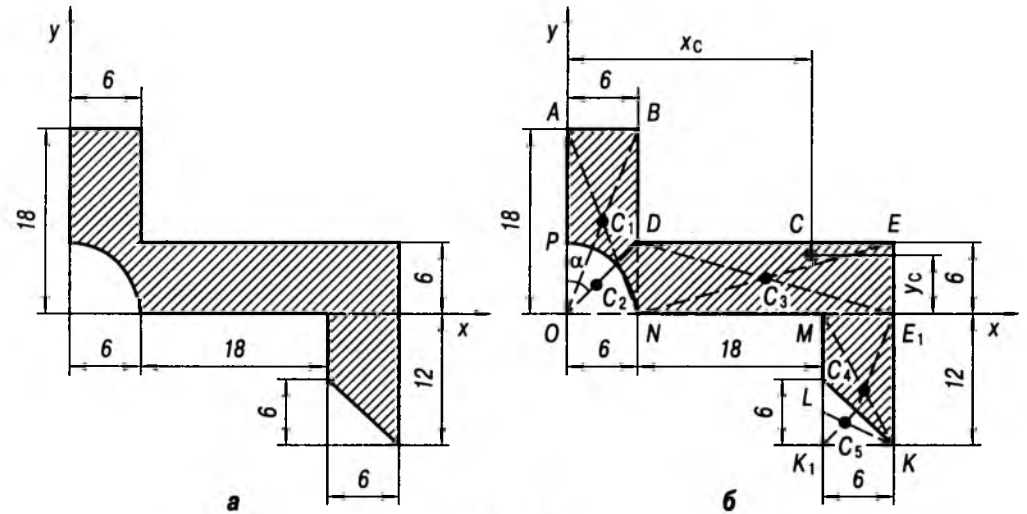


Рис. 4.44

Площа прямокутника  $OABN$ :  $S_1 = OA \times AB = 18 \cdot 6 = 108 \text{ см}^2$ ; координати його центра ваги

$$x_1 = \frac{AB}{2} = 3 \text{ см}, \quad y_1 = \frac{OA}{2} = 9 \text{ см}.$$

Площу кругового сектора  $ONP$  ( $R = 6$  см,  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ) запишемо зі знаком мінус, оскільки сектор вирізаний із заданої фігури:  $S_2 = -\alpha \cdot R^2 = -\frac{\pi}{4} R^2 \approx -28,3 \text{ см}^2$ ; довжина відрізка  $OC_2$

дорівнює  $OC_2 = \frac{2}{3} R \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \approx 3,6$  см, а координати центра ваги

$$x_2 = OC_2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 2,55 \text{ см},$$

$$y_2 = OC_2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 2,55 \text{ см}.$$

Площа прямокутника  $DEE_1N$ :  $S_3 = DE \times EE_1 = 24 \cdot 6 = 144 \text{ см}^2$ ; координати центра ваги

$$x_3 = ON + \frac{NE_1}{2} = 6 + 12 = 18 \text{ см}, \quad y_3 = \frac{EE_1}{2} = 3 \text{ см}.$$

Прямокутник  $E_1KK_1M$  має площу  $S_4 = E_1K \cdot KK_1 = 12 \cdot 6 = 72 \text{ см}^2$ ; координати центра ваги

$$x_4 = OM + \frac{ME_1}{2} = 24 + 3 = 27 \text{ см},$$

$$y_4 = -\frac{E_1K}{2} = -6 \text{ см}.$$

Площу трикутника  $KK_1L$  беремо зі знаком мінус, оскільки трикутник вирізаний:

$$S_5 = -\frac{1}{2} KK_1 \cdot K_1L = -\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = -18 \text{ см}^2.$$

Координати центра ваги

$$x_5 = \frac{x_L + x_K + x_{K_1}}{3} = \frac{24 + 30 + 24}{3} = 26 \text{ см},$$

$$y_5 = \frac{y_L + y_K + y_{K_1}}{3} = \frac{-6 - 12 - 12}{3} = -10 \text{ см}.$$

Координати центра ваги заданої плоскої фігури знаходимо за формулами (4.36):

$$x_C = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3 + x_4 S_4 + x_5 S_5}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5} =$$

$$= \frac{3 \cdot 108 + 2,55(-28,3) + 18 \cdot 144 + 27 \cdot 72 + 26(-18)}{108 - 28,3 + 144 + 72 - 18} =$$

$$\approx 15,55 \text{ см,}$$

$$y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2 + y_3 S_3 + y_4 S_4 + y_5 S_5}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5} =$$

$$= \frac{1}{108 - 28,3 + 144 + 72 - 18} \times$$

$$\times [9 \cdot 108 + 2,55 \cdot (-28,3) + 3 \cdot 144 +$$

$$+ (-6) \cdot 72 + (-10) \cdot (-18)] \approx 3,89 \text{ см.}$$

Отже, координати центра ваги плоскої фігури такі:  $x_C \approx 15,55$  см,  $y_C \approx 3,89$  см.

**Приклад 4.11.** Знайти координати центра ваги однорідної фігури, обмеженої кривою  $y(x) = -0,5x^2 + 2$  і прямими  $x = \pm 2$  та  $y = 5$  (рис. 4.45, а).

Розв'язування. Для розв'язання цієї задачі застосуємо метод симетрії і метод розбиття. Наведена фігура має вісь симетрії  $x = 0$ . Згідно з методом симетрії центр ваги тіла знаходиться на осі симетрії, тому  $x_C = 0$ . Розіб'ємо дану фігуру на прямокутник (рис. 4.50, б) і фігуру, обмежену параболою та віссю  $Ox$  (рис. 4.45, в).

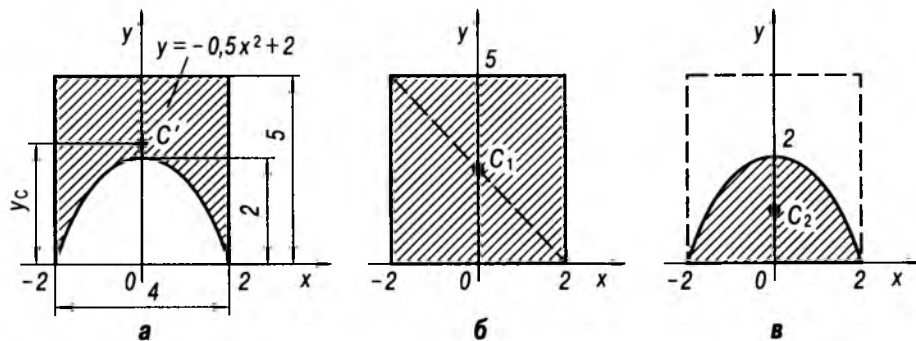


Рис. 4.45

Координати центра ваги прямокутника  $C_1(0; 2,5)$ , а його площа  $S_1 = 4 \cdot 5 = 20$ .

Координати центра ваги криволінійної фігури ( $a \leq x \leq b$ ,  $0 \leq y \leq f(x)$ ) визначають за формулами (4.36):

$$x_C = \frac{1}{S} \int_a^b xy dx, \quad y_C = \frac{1}{S} \int_a^b \frac{y}{2} y dx,$$

де  $S = \int_a^b y dx$  — площа фігури;  $y dx = dS$  — елемент площі (рис. 4.51).

Площу  $S_2$  криволінійної фігури записуємо зі знаком мінус, оскільки фігура є вирізаною:

$$S_2 = - \int_{-2}^2 (2 - 0,5x^2) dx =$$

$$= -2 \cdot \left( 2x - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^2 = -2 \cdot \left( 4 - \frac{4}{3} \right) = -\frac{16}{3}.$$

Координата центра ваги  $y_{C_2}$  фігури, обмеженої параболою і віссю  $Ox$ ,

$$y_2 = \frac{\frac{1}{2} \int_{-2}^2 (2 - 0,5x^2)^2 dx}{S_2} = \frac{\int_0^2 \left( 4 - 2x^2 + \frac{x^4}{4} \right) dx}{-\frac{16}{3}} =$$

$$= \frac{3 \cdot \left( 8 - \frac{16}{3} + 1,6 \right)}{16} = \frac{12,8}{16} = 0,8.$$

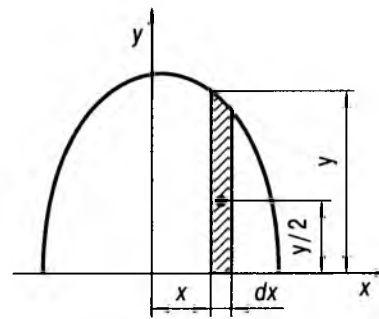


Рис. 4.46

Отже, координати центра ваги криволінійної фігури  $C_2(0; 0,8)$ .

Координату заданої фігури відносно осі  $Oy$  визначимо за четвертою з формул (4.36):

$$y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{2,5 \cdot 20 + 0,8 \left( -\frac{16}{3} \right)}{20 - \frac{16}{3}} =$$

$$= \frac{150 - 12,8}{44} = \frac{34,3}{11} \approx 3,12.$$

Отже, координати центра ваги  $x_C = 0$ ,  $y_C = 3,12$ .

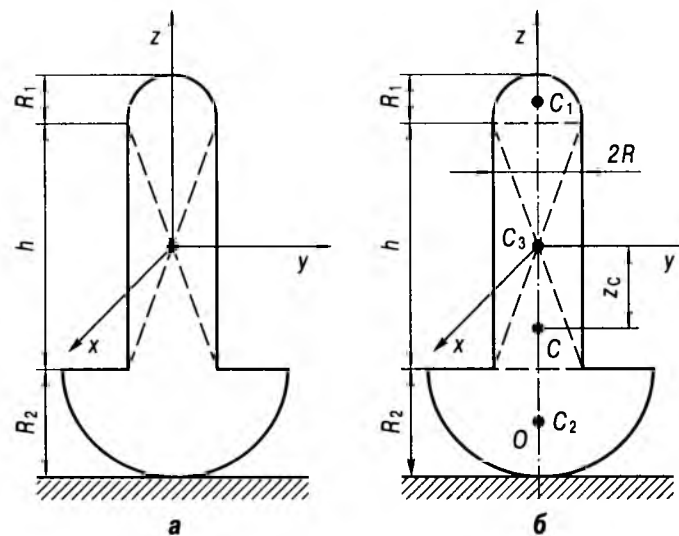


Рис. 4.47

**Приклад 4.12.** На рис. 4.47, а показано розріз тіла, який складається з циліндра, радіус якого  $R$ , висота  $h$ , та двох півкуль радіуса  $R_1$  і  $R_2$ . Центри півкуль збігаються з центрами нижньої і верхньої основ циліндра. Визначити центр ваги цього тіла, якщо  $R_1 = R$ ,  $R_2 = 4R$ ,  $h = 6R_2$ .

Розв'язування. Оскільки вісь  $Oz$  є для даного тіла віссю симетрії, то шуканий центр ваги  $C$  цього тіла лежить на осі  $Oz$ . Тому достатньо вирахувати тільки одну координату  $z_C$ . Позначимо об'єми півкуль і циліндра відповідно  $V_1, V_2, V_3$ , а їхні центри ваги  $C_1, C_2, C_3$  (рис. 4.47, б). Початок координат помістимо в точку  $C_3$  — центр ваги циліндра. Знайдемо об'єми і координати центрів ваги півкуль і циліндра.

Параметри першої півкулі:

$$V_1 = \frac{2}{3} \pi R_1^3 = \frac{2}{3} \pi R^3,$$

$$z_1 = \frac{h}{2} + \frac{3}{8} R_1 = \frac{6R_2}{2} + \frac{3}{8} R_1 =$$

$$= \frac{6 \cdot 4R}{2} + \frac{3}{8} R = \frac{99}{8} R.$$

За уваження. Відстань від центра ваги півкулі радіуса  $R$  до її основи згідно з (4.51) дорівнює  $\frac{3}{8}R$ .

Для другої півкулі:

$$V_2 = \frac{2}{3}\pi R_2^3 = \frac{2}{3}\pi(4R)^3 = \frac{128}{3}\pi R^3;$$

$$z_2 = -\left(\frac{h}{2} + \frac{3}{8}R_2\right) = -\left(\frac{6R_2}{2} + \frac{3}{8}R_2\right) = -\left(\frac{6 \cdot 4R}{2} + \frac{3 \cdot 4R}{8}\right) = -\frac{27R}{2}.$$

Об'єм циліндра і координата центра рівноваги:

$$V_3 = \pi R^2 h = \pi R^2 \cdot 6R_2 = \pi R^2 \cdot 6 \cdot 4R = 24\pi R^3, \quad z_3 = 0.$$

Шукану координату  $z_C$  центра ваги даного тіла обчислюємо за п'ятою формулою із (4.34):

$$\begin{aligned} z_C &= \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2 + V_3 z_3}{V_1 + V_2 + V_3} = \\ &= \frac{\frac{2}{3}\pi R^3 \cdot \frac{99}{8}R + \frac{128}{3}\pi R^3 \left(-\frac{27R}{2}\right)}{\frac{2}{3}\pi R^3 + \frac{128}{3}\pi R^3 + 24\pi R^3} = \\ &= \frac{\left(\frac{198}{24} - \frac{3456}{6}\right)\pi R^4}{\left(\frac{2}{3} + \frac{128}{3} + 24\right)\pi R^3} = -8,43R. \end{aligned}$$

Отже,  $x_C = 0$ ,  $y_C = 0$ ,  $z_C \approx -8,43R$ .

**Приклад 4.13.** Знайти координати центра ваги кубічного бруса, в який запресовано однорідний циліндр радіуса  $R = 10$  см (рис. 4.48). Питома вага бруса та циліндра відповідно  $\gamma_1 = 2,4 \cdot 10^{-3}$  Н/см<sup>3</sup>,  $\gamma_2 = 1,6 \cdot 10^{-3}$  Н/см<sup>3</sup>.

**Розв'язування.** Застосуємо метод розбиття та метод симетрії. Виділимо три

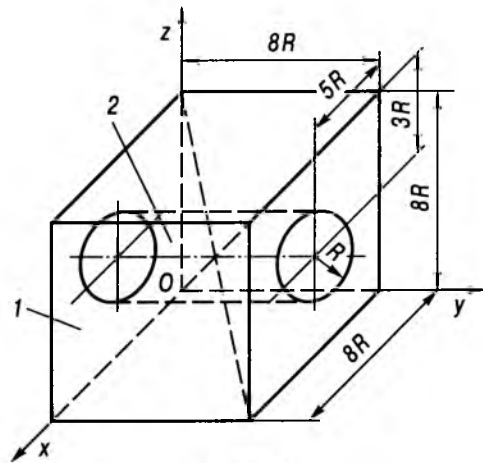


Рис. 4.48

тіла: кубічний брус і висвердлений циліндр питомої ваги  $\gamma_1$  та впресований циліндр питомої ваги  $\gamma_2$ . Позначимо вагу бруса, впресованого і висвердленого циліндрів відповідно  $P_1$ ,  $P_2$  і  $P_3$ , а центри їх ваги —  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ ;  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$ ;  $x_3$ ,  $y_3$ ,  $z_3$  відповідно.

Вага суцільного бруса

$$P_1 = \gamma_1 Sh = 2,4 \cdot 10^{-3} (8R)^3 = 2,4 \cdot 10^{-3} \cdot 512 \cdot 1000 = 1228,8 \text{ Н}.$$

Координати його центра ваги

$$x_1 = y_1 = z_1 = 4R = 40 \text{ см}.$$

Вага впресованого циліндра

$$P_2 = \gamma_2 Sh = 1,6 \cdot 10^{-3} \pi R^2 h = 1,6 \cdot 10^{-3} \cdot 3,14 \cdot 100 \cdot 80 \approx 40,192 \text{ Н}.$$

Координати центра ваги цього циліндра

$$x_2 = 5R = 5 \cdot 10 = 50 \text{ см},$$

$$y_2 = \frac{8R}{2} = 4R = 4 \cdot 10 = 40 \text{ см},$$

$$z_2 = 8R - 3R = 5R = 5 \cdot 10 = 50 \text{ см}.$$

Вагу висвердленого циліндра радіуса  $R$  запишемо зі знаком мінус, оскільки це тіло висвердлене із бруса:

$$P_3 = -\gamma_1 Sh = -2,4 \cdot 10^{-3} \pi R^2 h = -2,4 \cdot 10^{-3} \cdot 3,14 \cdot 100 \cdot 8 \cdot 10 \approx -60,288 \text{ Н}.$$

Координати його центра ваги

$$x_3 = 50 \text{ см}, \quad y_3 = 40 \text{ см}, \quad z_3 = 50 \text{ см}.$$

Координати всього тіла визначаємо за формулами

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \\ &= \frac{1228,8 \cdot 40 + 40,192 \cdot 50 - 60,288 \cdot 50}{1228,8 + 40,192 - 60,288} = \\ &= 39,83 \text{ см}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_C &= \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \\ &= \frac{1228,8 \cdot 40 + 40,192 \cdot 50 - 60,288 \cdot 50}{1228,8 + 40,192 - 60,288} = \\ &= 39,83 \text{ см}. \end{aligned}$$

Оскільки площина симетрії тіла паралельна площині  $Oxz$ , то  $y_C = 40$  см.

Отже,  $x_C = z_C = 39,83$  см;  $y_C = 40$  см.

#### 4.3.3. Задачі для самостійного розв'язування

**4.21.** Визначити центр ваги тонкого дроту, показаного на рис. 4.49, якщо  $AB = 40$  см,  $BD = 30$  см,  $ED = 10$  см.

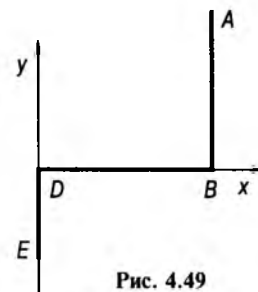


Рис. 4.49

Відповідь:  $x_C = 20,625$  см;

$y_C = 9,375$  см.

**4.22.** Знайти координати центра ваги конструкції, яка складається з однорідних стрижнів, зображених на рис. 4.50, якщо  $AB = 0,8$  м,  $OA = OB$ ,  $BD = 0,6$  м,  $ED = 0,4$  м,  $AK = 0,4$  м,  $KF = 0,2$  м.

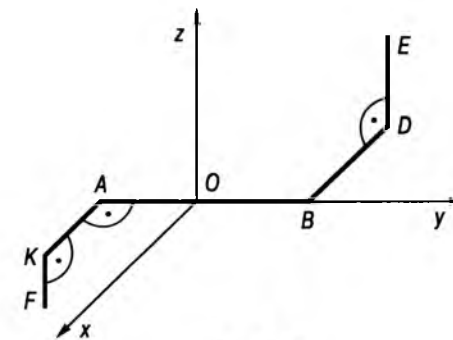


Рис. 4.50

Відповідь:  $x_C = -0,108$  м;

$y_C = 0,667$  м;  $z_C = 0,025$  м.

**4.23.** Визначити центр ваги плоскої фігури з квадратним отвором  $A_1 B_1 D_1 E_1$  (рис. 4.51), якщо  $AB = BD = 10$  см;  $A_1 B_1 = 2$  см;  $O_1 K = O_1 K_1 = 3$  см.

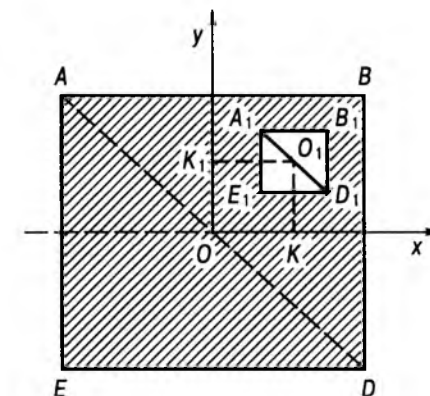
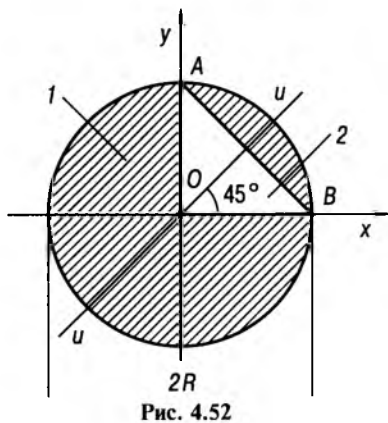


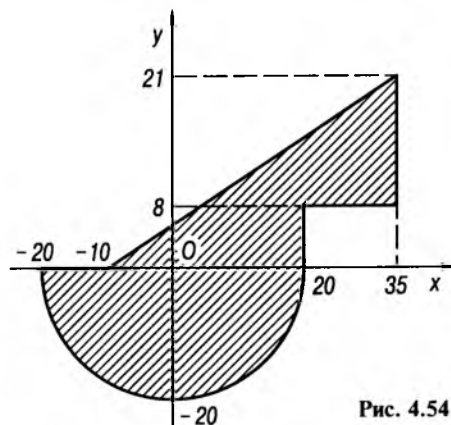
Рис. 4.51

Відповідь:  $x_C = y_C = -0,125$  см.

4.24. Знайти координати центра ваги заштрихованої однорідної фігури, зображеної на рис. 4.52, якщо  $R = 2$  м.

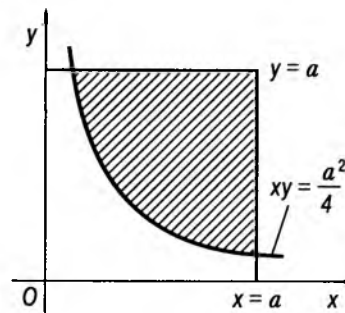


4.26. Знайти координати центра ваги однорідної пластини. Розміри в сантиметрах вказані на рис. 4.54.



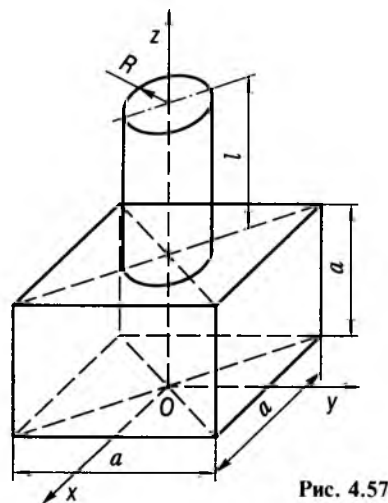
Відповідь:  $x_C = 2,12$  м,  $y_C = 0,35$  м,  $z_C = 4,15$  м.

4.28. Знайти координати центра ваги однорідної плоскої фігури, обмеженої гіперболою  $xy = \frac{a^2}{4}$  і прямими  $x = a$  та  $y = a$  (рис. 4.56).



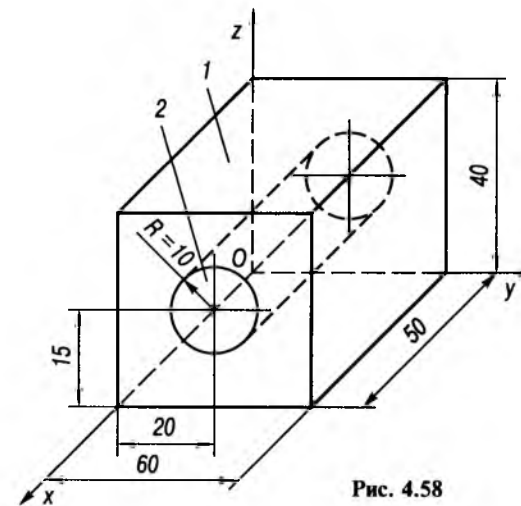
Відповідь:  $x_C = y_C = \frac{9a}{8(3 - \ln 4)} \approx 0,697a$ .

4.29. Визначити положення центра ваги дерев'яного молотка (рис. 4.57), якщо  $a = 8$  см,  $l = 30$  см,  $R = 2$  см.



Відповідь:  $x_C = y_C = 0$ ,  $z_C = 12,055$  см.

4.30. Знайти координати центра ваги однорідного бруска, розмір якого  $40 \times 50 \times 60$  см. У бруску висвердлено циліндричний отвір радіуса  $R = 10$  см (рис. 4.58). Розміри на рисунку вказано в сантиметрах.



Відповідь:  $x_C \approx 25$  см,  $y_C \approx 31,505$  см,  $z_C \approx 20,75$  см.

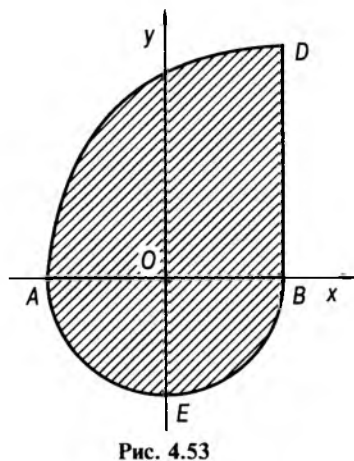
#### 4.3.4. Розрахункові завдання "Визначення центра ваги плоскої фігури"

Послідовність виконання роботи:  
а) відповідно до варіанта завдання (рис. 4.59) зобразити плоску фігуру в натуральну величину. Розміри вказано в міліметрах;

б) вибрати систему координат;  
в) розбити фігуру на прості фігури (трикутник, прямокутник, круг, сектор, сегмент);  
г) вказати положення центра ваги кожної простої фігури на рисунку, а також визначити його координати у вибраній системі;  
д) визначити положення центра ваги заданої плоскої фігури і вказати його на рисунку.

Відповідь:  $x_C = y_C = -0,126$  м.

4.25. Знайти координати центра ваги плоскої фігури, обмеженої півколом  $ABE$  і четвертиною круга  $ADB$ , якщо  $AO = OB = R$ . Осі координат вказані на рис. 4.53.

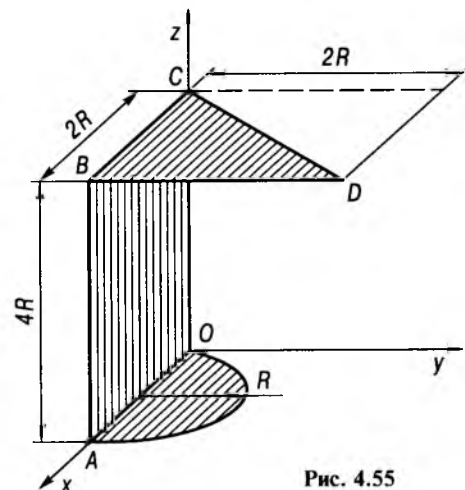


Відповідь:  $x_C = \frac{2R}{9\pi} (3\pi - 8)$ ;

$y_C = \frac{4R}{3\pi}$ .

Відповідь:  $x_C = 6,27$  см;  
 $y_C = -2,56$  см.

4.27. Знайти координати центра ваги однорідного зігнутого листка, який складається з трикутника  $BCD$ , прямокутника  $ABCO$  і півкруга  $AEO$  радіуса  $R = 2$  м. Півкруг  $AEO$  знаходиться у площині  $Oxy$ , трикутник  $BCD$  — у площині, паралельній площині  $Oxy$  (рис. 4.55).



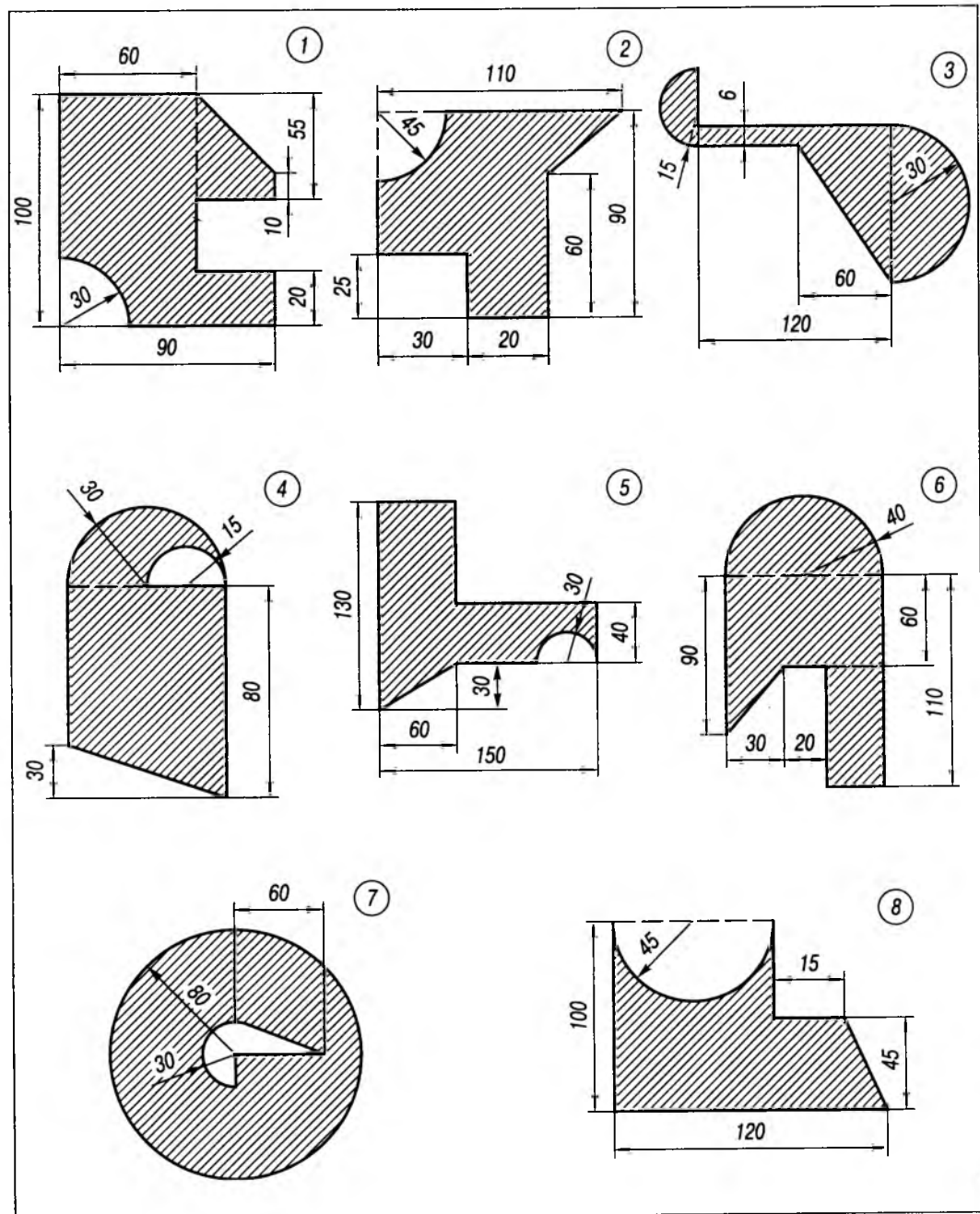


Рис. 4.59 (початок)

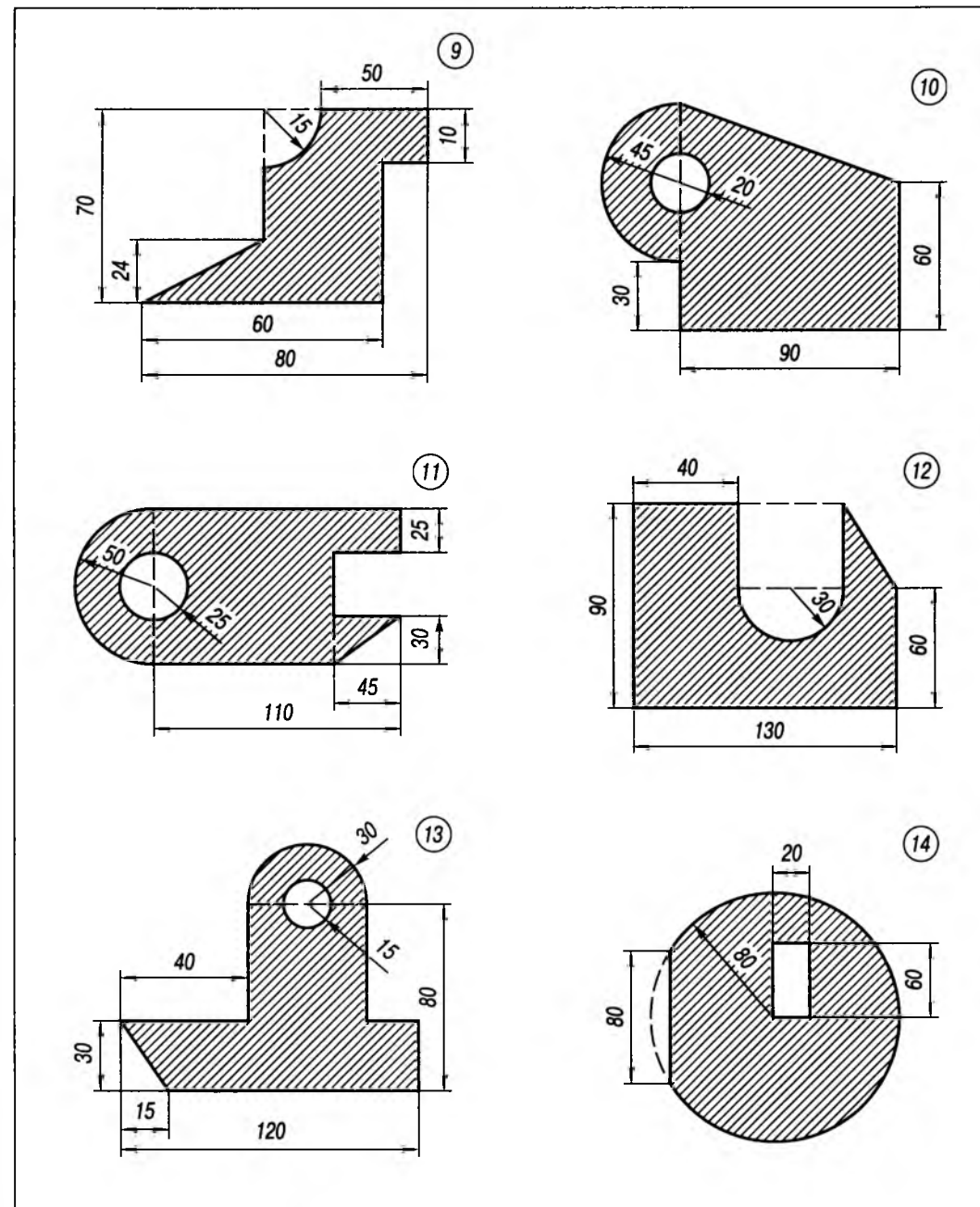


Рис. 4.59 (продовження)

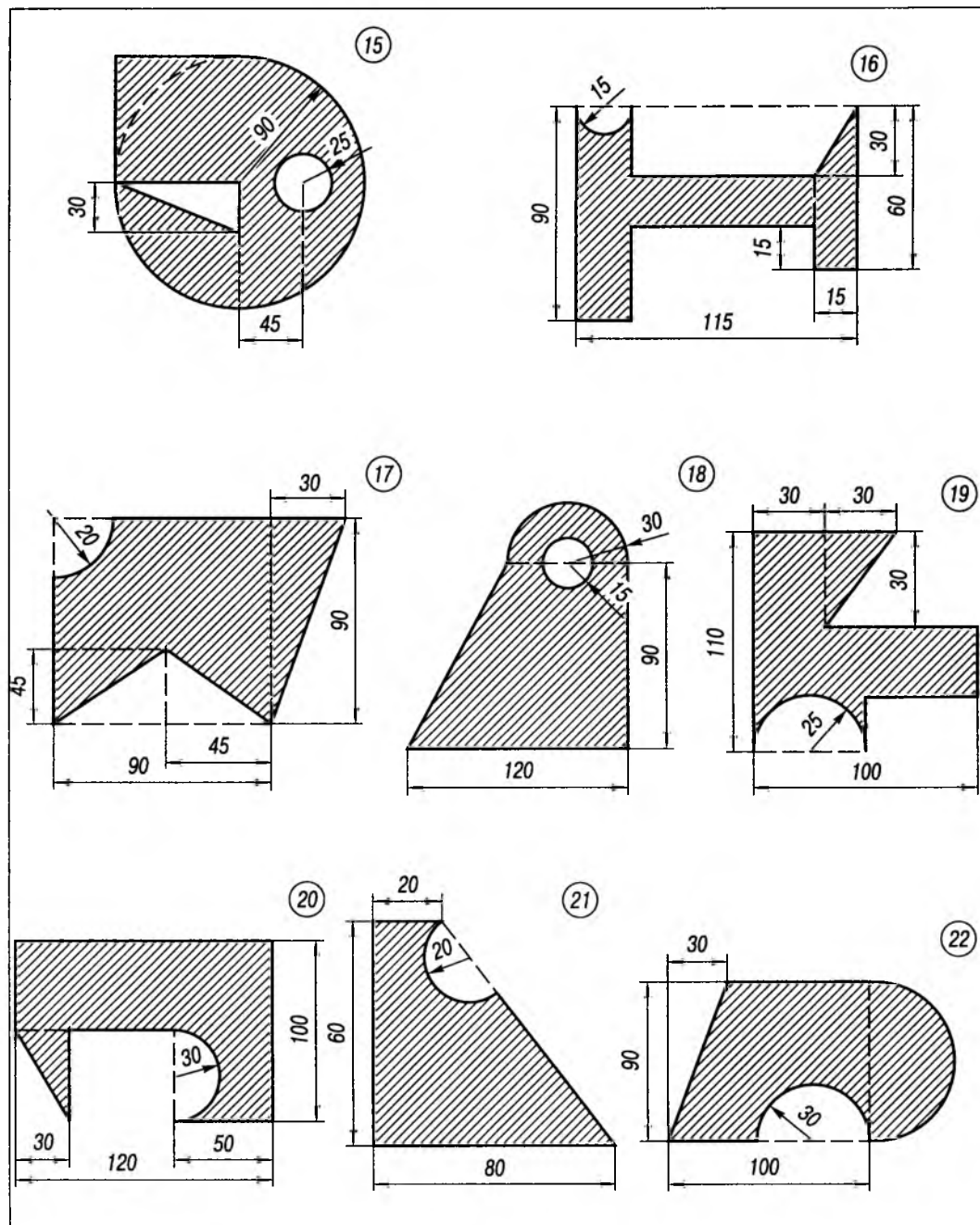


Рис. 4.59 (продовження)

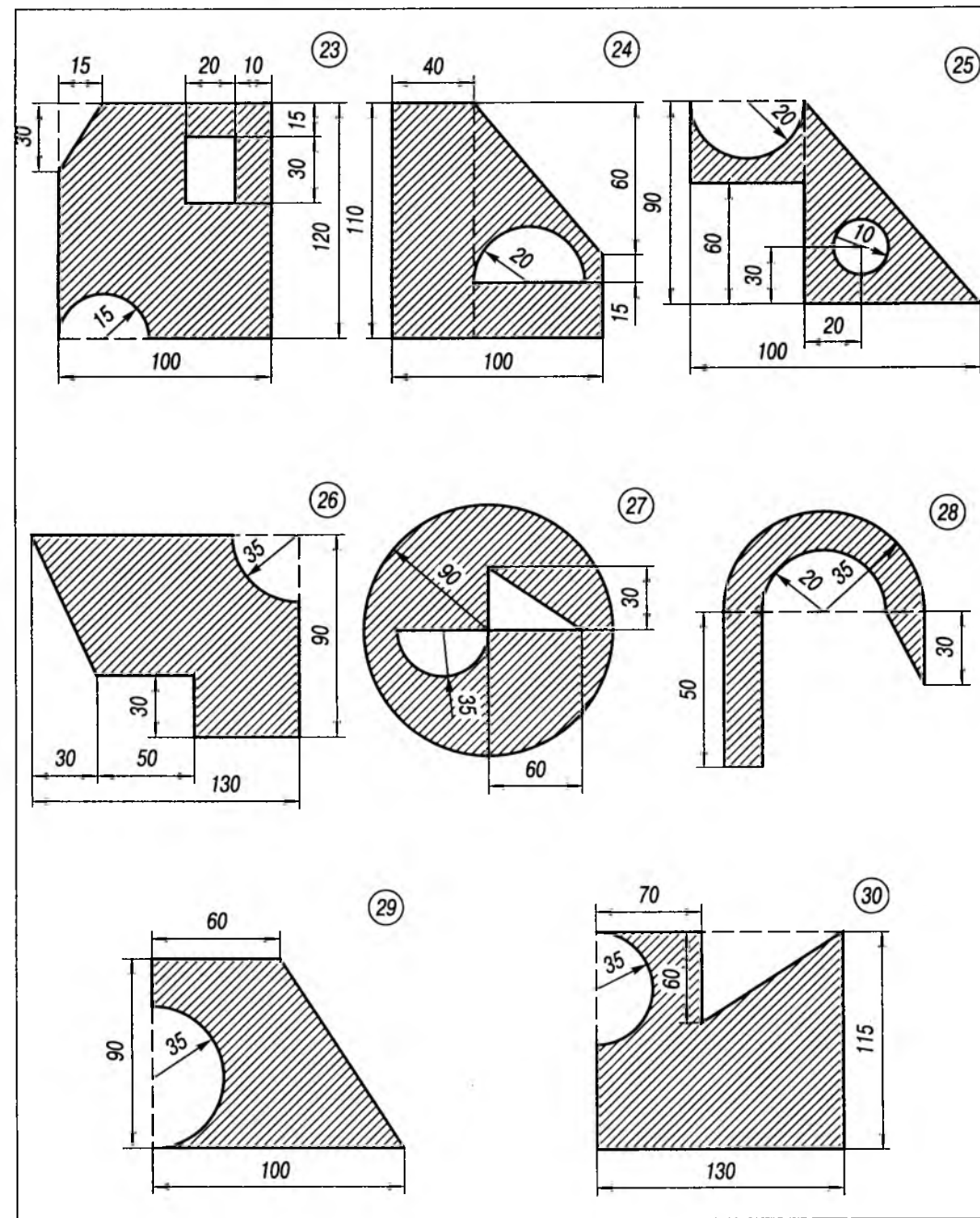


Рис. 4.59 (закінчення)

Розділ 5  
КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 5.1. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Основна задача кінематики точки — вибір способу описування руху і визначення за побудованими кінематичними залежностями таких характеристик точки, як траєкторія, швидкості й прискорення.

Нехай точка рухається у системі відліку  $K$ , що вважається нерухомою. Розглянемо три способи описування цього руху: векторний, координатний та натуральний.

При **векторному** способі задання руху точки  $M$  її положення визначається радіусом-вектором відносно деякої фіксованої точки  $O$  (рис. 5.1), причому цей вектор є векторною функцією часу, тобто

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (5.1)$$

Функція  $\vec{r}(t)$  вважається однозначною, неперервною і принаймні двічі диференційовною. Співвідношення (5.1) називається кінематичним рівнянням руху точки у векторній формі.

Лінія, яку описує під час руху кінець вектора  $\vec{r}(t)$  у просторі, називається траєкторією руху точки. Рухи за траєкторіями поділяються на прямолінійні і криволінійні.

Особливістю **координатного** способу описування положення точки  $M$  у довільний момент часу є визначення її координат у вибраній системі координат (декартовій, сферичній, циліндричній тощо), незмінно пов'язаній з тілом відліку.

У прямокутній декартовій системі координат положення точки  $M$  визначається координатами  $x, y, z$  (рис. 5.2) як функція-ми часу:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \quad (5.2)$$

Функції  $x(t), y(t), z(t)$  вважаються однозначними, неперервними і принаймні двічі диференційовними.

Співвідношення (5.2) називаються кінематичними рівняннями руху точки у координатній декартовій формі.

Зв'язок між векторним та координатним способами задання руху точки визначається співвідношенням

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad (5.3)$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — орти системи координат  $Oxyz$  (рис. 5.2).

При **натуральному** способі задання руху точки  $M$  вважається, що траєкторія точки відома. Положення точки  $M$  у вибраній системі відліку визначають (рис. 5.3) просторова крива (траєкторія точки), початок відліку  $O$  дугової координати  $s$ , додатний напрям відліку дугової координати і дугова координата  $s$  на кривій. При русі точки  $M$  дугова координата  $s$  змінюється з часом:

$$s = s(t). \quad (5.4)$$

При векторному способі задання руху швидкість точки

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}, \quad (5.5)$$

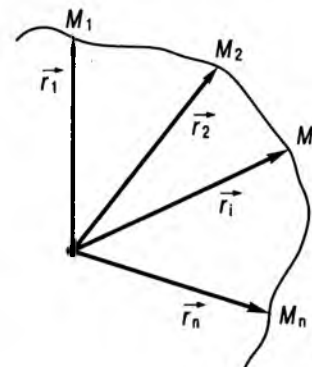


Рис. 5.1

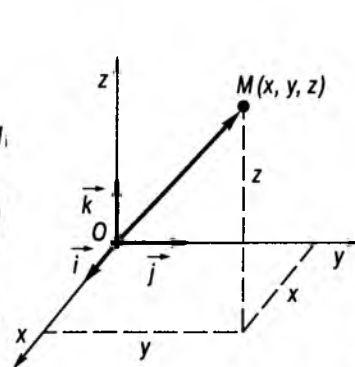


Рис. 5.2

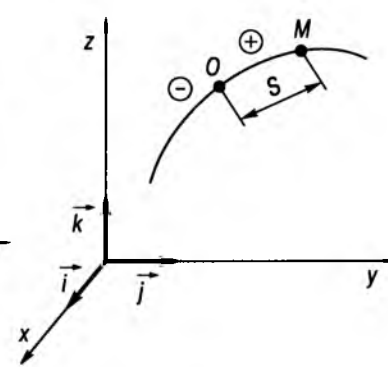


Рис. 5.3

а прискорення

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}. \quad (5.6)$$

Якщо рух точки задано координатним способом, то модуль швидкості

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad (5.7)$$

причому проекції вектора швидкості на відповідні осі описуються рівняннями

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (5.8)$$

Модуль прискорення при координатному способі задання руху точки

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}, \quad (5.9)$$

де проекції вектора прискорення на осі координат

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x}, w_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y}, \\ w_z = \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z}. \quad (5.10)$$

Напрямні косинуси векторів швидкості та прискорення визначаються виразами

$$\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{i}}) = \frac{v_x}{v}, \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{j}}) = \frac{v_y}{v}, \\ \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{k}}) = \frac{v_z}{v}, \quad (5.11)$$

$$\cos(\widehat{\vec{w}, \vec{i}}) = \frac{w_x}{w}, \cos(\widehat{\vec{w}, \vec{j}}) = \frac{w_y}{w}, \\ \cos(\widehat{\vec{w}, \vec{k}}) = \frac{w_z}{w}. \quad (5.12)$$

При натуральному способі задання руху точки модуль швидкості визначають так:

$$\vec{v} = \vec{\tau} \frac{ds}{dt}, \quad (5.13)$$

причому вектор швидкості спрямований вздовж дотичної ( $\vec{\tau}$  — орт дотичної) до траєкторії.

Проекція вектора швидкості точки на напрям дотичної визначається з виразу  $v = \frac{ds}{dt}$ .

При русі точки  $M$  у напрямку зростання дугової координати  $v = \dot{s} > 0$  і вектор  $\vec{v}$  спрямований так, як і вектор  $\vec{\tau}$  (рис. 5.4). При русі точки  $M$  у напрямку зменшення дугової координати  $v = \dot{s} < 0$ , і відповідно вектор  $\vec{v}$  спрямований у бік, протилежний орту  $\vec{\tau}$ .

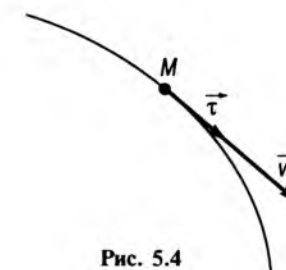


Рис. 5.4



Прискорення точки можна визначити його проекціями на натуральні осі координат, що зв'язані з траєкторією рухомої точки і утворені ортами дотичної ( $\vec{\tau}$ ), нормалі ( $\vec{n}$ ) та бінормалі ( $\vec{b}$ ):

$$w_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \dot{s}, w_n = \frac{\bar{v}^2}{\rho}, w_b = 0, \quad (5.14)$$

де  $\rho$  — радіус кривини траєкторії в даній точці.

**Теорема.** Повне прискорення точки дорівнює векторній сумі дотичного (тангенціального) і нормального прискорень цієї точки:

$$\vec{w} = \vec{w}_{\tau} + \vec{w}_n. \quad (5.15)$$

Зауважимо, що вектор дотичного або тангенціального прискорення  $\vec{w}_{\tau}$  точки  $M$  спрямований вздовж дотичної до траєкторії в бік збільшення дугової координати при  $w_{\tau} > 0$ , а при  $w_{\tau} < 0$  — в бік зменшення дугової координати. Вектор нормального прискорення  $\vec{w}_n$  точки  $M$  спрямований у бік вгнутості траєкторії точки до центра її кривини (тобто збігається за напрямом з вектором нормалі  $\vec{n}$ ) (рис. 5.5).

Модуль повного прискорення і його напрям, оскільки  $\vec{w}_{\tau}$  і  $\vec{w}_n$  перпендикулярні між собою, визначаються за формулами

$$w = \sqrt{w_{\tau}^2 + w_n^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{w_{\tau}}{w_n}, \quad (5.16)$$

де  $\alpha$  — кут між векторами  $\vec{w}$  і  $\vec{w}_n$ .

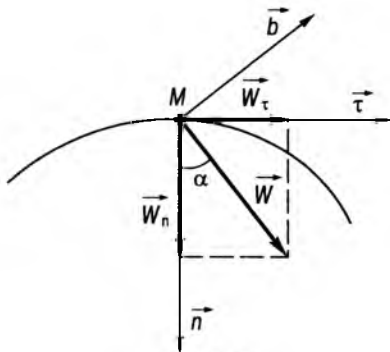


Рис. 5.5

Дотичне прискорення точки характеризує зміну швидкості за модулем, а нормальне прискорення — зміну швидкості за напрямком.

Якщо рух точки заданий координатним способом (5.2), то радіус кривини траєкторії можна отримати за формулою

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{\sqrt{w^2 - w_{\tau}^2}}. \quad (5.17)$$

Тут повне прискорення точки  $w$  визначається з виразу (5.9), а дотична складова прискорення

$$w_{\tau} = \frac{\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z}}{\pm \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}. \quad (5.18)$$

На підставі двох останніх формул радіус кривини

$$\rho = \frac{v^3}{\sqrt{w^2 v^2 - (\vec{v} \cdot \vec{w})^2}}. \quad (5.19)$$

Для плоского руху маємо

$$\rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}. \quad (5.20)$$

Зазначимо, що радіус кривини плоскої лінії, рівняння якої задано у явному вигляді  $y = f(x)$ , визначається з виразу

$$\rho = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}. \quad (5.21)$$

## § 5.2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задачі, що стосуються прямолінійного руху точки, можна поділити на дві групи:

визначення швидкості й прискорення точки за допомогою диференціювання рівняння прямолінійного руху;

визначення закону зміни швидкості та руху на підставі відомого прискорення і початкових значень координати та швидкості шляхом інтегрування.

Задачі про криволінійний рух точки поділяють на чотири типи:

визначення траєкторії, швидкості та прискорення точки з рівнянь руху в декартовій системі координат;

складання рівнянь руху точки, виходячи з її геометричного положення, а потім з них — визначення траєкторії, швидкості та прискорення точки;

задання руху точки натуральним способом;

комбіновані задачі.

**Приклад 5.1.** Положення точки на площині визначається радіусом-вектором

$$\vec{r} = 0,3t^2\vec{i} + 0,1t^3\vec{j}.$$

Визначити швидкість і прискорення точки у момент часу  $t = 2$  с.

Розв'язування. Використовуючи співвідношення (5.3), запишемо рівняння руху в координатній формі (5.2):

$$x(t) = 0,3t^2, \quad y(t) = 0,1t^3.$$

Застосувавши рівняння (5.7) і (5.8), визначимо швидкість точки

$$v_x = \dot{x} = 0,6t, \quad v_y = \dot{y} = 0,3t^2,$$

$$v_x|_{t=2\text{с}} = 1,2, \quad v_y|_{t=2\text{с}} = 1,2,$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1,2^2 + 1,2^2} = 1,7 \text{ м/с}.$$

За формулами (5.9) і (5.10) розрахуємо прискорення точки

$$w_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = 0,6, \quad w_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = 0,6t,$$

$$w_x|_{t=2\text{с}} = 0,6, \quad w_y|_{t=2\text{с}} = 1,2,$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{0,6^2 + 1,2^2} = 1,34 \text{ м/с}^2.$$

**Приклад 5.2.** Точка рухається по гвинтовій лінії згідно з рівняннями

$$x = 3 \cos 4t, \quad y = 3 \sin 4t, \quad z = 2t - 3,$$

де  $x, y, z$  задано у метрах,  $t$  — в секундах. Визначити радіус кривини траєкторії.

Розв'язування. Як показано у співвідношенні (5.17),

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{\sqrt{w^2 - w_{\tau}^2}}.$$

Запишемо перші і другі похідні:

$$\dot{x} = -3 \cdot 4 \sin 4t = -12 \sin 4t, \quad \dot{y} = 12 \cos 4t, \quad \dot{z} = 2;$$

$$\ddot{x} = -12 \cdot 4 \cos 4t = -48 \cos 4t,$$

$$\ddot{y} = -12 \cdot 4 \sin 4t = -48 \sin 4t, \quad \ddot{z} = 0.$$

Визначимо  $v$  за (5.7), а  $w$  — за (5.9):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{12^2 \sin^2 4t + 12^2 \cos^2 4t} + 4 = 17,08 \text{ м/с},$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{(48^2 \cos^2 4t + 48^2 \sin^2 4t)} = 48 \text{ м/с}^2.$$

Застосовуючи вирази (5.14) і (5.15), обчислюємо

$$w_{\tau} = \dot{v} = 0;$$

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_{\tau}^2} = \sqrt{w^2} = 48 \text{ м/с}^2,$$

тому

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{17,08^2}{48} = 6,08 \text{ м}.$$

**Приклад 5.3.** Визначити траєкторію точки  $M$  шатуна кривошипно-шатунного механізму, якщо  $OA = 40$  см,  $AM = MB = 40$  см,  $a = 20$  см,  $\varphi = \frac{\pi}{6}t$  ( $t$  — в секундах),

а також визначити швидкість і прискорення цієї точки у момент часу  $t=1$  с (рис. 5.6, а).

Розв'язування. Складемо рівняння руху точки  $M$  виходячи з геометричних міркувань:

$$x_M = OA \cos \varphi + AM \cos \varphi = 40 \cos \frac{\pi}{6} t + 40 \cos \frac{\pi}{6} t = 80 \cos \frac{\pi}{6} t,$$

$$y_M = MB \sin \varphi = 40 \sin \frac{\pi}{6} t.$$

Отже,  $x_M = 80 \cos \frac{\pi}{6} t$ ,  $y_M = 40 \sin \frac{\pi}{6} t$ .

Визначимо рівняння траєкторії точки  $M$  шляхом виключення з рівнянь руху параметра  $t$ :

$$\cos \frac{\pi}{6} t = \frac{x_M}{80}, \quad \sin \frac{\pi}{6} t = \frac{y_M}{40}.$$

Основну тригонометричну тотожність запишемо у вигляді

$$\cos^2 \frac{\pi}{6} t + \sin^2 \frac{\pi}{6} t = 1$$

або

$$\frac{x_M^2}{80^2} + \frac{y_M^2}{40^2} = 1.$$

Отже, траєкторією точки  $M$  є еліпс з півосями 80 см і 40 см (рис. 5.6, б).

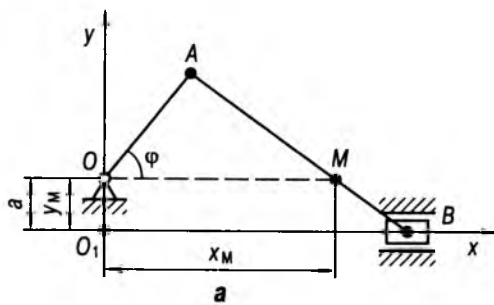


Рис. 5.6

Проекції вектора швидкості точки  $M$  на осі координат

$$v_x = \dot{x}_M = -\frac{\pi}{6} 80 \sin \frac{\pi}{6} t, \quad v_x|_{t=1\text{с}} = -6,67\pi,$$

$$v_y = \dot{y}_M = \frac{\pi}{6} 40 \cos \frac{\pi}{6} t, \quad v_y|_{t=1\text{с}} = 5,77\pi.$$

Модуль швидкості

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 8,82\pi \text{ см/с.}$$

Проекції прискорення точки на осі координат

$$w_x = \dot{v}_x = \ddot{x}_M = -\frac{\pi^2}{36} \cdot 80 \cos \frac{\pi}{6} t,$$

$$w_y = \dot{v}_y = \ddot{y}_M = -\frac{\pi^2}{36} \cdot 40 \sin \frac{\pi}{6} t,$$

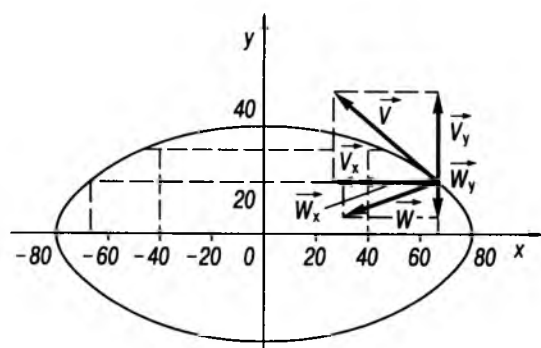
$$w_x|_{t=1\text{с}} = -\frac{\pi^2}{36} \cdot 80 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -1,92\pi^2,$$

$$w_y|_{t=1\text{с}} = -\frac{\pi^2}{36} \cdot 40 \cdot \frac{1}{2} = -0,55\pi^2.$$

Модуль прискорення точки

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{(-1,92\pi^2)^2 + (-0,55\pi^2)^2} = 1,997\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Вектори швидкості й прискорення та їх проекції на осі координат показані на рис. 5.6, б.



б

**Приклад 5.4.** Точка рухається по колу радіуса  $R = 40$  см. Закон її руху по траєкторії  $s = 20 \sin \pi t$  ( $t$  — в секундах,  $s$  — в сантиметрах). Визначити величину і напрям швидкості, дотичного і нормального прискорень, а також повне прискорення у момент часу  $t = 3$  с.

Розв'язування. Рух точки заданий натуральним способом. Тому швидкість точки

$$v = \dot{s} = (20 \sin \pi t)' = 20 \pi \cos \pi t,$$

$$v|_{t=3\text{с}} = -20 \pi \text{ см/с.}$$

Знак “мінус” означає, що вектор швидкості точки напрямлений в бік, протилежний зростанню дугової координати.

Дотичне і нормальне прискорення точки

$$w_\tau = \dot{v} = \ddot{s} = -20\pi^2 \sin \pi t,$$

$$w_\tau|_{t=3\text{с}} = 0,$$

$$w_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(-20\pi)^2}{40} = 10\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Прискорення  $w_\tau = 0$ , тому повне прискорення точки  $w = w_n = 10\pi^2 \text{ см/с}^2$ .

### § 5.3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

**5.1.** Визначити траєкторію точки  $M$  лінійки еліпсографа, її швидкість та прискорення для моменту часу  $t = \frac{1}{3}$  с, якщо  $AB = 20$  см,  $OD = 10$  см,  $AD = DB$ ,  $DM = MB$ . Кут нахилу кривошипа  $OD$  змінюється за законом  $\varphi = \pi t$  рад (рис. 5.7).

Відповідь: траєкторія — еліпс з півосями 5 см і 15 см;  $v = 13\pi \text{ см/с}$ ;  $w = 8,66\pi \text{ см/с}$ .

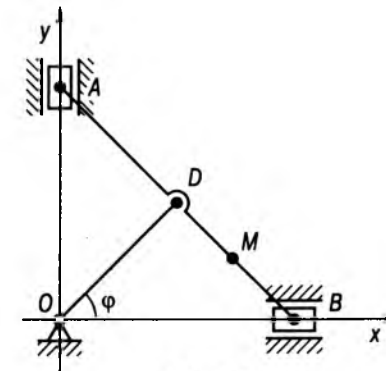


Рис. 5.7

**5.2.** Для точки  $M$  заданого механізму скласти рівняння руху в декартових координатах, обчислити швидкість та прискорення для моменту часу  $t = \frac{1}{6}$  с, якщо  $\varphi = \pi t$  рад,  $l = 40$  см,  $OC = CA = BC = l$ ,  $CM = MA$  (рис. 5.8).

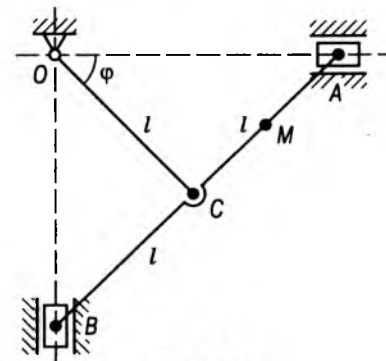


Рис. 5.8

Відповідь:  $x = 60 \cos 2\pi t$ ,  $y = 20 \sin 2\pi t$ ,  $v = 104\pi \text{ см/с}$ ,  $w = 138\pi \text{ см/с}^2$ .

**5.3.** Для точки  $M$  стрижня  $AB$  (рис. 5.9) заданого механізму скласти рівняння руху в декартових координатах, обчислити швидкість та прискорення для моменту часу

$t = \frac{1}{4}$  с, якщо  $\varphi = \pi t$  рад,  $AB = l$ ,  $AM = l/4$ ,  $l = 80$  см.

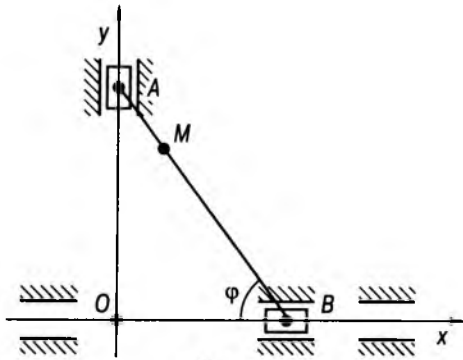


Рис. 5.9

Відповідь:  $x = 20 \cos \pi t$ ,  $y = 20 \sin \pi t$ ,  
 $v = 19,8\pi \text{ см/с}$ ,  $w = 19,8\pi \text{ см/с}^2$ .

5.4. Точка рухається по колу радіуса  $R = 1 \text{ м}$ . Кут між радіусом-вектором точки  $M$  і віссю  $Ox$  змінюється за законом  $\varphi = \pi t/2$  рад. Скласти рівняння руху точки  $M$  у координатній формі, а також визначити швидкість та прискорення точки  $M$  у момент часу  $t = \frac{1}{3} \text{ с}$ .

Відповідь:  $x = \cos \frac{\pi}{2} t$ ,  $y = \sin \frac{\pi}{2} t$ .  
 $v = 0,5 \pi \text{ м/с}$ ,  $w = 0,25 \pi^2 \text{ м/с}^2$ .

5.5. Точка  $M$  рухається по колу радіуса  $R$  за законом  $s = R \sin \omega t$ , де  $\omega = \text{const}$ .

Початок відліку і напрям додатних значень дугової координати вказано на рис. 5.10.

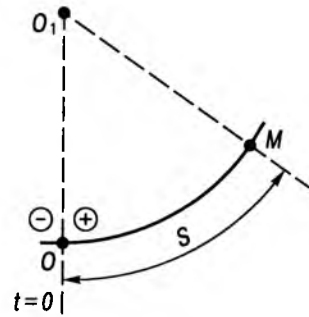


Рис. 5.10

Визначити швидкість і прискорення точки в момент часу  $t = 0$ .

Відповідь: швидкість  $v = R\omega$ , прискорення  $w_\tau = 0$ ,  $w_n = R\omega^2$ .

5.6. Рух точки на площині  $Oxy$  задано рівняннями

$$x = b \sin \omega t, \quad y = d \cos \omega t,$$

де  $b, d$  і  $\omega$  — постійні величини. Визначити рівняння траєкторії у координатній формі, значення швидкості й прискорення в момент часу  $t = \frac{\pi}{2\omega}$ .

Відповідь:  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1$  — рівняння траєкторії. Для  $t = \frac{\pi}{2\omega}$  швидкість  $v = d\omega$ , прискорення  $w = b\omega^2$ .

траєкторії. Для  $t = \frac{\pi}{2\omega}$  швидкість  $v = d\omega$ , прискорення  $w = b\omega^2$ .

## Розділ 6

### НАЙПРОСТІШІ РУХИ ТВЕРДОГО ТІЛА І ЇХ ПЕРЕТВОРЕННЯ

#### § 6.1. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

До найпростіших рухів твердого тіла належать поступальний і обертальний навколо нерухомої осі. *Поступальним* називається такий рух тіла, при якому довільна пряма, проведена в тілі, рухається паралельно самій собі.

Розглянемо рух механізму, що складається з двох кривошипів однакової довжини, насаджених на вали  $O_1$  й  $O_2$  і з'єднаних спарником  $AB$  (рис. 6.1). Очевидно, що при всіх положеннях механізму чотирикутник  $O_1ABO_2$  залишається паралелограмом. Отже, спарник  $AB$  завжди паралельний прямій  $O_1O_2$ , і його рух поступальний.

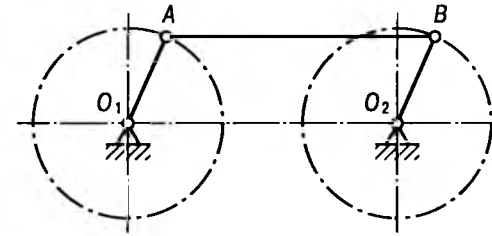


Рис. 6.1

**Теорема.** При поступальному русі тіла всі його точки рухаються з однаковими швидкостями і прискореннями.

Таким чином, вивчення поступального руху твердого тіла зводиться до вивчення руху будь-якої однієї його точки, тобто до задачі кінематики точки.

*Обертальний* рух твердого тіла навколо нерухомої осі — рух, при якому пряма, що проходить через деякі дві точки, під час руху тіла залишається нерухомою. Ця пряма називається віссю обертання твердого тіла.

Положення тіла при його обертанні навколо нерухомої осі визначається *кутом повороту*  $\varphi$ , який безперервно змінюється у часі (рис. 6.2):

$$\varphi = \varphi(t). \quad (6.1)$$

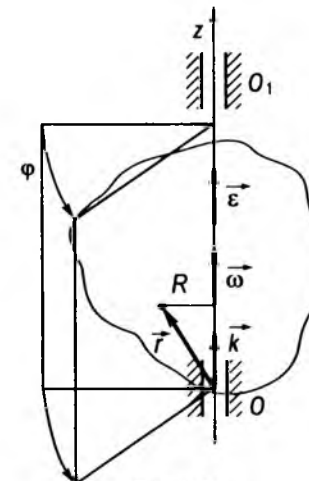


Рис. 6.2

Вираз (6.1) називається кінематичним рівнянням обертального руху тіла навколо нерухомої осі.

*Кутова швидкість* твердого тіла дорівнює першій похідній за часом від кута повороту  $\varphi$ , тобто

$$\omega = \dot{\varphi}. \quad (6.2)$$

Кутова швидкість вимірюється в радіанах за секунду (рад/с або  $\text{с}^{-1}$ ). У техніці кутову швидкість часто задають числом  $n$  обертів за хвилину, а зв'язок між кутовою швидкістю  $\omega$  та  $n$  визначається формулою

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}. \quad (6.3)$$

Якщо при обертанні тіла кутова швидкість стала, то обертання тіла називається рівномірним. При цьому кут повороту змінюється пропорційно часу:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad (6.4)$$

де  $\varphi_0$  — початковий кут повороту.

Кутову швидкість зображують ковзним вектором  $\vec{\omega}$ , напрямленим вздовж осі обертання так, щоб спостерігач, який знаходиться в кінці цього вектора, бачив би обертання тіла проти ходу годинникової стрілки (рис. 6.2).

Кутове прискорення твердого тіла в даний момент часу дорівнює першій похідній за часом від кутової швидкості або другій похідній за часом від кута повороту тіла:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \dot{\dot{\varphi}}. \quad (6.5)$$

Кутове прискорення  $\vec{\varepsilon}$ , як і кутову швидкість  $\vec{\omega}$ , зображують ковзним вектором, напрямленим вздовж осі обертання. Тобто, узагальнюючи, запишемо

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k} = \omega_z \vec{k}, \quad \vec{\varepsilon} = \dot{\omega} \vec{k} = \dot{\omega}_z \vec{k}, \quad (6.6)$$

де  $\vec{k}$  — одиничний орт осі обертання  $Oz$ .

Якщо напрям вектора  $\vec{\varepsilon}$  збігається з напрямом вектора  $\vec{\omega}$ , то обертання тіла називається *прискореним*; якщо напрями  $\vec{\varepsilon}$  та  $\vec{\omega}$  протилежні, то обертання називається *сповільненим*. При  $\varepsilon = 0$  і  $\omega = \text{const}$  обертання

тіла *рівномірно*. Якщо при русі тіла  $\varepsilon = \text{const}$ , то таке обертання називається *рівномірним*.

Отже, для *рівномірного* обертання

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (6.7)$$

Швидкість будь-якої точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, називається *лінійною*. Її обчислюють за формулою Ейлера

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (6.8)$$

де  $\vec{r}$  — радіус-вектор точки, швидкість якої визначається, відносно полюса, що знаходиться на осі повороту тіла. Модуль швидкості точки тіла

$$v = \omega r \sin(\widehat{\omega, \vec{r}}), \quad (6.9)$$

де  $\widehat{\omega, \vec{r}}$  — кут між вектором кутової швидкості тіла та радіусом-вектором точки.

Оскільки  $r \sin(\widehat{\omega, \vec{r}}) = R$ , де  $R$  — радіус обертання точки (найкоротша відстань від точки до осі обертання), то швидкість точки можна визначити як добуток кутової швидкості тіла  $\omega$  на радіус обертання точки  $R$ :

$$v = \omega R. \quad (6.10)$$

Лінійна швидкість точки напрямлена по дотичній до кола радіуса  $R$  у бік обертання, тому перпендикулярна до радіуса обертання  $R$  (рис. 6.3).

Повне прискорення точки дорівнює сумі обертального і доосьового прискорень (рис. 6.4):

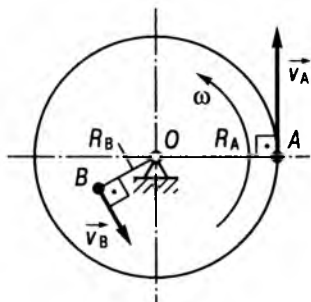


Рис. 6.3

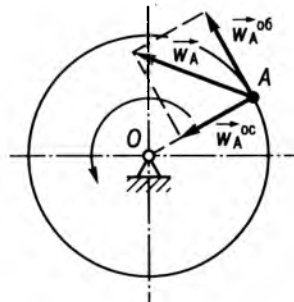


Рис. 6.4

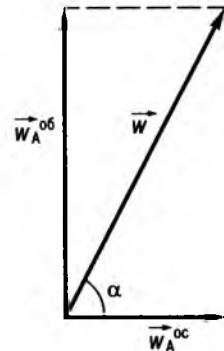


Рис. 6.5

$$\vec{w} = \vec{w}^{ob} + \vec{w}^{oc}, \quad (6.11)$$

де обертальне прискорення

$$\vec{w}^{ob} = \varepsilon \times \vec{r} \quad (6.12)$$

спрямоване по дотичній до траєкторії точки, а доосьове визначається з виразу

$$\vec{w}^{oc} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (6.13)$$

і спрямоване до осі повороту тіла за найкоротшою відстанню (по нормалі до траєкторії точки тіла у бік угнутості).

Прискорення може бути визначено з виразів

$$w^{ob} = \varepsilon R, \quad w^{oc} = \omega^2 R. \quad (6.14)$$

У зв'язку з тим, що  $\vec{w}^{ob} \perp \vec{w}^{oc}$ , модуль повного прискорення точки визначаємо за формулою

$$w = \sqrt{(w^{ob})^2 + (w^{oc})^2} = \sqrt{(\varepsilon R)^2 + (\omega^2 R)^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (6.15)$$

З рис. 6.5 видно, що

$$\text{tg} \alpha = \frac{w_A^{ob}}{w_A^{oc}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (6.16)$$

Задачі, в яких застосовуються механізми для перетворення однієї найпростішої форми руху в іншу, називаються задачами на перетворення найпростіших рухів твердого тіла.

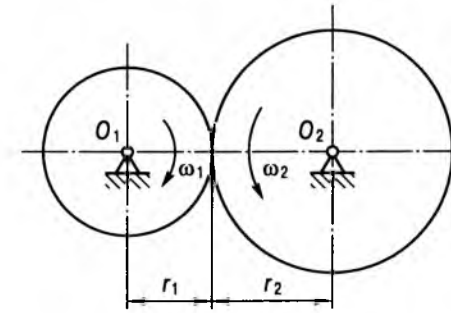


Рис. 6.6

На практиці зустрічаються три групи таких задач:

перетворення одного поступального руху в інший поступальний;

перетворення обертального руху відносно однієї осі в обертальний рух відносно іншої осі;

перетворення поступального руху в обертальний і навпаки.

Відомо, що для передачі обертального руху від одного тіла до іншого (перше називається ведучим, а друге — веденим) використовуються передавальні механізми. Якщо осі ведучого і веденого валів паралельні або перетинаються, то обертання можна передати за допомогою фрикційної або зубчастої передачі. При цьому зчеплення може бути як зовнішнім (рис. 6.6), так і внутрішнім (рис. 6.7).

Перетворення обертальних рухів з паралельними осями можна реалізувати також за допомогою пасових або ланцюгових пе-

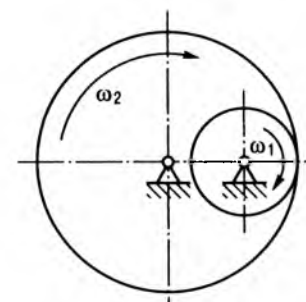


Рис. 6.7

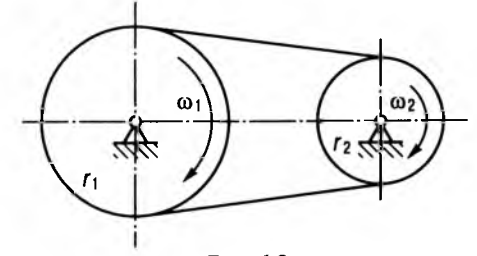


Рис. 6.8

редач. При цьому пасова передача з неперехресним рухом паса (рис. 6.8) еквівалентна внутрішньому зубчастому або фрикційному зчепленню, а з перехресним рухом паса (рис. 6.9) — зовнішньому зчепленню.

При внутрішньому зчепленні і неперехресній пасовій передачі напрями обертання обох коліс збігаються. У разі внутрішнього зчеплення і перехресної пасової передачі напрями обертання коліс протилежні.

Швидкості на ободах зубчастих коліс, які знаходяться у зчепленні, рівні між собою. Швидкості точок на ободах шківів пасової передачі також рівні між собою. Таким чином,

$$v = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2, \quad (6.17)$$

звідки

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (6.18)$$

Отже, кутові швидкості коліс зубчастих, фрикційних, а також пасових та ланцюгових передач обернено пропорційні радіусам коліс.

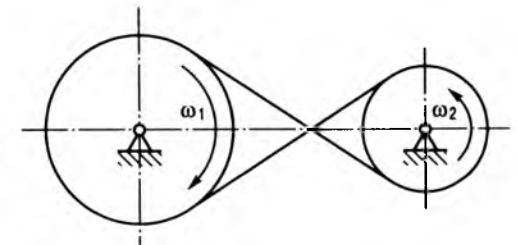


Рис. 6.9

Відношення кутової швидкості ведучого колеса до кутової швидкості веденого колеса називають передавальним числом:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (6.19)$$

Якщо врахувати, що число зубців пропорційне довжинам кіл, а отже, й радіусам, то передавальне число можна визначити через відповідне відношення числа зубців

$$u = \frac{z_2}{z_1}. \quad (6.20)$$

При розв'язуванні задач на цю тему слід використовувати формули кінематики як точки, так і твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

## § 6.2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

**Приклад 6.1.** Записати рівняння обертання диска парової турбіни при її пуску в хід, якщо відомо, що кут повороту пропорційний часу в кубі, а при  $t = 3$  с кутова швидкість диска відповідає  $n = 810$  об/хв.

Розв'язування. За умовою задачі  $\varphi = kt^3$ , де  $k$  — стала величина, яку потрібно визначити.

За означенням кутової швидкості

$$\omega = \dot{\varphi} = 3kt^2,$$

а за формулою (6.3)

$$\omega = \frac{\pi n}{30}.$$

При  $t = 3$  с і  $n = 810$  об/хв, прирівнявши праві частини попередніх виразів, одержимо

$$\frac{\pi \cdot 810}{30} = 27k,$$

звідки  $k = \pi$ .

Підставивши значення  $k$ , отримуємо рівняння обертального руху диска

$$\varphi = \pi t^3.$$

**Приклад 6.2.** Для спарника  $AB$  механізму, показаному на рис. 6.10, визначити швидкість і прискорення точки  $C$ , яка є серединою  $AB$ , якщо  $\varphi = 2t$  рад, а  $O_1A = O_2B = 1$  м,  $AB = 2$  м.

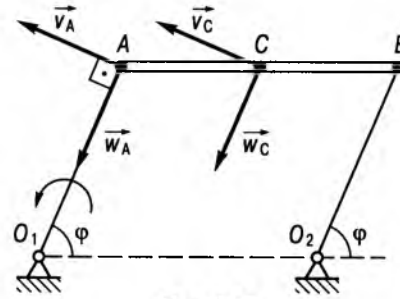


Рис. 6.10

Розв'язування. Спарник  $AB$  рухається поступально, тобто швидкості й прискорення руху всіх його точок однакові. Тому можна визначити швидкість і прискорення однієї його точки, а саме точки  $A$ , що також належить кривошипу  $O_1A$ , який обертається навколо осі  $O_1$ :

$$v_A = \omega \cdot O_1A.$$

Кутову швидкість кривошипа  $O_1A$  визначимо як першу похідну від кута його повороту  $\varphi$ :

$$\omega = \dot{\varphi} = 2 \text{ рад/с}.$$

Тоді  $v_A = 2 \cdot 1 = 2$  м/с. Отже,  $v_C = v_A = 2$  м/с.

Прискорення точки  $A$

$$\vec{w}_A = \vec{w}_A^{ob} + \vec{w}_A^{oc},$$

де  $w_A^{oc} = \omega^2 \cdot O_1A$ ;  $w_A^{ob} = \varepsilon \cdot O_1A$ .

Оскільки  $\varepsilon = \dot{\omega} = 0$ , то отримаємо

$$w_A^{ob} = 0, \quad w_A^{oc} = 2^2 \cdot 1 = 4 \text{ м/с}^2, \\ w_A = w_A^{oc} = 4 \text{ м/с}^2.$$

Отже,  $w_C = w_A = 4$  м/с<sup>2</sup>.

**Приклад 6.3.** Вал починає обертатись зі стану спокою. В перші 20 с він робить 100 обертів. Які його кутова швидкість і кутове прискорення через 20 с?

Розв'язування. Оскільки вал починає обертатись зі стану спокою, то  $\omega_0 = 0$ . За цих умов співвідношення

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (1)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad (2)$$

при  $\varphi_0 = 0$  мають вигляд

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad (3)$$

$$\omega = \varepsilon t. \quad (4)$$

З рівняння (3) визначаємо

$$\varepsilon = \frac{2\varphi}{t^2}, \quad (5)$$

де  $\varphi = 2\pi N$ .

Підставивши в (5) числові значення, розрахуємо

$$\varepsilon = \frac{2 \cdot 2\pi \cdot 100}{20^2} = \pi \text{ рад/с}^2,$$

$$\omega|_{t=20\text{с}} = \varepsilon \cdot 20 = 20\pi \text{ рад/с}.$$

**Приклад 6.4.** Вантаж  $A$ , підвішений до нитки  $AB$  (рис. 6.11, а), яка намотана на барабан, опускається рівноприскорено після стану спокою, при цьому приводить у рух барабан. За перші 3 с барабан робить 9 обертів. Визначити в кінці п'ятої секунди швид-

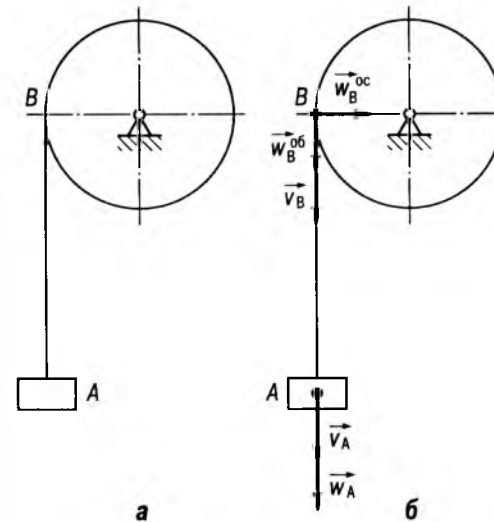


Рис. 6.11

кість і прискорення точки ободу барабана, а також вантажу  $A$  (рис. 6.11, а, б), якщо діаметр барабана  $D = 30$  см.

Розв'язування. Приймаємо  $\varphi_0 = 0$ . При обертанні стану спокою початкова кутова швидкість барабана  $\omega_0 = 0$ . Тому

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad (1) \quad \omega = \varepsilon t; \quad (2)$$

при  $t = 3$  с кут  $\varphi = 2\pi \cdot 9$  рад. Отже, за формулою (1) визначаємо  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon^* = \frac{2\varphi}{t^2} = \frac{2 \cdot 2\pi \cdot 9}{3^2} = 4\pi \text{ рад/с}^2.$$

Скориставшись залежністю (2), розрахуємо кутову швидкість в кінці п'ятої секунди:

$$\omega^* = \omega|_{t=5\text{с}} = 4\pi \cdot 5 = 20\pi \text{ рад/с}.$$

Визначимо прискорення точки  $B$  на п'ятій секунді:

$$\vec{w}_B = \vec{w}_B^{oc} + \vec{w}_B^{ob},$$

$$w_B^{oc} = R\omega^2 = 0,15 \cdot 400\pi^2 = 591,6 \text{ м/с}^2,$$

$$w_B^{ob} = R\varepsilon = 0,15 \cdot 4\pi = 1,88 \text{ м/с}^2,$$

$$w_B = \sqrt{(w_B^{oc})^2 + (w_B^{ob})^2} \approx 591,6 \text{ м/с}^2.$$

Швидкість точки  $B$  в кінці п'ятої секунди

$$v = R\omega^* = 0,15 \cdot 20\pi \approx 9,42 \text{ м/с}.$$

Модуль повного прискорення точки приблизно дорівнює модулю доосьового прискорення.

Швидкість вантажу дорівнює швидкості точки ободу барабана, тобто  $v|_{t=5\text{с}} = 9,42$  м/с. Прискорення вантажу дорівнює обертальному прискоренню точки ободу:  $w_A = w_B^{ob} = 1,88$  м/с<sup>2</sup>. Всі вектори показано на рис. 6.11, б.

Таким чином,  $v = 9,42$  м/с,  $w_B = 591$  м/с<sup>2</sup>,  $w_A = 1,88$  м/с<sup>2</sup>.

**Приклад 6.5.** Для перетворення обертального руху в періодичний зворотно-поступальний рух у двигунах внутрішнього згорання застосовують плоский кривошипно-шатунний механізм, який складається з кривошипа  $OA = r$  (рис. 6.12), що обер-

тається навколо нерухомої осі  $O$ , шатуна  $AB = l$ , з'єднаного шарніром з кривошипом, а також повзуна  $B$ , який з'єднаний з шатуном  $AB$  і рухається в горизонтальних напрямках. Кутова швидкість кривошипа  $OA$  постійна і дорівнює  $\omega_0$ . Визначити рівняння руху, швидкість повзуна  $B$  і його прискорення для моменту часу, коли  $\varphi = 0$ .

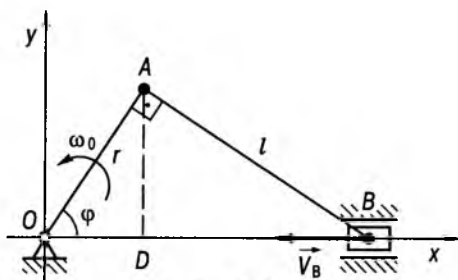


Рис. 6.12

Розв'язування. Залежність кута повороту кривошипа  $OA$ , який обертається навколо нерухомої осі  $O$  з кутовою швидкістю  $\omega_0$ , від часу має вигляд

$$\varphi = \omega_0 t.$$

Для того щоб скласти рівняння руху повзуна  $B$ , запишемо координати точки  $B$ :

$$x_B = OD + DB = OA \cos \varphi + \sqrt{l^2 - (AD)^2} = r \cos \omega_0 t + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t}, \quad y_B = 0.$$

За правилами кінематики точки визначаємо швидкість і прискорення точки  $B$  шляхом диференціювання відповідних рівнянь руху:

$$v_{Bx} = \dot{x}_B = -r\omega_0 \sin \omega_0 t - (r^2 \omega_0 \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t) (l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t)^{-\frac{1}{2}} = -r\omega_0 \left[ 1 + \frac{r \cos \omega_0 t}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t}} \right] \sin \omega_0 t, \quad v_{By} = \dot{y}_B = 0.$$

При  $\varphi = 0$  маємо  $v_B = 0$ .

Прискорення

$$w_{Bx} = \ddot{x} = -r\omega_0^2 \cos \omega_0 t - \frac{r^2 \omega_0^2}{2} \times \left[ \frac{2 \cos 2\omega_0 t}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t}} + \frac{r^2 \sin^2 2\omega_0 t}{2\sqrt{(l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t)^3}} \right],$$

$$w_{By} = \ddot{y} = 0.$$

Для  $\varphi = 0$  отримуємо

$$w_B = -r\omega_0^2 \left( 1 + \frac{r}{l} \right).$$

Таким чином,  $v_B = 0$ ,  $w_B = -r\omega_0^2 \left( 1 + \frac{r}{l} \right)$ .

**Приклад 6.6.** Редуктор (рис. 6.13) забезпечує обертання валів  $I$  і  $II$ , які мають спільну геометричну вісь, з різними кутовими швидкостями. Визначити число обертів за хвилину вала  $II$ , що відповідає частоті обертання вала  $I$ , якщо  $n_1 = 40$  об/хв, а число зубців коліс  $z_1 = 12$ ,  $z_2 = 60$ ,  $z_3 = 20$ ,  $z_4 = 80$ .

Розв'язування. Передавальне число редуктора

$$u = \frac{\omega_I}{\omega_{II}}.$$

При цьому кутові швидкості ведучого і веденого валів дорівнюють кутовим швидкостям жорстко з'єднаних з ними коліс, а саме:

$$\omega_I = \omega_1, \quad \omega_{II} = \omega_4.$$

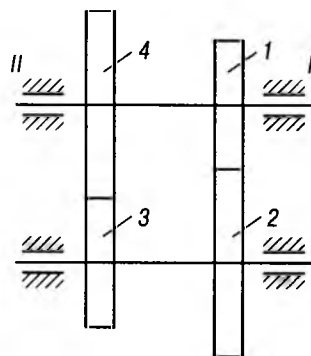


Рис. 6.13

Відношення кутових швидкостей першої пари (1-2) зчеплених зубчастих коліс

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Аналогічно для другої пари (3-4) зчеплених коліс записуємо

$$\frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_4}{z_3}.$$

Колеса 2 і 3 жорстко зчеплені на спільному валу, тому  $\omega_2 = \omega_3$ . Перемноживши отримані вирази, одержимо

$$\frac{\omega_1 \cdot \omega_3}{\omega_2 \cdot \omega_4} = \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}, \quad \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}.$$

Останній вираз визначає передавальне число редуктора, який складається з двох пар коліс 1-2 і 3-4.

Враховуючи, що  $\omega_4 = \frac{2\pi n_4}{60}$ , а  $\omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60}$ , знаходимо

$$n_4 = n_1 \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} = 20 \text{ об/хв}.$$

**Приклад 6.7.** Визначити для конічної передачі (рис. 6.14) кутову швидкість обертання навколо нерухомої осі  $OO_2$  колеса 2 радіуса  $r_2 = 1$  м, якщо колесо 1 радіуса  $r_1 = 0,5$  м обертається навколо нерухомої осі  $OO_1$  з кутовою швидкістю  $\omega_1 = 2$  рад/с.

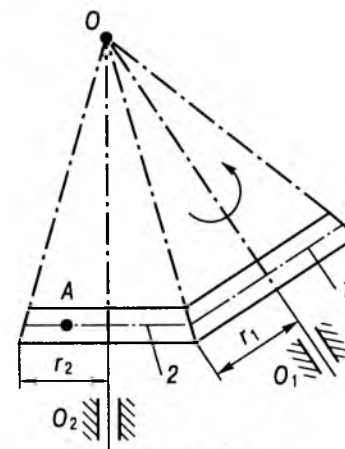


Рис. 6.14

Обчислити швидкість точки  $A$ , віддаленої на  $\frac{r_2}{2}$  від осі обертання  $OO_2$ .

Розв'язування. Визначимо кутову швидкість колеса 2 за співвідношенням

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1},$$

звідки

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{r_2} = \frac{2 \cdot 0,5}{1} = 1 \text{ рад/с}.$$

Швидкість точки  $A$  колеса 2 знайдемо за формулою

$$v_A = \omega_2 \frac{r_2}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = 0,5 \text{ м/с}.$$

Таким чином,  $\omega_2 = 1$  рад/с,  $v_A = 0,5$  м/с.

### § 6.3. ЗАДАЧІ

#### ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

**6.1.** В період розгону махове колесо обертається за законом  $\varphi = \frac{9}{32} t^3$  рад. Визначити лінійну швидкість та прискорення точки, яка знаходиться на відстані 0,8 м від осі обертання, в той момент, коли її дотичне прискорення дорівнює нормальному.

Відповідь:  $v = 1,2$  м/с,  $w = 2,54$  м/с<sup>2</sup>.

**6.2.** Маховик радіуса  $R = 1$  м обертається за законом  $\varphi = t^3 - 3t^2$  рад ( $t$  — в секундах). Визначити доосьове прискорення точки ободу маховика в момент часу, коли обертальне прискорення цієї точки дорівнює нулеві.

Відповідь:  $w^{oc} = 9$  м/с<sup>2</sup>.

**6.3.** Ланка  $OA$  паралелограма  $OABO_1$  (рис. 6.15) обертається згідно з законом  $\varphi = 4t - t^2$  рад ( $t$  — в секундах). Визначити швидкість точки  $M$ , а також її дотичне і доосьове прискорення в момент часу  $t = 1$  с, якщо  $OA = AM = MB = 0,5$  м, а ланка  $OA$  розташована вертикально.

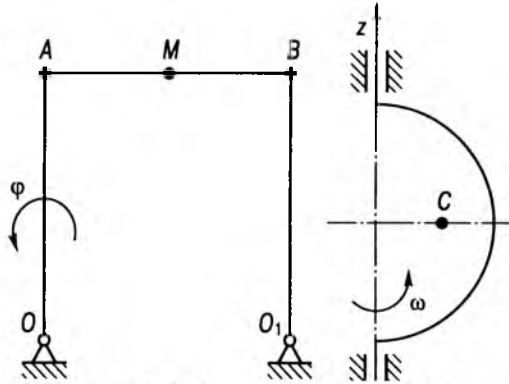


Рис. 6.15

Рис. 6.16

Відповідь:  $v_M = 1 \text{ м/с}$ ,  $w_M^{об} = 1 \text{ м/с}^2$ ,  $w_M^{ос} = 2 \text{ м/с}^2$ .

6.4. Пластина у вигляді напівдиска радіуса  $R = 1 \text{ м}$  рівномірно обертається навколо вертикальної осі  $Oz$  із кутовою швидкістю  $\omega = 1 \text{ рад/с}$  (рис. 6.16). Визначити прискорення точки  $C$  (центра ваги пластини).

Відповідь:  $w_C = \frac{4}{3\pi} \text{ м/с}^2$ .

6.5. Диск радіуса  $R = 0,5 \text{ м}$  обертається навколо осі, яка перпендикулярна до площини диска. Відомі прискорення точки  $B$  ободу диска  $w_B = 16 \text{ м/с}^2$  і кут  $\alpha = 60^\circ$  між  $\vec{w}_B$  і радіусом диска. Визначити кутову швидкість  $\omega$  та кутове прискорення  $\epsilon$  диска.

Відповідь:  $\omega = 4 \text{ рад/с}$ ,  $\epsilon = 16\sqrt{3} \text{ рад/с}^2$ .

6.6. Чому дорівнюють кутові швидкості секундної і хвилинної стрілок годинника?

Відповідь:  $\omega_c = 0,104 \text{ рад/с}$ ,  $\omega_{хв} = 0,00173 \text{ рад/с}$ .

6.7. Маховик обертається навколо нерухомої осі, при цьому точка, яка віддалена від осі обертання на відстань  $r = 0,3 \text{ м}$ , рухається за законом  $s = 3t + t^2$  ( $t$  — в секундах,  $s$  — в метрах). Знайти кутову швидкість і кутове прискорення маховика в момент часу  $t = 3 \text{ с}$ .

Відповідь:  $\omega = 100 \text{ рад/с}$ ,  $\epsilon = 60 \text{ рад/с}^2$ .

6.8. Колесо обертається навколо нерухомої осі з постійним кутовим прискоренням. На якій відстані від осі обертання знаходиться точка, прискорення якої через 4 с після початку обертання зі стану спокою має значення  $9 \text{ см/с}^2$ , а кутова швидкість тіла  $0,3 \text{ рад/с}$ ?

Відповідь:  $R = 76,82 \text{ см}$ .

6.9. Диск радіуса  $R = 6 \text{ см}$  обертається з постійним кутовим прискоренням і робить 50 обертів за 250 с після початку руху зі стану спокою. Знайти швидкість точки, яка лежить на ободі диска.

Відповідь:  $v = 15,08 \text{ см/с}$ .

6.10. Диск обертається навколо нерухомої осі, яка проходить через його центр і перпендикулярна до площини диска. Визначити обертальне і повне прискорення точки  $B$  на ободі диска, якщо доосьове прискорення середини радіуса диска дорівнює  $9 \text{ см/с}^2$  і утворює з повним прискоренням кут  $30^\circ$ .

Відповідь:  $w_B^{об} = 6\sqrt{3} \text{ см/с}^2$ ,  $w_B^{ос} = 12\sqrt{3} \text{ см/с}^2$ .

6.11. Зігнутий стрижень  $ABC$  (рис. 6.17) починає обертатися зі стану спокою навколо осі  $O_1O_2$ ; кутове прискорення стали,  $\epsilon = 3 \text{ рад/с}^2$ ;  $AB = 10 \text{ см}$ ,  $BC = 4 \text{ см}$ . Визначити обертальне і доосьове прискорення точки  $C$  в кінці шостого оберту стрижня.

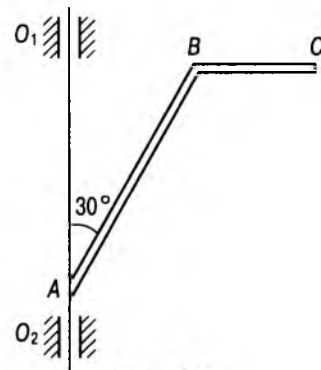


Рис. 6.17

Відповідь:  $w_C^{об} = 27 \text{ см/с}^2$ ,  $w_C^{ос} = 648\pi \text{ см/с}^2$ .

6.12. Диск радіуса 8 см обертається навколо осі  $Oz$  за законом  $\varphi = t^3 \text{ рад/с}$ . Вісь перпендикулярна до його площини і віддалена від центра  $C$  диска на відстань  $OC = 4 \text{ см}$ . Визначити швидкості та прискорення кінців  $M$  і  $N$  діаметра, що проходить через точку  $O$  диска в момент часу  $t = 2 \text{ с}$ , якщо  $ON > OM$ .

Відповідь:  $v_M = 16 \text{ см/с}$ ,  $v_N = 48 \text{ см/с}$ ,  $w_M = 16\sqrt{17} \text{ см/с}^2$ ,  $w_N = 48\sqrt{17} \text{ см/с}^2$ .

6.13. Стрижень  $OC$  (рис. 6.18), що обертається навколо осі  $O$  зі сталою кутовою швидкістю  $\omega_0$ , переміщує вздовж прямої  $AB$  кільце  $M$ , яке з'єднує стрижень  $OC$  і зігнутий під прямим кутом нерухомий стрижень  $OAB$ ,  $OA = a$ . Визначити рівняння руху кільця  $M$ , а також його швидкість і прискорення в той момент, коли  $OM = l$ , якщо у початковий момент стрижень  $OC$  був напрямлений вздовж  $Oy$ .

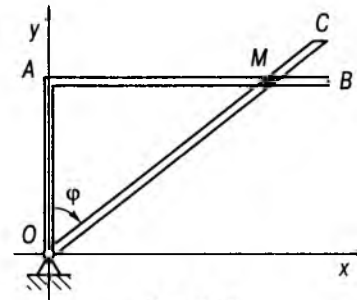


Рис. 6.18

Відповідь:  $x = a \text{ tg}(\omega_0 t)$ ,  $y = a$ ;  
 $v = \frac{l^2}{a} \omega_0$ ;  $w = \frac{2l^2}{a^2} \omega_0^2 \sqrt{l^2 - a^2}$ .

6.14. Механізм складається з двох блоків  $A$  і  $B$  (рис. 6.19), які обертаються навколо нерухомих осей. Блоки з'єднані нерозтяжним пасом. Рух передається вантажу  $D$ . Швидкість вантажу  $C$  змінюється за законом  $v_C = 36t^2 \text{ см/с}$ , радіуси блоків  $R_A = 40 \text{ см}$ ,

$r_A = 30 \text{ см}$ ,  $R_B = 25 \text{ см}$ ,  $r_B = 10 \text{ см}$ . Визначити для моменту часу  $t = 1,2 \text{ с}$  швидкість вантажу  $D$  і прискорення точки  $M$ , яка належить блоку  $B$ .

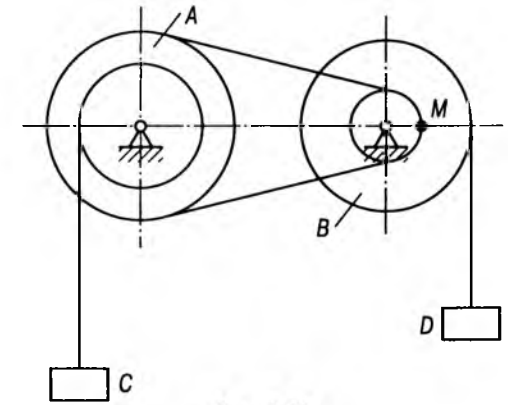


Рис. 6.19

Відповідь:  $v_D = 207,36 \text{ см/с}$ ,  $w_M^n = 687,971 \text{ см/с}^2$ ,  $w_{M\tau} = 207,360 \text{ см/с}^2$ ,  $w_M = 718,541 \text{ см/с}^2$ .

6.15. Вантажі  $A$  і  $B$  (рис. 6.20) з'єднані нерозтяжним тросом, що намотаний на ступінчастий барабан. Вантаж  $A$  піднімається з постійним прискоренням  $w_A = 3 \text{ м/с}^2$ . Визначити кутову швидкість і прискорення барабана у момент, коли вантаж  $B$  має швидкість  $v_B = 6 \text{ м/с}$  ( $r_1 = 0,2 \text{ м}$ ,  $r_2 = 0,6 \text{ м}$ ).

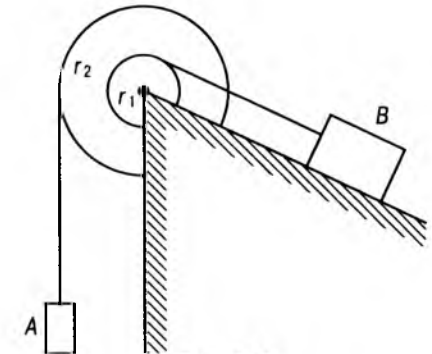


Рис. 6.20

Відповідь:  $\omega = 30 \text{ рад/с}$ ,  $\epsilon = 5 \text{ рад/с}^2$ .

6.16. Показати, що передавальне відношення одноступінчастої конічної передачі дорівнює  $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$  (рис. 6.21).

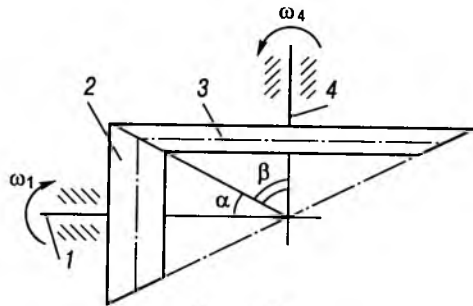


Рис. 6.21

6.17. В редукторі (рис. 6.22) із зовнішнім (1, 2) і внутрішнім (2, 3) зачепленнями шестірень вал, на якому жорстко закріплена шестірня 1, обертається за законом  $\varphi(t) = bt^2$  рад зі стану спокою. Визначити кутову швидкість і кутове прискорення шестірни 3, швидкість точки B (точка дотику шестірень 2 і 3). Радіуси коліс відповідно  $r_1, r_2, r_3$ .

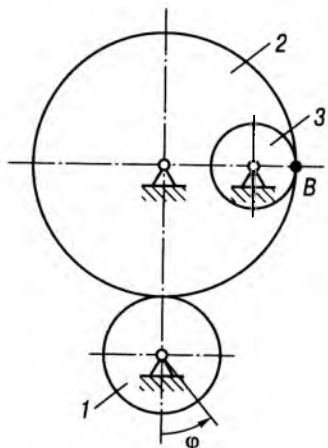


Рис. 6.22

Відповідь:  $\omega_3 = 2bt \frac{r_1}{r_3}$ ,  $\varepsilon = 2b \frac{r_1}{r_3}$ ,  
 $v_B = 2btr_1$ .

6.18. Редуктор складається з чотирьох циліндричних шестірень з числом зубців  $z_1, z_2, z_3, z_4$  (рис. 6.23). Вал 1 обертається за законом  $\varphi_1 = t^2 - 3t^3$  рад зі стану спокою. Всі шестірни жорстко закріплені на валах. Визначити кутову швидкість і кутове прискорення шестірни 3 для моменту часу  $t = 1$  с, якщо  $z_1 = 6, z_2 = 18, z_3 = 16, z_4 = 12$ .

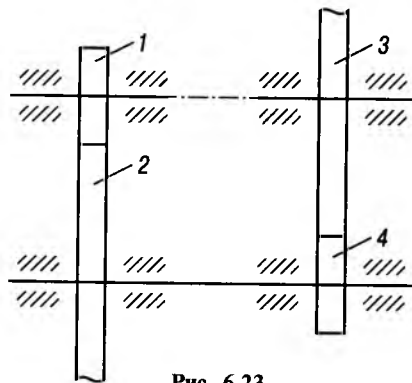


Рис. 6.23

Відповідь:  $\omega = 1,75$  рад/с,  $\varepsilon = 4$  рад/с<sup>2</sup>.

6.19. Обертання ведучого вала I електричної лебідки (рис. 6.24) задано рівняннями  $\varphi = \frac{\pi}{8}t^2$  рад. На ведучому I і на веденому

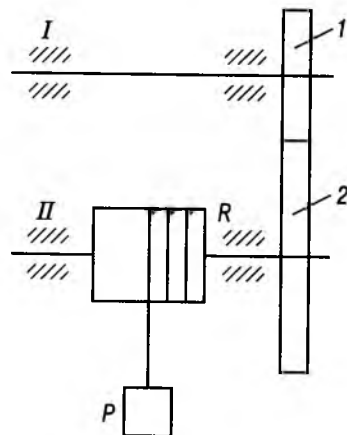


Рис. 6.24

валах II жорстко насаджено шестірню 1 з числом зубців  $z_1$ , шестірню 2 з числом зубців  $z_2$  та барабан радіуса R метрів. На барабан намотано канат з вантажем P на вільному кінці. Знайти швидкість та прискорення вантажу P залежно від t.

Відповідь:  $v_P = \frac{\pi}{4} \frac{z_1}{z_2} R t$  м/с,

$w_P = \frac{\pi}{4} \frac{z_1}{z_2} R$  м/с<sup>2</sup>.

6.20. Стрижень OA обертається навколо нерухомої осі Oz, що проходить через кінець O стрижня перпендикулярно до OA. У певний момент часу обертальне прискорення точки B стрижня дорівнює  $5 \text{ см/с}^2$ , а доосьове —  $12 \text{ см/с}^2$ . Визначити швидкості точок A і B та повне прискорення точки A, якщо  $OB = 2AB = 6 \text{ см}$ .

Відповідь:  $v_A = 9\sqrt{2} \text{ см/с}$ ,  
 $v_B = 6\sqrt{2} \text{ см/с}$ ,  $w_A = 19,5 \text{ см/с}^2$ .

## Розділ 7 СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ

### § 7.1. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Нехай точка M рухається у рухомій системі координат Oxyz, яка здійснює певний рух відносно нерухомої системи координат Aξηζ. У даному випадку йдеться про складний рух точки.

Рух точки у нерухомій системі координат Aξηζ називають *абсолютним*. Відповідно абсолютними називають траєкторію, швидкість і прискорення цієї точки (рис. 7.1).

Рух точки у рухомій системі координат Oxyz називають *відносним*. Відносними називають траєкторію, швидкість і прискорення цієї точки.

Рух рухомої системи координат Oxyz (або жорстко зв'язаного з нею тіла G) відносно нерухомої системи відліку Aξηζ є для рухомої точки *переносним* рухом, тобто це рух тієї точки рухомої системи координат, з якою в даний момент часу збігається рухома точка M. Відповідно швидкість і прискорення точки, жорстко зв'язаної з рухомою системою координат, в якій у даний момент часу знаходиться рухома точка, називають *переносними*.

Для кінематичних характеристик точки M будемо використовувати такі позначення:

$\vec{v}_a$  і  $\vec{w}_a$  — абсолютні швидкість та прискорення;

$\vec{v}_r$  і  $\vec{w}_r$  — відносні швидкість та прискорення;

$\vec{v}_e$  і  $\vec{w}_e$  — переносні швидкість та прискорення;

$\vec{\rho}$  — радіус-вектор точки M у рухомій системі координат, а x, y, z — його проекції на осі цієї системи (тобто координати точки M);

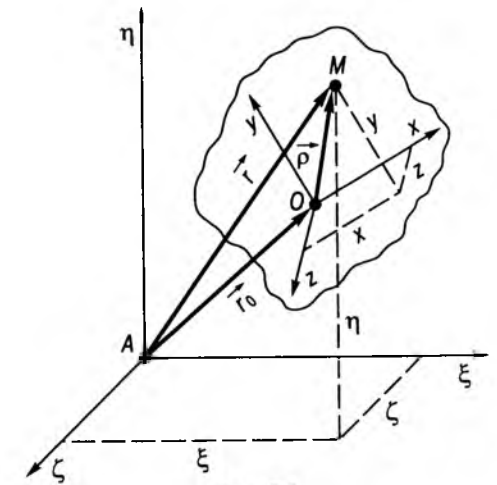


Рис. 7.1



$\vec{r}$  — радіус-вектор точки  $M$  у нерухомій системі координат, а  $\xi, \eta, \zeta$  — його проєкції на осі цієї системи (тобто координати точки  $M$  у нерухомій системі).

Залежності від часу координат точки  $M$  у нерухомій системі координат  $A\xi\eta\zeta$

$$\xi = \xi(t), \eta = \eta(t), \zeta = \zeta(t), \quad (7.1)$$

враховуючи введені системи відліку, називають *кінематичними рівняннями абсолютного руху* точки.

Аналогічні залежності у рухомій системі координат

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (7.2)$$

називають *кінематичними рівняннями відносного руху* точки.

Основною задачею кінематики складного руху є встановлення залежностей між кінематичними характеристиками абсолютного, переносного та відносного рухів.

**Теорема про додавання швидкостей.** Абсолютна швидкість  $\vec{v}_a$  точки при складному русі дорівнює векторній сумі відносної  $\vec{v}_r$  та переносної  $\vec{v}_e$  швидкостей:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \quad (7.3)$$

**Теорема про додавання прискорень (теорема Коріоліса).** Абсолютне прискорення точки при складному русі дорівнює векторній сумі відносного, переносного прискорень та прискорення Коріоліса, тобто

$$\vec{w}_a = \vec{w}_e + \vec{w}_r + \vec{w}_c. \quad (7.4)$$

Останній доданок у (7.4) називають *прискоренням Коріоліса*:

$$\vec{w}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r. \quad (7.5)$$

Розглянемо умови, за яких прискорення Коріоліса дорівнює нулеві. Для цього запишемо модуль  $\vec{w}_c$ , користуючись правилом векторного добутку:

$$w_c = 2\omega_e v_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_r}). \quad (7.6)$$

Отже,  $w_c = 0$ , якщо:

1) вектор  $\vec{\omega}_e$  дорівнює нулеві, тобто переносний рух є поступальним;

2) у даний момент часу відносна швидкість  $\vec{v}_r = 0$ ;

3)  $\sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_r}) = 0$ , тобто вектори  $\vec{\omega}_e$  та  $\vec{v}_r$  є колінеарними.

## § 7.2. МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Розв'язання задач кінематики складного руху точки передбачає отримання кінематичних характеристик точки у будь-який момент часу  $t$ .

Послідовність розв'язання задач кінематики складного руху точки може бути така:

1) вводимо дві системи координат, одну з них приймаємо за нерухому ( $A\xi\eta\zeta$ ), а другу за рухому ( $Oxuz$ ), яка жорстко зв'язана з рухомим тілом;

2) розкладаємо абсолютний рух точки на два складових рухи: відносний і переносний;

3) визначаємо відносний рух точки. Для цього уявно зупиняємо переносний рух. Знаходимо положення, швидкість і прискорення точки у відносному русі для заданого моменту часу за правилами кінематики точки;

4) визначаємо переносний рух, для чого уявно зупиняємо точку в її відносному русі. Знаходимо швидкість і прискорення переносного руху точки за правилами кінематики точки твердого тіла як швидкість і прискорення тієї точки рухомої системи координат, жорстко зв'язаної з цим тілом, з якою в даний момент часу збігається досліджувана точка;

5) застосовуємо теорему про додавання швидкостей (7.3) і визначаємо абсолютну швидкість точки;

6) визначаємо прискорення Коріоліса за формулами (7.5) і (7.6);

7) за теоремою про додавання прискорень (7.4) визначаємо абсолютне прискорення точки. У ряді випадків для визначення модуля абсолютного прискорення точки

доцільно використовувати метод проєкцій. Нагадаємо, що цей метод полягає у послідовному проєктуванні  $w_a$  векторного виразу (7.4) на осі нерухомої системи координат, в результаті чого отримуємо проєкції абсолютного прискорення на вказані осі  $w_{a\xi}$ ,  $w_{a\eta}$ ,  $w_{a\zeta}$ . Далі знаходимо модуль абсолютного прискорення за відомою формулою

$$w_a = \sqrt{w_{a\xi}^2 + w_{a\eta}^2 + w_{a\zeta}^2}. \quad (7.7)$$

## § 7.3. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

**Приклад 7.1.** Візок  $D$  рухається поступально за законом  $\xi(t) = 10\pi t^2$  см. По дузі радіуса  $R = 5$  см переміщується точка  $M$  за законом  $OM = s(t) = 5\pi t^2$  см. Визначити абсолютне прискорення точки  $M$  в положенні, показаному на рис. 7.2.

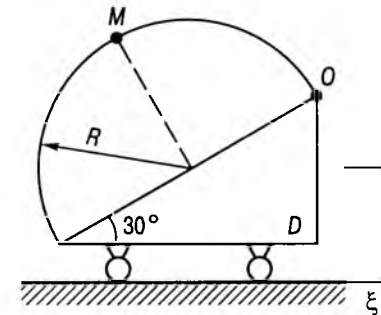


Рис. 7.2

Розв'язування. Вводимо дві системи координат:  $O_1\xi\eta$  — нерухому;  $O_2xuz$  — рухому, зв'язану з тілом (рис. 7.3).

За об'єкт дослідження вибираємо точку  $M$ , яка знаходиться у складному русі. Відносним рухом точки  $M$  є криволінійний рух по дузі радіуса  $R$  за законом  $s_r = OM = s(t) = 5\pi t^2$  см. Визначимо відносну швидкість:

$$v_r = \dot{s}_r = 5\pi \text{ см/с.}$$

Вектор відносної швидкості напрямлений по дотичній до дуги радіуса  $R$  у бік руху,

тобто від точки  $O$ . Відносне прискорення точки  $M$  подамо як векторну суму дотичного (тангенціального)  $\vec{w}_{r\tau}$  та нормального  $\vec{w}_{rn}$  прискорень:

$$\vec{w}_r = \vec{w}_{r\tau} + \vec{w}_{rn},$$

які обчислюються за формулами

$$w_{r\tau} = \dot{s}_r = \dot{v}_r = 0,$$

$$w_{rn} = \frac{v_r^2}{\rho} = \frac{(5\pi)^2}{5} = 5\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Переносний рух — поступальний рух візка  $D$  за законом  $\xi = 10\pi t^2$ . Переносні швидкість і прискорення точки  $M$  визначаємо як швидкість і прискорення точки тіла, з якою збігається точка  $M$ , тому

$$v_e = \dot{\xi} = 20\pi t \text{ см/с}, \quad w_e = \ddot{\xi} = 20\pi \text{ см/с}^2.$$

Визначаємо прискорення Коріоліса

$$\vec{w}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r.$$

Оскільки переносний рух не обертальний, тобто  $\omega_e = 0$ , то  $w_c = 0$ . Всі вектори показано на рис. 7.3. За теоремою Коріоліса запишемо

$$\vec{w}_a = \vec{w}_r + \vec{w}_e + \vec{w}_c, \text{ або } \vec{w}_a = \vec{w}_r + \vec{w}_e,$$

$$w_a = \sqrt{w_e^2 + (w_r^n)^2 + 2w_e w_r^n \cos 60^\circ};$$

$$w_a = \sqrt{(20\pi)^2 + (5\pi^2)^2 + 2 \cdot 20\pi \cdot 5\pi^2 \cdot \frac{1}{2}} = 97,3 \text{ см/с}^2.$$

Таким чином,  $w_a = 97,3 \text{ см/с}^2$ .

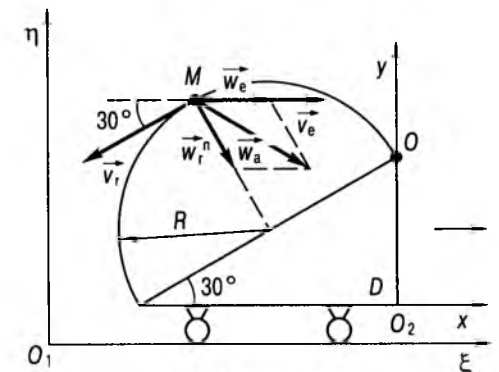


Рис. 7.3

**Приклад 7.2.** Прямокутна пластина  $ABCD$  ( $AD = BC = a$ ) обертається навколо сторони  $AB$  з кутовою швидкістю  $\omega = \pi$  рад/с. Вздовж сторони пластини  $BC$  точка  $M$  здійснює гармонічні коливання за законом  $s = O_1M = \frac{a}{4} \sin \frac{\pi}{2} t$  см.

Визначити абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки  $M$  в момент часу  $t = \frac{1}{2}$  с (рис. 7.4), якщо  $BO_1 = \frac{a}{2}$ .

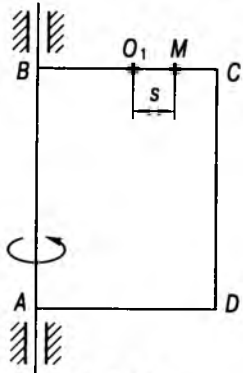


Рис. 7.4

Розв'язування. Розглянемо рух точки  $M$  як складний. Введемо дві системи координат: нерухому  $A\xi\eta\zeta$  і рухому  $Oxuz$ , яку жорстко зв'яжемо з пластиною (рис. 7.5).

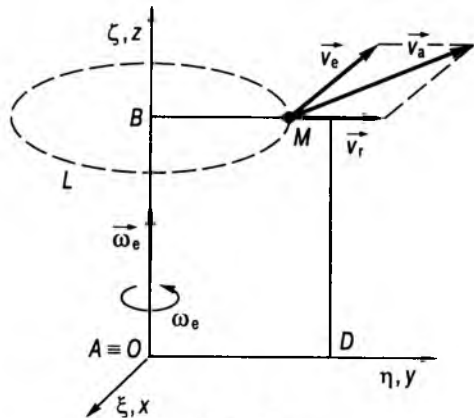


Рис. 7.5

Визначимо положення точки  $M$  в заданий момент часу:

$$BM = BO_1 + s = \frac{a}{2} + \frac{a}{4} \sin \frac{\pi}{4} = 0,675a \text{ см.}$$

Відносним рухом точки  $M$  є її прямолінійний рух вздовж сторони  $BC$  за законом  $s = \frac{a}{4} \sin \frac{\pi}{2} t$  см. Визначаємо відносну швидкість і прискорення точки  $M$  за правилами кінематики точки, що здійснює рух по прямолінійній траєкторії. Маємо відповідно

$$v_r = \dot{s} = \frac{\pi a}{8} \cos \frac{\pi}{2} t \text{ см/с,}$$

$$w_r = \ddot{s} = \dot{v}_r = -\frac{\pi^2 a}{16} \sin \frac{\pi}{2} t \text{ см/с}^2.$$

В момент часу  $t = \frac{1}{2}$  с

$$v_r = \frac{\pi a}{16} \sqrt{2} = 0,275a \text{ см/с,}$$

$$w_r = -\frac{\pi^2 a}{32} \sqrt{2} = -0,43a \text{ см/с}^2.$$

Від'ємне значення  $w_r$  означає, що напрям  $\vec{w}_r$  протилежний вектору швидкості  $\vec{v}_r$  (рис. 7.6).

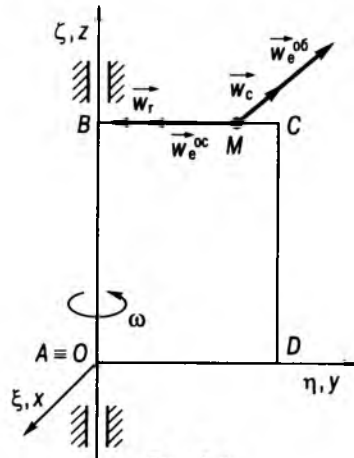


Рис. 7.6

Переносний рух — обертальний рух пластинки  $ABCD$  навколо нерухомої осі  $AB$  з кутовою швидкістю  $\omega = \pi$  рад/с.

Переносними швидкістю і прискоренням точки  $M$  будуть швидкість і прискорення тієї точки пластини, з якою в даний момент збігається досліджувана точка  $M$ . Отже,

$$v_e = \omega_e \cdot BM,$$

де  $\omega_e$  — модуль кутової швидкості пластини;  $BM$  — найкоротша відстань від точки  $M$  до осі  $AB$  (радіус обертання точки).

Для моменту часу  $t = \frac{1}{2}$  с маємо

$$\omega_e = \omega = \frac{\pi}{2} \text{ рад/с,}$$

$$v_e = \frac{\pi}{2} \cdot 0,675a = 1,06a \text{ см/с.}$$

Переносне прискорення точки  $M$

$$w_e = w_e^{oc} + w_e^{ob},$$

де  $w_e^{oc} = \omega_e^2 \cdot BM$ ;  $w_e^{ob} = \epsilon_e \cdot BM$ ;

$\epsilon_e = \dot{\omega}_e = \pi$  рад/с<sup>2</sup>.

Для  $t = \frac{1}{2}$  с отримаємо

$$w_e^{ob} = \epsilon_e \cdot BM = 2,12a \text{ см/с}^2,$$

$$w_e^{oc} = \omega_e^2 \cdot BM = 1,66a \text{ см/с}^2.$$

Додатні знаки величин  $v_e$  і  $w_e^{ob}$  вказують на те, що вектори переносної швидкості  $\vec{v}_e$  і переносного обертального прискорення  $\vec{w}_e^{ob}$  напрямлені у бік, що відповідає напрямку обертання тіла навколо  $O_1O_2$  (рис. 7.6), тобто паралельно від'ємному напрямку осі  $Ox$  по дотичній до кола  $L$  (рис. 7.5).

Визначаємо прискорення Кориоліса за формулою

$$\vec{w}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r,$$

відповідно його модуль для  $t = \frac{1}{2}$  с

$$w_c = 2\omega_e v_r \sin(\widehat{\omega_e, \vec{v}_r}) = 0,86a \text{ см/с}^2.$$

За правилом векторного добутку вектор  $\vec{w}_c$  напрямлений паралельно осі  $Ox$  в протилежному до неї напрямку (рис. 7.6).

Визначаємо абсолютну швидкість точки  $M$  як геометричну суму відносної і переносної швидкостей:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

Оскільки вектори  $\vec{v}_r$  і  $\vec{v}_e$  взаємно перпендикулярні, то

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = 1,1a \text{ см/с.}$$

Абсолютне прискорення точки знаходимо за теоремою Кориоліса

$$\vec{w}_a = \vec{w}_r + \vec{w}_e + \vec{w}_c,$$

або

$$\vec{w}_a = \vec{w}_r + \vec{w}_e^{ob} + \vec{w}_e^{oc} + \vec{w}_c.$$

Оскільки вказані вектори прискорень розташовані в двох взаємно перпендикулярних напрямках, то

$$w_a = \sqrt{(w_e^{ob} + w_c)^2 + (w_e^{oc} + w_r)^2} = 3,64a \text{ см/с}^2.$$

**Приклад 7.3.** Квадратна пластина зі стороною  $a = 10$  см рівномірно обертається навколо осі  $Ox$  з кутовою швидкістю  $\omega = 2$  рад/с. По жолобу рухається кулька  $M$  за законом  $AM = s(t) = 20t^2$  см (рис. 7.7). Визначити абсолютну швидкість і прискорення точки  $M$  в момент часу  $t = 0,5$  с.

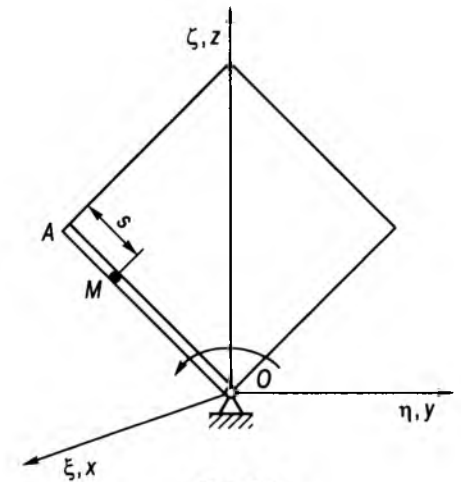


Рис. 7.7

Розв'язування. За об'єкт дослідження вибираємо точку  $M$ , яка знаходиться у

складному русі. Вводимо дві системи координат:  $Oxyz$  — рухому, зв'язану з тілом;  $O\xi\eta\zeta$  — нерухому (рис. 7.8). Відносним рухом точки  $M$  є її прямолінійний рух вздовж жолоба за законом  $AM = s(t) = 20t^2$  см, тому за правилами кінематики точки, що здійснює рух по прямій, швидкість та прискорення ( $\text{см}/\text{с}^2$ )

$$v_r = \dot{s} = 20 \cdot 2t = 40t, \quad w_r = \dot{v}_r = 40.$$

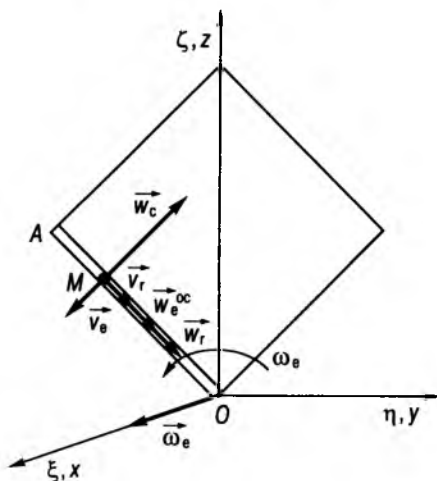


Рис. 7.8

Для моменту часу  $t = 0,5$  с  
 $v_r = 20 \text{ см}/\text{с}$ .

Переносним є обертальний рух пластини навколо осі  $O\xi$  з кутовою швидкістю  $\omega_e = \omega = 2 \text{ рад}/\text{с}$ . Швидкість і прискорення точки  $M$  у цьому русі визначаємо як швидкість і прискорення точки тіла, з якою збігається точка  $M$ , тому

$$v_e = \omega_e \cdot OM = 10 \text{ см}/\text{с},$$

$$w_e = w_e^{\text{oc}} + w_y^{\text{об}},$$

$$w_e^{\text{oc}} = \omega_e^2 \cdot OM = 2^2 \cdot 5 = 20 \text{ см}/\text{с}^2,$$

$$w_e^{\text{об}} = \varepsilon_e \cdot OM = \dot{\omega}_e \cdot OM = 0,$$

де  $OM = OA - AM = 5$  см.

Визначаємо прискорення Кориоліса за формулою

$$\bar{w}_c = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r;$$

$$\text{його модуль } w_c = 2\omega_e \cdot v_r \sin(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r) = 2\omega_e v_r \sin 90^\circ = 2 \cdot 2 \cdot 20 = 80 \text{ см}/\text{с}^2.$$

Вектори всіх складових абсолютної швидкості і абсолютного прискорення показано на рис. 7.8. За теоремами про додавання швидкостей та прискорень у складному русі точки маємо

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e, \quad \bar{w}_a = \bar{w}_r + \bar{w}_e + \bar{w}_c.$$

Оскільки вектори  $\bar{v}_r$  і  $\bar{v}_e$ , а також  $\bar{w}_e^{\text{oc}}$  з  $\bar{w}_r$  і  $\bar{w}_c$  взаємно перпендикулярні, то записуємо

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = 22,36 \text{ см}/\text{с},$$

$$w_a = \sqrt{(w_e^{\text{oc}} + w_r)^2 + w_c^2} = 100 \text{ см}/\text{с}^2.$$

Таким чином,  $v_a = 22,36 \text{ см}/\text{с}$ ,

$w_a = 100 \text{ см}/\text{с}^2$ .

**Приклад 7.4.** По дузі  $OA$  пластини  $D$ , яка є чвертю диска радіуса  $R = 2$  м, рухається точка  $M$  за законом  $OM = 5\pi t$  метрів. При цьому тіло обертається навколо осі  $O_1$ . Визначити абсолютні швидкість і прискорення точки  $M$  для положення, яке показано на рис. 7.9. В даний момент часу кутова швидкість пластини  $\omega_e = 2 \text{ рад}/\text{с}$ , а кутове прискорення  $\varepsilon_e = 3 \text{ рад}/\text{с}^2$ .

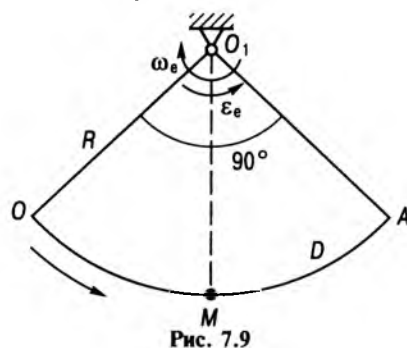


Рис. 7.9

**Розв'язування.** Рух точки  $M$  складний. Вводимо дві системи координат: нерухому  $O_1\xi\eta\zeta$  і рухому  $O_1xyz$ , яка жорстко зв'язана з тілом  $D$  (рис. 7.10).

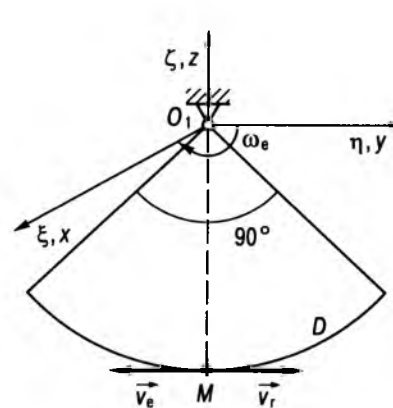


Рис. 7.10

Відносним рухом точки  $M$  є її рух по дузі кола  $OA$  радіуса  $R = 2$  м за законом  $OM = 5\pi t$ , а переносним — обертальний рух пластини  $D$  навколо осі  $O_1\xi$ .

Визначаємо відносні швидкість і прискорення точки  $M$  за правилами кінематики точки, що здійснює рух по колу. Маємо

$$v_r = OM' = 5\pi \text{ м}/\text{с}, \quad \bar{w}_r = \bar{w}_{r\tau} + \bar{w}_m,$$

$$\text{де } w_{r\tau} = OM'' = 0; \quad w_m = \frac{v_r^2}{R} = \frac{25\pi^2}{2} = 12,5\pi^2 \text{ м}/\text{с}^2.$$

Переносні швидкість і прискорення точки  $M$  — швидкість і прискорення тієї точки пластини  $D$ , з якою в даний момент збігається досліджувана точка  $M$ . Оскільки пластинка здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі  $O_1$ , то

$$v_e = \omega_e R, \quad \text{або } v_e = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м}/\text{с},$$

$$\bar{w}_e = \bar{w}_e^{\text{oc}} + \bar{w}_e^{\text{об}},$$

$$\text{де } w_e^{\text{oc}} = \omega_e^2 R = 2^2 \cdot 2 = 8 \text{ м}/\text{с}^2; \quad w_e^{\text{об}} = \varepsilon_e R = 3 \cdot 2 = 6 \text{ м}/\text{с}^2.$$

Напрямок вектора  $\bar{w}_e^{\text{об}}$  відповідає напрямку  $\varepsilon_e$  (рис. 7.11).

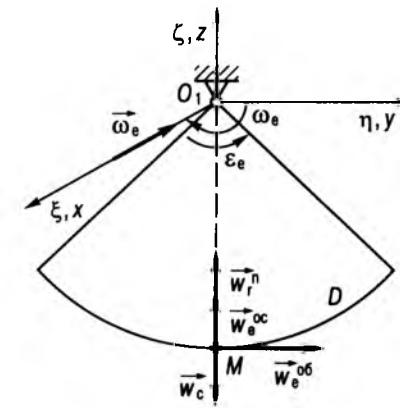


Рис. 7.11

Прискорення Кориоліса

$$\bar{w}_c = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r,$$

його модуль

$$w_c = 2\omega_e \cdot v_r \sin 90^\circ = 2 \cdot 2 \cdot 5\pi = 20\pi \text{ м}/\text{с}^2.$$

Напрямки всіх складових абсолютного прискорення точки  $M$  показано на рис. 7.11.

За теоремами про додавання швидкостей і прискорень одержимо

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e, \quad \bar{w}_a = \bar{w}_r + \bar{w}_e + \bar{w}_c.$$

Отже,

$$v_a = v_r - v_e = 5\pi - 0,4 \approx 15,3 \text{ м}/\text{с},$$

$$w_a = \sqrt{(w_e^{\text{об}})^2 + (w_e^{\text{oc}} + w_r - w_c)^2} = \sqrt{6^2 + (8 + 12,5\pi^2 - 20\pi)^2} \approx 68,7 \text{ м}/\text{с}^2.$$

Таким чином, результати розрахунку:  $v_a = 15,3 \text{ м}/\text{с}$ ,  $w_a = 68,7 \text{ м}/\text{с}^2$ .

#### § 7.4. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

**7.1.** Горизонтальна квадратна пластинка зі стороною 2 см рівномірно обертається навколо осі  $Oz$  з кутовою швидкістю  $\omega = \sqrt{2} \text{ рад}/\text{с}$  (рис. 7.12). Вздовж її сторони переміщується точка  $M$  зі швидкістю  $v_r = 2\sqrt{2} \text{ см}/\text{с}$ . Визначити абсолютні швидкість і прискорення точки  $M$  в положенні, коли  $AM = 1$  см.

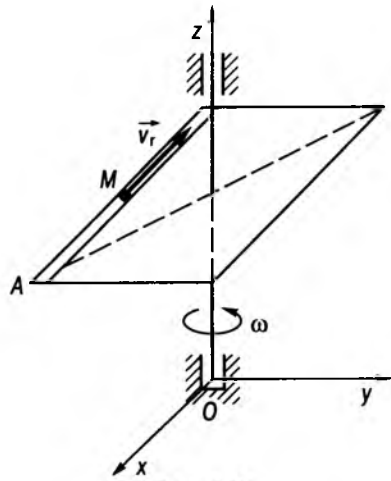


Рис. 7.12

Відповідь:  $v_a = \sqrt{2}$  см/с,  $w_a = 6$  см/с<sup>2</sup>.

7.2. Горизонтальний вал  $AB$  (рис. 7.13) обертається з кутовою швидкістю  $\omega = 2$  рад/с. До нього жорстко прикріплено під кутом  $90^\circ$  стрижень  $OD$ , по якому рухається точка  $M$  за законом  $OM = s(t) = 4t^3$  см. Визначити абсолютні швидкість і прискорення точки  $M$  у момент часу  $t = 3$  с.

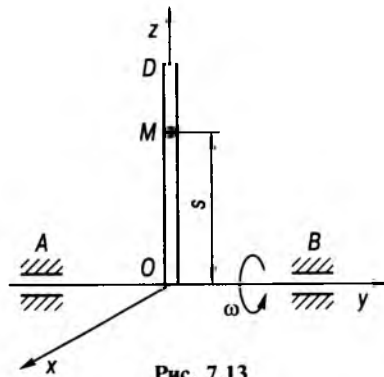


Рис. 7.13

Відповідь:  $v_a = 389,4$  см/с,  $w_a = 1345$  см/с<sup>2</sup>.

7.3. Тіло  $D$  (рис. 7.14) переміщується вліво паралельно осі  $Ox$  за законом  $x(t) = 3t^2$  см. Точка  $M$  рухається по жолобу на тілі  $D$  за законом  $OM = s(t) = 4t^2$  см. Визначити аб-

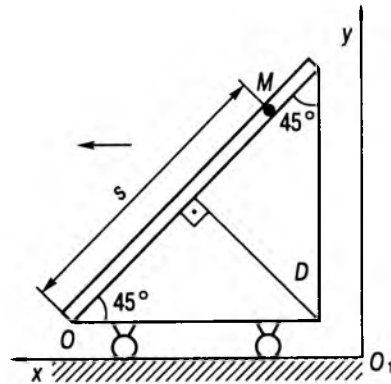


Рис. 7.14

солютні швидкість і прискорення точки  $M$  у момент часу  $t = 0,5$  с.

Відповідь:  $v_a = 6,08$  см/с,  $w_a = 12,16$  см/с<sup>2</sup>.

7.4. Стрижень  $OA$  (рис. 7.15) обертається навколо нерухомої осі  $Ox$  зі сталою кутовою швидкістю  $\omega = \sqrt{3}$  рад/с. Вздовж стрижня ковзає кільце  $M$  за законом  $OM = t^2$  см. Визначити абсолютні швидкість і прискорення точки  $M$  стрижня в момент часу  $t = 1$  с.

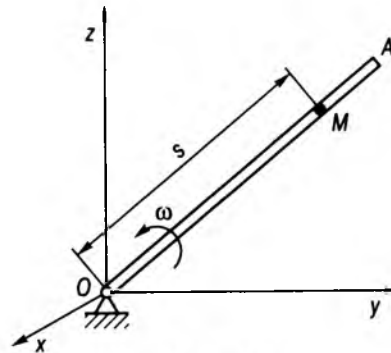


Рис. 7.15

Відповідь:  $v_a = 2,65$  см/с,  $w_a = 7$  см/с<sup>2</sup>.

7.5. Візок  $D$  (рис. 7.16) рухається паралельно осі  $Oy$  вправо зі сталим прискоренням  $w_D = 2\sqrt{3}$  см/с<sup>2</sup>. Кулька  $M$  пересувається по жолобу на тілі  $D$  за законом  $AM = s(t) = \sqrt{6}t^2$  см. Визначити абсолютні швидкість

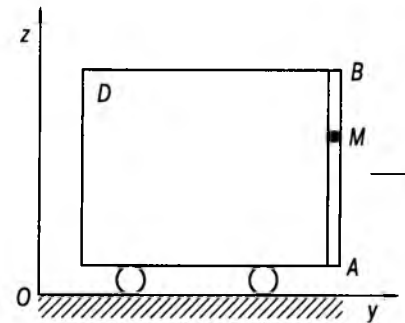


Рис. 7.16

і прискорення кульки  $M$  в момент часу  $t = 2$  с, якщо при  $t = 0$  швидкість візка становила  $v_D = 2\sqrt{3}$  см/с.

Відповідь:  $v_a = 14,2$  см/с,  $w_a = 6$  см/с<sup>2</sup>.

7.6. На візку, що рухається вправо по горизонталі з прискоренням  $w = 12$  см/с<sup>2</sup>, встановлено електричний мотор, ротор якого при запуску обертається відповідно до рівняння  $\varphi = t^2$ , де  $\varphi$  — кут, що вимірюється у радіанах. Радіус ротора 10 см. Визначити абсолютне прискорення точки  $A$ , яка лежить на ободі ротора, при  $t = 1$  с, якщо у цей момент точка  $A$  знаходиться у положенні, показано на рис. 7.17.

Відповідь:  $w_a = 22,92$  см/с<sup>2</sup>.

7.7. Квадрат  $ABCD$  зі стороною  $2a$  метрів обертається навколо сторони  $AB$  з постій-

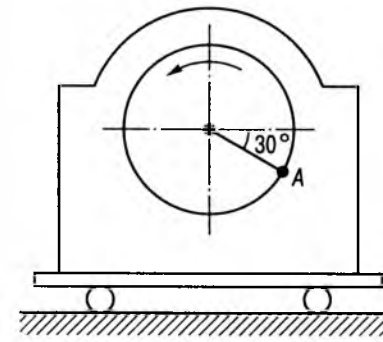


Рис. 7.17

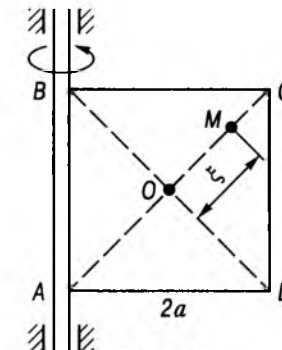


Рис. 7.18

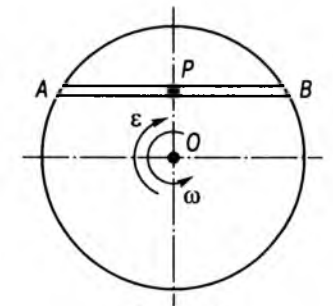


Рис. 7.19

ною кутовою швидкістю  $\omega = \pi/2$  рад/с. Вздовж діагоналі  $AC$  здійснює гармонічні коливання точка  $M$  за законом  $\xi = \frac{a}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$  метрів. Визначити величину абсолютного прискорення точки при  $t = 1/2$  с (рис. 7.18).

Відповідь:  $w_a \approx 4,5$  м/с<sup>2</sup>.

7.8. Кулька  $P$  рухається зі швидкістю  $v = 12$  см/с від  $A$  до  $B$  по хорді  $AB$  диска, який обертається навколо осі, що проходить через його центр перпендикулярно до площини диска. Знайти абсолютне прискорення кульки  $P$ , коли вона знаходиться на найкоротшій відстані від центра диска, що дорівнює 10 см. В цей момент кутова швидкість диска 2 рад/с, а кутове сповільнення 1 рад/с<sup>2</sup> (рис. 7.19).

Відповідь:  $w_a = 12,8$  см/с<sup>2</sup>.

7.9. Вздовж рухомого радіуса диска від центра до ободу рухається точка  $M$  з постійною швидкістю  $v_r$ . Рухомий радіус обертається у площині диска з постійною кутовою швидкістю  $\omega_1$ . Площина диска обертається навколо свого діаметра з постійною кутовою швидкістю  $\omega_2$ . Визначити абсолютну швидкість точки  $M$ , вважаючи, що при  $t = 0$  точка  $M$  знаходилась у центрі диска,

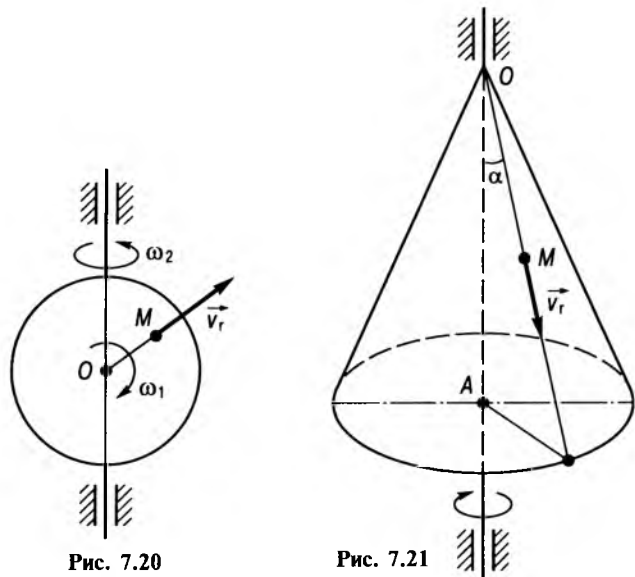


Рис. 7.20

Рис. 7.21

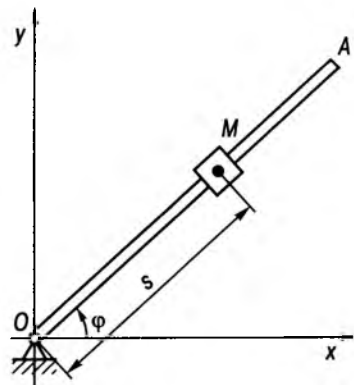


Рис. 7.22

а рухомий радіус був напрямлений вздовж осі обертання диска (рис. 7.20) [32].

Відповідь:  $v_a = v_r \sqrt{1 + t^2 (\omega_1 + \omega_2^2 \sin^2 \omega_1 t)}$ .

7.10. Точка  $M$  рівномірно рухається вздовж твірної кругового конуса з віссю  $OA$  від вершини до основи з відносною швидкістю  $v_r = 1$  см/с;  $\angle MOA = \alpha = 30^\circ$ . В момент часу  $t = 0$  відстань  $OM = 2$  см. Конус рівномірно обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю  $\omega = \frac{\pi}{2}$  рад/с. Знайти абсолютне прискорення точки  $M$  в момент часу  $t = 2$  с (рис. 7.21).

Відповідь:  $w_a = 5,17$  см/с<sup>2</sup>.

7.11. Стрижень  $OA$  обертається у вертикальній площині  $Oxy$  навколо нерухомої точки  $O$  з кутовою швидкістю  $\omega = 0,3t$  рад/с ( $t$  — у секундах). Вздовж стрижня рухається повзун  $M$  (рис. 7.22) за законом  $s = OM = 0,2 t^2$  метрів. Визначити абсолютне прискорення повзуна в момент часу  $t = 1$  с.

Відповідь:  $w_a = 0,485$  м/с<sup>2</sup>.

7.12. Кулак  $A$  рухається поступально по горизонтальній площині і надає руху вздовж осі  $Oy$  товчачеві  $B$  (рис. 7.23). Визначити

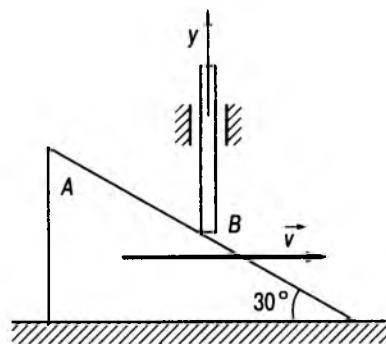


Рис. 7.23

швидкість товчача, якщо швидкість кулака  $v_A = 0,6$  м/с.

Відповідь:  $v_B = 0,2\sqrt{3}$  м/с.

### § 7.5. РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

За заданими законом руху  $s_i(t)$  точки  $M$  відносно тіла  $D$  та кінематичними характеристиками обертального або поступального

руху тіла  $D$  визначити для моменту часу  $t_1$  абсолютні швидкість та прискорення точки  $M$ . Схеми механізмів показано на рис. 7.24,

а потрібні для розрахунку дані наведено у табл. 7.1. Номер варіанта вказано у кружечках (рис. 7.24).

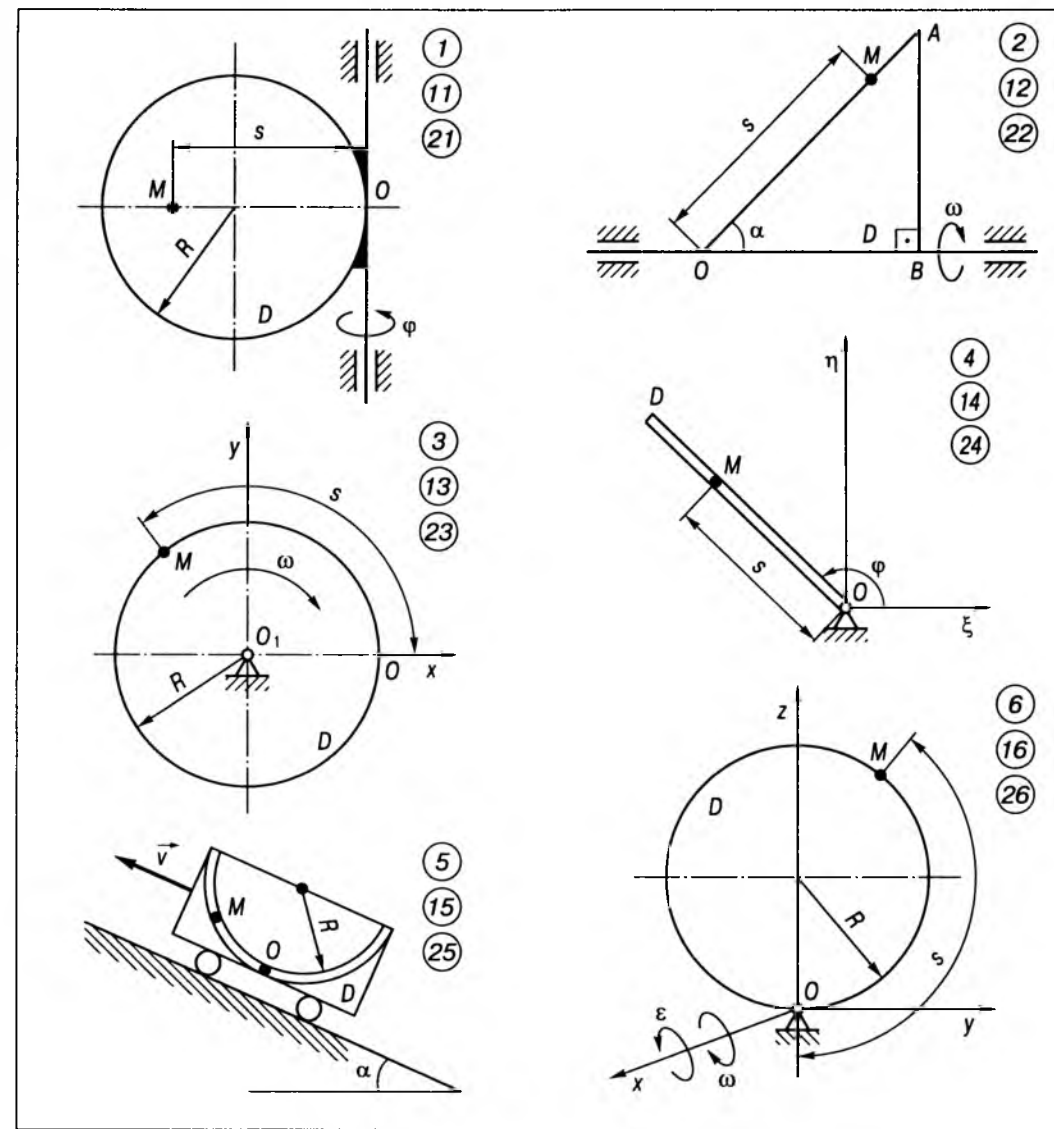


Рис. 7.24 (початок)

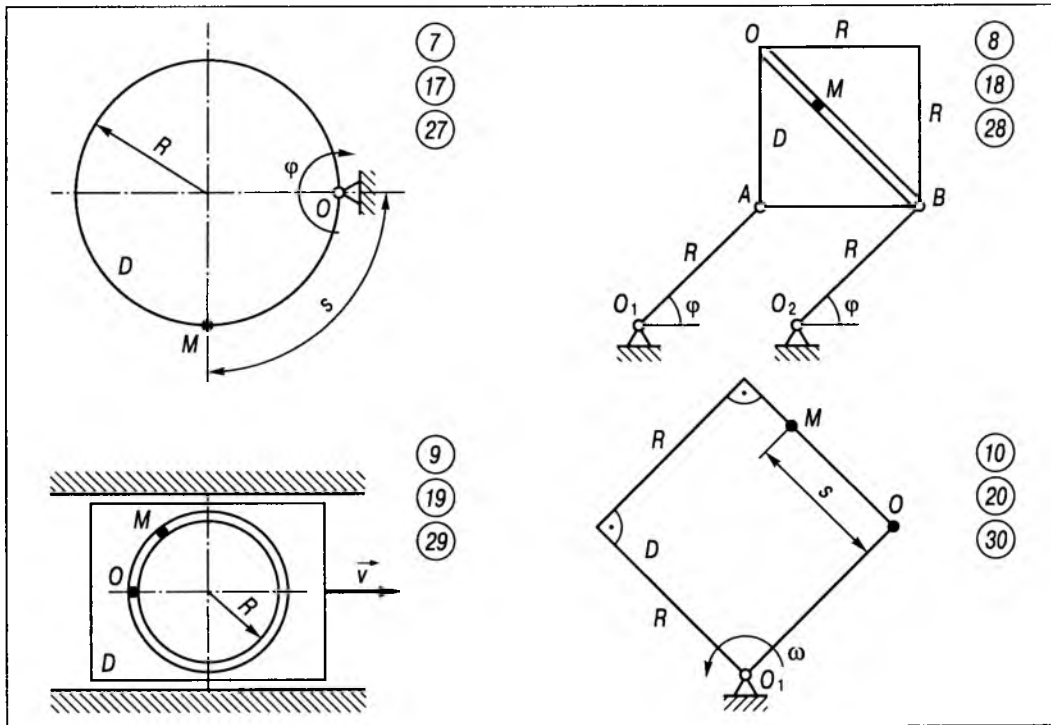


Рис. 7.24 (закінчення)

Таблиця 7.1

Номер варіанта	Рівняння відносного руху точки M $OM = s_r = s_r(t)$ , см	Рівняння руху тіла $\varphi = \varphi(t)$ , рад	$t_1$ , с	$R$ , см	Швидкість тіла $v$ , см/с	Кутова швидкість тіла $\omega$ , рад/с	$\alpha$ , град	Кутове прискорення $\epsilon$ , рад/с <sup>2</sup>
1	$4t^2$	$t^2 - 6t$	2	20	—	—	—	—
2	$4t$	—	1	—	—	$4 - 2t$	30	—
3	$0,5 \pi^2$	—	5	50	—	$2t - 11$	—	—
4	$5t^2$	$4t - t^2$	1	—	—	—	—	—
5	$30\pi \cos(\pi/6)$	—	4	60	$4t$	—	30	—
6	$\pi(18 - t^2)$	—	3	15	—	2	—	3
7	$2\pi t$	$\pi(t/3 - 3)$	3	18	—	—	—	—
8	$8t^2$	$\pi t - \pi^2/3$	1	15	—	—	—	—

Номер варіанта	Рівняння відносного руху точки M $OM = s_r = s_r(t)$ , см	Рівняння руху тіла $\varphi = \varphi(t)$ , рад	$t_1$ , с	$R$ , см	Швидкість тіла $v$ , см/с	Кутова швидкість тіла $\omega$ , рад/с	$\alpha$ , град	Кутове прискорення $\epsilon$ , рад/с <sup>2</sup>
9	$4\pi^2$	—	1,5	20	$10 \sin(\pi/2)$	—	—	—
10	$t^2 + 16t$	—	2	40	—	$4t - 9$	—	—
11	$2t^2$	$8t - 1,5t^2$	2	20	—	—	—	—
12	$8t$	—	2	—	—	$2t^2$	60	—
13	$5\pi^3/4$	—	2	30	—	$5 - t^2$	—	—
14	$2t^2$	$t^2 - 5t$	2	—	—	—	—	—
15	$12\pi \sin(\pi)$	—	1/6	24	$3t$	—	60	—
16	$5\pi(t^2 - 3t)$	—	1	30	—	3	—	5
17	$4\pi t$	$5t - t^2/2$	3	15	—	—	—	—
18	$4t^2 + 5$	$\pi t^2 - 2\pi t$	0,5	20	—	—	—	—
19	$10\pi \sin(\pi/6)$	—	5	30	$5 - t^2$	—	—	—
20	$t^3 + 2$	—	2	20	—	$8 - 3t$	—	—
21	$t^2 + 45$	$2,5t^2$	1	30	—	—	—	—
22	$t^2 + 1$	—	3	—	—	$0,5t - 4$	45	—
23	$20\pi \sin(\pi/3)$	—	2,5	20	—	$2\pi t$	—	—
24	$t^3 + t$	$0,5t^2$	3	—	—	—	—	—
25	$20\pi^2$	—	1	60	$30 \sin(\pi/3)$	—	45	—
26	$20\pi^2$	—	0,5	30	—	$1,5\pi$	—	$3\pi$
27	$10\pi(t - 2)$	$2\pi^3/3$	0,5	10	—	—	—	—
28	$8 + 4 \sin(\pi/3)$	$2\pi^2/3$	0,5	16	—	—	—	—
29	$2\pi(1 - t)$	—	2	12	$2t^2 - t$	—	—	—
30	$10t^2 + 5t$	—	1	30	—	$8\pi$	—	—

Примітка. Кутове прискорення  $\epsilon$  для варіантів 6, 16 і 26 відповідно 3, 5 і 3  $\pi$  рад/с<sup>2</sup>.

## Розділ 8

### ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

#### § 8.1. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

*Плоскопаралельний рух твердого тіла* — це такий рух, під час якого всі точки тіла рухаються паралельно певній нерухомій площині, яку називають основною. Такий рух можна вважати окремим випадком руху вільного твердого тіла. При плоскопаралельному русі миттєва вісь обертання перпендикулярна до основної площини, а замість руху твердого тіла розглядають рух плоскої фігури на площині.

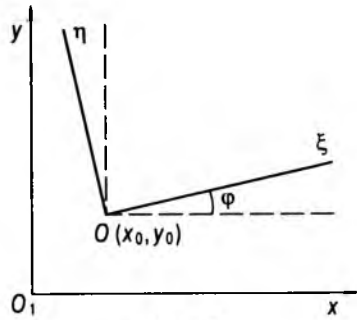


Рис. 8.1

Якщо  $O_1x$  — нерухома система координат, а  $O\xi\eta$  — система координат, жорстко зв'язана з плоскою фігурою (рис. 8.1), то положення плоскої фігури повністю визначається координатами точки  $O$  і напрямом осей  $O\xi$  і  $O\eta$ . Отже, потрібно знати три параметри:  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $\varphi$ . Тут  $\varphi$  — кут між додатними напрямками осей  $O\xi$  та  $O_1x$ .

Рівняння руху плоскої фігури відомі, якщо названі три параметри задані як функції часу:

$$x_0 = x_0(t), \quad (8.1)$$

$$y_0 = y_0(t), \quad (8.2)$$

$$\varphi = \varphi(t). \quad (8.3)$$

Структура цих рівнянь дає змогу зробити два важливих висновки:

1) плоскопаралельний рух твердого тіла можна розглядати як складний — поступальний разом з полюсом [рівняння (8.1) та (8.2)] і обертальний навколо полюса [рівняння (8.3)];

2) якщо перенести полюс з точки  $O$  в будь-яку іншу точку, залежність (8.3) не зміниться, зміняться лише (8.1) та (8.2). Отже, *характеристики обертального руху* (кут повороту  $\varphi$ , кутова швидкість  $\omega = \dot{\varphi}$ , кутове прискорення  $\varepsilon = \dot{\omega}$ ) *не залежать від вибору полюса*.

Розглядаючи плоскопаралельний рух як окремий випадок руху вільного твердого тіла, можна зобразити  $\vec{\omega}$  та  $\vec{\varepsilon}$  у вигляді векторів, перпендикулярних до площини руху тіла.

Розподіл лінійних швидкостей в тілі при плоскопаралельному русі визначається *теоремою: швидкість довільної точки плоскої фігури дорівнює векторній сумі швидкостей полюса і обертального руху точки навколо полюса*, тобто

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{OM}, \quad (8.4)$$

де  $\vec{v}_M$  — швидкість точки  $M$  тіла;  $\vec{v}_O$  — швидкість полюса  $O$ ;  $\vec{v}_{OM}$  — швидкість обертального руху точки  $M$  тіла навколо полюса  $O$ .

За відомою формулою Ейлера

$$\vec{v}_{OM} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{OM}, \quad (8.5)$$

де  $\vec{r}_{OM}$  — радіус-вектор точки  $M$  відносно полюса  $O$ . Зауважимо, що вектор  $\vec{v}_{OM}$  перпендикулярний до вектора  $\vec{r}_{OM}$ :

$$\vec{v}_{OM} \perp \vec{r}_{OM}. \quad (8.6)$$

З виразу (8.4) можна зробити висновок, що в кожен момент часу існує точка, для якої  $\vec{v}_O = -\vec{v}_{OM}$ , тобто її швидкість дорівнює нулеві. Цю точку називають *миттєвим центром швидкостей*. Якщо полюс вибрати у миттєвому центрі швидкостей, то на підставі (8.4)  $\vec{v}_M = \vec{v}_{OM}$ . Отже, швидкості точок

плоскої фігури можна розглядати як швидкості її обертального руху навколо миттєвого центра швидкостей. Тому цей центр ще називають *миттєвим центром обертання*.

Оскільки розв'язання майже всіх задач, у яких мова йде про плоскопаралельний рух, потребує відшукування миттєвого центра швидкостей, розглянемо способи побудови цієї точки. Таких способів існує кілька.

1. Найчастіше застосовується аналітичний. Якщо відомі швидкість  $\vec{v}_O$  певної точки  $O$  фігури і миттєва кутова швидкість  $\omega$ , то миттєвий центр швидкостей (точка  $P$ ) розташований на прямій  $OP$ , перпендикулярній до  $\vec{v}_O$  (рис. 8.2). Дійсно, виберемо  $P$  за полюс (за означенням  $\vec{v}_P = 0$ ) і знайдемо швидкість точки  $O$ :

$$\vec{v}_O = \vec{v}_P + \vec{v}_{PO} = \vec{v}_{PO},$$

$$v_{PO} = \omega \cdot PO, \quad \vec{v}_{PO} \perp PO.$$

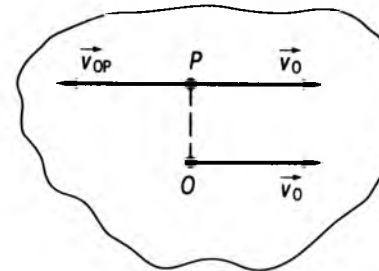


Рис. 8.2

З останніх двох співвідношень випливає, що миттєвий центр швидкостей лежить на прямій  $PO$ , перпендикулярній до вектора  $\vec{v}_O$ , на відстані  $OP = \frac{v_O}{\omega}$ . Відрізок  $PO$  відкладається від точки  $O$  у напрямі, що визначається знаком вектора  $\vec{\omega}$ .

2. Геометричний спосіб визначення миттєвого центра швидкості доцільний за умови, що відомі прямі, вздовж яких спрямовані швидкості двох точок  $A$  і  $B$  плоскої фігури (рис. 8.3), і відома швидкість  $\vec{v}_A$  точки  $A$ . Розглянемо швидкості  $\vec{v}_A$  і  $\vec{v}_B$  як швидкості обертального руху навколо миттєвого

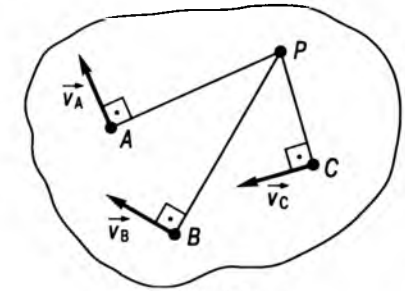


Рис. 8.3

центра обертання. Ці швидкості мають бути перпендикулярними до радіусів обертання  $PA$  і  $PB$ . Отже, проводимо прямі  $PA \perp \vec{v}_A$  і  $PB \perp \vec{v}_B$ . У точці їх перетину знаходиться миттєвий центр швидкостей  $P$ . Знаючи швидкість  $\vec{v}_A$  точки  $A$ , визначаємо напрям і величину миттєвої кутової швидкості  $\omega$ , а також лінійну швидкість довільної точки  $C$  фігури. Для цього досить з'єднати точку  $C$  з миттєвим центром і провести перпендикуляр до  $CP$ . Напрямок швидкості  $\vec{v}_C$  знаходимо відповідно до напрямку обертання плоскої фігури навколо полюса.

Модулі векторів швидкостей довільних точок плоскої фігури легко знайти з пропорції

$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_C}{CP} = \dots = \omega. \quad (8.7)$$

3. Застосовуються також деякі інші способи визначення миттєвого центра швидкостей, зокрема за умов:

а) швидкості двох точок тіла паралельні, нерівні і мають один напрям (рис. 8.4);

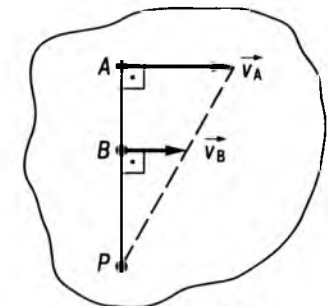


Рис. 8.4

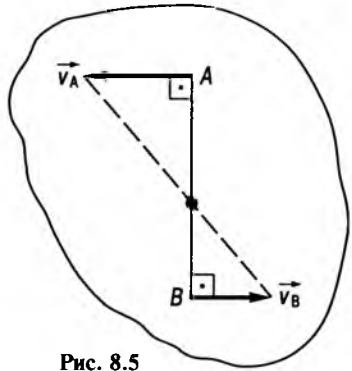


Рис. 8.5

б) швидкості двох точок тіла паралельні, нерівні і мають різні напрями (рис. 8.5);

в) швидкості двох точок тіла паралельні, рівні, спрямовані в один бік (рис. 8.6). У цьому випадку миттєва кутова швидкість  $\omega = 0$  і тіло в даний момент часу виконує миттєвий поступальний рух;

г) у разі кочення без ковзання миттєвий центр знаходиться в точці дотику тіла до нерухомої поверхні (рис. 8.7).

Зауважимо, що під час руху тіла положення миттєвого центра швидкостей змінюється. Геометричне місце миттєвих центрів швидкостей, віднесене до рухомої або нерухомої системи координат, називають відповідно *рухомою* або *нерухомою центроїдою*. З цією геометричною інтерпретацією пов'язана **теорема Пуансо**: *під час руху плоскої фігури рухома центроїда котиться по нерухомій без ковзання*.

Нарешті, слід відзначити, що для плоскопаралельного руху як окремого випадку руху вільного твердого тіла справедлива **теорема про проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, яка з'єднує ці точки** (рис. 8.8):

$$v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta.$$

Теоремою про проекції зручно користуватись при розв'язуванні деяких задач.

Рівність (8.4) є основою для графічної побудови лінійних швидкостей різних точок

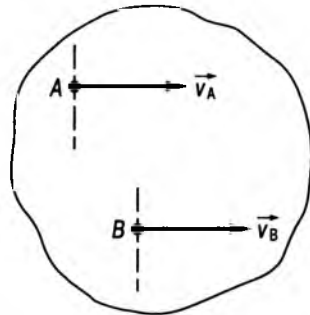


Рис. 8.6

плоскої фігури. Внаслідок цієї побудови отримуємо *план швидкостей*.

Визначимо швидкості всіх точок фігури  $S$  (рис. 8.9), якщо відомі вектор швидкості  $\vec{v}_A$  точки  $A$  і те, що вектор  $\vec{v}_B$  спрямований вздовж прямої  $MN$ .

Будемо користуватись формулами (8.4) і (8.6). Визначимо спочатку швидкість точки  $B$ . Оберемо полюсом точку  $A$ , тоді

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}; \quad (8.8)$$

$$\vec{v}_{AB} \perp AB. \quad (8.9)$$

На рис. 8.10 будемо рівність (8.8) за відомим вектором  $\vec{v}_A$  ( $\vec{v}_A = \vec{Oa}$ ), напрямом вектора  $\vec{v}_B$  ( $\vec{v}_B \parallel MN$ ) і напрямом  $\vec{v}_{AB}$  ( $\vec{v}_{AB} = ab \perp AB$ ). Від довільної точки  $O$  площини у заданому масштабі відкладаємо вектор  $\vec{Oa}$ . Через кінець цього вектора проводимо пряму  $ab$ , перпендикулярну до прямої  $AB$ . Далі через точку  $O$  проводимо пряму  $Ob$ , паралельну прямій  $MN$  (рис. 8.10).

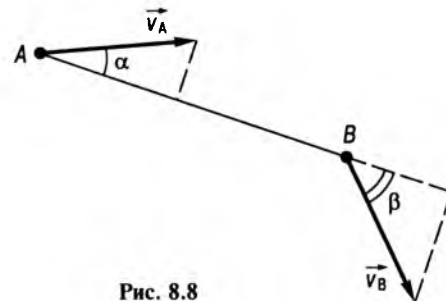


Рис. 8.8

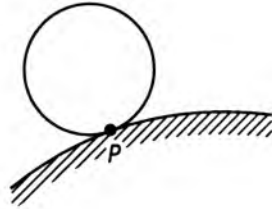


Рис. 8.7

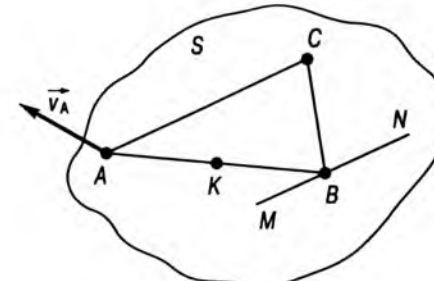


Рис. 8.9

З трикутника  $Oab$  отримуємо

$$Ob = v_B; \quad ab = v_{AB}. \quad (8.10)$$

Щоб визначити швидкість довільної точки  $C$ , з'єднаємо її з точками  $A$  і  $B$ . Виберемо по черзі полюс в точках  $A$  і  $B$ . Відповідно

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{AC}, \quad (8.11)$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{BC}. \quad (8.12)$$

Розв'язуємо графічно систему векторних рівнянь (8.11) і (8.12). На плані швидкостей через точки  $a$  і  $b$  проводимо прямі, паралельні швидкостям  $\vec{v}_{AC}$  і  $\vec{v}_{BC}$ , які відповідно перпендикулярні до прямих  $AC$  і  $BC$ , тобто  $ac \perp AC$ ,  $bc \perp BC$ . Точкою перетину  $ac$  і  $bc$  є точка  $c$  — кінець вектора  $\vec{v}_C$ . З'єднаємо точку  $c$  з точкою  $O$ ,

$$Oc = v_C.$$

Як видно з побудови,  $\Delta abc$  на плані швидкостей подібний до  $\Delta ABC$  плоскої фігури і повернутий відносно нього на кут  $\pi/2$ . Щоб знайти швидкість довільної точки  $K$  фігури, досить визначити відповідну їй точку на  $\Delta abc$ . Оскільки  $v_{AB} = ab$  є швидкістю обертального руху точки навколо полюса, то на підставі властивостей обертального руху

$$\frac{ak}{ab} = \frac{AK}{AB}. \quad (8.13)$$

З цієї пропорції легко знайти точку  $k$  на плані швидкостей:

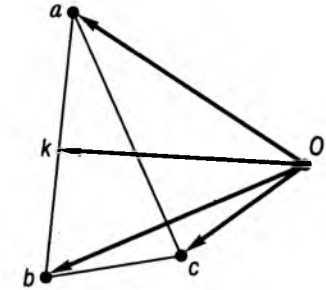


Рис. 8.10

$$Ok = v_K.$$

Кутова швидкість обертання тіла

$$\omega = \frac{ab}{AB} = \frac{ak}{AK}. \quad (8.14)$$

Розподіл прискорень у тілі визначається співвідношенням

$$\vec{w}_M = \vec{w}_O + \vec{w}_{OM}, \quad (8.15)$$

тобто *прискорення довільної точки тіла при плоскопаралельному русі дорівнює векторній сумі прискорення полюса і прискорення обертального руху точки навколо полюса* (рис. 8.11).

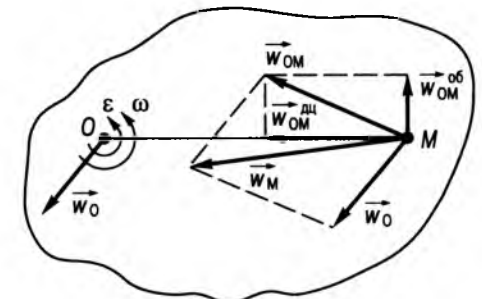


Рис. 8.11

Прискорення обертального руху точки навколо полюса  $\vec{w}_{OM}$  складається з двох доданків — прискорення обертального і прискорення доцентрового:

$$\vec{w}_{OM} = \vec{w}_{OM}^{об} + \vec{w}_{OM}^{дц}. \quad (8.16)$$

Кожен з цих доданків визначається рівняннями виду



$$\vec{w}_{OM}^{об} = \vec{\varepsilon} \times \overline{OM}, \quad (8.17)$$

$$\vec{w}_{OM}^{дц} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \overline{OM}. \quad (8.18)$$

Оскільки вектори кутового прискорення  $\vec{\varepsilon}$  та кутової швидкості  $\vec{\omega}$  перпендикулярні до радіуса-вектора  $OM$ , то величини цих векторів  $w_{OM}^{об} = \varepsilon \cdot OM$ ,  $w_{OM}^{дц} = \omega^2 \cdot OM$ .

Слід відзначити, що вектор  $\vec{w}_{OM}$  має кілька особливостей (рис. 8.12):

1) кут  $\alpha$  між вектором  $\vec{w}_{OM}$  і прямою  $OM$  завжди гострий; його можна знайти за формулою

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \quad (8.19)$$

з якої видно, що величина кута не залежить від вибору полюса;

2) кут  $\alpha$  відкладається від вектора  $\vec{w}_{OM}$  до прямої  $OM$  у напрямі обертання плоскої фігури, якщо напрямки  $\vec{\omega}$  і  $\vec{\varepsilon}$  однакові, і в протилежному напрямі, якщо  $\vec{\omega}$  і  $\vec{\varepsilon}$  мають різні знаки;

3) модуль вектора  $\vec{w}_{OM}$

$$w_{OM} = OM \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (8.20)$$

Із закону розподілу прискорень (8.8) можна зробити висновок, що в тих випадках, коли  $\omega$  і  $\varepsilon$  одночасно не дорівнюють нулеві, існує така точка плоскої фігури, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулеві. Ця точка називається *миттєвим центром прискорень*. Якщо полюсом обрати миттєвий центр прискорень, то при-

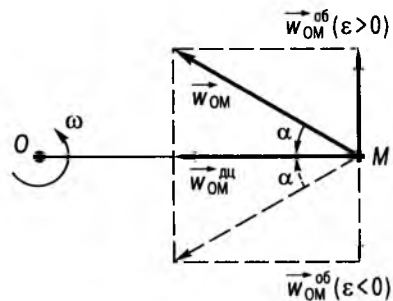


Рис. 8.12

скорення кожної точки плоскої фігури можна вважати прискоренням обертального руху навколо миттєвого центра прискорень. Отже, вектор прискорення  $\vec{w}_M$  довільної точки  $M$  утворює визначений за (8.19) кут  $\alpha$  з прямою, що з'єднує точку з миттєвим центром прискорень.

Розглянемо два способи побудови миттєвого центра прискорень.

1. Нехай відоме прискорення  $\vec{w}_A$  точки  $A$  (рис. 8.13), а також  $\vec{\omega}$  і  $\vec{\varepsilon}$ . За (8.19) обчислимо кут  $\alpha$  і відповідно до напрямку  $\vec{\omega}$  і  $\vec{\varepsilon}$  через точку  $A$  проведемо пряму  $AQ$ , яка утворює з вектором  $\vec{w}_A$  кут  $\alpha$ . Положення миттєвого центра прискорень на цій прямій знаходимо, обчисливши відстань  $AQ$  за формулою (8.20).

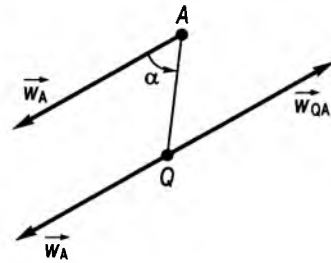


Рис. 8.13

Відклавши від точки  $A$  відстань  $AQ$ , знаходимо миттєвий центр прискорень.

2. Припустимо, що відомі прискорення  $\vec{w}_A$  і  $\vec{w}_B$  двох точок  $A$  і  $B$  плоскої фігури (рис. 8.14). Щоб знайти миттєвий центр прискорень  $Q$ , визначимо кут  $\alpha$ , який, як було зазначено, не залежить від вибору полюса. Візьмемо точку  $A$  за полюс. На підставі (8.8) можна записати

$$\vec{w}_{AB} = \vec{w}_B - \vec{w}_A = \vec{w}_B + (-\vec{w}_A).$$

Тоді  $\alpha$  визначиться як кут між вектором  $\vec{w}_{AB}$  і прямою  $AB$ . Проведемо з точок  $A$  і  $B$  прямі  $AQ$  і  $BQ$ , що утворюють кути  $\alpha$  з векторами  $\vec{w}_A$  і  $\vec{w}_B$ , причому поворот від прискорень  $\vec{w}_A$  і  $\vec{w}_B$  до прямих  $AQ$  і  $BQ$  здійснюється в тому ж напрямку, що й

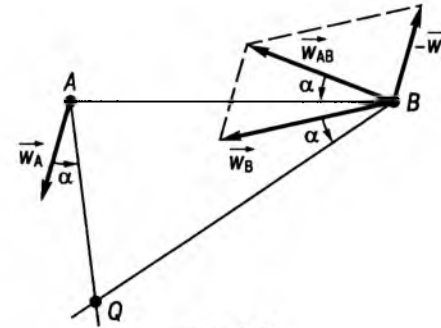


Рис. 8.14

поворот від прискорення  $\vec{w}_{AB}$  до прямої  $AB$ . Точка  $Q$  перетину прямих  $AQ$  і  $BQ$  — миттєвий центр прискорень.

Знаючи положення миттєвого центра прискорень та прискорення однієї точки плоскої фігури, легко знайти напрямки і модулі прискорень довільних її точок. Наприклад, прискорення точки  $C$  знаходимо, з'єднавши точку  $C$  з точкою  $Q$  і відклавши від цього відрізка кут  $\alpha$  у напрямі, протилежному напрямку найкоротшого переходу від  $\vec{w}_C$  до  $AC$ . На підставі (8.20) прискорення всіх точок плоскої фігури при плоскопаралельному русі пов'язані між собою пропорцією

$$\frac{w_A}{AQ} = \frac{w_B}{BQ} = \frac{w_C}{CQ} = \dots = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (8.21)$$

Отже, побудова миттєвого центра прискорень дає змогу повністю вирішити питання про розподіл прискорень при плоскопаралельному русі твердого тіла.

## § 8.2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

**Приклад 8.1.** Механізм, зображений на рис. 8.15, складається з кривошипа  $OA = 30$  см, який обертається навколо осі  $O$  з кутовою швидкістю  $\omega_0 = 0,5$  с<sup>-1</sup>, зубчатого колеса  $II$  радіуса 20 см, що котиться без ковзання по поверхні нерухомого колеса  $I$  радіуса 10 см і приводить у рух шарніром

з'єднаний з ним шатун  $BC = 20\sqrt{26}$  см. Визначити кутову швидкість шатуна  $BC$  і швидкості точок  $B$  і  $C$  в момент, коли радіус  $AB$  перпендикулярний до кривошипа  $AO$ .

Розв'язування. Аналіз механізму показує, що кривошип  $OA$  здійснює обертальний рух, а рухоме колесо  $II$  та шатун  $BC$  — плоскопаралельний.

З умови випливає, що кутову швидкість шатуна можна обчислити, якщо відомі швидкості його точок. Точка  $B$  спільна для шатуна і рухомого колеса. Тому потрібно розглянути спочатку розподіл швидкостей у рухомому колесі. Точка  $P$  зчеплення рухомого і нерухомого коліс є миттєвим центром швидкостей рухомого колеса. Отже, величини швидкостей пов'язані співвідношенням

$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}.$$

Швидкість точки  $A$  знаходимо, розглядаючи обертальний рух кривошипа  $OA$ :

$$v_A = \omega_0 \cdot OA = \omega_0 \cdot (r_1 + r_2) = 15 \text{ см/с}.$$

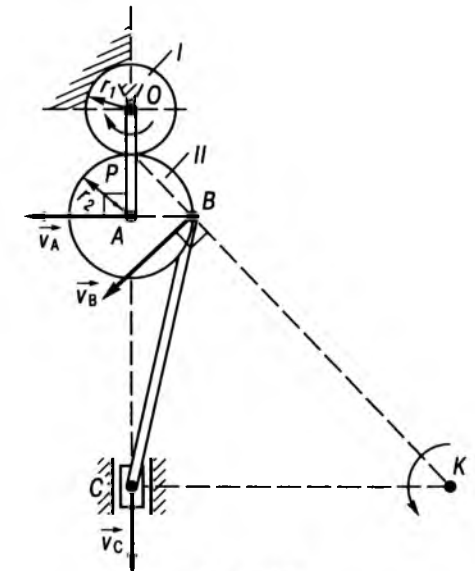


Рис. 8.15

Вектор  $\vec{v}_A$  напрямлений перпендикулярно до кривошипа  $OA$  у бік, що відповідає напрямку повороту кривошипа (за стрілкою годинника), тому

$$v_B = \frac{v_A \cdot BP}{AP} = \frac{v_A \cdot r_2 \sqrt{2}}{r_2} = 15 \cdot \sqrt{2} \text{ см/с.}$$

Вектор  $\vec{v}_B$  напрямлений перпендикулярно до прямої  $PB$  у бік руху колеса  $\Pi$ .

Аналогічний результат можна дістати, якщо скористатися теоремою про проєкції швидкостей двох точок тіла на пряму, яка з'єднує ці точки:

$$(\vec{v}_A)_{AB} = (\vec{v}_B)_{AB},$$

або

$$v_A = v_B \cos 45^\circ.$$

Для визначення швидкості точки  $C$  і кутової швидкості шатуна побудуємо миттєвий центр швидкостей шатуна  $BC$ . Він знаходиться в точці  $K$  перетину прямих  $BK$  і  $CK$ , перпендикулярних до вектора швидкості  $\vec{v}_B$  і напрямку руху точки  $C$ . Зазначимо, що рух шатуна  $BC$  можна розглядати як миттєвий обертальний рух навколо миттєвого центра швидкостей  $K$  у тому ж напрямку, що і швидкість  $\vec{v}_B$  точки  $B$ , тобто проти ходу стрілки годинника. Це означає, що вектор кутової швидкості  $\vec{\omega}_{BC}$  шатуна  $BC$  перпендикулярний до площини рисунка "до нас". Вектор  $\vec{v}_C$  перпендикулярний до прямої  $CK$  і напрямлений у бік руху шатуна.

На підставі (8.7) запишемо

$$\frac{v_B}{BK} = \frac{v_C}{CK} = \omega_{BC},$$

звідки

$$v_C = \frac{v_B \cdot CK}{BK}.$$

Елементарні геометричні розрахунки дають змогу визначити, що відстань

$$BK = 100 \sqrt{2} \text{ см, } CK = 120 \text{ см.}$$

Тоді

$$v_C = \frac{15 \cdot \sqrt{2} \cdot 120}{100 \cdot \sqrt{2}} = 18 \text{ см/с,}$$

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{BK} = \frac{15\sqrt{2}}{100\sqrt{2}} = 0,15 \text{ с}^{-1}.$$

**Приклад 8.2.** Кривошипно-штанунний механізм у певний момент часу займає положення, показане на рис. 8.16. Кутова швидкість кривошипа  $\omega_0 = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $OA = 20 \text{ см}$ ,  $AB = 100 \text{ см}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ . Знайти швидкість і прискорення точки  $B$ , а також кутову швидкість і кутове прискорення шатуна  $AB$  в цей момент часу.

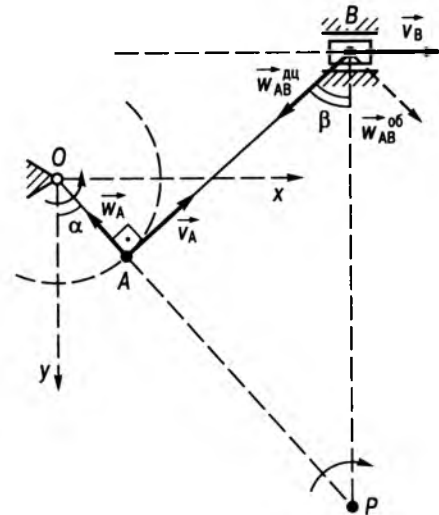


Рис. 8.16

**Розв'язування.** Швидкість точки  $A$  знайдемо, розглядаючи обертальний рух кривошипа  $OA$ :

$$v_A = \omega_0 \cdot OA = 200 \text{ см/с.}$$

Вектор  $\vec{v}_A$  напрямлений перпендикулярно до кривошипа  $OA$  у бік повороту кривошипа (проти ходу стрілки годинника).

Для визначення швидкості точки  $B$  і кутової швидкості шатуна будемо його миттєвий центр швидкостей. У точках  $A$  і  $B$  проводимо прямі  $AP$  і  $BP$ , перпендикулярні відповідно до вектора  $\vec{v}_A$  і напрямку руху точки  $B$ . Точка  $P$  перетину цих прямих — миттєвий центр швидкостей шатуна  $AB$ .

Величину швидкості точки  $B$  і кутової швидкості шатуна  $\omega_{AB}$  знаходимо зі співвідношення

$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \omega_{AB}. \quad (8.22)$$

Вектор кутової швидкості  $\vec{\omega}_{AB}$  шатуна  $AB$  напрямлений перпендикулярно до площини рисунка "від нас". Вектор  $\vec{v}_B$  перпендикулярний до прямої  $PB$ , він спрямований у напрямку повороту шатуна  $AB$ .

Нескладні геометричні розрахунки дають змогу знайти  $AP = AB = 100 \text{ см}$ ,  $BP = 100\sqrt{2} \text{ см}$ , тому з виразу (8.22) маємо

$$v_B = 200 \cdot \sqrt{2} \text{ см/с,}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = 2 \text{ с}^{-1}.$$

За означенням кутового прискорення для шатуна  $\epsilon_{AB} = \dot{\omega}_{AB}$ . Проте кутова швидкість  $\omega_{AB}$  визначена в даний момент часу і як функція часу невідома. Можна записати

$$\epsilon_{AB} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v_A}{AP} \right) = v_A \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{AP} \right).$$

Відстань  $AP$  до миттєвого центра швидкостей невідома, під час руху механізму вона змінюється за певним невідомим законом.

Спочатку визначимо прискорення точки  $B$ , після цього знайдемо  $\epsilon_{AB}$  іншим способом.

Виберемо полюс у точці  $A$  і за теоремою про розподіл прискорень отримаємо

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{w}_{AB}^{ob} + \vec{w}_{AB}^{du}. \quad (8.23)$$

Оскільки кривошип обертається рівномірно, то  $w_{At} = 0$  і прискорення точки  $A$

$$\vec{w}_A = \vec{w}_{At} + \vec{w}_{Av} = \vec{w}_{Av};$$

$$w_{Av} = \omega^2 \cdot OA = 2000 \text{ см/с}^2.$$

Вектор  $\vec{w}_A$  напрямлений від точки  $A$  до точки  $O$ .

Вектор  $\vec{w}_{AB}^{du}$  має напрям від точки  $B$  до полюса  $A$ ,

$$w_{AB}^{du} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 400 \text{ см/с}^2.$$

Вектор  $\vec{w}_{AB}^{ob} \perp AB$ , але обчислити його величину неможливо, тому що невідоме значення  $\epsilon_{AB}$ .

Виберемо систему координат  $Oxy$  з початком у точці  $O$  і запишемо рівність (8.23) в проєкціях на осі  $Ox$  і  $Oy$  (напрямок  $\vec{w}_{AB}^{ob}$  вибираємо довільно заздалегідь):

$$\begin{aligned} w_{Bx} = w_B = -w_{Av} \cdot \sin \alpha - w_{AB}^{du} \cdot \sin \beta + w_{AB}^{ob} \cdot \cos \beta, \\ w_{By} = 0 = -w_{Av} \cdot \cos \alpha + w_{AB}^{du} \cdot \cos \beta + w_{AB}^{ob} \cdot \sin \beta. \end{aligned}$$

З цієї системи рівнянь знаходимо величини векторів:  $w_{AB}^{ob} = 1600 \text{ см/с}^2$ ;  $w_B = -400 \cdot \sqrt{2} \text{ см/с}^2$ .

Знаючи  $w_{AB}^{ob}$ , знаходимо

$$\epsilon_{AB} = \frac{w_{AB}^{ob}}{AB} = 16 \text{ с}^{-2}.$$

Оскільки знак  $w_{AB}^{ob}$  додатний, напрям цього вектора, вибраний нами довільно, правильний. Напрямок вектора кутового прискорення  $\epsilon_{AB}$  визначається на підставі виразу (8.17). В даному випадку він напрямлений перпендикулярно до площини рисунка "від нас".

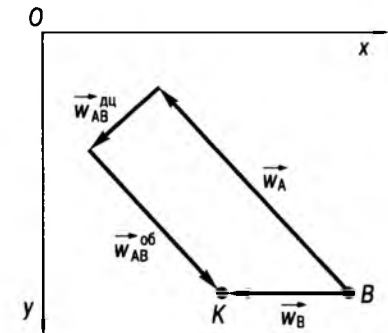


Рис. 8.17

Розв'язати задачу можна також графічним методом, побудувавши *план прискорень*. Згідно з вибраним масштабом прискорень будуюмо рівність (8.23), в якій відомі вектори  $\vec{w}_A$  і  $\vec{w}_{AB}^{дл}$ , а також напрями векторів  $\vec{w}_B$  і  $\vec{w}_{AB}^{об}$  (рис. 8.17). Від точки  $B$  відкладаємо послідовно вектор  $\vec{w}_A$  і вектор  $\vec{w}_{AB}^{дл}$ . Через кінець останнього проводимо пряму, перпендикулярну до шатуна  $AB$  (її напрямком такий самий, як і напрямком  $\vec{w}_{AB}^{об}$ ). Точка перетину  $K$  цієї прямої з напрямком руху точки  $B$  визначає кінець вектора  $\vec{BK} = \vec{w}_B$ , який і є шуканим прискоренням точки  $B$ . На плані прискорень вектори  $\vec{w}_B$  і  $\vec{w}_{AB}^{об}$  отримуємо в тому ж масштабі.

**Приклад 8.3.** Циліндр радіуса  $R = 0,5$  м котиться без ковзання по горизонтальній прямій. Прискорення центра  $w_O = 2$  м/с<sup>2</sup>, а швидкість в даний момент часу  $v_O = 1$  м/с (рис. 8.18, а).

Визначити: 1) прискорення точки, що збігається у даний момент часу з миттєвим центром швидкостей; 2) положення миттєвого центра прискорень і швидкість точки циліндра, яка збігається у даний момент часу з миттєвим центром прискорень.

**Розв'язування.** Оскільки циліндр котиться без ковзання, то його миттєвий центр швидкостей перебуває в точці  $P$  дотику циліндра до нерухомої поверхні (рис. 8.18, б).

Для визначення прискорення точки  $P$  виберемо полюс в точці  $O$ , тоді

$$\vec{w}_P = \vec{w}_O + \vec{w}_{OP}^{об} + \vec{w}_{OP}^{дл},$$

де

$$w_{OP}^{об} = \varepsilon \cdot OP; \quad w_{OP}^{дл} = \omega^2 \cdot OP.$$

Тут  $\omega$  і  $\varepsilon$  — кутові швидкість і прискорення обертання циліндра навколо полюса  $O$ . Величини  $\omega$  і  $\varepsilon$  не залежать від вибору полюса, тому знайдемо їх відносно миттєвого центра швидкостей.

Швидкість точки  $O$  відома, її можна записати так:

$$\vec{v}_O = \vec{\omega} \times \vec{PO}.$$

Враховуючи перпендикулярність векторів  $\vec{\omega}$  та  $\vec{PO}$ , для кутової швидкості маємо

$$\omega = \frac{v_O}{OP} = 2 \text{ с}^{-1}.$$

Напрямок вектора кутової швидкості відповідає повороту циліндра за стрілкою годинника, тобто вектор  $\vec{\omega}$  напрямлений перпендикулярно до площини руху циліндра "від нас".

Зауважимо, що відстань  $OP$  до миттєвого центра швидкостей під час руху циліндра не змінюється, тому

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{OP} \cdot \frac{dv_O}{dt} = \frac{w_O}{OP} = 4 \text{ с}^{-2}.$$

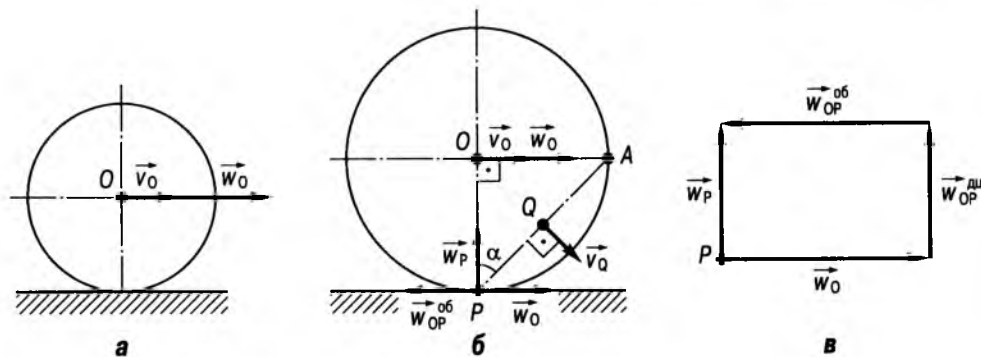


Рис. 8.18

Внаслідок того, що рух циліндра прискорений (вектори  $\vec{v}_O$  і  $\vec{w}_O$  напрямлені в один бік), вектор  $\vec{\varepsilon}$  має такий самий напрямком, як і вектор  $\vec{\omega}$ .

Обчислимо прискорення  $\vec{w}_{OP}^{об}$  і  $\vec{w}_{OP}^{дл}$  обертального руху точки  $P$  відносно полюса  $O$ :

$$w_{OP}^{об} = \varepsilon \cdot OP = 2 \text{ м/с}^2, \quad w_{OP}^{дл} = \omega^2 \cdot OP = 2 \text{ м/с}^2.$$

Усі складові вектора  $\vec{w}_P$  будуюмо в точці  $P$ , послідовно відкладаючи спочатку вектор  $\vec{w}_O$ , потім  $\vec{w}_{OP}^{дл}$  і  $\vec{w}_{OP}^{об}$  (рис. 8.18, в). Оскільки  $\vec{w}_{OP}^{об} = -\vec{w}_O$ , то

$$w_P = w_{OP}^{дл} = 2 \text{ м/с}^2.$$

Побудуємо миттєвий центр прискорень. У зв'язку з тим, що вектори  $\vec{\omega}$  і  $\vec{\varepsilon}$  однаково напрямлені, від вектора прискорення точки  $P$  в напрямку обертання (за ходом годинникової стрілки) відкладаємо кут  $\alpha$ , знайдемо за формулою (8.19):

$$\text{tg } \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 1, \quad \alpha = 45^\circ.$$

На прямій  $PA$  відкладаємо відрізок  $PQ = \frac{w_P}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$  м. Неважко показати, що точка  $Q$  є серединою хорди  $AP$  (рис. 8.18, б). Швидкість точки  $Q$  визначаємо як швидкість точки тіла, що здійснює миттєвий обертальний рух навколо полюса  $P$ :

$$\vec{v}_Q = \vec{\omega} \times \vec{PQ}.$$

Напрямок цього вектора визначається на підставі властивостей векторного добутку, а його значення

$$v_Q = \omega \cdot PQ \cdot \sin(\widehat{\omega, PQ}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ м/с}.$$

**Приклад 8.4.** Прискорення кінців стрижня  $AB$  довжиною 10 см, що виконує плоскопаралельний рух, напрямлені вздовж стрижня назустріч одне одному, причому  $w_A = 10$  см/с<sup>2</sup>,  $w_B = 20$  см/с<sup>2</sup>. Визначити кутову швидкість і кутове прискорення стрижня.

**Розв'язування.** Введемо систему координат  $Ax$ , як показано на рис. 8.19. Якщо

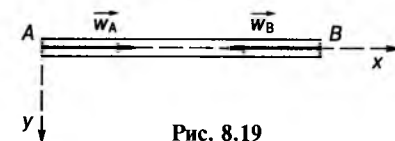


Рис. 8.19

полюсом обрати точку  $A$ , то прискорення точки  $B$  за теоремою про розподіл прискорень можна подати так:

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{w}_{AB}^{об} + \vec{w}_{AB}^{дл}.$$

Враховуючи, що  $\vec{w}_{AB}^{об} \perp AB$ ,  $\vec{w}_{AB}^{дл} \parallel AB$  та спроектувавши останню залежність на осі  $Ax$  і  $Ay$ , матимемо:

$$\begin{cases} -w_B = w_A + 0 - w_{AB}^{дл}, \\ 0 = 0 + w_{AB}^{об} + 0. \end{cases}$$

З другого рівняння визначаємо  $w_{AB}^{об} = 0$  і, відповідно,  $\varepsilon_{AB} = 0$ . З першого рівняння  $w_{AB}^{дл} = w_A + w_B = 30$  см/с<sup>2</sup>, звідки

$$\omega = \sqrt{\frac{w_{AB}^{дл}}{AB}} = \sqrt{3} \text{ с}^{-1}.$$

### § 8.3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

**8.1.** Барабан 1 обертається з кутовою швидкістю  $\omega = 6 \text{ с}^{-1}$  і піднімає трубу 2 (рис. 8.20). Знайти кутову швидкість труби і

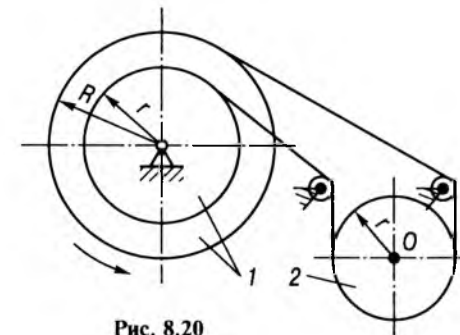


Рис. 8.20

швидкість точки  $O$ , якщо радіуси барабана і труби відповідно  $R = 0,3$  м і  $r = 0,2$  м.

Відповідь:  $\omega_2 = 1,5 \text{ с}^{-1}$ ,  $v_O = 1,5$  м/с.

8.2. Механізм, що складається з трьох ланок ( $OA$ ,  $AB$  і  $BC$ ), займає положення, зображене на рис. 8.21. Швидкість і прискорення точки  $A$  в цей момент часу  $v_A = 2$  м/с,  $w_A = 20$  м/с<sup>2</sup>. Визначити прискорення точки  $B$  шатуна  $AB$ , якщо  $AB = BC = 0,8$  м.

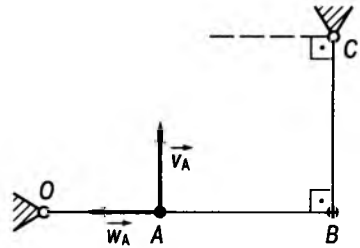


Рис. 8.21

Відповідь:  $w_B = 25$  м/с<sup>2</sup>.

8.3. Кутова швидкість барабана 1  $\omega_1 = 1$  с<sup>-1</sup> (рис. 8.22). Визначити швидкість точки  $M$  східчастого барабана 2, який котиться без ковзання по горизонтальній поверхні, якщо радіуси  $r = 0,1$  м,  $R = 0,3$  м.

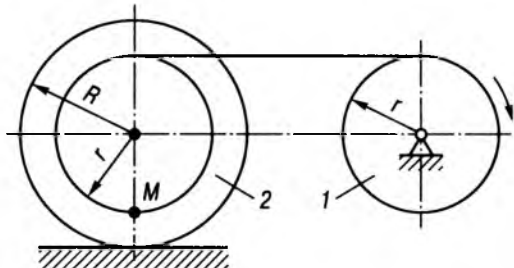


Рис. 8.22

Відповідь:  $v_M = 0,05$  м/с.

8.4. У планетарному механізмі колесо 1 нерухоме (рис. 8.23), а кривошип  $OA$  оберта-

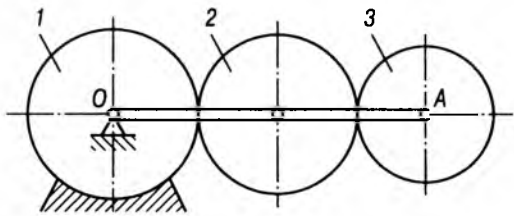


Рис. 8.23

ється навколо осі, що проходить через точку  $O$ , за довільним законом  $\varphi(t)$ . З'ясувати, яке співвідношення має бути між радіусами коліс, щоб колесо 3 виконувало поступальний рух.

Відповідь:  $R_1 = R_3$ ;  $R_2$  — довільний.

8.5. Барабан 1 (рис. 8.24) обертається за законом  $\varphi = 0,1 t^2$ . Знайти прискорення вантажу 2 і прискорення точки  $C$  барабана 3 в момент часу  $t = 1$  с, якщо  $r = 0,2$  м.

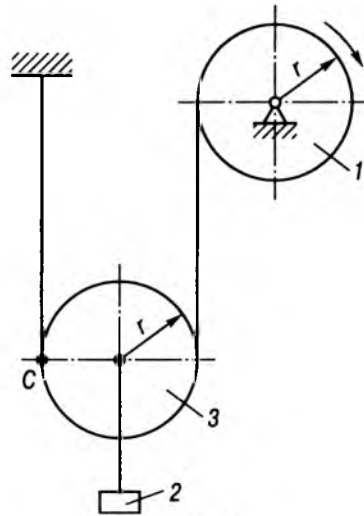


Рис. 8.24

Відповідь:  $w_2 = 0,02$  м/с<sup>2</sup>,  $w_C = 0,002$  м/с<sup>2</sup>.

8.6. Стрижень  $AB$  завдовжки 0,4 м рухається в площині рисунка (рис. 8.25). У певний момент часу точки  $A$  і  $B$  стрижня мають прискорення  $w_A = 2$  м/с<sup>2</sup>,  $w_B = 6$  м/с<sup>2</sup>. Визначити кутові швидкість і прискорення стрижня  $AB$ , якщо  $\alpha = 30^\circ$ .

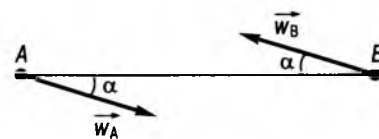


Рис. 8.25

Відповідь:  $\omega = 1,3$  с<sup>-1</sup>,  $\epsilon = 10$  с<sup>-2</sup>.

8.7. Тягар 1 спускається по похилій площині зі швидкістю  $v_1 = 16$  см/с за допомо-

гою механізму, зображеного на рис. 8.26. Знайти кутову швидкість рухомого блока 3 і швидкість його центра  $C$ , якщо радіуси східчастого нерухомого блока  $r = 4$  см,  $R = 8$  см.

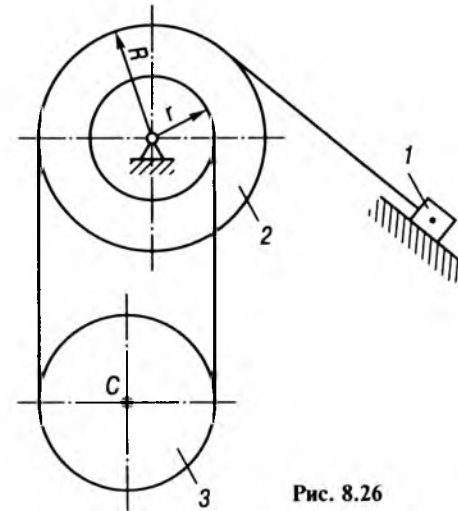


Рис. 8.26

Відповідь:  $\omega_3 = 2$  с<sup>-1</sup>,  $v_C = 4$  см/с.

8.8. У диференціальному механізмі з зовнішнім зачепленням шестірня 1 та кривошип 2 обертаються навколо нерухомої осі  $O$  незалежно одне від одного за законами відповідно  $\varphi = 20 t$  с<sup>-1</sup> і  $\psi = 5 t$  с<sup>-1</sup>. В положенні, зображеному на рис. 8.27, визначити кутову швидкість шестірні 3 і швидкості точок  $A$  і  $B$ , якщо  $R_1 = R_3 = 0,1$  м.

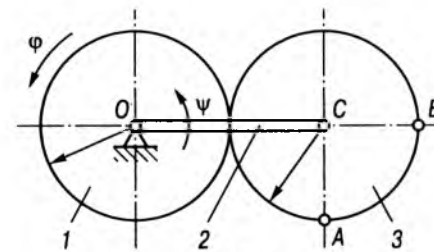


Рис. 8.27

Відповідь:  $\omega_3 = 10$  с<sup>-1</sup>,  $v_B = 0$ ,  $v_A = \sqrt{2}$  м/с.

8.9. У механізмі, зображеному на рис. 8.28, шестірня 1 та кривошип  $OD$  обертаються незалежно одне від одного навколо осі  $O$  за законами  $\varphi(t) = t$  рад,  $\psi(t) = 0,5t$  рад відповідно. Визначити швидкості точок  $A$  і  $B$  та прискорення точки  $B$  шестірні 3, якщо  $R_1 = R_3 = 0,4$  м,  $R_2 = 0,2$  м.

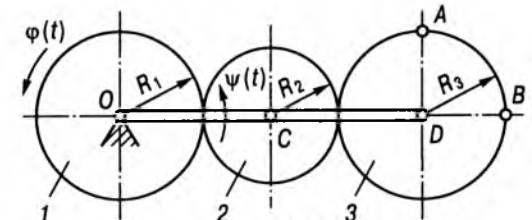


Рис. 8.28

Відповідь:  $v_A = 0,72$  м/с,  $v_B = 1$  м/с,  $w_B = 0,7$  м/с<sup>2</sup>.

#### § 8.4. РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Аналіз руху плоского механізму за допомогою плану швидкостей або миттєвих центрів швидкостей дає змогу знайти швидкості точок і кутові швидкості окремих тіл, що складають механізм, тільки у фіксований момент часу. Але при розрахунку і конструюванні навіть найпростіших механізмів потрібно визначити положення і швидкості точок механізму протягом певного інтервалу часу. Прогнозування поведінки механізму можливе за умови, якщо відомий закон його руху. Таку можливість надає інженеру використання електронної обчислювальної техніки — персонального комп'ютера (ПК).

Мета завдання — засвоєння методу дослідження кінематики плоского механізму за допомогою ПК.

Розглянемо механізм з одним ступенем вільності. Ланки механізму з'єднані між собою шарнірно і рухаються в площині рисунка. Кутова швидкість першої ланки — кривошипа  $OA$  — відома:  $\omega_{OA} = 5$  с<sup>-1</sup>. Схеми механізмів до відповідних варіантів завдань показано на рис. 8.29, а числові дані для них — у табл. 8.1.

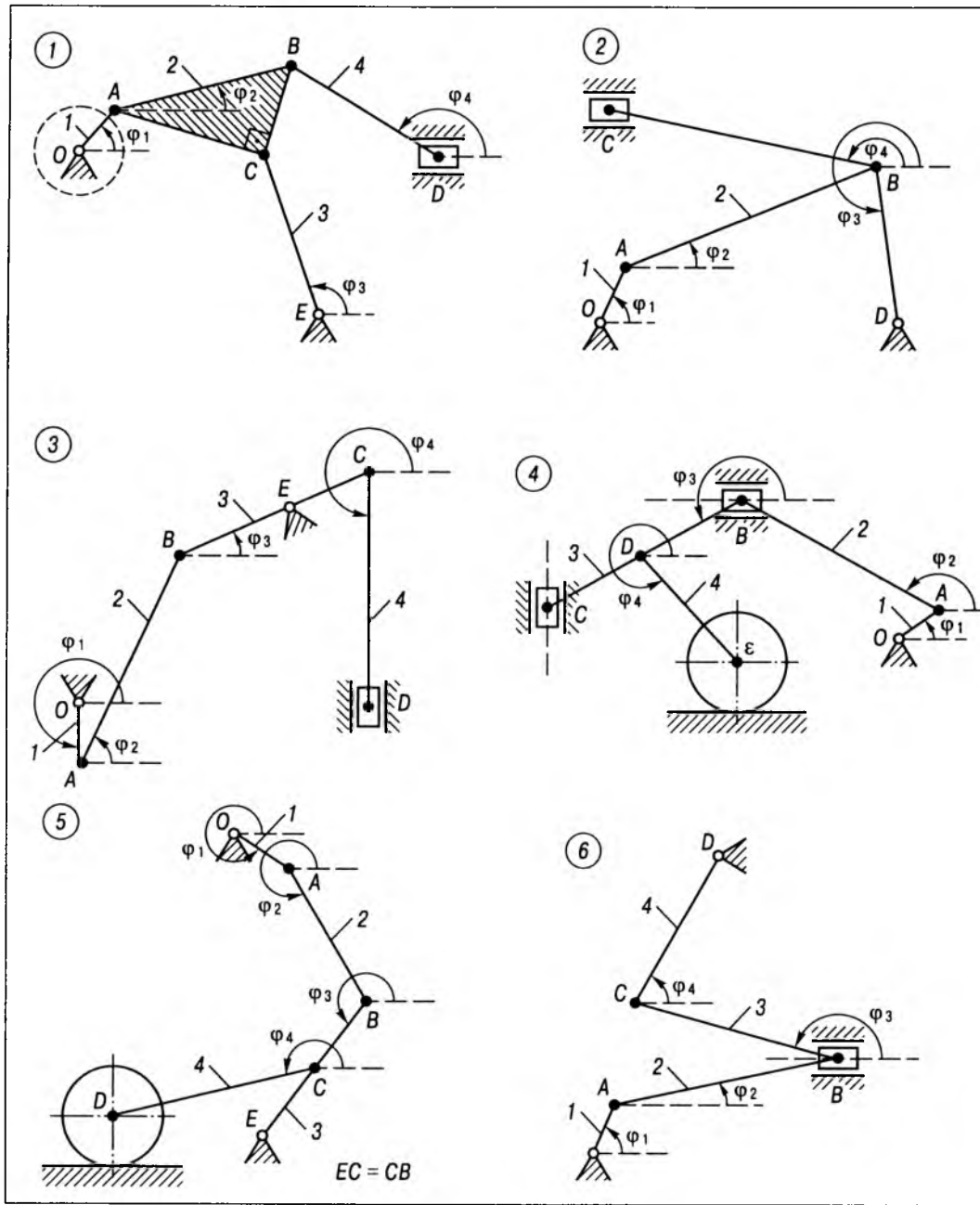


Рис. 8.29 (початок)

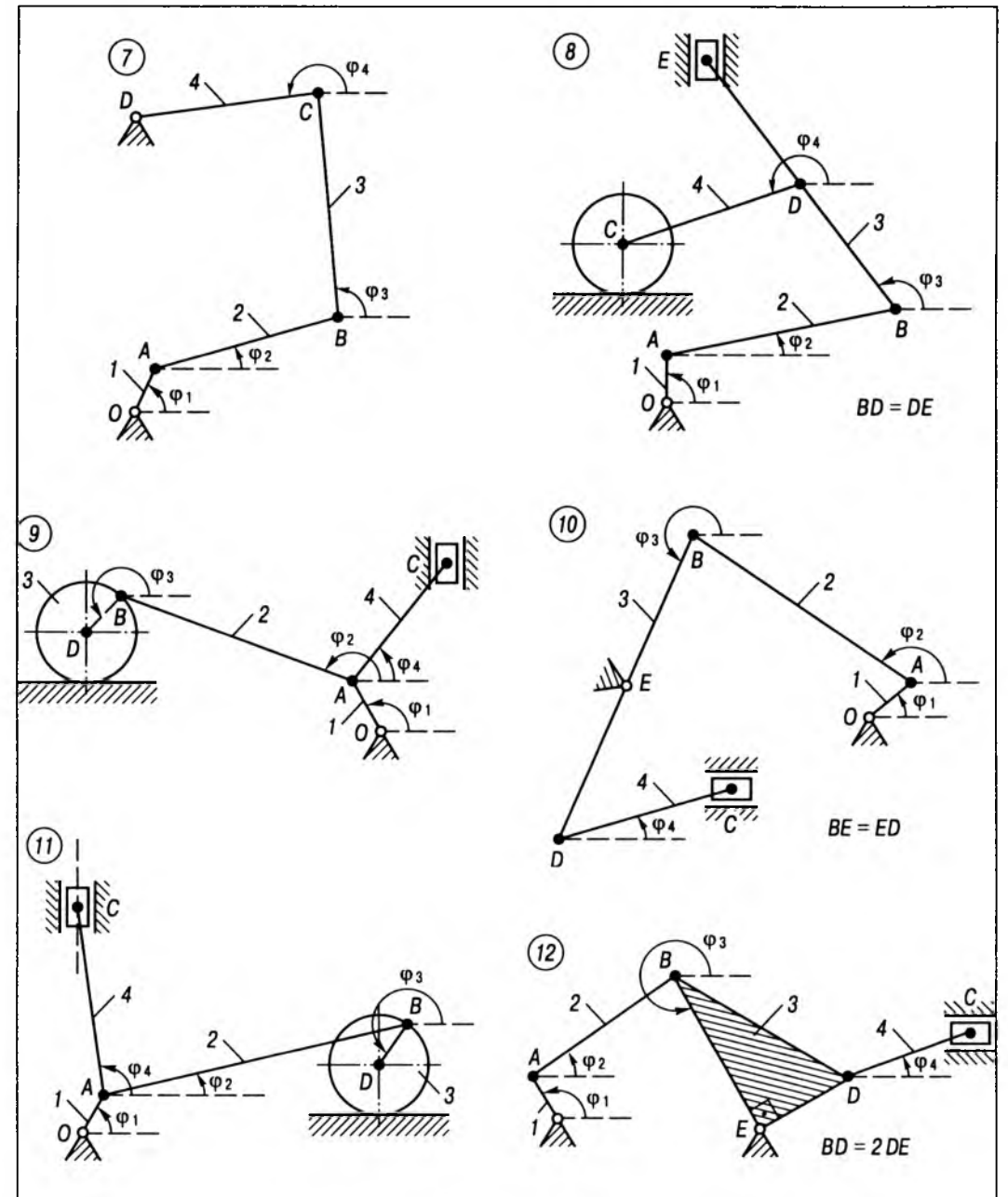


Рис. 8.29 (продовження)

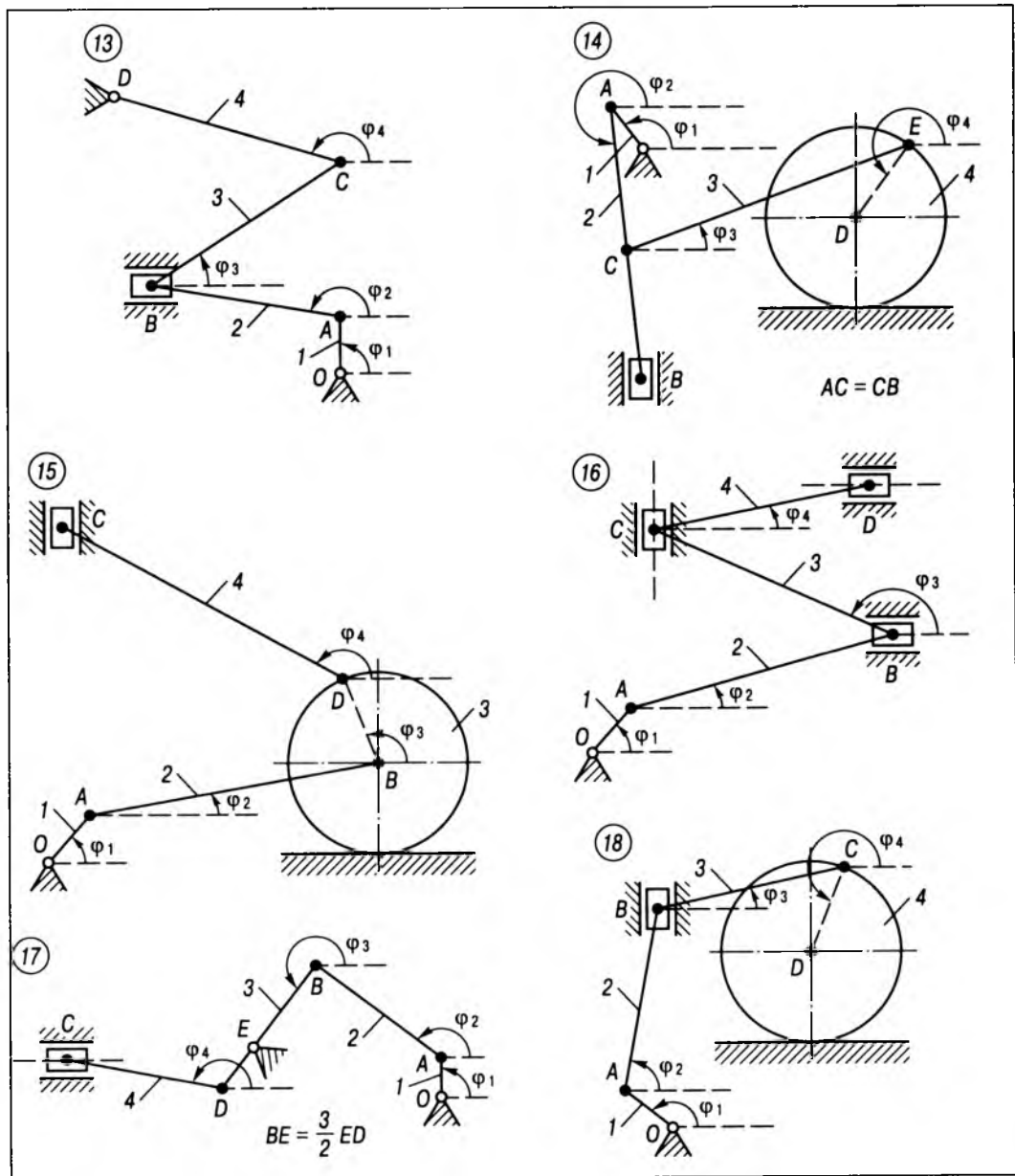


Рис. 8.29 (продовження)

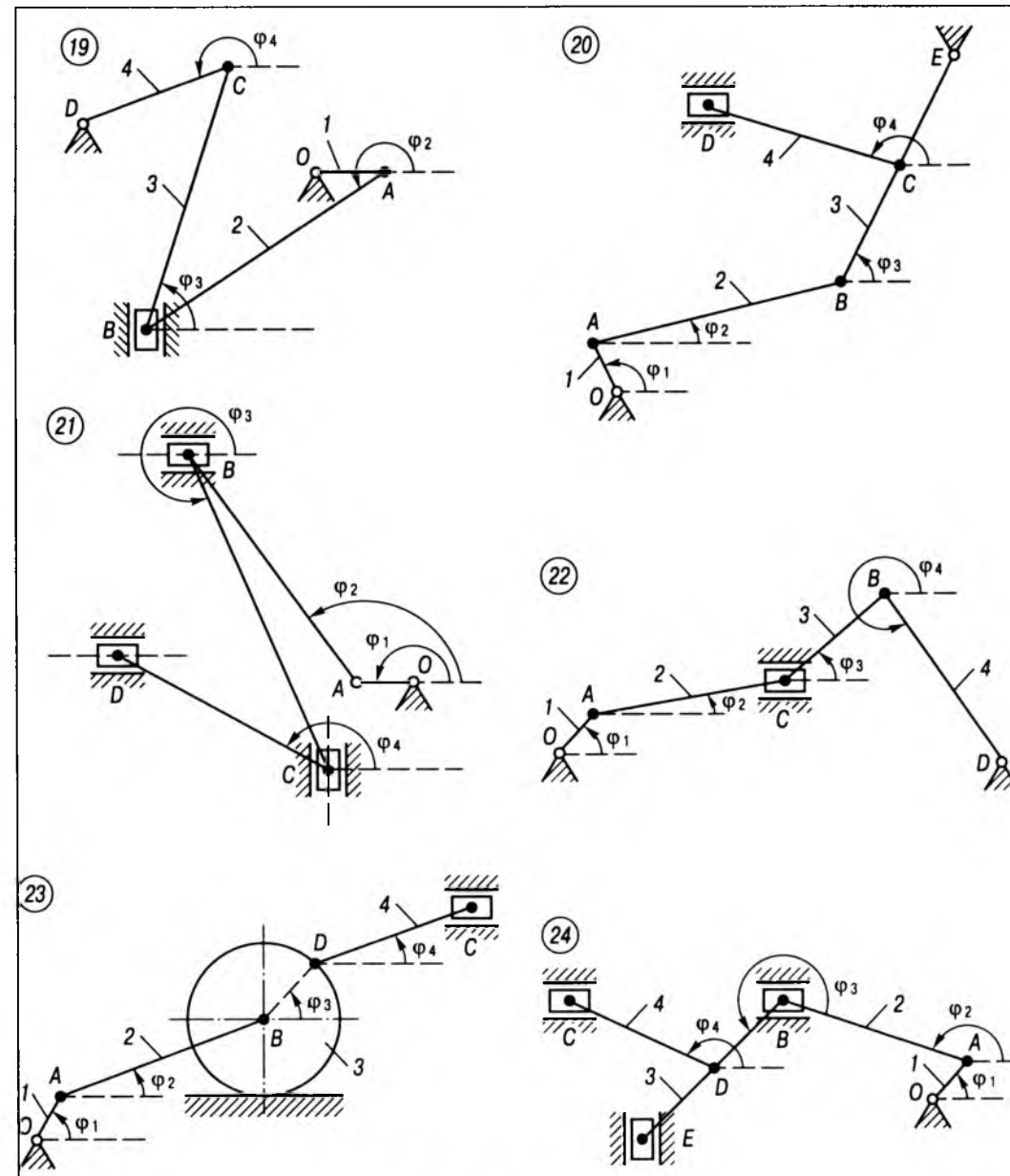


Рис. 8.29 (продовження)

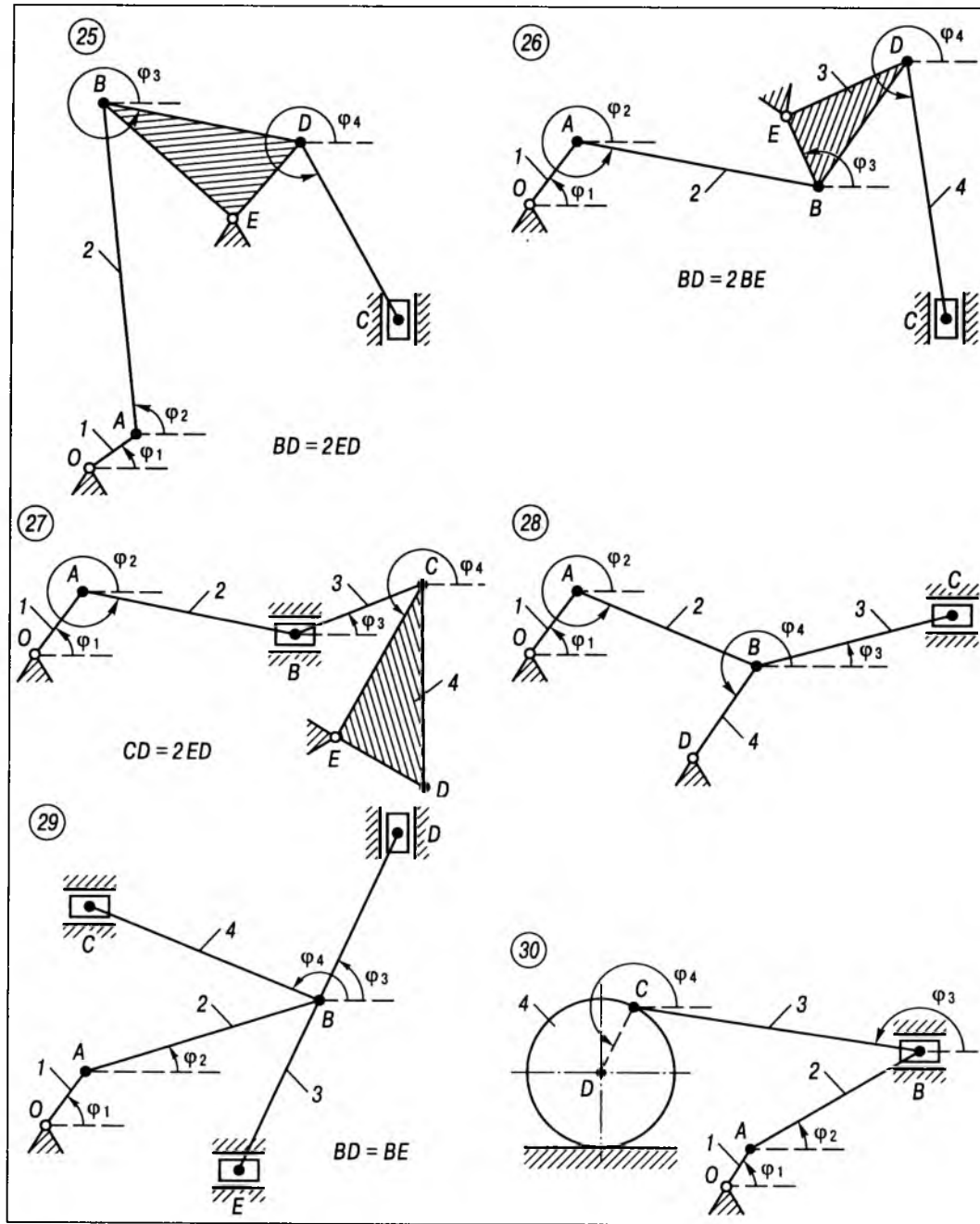


Рис. 8.29 (закінчення)

Варіант	Ланка			Кут, град			
	2	3	4	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$
1	1,00	1,00	0,90	45	30	150	120
2	1,00	0,60	1,00	60	30	290	170
3	1,00	0,90	1,00	270	60	30	270
4	1,20	1,20	0,70	30	150	225	315
5	0,70	0,90	0,90	330	300	225	190
6	1,00	0,90	0,80	60	15	170	60
7	0,80	1,00	0,80	60	15	95	190
8	1,00	1,40	0,80	90	20	135	210
9	1,30	0,30	0,80	120	150	225	50
10	1,30	1,60	0,90	30	135	240	30
11	1,40	0,20	0,90	60	15	225	95
12	1,00	0,90	0,80	120	35	300	20
13	0,80	1,00	1,00	90	170	45	150
14	1,20	1,30	0,40	135	305	30	225
15	1,00	0,30	1,20	45	10	100	145
16	1,00	1,00	1,00	45	20	150	12
17	1,00	1,00	1,00	90	135	225	165
18	1,00	1,00	0,50	150	80	15	250
19	1,00	1,00	0,60	0	210	75	200
20	1,00	1,00	0,80	120	10	65	160
21	1,00	1,20	0,80	180	125	290	115
22	1,00	1,10	0,80	45	15	50	315
23	1,00	0,50	1,00	60	20	45	20
24	1,00	1,00	0,80	45	160	225	160
25	1,60	0,80	1,00	30	100	350	300
26	1,20	0,60	1,00	60	345	110	280
27	1,00	0,50	0,90	45	350	30	240
28	0,80	0,80	0,50	60	330	20	225
29	0,80	1,20	0,80	60	20	60	160
30	1,00	1,40	0,40	60	30	170	240

Довжина кривошипа  $OA$  дорівнює  $0,2$  м. Довжини ланок механізмів у таблиці подано в метрах. Кути визначають початкові значення кутів повороту відповідних ланок в градусах.

Зміст завдання:

1. Скласти рівняння для визначення кутових швидкостей  $\omega_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) ланок як функцій кутів їх обертання  $\varphi_i$ . Розв'язати ці рівняння на ПК і знайти кутові швидкості ланок.

2. Скласти рівняння для визначення швидкості точки  $C$  (або  $B$ ) як функції часу.

3. Скласти диференціальні рівняння для визначення кутів повороту ланок як функцій часу.

4. Для положення механізму, показано-го на схемі, визначити:

швидкості всіх точок, позначених на схемі, двома способами: побудовою плану швидкостей і за допомогою миттєвих центрів швидкостей кожної ланки;

кутові швидкості ланок цими ж двома способами;

прискорення точки  $C$  (або  $B$ ) аналітично і за допомогою плану прискорень;

положення миттєвого центра прискорень ланки  $AC$  або  $AB$  залежно від схеми.

**Приклад виконання завдання.** Кривошип  $OA$  обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\omega_1$  і за допомогою шатуна  $AC$  приводить у рух колесо, яке котиться по горизонтальній поверхні без ковзання. Шатун  $CB$  прикріплений до центра колеса  $C$  і до точки  $B$  кривошипа  $BD$  шарніром (рис. 8.30).

Позначимо кути, що визначають положення ланок  $OA$ ,  $AC$ ,  $CB$ ,  $BD$  відповідно  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  і  $\varphi_4$ , причому відрхуємо їх проти ходу годинникової стрілки від додатного напрямку осі  $Ox$ .

Дано:  $AO = 0,27$  м,  $AC = 0,2$  м,  $CB = 1,02$  м,  $BD = 0,82$  м,  $\varphi_1(0) = 0$ ;  $\varphi_2(0) = 0,52$  рад,  $\varphi_3(0) = 2,62$  рад,  $\varphi_4(0) = 1,22$  рад,  $\omega_1 = 13,089$  с<sup>-1</sup>.

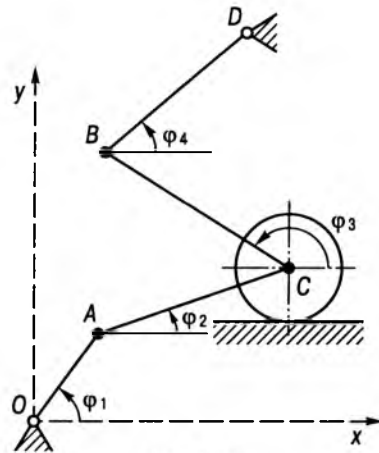


Рис. 8.30

Аналіз роботи механізму за допомогою ПК полягає в складанні системи рівнянь для визначення кутових швидкостей ланок як функцій кутів і в розв'язанні цих рівнянь.

Спочатку, скориставшись формулами розподілу швидкостей точок тіла при плоско-паралельному русі, визначимо швидкості точок  $A$ ,  $C$ ,  $B$ ,  $D$  з'єднання ланок:

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{\omega}_1 \times \vec{OA}, \quad \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_2 \times \vec{AC}, \\ \vec{v}_B &= \vec{v}_C + \vec{\omega}_3 \times \vec{CB}, \quad \vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{\omega}_4 \times \vec{BD}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Беручи до уваги особливості в'язей, накладених на механізм, а саме те, що точка  $D$  нерухома і вектор швидкості точки  $C$  напрямлений горизонтально, з виразів (8.24) дістанемо рівняння для обчислення  $\omega_i$ . Зазначимо, що вектори  $\vec{\omega}_i$  можна подати так:  $\vec{\omega}_i = \{\omega_{ix}, \omega_{iy}, \omega_{iz}\}$ .

Проектуючи на координатні осі  $Ox$  і  $Oy$  рівності (8.24), дістанемо

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= \omega_{1y} \cdot OA_z - \omega_{1z} \cdot OA_y, \\ v_{Ay} &= \omega_{1z} \cdot OA_x - \omega_{1x} \cdot OA_z, \end{aligned} \quad (8.25)$$

де  $OA_x$ ,  $OA_y$ ,  $OA_z$  — проєкції вектора  $\vec{OA}$  на координатні осі.

Оскільки при плоскому русі складові  $\omega_{1x}$  і  $\omega_{1y}$  дорівнюють нулеві, то формули (8.25) спрощуються:

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= -\omega_{1z} \cdot OA \cdot \sin \varphi_1; \\ v_{Ay} &= \omega_{1z} \cdot OA \cdot \cos \varphi_1. \end{aligned} \quad (8.26)$$

З другої формули виразів (8.24) маємо

$$\begin{aligned} v_{Cx} &= v_{Ax} + \omega_{2y} \cdot AC_z - \omega_{2z} \cdot AC_y, \\ v_{Cy} &= v_{Ay} + \omega_{2z} \cdot AC_x - \omega_{2x} \cdot AC_z. \end{aligned}$$

Оскільки складові  $\omega_{1x} = \omega_{1y} = 0$ , враховуючи (8.26), на підставі (8.27) отримуємо

$$v_{Cx} = -\omega_1 \cdot OA \cdot \sin \varphi_1 - \omega_2 \cdot AC \cdot \sin \varphi_2, \quad (8.27)$$

$$v_{Cy} = \omega_1 \cdot OA \cdot \cos \varphi_1 + \omega_2 \cdot AC \cdot \cos \varphi_2. \quad (8.28)$$

Тут і надалі індекс "z" біля  $\omega$  опущено.

Але  $v_{Cy} = 0$ , тому з (8.28) знаходимо

$$\omega_1 \cdot OA \cdot \cos \varphi_1 + \omega_2 \cdot AC \cdot \cos \varphi_2 = 0,$$

звідки

$$\omega_2 = -\omega_1 \cdot \frac{OA \cdot \cos \varphi_1}{AC \cdot \cos \varphi_2}. \quad (8.29)$$

З останнього виразу (8.24) знаходимо

$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{\omega}_2 \times \vec{AC} + \vec{\omega}_3 \times \vec{CB} + \vec{\omega}_4 \times \vec{BD}.$$

В проєкціях на осі  $Ox$  і  $Oy$  дістанемо

$$\begin{aligned} v_{Dx} &= -\omega_1 \cdot OA \cdot \sin \varphi_1 - \omega_2 \cdot AC \cdot \sin \varphi_2 - \\ &- \omega_3 \cdot CB \cdot \sin \varphi_3 - \omega_4 \cdot BD \cdot \sin \varphi_4, \end{aligned} \quad (8.30)$$

$$\begin{aligned} v_{Dy} &= \omega_1 \cdot OA \cdot \cos \varphi_1 + \omega_2 \cdot AC \cdot \cos \varphi_2 + \\ &+ \omega_3 \cdot CB \cdot \cos \varphi_3 + \omega_4 \cdot BD \cdot \cos \varphi_4. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Але точка  $D$  нерухома, тобто  $v_{Dx} = 0$ ,  $v_{Dy} = 0$ . З цих двох умов отримуємо формули для визначення  $\omega_3$  і  $\omega_4$ :

$$\omega_3 = -\frac{(\omega_1 \cdot OA \cdot \sin \varphi_1 + \omega_2 \cdot AC \cdot \sin \varphi_2) \cdot \cos \varphi_4}{CB \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_4)}, \quad (8.32)$$

$$\omega_4 = -\frac{\omega_3 \cdot CB \cdot \cos \varphi_3}{BD \cdot \cos \varphi_4}. \quad (8.33)$$

Швидкість точки  $C$  напрямлена горизонтально, тому її визначають з рівняння (8.27).

Підставивши числові значення в рівняння (8.29), (8.33), (8.32) та (8.27), дістанемо систему співвідношень

$$\omega_2 = -3,605 \cdot \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2}, \quad (8.34)$$

$$\omega_3 = -\frac{(0,27\omega_1 \cdot \sin \varphi_1 + 1,02\omega_2 \cdot \sin \varphi_2) \cdot \cos \varphi_4}{1,02 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)}, \quad (8.35)$$

$$\omega_4 = -1,24 \cdot \frac{\omega_3 \cdot \cos \varphi_3}{\cos \varphi_4}, \quad (8.36)$$

$$v_C = 0,27\omega_1 \cdot \sin \varphi_1 - 1,02\omega_2 \cdot \sin \varphi_2, \quad (8.37)$$

яку доповнюємо рівностями

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2, \quad \dot{\varphi}_3 = \omega_3, \quad \dot{\varphi}_4 = \omega_4. \quad (8.38)$$

Розв'язування рівнянь (8.34)–(8.38) виконується на ПК з використанням відомих прикладних програм, наприклад MATCAD або MATHEMATICA. Інтервал часу, на якому потрібно знайти розв'язок вказаних рівнянь, має дорівнювати часу повного оберту ланки  $OA$ .

Для виконання четвертого пункту завдання будують миттєві центри швидкостей усіх ланок механізму в положенні, зображеному на рисунку, а також плани швидкостей і прискорень за методикою, наведеною у розв'язаних вище задачах.

Завершується виконання завдання порівняльним аналізом значень кутів повороту, кутових швидкостей та швидкості точки  $C$ , отриманих за результатами розв'язання системи рівнянь (8.34)–(8.38) і результатами графічних методів розв'язання задачі для відповідного положення механізму.



ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ

§ 9.1. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої точки називається рух, при якому одна точка тіла увесь час залишається нерухомою.

Рух тіла, що має нерухому точку, можна розглядати як окремий випадок руху вільного твердого тіла.

Оберемо полюс у нерухомій точці  $O$  (рис. 9.1). Швидкість і прискорення цієї точки відомі:

$$\vec{v}_O = 0; \vec{w}_O = 0.$$

На підставі формул, які визначають розподіл швидкостей і прискорень у вільному твердому тілі, —

$$\begin{aligned} \vec{v}_M &= \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{OM}, \\ \vec{w}_M &= \vec{w}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{OM} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{OM}, \end{aligned} \quad (9.1)$$

отримаємо вирази, що визначають розподіл швидкостей і прискорень у тілі з нерухомою точкою:

$$\begin{aligned} \vec{v}_M &= \vec{\omega} \times \vec{r}_{OM}, \\ \vec{w}_M &= \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{OM} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{OM}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

З формули (9.1) можна зробити висновок, що розподіл швидкостей у тілі з нерухомою точкою збігається з розподілом швидкостей в тілі, що обертається навколо осі, напрям якої визначається вектором ку-

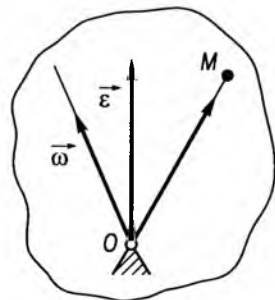


Рис. 9.1

тової швидкості  $\vec{\omega}$ . Ця вісь не залишається нерухомою: в процесі руху тіла вона змінює положення в просторі відповідно до закону руху тіла, тому її називають *миттєвою віссю обертання*. Вектор  $\vec{\omega}$  називають миттєвою кутовою швидкістю, аналогічно вектор  $\vec{\varepsilon}$  — миттєвим кутовим прискоренням.

Миттєва вісь обертання описує в просторі дві конічні поверхні. Геометричне місце миттєвих осей обертання, віднесене до нерухомої системи координат, — це *нерухомий аксоїд*, а віднесене до рухомої системи координат — *рухомий аксоїд*. Вершини аксоїдів збігаються з нерухомою точкою і в кожний момент часу мають спільну твірну, яка в цей момент є миттєвою віссю обертання.

**Теорема Пуансо.** При русі тіла навколо нерухомої точки рухомий аксоїд котиться по нерухомому без ковзання.

Для встановлення закону руху тіла з нерухомою точкою користуються **теоремою Ейлера**: довільне переміщення тіла навколо нерухомої точки можна здійснити за допомогою трьох послідовних обертань навколо трьох осей, що проходять через нерухому точку: осей прецесії, нутації й власного обертання (рис. 9.2).

Осі системи координат  $O\xi\eta\zeta$  вважаємо нерухомими, осі системи координат  $Oxyz$  — незмінно зв'язаними з тілом, тобто рухомими.

Закон руху тіла з нерухомою точкою відомий, якщо кут прецесії  $\Psi$  — кут повороту навколо осі  $O\xi$ , кут нутації  $\theta$  — кут повороту навколо лінії вузлів  $ON$  і кут власного обертання  $\varphi$  — кут повороту навколо осі  $Oz$  задані як функції часу:

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi(t), \\ \theta &= \theta(t), \\ \varphi &= \varphi(t). \end{aligned} \quad (9.3)$$

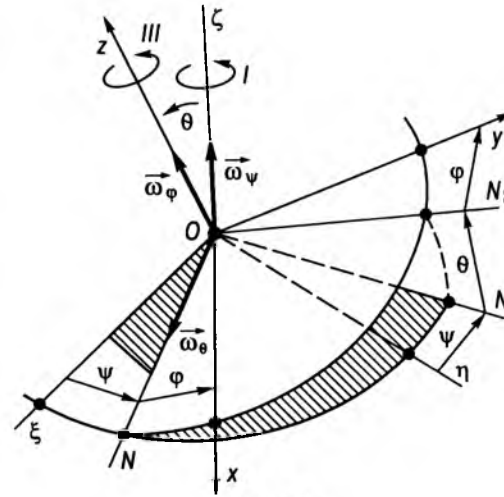


Рис. 9.2

На підставі попередніх міркувань і рівностей (9.3) можна зробити висновок, що абсолютна кутова швидкість тіла

$$\vec{\omega} = \vec{\zeta}_0 \omega_\Psi + \vec{n} \omega_\theta + \vec{k} \omega_\varphi, \quad (9.4)$$

де  $\vec{\zeta}_0$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{k}$  — орти осей Ейлера відповідно  $O\xi$ ,  $ON$ ,  $Oz$ .

Оскільки осі Ейлера не ортогональні, то для визначення модуля вектора  $\vec{\omega}$  знаходять його проєкції на осі ортогональної системи координат (рухомої або нерухомої). Зробити це дають змогу *кінематичні формули Ейлера*, які визначають залежності проєкцій кутової швидкості тіла з нерухомою точкою на осі ортогональної системи координат від кутів Ейлера. Проєкції кутової швидкості на осі рухомої системи координат  $Oxyz$

$$\begin{aligned} \omega_x &= \Psi \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_y &= \Psi \sin \theta \sin \varphi - \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_z &= \Psi \sin \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Вектор кутової швидкості

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}.$$

Компоненти вектора  $\vec{\varepsilon}$  — це похідні від компонентів вектора  $\vec{\omega}$ , тобто

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x, \quad \varepsilon_y = \dot{\omega}_y, \quad \varepsilon_z = \dot{\omega}_z,$$

$$\text{тому } \varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2}.$$

На практиці часто зустрічається рух тіла з нерухомою точкою, коли кут нутації  $\theta$  сталий ( $\theta = \text{const}$ ). У цьому випадку прецесію зручно розглядати як переносний рух з кутовою швидкістю  $\omega_p = \dot{\Psi}$ , а власне обертання — як відносний з кутовою швидкістю  $\omega_r = \dot{\varphi}$ . Тоді вектор абсолютної кутової швидкості

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r, \quad (9.5)$$

а вектор абсолютного кутового прискорення

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}_a}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}_a}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_a, \quad (9.6)$$

де  $\frac{d'\vec{\omega}_a}{dt}$  — похідна від вектора  $\vec{\omega}_a$  в рухомій системі координат;  $\vec{\omega}_e$  — кутова швидкість рухомої системи координат.

Якщо кут власного обертання  $\varphi$  і кут прецесії  $\Psi$  є лінійними функціями часу, а кут нутації  $\theta$  постійний (у цьому випадку прецесію називають *регулярною*), то кутове прискорення  $\vec{\varepsilon}$  легко знайти з таких мірку-

вань (рис. 9.3). Вектор  $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}_a}{dt}$  — швидкість точки  $K$ , яка викреслює годограф вектора  $\vec{\omega}_a$ , тобто

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{OK}}{dt}.$$

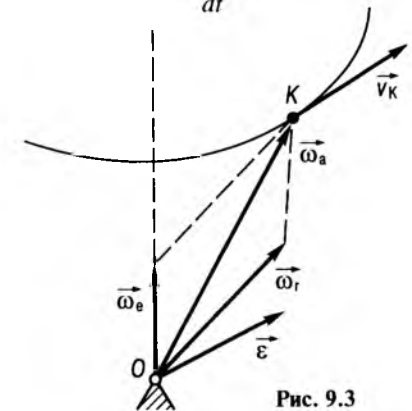


Рис. 9.3

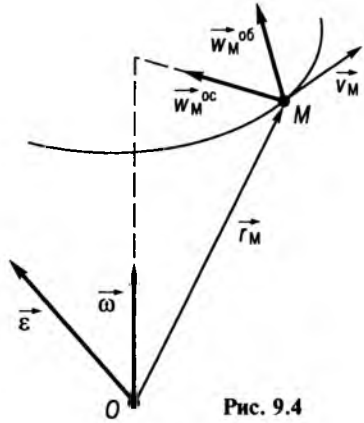


Рис. 9.4

Обертання вектора  $OK$  навколо осі прецесії відбувається з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_e$ . Тому на підставі формули Ейлера

$$\vec{\epsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{OK},$$

отже,

$$\vec{\epsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_a. \quad (9.7)$$

Неважно помітити, що так само

$$\vec{\epsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r,$$

або

$$\vec{\epsilon} = \vec{\omega}_a \times \vec{\omega}_r.$$

Як було зазначено вище, розподіл лінійних швидкостей і прискорень у тілі з нерухомою точкою визначається формулами

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}_M,$$

$$\vec{w}_M = \vec{w}_M^{ob} + \vec{w}_M^{oc},$$

де  $\vec{w}_M^{ob} = \vec{\epsilon} \times \vec{r}_M$  — обертальне прискорення;  $\vec{w}_M^{oc} = \vec{\omega} \times \vec{v}_M$  — доосьове прискорення довільної точки тіла  $M$ ;  $\vec{r}_M$  — радіус-вектор точки  $M$  відносно нерухомої точки  $O$  (рис. 9.4).

## § 9.2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

**Приклад 9.1.** Конус, вершина  $O$  якого нерухома, котиться по горизонтальній площині без ковзання (рис. 9.5). Радіус основи

конуса  $r = 3$  см, кут при вершині —  $60^\circ$ . Точка  $C$  — центр основи конуса — рухається рівномірно і повертається в початкове положення через 1 с. Визначити кутову швидкість і кутове прискорення конуса, а також швидкість і прискорення точок  $A$  і  $B$ .

**Розв'язування.** Зв'яжемо з горизонтальною площиною нерухому систему координат  $Oxyz$  (рис. 9.5). Згідно з теоремою Пуансо можна стверджувати, що бічна поверхня конуса — рухомий аксоїд, а площина  $Oxy$  — нерухомий. Миттєва вісь обертання — твірна конуса  $OA$ . Вісь  $Oz$  — вісь прецесії, вісь  $OC$  — вісь власного обертання, кут між ними — кут нутації  $\theta$  — залишається незмінним під час руху тіла, тобто у нашому випадку прецесія регулярна.

Називатимемо обертання навколо осі  $Oz$  (прецесію) переносним рухом, а обертання навколо осі  $OC$  (власне обертання) — відносним. Тоді

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r. \quad (1)$$

Точка  $C$  оббігає навколо осі  $Oz$  за 1 с, тобто

$$\omega_e = 2\pi \text{ с}^{-1}.$$

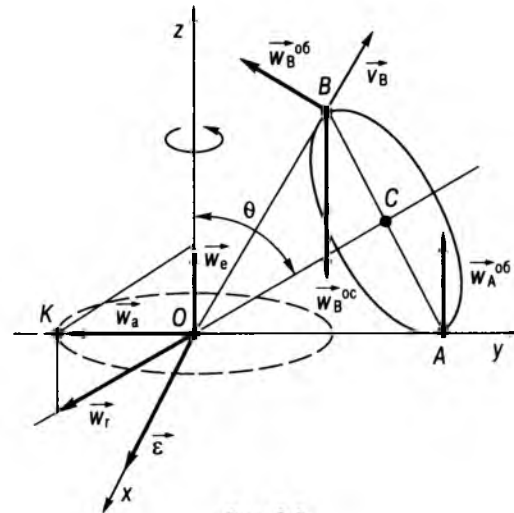


Рис. 9.5

Відповідно до напрямку обертання конуса навколо осі  $Oz$  вектор  $\vec{\omega}_e$  напрямлений вздовж осі  $Oz$  вгору.

На підставі (1) побудуємо паралелограм кутових швидкостей, при цьому врахуємо, що вектор  $\vec{\omega}_a$  напрямлений вздовж миттєвої осі обертання  $OA$ , а вектор  $\vec{\omega}_r$  — вздовж осі власного обертання  $OC$ . З рис. 9.5 знаходимо

$$\omega_r = 2\omega_e = 4\pi \text{ с}^{-1},$$

$$\omega_a = \omega_r \cos 30^\circ = 2\pi\sqrt{3} \text{ с}^{-1}. \quad (2)$$

Кутове прискорення  $\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}_a}{dt}$  розглядаємо як швидкість точки  $K$ , яка викреслює годограф вектора  $\vec{\omega}_a$ . Тоді

$$\vec{\epsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{OK} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_a. \quad (3)$$

На рисунку осі координат для зручності вибрано так, що миттєва вісь обертання в даний момент збігається з віссю  $Oy$ . Паралелограм кутових швидкостей знаходиться в площині  $Oyz$ . Годографом вектора  $\vec{\omega}_a$  є коло, описане точкою  $K$  в площині  $Oxy$ . Вектор  $\vec{\epsilon}$  спрямований по дотичній до цього кола і, відповідно до (3), перпендикулярний до  $\vec{\omega}_e$  і  $\vec{\omega}_a$ , тобто він направлений вздовж осі  $Ox$ . Модуль цього вектора

$$\epsilon = \omega_e \cdot \omega_a \cdot \sin 90^\circ = 4\pi^2\sqrt{3} \text{ с}^{-1}.$$

Швидкості точок  $A$  і  $B$  визначимо на підставі формул (9.1). Швидкість точки  $A$  дорівнює нулеві, оскільки вона знаходиться на миттєвій осі обертання. Швидкість точки  $B$

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_a \times \vec{OB},$$

її величину визначають із співвідношення

$$v_B = \omega_a \cdot OB \cdot \sin 60^\circ = 18\pi \text{ см/с}.$$

Виходячи з властивостей векторного добутку, вектор швидкості точки  $B$  у даному положенні конуса паралельний до осі  $Ox$  і протилежно напрямлений до неї.

Прискорення точки  $A$

$$\vec{w}_A = \vec{w}_A^{ob} + \vec{w}_A^{oc}.$$

Обертальна складова прискорення точки  $A$

$$\vec{w}_A^{ob} = \vec{\epsilon} \times \vec{OA}, \quad (4)$$

її числове значення

$$w_A^{ob} = \epsilon \cdot OA \cdot \sin 90^\circ = 24 \cdot \pi^2\sqrt{3} \text{ см/с}^2.$$

Вектор  $\vec{w}_A^{ob}$  спрямований, відповідно до (4), паралельно осі  $Oz$  вгору.

Доосьове прискорення точки  $A$

$$\vec{w}_A^{oc} = \vec{\omega}_a \times \vec{v}_A.$$

Вектор  $\vec{w}_A^{oc} = 0$ , тому що  $\vec{v}_A$  дорівнює нулеві.

Таким чином, повне прискорення точки  $A$   $\vec{w}_A = \vec{w}_A^{ob}$ .

Аналогічно знаходимо прискорення точки  $B$ :

$$\vec{w}_B = \vec{w}_B^{ob} + \vec{w}_B^{oc}.$$

Обертальна складова прискорення точки  $B$

$$\vec{w}_B^{ob} = \vec{\epsilon} \times \vec{OB}, \quad (5)$$

її числове значення

$$w_B^{ob} = \epsilon \cdot OB \cdot \sin 90^\circ = 24\pi^2\sqrt{3} \text{ см/с}^2.$$

Доосьове прискорення точки  $B$

$$\vec{w}_B^{oc} = \vec{\omega}_a \times \vec{v}_B,$$

а його значення

$$w_B^{oc} = \omega_a \cdot v_B \cdot \sin 90^\circ = 36\pi^2\sqrt{3} \text{ см/с}^2.$$

Складові вектора  $\vec{w}_B$  розташовані в площині  $Oyz$ . Вектор  $\vec{w}_B^{ob}$  перпендикулярний до  $OB$ , вектор  $\vec{w}_B^{oc}$  спрямований вздовж найкоротшої відстані від точки  $B$  до миттєвої осі обертання.

Модуль повного прискорення точки  $B$  можна знайти, наприклад, за теоремою косинусів, оскільки кут між  $\vec{w}_B^{ob}$  і  $\vec{w}_B^{oc}$  дорівнює  $120^\circ$ :

$$w_B = \sqrt{(w_B^{ob})^2 + (w_B^{oc})^2 - 2 \cdot w_B^{ob} \cdot w_B^{oc} \cdot \cos 120^\circ} \approx 52\pi^2\sqrt{3} \text{ см/с}^2.$$

**Приклад 2.** У певний момент часу кутова швидкість тіла з нерухомою точкою  $\vec{\omega} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k} \text{ с}^{-1}$ . Визначити в цей момент

часу швидкість точки  $A\{0; 0; 0,5\}$ . Координати точки  $A$  дано в метрах.

Розв'язування. Швидкість точки в тілі з нерухомою точкою визначається за формулою

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A.$$

Запишемо векторний добуток у вигляді проєкцій на осі координат:

$$\vec{v}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{vmatrix}.$$

Розкриваючи визначник за елементами першого рядка, знаходимо

$$v_x = 1,5; v_y = -1; v_z = 0.$$

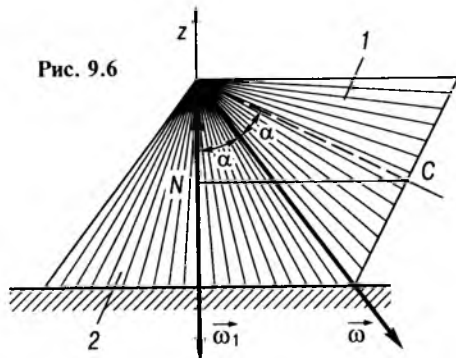
Швидкість точки  $A$

$$v_A = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = 1,8 \text{ м/с}.$$

### § 9.3. ЗАДАЧІ

#### ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

9.1. Конус  $1$  котиться без ковзання по нерухомому конусу  $2$  із сталою за модулем кутовою швидкістю  $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$ . Перпендикуляр  $CN$ , опущений з центра основи конуса  $1$  на вісь  $Oz$ , обертається навколо осі  $Oz$  з кутовою швидкістю  $\omega_1 = 1,8 \text{ с}^{-1}$ . Визначити кутове прискорення конуса  $1$ , якщо кут  $\alpha = 30^\circ$  (рис. 9.6).



Відповідь:  $\epsilon = 2,83 \text{ с}^{-2}$ .

9.2. У певний момент часу вектор миттєвої кутової швидкості тіла, що рухається навколо нерухомої точки,  $\vec{\omega} = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ . Знайти проєкцію на вісь  $Ox$  вектора доосьового прискорення точки  $A\{1, 2, 1\}$  тіла (координати точки в сантиметрах).

Відповідь:  $w_{Ox} = -12 \text{ см/с}^2$ .

9.3. Тіло обертається навколо нерухомої точки із сталою кутовою швидкістю  $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$  (рис. 9.7). Визначити модуль швидкості точки  $A\{0; 0,3; 0,4\}$ , якщо миттєва вісь обертання в цей момент часу збігається з віссю  $Ox$  (координати точки в сантиметрах).

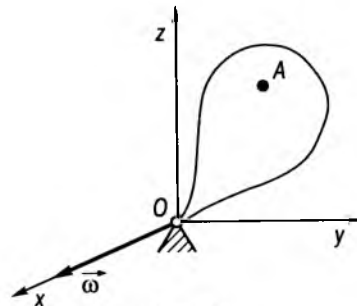


Рис. 9.7

Відповідь:  $v_A = 0,5 \text{ см/с}$ .

9.4. Тіло виконує регулярну прецесію навколо осі  $Oz$  прямокутної системи координат  $Oxyz$ . Миттєва вісь обертання в якийсь момент збігається з віссю  $Ox$ . Визначити кут  $\alpha$  між вектором прискорення точки  $A$ , яка знаходиться на миттєвій осі, і віссю  $Oz$ .

Відповідь:  $\alpha = 0^\circ$ .

9.5. Кутова швидкість тіла, що обертається навколо нерухомої точки,  $\vec{\omega} = \vec{i} \cdot 2 \sin^2 t + \vec{j} \cdot \sin 2t + 5\vec{k} \text{ с}^{-1}$ . Обчислити кутове прискорення тіла в момент часу  $t = 2 \text{ с}$ .

Відповідь:  $\epsilon = 2 \text{ с}^{-2}$ .

9.6. Конус  $1$  котиться без ковзання по внутрішній поверхні нерухомого конуса  $2$  з кутовою швидкістю  $\omega = 0,1\pi^2 \text{ (с}^{-1})$ . Знайти

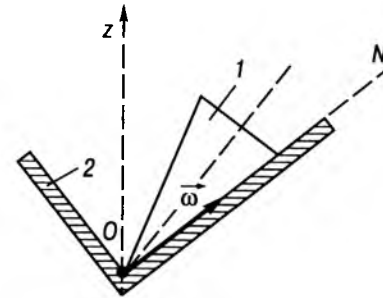


Рис. 9.8

проєкцію кутового прискорення конуса  $1$  на миттєву вісь обертання в момент часу  $t = 2 \text{ с}$  (рис. 9.8).

Відповідь:  $\epsilon_{ON} = 1,26 \text{ с}^{-2}$ .

9.7. Тіло обертається навколо нерухомої точки. В деякий момент часу воно має кутову швидкість  $\vec{\omega} = 2\vec{i} + 3\vec{k} \text{ с}^{-1}$  і кутове прискорення  $\vec{\epsilon} = 4\vec{j} + 5\vec{k} \text{ с}^{-2}$ . Обчислити прискорення точки  $M$  тіла в момент часу, коли радіус-вектор точки  $M$   $\vec{r}_M = 0,1\vec{i} + 0,15\vec{k} \text{ см}$ .

Відповідь:  $w_M = 0,877 \text{ см/с}^2$ .

9.8. Визначити швидкість точки  $A$  тіла, що обертається навколо нерухомої точки, в момент часу, коли координати точки  $x_A = 0,1 \text{ м}$ ,  $y_A = 0,3 \text{ м}$ ,  $z_A = 0,2 \text{ м}$ , а проєкції миттєвої кутової швидкості  $\omega_x = \pi$ ,  $\omega_y = 3\pi$ ,  $\omega_z = 2\pi$ .

Відповідь:  $v_A = 0$ .

## Розділ 10

### СКЛАДНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

#### § 10.1. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Найпростішими рухами твердого тіла, як було показано в розділах 6 і 7, є поступальний і обертальний рух навколо нерухомої осі. Але абсолютно тверде тіло може одночасно брати участь у двох або кількох рухах: поступальних, обертальних навколо паралельних осей або осей, що перетинаються, у поступальному і обертальному тощо. Рух твердого тіла, який можна подати як сукупність декількох рухів, називається *складним*.

Основним завданням кінематики складного руху абсолютно твердого тіла є встановлення у кожний момент часу залежностей між основними кінематичними характеристиками рухів, що складаються, і визначення характеру результуючого руху твердого тіла.

Поняття про абсолютний, відносний і переносний рухи, які вводяться при вивченні складного руху матеріальної точки, можна

розповсюдити на випадок складання рухів твердого тіла. При складанні, наприклад, двох рухів один з них вважається відносним, інший — переносним. Визначивши абсолютну швидкість довільної точки тіла, яке бере участь у двох рухах, за отриманими результатами можна зробити висновок про характер результуючого руху цього тіла. Розглянемо кілька випадків складного руху тіла.

**Складання поступальних рухів.** Припустимо, що тіло рухається поступально зі швидкістю  $\vec{v}_2$  відносно системи координат  $O_2x_2y_2z_2$ , яка в свою чергу теж поступально рухається зі швидкістю  $\vec{v}_1$  відносно умовно нерухомої системи координат  $O_1x_1y_1z_1$  (рис. 10.1).

Оскільки і відносні і переносні швидкості всіх точок тіла однакові (рух поступальний), то абсолютну швидкість довільної точки визначимо за теоремою про додавання швидкостей:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \quad (10.1)$$

У нашому випадку  $\vec{v}_r = \vec{v}_2$ ,  $\vec{v}_e = \vec{v}_1$ . Отже,

$$\vec{v}_M = \vec{v}_1 + \vec{v}_2. \quad (10.2)$$

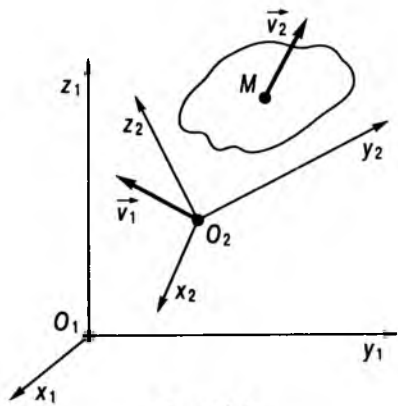


Рис. 10.1

Цілком очевидно, що абсолютний рух даного твердого тіла є теж поступальним.

При складанні довільної кількості поступальних рухів

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i, \quad (10.3)$$

що відповідає **теоремі**: при складанні поступальних рухів твердого тіла утворюється результуючий поступальний рух зі швидкістю, що дорівнює векторній сумі швидкостей складових рухів.

**Складання обертальних рухів навколо перетинних осей.** Нехай тіло обертається в системі координат  $Ox_2y_2z_2$  навколо осі  $Oz_2$  з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_2$ , а система координат  $Ox_1y_1z_1$  обертається навколо осі  $Oz_1$  нерухомої системи  $Ox_2y_2z_2$  з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_1$  (рис. 10.2). Назвемо обертання навколо осі  $Oz_2$  відносним рухом, а навколо осі  $Oz_1$  — переносним.

При складанні двох миттєвих обертальних рухів твердого тіла навколо перетинних осей результуючим є обертання навколо миттєвої осі, що проходить через точку перетину осей відносного і переносного обертання, з кутовою швидкістю, яка дорівнює векторній сумі кутових швидкостей складових рухів:

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2. \quad (10.4)$$

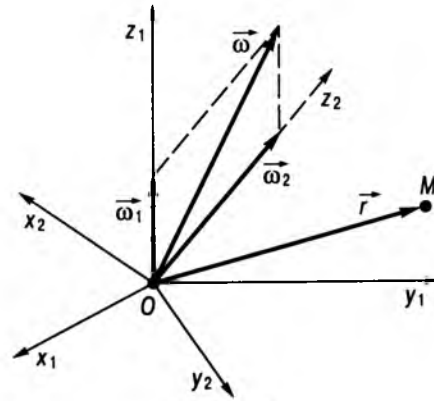


Рис. 10.2

Швидкість довільної точки  $M$  в абсолютному русі

$$\vec{v}_M = \vec{\Omega} \times \vec{r}.$$

Сукупність  $n$  обертань навколо перетинних в одній точці осей еквівалентна одному обертанню з миттєвою кутовою швидкістю:

$$\vec{\Omega} = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_i. \quad (10.5)$$

**Пара обертань.** Рух, який є сукупністю двох обертань твердого тіла, що відбуваються навколо двох паралельних осей з рівними за модулем і протилежними за напрямком кутовими швидкостями ( $\vec{\omega}_2 = -\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}$ ), називається парою обертань (рис. 10.3).

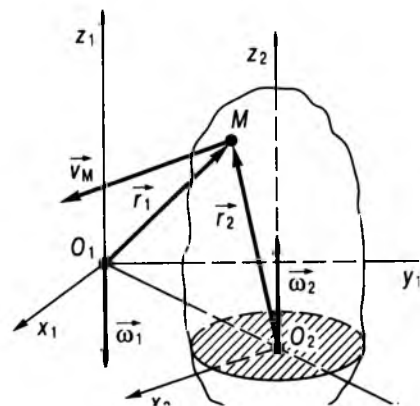


Рис. 10.3

Швидкість довільної точки тіла при такому русі

$$\vec{v}_M = \vec{\omega}_1 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{\omega}_1 \times \overline{O_1O_2}. \quad (10.6)$$

Вектори  $\vec{\omega}_1$  і  $\overline{O_1O_2}$  не залежать від положення точки  $M$ , отже, швидкості всіх точок тіла однакові. Цю властивість має тільки поступальний рух. Таким чином, пара обертань надає тілу поступального руху.

Векторний добуток

$$\vec{v}_M = \overline{O_1O_2} \times \vec{\omega},$$

або

$$\vec{v} = \overline{O_1O_2} \times \vec{\omega}, \quad (10.7)$$

де  $\vec{v}$  — швидкість будь-якої точки тіла, називається **моментом пари обертань**.

**Теорема.** Пара обертань еквівалентна миттєво-поступальному руху зі швидкістю, що дорівнює моменту пари обертань.

Очевидно, момент пари обертань є вільним вектором. З цього випливає:

сукупність  $n$  пар обертань еквівалентна одній парі, тобто поступальному рухові;

довільний миттєво-поступальний рух можна розглядати як миттєву пару обертань.

Модуль моменту пари обертань

$$v = \omega \cdot O_1O_2 \cdot \sin \alpha.$$

Найкоротша відстань між осями обертання  $Oz_1$  і  $Oz_2$  називається **плечем пари обертань**  $h$ , тобто

$$v = \omega \cdot h,$$

де  $h = O_1O_2 \cdot \sin \alpha$ .

**Додавання обертань навколо паралельних осей.** Припустимо, що тіло обертається з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_2$  (відносний рух) навколо осі  $O_2z_2$  системи координат  $O_2x_2y_2z_2$ , яка, в свою чергу, обертається з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_1$  (переносний рух) навколо осі  $O_1z_1$  системи координат  $O_1x_1y_1z_1$ . Осі  $O_1z_1$  і  $O_2z_2$  паралельні (рис. 10.4). Нехай кутові швидкості  $\vec{\omega}_1$  і  $\vec{\omega}_2$  напрямлені в один бік.

Абсолютна швидкість довільної точки  $M$  тіла

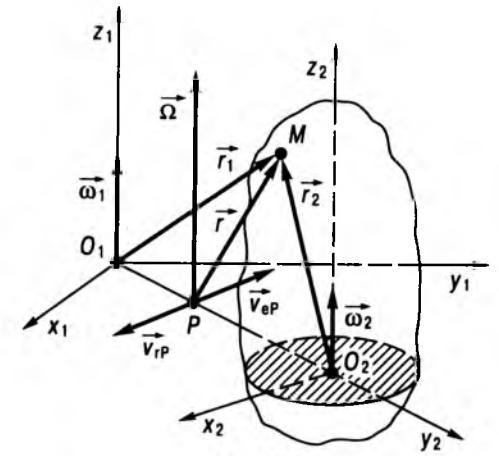


Рис. 10.4

$$\vec{v}_M = \vec{v}_e + \vec{v}_r = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2.$$

Вектори відносної і переносної швидкостей точок, що лежать на прямій  $O_1O_2$ , колінеарні і протилежно напрямлені. Отже, обов'язково знайдеться така точка  $P$ , абсолютна швидкість якої дорівнює нулеві:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega}_1 \times \overline{O_1P} + \vec{\omega}_2 \times \overline{O_2P} = 0, \quad (10.8)$$

тобто  $P$  — миттєвий центр обертання.

Вектори  $\vec{v}_{eP}$  і  $\vec{v}_{rP}$  перпендикулярні до  $O_1O_2$ , їх модулі відповідно

$$v_{eP} = \omega_1 \cdot O_1P,$$

$$v_{rP} = \omega_2 \cdot O_2P.$$

На підставі (10.8)

$$\omega_1 \cdot O_1P = \omega_2 \cdot O_2P,$$

або

$$\frac{O_1P}{O_2P} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (10.9)$$

Точка  $P$  ділить відрізок  $O_1O_2$  внутрішнім способом на частини, обернено пропорційні модулям кутових швидкостей складених рухів.

Швидкість довільної точки  $M$  тіла

$$\vec{v}_M = \vec{\Omega} \times \vec{r},$$

де  $\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ .

Отже, при складанні двох миттєвих обертань навколо паралельних осей з кутовими швидкостями одного знаку результуючим рухом є миттєве обертання навколо осі, яка паралельна заданим, з кутовою швидкістю, що дорівнює векторній сумі кутових швидкостей складових обертань. Миттєва вісь обертання ділить внутрішнім способом відстань між осями складових обертань на частини, обернено пропорційні кутовим швидкостям.

Обертання, які мають протилежний напрям, за умови, що вони не утворюють пару обертань ( $|\bar{\omega}_1| \neq |\bar{\omega}_2|$ ), додаються аналогічно. В цьому випадку точка  $P$  ділить відрізок  $O_1O_2$  зовнішнім способом на частини, обернено пропорційні модулям кутових швидкостей.

**Складання миттєво-поступального і миттєво-обертального рухів.** Розглянемо два випадки такого виду складного руху тіла.

1. **Швидкість поступального руху і кутова швидкість обертання тіла ортогональні.** Припустимо, що тіло обертається з кутовою швидкістю  $\bar{\omega}$  (відносний рух) навколо осі  $Oz_2$  системи координат  $Ox_2y_2z_2$  і разом з цією системою рухається поступально зі швидкістю  $\bar{v}_0$  (переносний рух), при цьому  $\bar{v}_0 \perp \bar{\omega}$  (рис. 10.5).

При складанні миттєво-поступального і миттєво-обертального рухів твердого тіла за умови ортогональності швидкості поступального і кутової швидкості обертального рухів

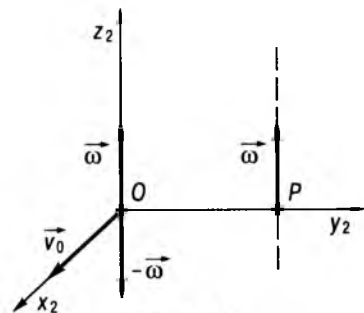


Рис. 10.5

результуючим рухом тіла є миттєве обертання навколо миттєвої осі, паралельної осі заданого обертання, з тією ж кутовою швидкістю. Миттєва вісь обертання знаходиться від даної осі на відстані  $OP = \frac{v_0}{\omega}$ .

2. **Швидкість поступального руху і кутова швидкість обертання тіла створюють довільний кут.** Нехай тіло обертається з кутовою швидкістю  $\bar{\omega}$  (відносний рух) навколо осі  $Oz_2$  системи координат  $Ox_2y_2z_2$  і разом з нею рухається поступально (переносний рух) зі швидкістю  $\bar{v}$ , при цьому вектори  $\bar{v}$  і  $\bar{\omega}$  утворюють кут  $\alpha$  (рис. 10.6).

Цей випадок легко зводиться до попереднього, якщо вектор  $\bar{v}$  розкласти на два доданки в площині  $Ox_2z_2$ :

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2.$$

Швидкість  $\bar{v}_2$  замінимо парою кутових швидкостей  $(\bar{\omega}, -\bar{\omega})$  з плечем  $OA = \frac{v_2}{\omega} = \frac{v \cdot \sin \alpha}{\omega}$ . Отримаємо в точці  $O$  зрівноважену систему векторів  $\bar{\omega} + (-\bar{\omega}) = 0$  і швидкість  $\bar{v}_1$  поступального руху.

У точці  $A$  на відстані  $OA$ , що дорівнює плечеві пари обертань, знаходиться миттєва вісь обертання  $AK$ . Вектор швидкості  $\bar{v}_1$  як вільний вектор переносимо в точку  $A$ . Таким чином, у точці  $A$  вздовж осі  $AK$  розташовані вектори  $\bar{v}_1$  та  $\bar{\omega}$ .

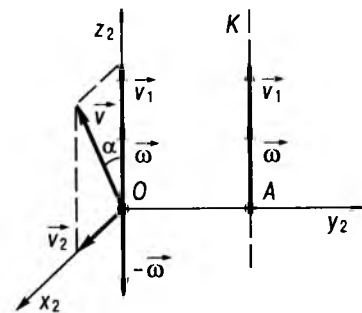


Рис. 10.6

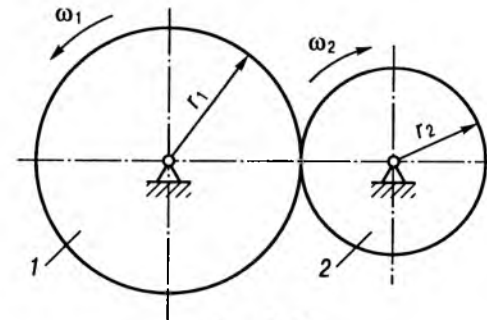


Рис. 10.7

Це означає, що результатом додавання миттєво-поступального і миттєво-обертального рухів, коли швидкість поступального руху не перпендикулярна до кутової швидкості обертального руху тіла, є миттєво-гвинтовий рух, або кінематичний гвинт.

**Кінематичний гвинт** — це сукупність обертального руху тіла з кутовою швидкістю, напрямленою вздовж миттєвої осі (наприклад,  $AK$ ), і миттєво-поступального руху, вектор швидкості якого також напрямлений вздовж миттєвої осі. Вісь, вздовж якої напрямлені відповідні вектори, називається миттєвою гвинтовою віссю.

**Метод зупинення.** Додавання обертань тіла навколо паралельних осей, а також рух, що має назву пари обертань, зручно досліджувати методом зупинення (або методом Віллеса).

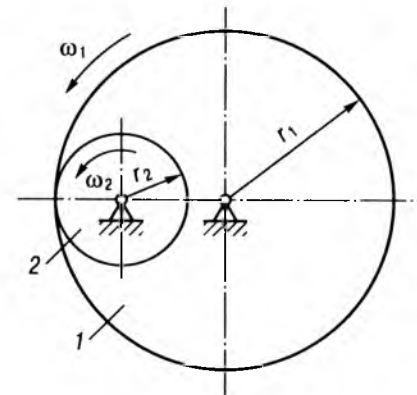


Рис. 10.8

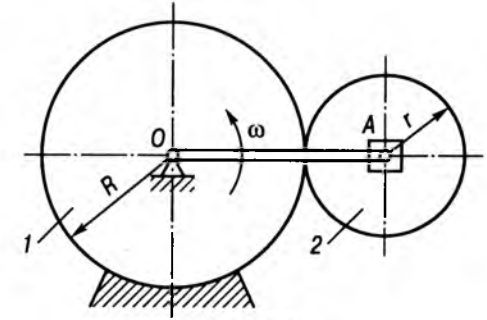


Рис. 10.9

Розглянемо прості передачі із зовнішнім (рис. 10.7) і внутрішнім (рис. 10.8) зачепленням коліс. Осі обертання коліс в обох випадках нерухомі. На підставі рівності швидкостей точок дотику коліс у випадку зовнішнього зачеплення

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1}, \quad (10.11)$$

а у випадку внутрішнього —

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (10.12)$$

Знаки (+) і (-) в формулах (10.11) і (10.12) відповідають однакою або різно напрямленим кутовим швидкостям.

Розглянемо епіциклічні передачі теж з внутрішнім (рис. 10.9) і зовнішнім (рис. 10.10) зачепленням коліс. Ці передачі складаються з нерухомого колеса, кривошипа  $OA$ , що

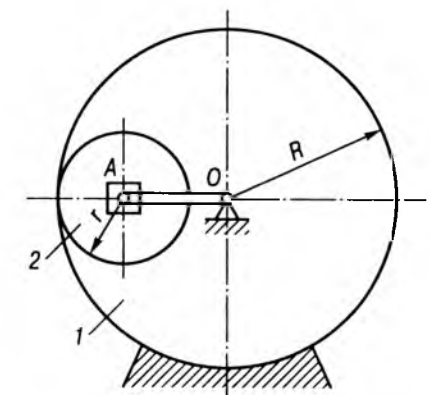


Рис. 10.10

має певну кутову швидкість, і рухомого колеса (сателіта), яке є тілом, що виконує складний рух: обертається навколо двох паралельних осей.

Надамо всім ланкам механізму загального переносного обертального руху навколо осі  $O$  з кутовою швидкістю  $(-\omega)$ , тобто “зупинимо” кривошип. Тоді передача перетвориться на просту, осі  $O$  і  $A$  стануть нерухомими, а абсолютні кутові швидкості коліс  $1$  і  $2$  дорівнюватимуть відповідно  $(-\omega)$  і  $(\omega_2 - \omega)$ .

На підставі формул (10.11) і (10.12) для зовнішнього зачеплення отримаємо

$$\frac{-\omega}{\omega_2 - \omega} = -\frac{r_2}{r_1},$$

для внутрішнього

$$\frac{-\omega}{\omega_2 - \omega} = \frac{r_2}{r_1}.$$

З цих виразів легко визначити невідому кутову швидкість  $\omega_2$ .

Для розв'язування задач зручно, користуючись методом зупинення, складати таблицю кутових швидкостей ланок механізму до і після зупинки. Далі розглянемо цей метод на конкретних прикладах.

## § 10.2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

**Приклад 10.1.** На рис. 10.11 зображено механізм точильного станка, який використовується для отримання великих кутових швидкостей при малих обертах ведучого вала. Рукоятка  $4$  обертається навколо нерухомої осі  $O$  з кутовою швидкістю  $\omega_4 = 2 \text{ с}^{-1}$ . Колесо  $2$ , насаджене на кінець рукоятки  $O_1$ , котиться без ковзання по нерухомій ободі  $3$  і передає обертання колесу  $1$ , вільно насадженому на вісь  $O$ . Знайти кутову швидкість колеса  $1$ , якщо радіуси  $R_1, R_2$  і  $R_3$  коліс  $1, 2$  і ободу  $3$  дорівнюють відповідно  $2, 8$  і  $18 \text{ см}$ .

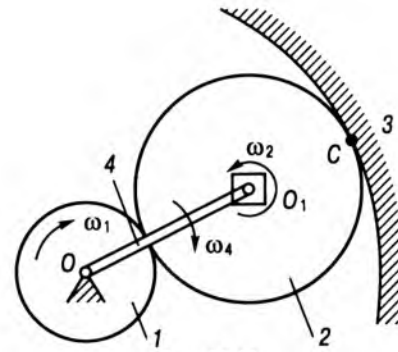


Рис. 10.11

**Розв'язування.** Надамо всім ланкам механізму кутову швидкість  $(-\omega_4)$ , тобто “зупинимо” рукоятку  $4$ .

Складемо таблицю кутових швидкостей ланок механізму до і після “зупинки”.

Тіло	Кутова швидкість	
	до зупинки	після зупинки
1	$\omega_1$	$\omega_1 - \omega_4$
2	$\omega_2$	$\omega_2 - \omega_4$
3	0	$-\omega_4$
4	$\omega_4$	0

Колесо  $2$  і обод  $3$  мають внутрішнє зачеплення, тому

$$\frac{\omega_2 - \omega_4}{-\omega_4} = \frac{R_3}{R_2} \quad (1)$$

Зачеплення коліс  $1$  і  $2$  зовнішнє, отже,

$$\frac{\omega_1 - \omega_4}{\omega_2 - \omega_4} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (2)$$

Перемноживши відповідно ліві та праві частини рівнянь (1) і (2), одержимо

$$\frac{\omega_1 - \omega_4}{-\omega_4} = -\frac{R_3}{R_1}.$$

З останнього виразу знаходимо

$$\omega_1 = \frac{R_3 + R_1}{R_1} \cdot \omega_4, \quad \omega_1 = \frac{18 + 2}{2} \cdot 2 = 20 \text{ с}^{-1}.$$

Отже, кутова швидкість колеса  $1$  у 10 разів більша за кутову швидкість ведучого вала.

**Приклад 10.2.** В зображеному на рис. 10.12 планетарному механізмі радіуси нерухомого зубчастого колеса  $1$  і рухомого колеса  $3$  однакові, радіус колеса  $2$  довільний. Довести, що обертання кривошипа  $OB$  надає колесу  $3$  поступального руху.

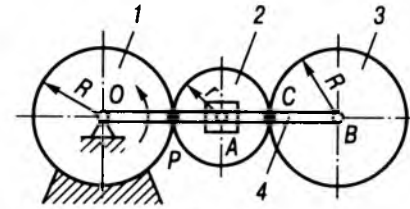


Рис. 10.12

**Розв'язування.** Розв'яжемо цю задачу двома способами.

**Спосіб 1.** Скористаємось теорією плоскопаралельного руху твердого тіла. Колеса  $2$  і  $3$  виконують плоскопаралельний рух. Побудуємо їх миттєві центри швидкостей і знайдемо кутові швидкості.

Колесо  $2$  має миттєвий центр швидкостей в точці  $P$  — точці дотику до колеса  $1$ . Швидкість точки  $A$  як такої, що належить кривошипу  $OB$ ,

$$v_A = \omega \cdot OA = \omega \cdot (R + r), \quad (3)$$

а як такої, що належить колесу  $2$ ,

$$v_A = \omega_2 \cdot AP. \quad (4)$$

З цих двох виразів отримаємо

$$\omega_2 = \frac{\omega \cdot OA}{AP} = \frac{\omega \cdot (R + r)}{r}. \quad (5)$$

Щоб знайти кутову швидкість  $\omega_3$  колеса  $3$  побудуємо його миттєвий центр швидкостей. Для цього треба знайти швидкості двох його точок, наприклад

$$v_B = \omega \cdot OB = \omega \cdot (2R + 2r); \quad (6)$$

$$v_C = \omega_2 \cdot PC. \quad (7)$$

Враховуючи (5) і (7), маємо

$$v_C = \frac{\omega \cdot (R + r)}{r} \cdot 2r = 2\omega \cdot (R + r).$$

Оскільки швидкості точок  $B$  і  $C$  обчислені в довільний момент часу і вони рівні, то колесо  $3$  виконує поступальний рух і  $\omega_3 = 0$ .

**Спосіб 2.** Скористаємось методом зупинення. Надамо системі переносного обертального руху з кутовою швидкістю  $\omega$ , тобто “зупинимо” кривошип  $OB$ . Занесямо до таблиці значення кутових швидкостей до і після “зупинки”.

Тіло	Кутова швидкість	
	до зупинки	після зупинки
$OB$	$\omega$	0
1	0	$-\omega$
2	$\omega_2$	$\omega_3$
3	$\omega_2 - \omega$	$\omega_3 - \omega$

Беручи до уваги, що всі колеса перебувають у зовнішньому зачепленні, запишемо співвідношення між кутовими швидкостями тіл  $1$  та  $2$ :

$$\frac{-\omega}{\omega_2 - \omega} = -\frac{r}{R}.$$

Аналогічна залежність для тіл  $2$  та  $3$ :

$$\frac{\omega_2 - \omega}{\omega_3 - \omega} = -\frac{R}{r}.$$

Перемноживши ліві та праві частини цих виразів, маємо

$$\frac{-\omega}{\omega_2 - \omega} = 1 \Rightarrow \omega_3 = 0.$$

З отриманого результату можна зробити висновок, що колесо  $3$  рухається поступально, отже, маємо пару обертань. Осі обертання паралельні, проходять через точки  $O$  і  $B$ . Кутові швидкості обертань рівні за модулем і протилежні за напрямом.

**§ 10.3. ЗАДАЧІ  
ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ**

**10.1.** У планетарному механізмі радіуси коліс 1, 2 і 3 (рис. 10.13) відповідно дорівнюють 10, 20 і 30 см. Кутова швидкість кривошипа  $\omega_{AB} = 6 \text{ с}^{-1}$ , а колеса  $\omega_3 = 2 \text{ с}^{-1}$ . Визначити кутові швидкості коліс 1 і 2, якщо:

- 1) напрямки обертань кривошипа і колеса 3 однакові;
- 2) напрямки їх обертань протилежні.

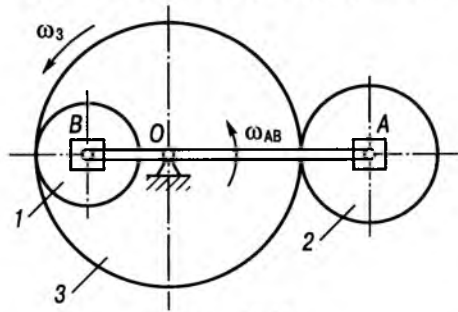


Рис. 10.13

Відповідь: 1)  $\omega_1 = 6 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 12 \text{ с}^{-1}$ ;  
2)  $\omega_1 = -18 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 18 \text{ с}^{-1}$ .

**10.2.** Кривошип OA рухається за законом  $\varphi = 5t$  рад (рис. 10.14). Визначити кутову швидкість колеса 3 планетарного механізму, якщо  $OA = 0,4 \text{ м}$  і радіуси всіх коліс однакові.

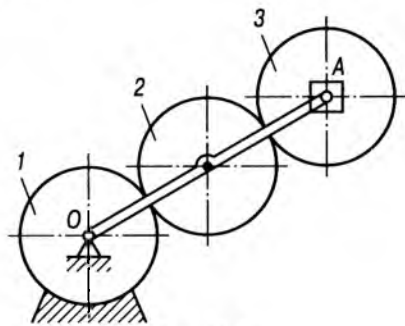


Рис. 10.14

Відповідь:  $\omega_3 = 0$ .

**10.3.** В епіциклічному механізмі колесо 1 нерухоме (рис. 10.15). Кривошип OA обертається з кутовою швидкістю  $\omega_0$ . У точках A, B і C кривошипа на нього вільно насажені зубчасті колеса 2, 3 і 4. Радіуси коліс  $r_1 = r_3 = r$ ,  $r_2 = r_4 = R$ . Визначити кутові швидкості коліс 2, 3 і 4.

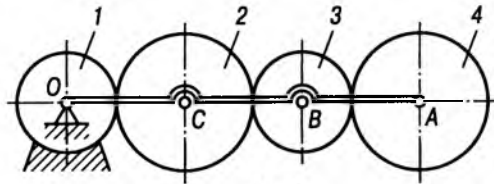


Рис. 10.15

Відповідь:  $\omega_2 = \frac{R+r}{R} \cdot \omega_0$ ,  $\omega_3 = 0$ ,  
 $\omega_4 = \frac{R+r}{R} \cdot \omega_0$ .

**10.4.** Диск A вільно обертається навколо осі  $z_1$  за законом  $\varphi_1 = \frac{\varepsilon_1 t^2}{2}$ , а обертання осі  $z_1$  навколо нерухомої осі  $z$  описується залежністю  $\varphi_2 = \frac{\varepsilon_2 t^2}{2}$  (рис. 10.16). Коефіцієнт-

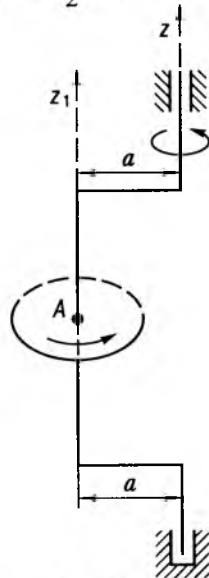


Рис. 10.16

ти  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$  — сталі. Визначити відстань  $d$  від нерухомої осі  $z$  до миттєвої осі обертання диска, якщо відстань між осями  $z$  і  $z_1$  дорівнює  $a$ .

Відповідь:  $d = \frac{\varepsilon_2 a}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$ .

**10.5.** Зубчасте колесо 1 робить за 1 хв 90 обертів, приводячи у рух колесо 2 і кривошип OA (рис. 10.17). Колесо 3 нерухоме. Визначити число обертів за хвилину колеса 2 і кривошипа OA, якщо числа зубців коліс 1 і 2 відповідно 150 і 50.

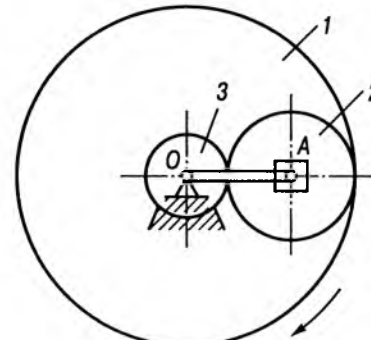


Рис. 10.17

Відповідь:  $n_{OA} = 67,5$  об/хв,  $n_2 = 135$  об/хв.

**10.6.** У механізмі, зображеному на рис. 10.18, шестірні 1 і 2, вільно насажені на вісь O, обертаються незалежно одна від одної, роблячи відповідно 150 і 30 об/хв. Визначити

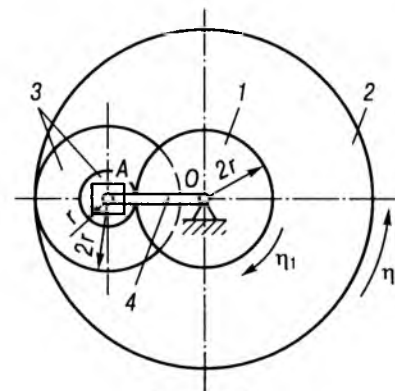


Рис. 10.18

кутові швидкості східчастої шестірні 3 і кривошипа OA. Радіуси всіх коліс наведено на рисунку.

Відповідь:  $\omega_3 = 5\pi \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_{OA} = \frac{5}{3}\pi \text{ с}^{-1}$ .

**10.7.** Вал 1, що обертається навколо вертикальної осі зі сталою кутовою швидкістю  $\omega = 9 \text{ с}^{-1}$  (рис. 10.19), приводить у рух конічне колесо 2 радіуса 12 см, яке котиться без ковзання по нерухомій шестірні 3 радіуса 16 см. Визначити миттєву кутову швидкість колеса 2.

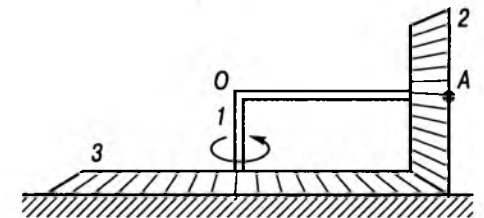


Рис. 10.19

Відповідь:  $\omega_2 = 12 \text{ с}^{-1}$ .

**10.8.** Колесо радіуса  $R$  обертається за законом  $\varphi = \omega t$  навколо осі OC (рис. 10.20), жорстко з'єднаної під кутом  $60^\circ$  з вертикальним валом DE, що обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\Omega$ . Визначити положення миттєвої осі обертання і миттєву кутову швидкість  $\Omega$  колеса, а також швидкість точки A, якщо  $OC = R\sqrt{3}$ .

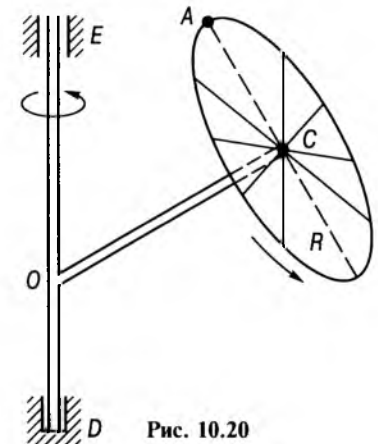


Рис. 10.20

Відповідь: миттєва вісь обертання колеса є бісектрисою кута  $COE$ .  $\Omega = \omega \cdot \sqrt{3} \text{ c}^{-1}$ ;  $v_A = 0$ .

10.9. Тіло бере участь у двох обертових рухах навколо осей, що перетинаються. У певний момент часу його кутові швидкості  $\vec{\omega}_e = 5\vec{k}$ ,  $\vec{\omega}_r = -5\vec{j} - 5\vec{k}$ . Знайти в цей момент абсолютну кутову швидкість тіла і швидкість точки  $A$  (0; 2; 0).

Відповідь:  $\vec{\omega}_A = -5\vec{j}$ ,  $v_A = 0$ .

10.10. Східчаста шестірня 3 приводиться у рух кривошипом  $OA$ , який обертається навколо нерухомої осі  $O$ , роблячи 150 об/хв. Зубчасті колеса 1 і 2 вільно насаджено на ту ж саму вісь  $O$  і знаходяться в зачепленні з шестірнею 3. Колесо 2 робить 60 об/хв. Радіуси коліс  $R_1 = 40 \text{ см}$ ,  $R_2 = 50 \text{ см}$ ,  $R_3 = 20 \text{ см}$ ,  $R_4 = 30 \text{ см}$ . Визначити кутові

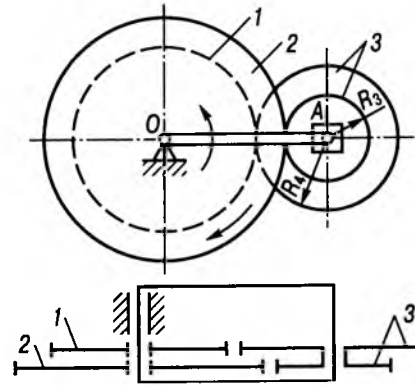


Рис. 10.21

швидкості колеса 1 і східчастої шестірні 3 (рис. 10.21).

Відповідь:  $\omega_3 = 12,5\pi \text{ c}^{-1}$ ;  $\omega_1 = -0,625\pi \text{ c}^{-1}$ .

## ЧАСТИНА III • ДИНАМІКА

### Розділ 11 ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

#### §11.1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

##### 11.1.1. Короткі теоретичні відомості

**Перший закон Ньютона (закон інерції).** *Ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху доти, доки вплив з боку інших тіл не виведе її з цього стану.*

**Другий закон Ньютона (основний закон динаміки).** *Швидкість зміни кількості руху матеріальної точки дорівнює силі, що діє на цю точку:*

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}, \quad (11.1)$$

де  $m$  — маса матеріальної точки;  $m\vec{v}$  — кількість руху точки.

У випадку  $m = \text{const}$  маємо основне рівняння динаміки матеріальної точки

$$m\vec{w} = \vec{F}, \quad (11.2)$$

де  $\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  — прискорення точки.

**Третій закон Ньютона (закон рівності дії і протидії).** *Сили взаємодії двох матеріальних точок або двох тіл (дія і протидія) рівні за величиною, протилежно напрямлені і мають спільну лінію дії.*

**Закон незалежності дії сил (принцип суперпозиції).** *Прискорення матеріальної точки, що виникає при одночасній дії на неї кількох сил,*

*дорівнює векторній сумі прискорень, які надають точці окремі сили:*

$$m\vec{w} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n, \quad (11.3)$$

де  $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \dots + \vec{w}_n$ ; відповідно  $\vec{w}_i =$

$$= \frac{\vec{F}_i}{m} \text{ — прискорення точки, надане силою}$$

$$\vec{F}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Отже, напрям прискорення точки збігається з напрямом рівнодійної системи сил, прикладених до точки.

На підставі основного рівняння динаміки матеріальної точки (11.2) та принципа суперпозиції можна записати диференціальні рівняння руху точки.

*Диференціальні рівняння руху матеріальної точки у векторній формі*

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \left( t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right), \quad (11.4)$$

де  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  — радіус-вектор точки;  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  — її

швидкість;  $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$  — її прискорення;  $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  —

рівнодійна системи сил, прикладених до точки.

*Диференціальні рівняння руху матеріальної точки в координатній формі*



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{ix} \left( t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right),$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iy} \left( t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \quad (11.5)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iz} \left( t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right),$$

де  $x, y, z$  — координати точки в нерухомій декартовій системі координат  $Oxyz$ ;

$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$  — проекції швидкості точки;

$\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^2 z}{dt^2}$  — проекції прискорення

точки;  $\sum_{i=1}^n F_{ix}, \sum_{i=1}^n F_{iy}, \sum_{i=1}^n F_{iz}$  — суми проекцій

рівнодійної сил, прикладених до точки, на осі системи координат  $Oxyz$ .

*Диференціальні рівняння руху матеріальної точки в натуральній формі*

$$m\ddot{s} = \sum_{i=1}^n F_{i\tau} \left( t, s, \frac{ds}{dt} \right),$$

$$m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \sum_{i=1}^n F_{in} \left( t, s, \frac{ds}{dt} \right), \quad (11.6)$$

$$0 = \sum_{i=1}^n F_{ib} \left( t, s, \frac{ds}{dt} \right),$$

де  $\rho$  — радіус кривини траєкторії;  $s$  — дугова

координата;  $\sum_{i=1}^n F_{i\tau}, \sum_{i=1}^n F_{in}, \sum_{i=1}^n F_{ib}$  — проекції

рівнодійної сил на осі  $\tau, n, b$  натуральної системи координат, початок відліку якої знаходиться у рухомій точці.

*Диференціальні рівняння плоского руху матеріальної точки в полярних координатах*

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \sum_{i=1}^n F_{ir} (t, r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}), \quad (11.7)$$

$$\frac{m}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = \sum_{i=1}^n F_{i\varphi} (t, r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}),$$

де  $r$  — довжина радіуса-вектора точки;  $\varphi$  —

полярний кут;  $\sum_i F_{ir}, \sum_i F_{i\varphi}$  — проекції рівнодійної сил на радіальний і трансверсальний напрями.

*Пряма (перша) основна задача динаміки матеріальної точки.* За відомим кінематичним законом руху точки та її масою визначити рівнодійну сил, прикладених до точки.

При координатному способі задання руху матеріальної точки перша основна задача динаміки розв'язується на підставі рівнянь (11.5), тобто

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z},$$

звідки

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \quad (11.8)$$

де  $F_x, F_y, F_z$  — проекції рівнодійної;  $F$  — модуль рівнодійної. Напрямок вектора рівнодійної визначається напрямними косинусами

$$\cos(\widehat{\vec{F}, Ox}) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(\widehat{\vec{F}, Oy}) = \frac{F_y}{F},$$

$$\cos(\widehat{\vec{F}, Oz}) = \frac{F_z}{F}.$$

При натуральній формі задання руху матеріальної точки рівнодійну можна визначити, застосовуючи рівняння (11.6):

$$F_\tau = m\ddot{s}, \quad F_n = m \frac{\dot{s}^2}{\rho},$$

звідки  $F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}$ .

Кут  $\alpha$  між рівнодійною силою  $\vec{F}$  та напрямком нормалі до траєкторії точки визначають з виразу

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_\tau}{F_n} = \frac{\ddot{s}\rho}{\dot{s}^2} = \frac{\dot{v}\rho}{v^2}.$$

Якщо рух матеріальної точки заданий у полярній системі координат, то

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_\varphi^2},$$

сили  $F_r$  та  $F_\varphi$  визначають з відповідних рівнянь у формі (11.7).

Якщо рух матеріальної точки здійснюється в центральному полі сил, тобто в площині радіуса-вектора  $r$  і початкової швидкості, то рівнодійну такої системи сил визначають з виразу (*друга формула Біне*)

$$F_r = -\frac{4mv_c^2}{r^2} \left[ \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] =$$

$$= -\frac{mC^2}{r^2} \left[ \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right], \quad (11.9)$$

де  $C = 2v_c = \text{const}$ ;  $v_c = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$  — секторна швидкість.

Методика розв'язування першої задачі динаміки:

- 1) вибрати систему відліку;
- 2) зобразити поточне положення точки;
- 3) визначити за заданим законом руху проекції прискорення точки на координатні осі;
- 4) скласти рівняння руху точки відповідно до вибраної системи відліку;
- 5) визначити шукані сили з рівнянь руху.

*Обернена (друга) основна задача динаміки матеріальної точки.* За заданими силами та масою точки визначити її кінематичні рівняння руху. Розв'язання даної задачі полягає в інтегруванні відповідних диференціальних рівнянь руху точки з застосуванням відомих прийомів теорії звичайних диференціальних рівнянь.

При *координатному способі* задання руху точки (наприклад, у прямокутній декартовій системі відліку) шукані величини є функціями часу і шести сталих інтегрування  $C_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ :

$$x = x(t, C_1, \dots, C_6),$$

$$y = y(t, C_1, \dots, C_6), \quad (11.10)$$

$$z = z(t, C_1, \dots, C_6).$$

Визначення конкретного закону руху з усієї множини можливих законів руху проводиться з використанням *початкових умов, тобто значень координат та проекцій швидкостей у початковий момент часу*:

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0,$$

$$\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \quad \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0. \quad (11.11)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (розв'язок в явній формі не завжди існує)

$$\begin{cases} x_0 = x(t_0, C_1, \dots, C_6), \\ y_0 = y(t_0, C_1, \dots, C_6), \\ z_0 = z(t_0, C_1, \dots, C_6), \\ \dot{x}_0 = \dot{x}(t_0, C_1, \dots, C_6), \\ \dot{y}_0 = \dot{y}(t_0, C_1, \dots, C_6), \\ \dot{z}_0 = \dot{z}(t_0, C_1, \dots, C_6) \end{cases} \quad (11.12)$$

відносно  $C_i = C_i(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ , остаточно знайдемо шуканий закон руху  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ .

При *натуральному способі* шуканий закон руху після інтегрування першого рівняння  $m\ddot{s} = F_\tau$  системи (11.6), якщо це можливо, має вигляд  $s = s(t_0, C_1, C_2)$ . Сталі інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  визначаються з урахуванням початкових умов  $s(t_0) = s_0, v_\tau(t_0) = \dot{s}_0$  з системи рівнянь

$$\begin{cases} s_0 = s(t_0, C_1, C_2), \\ \dot{s}_0 = \dot{s}(t_0, C_1, C_2). \end{cases} \quad (11.13)$$

Друге рівняння системи (11.6)

$$m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n$$

дає змогу визначити радіус кривини траєкторії як функцію часу.

Розв'язання оберненої задачі динаміки, якщо рух описується *векторним способом*, проводиться аналогічно і вимагає задання початкових умов у формі

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \quad \dot{\vec{r}}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0. \quad (11.14)$$

Методика розв'язування оберненої задачі динаміки:

- 1) визначаємо об'єкт дослідження і зображуємо його в поточному положенні;
- 2) вводим систему відліку, осі якої зображуємо на рисунку;
- 3) визначаємо початкові умови руху точки;
- 4) зображуємо на рисунку активні сили та реакції в'язей (для невільної матеріальної точки);
- 5) складаємо диференціальні рівняння руху точки;
- 6) інтегруємо отримані рівняння руху. Використовуючи початкові умови і отриманий загальний розв'язок, визначаємо сталі інтегрування;
- 7) записуємо кінематичний закон руху матеріальної точки.

### 11.1.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 11.1.** Матеріальна точка масою  $m$  рухається за законом  $x = at$ ,  $y = b - at^2$ . Визначити силу  $\vec{F}$ , під дією якої відбувається рух, якщо ця сила залежить тільки від положення точки.

Розв'язування. Рух точки здійснюється в прямокутній декартовій системі

відліку  $Oxy$ . Траєкторія руху — парабола, рівняння якої після виключення часу  $t$  має вигляд  $y = b - a^{-1}x^2$  (рис. 11.1).

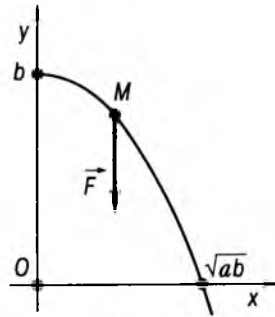


Рис. 11.1

Враховуючи, що дана задача є першою (прямою) задачею динаміки матеріальної точки, визначимо проекції сили  $\vec{F}$  з диференціальних рівнянь (11.5).

Для проекцій прискорення маємо  $\ddot{x} = 0$ ,  $\ddot{y} = -2a$ . Тоді  $F_x = 0$ ,  $F_y = -2am$ .

Модуль сили  $\vec{F}$  можна записати так:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 2am.$$

Таким чином, точка рухається під дією сталої сили величиною  $F = 2am$ , яка паралельна осі  $Oy$  і протилежно напрямлена до неї.

**Приклад 11.2.** Локомотив вагою 200 кН рухається в низині з постійною швидкістю  $v = 72$  км/год. Визначити тиск локомотива на дно низини в найнижчій точці, якщо радіус кривини траєкторії у цій точці 500 м. Опором знехтувати.

Розв'язування. За об'єкт дослідження візьмемо локомотив, який вважаємо матеріальною точкою. Введемо натуральну систему координат, початок відліку якої зв'яжемо з локомотивом, вісь  $\tau$  спрямуємо по дотичній до траєкторії вздовж вектора швидкості  $\vec{v}$ , вісь  $n$  — по вертикалі вгору (рис. 11.2).

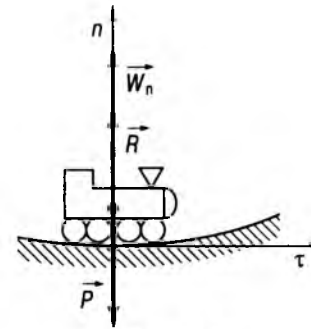


Рис. 11.2

До локомотива прикладено дві сили: сила ваги локомотива  $\vec{P}$  і нормальна складова реакції ґрунту  $\vec{R}$ , яка напрямлена вздовж головної нормалі (вісь  $n$ ). Шуканий тиск локомотива на ґрунт, за третім законом Ньютона, дорівнює невідомій реакції  $\vec{R}$  і протилежно напрямлений до неї. Таким чином, у даній задачі треба визначити спочатку реакцію  $\vec{R}$ , тобто розв'язати першу задачу динаміки точки.

За основним законом динаміки матеріальної точки у векторній формі маємо

$$m\vec{w} = \vec{P} + \vec{R},$$

де  $m$  — маса локомотива;  $w$  — його прискорення.

Спроекуємо це рівняння на головну нормаль. Проекція прискорення локомотива на цей напрям дорівнює нормальній складовій прискорення, тому запишемо

$$m \frac{v^2}{\rho} = R - P, \quad \text{звідки} \quad R = P + \frac{P v^2}{g \rho}.$$

Після підстановки числових значень отримаємо  $R = 216\,310$  Н. Шуканий тиск локомотива на дно низини напрямлений протилежно до нормальної складової реакції ґрунту і рівний їй за величиною.

калі змінюється за законом  $\varphi = \varphi_0 \sin \omega_0 t$ , причому  $\varphi_0$  та  $\omega_0$  — сталі величини.

Розв'язування. Дана задача відноситься до першої задачі динаміки матеріальної точки.

Покажемо маятник у поточному положенні, при якому  $\varphi \neq 0$ . Введемо натуральну систему координат (рис. 11.3), вісь  $n$  якої спрямуємо вздовж нитки, вісь  $\tau$  — перпен-

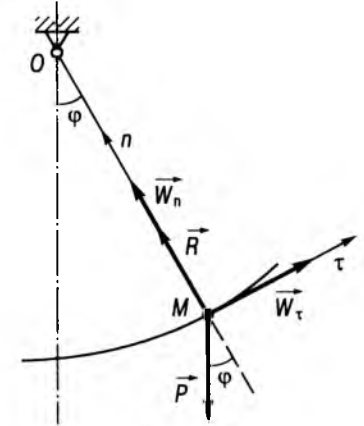


Рис. 11.3

дикулярно до  $n$  в бік зростання кута  $\varphi$ . До маятника прикладені сила ваги  $Q = mg$  і реакція нитки  $\vec{R}$ . За основним законом динаміки матеріальної точки

$$m\vec{w} = \vec{Q} + \vec{R}.$$

Проекції на осі  $\tau$  та  $n$

$$m w_\tau = -Q \sin \varphi,$$

$$m w_n = R - Q \cos \varphi,$$

де  $w_\tau = \dot{v}$  та  $w_n = \frac{v^2}{l}$  — дотична та нормальна складові прискорення маятника.

Враховуючи, що  $v = \dot{\varphi} l$ , маємо

$$ml\dot{\varphi} = -Q \sin \varphi,$$

$$ml\dot{\varphi}^2 = R - Q \cos \varphi.$$

**Приклад 11.3.** Визначити максимальний натяг нерозтяжної невагомої нитки математичного маятника завдовжки  $l$  вагою  $Q$ , якщо кут відхилення маятника від верти-

З останнього рівняння можна знайти

$$R = Q \cos \varphi + \frac{Q}{g} l \dot{\varphi}^2 = Q \left( \cos \varphi + \frac{l}{g} \dot{\varphi}^2 \right).$$

Оскільки проекція сили ваги  $Q$  на вісь  $n$  і кутова швидкість  $\dot{\varphi}$  максимальні в найнижчому положенні маятника, реакція нитки в цьому положенні також максимальна, тобто при  $\cos \varphi = 1$ . Розв'язок цього тригонометричного рівняння  $\varphi = 2\pi k, k \in Z$ . Не обмежуючи загальності викладення, покладемо  $k = 0$ , тобто  $\varphi = 0$ . Тоді, з урахуванням умови  $\varphi = \varphi_0 \sin \omega_0 t$ , маємо  $\sin \omega_0 t = 0$ , звідки випливає, що  $\cos \omega_0 t = \pm 1$  та  $\dot{\varphi}^2 = \varphi_0^2 \omega_0^2 \cos^2 \omega_0 t = \varphi_0^2 \omega_0^2$ .

Таким чином, максимальний натяг нитки за величиною дорівнює максимальній

$$\text{реакції } R_{\max} = Q \left( 1 + \frac{l \varphi_0^2 \omega_0^2}{g} \right).$$

**Приклад 11.4.** Матеріальна точка рухається під дією центральної сили по параболі, рівняння якої в полярних координатах має вигляд  $r = \frac{p}{1 + \cos \varphi}$ , де  $p$  — стала

величина (рис. 11.4). Визначити закон зміни центральної сили.

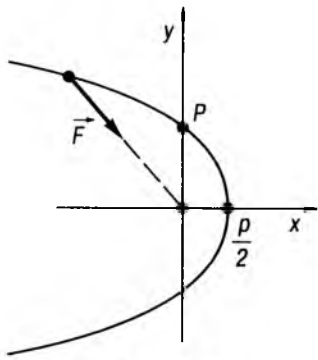


Рис. 11.4

Розв'язування. Скористаємося формулою Біне

$$F_r = -\frac{mC^2}{r^2} \left[ \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right].$$

Рівняння параболи можна подати так:

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \cos \varphi}{p}.$$

Друга похідна по  $\varphi$  має вигляд

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\cos \varphi}{p}.$$

Після підстановки отримаємо  $F_r = -\frac{mC^2}{pr^2}$ .

Таким чином, центральна сила  $F_r$ , яка спричинює рух матеріальної точки, обернено пропорційна квадрату відстані від нерухомого центра і є силою притягування.

**Приклад 11.5.** Отримавши поштовх, тіло ковзає вниз з початковою швидкістю  $v_0 = 3$  м/с вздовж площини, розташованої під кутом  $\alpha = 30^\circ$  до горизонту. Визначити шлях  $S$ , який проходить тіло за 2 с, якщо коефіцієнт тертя ковзання тіла по шорсткій поверхні  $f = 0,5$ .

Розв'язування. Введемо систему координат  $Ox$ , початок відліку якої розташуємо в початковому положенні тіла, вісь  $Ox$  спрямуємо вздовж поверхні вниз. Вісь  $Oy$ , яка перпендикулярна до  $Ox$ , направимо вгору (рис. 11.5).

Нехай  $m$  — маса тіла, яке приймемо за матеріальну точку. Враховуючи, що досліджуване тіло є невільним, до нього прикладена крім активної сили (сили ваги  $m\vec{g}$ ) реакція поверхні, якою на підставі аксіоми про звільнення від в'язей заміняємо дію шорсткої поверхні на тіло. Ця реакція має дві складові: дотичну складову, яка є силою тертя ковзання  $\vec{F}_{\text{тр}}$  і напрямлена проти-

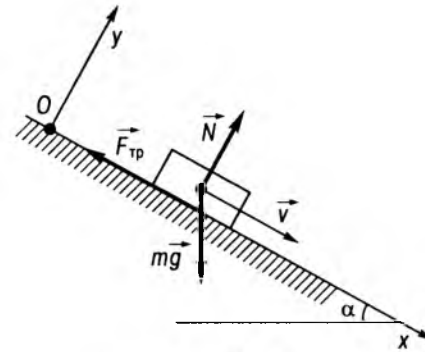


Рис. 11.5

лежно руху вздовж поверхні вгору, і нормальну складову  $\vec{N}$ , перпендикулярну до площини (рис. 11.5).

На підставі основного рівняння динаміки точки

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N}$$

отримаємо після проектування на осі  $Ox$  та  $Oy$  рівняння

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}, \quad (1)$$

$$0 = N - mg \cos \alpha. \quad (2)$$

Розв'язання задачі вимагає інтегрування рівнянь (1) та (2) і визначення закону руху тіла, тобто ця задача відноситься до оберненої (другої) задачі динаміки матеріальної точки. Для знаходження сталих інтегрування треба знати початкові умови руху тіла, які в даному випадку запишемо так:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0,$$

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Відомо, що  $F_{\text{тр}} = fN$ . Тоді, враховуючи рівняння (2), знайдемо силу тертя  $F_{\text{тр}} = fmg \cos \alpha$ , а після скорочення на  $m$  з рівняння (1) отримаємо

$$\ddot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha). \quad (3)$$

Для інтегрування диференціального рівняння (3), замінивши  $\ddot{x}$  на  $\frac{d\dot{x}}{dt}$ , одержимо

$$d\dot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) dt.$$

Після інтегрування маємо

$$\dot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + C_1.$$

Цей вираз є першим інтегралом диференціального рівняння (3). Сталу інтегрування  $C_1$  визначають шляхом підстановки початкової умови  $\dot{x}(0) = v_0$  і початкового моменту часу  $t = 0$  в перший інтеграл. Отримаємо  $C_1 = v_0$ , тобто

$$\dot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + v_0.$$

В даному рівнянні теж замінимо  $\dot{x}$  на

$\frac{dx}{dt}$  і знову розділимо змінні:

$$dx = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t dt + v_0 dt.$$

Після інтегрування цього виразу одержимо другий інтеграл рівняння (3):

$$x = \frac{1}{2} g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t^2 + v_0 t + C_2.$$

Враховуючи початкові умови за координатою  $x(0) = 0$ , визначають сталу інтегрування  $C_2 = 0$ .

Таким чином, кінематичний закон руху тіла має вигляд

$$x = \frac{1}{2} g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t^2 + v_0 t.$$

Шуканий шлях  $S$ , який проходить тіло за час  $t = 2$  с, визначимо з рівняння

$$S = \frac{1}{2} g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t_1^2 + v_0 t_1.$$

Після підстановки числових даних маємо  $S = 7,31$  м.

**Приклад 11.6.** Трамвай перебуває у спокої на похилій площині, яка розташована під кутом  $\alpha = 2^\circ$  до горизонту. Коефіцієнт тертя спокою  $f_0 = 0,05$ . Водій трамвая вмикає двигун і поступово збільшує його потужність так, що сила тяги, напрямлена вздовж похилої площини вгору, шосе-

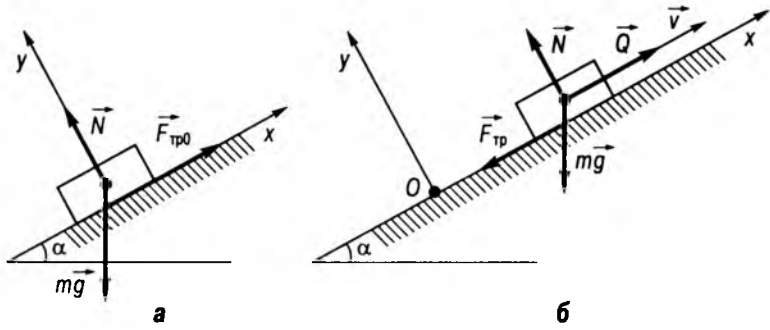


Рис. 11.6

кунди змінюється на 2000 Н. Визначити закон руху трамвая, якщо його маса 5000 кг, а коефіцієнт тертя під час руху  $f = 0,04$ .

**Розв'язування.** Об'єктом дослідження даної задачі є трамвай, який вважаємо матеріальною точкою. Введемо систему координат  $Ox$ , початок її відліку розташуємо в початковому положенні трамвая (рис. 11.6, а). В цьому положенні до трамвая прикладено силу ваги  $m\vec{g}$ , нормальну складову реакції  $\vec{N}$  та силу тертя спокою  $\vec{F}_{\text{тр}0}$ , яка при вимкненому двигуні напрямлена протилежно можливому руху трамвая, тобто вгору.

Проекція сили ваги на вісь  $Ox$  не перевищує максимального значення сили тертя спокою  $F_{\text{max}} = f_0 N$ , тобто виконується умова  $mg \sin \alpha < f_0 mg \cos \alpha$ , що забезпечує нерухомість трамвая на похилій площині в початковий момент часу. Прикладання до трамвая сили тяги  $Q = b_0 t$ ,  $b_0 = 2000$  Н/с, яка напрямлена вгору вздовж похилої площини, надасть руху тільки тоді, коли величина сили тяги перевищить суму проекції сили ваги на вісь  $Ox$  та максимальної сили тертя спокою (напрямлена протилежно можливому руху трамвая), тобто за умови

$$Q > F_{\text{max}} + mg \sin \alpha.$$

Враховуючи, що  $F_{\text{max}} = f_0 mg \cos \alpha$ , маємо

$$Q > mg (\sin \alpha + f_0 \cos \alpha). \quad (1)$$

Визначимо з останньої умови момент часу  $t = \tau$  початку руху трамвая після вмикання двигуна. Для цього знак "нерівності" замінимо на знак "дорівнює". Отримаємо

$$\tau = \frac{1}{b_0} mg (\sin \alpha + f_0 \cos \alpha). \quad (2)$$

Для наведених числових даних  $\tau = 2,08$  с. Подальший рух трамвая можна визначити на підставі основного закону динаміки та принципу суперпозиції (рис. 11.6, б):

$$m\vec{w} = \vec{Q} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}}. \quad (3)$$

Після проектування на осі системи координат  $Ox$  (точка  $O$  — початкове положення трамвая) отримаємо

$$m\ddot{x} = Q - mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}, \quad (4)$$

$$0 = N - mg \cos \alpha,$$

де сила тертя ковзання  $F_{\text{тр}} = fN = fmg \cos \alpha$ .

Силу тяги можна подати так:  $Q = b_0 (t' + \tau)$ ,

де  $t' = t - \tau$ . Тоді перше рівняння системи (4), враховуючи співвідношення (3), можна записати так:

$$m\ddot{x} = b_0 t' + (f_0 - f) mg \cos \alpha. \quad (5)$$

З урахуванням початкових умов  $x(t'_0) = 0$ ,  $\dot{x}(t'_0) = 0$  після подвійного інтегрування виразу (5) за часом  $t'$  отримаємо

$$x(t') = \frac{b_0}{6m} (t')^3 + (f_0 - f) g \cos \alpha \frac{(t')^2}{2}.$$

Для часу  $t$  останній вираз перепишемо так:

$$x(t) = \frac{b_0}{6m} (t - \tau)^3 + (f_0 - f) g \cos \alpha \frac{(t - \tau)^2}{2}.$$

Після підстановки числових даних закон руху трамвая набирає вигляду

$$x(t) = 0,067 (t - 2,08)^3 + 0,049 (t - 2,08)^2,$$

де  $x$  — в метрах,  $t$  — в секундах.

**Приклад 11.7.** Літак летить горизонтально. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості:  $R = \mu v^2$ . Сила тяги постійна і складає кут  $\alpha$  з напрямком польоту. Визначити кінематичний закон руху та найбільшу швидкість літака.

**Розв'язування.** У даній задачі треба визначити кінематичні характеристики руху літака, який приймаємо за матеріальну точку, тобто треба розв'язати другу (обернену) задачу динаміки.

Введемо прямокутну систему координат  $Ox$ , початок відліку якої збігається з початковим положенням літака, вісь  $Ox$  горизонтальна. У початковий момент часу (при  $t = 0$ )  $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$  (рис. 11.7).

Нехай  $m$  — маса літака. Під час руху до літака прикладено силу ваги  $m\vec{g}$ , силу тяги  $\vec{F}_T$ , підйомну силу  $\vec{F}_n$  та силу опору  $\vec{R}$  (рис. 11.7).

На підставі основного закону динаміки та принципу суперпозиції запишемо

$$m\vec{w} = \vec{F}_T + \vec{F}_n + m\vec{g} + \vec{R}. \quad (1)$$

Для проєкцій на осі координат маємо

$$m\ddot{x} = F_T \cos \alpha - \mu \dot{x}^2,$$

$$0 = F_T \sin \alpha + F_n - mg. \quad (2)$$

З другого рівняння системи (2) можна знайти підйомну силу.

Для визначення закону руху літака перше рівняння запишемо у формі

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} = F_T \cos \alpha - \mu \dot{x}^2,$$

а потім так:

$$\frac{d\dot{x}}{F_T \cos \alpha - \mu \dot{x}^2} = \frac{1}{m} dt. \quad (3)$$

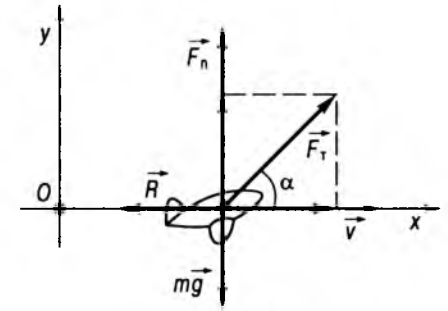


Рис. 11.7

Введемо позначення  $\mu = k^2$ ,  $F_T \cos \alpha = q^2$  і останній вираз перепишемо:

$$\frac{d\dot{x}}{q^2 - k^2 \dot{x}^2} = \frac{1}{m} dt.$$

Після інтегрування маємо

$$\frac{1}{2kq} \ln \frac{q + k\dot{x}}{q - k\dot{x}} = \frac{1}{m} t + C_1. \quad (4)$$

Для визначення сталої інтегрування  $C_1$  підставимо початкові умови ( $t = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ ) в інтеграл (4). Отримаємо  $C_1 = 0$ . Скориставшись основною логарифмічною тотожністю, запишемо

$$\frac{q + k\dot{x}}{q - k\dot{x}} = \exp\left(\frac{2kq}{m} t\right).$$

Розв'яжемо останній вираз відносно  $\dot{x}$ :

$$\dot{x} = \frac{q}{k} \frac{(e^{2\chi t} - 1)}{(e^{2\chi t} + 1)}, \quad (11.27)$$

де  $\chi = \frac{kq}{m}$ . Чисельник і знаменник правої частини формули (5) помножимо на  $0,5e^{-\chi t}$ :

$$\dot{x} = \frac{q}{k} \cdot \frac{\frac{1}{2}(e^{\chi t} - e^{-\chi t})}{\frac{1}{2}(e^{\chi t} + e^{-\chi t})}$$

і виразимо  $\dot{x}$  через гіперболічні функції:

$$\dot{x} = \frac{q}{k} \cdot \frac{\text{sh } \chi t}{\text{ch } \chi t}, \quad (6)$$

або

$$\dot{x} = v = \frac{q}{k} \cdot \text{th } \chi t. \quad (7)$$

Оскільки  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ , після розділення змінних з (6) отримаємо  $dx = \frac{q}{k} \cdot \frac{\text{sh } \chi t}{\text{ch } \chi t} dt$ .

Внесемо  $\text{sh } \chi t$  під знак диференціала

$dx = \frac{q}{k\chi} \cdot \frac{d(\text{ch } \chi t)}{\text{ch } \chi t}$ . Після інтегрування одержимо

$$x = \frac{q}{k\chi} \ln(\text{ch } \chi t) + C_2. \quad (8)$$

Підстановка початкової умови ( $t=0$ ,  $x_0=0$ ) в (6) дає змогу знайти сталу інтегрування:  $C_2=0$ . Отже, закон руху літака

$$x = \frac{m}{\mu} \ln \left( \text{ch } \frac{\sqrt{\mu F_T \cos \alpha}}{m} t \right).$$

Максимальну швидкість літака можна визначити з виразу (7). Аналізуючи його для умов  $t \rightarrow \infty$  ( $\text{th } \chi t \rightarrow 1$ ), приходимо до висновку, що максимальна швидкість не перевищить

$$v_{\max} = \dot{x}_{\max} = \frac{q}{k} = \sqrt{\frac{1}{\mu} F_T \cos \alpha}.$$

**Приклад 11.8.** Визначити кінематичний закон руху та рівняння траєкторії тіла, ки-

нутого з початковою швидкістю  $\vec{v}_0$  під кутом  $\alpha$  до горизонту, якщо сила опору руху пропорційна швидкості тіла:  $\vec{R} = -\mu m \vec{v}$ , де  $\mu$  — сталий коефіцієнт,  $m$  — маса тіла.

Розв'язування. Дана задача є другою (оберненою) задачею динаміки.

Введемо систему координат  $Oxy$ , початок відліку якої збігається з початковим положенням тіла (рис. 11.8).

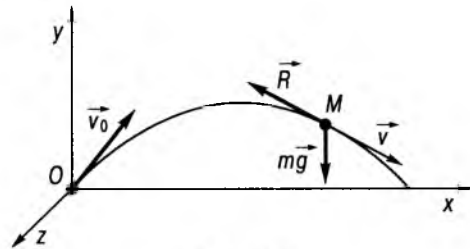


Рис. 11.8

У поточному положенні  $M$  (рис. 11.8) на тіло діють сила ваги  $m\vec{g}$  та сила опору  $\vec{R}$ , напрямлена протилежно до швидкості. На підставі основного рівняння динаміки точки та закону незалежності дії сил

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{R}. \quad (1)$$

Початкові умови мають вигляд

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0,$$

$$\dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha.$$

Проектуємо рівняння (1) на осі координат  $Oxy$ :

$$mw_x = -\mu mv_x, \quad mw_y = -mg - \mu mv_y.$$

Враховуючи, що  $w_x = \ddot{x}$ ,  $w_y = \ddot{y}$ ,  $v_x = \dot{x}$ ,  $v_y = \dot{y}$ , отримуємо

$$\ddot{x} = -\mu \dot{x}, \quad \ddot{y} = -g - \mu \dot{y},$$

або

$$\dot{x} + \mu x = 0, \quad \dot{y} + \mu y = -g. \quad (2)$$

Розв'яжемо ці рівняння, використовуючи теорію звичайних диференціальних рівнянь. Перше рівняння системи (2) є звичайним лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими

коефіцієнтами. Його розв'язок шукаємо як загальний розв'язок однорідного рівняння. Відповідне характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2 + \mu\lambda = 0. \quad (3)$$

Визначимо корені характеристичного рівняння:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -\mu$ . Далі запишемо загальний розв'язок диференціального рівняння у формі

$$x = C_1 e^{-\mu t} + C_2. \quad (4)$$

Для визначення сталих інтегрування  $C_1$ ,  $C_2$  підставимо відповідні початкові умови ( $t=0$ ,  $x_0=0$ ,  $\dot{x}_0=v_0 \cos \alpha$ ) у вираз (4) та у вираз похідної за часом, одержаний з (4). Отримаємо

$$C_1 + C_2 = 0, \quad -\mu C_1 = v_0 \cos \alpha, \quad (5)$$

звідки

$$C_1 = -C_2 = -\frac{v_0}{\mu} \cos \alpha.$$

Закон руху тіла за координатою  $x$  запишемо у вигляді

$$x = \frac{v_0}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) \cos \alpha. \quad (6)$$

Друге рівняння системи (2) є неоднорідним диференціальним рівнянням, його загальний розв'язок  $y(t)$  шукаємо як суму загального розв'язку  $y_1$  відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку  $y_2$  неоднорідного рівняння, тобто  $y(t) = y_1 + y_2$ . Характеристичне рівняння цього диференціального рівняння має вигляд (3). Тоді загальний розв'язок  $y_1$  однорідного рівняння запишемо аналогічно виразу (4)

$$y_1 = C_3 e^{-\mu t} + C_4. \quad (7)$$

Похідна за часом від частинного розв'язку  $y_2$  неоднорідного рівняння відповідно до правої частини цього рівняння має бути сталою величиною:  $\dot{y}_2 = A$ , де  $A = \text{const}$ . Ця величина визначається після підстановки похідної за часом від частинного роз-

в'язку  $\dot{y}_2$  у диференціальне рівняння. Взявши до уваги, що  $\ddot{y}_2 = 0$ , маємо  $A = -\frac{g}{\mu}$ , або  $\dot{y}_2 = -\frac{g}{\mu}$ . Останній вираз подамо у вигляді

$\frac{dy_2}{dt} = -\frac{g}{\mu}$ . Після розділення змінних та інтегрування отримаємо

$$y_2 = -\frac{g}{\mu} t + C. \quad (8)$$

Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного рівняння подається як сума виразів (7) та (8):

$$y_1 = C_3 e^{-\mu t} + C_4' - \frac{g}{\mu} t, \quad (9)$$

де  $C_4' = C_4 + C$ .

Сталі інтегрування визначаються підставкою початкових умов ( $t=0$ ,  $y_0=0$ ,  $\dot{y}_0=v_0 \sin \alpha$ ) у вираз (9) та похідну від  $y$ . Відповідна система алгебраїчних рівнянь має вигляд

$$C_3 + C_4' = 0, \quad \mu - C_3 = v_0 \sin \alpha + \frac{g}{\mu}. \quad (10)$$

Звідси

$$C_3 = -C_4' = -\frac{v_0}{\mu} \sin \alpha - \frac{g}{\mu^2}.$$

Тоді закон руху тіла за координатою  $y$  запишемо у вигляді

$$y = \frac{1}{\mu^2} (g + \mu v_0 \sin \alpha) (1 - e^{-\mu t}) - \frac{g}{\mu} t. \quad (11)$$

Для визначення рівняння траєкторії виключаємо параметр  $t$  з рівнянь руху тіла (6) та (11) і отримуємо

$$y = \frac{1}{\mu} \frac{g + \mu v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} x + \frac{g}{\mu^2} \ln \left( 1 - \frac{\mu}{v_0 \cos \alpha} x \right).$$

**Приклад 11.9.** Електрон масою  $m$ , який несе заряд  $e$  негативної електроенергії, входить в однорідне поле постійної напруженості  $\vec{H}$  зі швидкістю  $\vec{v}_0$  під гострим кутом  $\phi_0$  до лінії напруженості поля. Визначити траєкторію руху електрона, якщо на

нього діє сила  $\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{H})$ . Вплив сили ваги не враховувати.

Розв'язування. Об'єктом дослідження задачі є електрон, який розглядається як вільна матеріальна точка  $M$ , що рухається під дією сили  $\vec{F}$ . За основним законом динаміки матеріальної точки

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{v} \times \vec{H}). \quad (1)$$

З рівняння (1), на підставі властивостей векторного добутку, випливає, що прискорення точки буде перпендикулярним до вектора швидкості. Враховуючи, що вектори швидкості та прискорення точки завжди лежать у стичній площині, прискорення електрона  $M$  дорівнює нормальній складовій прискорення.

Введемо натуральну систему координат  $(M\tau nb)$ , початок відліку якої зв'язаний з рухомим електронем  $M$  (рис. 11.9), і спроектуємо на її осі рівняння (1):

$$\begin{cases} m\dot{v} = 0, \\ m \frac{v^2}{\rho} = F_n, \\ F_b = 0; \end{cases} \quad (2)$$

причому в даному випадку  $F_n = evH \sin \varphi$ .

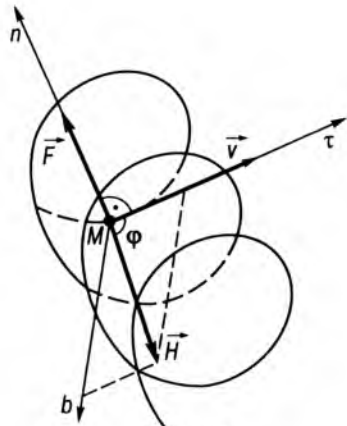


Рис. 11.9

Перший інтеграл рівняння  $\dot{v} = 0$  має вигляд  $v = C_1$ . З урахуванням початкової умови  $t_0 = 0$ ,  $v(t_0) = v_0$  отримаємо

$$v = v_0 = \text{const.}$$

Домножимо скалярно обидві частини рівняння (1) на вектор  $\vec{H}$ . Враховуючи, що змішаний добуток векторів правої частини отриманого співвідношення дорівнює нулеві, —

$$\vec{H} \cdot (\vec{v} \times \vec{H}) = \vec{v} \cdot (\vec{H} \times \vec{H}) = 0,$$

одержимо

$$m\vec{H} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0.$$

За умовою вектор  $\vec{H}$  сталий, тому можна записати

$$m \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{H}) = 0,$$

або

$$m \frac{d}{dt} (vH \cos \varphi) = 0,$$

де  $v \cos \varphi$  — проекція вектора швидкості на напрям вектора  $\vec{H}$ . На підставі даного рівняння вона є сталою:  $v_H = v \cos \varphi = v_0 \cos \varphi = \text{const}$  і, відповідно, кут  $\varphi = (\vec{H}, \vec{v}) = \varphi_0 = \text{const}$ .

З другого рівняння системи (2) маємо

$$\rho = \frac{mv_0}{eH \sin \varphi_0} = \text{const.}$$

Останній вираз означає, що рух електрона здійснюється по лінії постійного радіуса кривини  $\rho$ . Враховуючи, що стична площина траєкторії електрона утворює сталий кут з напрямком лінії напруженості поля, доходимо висновку, що траєкторія електрона — це гвинтова лінія на круговому циліндрі, твірна якого паралельна лініям напруженості поля.

### 11.1.3. Задачі для самостійного розв'язування

11.1. Точка масою  $m$  рухається за законом  $x = ae^{\lambda t}$ ,  $y = ae^{-\lambda t}$ , де  $a$  та  $\lambda$  — сталі величини. Визначити силу, яка прикладена до точки.

Відповідь: точка рухається під дією центральної сили  $F = m\lambda^2 r$ , де  $r$  — радіус-вектор точки; напрямні косинуси:  $\cos(\vec{F}, \vec{x}) = \frac{x}{r}$ ,  $\cos(\vec{F}, \vec{y}) = \frac{y}{r}$ .

11.2. Кулька масою  $m = 0,1$  кг рухається у горизонтальній площині по колу радіуса  $0,5$  м за законом  $s = 2t^2$  м. Визначити силу, яка надає цього руху, у момент часу  $0,5$  с.

Відповідь: сила  $0,89$  Н, кут між напрямком сили та головною нормаллю кола дорівнює  $45^\circ$ .

11.3. Визначити траєкторію точки, якщо рівнодійна системи сил, прикладених до точки, та вектор початкової швидкості лежать на одній прямій.

Відповідь: пряма, яка збігається з лінією дії рівнодійної.

11.4. Рівнодійна системи сил, прикладених до матеріальної точки, та вектор її початкової швидкості лежать в одній площині і не збігаються за напрямком. Визначити розташування траєкторії цієї точки.

Відповідь: траєкторія точки лежить у площині, яка містить вектори рівнодійної сил та початкової швидкості.

11.5. Матеріальна точка масою  $m$  здійснює прямолінійний рух вздовж осі  $Ox$  під дією сили  $F = b \sin kt$ . Знайти закон руху точки, якщо вона в початковий момент часу була нерухома і перебувала в початку відліку.

$$\text{Відповідь: } x = \frac{b}{mk} \left( t - \frac{1}{k} \sin kt \right).$$

11.6. Матеріальна точка масою  $m$  починає рухатись в площині  $Oxy$  з початку відліку з початковою швидкістю  $\vec{v} = \{2; 4\}$ . До точ-

ки прикладена сила  $\vec{F} = \{-5m; -10m\}$ . Знайти закон руху та рівняння траєкторії точки.

Відповідь: закон руху точки  $x = -2,5t^2 + 2t$ ,  $y = -5t^2 + 4t$ ; траєкторія — пряма  $y = 2x$ .

11.7. Важке кільце починає ковзати зі стану спокою вздовж шорсткого прямолінійного стрижня, який утворює кут  $60^\circ$  з горизонтом, від його верхнього кінця. Стрижень має довжину  $1,5$  м. Знайти час, за який кільце досягне нижнього кінця стрижня, якщо коефіцієнт тертя ковзання дорівнює  $0,5$ .

Відповідь:  $0,705$  с.

11.8. Тепловоз вагою  $200$  кН перебуває в спокої на горизонтальній ділянці шляху. Машиніст умикає двигун і збільшує його потужність так, що сила тяги змінюється на  $3000$  Н щосекунди. Визначити закон руху тепловоза, якщо опір руху сталий і складає  $0,03$  ваги тепловоза.

Відповідь: рух тепловоза починається у момент часу  $t = 2$  с;  $s = 0,0245(t-2)^2$  ( $s$  — у метрах).

11.9. Моторний човен масою  $m$  починає рух зі стану спокою і долає силу опору, яка визначається за законом  $R = \mu mv$ . Тут  $\mu$  — стала величина,  $v$  — швидкість. Визначити закон руху моторного човна, вважаючи, що сила тяги гвинта стала і дорівнює  $Q$ .

$$\text{Відповідь: } x = \frac{Q}{m\mu^2} (\mu - 1 + e^{-\mu}).$$

11.10. З повітряної кулі, яка піднімається вгору зі швидкістю  $1$  м/с, на висоті  $15$  м скидають баласт. Визначити час руху та швидкість баласту при досягненні ним поверхні Землі, якщо опір повітря пропорційний квадрату швидкості і дорівнює  $0,1$  Н при швидкості  $1$  м/с.

Відповідь:  $t = 2,1$  с,  $v = 9,65$  м/с.

11.11. Точка  $M$  масою  $m$  рухається в горизонтальній площині  $Oxy$  під дією сили відштовхування від нерухомого центра  $O$ , яка змінюється за законом  $\vec{F} = \lambda^2 m \vec{r}$ , де

$\vec{r}$  — радіус-вектор точки  $M$ . У початковий момент часу точка  $M$  перебувала у положенні  $M_0(0, b)$  та мала початкову швидкість  $\vec{v}_0$ , паралельну осі  $Ox$ . Визначити траєкторію точки  $M$ .

Відповідь: траєкторія — гіпербола  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a = \frac{v_0}{\lambda}$ .

**11.12.** Матеріальна точка вагою  $P$  лежить на горизонтальному столі і прив'язана до нерухомої точки  $O$  цього стола ниткою завдовжки  $l$ . Точці надають початкову швидкість  $\vec{v}_0$ , яка перпендикулярна до натягнутої нитки, внаслідок чого точка на столі описує коло радіусом  $l$ . Визначити швидкість та силу натягу нитки, якщо коефіцієнт тертя ковзання дорівнює  $f$ .

Відповідь:  $v = v_0 - fgt, T = \frac{P}{gl}(v_0 - fgt)^2$ .

**11.13.** Точка  $M$  масою  $m$  рухається під дією сили ваги всередині гладенької трубки (рис. 11.10), яка має форму кола радіуса  $r$  і розташована вертикально. Знайти закон руху  $s = s(t)$  точки  $M$ , якщо вона відхилена на малий кут  $\varphi_0$  і відпущена без початкової швидкості. Визначити тиск точки на трубку в найнижчому положенні.

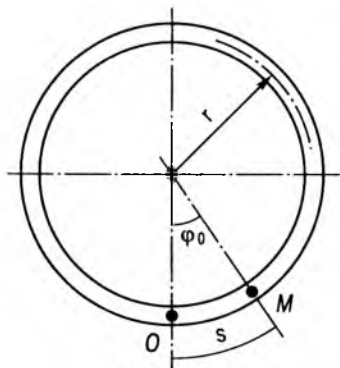


Рис. 11.10

Відповідь:  $s(t) = \varphi_0 r \sin \sqrt{\frac{g}{r}} t$ , тиск  $Q = mg(1 + \varphi_0^2)$ .

**11.14.** Шків  $A$  та  $B$  ківшевого елеватора флюсоподавального пристрою (рис. 11.11) для зварювального виробництва приводяться в рух пасовою передачею від мотора  $C$ . Він за хвилину робить  $n$  обертів.

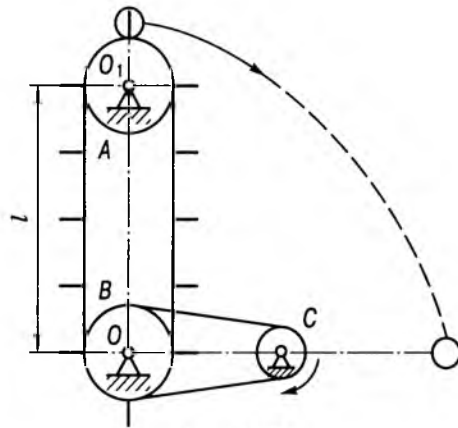


Рис. 11.11

Визначити, на якій відстані по горизонталі від точки  $O$  впаде камінь, що вилітає з верхнього ковша на шківі  $A$  елеватора, якщо відстань  $OO_1 = l$ , шків  $A$  і  $B$  мають радіус  $r$ , а передавальне число від  $C$  до  $B$  дорівнює  $k$ .

Відповідь:  $x = \frac{\pi n r k}{30} \sqrt{\frac{2(l+r)}{g}}$ .

## § 11.2. КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

### 11.2.1. Короткі теоретичні відомості

Важливою для дослідження формою руху матеріальної точки є коливальний рух. Розрізняють коливання матеріальної точки вільні, згасаючі та змушені.

Вільними, або власними коливаннями точки називаються її коливання під дією відновлюваної сили, зумовлені початковим відхиленням точки від положення рівноваги або наданням їй початкової швидкості.

Відновлювана сила — це сила, яка повертає точку в положення рівноваги.

Диференціальне рівняння вільних прямих коливань матеріальної точки, яке можна отримати на підставі основного закону динаміки, має вигляд

$$m\ddot{x} + cx = 0, \quad (11.15)$$

де  $m$  — маса точки;  $c$  — коефіцієнт жорсткості пружини або коефіцієнт пропорційності відновлюваної сили;  $x$  — координата точки;  $\ddot{x}$  — друга похідна за часом від координати. Існування нетривіального розв'язку цього рівняння можливе тоді, коли хоча б одна з початкових умов

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \quad (11.16)$$

буде ненульовою.

Після ділення усіх членів рівняння (11.15) на  $m$  отримаємо

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (11.17)$$

Тут позначено  $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$ ;

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (11.18)$$

називається *коловою частотою коливань*. Ця частота дорівнює кількості коливань точки за інтервал часу  $2\pi$  секунди. Кількість коливань за одну секунду називається *частотою коливань*, визначається так:  $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}$ .

Загальний розв'язок лінійного диференціального однорідного рівняння (11.17) другого порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \quad (11.19)$$

або після перетворень

$$x = A \sin(\omega_0 t + \alpha). \quad (11.20)$$

Сталі інтегрування  $C_1, C_2, A, \alpha$  пов'язані співвідношеннями

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \text{tg } \alpha = \frac{C_1}{C_2},$$

де  $A$  — *амплітуда* коливань, визначається найбільшим відхиленням точки від положення рівноваги (або центра коливань);  $\alpha$  — *початкова фаза* коливань.

З урахуванням початкових умов (11.16) маємо

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0},$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2}, \quad \alpha = \text{arctg } \frac{x_0 \omega_0}{\dot{x}_0}.$$

Проміжок часу між двома послідовними проходженнями точкою положення рівноваги (центра коливань) в одному й тому ж напрямку називається *періодом коливань*, який можна визначити на підставі виразу (11.20):

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (11.21)$$

Період і, відповідно, частота коливань, які описуються диференціальним рівнянням (11.17), не залежать від початкових умов. Ця властивість називається *ізохронністю* коливань.

Диференціальне рівняння вільних прямих коливань точки з урахуванням сили опору, яка пропорційна першому степеню швидкості, має вигляд

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0. \quad (11.22)$$

Коефіцієнт  $\beta$  дорівнює коефіцієнту пропорційності сили опору:  $R = \beta v = \beta\dot{x}$ , де  $v$  — швидкість точки.

Після ділення рівняння (11.22) на  $m$  дістанемо

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (11.23)$$

де  $h = \frac{\beta}{2m}$  — коефіцієнт згасання або відносний коефіцієнт демпфірування коливань;  $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$ .

Загальний розв'язок диференціального рівняння (11.23) в залежності від співвідношення між параметрами  $h$  та  $\omega_0$  може мати три форми. У випадку великого опору  $h > \omega_0$  (корені відповідного характеристичного рівняння дійсні) цей розв'язок має вигляд

$$x = e^{-ht} (C_1 e^{pt} + C_2 e^{-pt}), \quad (11.24)$$

який подається через гіперболічні функції:

$$x = e^{-ht} (B_1 \operatorname{ch} pt + B_2 \operatorname{sh} pt)$$

або

$$x = Ae^{-ht} \operatorname{sh}(pt + \alpha),$$

де  $p = \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$ .

Рух, який відповідає розв'язку (11.24), носить неколивальний характер і тому називається *аперіодичним*.

Сталі інтегрування  $C_1, C_2$  розв'язку (11.24) визначаються на підставі початкових умов (11.16):

$$C_1 = \frac{x_0(p+h) + \dot{x}_0}{2p}, \quad C_2 = \frac{x_0(p-h) - \dot{x}_0}{2p}.$$

Якщо  $h = \omega_0$  (випадок кратних коренів характеристичного рівняння), загальний розв'язок рівняння (11.23) записується у формі

$$x = e^{-ht} (C_1 + C_2 t), \quad (11.25)$$

а сталі інтегрування визначаються з виразів

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \dot{x}_0 + hx_0.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (11.23) при  $h < \omega_0$ , тобто у випадку малого опору, набирає вигляду

$$x = e^{-ht} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) \quad (11.26)$$

або

$$x = Ae^{-ht} \sin(\omega_1 t + \alpha), \quad (11.27)$$

де

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}. \quad (11.28)$$

У цьому випадку сталі інтегрування для заданих початкових умов (11.16) визначаються з виразів

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 + x_0 h}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}}$$

або

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + x_0 h}{\omega_0^2 - h^2}\right)^2},$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{x_0 \sqrt{\omega_0^2 - h^2}}{\dot{x}_0 + x_0 h}.$$

Рух, що відповідає розв'язку (11.27), є коливальним з амплітудою, яка зменшується з часом, тобто відбуваються *згасаючі коливання*. Період цих коливань

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}}. \quad (11.29)$$

Відповідно величина  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$  є *коловою частотою згасаючих коливань*.

Числова послідовність, яка складається з амплітудних (максимальних) значень  $A_0, A_1, A_2, \dots$  відхилення точки в одну й ту ж сторону від центра коливань у випадку згасаючих коливань, є геометричною прогресією (рис. 11.12). Знаменник цієї геометричної прогресії  $\eta = e^{-hT_k}$  називається *декрементом згасання* або *фактором згасання*. Модуль натурального логарифма цієї величини

$$|\ln \eta| = hT_k$$

є *логіарифмічним декрементом згасаючих коливань*.

*Змушеними коливаннями* називаються коливання точки, якщо на неї, крім відновлюваної сили, діє збурювальна сила, яка змінюється з часом за гармонічним законом. У найпростішому випадку збурювальна сила

$$Q = H_0 \sin(\omega t + \sigma),$$

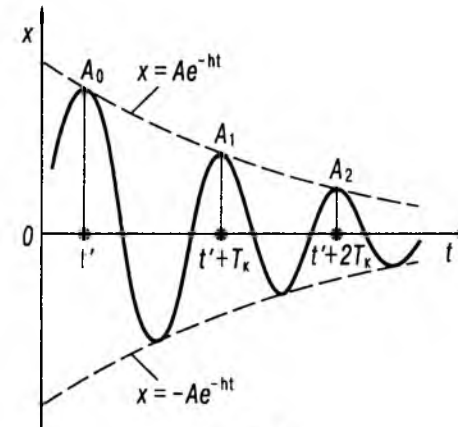


Рис. 11.12

де  $H_0$  — максимальне значення збурювальної сили;  $\omega$  — колова частота збурювальної сили;  $\sigma$  — початкова фаза.

Диференціальне рівняння змушених прямих коливань точки, без урахування сил опору, записується у вигляді

$$m\ddot{x} + cx = H_0 \sin(\omega t + \sigma),$$

а після ділення на  $m$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = H \sin(\omega t + \sigma), \quad (11.30)$$

де  $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$ ;  $H = \frac{H_0}{m}$ .

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (11.30) подається у вигляді суми загального розв'язку  $x_1$  відповідного однорідного диференціального рівняння та частинного розв'язку  $x_2$  неоднорідного рівняння, тобто

$$x = x_1 + x_2. \quad (11.31)$$

Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння

$$x_1 = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t. \quad (11.32)$$

При визначенні частинного розв'язку  $x_2$  можливі три випадки:  $\omega_0 \neq \omega$ ;  $\omega_0 \approx \omega$ ;  $\omega_0 = \omega$ .

У першому випадку, коли частота вільних коливань не дорівнює частоті збурювальної

сили ( $\omega_0 \neq \omega$ ), частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$x_2 = A^* \sin(\omega t + \sigma), \quad (11.33)$$

де

$$A^* = \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (11.34)$$

Величина  $A^*$  називається амплітудою змушених коливань.

Загальний розв'язок у даному випадку

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + A^* \sin(\omega t + \sigma). \quad (11.35)$$

Сталі  $C_1$  та  $C_2$  визначаються із загального розв'язку (11.31) з урахуванням початкових умов ( $t_0 = 0$ ),  $x(t_0) = x_0$ ,  $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$ :

$$C_1 = x_0 - \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \sigma,$$

$$C_2 = \frac{1}{\omega_0} \left( \dot{x}_0 - \frac{H\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \sigma \right).$$

У другому випадку, коли частота вільних коливань близька за значенням до частоти збурювальної сили ( $\omega_0 \approx \omega$ ), можна покласти  $\omega/\omega_0 \approx 1$ ,  $\omega_0 + \omega \approx 2\omega_0$  і  $\omega_0^2 - \omega^2 \neq 0$ . Тоді при нульових початкових умовах [ $x(t_0) = 0$ ,  $\dot{x}(t_0) = 0$ ] вираз (11.35) записується так:

$$x = A(t) \cos(\omega t + \sigma), \quad (11.36)$$

де

$$A(t) = \frac{2H}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right).$$

Рух, що відповідає виразу (11.36), є коливальним, частота якого дорівнює частоті збурювальної сили, а амплітуда повільно змінюється з частотою, що дорівнює половині різниці частоти збурювальної сили та частоти вільних коливань (рис. 11.13). Це явище називається *биттям*.



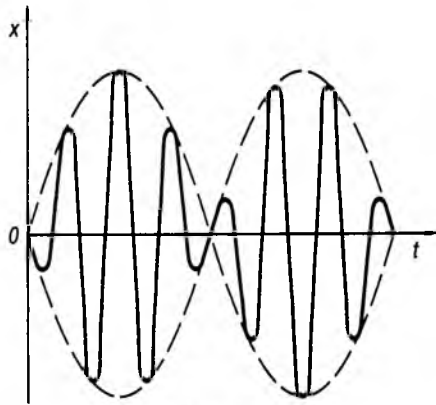


Рис. 11.13

У третьому випадку, коли частота вільних коливань дорівнює частоті збудовальної сили ( $\omega_0 = \omega$ ), якісно змінюється характер коливань — виникає *резонанс*. За таких умов загальний розв'язок диференціального рівняння (11.30) подається у вигляді суми загального розв'язку (11.32) відповідного однорідного диференціального рівняння та частинного розв'язку  $x_2$  неоднорідного рівняння, який записується у формі

$$x_2 = tA^* \cos(\omega t + \sigma), \quad (11.37)$$

де

$$A^* = -\frac{H}{2\omega} = -\frac{H}{2\omega_0}.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (11.30) у випадку резонансу має вигляд

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \frac{H}{2\omega} t \cos(\omega t + \sigma), \quad (11.38)$$

причому сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов, дорівнюють

$$C_1 = x_0, C_2 = \frac{1}{\omega} \left( \dot{x}_0 + \frac{H}{2\omega} \cos \sigma \right).$$

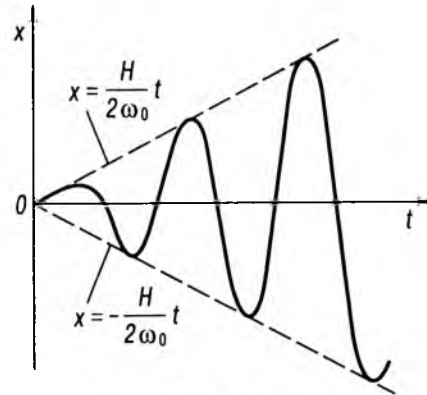


Рис. 11.14

Розв'язок (11.38) можна записати так:

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \left( \dot{x}_0 + \frac{H}{2\omega} \cos \sigma \right) \sin \omega t - \frac{H}{2\omega} t \sin \left( \omega t + \sigma - \frac{\pi}{2} \right). \quad (11.39)$$

Останній доданок виразу (11.39) відповідає змушеним коливанням у випадку резонансу. Частота  $\omega$  та період  $T$  цих коливань дорівнюють відповідно частоті  $\omega_0$  і періоду  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  вільних коливань. Фаза змушених коливань при резонансі  $\omega t + \sigma - \pi/2$  відрізняється від фази збудовальної сили  $\omega t + \sigma$  на величину  $\pi/2$ . Амплітуда змушених коливань у випадку резонансу  $A = -\frac{H}{2\omega} t$  зростає пропорційно часу (рис. 11.14).

Диференціальне рівняння змушених прямолинійних коливань точки з урахуванням сили опору, яка пропорційна першому степеню швидкості, має вигляд

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = H_0 \sin(\omega t + \sigma).$$

Після ділення цього рівняння на  $m$  запишемо

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = H \sin(\omega t + \sigma), \quad (11.40)$$

$$\text{де } h = \frac{\beta}{2m}, \omega_0^2 = \frac{c}{m}, H = \frac{H_0}{m}.$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (11.40) подається у вигляді суми

$$x = x_1 + x_2, \quad (11.41)$$

де  $x_1$  — загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння (11.23);  $x_2$  — частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Загальний розв'язок  $x_1$  однорідного диференціального рівняння, як вже зазначалося, може записуватись у одній з форм (11.24), (11.25) або (11.26) в залежності від співвідношення між параметрами  $h$  та  $\omega_0$ . Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (11.40) можна шукати у формі

$$x_2 = B_1 \cos(\omega t + \sigma) + B_2 \sin(\omega t + \sigma) \quad (11.42)$$

або

$$x_2 = B \sin(\omega t + \sigma + \gamma). \quad (11.43)$$

Тут  $B_1, B_2, B, \gamma$  — сталі, що пов'язані між собою співвідношеннями

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}, \quad \text{tg } \gamma = \frac{B_1}{B_2},$$

і визначаються підстановкою частинного розв'язку (11.42) у диференціальне рівняння (11.40):

$$B = \frac{H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}}, \quad (11.44)$$

$$\text{tg } \gamma = \frac{2h\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (11.45)$$

Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (11.40) має вигляд

$$x = x_1 + \frac{H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}} \sin(\omega t + \sigma + \gamma), \quad (11.46)$$

де  $x_1$  набуває одної з форм (11.24), (11.25) або (11.26). Для визначення сталих інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  треба підставити початкову умову за координатою  $[t_0 = 0, x(t_0) = x_0]$  у

вираз (11.46) та початкову умову за швидкістю  $[t_0 = 0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0]$  у співвідношення, що є похідною за часом від виразу (11.46), і далі розв'язати систему двох алгебраїчних рівнянь відносно невідомих  $C_1$  і  $C_2$ .

Складові руху у виразі (11.46), які відповідають розв'язку  $x_1$ , з часом згасають і через достатньо довгий інтервал часу залишаються тільки змушені коливання, що визначаються розв'язком  $x_2$ .

Залежність амплітуди змушених коливань  $B$  від частоти збудовальної сили  $\omega$ , яка визначається формулою (11.44), називається *амплітудно-частотною характеристикою*.

Введемо величину  $B_0 = \frac{H}{\omega_0^2}$ , яка визначає

статичне відхилення (деформацію) при дії сили сталої величини. Відношення амплітуди змушених коливань на частоті  $\omega$  до статичного відхилення  $B_0$  під дією сталої сили називається *коефіцієнтом динамічності*:

$$\mu = \frac{B}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4v^2 z^2}},$$

$$\text{де } z = \frac{\omega}{\omega_0}; v = \frac{h}{\omega_0}.$$

Залежність зсуву фази змушених коливань  $\gamma$  від частоти збудовальної сили  $\omega$ , яка визначається формулою (11.45), називається *фазово-частотною характеристикою*.

Графік залежності коефіцієнта динамічності  $\mu$  та фази змушених коливань  $\gamma$  від частоти збудовальної сили для різних значень величини  $v$  наведено відповідно на рис. 11.15 та 11.16.

Послідовність розв'язання задач на дослідження коливального руху точки може бути такою:

1) виділити об'єкт дослідження — тіло або точку;

2) ввести координату, яка визначає положення об'єкта дослідження у будь-який

момент часу. Початок відліку обраної координати бажано вибрати в положенні статичної рівноваги об'єкта дослідження;

3) визначити сили, які прикладаються до об'єкта дослідження, і скласти диференціальне рівняння руху;

4) розглянути умову статичної рівноваги досліджуваної точки (або тіла) і при можливості спростити її диференціальне рівняння руху;

5) при дослідженні вільних коливань без урахування сил опору загальний розв'язок диференціального рівняння записати у формі (11.19). При дослідженні вільних коливань з урахуванням сил опору попередньо визначити числові значення коефіцієнтів  $h$  та  $\omega_0$  і в залежності від співвідношення між ними обрати одну з форм загального розв'язку (11.24), (11.25) або (11.26);

6) у випадку змущених коливань без урахування сил опору знайти числові значення величин  $\omega_0$  та  $\omega$ , в залежності від їх співвідношення, обрати частинний розв'язок диференціального рівняння у формі (11.33) або (11.37). У випадку змущених коливань з урахуванням сил опору для визначення загального розв'язку відповідного однорідного рівняння знайти числові зна-

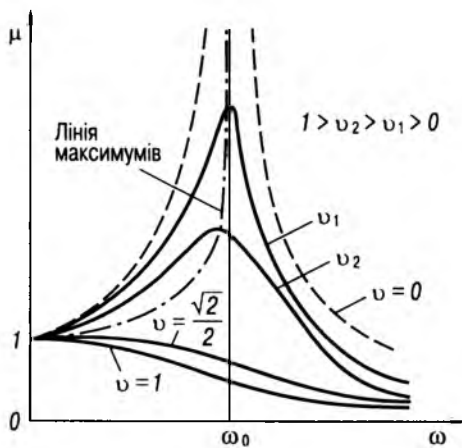


Рис. 11.15

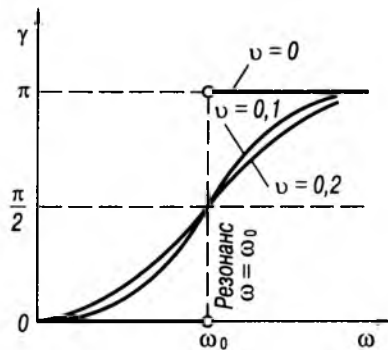


Рис. 11.16

чення величин  $h$  та  $\omega_0$ . В залежності від співвідношення між ними вибрати одну з форм розв'язку (11.24), (11.25) або (11.26);

7) визначити початкові умови і знайти сталі інтегрування шляхом підстановки початкових умов у загальний розв'язок усього рівняння та у вираз, який є похідною за часом від загального розв'язку.

Треба зазначити, що колова частота та період вільних коливань матеріальної точки визначаються безпосередньо з відповідного диференціального рівняння за формулами (11.18), (11.21) або (11.28), (11.29).

### 11.2.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 11.10.** На гладкій горизонтальній площині розташоване тіло  $M$  вагою  $P = 9,81$  Н, яке утримується за допомогою горизонтальної пружини (рис. 11.17, а). Подовження пружини на 1 см спричинюється силою 1,96 Н. У початковий момент часу пружина була стиснута на 5 см і тілу було надано швидкість 2 м/с, напрямлену в правий бік. Визначити закон руху тіла відносно положення, в якому пружина недеформована.

**Розв'язування.** Об'єктом дослідження даної задачі є тіло  $M$ , яке можна вважати матеріальною точкою, оскільки тіло здійснює прямолінійний поступальний рух.

Введемо координатну вісь  $Ox$ , початок відліку якої збігається з правим кінцем недеформованої пружини і яка напрямлена в правий бік (рис. 11.17, б).

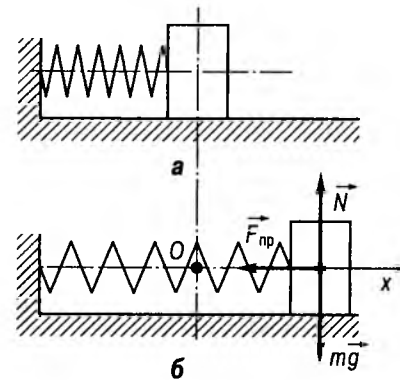


Рис. 11.17

Визначаємо початкові умови руху тіла, які потрібні для розв'язання задачі ( $t_0 = 0$ ):

$$x(t_0) = x_0 = -0,05 \text{ м. } \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 = 2 \text{ м/с.} \quad (1)$$

Зображуємо тіло в поточному положенні на додатних значеннях осі  $Ox$  і вважаємо, що воно рухається в правий бік. Визначимо прикладені до тіла сили. Тіло перебуває під дією сили ваги  $\vec{P} = m\vec{g}$ , нормальної складової реакції  $\vec{N}$  горизонтальної площини та сили пружності  $\vec{F}_{\text{пр}}$ . Оскільки пружина розтягнена, сила пружності у даному положенні тіла напрямлена протилежно до додатного напрямку осі  $Ox$  (рис. 11.17, б).

За основним законом динаміки можна записати рівняння

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{пр}}.$$

Спроекуємо це рівняння на вісь  $Ox$ :

$$m\ddot{x} = -F_{\text{пр}}. \quad (2)$$

Згідно з законом Гука пружна сила пропорційна деформації (подовженню) пружини  $\Delta l$ , яка в даній задачі збігається з поточною координатою тіла:

$$F_{\text{пр}} = c\Delta l = cx.$$

Підставимо  $F_{\text{пр}}$  у (2) і запишемо рівняння  $m\ddot{x} + cx = 0$ .

Після ділення на масу  $m$  отримаємо рівняння, яке є диференціальним рівнянням вільних коливань (11.17):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3)$$

Колова частота власних коливань  $\omega_0$  визначається з виразу

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{cg}{P}}.$$

Характеристичне рівняння, яке відповідає диференціальному рівнянню (3), записується у вигляді

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0.$$

Корені цього рівняння уявні:  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ . Відповідно, загальний розв'язок диференціального рівняння (3) можна записати у формі

$$x = C_1 e^{-i\omega_0 t} + C_2 e^{i\omega_0 t},$$

або після перетворень

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t. \quad (4)$$

Для визначення сталих інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  візьмемо похідну за часом від виразу (4):

$$\dot{x} = -\omega_0 C_1 \sin \omega_0 t + \omega_0 C_2 \cos \omega_0 t. \quad (5)$$

Підставимо початкову умову за координатою [ $t = t_0 = 0$ ,  $x(t_0) = x_0$ ] у (4), а початкову умову за швидкістю [ $t = t_0 = 0$ ,  $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$ ] у (5). Отримаємо

$$x_0 = C_1, \quad \dot{x}_0 = \omega_0 C_2,$$

звідки

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}.$$

Для визначення коефіцієнта жорсткості пружини врахуємо, що пружина розтягується на 1 см сталою силою 1,96 Н. Тоді, на підставі закону Гука, отримаємо  $c = \frac{F}{\Delta l} = \frac{1,96}{0,01} = 196$  Н/м.

Враховуючи числові дані задачі, знайдемо значення колової частоти та сталих інтегрування:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{cg}{P}} = \sqrt{\frac{196 \cdot 9,81}{9,81}} = 14 \text{ рад/с},$$

$$C_1 = -0,05 \text{ м}, C_2 = 0,14 \text{ м/с}.$$

Закон руху тіла  $M$  має вигляд

$$x = -0,05 \cos 14t + 0,14 \sin 14t, \text{ м}.$$

Цей вираз можна записати у формі (11.20), обчислюючи амплітуду та фазу коливань:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0,148 \text{ м},$$

$$\alpha = \arctg \frac{x_0 \omega_0}{\dot{x}_0} = \arctg(-0,35) = -0,34 \text{ рад}.$$

Остаточо отримаємо

$$x = 0,148 \sin(14t - 0,34), \text{ м}.$$

$$\text{Період коливань тіла } T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{14} = 0,448 \text{ с}.$$

**Приклад 11.11.** Пристрій для гасіння коливального руху, який називається амортизатором, складається з циліндра  $1$ , поршня  $2$  зі штоком та пружини  $3$  (рис. 11.18, *а*). Маса поршня  $2$  зі штоком та тіла, що амортизується,  $m = 3$  кг. Коефіцієнт жорсткості пружини  $c = 675$  Н/м. При русі поршня на нього діє сила опору, яка виникає за рахунок стиснення повітря і його поступового перетікання з однієї частини циліндра в

іншу. Сила опору пропорційна першому степеню швидкості поршня:  $R = \beta v$ , де

$$\beta = 48 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}.$$

Визначити закон руху поршня, якщо в початковий момент часу він був зміщений вниз на  $5$  см від положення рівноваги і йому була надана швидкість  $0,2$  м/с в тому самому напрямку.

Розв'язування. Почнемо з дослідження руху поршня зі штоком. З цією метою схему пристрою, зображену на рис. 11.18, *а*, зведемо до еквівалентної спрощеної схеми, яка складається з вертикальної пружини та тіла  $M$ , що можна вважати матеріальною точкою (рис. 11.18, *б*).

Введемо вісь координат  $Ox$ , напрямлену вертикально вниз. Початок відліку  $O$  цієї осі розмістимо в положенні статичної рівноваги тіла  $M$ , тобто в положенні, при якому сила ваги нерухомого тіла зрівноважується силою пружності.

Зобразимо тіло  $M$  на додатних значеннях координатної осі і вважатимемо, що воно у даний момент часу рухається вниз.

Визначимо сили, які прикладаються до тіла  $M$ . До тіла  $M$  прикладені сила ваги  $m\vec{g}$ , сила пружності  $\vec{F}_{\text{пр}}$  та сила опору  $\vec{R}$

(рис. 11.18, *б*). Оскільки пружина для зображеного положення тіла  $M$  розтягнена, сила пружності напрямлена вгору. Сила опору напрямлена протилежно до напрямку руху тіла.

Величина сили пружності за законом Гука пропорційна деформації пружини  $\Delta l$ , тобто  $F_{\text{пр}} = c \cdot \Delta l$ . Деформацію, або подовження, пружини визначаємо як різницю між поточною довжиною пружини  $l$  і довжиною пружини в ненапруженому стані  $l_0$ , тобто  $\Delta l = l - l_0$  (рис. 11.18, *в*). Поточна довжина пружини  $l$ , як випливає з рисунка, складається з довжини ненавантаженої пружини  $l_0$ , статичної деформації  $\Delta l_{\text{ст}}$  до положення статичної рівноваги від дії сили ваги тіла  $M$  та деформації, яка спричинюється переміщенням тіла  $M$  від точки  $O$  і дорівнює його поточній координаті  $x$ . Отже, маємо

$$l = l_0 + \Delta l_{\text{ст}} + x.$$

Тоді подовження пружини

$$\Delta l = l - l_0 = \Delta l_{\text{ст}} + x,$$

а величина сили пружності

$$F_{\text{пр}} = c(\Delta l_{\text{ст}} + x). \quad (1)$$

На підставі основного закону динаміки запишемо

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{пр}} + \vec{R}.$$

Після проєктування на вісь  $Ox$  отримаємо

$$m\ddot{x} = mg - F_{\text{пр}} - R. \quad (2)$$

Підставимо у (2)  $F_{\text{пр}}$  з виразу (1) для сили пружності, і силу опору запишемо через координату ( $v = \dot{x}$ ):

$$m\ddot{x} = mg - c(\Delta l_{\text{ст}} + x) - \beta \dot{x}. \quad (3)$$

Рівняння (3) можна спростити, використавши умову статичної рівноваги тіла  $M$  на пружині. У цьому випадку сила ваги тіла  $M$  зрівноважується силою пружності:

$$F_{\text{пр}}^c = mg,$$

де  $F_{\text{пр}}^c = c\Delta l_{\text{ст}}$ . Отже, умова рівноваги має вигляд

$$c\Delta l_{\text{ст}} = mg.$$

Звідси можна визначити статичне подовження пружини

$$\Delta l_{\text{ст}} = \frac{mg}{c}. \quad (4)$$

Скориставшись рівняннями (3) і (4), матимемо

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0.$$

Після ділення на  $m$  отримаємо диференціальне рівняння руху тіла  $M$

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (5)$$

$$\text{де } h = \frac{\beta}{2m}; \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m}.$$

Звичайне однорідне диференціальне рівняння (5) зі сталими коефіцієнтами має характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Корені цього рівняння записуються у вигляді

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2}. \quad (6)$$

Вигляд загального розв'язку диференціального рівняння (5) залежить від співвідношення між коефіцієнтами  $h$  та  $\omega_0$ . У нашому випадку

$$h = \frac{\beta}{2m} = \frac{48}{2 \cdot 3} = 8 \text{ рад/с};$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{675}{3}} = 15 \text{ рад/с}.$$

Оскільки  $h < \omega_0$ , то підкореневий вираз формул (6) буде від'ємним і загальний розв'язок рівняння (5) запишеться у формі (11.26):

$$x = e^{-ht} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t), \quad (7)$$

$$\text{де } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - h^2} = 12,69 \text{ рад/с}.$$

Для визначення сталих інтегрування  $C_1$  та  $C_2$  знайдемо похідну за часом від розв'язку (7):

$$\dot{x} = -he^{-ht} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) + \omega_1 e^{-ht} (-C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \cos \omega_1 t). \quad (8)$$

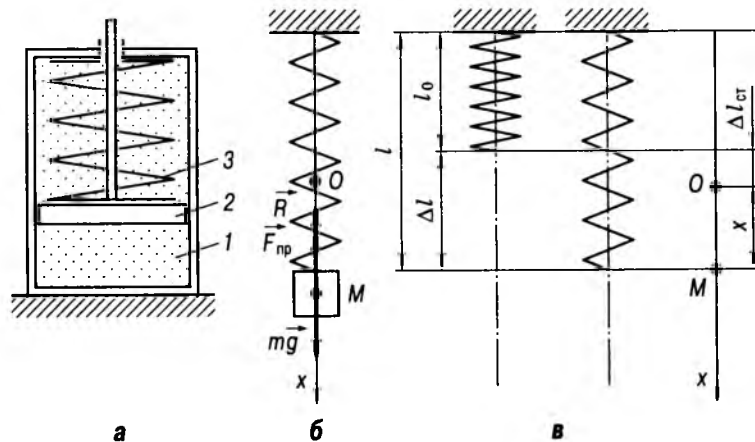


Рис. 11.18

Початкові умови руху поршня, віднесені до осі  $Ox$ , такі:

$$t_0 = 0, x(t_0) = x_0 = 0,05 \text{ м},$$

$$\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 = 0,2 \text{ м/с}.$$

Підставимо початкову умову за координатою у (7), а початкову умову за швидкістю у (8). Тоді при  $t = t_0 = 0$  матимемо

$$x_0 = 0,05 = C_1,$$

$$\dot{x}_0 = 0,2 = -hC_1 + \omega_1 C_2,$$

звідки  $C_1 = 0,05 \text{ м}$ ,  $C_2 = 0,047 \text{ м}$ .

Отже, закон руху поршня амортизатора набуває вигляду

$$x = e^{-8t} (0,05 \cos 12,69t + 0,047 \sin 12,69t).$$

Загальний розв'язок (7) можна записати у формі (11.27):

$$x = Ae^{-ht} \sin(\omega_1 t + \alpha),$$

де  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0,0688 \text{ м}$ ;  $\alpha = \arctg \frac{C_1}{C_2} = 0,816 \text{ рад}$ , тобто

$$x = 0,0688e^{-8t} \sin(12,69t + 0,816) \text{ м}.$$

З останнього виразу випливає, що поршень здійснює згасаючі коливання з періодом

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}} = 0,495 \text{ с}.$$

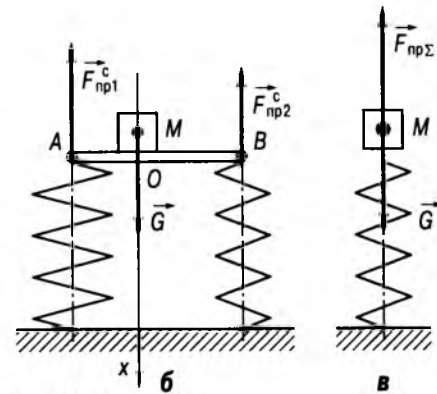
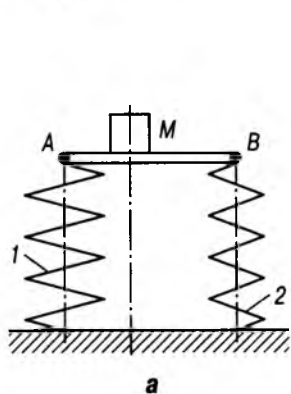


Рис. 11.19

**Приклад 11.12.** Тіло  $M$  вагою  $G = 39,24 \text{ Н}$ , встановлене на невагомому балку  $AB$ , здійснює вертикальний коливальний рух вздовж осі  $Ox$  (рис. 11.19, а). Балка утримується двома вертикальними пружинами 1 та 2 з коефіцієнтами жорсткості  $c_1 = 976 \text{ Н/м}$  та  $c_2 = 500 \text{ Н/м}$  відповідно. Довжина балки  $AB$  дорівнює  $2 \text{ м}$ . Визначити відстань від точки  $A$ , на якій треба розташувати тіло  $M$  на балці, щоб рух балки  $AB$  разом з тілом  $M$  вздовж осі  $Ox$  був поступальним. Визначити колову частоту вільних коливань тіла  $M$ .

**Розв'язування.** За об'єкт дослідження візьмемо тіло  $M$ . Замінімо сукупність двох пружин однією еквівалентною. Для цього розглянемо положення рівноваги тіла  $M$  і балки.

До тіла  $M$  з балкою прикладаються сила ваги  $\vec{G}$  та сили пружності  $\vec{F}_{\text{пр}1}$  та  $\vec{F}_{\text{пр}2}$ , які в стані рівноваги позначимо  $\vec{F}_{\text{пр}1}^c$  і  $\vec{F}_{\text{пр}2}^c$  (рис. 11.19, б). Для системи паралельних сил  $\vec{G}$ ,  $\vec{F}_{\text{пр}1}^c$ ,  $\vec{F}_{\text{пр}2}^c$  умова рівноваги має вигляд

$$\sum F_{ix} = G - F_{\text{пр}1}^c - F_{\text{пр}2}^c = 0, \quad (1)$$

$$\sum M_O(\vec{F}_i) = -F_{\text{пр}1}^c \cdot OA + F_{\text{пр}2}^c \cdot OB = 0. \quad (2)$$

Оскільки сила пружності пропорційна деформації, то

$$F_{\text{пр}1}^c = c_1 \Delta l_1, \quad F_{\text{пр}2}^c = c_2 \Delta l_2. \quad (3)$$

Умова рівноваги для еквівалентної схеми, яка зображена на рис. 11.19, в, записується так:

$$\sum F_{ix} = G - F_{\text{пр}\Sigma}^c = 0, \quad (4)$$

де  $F_{\text{пр}\Sigma}^c = c \Delta l$ ;  $c$  — коефіцієнт жорсткості еквівалентної пружини.

Порівнюючи співвідношення (1) та (4), маємо

$$F_{\text{пр}\Sigma}^c = F_{\text{пр}1}^c + F_{\text{пр}2}^c$$

або

$$c \Delta l = c_1 \Delta l_1 + c_2 \Delta l_2. \quad (5)$$

Еквівалентність схем 11.19, б та 11.19, в має місце, якщо деформації обох пружин однакові:  $\Delta l = \Delta l_1 = \Delta l_2$ . Поділивши вираз (5) на  $\Delta l$ , матимемо

$$c = c_1 + c_2. \quad (6)$$

Отже, при паралельному з'єднанні двох пружин коефіцієнт жорсткості еквівалентної пружини дорівнює сумі коефіцієнтів жорсткості даних пружин.

Для визначення положення тіла  $M$  на балці  $AB$ , при якому балка залишається горизонтальною, скористаємось рівнянням (2). У випадку однакових деформацій пружин 1 та 2 після ділення на  $\Delta l$  одержимо

$$-c_1 \cdot OA + c_2 \cdot OB = 0.$$

Звідси  $\frac{OA}{OB} = \frac{c_2}{c_1}$  або з урахуванням  $OA + OB = AB$ , матимемо  $OA = \frac{c_2}{c_1 + c_2} AB = 0,677 \text{ м}$ .

Колова частота вільних коливань тіла  $M$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{(c_1 + c_2)g}{G}} = 17 \text{ рад/с}.$$

**Приклад 11.13.** На гладкій похилій площині знаходиться в спокої тіло  $M$  масою  $m = 0,4 \text{ кг}$ . Воно прикріплене до верхнього кінця пружини з коефіцієнтом жорсткості  $c = 39,2 \text{ Н/м}$  (рис. 11.20, а). У деякий момент часу нижній кінець  $A$  пружини по-

чинає рухатись вздовж похилої площини за законом  $\xi = a \sin \omega t$ ,  $a = 4 \text{ см}$ ,  $\omega = 6 \text{ рад/с}$ . Знайти рівняння руху тіла  $M$ , якщо похила площина складає з горизонталлю кут  $\alpha = 30^\circ$ .

**Розв'язування.** Об'єкт дослідження даної задачі — тіло  $M$  — можна вважати матеріальною точкою, оскільки рух тіла прямолінійний і поступальний.

Введемо вісь  $Ox$ , напрямлену вздовж похилої площини вниз. Початок відліку — точка  $O$  — збігається з положенням статичної рівноваги тіла  $M$ , яке воно займає при нерухомому нижньому кінці пружини.

Зобразимо тіло  $M$  в поточному положенні на додатних значеннях координатної осі  $Ox$  і вважатимемо, що в даному положенні воно рухається у бік додатних значень координат. Положення нижнього кінця пружини в початковий момент часу позначимо на рисунку точкою  $A_0$ , а в поточний момент часу  $A'$ .

Визначимо сили, прикладені до тіла  $M$ . До тіла  $M$  прикладені сила ваги  $m\vec{g}$ , нормальна складова реакції похилої площини  $\vec{N}$  і сила пружності  $\vec{F}_{\text{пр}}$ . Оскільки пружина для вказаного положення тіла  $M$  стискається, сила пружності напрямлена вгору. Сила пружності

$$F_{\text{пр}} = c \cdot \Delta l, \quad (1)$$

де  $\Delta l$  — деформація пружини. Оскільки пружина стискається, визначимо її деформацію як різницю між довжиною в ненапруженому стані та поточною довжиною:  $\Delta l = l_0 - l$ .

Позначимо точкою  $B_0$  (рис. 11.20, б) положення верхнього кінця ненавантаженої пружини, тоді  $A_0 B_0 = l_0$ . Довжина відрізка  $B_0 O$  дорівнює статичній деформації, яка спричиняється дією сили ваги на тіло  $M$ , тобто  $B_0 O = \Delta l_{\text{ст}}$ . Відстань  $OM$  відповідає поточній координаті тіла  $M$ :  $x = OM$ . Зауважимо також, що відстань  $A_0 A'$  відповідає закону руху нижнього кінця пружини:

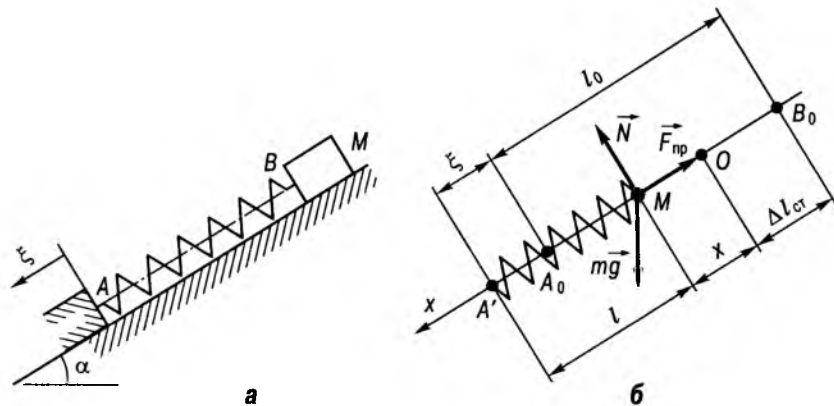


Рис. 11.20

$A_0 A' = \xi$ . Отже, на підставі рисунка можна записати

$$l_0 + \xi = l + x + \Delta l_{\text{ст}}.$$

Звідси

$$l_0 - l = x + \Delta l_{\text{ст}} - \xi.$$

Тоді вираз для сили пружності переписується так:

$$F_{\text{пр}} = c \cdot \Delta l = c(x + \Delta l_{\text{ст}} - \xi). \quad (2)$$

На підставі основного закону динаміки запишемо динамічне рівняння руху тіла  $M$ :

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha + F_{\text{пр}} + \vec{N}.$$

Спроекуємо це рівняння на вісь  $Ox$ :

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - F_{\text{пр}}$$

і підставимо в нього  $F_{\text{пр}}$  з виразу (2):

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - c(x + \Delta l_{\text{ст}} - \xi). \quad (3)$$

Спростимо рівняння (3), використавши умову статичної рівноваги тіла  $M$  на пружині при нерухомій точці  $A$ :

$$mg \sin \alpha - c\Delta l_{\text{ст}} = 0. \quad (4)$$

Звідси можна визначити статичне подовження пружини

$$\Delta l_{\text{ст}} = \frac{mg \sin \alpha}{c}. \quad (5)$$

Підставимо  $\Delta l$  з виразу (5) в рівняння (3) і поділимо на масу. Отримаємо

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \xi$$

або

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 a \sin \omega t, \quad (6)$$

де  $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$ .

Диференціальне рівняння (6) є диференціальним рівнянням змушених коливань, оскільки його права частина має періодичну функцію часу.

Загальний розв'язок цього неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами шукаємо як суму загального розв'язку відповідного однорідного рівняння у формі (11.19):

$$x_1 = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \quad (7)$$

та частинного розв'язку неоднорідного рівняння, форма якого залежить від співвідношення частоти вільних коливань  $\omega_0$  та частоти  $\omega$ .

У нашому випадку  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = 9,89$  рад/с, тобто не дорівнює  $\omega = 6$  рад/с. Тоді частинний розв'язок шукаємо у формі

$$x_2 = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t. \quad (8)$$

Оскільки частинний розв'язок має задовольняти відповідне диференціальне рівняння, підставимо  $x_2$  з виразу (8) у (6) і одержимо

$$-\omega^2 B_1 \cos \omega t - \omega^2 B_2 \sin \omega t + \omega_0^2 B_1 \cos \omega t + \omega_0^2 B_2 \sin \omega t = \omega_0^2 a \sin \omega t. \quad (9)$$

Зберемо коефіцієнти при  $\cos \omega t$  і  $\sin \omega t$  у лівій та правій частинах співвідношення (9):

$$-\omega^2 B_1 + \omega_0^2 B_1 = 0, \quad -\omega^2 B_2 + \omega_0^2 B_2 = \omega_0^2 a.$$

З цих рівнянь отримаємо

$$B_1 = 0, \quad B_2 = \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (6) має вигляд

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (10)$$

Для визначення сталих інтегрування  $C_1$  та  $C_2$  знайдемо похідну за часом від розв'язку (10):

$$\dot{x} = -\omega_0 C_1 \sin \omega_0 t + \omega_0 C_2 \cos \omega_0 t + \omega \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (11)$$

Оскільки тіло  $M$  в початковий момент часу перебувало в положенні статичної рівноваги і було нерухоме, маємо нульові початкові умови:

$$t_0 = 0, \quad x(t_0) = x_0 = 0,$$

$$\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 = 0.$$

Підставимо початкові умови у вирази (10) та (11):

$$0 = C_1, \quad 0 = \omega_0 C_2 + \omega \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Звідси  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = -\frac{\omega \omega_0 a}{\omega_0^2 - \omega^2}$ . Врахову-

ючи числові дані задачі, отримаємо

$$x = -3,83 \cdot 10^{-2} \sin 9,89t + 6,32 \cdot 10^{-2} \sin 6t, \text{ м.}$$

Перший доданок у отриманому розв'язку відповідає коливанням з частотою вільних коливань, другий доданок — змушеним коливанням тіла  $M$ .

### 11.2.3. Задачі для самостійного розв'язування

**11.15.** Диференціальне рівняння  $3\ddot{x} + 75x = 0$  описує горизонтальні коливання матеріальної точки. Визначити період коливань точки.

Відповідь:  $T = 1,25$  с.

**11.16.** Вантаж прикріплено до пружини жорсткістю 160 Н/м. Його період вільних вертикальних коливань  $T = \pi/2$  с. Визначити масу вантажу.

Відповідь: 10 кг.

**11.17.** Верхній кінець вертикальної пружини, коефіцієнт жорсткості якої 250 Н/м, закріплено нерухомо, а до нижнього прикріплено вантаж вагою 5 Н. Вантаж здійснює вертикальні коливання з амплітудою 3 см. Визначити швидкість, яку було надано вантажу у вертикальному напрямку в початковий момент часу з положення статичної рівноваги.

Відповідь: 0,66 м/с.

**11.18.** Пристрій для вимірювання ваги тіл складається з вертикально закріпленої пружини жорсткістю  $c$  та прикріпленої до її верхнього кінця пластини  $1$  вагою  $Q$  (рис. 11.21). Визначити закон руху пластини після зняття вантажу  $2$  вагою  $P$ , якщо до цього моменту вантаж з пластинкою перебували у стані спокою.

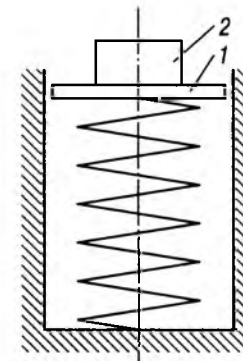


Рис. 11.21

Відповідь:  $x = \frac{P}{c} \cos \sqrt{\frac{cg}{Q}} t$ .

**11.19.** На пластину  $l$  пружинних вагів (рис. 11.21), які знаходяться у спокої, ставлять тягар  $2$  масою  $4$  кг. Визначити закон руху тягара з пластиною, якщо коефіцієнт жорсткості пружини дорівнює  $800$  Н/м, маса пластини  $1$  кг і опір рухові відсутній.

Відповідь:  $x = -0,049 \cos 12,64t$ , м.

**11.20.** Вантажний автомобіль має масу  $20$  т. Після завантаження  $24$  т вугілля автомобіль дає усадку  $7,5$  см. Визначити період вертикальних коливань автомобіля в двох випадках: без вантажу та з вантажем.

Відповідь:  $T_1 = 0,5$  с,  $T_2 = 0,74$  с.

**11.21.** Тіло масою  $2$  кг починає ковзати вздовж гладкої похилої площини зі стану спокою (рис. 11.22). Здолавши шлях  $1$  м, зустрічає пружину, коефіцієнт жорсткості якої дорівнює  $392$  Н/м. Знайти закон подальшого руху тіла, вважаючи, що воно від пружини не відокремлюється, а кут між похилою площиною та вертикаллю  $\alpha = 30^\circ$ . Початок відліку координатної осі взяти в положенні статичної рівноваги тіла з пружиною.

Відповідь:  $x = -0,043 \cos 14t + 0,29 \sin 14t$ , м.

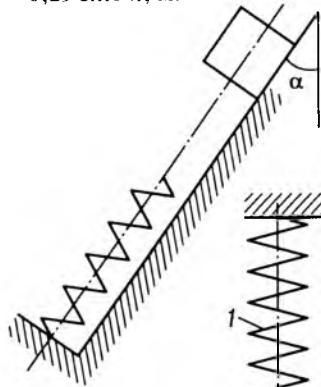


Рис. 11.22

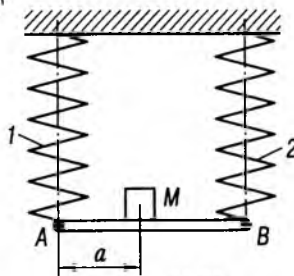


Рис. 11.23

**11.22.** На середину пружної балки, кінці якої закріплено, падає вантаж з висоти  $0,1$  м. Статичний прогин балки під дією вантажу

дорівнює  $10^{-3}$  м. Визначити рівняння руху вантажу разом з балкою, вважаючи силу пружності балки пропорційною прогину. Вісь координат напрямити вниз, початок відліку узяти в положенні статичної рівноваги балки. Масою балки знехтувати.

Відповідь:  $x = 1,42 \cdot 10^{-2} \sin(99t - 0,07)$ , м.

**11.23.** Однорідна жорстка балка  $AB$  вагою  $120$  Н завдовжки  $2,5$  м підвішена за допомогою двох вертикальних пружин  $1$  і  $2$ , коефіцієнти жорсткості яких відповідно дорівнюють  $240$  Н/м та  $360$  Н/м (рис. 11.23). На якій відстані  $a$  від точки  $A$  треба покласти на балку вантаж вагою  $60$  Н, щоб балка була горизонтальною? Визначити період вільних вертикальних коливань балки з вантажем.

Відповідь:  $a = 2$  м,  $T = 3,44$  с.

**11.24.** Тіло масою  $2$  кг прикріплено до нижнього кінця вертикальної пружини, коефіцієнт жорсткості якої дорівнює  $40$  Н/м (рис. 11.24). Знайти закон руху тіла, якщо під час руху виникає сила опору  $\vec{R} = -4\vec{v}$  (Н), де  $\vec{v}$  — швидкість тіла. У початковий момент часу пружина була стиснута на  $5$  см від положення статичної рівноваги.

Відповідь:  $x = -e^{-t} (5 \cdot 10^{-2} \times \cos 4,36t + 1,14 \cdot 10^{-2} \sin 4,36t)$ , м. Рис. 11.24



**11.25.** Диференціальне рівняння руху матеріальної точки має вигляд  $m\ddot{x} + 8\dot{x} + 4x = 0$ . З'ясувати, при яких значеннях маси точки її рух буде коливальним.

Відповідь:  $m > 4$ .

**11.26.** Визначити період та колову частоту згасаючих коливань матеріальної точки, якщо диференціальне рівняння її руху записується так:  $2\ddot{x} + 16\dot{x} + 50x = 0$ .

Відповідь:  $T = 1,68$  с,  $\omega_1 = 3,74$  рад/с.

**11.27.** Диференціальне рівняння руху матеріальної точки має вигляд  $4\ddot{x} + 2,8\dot{x} +$

$+ 68x = 0$ . Визначити декремент згасання коливального руху точки.

Відповідь:  $0,338$ .

**11.28.** Амплітуда згасаючих коливань тіла масою  $3$  кг після кожного максимального відхилення в один бік від центра коливань зменшується у  $2$  рази. Визначити коефіцієнт жорсткості пружини, якщо період згасаючих коливань дорівнює  $2$  с.

Відповідь:  $c = 29,96$  Н/м.

**11.29.** Визначити закон руху тіла, підвішеного на пружині, якщо воно долає опір середовища, пропорційний першому степеню швидкості. Опір дорівнює  $12$  Н при швидкості  $1$  м/с. В початковий момент часу пружина, коефіцієнт жорсткості якої дорівнює  $24$  Н/м, була розтягнена з положення рівноваги тіла на  $6$  см і відпущена без початкової швидкості. Маса тіла  $1,5$  кг.

Відповідь:  $x = e^{-4t} (0,06 + 0,24t)$ , м.

**11.30.** Тіло масою  $0,5$  кг, підвішене на двох послідовно з'єднаних пружинах з коефіцієнтами жорсткості  $398$  Н/м та  $130$  Н/м, рухається в рідині (рис. 11.25). Сила опору рухові тіла пропорційна першому степеню швидкості:  $R = \beta v$ , де  $\beta = 18$  Н·с/м.

Тілу надають поштовх у вертикальному напрямку, внаслідок чого воно набуває швидкості  $2$  м/с, напрямленої вниз. Визначити закон руху тіла відносно положення статичної рівноваги.

Відповідь:  $x = 8,84 \cdot 10^{-2} (e^{-6,69t} - e^{-29,31t})$ , м.

**11.31.** Тіло масою  $6$  кг, прикріплене до нижнього кінця вертикальної пружини з коефіцієнтом жорсткості  $216$  Н/м, здійснює вертикальні коливання під дією збурювальної сили  $Q = 18 \cos 4t$ , Н. Визначити амплітуду змущених коливань тіла.

Відповідь:  $0,15$  м.

**11.32.** Статичне подовження вертикальної пружини, до нижнього кінця якої прикріплено вантаж, дорівнює  $4,9$  см. Визна-

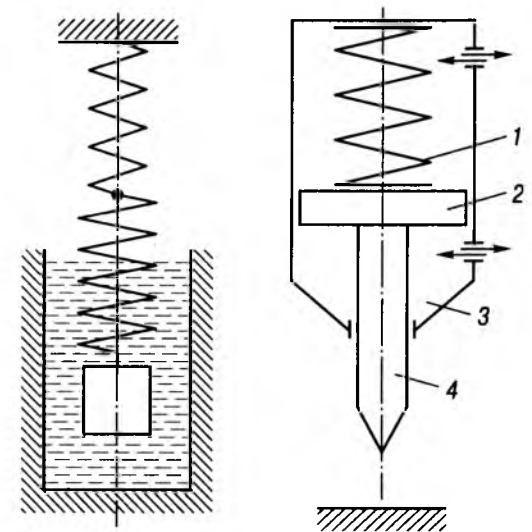


Рис. 11.25

Рис. 11.26

чити коефіцієнт динамічності, якщо до вантажу прикладається вертикальна збурювальна сила  $Q = 20 \cos 7t$ , Н.

Відповідь:  $1,32$ .

**11.33.** Пневматичний рубальний молоток складається з пружини  $1$ , з'єднаної з поршнем  $2$ , що рухається в камері  $3$  (рис. 11.26). У камеру поперемінно подається стиснуте повітря. Сила тиску повітря  $Q$  на поршень змінюється з часом:  $Q = 30 \cos 10\pi t$  Н. Визначити змущені коливання поршня, якщо він разом з бойком  $4$  важить  $10$  Н, а коефіцієнт жорсткості пружини дорівнює  $3000$  Н/м.

Відповідь:  $x = 1,5 \cdot 10^{-2} \cos 10\pi t$ , м.

**11.34.** На вантаж масою  $2$  кг, підвішений до вертикальної пружини, коефіцієнт жорсткості якої  $162$  Н/м, починає діяти вертикальна збурювальна сила  $Q = 24 \sin 4t$ , Н. Визначити закон руху вантажу, якщо в початковий момент часу він був нерухомий, а пружина розтягнена з положення статичної рівноваги на  $5$  см.

Відповідь:  $x = 5 \cdot 10^{-2} \cos 9t - 8,2 \cdot 10^{-2} \sin 9t + 1,8 \cdot 10^{-1} \sin 4t$ , м.

11.35. Матеріальна точка масою 0,5 кг, прикріплена до пружини з коефіцієнтом жорсткості 200 Н/м, виконує змушені коливання під дією сили  $Q = 15\sin 20t$ , Н, яка напрямлена вздовж осі  $Ox$  (рис. 11.27). Визначити закон руху точки, якщо в початковий момент часу пружина була не деформована, а точка перебувала у стані спокою. Опором рухові точки знехтувати.

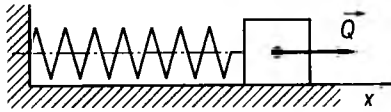


Рис. 11.27

Відповідь:  $x = -1,87 \cdot 10^{-2} \sin 20t - 3,75 \cdot 10^{-1} t \cos 20t$ , м.

11.36. Тіло масою 0,2 кг нерухомо висить на вертикальній пружині, коефіцієнт жорсткості якої дорівнює 115,2 Н/м. У деякий момент часу на тіло починає діяти збурювальна сила, яка змінюється за законом  $Q = 15\cos 22t$ , Н. Визначити закон та характер коливального руху тіла.

Відповідь:  $x = 0,3 \sin t \sin 23t$ , м; коливання мають характер биття.

11.37. До куліси  $B$  механізму, зображеного на рис. 11.28, прикріплено горизонтальну пружину, кінець якої з'єднано з тілом, вага котрого 200 Н. Тіло може ковзати вздовж гладкої горизонтальної площини. Визначити рівняння змушених коливань тіла, якщо коефіцієнт жорсткості пружини дорівнює 250 Н/м. Кривошип  $O_1A$  має довжину 0,1 м і обертається навколо горизонтальної осі, що проходить через точку  $O_1$ , з кутовою швидкістю 2 рад/с. Початок відліку осі  $Ox$  взяти в положенні рівноваги тіла при  $\varphi = 0$ .

Відповідь:  $x = 1,48 \cdot 10^{-1} \sin 2t$ , м.

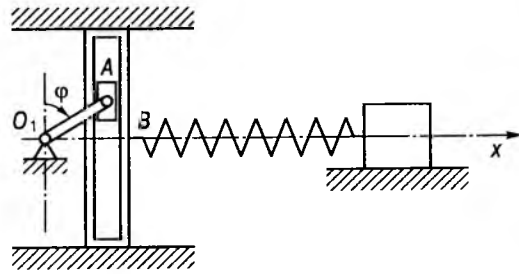


Рис. 11.28

11.38. Диференціальне рівняння руху матеріальної точки має вигляд  $2\ddot{x} + 44,72\dot{x} + 4000x = 60\sin 30t$ . Визначити амплітуду змушених коливань точки.

Відповідь:  $2,33 \cdot 10^{-2}$  м.

11.39. До тіла масою 5 кг, закріпленого на вертикальній пружині, коефіцієнт жорсткості якої дорівнює 2 кН/м, прикладається вертикальна збурювальна сила  $Q = 90\sin \omega t$ , Н. При русі тіла виникає сила опору  $R = \beta v$ , яка пропорційна першому степеню швидкості  $v$ , причому  $\beta = 30$  Н·с/м. Визначити колову частоту збурювальної сили, при якій амплітуда змушених коливань буде максимальною. Знайти значення цієї амплітуди.

Відповідь:  $\omega = 19,54$  рад/с,  $A = 0,15$  м.

11.40. Тіло масою 2 кг, яке прикріплено до нижнього кінця вертикальної пружини з коефіцієнтом жорсткості 392 Н/м, перебуває у стані спокою. У деякий момент часу на нього починає діяти вертикальна збурювальна сила  $Q = 20\cos 3\pi t$ , Н. Під час руху на тіло діє також сила опору  $R = \beta v$ , де  $v$  — швидкість тіла,  $\beta = 98$  Н·с/м. Визначити закон вертикального руху тіла. Початок відліку координатної осі  $Ox$  взяти в положенні статичної рівноваги тіла.

Відповідь:  $x = -1,01 \cdot 10^{-2} e^{-4,4t} + 5,34 \cdot 10^{-3} e^{-44,6t} + 2,11 \cdot 10^{-2} \cos(30\pi t - 1,34)$ , м.

## Розділ 12 ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ

### § 12.1. ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІЛЬКОСТІ РУХУ СИСТЕМИ МАТЕРІАЛЬНИХ ТОЧОК

#### 12.1.1. Короткі теоретичні відомості

Кількістю руху матеріальної точки  $\vec{q}$  (першою мірою механічного руху) називається вектор, який дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості:

$$\vec{q} = m\vec{v}. \quad (12.1)$$

Кількістю руху  $\vec{Q}$  системи матеріальних точок називається головний вектор (векторна сума) кількостей руху матеріальних точок, що входять у систему:

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^n \vec{q}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i. \quad (12.2)$$

**Теорема.** Кількість руху  $\vec{Q}$  абсолютно твердого тіла дорівнює добутку маси  $M$  тіла на швидкість його центра мас:

$$\vec{Q} = M\vec{v}_C. \quad (12.3)$$

**Теорема** про зміну кількості руху матеріальної точки в диференціальній формі. *Перша похідна за часом від кількості руху матеріальної точки дорівнює діючій на точку силі:*

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{F}. \quad (12.4)$$

**Теорема** про зміну кількості руху системи матеріальних точок у диференціальній формі. *Похідна за часом від кількості руху системи матеріальних точок (твердого тіла) дорівнює головному вектору зовнішніх сил, прикладених до точок системи (тіла):*

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e, \quad (12.5)$$

де  $\vec{F}^e = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e$ ;  $\vec{F}_i^e$  — зовнішні сили, прикладені до точок системи.

**Теорема** про зміну кількості руху матеріальної точки в інтегральній формі (теорема імпульсів). *Приріст кількості руху матеріальної точки за певний проміжок часу дорівнює імпульсу рівнодійної прикладених до точки сил за той самий проміжок часу:*

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{S}, \quad (12.6)$$

де  $\vec{v}_0, \vec{v}$  — початкова та кінцева швидкість

точки;  $\vec{S} = \int_{t_0}^t \vec{F}(\tau) d\tau$  — повний імпульс сили;

$d\vec{S} = \vec{F}(\tau) d\tau$  — елементарний імпульс сили.

**Теорема** про зміну кількості руху системи матеріальних точок в інтегральній формі (теорема імпульсів). *Приріст кількості руху системи матеріальних точок за деякий проміжок часу  $[t_0, t]$  дорівнює повному імпульсу головного вектора зовнішніх сил, прикладених до точок системи за той самий проміжок часу:*

$$\vec{Q}(t) - \vec{Q}(t_0) = \vec{S}^e, \quad (12.7)$$

де  $\vec{S}^e = \int_{t_0}^t \vec{F}^e d\tau = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e d\tau$  — повний імпульс

головного вектора зовнішніх сил;  $\vec{Q}(t_0)$  та  $\vec{Q}(t)$  — кількість руху системи матеріальних точок в початковий та кінцевий моменти часу.

**Закон збереження** кількості руху: якщо діюча сила  $\vec{F}$  або головний вектор зовнішніх сил  $\vec{F}^e$  (або проекція цих векторів на відповідну вісь) дорівнюють нулю, то кількість руху (її проекція на відповідну вісь) є сталою величиною:

$$\vec{q}(t) = \vec{q}(t_0) = \text{const},$$

$$\vec{Q}(t) = \vec{Q}(t_0) = \text{const},$$

$$Q_x(t) = Q_x(t_0) = \text{const}.$$

Теорему про зміну кількості руху або закон збереження кількості руху застосовують у випадках, коли до відомих і невідомих величин входять швидкості точок матеріальної системи (тіла), діючі на систему сили та час.

### 12.1.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 12.1.** Тіло спускається по похилій площині, яка з горизонтом складає кут  $\alpha$  (рис. 12.1). Через який час швидкість тіла збільшиться від  $v_0$  до  $v$ , якщо коефіцієнт тертя ковзання між тілом і площиною дорівнює  $f$  ( $\operatorname{tg} \alpha > f$ )?

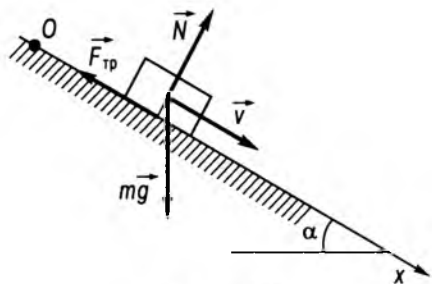


Рис. 12.1

Розв'язування. Позначимо сили, що діють на тіло: сила ваги тіла  $m\vec{g}$ ; сила тертя між тілом і площиною  $\vec{F}_{\text{тр}}$ . Згідно з означенням, сила тертя  $F_{\text{тр}} = fN$ , де  $\vec{N}$  — нормальна складова реакції поверхні площини. Згідно з рисунком  $N = mg \cos \alpha$ , тоді  $F_{\text{тр}} = fmg \cos \alpha$ . Спрямуємо вісь  $Ox$  паралельно площині спуску тіла і спроектуємо на неї співвідношення (12.7), що виражає теорему про зміну кількості руху. Маємо

$$Q_x - Q_{0x} = \int_0^t F_x^e dt,$$

або

$$Q_x - Q_{0x} = \int_0^t (mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha) dt.$$

Проекція головного вектора зовнішніх сил на вісь  $Ox$  складається з постійних величин. Після інтегрування, враховуючи визначення кількості руху, одержимо

$$mv - mv_0 = mg (\sin \alpha - f \cos \alpha) t.$$

Отже, звідси розв'язок задачі

$$t = \frac{v - v_0}{g (\sin \alpha - f \cos \alpha)}.$$

**Приклад 12.2.** Матеріальна точка вагою  $P = 1$  Н рухається рівномірно зі швидкістю  $v = 2$  м/с по колу (рис.12.2). Визначити імпульс сили, яка діє на точку за час, протягом якого вантаж проходить чверть кола.

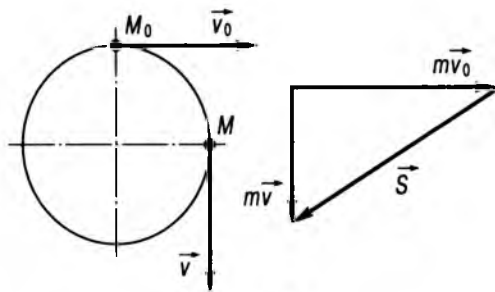
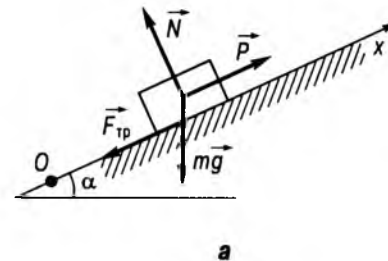


Рис. 12.2

Розв'язування. Згідно з теоремою імпульсів маємо  $\vec{S} = m\vec{v} - m\vec{v}_0$ . Будуючи геометричну різницю кількостей руху, знаходимо із отриманого прямокутного трикутника

$$S = m\sqrt{v_0^2 + v^2} = \frac{P}{g} v\sqrt{2} \approx 3 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

**Приклад 12.3.** Тілу маси  $m$  надана початкова швидкість  $v_0$ , спрямована вгору уздовж похилої площини, яка складає кут  $\alpha$  з горизонтом (рис.12.3, а). На тіло діє сила  $\vec{P}$ , спрямована в ту ж сторону. Знаючи закон зміни сили  $P = P(t)$  і коефіцієнт тертя ковзання  $f$ , визначити швидкість тіла в моменті часу  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  і перевірити одержаний результат для  $t_1$  за допомогою диференціального рівняння руху.



а

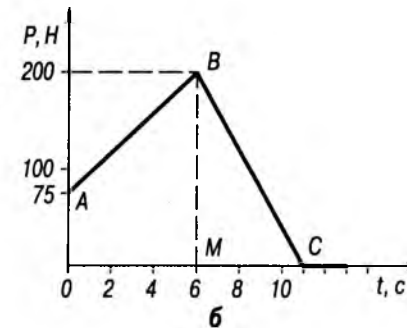


Рис. 12.3

Дано:  $m = 16$  кг,  $v_0 = 7,6$  м/с,  $t_1 = 6$  с,  $t_2 = 11$  с,  $t_3 = 13$  с,  $P(t=0) = P_0 = 75$  Н;  $P(t=t_1) = P_1 = 200$  Н;  $P(t=t_2) = P_2 = 0$ ;  $P(t=t_3) = P_3 = 0$ ;  $\alpha = 23^\circ$ ;  $f = 0,12$ .

Розв'язування. Встановлюємо сили, діючі на тіло: сила ваги  $m\vec{g}$ , нормальна складова реакції площини  $\vec{N}$ , змінна сила  $\vec{P}$  і сила тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$ . Тіло приймаємо за матеріальну точку. За теоремою про зміну кількості руху в проекціях на вісь  $Ox$

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum S_{ix},$$

де  $\sum S_{ix} = -mg \sin \alpha \cdot t_1 - F_{\text{тр}} t_1 + S_{Px}$ , причому  $F_{\text{тр}} = fmg \cos \alpha = 17,34$  Н, а  $mg \sin \alpha = 61,32$  Н.

Проекція імпульсу змінної сили  $P$  за час  $t_1$   $S_{Px} = \int_0^{t_1} P dt$ . Цей інтеграл визначаємо як площу фігури  $OABM$  (рис.12.3, б) на графіку  $P = P(t)$ :

$$S_{Px} = \frac{1}{2} (75 + 200) 6 = 825 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Тоді

$$mv_{1x} - mv_{0x} = -(17,34 + 61,32) 6 + 825 = 353,04 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Звідси  $v_{1x} = \frac{353,04 + 16 \cdot 7,6}{16} = 29,665$  м/с.

Перевіримо одержане значення  $v_{1x}$  за допомогою диференціального рівняння

руху. На відрізку  $AB$  закон зміни сили  $P(t)$  можна записати у вигляді  $P(t) = 75 + \frac{125}{6} t$  ( $P_0 = 75$ ,  $P_1 = 200$ ). Рівняння руху має вигляд

$$m\ddot{x} = -mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} + P(t)$$

або  $\ddot{x} = -0,22875 + 1,302t$ . Інтегруючи, запишемо перший інтеграл

$$\dot{x} = -0,22875t + 1,302 \frac{t^2}{2} + C_1$$

та другий інтеграл

$$x = -0,22875 \frac{t^2}{2} + 0,651 \frac{t^3}{3} + C_1 t + C_2.$$

З початкових умов знаходимо сталі інтегрування  $C_1$  і  $C_2$ . Враховуючи, що  $x(t=0) = 0$  та  $\dot{x}(t=0) = v_0$ , отримуємо  $C_2 = 0$  та  $C_1 = v_0 = 7,6$ .

Закон руху буде такий:  $x = 0,217 t^3 - 0,11438 t^2 + 7,6 t$ . Відповідно швидкість  $v = \dot{x} = 0,651 t^2 - 0,22875 t + 7,6$ . Тоді

$$v(t=6 \text{ с}) = -0,22875 \cdot 6 + 0,651 \cdot 36 + 7,6 = 29,663 \text{ м/с}.$$

Як бачимо, результати, одержані двома способами, збігаються.

Перевіримо, чи існує такий момент часу, при якому швидкість дорівнюватиме нулю. За теоремою про зміну кількості руху складемо рівняння для проміжку часу від 0 до  $t^*$  (при  $t^*$  швидкість  $v_x = 0$ ):



$$mv_x - mv_{0x} = -mg \sin \alpha \cdot t^* - fmg \cos \alpha \cdot t^* + S_{Px},$$

$$S_{Px} = \int_0^{t^*} (75 + \frac{125}{6}t) dt = 75t^* + \frac{125}{12}(t^*)^2.$$

Опускаючи зірочку і підставляючи числові значення, одержимо квадратне рівняння відносно часу  $t$ :

$$10,417t^2 - 3,66t + 112,96 = 0$$

або  $t^2 - 0,351t + 10,844 = 0$ , яке дійсних коренів не має. Отже, на проміжку часу  $(0, t_1)$  швидкість тіла стати рівною нулю не може.

Для визначення швидкості тіла в момент часу  $t_2$  за теоремою про зміну кількості руху складаємо рівняння для проміжку часу  $(t_1, t_2)$ .

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \sum S_{ix},$$

$$\text{де } \sum S_{ix} = -mg \sin \alpha (t_2 - t_1) - fmg \cos \alpha (t_2 - t_1) + S_{Px};$$

$$S_{Px} = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt; P(t) = -40t + 440 -$$

рівняння прямої  $BC$ , яка проходить через точки  $B$  і  $C$ :

$$S_{Px} = \int_6^{11} (-40t + 440) dt = (-20t^2 + 440t) \Big|_6^{11} =$$

$$= 500 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Проекцію імпульсу  $P(t)$  за час  $(t_1, t_2)$  знаходимо як площу трикутника  $MBC$  на графіку  $P(t)$ :

$$S_{Px} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 200 = 500 \text{ Н} \cdot \text{с},$$

$$v_{2x} = \frac{1}{m} (\sum S_{ix} + mv_{1x}) = \frac{1}{16} [16 \cdot 29,665 +$$

$$+ 500 - (61,32 + 17,34) \cdot 5] = 36,33 \text{ м/с}.$$

Одержаний результат має місце, якщо тіло на проміжку часу  $(t_1, t_2)$  не змінює напрямку своєї початкової швидкості і сила

тертя ковзання направлена протягом проміжку часу  $(t_1, t_2)$  вниз по похилій площині:

$$S_{Px} = \int_6^{11} (-40t + 440) dt = -20t^2 + 440t - 1920.$$

При зміні напрямку руху швидкість повинна дорівнювати нулю:

$$mv_{2x} = 0 = mv_{1x} - mg \sin \alpha \cdot (t - t_1) - fmg \cos \alpha \cdot (t - t_1) - 20t^2 + 440t - 1920 =$$

$$= -20t^2 + 361,34t - 1052,06 = 0$$

$$\text{або } t^2 - 18,067t + 52,6 = 0.$$

Розв'язками рівняння є  $\tau_1 = 14,33 \text{ с}$ ,  $\tau_2 = 3,67 \text{ с}$ , які задовольняють умовам  $\tau_1 > 11 \text{ с}$ ;  $\tau_2 < 6 \text{ с}$ ; отже, в проміжку часу  $(t_1 = 6 \text{ с}; t_2 = 11 \text{ с})$  зміни швидкості не буде.

Вираз теореми про зміну кількості руху, складений для проміжку часу  $(t_1, t_2)$ , дає можливість визначити швидкість  $v_3$  тіла в момент часу  $t_3$ :

$$v_3 = \frac{1}{m} (mv_{2x} + \sum S_{ix}).$$

Оскільки  $P(t) = 0$  для проміжку часу  $(t_1, t_2)$ , то  $S_{Px} = 0$ . Тоді маємо

$$\sum S_{ix} = -(mg \sin \alpha + fmg \cos \alpha)(t_3 - t_2).$$

Звідси

$$v_3 = \frac{1}{16} (16 \cdot 36,33 - 78,66 \cdot 2) = 26,47 \text{ м/с}.$$

**Приклад 12.4.** На горизонтальній платформі вагою  $\bar{P}_1$  встановлено похилу площину  $AB$ , яка утворює з горизонтом кут  $\alpha$  (рис.12.4). По цій площині за допомогою лебідки піднімається вантаж  $C$  вагою  $\bar{P}_2$  так, що відстань  $AC$  змінюється за законом

$s = \frac{1}{2} at^2$ . У початковий момент система знаходиться в стані спокою. Визначити швидкість, з якою буде рухатися платформа. Опором рухові платформи знехтувати.

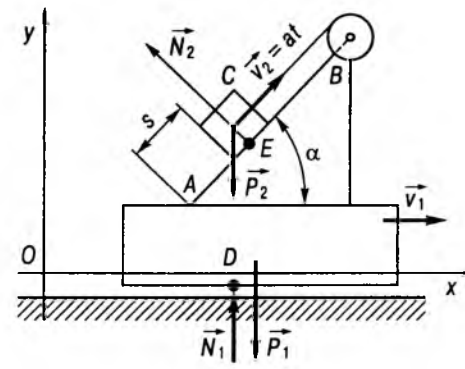


Рис. 12.4

Розв'язування. Механічна система складається з двох тіл: платформи і рухомого вантажу  $C$ . Зовнішніми силами, прикладеними до цієї системи, є вага платформи  $\bar{P}_1$ , вага вантажу  $\bar{P}_2$ , нормальні реакції  $\bar{N}_1$  і  $\bar{N}_2$  опорної площини в точках  $D$  і  $E$ . Оскільки всі сили вертикальні, то сума їх проекцій на горизонтальну вісь  $Ox$  дорівнює нулю,

тобто  $\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$ . Тому, враховуючи, що в

початковий момент часу система нерухома, і застосовуючи теорему імпульсів, дістанемо

$$\frac{P_1}{g} v_{1x} + \frac{P_2}{g} v_{2x} = 0,$$

де  $v_{1x}, v_{2x}$  — проекції на вісь  $Ox$  абсолютних швидкостей платформи і вантажу. Нехай швидкість платформи дорівнює  $\bar{v}_1$ , тоді  $v_{1x} = \bar{v}_1$ ,  $v_{2x} = v_1 + at \cos \alpha$ . Отже,

$$\frac{P_1}{g} v_1 + \frac{P_2}{g} (v_1 + at \cos \alpha) = 0.$$

Звідси знаходимо

$$v_1 = -\frac{P_2}{P_1 + P_2} at \cos \alpha.$$

Знак “-” вказує на те, що платформа буде переміщуватися вліво.

**Приклад 12.5.** Вантаж вагою  $P = 3 \text{ кН}$  ковзає вниз по нахиленій естакаді, яка вільно лежить на горизонтальній поверхні (рис.12.5). Вага естакади  $Q = 2 \text{ кН}$ , коефіцієнт тертя ковзання між вантажем і естакадою  $f = 0,2$ , кут нахилу  $\alpha = 30^\circ$ . Визначити, за яких умов естакада залишиться нерухою.

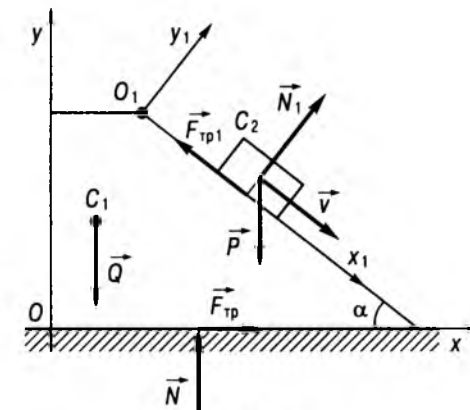


Рис. 12.5

Розв'язування. Естакада буде в стані спокою доти, поки сила тертя  $\bar{F}_{\text{тр}}$  між поверхнею і естакадою не досягне свого граничного значення, рівного  $f_0 N$ , де  $f_0$  — коефіцієнт тертя спокою естакади, а  $N$  — нормальна складова реакції поверхні. Для визначення нормальної складової реакції і сили тертя розглянемо систему, яка складається із вантажу та естакади. На цю систему діють такі сили: сила ваги вантажу  $\bar{P}$ , сила ваги естакади  $\bar{Q}$ , нормальна складова  $\bar{N}$  реакції опорної поверхні і сила тертя  $\bar{F}_{\text{тр}}$  між поверхнею і естакадою (рис.12.5).

Проекцію кількості руху системи при нерухомій естакаді на координатні осі  $Ox$  і  $Oy$

$$Q_x = \frac{P}{g} v \cos \alpha, Q_y = -\frac{P}{g} v \sin \alpha,$$

де  $v$  — швидкість вантажу.

Застосуємо теорему про зміну кількості руху системи в диференціальній формі.

Отримаємо

$$\frac{P}{g} \cos \alpha \frac{dv}{dt} = F_{\text{тр}}; \quad -\frac{P}{g} \frac{dv}{dt} \sin \alpha = -Q - P + N.$$

Звідси нормальна складова реакції опорної поверхні

$$N = Q + P - \frac{P}{g} \sin \alpha \frac{dv}{dt}.$$

Естакада буде знаходитися в стані спокою, якщо сила тертя не перевищуватиме свого граничного значення  $f_0 N$ , тобто  $f_0 N > F_{\text{тр}}$ . Із отриманих співвідношень матимемо

$$\frac{P}{g} \frac{dv}{dt} \cos \alpha < f_0 \left( Q + P - \frac{P}{g} \frac{dv}{dt} \sin \alpha \right),$$

або

$$f_0 > \frac{P \cdot \frac{dv}{dt} \cos \alpha}{g \left( Q + P - \frac{P}{g} \frac{dv}{dt} \sin \alpha \right)}.$$

Для остаточного розв'язку задачі необхідно визначити прискорення вантажу  $\frac{dv}{dt}$ . Розглянемо рух одного вантажу, на який діють сила ваги  $\vec{P}$ , нормальна складова реакції естакади  $\vec{N}_1$  і сила тертя  $\vec{F}_{\text{тр}1}$ , яка за модулем дорівнює  $f N_1$ . Складемо диференціальні рівняння руху вантажу у проєкціях на осі  $O_1 x_1$  і  $O_1 y_1$ :

$$\frac{P}{g} \frac{dv}{dt} = P \sin \alpha - F_{\text{тр}1}, \quad 0 = N_1 - P \cos \alpha.$$

З другого рівняння знаходимо  $N_1 = P \cos \alpha$ ; отже,  $F_{\text{тр}1} = f N_1 = f P \cos \alpha$ . З першого рівняння маємо  $\frac{dv}{dt} = (\sin \alpha - f \cos \alpha) g$ . Після підстановки в нерівність для  $f_0$  виразу  $\frac{dv}{dt}$  визначаємо

$$f_0 > \frac{P(\sin \alpha - f \cos \alpha) \cos \alpha}{Q + P \cos \alpha (\cos \alpha + f \sin \alpha)}.$$

Цій умові має задовольнити  $f_0$ , щоб естакада не почала рухатися. Підставивши дані умови задачі, дістанемо  $f_0 > 0,19$ .

**Приклад 12.6.** Теплохід масою  $m$  під час зупинки двигунів має швидкість  $v_0$ . Внаслідок опору води його швидкість зменшується. Визначити, через який час швидкість теплохода зменшиться вдвічі, якщо сила опору змінюється пропорційно швидкості, причому коефіцієнт пропорційності дорівнює  $\mu$ .

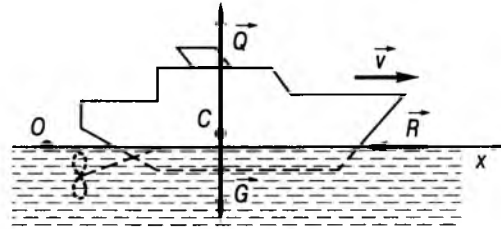


Рис. 12.6

Розв'язування. На рис.12.6 показано сили, що діють на теплохід:  $\vec{G}$  — сила ваги,  $\vec{Q}$  — архімедова сила і  $\vec{R}$  — сила опору води руху судна (точка  $C$  — центр ваги теплохода). Спрямувавши вісь  $Ox$  у напрямку руху теплохода, бачимо, що елементарний імпульс  $\vec{R} dt$  опору води напрямлений в бік, протилежний диференціалу кількості руху, тому проєкція на горизонтальну вісь векторної рівності  $d(m\vec{v}) = \vec{R} dt$  дорівнюватиме  $d(mv) = -R dt$ . Відомо, що силу опору можна подати так:  $R = \mu v$ , тому  $d(mv) = -\mu v dt$ . Поділивши обидві частини рівності на добуток  $mv$ , одержимо

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m} dt.$$

Зінтегрувавши ліву частину цього співвідношення в інтервалі від  $v_0$  до  $v_1$ , а праву — відповідно цьому інтервалу проміжку часу від 0 до  $t$ , матимемо

$$\ln v \Big|_{v_0}^{v_1} = -\frac{\mu}{m} t \quad \text{або} \quad \ln \frac{v_1}{v_0} = -\frac{\mu}{m} t.$$

Оскільки за умовою  $v_1 = \frac{v_0}{2}$ , маємо  $-\frac{\mu}{m} t = \ln \frac{v_0}{2v_0} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$ , звідки  $t = \frac{m}{\mu} \ln 2$ .

**Приклад 12.7.** Швидкість судна водотоннажністю  $m = 25\,000$  кг за час  $t = 50$  с після припинення роботи турбіни зменшилась на 5 вузлів. Визначити середню силу опору води, вважаючи рух корабля прямолінійним (вузол — одиниця швидкості, яка дорівнює 1 милі за годину, або 0,5144 м/с).

Розв'язування. Розглянемо корабель як матеріальну точку, що рухається вздовж осі  $Ox$ . За теоремою імпульсів

$$m(v_x - v_{0x}) = \int_0^t F_x dt = F_{\text{хсп}} t,$$

звідки

$$F_{\text{хсп}} = \frac{m(v_x - v_{0x})}{t} = \frac{-25\,000 \cdot 5 \cdot 0,514}{50} = -1285 \text{ кН}.$$

### 12.1.3. Задачі для самостійного розв'язування

**12.1.** Тіло  $A$  (рис.12.7), розмірами якого можна знехтувати, рухалося вздовж ділянки шляху  $BC$ . В кінці цієї ділянки воно набуло горизонтальної швидкості 15 м/с. Потім його рух по траєкторії  $CD$  був вільним протягом 2,04 с. Визначити модуль і напрямки швидкості тіла в кінці ділянки  $CD$ .

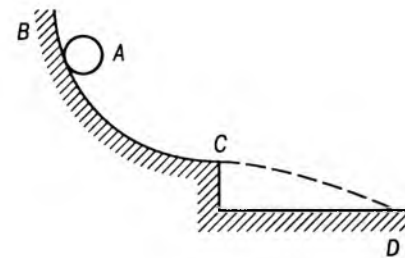


Рис. 12.7

Відповідь:  $v = 25$  м/с. Кут нахилу швидкості до горизонту  $\alpha = 53^\circ 10'$ .

**12.2.** Камінь кинуто вертикально вгору з початковою швидкістю 29,4 м/с. Визначити час, протягом якого швидкість каменя за модулем зменшиться вдвічі. Через скільки

секунд швидкість дорівнюватиме нулю? Опором повітря знехтувати.

Відповідь:  $t_1 = 1,5$  с;  $t_2 = 4,5$  с;  $t = 3$  с.

**12.3.** Тіло  $A$  (рис.12.8) ковзає вздовж площини, нахиленої під кутом  $\alpha$  до горизонту, потім падає з неї зі швидкістю  $v_0$  і деякий час перебуває в стані вільного падіння. Визначити швидкість тіла в момент, коли вона напрямлена під кутом  $\beta$  до горизонту, і час, що минув до цього моменту.

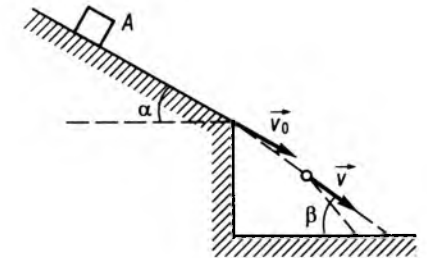


Рис. 12.8

Відповідь:  $v_1 = v_0 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$ ;  $t = \frac{v_0}{g} \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos \beta}$ .

**12.4.** Важка точка розміщена на похилій площині I з кутом нахилу  $\alpha_1$  і відпускається без початкової швидкості. Спустившись донизу, вона піднімається по похилій площині II з кутом нахилу  $\alpha_2$  (рис.12.9). За відомим часом спуску  $t_1$  визначити час підйому  $t_2$ , нехтуючи тертям.



Рис. 12.9

Відповідь:  $t_2 = t_1 \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$ .

**12.5.** До бічної грані призми  $A$  (рис.12.10), вага якої  $Q$ , прикріплено однорідний стрижень  $OB$  вагою  $P$  завдовжки  $l$ . Стрижень обертається навколо осі  $O$  з кутовою швид-

кістю  $\omega$ . Нехтуючи тертям призми по горизонтальній площині, визначити залежність її швидкості від кута повороту  $\varphi$ .

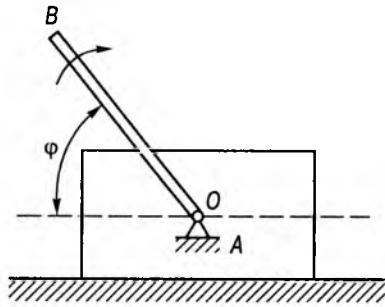


Рис. 12.10

Відповідь:  $v = \frac{P\omega l \sin \varphi}{2(P+Q)}$ .

12.6. До візка А масою М підвішено маятник, який коливається за законом  $\varphi = \varphi_0 \sin kt$  (рис.12.11). Визначити рівняння руху візка, якщо маса маятника  $m$ , а довжина стрижня маятника  $l$ . Тертям ковзання і масою стрижня знехтувати. В початковий момент візок був нерухомим. Визначити також тиск  $N$  візка на горизонтальний фундамент.

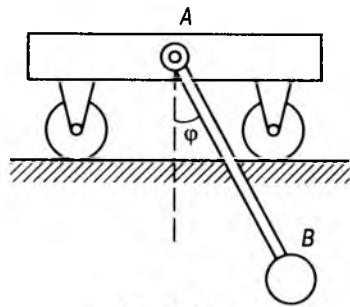


Рис. 12.11

Відповідь:  $x = \frac{ml[k\varphi_0 t - \sin(\varphi_0 \sin kt)]}{M+m}$ ;  
 $N = (M+m)g + ml\varphi_0 k^2 [\cos(\varphi_0 \sin kt)\varphi_0 \cos^2 kt - \sin(\varphi_0 \sin kt)\sin kt]$ .

12.7. Тіло ковзає вздовж площини, нахиленої під кутом  $\alpha$  до горизонту. Визначити, через який час швидкість тіла збільшиться від  $v_1$  до  $v_2$ , якщо коефіцієнт тертя об похилу площину дорівнює  $f$ .

Відповідь:  $t = \frac{v_2 - v_1}{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)}$ .

12.8. Людина масою  $m$  рухається по човну, маса якого  $M$ , з відносною швидкістю  $u$ . Визначити швидкість човна в залежності від часу, вважаючи опір води сталим і рівним  $R$ . У початковий момент людина і човен були нерухомі.

Відповідь:  $v = \frac{mu - Rt}{m + M}$ .

12.9. Кривошип  $OA$  вагою  $P_1$  і довжиною  $a$  (рис.12.12) обертається з кутовою швидкістю  $\omega_0$  навколо осі  $O$  і приводить у рух шатун  $AB$  вагою  $P_2$  і повзун  $B$  вагою  $P_3$ . Визначити кількість руху механізму у випадках, коли кривошип  $OA$ :

- 1) перпендикулярний до прямої  $OB$ ;
- 2) напрямлений вздовж  $OB$ .

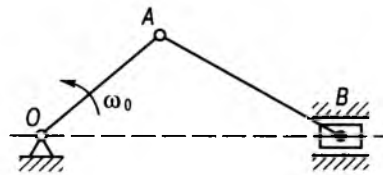


Рис. 12.12

Відповідь:  $Q_1 = \frac{a\omega_0}{2g}(P_1 + 2P_2 + 2P_3)$ ;  
 $Q_2 = \frac{a\omega_0}{2g}(P_1 + P_2)$ .

12.10. Моторний човен масою 400 кг, рухаючись по річці, набуває сталої швидкості 7 м/с. Після натягання каната слідом за човном зі стану спокою починає рухатися пліт масою 720 кг. Вважаючи, що рушійна сила і сила опору зрівноважуються, визначити швидкість, з якою човен і пліт продовжують рухатися разом.

Відповідь:  $v = 2,5$  м/с.

## §12.2. ТЕОРЕМА ПРО РУХ ЦЕНТРА МАС МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

### 12.2.1. Короткі теоретичні відомості

Центром мас (центром інерції) системи матеріальних точок називається геометрична точка простору  $C$ , яка характеризує розподіл маси в системі і положення якої визначається радіусом-вектором

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m} \quad (12.8)$$

або координатами

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{m}, \quad (12.9)$$

де  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  — маса системи;  $x_i, y_i, z_i$  — координати  $i$ -ї точки в прямокутній декартовій системі координат  $Oxyz$ .

**Теорема.** Центр мас системи матеріальних точок рухається як вільна матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи і на яку діє сила, що дорівнює головному вектору зовнішніх сил:

$$m\vec{w}_C = \vec{F}^e, \quad (12.10)$$

де  $\vec{w}_C$  — прискорення центра мас;  $\vec{F}^e = \{F_x^e, F_y^e, F_z^e\}$  — головний вектор зовнішніх сил, причому

$$F_x^e = \sum_{i=1}^n F_{ix}^e, \quad F_y^e = \sum_{i=1}^n F_{iy}^e, \quad F_z^e = \sum_{i=1}^n F_{iz}^e.$$

У координатній формі вираз (12.10) набуває вигляду

$$m\ddot{x}_C = F_x^e, \quad m\ddot{y}_C = F_y^e, \quad m\ddot{z}_C = F_z^e. \quad (12.11)$$

Співвідношення (12.11) є диференціальними рівняннями руху центра мас системи в проекціях на осі декартової системи координат. Відсутність внутрішніх сил у наведе-

них диференціальних рівняннях дає можливість зробити висновок, що внутрішні сили безпосередньо не впливають на рух центра мас, але внутрішні сили в ряді випадків є причиною появи зовнішніх сил, прикладених до точок системи. Так, внутрішні сили, які приводять в обертальний рух ведуче колесо локомотива, викликають дію на нього зовнішньої сили зчеплення з рейкою. Ця сила прикладається до обох колес. У змінюваній системі матеріальних точок внутрішні сили, викликаючи їх рух, змінюють їх взаємне розташування, не змінюючи положення центра мас системи.

З теореми про рух центра мас матеріальної системи можна зробити такі висновки:

1) самі по собі внутрішні сили не можуть змінити руху центра мас матеріальної системи;

2) пара сил, яка прикладена до матеріальної системи (твердого тіла), не може змінити руху її центра мас (вона може спричинити тільки обертальний рух тіла);

3) якщо головний вектор зовнішніх сил

дорівнює нулю, тобто  $m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = 0$ , то маємо

$\vec{v}_C = \vec{v}_{C0} = \text{const}$ . Це означає, що центр мас матеріальної системи рухається рівномірно і прямолінійно. Ця теза може бути поширена на проекцію головного вектора зовнішніх сил на деяку вісь і відповідно на рух системи відносно цієї осі. Якщо до того ж у початковий момент часу швидкість руху центра мас дорівнювала нулю, то центр мас зберігає своє положення. Аналогічні властивості має і проекція положення центра мас на певну вісь.

### 12.2.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 12.8.** Горизонтальний поршневий двигун розміщений без кріплення на горизонтальній гладкій площині (рис. 12.13). Кривошип  $OA$  завдовжки  $r$  обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega_0$ . Вважаючи довжину

шатуна рівною довжині кривошипа, а маси рухомих частин зведеними до двох мас  $m_1$  і  $m_2$ , зосереджених у пальці кривошипа і в центрі поршня, визначити горизонтальний рух корпусу двигуна, якщо його маса дорівнює  $m_3$ . У початковий момент поршень займав крайнє ліве положення, а корпус перебував у стані спокою.

**Розв'язування.** Розглянемо двигун як систему, що складається з кривошипа та шатуна зі зведеною масою  $m_1$ , поршня масою  $m_2$  і корпусу двигуна масою  $m_3$ . На неї діють зовнішні сили:  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$  — сили ваги;  $\vec{N}$  — нормальна реакція поверхні гладкого фундаменту. Оскільки потрібно знайти горизонтальний рух корпусу, скористаємося теоремою про проекції руху центра мас матеріальної системи на горизонтальний напрям:

$$m\ddot{x}_C = F_x^e. \quad (1)$$

Тут  $m = m_1 + m_2 + m_3$  — маса двигуна.

Нехай  $x_1, x_2, x_3$  — абсциси центрів мас частин системи в довільний момент часу  $t$ . Тоді абсциса центра мас  $C$  усієї системи

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m}. \quad (2)$$

Виразимо усі абсциси через величину  $x_3$ , отримаємо

$$x_1 = x_3 + l - r \cos \varphi; \quad x_2 = x_3 + l - 2r \cos \varphi; \quad \varphi = \omega t, \quad (3)$$

де  $l = \text{const}$  — різниця абсцис точки  $O$  і центра мас корпусу двигуна точки  $C_3$ . Підставивши ці абсциси у формулу (2), одержимо

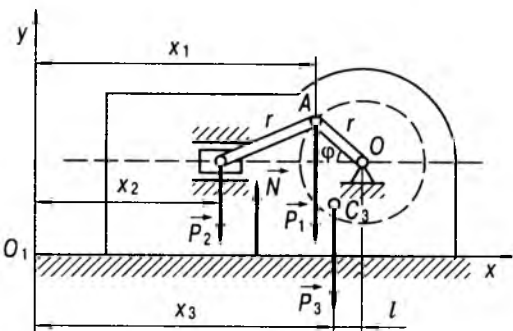


Рис. 12.13

$$\begin{aligned} x_C &= [(m_1 + m_2 + m_3)x_3 + m_1 l + \\ &+ m_2 l - m_1 r \cos \omega t - 2m_2 r \cos \omega t] / m = \\ &= x_3 + (m_1 + m_2)l / m - (m_1 + 2m_2)r / m \cos \omega t. \end{aligned}$$

Здиференціювавши  $x_C$  два рази за часом і підставивши в (1), будемо мати диференціальне рівняння руху центра мас корпусу двигуна

$$m\ddot{x}_3 = F_x^e - (m_1 + 2m_2)r\omega^2 \cos \omega t. \quad (4)$$

У цій задачі  $F_x^e = 0$ , тому що при вібрних осях всі зовнішні сили паралельні осі  $O_1y$ . Рівняння (4) можна записати у вигляді

$$\ddot{x}_3 = -\frac{(m_1 + 2m_2)r\omega^2}{m_1 + m_2 + m_3} \cos \omega t,$$

після інтегрування якого знаходимо

$$\dot{x}_3 = -\frac{(m_1 + 2m_2)r\omega \sin \omega t}{m_1 + m_2 + m_3} + C_1,$$

$$x_3 = \frac{(m_1 + 2m_2)r \cos \omega t}{m_1 + m_2 + m_3} + C_1 t + C_2.$$

Враховуючи початкові умови руху корпусу ( $x_3(0) = x_3^0, \dot{x}_3(0) = 0$ ), одержимо

$$C_1 = 0, \quad C_2 = x_3^0 - \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + m_2 + m_3} r,$$

де  $x_3^0$  — початкова абсциса корпусу двигуна, тому

$$x_3 = x_3^0 - \frac{(m_1 + 2m_2)r}{m_1 + m_2 + m_3} (1 - \cos \omega t).$$

Це рівняння є рівнянням руху корпусу двигуна. Він буде здійснювати гармонічні коливання з амплітудою  $a = \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + m_2 + m_3} r$  і круговою частотою  $\omega$ .

**Приклад 12.9.** Кривошип  $AB$  завдовжки  $r$  вагою  $P$ , який обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ , приводить в рух кулісу і зв'язаний з нею поршень  $D$ , загальна вага яких також дорівнює  $P$  (рис.12.14). На поршень при його русі діє постійна сила  $Q$ .

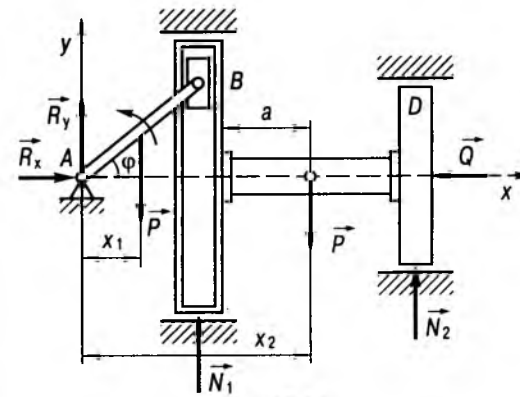


Рис. 12.14

Нехтуючи тертям, знайти найбільший горизонтальний тиск на вісь  $A$  кривошипа.

**Розв'язування.** Для того, щоб виключити сили, які обертають кривошип, і тиск на нього з боку куліси, розглянемо горизонтальний рух усієї системи вздовж осі  $Ax$ . Тоді за теоремою про рух центра мас системи, якщо позначити горизонтальну реакцію осі  $A$  через  $R_x$ , матимемо

$$m \frac{d^2 x_C}{dt^2} = R_x - Q. \quad (1)$$

Враховуючи вирази (12.9), після їх подвійного диференціювання можна записати

$$m\ddot{x}_C = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2. \quad (2)$$

У нашому випадку  $m_1 = \frac{P}{g}, x_1 = \frac{r}{2} \cos \varphi,$

$$m_2 = \frac{P}{g}, \quad x_2 = a + r \cos \varphi, \quad \varphi = \omega t.$$

Скориставшись формулами (1) і (2), запишемо

$$R_x = Q + m \frac{d^2 x_C}{dt^2} = Q - \frac{r\omega^2}{g} \left( \frac{P}{2} + P \right) \cos \omega t. \quad (4)$$

Горизонтальна сила тиску, прикладена до осі обертання кривошипа, напрямлена протилежно реакції  $R_x$  і дорівнює за модулем  $|R_x|$ . Тиск буде максимальним, коли  $\varphi = 180^\circ$ ,

$$R_{x \max} = Q + \frac{r\omega^2}{g} \left( \frac{P}{2} + P \right).$$

**12.10.** Машина для кування металу приводиться в дію кривошипно-шатунним механізмом  $OAB$  (рис.12.15, а). Визначити тиск машини на фундамент при обертанні кривошипа, якщо маса станини з ковалдом  $D$  дорівнює  $m_1$ , маса кривошипа довжини  $r$  дорівнює  $m_2$ , маса молота  $3$  дорівнює  $m_3$ . Кривошип  $OA$  вважати однорідним стрижнем. Кривошип, який обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  проти ходу годинникової стрілки, в початковий момент часу займав вертикальне нижнє положення. Масою шатуна  $AB$  завдовжки  $l$  нехтувати.

**Розв'язування.** Розглянемо систему, яка складається з трьох тіл: станини з ковалдом  $D$ , кривошипа  $OA$  та молота  $3$ .

Зобразимо зовнішні сили, прикладені до машини (рис.12.15, б):  $\vec{P}_1 = m_1 \vec{g}$  — сила ваги станини з ковалдом,  $\vec{P}_2 = m_2 \vec{g}$  — сила ваги кривошипа,  $\vec{P}_3 = m_3 \vec{g}$  — сила ваги молота  $3$  (всі сили ваги прикладені у відповідних центрах мас  $C_1, C_2, C_3$  окремих тіл системи),  $\vec{R}$  — сумарна нормальна складова реакції фундаменту,  $\vec{R}'$  — сумарна тангенціальна складова реакції фундаменту.

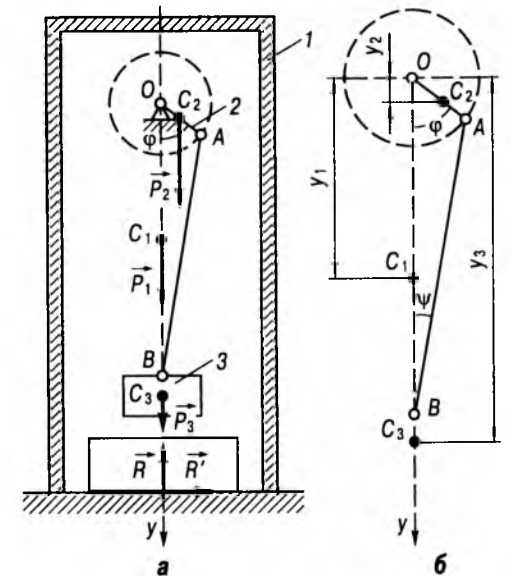


Рис. 12.15

Введемо вісь  $y$  і спрямуємо її по вертикалі вниз, взявши за початок її відліку вісь обертання  $O$  кривошипа  $OA$ .

Застосуємо теорему про рух центра мас системи матеріальних точок в проекціях на вісь  $y$ :

$$m\ddot{y}_C = \sum_{i=1}^n F_{iy}^e.$$

Тут  $m = m_1 + m_2 + m_3$  — маса кувальної машини.

Сума проекцій усіх зовнішніх сил на вісь  $y$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy}^e = P_1 + P_2 + P_3 - R.$$

Таким чином,

$$m\ddot{y}_C = P_1 + P_2 + P_3 - R,$$

звідки нормальна складова реакції фундаменту

$$R = P_1 + P_2 + P_3 - m\ddot{y}_C.$$

Для розв'язання задачі залишається визначити  $m\ddot{y}_C$ . У даній задачі

$$m\ddot{y}_C = m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_3,$$

де  $y_1, y_2, y_3$  — відповідно координати центрів мас станини, кривошипа та молота. Розглянемо кривошипно-шатунний механізм у момент часу  $t$ , коли кривошип  $OA$  повернувся з нижнього вертикального положення на кут  $\varphi = \omega t$ . Координати центрів мас  $C_1, C_2, C_3$  елементів системи зображені на рис.12.15, б. Координати  $y_1, y_2, y_3$  визначаються рівняннями

$$y_1 = OC_1 = \text{const}, \quad y_2 = \frac{OA}{2} \cos \omega t = \frac{r}{2} \cos \omega t,$$

$$y_3 = OA \cos \omega t + AB \cos \psi + BC_3 =$$

$$= r \cos \omega t + l \cos \psi + BC_3,$$

де  $\psi = \angle ABO$ . Залежність між кутами  $\varphi = \omega t$  та  $\psi$  визначається за теоремою синусів з трикутника  $OAB$ :

$$\frac{\sin \psi}{\sin \omega t} = \frac{r}{l}, \quad \sin \psi = \frac{r}{l} \sin \omega t = \lambda \sin \omega t,$$

де  $\lambda = \frac{r}{l}$ . Тоді  $\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t}$ , а вираз для  $y_3$  має вигляд

$$y_3 = r \cos \omega t + l \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t} + BC_3.$$

Зауважимо, що величина  $BC_3 = \text{const}$ . Розкладемо вираз  $\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t}$  в ряд. Враховуючи, що  $\lambda < 1$ , відкинемо усі члени ряду, які утримують  $\lambda$  в степені, вище другого, тобто

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t} \approx 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \omega t.$$

Звідси випливає, що

$$y_3 = r \cos \omega t + l \left(1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \omega t\right) + BC_3.$$

Враховуючи, що  $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$

і  $\lambda = \frac{r}{l}$ , отримаємо

$$y_3 = l - \frac{r^2}{4l} + r \left(\cos \omega t + \frac{1}{4} \lambda \cos 2\omega t\right) + BC_3.$$

Обчислимо другі похідні від  $y_1, y_2, y_3$  за часом  $t$ :

$$\ddot{y}_1 = 0, \quad \ddot{y}_2 = -\frac{r\omega^2}{2} \cos \omega t,$$

$$\ddot{y}_3 = -r\omega^2 (\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t).$$

Тепер знаходимо

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_C &= m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_3 = \\ &= -\frac{1}{2} m_2 r \omega^2 \cos \omega t - m_3 r \omega^2 (\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t) = \\ &= -\frac{1}{2} r \omega^2 [(m_2 + 2m_3) \cos \omega t + 2\lambda m_3 \cos 2\omega t]. \end{aligned}$$

Тоді нормальна складова реакції фундаменту

$$\begin{aligned} R &= (m_1 + m_2 + m_3)g + \\ &+ \frac{1}{2} r \omega^2 [(m_2 + 2m_3) \cos \omega t + 2\lambda m_3 \cos 2\omega t]. \end{aligned}$$

Сила тиску кувальної машини на фундамент спрямована протилежно нормальній складовій реакції фундаменту  $\bar{R}$  і рівна їй за модулем.

### 12.2.3. Задачі для самостійного розв'язування

**12.11.** Станину  $BC$  масою 3 кг розміщено на гладенькій горизонтальній площині (рис.12.16). Стиснувши одну пружину і розтяг-

нувши іншу, вантаж  $A$  масою 2 кг відхилили від положення рівноваги вправо і відпустили без початкової швидкості. Визначити, на яку відстань переміститься станина, якщо вантаж  $A$ , рухаючись вліво, пройде відстань 45 см відносно станини.

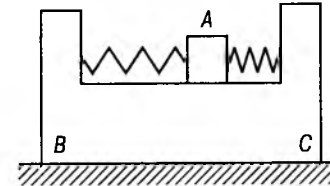


Рис. 12.16

Відповідь: на 18 см вправо.

**12.12.** До вала  $O$  двигуна під прямим кутом прикріплені невагомні стрижні  $OA$  і  $OB$ , кожний з яких має довжину  $L$  (рис.12.17). На кінцях стрижня насаджені точкові вантажі  $A$  і  $B$  вагою  $P$  кожний. Вал двигуна обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$ . Кут  $\varphi = \omega t + \frac{\pi}{4}$  відлічують від осі  $z$ . Знайти рівняння руху двигуна, якщо його вільно поставлено на гладенькій горизонтальній підлозі, а  $\angle AOB = 90^\circ$ . Вага двигуна  $Q$ ,  $t = 0, x = 0$ .

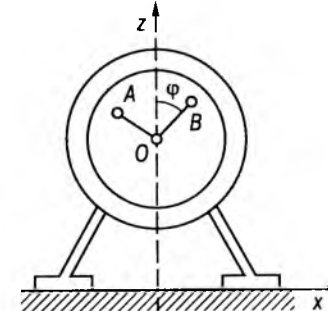


Рис. 12.17

Відповідь:  $x = -\frac{PL\sqrt{2}}{2P+Q} \sin \omega t$ .

**12.13.** До однорідного стрижня  $OC$  завдовжки  $L$  вагою  $P_1$  прикріплена кулька радіуса  $r$  вагою  $P_2$ . Стрижень  $OC$  обертається рівномірно з кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі  $O$  на підставці, вага якої  $Q$  (рис.12.18).

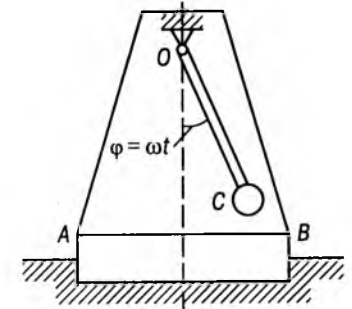


Рис. 12.18

Визначити вертикальний і горизонтальний тиск підставки на гладеньку горизонтальну площину і виступи  $A$  та  $B$ .

Відповідь: горизонтальний тиск

$$N_1 = \frac{P_1 L + 2P_2(L+r)}{2g} \omega^2 \sin \omega t, \text{ вертикальний}$$

$$\text{тиск } N_2 = P_1 + P_2 + Q + \frac{P_1 L + 2P_2(L+r)}{2g} \omega^2 \cos \omega t.$$

**12.14.** Однорідний стрижень  $AB$  завдовжки  $L$  дотикається кінцем  $B$  до гладенької горизонтальної підлоги. Кінець  $A$  стрижня, піднятий на висоту  $h$  над підлогою, відпускають із стану спокою, і стрижень падає на підлогу. На яку відстань переміститься при цьому кінець  $B$  стрижня?

Відповідь: на відстань  $\frac{1}{2}(L - \sqrt{L^2 - h^2})$ .

**12.15.** У човні вагою  $Q$  на спокійній воді одночасно почали йти від лав до корми двоє людей вагою  $P_1$  і  $P_2$ . Їх переміщення відносно човна дорівнює  $L_1$  і  $L_2$  відповідно. Нехтуючи опором води, визначити переміщення човна.

Відповідь:  $S = \frac{P_1 L_1 + P_2 L_2}{Q + P_1 + P_2}$ .

**12.16.** Людина, сидячи в човні, почала тягти на себе канат, до якого прикріплений пліт вагою 200 кг. Початкова відстань між човном і плотом 8 м. Якою буде відстань між ними, якщо пліт пройде по воді назустріч човну 3 м? Маса людини і човна 150 кг. Опір води не враховувати.

Відповідь: 1 м.

12.17. Клин  $M_1$  масою 7 кг розміщено на гладенькій горизонтальній площині,  $\alpha = 30^\circ$  (рис.12.19). Пружину  $AB$ , закріплену в точці  $B$ , стиснули і відпустили зі стану спокою, після чого тіло  $M_2$ , маса якого 3 кг, пройшло по похилій грані клина вгору відстань 40 см. Визначити відстань, на яку при цьому перемістився клин.

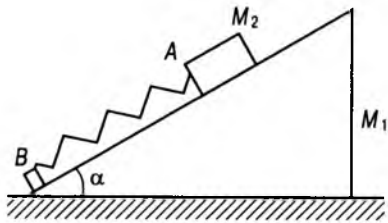


Рис. 12.19

Відповідь: на 19,4 см вліво.

12.18. Однорідна тригранна призма, основа якої має форму рівностороннього трикутника зі стороною  $a$ , поставлена так, що одна її грань вертикальна, а ребро дотикається до гладенької горизонтальної підлоги. Призма падає на підлогу під дією власної ваги. Наскільки при цьому переміститься ребро, на яке спиралася призма?

Відповідь: на відстань  $\frac{a}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$ .

### §12.3. ТЕОРЕМА ЕЙЛЕРА ПРО РУХ РІДИНИ

#### 12.3.1. Короткі теоретичні відомості

Розглядається стала течія рідини між перерізами труби, площі яких  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  (рис.12.20). Позначимо через  $\vec{v}_1$  і  $\vec{v}_2$  середні швидкості рідини у зазначених перерізах. Густину середовища в перерізах позначимо через  $\rho_1$  і  $\rho_2$ . Для сталої течії маса рідини, що протікає через зазначені перерізи за одиницю часу, буде сталою величиною

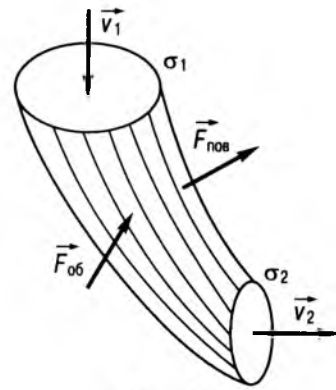


Рис. 12.20

$\mu = \rho_1 v_1 \sigma_1 = \rho_2 v_2 \sigma_2$ . Величина  $\mu$  називається секундною масою рідини.

**Теорема Ейлера.** При незмінній секундній масі рідини  $\mu$  сума головних векторів об'ємних, поверхневих сил і напрямлених всередину певного об'єму секундних кількостей рухів рідини, що протікає через два поперечні перерізи труби, дорівнює нулю:

$$\vec{F}_{об} + \vec{F}_{пов} + \mu \vec{v}_1 - \mu \vec{v}_2 = 0. \quad (12.12)$$

Об'ємні (або масові) сили  $\vec{F}_{об}$  діють на кожну частинку всередині виділеного об'єму рідини. До таких сил належать сили тяжіння. Поверхневі сили  $\vec{F}_{пов}$  діють на частинки рідини, які лежать на поверхні об'єму. До цих сил належать сили тиску стінок та сили тертя стінок і рідини.

#### 12.3.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 12.11.** Визначити величину горизонтальної складової  $R$  сили динамічного (додаємо до гідростатичного) тиску води на коліно труби діаметром 0,3 м, якщо швидкість руху води в трубі  $v = 2 \frac{м}{с}$  (рис.12.21). Густина води  $\rho = 1 \frac{т}{м^3}$ .

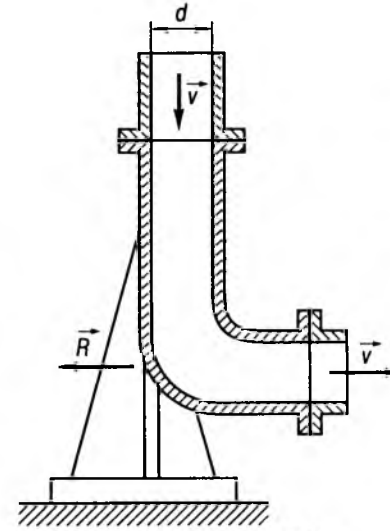


Рис. 12.21

Розв'язування. За законом рівності дії і протидії сила динамічного тиску води дорівнює величині відповідної складової тиску стінки труби на рідину, тому за теоремою Ейлера одержимо

$$R = \mu v = \rho v \frac{\pi d^2}{4} v = \rho v^2 \frac{\pi d^2}{4} = 283 \text{ Н.}$$

**Приклад 12.12.** Визначити тиск  $\vec{R}$  струменя, який витікає зі швидкістю  $\vec{v}_1$  з труби перерізом  $\sigma$ , на нескінченну стінку, площа якої перпендикулярна до напрямку струменя (рис.12.22, а) або складає з ним кут  $\alpha$  (рис.12.22, б).

Розв'язування. Застосовуючи теорему Ейлера в проекції на вісь  $x$  (вісь струменя), одержуємо при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$R = \mu v_1 = \rho v_1^2 \sigma.$$

Ця формула була вперше одержана Даниїлом Бернуллі (1700—1782) в 1736 р. Простота розв'язання обумовлена тим, що стінка вважається нескінченною. Виведена формула Бернуллі наближено вірна, якщо вважати ширину пластинки такою, що значно перевищує ширину струменя.

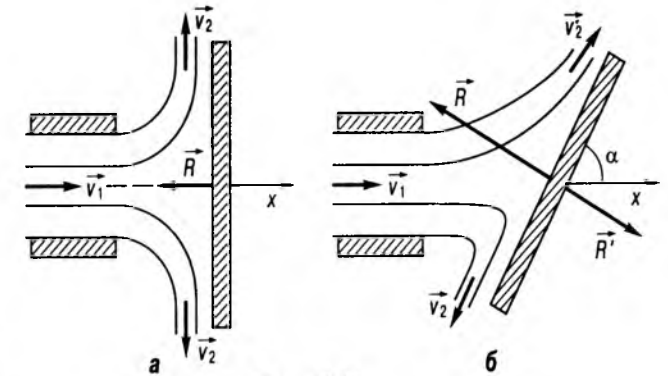


Рис. 12.22

Розглянемо неперпендикулярний удар струменя об стінку, що утворює з напрямом струменя кут  $\alpha$  (рис.12.22, б). Введемо позначення:  $\vec{v}_1$  — швидкість витікання струменя з труби;  $\vec{v}_2$  і  $\vec{v}'_2$  — швидкості відповідно двох розгалужених потоків струменя вздовж стінки. Вектори секундних кількостей руху, зображених на рис.12.22, б, відповідно дорівнюють  $\mu \vec{v}_1$ ,  $\mu_2 \vec{v}_2$ ,  $\mu'_2 \vec{v}'_2$ , де коефіцієнти  $\mu, \mu_2, \mu'_2$  визначають масу рідини, що протікає через відповідний переріз за одиницю часу:

$$\mu = \rho v_1 \sigma_1, \quad \mu_2 = \rho v_2 \sigma_2, \quad \mu'_2 = \rho v'_2 \sigma'_2;$$

де  $\rho$  — густина рідини;  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma'_2$  — площі перерізів струменів.

Нехтуючи тертям рідини об стінку, тиск стінки  $\vec{R}$  на струмінь будемо вважати перпендикулярним до стінки.

Проектуючи суму вищевизначених векторів на напрям нормалі до стінки, знаходимо реакцію

$$R = \mu v_1 \sin \alpha = \rho v_1^2 \sigma \sin \alpha;$$

при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  одержимо уже наведену формулу Бернуллі.

Проектуючи ту ж векторну суму на напрям стінки, можна визначити секундні кількості руху  $\mu_2 v_2$  і  $\mu'_2 v'_2$  вздовж стінки. За теоремою Ейлера матимемо

$$\mu v_1 \cos \alpha + \mu'_2 v'_2 - \mu_2 v_2 = 0,$$

а з умови збереження масової витрати всього струменя запишемо

$$\mu_2 + \mu'_2 = \mu.$$

У грубому наближенні можна прийняти

$$v_1 = v'_2 = v_2,$$

тобто вважати, що різниця між масовими витратами  $\mu_2$  і  $\mu'_2$  визначається лише різницею перерізів струменів, які розтікаються. При такому припущенні за теоремою Ейлера отримаємо

$$\mu_2 - \mu'_2 = \mu \cos \alpha,$$

звідки

$$\mu_2 = \mu \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \mu \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \mu'_2 = \mu \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \mu \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

**Приклад 12.13.** Горизонтальна ділянка трубопроводу земснаряда має вигнуте під кутом  $90^\circ$  коліно (рис.12.23). Визначити динамічний тиск  $\vec{R}$  пульпи на вигнуту частину трубопроводу, якщо його діаметр дорівнює 60 см, питома вага пульпи  $\gamma = 12 \text{ кН/м}^3$ , швидкість її течії  $v = 6 \text{ м/с}$ .

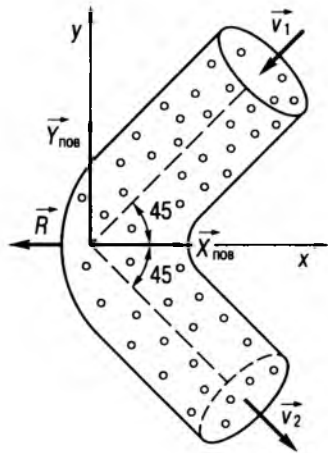


Рис. 12.23

**Розв'язування.** Розглянемо вигнуту частину трубопроводу і позначимо через  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  площі поперечних початкового і кінцевого його перерізів, а через  $\vec{v}_1$  і  $\vec{v}_2$  — вектори відповідних швидкостей пульпи. Вісь  $x$  спря-

муємо вздовж осі симетрії вигнутої частини трубопроводу, а вісь  $y$  — перпендикулярно до неї. За умовою задачі  $v_1 = v_2 = v$ , а вектори  $\vec{v}_1$  і  $\vec{v}_2$  складають з віссю  $x$  кути, які дорівнюють  $45^\circ$ . Сили ваги напрямлені вертикально і їх проекції на вісь  $x$  та  $y$  дорівнюють нулю. Позначимо через  $\vec{X}_{\text{пов}}$  і  $\vec{Y}_{\text{пов}}$  проекції головного вектора сил тиску стінок трубопроводу на пульпу і спроекуємо на осі координат вираз (12.12):

$$X_{\text{пов}} - \mu v \cos 45^\circ - \mu v \cos 45^\circ = 0,$$

$$Y_{\text{пов}} - \mu v \sin 45^\circ + \mu v \sin 45^\circ = 0.$$

Звідси отримуємо:  $X_{\text{пов}} = \mu v \sqrt{2}$ ,  $Y_{\text{пов}} = 0$ .

Таким чином, головний вектор поверхневих сил напрямлений вздовж осі  $x$ .

Напрямки сили динамічного тиску  $R$  пульпи на вигнуту частину трубопроводу і проекції  $\vec{X}_{\text{пов}}$  головного вектора поверхневих сил стінок трубопроводу на вісь  $x$  протилежні за модулем  $R = X_{\text{пов}} = \sqrt{2} \mu v$ . Тоді за визначенням маємо

$$\mu = \rho v \sigma.$$

Залежність між питомою масою пульпи  $\rho$  і її питомою вагою визначається співвідношенням  $\rho = \frac{\gamma}{g}$ , а площа поперечного перерізу трубопроводу  $\sigma = \frac{\pi d^2}{4}$ . Підставивши вирази для  $\mu$ ,  $\rho$  і  $\sigma$  в формулу для  $R$ , одержимо

$$R = \frac{\sqrt{2} \gamma}{4g} \pi d^2 v^2 = 17,7 \text{ кН}.$$

### 12.3.3. Задачі для самостійного розв'язування

**12.19.** Вода входить у нерухомий канал змінного поперечного перерізу, симетричний відносно вертикальної площини, зі швидкістю  $v_0 = 2 \text{ м/с}$  під кутом  $\alpha_0 = 90^\circ$  до горизонту. Площа перерізу каналу на вході  $0,02 \text{ м}^2$ , швидкість води на виході каналу  $v_1 = 4 \text{ м/с}$  і напрямлена під кутом

$\alpha_1 = 30^\circ$  до горизонту (рис.12.24). Визначити модуль горизонтальної складової сили, з якою вода діє на стінки каналу.

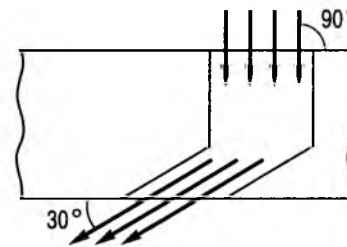


Рис. 12.24

Відповідь:  $R = 138 \text{ Н}$ .

**12.20.** Визначити тягову силу, створену водометним реактивним рушієм судна за рахунок струменя води, яку забирає відцентровий насос спереду судна і викидає з корми з відносною швидкістю  $v = 10 \text{ м/с}$ , якщо швидкість судна  $u = 5,1 \text{ м/с}$ , а подача насоса  $Q = 0,9 \text{ м}^3/\text{с}$ .

Відповідь:  $R = \frac{\gamma}{g} Q(v - u) = 4,5 \text{ кН}$ .

**12.21.** Діаметр трубопроводу на ділянці закріплення в опорі змінюється від  $D_1 = 1,5 \text{ м}$  до  $D_2 = 1 \text{ м}$  (рис.12.25). Визначити горизонтальну складову додаткової динамічної реакції, яку сприймає опора, якщо швидкість води  $v_1 = 2,5 \text{ м/с}$ .

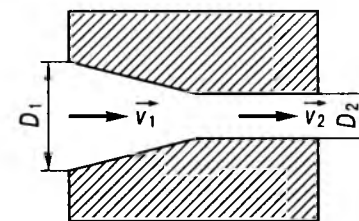


Рис. 12.25

Відповідь:  $R = 2780 \text{ Н}$ .

**12.22.** Пластина, яку введено у вільний струмінь води перпендикулярно до його осі,

відтінає частину струменя  $Q_1 = 7 \text{ л/с}$  і обумовлює відхилення решти струменя на кут  $\alpha$  (рис.12.26). Нехтуючи вагою води і тертям, визначити кут  $\alpha$  і тиск струменя на пластинку, якщо швидкість струменя  $v_1 = v_2 = v = 28 \text{ м/с}$ , а повна витрата  $Q = 21 \text{ л/с}$ .

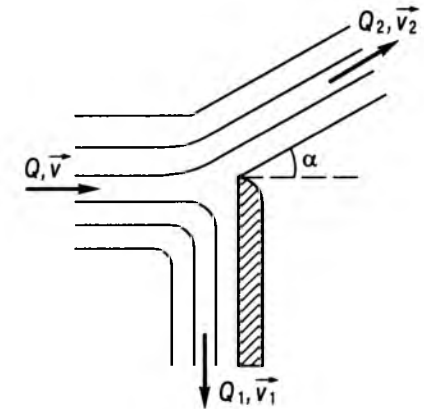


Рис. 12.26

Відповідь:  $\alpha = \arcsin \frac{Q_2}{Q} = 30^\circ$ ;  $R = 254 \text{ Н}$ .

**12.23.** Трубопровід діаметра  $D = 1,2 \text{ м}$  має розгалуження, в якому діаметр кожної меншої труби  $d = 0,85 \text{ м}$  (рис.12.27). Визначити динамічну реакцію трійника, якщо  $\alpha = 45^\circ$ , а сумарна витрата води  $Q = 6 \text{ м}^3/\text{с}$  розподіляється в розгалуженні порівну.

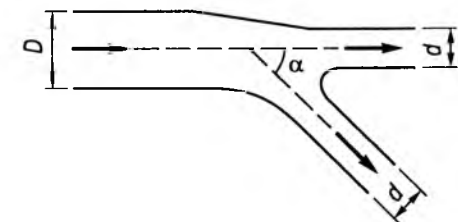


Рис. 12.27

Відповідь:  $R = 12,41 \text{ Н}$ .

## § 12.4. ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ

### 12.4.1. Короткі теоретичні відомості

Кінетичною енергією матеріальної точки називають скалярну міру механічного руху точки в нерухомій системі координат, що дорівнює половині добутку маси точки  $m$  на квадрат її швидкості:

$$T = \frac{1}{2}mv^2, \quad (12.13)$$

Кінетичною енергією системи матеріальних точок називають суму кінетичних енергій усіх точок, що входять до системи:

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2, \quad (12.14)$$

де  $m_i$  — маси точок;  $v_i$  — швидкості точок.

Кінетична енергія твердого тіла, що рухається поступально,

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2, \quad (12.15)$$

де  $M$  — маса тіла;  $v_C$  — швидкість центра мас (або будь-якої іншої точки).

Кінетична енергія твердого тіла при обертанні його навколо нерухомої осі (наприклад  $Oz$ )

$$T_z^\omega = \frac{1}{2}I_z\omega^2, \quad (12.16)$$

де  $I_z$  — момент інерції тіла відносно осі обертання;  $\omega$  — кутова швидкість тіла.

Для загального випадку руху твердого тіла (в тому числі і для плоского руху)

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2, \quad (12.17)$$

де  $I_C$  — момент інерції тіла відносно миттєвої осі, яка проходить через центр мас (для плоского руху ця вісь перпендикулярна до площини руху);  $\omega$  — миттєва кутова швидкість.

**Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки.** Приріст кінетичної енергії матеріальної точки на деякому відрізку дуги

її траєкторії дорівнює роботі сили, що прикладена до точки, на цьому відрізку дуги траєкторії:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A, \quad (12.18)$$

де  $v_0$ ,  $v$  — відповідно початкова та кінцева швидкість точки;  $A$  — робота сили.

**Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки в диференціальній формі.** Диференціал кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює елементарній роботі сил, що діють на точку:

$$dT = d'A. \quad (12.19)$$

**Теорема про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок.** Приріст кінетичної енергії системи матеріальних точок за деякий проміжок часу дорівнює сумі робіт зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на точки системи протягом цього проміжку часу:

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^n A_i^e + \sum_{i=1}^n A_i^j, \quad (12.20)$$

де  $\sum_{i=1}^n A_i^e$  і  $\sum_{i=1}^n A_i^j$  — відповідно сума робіт зовнішніх і внутрішніх сил.

Елементарна робота сили дорівнює скалярному добутку сили на елементарне переміщення точки її прикладання:

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot ds \cdot \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{\tau}}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad (12.21)$$

де  $s$  — дугова координата;  $\vec{\tau}$  — орт дотичної до траєкторії точки;  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  — проекції вектора елементарного переміщення

$d\vec{r}$  точки прикладання сили на осі декартової системи координат.

Робота сили на скінченному переміщенні матеріальної точки вздовж дуги  $L$  визначається одним з інтегралів

$$A = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_L F_\tau ds = \int_L (F_x dx + F_y dy + F_z dz), \quad (12.22)$$

Робота сили ваги матеріальної точки дорівнює добутку сили ваги на різницю висот ( $\pm h$ ) початкового і кінцевого положення точки:

$$A = \pm Ph = \pm mgh. \quad (12.23)$$

Робота центральної сили не залежить від форми траєкторії матеріальної точки, на яку діє центральна сила, а залежить тільки від початкового та кінцевого положень точки:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr. \quad (12.24)$$

Робота сили пружності у випадку, коли кінці пружини закріплено шарнірно, а пружня сила пропорційна подовженню  $\Delta r$  ( $F = C\Delta r$ ), визначається з виразу

$$A = -\frac{C}{2}(\Delta r_2^2 - \Delta r_1^2), \quad (12.25)$$

де  $\Delta r_1 = r_1 - r_0$ ,  $\Delta r_2 = r_2 - r_0$  — початкове та кінцеве подовження пружини;  $r_1$  та  $r_2$  — довжина пружини в початковому та кінцевому положенні;  $r_0$  — довжина недеформованої пружини;  $C$  — жорсткість пружини.

Елементарна робота сил, що прикладені до твердого тіла, дорівнює сумі роботи головного вектора зовнішніх сил, яка здійснюється на елементарному переміщенні полюса  $O$ , і роботи головного моменту цих сил, обчисленого відносно центра  $O$ , на елементарному обертальному переміщенні  $d\varphi$  тіла навколо осі, що проходить через цей центр:

$$d'A = \vec{F}^e \cdot d\vec{r}_O + \vec{M}_O^e \cdot d\vec{\varphi}. \quad (12.26)$$

Елементарна та повна робота сил, прикладених до твердого тіла, що обертається навколо осі  $Oz$ ,

$$d'A = M_z \cdot d\varphi, \quad A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z \cdot d\varphi, \quad (12.27)$$

де  $M_z$  — головний момент усіх зовнішніх сил відносно осі обертання  $Oz$ .

Сума робіт усіх внутрішніх сил абсолютно твердого тіла дорівнює нулю.

Потужність зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, дорівнює сумі скалярного добутку головного вектора на швидкість полюса  $O$  і скалярного добутку головного моменту цих сил відносно даного полюса на кутову швидкість обертання тіла:

$$N = \vec{F}^e \cdot \vec{v}_O + \vec{M}_O^e \cdot \vec{\omega}. \quad (12.28)$$

В окремому випадку, коли тіло здійснює обертання навколо нерухомої осі, наприклад  $Oz$ , і  $M_z = \text{const}$ , потужність і робота зовнішніх сил визначається за формулами

$$N = M_z \omega, \quad A = M_z (\varphi - \varphi_0), \quad (12.29)$$

де  $\varphi$ ,  $\varphi_0$  — кінцеве і початкове значення кута повороту тіла.

### 12.4.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 12.14.** Вантажу вагою  $\vec{P} = m\vec{g}$ , підвішеному в точці  $O_1$  на пружині, статичне подовження якої під дією сили ваги  $P$  дорівнює  $\lambda_{ст}$ , надана початкова швидкість  $\vec{v}_0$  із положення  $M_0$  вертикально вниз (рис.12.28). Визначити швидкість вантажу в положенні  $M$ , якщо вантаж, який вважається матеріальною точкою, ковзає по кільцю радіуса  $R$  без тертя,  $OO_1 = R$  і довжина недеформованої пружини теж дорівнює  $R$ .

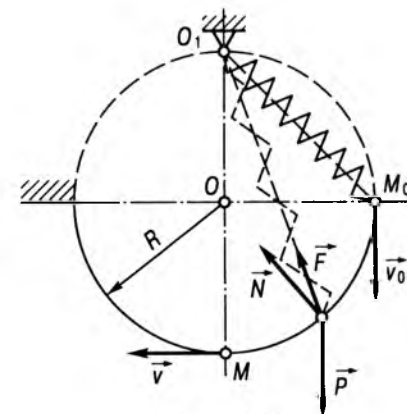


Рис. 12.28



Розв'язування. Застосуємо для аналізу руху вантажу теорему про зміну кінетичної енергії точки, взявши за початкове положення вантажу точку  $M_0$ , за кінцеве — точку  $M$ . За (12.18) отримаємо

$$m \frac{v^2}{2} - m \frac{v_0^2}{2} = A. \quad (1)$$

Роботу здійснюють сила ваги вантажу ( $A = mgh$ ) і пружна сила пружини:

$$A = -\frac{C}{2} (\Delta r_2^2 - \Delta r_1^2),$$

де  $\Delta r_2$  та  $\Delta r_1$  — відповідно подовження пружини в кінцевому та початковому положеннях. Оскільки в стані статичної рівноваги тіла, підвищеного на пружині, сила ваги  $mg$  зрівноважується пружною силою пружини, то  $mg = C\lambda_{ст}$ , де  $\lambda_{ст}$  — статичне подовження пружини (подовження пружини в стані рівноваги). Тоді коефіцієнт пружності пружини

$$C = \frac{mg}{\lambda_{ст}}$$

Нормальна реакція  $\vec{N}$  кільця весь час перпендикулярна до переміщення і її робота дорівнює нулю. Отже, сума робіт

$$A = mgh - \frac{mg}{2\lambda_{ст}} (\Delta r_2^2 - \Delta r_1^2).$$

У випадку, який розглядається,  $h = R$ ,  $\Delta r_1 = R\sqrt{2} - R$ ,  $\Delta r_2 = 2R - R = R$ , тому

$$A = mgh - \frac{mg}{2\lambda_{ст}} \left[ R^2 - R(\sqrt{2} - 1)^2 \right] = mgR \left[ 1 - \frac{R}{\lambda_{ст}} (\sqrt{2} - 1) \right].$$

Підставивши  $A$  з одержаного виразу в (1), дістанемо

$$m \frac{v^2}{2} - m \frac{v_0^2}{2} = mgR \left[ 1 - \frac{(\sqrt{2} - 1)R}{\lambda_{ст}} \right],$$

звідки

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gR \left[ 1 - \frac{(\sqrt{2} - 1)^2 R}{\lambda_{ст}} \right]}.$$

**Приклад 12.15.** Тіло, що має вагу  $P = mg$ , падає без початкової швидкості на пружину з висоти  $h$  (рис. 12.29). Визначити найбільше стиснення пружини  $\lambda$ . Масою пружини знехтувати.

Розв'язування. Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії точки

$$m \frac{v^2}{2} - m \frac{v_0^2}{2} = A,$$

взявши за початкове положення тіла начало його падіння з висоти  $h$ , а за кінцеве — момент максимального стиснення пружини. Зміна кінетичної енергії за цей проміжок часу дорівнює нулю, тому що  $v_0 = 0$  і при найбільшому стисненні пружини  $v = 0$ . Отже, робота  $A = 0$ . На тіло після його дотику з пружиною діють дві сили: сила ваги  $\vec{P} = m\vec{g}$  і пружна сила пружини. Сила  $\vec{P}$  здійснює роботу на переміщенні  $(h + \lambda)$ , пружна сила — на переміщенні  $\lambda$ . Тому

$$A = mg(h + \lambda) - \frac{C}{2} \lambda^2 = 0,$$

де  $C$  — коефіцієнт пружності пружини.

Оскільки в стані статичної рівноваги тіла сила ваги зрівноважується пружною силою пружини, то  $mg = C\lambda_{ст}$ , де  $\lambda_{ст}$  — статична деформація пружини (подовження пружини в стані рівноваги). Тоді коефіцієнт пружності пружини

$$C = \frac{mg}{\lambda_{ст}}$$

Далі з виразу роботи сил отримаємо

$$h + \lambda - \frac{1}{2\lambda_{ст}} \lambda^2 = 0,$$

або

$$\lambda^2 - 2\lambda_{ст}\lambda - 2\lambda_{ст}h = 0.$$

Розв'язавши це рівняння, одержимо два корені. Враховуючи фізичний зміст задачі, залишаємо один корінь (другий корінь від'ємний):

$$\lambda = \lambda_{ст} + \sqrt{\lambda_{ст}^2 + 2\lambda_{ст}h}.$$

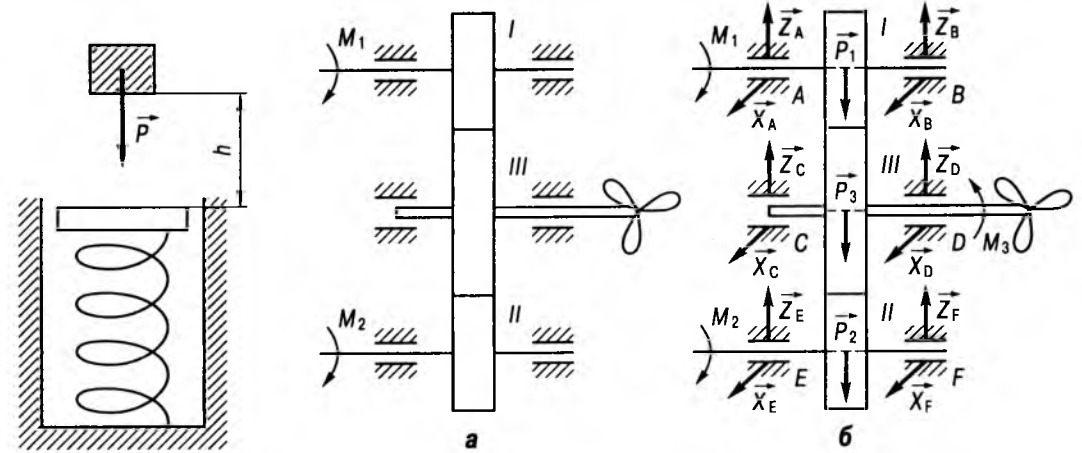


Рис. 12.29

Рис. 12.30

Зауважимо, що при  $h = 0$  найбільше стиснення пружини  $\lambda = 2\lambda_{ст}$ , тобто при динамічній дії вантажу на пружину її найбільше стиснення в два рази більше статичної деформації.

**Приклад 12.16.** Редуктор пароплавного турбозубчастого агрегату складається з трьох коліс, радіуси яких дорівнюють відповідно  $r_1, r_2, r_3$  (рис. 12.30, а). На ведучі колеса I і II від турбін передаються моменти  $M_1$  і  $M_2$ . Визначити кутове прискорення гребного вала, якщо на гвинт діє момент опору  $M_3$ . Взяти моменти інерції ведучих коліс рівними  $I_1$  і  $I_2$ , а момент інерції колеса III з валом і гвинтом  $I_3$ .

Розв'язування. Скористаємося теоремою про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі і запишемо формулу для визначення потужності:

$$\frac{dT}{dt} = N.$$

Визначимо кінетичну енергію системи, яка складається з трьох виконуючих обертальний рух коліс редуктора:

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2).$$

Враховуючи кінематичні співвідношення  $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 = \omega_3 r_3$ ,

одержимо

$$T = \frac{1}{2} \left[ I_1 \left( \frac{r_3}{r_1} \right)^2 + I_2 \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 + I_3 \right] \omega_3^2$$

або

$$T = \frac{1}{2} I_{зв} \omega_3^2,$$

де зведений момент інерції

$$I_{зв} = I_3 + I_1 \left( \frac{r_3}{r_1} \right)^2 + I_2 \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2.$$

Знайдемо потужність

$$N = M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2 - M_3 \omega_3 = \left( M_1 \frac{r_3}{r_1} + M_2 \frac{r_3}{r_2} - M_3 \right) \omega_3.$$

Діючі на систему і зображені (рис. 12.30, б) сили ваги коліс  $P_1, P_2, P_3$  і реакції підшипників коліс  $X_A, Z_A, X_B, Z_B, X_C, Z_C, X_D, Z_D, X_E, Z_E, X_F, Z_F$  прикладені до нерухомих точок; їх робота при обертальних рухах коліс дорівнює нулю, тому вони не входять до виразу потужності  $N$ . Внутрішніми силами є колові сили в точках дотику зубчастих коліс.

Із виразу для  $T$ , враховуючи, що кутова швидкість  $\omega$  є функція часу, знаходимо

$$\frac{dT}{dt} = I_{зв} \omega_3 \epsilon_3.$$

Тому маємо

$$I_{зв} \omega_3 \epsilon_3 = \left( M_1 \frac{r_3}{r_1} + M_2 \frac{r_3}{r_2} - M_3 \right) \omega_3,$$

звідки

$$\epsilon_3 = \frac{\left( M_1 \frac{r_3}{r_1} + M_2 \frac{r_3}{r_2} - M_3 \right)}{I_{зв}}.$$

**Приклад 12.17.** Механічна система внаслідок дії сили ваги тіла 1 починає рухатись після стану спокою (рис. 12.31, а). Враховуючи тертя ковзання тіла 1 та опір коченню тіла 2, що котиться без ковзання, нехтуючи масами ниток, які вважаються нерозтяжними, знайти швидкість  $v$  тіла 1 у той момент, коли ним буде пройдено шлях  $S$ . Дано:  $m_1 = 3m$ ;  $m_2 = 2m$ ;  $m_3 = m$ ;  $m_4 = m$ ;  $m_5 = m$ ;  $R_2 = R_3 = 12$  см,  $r_2 = 0,5R_2$ ,  $r_3 = 0,75R_3$ ,  $R_3 = 20$  см,  $i_{2,x} = 8$  см,  $i_{3,x} = 10$  см,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $f = 0,1$ ;  $\delta = 0,2$  см;  $S = 2$  м.

**Розв'язування.** Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи (12.20)

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^n A_i^e + \sum_{i=1}^n A_i^j.$$

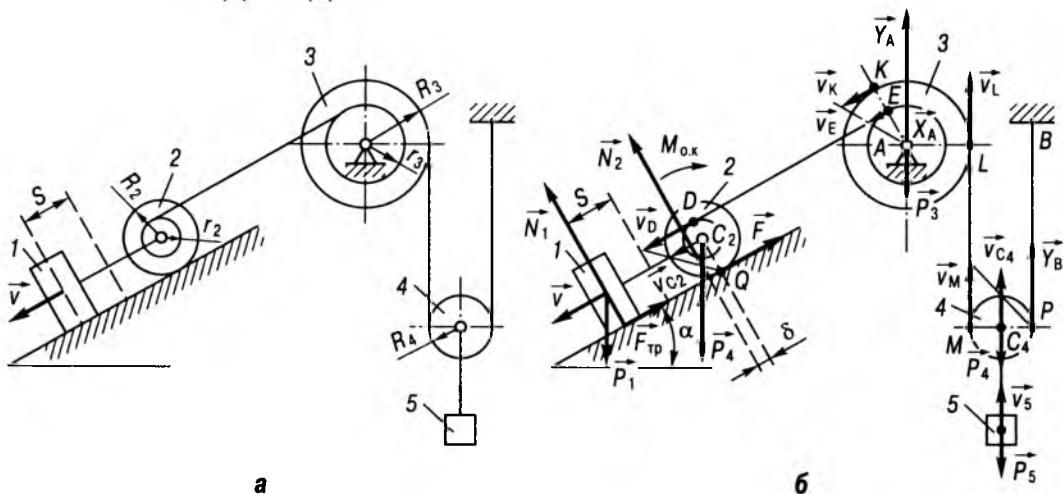


Рис. 12.31

Для заданої системи, яка складається із абсолютно твердих тіл, з'єднаних нерозтяжними нитками, сума робіт внутрішніх сил дорівнює нулю:  $\sum_{i=1}^n A_i^j = 0$ .

Крім того, оскільки у початковому положенні система перебуває у стані спокою, то  $T_0 = 0$ .

Кінетична енергія  $T$  системи в кінцевому її положенні дорівнює сумі кінетичних енергій тіл 1, 2, 3, 4, 5:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5.$$

Тягар 1 рухається поступально. Тому його кінетична енергія

$$T_1 = \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{3mv^2}{2}.$$

Кінетична енергія блока 3, який обертається відносно нерухомої осі,  $T_3 = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$ ,

де  $I_3$  — момент інерції блока 2 відносно осі обертання;  $I_3 = m_3 i_{3,x}^2 = m i_{3,x}^2$ ;  $\omega_2$  — кутова швидкість тіла 2;  $\omega_3 = \frac{v_E}{r_3}$ . Швидкість

точки  $E$  блока 3 дорівнює швидкості точки  $D$  котка 2, яку можна знайти із співвідношення

$$\frac{v_D}{v_{C_2}} = \frac{(R_2 + r_2)}{R_2};$$

оскільки  $v_{C_2} = v$ ,  $R_2 = 2r_2$ , то  $\frac{v_D}{v} = \frac{3}{2}$  і  $v_E = v_D = \frac{3}{2}v$ . Тоді  $\omega_3 = \frac{3v}{2r_3}$ . Із

урахуванням виразів для  $I_3$  і  $\omega_3$  формулу для кінетичної енергії блока 3 запишемо так:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 i_{3,x}^2 \left( \frac{3v}{2r_3} \right)^2 = \frac{9m}{8} \left( \frac{i_{3,x}}{r_3} \right)^2 v^2.$$

Кінетична енергія блока 4, який здійснює плоский рух,

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 v_{C_4}^2 + \frac{1}{2} I_{C_4} \omega_4^2,$$

де  $v_{C_4}$  — швидкість центра мас  $C_4$  блока 4;

$I_{C_4}$  — момент інерції блока (однорідного суцільного циліндра) відносно його центральної (горизонтальної) осі;  $I_{C_4} = \frac{1}{2} m_4 R_4^2$ ;  $\omega_4$  — миттєва кутова швидкість блока 4. Оскільки блок 4 рухається таким чином, що нитка відносно поверхні блока не проковзує, то миттєвий центр швидкостей перебуває у

точці  $P$ . Тому  $\omega_4 = \frac{v_{C_4}}{R_4}$ . Швидкість точки  $C_4$  блока  $v_{C_4} = \frac{v_M}{2}$ , а  $v_M = v_L = v_K$ .

Швидкість  $v_K$  точки  $K$  блока 3 знайдемо із співвідношення

$$\frac{v_K}{v_E} = \frac{R_2}{r_2}.$$

Враховуючи те, що  $r_3 = 0,75R_3$ , з попередніх кінематичних співвідношень одержимо  $v_{C_4} = v$ ,  $\omega_4 = \frac{v}{R_3}$ . Тоді кінетична енергія блока 4

$$T_4 = \frac{m_4 v^2}{2} + \frac{m_4 v^2}{4} = \frac{3m_4 v^2}{2}.$$

Кінетична енергія котка 2, який здійснює плоский рух,

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{C_2}^2 + \frac{1}{2} I_{C_2} \omega_2^2,$$

де  $v_{C_2}$  — швидкість центра мас  $C_2$  котка 2;  $v_{C_2} = v$ ;  $I_{C_2}$  — момент інерції котка 2 відносно його центральної горизонтальної поздовжньої осі:  $I_{C_2} = m_2 i_{2,x}^2 = 2m i_{2,x}^2$ ,  $\omega_2$  — миттєва кутова швидкість котка 2. Оскільки коток котиться без ковзання, то миттєвий центр швидкостей перебуває у точці  $Q$ .

Тому  $\omega_2 = \frac{v_{C_2}}{R_2} = \frac{v}{R_2}$ . З урахуванням виразів для  $I_{C_2}$  і  $\omega_2$  попередня формула набуває вигляду

$$T_2 = \frac{m_2 v^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{m_2 i_{2,x}^2 v^2}{R_2^2} = m v^2 \left[ 1 + \left( \frac{i_{2,x}}{R_2} \right)^2 \right].$$

Кінетична енергія тягара 5, який рухається поступально,  $T_5 = \frac{m_5 v_5^2}{2}$ , де  $v_5$  — швидкість тягара 5;  $v_5 = v$ . Тому  $T_5 = \frac{m v^2}{2}$ .

Кінетична енергія всієї механічної системи з урахуванням одержаних формул для  $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$

$$T = \frac{m v^2}{2} \left\{ 3 + \frac{9}{4} \left( \frac{i_{4,x}}{r_4} \right)^2 + \frac{3}{2} + 2 \left[ 1 + \left( \frac{i_{3,x}}{R_2} \right)^2 \right] + 1 \right\}$$

або

$$T = \frac{67m v^2}{12}.$$

Знайдемо суму робіт усіх зовнішніх сил, прикладених до точок системи, на заданому переміщенні. Покажемо усі зовнішні сили, що діють на систему (рис. 12.31, б).

Робота сили ваги  $\vec{P}_1$

$$A(\vec{P}_1) = m_1 g S \cdot \sin \alpha.$$

Робота сили тертя ковзання

$$A(\vec{F}_{тр}) = -F_{тр} \cdot S.$$

Оскільки  $F_{\text{тр}} = fN_1 = fm_1g \cos \alpha$ , де  $N_1$  — нормальна складова реакції похилої площини, то

$$A(\vec{F}_{\text{тр}}) = -fm_1gS \cos \alpha.$$

Робота сил ваги  $\vec{P}_4$  і  $\vec{P}_5$

$$A(\vec{P}_4) = -m_4gh_4, \quad A(\vec{P}_5) = -m_5gh_5,$$

де  $h_4 = h_5 = h$  — вертикальне переміщення центра мас  $C_4$  блока 4 і тягара 5.

Для визначення величини переміщення  $h$  слід врахувати те, що між лінійними переміщеннями точок такі ж залежності, як і між їх швидкостями. Оскільки  $v_{C_4} = v$ , отримуємо  $h = S$ . Тому

$$A(\vec{P}_4) = -m_4gS, \quad A(\vec{P}_5) = -m_5gS.$$

Робота сили ваги  $\vec{P}_2$

$$A(\vec{P}_2) = m_2gh_2 = m_2gS \sin \alpha.$$

Робота пари сил опору кочення котка 2

$$A(M_{\text{о.к}}) = -M_{\text{о.к}}\varphi_2,$$

де  $M_{\text{о.к}} = \delta N_2 = \delta m_2g \cos \alpha$  — момент пари сил опору кочення котка 2;  $\varphi_2$  — кут повороту котка 2. Оскільки коток 2 котиться без ковзання, то кут його повороту

$$\varphi_2 = \frac{S_{C_2}}{R_2},$$

де  $S_{C_2}$  — переміщення центра мас  $C_2$  котка 2,

причому  $S_{C_2} = S$ . Тому  $A(M_{\text{о.к}}) = -\frac{\delta m_2gS \cos \alpha}{R_2}$ .

Робота сили ваги  $\vec{P}_3$  і реакцій  $X_A$ ,  $Y_A$  підшипника осі обертання блока 3 дорівнює нулю, оскільки ці сили прикладені до нерухомої точки. Робота сили зчеплення  $\vec{F}$  котка 2 дорівнює нулю, тому що сила прикладена в миттєвому центрі швидкостей котка. Точка прикладання реакції  $Y_B$  троса знаходиться в точці  $P$  (миттєвому центрі швидкостей тіла 4), тобто є нерухомою, тому робота реакції  $Y_B$  дорівнює нулю.

Сума робіт зовнішніх сил визначається додаванням робіт, обчислених за вищеведеними виразами:

$$\begin{aligned} \sum A_i^E &= m_1gS \sin \alpha - fm_1gS \cos \alpha - \\ &- m_4gS - m_5gS + m_2gS \sin \alpha - \frac{\delta m_2gS \cos \alpha}{R_2} = \\ &= mgS \left[ 5 \sin \alpha - \left( 3f + \frac{2\delta}{R_2} \right) \cos \alpha - 2 \right] = 0,21mgS. \end{aligned}$$

Відповідно до теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи порівняємо значення  $T$  і  $\sum A_i^E$ :

$$\frac{67}{12}mv^2 = 0,21mgS, \quad (1)$$

звідки

$$v = \sqrt{\frac{12 \cdot 0,21gS}{67}} = \sqrt{\frac{0,21 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot 12}{67}} = 0,86 \text{ м/с}.$$

Теорема про зміну кінетичної енергії дає змогу окрім швидкості визначити також і прискорення. Здиференціювавши вираз (1) за часом, вважаючи пройдений тілом  $l$  шлях  $S$  змінною величиною, отримуємо

$$\frac{67}{12} \cdot 2v\dot{v} = 0,21g\dot{S}.$$

Оскільки  $\dot{S} = \frac{dS}{dt} = v$ , а  $\dot{v} = \frac{dv}{dt} = w$ , то, скоротивши на  $v$ , одержимо

$$w = \dot{v} = \frac{12 \cdot 0,21g}{67 \cdot 2} = 0,184 \text{ м/с}^2.$$

**Приклад 12.18.** Визначити постійну тягу гвинта  $\vec{F}$  при горизонтальному польоті літака вагою  $G$ , за якої літак збільшить свою швидкість з  $v_0$  до  $v_1$  (рис.12.32), пролетівши відстань  $S$ . Тягу гвинта  $\vec{F}$  вважати напрямленою по швидкості польоту. Сила лобового опору пропорційна квадрату швидкості ( $Q = kv^2$ ) і напрямлена протилежно вектору швидкості.

Дано:  $S = 200$  м;  $v_0 = 250 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ;  $v_1 = 350 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ;  $k = 10$ ;  $G = 900$  кН.

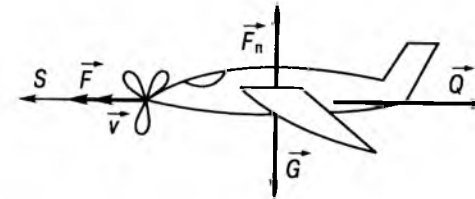


Рис. 12.32

Розв'язування. Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки  $T - T_0 = A$  (розмірами літака в умовах даної задачі можна знехтувати).

Оскільки маса літака  $m = \frac{G}{g} = 0,917 \cdot 10^5$  кг, то  $T_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = 0,2867 \cdot 10^{10}$  Дж — кінетична енергія літака в початковому положенні,  $T = \frac{1}{2}mv_1^2 = 0,5619 \cdot 10^{10}$  Дж — кінетична енергія літака в кінцевому положенні, зміна кінетичної енергії  $T - T_0 = 0,2752 \cdot 10^{10}$  Дж.

Робота сил

$$A = A(\vec{F}) + A(\vec{Q}),$$

де  $A(\vec{F}) = FS$  — робота сили тяги гвинта на переміщенні  $S$ . Оскільки координата  $S$  визначає положення літака під час його прямолінійного руху, робота сили опору

$$A(\vec{Q}) = -\int_0^S QdS = -\int_0^S kv^2dS = -k \int_0^S \left( \frac{dS}{dt} \right)^2 dS.$$

Робота сили ваги  $G$  та піднімальної сили при горизонтальному польоті літака дорівнює нулю.

Залежність швидкості від переміщення визначимо з диференціального рівняння

$$mw = F - kv^2,$$

де  $w$  — прискорення;  $w = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dS}$ .

Тоді

$$mv \frac{dv}{dS} = F - kv^2.$$

Розділивши змінні, отримаємо

$$\frac{v dv}{F - kv^2} = \frac{1}{m} dS$$

або

$$\frac{v dv}{k \left( \frac{F}{k} - v^2 \right)} = \frac{1}{m} dS.$$

Після інтегрування матимемо

$$-\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2} \ln \left( \frac{F}{k} - v^2 \right) = \frac{1}{m} S + \ln C$$

або

$$\ln \left( \frac{F}{k} - v^2 \right) = -\frac{2k}{m} S + \ln C',$$

де  $C' = C^{-2k}$ .

Після потенціювання одержимо

$$\frac{F}{k} - v^2 = C' e^{-\frac{2k}{m} S}. \quad (1)$$

Постійну інтегрування  $C'$  знаходимо з початкових умов  $v(t=0) = v_0$ ,  $S(t=0) = 0$ :

$$\frac{F}{k} - v_0^2 = C'.$$

Підставивши цей вираз у рівняння (1), отримаємо

$$\frac{F}{k} - v^2 = \left( \frac{F}{k} - v_0^2 \right) e^{-\frac{2k}{m} S}$$

або

$$-v^2 = \left( \frac{F}{k} - v_0^2 \right) e^{-\frac{2k}{m} S} - \frac{F}{k}.$$

Знайдена залежність швидкості  $v$  від переміщення дає змогу визначити роботу сили опору:

$$\begin{aligned} A(\vec{Q}) &= \int_0^S k \left[ \left( \frac{F}{k} - v_0^2 \right) e^{-\frac{2k}{m} S} - \frac{F}{k} \right] dS = \\ &= -k \left( \frac{F}{k} - v_0^2 \right) \frac{m}{2k} e^{-\frac{2k}{m} S} \Big|_0^S - FS \Big|_0^S = \end{aligned}$$

$$= -\left(\frac{F}{k} - v_0^2\right) \frac{m}{2} \left(e^{\frac{-2k}{m} s} - 1\right) - FS =$$

$$= F \left[ \frac{m}{2k} \left(1 - e^{\frac{-2k}{m} s}\right) - S \right] - \frac{mv_0^2}{2} \left(1 - e^{\frac{-2k}{m} s}\right).$$

Повна робота, здійснена силою тяги і силою лобового опору,

$$A = A(\vec{F}) + A(\vec{Q}) =$$

$$= F \left[ \frac{m}{2k} \left(1 - e^{\frac{-2k}{m} s}\right) - S \right] - \frac{mv_0^2}{2} \left(1 - e^{\frac{-2k}{m} s}\right).$$

Зміну кінетичної енергії позначимо через  $\Delta T$  ( $\Delta T = T - T_0$ ). Тоді сила тяги

$$F = \frac{\Delta T + \frac{mv_0^2}{2} \left(1 - e^{\frac{-2k}{m} s}\right)}{\frac{m}{2k} \left(1 - e^{\frac{-2k}{m} s}\right) - S}$$

Визначаємо числові значення:

$$\frac{2k}{m} S = \frac{2 \cdot 10}{0,917 \cdot 10^5} \cdot 200 = 0,0436;$$

$$e^{-0,0436} = 0,6466;$$

$$1 - e^{\frac{-2k}{m} s} = 1 - 0,6436 = 0,3564;$$

$$\frac{m}{2k} = \frac{0,917 \cdot 10^5}{2 \cdot 10} = 0,458 \cdot 10^4;$$

$$F = \frac{0,2759 \cdot 10^{10} + 0,2867 \cdot 10^{10} \cdot 0,3564}{0,458 \cdot 10^4 \cdot 0,0198} =$$

$$= 4,167 \cdot 10^7 \text{ Н.}$$

Порівнюючи отриману силу тяги з величиною тяги при відсутності опору

$$F' = \frac{\Delta T}{S} = \frac{0,2752 \cdot 10^{10} \text{ Дж}}{200 \text{ м}} = 1,376 \cdot 10^7 \text{ Н,}$$

робимо висновок, що з урахуванням сили опору на те ж саме збільшення швидкості потрібна тяга двигуна в 3,03 раза більша.

#### 12.4.3. Задачі для самостійного розв'язування

**12.24.** Момент інерції прямого кругового циліндра відносно поздовжньої осі дорівнює  $\frac{Mr^2}{2}$ , де  $M$  — маса;  $r$  — радіус основи циліндра. Кутова швидкість обертання циліндра, виготовленого з чавуну, дорівнює 5,714 рад/с. Яку роботу треба виконати для зупинки циліндра, якщо його радіус 1,75 м, а висота 0,5 м?

Відповідь: 108 000 Дж.

**12.25.** Масивний диск радіуса  $R$  обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю  $\omega_0$ . Його вага  $Q$ . З якою силою  $F$  потрібно натиснути на гальмівну колодку (рис. 12.33), щоб зупинити диск протягом одного оберту навколо осі? Коефіцієнт тертя дорівнює  $f$ .

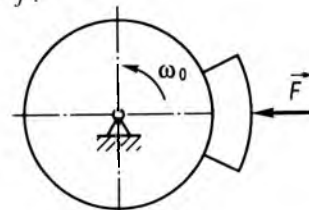


Рис. 12.33

$$\text{Відповідь: } F = \frac{QR\omega_0^2}{8\pi g f}.$$

**12.26.** Один кінець важкого каната завдовжки  $L$ , намотаного на блок радіуса  $R$ , звисає на довжину  $l_0$  (рис. 12.34). Яку кутову швидкість буде мати блок при опусканні каната на довжину  $x$ , якщо момент інерції блока відносно осі обертання дорівнює  $I$  і вага одиниці довжини каната  $q$ ?

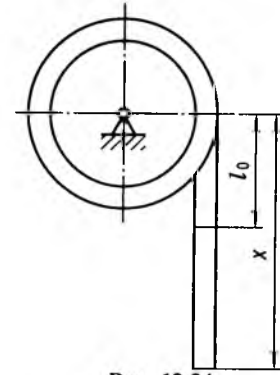


Рис. 12.34

$$\text{Відповідь: } \omega = \sqrt{\frac{q(x^2 - l_0^2)}{I + qLR^2}}.$$

**12.27.** Вантаж  $M$  вагою  $P$  (рис. 12.35) може вільно перемішатись вздовж горизонтального стрижня  $AB$ , на який надіто пружини  $AA_1$  і  $BB_1$ . Коефіцієнти жорсткості пружин дорівнюють  $C_1$  і  $C_2$ . Пружини спочатку були в ненапруженому стані. Потім вантаж  $M$  відхилили вздовж стрижня  $AB$  на відстань  $\lambda$  і відпустили без початкової швидкості. Нехтуючи вагою пружин і тертям, визначити швидкість вантажу  $M$ , коли його центр ваги проходить положення статичної рівноваги.

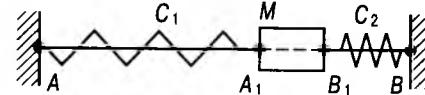


Рис. 12.35

$$\text{Відповідь: } v = \lambda \sqrt{\frac{g}{P} (C_1 + C_2)}.$$

**12.28.** Нитка, прикріплена одним кінцем до тіла  $A$  вагою  $P$  (рис. 12.36), яке рухається з тертям по горизонтальній площині, перекинута через нерухомий блок  $C$ , огинає рухомий блок  $B$  вагою  $Q$  і радіуса  $r$  і закріплена другим кінцем  $O$ . Визначити швидкість  $v$  тіла  $A$  як функцію переміщення  $S$  центра

блока  $B$ , якщо момент інерції останнього відносно центра мас дорівнює  $I$ , коефіцієнт тертя тіла  $A$  об площину дорівнює  $f$ .

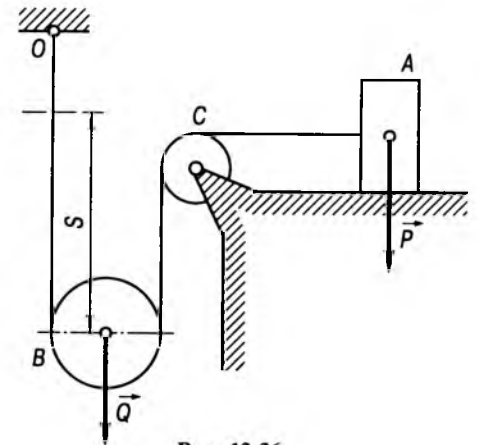


Рис. 12.36

$$\text{Відповідь: } v = 2r \sqrt{\frac{2(Q - 2Pf)Sg}{I + Qr^2 + 4Pr^2}}.$$

**12.29.** Тілу надали першу космічну швидкість  $v_0 = \sqrt{gR}$ , де  $g$  — прискорення сили тяжіння на поверхні Землі, а  $R$  — радіус Землі. Ця швидкість напрямлена вертикально вгору. Враховуючи тільки силу притягування Землі, яка змінюється обернено пропорційно квадрату відстані тіла від її центра, визначити: 1) на яку висоту  $h_1$  над поверхнею Землі піднімається тіло; 2) на яку висоту  $h_2$  воно підніметься, якщо його початкова швидкість становить  $1,4v_0$ .

Відповідь: 1)  $h_1 = R$ ; 2)  $h_2 = 49R$ .

**12.30.** Зубчасті колеса насаджені на нерухомі паралельні осі (рис. 12.37) і мають внутрішнє зчеплення. Колесо 1, радіус якого  $r_1$  і вага  $P_1$ , приводиться в рух зі стану спокою обертаючим моментом  $M$ . Вага зубчастого колеса 2 дорівнює  $P_2$ . Нехтуючи тертям, визначити кутову швидкість колеса 1 залежно від його кута повороту  $\varphi_1$  та кутове прискорення цього колеса. Вважати колесо 1 однорідним диском, а масу колеса 2 рівномірно розподіленою по ободу.

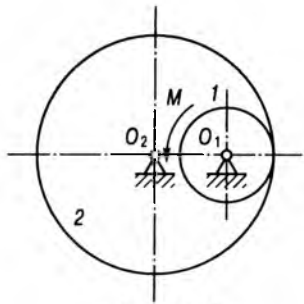


Рис. 12.37

Відповідь:

$$\omega_1 = \frac{4gM\varphi_1}{(P_1 + 2P_2)r_1^2}; \quad \varepsilon_1 = \frac{2gM}{(P_1 + 2P_2)r_1^2}$$

12.31. Циліндричний коток, вага якого  $P$  (рис. 12.38), почав скочуватися без ковзання вздовж площини, нахиленої під кутом  $\alpha$  до горизонту. При цьому стрижень  $OA$ , вага якого  $Q$ , переміщується поступально. Визначити швидкість осі  $O$  котка залежно від пройденого шляху  $S$ .

$$\text{Відповідь: } v^2 = \frac{4(P+Q)}{3P+2Q} gS \sin \alpha$$

12.32. Колесо  $I$  масою  $m_1$  може котитися без ковзання у вертикальній площині всередині нерухокої шестерні  $2$ ; воно при-

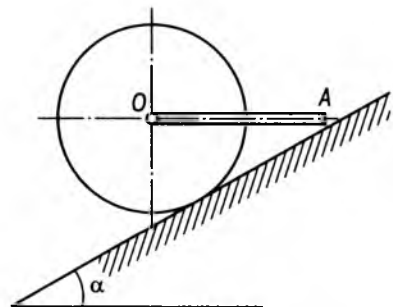


Рис. 12.38

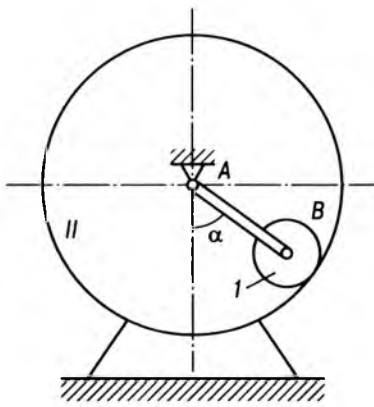


Рис. 12.39

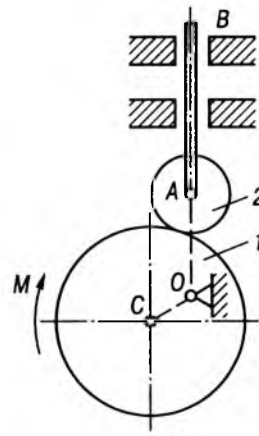


Рис. 12.40

водиться в рух кривошипом  $AB$  завдовжки  $L$  і масою  $m$  (рис. 12.39). У початковий момент кут  $\alpha$  між кривошипом і вертикальною віссю складає  $60^\circ$ . Кривошип відпустили без початкової швидкості. Визначити його кутову швидкість у момент проходження положення рівноваги. Тертям знехтувати.

$$\text{Відповідь: } \omega = \sqrt{\frac{3g(m+2m_1)}{L(2m+9m_2)}}$$

12.33. До однорідного ексцентрика  $I$  з нерухоною горизонтальною віссю обертання  $O$  прикладено сталий обертаючий момент, модуль якого дорівнює  $M$  (рис. 12.40). Вага ексцентрика  $Q_1$ , а радіус  $r_0$ . Вага диска  $2$  дорівнює  $Q_2$ , а вертикального стрижня  $AB$  —  $P$ .  $C$  — центр ваги ексцентрика,  $OC = a$ . У початковий момент відстань  $OA$  була мінімальною, а механізм перебував у стані спокою. Визначити кутову швидкість ексцентрика, якщо він повернувся на кут  $180^\circ$ .

Відповідь:

$$\omega_1^2 = 4g \frac{\pi M - 2a(P+Q_1+Q_2)}{Q(2a^2+r^2)+Q_2(a+r)^2}$$

#### 12.4.4. Розрахунково-графічна робота “Застосування теореми про зміну кінетичної енергії для вивчення руху механічної системи”

Механічна система внаслідок дії сили ваги починає рухатися із стану спокою. Початкове положення системи показано на рис. 12.41.

Враховуючи тертя ковзання тіла  $1$  (варіанти 1—6, 8—12, 17, 19—21, 23—26, 28—30) та опір коченню тіла  $3$ , яке котиться без ковзання (варіанти 2, 4, 5, 7—9, 11, 13—16, 18, 20—22, 24—27, 29), нехтуючи масами ниток, які вважаються нерозтяжними, знайти швидкість  $v$  та прискорення  $w$  тіла  $1$  в той момент, коли пройдений ним шлях буде дорівнювати  $S$ .

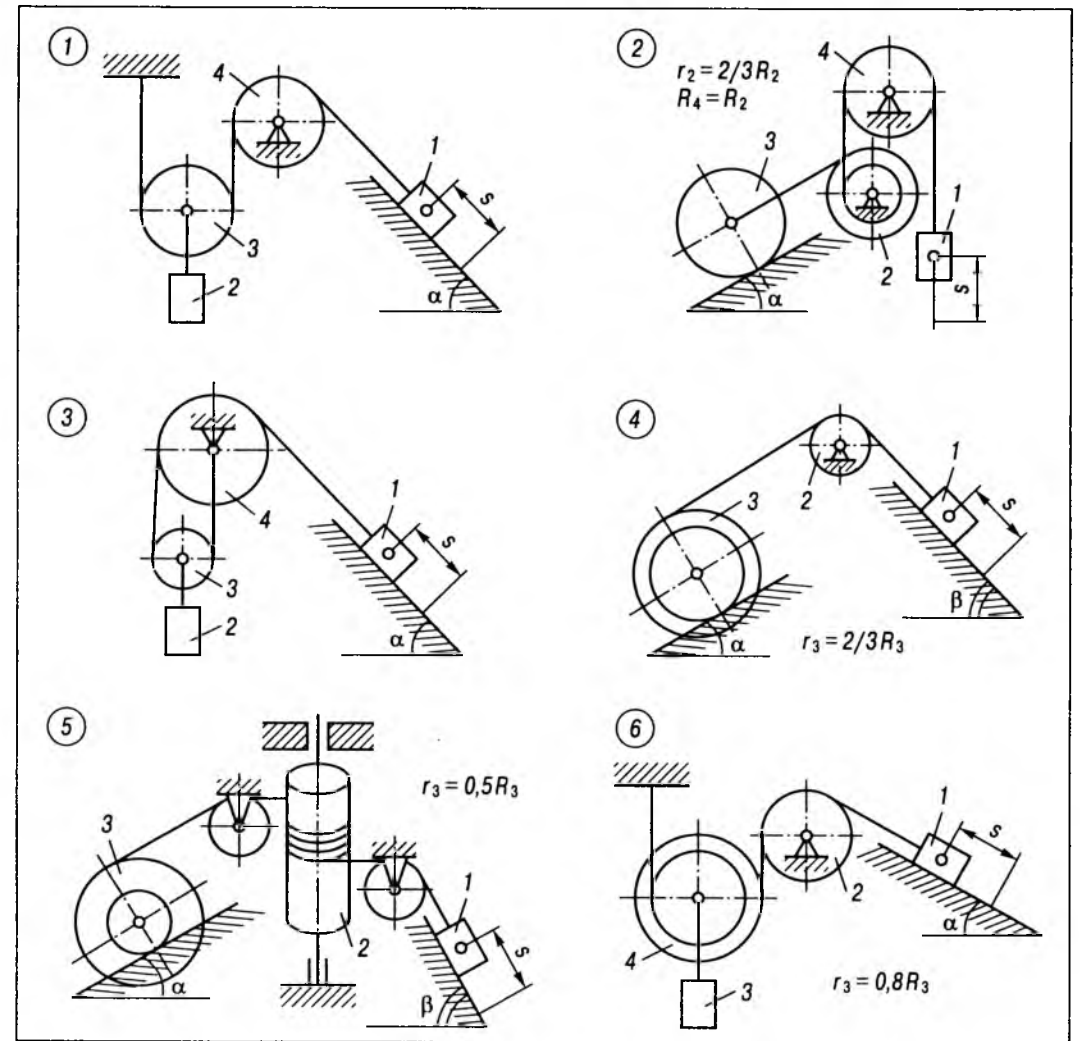


Рис. 12.41 (початок)

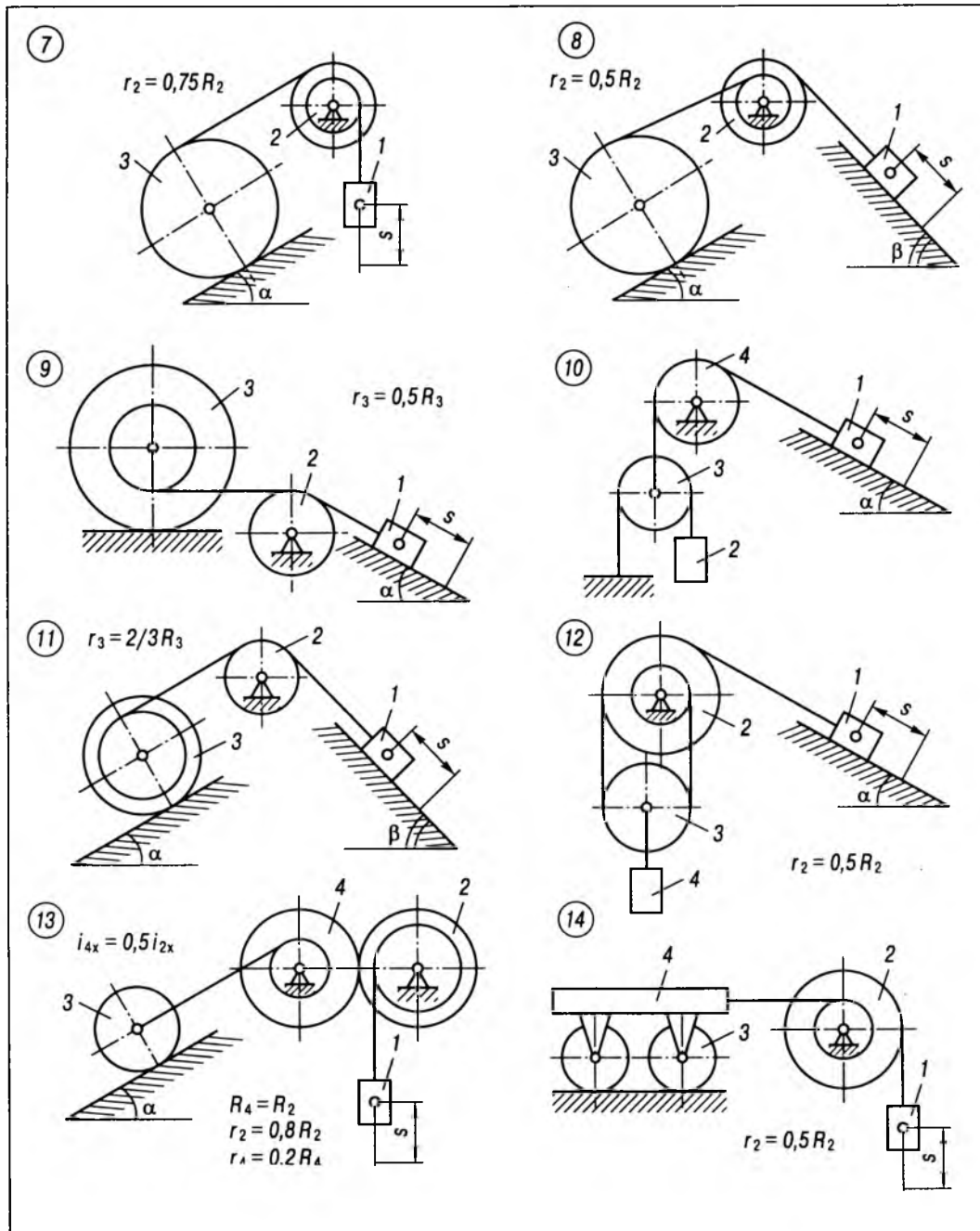


Рис. 12.41 (продовження)

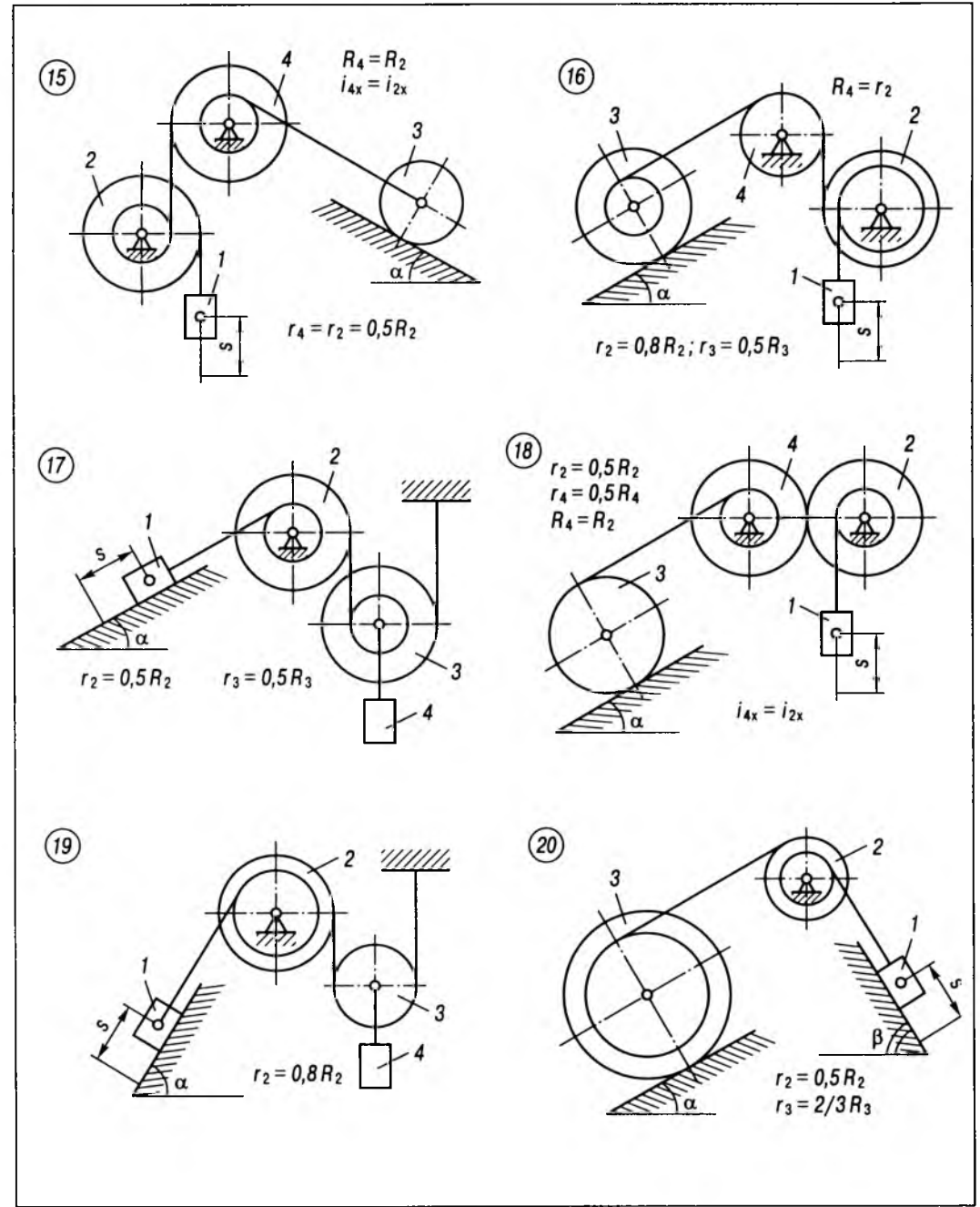


Рис. 12.41 (продовження)

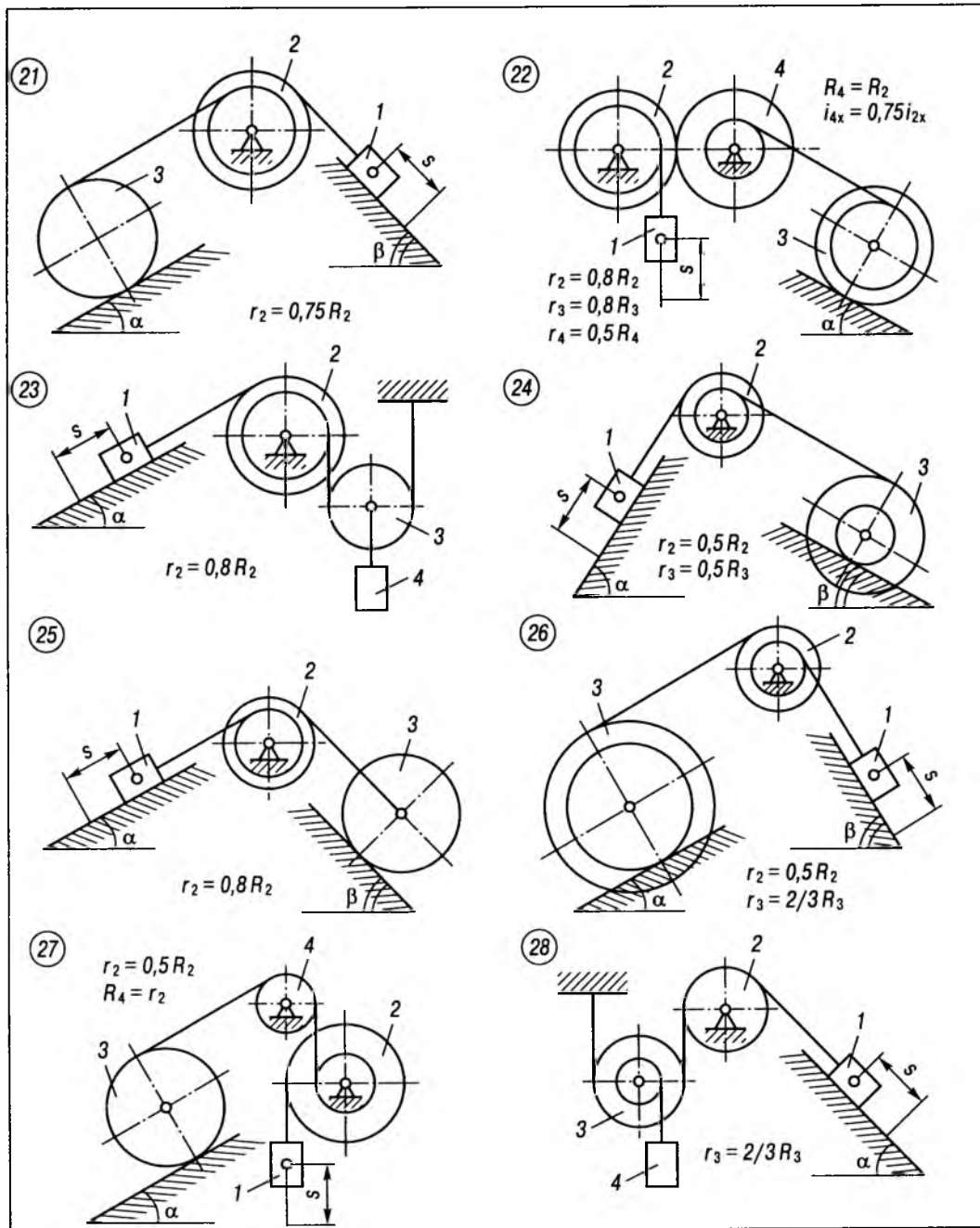


Рис. 12.41 (продовження)

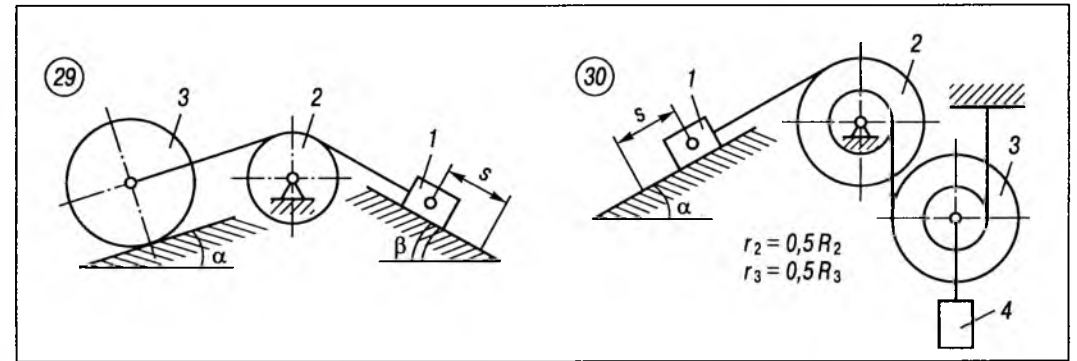


Рис. 12.41 (закінчення)

Таблиця 12.1

Номер варіанта	$m_1$ , кг	$m_2$ , кг	$m_3$ , кг	$m_4$ , кг	$R_2$ , кг	$R_3$ , кг	$i_{2x}$ , кг	$i_{3x}$ , кг	$\alpha$ , град	$\beta$ , град	$f$	$\delta$ , см	$S$ , м
1	$m$	$m$	$1/10 m$	$m$	—	—	—	—	45	—	0,1	—	2
2	$m$	$3 m$	$m$	$2 m$	15	20	12	—	30	—	—	0,2	2
3	$m$	$4 m$	$1/5 m$	$4/3 m$	—	—	—	—	60	—	0,1	—	2
4	$m$	$1/2 m$	$1/3 m$	—	—	30	—	20	30	45	0,22	0,2	2
5	$m$	$3 m$	$m$	—	—	28	—	20	30	60	0,1	0,28	1,5
6	$m$	$1/2 m$	$1/5 m$	$1/4 m$	—	20	—	18	30	—	0,1	—	1
7	$m$	$2 m$	$2 m$	—	16	25	14	—	30	—	—	0,2	2
8	$m$	$1/2 m$	$1/3 m$	—	16	24	12	—	30	45	0,15	0,2	1,75
9	$m$	$2 m$	$9 m$	—	—	30	—	20	30	—	0,12	0,25	1,5
10	$m$	$1/4 m$	$1/4 m$	$1/5 m$	—	—	—	—	60	—	0,1	—	3
11	$m$	$1/2 m$	$1/4 m$	—	—	30	—	25	30	45	0,17	0,2	2,5
12	$m$	$1/2 m$	$1/5 m$	$m$	30	—	20	—	30	—	0,2	—	2,5
13	$m$	$2 m$	$5 m$	$2 m$	30	20	26	—	30	—	—	0,24	2
14	$m$	$1/2 m$	$5 m$	$4 m$	30	25	26	—	—	—	—	0,2	2
15	$m$	$1/2 m$	$4 m$	$1/2 m$	20	15	18	—	30	—	—	0,25	1,5
16	$m$	$2 m$	$1/4 m$	$m$	20	20	18	15	30	—	—	0,2	1
17	$m$	$m$	$1/10 m$	$1/5 m$	20	20	15	15	30	—	0,1	—	1
18	$m$	$2 m$	$3 m$	$2 m$	20	20	15	—	30	—	—	0,2	3
19	$m$	$1/3 m$	$1/10 m$	$m$	24	—	20	—	60	—	0,15	—	1,5
20	$m$	$2 m$	$m$	—	16	30	12	25	30	60	0,1	0,2	1,5
21	$m$	$m$	$2 m$	—	20	20	16	—	30	45	0,2	0,32	1,2
22	$m$	$4/3 m$	$2 m$	$3/4 m$	20	20	16	18	30	—	—	0,25	1,2
23	$m$	$m$	$1/10 m$	$4/5 m$	20	—	18	—	30	—	0,1	—	1
24	$m$	$2 m$	$5 m$	—	16	20	12	16	60	30	0,15	0,2	1,2
25	$m$	$1/2 m$	$1/5 m$	—	15	20	12	—	30	45	0,15	0,2	1

Закінчення табл. 12.1

Номер варіанта	$m_1$ , кг	$m_2$ , кг	$m_3$ , кг	$m_4$ , кг	$R_2$ , кг	$R_3$ , кг	$i_{2x}$ , кг	$i_{3x}$ , кг	$\alpha$ , град	$\beta$ , град	$f$	$\delta$ , см	$S$ , м
26	$m$	$1/2m$	$m$	—	16	30	12	25	30	60	0,1	0,2	1
27	$m$	$m$	$6m$	$1/2m$	20	20	16	—	30	—	—	0,2	2
28	$m$	$2m$	$1/2m$	$1/4m$	—	18	—	16	45	—	0,2	—	2
29	$m$	$1/4m$	$1/8m$	—	—	35	—	—	15	30	0,2	0,2	2,4
30	$m$	$1/2m$	$3/10m$	$3/2m$	26	20	20	18	30	—	0,12	—	2

В умовах задач прийнято такі позначення:  $m_1, m_2, m_3, m_4$  — маса тіл 1, 2, 3, 4;  $R_2, r_2, R_3, r_3, R_4, r_4$  — радіуси великих і малих кіл;  $i_{2x}, i_{3x}, i_{4x}$  — радіуси інерції тіл 2, 3, 4 відносно горизонтальних осей, що проходять через їх центри мас;  $\alpha, \beta$  — кути нахилу площин до горизонту;  $f$  — коефіцієнт тертя ковзання;  $\delta$  — коефіцієнт тертя кочення. Дані для розв'язання задач наведено в табл. 12.1.

Блоки і котки, для яких радіуси інерції в таблиці не наведено, вважати суцільними однорідними циліндрами. Похилі ділянки ниток паралельні відповідним похилим площинам. У варіанті 14 візок 4 на чотирьох колесах 3.

### § 12.5. ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ МОМЕНТУ КІЛЬКОСТІ РУХУ (КІНЕТИЧНОГО МОМЕНТУ)

#### 12.5.1. Короткі теоретичні відомості

Момент кількості руху (або кінетичний момент) — друга міра механічного руху, яка застосовується в основному для характеристики обертального руху.

Моментом кількості руху  $\vec{k}_O$  точки відносно центра  $O$  називається величина, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора  $\vec{r}$  матеріальної точки, проведеного з центра  $O$ , на кількість руху цієї точки:

$$\vec{k}_O = \vec{r} \times \vec{q} = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

Кінетичним моментом  $\vec{K}_O$  матеріальної системи, або головним моментом кількості руху системи матеріальних точок відносно центра  $O$ , називається векторна сума моментів кількостей руху точок системи відносно того ж самого центра:

$$\vec{K}_O = \sum_{i=1}^n \vec{k}_{Oi} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i,$$

де  $\vec{k}_{Oi}$  — момент кількості руху  $i$ -ї точки;  $\vec{r}_i$  — радіус-вектор, що з'єднує нерухомий центр  $O$  з  $i$ -ю точкою системи;  $\vec{v}_i$  — швидкість  $i$ -ї точки.

Кінетичний момент твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі  $Oz$ , дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно нерухомої осі обертання на кутову швидкість:

$$K_z = I_z \omega.$$

Кінетичний момент твердого тіла при складному русі може бути визначений так:

1. Кінетичний момент тіла відносно нерухомого центра  $A$  дорівнює моменту кількості руху тіла, прикладеного в полюсі  $O$ , відносно того самого центра  $A$  ( $\vec{r}_O \times \vec{Q}$ ), складеному з векторним добутком  $\vec{p}_C \times m\vec{v}_O$ , а також з моментом кількості руху тіла в обертальному русі навколо полюса  $O$  ( $\vec{K}_O^\omega$ ):

$$\vec{K}_A = \vec{r}_O \times \vec{Q} + \vec{p}_C \times m\vec{v}_O + \vec{K}_O^\omega,$$

де  $\vec{r}_O$  — радіус-вектор, який визначає положення початку рухомої системи координат  $Oxuz$  (точки  $O$ ) в нерухомій системі координат  $A\xi\eta\zeta$ ;  $\vec{Q} = m\vec{v}_C$  — кількість руху твер-

дого тіла;  $\vec{p}_C$  — радіус-вектор центра мас  $C$  твердого тіла в рухомій системі координат  $Oxuz$ ;  $m$  — маса твердого тіла;  $\vec{v}_O$  — швидкість початку руху рухомої системи координат;  $\vec{K}_O^\omega$  — кінетичний момент твердого тіла, зумовлений лише обертанням рухомої системи координат відносно полюса  $O$ .

2. Якщо початок рухомої системи координат збігається з центром мас, то кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомого центра  $A$  дорівнює сумі моменту кількості руху тіла відносно того самого центра  $A$  ( $\vec{r}_C \times \vec{Q}$ ) у припущенні, що вся маса тіла зосереджена в центрі мас, і моменту кількості руху тіла в обертальному русі навколо центра мас  $C$  ( $\vec{K}_C^\omega$ ):

$$\vec{K}_A = \vec{r}_C \times \vec{Q} + \vec{K}_C^\omega.$$

Теорема про зміну моменту кількості руху точки. Похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно нерухомого центра  $O$  (або осі) дорівнює моменту  $\vec{M}_O$  рівнодійної сил  $\vec{F}$ , прикладених до точки, відносно того самого центра (або осі):

$$\frac{d\vec{k}_O}{dt} = \vec{M}_O,$$

або

$$m \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Звідси

$$m \frac{d}{dt} (y\dot{z} - z\dot{y}) = yF_z - zF_y,$$

$$m \frac{d}{dt} (z\dot{x} - x\dot{z}) = zF_x - xF_z,$$

$$m \frac{d}{dt} (x\dot{y} - y\dot{x}) = xF_y - yF_x,$$

де  $x, y, z$  — координати матеріальної точки;  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  — проекції швидкості цієї точки на осі координат;  $F_x, F_y, F_z$  — проекції рівнодійної сили на ті самі осі координат.

Теорема про зміну кінетичного моменту системи. Похідна за часом від кінетичного

моменту системи відносно нерухомого центра  $O$  дорівнює головному моменту зовнішніх сил  $\vec{M}_O^e$  відносно того самого центра:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e.$$

Теорема про зміну кінетичного моменту в інтегральній формі або теорема моменту імпульсів зовнішніх сил. Приріст кінетичного моменту матеріальної системи відносно нерухомого центра  $O$  за деякий проміжок часу  $[t_0, t]$  дорівнює головному моменту імпульсів  $\vec{L}_O^e$  зовнішніх сил, прикладених до точок системи, за той самий проміжок часу:

$$\vec{K}_O(t) - \vec{K}_O(t_0) = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e dt = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times d\vec{S}_i^e = \vec{L}_O^e.$$

Теорема Резаля. Швидкість  $\vec{v}_k$  кінця вектора кінетичного моменту системи відносно нерухомої точки  $O$  дорівнює головному моменту всіх зовнішніх сил відносно тієї самої точки:

$$\vec{v}_k = \frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e.$$

Для твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі  $Oz$ , вираз теореми про зміну кінетичного моменту набуває вигляду (диференціальне рівняння обертального руху тіла)

$$I_z \cdot \varepsilon = M_z^e,$$

де  $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\phi}$  — кутове прискорення тіла;  $I_z$  — момент інерції тіла навколо осі обертання  $Oz$ .

Закони збереження кінетичного моменту:

1. Якщо головний момент зовнішніх сил відносно деякої нерухомої точки  $O$  дорівнює нулю ( $\vec{M}_O^e = 0$ ), то кінетичний момент системи відносно тієї самої точки буде сталим як за величиною, так і за напрямком, тобто  $\vec{K}_O = \text{const} = \vec{K}_O(t_0)$ .

2. Якщо головний момент зовнішніх сил відносно однієї з координатних осей дорівнює нулю, то відповідний кінетичний момент системи відносно даної осі буде сталим ( $M_z = 0, K_z = \text{const}$ ).



### 12.5.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 12.19.** Матеріальна точка маси  $m = 0,5$  кг рухається за законом  $\vec{r} = 2\vec{i} + (4t^2 + 5)\vec{j}$ , де  $\vec{i}$  та  $\vec{j}$  — орти системи координат  $Oxuz$ . Визначити момент рівнодійної  $\vec{R}$  усіх прикладених до цієї точки сил відносно початку системи координат  $Oxuz$ .

**Розв'язування.** Для розв'язання задачі застосуємо теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки, тобто вираз

$$\frac{d\vec{k}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{R}).$$

Рівняння руху точки, записані координатним способом, мають вигляд:  $x = 2$  (м),  $y = 4t^2 + 5$  (м),  $z = 0$ . Проекції швидкості точки на осі декартової системи координат:  $v_x = \dot{x} = 0$ ,  $v_y = \dot{y} = 8t$ ,  $z = 0$ .

Момент кількості руху точки відносно початку координат визначаємо за означенням:

$$\vec{k}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4t^2 + 5 & 0 \\ 0 & 8t & 0 \end{vmatrix} = 16mt\vec{k} = 8t\vec{k},$$

де  $\vec{k}$  — одиничний вектор осі  $Oz$ .

Таким чином,  $k_{Ox} = 0$ ,  $k_{Oy} = 0$ ,  $k_{Oz} = 8t$ . Остаточо знаходимо

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \frac{dk_{Oz}}{dt} = 8 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

**Приклад 12.20.** В епіциклічному механізмі (рис. 12.42) рухоме колесо II радіуса  $r_2$  котиться без ковзання по нерухомому колесу I радіуса  $r_1$ . Колесо II приводиться в рух кривошипом III, який обертається з кутовою швидкістю  $\omega_3$  навколо нерухомої осі  $O_1$ . Скласти вираз моменту кількості руху  $K_z$  системи відносно нерухомої осі  $O_1z$  обертання кривошипа, яка перпендикулярна до площини рисунка.

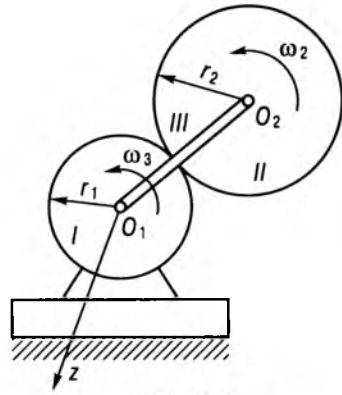


Рис. 12.42

**Розв'язування.** Кінетичний момент системи дорівнює сумі кінетичного моменту  $K_z^{III}$  кривошипа III і кінетичного моменту  $K_z^{II}$  колеса II, яке здійснює плоскопаралельний рух, тобто  $K_z = K_z^{III} + K_z^{II}$ .

Кривошип III здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі, тому його кінетичний момент

$$K_z^{III} = I_3\omega_3,$$

де  $I_3$  — момент інерції кривошипа відносно його осі обертання, яка проходить через точку  $O_1$ .

Кінетичний момент відносно осі  $O_1z$  колеса II, яке здійснює складний рух,

$$K_z^{II} = m_2(r_1 + r_2)^2\omega_3 + I_2\omega_2,$$

де  $m_2$  — маса колеса II;  $I_2$  — момент інерції колеса II відносно осі, яка проходить через точку  $O_2$ ;  $\omega_2$  — миттєва кутова швидкість колеса, що здійснює плоский рух. Визначаємо  $\omega_2$  із співвідношення

$$\omega_2 r_2 = \omega_3(r_1 + r_2),$$

яке відповідає рівності лінійних швидкостей точки  $O_2$ , що належить одночасно колесу II і кривошипу III. Тоді

$$\omega_2 = \frac{\omega_3(r_1 + r_2)}{r_2}.$$

Підставивши  $K_z^{II}$  і  $K_z^{III}$  у формулу для  $K_z$ , отримуємо

$$K_z = \left[ I_3 + I_2 \frac{r_1 + r_2}{r_2} + m_2(r_1 + r_2)^2 \right] \omega_3.$$

**Приклад 12.21.** Гвинт пароплава має момент інерції  $I$  і починає обертатися із стану спокою обертальним моментом  $M$ . На гвинт діють сили опору води, момент яких пропорційний квадрату кутової швидкості, тобто  $M_{\text{оп}} = k\omega^2$ , де  $k$  — сталий коефіцієнт.

Визначити середню кутову швидкість гвинта за проміжок часу, в кінці якого кутова швидкість гвинта буде дорівнювати  $\omega_1$ .

**Розв'язування.** Застосуємо диференціальне рівняння обертального руху тіла

$$I_z \varepsilon = M_z^e.$$

Зовнішніми моментами є обертальний момент  $M$  і момент опору  $M_{\text{оп}}$ . Отже,

$$I \frac{d\omega}{dt} = M - k\omega^2. \quad (1)$$

Середня кутова швидкість може бути визначена за формулою

$$\omega_c = \frac{\varphi}{t}.$$

Для знаходження  $\varphi$  і  $t$  зінтегруємо диференціальне рівняння обертального руху (1). Розділивши змінні, отримуємо

$$\frac{I d\omega}{M - k\omega^2} = dt.$$

Позначимо  $\frac{M}{k} = a^2$ , тоді  $\frac{I d\omega}{k(a^2 - \omega^2)} = dt$ .

Зінтегруємо останнє рівняння:

$$\frac{I}{2ak} \ln \frac{a + \omega}{a - \omega} \Big|_{\omega=0}^{\omega=\omega_1} = t, \text{ звідки } t = \frac{I}{2ak} \ln \frac{a + \omega_1}{a - \omega_1}.$$

Визначимо  $\varphi$  як функцію  $\omega$ . Для цього помножимо рівняння (1) на  $d\varphi$ , одержимо

$$I\omega d\omega = (M - k\omega^2) d\varphi.$$

Розділивши змінні, матимемо

$$\frac{I\omega d\omega}{M - k\omega^2} = d\varphi.$$

Після інтегрування знаходимо

$$-\frac{I}{2k} \ln(a^2 - \omega^2) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\omega_1} = \varphi,$$

звідки

$$\varphi = \frac{I}{2k} \ln \frac{a^2}{a^2 - \omega_1^2}.$$

Згідно з виразом  $\omega_c = \frac{\varphi}{t}$  середня кутова швидкість

$$\omega_c = a \frac{\ln \frac{a^2}{a^2 - \omega_1^2}}{\ln \frac{a + \omega_1}{a - \omega_1}}.$$

**Приклад 12.22.** Для визначення моменту інерції  $I$  тіла відносно вертикальної осі  $Oz$  його підвішують на пружному дроті  $ON$  так, щоб він збігався з прямою, яка проходить через центр мас тіла (точку  $C$ ) (рис. 12.43). Тіло повертають у горизонтальній площині на деякий малий кут  $\varphi$ . Внаслідок закручування дроту тіло буде здійснювати крутильні коливання навколо вертикальної осі з періодом  $T$ , який вимірюється секундоміром. Для розрахунку крутильної жорсткості дроту виконують другий дослід: підвищують тіло (наприклад, диск) з відомим моментом інерції  $I_0$ , для якого період коливань дорівнює  $T_0$ . Визначити момент інерції тіла  $I$ .

**Розв'язування.** Складемо диференціальне рівняння руху тіла. Момент сили ваги відносно осі обертання дорівнює нулю, тому що вісь обертання вертикальна. Не враховуємо момент опору повітря і масу дроту. При малому куті закручування дроту момент пружних сил реакції дроту пропорційний куту закручування і приймається рівним  $c\varphi$ , причому коефіцієнт пропорційності  $c$  (крутильна жорсткість) залежить від розмірів дроту і пружних властивостей його матеріалу.

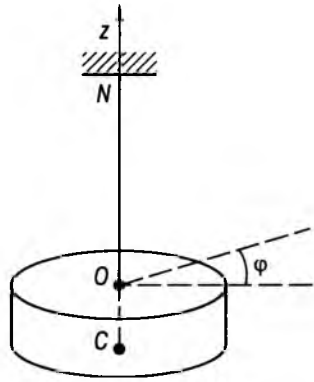


Рис. 12.43

Позначимо через  $I$  момент інерції тіла відносно осі  $OC$ , отримаємо диференціальне рівняння гармонічних коливань

$$I\ddot{\phi} = -c\phi.$$

Період коливань

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{c}}.$$

Для визначення невідомої жорсткості дроту на кручення (величини  $c$ ) запишемо період крутильних коливань  $T_0$  на тому ж дроті еталонного тіла з відомим моментом інерції  $I_0$  відносно осі  $OC$ . Маємо

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{c}},$$

звідки

$$c = \frac{4\pi^2 I_0}{T_0^2}.$$

Отже,

$$I = I_0 \frac{T^2}{T_0^2}.$$

**Приклад 12.23.** Однорідний горизонтальний диск (платформа) радіуса  $R$  і масою  $m$  має можливість обертатися без тертя навколо вертикальної осі (рис.12.44). Як зміниться кутова швидкість диска, якщо людина, що знаходиться на диску на відстані  $r$  від осі обертання, почне рухатися по колу радіуса  $r$  з відносною швидкістю  $v$ ? Маса людини дорівнює  $m_1$ .

Розв'язування. Об'єктом дослідження є механічна система, яка складається з диска з нерухомою віссю обертання  $Az$  і матеріальної точки, за яку приймається людина. Для розв'язання задачі використовується закон збереження кінетичного моменту системи відносно осі обертання.

Застосувавши аксіому про збільшення від в'язей, матимемо, що на механічну систему крім сил ваги будуть діяти ще й реакції підп'ятника  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$  і підшипника  $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$  осі обертання диска. Оскільки сили ваги  $\vec{P} = m\vec{g}$  та  $\vec{P}_1 = m_1\vec{g}$  паралельні осі  $Az$ , а реакції підп'ятника і підшипника перетинають її, то момент діючих на дану механічну систему зовнішніх сил відносно осі обертання  $Az$  дорівнює нулю:

$$\sum_i M_z(\vec{F}_i^e) = 0.$$

Кінетичний момент системи відносно цієї осі є сталою величиною:

$$K_z = \text{const}.$$

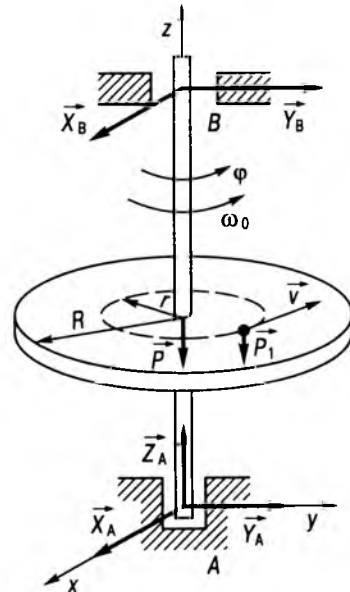


Рис. 12.44

Нехай початкове значення кутової швидкості диска дорівнює  $\omega_0$ , а потім, внаслідок руху людини, дорівнює  $\omega$ .

Складемо вирази  $K_z$  для початкового і поточного моментів часу і прирівняємо їх обидва значення. В початковий момент, коли людина не рухається по диску, кінетичний момент системи відносно осі повороту  $Az$  визначається як сума кінетичного моменту платформи та моменту кількості руху точки, нерухомої відносно платформи:

$$K_z = I_z\omega_0 + m_1 r^2 \omega_0.$$

Після того, як людина почне рухатись по платформі, кінетичний момент системи буде дорівнювати кінетичному моменту усієї системи від обертання з кутовою швидкістю  $\omega$ , складеному з моментом кількості руху відносно руху людини по платформі ( $m_1 vr$ ). Якщо людина рухається у бік обертання, маємо

$$K_z = I_z\omega + m_1 r^2 \omega + m_1 vr.$$

Прирівнявши отримані вирази кінетичних моментів, одержимо

$$I_z\omega + m_1 r^2 \omega + m_1 vr = I_z\omega_0 + m_1 r^2 \omega_0,$$

звідки

$$\omega = \frac{(I_z + m_1 r^2)\omega_0 - m_1 vr}{I_z + m_1 r^2}.$$

Момент інерції платформи, яку вважаємо однорідним диском,

$$I_z = \frac{mR^2}{2}.$$

Отже, кутова швидкість платформи (диска) від руху по ній людини зменшиться на величину

$$\Delta\omega = \frac{2m_1 rv}{mR^2 + 2m_1 r^2}.$$

**Приклад 12.24.** До вала  $I$  приєднано електричний двигун, обертальний момент якого дорівнює  $m_1$  (рис. 12.45, а). За допомогою редуктора швидкостей, що складається з чотирьох зубчастих коліс  $1, 2, 3$  і  $4$ , цей обертальний мо-

мент передається на шпindel III токарного верстата, до якого прикладено момент опору  $m_2$ . Визначити кутове прискорення шпindel III, якщо моменти інерції всіх деталей, які обертаються, відповідно дорівнюють  $I_I, I_{II}, I_{III}$ . Радіуси коліс дорівнюють  $r_1, r_2, r_3$  і  $r_4$ .

Розв'язування. Система складається з трьох частин, які обертаються: колеса  $I$ , проміжного вала  $II$  та шпindel III.

На систему, окрім прикладеного обертального моменту і моменту опору, діють сили ваги  $P_1, P_2, P_3, P_4$  зубчастих коліс і реакції  $X_A, Z_A, X_B, Z_B, X_C, Z_C, X_D, Z_D$  підшипників  $A, B, C$  і  $D$  осей обертання (рис. 12.45, б).

При розв'язанні задачі, якщо розглянути всю систему разом і застосувати теорему про зміну кінетичного моменту, наприклад, відносно осі обертання  $II-II$ , в диференціальне рівняння увійдуть моменти від невідомих реакцій підшипників  $C$  і  $D$ . Це робить неможливим розв'язання задачі. Тому проводимо дослідження руху системи, відокремлюючи колеса  $I, 4$  від вала  $II$  з колесами  $2$  і  $3$ .

Зображені на рис. 12.45, б колові зусилля  $\vec{S}_{12}, \vec{S}_{21}, \vec{S}_{34}$  та  $\vec{S}_{43}$  — це зусилля між зубцями коліс. Ці сили є внутрішніми силами для даної механічної системи. Сила  $\vec{S}_{12}$  для колеса  $I$  створює момент опору. Обертальний момент, що діє на проміжний вал  $II$ , зумовлений зусиллям  $\vec{S}_{21}$ . Сила  $\vec{S}_{43}$  створює обертальний момент для колеса  $4$ . Момент опору для колеса  $3$  створюється зусиллям  $\vec{S}_{34}$ . За законом рівності дії та протидії маємо

$$\vec{S}_{12} = -\vec{S}_{21}, \vec{S}_{34} = -\vec{S}_{43}.$$

До колеса  $I$  прикладено обертальний момент  $m_1$  і колове зусилля  $\vec{S}_{12}$  у точці дотику зубчастих коліс; диференціальне рівняння руху колеса  $I$

$$I_I \ddot{\phi}_1 = m_1 - S_{12} r.$$

До проміжного вала  $II$  прикладено колове зусилля  $\vec{S}_{21}$  і  $\vec{S}_{34}$ ; диференціальне рівняння руху вала  $II$

$$I_{II} \ddot{\phi}_2 = S_{21} r_2 - S_{34} r_3.$$

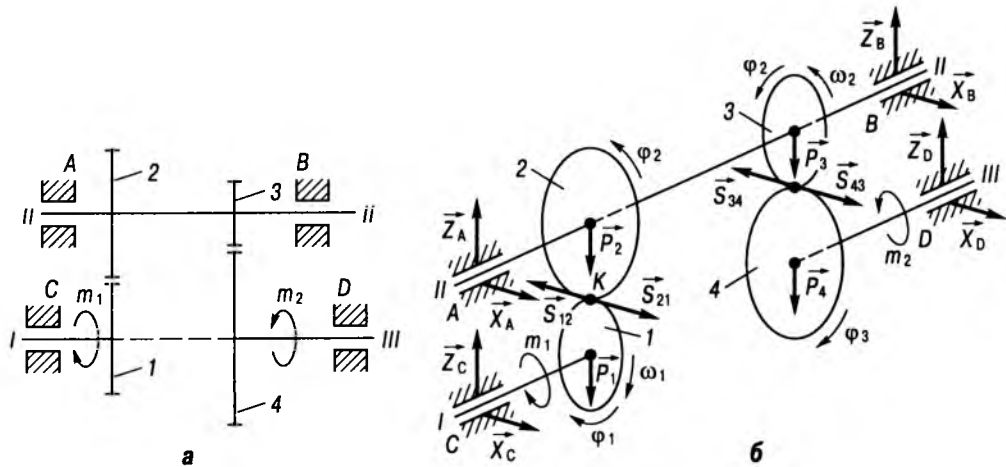


Рис. 12.45

До шпинделя прикладено колове зусилля  $\vec{S}_{43}$  і момент опору  $m_2$ ; диференціальне рівняння руху шпинделя III

$$I_{III} \ddot{\varphi}_3 = S_{43} r_4 - m_2.$$

Виразимо кутові прискорення  $\ddot{\varphi}_2$  і  $\ddot{\varphi}_3$  через кутове прискорення  $\ddot{\varphi}_1$  за допомогою кінематичних співвідношень

$$v_K = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2, \quad \omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2},$$

$$v_L = \omega_2 r_3 = \omega_3 r_4, \quad \omega_3 = \frac{\omega_2 r_3}{r_4},$$

де  $K, L$  — точки дотику коліс. Після диференціювання цих виразів отримаємо

$$\ddot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi}_1 \frac{r_1}{r_2}, \quad \ddot{\varphi}_3 = \ddot{\varphi}_2 \frac{r_3}{r_4} = \ddot{\varphi}_1 \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}.$$

Отже, рівняння руху набувають вигляду

$$I_I \ddot{\varphi}_1 = m_1 - S_{12} r, \quad I_{II} \ddot{\varphi}_1 \frac{r_1}{r_2} = S_{21} r_2 - S_{34} r_3,$$

$$I_{III} \ddot{\varphi}_1 \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} = S_{43} r_4 - m_2.$$

Далі виключаємо невідомі колові зусилля.

З рівняння руху зубчастого колеса I знаходимо зусилля  $S_{12}$ :

$$S_{12} = \frac{1}{r_1} (m_1 - I_I \ddot{\varphi}_1).$$

Враховуючи, що  $S_{12} = S_{21}$ , рівняння руху зубчастого колеса II запишемо у вигляді

$$I_{II} \ddot{\varphi}_1 \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_2}{r_1} (m_1 - I_I \ddot{\varphi}_1) - S_{34} r_3.$$

З останнього рівняння визначаємо

$$S_{34} = \frac{1}{r_3} \left[ \frac{r_2}{r_1} (m_1 - I_I \ddot{\varphi}_1) - I_{II} \ddot{\varphi}_1 \frac{r_1}{r_2} \right].$$

Враховуючи, що  $S_{34} = S_{43}$ , рівняння руху зубчастого колеса III буде таким:

$$I_{III} \ddot{\varphi}_1 \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} = \frac{r_4}{r_3} \left[ \frac{r_2}{r_1} (m_1 - I_I \ddot{\varphi}_1) - I_{II} \ddot{\varphi}_1 \frac{r_1}{r_2} \right] - m_2.$$

Розв'язавши останнє рівняння відносно  $\ddot{\varphi}_1$ , отримаємо

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{m_1 - m_2 \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}}{I_I + I_{II} \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 + I_{III} \left( \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \right)^2}.$$

Отже, шукане кутове прискорення

$$\varepsilon_3 = \ddot{\varphi}_3 = \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \ddot{\varphi}_1 = \frac{m_1 \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} - m_2}{\left[ I_I \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 + I_{II} \left( \frac{r_4}{r_3} \right)^2 + I_{III} \right]}.$$

### 12.5.3. Задачі для самостійного розв'язування

12.34. Шків, який обертається з кутовою швидкістю  $\omega_0$ , гальмується за допомогою ручного гальма (рис. 12.46). З якою силою  $P$  треба натиснути на рукоятку, щоб шків зупинився через  $t$  секунд, якщо коефіцієнт тертя  $f$ , довжина рукоятки  $a$ ,  $OK = b$ , момент інерції шківа  $I$ , його радіус  $r$ ? Визначити також число обертів  $N$ , яке здійснює шків до його зупинки.

$$\text{Відповідь: } P = \frac{I \omega_0 b}{a r f t}, \quad N = \frac{\omega_0^2 b I}{4 \pi a r f P} = \frac{\omega_0 t}{4 \pi}.$$

12.35. Маховик з моментом інерції  $I$  перед початком гальмування мав кутову швидкість  $\omega_0$ . Визначити, через який час його кутова швидкість зменшиться в два рази, якщо момент сил опору пропорційний квадрату кутової швидкості (коефіцієнт пропорційності дорівнює  $k$ ). Також визначити число обертів, яке здійснює маховик за вказаний проміжок часу. Яка при цьому середня кутова швидкість?

$$\text{Відповідь: } t = \frac{I}{\omega_0 k}; \quad N = \frac{I \ln 2}{2 \pi k}; \quad \omega_c = \omega_0 \ln 2.$$

12.36. Порожньому кільцю радіуса  $R$  надана деяка кутова швидкість навколо вертикального діаметра. В кільці з найвищої

точки під дією сили ваги рухається кулька  $M$  масою  $m$  (рис. 12.47). Знайти відношення найбільшої кутової швидкості кільця до найменшої, якщо момент інерції кільця відносно осі обертання дорівнює  $I$ .

$$\text{Відповідь: } \frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}} = 1 + \frac{m R^2}{I}.$$

12.37. Однорідний горизонтальний диск, маса якого  $m_1$  і радіус  $r$  (рис. 12.48), обертається навколо вертикальної осі  $Cz$  із сталою кутовою швидкістю  $\omega_0$ . З точки  $A$  ободу диска переміщується без початкової відносної швидкості точка  $M$ , рухаючись по хорді від  $A$  до  $B$ . Маса точки  $M$  дорівнює  $m_2$ . Нехтуючи тертям на осі, визначити кутову швидкість диска в момент, коли точка  $M$  перебуває на найкоротшій відстані  $a$  від центра диска і має відносну швидкість  $u$ .

$$\text{Відповідь: } \omega = \frac{(m_1 + 2m_2)r^2 \omega_0 - 2am_2 u}{m_1 r^2 + 2m_2 a^2}.$$

12.38. Вантаж  $M$  масою  $m_1 = 210$  кг утримується на похилій площині людиною масою  $m_2 = 70$  кг (рис. 12.49), яка уловила за мотузку в точці  $A$ . Радіуси блока  $r = 0,1$  м,  $R = 0,25$  м, кут  $\alpha = \arcsin \frac{5}{6}$ . Людина почала підніматися по мотузці вгору зі швидкістю  $u = 0,74$  м/с відносно мотузки.

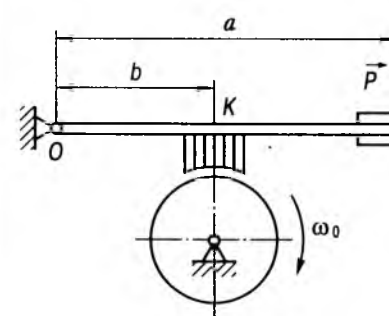


Рис. 12.46

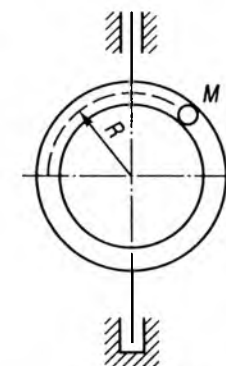


Рис. 12.47

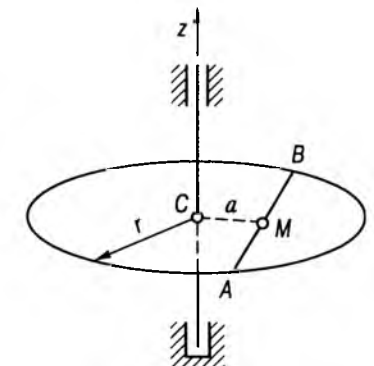


Рис. 12.48

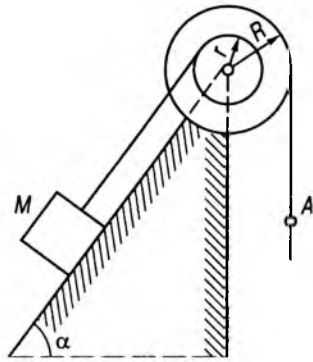


Рис. 12.49

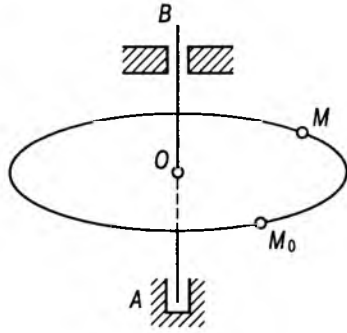


Рис. 12.50

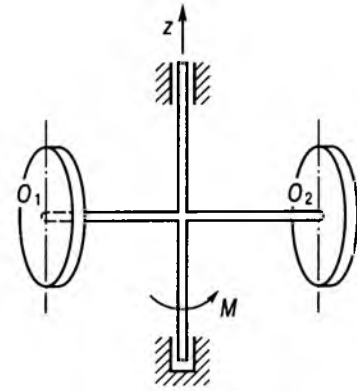


Рис. 12.51

Визначити, з якою швидкістю  $v$  при цьому рухатиметься вантаж  $M$ . Тертям знехтувати.

$$\text{Відповідь: } v = \frac{m_2 R r u}{m_1 r^2 + m_2 R^2} = 0,2 \frac{m}{c}.$$

12.39. Однорідний горизонтальний диск радіуса  $r$  масою  $m_1$  має можливість обертатися навколо нерухомої вертикальної осі  $AB$  (рис. 12.50), яка проходить через його центр  $O$ . По ободу диска рухається матеріальна точка  $M$  з масою  $m_2$  за законом  $s = M_0 M = \frac{at^2}{2}$ .

Визначити кутове прискорення  $\varepsilon$  диска, якщо в початковий момент часу диск був нерухомий. Тертям знехтувати.

$$\text{Відповідь: } \varepsilon = \frac{2am_2}{(2m_2 + m_1)r}.$$

12.40. Два однорідні диски розміщені у вертикальних площинах і обертаються навколо вертикальної осі  $z$  під дією момента  $M$  (рис. 12.51). Маса кожного диска  $m$ , а радіус  $R$ . Відстань від осі обертання до площини кожного диска дорівнює  $a$ . Невагомий стрижень  $O_1 O_2$  перпендикулярний до площин дисків. Нехтуючи тертям, визначити кутове прискорення дисків.

$$\text{Відповідь: } \varepsilon = \frac{2M}{m(R^2 + 4a^2)}.$$

12.41. Дерев'яна дошка завдовжки  $l$  масою  $m$  може обертатися без тертя навколо горизонтальної осі  $OO_1$  (рис. 12.52). В середині дошки застряє куля, яка летить перпендикулярно до площини дошки зі швидкістю  $v_0$ . Визначити кутову швидкість, яку матиме дошка в момент попадання кулі, якщо маса кулі дорівнює  $m_1$ .

$$\text{Відповідь: } \omega = \frac{6m_1 v_0}{l(4m + 3m_1)}.$$

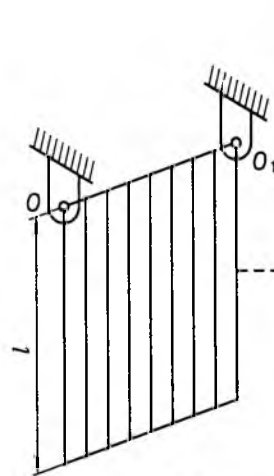


Рис. 12.52

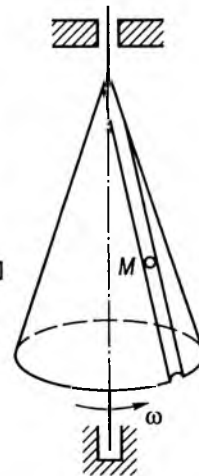


Рис. 12.53

12.42. В однорідному круглому конусі масою  $m_1$  з вертикальною віссю обертання просвердлено тонкий канал вздовж твірної (рис. 12.53). Конусу надають кутову швидкість  $\omega_0$  навколо осі повороту і одночасно з цим опускають у верхній отвір канала кульку  $M$  масою  $m_2$ , не надаючи їй початкової швидкості. Визначити кутову швидкість конуса в момент, коли кулька вискочить із каналу.

$$\text{Відповідь: } \omega = \frac{3m_1}{3m_1 + 10m_2} \omega_0.$$

12.43. Однорідний горизонтальний диск радіуса  $r$  масою  $m_1$  може вільно обертатися навколо вертикальної осі, яка проходить через його центр. На диску в точці, яка знаходиться на відстані  $h = \frac{2}{3}r$  від осі обертання, знаходиться людина масою  $m_2$ . Визначити кут повороту диска при переміщенні людини вздовж концентричного кола радіуса  $h$  на половину його довжини. Тертям знехтувати.

$$\text{Відповідь: } \varphi = \frac{8\pi m_2}{9m_1 + 8m_2}.$$

#### 12.5.4. Розрахункові завдання "Застосування теореми про зміну кінетичного моменту для визначення кутової швидкості твердого тіла"

Перша частина задачі. Тіло  $H$  масою  $m_1$  обертається навколо вертикальної осі  $z$  з постійною кутовою швидкістю  $\omega_0$ ; при цьому в точці  $O$  жолоба  $AB$  тіла  $H$  на відстані  $AO$  від точки  $A$ , яка відраховується вздовж жолоба, знаходиться матеріальна точка  $K$  масою  $m_2$ . В деякий момент часу ( $t=0$ ) на систему починає діяти пара сил з моментом  $M_z = M_z(t)$ . При  $t = \tau$  дія пари сил припиняється. Визначити кутову швидкість  $\omega_\tau$  тіла  $H$  в момент  $t = \tau$ .

Друга частина задачі. Тіло  $H$  обертається за інерцією з кутовою швидкістю  $\omega_\tau$ . У деякий момент часу  $t_1 = 0$  ( $t_1$  — початок нового відліку часу) точка  $K$  починає відносний рух з положення  $O$  вздовж жолоба  $AB$  (в напрямку до  $B$ ) за законом  $OK = s = s(t)$ . Визначити кутову швидкість  $\omega_T$  тіла  $H$  в момент часу  $t_1 = T$ .

Тіло  $H$  розглядати як однорідну пластинку, яка має форму, зображену на рис. 12.54. Знак "мінус" перед  $M_z$  і  $\omega$  відповідає напрямку обертання за стрілкою годинника, якщо дивитися зі сторони додатного напрямку осі  $z$ .

З уваження. При застосуванні теореми про зміну кінетичного моменту до системи, яка складається з платформи і матеріальної точки, кінетичний момент  $K_z$  системи відносно осі  $z$  визначається як сума кінетичного моменту платформи та моменту кількості руху матеріальної точки. При цьому слід зазначити, що абсолютна швидкість матеріальної точки складається з відносної  $\vec{v}_r$  та переносної  $\vec{v}_e$  швидкостей, тобто  $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ . Тому кількість руху матеріальної точки  $m\vec{v}_a = m\vec{v}_r + m\vec{v}_e$ . Тоді можна скористатися теоремою Варіньона, згідно з якою

$$M_z(m\vec{v}_a) = M_z(m\vec{v}_r) + M_z(m\vec{v}_e),$$

де моменти  $M_z(m\vec{v})$  відповідних кількостей руху точки відносно осі  $z$  визначаються і як моменти сил.

При розв'язанні задач корисно зобразити на допоміжному рисунку вид на платформу зверху (з кінця осі  $z$ ).

У випадку обертання тіла  $H$  (платформа) за інерцією, коли  $M_z = 0$  і потрібно визначити кутову швидкість  $\omega_T$ , слід скористатися законом збереження кінетичного моменту. При цьому потрібно визначити і показати на рисунку положення матеріальної точки  $K$  при  $t_1 = T$ , а також знайти величину і напрямок відносної

швидкості  $\bar{v}_r$  у цей момент часу. Потім обчислюють величину  $K_z$  для моменту часу  $t = \tau$  ( $\omega = \omega_\tau$ ), записують вираз  $K_z$  для рухомої матеріальної точки при  $t_1 = T$  і застосовують закон збереження кінетичного моменту.

Варіанти завдань з необхідними числовими даними наведено в табл. 12.2, відповідні схеми механічних систем подано на рис. 12.54.

Вирази для визначення моментів інерції тіла  $H$  (платформи) для запропонованих завдань наведено в табл. 12.3.

Таблиця 12.2

Номер варіанта	$m_1$	$m_2$	$\omega_0$ , рад/с	$a$	$b$	$R$	$\alpha$ , град	$AO$ , м	$M_z = M_z^*(t)$ , Н·м	$\tau$ , с	$OK = s = s(t_1)$	$T$ , с
	кг			м								
1	32	10	-1	1,5	-	1	-	$\pi R/6$	$-29,6 t^2$	3	$\frac{5\pi R}{12} t_1$	1
2	200	60	-2	1	-	2	120	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	101	5	$\sqrt{3} t_1^2$	1
3	120	40	0	2	-	-	-	0	$-120 t$	4	$\frac{\sqrt{2}}{4} t_1^2$	2
4	16	5	-3	-	-	1	30	0,4	$21 t$	2	$0,6 t_1$	2
5	66	10	1,5	2	1,5	-	-	0	$15\sqrt{t}$	4	$0,5 t_1$	2,5
6	160	80	-1,25	2,5	-	1,5	-	$\pi R/6$	$-700 t$	3	$\frac{5\pi R}{18} t_1^2$	3
7	300	50	-2	0,8	-	1,6	-	0	968	1	$\frac{\pi a}{4} t_1$	2
8	80	20	0	1,2	-	2	-	$\frac{\pi a}{2}$	$240\sqrt{t}$	4	$\frac{\pi a}{4} t_1$	2
9	20	5	5	0,8	-	1,2	45	$\frac{\pi a}{4}$	$-29,2 t$	3	$\frac{3\pi a}{18} t_1^2$	1
10	100	40	2	4	2	-	-	0,5	$-90\sqrt{t}$	4	$0,5 t_1^2$	1
11	60	20	-1	2	-	-	15	0	$40 t$	2	$0,4 t_1^2$	2
12	40	10	-3	2	-	1	-	0	$50 t^2$	3	$\frac{\pi a}{3} t_1$	2
13	24	4	4	1	-	-	-	0	$-27\sqrt{t}$	1	$1,5 t_1^2$	1

Номер варіанта	$m_1$	$m_2$	$\omega_0$ , рад/с	$a$	$b$	$R$	$\alpha$ , град	$AO$ , м	$M_z = M_z^*(t)$ , Н·м	$\tau$ , с	$OK = s = s(t_1)$	$T$ , с
	кг			м								
14	40	10	2	-	-	1	-	0	$120 t$	1	$0,5 t_1$	3
15	120	50	-4	4	2	2	-	0	$330 t^2$	2	$\frac{\pi R}{3} t_1^2$	1
16	60	10	-5	1	-	-	30	0,4	74	2	$0,3 t_1^2$	2
17	50	10	-2	-	-	1,6	30	0,6	$69 t$	4	$0,6 t_1$	2
18	120	50	3	2	3	0,8	-	$\pi R/2$	324	3	$\frac{\pi R}{8} t_1^2$	2
19	90	30	1	1,5	-	-	-	0	$-135 t$	2	$\frac{\pi a}{6} t_1^2$	1
20	50	12	3	1	-	1,5	-	$\pi a/6$	$-14 t^2$	3	$\frac{\pi a}{12} t_1^2$	2
21	40	10	-6	1	-	-	-	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$75\sqrt{t}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{16} t_1^2$	2
22	150	50	-1	0,6	-	1,6	-	$\pi R/2$	163	4	$\frac{\pi R}{2} t_1^2$	1
23	90	20	2	$\sqrt{2}$	1	-	-	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-210	2	$\frac{\sqrt{3}}{2} t_1$	1
24	50	12	-3	-	-	0,6	-	0,2	$27 t^2$	2	$0,4 t_1$	2
25	36	8	-5	-	-	0,5	-	0	$20 t$	2	$\frac{\pi R}{6} t_1^2$	2
26	150	40	-4	1,5	-	2	-	$\pi R/6$	$1170\sqrt{t}$	1	$\frac{\pi R}{2} t_1^2$	1
27	120	30	0	1	$\sqrt{3}$	-	60	0	$-25 t$	2	$t_1^2$	1
28	15	4	-2	0,6	-	-	-	0,1	$-5,6 t$	3	$0,4 t_1$	1
29	20	5	5	1	-	1	-	0	$-6,3\sqrt{t}$	4	$\frac{5\pi R}{2} t_1$	1
30	150	50	0	-	1,2	1,6	-	0	$652 t$	2	$0,2 t_1^2$	2

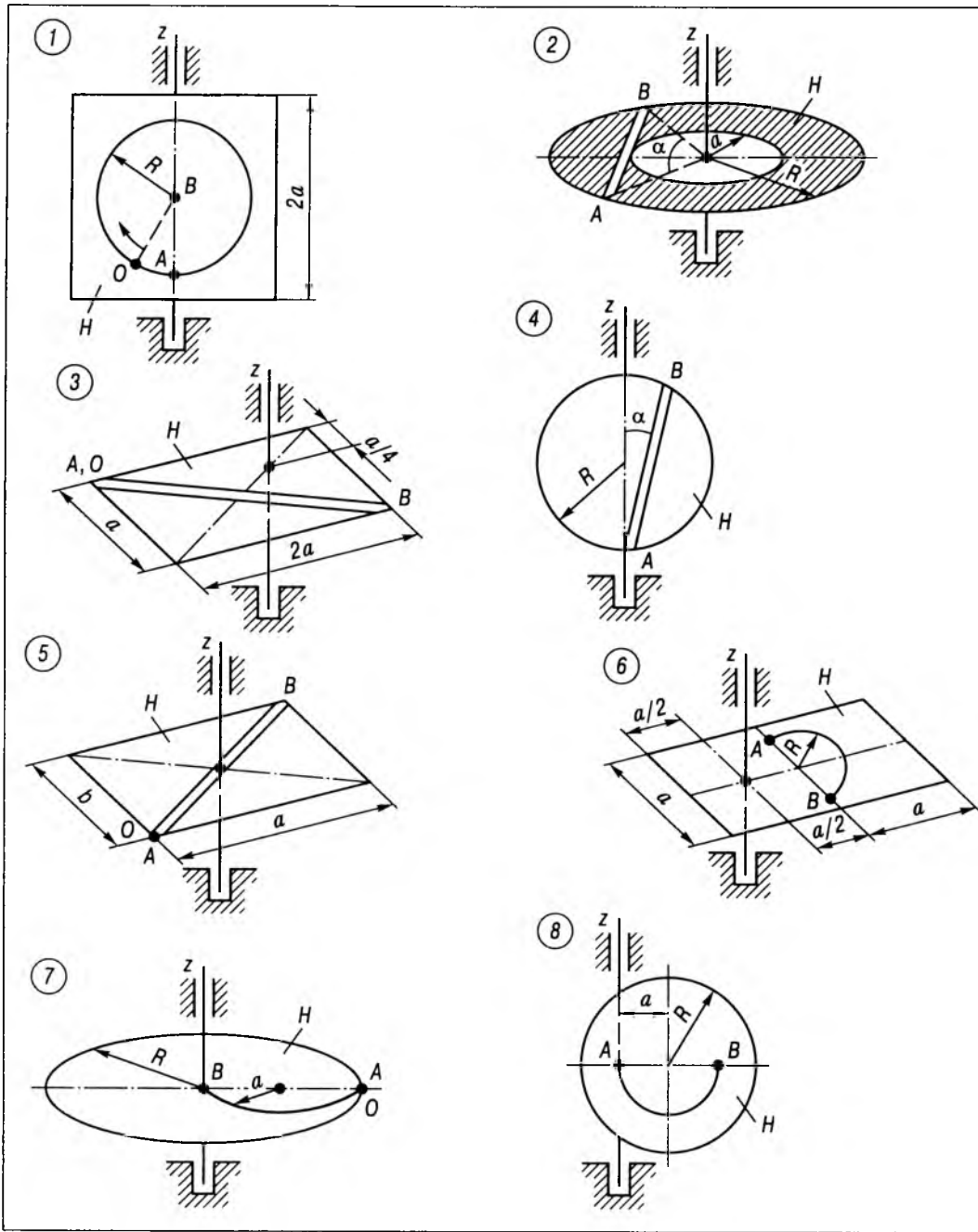


Рис. 12.54 (початок)

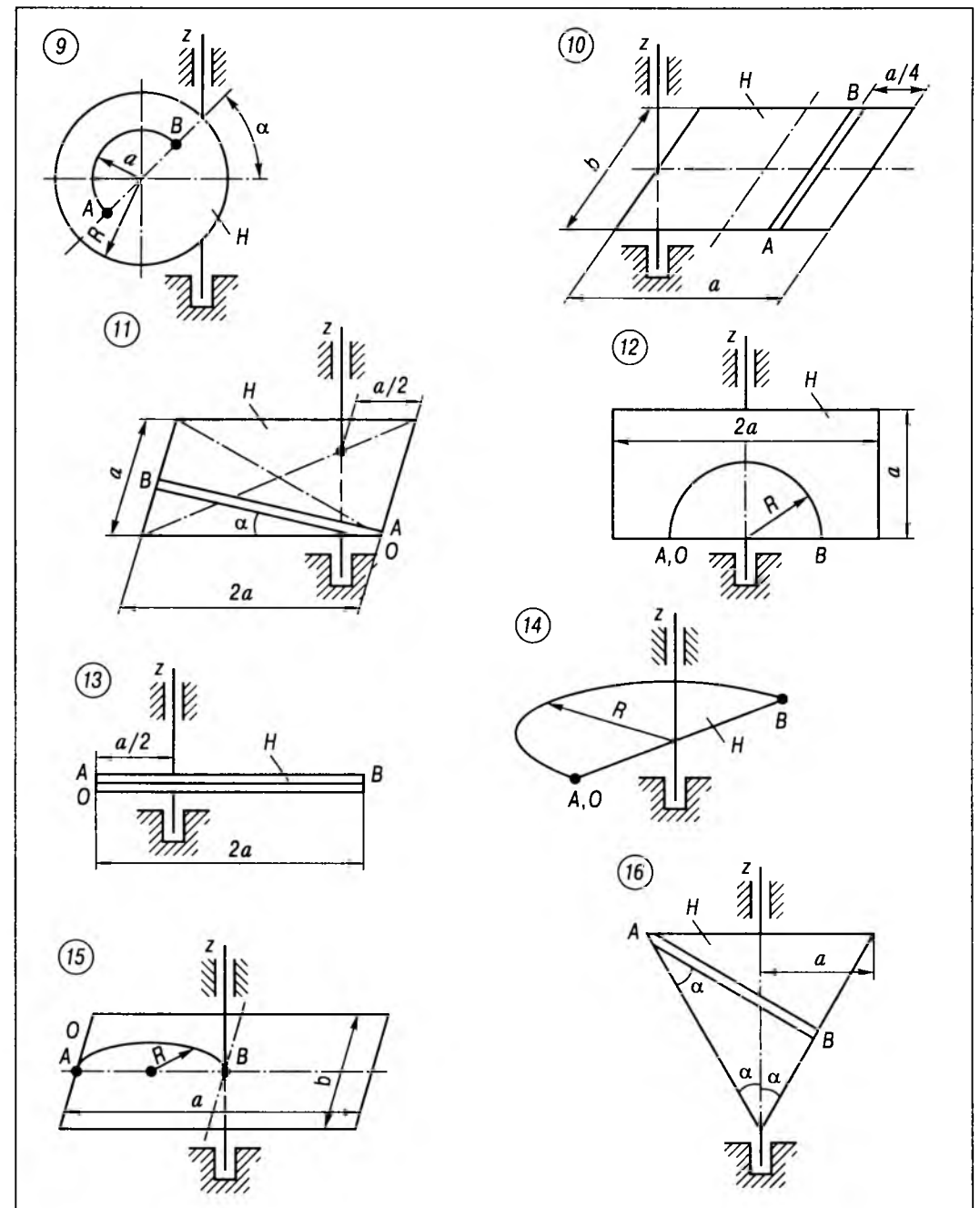


Рис. 12.54 (продовження)

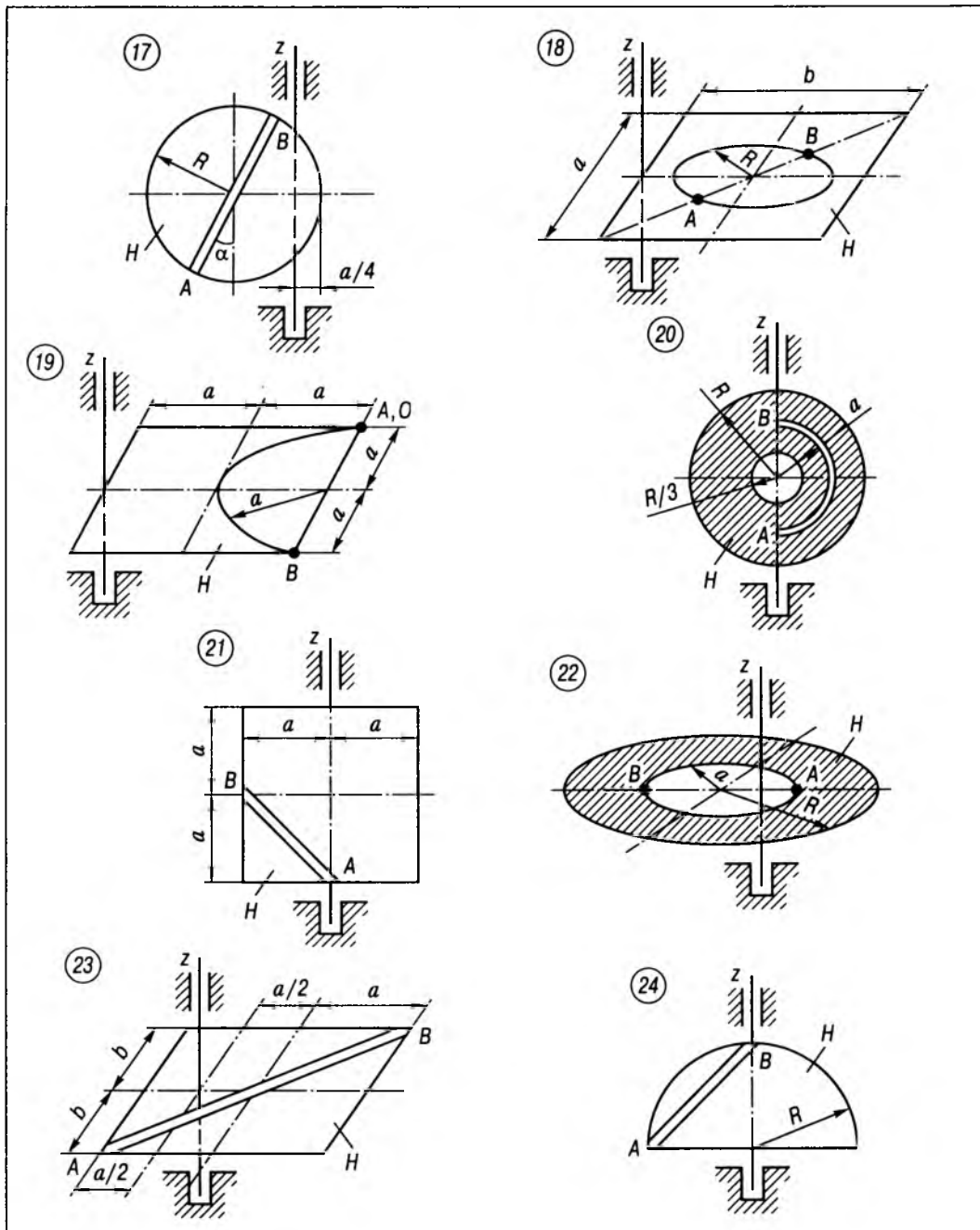


Рис. 12.54 (продовження)

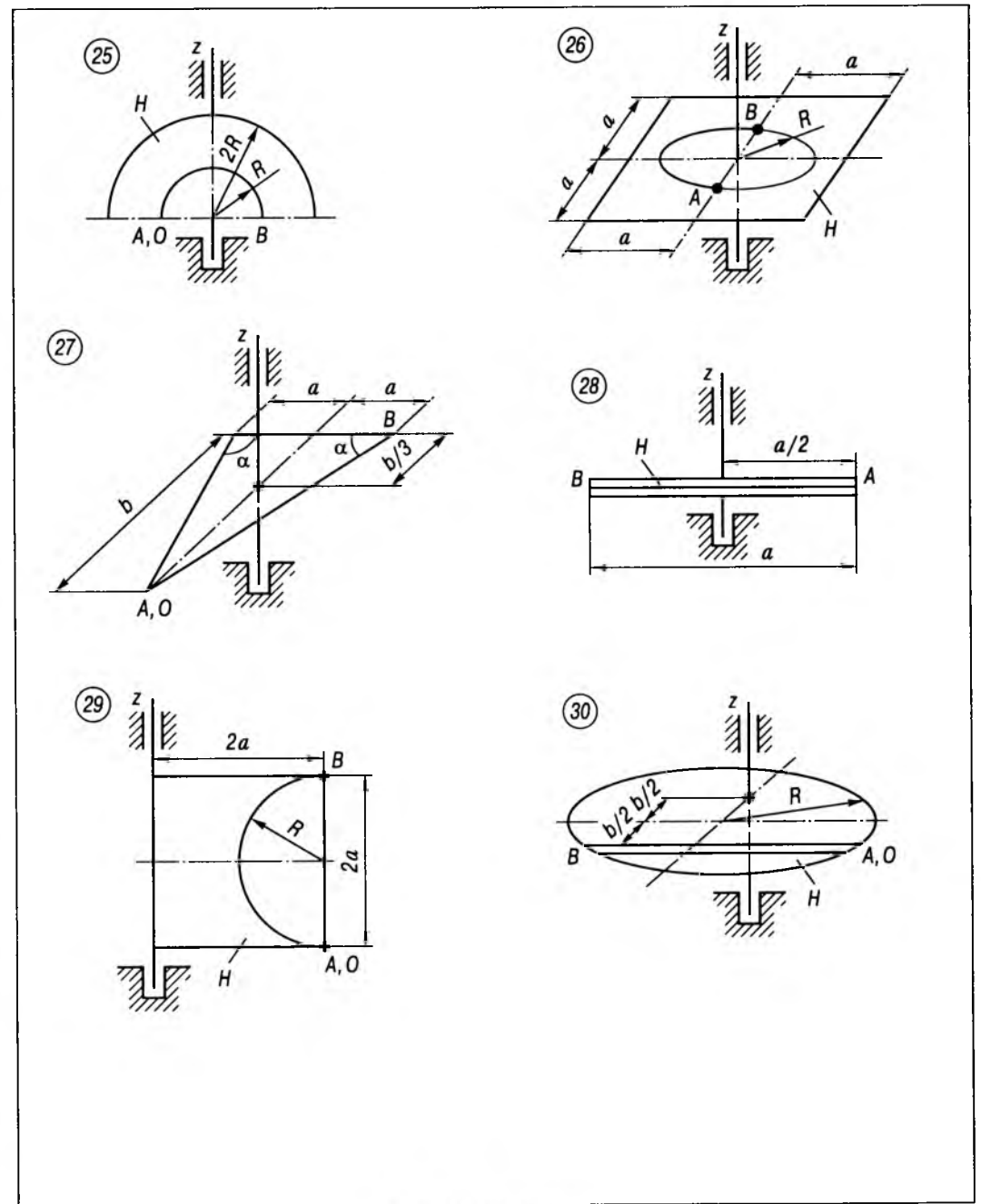


Рис. 12.54 (закінчення)

Таблиця 12.3

Фігура *	$J_x$	$J_y$	$J_z$	Фігура *
	$\frac{mR^2}{2}$	$\frac{mR^2}{4}$	$\frac{mR^2}{4}$	
	$\frac{m(R^2 + r^2)}{2}$	$\frac{m(R^2 + r^2)}{4}$	$\frac{m(R^2 + r^2)}{4}$	
	$\frac{m(a^2 + b^2)}{3}$	$\frac{mb^2}{3}$	$\frac{ma^2}{3}$	
	$\frac{ma^2}{3}$	0	$\frac{ma^2}{3}$	
	$\frac{m(3a^2 + b^2)}{18}$	$\frac{mb^2}{18}$	$\frac{ma^2}{6}$	

\* Зауважимо, що моменти інерції тіл і їх половинок (зображених зліва і справа) відносно вказаних осей визначаються однаковими формулами, але значення моментів інерції відрізнятимуться, оскільки маса, яка входить у формули, пропорційна площі поперечного перерізу тіла або довжині стрижня.

## Розділ 13

### МЕТОД КІНЕТОСТАТИКИ

#### § 13.1. ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА ДЛЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

##### 13.1.1. Короткі теоретичні відомості

Принцип Д'Аламбера (точніше, з історичної точки зору, — принцип Германа—Ейлера—Д'Аламбера), головна ідея якого полягає в умовному додаванні до системи заданих (активних) сил ще й фіктивних сил інерції і розглядуванні отриманої системи сил як “зрівноваженої”, є основою методу кінетостатики. Названий метод дає змогу застосувати до такої системи сил весь арсенал засобів статки. Використання цієї ідеї при вивченні динаміки відносного руху стає в нагоді при складанні диференціальних рівнянь руху (див. розділ 14).

У теоретичній механіці розрізняють два види сил інерції, а саме — даламберові та ейлерові.

Розглянемо спочатку даламберові сили інерції. Пояснимо фізичний зміст появи даламберової сили інерції на прикладі вільної матеріальної точки масою  $m$ , на яку діє деяка сила  $\vec{F}$ . Тоді, за другим законом Ньютона, ця точка набуває прискорення  $\vec{w}$ , напрямком його такий же, як і прикладеної до точки сили  $\vec{F}$ . Зазначимо, що точка починає рухатися *прискорено*. В свою чергу, до того тіла, яке приклало силу  $\vec{F}$  до матеріальної точки, що розглядається, буде прикладена за третім законом Ньютона сила протидії  $-\vec{F}$ . Зауважимо, що якщо уявно прикласти цю силу протидії до досліджуваної точки, то отримана система сил  $\{\vec{F}, \vec{\Phi} = -\vec{F}\}$ , прикладених до точки, буде “зрівноваженою”. Точка перебуватиме в “рівновазі”. Цю уявно прикладену до точки (а отже, — фіктивну) силу протидії і називають *даламберовою*

силою інерції і позначають  $\vec{\Phi}$ . “Прикладаючи” останню до точки, замість прискореного руху можна розглядати “рівновагу” точки.

Застосування ейлерових сил інерції показано у наступному розділі 14.

З введенням поняття *сили інерції*  $\vec{\Phi} = -m\vec{w}$  основне рівняння динаміки точки зводиться до статичного рівняння

$$\sum \vec{F}_i + \vec{\Phi} = \vec{0},$$

що відповідає *принципу Д'Аламбера*, який формулюється так:

*якщо до діючих на одну точку активних сил і реакцій в'язей умовно додати силу інерції, то отримана система сил перебуватиме у стані “рівноваги”.*

Через  $\sum \vec{F}_i$  позначено векторну суму активних сил та реакцій в'язей.

Дійсно, рівновага точки під дією цієї системи сил є фіктивною, оскільки сила інерції фіктивна.

Таким чином, за допомогою принципу Д'Аламбера будь-яка динамічна задача (для матеріальної точки) зводиться формально до відповідної статичної задачі, тобто до застосування умов рівноваги відповідної збіжної системи сил. В найбільш загальному випадку отримуємо три рівняння проєкцій усіх сил на три взаємно перпендикулярні осі.

Зазначимо, що принцип Д'Аламбера надає відомі зручності при розв'язанні прямої задачі динаміки точки, але при розв'язанні оберненої задачі краще використовувати диференціальні рівняння руху.

Зауваження: при використанні цього принципу необхідно пам'ятати, що сила інерції завжди спрямована у бік, протилежний прискоренню.

При розв'язанні задач за допомогою принципу Д'Аламбера рекомендується дотримуватися такої послідовності.



1. Виділити точку, рух якої досліджується, і зобразити її на рисунку.

2. Показати всі активні (задані) сили, що діють на точку.

3. Звільнити точку від в'язей, замінити в'язі відповідними реакціями, які також вказати на рисунку.

4. Додати до отриманої системи сил силу інерції.

5. Розглянути утворену "зрівноважену" систему сил і скласти для неї необхідні рівняння "рівноваги".

6. Знайти шукані величини і проаналізувати отриманий розв'язок.

### 13.1.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 13.1.** Точка  $O$  масою  $m$  закріплена шарнірно за допомогою двох невагомих стрижнів завдовжки  $L_1$  і  $L_2$  (рис. 13.1) на вертикальному валу  $AB$ , що обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ . Визначити зусилля в обох стрижнях, якщо кути  $\alpha$  і  $\beta$  відомі.

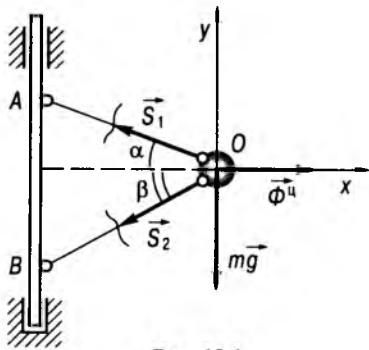


Рис. 13.1

**Розв'язування.** До точки прикладено: силу ваги  $mg$ , реакції умовно відкинутих стрижнів<sup>1</sup> —  $\vec{S}_1$  та  $\vec{S}_2$ , а також силу інерції нормального прискорення<sup>2</sup>, відому

<sup>1</sup> Зусилля в стрижнях мають ту ж саму величину, але протилежний напрям.

<sup>2</sup> Тут і надалі сили інерції прикладаються до матеріальної точки умовно.

під назвою *відцентрової сили*  $\Phi^u = m\omega_n^2 = m\omega^2 L_1 \cos \alpha$ .

Для отриманої збіжної плоскої системи сил складемо два рівняння проєкцій всіх сил, прикладених до точки  $O$ , на осі  $Ox$  і  $Oy$ , і розв'яжемо їх відносно  $S_1$  і  $S_2$ . Рівняння мають вигляд

$$\sum F_{ix} = \Phi^u - S_1 \cos \alpha - S_2 \cos \beta = 0,$$

$$\sum F_{iy} = S_1 \sin \alpha - S_2 \sin \beta = mg,$$

або

$$S_1 \cos \alpha + S_2 \cos \beta = m L_1 \omega^2 \cos \alpha,$$

$$S_1 \sin \alpha - S_2 \sin \beta = mg.$$

Додаючи і віднімаючи ці рівняння, попередньо домножуючи їх на  $\sin \beta$ ,  $\cos \beta$  та  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ , отримуємо

$$S_1 (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) =$$

$$= m L_1 \omega^2 \cos \alpha \sin \beta + mg \cos \beta;$$

$$S_2 (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) =$$

$$= m L_1 \omega^2 \cos \alpha \sin \alpha - mg \cos \alpha,$$

звідки остаточно матимемо (беручи до уваги, що  $L_1 \cos \alpha = L_2 \cos \beta$ )

$$S_1 = \frac{m(L_2 \omega^2 \sin \beta + g) \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)},$$

$$S_2 = \frac{m(L_1 \omega^2 \sin \alpha - g) \cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Таким чином, задача розв'язана.

**Приклад 13.2.** Повзун масою  $m$  переміщується вздовж горизонтальної напрямної за допомогою нерозтяжного троса, що навитий на барабан радіуса  $r$ , який обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо нерухомої горизонтальної осі (рис. 13.2). Визначити зусилля в тросі як функцію відстані  $OA = x$ . Тертя знехтувати.

**Розв'язування.** Для визначення швидкості повзуна застосуємо теорему про проєкції швидкостей точок  $A$  і  $B$  на трос, який за умовою є нерозтяжним:

$$v_A \cos \alpha = v_B \cos 0^\circ;$$

$$v_A = \frac{v_B}{\cos \alpha} = r\omega \frac{x}{\sqrt{x^2 - r^2}}.$$

Прискорення повзуна визначимо диференціюванням швидкості за часом  $t$ :

$$w_A = \frac{dv_A}{dt} = \frac{dv_A}{dx} \frac{dx}{dt} =$$

$$\sqrt{x^2 - r^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - r^2}} v_A =$$

$$= r\omega \frac{x^2 - r^2 - x^2}{(x^2 - r^2)^{3/2}} \left( r\omega \frac{x}{\sqrt{x^2 - r^2}} \right) = -\frac{r^4 \omega^2 x}{(x^2 - r^2)^2}.$$

Від'ємний знак прискорення означає, що воно напрямлене в зворотний бік осі  $Ox$ . Отже, силу інерції  $\vec{\Phi}$  ( $\Phi = mw_A$ ) треба спрямувати в додатному напрямку цієї осі.

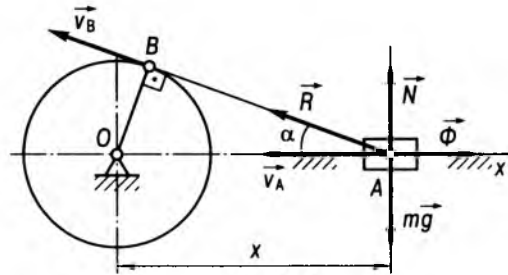


Рис. 13.2

Запишемо рівняння проєкцій сил, прикладених до повзуна, на вісь  $Ox$  і визначимо зусилля в тросі  $\vec{T}$  (реакцію з боку троса, прикладену до повзуна, позначимо  $\vec{R}$ ):

$$\sum F_{ix} = \Phi - R \cos \alpha = 0,$$

звідси отримаємо

$$T = R = \frac{mw_A}{\cos \alpha} = \frac{mr^4 \omega^2 x}{(x^2 - r^2)^2 \sqrt{x^2 - r^2}} = \frac{mr^4 \omega^2 x^2}{(x^2 - r^2)^{5/2}}.$$

Отже, задача розв'язана.

**Приклад 13.3.** Тіло маси  $m$  висить на пружині жорсткості  $c$  (рис. 13.3) і може рухатись у вертикальному напрямку. На тіло окрім сили ваги і сили пружності діє збурююча сила  $F = H \sin pt$  і сила опору повітря  $\vec{R} = -\alpha \vec{v}$ . Скласти диференціальне рівняння руху тіла.

**Розв'язування.** Коли на точку діють сили, що залежать від її положення (наприклад, сили пружності, які присутні і в даному випадку), існує положення, в якому сили, прикладені до точки, взаємно зрівноважені, або, іншими словами, точка перебуває у рівновазі. У таких випадках зручно координати точки відраховувати від статичного положення рівноваги. Деформації  $\delta$  пружних елементів (пружин, ресор, тощо) в такому положенні рівноваги називаються *статичними деформаціями*.

Для визначення статичної деформації пружини  $\delta_{ст}$  розглянемо рівновагу тягаря під дією тільки сили ваги і сили пружності (рис. 13.3, а). Очевидно, що  $F_{п} = mg$  або  $c\delta_{ст} = mg$ , звідки отримуємо, що  $\delta_{ст} = mg/c$ .

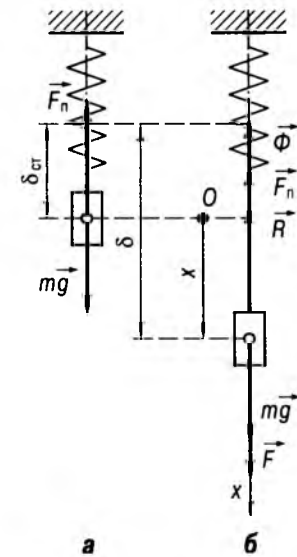


Рис. 13.3

Визначене вище положення рівноваги приймаємо за початок координат (точка  $O$  на рис. 13.3, б). Надамо додатне переміщення координаті  $x$  тягара і прикладемо всі діючі на нього сили — ваги і збурюючу вниз, а силу пружності  $\vec{F}_n$  пружини, силу опору  $\vec{R}$  і силу інерції  $\vec{\Phi}$  — вгору.

Пояснимо, як треба визначати напрямки сил опору і сил інерції при складанні диференціального рівняння руху за допомогою принципу Д'Аламбера: незалежно від початкових умов задачі (вони не впливають на вигляд диференціального рівняння) *потрібно* прийняти, що точка рухається зі швидкістю і прискоренням, напрямленими в бік зростання координати. Отже, опір і сили інерції *потрібно* спрямувати у від'ємному напрямку, тобто в бік зменшення координати. Так визначається напрямки не лише для матеріальної точки, але й для тіла або матеріальної системи.

Проектуючи всі сили на вісь  $Ox$  і замінюючи  $\delta_{ct}$  на  $mg/c$ , отримуємо диференціальне рівняння руху

$$\sum F_{ix} = F + mg - F_n - R - \Phi = 0,$$

або

$$H \sin pt + mg - c(\delta_{ct} + x) - \alpha \dot{x} - m\ddot{x} = 0,$$

звідси остаточно маємо рівняння руху

$$m\ddot{x} + \alpha \dot{x} + cx = H \sin pt.$$

### 13.1.3. Задачі для самостійного розв'язування

13.1. При якому прискоренні розірветься трос під час підйому тіла масою 500 кг, якщо трос витримує максимальну силу натягу 15 кН?

Відповідь: 20,2 м/с<sup>2</sup>.

13.2. Спортивний літак виконує "мертву петлю" радіусом 200 м і рухається по ній зі швидкістю 360 км/год. З якою силою  $P$  пілот масою 80 кг буде тиснути на сидіння в нижній і верхній точках петлі?

Відповідь: у нижній точці  $P_n = 4,78$  кН, а у верхній  $P_v = 3,22$  кН.

13.3. Невагомий стрижень  $OM$  завдовжки  $L$  обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$  навколо вертикальної осі, що проходить через кінець  $O$  стрижня (рис. 13.4). Стрижень може відхилитися від вертикальної осі обертання, повертаючись навколо осі циліндричного шарніра  $O$ . На кінці  $M$  стрижня закріплений точковий тягар масою  $m$ . До середини  $A$  стрижня приєднана пружина жорсткістю  $c$ , другий кінець якої закріплено на осі обертання.

Визначити деформацію  $\Delta$  пружини та довжину  $l_v$  вільної пружини, якщо при кутовій швидкості обертання  $\omega$  кут відхилення стрижня становить  $\alpha$ , а відстань  $AO = OB = L/2$ .

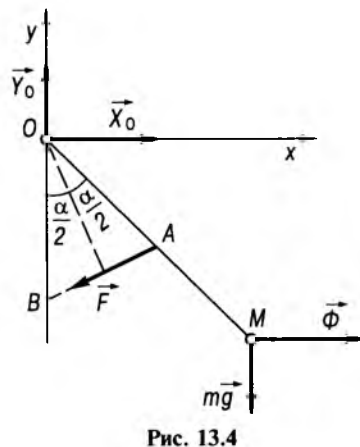
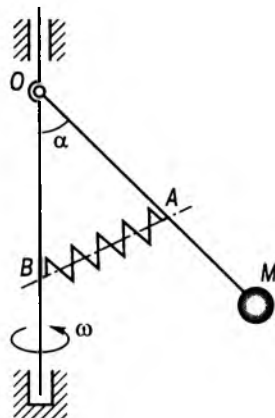


Рис. 13.4

Відповідь:  $\Delta = \frac{4m}{c} (\omega^2 L \cos \alpha - g) \times \sin \frac{\alpha}{2}$ ,  $l_v = L \sin \frac{\alpha}{2} - \Delta$ .

13.4. Матеріальна точка  $A$  масою  $m$  починає рухатися із стану спокою (положення  $O$ ) вздовж гладенької синусоїдальної напрямної  $OBC$ , рівняння якої  $y = -a \sin \left( \frac{2\pi}{L} x \right)$ .

Визначити силу, з якою точка тисне на напрямну, під час проходження нею найнижчого положення  $B$  (рис. 13.5).

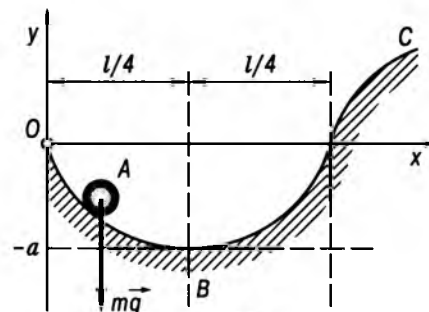


Рис. 13.5

Відповідь:  $N = mg \left( 1 + 16\pi^2 \frac{a^2}{L^2} \right)$ .

13.5. У кузові вантажівки, не торкаючись бортів, за ходом руху стоїть порожній контейнер. При якому уповільненні  $w$  контейнер буде ковзати по кузову, якщо коефіцієнт тертя його дна по кузову дорівнює  $f$ ?

Відповідь:  $w > fg$ .

13.6. Гімнаст, маса якого  $m = 78$  кг, виконує вправу "сонце", роблячи чотири оберти за 6 с. Приймаючи, що маса гімнаста зосереджена у його центрі мас на відстані  $L = 1,2$  м від поперечини і гімнаст обертається рівномірно, визначити силу, з якою він повинен триматися за поперечину у найвищому і найнижчому положеннях.

Відповідь:  $N_v = 878$  Н,  $N_n = 2407$  Н.

13.7. П'ять однакових брусків з'єднані нерозтяжною ниткою, перекинutoю через

невагомим блокам (рис. 13.6). Визначити прискорення брусків, якщо середні два бруски перебувають на горизонтальному столі. Тертя не враховувати.

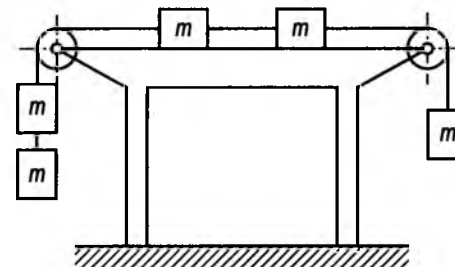


Рис. 13.6

Відповідь:  $w = 1,96$  м/с<sup>2</sup>.

13.8. Порожня трубка, що має форму дуги кола, обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\omega = 10$  рад/с навколо вертикальної осі (рис. 13.7). У трубці знаходиться кулька масою  $m = 10$  г. Визначити нормальну реакцію трубки і радіус кола  $r$ , якщо кулька відносно трубки нерухома, а  $\cos \alpha = 0,49$ . Тертям знехтувати.

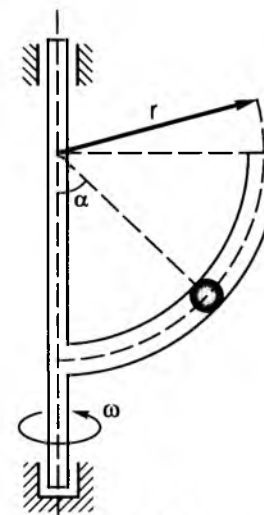


Рис. 13.7

Відповідь:  $N = 0,2$  Н;  $r = 0,2$  м.

13.9. На балці  $AB$ , встановленій на двох шарнірних опорах, знаходиться лебідка, що підіймає з прискоренням  $w = 2 \text{ м/с}^2$  тягар, вага якого  $Q = 6 \text{ кН}$  (рис. 13.8). Визначити, на якій відстані  $AK$  треба встановити лебідку, для того щоб опорна реакція у точці  $B$  становила  $9,9 \text{ кН}$ , а також повну реакцію в точці  $A$ , якщо вага балки  $G = 15 \text{ кН}$ . Лебідку вважати невагомою.

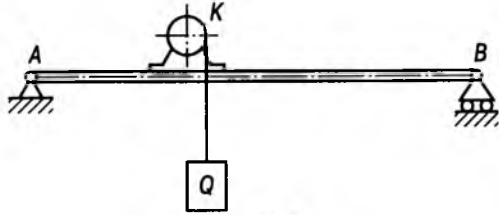


Рис. 13.8

Відповідь:  $R_A = 12,3 \text{ кН}$ ;  $AK = \frac{1}{3} AB$ .

13.10. Конічна лійка з кутом при вершині  $2\beta$  обертається навколо вертикальної осі  $Oz$  з кутовою швидкістю  $\omega = 5,72 \text{ рад/с}$  (рис. 13.9).

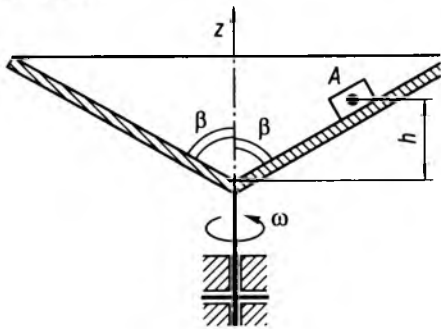


Рис. 13.9

Визначити величину кута  $\beta$ , при якому тягарець  $A$ , що знаходиться всередині лійки, утримуватиметься у заданому положенні ( $h = 0,1 \text{ м}$ ) при відсутності тертя між тягарцем  $A$  і поверхнею лійки?

Відповідь:  $\beta = 60^\circ$ .

13.11. Тіло, маса якого  $m$ , рухається прямолінійно із заданим прискоренням  $\vec{w}$  по

горизонтальній площині під дією відомої сили  $\vec{F}$ , що утворює з горизонтом кут  $\alpha$ . Визначити коефіцієнт тертя  $f$  між тілом, що пересувається, і площиною (рис. 13.10).

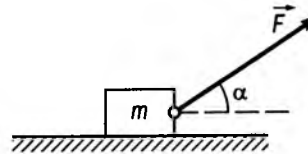


Рис. 13.10

Відповідь:  $f = \frac{F \cos \alpha - mw}{mg - F \sin \alpha}$ .

13.12. Порожня чаша, подовжній переріз внутрішньої поверхні якої описується рівнянням  $y = ax^2$ , рівномірно обертається навколо своєї вертикально розташованої осі симетрії зі швидкістю  $n$  об/хв. Всередині чаші знаходиться кулька масою  $m$ . Знайти висоту  $h$ , що відповідає положенню рівноваги кульки відносно чаші, і реакцію  $\vec{N}$  останньої в цьому положенні (рис. 13.11).

Відповідь:  $h$  — будь-яке,

$$N = \frac{m\pi^2 n^2}{1800a} \sqrt{1 + 4a^2 h^2}$$

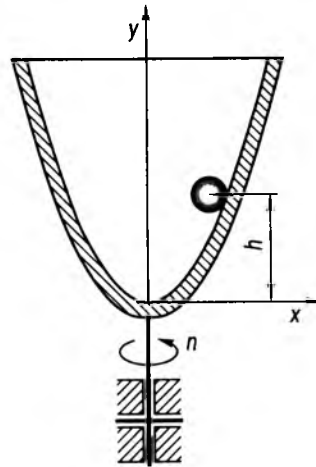


Рис. 13.11

13.13. Чи відокремлюється частка руди  $M$  від поверхні стрічки стрічкового конвеєра в місці набігання стрічки на барабан, якщо мінімальна швидкість частки дорівнює  $\sqrt{gR \cos \alpha}$  ( $R$  — радіус барабана), а стрічка нахилена до горизонту під кутом  $\alpha$  (рис. 13.12).

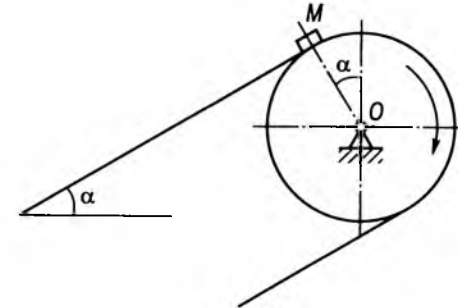


Рис. 13.12

Відповідь: частка відокремлюється від поверхні стрічки.

## § 13.2. ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА ДЛЯ СИСТЕМИ

### 13.2.1. Короткі теоретичні відомості

Застосування принципу Д'Аламбера до механічної системи (до кожної її точки) дає можливість надати диференціальним рівнянням руху всієї системи вигляд рівнянь статички. Цей метод отримав назву *методу кінестатики*, і формулюється так: *якщо до діючих на механічну систему сил додати сили інерції, то отримана система сил перебуватиме у "рівновазі"*.

Оскільки головний вектор і головний момент внутрішніх сил рівні нулеві, то умови "рівноваги" залежно від вибору центра зведення (полюса  $O$  або центра мас  $C$ ) записуються у вигляді

$$\begin{cases} \vec{F}^e + \vec{F}^\Phi = \vec{0}, \\ \vec{M}_O^e + \vec{M}_O^\Phi = \vec{0}, \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{F}^e + \vec{F}^\Phi = \vec{0}, \\ \vec{M}_C^e + \vec{M}_C^\Phi = \vec{0}. \end{cases}$$

Проекції цих рівнянь на осі координат називаються *рівняннями кінестатики*.

З них можна отримати диференціальні рівняння руху твердого тіла, якщо підставити вирази головного вектора і головного моменту сил інерції.

За теоремами про рух центра мас та про зміну кінетичного моменту можна отримати вирази для головного вектора сил інерції:

$$\vec{F}^\Phi = -m\vec{w}_C, \quad (13.2)$$

та головного моменту сил інерції

$$\vec{M}_O^\Phi = -\frac{d\vec{K}_O}{dt} \quad \text{або} \quad \vec{M}_C^\Phi = -\frac{d\vec{K}_C}{dt}, \quad (13.3)$$

оскільки  $\vec{M}_O^\Phi = \vec{M}_C^\Phi + \vec{r}_C \times \vec{F}^\Phi$ .

Із виразу (13.3) випливає, що головний момент сил інерції за величиною дорівнює швидкості зміни вектора кінетичного моменту і напрямлений в бік, протилежний їй.

Далі запишемо головний момент сил інерції для окремих випадків руху:

а) *поступальний рух* —

$$\vec{M}_C^\Phi = \vec{0} \quad \text{або} \quad \vec{M}_O^\Phi = \vec{r}_C \times \vec{F}^\Phi; \quad (13.4)$$

б) *обертання тіла навколо нерухомої осі* —

$$\vec{M}_C^\Phi = -\frac{d}{dt} (-\omega_z I_{xz} \vec{i} - \omega_z I_{yz} \vec{j} + \omega_z I_{Cz} \vec{k}), \quad (13.5)$$

Якщо осі  $Cx$ ,  $Cy$  і  $Cz$  зв'язані з тілом, що обертається, причому вісь  $Cz$  збігається з віссю обертання, то

$$\vec{M}_C^\Phi = \epsilon I_{xz} \vec{i} + \epsilon I_{yz} \vec{j} - \epsilon I_{Cz} \vec{k} - \vec{\omega} \times (-\omega I_{xz} \vec{i} - \omega I_{yz} \vec{j} + \omega I_{Cz} \vec{k}). \quad (13.6)$$

Якщо  $Cz$  і  $Oz$  — головні осі інерції, причому вісь  $Cz$  збігається з віссю обертання, то

$$\vec{M}_C^\Phi = -\epsilon I_{Cz} \vec{k}; \quad \vec{M}_O^\Phi = -\epsilon I_z \vec{k}. \quad (13.7)$$

У випадку, коли осі  $Cx$ ,  $Cy$  і  $Cz$ , зв'язані з тілом, є головними осями інерції, причому не збігаються з віссю обертання, то

$$\vec{M}_C^\Phi = -\varepsilon_x I_{Cx} \vec{i} - \varepsilon_y I_{Cy} \vec{j} - \varepsilon_z I_{Cz} \vec{k} - \vec{\omega} \times (\omega_x I_{Cx} \vec{i} + \omega_y I_{Cy} \vec{j} + \omega_z I_{Cz} \vec{k}); \quad (13.8)$$

в) *плоскопаралельний рух*. У цьому випадку руху головний момент сил інерції визначається як при обертанні тіла навколо нерухомої осі;

г) *обертання тіла навколо нерухомої точки*. Якщо осі  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  зв'язаної з тілом системи координат є головними, то головний момент сил інерції

$$\vec{M}_O^\Phi = -\frac{d}{dt} (-\omega_x I_x \vec{i} + \omega_y I_y \vec{j} + \omega_z I_z \vec{k}), \quad (13.9)$$

де до виразів  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  і  $\omega_z$  входять кути Ейлера та їх похідні.

Якщо обертання навколо нерухомої точки є результатом обертання тіла навколо осей  $Oz$  і  $Oz_5$ , що перетинаються під кутом  $\alpha$  (тобто тіло виконує складний рух з відносною кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_r$  і переносною кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_e$ ), причому вісь відносного обертання  $Oz$  є віссю симетрії тіла, а вісь  $Oz_5$  лежить в площині  $Ouz$ , тоді для кінетичного момента отримуємо

$$\vec{K}_O = \omega_{ey} I_y \vec{j} + (\omega_r + \omega_{ez}) I_z \vec{k}. \quad (13.10)$$

Головний момент сил інерції в цьому випадку

$$\vec{M}_O^\Phi = -\varepsilon_{ey} I_y \vec{j} - (\varepsilon_r + \varepsilon_{ez}) I_z \vec{k} - \vec{\omega}_e \times \vec{K}_O. \quad (13.11)$$

Задачі, які розв'язуються методом кінестатики, умовно можна поділити на такі типи:

задачі, в яких відомий рух і масові характеристики тіла, а визначити потрібно невідомі діючі сили. Зазвичай шукані сили є реакціями в'язей, що залежать від часу (динамічними реакціями) або внутрішніми зусиллями в тілах, що рухаються;

задачі, в яких відомі зовнішні навантаження і масові характеристики тіла, а шукаться рівняння руху.

*Складання диференціальних рівнянь руху методом кінестатики*. Наводимо розв'язання цього типу задач<sup>1</sup>.

1. Зображують на рисунку активні сили, прикладені до кожної з матеріальних точок.

2. Застосувавши аксіому про звільнення від в'язей (при їх наявності), показують реакції в'язей, накладених на кожну з точок системи.

3. Додають до діючих сил головний вектор і головний момент фіктивних сил інерції, виражені через невідомі  $\vec{w}_C$ ,  $\vec{\omega}$  і  $\vec{\varepsilon}$ .

4. Вибирають відповідну систему координат.

5. Складають аналітичні умови рівноваги для кожної з точок системи.

6. Розв'язують складену систему рівнянь, визначають шукані величини.

Зауваження: для системи тіл потрібно записати також рівняння, що виражають кінематичні залежності між рухами тіл.

### 13.2.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 13.4.** Однорідний диск котиться без ковзання по похилій площині трикутного клина з кутом при вершині  $\alpha$ , що ковзає по горизонтальній площині з постійним прискоренням  $\vec{w}$  (рис. 13.13).

Скласти диференціальне рівняння руху диска по клину і визначити величину прискорення  $w$ , при якому диск залишається нерухомим відносно клина.

Розв'язування. Для складання диференціального рівняння руху диска застосуємо метод кінестатики, для чого потрібно зобразити зовнішні сили, що діють на тіло, і реакції зовнішніх в'язей, а саме силу ваги

<sup>1</sup> Подібне до розв'язання оберненої задачі динаміки.

$\vec{G} = m\vec{g}$ , нормальну реакцію  $\vec{N}$  і силу зчеплення  $\vec{T}$ . До цих сил додамо головний вектор і головний момент сил інерції. Головний вектор сил інерції диска дорівнює  $\vec{F}^\Phi = -m\vec{w}_C$ .

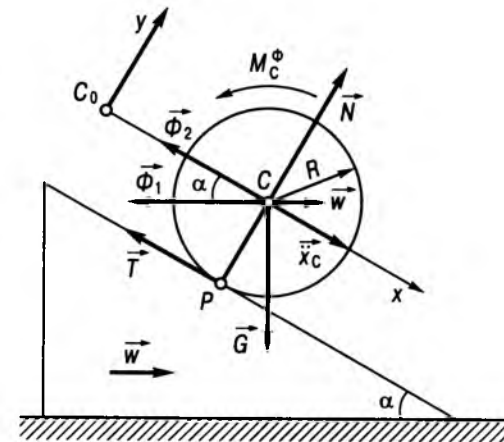


Рис. 13.13

Оскільки центр мас диска (точка  $C$ ) приймає участь у двох рухах — горизонтальному переміщенні разом з клином (переносному) і переміщенні вздовж клина (відносному), його прискорення визначається з формули

$$\vec{w}_C = \vec{w}_{Ca} = \vec{w}_{Ce} + \vec{w}_{Cr},$$

де  $\vec{w}_{Ce} = \vec{w}$ ,  $|\vec{w}_{Cr}| = \dot{x}_C$ .

Для головного вектора сил інерції отримуємо

$$\vec{F}^\Phi = -m\vec{w}_{Ce} - m\vec{w}_{Cr} = \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_2,$$

де  $\Phi_1 = mw$ ,  $\Phi_2 = m\dot{x}_C$ .

Якщо  $Cz$  — головна центральна вісь інерції, то відповідно до (13.7) головний момент сил інерції диска

$$\vec{M}_C^\Phi = -\varepsilon I_{Cz} \vec{k} = -\dot{\phi} I_{Cz} \vec{k},$$

де  $I_{Cz} = \frac{1}{2} mR^2$ .

Додамо головний вектор і головний момент сил інерції до інших сил з напрямками, протилежними до відповідних прискорень, і запишемо умову "статичної рівнова-

ги" отриманої плоскої системи сил у вигляді (13.1):

$$\vec{F}^e + \vec{F}^\Phi = \vec{0}, \quad \vec{M}_C^e + \vec{M}_C^\Phi = \vec{0}.$$

Після проектування рівнянь на осі системи координат отримуємо

$$\begin{cases} mg \sin \alpha - \Phi_1 \cos \alpha - \Phi_2 - T = 0; \\ -mg \cos \alpha + N - \Phi_1 \sin \alpha = 0; \\ TR - M_C^\Phi = 0. \end{cases}$$

Диференціальні рівняння руху матимемо після заміни в рівняннях проекцій величин сил і момента інерції на відповідні вирази

$$\begin{cases} mg \sin \alpha - mw \cos \alpha - m\dot{x}_C - T = 0; \\ -mg \cos \alpha + N - mw \sin \alpha = 0; \\ TR - \frac{mR^2}{2} \dot{\phi} = 0. \end{cases}$$

Оскільки відносний рух є чистим коченням, а точка  $P$  є миттєвим центром швидкостей, то до цих рівнянь можна додати відповідне обмеження. Тоді відносний плоскопаралельний рух диска по відношенню до клина описується співвідношеннями

$$v_P = 0; \quad v_C = \dot{x}_C = \phi R; \quad y_C = 0,$$

де  $\dot{\phi} = \omega_r = \omega_a$ .

Спільне розв'язання диференціальних рівнянь руху і накладених обмежень дає змогу визначити невідомі прискорення і сили. Оскільки накладені обмеження позбавляють диск двох степенів вільності, його положення можна визначити за допомогою однієї координати, наприклад,  $x_C$ . Отже, його диференціальним рівнянням руху буде

$$\ddot{x}_C = \frac{2}{3} (g \sin \alpha - w \cos \alpha).$$

За умовою задачі реакції  $\vec{N}$  і  $\vec{T}$  визначати не потрібно, тому останнє рівняння можна отримати набагато швидше, якщо використати умову рівноваги

$$\sum M_{Pi} = 0: G \sin \alpha \cdot R - \Phi_1 R \cos \alpha - \Phi_2 R - M_C^\Phi = 0,$$

і накладене обмеження  $\dot{x}_C = \phi R$ .

Після підстановки  $\Phi_1, \Phi_2$  і  $M_C^\Phi$  отримаємо диференціальне рівняння руху.

Для того щоб диск знаходився в рівновазі відносно клина, необхідно виконання умови  $\dot{x}_C = 0, \ddot{x}_C = 0$ , тобто  $g \sin \alpha - w \cos \alpha = 0$ ,

звідси випливає, що прискорення  $\ddot{w}$  повинно мати величину

$$w = g \operatorname{tg} \alpha.$$

**Приклад 13.5.** Механічна система складається з тягара 3 масою  $m_3$ , що підвішений на невагомій нитці, перекинутій через однорідний диск 2 масою  $m_2$  та намотаний на коток 1 масою  $m_1$  (радіуси котка  $R$  і  $r$ , його радіус інерції  $\rho$ ). Коток котиться без проковзування по горизонтальній площині (рис. 13.14).

Скласти диференціальне рівняння руху тягара 3, знайти реакцію в осі диска 2, якщо в початковий момент часу ( $t = 0$ ) система була у спокої.

Розв'язування. Розділимо систему на окремі тіла, відкидаючи зовнішні і внутрішні в'язі (рис. 13.15). Зобразимо діючі на кожне тіло зовнішні сили і реакції відкинутих в'язей. Визначимо величини головних векторів і головних моментів сил інерції окремих тіл:

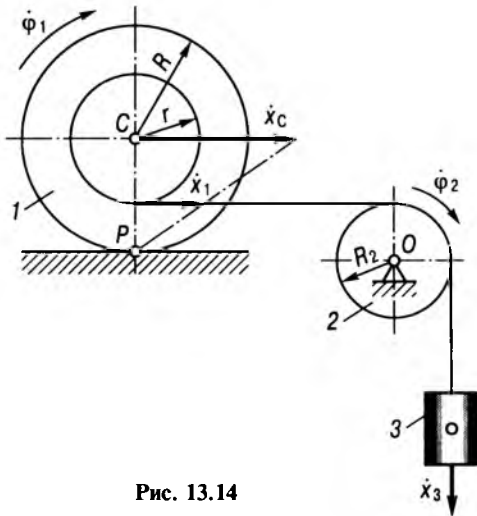


Рис. 13.14

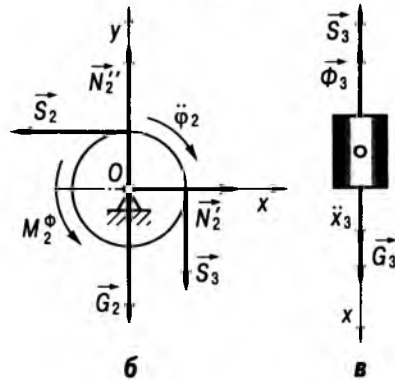
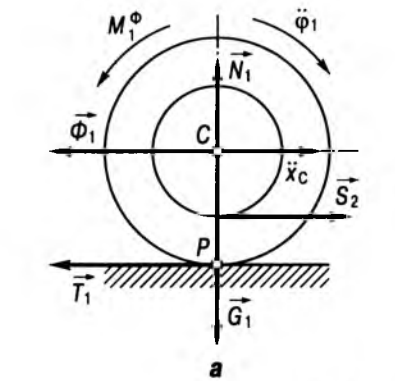


Рис. 13.15

$$F_3^\Phi = \Phi_3 = m_3 \ddot{x}_3, \quad M_2^\Phi = I_{2O} \ddot{\Phi}_2,$$

$$F_1^\Phi = \Phi_1 = m_1 \ddot{x}_C, \quad M_1^\Phi = I_{1C} \ddot{\Phi}_1,$$

де  $I_{2O} = \frac{1}{2} m_2 R^2$ ,  $I_{1C} = m_1 \rho^2$ , та додамо їх до заданих сил з напрямками, зворотними до прийнятих напрямків прискорень, після чого запишемо умови "статичної рівноваги" отриманої системи сил для кожного тіла.

$$\sum F_{ix} = m_3 g - S_3 - \Phi_3 = 0,$$

$$\sum M_{O_i} = -S_3 R_2 + S_2 R_2 + M_2^\Phi = 0,$$

$$\sum M_{P_i} = S_2 (R - r) - \Phi_1 R - M_1^\Phi = 0,$$

Інші рівняння "рівноваги" тіла 1 не записуємо, оскільки немає потреби визначати реакції  $\vec{N}_1$  та  $\vec{T}_1$ .

Отримана система трьох рівнянь з трьома невідомими в кожному такому вигляді

нерозв'язна. До них додамо ще три рівняння, які зв'язують кінематичні параметри руху окремих тіл:

$$\dot{x}_3 = \dot{\Phi}_2 R_2, \quad \dot{x}_C = \dot{x}_3 \frac{R}{R - r}, \quad \dot{\Phi}_1 = \frac{\dot{x}_C}{R}.$$

Розв'язуючи отриману систему рівнянь, визначаємо невідомі:

а) диференціальне рівняння руху тягара 3, яке є й диференціальним рівнянням руху всієї механічної системи, оскільки вона має один степінь вільності —

$$\ddot{x}_3 = \frac{2m_3 g (R - r)^2}{\left[ (2m_3 + m_2)(R - r)^2 + 2m_1 (R^2 + \rho^2) \right]};$$

б) для визначення реакції в осі обертання тіла 2 використаємо аналітичні умови рівноваги діючих на нього сил (і сил інерції)

$$\sum F_{ix} = 0: \quad N_2' - S_2 = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad N_2'' - m_2 g - S_3 = 0,$$

враховуючи, що в нитці зусилля дорівнюють

$$S_3 = \frac{m_3 g \left[ m_2 (R - r)^2 + 2m_1 (R^2 + \rho^2) \right]}{\left[ (2m_3 + m_2)(R - r)^2 + 2m_1 (R^2 + \rho^2) \right]},$$

$$S_2 = \frac{2m_1 m_3 g (R^2 + \rho^2)}{\left[ (2m_3 + m_2)(R - r)^2 + 2m_1 (R^2 + \rho^2) \right]}.$$

Тоді матимемо

$$N_2' = S_2 = \frac{2m_1 m_3 g (R^2 + \rho^2)}{\left[ (2m_3 + m_2)(R - r)^2 + 2m_1 (R^2 + \rho^2) \right]},$$

$$N_2'' = S_3 + m_2 g = m_2 g +$$

$$\frac{m_3 g \left[ m_2 (R - r)^2 + 2m_1 (R^2 + \rho^2) \right]}{\left[ (2m_3 + m_2)(R - r)^2 + 2m_1 (R^2 + \rho^2) \right]}$$

Реакція в осі обертання тіла 2

$$N_2 = \sqrt{(N_2')^2 + (N_2'')^2} = \frac{g}{\left[ (2m_3 + m_2)(R - r)^2 + 2m_1 (R^2 + \rho^2) \right]} \times \left\{ m_2^2 (3m_3 + m_2)^2 (R - r)^4 + 4m_1^2 (R^2 + \rho^2)^2 \left[ 2m_3^2 + m_2 (m_3 + m_2) \right] \right\}^{1/2}.$$

### 13.2.3. Задачі для самостійного розв'язування

**13.14.** Щоб не впасти на повороті горизонтальної дороги радіуса 100 м, мотоцикліст вимушений відхилитися від вертикалі на кут  $22^\circ$  в бік повороту. Яка в цей час його швидкість?

Відповідь: 20 м/с.

**13.15.** Два тягари А і В вагою відповідно  $P$  і  $Q$ , які зв'язані нерозтяжною ниткою, перекинутою через невагомий блок, що обертається навколо нерухомої осі  $O$  (рис. 13.16), ковзають з прискоренням  $w$  по шорстких гранях нерухомої призми.

Визначити силу натягу нитки  $\vec{T}$  і коефіцієнт тертя ковзання  $f$ , якщо кути  $\alpha$  і  $\beta$  відомі.

Відповідь:

$$T = \frac{PQ}{g} \left[ \frac{g \sin(\alpha + \beta) + w (\cos \alpha - \cos \beta)}{P \cos \alpha - Q \cos \beta} \right];$$

$$f = \frac{P(g \sin \alpha - w) - Q(g \sin \beta + w)}{g (P \cos \alpha - Q \cos \beta)}.$$

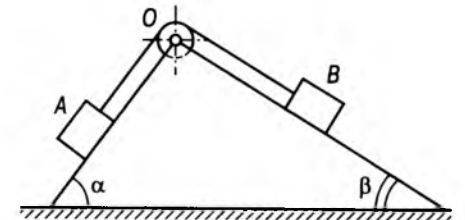


Рис. 13.16

**13.16.** Однорідний стрижень  $OA$  вагою  $P$  прикріплений за допомогою шарніра  $O$  до вертикального стрижня  $OD$ , а його кінець  $A$  прив'язаний нерозтяжною горизонтальною ниткою до точки  $D$  стрижня  $OD$ . Трикутник  $AOD$  починають обертати навколо осі  $OD$  зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$ .

Знайти натяг нитки  $T$  і реакцію шарніра  $O$ , якщо  $OA = a$  і  $\angle DOA = \varphi$  (рис. 13.17).

Відповідь:  $T = \frac{P}{2} \left( \operatorname{tg} \varphi + \frac{2a\omega^2 \sin \varphi}{3g} \right)$ ,  
 $X_O = T - \frac{Pa}{2g} \omega^2 \sin \varphi = \frac{P}{2} \left( \operatorname{tg} \varphi - \frac{a\omega^2 \sin \varphi}{3g} \right)$ ,  
 $Y_O = P$ .

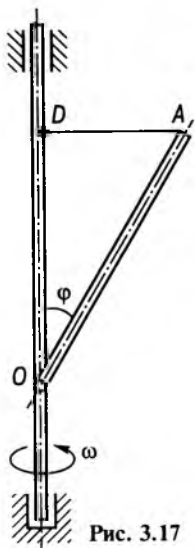


Рис. 3.17

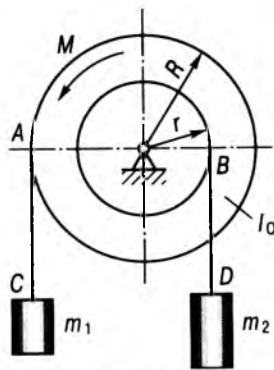


Рис. 13.18

**13.17.** До східчастого шківів підіймача (радіуси  $R$  і  $r$ ) прикладено обертальний момент  $M$ ; маси тягарів дорівнюють  $m_1$  і  $m_2$ .

Визначити кутове прискорення  $\epsilon$  шківів і натяг частин  $AC$  і  $BD$  каната ( $T_1$  і  $T_2$  відповідно), нехтуючи опором і масою каната, якщо осьовий момент інерції шківів дорівнює  $I_O$  (рис. 13.18).

Відповідь:  $\epsilon = \frac{M - g(m_1 R - m_2 r)}{I_O + m_1 R^2 + m_2 r^2}$ ,

$T_1 = m_1 \frac{[I_O g + m_2 g r (R + r) - MR]}{I_O + m_1 R^2 + m_2 r^2}$ ,

$T_2 = m_2 \frac{[I_O g + m_1 g R (R + r) + MR]}{I_O + m_1 R^2 + m_2 r^2}$ .

**13.18.** Визначити тиск на ґрунт передніх ведених і задніх ведучих коліс автомобіля,

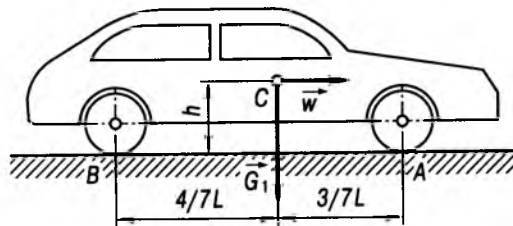


Рис. 13.19

якщо при зрушенні з місця досягається прискорення  $w = 4 \text{ м/с}^2$ . Вага автомобіля  $G = 15 \text{ кН}$ , центр мас знаходиться на висоті  $h = 1 \text{ м}$  над ґрунтом і ділить відстань між осями (базу)  $L = 4,5 \text{ м}$  у співвідношенні 3:4. Опором рухові знехтувати (рис. 13.19).

Відповідь:  $N_1 = 8,2 \text{ кН}$ ;  $N_2 = 6,8 \text{ кН}$ .

**13.19.** З якою мінімальною швидкістю повинен їхати мотоцикліст по горизонтальному колу найбільшого радіуса напівсфери, щоб не впасти, якщо коефіцієнт тертя покриття по поверхні стіни  $f = 0,5$ , а радіус

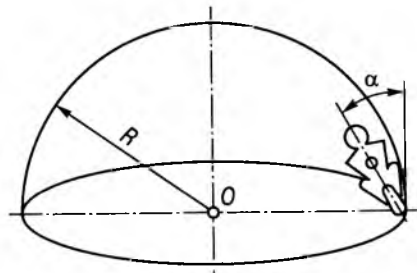


Рис. 13.20

сфери  $R = 20 \text{ м}$ . Який кут становитиме мотоцикліст з вертикаллю (рис. 13.20)?

Відповідь:  $v = 19,8 \text{ м/с} = 71,3 \text{ км/год}$ ;  $\alpha = 53,5^\circ$ .

**13.20.** Через блок масою  $m$  перекинута невагома нитка, до кінців якої підвішено тягарі мас  $m$  і  $3m$  (рис. 13.21). Нехтуючи тертям і вважаючи блок однорідним круглим циліндром, визначити прискорення тягарів.

Відповідь:  $w = \frac{4}{9} g$ .

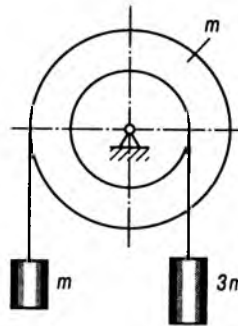


Рис. 13.21

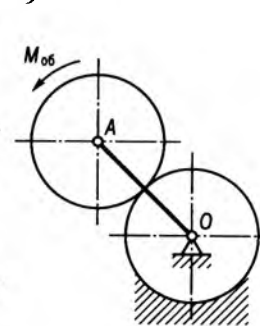


Рис. 13.22

**13.21.** До рухомого колеса епіциклічного механізму, розташованого у горизонтальній площині (рис. 13.22), прикладено обертаючий момент  $M_{об}$ , який надає кривошипів кутового прискорення  $\epsilon = 3 \text{ рад/с}^2$ . Радіуси  $r$  обох коліс механізму однакові  $r = 0,1 \text{ м}$ . Маса рухомого колеса  $m = 1 \text{ кг}$ ; таку ж масу має кривошип  $OA$ . Вважаючи рухоме колесо однорідним диском, а кривошип  $OA$  — однорідним стрижнем, визначити обертаючий момент.

Відповідь:  $M_{об} = 0,11 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

**13.22.** Система складається з трьох тіл однакової маси  $m$ : бруска, що знаходиться на горизонтальній площині, рухомого і нерухомого блоків, а також невагомого нерозтяжного каната (рис. 13.23). Розглядаючи блоки як однорідні суцільні диски однакового радіуса  $r$  і нехтуючи опором, визначити

ти, з яким прискоренням  $\bar{w}$  рухатиметься брусок, якщо до нього прикласти горизонтальну силу  $\vec{F}$  ( $F = mg$ ).

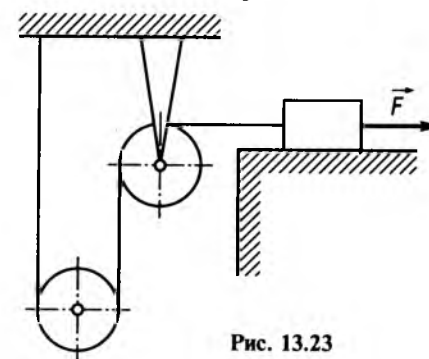


Рис. 13.23

Відповідь:  $w = \frac{4}{15} g$ .

**13.23.** Шківів, насаджені на загальну вісь обертання  $O$  і жорстко скріплені між собою, їх момент інерції  $I_O = 0,3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , а радіуси  $r_1 = 0,2 \text{ м}$ ,  $r_2 = 0,1 \text{ м}$  (рис. 13.24).

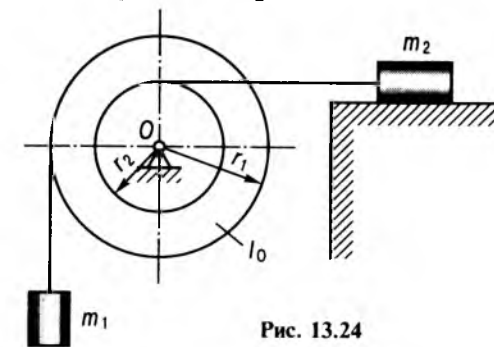


Рис. 13.24

Тягар масою  $m_1 = 1 \text{ кг}$  падає прямовисно і надає обертання шківам, при цьому другий тягар масою  $m_2 = m_1$  ковзає по шорсткій горизонтальній площині. Визначити прискорення  $\bar{w}_2$  другого тягара, якщо коефіцієнт тертя  $f$  ковзання цього тягара по площині дорівнює  $0,25$ . Масами ниток і тертям на осі  $O$  знехтувати.

Відповідь:  $w_2 = 0,49 \text{ м/с}^2$ .

## Розділ 14 ДИНАМІКА ВІДНОСНОГО РУХУ

### § 14.1. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Основне рівняння динаміки точки надає можливість досліджувати рух точки в “нерухомій” або інерціальній системі координат. Якщо ж треба дослідити рух точки відносно неінерціальної системи координат, застосування цього рівняння можливе після розкладання абсолютного руху на переносний і відносний, в результаті якого воно набуває вигляду

$$m\vec{w}_r = \sum \vec{F}_i + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c \quad (14.1)$$

і називається *основним рівнянням динаміки відносного руху* матеріальної точки.

Тут  $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$  — рівнодійна всіх активних сил, прикладених до точки;  $\vec{\Phi}_e = -m\vec{w}_e$  — переносна сила інерції;  $\vec{\Phi}_c = -m\vec{w}_c$  — коріолісова сила інерції;  $\vec{w}_r$ ,  $\vec{w}_e$ ,  $\vec{w}_c$  — прискорення відповідно відносне, переносне і коріолісове.

Переносна та коріолісова сили інерції  $\vec{\Phi}_e$  та  $\vec{\Phi}_c$  отримали назву *ейлерових сил інерції*.

З’ясуємо детально фізичний зміст цих сил інерції. Оскільки тіло, що переносить точку, рухаючись прискорено (у загальному випадку), намагається змінити її стан, то до нього будуть прикладені з боку точки сили протидії (в інерціальній системі координат). Одна з цих сил намагатиметься зкомпенсувати переносне прискорення, а друга — це коріолісове (поворотне) прискорення. Останнє виникає через зміну кутової швидкості тіла у відносному русі точки і відносної її швидкості в переносному русі. Таким чином, ці сили протидії намагаються перешкодити зміні стану точки в інерціальній системі відліку. Якщо ж уявно прикласти ці сили до самої матеріальної точки, то тоді немов би компенсується “неінерціальність” рухомої системи координат і в ній виконуються закони Ньютона. Такі сили протидії, що

уявно прикладені до точки (і в цьому сенсі — фіктивні) і є *ейлеровими силами інерції*. Зауважимо також, що у випадку поступального руху тіла, що переносить точку, переносна сила інерції тотожна даламберовій, а коріолісова обертається в нуль.

Із рівняння (14.1) випливає, що дослідження відносного руху матеріальної точки виконується тим же шляхом, що й абсолютного, з тією лише відмінністю, що до діючих сил потрібно додати переносну і коріолісову сили інерції.

Диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки отримуються з векторного рівняння (14.1) шляхом його проектування на осі рухомої системи координат, відносно якої здійснюється відносний рух:

у *декартовій системі координат*

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum F_{ix} + \Phi_{ex} + \Phi_{cx}, \\ m\ddot{y} &= \sum F_{iy} + \Phi_{ey} + \Phi_{cy}, \end{aligned} \quad (14.2)$$

$$m\ddot{z} = \sum F_{iz} + \Phi_{ez} + \Phi_{cz};$$

у *натуральній системі координат*

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= \sum F_{it} + \Phi_{et}, \\ m\frac{\dot{s}^2}{\rho} &= \sum F_{in} + \Phi_{en} + \Phi_{cn}, \end{aligned} \quad (14.3)$$

$$0 = \sum F_{ib} + \Phi_{eb} + \Phi_{cb}.$$

Задачі динаміки відносного руху матеріальної точки слід розв’язувати у такій послідовності:

- 1) розкласти абсолютний рух точки на відносний і переносний. Вибрати нерухому систему відліку і рухому, жорстко зв’язану з рухомих тілом (середовищем), що створює для точки переносний рух;
- 2) записати початкові умови відносного руху точки;
- 3) зобразити на рисунку сили  $\vec{F}_i$ , що прикладені до точки;

4) визначити прискорення точки в переносному русі  $\vec{w}_e$ , прискорення Коріоліса  $\vec{w}_c$ , силу інерції в переносному русі  $\vec{\Phi}_e$ , коріолісову силу інерції  $\vec{\Phi}_c$ . Умовно додати ці сили інерції до сил  $\vec{F}_i$ , що прикладені до точки;

5) скласти диференціальні рівняння (14.2) або (14.3) відносного руху матеріальної точки у проєкціях на осі рухомої системи координат;

6) зінтегрувати складені диференціальні рівняння, визначивши сталі інтегрування за допомогою початкових умов<sup>1</sup>.

7) визначити шукані величини.

Зауваження: при розв’язанні прямої задачі, тобто при визначенні сил за заданим рухом, пункти 2 і 6 треба відкидати;

матеріальну точку слід зображувати у поточному положенні, що відповідає додатним координатам цієї точки, і припустити, що точка рухається у бік зростання цих координат;

при відносному криволінійному русі матеріальної точки зручно користуватися диференціальними рівняннями руху в проєкціях на осі натуральної системи координат;

бажано розв’язувати задачу до кінця у загальному вигляді з буквеними позначеннями величин, для того щоб була можливість непрямої перевірки розв’язку шляхом аналізу розмірностей.

При вивченні відносного руху точки часто досліджуються такі три випадки: відносної рівноваги, прямої і оберненої задачі динаміки відносного руху точки.

У *положенні відносної рівноваги* точки маємо  $\vec{v}_r = \vec{0}$  і  $\vec{w}_r = \vec{0}$ . За цих умов із (14.1) впливає рівняння відносної рівноваги

$$\sum \vec{F}_i + \vec{\Phi}_e = \vec{0}.$$

Відносна рівновага матеріальної точки досліджується в прикладах 14.1—14.3.

<sup>1</sup> При інтегруванні розділенням змінних доцільно розглядати визначені інтеграли: за нижні границі вибираються початкові значення змінних, а за верхні — поточні, або кінцеві значення. У цьому разі відповідає необхідність введення сталих інтегрування.

У разі прямої задачі динаміки відносного руху точки відомими є її переносний і відносний рух, а отже і сили інерції  $\vec{\Phi}_e$  і  $\vec{\Phi}_c$ . Потрібно визначити діючі на точку активні сили або величини, що від них залежать.

Розв’язання прямої задачі розглянуто у прикладі 14.4. Розв’язання оберненої задачі динаміки відносного руху точки, до якої прикладено сили інерції  $\vec{\Phi}_e$  і  $\vec{\Phi}_c$ , виконується за наведеним вище планом (приклади 14.5—14.9).

Зауважимо, що у прикладах 14.5—14.8, оскільки тертя вважається відсутнім, коріолісова сила інерції, яка завжди діє у напрямку, перпендикулярному до напрямку відносного руху, не впливає на відносний рух точки. При русі невільної точки від сили  $\vec{\Phi}_c$  відносний рух саме за наявності тертя — через нормальну реакцію вона впливає на величину сили тертя.

### § 14.2. ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

**Приклад 14.1.** Тіло  $A$ , в якому на видовбаній циліндричній поверхні знаходиться точка  $M$  (рис. 14.1), рухається зі сталим прискоренням  $\vec{w}$  у горизонтальному напрямку. Тертя між точкою і поверхнею відсутнє.

Визначити кут  $\alpha$ , який відповідає відносному зрівноваженому положенню точки.

Розв’язування. Зобразимо точку  $M$  в передбачуваному зрівноваженому положенні і прикладемо до неї вагу  $m\vec{g}$ , нор-

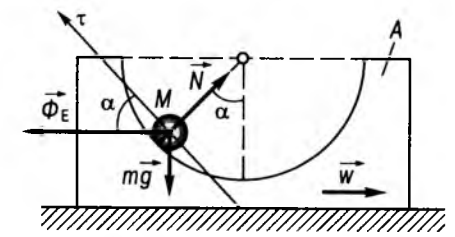


Рис. 14.1

мальну реакцію  $\vec{N}$  і силу інерції  $\vec{\Phi}_e = -m\vec{w}$ , напрямлену протилежно до переносного прискорення  $\vec{w}$ . Невідомими величинами тут є  $N$  і кут  $\alpha$ , що визначає шукане зрівноважене положення.

Для виключення невідомої реакції  $\vec{N}$  напишемо одне рівняння проекцій на тангенційну (дотичну) вісь і отримаємо величину кута  $\alpha$ :

$$\sum F_{\tau} + \Phi_{\tau} = -mg \sin \alpha + m\omega^2 \cos \alpha = 0, \text{ звідси}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w}{g}, \text{ або } \alpha = \arctg \frac{w}{g}.$$

**Приклад 14.2.** Труба закріплена жорстко під кутом  $\alpha$  до вала, що обертається навколо нерухомої вертикальної осі з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  (рис. 14.2). У трубу поміщено точку масою  $m$ , що закріплена на вільному кінці пружини жорсткістю  $c$ , довжина якої  $L$  у ненавантаженому стані. Інший кінець пружини закріплений нерухомо на валу. Визначити статичну деформацію  $\delta_{\text{ст}}$  пружини.

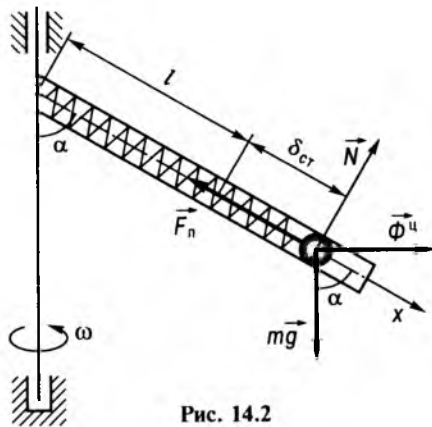


Рис. 14.2

Розв'язування. Зобразимо точку в передбачуваному зрівноваженому положенні (пружина розтягнута на величину  $\delta_{\text{ст}}$ ) і прикладемо до неї силу ваги  $m\vec{g}$ , пружну силу

$F_n = c\delta_{\text{ст}}$ , нормальну реакцію  $\vec{N}$  та силу інерції переносного нормального прискорення  $\vec{w}_{en}$ , відому під назвою відцентрової сили:

$$\Phi_{en} = \Phi^u = m\omega^2 r = m(L + \delta_{\text{ст}})\omega^2 \sin \alpha.$$

Запишемо рівняння проекцій всіх сил на вісь  $x$ :

$$\sum F_{ix} = \Phi^u \sin \alpha + mg \cos \alpha - F_n = 0, \\ m(L + \delta_{\text{ст}})\omega^2 \sin^2 \alpha + mg \cos \alpha - c\delta_{\text{ст}} = 0.$$

Звідси статична деформація

$$\delta_{\text{ст}} = \frac{m(L\omega^2 \sin^2 \alpha + g \cos \alpha)}{c - m\omega^2 \sin^2 \alpha}.$$

**Приклад 14.3.** Точка  $M$  масою  $m$  закріплена за допомогою невагомго стрижня завдовжки  $L$  шарнірно у точці  $O$ , яка знаходиться на відстані  $b$  від вертикального вала, що обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  (рис. 14.3). До точки одним кінцем прикріплена пружина жорсткістю  $c$  і вільної довжини  $b$ . Інший кінець пружини прикріплений до повзуна, що забезпечує її горизонтальне положення.

Визначити кутову швидкість вала  $\omega$  як функцію кута  $\alpha$  відхилення стрижня від його вертикального положення.

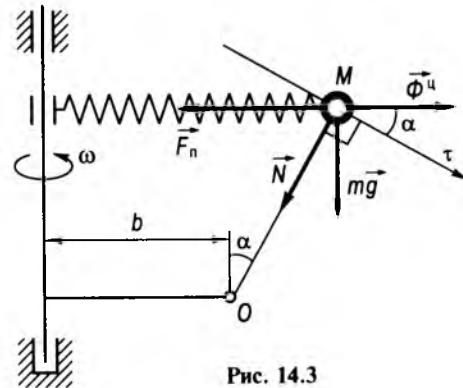


Рис. 14.3

Розв'язування. В положенні відносної рівноваги на точку  $M$  діють сила ваги  $m\vec{g}$ , зусилля в стрижні  $\vec{N}$ , сила пружності

пружини  $\vec{F}_n$  ( $F_n = c\delta = cl \sin \alpha$ ) і відцентрова сила  $\vec{\Phi}^u$  ( $\Phi^u = m\omega^2 r = m(b + L \sin \alpha)\omega^2$ ).

Запишемо рівняння проекцій всіх сил на напрямок дотичної  $\tau$  (сила  $\vec{N}$  у рівняння не потрапляє) і визначимо шукану залежність  $\omega = \omega(\alpha)$ :

$$\sum F_{\tau} = \Phi^u \cos \alpha + mg \sin \alpha - F_n \cos \alpha = 0, \\ m(b + L \sin \alpha)\omega^2 \cos \alpha + mg \sin \alpha - cL \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{cL \cos \alpha - mg}{m(b + L \sin \alpha)}} \operatorname{tg} \alpha.$$

**Приклад 14.4.** Трубопровід, що обертається навколо нерухомої осі з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ , має вихідний кінець, зігнутий у формі напівкола з радіусом центральної лінії  $R$  (рис. 14.4). По трубопроводу тече рідина густиною  $\rho$ . Витрата рідини за одиницю часу становить  $Q$ .

Визначити сумарний обертальний момент навколо осі обертання, який створюється коріолісовими силами інерції, що діють на окремі частки рідини.

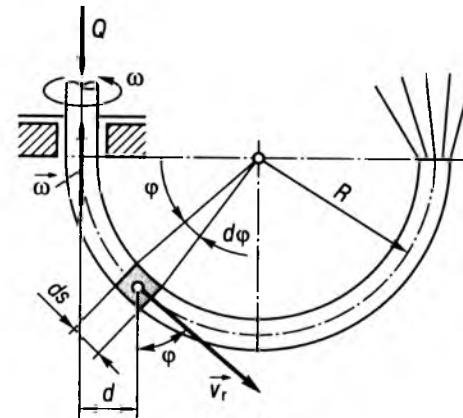


Рис. 14.4

Розв'язування. Виділимо елементарний об'єм рідини масою

$$dm = \rho dV = \rho F ds = \rho FR d\varphi,$$

де  $F$  — поперечний перетин отвору труби (його площа).

На виділений об'єм діє перпендикулярно до векторів  $\vec{\omega}$  і  $\vec{v}_r$  елементарна коріолісова сила інерції

$$d\Phi_c = dm\omega v_r = \rho FR d\varphi \cdot 2\omega v_r \sin \varphi,$$

яка створює напрямлений вздовж осі обертання момент

$$dM_c = d\Phi_c \cdot d = \rho FR d\varphi \cdot 2\omega v_r \sin \varphi (R - R \cos \varphi) = \\ = 2\rho R^2 \omega Q \sin \varphi (1 - \cos \varphi) d\varphi.$$

У цьому виразі добуток  $v_r F$  замінено на витрату  $Q$ .

Зінтегрувавши в границях від 0 до  $\pi$ , отримаємо шуканий момент

$$M_c = 2\rho R^2 \omega Q \int_0^\pi \sin \varphi (1 - \cos \varphi) d\varphi = \\ = 2\rho R^2 \omega Q \left[ \frac{1 - \cos \varphi}{2} \right]_0^\pi = 4\rho R^2 \omega Q.$$

**Приклад 14.5.** Прямолинійна труба прикріплена під кутом  $\alpha$  до вертикального вала, що обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  (рис. 14.5). У трубі матеріальна точка може пересуватися без тертя.

Визначити закон відносного руху точки, якщо в початковий момент часу вона знаходилася на відстані  $b$  від точки  $O$  і була нерухомою відносно труби.

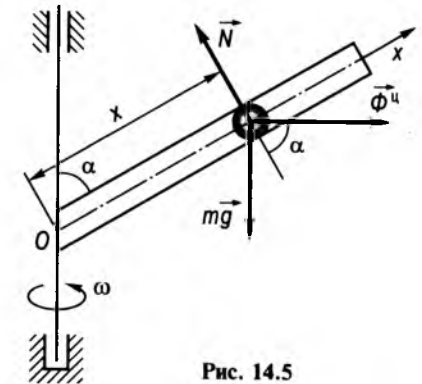


Рис. 14.5



Розв'язування. Тут переносний рух є обертанням з заданою кутовою швидкістю  $\omega$ , а відносний — прямолінійний рух точки вздовж осі труби. Оскільки потрібно дослідити відносний рух точки, то спрямуємо координатну вісь  $Ox$  вздовж осі труби.

Розглянемо точку в довільному положенні і прикладемо до неї силу ваги  $m\vec{g}$ , нормальну реакцію  $\vec{N}$  і відцентрову силу  $\vec{\Phi}^u$ ,  $\Phi^u = m\omega_{en}^2 = m\omega^2 x \sin \alpha$ , тоді основне рівняння динаміки відносного руху точки набуде вигляду

$$m\ddot{w}_r = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{\Phi}^u,$$

або у проекції на вісь  $x$ :

$$\ddot{x} - \omega^2 \sin^2 \alpha \cdot x = -g \cos \alpha. \quad (1)$$

Загальний розв'язок отриманого лінійного неоднорідного диференціального рівняння визначимо як суму загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку  $\eta(t)$  вихідного неоднорідного:

визначимо корені характеристичного рівняння  $\lambda^2 - \omega^2 \sin^2 \alpha = 0$ ,  $\lambda_{1,2} = \pm \omega \sin \alpha$ ; частинний розв'язок  $\eta$  шукаємо у вигляді сталої, яка задовольняє диференціальне рівняння (1):

$$\eta = A, \quad \dot{\eta} = 0, \quad \ddot{\eta} = 0;$$

$$-\omega^2 \sin^2 \alpha \cdot A = -g \cos \alpha; \quad A = \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}.$$

Запишемо загальний розв'язок рівняння (1), знайдемо похідну, підставимо у вирази  $x$  та  $\dot{x}$  початкові умови (при  $t=0$ :  $x=b$ ,  $\dot{x}=0$ ) і визначимо сталі інтегрування:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{\omega \sin \alpha t} + C_2 e^{-\omega \sin \alpha t} + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}, \\ \dot{x} = C_1 \omega \sin \alpha \cdot e^{\omega \sin \alpha t} - C_2 \omega \sin \alpha \cdot e^{-\omega \sin \alpha t}, \end{cases} \quad (2)$$

тоді при  $t=0$  матимемо

$$\begin{cases} b = C_1 + C_2 + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}, \\ 0 = C_1 \omega \sin \alpha - C_2 \omega \sin \alpha, \end{cases}$$

$$\text{звідки } C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \left( b - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \right).$$

Підставивши величини  $C_1$  і  $C_2$  в загальний розв'язок (2), отримуємо шуканий закон:

$$\begin{aligned} x = & \left( b - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \right) \frac{e^{\omega t \sin \alpha} + e^{-\omega t \sin \alpha}}{2} + \\ & + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} = \left( b - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \right) \text{ch}(\omega t \sin \alpha) + \\ & + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$

**Приклад 14.6.** Кільце  $M$  масою  $m$  ковзає вздовж кола радіуса  $R$ , яке обертається навколо свого вертикального діаметра з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  (рис. 14.6). До кільця прикріплено вільний кінець пружної нитки жорсткістю  $c$ , що у навантаженому стані має довжину  $OA$ .

Визначити відносну швидкість кільця  $M$  як функцію його положення  $v_r = v_r(\varphi)$ , якщо в початковий момент часу кільце було нерухомим у найвищому положенні. Тертям знехтувати.

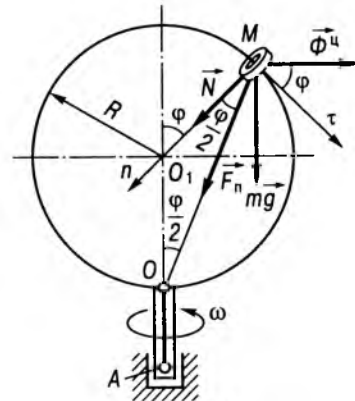


Рис. 14.6

Розв'язування. Переносним рухом є обертання навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю  $\omega$ . Відносна траєкторія відома — коло з центром  $O_1$  і радіусом  $R$ . Тому

скористаємося натуральною системою координат.

До точки  $M$ , зображеної в довільному поточному положенні, прикладено: силу ваги  $m\vec{g}$ , нормальну реакцію  $\vec{N}$ , силу пружності нитки  $\vec{F}_n$  ( $F_n = c\delta = c \cdot OM = c \cdot 2R \cos \frac{\varphi}{2}$ ) і відцентрову силу  $\vec{\Phi}^u$  ( $\Phi^u = m\omega_{en}^2 = mR\omega^2 \sin \varphi$ ).

Запишемо основне рівняння динаміки відносного руху кільця  $M$ :

$$m\ddot{w}_r = m\vec{g} + \vec{F}_n + \vec{N} + \vec{\Phi}^u,$$

або в проекції на дотичну (беручи до уваги відсутність тертя)

$$m \frac{dv_r}{dt} = \Phi^u \cos \varphi + mg \sin \varphi + F_n \sin \frac{\varphi}{2},$$

або

$$\begin{aligned} m \frac{dv_r}{dt} = & mR\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi + mg \sin \varphi + \\ & + 2cR \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Для виключення часу  $t$  домножимо обидві частини диференціального рівняння на  $d\varphi$ :

$$m \frac{dv_r}{dt} = mR\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi + (mg + cR) \sin \varphi \cdot d\varphi.$$

$$m \frac{d\varphi}{dt} dv_r =$$

$$= [mR\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi + (mg + cR) \sin \varphi] d\varphi.$$

Розділимо змінні  $v_r$  і  $\varphi$  (беручи до уваги,

що  $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \frac{v_r}{R}$ ) і зінтегруємо у відповідних границях:

$$\frac{m}{R} \int_0^{v_r} v_r dv_r =$$

$$= mR\omega^2 \int_0^\varphi \sin \varphi \cos \varphi d\varphi + (mg + cR) \int_0^\varphi \sin \varphi d\varphi,$$

$$\frac{mv_r^2}{2R} = \frac{1}{2} mR\omega^2 \sin^2 \varphi + (mg + cR)(1 - \cos \varphi).$$

Звідси отримаємо шукану залежність відносної швидкості кільця від його положення:

$$v_r = \sqrt{R^2 \omega^2 \sin^2 \varphi + \frac{2R}{m} (mg + cR)(1 - \cos \varphi)}.$$

**Приклад 14.7.** Точка  $O$  підвісу математичного маятника завдовжки  $L$  рухається в горизонтальному напрямку за законом  $x = b \sin pt$ , де  $b$  і  $p$  — сталі (рис. 14.7).

Визначити закон малих коливань маятника, якщо в початковий момент він був у вертикальному положенні нерухомим відносно точки підвісу.

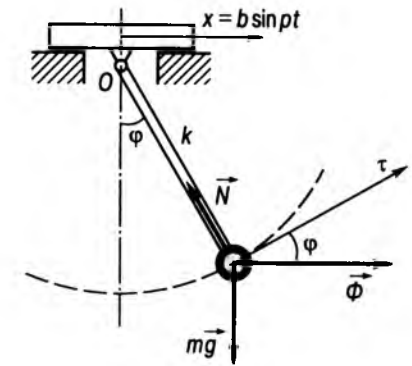


Рис. 14.7

Розв'язування. Тут переносним рухом є поступальний з прискоренням  $w_e = \ddot{x} = -bp^2 \sin pt$ . Відносний рух — рух по колу з центром  $O$  і радіусом  $L$ , тому використаємо натуральну систему координат. За координату візьмемо кут  $\varphi$  відхилення маятника від його вертикального положення. У поточному положенні до точки прикладено силу ваги  $m\vec{g}$ , зусилля в стрижні  $\vec{N}$  та переносну силу інерції  $\vec{\Phi}$  ( $\Phi = m\omega_e^2 = mbp^2 \sin pt$ ), яка має зворотний до переносного прискорення напрямок. Запишемо основне рівняння динаміки відносного руху в проекції на дотичну  $\tau$

$$m\omega_{r\tau} = \sum F_{i\tau}: \quad ml\dot{\varphi} = \Phi \cos \varphi - mg \sin \varphi,$$

або

$$ml\dot{\varphi} = mbp^2 \sin pt \cos \varphi - mg \sin \varphi. \quad (1)$$

За малих відхилень маятника від вертикального положення (малі коливання)  $\sin \varphi \approx \varphi$  та  $\cos \varphi \approx 1$ , тобто можна виконати лінеаризацію нелінійного диференціального рівняння (1), внаслідок чого отримуємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = bp^2 \sin pt, \quad (2)$$

яке з достатньою точністю описує такі малі коливання.

Загальний розв'язок  $\varphi$  рівняння (2) шукатимемо у вигляді суми загального розв'язку  $\bar{\varphi}$  відповідного (2) однорідного рівняння

$\left( \ddot{\bar{\varphi}} + \frac{g}{L} \bar{\varphi} = 0 \right)$ , і частинного розв'язку  $\eta(t)$  неоднорідного рівняння (2). Відмітимо, що характеристичне рівняння одно-

рідного рівняння  $\left( \lambda^2 + \frac{g}{L} = 0 \right)$  має корені

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{L}} i = \pm ki, \text{ тому}$$

$$\bar{\varphi} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Частинний розв'язок  $\eta(t)$  шукатимемо у вигляді  $\eta(t) = A \sin pt$ . Він має задовольняти рівняння (2). Тому визначимо необхідні похідні:

$$\dot{\eta} = Ap \cos pt; \quad \ddot{\eta} = -Ap^2 \sin pt$$

і підставляємо їх у рівняння (2):

$$-Ap^2 \sin pt + \frac{g}{l} A \sin pt = bp^2 \sin pt.$$

Далі прирівнюємо коефіцієнти біля  $\sin pt$  в обох частинах отриманого рівняння і зна-

ходимо сталу  $A = bp^2 \left( \frac{g}{l} - p^2 \right)^{-1}$ , після чого частинний розв'язок набуває вигляду

$$\eta(t) = bp^2 \left( \frac{g}{L} - p^2 \right)^{-1} \sin pt.$$

Запишемо тепер загальний розв'язок  $\varphi$  рівняння (2), знайдемо  $\dot{\varphi}$ , підставимо у ви-

рази для  $\varphi$  і  $\dot{\varphi}$  початкові умови (при  $t = 0$ :  $\varphi = 0, \dot{\varphi} = 0$ ) і визначимо сталі інтегрування:

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + A \sin pt, \quad (3)$$

$$\dot{\varphi} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + Ap \cos pt,$$

$$0 = C_1; \quad 0 = C_2 k + Ap; \quad C_2 = -\frac{Ap}{k}.$$

Після підстановки в загальний розв'язок (3) сталих інтегрування, а також сталих параметрів  $k$  і  $A$ , отримуємо закон малих коливань при заданих початкових умовах:

$$\varphi = -\frac{bp^2}{\frac{g}{l} - p^2} \left( \sin pt - p \sqrt{\frac{l}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{L}} t \right).$$

Зауваження: при  $p = k = \sqrt{\frac{g}{l}}$  знаменник у виразі перед дужками дорівнюватиме нулеві, тому отримуємо коливання з нескінченно великими амплітудами. Це явище відоме під назвою *резонанс*, яке у багатьох випадках є небажаним, оскільки спричиняє небезпечні напруження в деталях машин. Резонанс настає, коли частота  $p$  збурювальної сили (в нашому випадку  $\dot{\Phi}$ ) збігається з власною частотою коливань  $k$ . Тому при відомій збурювальній силі параметри коливальної системи (в даному разі можна варіювати довжину маятника  $L$ ) підбирають таким чином, щоб  $k \neq p$ .

Дійсно, у такій нелінійній системі, як наша, необмежене зростання амплітуди коливань при "резонансі" неможливе, оскільки із зростанням амплітуди змінюється й власна частота (лінійна модель (2) вже не відображає дійсний стан) і система автоматично виходить із резонансного режиму. Це є характерним для нелінійних коливань.

**Приклад 14.8.** До платформи, що обертається навколо нерухомої вертикальної осі з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ , прикріплена шарнірно за допомогою невагомго стрижня завдовжки  $L$  матеріальна точка масою  $m$  (рис. 14.8). З двох боків до точки прикріплені дві однакові горизонтальні пружини жорсткістю  $c$ . При верти-

кальному положенні стрижня пружини недеформовані.

Визначити, за яких умов це положення рівноваги буде стійким, та знайти період малих коливань навколо нього.

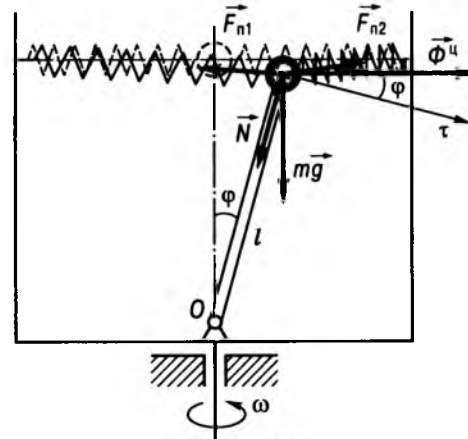


Рис. 14.8

кальному положенні стрижня пружини недеформовані. Визначити, за яких умов це положення рівноваги буде стійким, та знайти період малих коливань навколо нього.

Розв'язування. Переносним рухом є обертання платформи навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю  $\omega$ , а відносним — рух по колу з центром у точці  $O$  і радіусом  $L$ . Тому скористаємося натуральною системою координат.

Оскільки треба досліджувати малі коливання, то ще при складанні диференціального рівняння зробимо таке припущення: через малість кута  $\varphi$  у відхиленому положенні вказана точка рухається по колу, пружини залишаються горизонтальними. Це полегшує визначення деформацій пружин  $\delta_1 \approx \delta_2 \approx L \sin \varphi$  і напрямки пружинних сил — вони залишаються горизонтальними.

На точку в зображеному відхиленому положенні діють сила ваги  $m\vec{g}$ , зусилля в стрижні  $\vec{N}$ , дві сили пружності  $\vec{F}_{n1}$  і  $\vec{F}_{n2}$  ( $F_{n1} = F_{n2} = c\delta \approx cL \sin \varphi$ ) і відцентрова сила  $\vec{\Phi}^u$  ( $\Phi^u = m\omega_{en}^2 = mL\omega^2 \sin \varphi$ ).

Основне рівняння динаміки відносного руху матеріальної точки матиме вигляд

$$m\vec{w}_r = m\vec{g} + \vec{\Phi}^u + \vec{N} + \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2},$$

а в проекціях на дотичну  $\tau$  —

$$mL\ddot{\varphi} = \Phi^u \cos \varphi + mg \sin \varphi - 2F_n \cos \varphi;$$

або

$$mL\ddot{\varphi} = mL\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi + mg \sin \varphi - 2cL \sin \varphi \cos \varphi,$$

звідки, вважаючи  $\sin \varphi \approx \varphi$  і  $\cos \varphi \approx 1$ , отримуємо лінеаризоване рівняння

$$\ddot{\varphi} + \frac{2cL - mL\omega^2 - mg}{mL} \varphi = 0,$$

або

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \quad (1)$$

де  $k = \sqrt{\frac{2cL - mL\omega^2 - mg}{mL}}$  — власна частота коливань.

Диференціальне рівняння (1) описує коливальний рух (корені його характеристичного рівняння будуть чисто уявними), якщо  $k^2 > 0$ , і коливання можливі навколо стійкого положення рівноваги. Отже, умова *стійкості положення рівноваги* еквівалентна умові наявності коливань:  $k^2 > 0$ .

У нашому випадку  $k^2 > 0$ , якщо виконується нерівність

$$2cL > m(L\omega^2 + g).$$

Період малих коливань визначається формулою

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{mL}{2cL - mL\omega^2 - mg}}.$$

**Приклад 14.9.** Для матеріальної точки  $M$  з приклада 13.5 визначити період малих коливань навколо її положення відносної рівноваги (рис. 14.9).

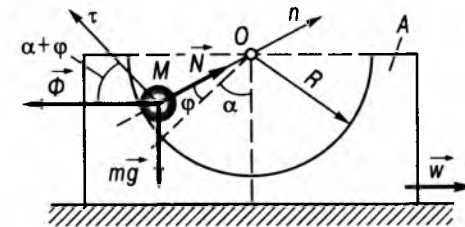


Рис. 14.9

Розв'язування. Кут  $\alpha$ , що визначає положення відносної рівноваги точки, розрахований вище у прикладі 13.5:

$$\alpha = \arctg \frac{w}{g} \quad (1)$$

Тут переносним рухом є поступальний з прискоренням  $\ddot{w}$ , а відносним — рух по колу з центром в точці  $O$  і радіусом  $R$ . Скористаємося натуральною системою координат. За координату приймемо кут  $\varphi$ , що відраховується від положення рівноваги.

До точки (у відхиленому положенні) прикладено: силу ваги  $m\vec{g}$ , нормальну реакцію  $\vec{N}$ , переносну силу інерції  $\vec{\Phi}$  ( $\Phi = mw$ ). Застосуємо основне рівняння динаміки відносного руху у проекції на дотичну  $\tau$ :

$$mR\ddot{\varphi} = \Phi \cos(\alpha + \varphi) - mg \sin(\alpha + \varphi),$$

або

$$R\ddot{\varphi} = w \cos(\alpha + \varphi) - g \sin(\alpha + \varphi). \quad (2)$$

Виконаємо лінеаризацію рівняння (2), маючи на увазі, що

$$\cos(\alpha + \varphi) = \cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi \approx \cos \alpha - \varphi \sin \alpha,$$

$$\sin(\alpha + \varphi) = \sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi \approx \sin \alpha + \varphi \cos \alpha.$$

$$R\ddot{\varphi} = w \cos \alpha - w\varphi \sin \alpha - g \sin \alpha - g\varphi \cos \alpha,$$

$$R\ddot{\varphi} + (w \sin \alpha + g \cos \alpha)\varphi = w \cos \alpha - g \sin \alpha. \quad (3)$$

За допомогою рівняння (1) визначимо

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{\frac{w}{g}}{\sqrt{1 + \frac{w^2}{g^2}}} = \frac{w}{\sqrt{w^2 + g^2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{w^2}{g^2}}} = \frac{g}{\sqrt{w^2 + g^2}}$$

і підставимо їх у рівняння (3):

$$w \cos \alpha - g \sin \alpha = 0,$$

$$w \sin \alpha + g \cos \alpha = \frac{w^2 + g^2}{\sqrt{w^2 + g^2}} = \sqrt{w^2 + g^2}.$$

Остаточно отримаємо диференціальне рівняння малих коливань

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0 \quad \left( k^2 = \frac{1}{R} \sqrt{w^2 + g^2} \right).$$

Період малих коливань

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\sqrt{R}}{\sqrt{w^2 + g^2}}.$$

### § 14.3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

**14.1.** Кільце радіуса  $R = 10$  см, виконане з трубки, обертається навколо своєї осі  $Oz$  в горизонтальній площині за законом  $\varphi = t^2 + t$ , рад. Всередині трубки може рухатися матеріальна точка  $A$  вагою  $P = 1$  Н (рис. 14.10).

Визначити: 1) закон руху точки по трубці, якщо її початкова швидкість відносно трубки  $v_0 = 2$  см/с; 2) тиск точки на трубку в момент часу  $t = 1$  с.

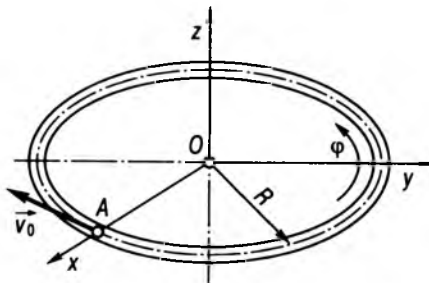


Рис. 14.10

Відповідь: закон руху точки по трубці  $s = 10t^2 + 2t$ , см; тиск  $N = 1$  Н.

**14.2.** За умов попередньої задачі знайти: 1) закон руху точки по трубці (рис. 14.11), якщо трубка заповнена речовиною, сила опору якої пропорційна відносній швидкості  $\vec{v}_r$  руху

точки:  $\vec{Q} = -\mu \vec{v}_r$ , ( $\mu = 2 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{М}}$ );

2) граничне значення відносної швидкості точки.

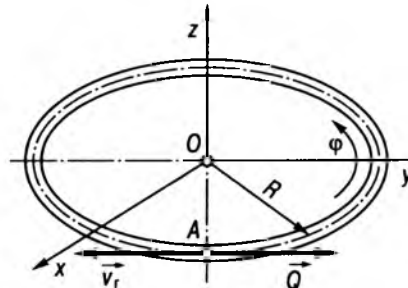


Рис. 14.11

Відповідь: закон руху точки по трубці  $s = t + \frac{1}{20}(1 - e^{-20t})$ , см;  $V_r = 1$  см/с.

**14.3.** Гладенька трубка, зігнута у вигляді кільця радіуса  $R$ , обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо вертикальної осі  $Oz$  (рис. 14.12). У трубці рухається точка масою  $m$ . У початковий момент часу точка знаходиться на осі обертання і має відносну швидкість  $\vec{v}_0$ . Знайти залежність відносної швидкості від координати  $s$  точки.

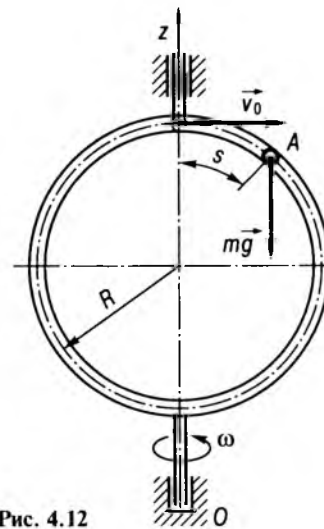


Рис. 4.12

Відповідь:

$$v_r = \sqrt{v_0^2 + \frac{1}{2} \omega^2 R^2 \left( 1 - \cos \frac{2s}{R} \right) + 2gR \left( 1 - \cos \frac{s}{R} \right)}.$$

**14.4.** Рівнобічний трикутник  $OAB$  зі стороною  $L$  обертається у горизонтальній площині навколо осі  $Oz$  зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$ . По стороні  $AB$  трикутника рухається без тертя точка масою  $m$ . У початковий момент часу точка знаходиться у вершині  $A$ , а її початкова відносна швидкість дорівнює  $\vec{v}_0$  (рис. 14.13). Знайти кінематичний закон відносного руху точки і відносну швидкість у точці  $B$ .

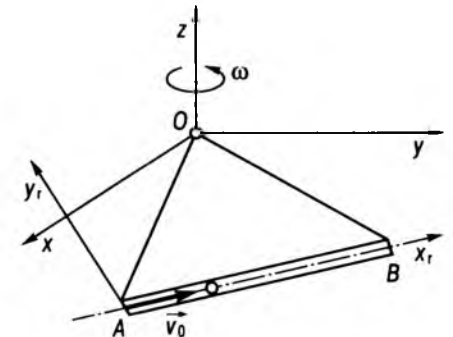


Рис. 14.13

Відповідь:  $x_r = -\frac{1}{2} \left( \frac{v_0}{\omega} + \frac{L}{2} \right) e^{-\omega t} + \frac{1}{2} \left( \frac{v_0}{\omega} - \frac{L}{2} \right) e^{\omega t} + \frac{L}{2}$ ,  $v_B = v_0$ .

**14.5.** З яким прискоренням  $\ddot{w}$  має опускатися кабіна ліфта, в якій виконує гармонійні коливання математичний маятник

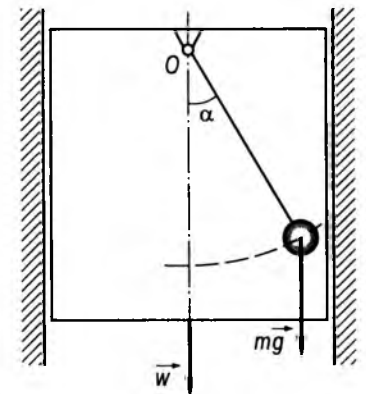


Рис. 14.14

масою  $m$ , прикріплений до стелі ліфта, щоб зусилля натягу  $T$  нитки цього маятника в поточному його положенні дорівнювало нулеві (рис. 14.14)?

Відповідь:  $w = g$ .

14.6. У ліфті, що рухається вертикально вгору з прискоренням  $\bar{w}$ , піднімають тягар, маса якого  $m$ , за допомогою каната, що намотується на барабан лебідки радіу-

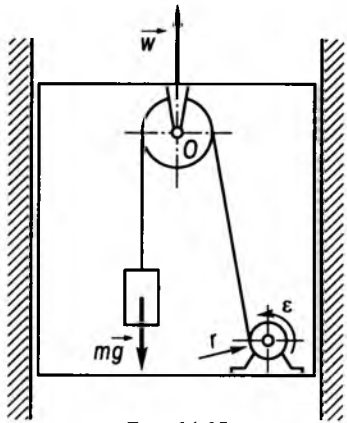


Рис. 14.15

са  $r$ . Барабан обертається з кутовим прискоренням  $\epsilon$  (рис. 14.15). Яким має бути кутове прискорення для того, щоб зусилля натягу каната дорівнювало нулеві? Опором, а також вагою каната і блока знехтувати.

Відповідь:  $\epsilon = -\frac{g+w}{r}$ . Знак мінус вказує на те, що лебідка має обертатися у напрямку, протилежному заданому.

14.7. На правому кінці горизонтальної дошки завдовжки  $L$ , що лежить нерухомо, знаходиться брусок завдовжки  $b$  (рис. 14.16). Дошці надане постійне прискорення  $\bar{w}$ , на-

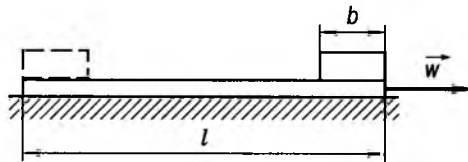


Рис. 14.16

прямлене по горизонталі вправо. Беручи до уваги, що коефіцієнт тертя ковзання між контактуючими поверхнями бруска і дошки дорівнює  $f$ , знайти час  $t_1$ , після закінчення якого брусок досягає лівого кінця дошки.

Відповідь:  $t_1 = \sqrt{\frac{2(L-b)}{w-gf}}$ .

14.8. Жорсткий стрижень, вигнутий по колу радіуса  $R$  завдовжки  $L = \pi R/3$ , приварений до вертикального вала (рис. 14.17). По стрижню може ковзати без тертя важка кулька, поточне положення якої на стрижні характеризується кутом  $\phi$ . Вал починає обертатися зі стану спокою, при якому  $\phi = \phi_0 > 0$ , а початкова відносна швидкість кульки дорівнює нулеві. За якої мінімальної кутової швидкості  $\omega_{\min}$  обертання вала кулька зірветься зі стрижня?

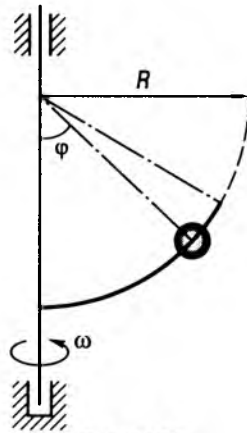


Рис. 14.17

Відповідь:  $\omega_{\min} = \sqrt{\frac{2g}{R}}$ .

14.9. Диск обертається у вказаному на рис. 14.18 напрямку зі сталою кутовою швидкістю  $\omega = 2$  рад/с навколо горизонтальної осі, що проходить через його центр  $O$ . Вздовж хорди  $AB$  просвердлено канал ( $h = 0,5$  м), по якому в напрямку від  $A$  до  $B$  рівномірно рухається матеріальна точка масою  $m = 0,1$  кг з відносною швидкістю  $v_r = 2$  м/с.

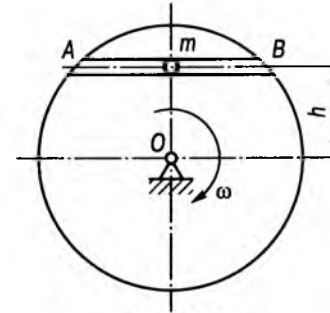


Рис. 14.18

Визначити модуль і напрямок додаткового динамічного тиску  $\bar{N}$  точки на стінку каналу в положенні, вказаному на рис. 14.18, коли матеріальна точка перебуває у точці  $B$ , якщо радіус диска  $R = 1$  м.

Відповідь:  $N = 0,9$  Н, вектор  $\bar{N}$  напрямлений вгору.

14.10. Вертикальний вал з привареним до нього під кутом  $\alpha$  жорстким прямолінійним стрижнем завдовжки  $L$  рівномірно обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  (рис. 14.19). На стрижень насаджено кульку масою  $m$ , яка може рухатися відносно стрижня. Знайти у місці контакту кульки і стрижня силу тертя  $\bar{F}_r$ , при якій кулька перебуває у відносному спокої на відстані  $L_1 = L/3$ .

Відповідь:

$$F_r = m \left( g \cos \alpha + \frac{1}{3} \omega^2 l \sin^2 \alpha \right).$$

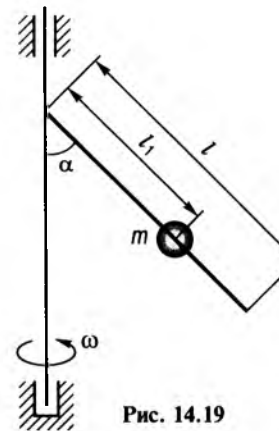


Рис. 14.19

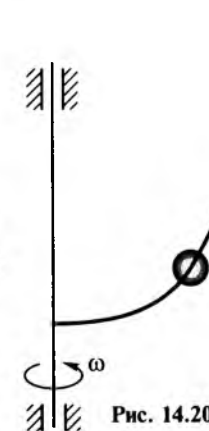


Рис. 14.20

14.11. Жорсткий криволінійний стрижень рівномірно обертається навколо нерухокої вертикальної осі (рис. 14.20). На стрижень насаджена важка кулька, яка може без тертя переміщуватися відносно стрижня. Як потрібно вигнути стрижень, щоб кулька перебувала у відносному спокої в будь-якому місці цього стрижня?

Відповідь: вигнути у формі параболи.

14.12. Брусок із закріпленим на ньому математичним маятником ковзає без тертя по похилій площині, розташованій під кутом  $\alpha$  до горизонту (рис. 14.21). Знайти силу натягу  $\bar{S}$  нитки маятника у стані його спокою відносно бруска, якщо вага тягаря маятника дорівнює  $G$ .

Відповідь:  $S = G \cos \alpha$ .

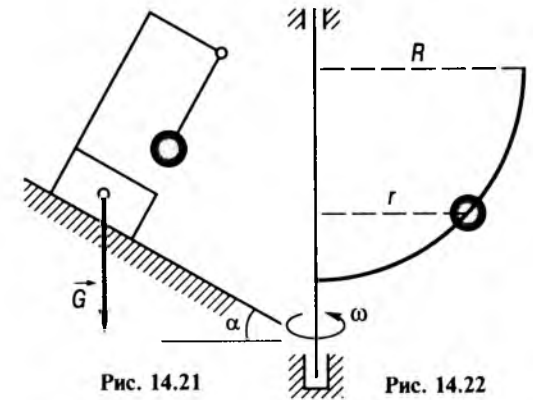


Рис. 14.21

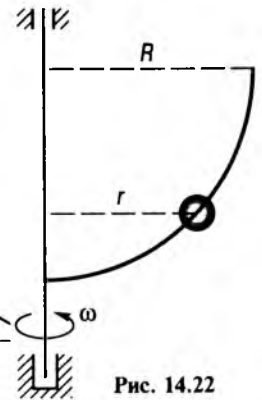


Рис. 14.22

14.13. Жорсткий стрижень, форма якого є дугою кола радіуса  $R$ , рівномірно обертається навколо нерухокої вертикальної осі з кутовою швидкістю  $\omega$  (рис. 14.22). На стрижень насаджена важка кулька, яка може переміщуватися відносно стрижня. Нехтуючи тертям, визначити радіус  $r$  кола, яке описує ця кулька в стані відносного спокою.

Відповідь:  $r = \sqrt{R^2 - \frac{g^2}{\omega^4}}$ .

ДИНАМІКА ТВЕРДОГО ТІЛА

§ 15.1. ДИНАМІЧНІ РЕАКЦІЇ

15.1.1. Короткі теоретичні відомості

В опорах тіла, що обертається навколо нерухомої осі, виникають додаткові (до статичних) реакції, які називаються *динамічними*. Отже, повні реакції в таких опорах складатимуться із статичних і додаткових динамічних.

При визначенні динамічних реакцій в опорах вважається відомим закон руху тіла, тобто можна визначити  $\ddot{\omega}$  і  $\ddot{\varepsilon}$ .

Розглянемо тверде тіло масою  $m$ , що обертається навколо нерухомої осі  $O\xi$  під дією системи активних сил  $\{\vec{F}_i\}$  (рис. 15.1). Жорстко з тілом зв'яжемо систему координат  $Oxyz$ . Нехай обертання тіла характеризується кутом повороту  $\varphi(t)$ . Тоді рухома система координат  $Ox\zeta$  обертатиметься

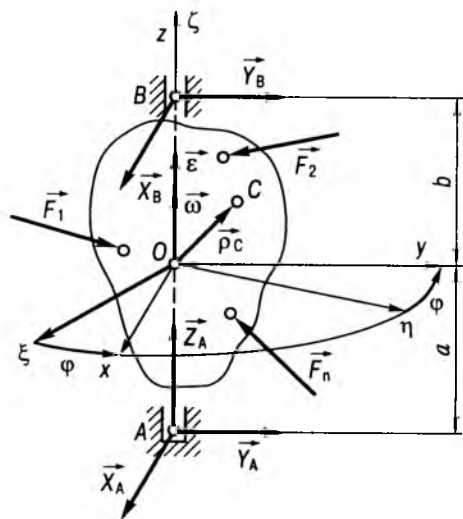


Рис. 15.1

навколо нерухомої  $O\xi\eta\zeta$  (її осі  $O\xi$ ) за законом  $\varphi(t)$ , а кутова швидкість  $\omega$  і кутове прискорення  $\varepsilon$  визначатимуться із залежностей відповідно:  $\omega = \dot{\varphi}$ ,  $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ .

Положення центра мас тіла в рухомій системі координат  $Oxyz$  визначається радіусом-вектором  $\vec{\rho}_C \{x_C, y_C, z_C\}$ .

Рівняння руху в цьому разі за формулою (21.14) набувають вигляду [17]

$$\begin{cases} -m y_C \varepsilon - m \omega^2 x_C = F_x + X_A + X_B, \\ m x_C \varepsilon - m \omega^2 y_C = F_y + Y_A + Y_B, \\ 0 = F_z + Z_A, \\ -I_{xz} \varepsilon + I_{yz} \omega^2 = M_x - z_A Y_A - z_B Y_B, \\ -I_{yz} \varepsilon - I_{xz} \omega^2 = M_y + z_A X_A + z_B X_B, \\ I_z \varepsilon = M_z, \end{cases} \quad (15.1)$$

де  $F_x, F_y, F_z$  та  $M_x, M_y, M_z$  — є відповідно проекціями головного вектора і головного моменту системи активних сил  $\{\vec{F}_i\}$ , прикладених до твердого тіла;  $X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B$  — проекції повних реакцій відповідно  $\vec{R}_A$  та  $\vec{R}_B$  в точках  $A$  і  $B$ ;  $z_A = -a$ ;  $z_B = -b$  — їх аплікати.

Оскільки останнє рівняння системи (15.1) не містить реакцій в'язей, тому із цієї системи рівнянь можна визначити лише п'ять невідомих проекцій реакцій. Кожна з цих проекцій є сумою двох доданків, один з яких (статичний) визначається лише активними силами, а інший (динамічний) — обумовлений силами інерції та їхніми моментами і перетворюється в нуль, як тільки тіло перестає обертатися (тоді  $\omega = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ ), тобто

$$\vec{R}_A = \vec{R}_A^F + \vec{R}_A^D, \quad \vec{R}_B = \vec{R}_B^F + \vec{R}_B^D. \quad (15.2)$$

У цих виразах перші доданки можна визначити з рівнянь статички (тому їх називають *статичними*):

$$\begin{cases} 0 = F_x + X_A^F + X_B^F, \\ 0 = F_y + Y_A^F + Y_B^F, \\ 0 = F_z + Z_A^F, \\ 0 = M_x - z_A Y_A^F - z_B Y_B^F, \\ 0 = M_y + z_A X_A^F + z_B X_B^F, \end{cases} \quad (15.3)$$

де  $Z_A^F = Z_A$ ,  $Z_B^F = Z_B$ , оскільки  $Z_A^D = Z_B^D = 0$ .

Другі (динамічні) доданки можна знайти з рівнянь:

$$\begin{cases} -m y_C \varepsilon - m \omega^2 x_C = X_A^D + X_B^D, \\ m x_C \varepsilon - m \omega^2 y_C = Y_A^D + Y_B^D, \\ -I_{xz} \varepsilon + I_{yz} \omega^2 = -z_A Y_A^D - z_B Y_B^D, \\ -I_{yz} \varepsilon - I_{xz} \omega^2 = z_A X_A^D + z_B X_B^D. \end{cases} \quad (15.4)$$

Таким чином, визначення повних, статичних або динамічних реакцій виконується у такій послідовності (див. приклади 15.1, 15.2):

- 1) вказують діючі на тіло активні сили;
- 2) умовно відкидають в'язі і замінюють їх дію на тіло відповідними реакціями;
- 3) аналізують отриману систему сил і застосовують рівняння 15.3 і 15.4;
- 4) визначають координати центра інерції  $C$  та опор  $A$  і  $B$  у рухомій системі координат, а також відцентрові моменти інерції  $I_{xz}, I_{yz}$  тіла;
- 5) розв'язують відповідну систему рівнянь для обчислення реакцій: (15.1) — повних опорних, (15.3) — статичних, (15.4) — динамічних.

Оскільки обчислення відцентрових моментів інерції пов'язано із суттєвими математичними складнощами, його можна уникнути, використовуючи методику, яка ба-

зується на обчисленні головного вектора і головного моменту сил інерції (останній визначається через кінетичний момент) за формулами розділу 13 (див. приклад 15.3):

- 1) вказати активні сили, що діють на тіло;
- 2) визначити головний вектор сил інерції у точці, відносно якої шукаємо головний момент сил інерції, тобто у центрі зведення сил інерції (найчастіше це центр інерції  $C$ );
- 3) зв'язати з тілом, що рухається, систему координат, осі якої напрямляються вздовж головних осей інерції тіла, відносно яких визначається його кінетичний момент;

4) визначити головний момент сил інерції через кінетичний момент і додати його до інших сил;

5) вибрати систему координат, відносно якої скласти умови рівноваги, вказуючи в опорах передбачувані реакції залежно від виду опор і діючих на тіло зовнішніх сил та сил інерції;

6) скласти рівняння руху у формі рівнянь рівноваги отриманої системи сил і моментів у вигляді (13.1);

7) розв'язати отримані рівняння відносно невідомих повних реакцій;

8) отримати шукані додаткові динамічні реакції з повних шляхом віднімання статичних реакцій, які знаходять методами статички.

З а у в а ж е н н я. Для визначення внутрішніх зусиль у тілі, що рухається, сили інерції розглядаються розподіленими по всьому об'єму тіла. При цьому до кожної елементарної частки  $dm$  крім зовнішніх сил також прикладена і сила інерції  $d\vec{\Phi} = -\vec{\omega} dm$ . Тому для визначення внутрішніх зусиль у даному перерізі тіла потрібно визначити діючі на одну з його частин зовнішні сили і сили інерції (див. приклади 15.4 і 15.5).

15.1.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 15.1.** Тонка однорідна пластина у вигляді чверті кола радіуса  $R$  і масою  $m$  обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо вертикальної осі  $Oz$  (рис. 15.2).

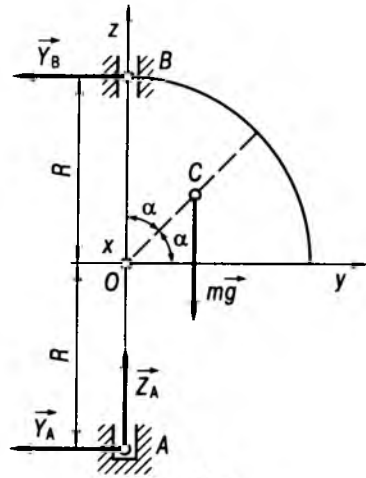


Рис. 15.2

Визначити повні реакції в опорах осі  $Oz$ , якщо  $OA = OB = R$ . За якої величини кутової швидкості горизонтальна реакція в опорі  $A$  дорівнюватиме нулеві?

Розв'язування. Активна сила, прикладена до пластини, це вага  $m\vec{g}$ . Оскільки вся механічна система розташована у площині  $Oyz$ , то реакція у підшипнику  $B$  ( $\vec{R}_B$ ) матиме одну складову  $\vec{Y}_B$ , а у під'ятнику  $A$  ( $\vec{R}_A$ ) — дві складові:  $\vec{Y}_A$  і  $\vec{Z}_A$ .

Отримана система сил є довільною плоскою, тому із системи рівнянь (15.1) залишаться такі ( $\epsilon = 0$ , оскільки  $\omega = \text{const}$  за умовою задачі):

$$\begin{cases} m\omega^2 y_C = Y_A + Y_B, \\ 0 = -mg + Z_A, \\ I_{yz}\omega^2 = -mg \cdot OC \cos \alpha - R \cdot Y_A + R \cdot Y_B. \end{cases} \quad (1)$$

Із другого рівняння маємо  $Z_A = mg$ , а  $Y_A$  і  $Y_B$  визначаємо із двох рівнянь, що залишилися:

$$\begin{cases} Y_A + Y_B = m\omega^2 OC \cos \alpha, \\ Y_A - Y_B = \frac{-1}{R} (I_{yz}\omega^2 + mg \cdot OC \cos \alpha). \end{cases} \quad (2)$$

Знаходимо далі відцентровий момент інерції  $I_{yz}$ , враховуючи, що  $m = \gamma \frac{\pi R^2}{4}$ , де

$\gamma = \frac{m}{S}$  — питома маса пластинки площею  $S$ , а  $dm = \gamma \cdot dS = \gamma dydz$  (рис. 15.3):

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \int_{(m)} yz \, dm = \gamma \int \int_{(S)} yz \, dydz = \\ &= \gamma \int_0^R y \, dy \int_0^{\sqrt{R^2 - y^2}} z \, dz = \gamma \int_0^R y \frac{R^2 - y^2}{2} \, dy = \\ &= \frac{\gamma}{2} R^2 \int_0^R y \, dy - \frac{\gamma}{2} \int_0^R y^3 \, dy = \frac{1}{4} \gamma R^4 - \frac{1}{8} \gamma R^4 = \\ &= \frac{1}{8} \gamma R^4 = \frac{1}{2} \gamma \frac{\pi R^2}{4} \cdot \frac{R^2}{\pi} = \frac{mR^2}{2\pi}. \end{aligned}$$

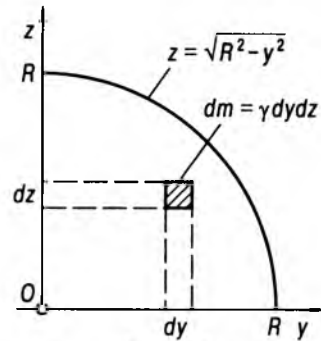


Рис. 15.3

Відстань  $OC = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} R$ , а  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , тому система рівнянь (2) набуває вигляду

$$\begin{cases} Y_A + Y_B = \frac{4}{3\pi} m\omega^2 R, \\ Y_A - Y_B = \frac{-1}{2\pi} m\omega^2 R - \frac{4}{3\pi} mg, \end{cases}$$

звідки знаходимо повні реакції в опорах  $A$  і  $B$

$$\begin{aligned} Y_A &= \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{4}{3\pi} - \frac{1}{2\pi} \right) \omega^2 R - \frac{4}{3\pi} g \right] = \\ &= m(0,13\omega^2 R - 0,21g), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_B &= \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{4}{3\pi} + \frac{1}{2\pi} \right) \omega^2 R + \frac{4}{3\pi} g \right] = \\ &= m(0,29\omega^2 R + 0,21g). \end{aligned}$$

Реакції сталі за величиною, лежать у площині пластини і обертаються разом з нею.

Умова рівності нулеві горизонтальної складової реакції опори  $A$  є  $Y_A = 0$ , отже отримуємо шуканий вираз кутової швидкості

$$\omega \approx 1,27 \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

**Приклад 15.2.** Однорідний циліндр завдовжки  $L$ , масою  $m$  і радіуса  $R$  закріплений в середині нижньої його основи під кутом  $\alpha$  до вертикальної осі (рис. 15.4).

Визначити реакції в опорах осі, якщо вона обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ ,  $O_1A = L/4$ ,  $O_1B = 3L/4$ .

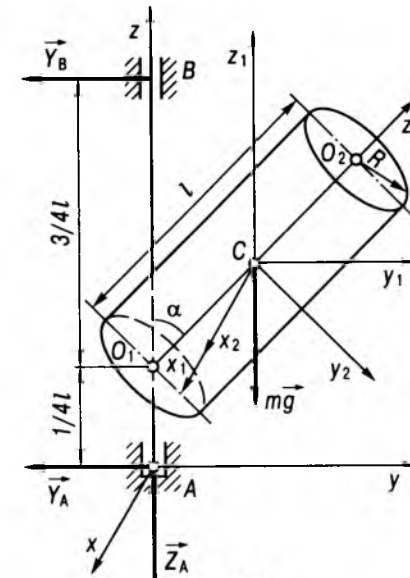


Рис. 15.4

Розв'язування. До циліндра прикладена активна сила — вага  $m\vec{g}$ . Умовно відкидаючи підшипник у точці  $B$  і під'ятник у точці  $A$ , прикладемо до циліндра відповідні реакції  $\vec{R}_A \{0, Y_A, Z_A\}$  і  $\vec{R}_B \{0, Y_B, 0\}$ .

Отримана система сил є довільною плоскою, тому із системи рівнянь (15.1) залишаться лише три ( $\epsilon = 0$ , оскільки  $\omega = \text{const}$  за умовою задачі):

$$\begin{cases} m\omega^2 \frac{L}{2} \sin \alpha = Y_A + Y_B, \\ 0 = -mg + Z_A, \\ I_{yz}\omega^2 = -mg \frac{L}{2} \sin \alpha + L \cdot Y_B. \end{cases} \quad (1)$$

Із другого рівняння отримуємо  $Z_A = mg$ . Із останнього з рівнянь (1) знаходимо

$$Y_B = \frac{\omega^2}{L} I_{yz} + \frac{1}{2} mg \sin \alpha. \quad (2)$$

Для визначення відцентрового моменту інерції  $I_{yz}$  спочатку скористаємося формулами для осевих моментів інерції відносно головних центральних осей  $Cx_2y_2z_2$  (рис. 15.4):

$$I_{x_2} = I_{y_2} = \frac{m}{12} (3R^2 + l^2), \quad I_{z_2} = \frac{mR^2}{2}.$$

Потім визначимо відцентровий момент  $I_{y_1z_1}$  відносно центральних осей  $Cx_1y_1z_1$ , повернутих по відношенню до головних центральних  $Cx_2y_2z_2$  на кут  $\alpha$  (тобто ці осі паралельні відповідним осям системи координат  $Axuz$ ):

$$I_{y_1z_1} = \frac{1}{2} (I_{y_2} - I_{z_2}) \sin 2\alpha = \frac{m}{24} (L^2 - 3R^2) \sin 2\alpha.$$

Нарешті, за теоремою Штейнера визначимо момент інерції

$$\begin{aligned} I_{yz} &= I_{y_1z_1} + m y_C z_C = \frac{m}{24} (L^2 - 3R^2) \sin 2\alpha + \\ &+ m \frac{L}{2} \sin \alpha \cdot \left( \frac{L}{4} + \frac{L}{2} \cos \alpha \right) = \\ &= \frac{m}{24} [3L^2 + (8L^2 - 6R^2) \cos \alpha] \sin \alpha. \end{aligned}$$

З урахуванням цього виразу за формулою (2) реакція

$$Y_B = \frac{\omega^2}{L} \cdot \frac{m}{24} \left[ 3L^2 + (8L^2 - 6R^2) \cos \alpha \right] \times$$

$$\times \sin \alpha + \frac{1}{2} mg \sin \alpha = \frac{m}{24} \times$$

$$\times \left[ 3(4g + L\omega^2) - \frac{2\omega^2}{L} (3R^2 - 4L^2) \cos \alpha \right] \sin \alpha.$$

Далі з першого з рівнянь (1) знаходимо реакцію

$$Y_A = \frac{1}{2} m\omega^2 L \sin \alpha - Y_B = \frac{1}{2} m\omega^2 L \sin \alpha - \frac{m}{24} \times$$

$$\times \left[ 3(4g + L\omega^2) - \frac{2\omega^2}{L} (3R^2 - 4L^2) \cos \alpha \right] \sin \alpha =$$

$$= \frac{m}{24} \left[ \frac{2\omega^2}{L} (3R^2 - 4L^2) \cos \alpha - 3(4g - 3L\omega^2) \right] \sin \alpha.$$

**Приклад 15.3.** Диск масою  $m$  і радіуса  $R$  обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega_1 = \omega$  навколо осі  $AC$ , закріпленої під кутом  $\alpha$  до вертикальної осі (рис. 15.5).

Визначити реакції в місці закріплення осі  $AC$  на вертикальній осі, якщо остання обертається з кутовою швидкістю  $\omega_2 = 2\omega$  і  $AC = 2R$ . Масою осі  $AC$  знехтувати.

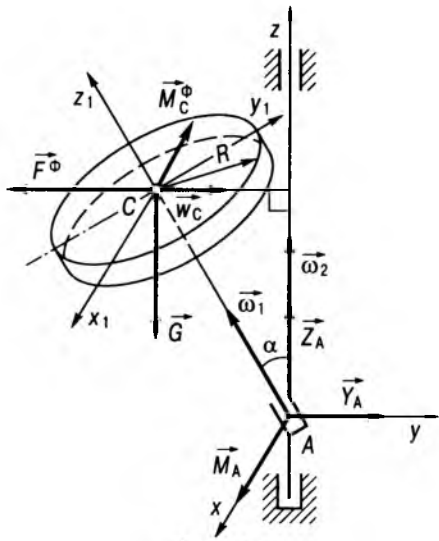


Рис. 15.5

Розв'язування. Зовнішня сила, що діє на диск, — це його вага  $\vec{G}$ .

За величиною головний вектор сил інерції

$$F^\Phi = m\omega_C^2 = m\omega_2^2 \cdot AC \sin \alpha = 2m\omega^2 R \sin \alpha.$$

Як і в розділі 13.2, головний момент сил інерції визначаємо через кінетичний момент  $\vec{K}_C$ . Оскільки в даному разі диск виконує складний рух — обертання навколо двох осей, що перетинаються під кутом  $\alpha$ , кінетичний момент визначаємо з (13.10), вибираючи за полюс  $O$  точку  $C$ . Головними осями інерції є  $Cx_1$ ,  $Cy_1$  і  $Cz_1$  (рис. 15.5), причому вісь  $Cy_1$  лежить у площині двох осей, навколо яких відбувається обертання. Головні моменти інерції диска (див. табл. 12.3):

$$I_{Cx1} = I_{Cy1} = \frac{mR^2}{4}, \quad I_{Cz1} = \frac{1}{2} mR^2.$$

Тоді

$$\vec{K}_C = \omega_2 \sin \alpha \cdot I_{Cy1} \cdot \vec{j}_1 +$$

$$+ (\omega_1 + \omega_2 \cos \alpha) \cdot I_{Cz1} \cdot \vec{k}_1.$$

Оскільки  $\omega_1 = \omega = \text{const}$ ,  $\omega_2 = 2\omega$ , то  $K_C = \text{const}$ .

У даному випадку маємо

$$\vec{M}_C^\Phi = -\frac{d\vec{K}_C}{dt} = -(\vec{\omega} \times \vec{K}_C),$$

або

$$\vec{M}_C^\Phi = - \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 2\omega \sin \alpha & \omega(1 + 2\cos \alpha) \\ 0 & K_{Cy1} & K_{Cz1} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2} mR^2 \omega^2 \sin \alpha (1 + 2\cos \alpha) \vec{i}_1.$$

Система сил  $\vec{G}$ ,  $F^\Phi$  і момента  $\vec{M}_C^\Phi$  є плоскою і лежить у площині двох осей обертання.

Реакції в точці кріплення осі  $AC$  визначаються із умов рівноваги (в системі координат  $Axyz$ )

$$\sum F_{iy} = Y_A - F^\Phi = 0,$$

$$\sum F_{iz} = Z_A - G = 0,$$

$$\sum M_{Ai} = M_A + G \cdot AC \sin \alpha +$$

$$+ F^\Phi \cdot AC \cos \alpha - M_C^\Phi = 0.$$

Звідси для величин шуканих реакцій отримемо такі вирази:

$$Y_A = 2mR\omega^2 \sin \alpha,$$

$$Z_A = mg,$$

$$M_A = mR\omega^2 \sin \alpha \left[ \left( 1 - \frac{2g}{R\omega^2} \right) - 3\cos \alpha \right].$$

**Приклад 15.4.** Однорідний стрижень завдовжки  $L$  масою  $m$  прикріплений під кутом  $\alpha$  до вертикальної осі.

Визначити внутрішні зусилля в довільному перерізі стрижня і в місці його закріплення, якщо він обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$  (рис. 15.6).

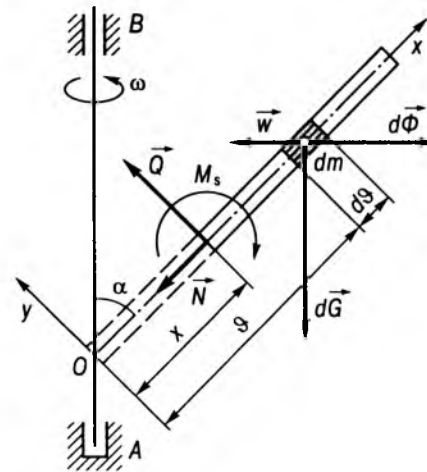


Рис. 15.6

Розв'язування. Для визначення внутрішніх зусиль у стрижні в довільному перерізі, наприклад на відстані  $x$  від місця закріплення стрижня на осі, розріжемо умовно стрижень і в місці перерізу прикладемо внутрішні зусилля  $\vec{N}$ ,  $\vec{Q}$  і  $M_s$ . Розглянемо елементарну частинку завдовжки  $d\vartheta$  справа від перерізу (рис. 15.6). Маса елементарної частинки  $dm = \frac{m}{L} d\vartheta$ . На неї діє сила ваги  $d\vec{G} = \vec{g} dm = \vec{g} \frac{m}{L} d\vartheta$ . До цієї сили слід додати й силу інерції

$$d\vec{\Phi} = -\vec{w} dm,$$

де  $\vec{w}$  — прискорення частинки;  $\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n$ .

Оскільки обертання відбувається зі сталою кутовою швидкістю, то

$$w = w_n = \omega^2 \vartheta \sin \alpha.$$

Величина елементарної сили інерції

$$d\Phi = \frac{m}{L} \omega^2 \sin \alpha \cdot \vartheta d\vartheta.$$

Додамо силу інерції до інших сил, що діють на частинку, і з умов статичної рівноваги

$$\sum_i F_{ix} = -N - \int dG \cos \alpha + \int d\Phi \sin \alpha = 0,$$

$$\sum_i F_{iy} = Q - \int dG \sin \alpha - \int d\Phi \cos \alpha = 0,$$

$$\sum_i M_{Ni} = -M_s - \int dG (\vartheta - x) \sin \alpha -$$

$$- \int d\Phi (\vartheta - x) \cos \alpha = 0$$

отримаємо

$$N = -\int dG \cos \alpha + \int d\Phi \sin \alpha,$$

$$Q = \int dG \sin \alpha + \int d\Phi \cos \alpha,$$

$$M_s = -\int dG (\vartheta - x) \sin \alpha - \int d\Phi (\vartheta - x) \cos \alpha,$$

або

$$N = -\frac{mg}{L} \cos \alpha \int_0^L d\vartheta + \frac{m\omega^2}{L} \sin^2 \alpha \int_0^L \vartheta d\vartheta,$$

$$Q = \frac{mg}{L} \sin \alpha \int_0^L d\vartheta - \frac{m\omega^2}{L} \sin \alpha \cos \alpha \int_0^L \vartheta d\vartheta,$$

$$M_s = -\frac{mg}{L} \sin \alpha \int_0^L (\vartheta - x) d\vartheta -$$

$$- \frac{m\omega^2}{L} \sin \alpha \cos \alpha \int_0^L \vartheta (\vartheta - x) d\vartheta,$$

Після інтегрування за  $\vartheta$  отримаємо внутрішні зусилля в стрижні в перетині на відстані  $x$ :

$$N = -\frac{mg}{L} (L-x) \cos \alpha + \frac{m\omega^2}{2L} (L^2 - x^2) \sin^2 \alpha,$$

$$Q = \frac{mg}{L} (L-x) \sin \alpha + \frac{m\omega^2}{2L} (L^2 - x^2) \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$M_s = -\frac{mg}{2L}(L-x)^2 \sin \alpha - \frac{m\omega^2}{6L}(2L^3 - 3xL^2 + x^3) \sin \alpha \cos \alpha.$$

Внутрішні зусилля в місці прикріплення стрижня до осі ( $x = 0$ ):

$$N = -mg \cos \alpha + \frac{m\omega^2 L}{2} \sin^2 \alpha,$$

$$Q = mg \sin \alpha + \frac{m\omega^2 L}{2} \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$M_s = -\frac{1}{2} mgL \sin \alpha - \frac{1}{3} m\omega^2 L^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

**Приклад 15.5.** Тонка однорідна пластина у формі півкола радіуса  $R$  масою  $m$  обертається навколо вертикальної осі, яка є його діаметром, зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$ .

Визначити нормальне внутрішнє зусилля в перерізі, паралельному осі на відстані  $h$  від неї (рис. 15.7).

**Розв'язування.** Для визначення внутрішнього зусилля використаємо метод кінстостатики, для чого розглянемо елементарну частинку тіла масою

$$dm = \frac{m}{S} dS = \frac{2m}{\pi R^2} dx dy,$$

де  $S = \frac{1}{2} \pi R^2$  — площа пластини;  $dS = dx dy$  — елементарна площа.

Силу інерції елементарної частинки визначимо із співвідношення  $d\Phi = -\vec{w} dm$ . У даному випадку маємо  $w = w_n = \omega^2 x$ , тому

$$d\Phi = \frac{2m}{\pi R^2} \omega^2 x dx dy.$$

Після інтегрування цього виразу за змінними  $x$  і  $y$  отримаємо величину головного вектора сил інерції для частини диска, що знаходиться справа від перерізу,

$$F^\Phi = \iint_{(s)} d\Phi = \frac{2m\omega^2}{\pi R^2} \int_h^R x dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = \frac{4m\omega^2}{3\pi R^2} (R^2 - h^2)^{\frac{3}{2}}.$$

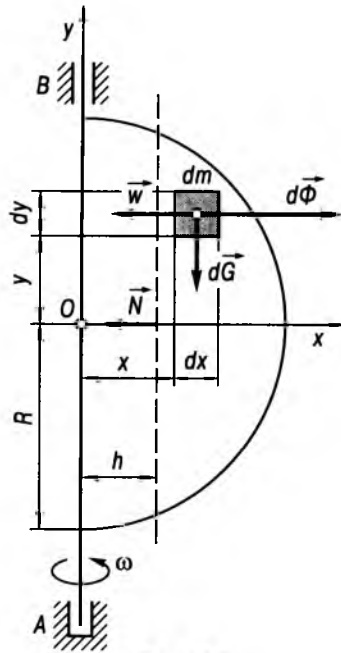


Рис. 15.7

Але з умови рівноваги (рис. 15.7)

$$\sum_i F_{ix} = -N + F^\Phi = 0$$

впливає, що нормальне внутрішнє зусилля

$$N = F^\Phi = \frac{4m\omega^2}{3\pi R^2} (R^2 - h^2)^{\frac{3}{2}}.$$

### 15.1.3. Задачі для самостійного розв'язування

**15.1.** Тіло, що обертається навколо нерухомої осі, складається з вала  $AB$ , трьох невагомих стрижнів  $O_1M_1 = r_1$ ,  $O_2M_2 = r_2$ ,  $O_3M_3 = r_3$ , жорстко прикріплених до вала під кутом  $90^\circ$  і розташованих у одній площині, і точкових тягарів  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ , що мають масу відповідно  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , закріплених на кінцях стрижнів (рис. 15.8). Відстані від нижнього підшипника  $A$  до стрижнів  $O_1M_1$ ,  $O_2M_2$  відповідно дорівнюють  $L_1$ ,  $L_2$ .

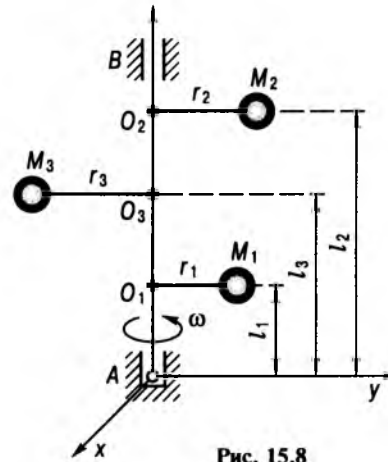


Рис. 15.8

Визначити відстані  $r_3$  і  $L_3$  (від підшипника  $A$  до стрижня  $O_3M_3$ ) через додаткові динамічні реакції, вважаючи обертове тіло зрівноваженим.

$$\text{Відповідь: } r_3 = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_3};$$

$$L_3 = \frac{m_1 r_1 L_1 + m_2 r_2 L_2}{m_3 r_3}.$$

**15.2.** Стрижень завдовжки  $L$  масою  $m$  одним кінцем жорстко прикріплений під кутом  $\alpha$  в точці  $O$  до вала, якому надане обертання зі сталим кутовим прискоренням  $\epsilon$  із стану спокою (рис. 15.9).

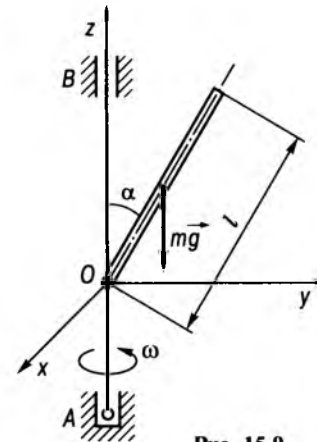


Рис. 15.9

Визначити динамічні реакції підшипника  $B$  і під'ятника  $A$ , якщо  $AO = BO = L$ , а також відповідний обертальний момент  $M_{об}$ .

Відповідь:

$$X_A = -\frac{mL\epsilon}{4} \sin \alpha \left( 1 - \frac{2}{3} \cos \alpha \right),$$

$$Y_A = \frac{mg}{4} \sin \alpha \left[ 1 - \frac{L}{g} (\epsilon t)^2 \left( 1 - \frac{2}{3} \cos \alpha \right) \right],$$

$$X_B = -\frac{mL\epsilon}{4} \sin \alpha \left( 1 + \frac{2}{3} \cos \alpha \right),$$

$$Y_B = -\frac{mg}{4} \sin \alpha \left[ 1 + \frac{L}{g} (\epsilon t)^2 \left( 1 + \frac{2}{3} \cos \alpha \right) \right],$$

$$M_{об} = \frac{L^2}{3} m \epsilon \sin^2 \alpha.$$

**15.3.** До вала, що обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$ , прикріплений під кутом  $\alpha$  стрижень завдовжки  $L_1$  масою  $m_1$  (рис. 15.10). На відстані  $b$  від осі обертання на невагомому стрижні до вала також прикріплена точкова маса  $m_2$ .

При заданих розмірах  $a$  і  $b$  вибрати такі маси  $m_1$  та довжину  $L_1$ , щоб у під'ятнику  $A$  і підшипнику  $B$  не виникало динамічних реакцій.

$$\text{Відповідь: } m_1 = \frac{4b}{3a} m_2 \operatorname{ctg} \alpha, \quad L_1 = \frac{3a}{2} \operatorname{sec} \alpha.$$

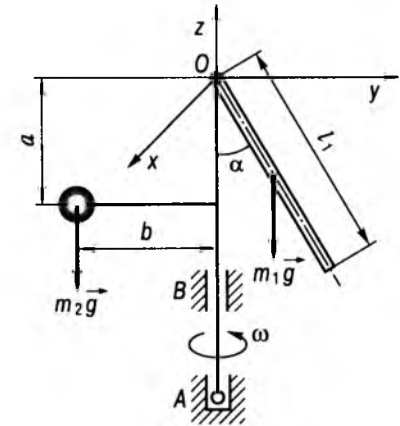


Рис. 15.10



15.4. Вал обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$ . До вала жорстко кріпиться тонкий круглий диск масою  $m_1$  радіуса  $r$ .

При заданих масах точкових тягарів  $m_2$  і  $m_3$  вибрати такі  $L_2$  та  $L_3$ , щоб у підп'ятнику  $A$  і підшипнику  $B$  не виникало динамічних реакцій (рис. 15.11).

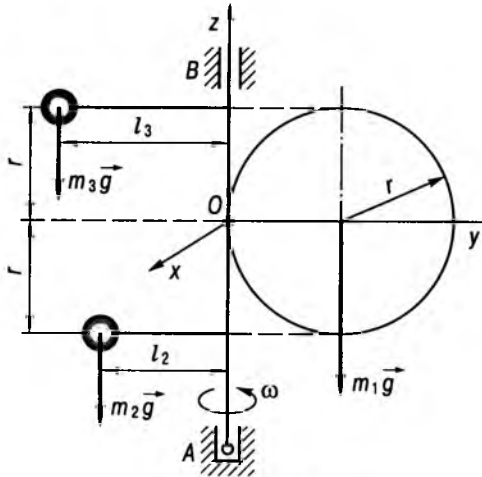


Рис. 15.11

Відповідь:  $L_2 = \frac{1}{2} \frac{m_1}{m_2} r$ ,  $L_3 = \frac{1}{2} \frac{m_1}{m_3} r$ .

15.5. Однорідний круглий диск радіуса  $R$  масою  $m$  насаджений на горизонтальний вал під кутом  $\alpha$  до осі вала і жорстко прикріплений до вала, причому центр мас  $O$  лежить на осі вала. Визначити реакції підшипників  $A$  і  $B$ , якщо вал обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$  і  $AO = OB = a$ .

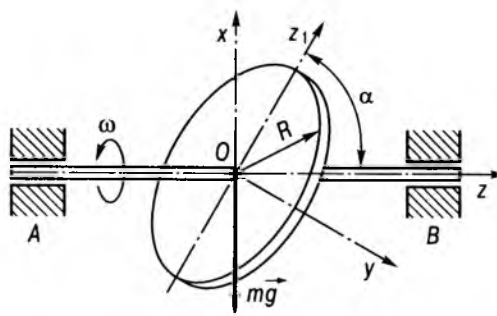


Рис. 15.12

Вагою вала і тертям в підшипниках можна знехтувати (рис. 15.12).

Відповідь:  $Y_A = Y_B$ ,

$$X_A = \frac{mR^2}{16a} \omega^2 \sin 2\alpha = -X_B.$$

15.6. До вертикальної осі, що закріплена у підшипнику  $A$  і підп'ятнику  $B$ , жорстко приєднані перпендикулярний до цієї осі тонкий стрижень  $DE$  завдовжки  $L$  масою  $m_1$  та круглий однорідний диск масою  $m_2$ , площина якого лежить у площині  $Oxy$ . Диск насаджений ексцентрично таким чином, що його центр мас  $C_2$  знаходиться від осі  $Oz$  на відстані  $OC_2 = a$ . Циліндр і стрижень обертаються навколо осі  $Oz$  із заданою кутовою швидкістю  $\omega = \text{const}$ . Обчислити реакції підшипника  $A$  і підп'ятника  $B$ , якщо  $BE = L$ ,  $EO = AO = \frac{L}{2}$  та  $OC_2 \perp ED$  (рис. 15.13).

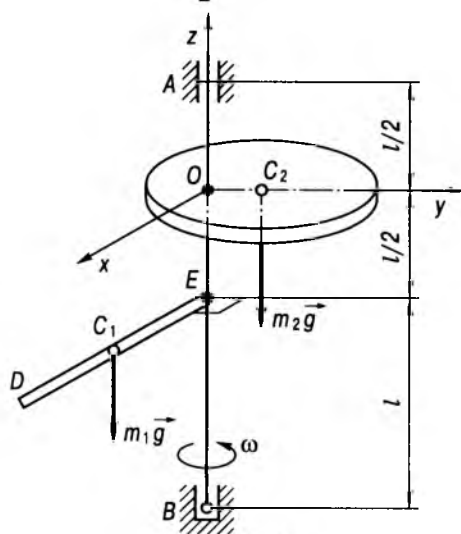


Рис. 15.13

Відповідь:  $X_A = -\frac{m_1}{4} (g + \omega^2 L)$ ,  
 $Y_A = -\frac{m_2 a}{4} \left( 2 \frac{g}{L} + 3\omega^2 \right)$ ,  $Z_A = (m_1 + m_2) g$ ,  
 $X_B = \frac{m_1}{4} (g - \omega^2 L)$ ,  $Y_B = \frac{m_2 a}{4} \left( 2 \frac{g}{L} - \omega^2 \right)$ .

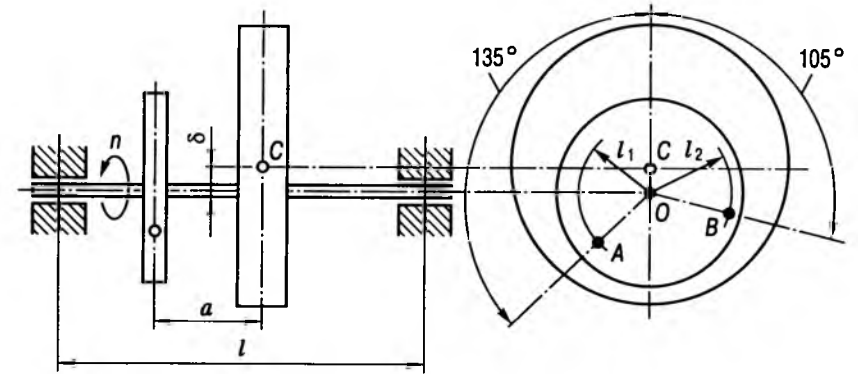


Рис. 15.14

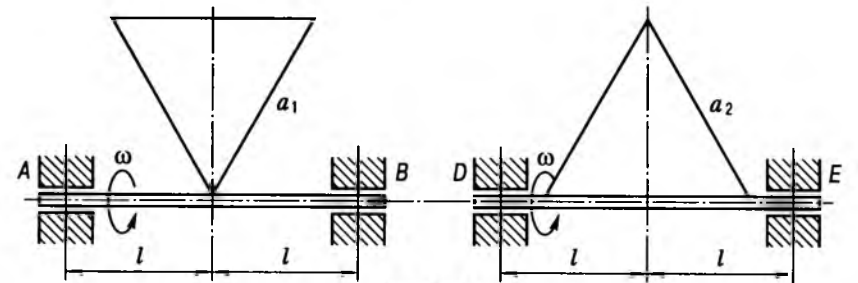


Рис. 15.15

15.7. Диск вагою  $G = 100$  Н обертається на валу зі сталою кутовою швидкістю  $n = 1500$  об/хв. Центр мас диска  $C$  зміщений від осі вала на  $\delta = 1$  мм (рис. 15.14). Якої ваги потрібні дві противаги для статичного балансування, якщо відстані від осі до центрів мас противаг  $A$  і  $B$  відповідно  $L_1 = 10$  см і  $L_2 = 15$  см? Кут  $\angle COA = 135^\circ$ ,  $\angle COB = 105^\circ$ . Які будуть динамічні реакції  $R$  в опорах, якщо площини диска і противаг знаходяться на відстані  $a = 10$  мм, а відстань між опорами  $L_1 = 150$  мм?

Відповідь:  $G_1 = 1,12$  Н,  $G_2 = 0,54$  Н,  $R = 50$  Н.

15.8. Однорідні пластини у вигляді рівнобічного трикутника, що мають однакову вагу, рівномірно обертаються навколо горизонтальних осей з однією й тією ж кутовою швидкістю (рис. 15.15).

Знайти співвідношення сторін цих трикутників, при якому додаткові динамічні реакції опорних підшипників осей однакові, якщо  $AB = DE = 2L$ .

Відповідь:  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}$ .

15.9. До горизонтального невагомому вала  $AB$  під прямими кутами приварені два однорідних стрижні, виготовлені з одного матеріалу і розташовані в одній площині (рис. 15.16). Відстані цих стрижнів від найближчих до них опор  $A$  і  $B$  вала та відстань між стрижнями однакові. Довжина найближчого до опори  $B$  стрижня вдвічі менша довжини іншого стрижня. Вважаючи, що кутова швидкість обертання вала  $AB$  дорівнює  $\omega$ , визначити співвідношення повних реакцій  $R_B$  і  $R_A$  опор  $B$  і  $A$ , якщо прива-

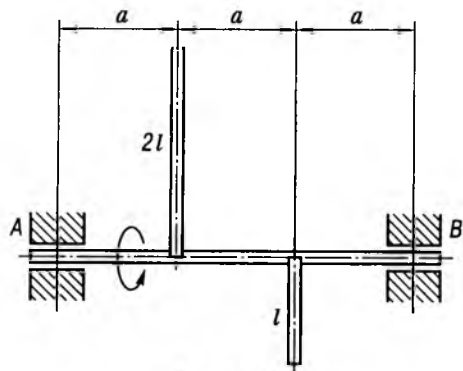


Рис. 15.16

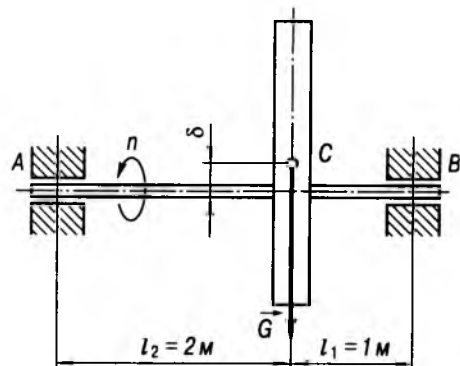


Рис. 15.17

рені до вала стрижні знаходяться у вертикальній площині в положенні, вказаному на рисунку, а довжина коротшого стрижня дорівнює  $L$ .

$$\text{Відповідь: } \frac{R_B}{R_A} = \frac{8g + 2\omega^2 L}{10g + 7\omega^2 L}$$

**15.10.** На горизонтальний вал  $AB$ , що обертається зі сталою кутовою швидкістю  $n = 4000$  об/хв, насаджено ротор турбіни, його вага  $G = 8$  кН.

Визначити динамічні реакції підшипників, якщо центр мас  $C$  ротора зміщений від осі обертання на відстань  $\delta = 0,4$  мм (рис. 15.17).

Відповідь:  $R_A^d = 19$  кН,  $R_B^d = 38$  кН.

**15.11.** Для умов задачі 15.9 знайти співвідношення додаткових динамічних реакцій  $R_B^d$  і  $R_A^d$  опор  $A$  і  $B$  вала при його рівномірному обертанні.

$$\text{Відповідь: } \frac{R_B^d}{R_A^d} = \frac{2}{7}$$

#### 15.1.4. Розрахунково-графічна робота

Умова роботи. Тіло, що складається з дисків, стрижнів і матеріальних точок, прикріплених до вала  $AB = L = 1$  м, обертається навколо нерухомої осі за законом  $\varphi(t)$ , в якому відповідно до варіанта прийнято  $\omega = 10\pi$  рад/с або  $\epsilon = 20$  рад/с<sup>2</sup> (рис. 15.18).

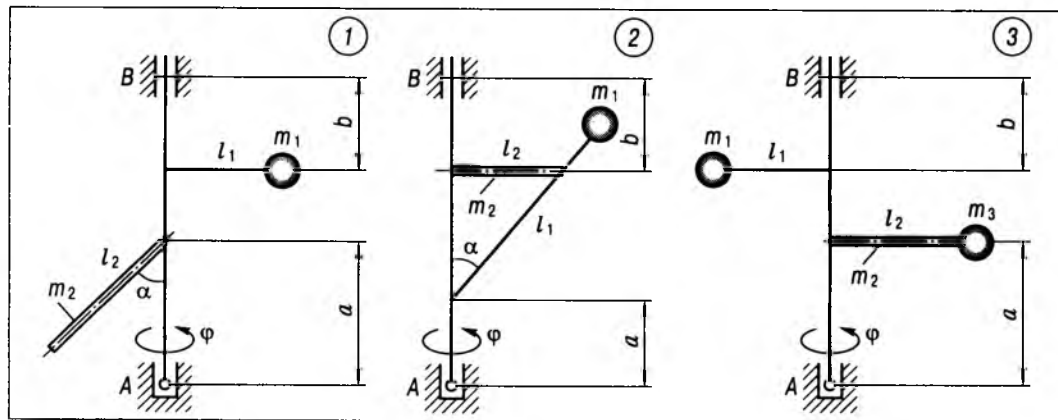


Рис. 15.18 (початок)

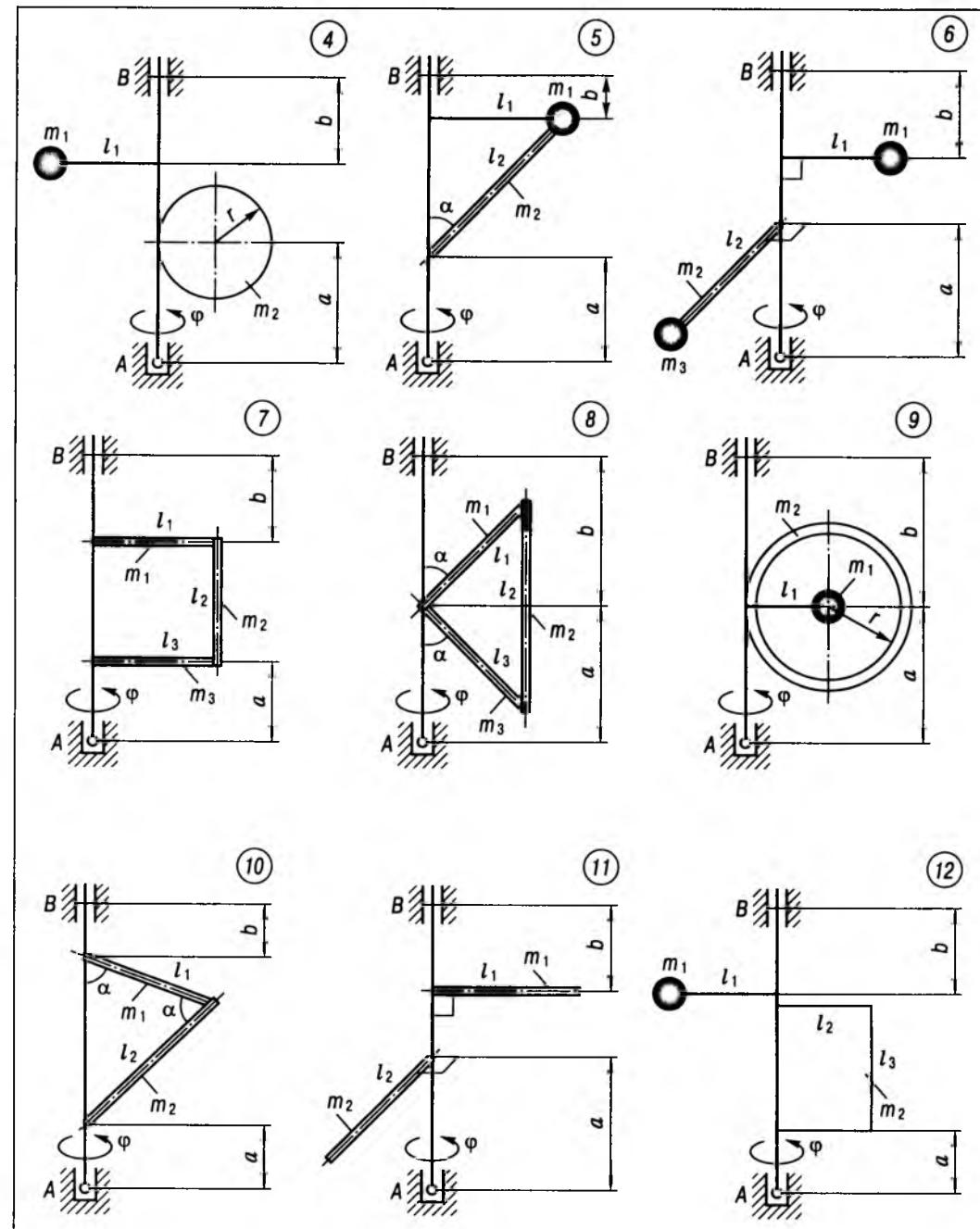


Рис. 15.18 (продовження)

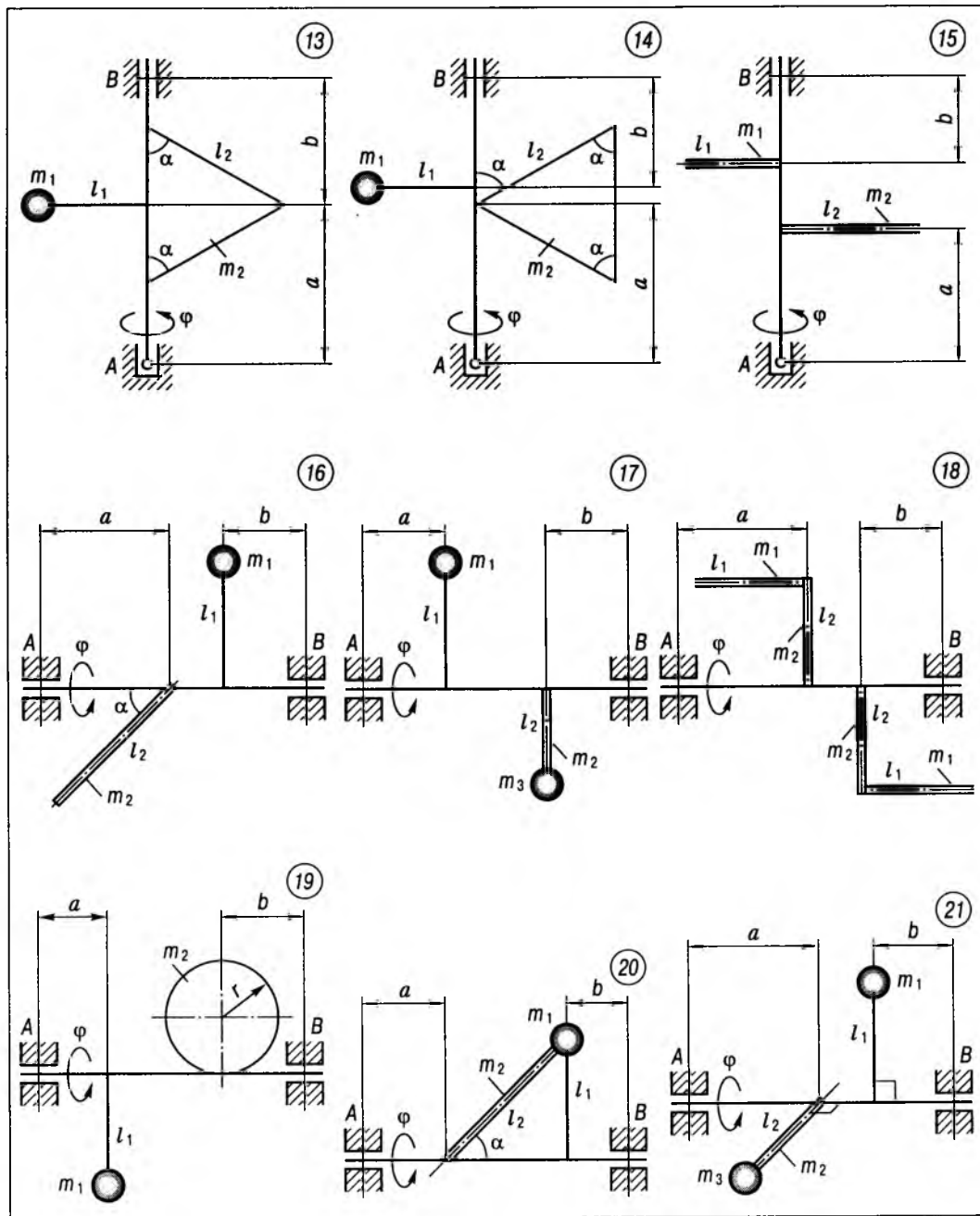


Рис. 15.18 (продовження)

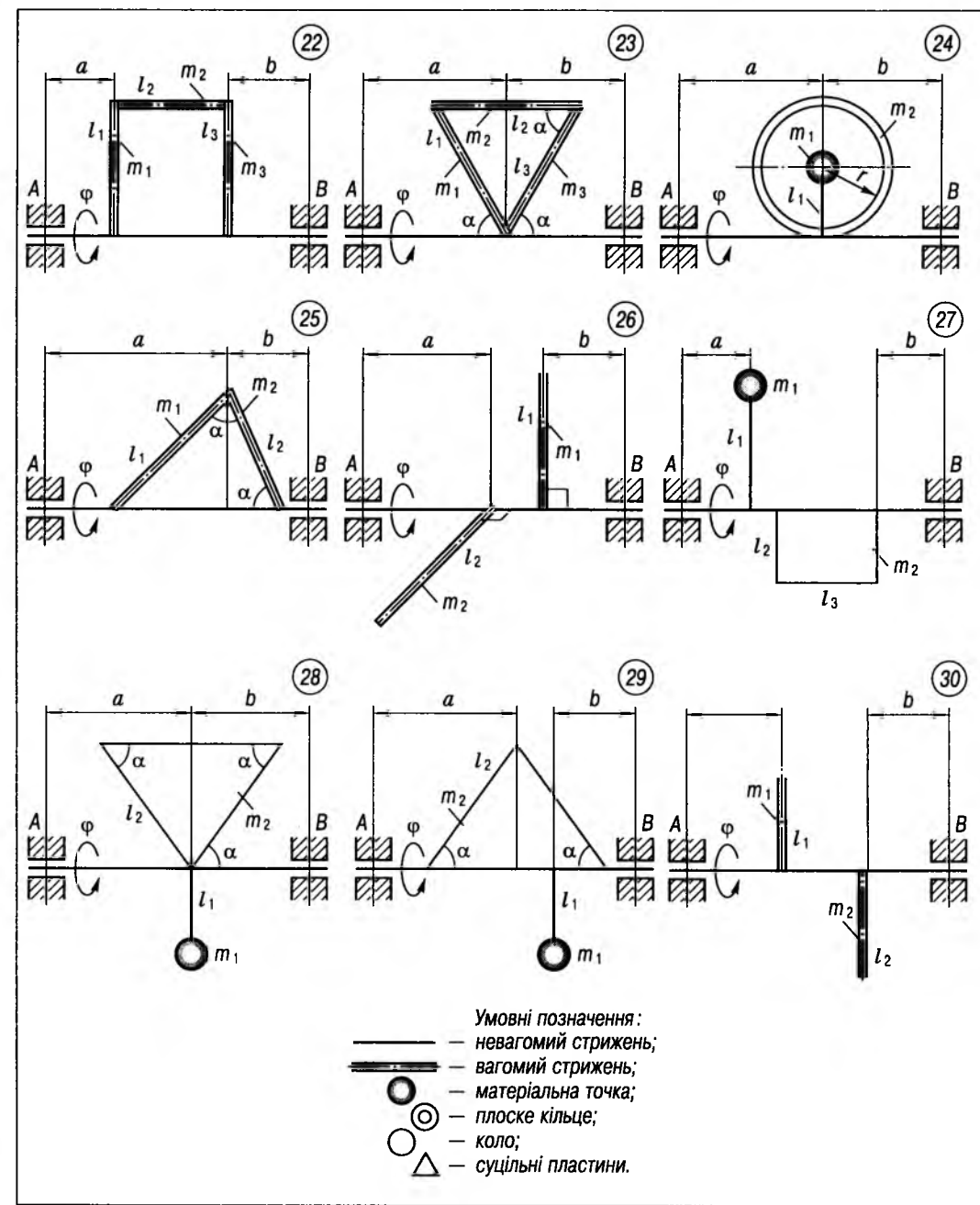


Рис. 15.18 (закінчення)

Таблиця 15.1

№ варіанта	$\varphi(t)$ , рад	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$a$	$b$	$r$	$\alpha, \dots^\circ$
		кг			м						
1	$\omega t$	5	10	—	0,3	0,5	—	0,5	0,3	—	45
2	$\frac{1}{2}\epsilon t^2$	6	10	—	0,7	0,25	—	0,3	0,27	—	30
3	$\omega t$	7	3	5	0,3	0,5	—	0,5	0,3	—	—
4	$\frac{1}{2}\epsilon t^2$	5	15	—	0,3	—	—	0,4	0,3	0,2	—
5	$\omega t$	10	7	—	0,3	0,42	—	0,5	0,2	—	45
6	$\frac{1}{2}\epsilon t^2$	7	3	5	0,3	0,5	—	0,5	0,3	—	—
7	$\omega t$	5	5	5	0,4	0,4	0,4	0,3	0,3	—	—
8	$\frac{1}{2}\epsilon t^2$	6	8	6	0,57	0,8	0,57	0,5	0,5	—	45
9	$\omega t$	10	20	—	0,3	—	—	0,5	0,5	0,3	—
10	$\frac{1}{2}\epsilon t^2$	5	7	—	0,34	0,5	—	0,3	0,2	—	70
11	$\omega t$	10	15	—	0,4	0,6	—	0,4	0,35	—	—
12	$\frac{1}{2}\epsilon t^2$	5	20	—	0,3	0,3	0,4	0,2	0,3	—	—
13	$\omega t$	7	15	—	0,3	0,4	—	0,6	0,4	—	60
14	$\frac{1}{2}\epsilon t^2$	7	15	—	0,3	0,4	—	0,6	0,3	—	60
15	$\omega t$	3	5	—	0,3	0,5	—	0,5	0,3	—	—
16	$\frac{1}{2}\epsilon t^2$	5	10	—	0,3	0,5	—	0,5	0,3	—	45
17	$\omega t$	4	5	8	0,4	0,3	—	0,3	0,3	—	—
18	$\frac{1}{2}\epsilon t^2$	5	5	5	0,3	0,3	—	0,25	0,5	—	—
19	$\omega t$	5	15	—	0,3	—	—	0,3	0,4	0,2	—
20	$\frac{1}{2}\epsilon t^2$	10	7	—	0,3	0,42	—	0,5	0,2	—	45
21	$\omega t$	7	3	5	0,3	0,5	—	0,5	0,3	—	—
22	$\frac{1}{2}\epsilon t^2$	5	5	5	0,5	0,4	0,5	0,3	0,3	—	—
23	$\omega t$	6	6	6	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	—	60

Продовження табл. 15.1

№ варіанта	$\varphi(t)$ , рад	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$a$	$b$	$r$	$\alpha, \dots^\circ$
		кг			м						
24	$\frac{1}{2}\epsilon t^2$	10	20	—	0,3	—	—	0,55	0,45	0,3	—
25	$\omega t$	7	5	—	0,5	0,34	—	0,6	0,4	—	70
26	$\frac{1}{2}\epsilon t^2$	10	15	—	0,4	0,6	—	0,4	0,35	—	—
27	$\omega t$	5	15	—	0,4	0,3	0,4	0,25	0,25	—	—
28	$\frac{1}{2}\epsilon t^2$	7	15	—	0,3	0,4	—	0,55	0,45	—	60
29	$\omega t$	7	15	—	0,3	0,4	—	0,6	0,3	—	60
30	$\frac{1}{2}\epsilon t^2$	4	5	—	0,3	0,5	—	0,4	0,3	—	—

Використовуючи метод кінестатики (див. § 13.3) або рівняння (15.1), (15.4), знайти повні і додаткові динамічні реакції в опорах вала, а у разі прискореного обертання знайти ще й обертальний момент  $M_{об}$ .

Закони руху, розміри тіл і їх маси наведено в табл. 15.1.

Приклад виконання. Тіло складається з матеріальної точки масою  $m_1$ , яка знаходиться на кінці стрижня завдовжки  $l_1$

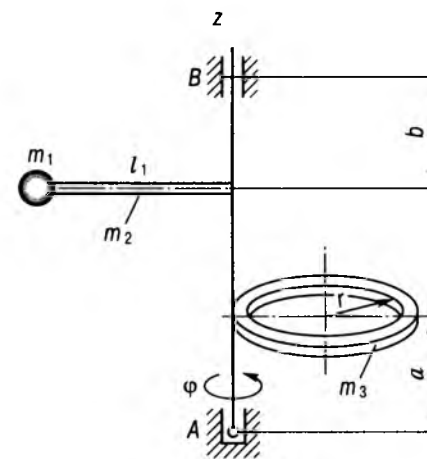


Рис. 15.19

і масою  $m_2$ , та кільця радіуса  $r$  і масою  $m_3$  (маса рівномірно розподілена по ободу кільця), прикріплених до вала, що обертається навколо нерухомої осі за законом  $\varphi(t) = \frac{1}{2}\epsilon t^2$ , рад (рис. 15.19).

Використовуючи метод кінестатики (розділ 13), знайти повні і додаткові динамічні реакції в опорах вала  $X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B, X_A^D, Y_A^D, Z_A^D, X_B^D, Y_B^D$ , а також обертальний момент  $M_{об}$ , якщо  $m_1 = 5$  кг,  $m_2 = 2$  кг,  $m_3 = 8$  кг,  $AB = 1$  м,  $l_1 = 0,4$  м,  $a = b = 0,3$  м,  $r = 0,2$  м,  $\epsilon = 20$  рад/с<sup>2</sup>.

Розв'язування. Спочатку визначимо повні динамічні реакції опор.

Зв'яжемо жорстко з тілом рухому систему координат  $Axuz$  (рис. 15.20). Визначимо активні сили  $m_1\vec{g}$ ,  $m_2\vec{g}$ ,  $m_3\vec{g}$ , що діють на тіло, і  $M_{об}$ .

Відповідно до аксіоми про звільнення від в'язей відкинемо верхню і нижню підшипникові опори і замінемо їх дію на тіло відповідними реакціями в'язей  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B$  і  $\vec{Y}_B$ .

До центрів мас кожного з елементів, які складають тіло, умовно прикладемо у напрямку, протилежному їхнім прискоренням

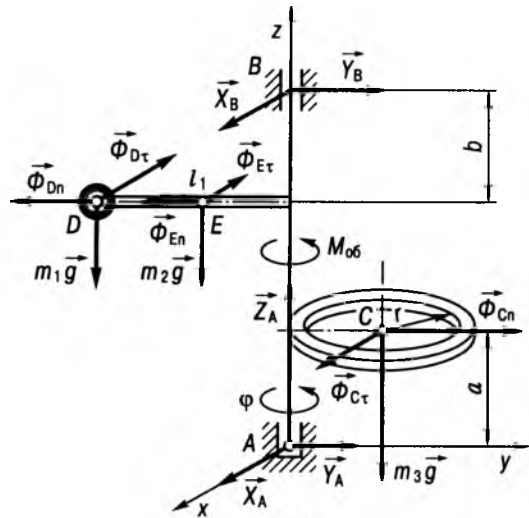


Рис. 15.20

(або складовим прискорень), сили інерції. Для тягара, стрижня і кільця відповідно

$$\Phi_{Dn} = m_1 \dot{\varphi}^2 l_1 = m_1 l_1 (\epsilon t)^2, \quad \Phi_{D\tau} = m_1 l_1 \epsilon;$$

$$\Phi_{En} = m_2 \dot{\varphi}^2 l_1 / 2 = m_2 l_1 (\epsilon t)^2 / 2,$$

$$\Phi_{D\tau} = m_2 l_1 \epsilon / 2;$$

$$\Phi_{Cn} = m_3 \dot{\varphi}^2 r = m_3 r (\epsilon t)^2, \quad \Phi_{C\tau} = m_3 r \epsilon.$$

Отримана система сил є довільною просторовою, тому використаємо відповідні умови її рівноваги:

$$\sum F_{ix} = X_A + X_B - \Phi_{D\tau} - \Phi_{E\tau} + \Phi_{C\tau} = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{iy} = Y_A + Y_B - \Phi_{Dn} - \Phi_{En} + \Phi_{Cn} = 0, \quad (2)$$

$$\sum F_{iz} = Z_A - m_1 g - m_2 g - m_3 g = 0, \quad (3)$$

$$\sum M_{xi} = -Y_B L + m_1 g l_1 + m_2 g \frac{l_1}{2} - m_3 g r + (\Phi_{Dn} + \Phi_{En})(L - b) - \Phi_{Cn} a = 0, \quad (4)$$

$$\sum M_{yi} = X_B L - (\Phi_{D\tau} + \Phi_{E\tau})(L - b) + \Phi_{C\tau} a = 0, \quad (5)$$

$$\sum M_{zi} = M_{06} - \Phi_{D\tau} l_1 - \Phi_{E\tau} \frac{l_1}{2} - \Phi_{C\tau} r = 0. \quad (6)$$

Розв'яжемо ці рівняння відносно невідомих величин.

Із рівняння (6) знаходимо

$$\begin{aligned} M_{06} &= \Phi_{D\tau} l_1 + \Phi_{E\tau} \frac{l_1}{2} + \Phi_{C\tau} r = \\ &= \left(m_1 + \frac{1}{4} m_2\right) \epsilon l_1^2 + m_3 \epsilon r^2 = \\ &= \left[\left(m_1 + \frac{1}{4} m_2\right) l_1^2 + m_3 r^2\right] \epsilon = \\ &= (5,5 \text{ кг} \cdot 0,16 \text{ м}^2 + 8 \text{ кг} \cdot 0,04 \text{ м}^2) \times \\ &\quad \times 20 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = 24 \text{ Н} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Із виразу (5) маємо

$$\begin{aligned} X_B &= (\Phi_{D\tau} + \Phi_{E\tau}) \left(1 - \frac{b}{L}\right) - \Phi_{C\tau} \frac{a}{L} = \\ &= \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2\right) \epsilon l_1 \left(1 - \frac{b}{L}\right) - m_3 \epsilon r \frac{a}{L} = \\ &= \left[\left(m_1 + \frac{1}{2} m_2\right) l_1 \left(1 - \frac{b}{L}\right) - m_3 r \frac{a}{L}\right] \epsilon = \\ &= (6 \text{ кг} \cdot 0,4 \text{ м} \cdot 0,7 - 8 \text{ кг} \cdot 0,2 \text{ м} \cdot 0,3) \times \\ &\quad \times 20 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = 24 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Із рівняння (4) отримаємо

$$\begin{aligned} Y_B &= (\Phi_{Dn} + \Phi_{En}) \left(1 - \frac{b}{L}\right) - \Phi_{Cn} \frac{a}{L} + \\ &\quad + m_1 g \frac{l_1}{L} + m_2 g \frac{l_1}{2L} - m_3 g \frac{r}{L} = \\ &= \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2\right) (\epsilon t)^2 l_1 \left(1 - \frac{b}{L}\right) - m_3 (\epsilon t)^2 r \frac{a}{L} + \\ &\quad + m_1 g \frac{l_1}{L} + m_2 g \frac{l_1}{2L} - m_3 g \frac{r}{L} = \\ &= 6 \text{ кг} \cdot 400 t^2 \frac{\text{рад}^2}{\text{с}^2} \cdot 0,4 \text{ м} \cdot 0,7 - \\ &\quad - 8 \text{ кг} \cdot 400 t^2 \frac{\text{рад}^2}{\text{с}^2} \cdot 0,2 \text{ м} \cdot 0,3 + \\ &\quad + 6 \text{ кг} \cdot 9,8 \frac{\text{М}}{\text{с}^2} \cdot 0,4 - 8 \text{ кг} \cdot 9,8 \frac{\text{М}}{\text{с}^2} \cdot 0,2 = \\ &= 480 t^2 + 7,84 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Далі з виразу (3) випливає, що

$$Z_A = (m_1 + m_2 + m_3) g = 15 \text{ кг} \cdot 9,8 \frac{\text{М}}{\text{с}^2} = 147 \text{ Н}.$$

Рівняння (1) запишемо так:

$$\begin{aligned} X_A &= -X_B + \Phi_{D\tau} + \Phi_{E\tau} - \Phi_{C\tau} = \\ &= \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2\right) \epsilon l_1 - m_3 \epsilon r - X_B = \\ &= 6 \text{ кг} \cdot 20 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \cdot 0,4 \text{ м} - 8 \text{ кг} \cdot 20 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \times \\ &\quad \times 0,2 \text{ м} - 24 \text{ Н} = -8 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Нарешті, з виразу (2) отримаємо

$$\begin{aligned} Y_A &= -Y_B + \Phi_{Dn} + \Phi_{En} - \Phi_{Cn} = \\ &= -Y_B + \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2\right) (\epsilon t)^2 l_1 - m_3 (\epsilon t)^2 r = \\ &= -480 t^2 \text{ Н} - 7,84 \text{ Н} + 6 \text{ кг} \cdot 400 t^2 \frac{\text{рад}^2}{\text{с}^2} \times \\ &\quad \times 0,4 \text{ м} - 8 \text{ кг} \cdot 400 t^2 \frac{\text{рад}^2}{\text{с}^2} \cdot 0,2 \text{ м} = \\ &= -160 t^2 - 7,84 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Від'ємний знак у виразах  $X_A$  і  $Y_A$  вказує на те, що вектори  $\vec{X}_A$  і  $\vec{Y}_A$  протилежно напрямлені.

Додаткові динамічні реакції отримаємо, залишивши у виразах повних реакцій лише ті члени, які залежать від  $\epsilon$  і  $\epsilon t$ , а саме:

$$X_A^n = -0,4 \epsilon \text{ Н} = -8 \text{ Н},$$

$$Y_A^n = -0,4 (\epsilon t)^2 \text{ Н} = -160 t^2 \text{ Н}, \quad Z_A^n = 0,$$

$$X_B^n = 1,2 \epsilon \text{ Н} = 24 \text{ Н},$$

$$Y_B^n = 1,2 (\epsilon t)^2 \text{ Н} = 480 t^2 \text{ Н}.$$

В і д п о в і д ь: знайдено всі шукані величини,  $X_A = -8 \text{ Н}$ ,  $X_A^n = -8 \text{ Н}$ ,  $Y_A = -160 t^2 - 7,84 \text{ Н}$ ,  $Y_A^n = -160 t^2 \text{ Н}$ ,  $Z_A = 147 \text{ Н}$ ,  $Z_A^n = 0$ ,  $X_B = 24 \text{ Н}$ ,  $X_B^n = 24 \text{ Н}$ ,  $Y_B = 480 t^2 + 7,84 \text{ Н}$ ,  $Y_B^n = 480 t^2 \text{ Н}$ ,  $M_{06} = 24 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

## §15.2. ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

### 15.2.1. Короткі теоретичні відомості

Плоскопаралельний рух твердого тіла — це рух, при якому всі точки тіла рухаються паралельно деякій нерухомій площині. Можна вважати, що плоскопаралельний рух складається з двох рухів — поступального разом з довільним вибраним полюсом і обертального навколо цього полюса.

При розв'язуванні задач на плоскопаралельний рух твердого тіла найдоцільніше застосовувати такі два методи:

1) складання диференціальних рівнянь руху;

2) на підставі теореми про зміну кінетичної енергії.

За першим методом для вивчення руху доводиться застосовувати відразу дві теореми, а саме: про рух центра мас твердого тіла або механічної системи; про зміну кінетичного моменту відносно осі, що проходить через центр мас перпендикулярно до площини руху.

За уваження: теорему доцільно записувати саме відносно центра мас (точки  $C$ ), оскільки це спрощує запис диференціальних рівнянь руху.

Рівняння плоскопаралельного руху твердого тіла мають вигляд

$$m \vec{w}_C = F_x^e, \quad m \vec{w}_{Cy} = F_y^e, \quad m \vec{w}_{Cz} = 0, \quad (15.5)$$

$$0 = M_{Cx}^e, \quad 0 = M_{Cy}^e, \quad I_{Cz} \epsilon_z = M_{Cz}^e. \quad (15.6)$$

Перші три рівняння описують поступальний рух твердого тіла разом з центром мас  $C$ , рівняння (15.6) — обертальний рух навколо центра мас.

За уваження: прискорення центра мас тіла при плоскопаралельному русі визначають за формулою

$$\vec{w}_C = \vec{w}_O + \vec{w}_{CO}^{06} + \vec{w}_{CO}^{II}. \quad (15.7)$$

де  $\vec{w}_O$  — прискорення полюса  $O$ ;  $\vec{w}_{CO}^{06}$ ,  $\vec{w}_{CO}^{II}$  — обертальне та доцентрове прискорення точки  $C$  в

обертальному русі тіла навколо полюса  $O$ . Як правило, за полюс вибирають точку, прискорення якої відоме.

За другим методом застосовують теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи, яка має вигляд

$$T - T_0 = A, \quad (15.8)$$

де  $T$ ,  $T_0$  — кінетична енергія механічної системи в її кінцевому та початковому положеннях відповідно;  $A$  — сума робіт зовнішніх і внутрішніх сил на заданому переміщенні системи.

Кінетичну енергію твердого тіла при плоскопаралельному русі визначають за теоремою Кеніга

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2}, \quad (15.9)$$

де *перший доданок* — це кінетична енергія тіла в поступальному русі разом з центром мас, а *другий* — кінетична енергія в обертальному русі.

Зауваження: якщо миттєвий центр швидкостей перебуває в нескінченності, то плоскопаралельний рух тіла в даний момент часу розглядають як миттєво-поступальний, а кінетичну енергію визначають за формулою

$$T = \frac{mv_C^2}{2}. \quad (15.10)$$

Плоскопаралельний рух можна розглядати як миттєво-обертальний навколо  $P$  — миттєвого центру швидкостей, тоді кінетичну енергію визначають за формулою

$$T = \frac{I_P \omega^2}{2}, \quad (15.11)$$

де  $I_P$  — момент інерції тіла відносно осі, що проходить через миттєвий центр швидкостей.

Швидкість центра мас  $\vec{v}_C$  і кутова швидкість тіла  $\omega$  пов'язані між собою формулою Ейлера

$$v_C = \omega \cdot CP, \quad (15.12)$$

де  $CP$  — відстань від центра мас  $C$  до миттєвого центра швидкостей  $P$ .

Зауваження: якщо за умовою задачі потрібно визначити лише кінематичні характеристики або зовнішні сили, які виконують роботу на заданому переміщенні, то доцільно скористатися другим методом: якщо ще й внутрішні сили (реакції ідеальних в'язей), сума робіт яких дорівнює нулю, тоді першим.

### 15.2.2. Методика розв'язування задач

1. Вибрати об'єкт дослідження (тіло або систему тіл), динаміку якого розглядати- мемо.

2. Зобразити на рисунку активні сили та реакції в'язей, прикладені до об'єкта дослідження.

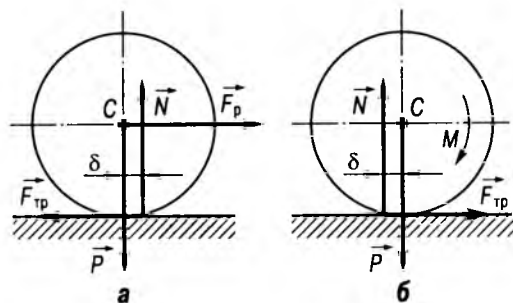


Рис. 15.21

Зауваження: силу тертя об шорстку поверхню спрямувати протилежно руху, якщо колесо *веде- не* (рис. 15.21, а), та в бік руху, якщо колесо *веде- че* (рис. 15.21, б).

3. Визначити положення (координати) центра мас вибраного об'єкта.

4. Скласти диференціальні рівняння руху твердих тіл (15.5) і (15.6), або записати теорему про зміну кінетичної енергії (15.8) — (15.11) для заданого об'єкта.

Зауваження: незважаючи на те, що методи складання диференціальних рівнянь руху є найзагальнішими при розв'язуванні задач, проте іноді їх використання є громіздким. У цьому випадку доцільніше застосувати теорему про зміну кінетичної енергії. Наприклад, якщо за умовою задачі потрібно визначити лише кінематичні характеристики, то краще скористатися другим методом.

5. Далі, користуючись кінематичними співвідношеннями, записати формули для визначення:

у разі застосування диференціальних рівнянь руху — *прискорення центра мас* (15.7) та *кутового прискорення* кожного тіла, вибравши за полюс точку, прискорення якої відоме з умови задачі;

у разі застосування теореми про зміну кінетичної енергії — швидкості центра мас (15.12) та кутової швидкості кожного тіла, визначивши положення миттєвого центра швидкостей у випадку застосування теореми про зміну кінетичної енергії.

6. Розв'язати рівняння, записані у п. 4, і визначити шукані величини.

### 15.2.3. Приклади розв'язування задач

**Приклад 15.6.** До однорідної кулі масою  $m$  за допомогою нитки  $AB$  прив'язано вантаж масою  $m_1 = m/2$ . Куля обмотана мотузкою  $BK$ . Кінець мотузки  $K$  прикріплено до нерухокої поверхні (рис. 15.22). Визначити прискорення вантажу і натяг мотузки  $PK$ .

Розв'язування. Подамо розв'язання двома методами.

**Метод 1.** За об'єкт дослідження спочатку виберемо вантаж (рис. 15.23, а). До

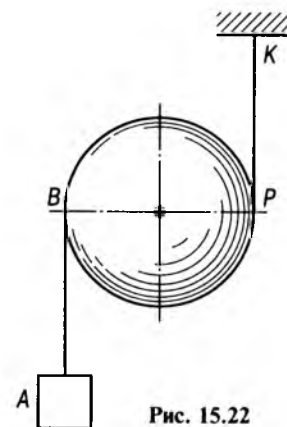


Рис. 15.22

нього прикладено сили ваги вантажу

$\vec{P}_1 = \frac{m\vec{g}}{2}$  та натягу  $\vec{T}_1$  нитки  $AB$ . Вантаж здійснює поступальний рух вздовж вертикалі вниз, тому його прискорення  $\vec{w}$  та вісь  $Oy$  спрямуємо вниз. Рівняння руху вантажу має вигляд

$$\frac{m}{2} w = \frac{m}{2} g - T_1. \quad (1)$$

Далі за об'єкт дослідження виберемо кулю (рис. 15.23, б). До неї прикладено сили ваги кулі  $\vec{P}_2 = m\vec{g}$ , натягу  $\vec{T}_1'$  нитки  $AB$  ( $\vec{T}_1' = -\vec{T}_1$  згідно з третім законом Ньютона) та  $\vec{T}_2$  мотузки  $PK$ . Куля здійснює плоскопаралельний рух і її центр мас  $C$  знаходиться в центрі кулі. Оскільки всі сили паралельні, а прискорення центра мас  $C$  спрямоване вниз, виберемо вісь  $Cy$  у напрямку руху (рис. 15.23, б). Диференціальні рівняння руху мають вигляд

$$m w_{Cy} = F_y^e, \quad I_C \varepsilon_z = M_{Cz}^e, \quad (2)$$

де  $F_y^e = mg + T_1 - T_2$  — проекція головного вектора сил на вісь  $Cy$ ;  $I_C = \frac{2}{5} mR^2$  — момент інерції кулі відносно центральної осі  $Cz$ , яка перпендикулярна до площини руху;  $M_{Cz}^e = T_2 R + T_1 R$  — головний момент зов-

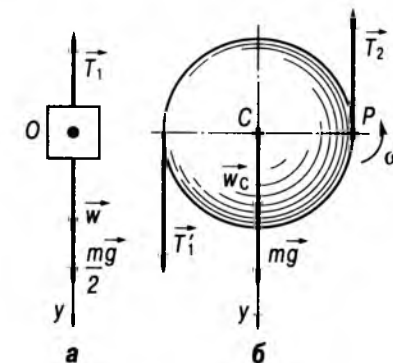


Рис. 15.23

нішніх сил відносно осі  $Cz$ . Рівняння (2) запишемо так:

$$mw_C = mg + T_1 - T_2, \quad \frac{2}{5}mR^2\varepsilon = T_2R + T_1R. \quad (3)$$

Плоскопаралельний рух кулі в даний момент можна розглядати як миттєво-обертальний навколо миттєвого центра швидкостей  $P$ . Оскільки по мотузці куля скочується без ковзання, її кутова швидкість

$$\omega = \frac{v_C}{R} = \frac{v}{2R}, \quad (4)$$

де  $v_C, v$  — швидкості центра мас відповідно кулі та вантажу (рис. 15.24).

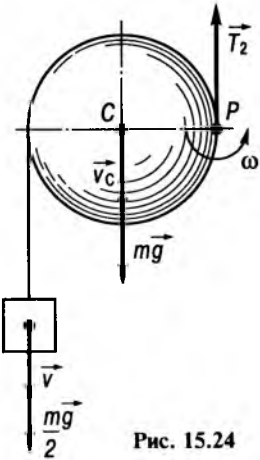


Рис. 15.24

Кутове прискорення кулі

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{dv_C}{dt} = \frac{w_C}{R}, \quad \text{або} \quad (5)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2R} \frac{dv}{dt} = \frac{w}{2R} \Rightarrow w_C = \frac{w}{2}.$$

Після підстановки (5) у рівняння (3) дістанемо

$$m \frac{w}{2} = mg + T_1 - T_2, \quad \frac{1}{5}mw = T_2 + T_1. \quad (6)$$

Тоді сили натягу нитки  $AB$ , на якій підвішено вантаж, та мотузки  $PK$  відповідно

$$T_1 = m \left( \frac{7}{20}w - \frac{1}{2}g \right), \quad T_2 = m \left( \frac{1}{2}g - \frac{3}{20}w \right). \quad (7)$$

Підставивши значення  $T_1$  у рівняння (1), знайдемо прискорення вантажу. Отже, прискорення вантажу та натяг мотузки  $PK$

$$w = \frac{20}{17}g, \quad T_2 = \frac{11}{34}mg. \quad (8)$$

**Метод 2.** За об'єкт дослідження виберемо механічну систему, яка складається з вантажу і кулі (рис. 15.24). До неї прикладено сили ваги вантажу  $\vec{P}_1 = \frac{m\vec{g}}{2}$  і кулі  $\vec{P}_2 = m\vec{g}$  та натягу  $\vec{T}_2$  мотузки  $PK$ .

Кінетичну енергію системи визначимо за формулою

$$T = T_B + T_K, \quad (9)$$

де  $T_B = \frac{mv^2}{2}$  — кінетична енергія вантажу, оскільки він рухається поступально;  $T_K = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_{Cz}\omega^2}{2}$  — кінетична енергія кулі, яку визначаємо за теоремою Кеніга (15.9), тому що вона рухається плоскопаралельно.

Після підстановки  $\omega$  та  $v_C$  із співвідношення (4) в (9), маємо

$$T = \frac{mv^2}{4} + \frac{mv^2}{8} + \frac{mv^2}{20} = \frac{17}{40}mv^2. \quad (10)$$

Сила натягу мотузки  $PK$  роботу не виконує, оскільки прикладена у миттєвому центрі швидкостей (МЦШ), а робота сил ваги

$$A = \frac{m}{2}gs + mgs_C, \quad (11)$$

де  $s = 2s_C$  — переміщення вантажу;  $s_C$  — переміщення центра мас кулі.

Отже,

$$A = \frac{m}{2}gs + mg \frac{s}{2} = mgs. \quad (12)$$

Згідно з теоремою про зміну кінетичної енергії

$$\frac{17}{40}mv^2 = mgs, \quad \text{або} \quad v = 2\sqrt{\frac{10}{17}gs}. \quad (13)$$

Після диференціювання виразу (13) за часом маємо

$$w = \frac{20}{17}g. \quad (14)$$

Цей результат збігається з (8), отриманим за першим методом.

**Приклад 15.7.** Однорідний циліндричний коток вагою  $P = 5$  Н котять без ковзання вгору за допомогою зовнішньої сили  $F = 6$  Н, спрямованої під кутом  $\alpha = 30^\circ$  до похилої шорсткої площини. Зовнішній радіус циліндра вдвічі більший за внутрішній, а кут нахилу похилої площини до горизонту  $\beta = \alpha = 30^\circ$  (рис. 15.25). Визначити прискорення центра мас котка і встановити умову, за якої він відірветься від поверхні.

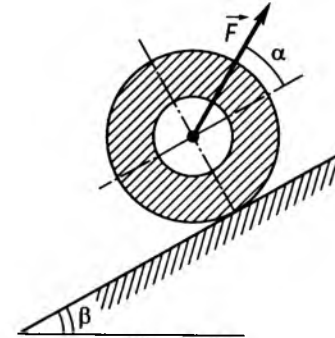


Рис. 15.25

Розв'язування. Розглядаємо два методи розв'язання задачі.

**Метод 1.** За об'єкт дослідження виберемо коток (рис. 15.26). До нього прикладено силу ваги  $\vec{P} = m\vec{g}$ , активну силу  $\vec{F}$ , реакцію поверхні  $\vec{N}$  та силу тертя  $\vec{F}_{тр}$ . Значимо, що силу  $\vec{F}_{тр}$  ми спрямували протилежно руху, оскільки головний момент активних сил відносно центра мас  $C$  дорівнює нулю, тобто коток ведений. За умовою задачі коток здійснює плоскопаралельний рух вдовж похилої площини вгору, тому прискорення центра мас  $w_C$  та вісь  $Cx$  спрямуємо паралельно площині вгору, а вісь  $Cy$  перпендикулярно до  $Cx$ . Диференціальні рівняння руху котка мають вигляд

$$mw_C = F \cos \alpha - mg \sin \beta - F_{тр}, \quad N = mg \cos \beta - F \sin \alpha, \quad I_C \varepsilon = F_{тр} R, \quad (1)$$

де  $I_C = \frac{m}{2}(R^2 + r^2) = \frac{5}{8}mR^2$  — момент інерції котка відносно його центральної осі.

Рух котка в даний момент можна розглядати як миттєво-обертальний навколо миттєвого центра швидкостей  $K$  (коток котиться вдовж нерухокої похилої площини без ковзання). Тому кутова швидкість котка

$$\omega = \frac{v_C}{R}, \quad (2)$$

де  $v_C$  — швидкість центра мас котка. Тоді кутове прискорення котка

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dv_C}{dt} = \frac{w_C}{R}. \quad (3)$$

Після підстановки  $\varepsilon$  з (3) в третє рівняння (1), і враховуючи, що  $R = 2r$  за умовою задачі, дістанемо

$$\frac{13}{8}mw_C = F \cos \alpha - mg \sin \beta. \quad (4)$$

Тоді прискорення центра мас

$$w_C = \frac{8}{13} \left( \frac{F}{m} \cos \alpha - g \sin \beta \right). \quad (5)$$

У результаті обчислень маємо

$$w_C = \frac{8g}{13} \left( \frac{6}{5} \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \right) = 5,33 \text{ м/с}^2. \quad (6)$$

Коток відірветься від поверхні у тому разі, коли нормальна складова її реакції  $N < 0$ , або з другого рівняння системи (1)

$$mg \cos \beta - F \sin \alpha < 0, \quad \text{або} \quad F > \frac{mg \cos \beta}{\sin \alpha}, \quad (7)$$

тобто при  $F > P \text{ctg} 30^\circ$  ( $F > 8,66$  Н).

Коток буде скочуватись униз, якщо згідно з (5)

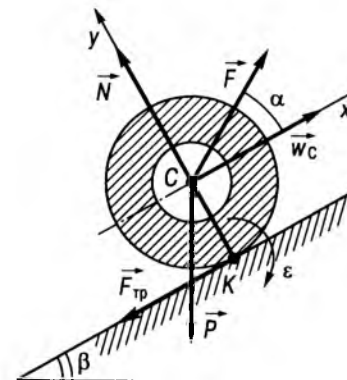


Рис. 15.26

$$F \leq \frac{mg \sin \beta}{\cos \alpha}, \text{ або } F \leq 2.89 \text{ Н.} \quad (8)$$

Отже, щоб коток рухався вгору і не відірвався від похилої поверхні, потрібно, щоб  $2,89 \text{ Н} \leq F \leq 8,66 \text{ Н}$ .

**Метод 2.** Об'єкт дослідження не змінився — це коток, тільки на рис. 15.27 зображено замість прискорень швидкість центра мас циліндра  $\vec{v}_C$  та кутову швидкість  $\omega$  навколо МЦШ.

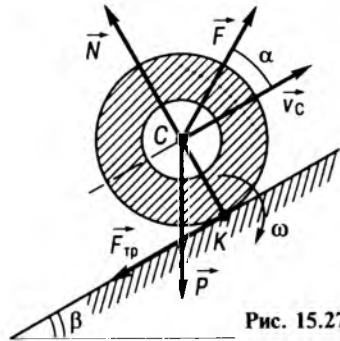


Рис. 15.27

Кінетичну енергію циліндра визначимо за теоремою Кеніґа (15.9)

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2}. \quad (9)$$

Скориставшись співвідношеннями (1), (2) і (9), отримаємо

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{5mv_C^2}{16} = \frac{13}{16} mv_C^2. \quad (10)$$

Сили  $\vec{F}_{\text{тр}}$  та  $\vec{N}$ , прикладені в МЦШ, роботи не виконують, а робота сили ваги та активної сили  $\vec{F}$

$$A = -mgs_C \sin \beta + Fs_C \cos \alpha, \quad (11)$$

де  $s_C$  — переміщення центра мас котка.

Згідно з теоремою про зміну кінетичної енергії

$$\frac{13}{16} mv_C^2 = -mgs_C \sin \beta + Fs_C \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_C = 4 \sqrt{\frac{1}{13} \left( \frac{F}{m} \cos \alpha - g \sin \beta \right) s_C}. \quad (12)$$

Після диференціювання виразу (12) за часом маємо

$$w_C = \frac{8}{13} \left( \frac{F}{m} \cos \alpha - g \sin \beta \right). \quad (13)$$

Цей результат збігається з виразом (5), отриманим за першим методом.

**Приклад 15.8.** Лопатку у вигляді стрижня завдовжки  $L = 80$  см масою  $m_1 = 1$  кг, привареного до диска радіуса  $R = 20$  см масою  $m_2 = 0,2$  кг, поклали на дві гладенькі опори  $A$  і  $B$ . Опору  $B$  раптово прибрали (рис. 15.28). Визначити прискорення центра мас та кутове прискорення лопатки в цей момент часу.

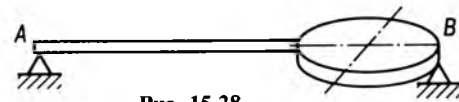


Рис. 15.28

Розв'язування. Подамо розв'язання задачі за допомогою диференціальних рівнянь руху твердого тіла, оскільки рух розглядаємо в миттєвий момент часу.

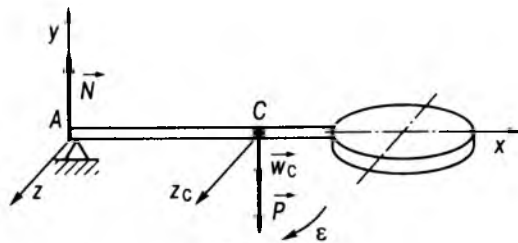


Рис. 15.29

За об'єкт дослідження виберемо лопатку (рис. 15.29). До неї прикладено: силу ваги  $\vec{P} = m\vec{g}$  та реакцію  $\vec{N}$  гладенької опори  $A$ . Оскільки лопатка здійснює плоскопаралельний рух, то маємо три диференціальних рівняння руху

$$mw_{Cx} = 0, mw_{Cy} = N - P, I_C \epsilon = N \cdot AC, \quad (1)$$

де  $m = m_1 + m_2 = 1 + 0,2 = 1,2$  кг — маса лопатки;  $I_C = I_C^{\text{стр}} + I_C^{\text{д}}$  — момент інерції лопатки відносно центральної осі  $Cz_C$  ( $I_C^{\text{стр}}$ ,  $I_C^{\text{д}}$  — моменти інерції відповідно стрижня та дис-

ка);  $AC$  — відстань від опори  $A$  до центра мас лопатки.

Знайдемо положення центра мас лопатки за формулою

$$AC = \frac{m_1 L/2 + m_2 (L + R)}{m_1 + m_2} = \frac{1 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 1}{1,2} = 0,5 \text{ м.} \quad (2)$$

Моменти інерції стрижня та диска відносно центральної осі  $Cz_C$  згідно з теоремою Штейнера.

$$I_C^{\text{стр}} = \frac{1}{12} m_1 L^2 + m_1 \left( \frac{L}{2} - AC \right)^2 = \frac{1}{12} 0,8^2 + 0,2 (0,5 - 0,4)^2 = \frac{0,166}{3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$I_C^{\text{д}} = \frac{1}{4} m_2 R^2 + m_2 (L + R - AC)^2 = \frac{0,2}{4} 0,2^2 + 0,2 (1 - 0,5)^2 = 0,052 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Тоді момент інерції лопатки

$$I_C = I_C^{\text{стр}} + I_C^{\text{д}} = \frac{0,322}{3}. \quad (5)$$

Оскільки лопатка здійснює плоскопаралельний рух, то прискорення її центра мас  $\vec{w}_C$  визначають за формулою

$$\vec{w}_C = \vec{w}_A + \vec{w}_{CA}^{\text{об}} + \vec{w}_{CA}^{\text{н}}, \quad (6)$$

де  $\vec{w}_A$  — прискорення точки  $A$ , яку ми вибрали за полюс;  $\vec{w}_{CA}^{\text{об}}$ ,  $\vec{w}_{CA}^{\text{н}}$  — обертальне та доцентрове прискорення точки  $C$  в обертальному русі лопатки навколо полюса  $A$  (рис. 15.29).

Зазначимо, що прискорення точки  $A$  спрямоване вздовж горизонталі, тому що кінець лопатки ковзає по гладенькій опорі; а центра мас — точки  $C$  вздовж вертикалі, бо головний вектор сил згідно з (1) спрямований по осі  $Cy$ ; прискорення  $\vec{w}_{CA}^{\text{н}} = 0$ , оскільки на початку руху лопатка перебувала у стані рівноваги ( $\omega = 0$ ).

Спроекувавши рівняння (6) на вісь  $Ay$  і врахувавши, що  $w_{CA}^{\text{об}} = \epsilon \cdot AC$ , дістанемо

$$w_{Cy} = w_C = w_{CA}^{\text{об}} = \epsilon \cdot AC. \quad (7)$$

З урахуванням (2), (5) і (7) з другого і третього рівнянь системи (1) матимемо

$$0,5m\epsilon = N - mg, \quad \frac{0,322}{3}\epsilon = 0,5N. \quad (8)$$

У результаті обчислень отримаємо

$$w_C = \frac{75}{322} = 0,233 \text{ м/с}^2;$$

$$\epsilon = \frac{75}{161} = 0,466 \text{ рад/с}^2. \quad (9)$$

**Приклад 15.9.** Прямокутну пластинку зі сторонами  $a = 3$  см і  $b = 4$  см поставили на гладеньку площину так, що її діагональ — вертикальна. Потім пластинка падає під дією сили ваги (рис. 15.30). Знайти рівняння траєкторії вершини  $C$  прямокутника.

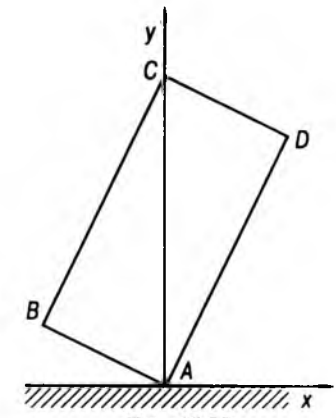


Рис. 15.30

Розв'язування. За об'єкт дослідження виберемо пластинку, положення якої покажемо в довільний момент часу (рис. 15.31). До неї прикладено силу ваги  $\vec{P} = m\vec{g}$  та реакцію  $\vec{N}$  гладенької горизонтальної опори. Оскільки пластинка здійснює плоскопаралельний рух, то маємо три диференціальних рівняння руху:

$$mw_{Ox} = 0, mw_{Oy} = N - P, \quad (1)$$

$$I_O \epsilon = N \cdot AO \sin \beta,$$



де  $O$  – центр мас пластинки;  $I_O$  – момент інерції пластинки відносно центральної осі  $Oz$ ;  $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} = 2,5$  см – відстань від вершини  $A$  до центра мас  $O$  пластинки.

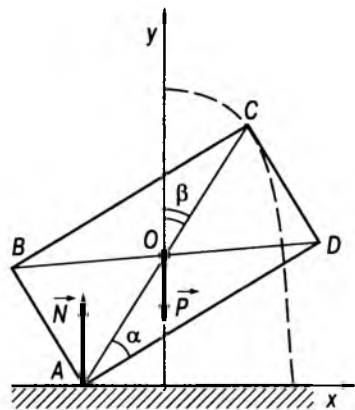


Рис. 15.31

Згідно з першим і другим рівняннями системи (1), центр мас пластинки рухається вздовж вертикалі. Оскільки у початковий момент часу пластинка не рухалась, то  $x_O = x_O(t=0) = 0$  під час всього руху.

Розглядаючи положення пластинки  $ABCD$  у довільний момент часу (рис. 15.31), запишемо координати її вершини  $C$  як функції часу  $t$ :

$$x_C = OC \sin \beta, \quad y_C = y_O + OC \cos \beta, \quad (2)$$

де  $AO = OB = OC = OD = 2,5$  см,  $y_O = AO \cdot \cos \beta$ .

Рівняння (2) набувають вигляду

$$x_C = 2,5 \sin \beta, \quad y_C = 5 \cos \beta. \quad (3)$$

Отже, рівняння траєкторії вершини  $C$ :

$$\frac{x_C^2}{2,5^2} + \frac{y_C^2}{5^2} = 1 - \quad (4)$$

це еліпс з центром у початку системи координат, малою піввіссю 2,5 см і великою – 5 см.

**Приклад 15.10.** Два стрижні  $AK$  і  $DE$  однакової довжини приварені один до одного у точці  $K$  під прямим кутом. Середину  $B$  стрижня  $AK$  поклали на гладеньку опору і відпустили без початкової швидкості.

Вага кожного стрижня  $P$  (рис. 15.32). Визначити тиск стрижнів на опору на початку руху, якщо  $DK = \frac{DE}{4}$ . Де потрібно поставити опору, щоб тиск на неї був максимальним або мінімальним?

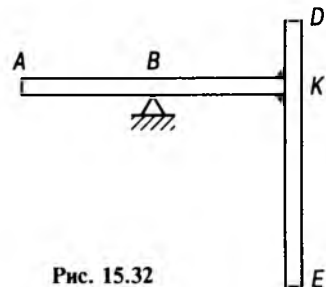


Рис. 15.32

**Розв'язування.** Подамо розв'язання задачі за допомогою диференціальних рівнянь руху твердого тіла, оскільки рух розглядаємо в миттєвий момент часу.

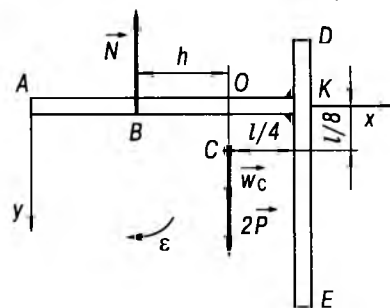


Рис. 15.33

За об'єкт дослідження виберемо механічну систему, що складається з двох стрижнів (рис. 15.33). До неї прикладено силу ваги  $2\vec{P}$  у центрі мас  $C$  та реакцію  $\vec{N}$  гладенької опори  $B$ . Оскільки система здійснює плоскопаралельний рух, то маємо три диференціальних рівняння руху:

$$\begin{aligned} \frac{2P}{g} w_{Cx} &= 0, \quad \frac{2P}{g} w_{Cy} = 2P - N, \\ I_C \varepsilon &= N \cdot h, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $h = BO$  – плече реакції опори  $B$  відносно центра мас  $C$  системи;  $I_C = I_C^{AK} + I_C^{DE}$  –

момент інерції системи відносно центральної осі  $Cz$ ,  $I_C^{AK}$ ,  $I_C^{DE}$  – моменти інерції стрижнів  $AK$  і  $DE$ .

Знайдемо положення центра мас системи за формулою

$$AO = \frac{PL/2 + PL}{2P} = \frac{3}{4}L, \quad OC = \frac{PL/4}{2P} = \frac{1}{8}L. \quad (6)$$

Моменти інерції стрижнів  $AK$  і  $DE$  згідно з теоремою Штейнера

$$I_C^{AK} = \frac{P}{12g}L^2 + \frac{P}{g} \left[ \left( \frac{L}{4} \right)^2 + \left( \frac{L}{8} \right)^2 \right] = \frac{31}{192} \frac{PL^2}{g}, \quad (7)$$

$$I_C^{DE} = \frac{P}{12g}L^2 + \frac{P}{g} \left[ \left( \frac{L}{4} \right)^2 + \left( \frac{L}{8} \right)^2 \right] = \frac{31}{192} \frac{PL^2}{g}, \quad (8)$$

тому момент інерції системи

$$I_C = I_C^{AK} + I_C^{DE} = \frac{31}{96} \frac{PL^2}{g}. \quad (9)$$

Оскільки механічна система здійснює плоскопаралельний рух, то прискорення її центра мас  $\vec{w}_C$  визначають за формулою

$$\vec{w}_C = \vec{w}_B + \vec{w}_{CB}^{ob} + \vec{w}_{CB}^u, \quad (10)$$

де  $\vec{w}_B$  – прискорення точки  $B$ , яку ми вибрали за полюс;  $\vec{w}_{CB}^{ob}$ ,  $\vec{w}_{CB}^u$  – обертальне та доцентрове прискорення точки  $C$  в обертальному русі механічної системи навколо полюса  $B$  (рис. 15.33).

Зазначимо, що прискорення точки  $B$  спрямоване вздовж осі  $Ax$ , тому що стрижень  $AK$  ковзає по гладенькій горизонтальній опорі; а точки  $C$  (центра мас) – вздовж вертикалі, бо головний вектор сил згідно з (5) спрямований по осі  $Ay$ ; прискорення  $\vec{w}_{CB}^u = 0$ , оскільки система перебувала в рівновазі ( $\omega = 0$ ).

Спроектувавши залежність (6) на вісь  $Ay$  і врахувавши, що  $w_{CB}^{ob} = \varepsilon \cdot h$ , дістанемо

$$w_C = w_{Cy} = \varepsilon \cdot h. \quad (11)$$

Тоді з урахуванням (9) і (11) з другого і третього рівнянь системи (5) маємо

$$\frac{2P}{g} \varepsilon h = 2P - N, \quad \frac{31}{96} \frac{PL^2}{g} \varepsilon = N \cdot h. \quad (12)$$

Після алгебраїчних перетворень отримуємо

$$N = \frac{62PL^2}{192h^2 + 31L^2}. \quad (13)$$

Якщо опора знаходиться на відстані

$h = \frac{L}{4}$ , то тиск на неї

$$N = \frac{62PL^2}{192h^2 + 31L^2} = \frac{62}{43}P. \quad (14)$$

Враховуючи, що відстань від опори  $B$  до

точки  $O$  може лежати в межах  $0 \leq h \leq \frac{3L}{4}$ , з'ясуємо, за яких умов тиск на опору буде максимальним та мінімальним. При  $h = 0$  тиск  $N_{\max} = 2P$ , тобто опора в точці  $O$ . При

$h = \frac{3}{4}L$ , якщо опора в точці  $A$ ,  $N_{\min} = \frac{62}{139}P$ .

#### 15.2.4. Задачі для самостійного розв'язування

**15.12.** Однорідний диск рухається під дією сили ваги у вертикальній площині (рис. 15.34). У початковий момент часу центр мас диска мав швидкість  $\vec{v}_0$ , нахилена під кутом  $\alpha$  до горизонту. Записати рівняння траєкторії руху диска.

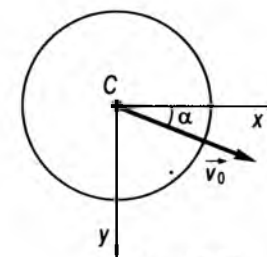


Рис. 15.34

Відповідь:  $y_C = \frac{gx_C^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x_C \tan \alpha$ .

**15.13.** Тонка труба підвішена до нерухокої стелі на двох однакових нитках, намотаних навколо труби симетрично (рис. 15.35).

Визначити прискорення центра мас труби та натяг однієї з ниток, якщо інша обірвалась.

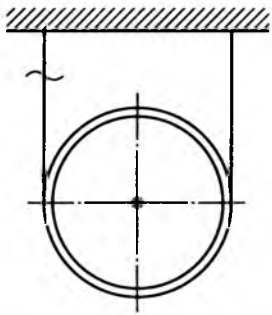


Рис. 15.35

Відповідь:  $w_C = \frac{g}{2}$ ;  $T = \frac{mg}{2}$ .

15.14. Однорідну кулю масою  $m$  котять по шорсткій нерухомій підлозі без ковзання за допомогою шнура з силою  $\vec{F}$ , нахиленою під кутом  $\alpha$  до горизонту (рис. 15.36). Визначити кутове прискорення кулі та силу, при якій куля перестане тиснути на поверхню.

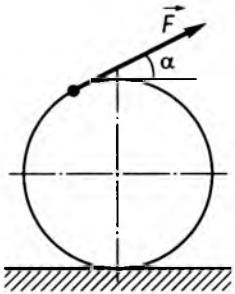


Рис. 15.36

Відповідь:  $\epsilon = \frac{10 F \cos \alpha}{7 m R}$ ;  $F \geq \frac{mg}{\sin \alpha}$ .

15.15. Ступінчастий вал вагою  $P$  із зовнішнім радіусом  $R$ , вдвічі більшим за внутрішній, рухається вздовж нерухомої шорсткої площини, нахиленої під кутом  $\alpha$  до горизонту. До вала прикладено обертальний момент  $M$  (рис. 15.37). Визначити кутове прискорення вала.

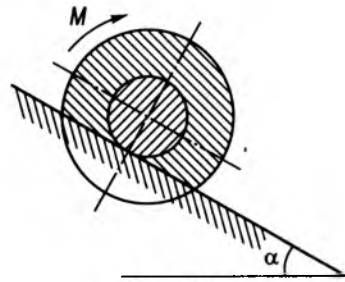


Рис. 15.37

Відповідь:  $\epsilon = 4g \frac{2M + PR \sin \alpha}{7PR^2}$ .

15.16. Квадратна пластина з ребром  $a$  спирається в точці  $A$  на гладеньку горизонтальну площину так, що діагональ  $AC$  — вертикальна. Пластина падає під впливом сили ваги. Записати рівняння траєкторії вершини  $C$  квадрата відносно осей, вказаних на рис. 15.38.

Відповідь:  $\frac{x^2}{(a/\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{2a^2} = 1$  — еліпс.

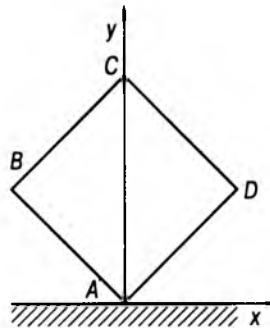


Рис. 15.38

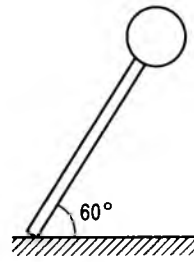


Рис. 15.39

15.17. Однорідний стрижень завдовжки  $L = 20$  см масою  $m_1 = 0,5$  кг, до кінця якого приварено диск радіуса  $R = 5$  см масою  $m_2 = 0,5$  кг, підтримували на гладенькій горизонтальній площині в рівновазі під кутом  $60^\circ$  (рис. 15.39). Визначити тиск стрижня на площину відразу після того, як його відпустили.

Відповідь:  $N = 9,73$  Н.

15.18. Однорідну прямокутну пластину зі сторонами  $a$  і  $b$ , вага якої  $P$ , поклали на гладенький вертикальний виступ перпендикулярно до його ребра на відстані  $a/3$  від її краю (рис. 15.40). Визначити тиск пластини на ребро  $AB$  у початковий момент її руху.

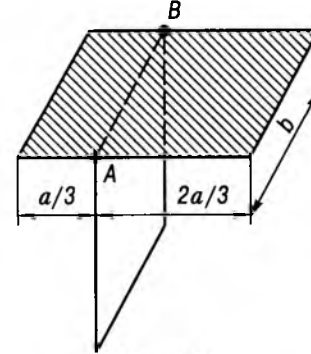


Рис. 15.40

Відповідь:  $N = 0,8P$ .

15.19. Однорідний стрижень  $AB$  масою  $m$  утримується в горизонтальному положенні невагомим стрижнем  $KK_1$  і нерухомим шарніром  $A$ . До стрижня  $AB$  прикладено силу  $\vec{F}$ . Опору  $A$  раптово прибирають. Визначити проекції прискорення центра мас стрижня на осі, вказані на рис. 15.41.

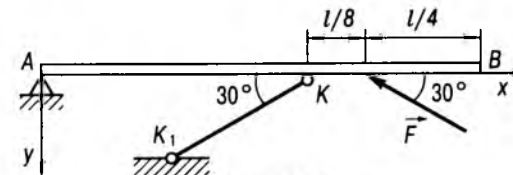


Рис. 15.41

Відповідь:  $w_{Cx} = \sqrt{3} \left( \frac{16}{65}g - \frac{3F}{10m} \right)$ ,

$w_{Cy} = 0,6 \left( \frac{17}{13}g - \frac{23F}{16m} \right)$ .

15.20. Осі  $C$  однорідного циліндра радіуса  $r$ , який перебуває у найнижчому положенні всередині циліндричної порожнини радіу-

са  $R = 4r$ , надали початкової швидкості  $v_0 = 2\sqrt{gr}$  (рис. 15.42). Визначити кут  $\varphi$ , при якому циліндр буде котитись без ковзання, якщо коефіцієнт тертя ковзання  $f = 1/7$ . Яку початкову швидкість повинна мати вісь циліндра, щоб він зміг піднятися без ковзання на кут  $\varphi = 90^\circ$ ? Тертя кочення не враховувати.

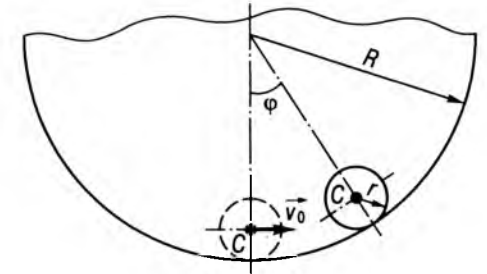


Рис. 15.42

Відповідь:  $\varphi = 45^\circ$ ;  $v_0 = \sqrt{11gr}$ .

15.21. Дві трубки, маси яких  $m_1$  і  $m_2$ , обмотані невагомою нерозтяжною ниткою, перекинутаю через невагомий блок  $3$  (рис. 15.43). Трубка 1 скочується по гладенькій площині, нахилений під кутом  $\alpha$  до горизонту, а трубка 2 падає, розмотуючи нитку. Визначити швидкість центра трубки 2, коли він опуститься на відстань  $h$ , а також натяг нитки.

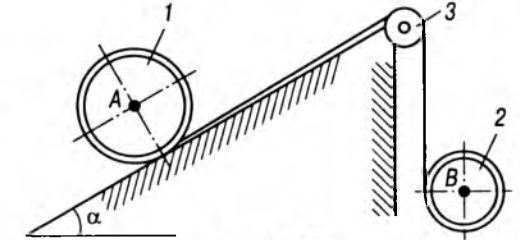


Рис. 15.43

Відповідь:  $v_B = \sqrt{\frac{m_1(1-\sin \alpha) + 2m_2}{m_1 + m_2} hg}$ ;

$T = \frac{m_1 m_2 g (1 + \sin \alpha)}{2(m_1 + m_2)}$ .

## Розділ 16

### ЕЛЕМЕНТАРНА ТЕОРІЯ УДАРУ

#### § 16.1. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Удар — це особливий вид взаємодії точок матеріальної системи.

З кінематичного погляду удар характеризується тим, що швидкості точок системи набувають скінченних приростів за дуже малий проміжок часу  $t^*$ , який називають тривалістю удару. Тривалість удару  $t^*$  твердих тіл вимірюється десятитисячними частинами секунди.

Динамічною особливістю удару є те, що кількості руху точок матеріальної системи набувають скінченних приростів за проміжок часу  $t^*$ , тобто кількості руху точок системи будуть розривними функціями часу.

Наявність таких розривів можна пояснити дією сил малої тривалості в часі і великої інтенсивності. Такі сили називають *миттєвими*, або *ударними*. Вимірюються вони своїми імпульсами. Відносно системи тіл, що співударяються, ці сили є внутрішніми. Звичайними (зовнішніми) силами при вивченні удару нехтують, тому що за час удару вони створюють дуже малі імпульси, а на підставі теорем про зміну кількості руху й про зміну кінетичного моменту системи стверджуємо, що під час удару має місце закон збереження кількості руху й кінетичного моменту системи.

При дослідженні співудару тіл можна нехтувати переміщеннями точок системи, оскільки порядок малості переміщень дорівнює порядку малості  $t^*$  тривалості удару.

Процес співудару тіл не можна пояснити лише властивостями абсолютно твердих тіл або незмінних систем тіл. Але завдяки *гіпотезі І. Ньютона* про коефіцієнт  $k$  відновлення швидкостей можна розв'язувати за-

дачі про співудар тіл методами теоретичної механіки.

За гіпотезою І. Ньютона *коефіцієнт відновлення швидкостей  $k$*  для тіл, що співударяються, дорівнює відношенню відносної швидкості точок після удару до їх відносної швидкості до удару, тобто

$$k = -\frac{v_1 - v_2}{u_1 - u_2},$$

де  $u_1$  і  $u_2$  — проєкції на пряму, що сполучає центри мас тіл, швидкостей до удару, а  $v_1$  і  $v_2$  — проєкції на той самий напрям швидкостей тіл після удару.

При  $|k|=1$  удар називають абсолютно пружним, а при  $k=0$  удар непружний (пластичний), для решти тіл коефіцієнт відновлення є правильним дробом,

$$0 < |k| < 1.$$

При косому ударі без тертя, тобто коли, наприклад, кулька падає на гладеньку поверхню під певним кутом  $\alpha$  до нормалі, проведеної до поверхні і відбивається під кутом  $\beta$ , то коефіцієнт відновлення швидкості можна обчислити за формулою

$$k = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}.$$

За *теоремою Остроградського—Карно* втрата кінетичної енергії при прямому центральному ударі двох тіл

$$\Delta T = \frac{1-k}{1+k} \left[ \frac{m_1}{2} (v_1 - u_1)^2 + \frac{m_2}{2} (v_2 - u_2)^2 \right],$$

де  $m_1$  та  $m_2$  — маси тіл, а різниці  $(v_1 - u_1)$ ,  $(v_2 - u_2)$  називають *втраченими швидкостями*.

Якщо одне з тіл, що співударяються, може обертатися навколо нерухомої осі, то при ударі виникають миттєві реакції в опорних точках осі.

Практичний інтерес становлять ті випадки, коли вісь обертання не зазнає впливу удару. Результати цих досліджень застосовують у техніці, наприклад, ними користуються при розрахунках ударних машин для динамічних випробувань міцності матеріалів.

Отже, вісь  $Oz$  обертання тіла не зазнаватиме удару, коли вона буде головною віссю інерції, ударний імпульс буде до неї перпендикулярним, і точка його прикладання лежатиме в одній площині з віссю обертання і центром мас  $C$  тіла. У цьому випадку відстань точки прикладання ударного імпульсу  $\vec{S}$  до осі обертання  $Oz$  дорівнює зведеній довжині фізичного маятника (якщо немає імпульсів динамічних реакцій). Точка прикладання імпульсу  $\vec{S}$  називається центром удару і збігається з центром коливань фізичного маятника.

#### § 16.2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

**Приклад 16.1.** Швидкість матеріальної точки до прямого удару об нерухому перешкоду  $u = 6$  м/с. Визначити швидкість  $v$  точки після удару, якщо коефіцієнт відновлення  $k = 0,5$ .

Розв'язування. За означенням коефіцієнта відновлення  $k = \frac{v}{u}$ , тому  $v = ku = 0,5 \cdot 6 = 3$  м/с. Напрямок руху після удару протилежний вектору  $\vec{u}$ .

**Приклад 16.2.** Кулька падає без початкової швидкості з висоти  $h_1 = 1,5$  м і після удару об горизонтальну перешкоду підскакує на висоту  $h_2 = 0,8$  м. Знайти коефіцієнт відновлення швидкостей.

Розв'язування. Оскільки кулька падає без початкової швидкості з висоти  $h_1$ , то  $u = \sqrt{2gh_1}$ . Піднявшись після удару на висоту  $h_2$ , кулька зупиняється, тому  $v = \sqrt{2gh_2}$ . За означенням коефіцієнта відновлення

$$k = \frac{v}{u} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \sqrt{\frac{0,8}{1,5}} = \sqrt{\frac{8}{15}} = 0,73.$$

**Приклад 16.3.** На матеріальну точку  $M$  масою  $m = 0,4$  кг, яка рухається зі швидкістю  $\vec{u} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$ , подіяв ударний імпульс  $\vec{S} = 1,8\vec{i} + 2,4\vec{j}$ . Знайти модуль швидкості  $v$  після удару. Тут  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  — одиничні вектори осей  $Ox$  та  $Oy$  декартової прямокутної системи координат.

Розв'язування. Застосуємо теорему імпульсів у координатному вигляді:

$$mv_x - mu_x = S_x, \quad mv_y - mu_y = S_y.$$

$$\text{Модуль швидкості } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Маємо

$$v_x = \frac{S_x}{m} + u_x = \frac{1,8}{0,4} - 3 = 1,5 \text{ м/с},$$

$$v_y = \frac{S_y}{m} + u_y = \frac{2,4}{0,4} - 4 = 2 \text{ м/с},$$

$$v = \sqrt{2,25 + 4} = \sqrt{6,25} = 2,5 \text{ м/с}.$$

**Приклад 16.4.** Дві кулі 1 і 2 зіштовхуються з протилежними за напрямком, але однаковими за модулем швидкостями  $u_1 = u_2 = 6$  м/с. Коефіцієнт відновлення  $k = 0,5$ . Маса куль  $m_1 = 2$  кг та  $m_2 = 1$  кг (рис. 16.1). Знайти швидкість  $v_2$  кулі 2 після удару.

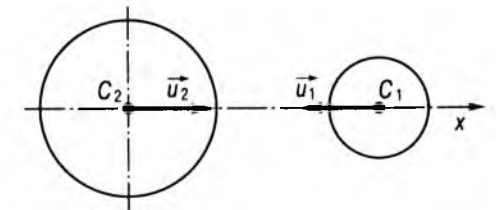


Рис. 16.1

Розв'язування. Матеріальна система складається з двох куль, які рухаються поступально. Під час прямого центрального удару кількість руху системи зберігається. Спроєкуємо вираз закону збереження кількості руху системи на вісь  $Ox$ ,

яка проходить через центри мас  $C_1$  і  $C_2$  куль (рис. 16.1):

$$m_1 u_1 - m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad (1)$$

У рівності (1) вважається, що швидкості  $v_1$  та  $v_2$ , центрів куль після удару напрямлені в додатний бік  $Ox$ .

Рівняння (1) доповнимо рівністю

$$k = -\frac{v_1 - v_2}{u_1 + u_2}. \quad (2)$$

Розв'язуючи систему співвідношень (1) і (2) відносно  $v_2$ , знайдемо

$$v_2 = \frac{m_1 u_1 - m_2 u_2 + k m_1 (u_1 + u_2)}{m_1 + m_2} = 6 \text{ м/с}.$$

Швидкість  $v_2 > 0$ , тобто куля 2 після удару рухається в додатному напрямі осі  $Ox$ .

**Приклад 16.5.** З метою зміцнення ґрунту під фундаментом будівлі в ґрунт вбивають палі масою  $m_1 = 50$  кг за допомогою копра, бойок якого масою  $m_2 = 450$  кг падає без початкової швидкості з висоти  $h = 2$  м. Після десяти ударів палі заглиблюється на  $\delta = 0,05$  м.

Знайти середнє значення  $F$  опору ґрунту при забиванні паль, вважаючи удар непружним (рис. 16.2).

**Розв'язування.** В задачі треба розглянути два етапи руху: співудар бойка і палі, а потім їх спільний рух до зупинки.

На першому етапі бойок, який падає без початкової швидкості з висоти  $h$ , на момент початку його удару об палю має швидкість  $u_2 = \sqrt{2gh}$ , палі в цей момент нерухома, тому  $u_1 = 0$ . Співудар цих тіл прямий, центральний, їх рух поступальний у вертикальному напрямі (позначимо віссю  $Ox$ ), виконується закон збереження кількості руху  $Q_x$  системи

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2) v,$$

де  $v$  — швидкість спільного руху бойка і палі після удару,

$$v = \frac{m_2 \sqrt{2gh}}{m}, \quad (1)$$

де  $m = m_1 + m_2$ .

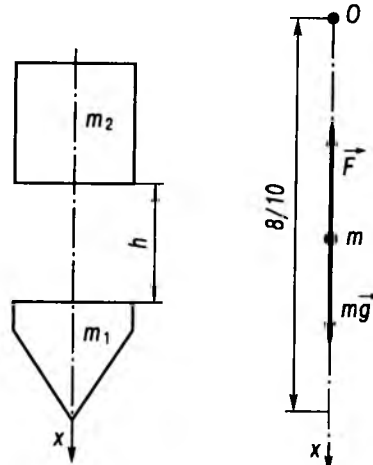


Рис. 16.2

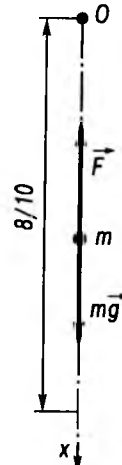


Рис. 16.3

Розглянемо другий етап. Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки, за яку приймаємо систему бойок—палі (рис. 16.3). Кінцева швидкість їх спільного руху дорівнює нулю, тому після одного співудару маємо

$$-\frac{mv^2}{2} = m \frac{\delta}{10} - F \frac{\delta}{10}. \quad (2)$$

У (2) справа записана робота сил ваги  $mg$  системи і сили опору  $F = \text{const}$  на переміщенні після одного удару. Вважаємо, що після кожного удару переміщення палі з бойком однакове. Із (2) знаходимо

$$F = m + \frac{m^2 2gh \cdot 10}{2m \cdot \delta} \cong 159 \text{ кН}.$$

**Приклад 16.6.** У кінець  $B$  однорідного прямолінійного стрижня  $OB$  завдовжки  $l$  масою  $m_1$ , що підвішений за допомогою циліндричного шарніра в точці  $O$  і знаходиться в стані спокою, влучає куля масою  $m_2$  з горизонтальною швидкістю  $u$  і застряє в стрижні (рис. 16.4, а).

При якому найменшому значенні швидкості  $u$  кулі стрижень зможе повернутися на кут  $\alpha = 180^\circ$  відносно його початкового положення. Знайти також положення центра удару стрижня.

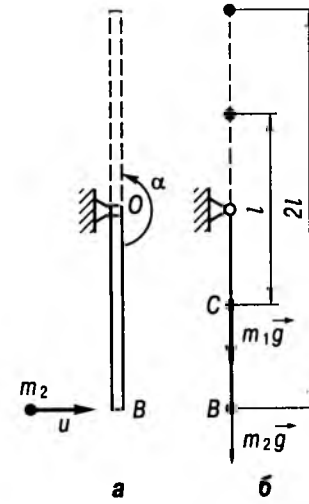


Рис. 16.4

**Розв'язування.** Розглянемо перший етап руху — співудар кулі і стрижня. Має місце закон збереження кінетичного моменту  $K_{Ox}$  системи відносно горизонтальної осі  $Ox$ , яка збігається з віссю обертання стрижня:

$$K_{Ox}|_{t=0} = K_{Ox}|_{t=t^*}, \quad (1)$$

де  $t^*$  — тривалість удару.

Кінетичний момент системи дорівнює сумі кінетичних моментів стрижня  $K_{Ox_1}$  і кулі  $K_{Ox_2}$ :

$$K_{Ox} = K_{Ox_1} + K_{Ox_2}.$$

До удару стрижень знаходився у спокої, тому

$$K_{Ox}|_{t=0} = K_{Ox_2}|_{t=0} = m_2 l u. \quad (2)$$

Оскільки куля застряє у стрижні, то наприкінці його співудару з кулею вони разом отримують певну кутову швидкість  $\omega$ . Кінетичний момент стрижня з кулею, які разом обертаються навколо осі, дорівнює добутку моменту інерції системи стрижень—куля відносно осі обертання на кутову швидкість:

$$K_{Ox}|_{t=t^*} = (I_{Ox_1} + I_{Ox_2})\omega = \left(\frac{m_1 l^2}{3} + m_2 l^2\right)\omega, \quad (3)$$

де  $I_{Ox_1} = \frac{m_1 l^2}{3}$ ,  $I_{Ox_2} = m_2 l^2$  — моменти інерції відносно осі  $Ox$  відповідно стрижня і кулі.

На підставі (1), (2) і (3) запишемо

$$m_2 l u = \left(\frac{m_1}{3} + m_2\right) l^2 \omega,$$

звідси знайдемо кутову швидкість  $\omega$  системи після удару:

$$\omega = \frac{3m_2 u}{(m_1 + 3m_2)l}.$$

Другий етап руху — це рух стрижня разом з кулею навколо осі  $Ox$ . Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії системи

$$T - T_0 = A, \quad (4)$$

де  $T$ ,  $T_0$  — кінетична енергія системи в кінцевому і початковому положеннях;  $A$  — повна робота зовнішніх сил, що діють на систему. У кінці руху ( $\alpha = 180^\circ$ ) система зупиняється, тому  $T = 0$ . Оскільки стрижень і куля здійснюють обертальний рух навколо осі, то кінетична енергія системи дорівнює половині добутку моменту інерції системи відносно осі  $Ox$  на квадрат кутової швидкості  $\omega$ :

$$T_0 = T_1 + T_2 = \left(\frac{m_1 l^2}{3} + m_2 l^2\right) \frac{\omega^2}{2}.$$

Робота  $A$  складається з роботи сил ваги стрижня і кулі. Реакція шарніра  $O$  роботу не виконує, оскільки точка  $O$ , де прикладена ця сила, не переміщується. Робота сили ваги дорівнює добутку  $\pm mgh$ , де  $h$  — висота, на яку піднімається чи опускається точка прикладання сили ваги. У даній задачі куля і центр ваги  $C$  стрижня піднімаються, тому робота сили ваги від'ємна (рис. 16.4, б):

$$A_{m_1 g} = -m_1 g l,$$

$$A_{m_2 g} = -m_2 g 2l, \quad A = -(m_1 + 2m_2) g l.$$

Після підстановки значень  $T$ ,  $T_0$  і  $A$  в (4) знайдемо

$$-\frac{l^2 \omega^2}{6} (m_1 + 3m_2) = -(m_1 + 2m_2) g l.$$

Враховуючи значення  $\omega$ , отримуємо рівняння відносно  $u$ . Після розв'язання одержимо

$$u = \frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{2gl(m_1^2 + 5m_1 m_2 + 6m_2^2)}{3}}.$$

Центр удару стрижня знаходиться на відстані  $l_{зв}$  зведеної довжини фізичного маятника від точки  $O$ ,

$$l_{зв} = \frac{I_{Ox_1}}{m_1 OC} = \frac{2l}{3}.$$

Отже, вісь  $Ox$  не зазнає впливу удару, якщо куля влучить не в кінець  $B$  стрижня, а на відстані  $\frac{2l}{3}$  від точки  $O$ .

**Приклад 16.7.** На гладеньку горизонтальну площину під кутом  $\alpha = 30^\circ$  до нормалі падає кулька. Вона відскакує під кутом  $\beta = 45^\circ$ , і, пролетівши по параболі, знову падає і ще раз відскакує від тієї самої площини (рис. 16.5).

Визначити, під яким кутом  $\beta_1$  кулька відскочила другий раз. Чому дорівнює коефіцієнт відновлення швидкостей?

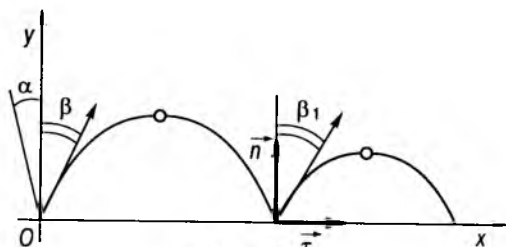


Рис. 16.5

Розв'язування. З умови задачі випливає, що кулька рухається у вертикальній площині  $Oxy$ . При косому ударі без тертя коефіцієнт відновлення обчислюється за формулою  $k = \frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \beta}$ . У даному випадку  $\alpha = 30^\circ$ ,

$\beta = 45^\circ$ . Отже,  $k = \frac{\text{tg } 30^\circ}{\text{tg } 45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$ .

Оскільки опором повітря нехтуємо, то парабола, про яку йде мова в умові задачі, є симетричною відносно вертикальної осі. Отже, наступний кут падіння  $\alpha_1 = \beta = 45^\circ$ , а новий кут  $\beta_1$  відбивання знаходимо за формулою  $k = \frac{\text{tg } 45^\circ}{\text{tg } \beta_1}$  або  $\text{tg } \beta_1 = \frac{1}{k} \text{tg } 45^\circ = \sqrt{3}$ .

Остаточно маємо  $\beta_1 = \text{arctg } \sqrt{3} = 60^\circ$ .

**Приклад 16.8.** За умовою прикладу 16.7 обчислити втрату кінетичної енергії кульки після першого відбиття від площини, якщо швидкість кульки перед першим падінням на площину дорівнює  $u$ , маса кульки  $m$ .

Розв'язування. Втрату кінетичної енергії кульки  $\Delta T$  можна обчислити за формулою

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{m}{2}(v^2 - u^2), \quad (1)$$

де  $T_2, T_1$  — кінетична енергія кульки після і до удару;  $v$  — швидкість після удару;  $u$  — швидкість до удару.

Оскільки площина гладенька, то дотичні складові швидкостей до і після удару однакові, тобто  $v_\tau = u_\tau$  (тут  $\vec{\tau}$  — орт дотичної,  $\vec{n}$  — орт нормалі до горизонтальної площини). Очевидно, що  $u^2 = u_n^2 + u_\tau^2$ ,  $v^2 = v_n^2 + v_\tau^2$ ,  $\frac{v_n}{u_n} = k$ ,  $v_n = ku_n = ku \cos \alpha$ ;

$$\begin{aligned} v^2 - u^2 &= k^2 u_n^2 + v_\tau^2 - u_n^2 - u_\tau^2 = \\ &= (k^2 - 1)u^2 \cos^2 \alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

Підставляючи вираз (2) в (1), отримуємо

$$\begin{aligned} \Delta T = T_2 - T_1 &= \frac{m}{2}(k^2 - 1)u^2 \cos^2 \alpha = \\ &= -\frac{m}{2}(1 - k^2)u^2 \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

Від'ємний знак відповіді вказує на те, що при ударі кінетична енергія дійсно втрачається. Такий самий результат можна отримати, застосовуючи теорему Остроградського—Карно:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{k-1}{k+1} \frac{m}{2} (v-u)^2. \quad (3)$$

У цьому виразі різниця  $(v-u)$  називається втраченою швидкістю.

Удар відбувається об гладеньку поверхню, тому

$$v - u = v_n - u_n = v_n + |u_n|,$$

якщо вважати орт  $\vec{n}$  напрямленим у зовнішній бік поверхні. Підставивши вираз втраченої швидкості у (3), знайдемо

$$\begin{aligned} \Delta T &= \left( \frac{k-1}{k+1} \right) \frac{m}{2} (v-u)^2 = \left( \frac{k-1}{k+1} \right) \frac{m}{2} (u_n k + u_n)^2 = \\ &= \left( \frac{k-1}{k+1} \right) \frac{m}{2} (k+1)^2 u_n^2 = (k^2 - 1) \frac{m}{2} u^2 \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

### § 16.3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

**16.1.** Вагон масою  $m_A = 16$  т, який перебував у стані спокою, скочується з сортувальної гірки, кут нахилу якої до горизонту дорівнює  $\alpha$  ( $\text{tg } \alpha = 0,006$ ). Проїшовши шлях  $S = 200$  м, він наштовхнувся на вагон  $B$  такої самої маси ( $m_A = m_B$ ), що стоїть у кінці гірки на горизонтальних рейках, упираючись своїми двома буферами на два упорних буфери. Пружини упорних і вагонних буферів однакові, вони стискаються на 1 м силою  $5 \cdot 10^6$  Н.

Знайти найбільшу деформацію  $l$  кожної пружини буферів, вважаючи удар непружним, нехтуючи тертям, а також стисканням пружин буферів між обома вагонами (рис. 16.6).

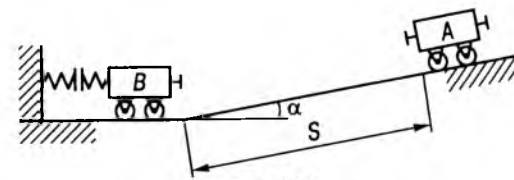


Рис. 16.6

Відповідь:

$$l = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_A g S \sin \alpha}{c}} \cos \alpha \approx 6,86 \text{ см}, \quad c — \text{коефіцієнт жорсткості пружин буферів.}$$

**16.2.** Стріла масою  $m$ , яка випущена з лука, влучає з горизонтальною швидкістю  $u$  в площину прямокутної мішені масою  $M$  (рис. 16.7, а), що підвішена на горизонтальній осі обертання  $O_1 O_2$ . Відстань точки  $K$  влучання стріли в мішень від осі обертання мішені дорівнює  $\frac{2}{3}h$ .

Визначити швидкість  $u$  стріли в момент удару об мішень, якщо кут відхилення мі-

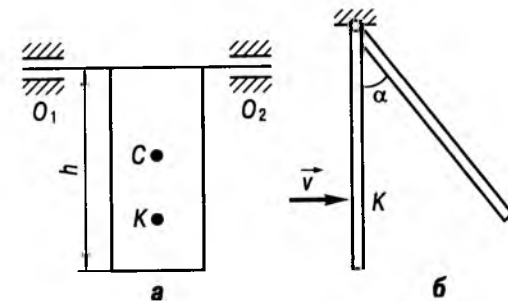


Рис. 16.7

шені від вертикалі після удару дорівнює  $\alpha$  (рис. 16.7, б).

$$\text{Відповідь: } u = \frac{(4m+3M)}{6m} \sqrt{6gh} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

**16.3.** Для умов задачі 16.2 визначити, чи зазнає вісь  $O_1 O_2$  впливу удару, тобто чи будуть відрізнятися від нуля імпульси миттєвих реакцій в опорних точках осі  $O_1$  і  $O_2$ .

Відповідь: вісь не зазнає впливу удару.

**16.4.** Прилад для зміцнення зварних швів карбування складається з кулачка 8 (рис. 16.8), якому надається обертальний рух електродвигуном, рамки 9 штока, в яку вмонтовано шарикопідшипник 7, бойка 10 і гвинта 5. На гвинті розмішена пружина 6. Рама спирається шарикопідшипником 3 на горизонтальну плиту, бойок вільно ковзає в стійці 2, а гвинт — в стійці 4. При обертанні кулачка його виступаюча частина набігає на шарикопідшипник 7, в результаті чого він рухається ліворуч, стискаючи пружину. При подальшому обертанні кулачка його виступаюча частина зіскакує з шарикопідшипника 7, пружина розпрямляється і штовхає шток праворуч. Відбувається удар бойка по виробу 1. Зусилля стискання пружини у зведеному положенні дорівнює 450 Н. Жорсткість пружини  $c = 27 \cdot 10^3$  Н/м, маса рухомих частин 5 кг.

Визначити, на яку відстань  $S$  переміститься виріб 1 вздовж горизонтальної плити, якщо його не закріплено на ній. Коефіцієнт тертя ковзання  $f$  виробу по плиті

Розділ 17

ПРИНЦИП МОЖЛИВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ  
І ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА—ЛАГРАНЖА

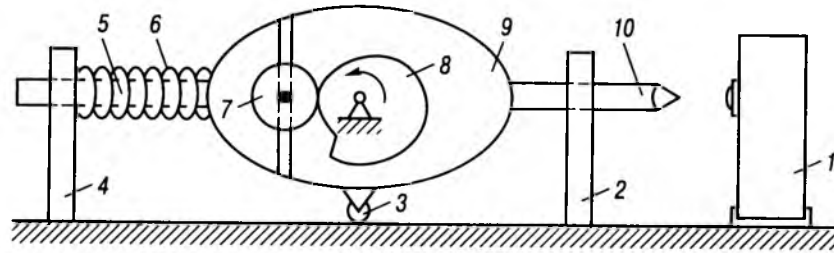


Рис. 16.8

0,8, маса виробу 10 кг, удар бойка по зразку вважати непружним.

Відповідь:  $S = 0,011 \text{ м}$ .

16.5. Диск масою  $M$  і радіусом  $r$  (рис. 16.9) підвішений на невагомому стрижні завдовжки  $l$  до нерухомої горизонтальної осі  $O_1$ . Після відхилення на деякий кут диск ударяє по нерухомому виробу, коли стрижень вертикальний. Швидкість центра ваги диска в цей момент дорівнює  $u_C$ . Визначити імпульс  $S$  динамічної реакції підшипників, якщо коефіцієнт відновлення дорівнює  $k$ .

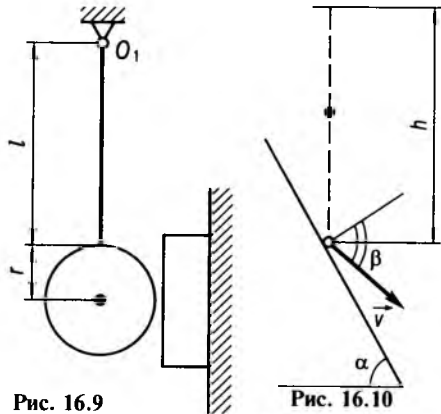


Рис. 16.9

Рис. 16.10

Відповідь:  $S = \frac{Mr^2(1+k)}{2(l+r)^2} u_C$ .

16.6. Важка кулька падає з висоти  $h$  на гладеньку площину, нахилenu під кутом  $\alpha = 60^\circ$  до горизонту (рис. 16.10).

Визначити швидкість  $v$  кульки після її відбиття від похилої площини та кут відбиття  $\beta$ , якщо коефіцієнт відновлення  $k = \frac{1}{2}$ .

Відповідь:  $v = \frac{\sqrt{26gh}}{4}$ ;  $\beta = \arctg 3,46 \approx 73^\circ$ .

16.7. Пристрій для визначення коефіцієнта відновлення швидкості при ударі складається з стрижня, що обертається у вертикальній площині навколо горизонтальної осі  $O$ , та проградуированої шкали. На певній відстані від  $O$  до стрижня прикріплено зразок того матеріалу, який досліджується. Стрижень падає з горизонтального положення під дією власної ваги з нульовою початковою швидкістю (рис. 16.11). У вертикальному положенні він співударяється з нерухомою пластиною з того ж самого матеріалу.

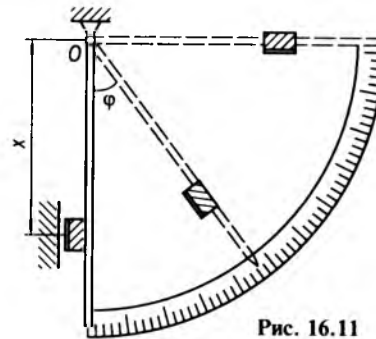


Рис. 16.11

Визначити коефіцієнт відновлення  $k$ , якщо після удару стрижень відхиляється у зворотному напрямку на кут  $\varphi$ . Визначити також, на якій відстані  $x$  від точки  $O$  треба помістити зразки матеріалів для того, щоб при співударі не виникало додаткових імпульсів зусиль у підшипнику  $O$ .

Відповідь:  $k = \sqrt{2} \sin \frac{\varphi}{2}$ ;  $x = \frac{2}{3} l$ .

§ 17.1. ПРИНЦИП МОЖЛИВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ

17.1.1. Короткі теоретичні відомості

Дійсними переміщеннями називаються елементарні переміщення точок системи, які не суперечать в'язям і відбуваються під дією заданих сил. Ці переміщення відповідають дійсному закону руху механічної системи. Позначаються дійсні переміщення  $d\vec{r}$  (при векторному способі задання руху),  $dx, dy, dz$  (при координатному способі задання руху).

Можливими переміщеннями називають елементарні уявні переміщення точок системи, які не суперечать в'язям і відбуваються у фіксований момент часу. Можливі переміщення не залежать від діючих сил, закону руху системи і є сукупністю одночасних уявних переміщень точок системи, сумісних із в'язями. Позначаються можливі переміщення  $\delta\vec{r}$  (при векторному способі задання руху) і  $\delta x, \delta y, \delta z$  (при координатному способі задання руху). Значок  $\delta$  тут позначає варіацію функції  $u$ . Варіацією функції  $\delta u$  називається приріст функції, спричинений зміною функціональної залежності, при фіксованому значенні аргументу.

Для стаціонарних в'язей дійсне переміщення точки є одним з множини її можливих переміщень. Для нестаціонарних в'язей дійсне переміщення точки не буде окремим випадком можливих переміщень.

Можливими переміщеннями матеріальної точки, рух якої обмежується утримуваль-

ною в'яззю, наприклад деякою поверхнею, будуть переміщення в дотичній площині до даної поверхні (рис. 17.1). Якщо дана поверхня не є утримувальною в'яззю, то можливі переміщення напрямлені в частину простору, яка не заповнена в'яззю.

Числом степенів вільності матеріальної системи називають кількість незалежних можливих переміщень, які можна надати її точкам у фіксований момент часу. Число степенів вільності матеріальної точки, яка вільно рухається у просторі, дорівнює трьом, по поверхні — двом, по кривій — одному. У загальному випадку руху вільного твердого тіла кількість степенів вільності — шість.

Ідеальними називають в'язі, алгебраїчна сума елементарних робіт реакцій котрих на будь-яких можливих переміщеннях точок системи дорівнює нулю (для утримувальних в'язей):

$$\sum_{i=1}^n \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0, \quad (17.1)$$

де  $\vec{R}_i$  — відповідні реакції в'язей, накладених на точки системи ( $i = 1, 2, \dots, n$ );  $\delta\vec{r}_i$  — можливі переміщення точок системи.

Прикладами ідеальних в'язей є ідеально гладенька площина та поверхня, абсолютно жорсткий стрижень, абсолютно тверде тіло тощо. Негладка поверхня не належить до ідеальних в'язей внаслідок того, що робота дотичної складової її реакції (сили тертя ковзання) на можливому переміщенні  $\delta\vec{r}$  (рис. 17.1) не дорівнює нулю.

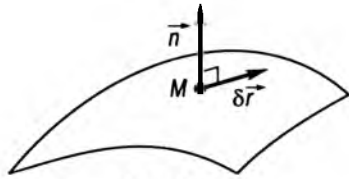


Рис. 17.1

Найзагальніший принцип аналітичної статyki — **принцип можливих переміщень** — полягає в наступному: для рівноваги системи матеріальних точок, що підпорядковуються утримувальним ідеальним стаціонарним в'язям, необхідно і достатньо, щоб дорівнювала нулю сума елементарних робіт активних сил на будь-якому можливому переміщенні системи з положення рівноваги, що розглядається, за умови, що в початковий момент система нерухома:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad (17.2)$$

де  $\vec{F}_i$  — активні сили, прикладені до точок системи.

Вираз (17.2) називають **загальним рівнянням статyki**. Враховуючи, що в проєкціях на осі декартової системи координат  $Oxyz$  можна записати  $\vec{F}_i = \{F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}\}$  та  $\delta \vec{r}_i = \{\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i\}$ , загальне рівняння статyki можна подати у вигляді

$$\sum_{i=1}^n (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) = 0. \quad (17.3)$$

Принцип можливих переміщень дає змогу розв'язувати задачі на дослідження рівноваги твердого тіла та системи твердих тіл, визначати залежності між величинами активних сил у стані рівноваги. Він дозволяє одержати найменш можливу кількість рівнянь рівноваги довільної системи, яка дорівнює числу її степенів вільності.

У випадку неідеальних в'язей, наприклад шорсткої поверхні, до активних сил треба умовно віднести сили, які вносять неідеальність (сили тертя) і, відповідно, прирівняти нулю суму робіт активних сил і сил тертя

на будь-яких можливих переміщеннях точок системи.

Принцип можливих переміщень дає змогу визначати невідомі реакції ідеальних в'язей. Для цього треба застосувати аксіому про звільнення від в'язей і замінити дію в'язі шуканою реакцією. При складанні рівняння рівноваги до активних сил слід віднести шукану реакцію в'язі.

Наведемо послідовність розв'язання задач з використанням принципу можливих переміщень:

- 1) виділити систему матеріальних точок або тіл, рівновага яких досліджується;
- 2) проаналізувати та графічно зобразити активні сили, які діють на систему;
- 3) дослідити характер в'язей і у випадку неідеальних в'язей визначити їх реакції та умовно віднести до активних сил;
- 4) надати системі можливі переміщення;
- 5) скласти загальне рівняння статyki, тобто записати алгебраїчну суму елементарних робіт сил, що розглядаються на можливих переміщеннях їх точок прикладання, та прирівняти її нулю;
- 6) визначити число степенів вільності системи та встановити при необхідності залежність між можливими переміщеннями. Кількість незалежних можливих переміщень дорівнюватиме числу степенів вільності;
- 7) у загальному рівнянні статyki виключити залежні можливі переміщення і, враховуючи, що незалежні можливі переміщення одночасно не дорівнюють нулю, отримати систему рівнянь, з яких визначаються шукані величини.

### 17.1.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 17.1.** Визначити зусилля затискання тіла 1 у гвинтовому пресі. Гвинт 2 має крок різі  $h$ , до важеля 3 завдовжки  $2l$  прикладено пару сил  $\vec{F}, -\vec{F}$  (рис. 17.2).

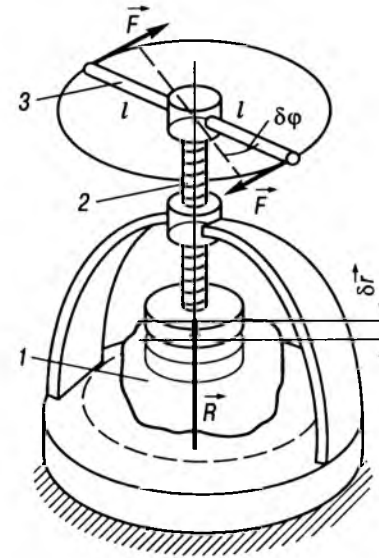


Рис. 17.2

Розв'язування. Розглянемо рівновагу гвинта 2 з важелем 3 і застосуємо принцип можливих переміщень.

Визначаємо активні сили. До них належить пара сил  $\vec{F}$  і  $-\vec{F}$ .

В'язю для гвинта з важелем є нерухома гайка. Вважаємо, що тертя між гвинтом та гайкою немає. Тоді в'язь буде ідеальною.

Відкинемо умовно тіло 1 і замінимо його дію на гвинт, за аксіомою про звільнення від в'язей, силою  $\vec{R}$  (рис. 17.2). Умовно віднесемо цю силу до активних.

Надамо важелю можливе переміщення  $\delta\phi$  за стрілкою годинника. Відповідне можливе переміщення гвинта  $\delta\vec{r}$  буде напрямлене вниз.

Загальне рівняння статyki (17.2) набуде вигляду

$$\vec{M}(\vec{F}, -\vec{F}) \cdot \delta\phi + \vec{R} \cdot \delta\vec{r} = 0, \quad (1)$$

де  $\vec{M}(\vec{F}, -\vec{F})$  — момент пари сил;  $\delta\phi$  — вектор, який збігається з напрямком вектора кутової швидкості повороту гвинта на

кут  $\delta\phi$ . Враховуючи, що напрямки векторів  $\vec{M}(\vec{F}, -\vec{F})$  і  $\delta\phi$  збігаються, а напрямки векторів  $\vec{R}$  і  $\delta\vec{r}$  протилежні, у скалярній формі отримуємо

$$2Fl\delta\phi - R\delta r = 0. \quad (2)$$

Даний механізм є системою з одним степенем вільності. Зв'язок між можливими переміщеннями  $\delta\phi$  та  $\delta r$  визначається виразом

$$\delta\phi = \frac{2\pi}{h} \delta r. \quad (3)$$

Дійсно, при повороті важеля 1 на кут  $2\pi$  рад гвинт 2 переміщується вздовж вертикальної осі на відстань  $h$ , що дорівнює кроку гвинта. При повороті важеля на кут  $\delta\phi$  гвинт здійснює переміщення вздовж вертикальної осі на відстань  $\delta r$ . З відповідної пропорції отримуємо формулу (3).

Тоді вираз (2) набуває вигляду

$$\delta r (2lF \frac{2\pi}{h} - R) = 0.$$

Оскільки можливе переміщення  $\delta r$  відповідає наданому системі ненульовому можливому переміщенню  $\delta\phi$ , нулеві дорівнюватиме вираз у дужках. Звідси маємо реакцію тіла  $R = \frac{4\pi l}{h} F$ . Зусилля затискання буде за модулем таким самим.

**Приклад 17.2.** Гладкий клин вагою  $P$  з куту  $\alpha$  при вершині опирається на вертикальну гладку стіну та брус вагою  $Q$ , який може рухатись вздовж шорстких горизонтальних напрямних (рис. 17.3, а). Визначити коефіцієнт тертя між брусом та горизонтальними напрямними, при якому система зрівноважена.

Розв'язування. Розглянемо положення рівноваги системи, яка складається з клина та бруса.

Активними силами в даній задачі є сили ваги  $\vec{P}$  та  $\vec{Q}$ , які зображуємо з початком у центрах мас відповідних тіл (рис. 17.3, б).

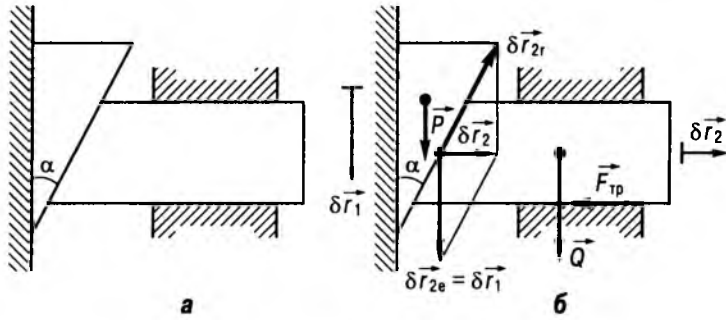


Рис. 17.3

В'язі, які обмежують рух даної системи, — вертикальна гладка поверхня та горизонтальні напрямні бруса. Вертикальна поверхня є ідеальною в'яззю, тому що тертя відсутнє. Горизонтальні напрямні — це неідеальна в'язь. Силу тертя  $F_{\text{тр}}$  спрямуємо протилежно до напрямку можливого руху бруса, який визначається переміщенням клина вниз. Оскільки брус знаходиться в рівновазі, то сила тертя  $F_{\text{тр}}$  є силою тертя спокою і задовольняє умову

$$F_{\text{тр}} \leq F_{\text{тр max}} = fN,$$

де  $F_{\text{тр max}}$  — максимальне (граничне) значення сили тертя;  $N$  — нормальна складова реакції горизонтальних напрямних бруса, у даному випадку  $N = P + Q$ .

Віднесемо силу тертя до активних сил.

Надамо клину можливе переміщення  $\delta \vec{r}_1$  вниз, а брусу —  $\delta \vec{r}_2$  вправо і складемо загальне рівняння статички

$$\vec{P} \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{F}_{\text{тр}} \cdot \delta \vec{r}_2 = 0. \quad (1)$$

З урахуванням напрямків векторів у скалярній формі отримаємо

$$P \delta r_1 - F_{\text{тр}} \delta r_2 = 0. \quad (2)$$

Оскільки система має один степінь вільності, визначимо зв'язок між можливими переміщеннями. Для цього подамо рух бруса як складний, що є сумою переносного руху разом з клином та відносного руху вздовж клина. Тоді абсолютне можливе пе-

реміщення бруса  $\delta \vec{r}_2$  дорівнює векторній сумі (рис. 17.3, б) переносного можливого переміщення  $\delta \vec{r}_{2e} = \delta \vec{r}_1$  та відносного можливого переміщення  $\delta \vec{r}_{2r}$  (воно напрямлене вздовж площини нахилу клина):

$$\delta \vec{r}_2 = \delta \vec{r}_{2e} + \delta \vec{r}_{2r}.$$

З паралелограма, утвореного векторами переміщень, визначаємо

$$\delta r_2 = \delta r_1 \cdot \text{tg } \alpha.$$

Цей вираз підставимо в загальне рівняння статички (2) та винесемо  $\delta r_1$  за дужки. Отримаємо

$$(P - F_{\text{тр}} \text{tg } \alpha) \delta r_1 = 0. \quad (3)$$

Оскільки можливе переміщення  $\delta r_1$  може набувати довільного значення, дорівнювати нулю буде коефіцієнт при  $\delta r_1$ , тобто

$$P - F_{\text{тр}} \text{tg } \alpha = 0,$$

звідки

$$F_{\text{тр}} = P \text{ctg } \alpha.$$

Система буде зрівноваженою, якщо знайдена величина сили тертя спокою не перевищить максимальне (граничне) значення сили тертя, тобто якщо виконується умова

$$F_{\text{тр}} = P \text{ctg } \alpha \leq F_{\text{тр max}} = f(P + Q).$$

Тоді остаточно отримаємо

$$f \geq \frac{P}{P + Q} \text{ctg } \alpha.$$

**Приклад 17.3.** До повзуна  $A$  механізму еліпсографа (рис. 17.4) прикладено силу  $P$ , яка діє вздовж прямої руху повзуна в напрямку осі обертання  $O$  кривошипа  $OC$ . Визначити обертальний момент  $M$ , який треба прикласти до кривошипа  $OC$  для того, щоб механізм знаходився в рівновазі. Механізм розташовано в горизонтальній площині, кривошип  $OC$  утворює з напрямком руху повзуна  $B$  наперед заданий кут  $\varphi$ ,  $OC = AC = CB = l$ .

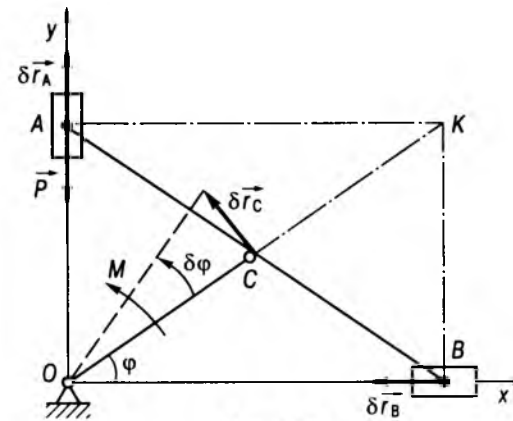


Рис. 17.4

Розв'язування. Розглянемо рівновагу всього механізму і застосуємо принцип можливих переміщень.

Зобразимо відому активну силу  $\vec{P}$  та пару сил з невідомим моментом  $M$  (рис. 17.4).

В'язями в даній задачі є напрямні повзунів  $A$  та  $B$ , циліндричні шарніри  $O$ ,  $C$ ,  $B$ .  $A$ , тертям в яких знехтуємо. Ці в'язі є ідеальними, тобто їх реакції не увійдуть у загальне рівняння статички.

Надамо механізму можливого переміщення: уявно повернемо кривошип  $OC$  проти ходу годинникової стрілки на малий кут  $\delta \varphi$ . Тоді відповідні можливі переміщення повзунів  $A$  та  $B$  будуть  $\delta \vec{r}_A$  та  $\delta \vec{r}_B$  (рис. 17.4). Загальне рівняння статички набуває вигляду

$$\vec{M} \cdot \delta \vec{\varphi} + \vec{P} \cdot \delta \vec{r}_A = 0, \quad (1)$$

де  $\delta \vec{\varphi}$  — вектор, напрямком якого збігається з вектором кутової швидкості повороту кривошипа на кут  $\delta \varphi$ . У скалярній формі, враховуючи напрямки векторів, маємо

$$M \delta \varphi - P \delta r_A = 0. \quad (2)$$

У це рівняння не входить робота сил ваги, оскільки механізм розташовано в горизонтальній площині.

Поданий механізм є системою з одним ступенем вільності. Тому між величинами  $\delta \varphi$  та  $\delta r_A$  існує зв'язок, для встановлення якого скористаємось кінематичними співвідношеннями. Спочатку визначимо зв'язок між швидкістю  $v_A$  точки  $A$  та кутовою швидкістю  $\omega_{OC}$  кривошипа  $OC$ . Координата  $y_A$  точки  $A$  визначається так:  $y_A = 2l \sin \varphi$ . Тоді швидкість точки  $A$

$$v_A = \dot{y}_A = 2l \omega_{OC} \cos \varphi.$$

Вираз для швидкості точки  $A$  можна отримати іншим способом, визначивши миттєвий центр швидкостей  $K$  лінійки  $AB$  еліпсографа (рис. 17.4). Тоді можна записати

$$\frac{v_A}{KA} = \frac{v_C}{KC},$$

де швидкість точки  $C$  дорівнює  $v_C = \omega_{OC} l$ .

Для прямокутного трикутника  $OKA$  можемо записати співвідношення  $KA = 2KC \cos \varphi$ . Тоді швидкість

$$v_A = 2l \omega_{OC} \cos \varphi. \quad (3)$$

Далі, враховуючи, що  $v_A = \frac{dr_A}{dt}$  і  $\omega_{OC} = \frac{d\varphi}{dt}$ , з виразу (3) отримаємо

$$dr_A = 2l \cos \varphi \cdot d\varphi.$$

Оскільки в'язі стаціонарні, дійсні переміщення є одними з можливих. Отже, можна записати  $\delta r_A = 2l \delta \varphi \cos \varphi$ , і загальне рівняння статички (2) набуде вигляду

$$(M - 2Pl \cos \varphi) \delta \varphi = 0. \quad (4)$$

Враховуючи, що  $\delta \varphi \neq 0$ , отримаємо рівняння рівноваги механізму

$$M - 2Pl \cos \varphi = 0.$$

Після розв'язання маємо  $M = 2Pl \cos \varphi$ .



**Приклад 17.4.** До кінців невагомої нерозтяжної мотузки прив'язано вантажі  $A$  та  $B$  однакової ваги. Мотузка огинає нерухомі блоки  $C$  та  $E$ , охоплює рухомий блок  $D$  (рис. 17.5, *a*). До осі рухомого блока  $D$  підвішено вантаж  $K$  вагою  $Q$ . Визначити вагу  $P$  вантажів  $A$  та  $B$  та коефіцієнт тертя  $f$  вантажу  $A$  по горизонтальній площині, якщо система вантажів перебуває у стані спокою.

Розв'язування. Об'єкт дослідження даної задачі — система вантажів. Активними силами, прикладеними до вантажів, є сили ваги  $\vec{P}_A, \vec{P}_B, \vec{Q}$  (рис. 17.5, *b*).

Проведемо аналіз в'язей. Нерозтяжна невагома мотузка та блоки є ідеальними в'язями. На відміну від мотузки та блоків жорстка горизонтальна поверхня не є ідеальною в'яззю. Дотичну складову її реакції — силу тертя — визначимо за законом Кулона із співвідношення  $F_{\text{тр}} = fP_A$  та віднесемо до активних сил. Напрямимо її вліво, що відповідає фізичному змісту задачі.

Наведемо два способи розв'язання задачі.

**Спосіб 1.** Визначимо положення вантажів параметрами  $x_A, y_B, y_K$ , які є координатами вантажів у вибраній системі координат  $Sxy$  (рис. 17.5, *b*).

Уявно надамо тілам  $A, B, K$  системи можливих переміщень  $\delta x_A, \delta y_B, \delta y_K$ , проєкції яких на осі координат вважаємо додатними. Складемо загальне рівняння статки:

$$\vec{F}_{\text{тр}} \cdot \delta \vec{x}_A + \vec{P}_B \cdot \delta \vec{y}_B + \vec{Q} \cdot \delta \vec{y}_K = 0, \quad (1)$$

або з урахуванням напрямків векторів

$$-fP_A \delta x_A + P_B \delta y_B + Q \delta y_K = 0. \quad (2)$$

Складаємо рівняння в'язі, тобто запишемо обмеження, які мотузка накладає на рух і положення системи вантажів. Незмінну довжину (припустимо,  $l$ ) нерозтяжної мотузки можна вважати рівною сумі ділянок  $x_A, y_D, y_B$ . Враховуючи, що вантаж  $A$  розташований на від'ємних значеннях осі  $Sx$ , маємо

$$-x_A + 2y_D + y_B = l = \text{const}. \quad (3)$$

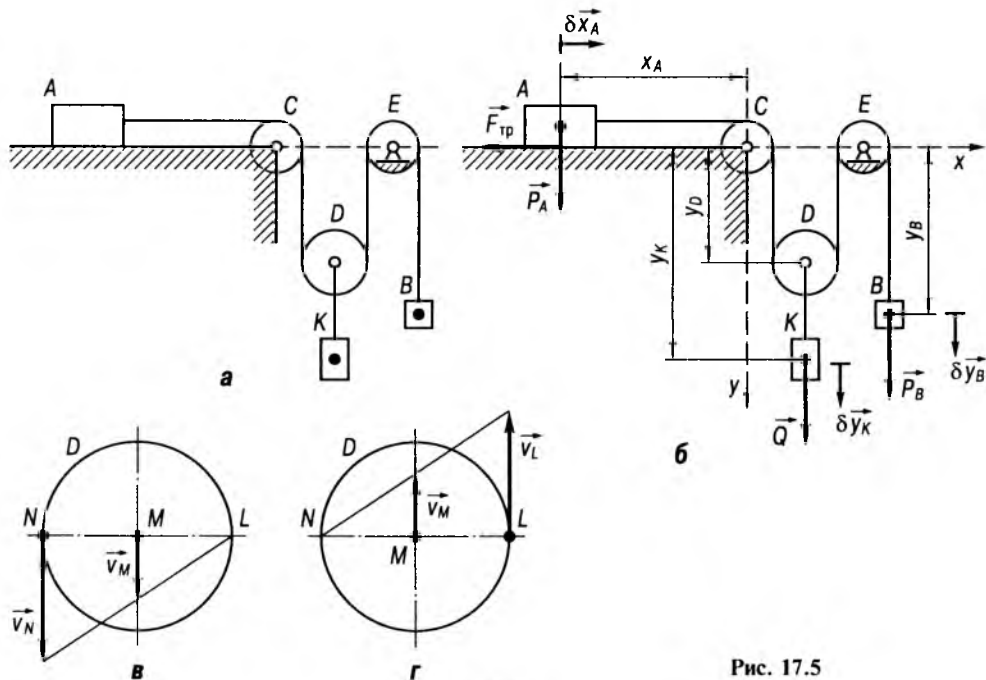


Рис. 17.5

Варіюючи останній вираз і враховуючи, що  $\delta y_K = \delta y_D$ , запишемо

$$-\delta x_A + 2\delta y_K + \delta y_B = 0 \quad (4)$$

або

$$\delta x_A = 2\delta y_K + \delta y_B. \quad (5)$$

Число степенів вільності в даній системі дорівнює двом, тобто лише два можливих переміщення є незалежними. Такими вважатимемо величини  $\delta y_K$  та  $\delta y_B$ .

Виключимо з загального рівняння статки (2) можливе переміщення  $\delta x_A$  за формулою (5). Тоді отримаємо

$$-fP_A(2\delta y_K + \delta y_B) + P_B \delta y_B + Q \delta y_K = 0,$$

або, з урахуванням  $P_A = P_B = P$ ,

$$(-2fP + Q)\delta y_K + (-fP + P)\delta y_B = 0. \quad (6)$$

Оскільки  $\delta y_K$  і  $\delta y_B$  — незалежні та довільні можливі переміщення, остання рівність виконується при одночасному виконанні умов

$$-2fP + Q = 0, \quad -fP + P = 0. \quad (7)$$

Після розв'язання системи рівнянь (7) отримаємо

$$f = 1, \quad P = \frac{Q}{2}.$$

**Спосіб 2.** Встановлюємо, що число степенів вільності системи дорівнює двом. З трьох можливих переміщень вантажів незалежними будуть тільки два, наприклад  $\delta x_A$  та  $\delta y_B$ . Враховуючи, що  $\delta x_A$  та  $\delta y_B$  незалежні та довільні, покладемо, що  $\delta y_B = 0$  (тобто зафіксуємо вантаж  $B$ ), а переміщення  $\delta x_A$  не дорівнює нулеві і спрямоване вправо. Вантаж  $K$  матиме відповідне можливе переміщення  $\delta y_K$ . Тоді загальне рівняння статки набуває вигляду

$$\vec{F}_{\text{тр}} \cdot \delta \vec{x}_A + \vec{Q} \cdot \delta \vec{y}_K = 0, \quad (8)$$

або у скалярній формі

$$-fP_A \delta x_A + Q \delta y_K = 0. \quad (9)$$

При нерухомому вантажі  $B$  точка  $L$  рухомого блока  $D$  буде його миттєвим центром швидкостей (рис. 17.5, *в*). Тоді швидкості точок  $N$  та  $M$  цього блока пов'язані

співвідношенням  $v_N = 2v_M$ . З умови нерозтяжності нитки отримаємо співвідношення між швидкостями точок  $A$  та  $N, K$  та  $M$ :  $v_A = v_N, v_K = v_M$ . Отже,  $v_A = 2v_K$  або в диференціалах  $\frac{dx_A}{dt} = 2 \frac{dy_K}{dt}$ , що дає змогу записати  $dx_A = 2dy_K$ . Дійсні переміщення у випадку стаціонарних в'язей є одними з можливих, тому

$$\delta x_A = 2\delta y_K. \quad (10)$$

Після виключення з рівняння (9) можливого переміщення  $\delta y_K$  маємо співвідношення

$$\delta x_A (fP_A - \frac{Q}{2}) = 0, \quad (11)$$

з якого при  $\delta x_A \neq 0$  отримаємо рівняння

$$fP_A - \frac{Q}{2} = 0. \quad (12)$$

Далі покладемо, що  $\delta x_A = 0$  (зафіксуємо вантаж  $A$ ), а переміщення  $\delta y_B$  не дорівнює нулеві і спрямоване донизу. Вантаж  $K$  матиме відповідне можливе переміщення  $\delta y_K$ , яке спрямоване вгору. Тоді загальне рівняння статки у скалярній формі запишеться так:

$$P_B \delta y_B - Q \delta y_K = 0. \quad (13)$$

Встановимо зв'язок між можливими переміщеннями. У випадку нерухомого вантажу  $A$  точка  $N$  рухомого блока  $D$  буде його миттєвим центром швидкостей (рис. 17.5, *г*). Тоді переміщення точок  $L$  та  $M$  цього блока пов'язані співвідношенням  $\delta y_L = 2\delta y_M$ . З умови нерозтяжності мотузки отримаємо  $\delta y_L = \delta y_B, \delta y_M = \delta y_K$ . Отже,  $\delta y_B = 2\delta y_K$ . Підставляємо  $\delta y_B$  з цього виразу в (13). Тоді, враховуючи, що  $\delta y \neq 0$ , матимемо

$$P - \frac{Q}{2} = 0. \quad (14)$$

Система алгебраїчних рівнянь (12) та (14) дає такий результат:

$$f = 1, \quad P = \frac{Q}{2}.$$

**Приклад 17.5.** Складена балка  $AD$  опирається на рухомі опори  $B, D$  та нерухому опору  $A$  (рис. 17.6, *a*). Балки  $AC$  та  $CD$  з'єднані між собою шарніром в точці  $C$ . До балки  $AC$  прикладена пара сил з моментом  $M = 2 \text{ Н} \cdot \text{м}$ , а до балки  $CD$  — вертикальна сила  $P = 4 \text{ Н}$ . Визначити опорні реакції в точках  $A, B$  та  $D$ . Вважати балку невагомою. Покласти  $l = 1 \text{ м}$ .

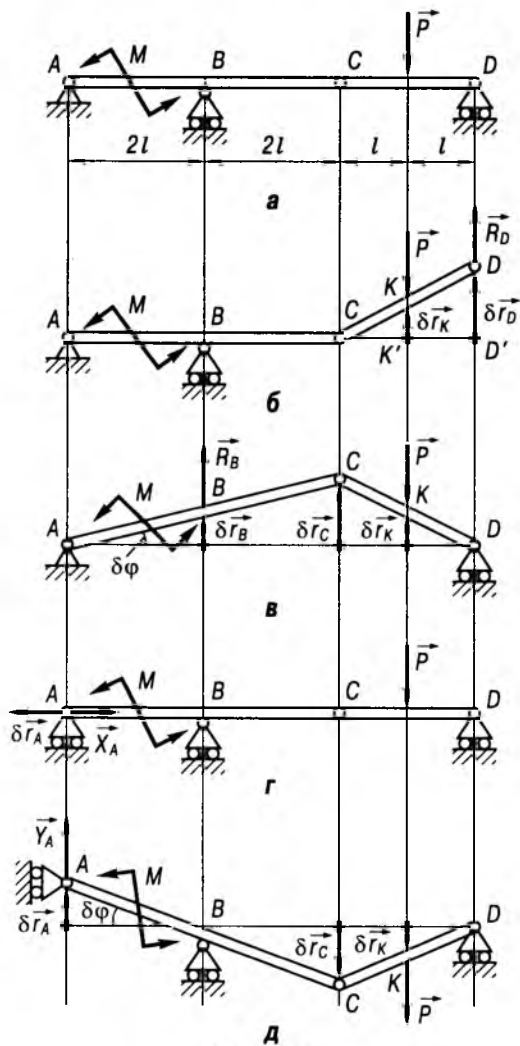


Рис. 17.6

**Розв'язування.** Розв'язання даної задачі проведемо з використанням принципу можливих переміщень, котрий дає змогу будь-яку опорну реакцію визначити з одного рівняння, складеного відповідним чином. Це важливо тоді, коли треба знайти тільки одну опорну реакцію.

Визначимо реакцію в рухомій опорі  $D$ , уявно відкинувши її та замінивши реакцією  $\vec{R}_D$  (рис. 17.6, *б*).

Надамо можливе переміщення  $\delta \vec{r}_D$  точки  $D$  вгору. Відповідне положення балки показано на рисунку.

Можливі переміщення  $\delta \vec{r}_K$  та  $\delta \vec{r}_D$  точок прикладання сил  $\vec{P}$  та  $\vec{R}_D$  пов'язані співвідношенням

$$\delta r_D = 2\delta r_K, \quad (1)$$

яке визначається з подібності трикутників  $CK'K$  та  $CD'D$ .

На підставі принципу можливих переміщень прирівнюємо до нуля суму робіт активної сили  $\vec{P}$  та реакції  $\vec{R}_D$  на відповідних можливих переміщеннях:

$$\vec{R}_D \delta \vec{r}_D + \vec{P} \delta \vec{r}_K = 0,$$

або з урахуванням напрямків векторів

$$R_D \delta r_D - P \delta r_K = 0. \quad (2)$$

Використовуючи формулу (1), маємо

$$\left( R_D - \frac{1}{2} P \right) \delta r_D = 0.$$

Внаслідок того, що можливе переміщення  $\delta r_D \neq 0$ , отримаємо

$$R_D - 0,5P = 0,$$

звідки  $R_D = 2 \text{ Н}$ .

Для визначення реакції в рухомій опорі  $B$  уявно відкинемо її та замінимо реакцією  $\vec{R}_B$  (рис. 17.6, *в*).

Надамо можливе переміщення  $\delta \vec{r}_B$  точки  $B$  вгору.

Позначимо можливі переміщення точок прикладання сил  $\vec{P}, \vec{R}_B$  відповідно  $\delta \vec{r}_K, \delta \vec{r}_B$ . Кутове переміщення балки  $AC$  позначимо  $\delta \varphi$ . Зв'язок між можливими переміщеннями

$\delta r_C = 2\delta r_K = 2\delta r_B = 4l\delta \varphi$  (3) встановлюється з подібності відповідних трикутників. Застосуємо принцип можливих переміщень та запишемо рівняння

$$-P\delta r_K + R_B\delta r_B + M\delta \varphi = 0. \quad (4)$$

На підставі формули (3) виразимо можливі переміщення  $\delta r_K, \delta r_B$  та  $\delta \varphi$  через  $\delta r_C$  і виключимо їх з рівняння (4):

$$\left( -\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}R_B + \frac{M}{4l} \right) \delta r_C = 0.$$

Враховуючи, що  $\delta r_C \neq 0$ , отримаємо

$$-\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}R_B + \frac{M}{4l} = 0,$$

звідки  $R_B = 3 \text{ Н}$ .

Визначимо опорну реакцію в точці  $A$ . Враховуючи, що реакція в опорі  $A$  може бути розкладена на дві ортогональні складові, замінимо нерухому опору  $A$  горизонтальною складовою реакції  $\vec{X}_A$  та рухоми шарніром (рис. 17.6, *г*).

Надамо можливе переміщення  $\delta \vec{r}_A$  точки  $A$ . Очевидно, що сила  $P$  і момент пари сил  $\vec{M}$  на цьому переміщенні роботу не виконують, тобто загальне рівняння статки має вигляд

$$X_A \delta r_A = 0.$$

З останнього випливає, що  $X_A = 0$ .

Замінимо опору  $A$  вертикальною складовою реакції  $\vec{Y}_A$  та рухоми шарніром, як це показано на рис. 17.6, *д*. Надамо точці  $A$  можливе переміщення  $\delta \vec{r}_A$  вгору. Запишемо співвідношення між можливими переміщеннями точок:

$$\delta r_C = \delta r_A = 2\delta r_K = 2l\delta \varphi. \quad (5)$$

Застосовуючи принцип можливих переміщень, отримуємо

$$Y_A \delta r_A - M\delta \varphi + P\delta r_K = 0, \quad (6)$$

або з урахуванням формул (5)

$$\left( Y_A - \frac{1}{2l}M + \frac{1}{2}P \right) \delta r_A = 0.$$

З останнього співвідношення при довільному і незалежному  $\delta r_A$  отримаємо

$$Y_A = \frac{1}{2l}M - \frac{1}{2}P.$$

Звідси  $Y_A = -1 \text{ Н}$ . Знак мінус показує, що дійсний напрям реакції  $Y_A$  протилежний вказаному на рисунку. Отже, реакція в шарнірі  $A$  складається з однієї сили, направленої вниз.

**Приклад 17.6.** Рама складається з двох частин  $AC$  та  $CB$ , які з'єднані циліндричним шарніром у точці  $C$  (рис. 17.7, *a*). Частина рами  $CB$  з'єднана з підлогою рухоми циліндричним шарніром  $B$ , частина  $AC$  жорстко защемлена в перетині  $A$ . До рами прикладаються зосереджена сила  $P = 3 \text{ кН}$ , розподілена навантаження інтенсивністю  $q = 2,5 \text{ кН/м}$  та пара сил з моментом  $M = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Визначити реакції жорсткого защемлення в точці  $A$ . Розміри наведено на рисунку (в метрах),  $\alpha = 60^\circ$ .

**Розв'язування.** Реакція жорсткого защемлення в точці  $A$  складається з невідомої сили  $\vec{R}_A$ , яка лежить в площині рисунка, та пари сил з моментом  $\vec{M}_A$ . Невідому силу  $\vec{R}_A$ , звичайно, подають як векторну суму двох складових, направлених вздовж координатних осей:  $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A$ . Отже, в даній задачі треба знайти три невідомих.

Для розв'язання задачі методами геометричної статки треба скласти шість рівнянь рівноваги, кожне з яких, у загальному випадку, може включати кілька невідомих.

Застосуємо принцип можливих переміщень і визначимо кожну невідому з окремого рівняння.

Замінимо розподілене навантаження  $q$  зосередженою силою  $\vec{Q}$  (рис. 17.7, *б*), величина якої  $Q = q \cdot CG = 2,5 \cdot 2 = 5 \text{ кН}$ . Лінія дії сили  $\vec{Q}$  проходить через точку  $L$ , що є серединою відрізка  $CG$ .

Для визначення пари сил з моментом  $\vec{M}_A$  в перетині  $A$  надамо можливість час-

тині  $AC$  рами обертається навколо точки  $A$ . Для цього опору  $A$ , використовуючи аксіому про звільнення від в'язей, замінимо нерухомим шарніром і прикладемо шукану пару сил з моментом  $\bar{M}_A$  (рис. 17.7, б). Отже, рама буде зрівноваженою під дією сил  $\bar{P}$  і  $\bar{Q}$  та пар сил з моментами  $\bar{M}_A$  і  $\bar{M}$ .

Аналіз в'язей показує, що шарніри є ідеальними в'язями, оскільки тертя в них відсутнє.

Надамо можливе переміщення  $\delta\varphi$  частині  $AC$  рами так, як показано на рисунку. При цьому частина  $AC$  здійснює обертальний рух навколо нерухомої точки  $A$ , а частина  $CB$  — плоскопаралельний рух, який можна подати як миттєвий обертальний рух навколо миттєвого центра швидкостей (МЦШ).

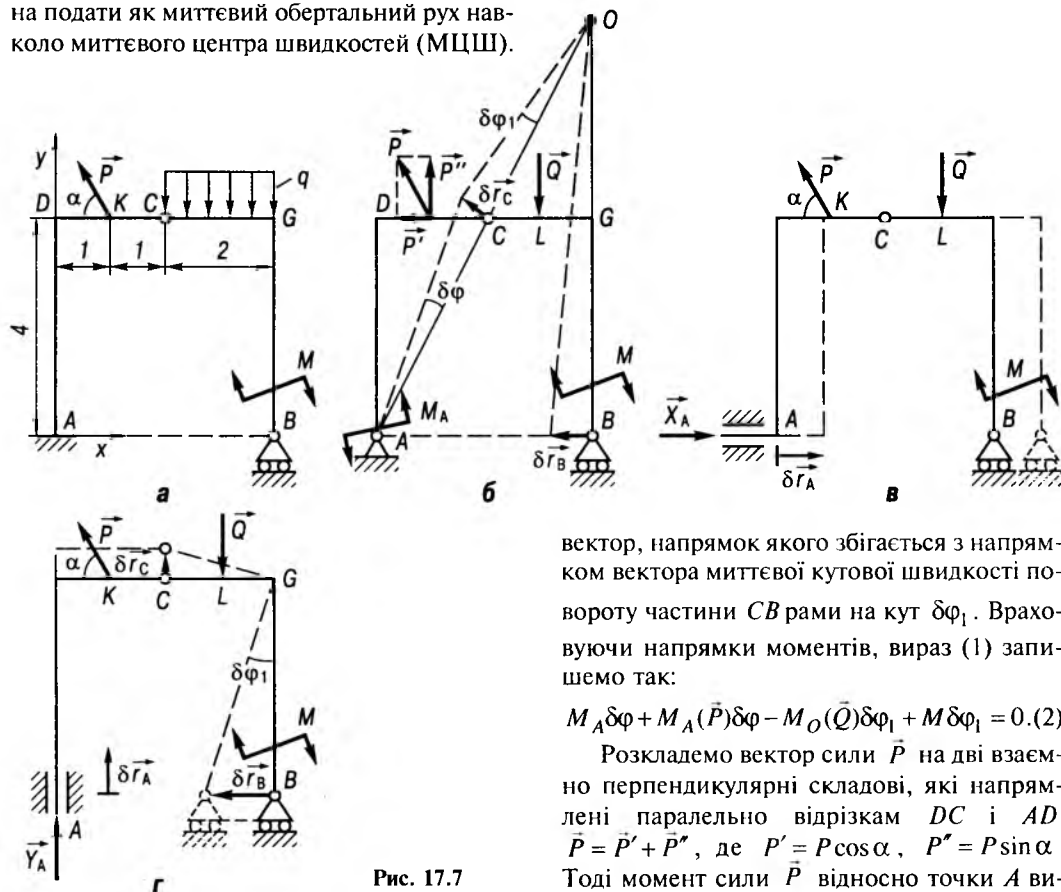


Рис. 17.7

Використовуючи графічний спосіб, визначаємо МЦШ частини  $CB$  рами — точку  $O$  — як точку перетину перпендикулярів до напрямків можливих переміщень точки  $C$  та точки  $B$ .

Застосуємо принцип можливих переміщень і врахуємо, що роботу сили при обертовому русі тіла можна визначити як роботу моменту цієї сили відносно центра обертання. Отримаємо

$$\bar{M}_A \delta\varphi + \bar{M}_A(\bar{P})\delta\varphi + \bar{M}_O(\bar{Q})\delta\varphi_1 + \bar{M}\delta\varphi_1 = 0, (1)$$

де  $\delta\varphi$  — вектор, напрямок якого збігається з напрямком вектора кутової швидкості повороту частини  $AC$  рами на кут  $\delta\varphi$ ;  $\delta\varphi_1$  —

вектор, напрямок якого збігається з напрямком вектора миттєвої кутової швидкості повороту частини  $CB$  рами на кут  $\delta\varphi_1$ . Враховуючи напрямки моментів, вираз (1) запишемо так:

$$M_A \delta\varphi + M_A(\bar{P})\delta\varphi - M_O(\bar{Q})\delta\varphi_1 + M\delta\varphi_1 = 0. (2)$$

Розкладемо вектор сили  $\bar{P}$  на дві взаємно перпендикулярні складові, які напрямлені паралельно відрізкам  $DC$  і  $AD$ :  $\bar{P} = \bar{P}' + \bar{P}''$ , де  $P' = P \cos \alpha$ ,  $P'' = P \sin \alpha$ . Тоді момент сили  $\bar{P}$  відносно точки  $A$  ви-

значимо як суму моментів цих складових. Маємо

$$M_A \delta\varphi + P' \cdot AD \delta\varphi + P'' \cdot DK \delta\varphi - Q \cdot GL \delta\varphi_1 + M \delta\varphi_1 = 0. (3)$$

Визначимо зв'язок між можливими переміщеннями  $\delta\varphi$  і  $\delta\varphi_1$ . Нехай  $\omega$  — кутова швидкість обертового руху частини  $AC$  рами,  $\omega_1$  — миттєва кутова швидкість частини  $CB$  рами. Оскільки точка  $C$  належить одночасно обом частинам рами, можна записати

$$v_C = \omega AC, \quad v_C = \omega_1 OC.$$

Тоді  $\omega_1 = \frac{AC}{OC} \omega$ , звідки

$$\delta\varphi_1 = \frac{AC}{OC} \delta\varphi. (4)$$

Виключаємо  $\delta\varphi_1$  з рівняння (3), враховуючи формулу (4). Отримаємо:

$$M_A \delta\varphi + P \cos \alpha \cdot AD \delta\varphi + P \sin \alpha \cdot DK \delta\varphi - Q \cdot GL \frac{AC}{OC} \delta\varphi + M \frac{AC}{OC} \delta\varphi = 0,$$

або

$$(M_A + P \cos \alpha \cdot AD + P \sin \alpha \cdot DK - Q \cdot GL \frac{AC}{OC} + M \frac{AC}{OC}) \delta\varphi = 0.$$

Оскільки  $\delta\varphi$  — незалежне та довільне можливе переміщення, маємо

$$M_A = -P \cos \alpha \cdot AD - P \sin \alpha \cdot DK + Q \cdot GL \frac{AC}{OC} - M \frac{AC}{OC}. (5)$$

З рисунка визначаємо  $AC = OC = 2\sqrt{5}$  м, підставляємо інші числові значення в (5) і отримуємо  $M_A = -10,19$  кН · м.

Визначимо горизонтальну складову  $\bar{X}_A$  реакції  $\bar{R}_A$  жорсткого защемлення. Використовуючи аксіому про звільнення від в'язей, замінимо опору  $A$  ковзним защемленням і прикладемо шукану силу  $\bar{X}_A$  (рис. 17.7, в). Отже, рама буде зрівноваженою під дією сил  $\bar{P}$  і  $\bar{Q}$ , реакції  $\bar{X}_A$ , яку умовно відносимо до активних сил, та пари сил з моментом  $\bar{M}$ .

Надамо точці  $A$  можливе переміщення  $\delta\bar{r}_A$ . Обидві частини рами здійснюватимуть поступальний рух у горизонтальному напрямку. Запишемо загальне рівняння статки і врахуємо, що сила  $\bar{Q}$  та пара сил з моментом  $\bar{M}$  для заданого можливого переміщення роботу не виконують. Маємо

$$\bar{P} \delta\bar{r}_K + \bar{X}_A \delta\bar{r}_A = 0. (6)$$

Оскільки  $\delta r_A = \delta r_K$ , вираз (6) набуває вигляду

$$-P \cos \alpha \delta r_A + X_A \delta r_A = 0.$$

Звідси, оскільки  $\delta r_A \neq 0$ , отримаємо  $X_A = P \cos \alpha$ , або, підставивши числові значення,  $X_A = 0,5$  кН.

Для визначення вертикальної складової  $\bar{Y}_A$  реакції жорсткого защемлення замінимо опору  $A$  ковзним защемленням, як показано на рис. 17.7, з, і прикладемо шукану силу  $\bar{Y}_A$ . Отже, рама буде зрівноваженою під дією сил  $\bar{P}$  і  $\bar{Q}$ , реакції  $\bar{Y}_A$ , яку умовно відносимо до активних сил, та пари сил з моментом  $\bar{M}$ .

Надамо точці  $A$  можливе переміщення  $\delta\bar{r}_A$  вгору. Тоді ліва частина рами здійснюватиме поступальний рух у вертикальному напрямку. Права частина рами виконує плоскопаралельний рух. Миттєвий центр швидкостей правої частини  $CB$  рами — точку  $G$  — знайдемо як точку перетину перпендикулярів до напрямків можливих переміщень точки  $C$  та точки  $B$ .

Оскільки плоскопаралельний рух тіла можна подати як миттєвий обертальний рух навколо МЦШ, роботу сили  $\bar{Q}$  визначимо як роботу моменту цієї сили відносно миттєвого центра обертань  $G$  правої частини рами. Тоді загальне рівняння статки запишеться так:

$$\bar{Y}_A \delta\bar{r}_A + \bar{P} \delta\bar{r}_K + \bar{M}_G(\bar{Q})\delta\varphi_1 + \bar{M}\delta\varphi_1 = 0. (7)$$

У виразі (7)  $\delta\varphi_1$  — вектор, напрямок якого збігається з напрямком вектора миттєвої кутової швидкості повороту частини  $CB$  рами на кут  $\delta\varphi_1$ .

Досліджувана механічна система має один степінь вільності, тому виразимо можливі переміщення  $\delta r_K$  та  $\delta \varphi_1$  через можливе переміщення  $\delta r_A$ . Очевидно, що швидкості та переміщення усіх точок лівої частини рами будуть однакові, тобто

$$\delta r_K = \delta r_C = \delta r_A.$$

Для правої частини рами співвідношення між її миттєвою кутовою швидкістю  $\omega_1$

та швидкістю точки  $C$  має вигляд  $\omega_1 = \frac{v_C}{GC}$ .

Звідси отримаємо

$$\delta \varphi_1 = \frac{\delta r_C}{GC} = \frac{\delta r_A}{GC}.$$

Отже, з рівняння (7), враховуючи напрямки сил та моментів, матимемо

$$Y_A \delta r_A + P \sin \alpha \delta r_A - Q \cdot GL \frac{\delta r_A}{GC} + M \frac{\delta r_A}{GC} = 0.$$

Оскільки можливе переміщення  $\delta r_A$  довільне та незалежне, отримаємо

$$Y_A = -P \sin \alpha + Q \frac{GL}{GC} - \frac{M}{GC},$$

а після підстановки числових значень  $Y_A = -2,09$  кН.

Величину сили  $R_A$  визначимо з виразу

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}, \text{ матимемо } R_A = 2,15 \text{ кН.}$$

### 17.1.3. Задачі для самостійного розв'язування

**17.1.** Для монтажу конструкцій прямокутного перерізу використовується ручний важільний затискач (рис. 17.8), який має гвинти  $1$  з кроком  $h = 0,004$  м, гайку  $2$  і важелі  $3$  з натискними п'ятами  $4$ . Визначити зусилля  $N_A$  затискання конструкції  $5$ , якщо довжина рукоятки гвинта  $l = 0,15$  м, довжина важеля  $AB = 0,75$  м, відношення плечей  $OA : OB = 1 : 2$  і перпендикулярно до рукоятки прикладається сила  $2$  Н.

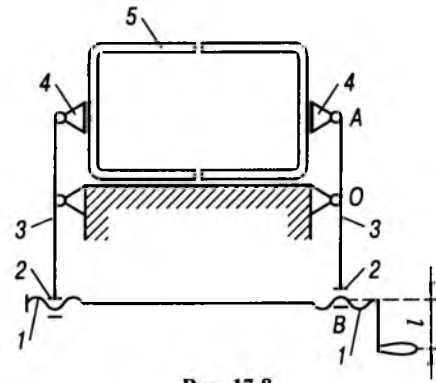


Рис. 17.8

Відповідь:  $N_A = 471,2$  Н.

**17.2.** Затискний пристрій (рис. 17.9) призначений для монтажу балок  $1$ . Він складається з пневмоциліндра  $2$  та важелів  $3, 4$ , з'єднаних між собою шарнірами. Визначити, яким має бути зусилля на штоці приводного пневмоциліндра  $Q$ , щоб забезпечити зусилля затискання балки  $10$  кН кожним із захватів  $D$  та  $E$ . Врахувати, що  $a = 0,09$  м,  $b = 0,04$  м,  $\alpha = 15^\circ$ . Тертям знехтувати.

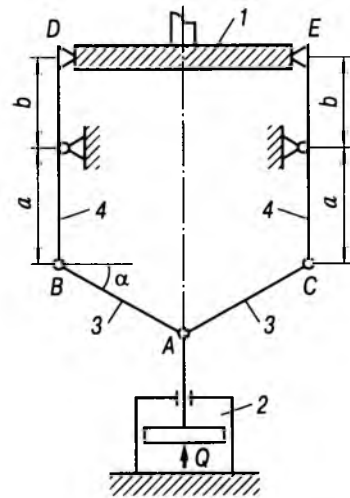


Рис. 17.9

Відповідь:  $Q = 2,38$  кН.

**17.3.** Механічна система складається з двох вантажів  $1$  і  $2$  (рис. 17.10), нерухомого східчастого блока  $4$  та рухомого блока  $3$ . Визначити масу тіла  $1$ , при якій система зрівноважена, якщо маса тіла  $2$  дорівнює  $8$  кг, блоки  $3$  та  $4$  невагомі.

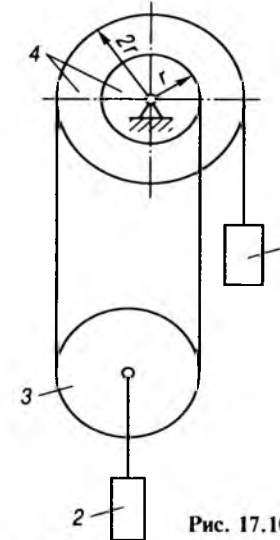


Рис. 17.10

Відповідь:  $2$  кг.

**17.4.** Визначити обертальний момент  $M$ , який треба прикласти до шківів  $1$  з центром у точці  $O_1$  і радіусом  $r_1 = 20$  см, для рівномірного підняття вантажу  $Q$  вагою  $490$  Н (рис. 17.11). Східчастий шків  $2$  має радіуси  $r_2 = 10$  см і  $R_2 = 40$  см. Пас вважати нерозтяжним, тертям знехтувати.

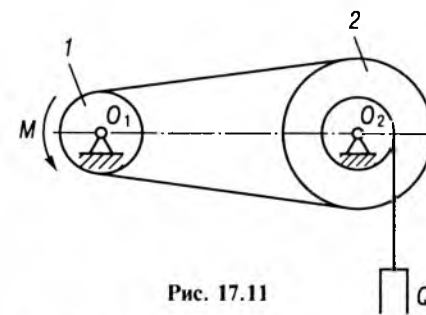


Рис. 17.11

Відповідь:  $M = 24,5$  Н·м.

**17.5.** Повзун  $B$  може пересуватись вздовж стрижня  $AC$ , вісь обертання якого проходить через точку  $A$  (рис. 17.12). З повзунком з'єднується за допомогою шарніра стрижень  $BD$ , вісь обертання якого проходить через точку  $D$ . Визначити величину сили  $P_2$ , прикладеної перпендикулярно до стрижня  $BD$  у його середині, при якій система перебуває у рівновазі. До точки  $C$  стрижня  $AC$  прикладена вертикальна сила  $P_1 = 50$  Н,  $AB = 2$   $BC$ .

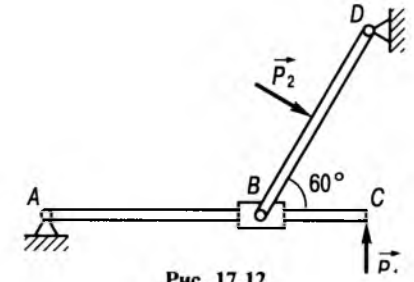


Рис. 17.12

Відповідь:  $P_2 = 75$  Н.

**17.6.** Визначити зусилля  $Q$  затискання деталі  $1$  клиновим підсилювачем (рис. 17.13), якщо задано зусилля  $P = 100$  Н приводу  $3$  та кут  $\alpha = 30^\circ$ . Плечі важеля  $2$  дорівнюють  $a = 0,3$  м та  $b = 0,15$  м.

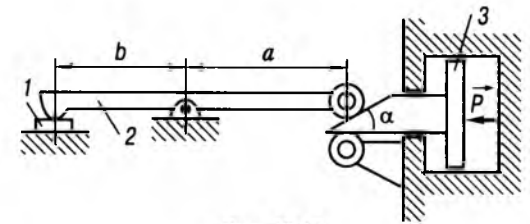


Рис. 17.13

Відповідь:  $Q = 346,4$  Н.

**17.7.** Пристрій для автоматичного зварювання труб (рис. 17.14) має затискач, який приводиться в дію від пневмоциліндра  $1$ . Визначити силу  $N$  тиску затискача  $3$  на заготовку труби  $2$ , якщо  $\alpha = 30^\circ$ ,  $OA = 0,5$  м,  $OB = 1$  м. Діаметр пневмоциліндра  $0,15$  м, тиск у пневмоциліндрі  $5$  атм ( $1$  атм =

$= 98 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2$ ). Визначити також реакцію підшипника  $O$ .

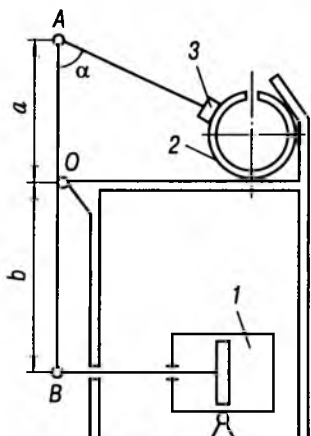


Рис. 17.14

Відповідь:  $N = 20 \text{ кН}$ ;  $X_O = -25,95 \text{ Н}$ ,  $Y_O = -10 \text{ кН}$ .

17.8. Механізм складається з чотирьох невагомих стрижнів, з'єднаних між собою шарнірами так, як показано на рис. 17.15. Вісь обертання стрижня  $OA$  проходить через точку  $O$ , кінець  $B$  стрижня  $AB$  з'єднано шарніром з повзунком, який може рухатись вздовж вертикалі. Точка кріплення шарніра  $D$  до стрижня  $AB$  розташована на відстані  $30 \text{ см}$  від точки  $B$ . Точка кріплення шарніра  $E$  до стрижня  $OA$  розташована на відстані  $10 \text{ см}$

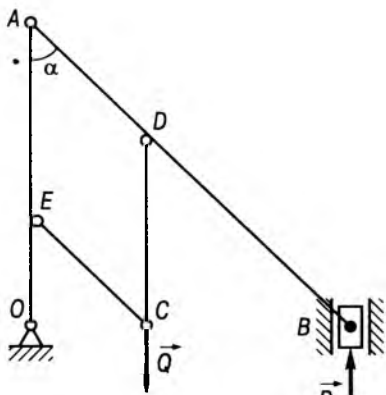


Рис. 17.15

від точки  $O$ . Визначити співвідношення між вертикальними силами  $P$  та  $Q$ , при якому механізм зрівноважений, якщо  $AD = EC = = 15 \text{ см}$ ,  $AE = DC = 20 \text{ см}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .

Відповідь:  $Q = 3P$ .

17.9. Визначити масу тіла  $1$  та момент пари сил  $M$ , при яких механічна система, зображена на рис. 17.16, зрівноважена. Маса тіла  $5$  дорівнює  $2 \text{ кг}$ , радіуси невагомих блоків  $3$  і  $4$  та зовнішній радіус невагомго східчастого блока  $2$  дорівнюють  $0,5 \text{ м}$ . Внутрішній радіус блока  $2$  дорівнює  $0,25 \text{ м}$ .

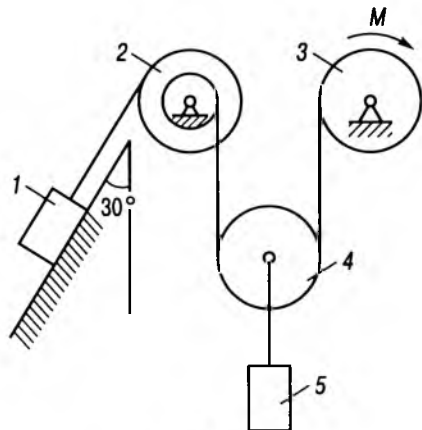


Рис. 17.16

Відповідь:  $m_1 = 1 \text{ кг}$ ,  $M = 4,9 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

17.10. Визначити момент пари сил, яка виникає у жорсткому зашемленні  $A$  балки, що складається з трьох частин  $AB$ ,  $BD$  та  $DE$  (рис. 17.17). Опори  $C$  та  $E$  розташовані на котках. До балки прикладено розподілене навантаження інтенсивністю  $q = 3 \text{ кН/м}$ , пара сил з моментом  $M = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}$  та зосе-

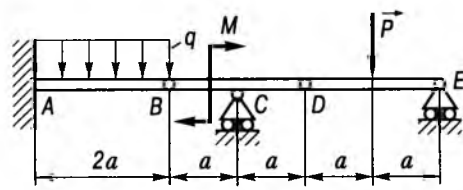


Рис. 17.17

реджена сила  $P = 2 \text{ кН}$ . Прийняти  $a = 1 \text{ м}$ . Масою балки знехтувати.

Відповідь:  $M_A = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

17.11. Визначити реакцію рухомої опори  $S$  складеної балки, розглянутої в задачі 17.10.

Відповідь:  $Y_C = 6 \text{ кН}$ .

17.12. Рама складається з двох частин  $AB$  та  $BCD$ , з'єднаних між собою шарніром  $B$  (рис. 17.18). Опора  $A$  розташована на котках, частина  $BCD$  жорстко зашемлена в перетині  $D$ . До балки  $AB$  прикладено під кутом  $\alpha = 60^\circ$  сила  $P_1 = 5 \text{ кН}$ , до частини  $BCD$  — сила  $P_2 = 2 \text{ кН}$ . Визначити реакцію жорсткого зашемлення в точці  $D$ . Масою рами знехтувати, прийняти  $a = 0,5 \text{ м}$ .

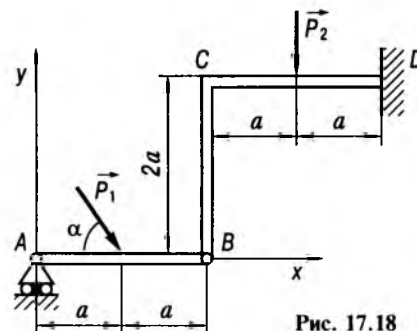


Рис. 17.18

Відповідь:  $M_A = -5,66 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $X_A = -2,5 \text{ кН}$ ,  $Y_A = 4,16 \text{ кН}$ .

17.13. Конструкція складається з двох невагомих стрижнів  $AB$  та  $BC$  однакової дов-

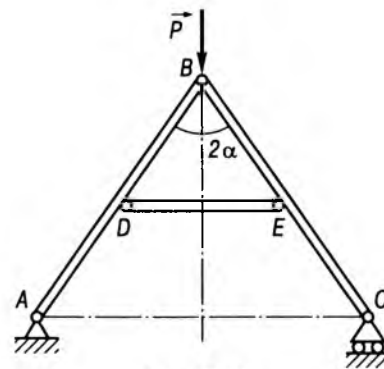


Рис. 17.19

жини, з'єднаних між собою шарніром  $B$ , та невагомго стрижня  $DE$  (рис. 17.19). Кінець стрижня  $DE$  закріплено за допомогою шарнірів в середині стрижнів  $AB$  та  $BC$ . До шарніра  $B$  прикладено вертикальну силу  $P$ . Кут при вершині  $B$  у трикутнику  $ABC$  дорівнює  $2\alpha$ . Визначити зусилля  $S$  у стрижні  $DE$  в залежності від кута  $\alpha$ .

Відповідь:  $S = P \text{tg} \alpha$ .

17.14. До плоскої ферми прикладені вертикальна сила  $P_1$  та горизонтальна сила  $P_2$  (рис. 17.20). Визначити зусилля в стрижнях  $BK$  і  $BE$  та їх напружений стан.

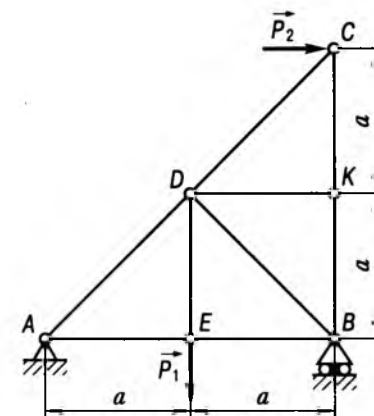


Рис. 17.20

Відповідь:  $S_{BE} = 0,5P_1$ ,  $S_{BK} = P_2$ ; стрижень  $BE$  розтягується, а  $BK$  стискається.

17.15. В умовах задачі 17.14 визначити зусилля в стрижні  $BD$  та його напружений стан.

Відповідь:  $S_{BD} = 0,5\sqrt{2}P_1$ ; стрижень  $BD$  стискається.

## § 17.2. ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА—ЛАГРАНЖА

### 17.2.1. Короткі теоретичні відомості

Об'єднуючи принцип Д'Аламбера та принцип можливих переміщень, дістанемо принцип Д'Аламбера—Лагранжа: під час руху системи матеріальних точок, що підпорядковані утримувальним ідеальним в'язям, сума

елементарних робіт активних сил і сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad (17.4)$$

де  $\vec{F}_i$  — рівнодійна активних сил, прикладених до  $i$ -ї точки системи ( $i = 1, 2, \dots, n$ );  $\vec{\Phi}_i = -m_i \vec{w}_i$  — сила інерції  $i$ -ї точки;  $m_i$  та  $\vec{w}_i$  — маса та прискорення  $i$ -ї точки;  $\delta \vec{r}$  — можливе переміщення  $i$ -ї точки.

Рівняння (17.4) називають загальним рівнянням динаміки. Векторному рівнянню (17.4) відповідає рівняння в скалярній формі:

$$\sum_{i=1}^n \left[ (F_{ix} - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (F_{iy} - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (F_{iz} - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i \right] = 0, \quad (17.5)$$

де  $F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}$  — проєкції активних сил на осі декартової системи координат  $Oxyz$ ;  $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$  — проєкції прискорення  $i$ -ї точки системи;  $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$  — проєкції можливих переміщень точки на вибрані осі координат.

Загальне рівняння динаміки для більшості задач дає змогу визначити закон руху системи не визначаючи реакцій в'язей. При необхідності останні можна визначити після встановлення закону руху системи, застосовуючи, наприклад, принцип Д'Аламбера.

Методика розв'язання задач з використанням загального рівняння динаміки може бути такою:

1) визначаємо об'єкт дослідження, тобто тіло або систему тіл, до аналізу руху яких застосовується загальне рівняння динаміки;

2) визначаємо число степенів вільності системи. Це можна зробити шляхом накладання додаткових в'язей (число степенів вільності дорівнює числу додатково накладених в'язей, які зупиняють механічну систему) або математично, складаючи рівняння в'язей;

3) визначаємо активні сили, які діють на систему, і зображуємо їх графічно;

4) проводимо аналіз в'язей. Реакції ідеальних в'язей не входять у загальне рівняння динаміки. Якщо серед в'язей, які обмежують рух системи, є неідеальні, то їх реакції (наприклад, сила тертя) відносять до активних сил. Графічно сили тертя зображуються після того, як зроблено припущення про напрямок руху системи;

5) робимо припущення про напрямок руху й прискорень точок системи та, виходячи з кінематичних міркувань, знаходимо зв'язок між прискореннями;

6) відповідно до вибраного напрямку прискорень зображуємо сили інерції, умовно прикладаючи їх до точок системи. Для твердих тіл систему сил інерції зводимо до головного вектора системи елементарних сил інерції і пари сил, момент якої дорівнює головному моменту сил інерції елементів тіла відносно вибраного центра зведень;

7) в поточний момент часу умовно зупиняємо систему і надаємо її точкам можливих переміщень;

8) складаємо загальне рівняння динаміки як суму елементарних робіт активних сил, головних векторів сил інерції та їх моментів на відповідних можливих переміщеннях;

9) встановлюємо зв'язок між можливими переміщеннями точок системи. Це можна зробити виходячи з кінематичних міркувань або аналітично, використовуючи рівняння в'язей. Після вибору незалежних можливих переміщень із загального рівняння динаміки виключаємо залежні можливі переміщення. Одночасно вибираємо незалежні прискорення точок системи і виключаємо залежні;

10) у загальному рівнянні динаміки збираємо коефіцієнти при незалежних можливих переміщеннях і прирівнюємо ці коефіцієнти до нуля. Отже, приходимо до диференціальних рівнянь руху механічної системи, яка розглядається;

11) з одержаних рівнянь знаходимо невідомі величини. Задача визначення закону руху системи зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь руху. Якщо визначенню підлягають прискорення точок системи, то задача розв'язується алгебраїчно.

### 17.2.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 17.7.** Два вантажі  $A$  та  $C$  вагою відповідно  $P_A$  та  $P_C$  з'єднані невагомою нерозтяжною мотузкою, перекинutoю через блок  $B$  з нерухомою віссю обертання (рис. 17.21, а). Вантаж  $A$  рухається по гладкій горизонтальній площині, вантаж  $C$  — вертикально. Беручи до уваги, що вага однорідного блока  $B$  дорівнює  $P_B$ , визначити прискорення вантажів і натяг мотузки в перерізі  $ab$ .

Розв'язування. Об'єкт дослідження даної задачі — система трьох тіл  $A, B$  та  $C$ . Накладання однієї додаткової в'язі зупиняє дану систему, тобто вона має один степінь

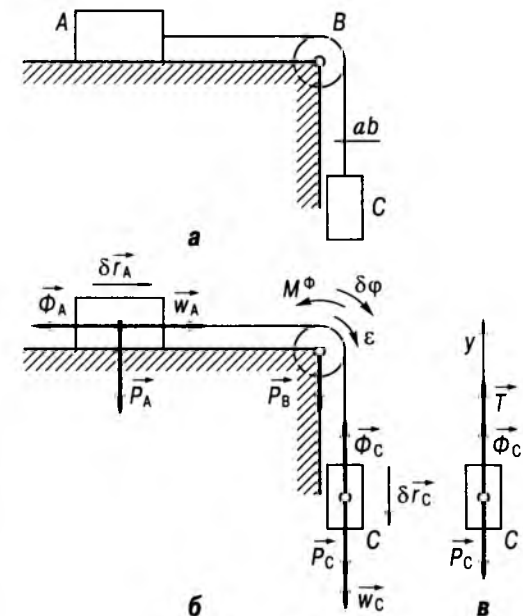


Рис. 17.21

вільності. Зображуємо графічно сили ваги тіл системи  $\vec{P}_A, \vec{P}_B$  та  $\vec{P}_C$  (рис. 17.21, б).

В'язями в даній задачі є горизонтальна площина, мотузка та вісь блока. Оскільки площина гладка, мотузка невагома, абсолютно гнучка і нерозтяжна, а на осі блока тертя відсутнє, то їх можна вважати ідеальними в'язями. Реакції цих в'язей до уваги не беруться і на рисунку їх не зображують.

Припустимо, що прискорення  $\vec{w}_C$  вантажу  $C$  спрямоване донизу, а прискорення тіла  $A$  — вправо. Тоді блок  $B$  здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі за стрілкою годинника. Його кутове прискорення позначимо  $\epsilon$  і на рисунку покажемо дуговою стрілкою, яка відповідає напрямку вектора  $\vec{\epsilon}$  вздовж осі повороту блока від читача.

Зобразимо на рисунку сили інерції. Тіла  $A$  та  $C$  здійснюють поступальний рух, система сил інерції елементарних мас кожного з цих тіл зводиться до рівнодійних

$$\vec{\Phi}_A = -\frac{P_A}{g} \vec{w}_A, \quad \vec{\Phi}_C = -\frac{P_C}{g} \vec{w}_C.$$

Вектори сил інерції (рис. 17.21, б) зображаємо з початком у центрі мас відповідних тіл з напрямками, протилежними до прискорень.

Величина сил інерції

$$\Phi_A = \frac{P_A}{g} w_A, \quad \Phi_C = \frac{P_C}{g} w_C. \quad (1)$$

Система сил інерції блока  $B$  зводиться до пари сил з моментом

$$\vec{M}^\Phi = -I_B \vec{\epsilon}, \quad (2)$$

де  $I_B$  — осьовий момент інерції однорідного блока,

$$I_B = \frac{P_B R^2}{2g};$$

$R$  — радіус блока.

Зображуємо момент сил інерції блока  $B$  дуговою стрілкою (рис. 17.21, б), яка охоплює блок і відповідає вектору моменту, проти-

лежному вектору кутового прискорення  $\bar{\epsilon}$  згідно з формулою (2).

Момент сил інерції блока  $B$

$$M^\Phi = \frac{P_B R^2}{2g} \epsilon. \quad (3)$$

Умовно зупинимо систему в поточний момент часу і надамо їй з цього положення можливе переміщення. Якщо можливе переміщення  $\delta \vec{r}_C$  вантажу  $C$  спрямоване вертикально донизу, то блок  $B$  здійснить обертальне можливе переміщення на кут  $\delta \varphi$  за стрілкою годинника, а тіло  $A$  — поступальне можливе переміщення  $\delta \vec{r}_A$  горизонтально вправо (рис. 17.21, б).

Складаємо загальне рівняння динаміки. Запишемо алгебраїчну суму елементарних робіт активних сил та сил інерції на можливих переміщеннях їх точок прикладання та прирівнюємо їх до нуля:

$$\bar{\Phi}_A \delta \vec{r}_A + \bar{M}^\Phi \delta \varphi + \bar{P}_C \delta \vec{r}_C + \bar{\Phi}_C \delta \vec{r}_C = 0.$$

Тут через  $\delta \varphi$  позначено вектор, напрямком якого збігається з напрямком вектора кутової швидкості повороту блока  $B$  на кут  $\delta \varphi$ .

З урахуванням напрямків векторів отримуємо

$$-\Phi_A \delta r_A - M^\Phi \delta \varphi + P_C \delta r_C - \Phi_C \delta r_C = 0. \quad (4)$$

Оскільки механічна система має один степінь вільності, то тільки одне можливе переміщення буде незалежним. Зрозуміло, що серед прискорень незалежним буде також одне.

З умови нерозтяжності мотузки випливає, що швидкості вантажів  $v_A = v_C = v$  пов'язані з кутовою швидкістю  $\omega$  блока  $B$  співвідношенням

$$v = \omega R. \quad (5)$$

Відповідно можливі переміщення та прискорення вантажів також однакові:

$$\delta r_A = \delta r_C = \delta r, \quad w_A = w_C = w.$$

Диференціюючи вираз (5) за часом, отримуємо формулу зв'язку між  $\epsilon$  та  $w$ :

$$\epsilon = \frac{w}{R}. \quad (6)$$

Із співвідношення (5) можна виразити також  $\delta \varphi$  через  $\delta r$ . Для цього запишемо швидкості як відношення диференціалів:

$$v = \frac{dr}{dt} \quad \text{і} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \text{підставимо їх у вираз (5) і}$$

помножимо на диференціал часу  $dt$ . Отримуємо

$$dr = R d\varphi.$$

Оскільки в'язі стаціонарні, дійсні переміщення  $dr$  та  $d\varphi$  є одними з можливих, тобто можна записати

$$\delta \varphi = \frac{\delta r}{R}. \quad (7)$$

Тоді загальне рівняння динаміки (4) після підстановки формул (1), (3), (6), (7) набуває вигляду

$$\delta r \left( P_C - \frac{2P_A + P_B + 2P_C}{2g} w \right) = 0.$$

Оскільки можливе переміщення  $\delta r$  є довільним, тобто  $\delta r \neq 0$ , нулю дорівнює вираз в дужках:

$$P_C - \frac{2P_A + P_B + 2P_C}{2g} w = 0.$$

З останнього співвідношення визначимо прискорення

$$w = \frac{2P_C}{2P_A + P_B + 2P_C} g.$$

Для визначення натягу мотузки  $T$  в перерізі  $ab$  розглянемо окремо вантаж  $C$  та застосуємо до нього метод кінестатики (рис. 17.21, в). Шуканий натяг розглядатимемо згідно з аксіомою про звільнення від в'язей.

Зображуємо силу інерції  $\bar{\Phi}_C$  тіла  $C$ , що спрямована протилежно прискоренню  $\bar{w}_C$ , за методом кінестатики

$$\bar{P}_C + \bar{T} + \bar{\Phi}_C = 0.$$

Спроектувавши це рівняння на вертикальну вісь, отримуємо співвідношення

$$-P_C + T + \Phi_C = 0,$$

звідки

$$T = P_C - \Phi_C = P_C \left( 1 - \frac{w}{g} \right).$$

З урахуванням виразу для прискорення запишемо

$$T = P_C \frac{2P_A + P_B}{2P_A + P_B + 2P_C}.$$

**Приклад 17.8.** До вантажу  $A$  вагою  $P_A$  прикріплено кінець тонкої нерозтяжної нитки (рис. 17.22, а), яку перекинуто через блок  $B$  вагою  $P_B$  і з'єднано з віссю  $C$  котка  $D$  радіуса  $R$  вагою  $P_D$ . Коток  $D$  котиться без ковзання вздовж похилої площини, яка складає кут  $\alpha$  з горизонтом.

Визначити прискорення вантажу  $A$ , якщо коефіцієнт тертя кочення котка дорівнює  $f_k$ . Блок  $B$  та коток  $D$  вважати однорідними круглими дисками. Вагою нитки знехтувати.

Розв'язування. Об'єкт дослідження даної задачі — система трьох тіл  $A$ ,  $B$  та  $D$ . Дана система має один степінь вільності.

Зображуємо сили ваги тіл системи  $\bar{P}_A$ ,  $\bar{P}_B$ ,  $\bar{P}_D$  (рис. 17.22, б).

В'язями для механічної системи є невагома нерозтяжна нитка, вісь блока  $B$  і похила площина. Вісь блока та нитка є ідеальними в'язями, похила площина не є ідеальною в'яззю. Проведемо її аналіз.

При коченні котка  $D$  по похилій площині внаслідок деформації котка і площини їх дотик відбувається не в одній точці, а вздовж невеликої дуги. Реакція, яка підраховується вздовж цієї дуги, розкладається на нормальну та дотичну складові. Дотична складова реакції є сила тертя  $F_{\text{тр}}$ . Нормальна складова реакції  $N_D$  виявляється зміщеною відносно центра тяжіння  $C$  котка  $D$  в напрямку руху на величину  $f_k$ , яку називають коефіцієнтом тертя кочення (рис. 17.22, б). Тоді нормальна складова реакції  $N_D$  похилої площини та проекція сили ваги на напрям нормалі до цієї площини утворюють пару сил з плечем  $f_k$ . Момент цієї пари сил  $M_D^K$  називають моментом тертя кочення (тертя другого роду):

$$M_D^K = f_k N_D = f_k P_D \cos \alpha. \quad (1)$$

На рисунку умовно позначимо момент тертя кочення дуговою стрілкою, яка відповідає вектору  $M_D^K$ , напрямленому до читача.

Оскільки коток  $D$  котиться по похилій площині без проковзування, значення сили тертя  $F_{\text{тр}}$  невідоме і не перевищує гранич-

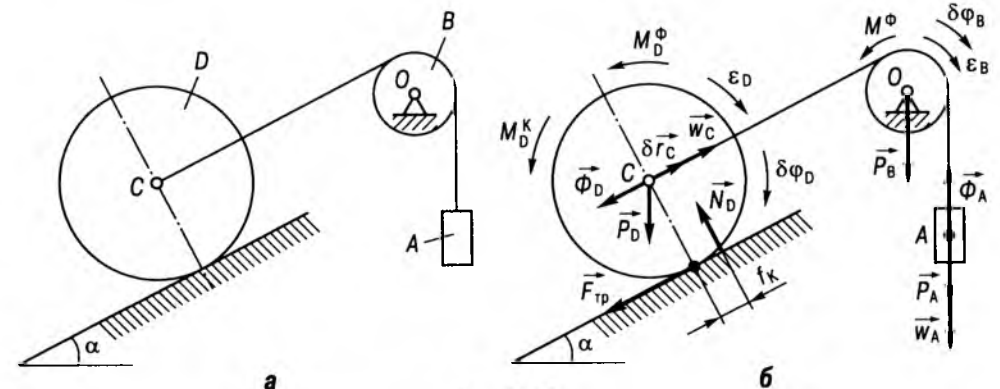


Рис. 17.22

ного значення  $fN_D$ , якого сила тертя набуває при проковзуванні, тобто виконується умова  $F_{\text{тр}} \leq fN_D = fP_D \cos \alpha$ , де  $f$  — коефіцієнт тертя ковзання.

Отже, віднесемо силу тертя  $F_{\text{тр}}$  і момент тертя кочення  $\vec{M}_D^k$  до активних сил.

Вважаємо, що прискорення  $\vec{w}_A$  вантажу  $A$  спрямоване донизу, тоді прискорення  $\vec{w}_C$  точки  $C$  — вздовж похилої площини вгору. Кутове прискорення  $\epsilon_B$  блока  $B$  позначимо на рисунку дуговою стрілкою (вектор  $\vec{\epsilon}_B$  напрямлений вздовж осі повороту блока  $B$  від читача). Кутове прискорення  $\vec{\epsilon}_D$  котка  $D$  узгоджується з напрямком прискорення точки  $C$ , оскільки коток котиться без проковзування вздовж похилої площини. Вектор  $\vec{\epsilon}_D$  перпендикулярний до площини рисунка і напрямлений від читача. Умовно позначимо кутове прискорення  $\epsilon_D$  котка  $D$  на рисунку дуговою стрілкою (рис. 17.22, б).

Визначаємо сили інерції. Тіло  $A$  здійснює поступальний рух, тому система сил інерції зводиться до рівнодійної

$$\vec{\Phi}_A = -\frac{P_A}{g} \vec{w}_A.$$

Сили інерції блока  $B$ , який здійснює оберտальний рух, зводяться до пари сил з моментом

$$\vec{M}_B^\Phi = -I_B \vec{\epsilon}_B,$$

де  $I_B = \frac{P_B R_B^2}{2g}$  — осьовий момент інерції однорідного блока  $B$ ;  $R_B$  — радіус блока  $B$ .

Момент сил інерції блока  $B$

$$M_B^\Phi = \frac{P_B R_B^2}{2g} \epsilon_B. \quad (2)$$

Коток  $D$  здійснює плоскопаралельний рух. Система сил інерції елементів цього тіла при виборі центра зведення в точці  $C$  зводиться до головного вектора

$$\vec{\Phi}_D = -\frac{P_D}{g} \vec{w}_C$$

та пари сил, момент якої дорівнює головному моменту сил інерції відносно точки  $C$ :

$$\vec{M}_D^\Phi = -I_D \vec{\epsilon}_D,$$

де  $I_D = \frac{P_D R^2}{2g}$ .

Момент сил інерції котка

$$M_D^\Phi = \frac{P_D R^2}{2g} \epsilon_D. \quad (3)$$

Вектори  $\vec{\Phi}_A$  та  $\vec{\Phi}_D$  зобразимо на рисунку напрямленими протилежно відповідним прискоренням  $\vec{w}_A$  та  $\vec{w}_C$  (рис. 17.22, б). Вказані моменти

$$\Phi_A = \frac{P_A}{g} w_A, \quad \Phi_D = \frac{P_D}{g} w_C. \quad (4)$$

Моменти пар сил інерції  $\vec{M}_B^\Phi$  та  $\vec{M}_D^\Phi$  зобразимо на рисунку умовно дуговими стрілками.

Уявно зупинимо систему в довільний момент часу і надамо їй з цього положення можливе переміщення. Якщо можливе переміщення  $\delta r_A$  тіла  $A$  спрямоване донизу, то блок  $B$  здійснює оберտальне можливе переміщення на кут  $\delta \phi_B$  за стрілкою годинника, а точка  $C$  тіла  $D$  — можливе переміщення  $\delta r_C$ , тіло  $D$  — оберտальне можливе переміщення  $\delta \phi_D$  за стрілкою годинника.

Складаємо загальне рівняння динаміки у такій формі:

$$\vec{P}_A \delta \vec{r}_A + \vec{\Phi}_A \delta \vec{r}_A + \vec{M}_B^\Phi \delta \phi_B + \vec{P}_D \delta \vec{r}_C + \vec{\Phi}_D \delta \vec{r}_C + \vec{M}_D^\Phi \delta \phi_D + \vec{M}_D^k \delta \phi_D = 0. \quad (5)$$

Тут  $\delta \vec{\phi}_B$  та  $\delta \vec{\phi}_D$  — вектори, які співнаправлені з векторами кутових швидкостей повороту тіл  $B$  та  $D$  на кути  $\delta \phi_B$  та  $\delta \phi_D$  відповідно.

Робота сили тяжіння  $P_B$  дорівнює нулю внаслідок того, що точка її прикладання нерухома.

Оскільки у випадку стаціонарних в'язей точка прикладання сили тертя  $F_{\text{тр}}$  збігається

з миттєвим центром швидкостей котка, її робота дорівнює нулю.

З урахуванням напрямків векторів з рівняння (5) отримаємо

$$P_A \delta r_A - \Phi_A \delta r_A - M_B \delta \phi_B - P_D \delta r_C \sin \alpha - \Phi_D \delta r_C - M_D^\Phi \delta \phi_D - M_D^k \delta \phi_D = 0.$$

Враховуючи вирази (1)–(4) для сил інерції та моментів пар сил інерції, одержуємо

$$P_A \delta r_A - \frac{P_A}{g} w_A \delta r_A - \frac{P_B R_B^2}{2g} \epsilon_B \delta \phi_B - P_D \delta r_C \sin \alpha - \frac{P_D}{g} w_C \delta r_C - \frac{P_D R^2}{2g} \epsilon_D \delta \phi_D - f_k P_D \delta \phi_D \cos \alpha = 0. \quad (6)$$

Вважатимемо можливе переміщення тіла  $A$  незалежним. Оскільки нитка нерозтяжна і не проковзує відносно блока  $B$ , швидкості точок  $A$  та  $C$  однакові за величиною і пов'язані з кутовою швидкістю блока  $B$  співвідношенням  $v_A = v_C = \omega_B R_B$ . Кутова швидкість  $\omega_D$  котка з урахуванням того, що точка дотику котка до похилої площини є миттєвим центром швидкостей, виражається через швидкість центра котка  $v_C$  так:  $\omega_D = \frac{v_C}{R}$ . Диференціювання двох останніх співвідношень за часом дає змогу встановити зв'язок між прискореннями:

$$w_A = w_C, \quad \epsilon_B = \frac{w_A}{R_B}, \quad \epsilon_D = \frac{w_C}{R} = \frac{w_A}{R}. \quad (7)$$

На підставі співвідношень між швидкостями, записуючи їх як відношення диференціалів і враховуючи, що у випадку стаціонарних в'язей дійсні переміщення є підмножиною можливих, замінімо значок диференціала  $d$  на значок варіації  $\delta$ . Отримаємо

$$\delta r_A = \delta r_C = \delta r, \quad \delta \phi_B = \frac{\delta r}{R_B}, \quad \delta \phi_D = \frac{\delta r}{R}. \quad (8)$$

Підставимо  $\delta r_A, \delta \phi_B, \delta r_C, \delta \phi_D, w_C, \epsilon_B$  з виразів (7) та (8) у загальне рівняння динаміки (6):

$$\delta r (P_A - P_D \sin \alpha - f_k \frac{1}{R} P_D \cos \alpha - \frac{2P_A + P_B + 3P_D}{2g} w_A) = 0.$$

Оскільки  $\delta r \neq 0$ , отримаємо

$$P_A - P_D \sin \alpha - f_k \frac{1}{R} P_D \cos \alpha - \frac{2P_A + P_B + 3P_D}{2g} w_A = 0.$$

З останнього співвідношення визначаємо прискорення вантажу  $A$ :

$$w_A = \frac{P_A - P_D \sin \alpha - f_k \frac{1}{R} P_D \cos \alpha}{2P_A + P_B + 3P_D} 2g.$$

**Приклад 17.9.** На однорідний блок  $I$  радіуса  $R_1$  вагою  $P_1$  з нерухомою віссю оберտання намотана невагома нерозтяжна нитка (рис. 17.23, а). Нитка з'єднується нижнім кінцем з віссю оберտання рухомого однорідного блока  $2$  радіусом  $R_2$  вагою  $P_2$ . На блок  $2$  намотана невагома нерозтяжна нитка, яка з'єднується з тілом  $3$  вагою  $P_3$ . Визначити кутове прискорення блока  $I$ , якщо до нього прикладено пару сил з моментом  $M$ .

Розв'язування. Об'єктом дослідження даної задачі є система трьох тіл, з'єднаних між собою нерозтяжними нитками.

Накладаючи нові в'язі, визначаємо, що дана механічна система має два степеня вільності. Дійсно, для повного зупинення системи треба накласти одну в'язь, наприклад, на блок  $1$  (тобто зупинити його) та другу в'язь на тіло  $3$ .

Визначимо активні сили і покажемо їх на рисунку. Такими силами є сили ваги тіл системи  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ , які зображуємо в центрах ваги тіл (рис. 17.23, б), а також пара сил з моментом  $M$ , що прикладається до блока  $1$ .



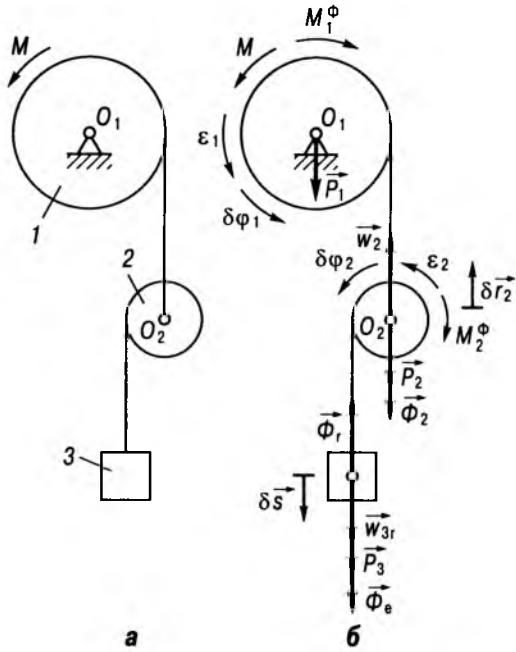


Рис. 17.23

В'язями для даної механічної системи є вісь блока 1 та нитка, яка з'єднує тіла між собою. Оскільки тертя на осі блока відсутнє, а нитка невагома та нерозтяжна, вказані в'язі вважаємо ідеальними.

Припустимо, блок 1 здійснює обертальний рух проти ходу стрілки годинника. Вектор кутового прискорення  $\vec{\epsilon}_1$  блока 1 вважаємо напрямленим вздовж осі блока до читача і умовно зображуємо на рисунку дуговою стрілкою (рис. 17.23, б).

Блок 2 здійснює плоскопаралельний рух, який можна подати як сукупність поступального руху разом з полюсом, що збігається з точкою  $O_2$ , та обертального руху навколо осі, що проходить через вибраний полюс. Оскільки вісь повороту блока 2 зв'язана нерозтяжною ниткою з блоком 1, прискорення  $\vec{w}_2$  точки  $O_2$ , яка належить цій осі, спрямоване вгору. Припустимо, що тіло 3 відносно осі блока 2 рухається вниз. Тоді кутове прискорення блока 2, яке позначимо  $\vec{\epsilon}_2$ , спрямо-

ване до читача і на рисунку умовно зображується дуговою стрілкою.

Тіло 3 здійснює складний рух, який можна подати сукупністю двох поступальних рухів: поступального руху разом з віссю блока 2 (назвемо його переносним) та поступального руху відносно осі блока 2. Тоді абсолютне прискорення  $\vec{w}_3$  тіла 3 запишемо у формі

$$\vec{w}_3 = \vec{w}_e + \vec{w}_r,$$

де  $\vec{w}_e = \vec{w}_2$  та  $\vec{w}_r$  — відповідно переносне та відносне прискорення тіла 3.

Система сил інерції блока 1, який здійснює обертальний рух, зводиться до пари сил з моментом

$$\vec{M}_1^\Phi = -I_1 \vec{\epsilon}_1,$$

де  $I_1 = \frac{m_1 R_1^2}{2} = \frac{P_1 R_1^2}{2g}$  — осьовий момент інерції однорідного блока 1;  $R_1$  — радіус блока 1.

Величина момента сил інерції блока 1

$$M_1^\Phi = \frac{P_1 R_1^2}{2g} \epsilon_1. \quad (1)$$

Система сил інерції блока 2 при виборі центра зведень у точці  $O_2$  зводиться до головного вектора сил інерції

$$\vec{\Phi}_2 = -m_2 \vec{w}_2 = -\frac{P_2}{g} \vec{w}_2$$

та пари сил, момент якої дорівнює головному моменту сил інерції відносно точки  $O_2$ :

$$\vec{M}_2^\Phi = -I_2 \vec{\epsilon}_2.$$

Оскільки блок однорідний, то

$$I_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2} = \frac{P_2 R_2^2}{2g}.$$

Вектор  $\vec{\Phi}_2$  зображуємо з початком у центрі мас  $O_2$  блока 2, вектор  $\vec{M}_2^\Phi$  показуємо умовно дуговою стрілкою, яка охоплює блок 2 (рис. 17.23, б).

Головний вектор сил інерції та момент сил інерції блока 2 мають величину

$$\Phi_2 = \frac{P_2}{g} w_2, \quad M_2^\Phi = \frac{P_2 R_2^2}{2g} \epsilon_2. \quad (2)$$

Систему сил інерції тіла 3 подамо як суму двох доданків:

$$\vec{\Phi}_3 = \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_r, \quad (3)$$

де перший доданок відповідає переносному поступальному руху —

$$\vec{\Phi}_e = -m_3 \vec{w}_2 = -\frac{P_3}{g} \vec{w}_2, \quad (4)$$

а другий доданок — відносному:

$$\vec{\Phi}_r = -m_3 \vec{w}_r = -\frac{P_3}{g} \vec{w}_r. \quad (5)$$

Відповідні вектори зображуємо з початком у центрі мас тіла 3.

Уявно зупинимо систему в деякий момент часу і надамо їй з цього положення можливих переміщень.

Блоку 1 надамо обертальне можливе переміщення  $\delta\phi_1$  проти ходу стрілки годинника. Тоді можливе переміщення  $\delta\vec{r}$  осі блока 2 спрямоване вгору. Відносне можливе переміщення  $\delta\phi_2$  блока 2 буде здійснюватись проти ходу стрілки годинника (рис. 17.23, б). Зазначимо, що абсолютне можливе переміщення тіла 3 складається з можливого переміщення  $\delta\vec{r}$ , яке спричинює переносний рух, та відносного переміщення  $\delta\vec{s}$ .

Оскільки механічна система має два степені вільності, тільки два можливих переміщення є незалежними. Такими вважатимемо переміщення  $\delta\phi_1$  та  $\delta\vec{s}$ . Серед прискорень незалежними будуть також два прискорення. За такі виберемо кутове прискорення  $\epsilon_1$  блока 1 та відносне прискорення  $w_r$  тіла 3. У загальному рівнянні динаміки виразитимемо інші прискорення через вказані.

Подальший розв'язок задачі проведемо з урахуванням того, що можливі переміщення  $\delta\phi_1$  та  $\delta\vec{s}$  є довільними. Покладемо спочатку, що  $\delta\phi_1 \neq 0$  та  $\delta\vec{s} = 0$  і складемо загальне рівняння динаміки. Потім складемо

загальне рівняння динаміки для випадку, коли  $\delta\phi_1 = 0$  та  $\delta\vec{s} \neq 0$ .

Отже, нехай  $\delta\phi_1 \neq 0$  та  $\delta\vec{s} = 0$ .

Загальне рівняння динаміки у векторній формі набуває вигляду

$$\vec{M} \delta\vec{\phi}_1 + \vec{M}_1^\Phi \delta\vec{\phi}_1 + \vec{P}_2 \delta\vec{r} + \vec{\Phi}_2 \delta\vec{r} + \vec{P}_3 \delta\vec{r} + \vec{\Phi}_3 \delta\vec{r} = 0,$$

де  $\delta\vec{\phi}_1$  — вектор, напрямком якого збігається з напрямком вектора кутової швидкості повороту блока 1 на кут  $\delta\phi_1$ . З урахуванням напрямків векторів і виразу (3) отримаємо

$$M \delta\phi_1 - M_1^\Phi \delta\phi_1 - P_2 \delta r - \Phi_2 \delta r - P_3 \delta r - \Phi_e \delta r + \Phi_r \delta r = 0. \quad (6)$$

Встановимо зв'язок між можливими переміщеннями та прискореннями. Швидкість  $v_2$  осі повороту  $O_2$  блока 2 та кутова швидкість  $\omega_1$  блока 1 внаслідок нерозтяжності нитки задовольняють вираз

$$v_2 = \omega_1 R_1, \quad (7)$$

де  $R_1$  — радіус блока 1.

Диференціюючи цей вираз за часом, отримуємо

$$w_2 = \epsilon_1 R_1. \quad (8)$$

Запишемо швидкості у виразі (7) як відношення диференціалів, домножимо його на  $dt$  і отримаємо співвідношення між дійсними переміщеннями:  $dr = R_1 d\phi_1$ . Враховуючи, що у випадку стаціонарних в'язей дійсні переміщення є підмножиною можливих, замінюємо значок  $d$  на  $\delta$ . Зв'язок між можливими переміщеннями визначається виразом

$$\delta r = R_1 \delta\phi_1. \quad (9)$$

Підставимо  $M_1^\Phi$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_e$  і  $\Phi_r$  з виразів (1), (2), (4), (5) у загальне рівняння динаміки (6) та врахуємо формули (8), (9). Дістанемо

$$\left( M - \frac{P_1 R_1^2}{2g} \epsilon_1 - P_2 R_1 - \frac{P_2}{g} \epsilon_1 R_1^2 - P_3 R_1 - \frac{P_3}{g} \epsilon_1 R_1^2 + \frac{P_3}{g} w_r R_1 \right) \delta\phi_1 = 0.$$

Оскільки  $\delta\phi_1 \neq 0$ , нулю дорівнюватиме вираз у дужках:

$$M - \frac{P_1 R_1^2}{2g} \varepsilon_1 - P_2 R_1 - \frac{P_2}{g} \varepsilon_1 R_1^2 - P_3 R_1 - \frac{P_3}{g} \varepsilon_1 R_1^2 + \frac{P_3}{g} w_r R_1 = 0.$$

Після нескладних перетворень дістанемо рівняння

$$\left( \frac{P_1}{2} + P_2 + P_3 \right) \frac{R_1^2}{g} \varepsilon_1 - \frac{P_3}{g} R_1 w_r = M - \frac{P_2 + P_3}{g} R_1. \quad (10)$$

Нехай тепер  $\delta\varphi_1 = 0$  та  $\delta s \neq 0$ . Векторна форма загального рівняння динаміки має вигляд

$$\bar{P}_3 \delta \bar{s} + \bar{\Phi}_3 \delta \bar{s} + M_2^{\Phi} \delta \bar{\varphi}_2 = 0,$$

де  $\bar{\delta\varphi}_2$  — вектор, напрямком якого збігається з напрямком вектора кутової швидкості повороту блока 2 на кут  $\delta\varphi_2$ . З урахуванням напрямків векторів та виразу (3) отримаємо

$$P_3 \delta s + \Phi_e \delta s - \Phi_r \delta s - M_2^{\Phi} \delta \varphi_2 = 0. \quad (11)$$

Зв'язок між можливими переміщеннями  $\delta s$  і  $\delta\varphi_2$ , а також прискореннями  $w_r$  і  $\varepsilon_2$  визначається з кінематичного співвідношення

$$v_r = \omega_2 R_2,$$

де  $v_r$  — відносна швидкість тіла 3;  $\omega_2$  — кутова швидкість блока 2;  $R_2$  — радіус блока 2. Отримаємо

$$w_r = \varepsilon_2 R_2, \quad \delta s = R_2 \delta\varphi_2. \quad (12)$$

Підставимо  $M_2^{\Phi}$ ,  $\bar{\Phi}_e$ , і  $\bar{\Phi}_r$  з виразів (2), (4) і (5) у загальне рівняння динаміки (11) та врахуємо формули (12). Дістанемо

$$\left( P_3 + \frac{P_3}{g} R_1 \varepsilon_1 - \frac{P_3}{g} w_r - \frac{P_2}{2g} w_r \right) \delta s = 0.$$

Оскільки  $\delta s \neq 0$ , нулю дорівнюватиме вираз у дужках:

$$P_3 + \frac{P_3}{g} R_1 \varepsilon_1 - \frac{P_3}{g} w_r - \frac{P_2}{2g} w_r = 0.$$

Складаємо друге рівняння

$$-\frac{P_3}{g} R_1 \varepsilon_1 + \left( \frac{P_2}{2g} + \frac{P_3}{g} \right) w_r = P_3, \quad (13)$$

яке разом з рівнянням (10) утворює систему рівнянь руху тіл 1, 2 та 3. Розв'язуючи систему рівнянь (10) і (13) відносно  $\varepsilon_1$ , одержуємо

$$\varepsilon_1 = \frac{M(2P_2 + 4P_3) - P_2 R_1(2P_2 + 6P_3)}{R_1^2(P_1 P_2 + 2P_1 P_3 + 2P_2^2 + 6P_2 P_3)} g.$$

**Приклад 17.10.** При наїзді кранового візка  $A$  на пружний упор  $B$  починаються коливання підвішеного на невагому стрижні вантажу  $D$  (рис. 17.24, *a*). Скласти диференціальні рівняння руху системи, якщо маса візка  $m_1$ , маса вантажу  $m_2$ , довжина стрижня  $l$ , коефіцієнт жорсткості пружини  $B$  дорівнює  $c$ . Масою коліс та силами опору знехтувати, за початок відліку системи координат вибрати лівий кінець недеформованої пружини.

**Розв'язування.** Об'єкт дослідження в даній задачі — система, яка складається з двох тіл: рухомого візка  $A$  та вантажу  $D$ . Останній може вільно обертатись навколо точки  $C$  на невагому стрижні  $CD$ .

Початковий момент руху системи — це момент дотику візка  $A$  до пружини (пружного упору)  $B$ . У цей момент пружина ще не деформована, а стрижень  $CD$  перебуває у вертикальному положенні.

Введемо систему координат  $Ox$ , початок відліку якої, за умовою задачі, розмістимо у лівому кінці недеформованої пружини (рис. 17.24, *a*).

Розглянемо механічну систему в деякому поточному положенні (рис. 17.24, *б*) під час її руху. Вважаємо, що пружина стиснута, а стрижень  $CD$  відхилений від вертикалі на деякий кут  $\varphi$  у напрямку його додатних значень (проти ходу стрілки годинника).

Положення лівого кінця  $O_1$  деформованої пружини визначається координатою  $x$  у вибраній системі відліку. Цією координатою визначатимемо також положення візка.

До активних сил у даній задачі належать сили ваги  $m_1 \bar{g}$  та  $m_2 \bar{g}$  відповідно візка  $A$

та вантажу  $D$ , а також сила пружності  $\bar{F}_{\text{пр}}$  пружини, яка прикладається до візка в точці  $O_1$ .

Проводимо аналіз в'язей. В'язями для механічної системи є горизонтальна гладка площина та невагомий ідеальний стрижень  $CD$ , тобто в'язі ідеальні.

Запишемо загальне рівняння динаміки у формі (17.5). Введемо позначення:  $\bar{F}_1 = m_1 \bar{g}$ ,  $\bar{F}_2 = m_2 \bar{g}$ ,  $\bar{F}_3 = \bar{F}_{\text{пр}}$ . Проекції прискорення візка на осі координат позначимо  $\ddot{x}$  та  $\ddot{y}$ , проекції прискорення вантажу  $D$  —  $\ddot{x}_D$  та  $\ddot{y}_D$ , де  $x_D$  та  $y_D$  — координати вантажу. Оскільки візок рухається поступально й усі його точки мають однакові швидкості та прискорення, проекції можливого переміщення візка на осі координат запишемо як варіації координат точки  $O_1$ :  $\delta x$  та  $\delta y$ . Проекції можливого переміщення вантажу  $D$  позначимо  $\delta x_D$  та  $\delta y_D$ . Тоді за формулою (17.5) отримаємо

$$(F_{1x} + F_{3x} - m_1 \ddot{x}) \delta x + (F_{1y} + F_{3y} - m_1 \ddot{y}) \delta y + (F_{2x} - m_2 \ddot{x}_D) \delta x_D + (F_{2y} - m_2 \ddot{y}_D) \delta y_D = 0.$$

Підставимо у це рівняння відповідні проекції сил  $F_{1x} = F_{2x} = F_{3y} = 0$ ,  $F_{1y} = m_1 g$ ,  $F_{2y} = m_2 g$ ,  $F_{3x} = -cx$ . Врахуємо, що візок рухається тільки вздовж осі  $Ox$ , тобто  $\ddot{y} = 0$  та  $\delta y = 0$ . Дістанемо

$$(-cx - m_1 \ddot{x}) \delta x - m_2 \ddot{x}_D \delta x_D + (m_2 g - m_2 \ddot{y}_D) \delta y_D = 0. \quad (1)$$

Значимо, що при даному способі складання загального рівняння динаміки сили інерції зображувати на рисунку не обов'язково.

Дана механічна система має два степені вільності, тому між величинами  $\delta x$ ,  $\delta x_D$  і  $\delta y_D$  існує залежність. Для її визначення встановимо зв'язок між координатами точки  $A$  та координатами вантажу  $D$ , тобто складемо рівняння в'язей:

$$x_D = l \sin \varphi + x - \frac{a}{2}, \quad y_D = l \cos \varphi, \quad (2)$$

де  $\frac{a}{2}$  — половина довжини візка.

Із співвідношень (2) знайдемо

$$\delta x_D = l \cos \varphi \cdot \delta \varphi + \delta x, \quad \delta y_D = -l \sin \varphi \cdot \delta \varphi. \quad (3)$$

Після подвійного диференціювання формул (2) отримаємо

$$\ddot{x}_D = l(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) + \ddot{x},$$

$$\ddot{y}_D = -l(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi). \quad (4)$$

Підставляємо  $\delta x_D$ ,  $\delta y_D$ ,  $\ddot{x}_D$  і  $\ddot{y}_D$  з виразів (3) і (4) в (1) та згрупуємо коефіцієнти при незалежних переміщеннях  $\delta x$  та  $\delta \varphi$ . Одержимо

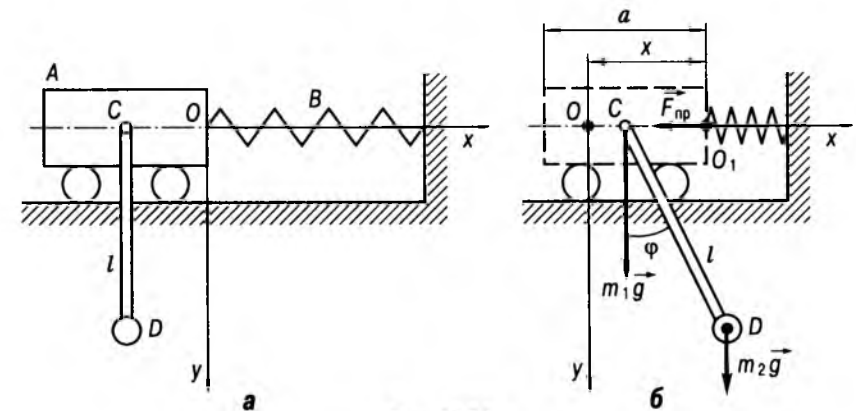


Рис. 17.24

$$\delta x \left[ -cx - m_1 \ddot{x} - m_2 l \left( \ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \frac{\ddot{x}}{l} \right) \right] +$$

$$+ \delta \varphi \left[ -m_2 l^2 \cos \varphi \left( \ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \frac{\ddot{x}}{l} \right) - \right.$$

$$\left. - m_2 g l \sin \varphi - m_2 l^2 \sin \varphi \left( \ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \right) \right] = 0.$$

Оскільки величини  $\delta x$  та  $\delta \varphi$  незалежні і довільні, тобто одночасно не дорівнюють нулю, прирівняємо до нуля вирази в дужках. Отримаємо рівності

$$-cx - (m_1 + m_2) \ddot{x} - m_2 l (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = 0,$$

$$-m_2 l^2 \cos \varphi (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \frac{\ddot{x}}{l}) - m_2 g l \sin \varphi -$$

$$- m_2 l^2 \sin \varphi (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) = 0.$$

Після їх спрощень матимемо шукані диференціальні рівняння

$$(m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + cx = 0,$$

$$l \ddot{\varphi} + \cos \varphi \ddot{x} + g \sin \varphi = 0.$$

### 17.2.3. Задачі для самостійного розв'язування

**17.16.** Визначити прискорення тіл  $A$  і  $B$ , з'єднаних невагомою нерозтяжною ниткою, яку перекинута через нерухомий блок (рис. 17.25). Врахувати, що тіло  $A$  має масу  $m_1$  і ковзає вздовж похилої площини, яка становить кут  $\alpha_1$  з горизонтом. Тіло  $B$  має масу  $m_2$  і ковзає вздовж похилої площини. Кут її нахилу до горизонту складає  $\alpha_2$ . Тертям ковзання і масою блока знехтувати.

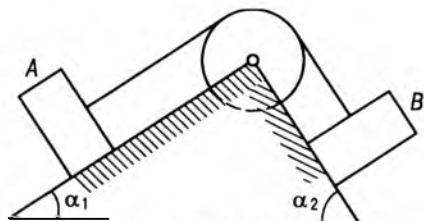


Рис. 17.25

Відповідь:

$$a_1 = a_2 = \frac{m_2 \sin \alpha_2 - m_1 \sin \alpha_1}{m_1 + m_2} g.$$

**17.17.** Механічна система складається з двох вантажів 1 та 2 (див. рис. 17.10), нерухомого східчастого блока 4 та рухомого блока 3, з'єднаних невагомою нерозтяжною ниткою. Маса вантажів  $m_1 = 2,5$  кг та  $m_2 = 8$  кг. Визначити прискорення тіла 1, якщо блоки 3 та 4 невагомні, тертя в осях повороту блоків відсутнє, а ділянки нитки, які не лежать на блоках, вертикальні.

Відповідь:  $w_1 = 1,63$  м/с<sup>2</sup>.

**17.18.** Однорідний барабан  $A$  радіуса  $R$  масою  $m_1$  обертається навколо нерухомої осі під дією обертального моменту  $M$  (рис. 17.26). Визначити кутове прискорення барабана, якщо він з'єднаний невагомою нерозтяжною ниткою з тілом  $B$  масою  $m_2$ , яке ковзає вздовж похилої площини. Коефіцієнт тертя ковзання при русі тіла  $B$  дорівнює  $f$ .

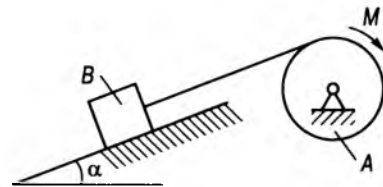


Рис. 17.26

Відповідь:

$$\epsilon = \frac{2M - 2m_2 g R (\sin \alpha + f \cos \alpha)}{R^2 (m_1 + 2m_2)}.$$

**17.19.** Пасова передача складається з однорідного шківів 1 радіуса  $r_1 = 20$  см масою  $m_1 = 2$  кг та східчастого шківів 2 масою  $m_2 = 8$  кг. Радіус інерції шківів 2  $i_2 = 25$  см (див. рис. 17.11). Зовнішній радіус шківів 2  $R_2 = 40$  см, внутрішній —  $r_2 = 10$  см. Визначити прискорення вантажу  $Q$  масою 50 кг, якщо до шківів 1 прикладається пара сил з моментом

$M = 30$  Н · м. Пас вважати нерозтяжним, тертям в осях повороту шківів знехтувати.

Відповідь:  $w = 0,95$  м/с<sup>2</sup>.

**17.20.** У регуляторі центрифуги, що обертається рівномірно навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю  $\omega$ , вага кожної сфери  $A_1$  та  $A_2$  дорівнює  $P$ . Муфта  $C_1 C_2$  має вагу  $Q$  (рис. 17.27). Нехтуючи вагою стрижнів, знайти кут  $\alpha$ , якщо  $OA_1 = OA_2 = l$ ,  $OB_1 = OB_2 = B_1 C_1 = B_2 C_2 = a$ .

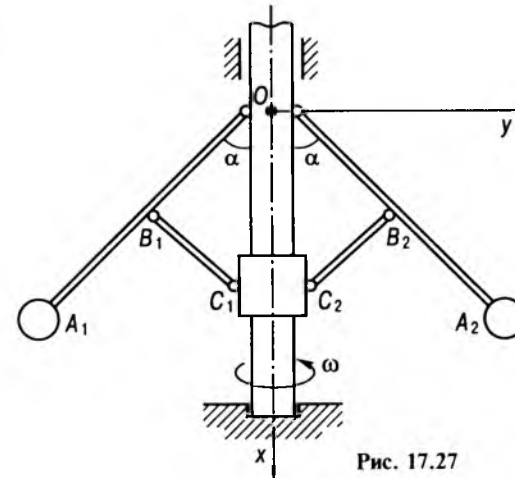


Рис. 17.27

Відповідь:  $\cos \alpha = \frac{Pl + Qa}{Pl^2 \omega^2} g$ .

**17.21.** Визначити прискорення гладкого клина вагою  $P$ , припускаючи, що він розсуває дві пластини однакової ваги  $Q$  (рис. 17.28). Коефіцієнт тертя ковзання пластин при русі вздовж горизонтальних площин дорівнює  $f$ . Кут між бічною стороною клина та горизонтальною площиною —  $\alpha$ .

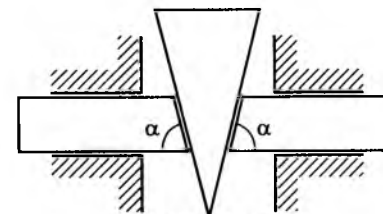


Рис. 17.28

Відповідь:

$$w = \frac{P - f(2Q + P) \operatorname{ctg} \alpha}{P(1 + f \operatorname{ctg} \alpha) + 2Q \operatorname{ctg}^2 \alpha} g.$$

**17.22.** Через блок  $B$  з нерухомою віссю  $O$  перекинута невагома нитка, що підтримує блок  $C$  (рис. 17.29). Ділянки нитки, які не лежать на блоках, вертикальні. До одного кінця нитки прикріплено вантаж  $A$  вагою  $P_A$ , а інший кінець нитки закріплено в точці  $D$ . Визначити прискорення вантажу  $A$ , нехтуючи тертям у блоці  $B$ . Блоки  $B$  та  $C$  вважати однорідними круглими дисками вагою  $P_B$  та  $P_C$  відповідно.

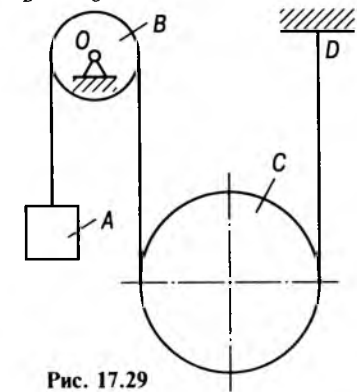


Рис. 17.29

Відповідь:  $w_A = \frac{8P_A - 4P_C}{8P_A + 4P_B + 3P_C} g$ .

**17.23.** Тіло 2 вагою  $Q$  ковзає вздовж бічної поверхні трикутної призми 1, яка утворює кут  $\alpha$  з горизонтом (рис. 17.30). Призма 1 має вагу  $P$  і може вільно пересуватись вздовж горизонтальної площини. Вважаючи, що поверхня призми 1, тіла 2 та горизонтальної

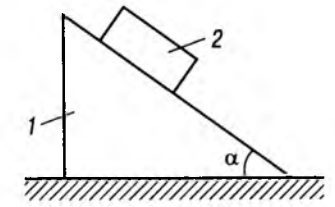


Рис. 17.30

площини абсолютно гладенькі, визначити величину прискорень призми 1 та тіла 2.

$$\text{Відповідь: } w_1 = \frac{Q \sin 2\alpha}{2(P + Q \sin^2 \alpha)} g,$$

$$w_2 = \frac{g \sin \alpha}{P + Q \sin^2 \alpha} \sqrt{P^2 + (2P + Q)Q \sin^2 \alpha}.$$

17.24. Механічна система складається з двох вантажів 1, 2 та трьох однорідних блоків 3, 4, 5 (рис. 17.31). До блока 5 прикладається пара сил з моментом  $M$ , вантаж 1 ковзає вздовж гладкої похилої площини, яка утворює кут  $\alpha$  з горизонтом. Визначити прискорення вантажів 1 і 2 та кутове прискорення блока 5, якщо вага тіл дорівнює відповідно  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ , а радіуси усіх блоків однакові і дорівнюють  $R$ .

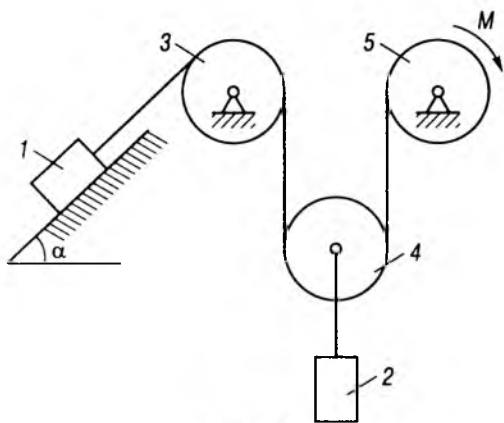


Рис. 17.31

Відповідь:

$$w_1 = \frac{B}{A} g, w_2 = \frac{B+C}{2A} g, \varepsilon = \frac{C}{AR} g,$$

де

$$A = (8P_1 + 4P_3 + 3P_4 + 2P_2)(4P_5 + 3P_4 + 2P_2) - (P_4 + 2P_2)^2;$$

$$B = 4[(2P_1 \sin \alpha - P_2 - P_4)(4P_5 + 3P_4 + 2P_2) - (2M/R - P_2 - P_4)(P_4 + 2P_2)];$$

$$C = 4[(8P_1 + 4P_3 + 3P_4 + 2P_2)(2M/R - P_2 - P_4) - (2P_1 \sin \alpha - P_2 - P_4)(P_4 + 2P_2)].$$

17.25. Тіло 1 масою  $m_1 = 6$  кг ковзає вздовж шорсткої площини, яка становить кут  $\alpha = 30^\circ$  з горизонтом (рис. 17.32). Вантажі 2 та 3 з'єднані невагомою нерозтяжною ниткою, перекрученою через рухомий блок 4, вісь обертання якого з'єднана ниткою з тілом 1. Маса вантажів дорівнює  $m_2 = 2$  кг та  $m_3 = 3$  кг, блоки 4 та 5 — однорідні блоки масою  $m_4 = m_5 = 2$  кг. Визначити прискорення тіла 1 та вантажу 3, якщо коефіцієнт тертя ковзання тіла 1 вздовж похилої площини дорівнює  $f = 0,15$ .

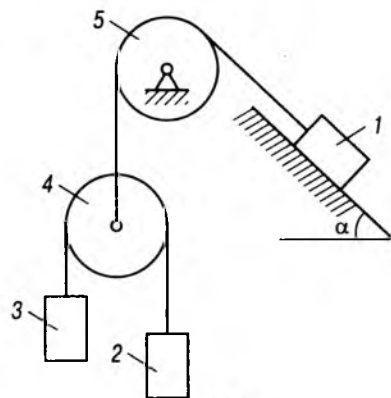


Рис. 17.32

$$\text{Відповідь: } w_1 = 0,227 \text{ м/с}^2, w_3 = 1,841 \text{ м/с}^2.$$

## Розділ 18

### РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА ДРУГОГО РОДУ

#### § 18.1. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Припустимо, що є механічна система з  $N$  степенями вільності, на яку накладаються голономні ідеальні в'язі.

Рівняннями Лагранжа другого роду називаються рівняння руху механічної системи у формі

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2, \\ \dots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_N} - \frac{\partial T}{\partial q_N} = Q_N, \end{cases} \quad (18.1)$$

які є звичайними диференціальними рівняннями другого порядку, їх кількість дорівнює кількості степенів вільності  $N$  механічної системи.

У цих рівняннях через  $q_1, q_2, \dots, q_N$  позначено *узагальнені координати* — незалежні між собою параметри, які однозначно визначають положення матеріальної системи у просторі, кількість їх дорівнює кількості степенів вільності механічної системи, тобто  $N$ . Через  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N$  позначено *узагальнені швидкості* — похідні за часом від узагальнених координат  $\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}, j = 1, 2, \dots, N$ .

Кінетична енергія  $T$  механічної системи визначається як функція узагальнених координат і узагальнених швидкостей, тобто  $T = T(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$ .

Права частина рівнянь (18.1) має узагальнені сили  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ . *Узагальненими силами* називаються коефіцієнти при узагальнених можливих переміщеннях (варіаціях узагальнених координат) у виразі суми робіт активних сил, прикладених до точок системи:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^N Q_j \delta q_j. \quad (18.2)$$

Тут  $\vec{F}_i$  — активні сили ( $i = 1, 2, \dots, n$ );  $\delta \vec{r}_i$  — можливе переміщення точки прикладання відповідної активної сили ( $i = 1, 2, \dots, n$ );  $Q_j$  — узагальнена сила ( $j = 1, 2, \dots, N$ );  $\delta q_j$  — узагальнені можливі переміщення ( $j = 1, 2, \dots, N$ ).

Узагальнена сила  $Q_j$  може бути обчислена за формулою

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (18.3)$$

де  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$  — частинна похідна від радіуса-вектора  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_N, t)$  точки прикладання сили  $\vec{F}_i$  за узагальненою координатою  $q_j$ .

Оскільки в базисних векторах декартової системи координат можна записати  $\vec{F}_i = F_{ix} \vec{i} + F_{iy} \vec{j} + F_{iz} \vec{k}$  і  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \vec{i} + \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \vec{j} + \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \vec{k}$ , то вираз (18.3) подається так:

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (18.4)$$

Тут  $x_i, y_i, z_i$  — проекції радіуса-вектора  $\vec{r}_i$  на осі декартової системи координат.

Якщо сили, прикладені до точок системи, мають потенціальний характер, то узагальнені сили визначаються з виразів

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (18.5)$$

де  $\Pi$  — потенціальна енергія механічної системи.

Рівняння Лагранжа другого роду з урахуванням останньої формули набувають вигляду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j=1,2,\dots,N. \quad (18.6)$$

Якщо ввести функцію Лагранжа

$$L = T - \Pi,$$

яка дорівнює різниці кінетичної і потенціальної енергії механічної системи, то рівняння Лагранжа для консервативної механічної системи (18.6) можна записати так:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j=1,2,\dots,N. \quad (18.7)$$

У випадку неідеальних в'язей (до них можна віднести шорсткі опорні поверхні), накладених на механічну систему, при визначенні узагальнених сил за формулою (18.2) або (18.3) до активних сил  $\vec{F}_i$  належать також складові реакції в'язей, які вносять неідеальність (сили тертя).

За наявності сил опору середовища, прикладених до  $i$ -ї точки, які пропорційні першому степеню швидкості  $\vec{F}_i = -\mu_i \vec{v}_i$ , де  $\mu_i$  — сталий коефіцієнт, відповідну узагальнену силу можна визначити з виразу

$$Q_j = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}, \quad j=1,2,\dots,N, \quad (18.8)$$

де  $\Phi$  — функція розсіювання або дисипативна функція Релея:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \mu_i v_i^2. \quad (18.9)$$

З урахуванням формул (18.5) та (18.8) рівняння Лагранжа другого роду (18.1) можна записати так:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} + Q_j^*, \quad j=1,2,\dots,N, \quad (18.10)$$

де  $Q_j^*$  — складові узагальнених сил, що відповідають непотенціальним силам та силам, які не пропорційні першому степеню швидкості відповідних точок.

Методика застосування рівнянь Лагранжа другого роду полягає у виконанні такої послідовності дій.

1. Дослідити характер в'язей, накладених на механічну систему, та визначити кількість степенів вільності.

2. Вибрати узагальнені координати в кількості, яка дорівнює кількості степенів вільності.

3. Визначити узагальнені сили. Це можна здійснити кількома способами:

а) визначити узагальнену силу за формулою (18.2) як коефіцієнт у виразі суми елементарних робіт активних сил на відповідних узагальнених можливих переміщеннях. Для цього треба:

зобразити усі активні сили, що діють на точки механічної системи;

якщо серед в'язей, накладених на систему, є неідеальні, додати до активних сил відповідні реакції в'язей (наприклад, силу тертя);

надати системі незалежні узагальнені переміщення; їх має бути стільки, скільки узагальнених координат;

для визначення узагальної сили  $Q_j$ , що відповідає  $j$ -й узагальненій координаті, обчислити суму робіт активних сил разом з реакціями неідеальних в'язей на узагальненому можливому переміщенні  $\delta q_j$ . Інші узагальнені можливі переміщення  $\delta q_1, \dots, \delta q_{j-1}, \delta q_{j+1}, \dots, \delta q_N$  вважати рівними нулю. Тоді узагальнена сила  $Q_j$  визначиться як коефіцієнт при  $\delta q_j$ . Усі інші узагальнені сили знаходять аналогічно;

б) якщо сили, які діють на механічну систему, є потенціальними, то треба визначити потенціальну енергію  $\Pi$  механічної системи як функцію узагальнених координат. Узагальнена сила  $Q_j$  визначається як частинна похідна (18.5) від потенціальної енергії за відповідною узагальненою координатою  $q_j$ , що береться зі знаком мінус;

в) визначити узагальнену силу з використанням формул (18.4).

4. Знайти кінетичну енергію системи як вираз, що залежить від узагальнених координат та узагальнених швидкостей. Якщо рух системи відбувається в потенціальному силовому полі, то треба знайти потенціальну енергію системи, а потім скласти функцію Лагранжа.

5. Визначити частинні похідні  $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial q_j}$

і повні похідні за часом  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ . У випадку

потенціальної системи треба знайти похідні  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial q_j}$  та  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ .

6. Скласти рівняння Лагранжа другого роду в одній із форм (18.1), (18.7) або (18.10) та інтегрувати їх з урахуванням початкових умов.

7. Провести аналіз розв'язку відповідно до особливостей задачі, що розглядається.

## § 18.2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

**Приклад 18.1.** Однорідний барабан  $A$  радіуса  $r$  вагою  $Q$  обертається під дією пари сил з моментом  $M$  навколо осі, що проходить через точку  $O$ . На барабан накручується нитка, до кінця якої прив'язаний вантаж  $B$ . Він має вагу  $P$  і ковзає вгору вздовж похилої площини, що утворює кут  $\alpha$  з горизонтом, причому коефіцієнт тертя ковзання дорівнює  $f$  (рис. 18.1). Визначити узагальнену силу для обраної узагальної координати. Нитку вважати нерозтяжною та невагомою.

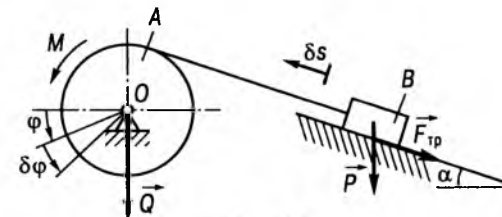


Рис. 18.1

Розв'язування. Дана механічна система має один степінь вільності, оскільки накладання однієї нової в'язі повністю зупиняє її.

В'язями, що обмежують рух системи, є циліндричний шарнір у точці  $O$ , похила площина та нерозтяжна нитка (рис. 18.1). Ці в'язі є голономними стаціонарними. Шарнір та нитка є ідеальними в'язями, похила площина не є ідеальною в'язю: неідеальність вносить дотична складова її реакції (сила тертя ковзання).

За узагальнену координату візьмемо кут повороту барабана в напрямку його обертання,  $q = \varphi$ .

Знайдемо узагальнену силу, яка відповідає вибраній узагальненій координаті, за формулою (18.2), визначивши елементарну роботу активних сил.

До точок механічної системи прикладаються такі активні сили: сили ваги  $\vec{Q}$  та  $\vec{P}$ , пара сил з моментом  $\vec{M}$ . Віднесемо до активних сил силу тертя ковзання  $\vec{F}_{тр}$ , яка напрямлена протилежно напрямку руху вантажу  $B$ ,  $F_{тр} = fN$ . Тут  $N$  — нормальна складова реакції похилої площини. Для визначення  $N$  знайдемо суму проекцій сил, які прикладені до вантажу  $B$ , на вісь, перпендикулярну до похилої площини, і прирівняємо її нулю. Отримаємо  $N = P \cos \alpha$ , тоді  $F_{тр} = fP \cos \alpha$ .

Уявно зупинимо систему і надамо барабану можливе переміщення  $\delta \varphi$  у бік його повороту. Вантаж  $B$  отримає можливе переміщення  $\delta s$  вздовж похилої площини. Встановлюємо зв'язок між можливими переміщеннями (див. розділ 17):

$$\delta s = r \delta \varphi. \quad (1)$$

Визначимо суму елементарних робіт активних сил  $\vec{Q}$  та  $\vec{P}$ , пари сил та сили тертя  $\vec{F}_{тр}$ , яка відповідає можливому переміщенню  $\delta \varphi$ :

$$\delta A = \delta A(\vec{Q}) + \delta A(\vec{P}) + \delta A(\vec{M}) + \delta A(\vec{F}_{тр}). \quad (2)$$

Оскільки сила  $\vec{Q}$  прикладена в нерухомій точці і її робота дорівнює нулю, можна записати

$$\delta A = \vec{P} \cdot \delta \vec{s} + \vec{M} \cdot \delta \vec{\varphi} + \vec{F}_{\text{тр}} \cdot \delta \vec{s}, \quad (3)$$

де  $\delta \vec{\varphi}$  — вектор, напрямком якого збігається з напрямком вектора кутової швидкості повороту барабана на кут  $\delta \varphi$ . Відповідні доданки, з урахуванням напрямків векторів, визначаються так:

$$\vec{P} \cdot \delta \vec{s} = P \delta s \cos(90^\circ + \alpha) =$$

$$= -P \sin \alpha \delta s = -rP \sin \alpha \delta \varphi,$$

$$\vec{M} \cdot \delta \vec{\varphi} = M \delta \varphi,$$

$$\vec{F}_{\text{тр}} \cdot \delta \vec{s} = F_{\text{тр}} \delta s \cos 180^\circ = -fP \cos \alpha \delta \varphi.$$

Підставивши ці доданки у (3) і зібравши коефіцієнти при  $\delta \varphi$ , отримаємо

$$\delta A = (M - rP(\sin \alpha + f \cos \alpha)) \delta \varphi. \quad (4)$$

За означенням узагальнена сила  $Q_\varphi$  — це коефіцієнт при можливому переміщенні  $\delta \varphi$  у виразі (4), тобто

$$Q_\varphi = M - rP(\sin \alpha + f \cos \alpha). \quad (5)$$

Знайдемо тепер узагальнену силу, що відповідає узагальненій координаті  $q = s$ , яка є переміщенням вантажу  $B$ .

У цьому випадку як незалежне можливе переміщення вибираємо переміщення вантажу  $\delta s$ . Тоді барабан має можливе переміщення  $\delta \varphi = \delta s/r$ .

Виразимо елементарну роботу активної сили  $\vec{P}$ , пари сил з моментом  $M$  та сили тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$  через узагальнене можливе переміщення  $\delta s$ :

$$\delta A(\vec{P}) = -P \sin \alpha \delta s, \quad \delta A(\vec{M}) = M \delta \varphi = M \delta s/r,$$

$$\delta A(\vec{F}_{\text{тр}}) = -fP \cos \alpha \delta s.$$

Тоді вираз (3) запишемо так:

$$\delta A = \left( \frac{M}{r} - P(\sin \alpha + f \cos \alpha) \right) \delta s. \quad (6)$$

Узагальнена сила як коефіцієнт при  $\delta s$  має вигляд

$$Q_s = \frac{M}{r} - P(\sin \alpha + f \cos \alpha). \quad (7)$$

**Приклад 18.2.** Визначити узагальнені сили механічної системи (рис. 18.2), яка складається з візка  $A$  масою  $m_1$ , прикріпленого до пружини жорсткістю  $c$ , та вантажу  $M$  масою  $m_2$ , підвішеного на невагомому стрижні завдовжки  $l$ . Вважати, що стрижень може рухатись лише у вертикальній площині. Тертям знехтувати.

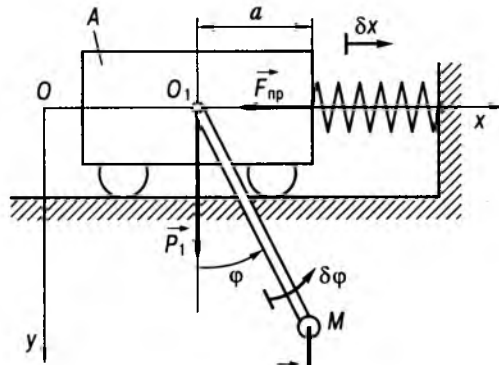


Рис. 18.2

**Розв'язування.** Дана механічна система має два степені вільності і є голономною консервативною системою з ідеальними в'язями.

Положення досліджуваної механічної системи визначимо двома параметрами: кутом відхилення  $\varphi$  від вертикалі в площині  $Oxy$  стрижня та переміщенням візка  $x$  вздовж осі  $Ox$ . Початок відліку нерухомої системи координат  $Oxy$  — точка  $O$  — збігається з лівим кінцем недеформованої пружини (рис. 18.2).

За узагальнені візьмемо координати  $\varphi$  та  $x$ . Визначимо відповідні узагальнені сили трьома способами.

**Спосіб 1.** Скористаємось формулою (18.4). До даної механічної системи прикладаються такі активні сили: сили ваги  $\vec{P}_1 = m_1 \vec{g}$  і  $\vec{P}_2 = m_2 \vec{g}$  та сила пружності  $\vec{F}_{\text{пр}}$  (рис. 18.2). Оскільки рух системи здійснюється тільки

у вертикальній площині  $Oxy$ , у розгорнутій формі можна записати

$$Q_x = P_{1x} \frac{\partial x_1}{\partial x} + P_{1y} \frac{\partial y_1}{\partial x} + P_{2x} \frac{\partial x_2}{\partial x} +$$

$$+ P_{2y} \frac{\partial y_2}{\partial x} + F_{\text{пр}x} \frac{\partial x_3}{\partial x} + F_{\text{пр}y} \frac{\partial y_3}{\partial x},$$

$$Q_\varphi = P_{1x} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} + P_{1y} \frac{\partial y_1}{\partial \varphi} + P_{2x} \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} +$$

$$+ P_{2y} \frac{\partial y_2}{\partial \varphi} + F_{\text{пр}x} \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} + F_{\text{пр}y} \frac{\partial y_3}{\partial \varphi}. \quad (1)$$

Проекції активних сил визначимо згідно з рис. 18.2:

$$P_{1x} = 0, \quad P_{1y} = m_1 g, \quad P_{2x} = 0, \quad P_{2y} = m_2 g, \quad (2)$$

$$F_{\text{пр}x} = -cx, \quad F_{\text{пр}y} = 0.$$

При складанні виразів (2) враховується, що пружина стискається.

Декартові координати точок прикладання активних сил  $\vec{P}_1$ ,  $\vec{P}_2$  та  $\vec{F}_{\text{пр}}$  виразимо через узагальнені координати  $\varphi$  та  $x$ :

$$x_1 = x, \quad y_1 = 0,$$

$$x_2 = x + l \sin \varphi,$$

$$y_2 = l \cos \varphi, \quad (3)$$

$$x_3 = x - a, \quad y_3 = 0.$$

де через  $a$  позначена половина довжини візка.

Знаходимо частинні похідні від (3) за узагальненими координатами:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y_3}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \varphi} = l \cos \varphi, \quad \frac{\partial y_2}{\partial \varphi} = -l \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial y_3}{\partial \varphi} = 0.$$

Після підстановки цих похідних та проекцій сил з виразів (2) у формули (1) отримаємо шукані узагальнені сили

$$Q_x = -cx,$$

$$Q_\varphi = -m_2 g l \sin \varphi.$$

**Спосіб 2.** Для визначення узагальнених сил застосуємо формулу (18.2). Надамо механічній системі можливе переміщення  $\delta x$  у бік додатних значень узагальненої координати  $x$ , зафіксувавши при цьому кут  $\varphi$  ( $\delta \varphi = 0$ ). Визначимо елементарну роботу активних сил  $\vec{P}_1 = m_1 \vec{g}$  і  $\vec{P}_2 = m_2 \vec{g}$  та сили пружності  $\vec{F}_{\text{пр}}$  на лінійних переміщеннях  $\delta \vec{r}_1$ ,  $\delta \vec{r}_2$ ,  $\delta \vec{r}_3$  їх точок прикладання, що спричинюються можливим переміщенням  $\delta x$ :

$$\delta A_1 = \vec{P}_1 \delta \vec{r}_1 + \vec{P}_2 \delta \vec{r}_2 + \vec{F}_{\text{пр}} \delta \vec{r}_3. \quad (4)$$

Враховуючи, що для фіксованої координати  $\varphi$  стрижень  $O_1 M$  здійснює поступальний рух, маємо  $\delta \vec{r}_1 = \delta \vec{r}_2 = \delta \vec{r}_3$ .

Радіус-вектор  $\vec{r}_1$  точки  $O_1$  можна подати так:

$$\vec{r}_1 = \vec{i}(x - a), \quad (5)$$

де  $\vec{i}$  — орт координатної осі  $Ox$ ;  $a$  — половина довжини візка.

Після варіювання виразу (5) маємо

$$\delta \vec{r}_1 = \vec{i} \delta x,$$

або

$$\delta \vec{r}_1 = \delta \vec{r}_2 = \delta \vec{r}_3 = \vec{i} \delta x. \quad (6)$$

З виразу (6) випливає, що можливі переміщення  $\delta \vec{r}_1$ ,  $\delta \vec{r}_2$ ,  $\delta \vec{r}_3$  напрямлені паралельно осі  $Ox$  у бік її додатних значень. Тоді, з урахуванням напрямків векторів активних сил, з формули (4) отримаємо

$$\delta A_1 = F_{\text{пр}} \delta x = -cx \delta x = Q_x \delta x, \quad (7)$$

звідки

$$Q_x = -cx.$$

Для визначення узагальненої сили  $Q_\varphi$  надамо механічній системі можливе переміщення  $\delta \varphi$ , зафіксувавши при цьому координату  $x$ . Тоді елементарну роботу виконує сила  $P_2$  (точки прикладання сили  $\vec{P}_1$  та сили пружності  $\vec{F}_{\text{пр}}$  не рухаються):

$$\delta A_2 = \vec{P}_2 \delta \vec{r}_2. \quad (8)$$

Радіус-вектор  $\vec{r}_2$  точки  $M$  можна подати в базисних векторах так:

$$\vec{r}_2 = \vec{i}(x-a) + \vec{j}l \sin \varphi + \vec{j}l \cos \varphi.$$

Після варіювання цього виразу за координатою  $\varphi$  ( $x = \text{const}$ ,  $a = \text{const}$ ,  $l = \text{const}$ ) маємо

$$\delta \vec{r}_2 = \vec{i} \cos \varphi \delta \varphi - \vec{j} l \sin \varphi \delta \varphi. \quad (9)$$

Беручи до уваги, що  $\vec{P}_2 = \vec{j} m_2 g$ , вираз (8) з урахуванням (9) набуває вигляду

$$\delta A_2 = -m_2 g l \sin \varphi \delta \varphi = Q_\varphi \delta \varphi,$$

звідки

$$Q_\varphi = -m_2 g l \sin \varphi.$$

Зауважимо, що роботу активної сили  $\vec{P}_2$  можна визначити як роботу моменту цієї сили відносно точки підвісу стрижня  $O_1 M$

$$\delta A_2 = \vec{P}_2 \delta \vec{r}_2 = \vec{M}_{O_1}(\vec{P}_2) \delta \varphi,$$

де  $\delta \varphi$  — вектор, напрямком якого збігається з напрямком вектора кутової швидкості повороту стрижня  $O_1 M$  на кут  $\delta \varphi$ . Величина моменту  $M_{O_1}(\vec{P}_2) = m_2 g l \sin \varphi$ .

Оскільки вектори  $\vec{M}_{O_1}(\vec{P}_2)$  та  $\delta \varphi$  напрямлені протилежно один до одного, отримуємо

$$\delta A_2 = \vec{M}_{O_1}(\vec{P}_2) \delta \varphi = -m_2 g l \sin \varphi \delta \varphi = Q_\varphi \delta \varphi.$$

Звідси  $Q_\varphi = -m_2 g l \sin \varphi$ .

*Сносів 3.* Активні сили  $\vec{P}_1 = m_1 \vec{g}$  і  $\vec{P}_2 = m_2 \vec{g}$  та сила пружності  $\vec{F}_{\text{пр}}$  є потенціальними силами, тому скористаємось формулою (18.5).

Визначимо потенціальну енергію  $\Pi$  механічної системи як суму потенціальних енергій візка  $A$ , точки  $M$  та пружини:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3. \quad (10)$$

Потенціальна енергія  $\Pi_1$  візка є сталою величиною, припустимо, що вона дорівнює нулю. Потенціальну енергію  $\Pi_2$  точки  $M$  обчислимо як роботу сили  $\vec{P}_2$  при пере-

міщенні точки  $M$  із заданого положення у найнижче:

$$\Pi_2 = m_2 g l (1 - \cos \varphi). \quad (11)$$

Потенціальну енергію  $\Pi_3$  пружини визначимо як роботу сили пружності при переміщенні візка з поточного положення, яке визначається додатним приростом координати  $x$ , у початкове. Оскільки початкове подовження пружини  $\Delta l_0$  дорівнює нулю, а поточне  $\Delta l$  — координаті  $x$ , запишемо

$$\Pi_3 = \frac{c}{2} ((\Delta l)^2 - (\Delta l_0)^2) = \frac{c}{2} x^2. \quad (12)$$

За формулою (18.5) дістанемо узагальнені сили

$$Q_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -cx,$$

$$Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -m_2 g l \sin \varphi.$$

**Приклад 18.3.** Скласти рівняння руху математичного маятника масою  $m$  завдовжки  $l$ , використовуючи рівняння Лагранжа другого роду.

Розв'язування. Математичний маятник є прикладом невідної системи. Його положення можна визначити декартовими координатами  $x$  та  $y$  у координатній площині  $Oxy$  (рис.18.3). Рівняння в'язі має вигляд

$$f = x^2 + y^2 - l^2 = 0. \quad (1)$$

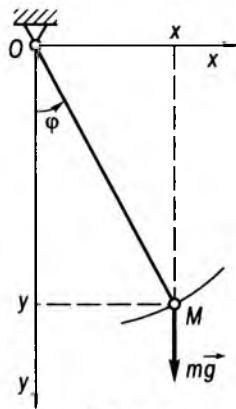


Рис. 18.3

З рівняння (1) випливає, що в'язь є стаціонарною утримувальною голономною.

Кількість степенів вільності математичного маятника  $N = 1$ .

За узагальнену координату візьмемо кут  $\varphi$  відхилення маятника від вертикалі:  $q = \varphi$ .

Припустивши, що сили опору відсутні, матимемо одне рівняння вигляду (18.7)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad (2)$$

де  $L = T - \Pi$  — функція Лагранжа математичного маятника.

Кінетичну енергію маятника можна визначити так:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad (3)$$

причому координати точки  $M$  подаються у вигляді

$$x = l \sin \varphi, \quad y = l \cos \varphi. \quad (4)$$

Після диференціювання за часом формул (4) та підстановки в (3) знаходимо

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2. \quad (5)$$

Для обчислення потенціальної енергії математичного маятника вважаємо, що вона набуває нульового значення в найнижчому положенні маятника. Тому шукаємо потенціальну енергію як роботу сили ваги по переміщенню маятника з поточного положення в найнижче:

$$\Pi = m g l (1 - \cos \varphi). \quad (6)$$

Отже, функція Лагранжа математичного маятника

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 - m g l (1 - \cos \varphi). \quad (7)$$

Визначаємо частинні похідні

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m g l \sin \varphi$$

і підставляємо їх у (2). Після скорочень отримуємо

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (8)$$

Як видно, це рівняння є нелінійним, але розв'язок його для різних випадків загально-відомий.

Якщо кут відхилення маятника від вертикалі  $\varphi$  малий, то рівняння (8) лінеаризується:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0. \quad (9)$$

Його розв'язок можна подати у вигляді

$$\varphi = A \sin \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t + \alpha \right), \quad (10)$$

де  $A$  і  $\alpha$  залежать від початкових умов.

**Приклад 18.4.** Барабан  $A$  обертається навколо нерухомої осі і приводиться в рух електромотором  $B$  через редуктор, який складається з чотирьох зубчастих коліс (рис. 18.4). До ротора електромотора прикладається постійний обертальний момент  $M_E$ . При русі системи виникають моменти сил опору:  $M_A^{\text{оп}}$  — в підшипниках осі повороту барабана  $A$ ,  $M_B^{\text{оп}}$  — в підшипниках осі повороту ротора електромотора,  $M_C^{\text{оп}}$  — в підшипниках осі повороту зубчастих коліс 2 та 3. Відношення радіусів зубчастих коліс, тобто

передаточні числа,  $\frac{r_3}{r_4} = i_{34}$ ,  $\frac{r_1}{r_2} = i_{12}$ .

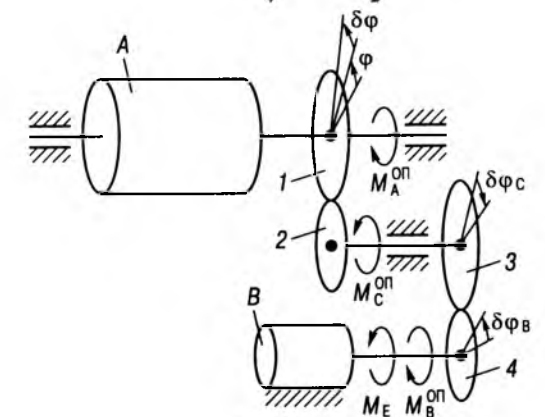


Рис. 18.4

Скласти диференціальні рівняння руху барабана, якщо осьовий момент інерції ба-

рабана  $A$  та зубчастого колеса  $1$  дорівнює  $I_A$ , а осьовий момент інерції пари зубчастих коліс  $2$  і  $3$  та осьовий момент інерції ротора електромотора та зубчастого колеса  $4$  дорівнюють відповідно  $I_C$  й  $I_B$ .

**Розв'язування.** Дана механічна система має один степінь вільності. Її рух обмежується стаціонарними утримувальними голономними в'язями. За узагальнену координату візьмо кут повороту  $\varphi$  барабана  $A$ . Тоді рівняння Лагранжа другого роду матиме вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \quad (1)$$

Знайдемо кінетичну енергію даної механічної системи

$$T = T_A + T_B + T_C \quad (2)$$

як функцію узагальненої координати та узагальненої швидкості.

Усі тіла даної системи здійснюють обертальний рух навколо нерухомих осей, тому

$$T_A = \frac{1}{2} I_A \omega_A^2, \quad T_B = \frac{1}{2} I_B \omega_B^2, \quad T_C = \frac{1}{2} I_C \omega_C^2. \quad (3)$$

Тут  $\omega_A = \dot{\varphi}$ . Виразимо кутові швидкості  $\omega_B$  і  $\omega_C$  через  $\dot{\varphi}$ . Враховуючи рівність швидкостей в точках дотику коліс  $1$  і  $2$ , а також коліс  $3$  і  $4$ , отримуємо

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2, \quad \omega_3 r_3 = \omega_4 r_4,$$

де  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  — кутові швидкості зубчастих коліс.

Оскільки  $\omega_1 = \omega_A = \dot{\varphi}$ ,  $\omega_C = \omega_2 = \omega_3$ ,  $\omega_B = \omega_4$ , маємо

$$\omega_C = \dot{\varphi} \frac{r_1}{r_2} = \dot{\varphi} i_{12}, \quad \omega_B = \omega_3 \frac{r_3}{r_4} = \dot{\varphi} i_{12} i_{34}. \quad (4)$$

Після підстановки  $\omega_C$  і  $\omega_B$  з виразів (4) у (3) отримаємо кінетичну енергію системи (2) у вигляді

$$T = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 (I_A + I_B i_{12}^2 i_{34}^2 + I_C i_{12}^2). \quad (5)$$

Визначаємо частинні похідні:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = (I_A + I_C i_{12}^2 + I_B i_{12}^2 i_{34}^2) \dot{\varphi}. \quad (6)$$

Узагальнену силу  $Q_\varphi$  визначимо з виразу елементарної роботи активних сил системи. Надамо системі узагальнене можливе переміщення  $\delta\varphi$  у бік позитивних значень кута повороту барабана  $A$  (рис. 18.4). Тоді, враховуючи кінематичні співвідношення (4) та стаціонарність в'язей (дійсні переміщення є окремим випадком можливих), можна записати відповідні можливі переміщення тіл  $B$  та  $C$ :

$$\delta\varphi_C = i_{12} \delta\varphi, \quad \delta\varphi_B = i_{12} i_{34} \delta\varphi. \quad (7)$$

До активних сил належать сили ваги тіл системи, пара сил, яка еквівалентна обертальному моменту. Умовно віднесемо до активних моменти сил опору.

Сили ваги на наданому можливому переміщенні  $\delta\varphi$  роботу не виконують, оскільки вони прикладені у точках, які належать осі повороту тіл.

Запишемо роботу обертального момента та моментів опору, умовно вважаючи їх активними:

$$\delta A = M \delta\varphi_B - M_A^{\text{оп}} \delta\varphi - M_C^{\text{оп}} \delta\varphi_C - M_B^{\text{оп}} \delta\varphi_B. \quad (8)$$

Підставимо переміщення  $\delta\varphi_C$  і  $\delta\varphi_B$  з формул (7) у вираз (8) і зберемо коефіцієнти при  $\delta\varphi$ :

$$\delta A = (M - M_A^{\text{оп}} - M_C^{\text{оп}} i_{12} - M_B^{\text{оп}} i_{12} i_{34}) \delta\varphi. \quad (9)$$

Отже,

$$Q_\varphi = M - M_A^{\text{оп}} - M_C^{\text{оп}} i_{12} - M_B^{\text{оп}} i_{12} i_{34}. \quad (10)$$

Диференціальне рівняння руху даної системи після підстановки формул для частинних похідних і узагальненої сили з (6) та (10) у вираз (1) набуває вигляду

$$(I_A + I_C i_{12}^2 + I_B i_{12}^2 i_{34}^2) \ddot{\varphi} = M - M_A^{\text{оп}} - M_C^{\text{оп}} i_{12} - M_B^{\text{оп}} i_{12} i_{34}. \quad (11)$$

Рівняння (11) інтегрується за відомими правилами теорії диференціальних рівнянь з урахуванням початкових умов.

**Приклад 18.5.** Механічна система складається з трьох тіл (рис. 18.5), маси яких  $m_1 = 2m$ ,  $m_2 = m$ ,  $m_3 = m$ . Момент  $M$ , який прикладено до нерухомого блока  $1$  радіуса  $R_1 = 2r$ , — сталий. Радіус блока  $2$  дорівнює  $r$ . Блоки вважають однорідними суцільними циліндрами.

Скласти рівняння руху системи в узагальнених координатах  $q_1 = x$  ( $x$  — відносна координата) і  $q_2 = \varphi$  при таких початкових умовах:  $q_{10} = 0$ ,  $q_{20} = 0$ ,  $\dot{q}_{10} = \dot{x}_0$ ,  $\dot{q}_{20} = 0$ .

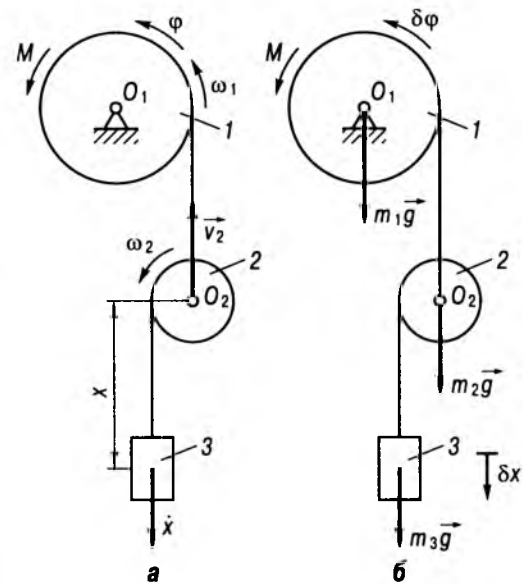


Рис. 18.5

**Розв'язування.** Механічна система, рух якої досліджується, має два степені вільності, тому система рівнянь Лагранжа другого роду має вигляд

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + Q_x^*, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + Q_\varphi^*.$$

де  $T$  — кінетична енергія системи;  $\Pi$  — потенціальна енергія,  $Q_x^*, Q_\varphi^*$  — узагальнені сили, які мають непотенціальний характер.

Визначимо кінетичну енергію системи  $T = \sum_{i=1}^3 T_i$  як функцію узагальнених координат і швидкостей, де  $T_i$  — кінетична енергія окремих тіл.

Для блока  $1$ , що обертається навколо нерухомих осей, маємо

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2.$$

Осьовий момент інерції блока  $1$  як однорідного циліндра дорівнює  $I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 = 4mr^2$ , кутову швидкість виразимо через узагальнену координату  $\omega_1 = \dot{\varphi}$ . Отримаємо

$$T_1 = 2mr^2 \dot{\varphi}^2. \quad (2)$$

Рух тіла  $3$  можна подати як сукупність двох поступальних рухів: переносного руху разом з центром мас тіла  $2$  і руху тіла  $3$  відносно цього центра зі швидкістю  $\dot{x}$ . Швидкість  $v_2$  центра мас тіла  $2$  з урахуванням нерозтяжності нитки можна знайти на підставі співвідношення

$$v_2 = \omega_1 R_1 = 2\dot{\varphi} r. \quad (3)$$

Тоді абсолютна швидкість тіла  $3$

$$v_3 = v_2 - \dot{x} = 2\dot{\varphi} r - \dot{x}.$$

Кінетична енергія цього тіла

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = \frac{1}{2} m (2\dot{\varphi} r - \dot{x})^2. \quad (4)$$

Блок  $2$  здійснює плоскопаралельний рух, його кінетична енергія

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2.$$

Осьовий момент інерції  $I_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2$ .

Оскільки кутова швидкість блока  $2$  та відносна швидкість тіла  $3$  пов'язані співвідношенням  $\dot{x} = \omega_2 R_2$ , отримаємо

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{\varphi} R_1)^2 + \frac{1}{4} m_2 R_2^2 \left( \frac{\dot{x}}{R_2} \right)^2. \quad (5)$$

Кінетичну енергію системи після додавання виразів (2), (4), (5) і підстановки даних умови задачі запишемо у вигляді



$$T = 6mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{4}m\dot{x}^2 - 2mr\dot{\varphi}\dot{x}. \quad (6)$$

Знайдемо частинні похідні від кінетичної енергії:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= \frac{3}{2}m\dot{x} - 2mr\dot{\varphi}, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= 12mr^2\dot{\varphi} - 2mr\dot{x}. \end{aligned} \quad (7)$$

Після диференціювання двох останніх виразів за часом отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) &= \frac{3}{2}m\ddot{x} - 2mr\ddot{\varphi}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= 12mr^2\ddot{\varphi} - 2mr\ddot{x}. \end{aligned} \quad (8)$$

Визначимо потенціальну енергію системи

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$$

як роботу сил ваги по переміщенню відповідних тіл з поточного положення в початкове (рис. 18.5):

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = m_2g s_2, \quad \Pi_3 = m_3g(s_2 - x).$$

Переміщення  $s_2$  центра мас тіла 2 визначається на підставі кінематичного співвідношення (3). Запишемо його у диференціалах та домножимо на  $dt$ :

$$ds_2 = R_1 d\varphi.$$

Після інтегрування цього виразу на інтервалі  $[0; t]$  отримаємо

$$s_2(t) - s_2(0) = R_1(\varphi(t) - \varphi(0)).$$

Звідси при нульових початкових умовах за координатою  $\varphi$  та  $s_2$  дістанемо

$$s_2(t) = R_1\varphi(t).$$

Тоді потенціальна енергія системи як функція узагальнених координат  $x$  та  $\varphi$  набуває вигляду

$$\Pi = m_2gR_1\varphi + m_3g(R_1\varphi - x) = 4mgr\varphi - mgx.$$

Знаходимо частинні похідні за узагальненими координатами від потенціальної енергії системи:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -mg, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 4mgr. \quad (9)$$

Узагальнені сили  $Q_x^*$  та  $Q_\varphi^*$  визначимо як коефіцієнти при варіаціях узагальнених координат у виразі елементарної роботи непотенціальних сил. До останніх належить пара сил з моментом  $M$ .

Зафіксуємо координату  $x$  і надамо механічній системі елементарне переміщення  $\delta\varphi$  у бік додатних значень зміни кута повороту  $\varphi$ . Відповідна елементарна робота має вигляд

$$\delta A = M\delta\varphi,$$

звідки маємо

$$Q_\varphi^* = M. \quad (10)$$

На елементарному переміщенні  $\delta x$  непотенціальні сили роботи не виконують, тобто

$$Q_x^* = 0. \quad (11)$$

Отже, система рівнянь Лагранжа другого роду (1) з урахуванням виразів (7) — (11) запишеться так:

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} - 2mr\ddot{\varphi} = mg, \quad (12)$$

$$12mr^2\ddot{\varphi} - 2mr\ddot{x} = -4mgr + M.$$

Рівняння (12) можна розв'язати відносно похідних

$$\ddot{x} = a_0 = \text{const}, \quad \ddot{\varphi} = \varepsilon_0 = \text{const},$$

$$\text{де } a_0 = \frac{2mgr + M}{7mr}, \quad \varepsilon_0 = \frac{-8mgr + 3M}{28mr^2}.$$

Тоді перші інтеграли диференціальних рівнянь мають вигляд

$$\dot{x} = a_0t + C_1, \quad \dot{\varphi} = \varepsilon_0t + C_3,$$

другі інтеграли —

$$x = a_0 \frac{t^2}{2} + C_1t + C_2, \quad \varphi = \varepsilon_0 \frac{t^2}{2} + C_3t + C_4.$$

На підставі початкових умов визначаємо сталі інтегрування  $C_1 - C_4$  і отримуємо шукані рівняння руху механічної системи:

$$x = \frac{2mgr + M}{14mr}t^2 + \dot{x}_0t, \quad \varphi = \frac{-8mgr + 3M}{56mr^2}t^2.$$

**Приклад 18.6.** Механічна система складається з п'яти тіл, маси яких відповідно дорівнюють  $m_1, m_2, m_3, m_4$  та  $m_5$  (рис. 18.6, а). Тіло 1 рухається вздовж горизонтальної шорсткої поверхні, коефіцієнт тертя ковзання при русі тіла 1  $f = 0,1$ . Блок 4 — східчастий, причому радіуси його ступенів  $r$  та  $0,5r$ , а радіус інерції —  $i$ . Блоки 3 та 5 мають однакові радіуси, що дорівнюють  $r$ . До блока 3 прикладена пара сил з моментом  $M$ . Склад-

ти диференціальні рівняння руху механічної системи, якщо тіла з'єднані невагомою нерозтяжною ниткою.

**Розв'язування.** Дана механічна система має два степені вільності. Це визначається шляхом накладання двох додаткових в'язей — вони повністю зупиняють механічну систему.

За узагальнені координати візьмемо переміщення тіла 1 вздовж горизонтальної

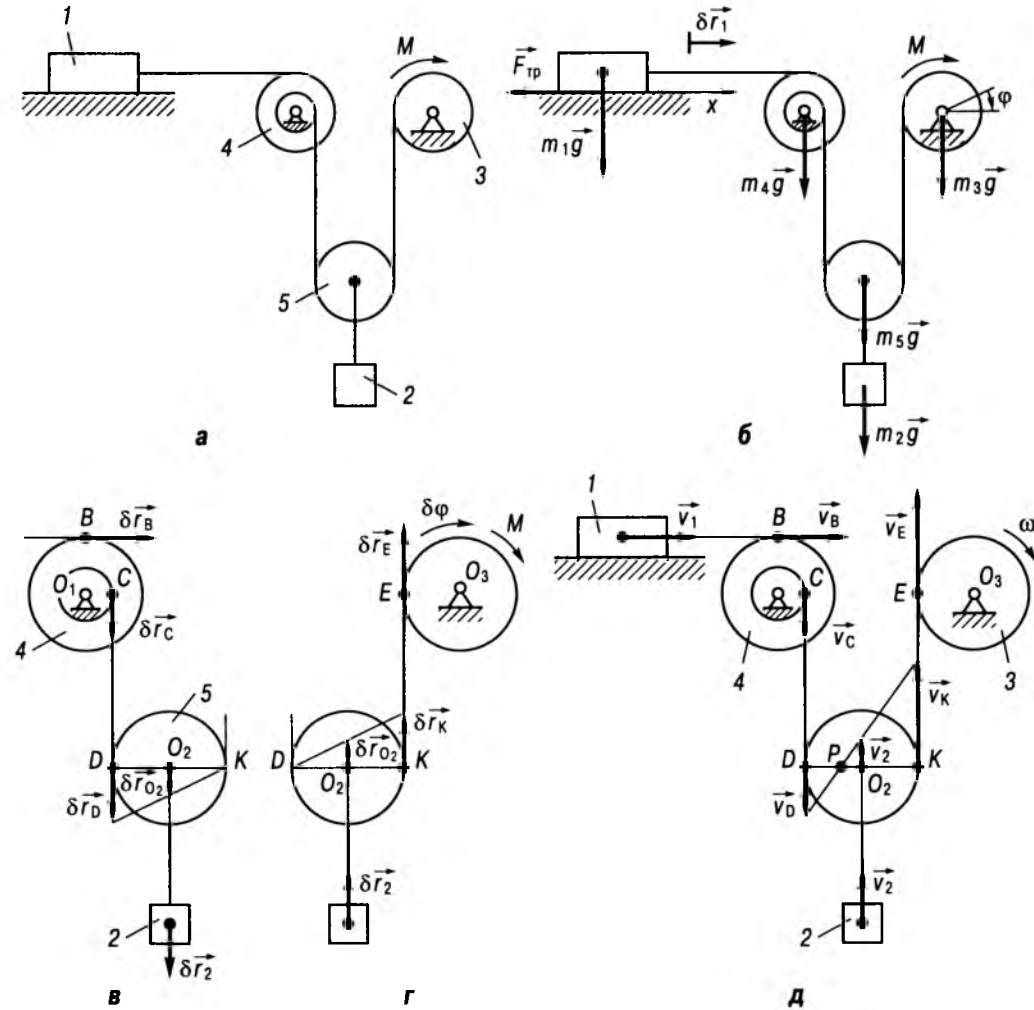


Рис. 18.6

площини та кут повороту блока 3:  $q_1 = x$ ,  $q_2 = \varphi$ .

Вказаним узагальненим координатам відповідає наступна система рівнянь Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \quad (1)$$

Для визначення узагальнених сил  $Q_x$  та  $Q_\varphi$  скористаємось виразом (18.2). Нитка та осі обертання блоків є ідеальними в'язями. Горизонтальна шорстка поверхня не є ідеальною. Тому до активних сил, прикладених до точок даної системи — сил тяжіння  $m_1\vec{g}$ ,  $m_2\vec{g}$ ,  $m_3\vec{g}$ ,  $m_4\vec{g}$ ,  $m_5\vec{g}$  та пари сил з моментом  $M$ , — умовно віднесено силу тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , яка вносить неідеальність (рис. 18.6, б). Враховуючи, що тіло 1 може здійснювати рух під дією нитки в правий бік, напрямимо силу тертя ковзання в лівий бік вздовж площини руху.

Визначимо спочатку узагальнену силу  $Q_x$ , яка відповідає узагальненій координаті  $x$ . Для цього зафіксуємо кут повороту  $\varphi$  та надамо тілу 1 можливе переміщення  $\delta\vec{r}_1$ , яке направлене у бік додатного приросту узагальненої координати  $x$ . Обчислимо алгебраїчну суму елементарних робіт активних сил на можливих переміщеннях точок їх прикладання, які спричиняються переміщенням  $\delta\vec{r}_1$ :

$$\delta A = m_1\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_1 + \vec{F}_{\text{тр}} \cdot \delta\vec{r}_1 + m_2\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_2 + m_3\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_{O_2}, \quad (2)$$

де  $\delta\vec{r}_2$  та  $\delta\vec{r}_{O_2}$  — можливі переміщення тіла 2 та центра блока 5.

Зв'язок між можливими переміщеннями носить кінематичний характер. Оскільки тіло 4 здійснює обертальний рух, маємо

$$\frac{\delta r_1}{r} = \frac{\delta r_C}{0,5r},$$

де  $\delta r_C$  — можливе переміщення точки  $C$  (рис. 18.6, в). Отримаємо

$$\delta r_C = 0,5\delta r_1. \quad (3)$$

З умови нерозтяжності нитки випливає, що швидкості точок  $C$  та  $D$  будуть однакові, відповідно однаковими будуть і можливі переміщення цих точок:

$$\delta r_C = \delta r_D.$$

У випадку фіксованого кута повороту  $\varphi$  блока 3 точка  $K$  є миттєвим центром швидкостей тіла 5, яке здійснює плоскопаралельний рух (рис. 18.6, в). Тоді можливі переміщення центра  $O_2$  блока 5 і тіла 1 з урахуванням (3) пов'язані співвідношенням

$$\delta r_{O_2} = \frac{1}{2}\delta r_D = \frac{1}{4}\delta r_1. \quad (4)$$

Нитка, що з'єднує тіло 2 і точку  $O_2$ , рухається поступально. Тоді на підставі (4) відстанемо

$$\delta r_2 = \delta r_{O_2} = \frac{1}{4}\delta r_1. \quad (5)$$

Отже, співвідношення (2) з урахуванням напрямків векторів можна записати у формі

$$\delta A = -F_{\text{тр}}\delta r_1 + \frac{1}{4}(m_2 + m_3)g\delta r_1 = \left[ \frac{1}{4}(m_2 + m_3)g - F_{\text{тр}} \right] \delta r_1. \quad (6)$$

Тут враховано, що сила  $m_1\vec{g}$  роботу на переміщенні  $\delta\vec{r}_1$  не виконує. Силу тертя ковзання визначимо з виразу  $F_{\text{тр}} = fN$ , де  $N$  — нормальна складова реакції поверхні руху тіла 1, яка у випадку паралельності нитки до поверхні визначається так:

$$N = m_1g.$$

Використовуючи означення узагальненої сили і те, що  $\delta r_1$  збігається з додатним приростом  $\delta x$  узагальненої координати  $x$ , з виразу (6), записаного у формі  $\delta A = Q_x\delta r_1 = Q_x\delta x$ , отримуємо

$$Q_x = \left( \frac{1}{4}(m_2 + m_3) - fm_1 \right) g. \quad (7)$$

Визначимо тепер узагальнену силу  $Q_\varphi$ , яка відповідає узагальненій координаті  $\varphi$ . Зафіксуємо тіло 1 на горизонтальній площині і надамо блоку 3 можливе переміщення  $\delta\varphi$ , що відповідає додатному приросту

кута повороту  $\varphi$  (за стрілкою годинника). Обчислимо алгебраїчну суму елементарних робіт активних сил на можливих переміщеннях, які спричиняються приростом  $\delta\varphi$ :

$$\delta A = \vec{M} \cdot \delta\vec{\varphi} + m_2\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_2 + m_3\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_{O_2}.$$

Тут  $\delta\vec{\varphi}$  — вектор, напрямок якого збігається з напрямком вектора кутової швидкості повороту блока 3 на кут  $\delta\varphi$ ;  $\delta\vec{r}_2$  та  $\delta\vec{r}_{O_2}$  — можливі переміщення тіла 2 та центра блока 5, зумовлені приростом  $\delta\varphi$ . З урахуванням напрямків векторів отримаємо

$$\delta A = M\delta\varphi - m_2g\delta r_2 - m_3g\delta r_{O_2}. \quad (8)$$

Встановимо зв'язок між можливими переміщеннями.

Тіло 3 (рис. 18.6, г) здійснює обертальний рух, елементарне переміщення точки  $E$  цього тіла

$$\delta r_E = r\delta\varphi. \quad (9)$$

Точка  $D$  при фіксованій узагальненій координаті  $x$  є миттєвим центром швидкостей тіла 5. Тоді можливі переміщення точки  $K$  та центра  $O_2$  блока 5 пов'язані співвідношенням

$$\delta r_{O_2} = \frac{1}{2}\delta r_K. \quad (10)$$

Враховуючи, що нитка нерозтяжна і частина нитки між точкою  $O_2$  і тілом 2 рухається поступально, можна записати

$$\delta r_K = \delta r_E, \quad \delta r_2 = \delta r_{O_2}. \quad (11)$$

З виразів (9) — (11) отримаємо

$$\delta r_2 = \delta r_{O_2} = \frac{1}{2}r\delta\varphi. \quad (12)$$

Тоді узагальнена сила  $Q_\varphi$  визначається з виразу

$$\delta A = M\delta\varphi - \frac{1}{2}(m_2 + m_3)gr\delta\varphi = Q_\varphi\delta\varphi,$$

тобто

$$Q_\varphi = M - \frac{1}{2}(m_2 + m_3)gr. \quad (13)$$

Знайдемо тепер вираз для кінетичної енергії механічної системи

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$$

як функцію узагальнених координат  $x$  і  $\varphi$  та узагальнених швидкостей  $\dot{x}$  і  $\dot{\varphi}$ .

Кінетична енергія тіла 1, що здійснює поступальний рух,

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2. \quad (14)$$

Тут  $v_1 = \dot{x}$  — узагальнена швидкість, яка відповідає узагальненій координаті  $x$ .

Тіло 2 рухається поступально, тому

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2, \quad (15)$$

де  $v_2$  — швидкість тіла 2, яка за умови нерозтяжності нитки дорівнює швидкості точки  $O_2$  блока 5. Блок 5 здійснює плоскопаралельний рух (рис. 18.6, д), напрям швидкостей точок  $D$  та  $K$  відповідає додатним значенням узагальнених швидкостей  $\dot{x}$  і  $\dot{\varphi}$ . Тоді швидкість точки  $O_2$  (і тіла 2) на підставі рис. 18.6, д визначимо так:

$$v_2 = v_{O_2} = \frac{1}{2}(v_K - v_D). \quad (16)$$

Частини нитки  $CD$  і  $EK$  нерозтяжні, внаслідок чого маємо

$$v_K = v_E = \omega_3 r, \quad v_D = v_C = \frac{1}{2}v_B = \frac{1}{2}v_1. \quad (17)$$

Тут  $\omega_3 = \dot{\varphi}$  — кутова швидкість обертального руху тіла 3. На підставі формул (16) та (17) запишемо

$$v_{O_2} = v_2 = \frac{1}{2}(\dot{\varphi}r - \frac{1}{2}\dot{x}), \quad (18)$$

а після підстановки в (15) отримаємо

$$T_2 = \frac{1}{32}m_2(2\dot{\varphi}r - \dot{x})^2. \quad (19)$$

Кінетична енергія блоків 3 та 4, які здійснюють обертальний рух навколо нерухомих осей, визначається так:

$$T_3 = \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 = \frac{1}{2}I_3\dot{\varphi}^2,$$

$$T_4 = \frac{1}{2}I_4\omega_4^2 = \frac{1}{2}I_4\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2. \quad (20)$$

Осьовий момент інерції  $I_3$  для однорідного блока подається у вигляді  $I_3 = \frac{1}{2}m_3r^2$ . Момент інерції  $I_4$  східчастого блока визначимо через радіус інерції  $I_4 = m_4i^2$ .

Оскільки блок 5 здійснює плоскопаралельний рух, його кінетична енергія визначається з виразу

$$T_5 = \frac{1}{2} m_5 v_{O_2}^2 + \frac{1}{2} I_5 \omega_5^2.$$

Кутову швидкість  $\omega_5$  блока 5 знайдемо, використовуючи залежність між швидкостями точок  $D$  і  $K$  та відстанями від цих точок до миттєвого центра швидкостей  $P$  (рис. 18.6, д):

$$\omega_5 = \frac{v_K}{PK} = \frac{v_D}{PD}. \quad (21)$$

Оскільки  $PK = 2r - PD$ , то пропорцію формули (21) можна записати так:

$$PD \cdot v_K = (2r - PD)v_D.$$

Звідси, збираючи коефіцієнти при множенні  $PD$ , отримуємо пропорцію

$$\omega_5 = \frac{v_D}{PD} = \frac{v_K + v_D}{2r}.$$

Підставимо в цей вираз праві частини формул (17). Отримаємо

$$\omega_5 = \frac{2\dot{\varphi}r + \dot{x}}{4r}. \quad (22)$$

Формули (18) та (22) підставимо у вираз для кінетичної енергії блока 5 і врахуємо, що блок 5 є однорічний циліндр, тобто його осьовий момент інерції  $I_5 = \frac{1}{2} m_5 r^2$ . Таким чином дістанемо

$$T_5 = \frac{1}{64} m_5 \left( 2(2\dot{\varphi}r - \dot{x})^2 + (2\dot{\varphi}r + \dot{x})^2 \right). \quad (23)$$

Отже, кінетична енергія даної механічної системи як сума виразів (14), (19), (20) та (23) дорівнює

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{32} m_2 (2\dot{\varphi}r - \dot{x})^2 + \frac{1}{4} m_3 r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_4 \left( \frac{i}{r} \right)^2 \dot{x}^2 + \frac{1}{64} m_5 \left( 2(2\dot{\varphi}r - \dot{x})^2 + (2\dot{\varphi}r + \dot{x})^2 \right). \quad (24)$$

Визначаємо частинні похідні від отриманого виразу за узагальненими координатами

та узагальненими швидкостями. Відсутність змінних  $x$  та  $\varphi$  у виразі (24) дає змогу записати

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \left( m_1 + \frac{1}{16} m_2 + m_4 \left( \frac{i}{r} \right)^2 + \frac{3}{32} m_5 \right) \dot{x} - \frac{1}{16} (2m_2 + m_5) r \dot{\varphi}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{8} (2m_2 + 4m_3 + 3m_5) r^2 \dot{\varphi} - \frac{1}{16} (2m_2 + m_5) r \dot{x}.$$

Після диференціювання за часом двох останніх виразів отримуємо рівняння руху механічної системи у формі (1):

$$\left( m_1 + \frac{1}{16} m_2 + m_4 \left( \frac{i}{r} \right)^2 + \frac{3}{32} m_5 \right) \ddot{x} - \frac{1}{16} (2m_2 + m_5) r \ddot{\varphi} = \left( \frac{1}{4} (m_2 + m_5) - f m_1 \right) g, \\ \frac{1}{8} (2m_2 + 4m_3 + 3m_5) r^2 \ddot{\varphi} - \frac{1}{16} (2m_2 + m_5) r \ddot{x} = M - \frac{1}{2} (m_2 + m_5) g r.$$

**Приклад 18.7.** По призмі  $A$ , похила площина якої утворює кут  $\alpha$  з горизонтом, ковзає тіло  $B$  вагою  $P_2$  (рис. 18.7, а). До тіла  $B$  за допомогою циліндричного шарніра  $O$  приєднано тонкий однорідний стрижень  $OD$  вагою  $P_1$  завдовжки  $l$ . Стрижень здійснює коливання навколо осі  $O$ , яка перпендикулярна до площини рисунка. Скласти диференціальні рівняння руху даної механічної системи, беручи до уваги, що до призми  $A$  вагою  $P_3$  прикріплена пружина жорсткістю  $c$ . Тертя знехтувати.

**Розв'язування.** Дана механічна система має три степені вільності. Положення призми  $A$  задамо координатою  $x$ . Положення тіла  $B$  задамо відносно призми  $A$  відстанню  $s$  точки  $O$  від деякого початкового по-

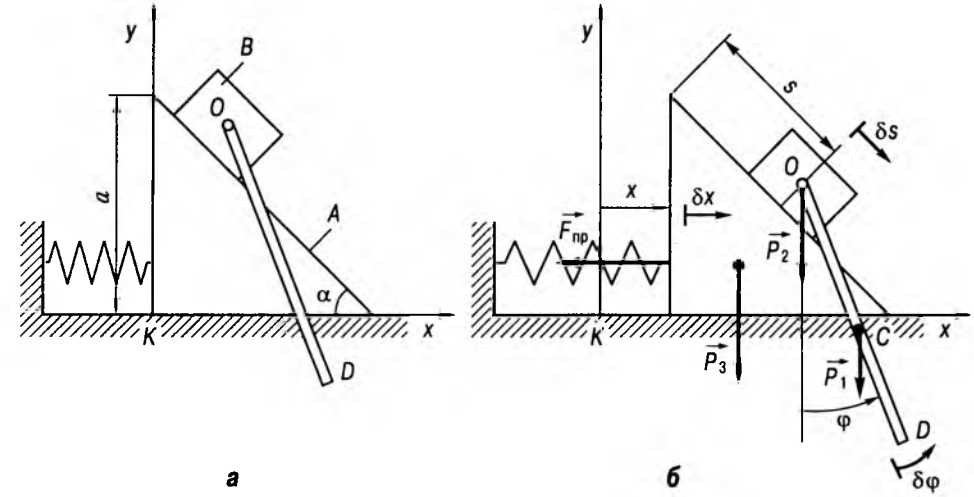


Рис. 18.7

ження (рис. 18.7, б). Положення стрижня  $OD$  задамо відносно тіла  $B$  кутом відхилення від вертикалі  $\varphi$ .

Отже, за узагальнені вибираємо координати  $q_1 = x$ ,  $q_2 = s$ ,  $q_3 = \varphi$ .

Даній сукупності узагальнених координат відповідає система трьох рівнянь Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \quad (1)$$

Визначимо узагальнені сили, які відповідають вибраним узагальненим координатам.

Спочатку зафіксуємо параметри  $s$  та  $\varphi$ , а узагальненій координаті  $x$  надамо узагальнене можливе переміщення  $\delta x$  у бік додатних значень і знайдемо алгебраїчну суму робіт активних сил на можливих переміщеннях точок їх прикладання, зумовлених переміщенням  $\delta x$ . Активними силами є сили ваги  $\vec{P}_1, \vec{P}_2$  і  $\vec{P}_3$  та сила пружності  $F_{np} = -cx$ . Для заданого можливого переміщення роботу виконує тільки сила пружності:

$$\delta A = Q_x \delta x = -cx \delta x,$$

тобто

$$Q_x = -cx. \quad (2)$$

Зафіксуємо тепер змінні  $x$  та  $\varphi$  і надамо додатний приріст змінній  $s$ . Знайдемо алгебраїчну суму робіт активних сил на можливих переміщеннях їх точок прикладання, що зумовлені узагальненим можливим переміщенням  $\delta s$  ( $\delta s > 0$ ):

$$\delta A = \delta A(\vec{P}_1) + \delta A(\vec{P}_2) = P_1 \delta s \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + P_2 \delta s \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = (P_1 + P_2) \sin \alpha \delta s. \quad (3)$$

Коефіцієнтом при  $\delta s$  у виразі (3) є узагальнена сила  $Q_s$ , тобто

$$Q_s = (P_1 + P_2) \sin \alpha. \quad (4)$$

Знайдемо останню узагальнену силу  $Q_\varphi$ , яка відповідає узагальненій координаті  $\varphi$ . Зафіксуємо змінні  $x$  та  $s$  і надамо можливе переміщення  $\delta \varphi$ , напрямлене у бік додатних значень узагальненої координати  $\varphi$ . Тоді можлива робота активних сил на переміщеннях точок їх прикладання, які спричинюються узагальненим переміщенням  $\delta \varphi$ , має вигляд

$$\delta A = Q_\varphi \delta \varphi = \delta A(\vec{P}_1).$$

Робота сили ваги  $\bar{P}_1$ , яка прикладена у центрі мас  $C$  стрижня, визначається так:

$$\delta A(\bar{P}_1) = -P_1 \frac{l}{2} \sin \varphi \delta \varphi. \quad (5)$$

Коефіцієнт при  $\delta \varphi$  у виразі (5) дорівнює шуканій узагальненій силі

$$Q_\varphi = -P_1 \frac{l}{2} \sin \varphi. \quad (6)$$

Визначаємо тепер кінетичну енергію системи як функцію узагальнених координат та узагальнених швидкостей.

Кінетична енергія призми  $A$ , яка рухається поступально,

$$T_A = \frac{1}{2} m_3 \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} \dot{x}^2. \quad (7)$$

Тіло  $B$  здійснює поступальний рух, який є сукупністю двох поступальних рухів: переносного руху зі швидкістю  $\dot{x}$  та відносного, швидкість якого  $\dot{s}$ , а кут між напрямком цих рухів дорівнює  $\alpha$ . Тоді

$$T_B = \frac{1}{2} m_2 v_B^2 = \frac{P_2}{2g} (\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{x}\dot{s} \cos \alpha). \quad (8)$$

Стрижень  $OD$  здійснює плоскопаралельний рух, його кінетична енергія

$$T_{OD} = \frac{1}{2} m_1 v_C^2 + \frac{1}{2} I_{OD} \dot{\varphi}^2. \quad (9)$$

Швидкість центра мас  $C$  стрижня  $OD$  визначимо так:

$$v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2, \quad (10)$$

де  $\dot{x}_C$ ,  $\dot{y}_C$  — проекції швидкості точки  $C$  в нерухомій системі координат  $Kxy$ . Координати точки  $C$

$$x_C = x + s \cos \alpha + \frac{l}{2} \sin \varphi,$$

$$y_C = a - s \sin \alpha - \frac{l}{2} \cos \varphi.$$

Після диференціювання за часом отримаємо

$$\dot{x}_C = \dot{x} + \dot{s} \cos \alpha + \dot{\varphi} \frac{l}{2} \cos \varphi,$$

$$\dot{y}_C = -\dot{s} \sin \alpha + \dot{\varphi} \frac{l}{2} \sin \varphi. \quad (11)$$

Беручи до уваги, що момент інерції стрижня  $OD$  відносно осі підвісу  $I_{OD} = \frac{m_1 l^2}{12}$ , для кінетичної енергії системи, на підставі формул (7) — (11), маємо

$$\begin{aligned} T = T_A + T_B + T_{OD} = & \frac{1}{2g} (P_1 + P_2 + P_3) \dot{x}^2 + \\ & + \frac{1}{2g} (P_1 + P_2) \dot{s}^2 + \frac{P_1 l^2}{6g} \dot{\varphi}^2 + \\ & + \frac{1}{g} (P_1 + P_2) \dot{x} \dot{s} \cos \alpha + \frac{1}{2g} P_1 l \dot{\varphi} \dot{x} \cos \varphi + \\ & + \frac{1}{2g} P_1 l \dot{\varphi} \dot{s} \cos (\varphi + \alpha). \end{aligned} \quad (12)$$

Знаходимо частинні похідні від кінетичної енергії

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2g} P_1 l [\dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{s} \dot{\varphi} \sin (\varphi + \alpha)],$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{g} P \dot{x} + \frac{1}{g} (P_1 + P_2) \dot{s} \cos \alpha + \frac{1}{2g} P_1 l \dot{\varphi} \cos \varphi,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = & \frac{1}{g} (P_1 + P_2) (\dot{s} + \dot{x} \cos \alpha) + \\ & + \frac{1}{2g} P_1 l \dot{\varphi} \cos (\varphi + \alpha), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{P_1 l^2}{3g} \dot{\varphi} + \frac{1}{2g} P_1 l [\dot{x} \cos \varphi + \dot{s} \cos (\varphi + \alpha)],$$

де  $P = P_1 + P_2 + P_3$ .

Частинні похідні (13) та узагальнені сили (2), (4), (6) підставимо в (1) і отримаємо шукані диференціальні рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ P \dot{x} + (P_1 + P_2) \dot{s} \cos \alpha + \frac{1}{2} P_1 l \dot{\varphi} \cos \varphi \right] = -g x, \\ \frac{d}{dt} \left[ 2(P_1 + P_2) (\dot{s} + \dot{x} \cos \alpha) + P_1 l \dot{\varphi} \cos (\varphi + \alpha) \right] = 2(P_1 + P_2) g \sin \alpha, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{P_1 l^2}{3g} \ddot{\varphi} + \frac{1}{2g} P_1 l [\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{s} \cos (\varphi + \alpha)] = -\frac{P_1 l}{2} \sin \varphi$$

### § 18.3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

**18.1.** Два барабани масою  $m_1$  та  $m_2$  з нерухомими осями обертання з'єднані пасовою передачею (рис. 18.8). До барабана 1 прикладено пару сил з моментом  $M$ . Визначити кутове прискорення барабана 2, якщо в підшипниках його осі обертання діє момент сил опору  $M_{\text{оп}}$ . Радіуси барабанів дорівнюють  $r_1$  та  $r_2$ . Барабани вважати однорідними суцільними циліндрами.

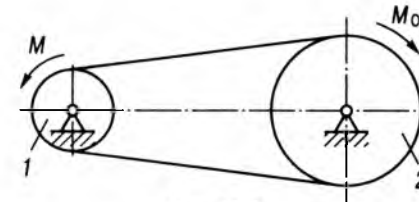


Рис. 18.8

$$\text{Відповідь: } \varepsilon_2 = \frac{2Mr_2 - 2M_{\text{оп}}r_1}{(m_1 + m_2)r_1r_2^2}.$$

**18.2.** Редуктор складається з двох конічних зубчастих коліс з нерухомими перпендикулярними осями обертання (рис. 18.9). До шестерні 1 з боку мотора прикладається сталий обертальний момент  $M$ . Зубчасте колесо 2 насаджено на одну вісь з барабаном  $A$ . Скласти диференціальне рівняння

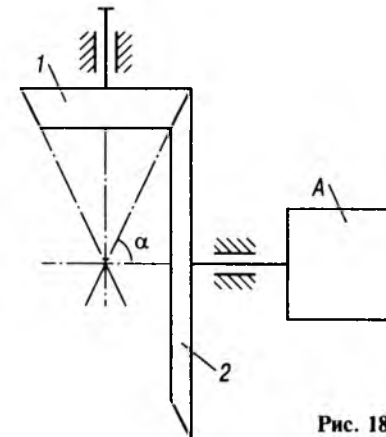


Рис. 18.9

руху барабана, якщо момент інерції шестірні 1 дорівнює  $I_1$ , а момент інерції зубчастого колеса 2 разом з барабаном —  $I_2$ . Спільна твірна конічних зубчастих коліс утворює кут  $\alpha$  з віссю обертання колеса 2.

Відповідь:  $(I_1 i^2 + I_2) \ddot{\varphi} = Mi$ , де  $i = \text{tg} \alpha$ .

**18.3.** Клин масою  $m_1 = 2$  кг з кутом  $\alpha = 30^\circ$  при вершині ковзає вздовж гладкої вертикальної стіни (рис. 18.10) і зсуває брус масою  $m_2 = 3$  кг. Визначити прискорення клина, якщо коефіцієнт тертя ковзання при русі бруса  $f = 0,1$ .

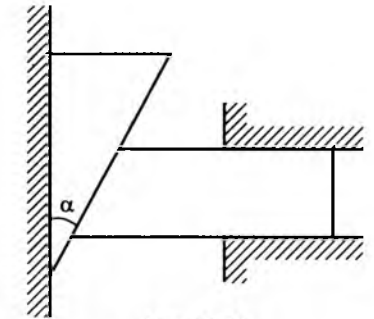


Рис. 18.10

Відповідь:

$$w = \frac{m_1 - f(m_1 + m_2) \text{tg} \alpha}{m_1 + f m_1 \text{tg} \alpha + m_2 \text{tg}^2 \alpha} g = 5,38 \text{ м/с}^2.$$

**18.4.** Механічна система складається з однорідного суцільного блока 1 вагою  $P_1$ , з'єданого пасовою передачею зі східчастим блоком 2 вагою  $P_2$ , та вантажу вагою  $Q$  (рис. 18.11). До блока 1 прикладено момент пари сил  $M$ . Скласти диференціальне рів-

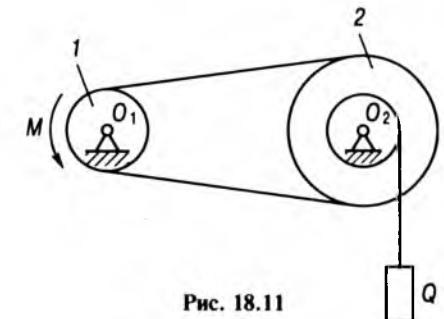


Рис. 18.11

няння руху вантажу, вважаючи, що він піднімається вгору за допомогою нерозтяжної мотузки. Радіус блока 1 дорівнює  $R_1 = r$ , великий та малий радіуси блока 2 відповідно  $R_2 = 2r$ ,  $r_2 = r$ , радіус інерції блока 2 дорівнює  $r\sqrt{3}$ .

Відповідь:  $(2P_1 + 3P_2 + Q)\frac{1}{g}\ddot{s} = \frac{2}{r}M - Q$ , де  $s$  — переміщення вантажу  $Q$  вгору.

**18.5.** Механічна система, що складається з рухомого блока 1 та нерухомого блока 2, рухається під дією сил ваги (рис. 18.12). Визначити прискорення центра ваги рухомого блока, якщо блоки є однорідними циліндрами вагою  $P_1$  та  $P_2$  відповідно. Частини невагомої нерозтяжної нитки, які не охоплюють блоки, вважати вертикальними.

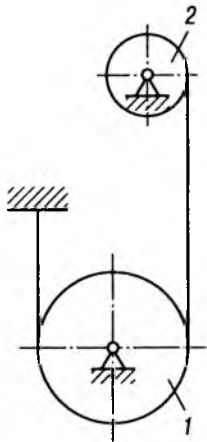


Рис. 18.12

Відповідь:  $w = \frac{2P_1}{3P_1 + 4P_2}g$ .

**18.6.** Однорідний суцільний коток 2, на який намотано невагому нерозтяжну мотузку, рухається вздовж похилої площини без ковзання (рис. 18.13). Другий кінець мотузки намотано на блок 1, він обертається під дією пари сил з моментом  $M$ . Скласти диференціальне рівняння руху блока 1, якщо маси тіл дорівнюють відповідно  $m_1$  і  $m_2$ , радіуси  $R_1$  та  $R_2$ . Масу блока вважати рівномірно розподіленою по ободу.

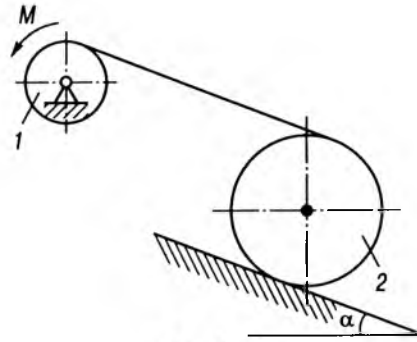


Рис. 18.13

Відповідь:  $(m_1 + \frac{3}{8}m_2)r_1^2\ddot{\phi} = M - \frac{1}{2}m_2gr_1\sin\alpha$ .

**18.7.** Однорідний ланцюг  $AB$  завдовжки  $l$ , частина якого розташована на горизонтальному виступі (рис. 18.14), перебуває у спокої. Довжина звисаючої частини  $a$ . Скласти диференціальне рівняння руху ланцюга, якщо коефіцієнт тертя ковзання ланцюга при його русі по горизонтальній частині виступа дорівнює  $f$ . Визначити, за яких умов ланцюг буде рухатись.

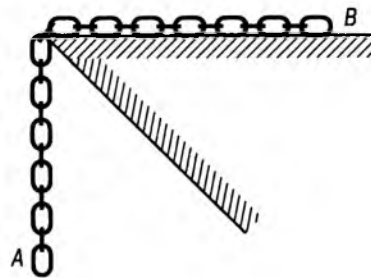


Рис. 18.14

Відповідь:  $\ddot{x} - g(1+f)x = g[a - (l-a)f]$ ,  $x$  — переміщення точки  $A$  по вертикалі вниз. Рух можливий за умови  $a > (l-a)f$ .

**18.8.** Однорідна мотузка  $AB$  завдовжки  $l$  розташована на двох гранях нерухомої призми (рис. 18.15), які складають кути  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$  з горизонтом ( $\alpha_1 > \alpha_2$ ). Довжина лівої від точки перегину частини мотузки дорівнює  $a$ . Скласти диференціальне рівняння руху мотузки, вважаючи її нерозтяжною. Тертям знехтувати.

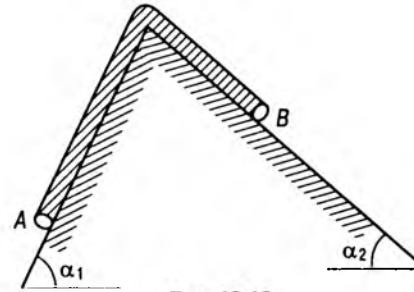


Рис. 18.15

Відповідь:  $l\ddot{x} - g(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)x = g[a\sin\alpha_1 - (l-a)\sin\alpha_2]$ ,  $x$  — переміщення точки  $A$ .

**18.9.** Два вантажі, з'єднані невагомою нерозтяжною ниткою, перекинутою через невагомий блок, можуть ковзати вздовж бічних поверхонь призми (рис. 18.16). Призма розташована на гладкій горизонтальній площині. Скласти диференціальні рівняння руху системи в координатах  $x$  та  $s$ , де  $x$  — переміщення тіла 1 відносно призми,  $s$  — переміщення призми. Маси вантажів дорівнюють  $m_1$  та  $m_2$  відповідно, маса призми  $m_3$ . Бічні

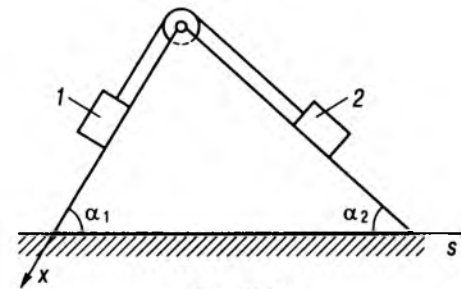


Рис. 18.16

поверхні призми утворюють з горизонтальною площиною кути  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$  відповідно.

Відповідь:  $(m_1 \cos\alpha_1 + m_2 \cos\alpha_2)\ddot{x} - (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{s} = 0$ ,  $(m_1 + m_2)\ddot{x} - (m_1 \cos\alpha_1 + m_2 \cos\alpha_2)\ddot{s} = m_1 g \sin\alpha_1 - m_2 g \sin\alpha_2$ .

**18.10.** Призма 1 масою  $m_1$  може пересуватись вздовж гладкої горизонтальної площини (рис. 18.17). На бічній поверхні призми, кут якої з горизонталлю дорівнює  $\alpha$ , знаходиться тіло 2 масою  $m_2$ . Пружина жорсткістю  $c$  приєднана одним кінцем до тіла, другим до призми. Скласти диференціальні рівняння руху системи в узагальнених координатах  $s$  та  $x$ , початок відліку осі  $x$  узяти в положенні статичної рівноваги тіла 2.

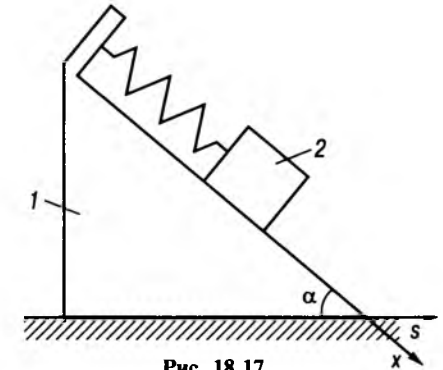


Рис. 18.17

Відповідь:  $m_2\ddot{x}\cos\alpha + (m_1 + m_2)\ddot{s} = 0$ ,  $m_2\ddot{x} + m_2\ddot{s}\cos\alpha = -cx$ .

**18.11.** Нерозтяжна мотузка, яку приєднано до вантажу 1 масою  $m_1$ , охоплює рухомий блок 4 і намотується на малий шків східчастого блока 3 з нерухомою віссю обертання (рис. 18.18). До осі блока 4 прикріплено на нерозтяжній мотузці вантаж 2 масою  $m_2$ . Визначити прискорення вантажу 1, якщо східчастий блок 3 має масу  $m_3$  та радіус інерції  $r\sqrt{2}$ . Блок 4 вважати однорідним суцільним циліндром масою  $m_4$ . Частини мотузки, які не охоплюють блоки, вважати

вертикальними. Радіуси блоків вказано на рисунку.

Відповідь:

$$w_1 = \frac{4m_1 - m_2 - m_3}{32m_1 + 2m_2 + 11m_3 + 16m_4} 8g.$$

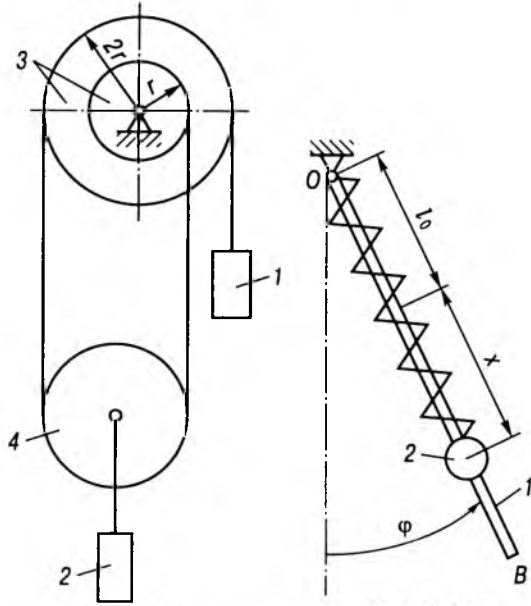


Рис. 18.18

18.12. Вздовж однорідного стрижня  $OB$  масою  $m_1$  завдовжки  $a$  може пересуватись кулька  $D$  масою  $m_2$  (рис. 18.19). Кулька з'єднана з одним кінцем пружини жорсткістю  $c$ , другий кінець якої закріплено у точці  $O$ . Скласти диференціальні рівняння руху системи в узагальнених координатах  $\varphi$  та  $x$ , беручи до уваги, що довжина вільної пружини дорівнює  $l_0$  ( $l_0 < a$ ).

$$\begin{aligned} \text{Відповідь: } & \frac{1}{3}m_1 a^2 \ddot{\varphi} + m_2(l_0 + x)^2 \ddot{\varphi} + \\ & + 2m_2(l_0 + x)\dot{\varphi} = -\left(\frac{1}{2}m_1 g a + m_2 g(l_0 + x)\right) \sin \varphi. \\ m_2 \ddot{x} - m_2(l_0 + x)\dot{\varphi}^2 & = -c x + m_2 g \cos \varphi. \end{aligned}$$

18.13. Один кінець невагомої нерозтяжної мотузки з'єднано з вантажем  $I$  масою  $m_1$  (рис. 18.20), який рухається вертикально вниз. Другий кінець мотузки намотано на коток  $2$ , який розташований на горизонтальній площині і має масу  $m_2$ . Коефіцієнт тертя ковзання мотузки об площину дорівнює  $f$ . Знайти прискорення тіла  $I$  та центра котка  $C$ , вважаючи коток однорідним суцільним циліндром.

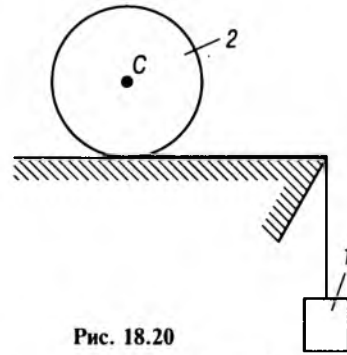


Рис. 18.20

$$\begin{aligned} \text{Відповідь: } w_1 & = \frac{m_1 - f m_2}{3m_1 + m_2} 3g, \\ w_C & = \frac{m_1 - f m_2}{3m_1 + m_2} g. \end{aligned}$$

18.14. На блок  $I$  радіуса  $R_1$  вагою  $P_1$ , який обертається під дією пари сил з моментом  $M$  навколо нерухомої осі, намотано невагому нерозтяжну мотузку (рис. 18.21). Другий

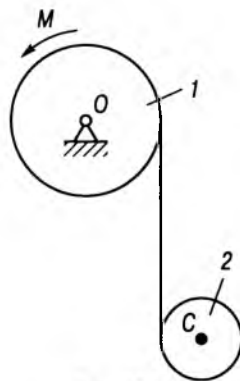


Рис. 18.21

кінець мотузки намотано на рухомий блок  $2$  вагою  $P_2$ . Вважаючи блоки однорідними суцільними циліндрами, знайти величину  $M$  моменту пари сил, при якій прискорення центра ваги блока  $2$  дорівнює нулю.

Відповідь:  $M = (P_1 + P_2)R_1$ .

18.15. Вантаж  $A$  вагою  $P_1$  з'єднано з невагомою нерозтяжною мотузкою, яку намотано на однорідний суцільний барабан  $B$  вагою  $P_2$  і радіусом  $r$  (рис. 18.22). Вважаючи, що вантаж  $A$  рухається під дією сили ваги у вертикальній площині з розкачуванням на кут  $\theta$ , скласти диференціальні рівняння руху системи. Довжина мотузки між тілом  $A$  та невагомим точковим блоком  $C$  в початковий момент часу дорівнювала  $l_0$ . Тертям в осі повороту барабана та блока знехтувати.

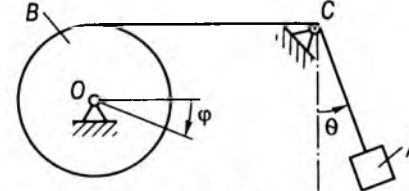


Рис. 18.22

Відповідь:

$$\begin{aligned} (P_1 + P_2)r\ddot{\varphi} - P_1(l_0 + \varphi r)\dot{\theta}^2 & = P_1 g \cos \theta, \\ \frac{d}{dt} \left[ (l_0 + \varphi r)^2 \theta \right] & = -g(l_0 + \varphi r) \sin \theta. \end{aligned}$$

18.16. Планетарний механізм, зубчасті колеса якого рухаються в горизонтальній площині, перебуває під дією моментів пар сил  $M$  та  $M_2$ , прикладених відповідно до кривошипа  $OA$  та колеса  $2$  (рис. 18.23). Колеса  $1$  та  $2$  вважати однорідними суцільними дисками масами  $m_1$  та  $m_2$ . Маса східчастого колеса та його радіус інерції відносно осі власного обертання дорівнюють  $m_3$  та  $r\sqrt{2}$ . Кривошип  $OA$  вважати однорідним стрижнем масою  $m_4$ . Радіуси коліс  $R_1 = 2r$ ,  $R_2 = 3r$ ,  $r_3 = r$ ,  $R_3 = 2r$ . Скласти диференціальні рівняння руху системи в узагальнених координатах  $\varphi_1$  та  $\varphi_2$ .

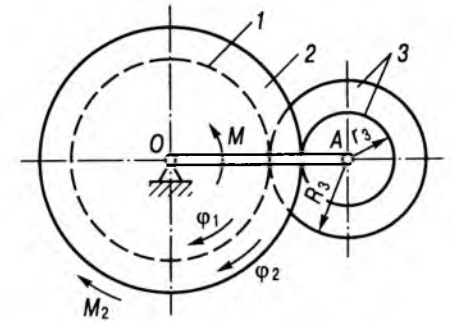


Рис. 18.23

$$\begin{aligned} \text{Відповідь: } & \left(2m_1 + 12m_3 + \frac{4}{3}m_4\right) r^2 \ddot{\varphi}_1 - \\ & - (24m_3 + 4m_4) r^2 \ddot{\varphi}_2 = \frac{1}{2} M, \quad -(24m_3 + 4m_4) \times \\ & \times r^2 \ddot{\varphi}_1 + \left(\frac{9}{2}m_2 + 54m_3 + 12m_4\right) r^2 \ddot{\varphi}_2 = M_2 - \frac{3}{2} M. \end{aligned}$$

18.17. Зубчасті колеса планетарного механізму, зображеного на рис. 18.24, розташовані в горизонтальній площині і рухаються під дією моментів пар сил  $M_1$  та  $M_2$ , прикладених відповідно до коліс  $1$  та  $2$ . Колеса  $1$  та  $2$  — однорідні суцільні диски, що мають масу  $m_1$  та  $m_2$ , а маса східчастого колеса  $3$  дорівнює  $m_3$ . Радіус інерції колеса  $3$  відносно осі власного обертання  $i = r\sqrt{2}$ . Кривошип  $OA$  вважати однорідним стрижнем масою  $m_4$ . Визначити співвідношення між

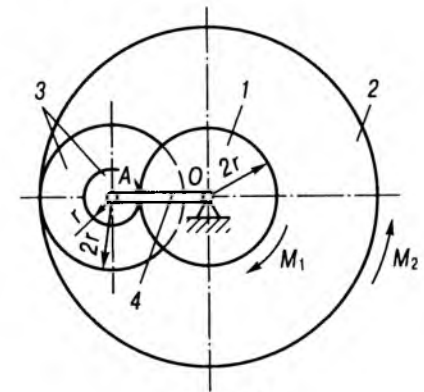


Рис. 18.24

моментами пар сил  $M_1$  та  $M_2$ , при якому зубчасте колесо 2 обертається рівномірно. Радіуси коліс вказано на рисунку.

Відповідь:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{27m_1 + 36m_3 + 8m_4}{10m_4}$$

**18.18.** Механічна система (рис. 18.25) складається з двох рухомих блоків 3 і 5, центри яких з'єднано невагомою нерозтяжною ниткою, нерухомого блока 4 та вантажів 1 і 2. На блоки 3 і 5 намотано нитки, які з'єднуються з вантажами 1 і 2. Частини нитки, що не охоплюють блоки, вертикальні. Блоки вважають однорідними циліндрами однакового радіуса  $R$  та однакової маси  $m$ . Маса вантажів  $m_1$  та  $m_2$ . Скласти диференціальні рівняння руху в узагальнених координатах  $x_1$ ,  $x_2$  та  $\varphi$ , де  $x_1$ ,  $x_2$  — переміщення вантажів відносно центрів рухомих блоків. Визначити кутове прискорення  $\varepsilon$  блока 4.

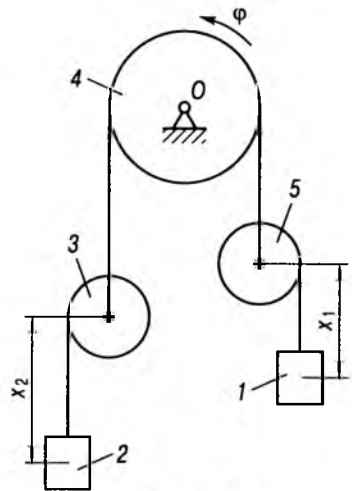


Рис. 18.25

Відповідь: 
$$\left(m_1 + \frac{1}{2}m\right)\ddot{x}_1 - m_1 R\ddot{\varphi} = m_1 g,$$

$$\left(m_2 + \frac{1}{2}m\right)\ddot{x}_2 + m_2 R\ddot{\varphi} = m_2 g,$$

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{5}{2}m\right)R^2\ddot{\varphi} - m_1 R\ddot{x}_1 + m_2 R\ddot{x}_2 = (m_2 - m_1)gR;$$

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{m_2 - m_1}{(20m_2m_1 + 8m_2m + 8m_1m + 3m^2)R} \cdot 2mg.$$

### § 18.4. РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Механічна система, що складається з чотирьох або п'яти тіл, рухається під дією сил ваги та пари сил з моментом  $M$  сталої величини. Дані для розв'язання задач наведено в табл. 18.1. Схеми механізмів подано на рис. 18.26.

Знайти кінематичні рівняння руху системи в узагальнених координатах  $q_1$  і  $q_2$ , які вказано в таблиці, при заданих початкових умовах.

У завданні позначено: через  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — кути повороту блоків, додатні напрямки яких показано на рисунках дуговими стрілками;  $s_1$ ,  $s_4$  і  $s_5$  — абсолютні переміщення відповідних тіл;  $s_2$ ,  $s_3$  — абсолютні переміщення центрів рухомих блоків 2 та 3. Узагальнена координата  $x$  є відносною і відповідає переміщенню тіла 4 вниз.

У табл. 18.1 позначено:  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$  — маси тіл;  $R_1, R_2, r_1, r_2$  — радіуси великих та малих кіл східчастих блоків 1 та 2;  $i_1$  та  $i_2$  — радіуси інерції цих блоків відносно горизонтальних осей, які проходять через їх центри. Блоки, для яких не вказано радіуси інерції, вважати суцільними однорідними циліндрами.

При виконанні завдання масами ниток знехтувати. Сили опору в осях обертання не враховувати.

Зразки виконання завдання наведено у прикладах 18.5 і 18.6.

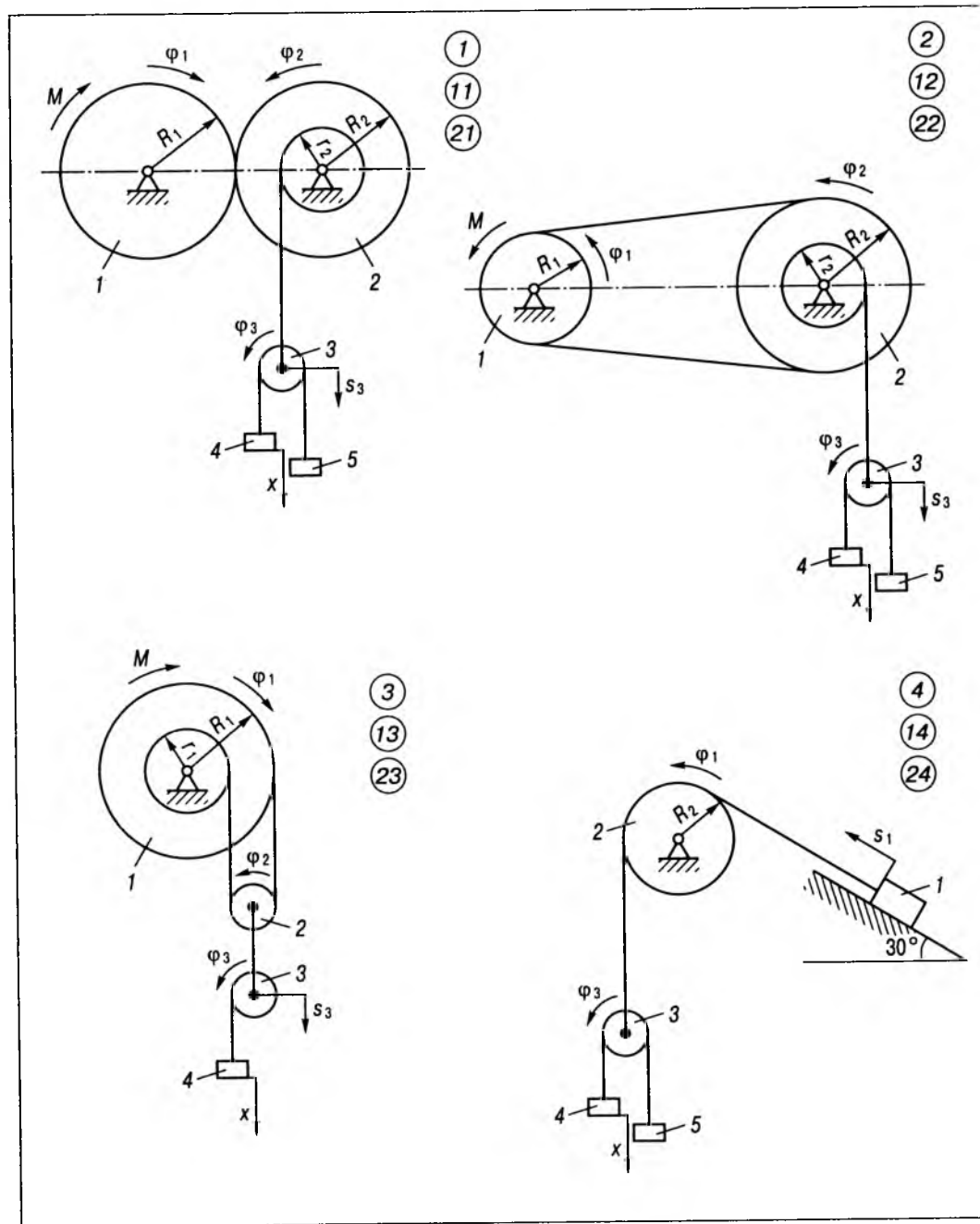


Рис. 18.26 (початок)

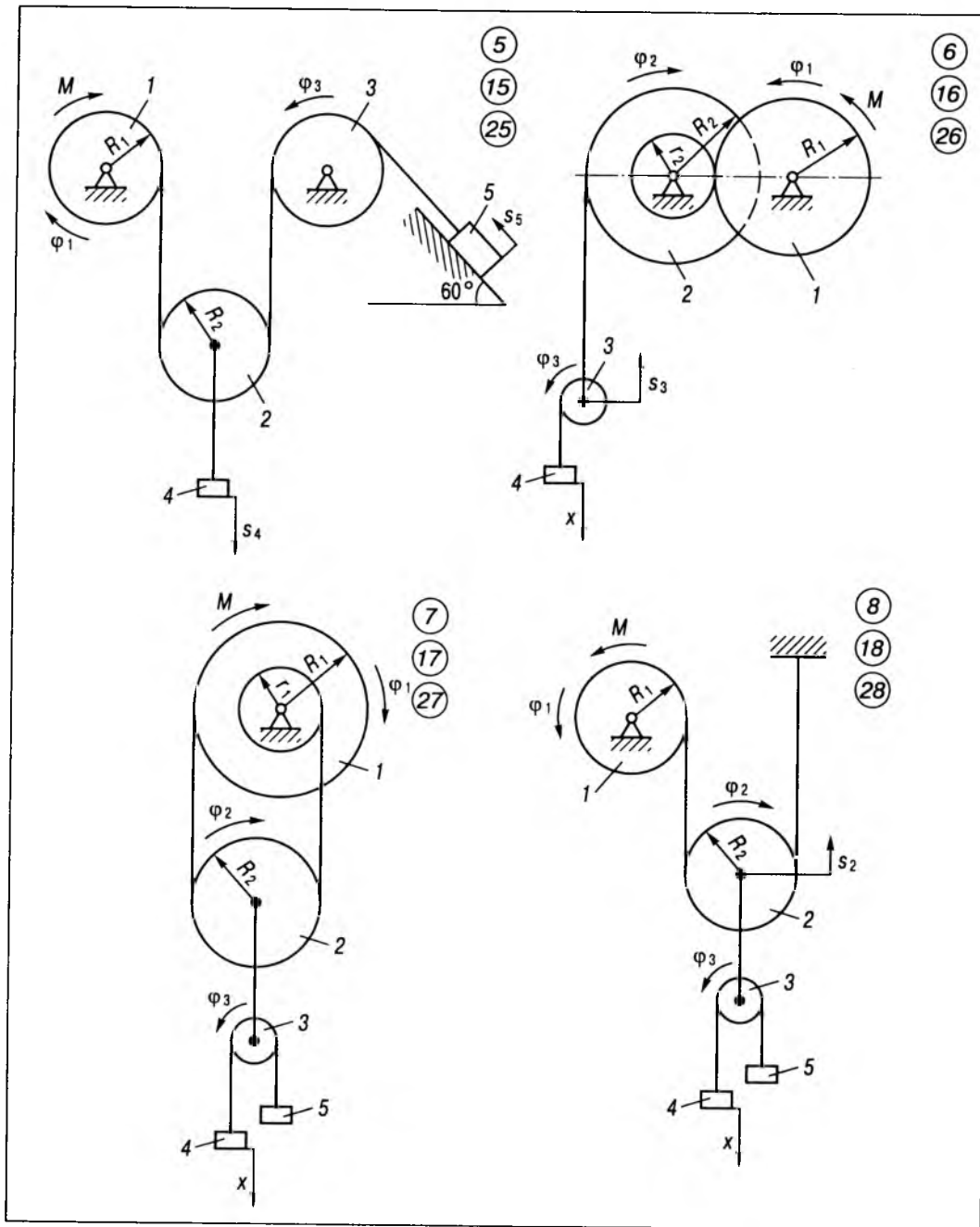


Рис. 18.26 (продовження)

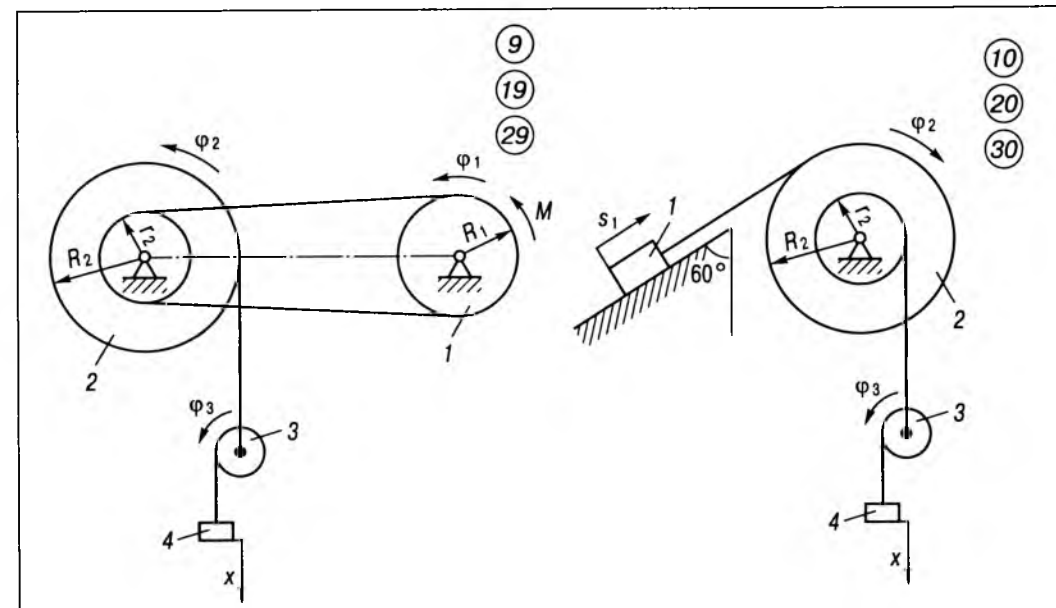


Рис. 18.26 (закінчення)

Таблиця 18.1

Варіант	Маси тіл					Радіуси блоків					Радіуси інерції		Узагальнені координати		Початкові умови			
	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$R_1$	$r_1$	$R_2$	$r_2$	$R_3$	$i_1$	$i_2$	$q_1$	$q_2$	$q_{10}$	$\dot{q}_{10}$	$q_{20}$	$\dot{q}_{20}$
1	$m$	$4m$	$m$	$2m$	$m$	$r$	-	$2r$	$r$	$0,5r$	-	$r\sqrt{2}$	$\varphi_2$	$x$	0	0	$x_0$	0
2	$m$	$5m$	$m$	$m$	$0,5m$	$r$	-	$2r$	$r$	$r$	-	$r\sqrt{2}$	$\varphi_1$	$x$	0	0	0	0
3	$4m$	$m$	$2m$	$m$	-	$2r$	$r$	$0,5r$	-	$0,5r$	$r\sqrt{2}$	-	$\varphi_2$	$x$	0	0	0	$\dot{x}_0$
4	$m$	$m$	$3m$	$2m$	$m$	$r$	$0,5r$	$r$	-	-	$r\sqrt{0,5}$	-	$s_3$	$x$	0	0	0	0
5	$2m$	$m$	$m$	$m$	$2m$	$r$	-	$r$	-	-	-	-	$\varphi_1$	$s_5$	0	0	0	$\dot{s}_{50}$
6	$m$	$5m$	$m$	$m$	-	$r$	-	$2r$	$r$	$r$	-	$r\sqrt{3}$	$\varphi_1$	$\varphi_3$	0	0	$\varphi_{30}$	0
7	$4m$	$2m$	$m$	$2m$	$m$	$2r$	$r$	$1,5r$	-	$r$	$r\sqrt{2}$	-	$\varphi_1$	$x$	0	0	0	0
8	$m$	$3m$	$m$	$m$	$0,5m$	$r$	-	$2r$	-	$r$	-	-	$s_3$	$\varphi_3$	$s_{30}$	0	0	0
9	$3m$	$2m$	$m$	$m$	-	$2r$	-	$r$	$0,5r$	$r$	-	$r\sqrt{0,5}$	$\varphi_1$	$\varphi_3$	0	$\varphi_{10}$	0	0
10	$2m$	$4m$	$m$	$2m$	-	-	-	$2r$	$r$	$r$	-	$r\sqrt{2}$	$s_1$	$\varphi_3$	$s_{10}$	0	0	0



Варіант	Маси тіл					Радіуси блоків					Радіуси інерції		Узагальнені координати		Початкові умови			
	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$R_1$	$r_1$	$R_2$	$r_2$	$R_3$	$i_1$	$i_2$	$q_1$	$q_2$	$q_{10}$	$\dot{q}_{10}$	$q_{20}$	$\dot{q}_{20}$
11	3m	2m	m	2m	m	2r	-	r	0,5r	0,5r	-	$r\sqrt{0.5}$	$\varphi_1$	$\varphi_3$	0	0	0	$\dot{\varphi}_{30}$
12	2m	3m	m	m	0,5m	2r	-	2r	r	r	-	$r\sqrt{2}$	$s_3$	x	0	0	0	$\dot{x}_0$
13	5m	m	m	m	-	3r	r	r	-	r	$r\sqrt{3}$	-	$\varphi_1$	$\varphi_3$	0	0	0	0
14	m	2m	2m	m	0,5m	1,5r	r	2r	-	-	r	-	$\varphi_2$	x	0	0	$x_0$	0
15	m	2m	m	m	3m	r	-	2r	-	r	-	-	$\varphi_1$	$s_4$	0	0	0	0
16	2m	4m	m	m	-	2r	-	2r	r	r	-	$r\sqrt{2}$	$\varphi_2$	x	$\varphi_{20}$	0	0	0
17	5m	2m	m	m	0,5m	3r	r	2r	-	r	$r\sqrt{3}$	-	$\varphi_1$	$\varphi_3$	0	0	$\varphi_{30}$	0
18	m	m	m	2m	m	r	-	r	-	r	-	-	$\varphi_1$	x	0	0	0	0
19	m	4m	m	m	-	r	-	2r	r	r	-	$r\sqrt{2}$	$\varphi_2$	x	0	0	0	0
20	m	5m	m	2m	-	-	-	3r	r	2r	-	$r\sqrt{3}$	$s_3$	x	$s_{30}$	0	0	0
21	m	3m	m	m	0,5m	r	-	2r	0,5r	r	-	$r\sqrt{2}$	$s_3$	x	0	0	0	0
22	m	4m	m	2m	m	r	-	2r	0,5r	0,5r	-	$r\sqrt{2}$	$\varphi_2$	x	$\varphi_{20}$	0	0	0
23	5m	2m	m	m	-	3r	r	r	-	0,5r	$r\sqrt{3}$	-	$s_3$	x	$s_{30}$	0	0	0
24	2m	m	4m	m	0,5m	2r	r	r	-	-	$r\sqrt{2}$	-	$s_3$	$\varphi_3$	0	$\dot{s}_{30}$	0	0
25	2m	m	2m	m	m	2r	-	r	-	2r	-	-	$s_4$	$\varphi_3$	0	0	$\varphi_{30}$	0
26	m	3m	m	2m	-	r	-	r	0,5r	r	-	$r\sqrt{0.5}$	$\varphi_1$	x	0	0	0	0
27	5m	3m	m	2m	m	3r	r	2r	-	2r	$r\sqrt{2}$	-	$s_2$	x	$s_{20}$	0	0	0
28	3m	m	2m	2m	m	2r	-	r	-	2r	-	-	$s_2$	$\varphi_3$	0	0	$\varphi_{30}$	0
29	4m	5m	m	2m	-	2r	-	2r	r	r	-	$r\sqrt{3}$	$\varphi_1$	x	0	0	0	$\dot{x}_0$
30	2m	2m	2m	m	-	-	-	r	0,5r	r	-	$r\sqrt{0.5}$	$\varphi_2$	x	0	0	$x_0$	0

## Розділ 19 МАЛІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

### § 19.1. СТІЙКІСТЬ РІВНОВАГИ

Вивчення коливань механічної системи тісно пов'язане із дослідженням стійкості її положення рівноваги.

Деяке положення системи називається *положенням рівноваги*, якщо система, що перебуває в початковий момент в цьому положенні за нульових початкових швидкостей, весь час залишається в цьому положенні.

Всюди надалі, якщо не сказано інше, розглядається голономна стаціонарна консервативна механічна система. Положення системи визначається за допомогою узагальнених координат  $q_1, q_2, \dots, q_N$  ( $N$  — число степенів вільності системи).

Розглядаючи деяке положення рівноваги, узагальнені координати можна подати у вигляді

$$q_i = q_{i0} + x_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (19.1)$$

де сталі значення  $q_{i0}$  відповідають положенню рівноваги. Тоді координати  $x_1, \dots, x_N$  характеризують відхилення системи від положення рівноваги і тому самі називаються *відхиленнями* системи.

Положення рівноваги  $q_{10}, q_{20}, \dots, q_{N0}$  називається *стійким*, якщо за достатньо малих початкових відхилень  $x_i^0$  (тут і надалі  $i = 1, \dots, N$ ) і достатньо малих початкових швидкостей  $\dot{x}_i^0$  система весь час руху не виходить за межі як завгодно малого (наперед заданого!) околу положення рівноваги, маючи при цьому як завгодно малі швидкості  $\dot{x}_i^0$ .

Якщо в положенні стійкої рівноваги виконуються умови

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |q_i(t) - q_{i0}| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{q}_i(t)| = 0. \quad (19.2)$$

то положення рівноваги називають *асимптотично стійким*.

Нехай  $\Pi = \Pi(q_1, \dots, q_N)$  — потенціальна енергія системи. Наступна теорема встановлює достатні умови стійкості рівноваги.

**Теорема Лагранжа—Діріхле.** *Якщо в деякому положенні консервативної системи потенціальна енергія має строгий мінімум, то це положення є положенням стійкої рівноваги системи.*

Ця теорема залишається справедливою і для неконсервативної системи, яку можна отримати з консервативної додаванням дисипативних та гіроскопічних сил.

Теорема Лагранжа—Діріхле визначає лише *достатні* умови стійкості рівноваги. Взагалі кажучи, не можна стверджувати, що стійка рівновага має місце лише в точках мінімуму потенціальної енергії, а відсутність мінімуму потенціальної енергії в положенні рівноваги системи автоматично означає його нестійкість.

Проблема обернення теореми Лагранжа—Діріхле на сьогодні повністю не розв'язана. Частковий її розв'язок дають дві теореми Ляпунова, які встановлюють деякі достатні умови для нестійкості положення рівноваги.

Вираз для потенціальної енергії системи розкладемо в ряд Тейлора в околі положення рівноваги  $q_{i0}$  (тут і надалі  $i = 1, \dots, N$ ), обмежувачись членами не більш як другого порядку малості відносно відхилення  $x$ :

$$\begin{aligned} \Pi = \Pi_0 + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right)_0 x_i + \\ + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0 x_j x_k + o(x^2). \end{aligned} \quad (19.3)$$

**Теорема Ляпунова I.** *Якщо потенціальна енергія  $\Pi(q_1, \dots, q_N)$  консервативної системи*

в положенні рівноваги не має мінімуму і цей факт можна встановити за членами другого порядку в розкладенні (19.3), не розглядаючи членів вищих порядків, то положення рівноваги є нестійким.

**Теорема Ляпунова II.** Якщо потенціальна енергія  $\Pi(q_1, \dots, q_N)$  консервативної системи в положенні рівноваги має строгий максимум і цей факт можна встановити за членами найнижчого порядку в розкладенні (19.3), то положення рівноваги є нестійким.

Далі розглянемо розкладення (19.3) потенціальної енергії в ряд Тейлора в околі положення стійкої рівноваги  $q_{i0}$ , обмежуючись членами не більш як другого порядку малості відносно відхилень  $x_i$ . Оскільки потенціальна енергія визначається з точністю до довільної сталої, завжди можна вважати  $\Pi_0 = 0$ , тобто просто не виписувати явно цей член. Далі, оскільки положення рівноваги виділене за критерієм мінімуму потенціальної енергії, то другий доданок також дорівнює нулю. Отже, отримуємо

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_{jk} x_j x_k = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0. \quad (19.4)$$

Таким чином, потенціальна енергія лінеаризованої системи є квадратичною формою її відхилення  $x$  від положення рівноваги. Оскільки в положенні рівноваги потенціальна енергія дорівнює нулю і це є мінімальним значенням, то  $\Pi(q)$  буде додатно визначеною функцією.

Знак будь-якої квадратичної форми визначає наступна теорема.

**Теорема Сільвестра.** Для того, щоб квадратична форма була додатно визначеною, необхідно і достатньо, щоб усі діагональні мінори матриці квадратичної форми були додатними.

Скориставшись виразом (19.4), запишемо матрицю і головні діагональні мінори цієї квадратичної форми:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2N} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{N1} & c_{N2} & c_{N3} & \dots & c_{NN} \end{bmatrix}. \quad (19.5)$$

$$\Delta_1 = c_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_N = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{N1} & \dots & c_{NN} \end{vmatrix}.$$

З урахуванням введених позначень критерій додатно визначеної квадратичної форми (19.4) має вигляд

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_N > 0. \quad (19.6)$$

## §19.2. СКЛАДАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЛІНЕАРИЗОВАНИХ РІВНЯНЬ РУХУ СИСТЕМИ

Розглядаємо стаціонарну голономну систему з  $N$  степенями вільності, що має принаймні одне положення стійкої рівноваги. Рух такої системи може бути описаний системою рівнянь Лагранжа II роду

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (19.7)$$

де  $T$  — кінетична енергія системи;  $\Pi$  — її потенціальна енергія;  $\Phi$  — дисипативна функція Релея.

Якщо в початковий момент часу положення системи взяте достатньо близьким до положення стійкої рівноваги, а початкова швидкість є достатньо малою за абсолютною величиною, то протягом усього руху будуть залишатись малими за абсолютною

величиною як відхилення системи, так і узагальнені швидкості. Ця обставина дозволяє зберегти в диференціальних рівняннях руху тільки лінійні члени відносно відхилення та швидкості, а члени вищих порядків відкинути. Тоді диференціальне рівняння руху стає лінійним, тобто задача лінеаризується.

Для отримання лінеаризованих рівнянь руху механічної системи доцільно дотримуватись таких рекомендацій.

1. Вираз для кінетичної енергії записуємо в положенні стійкої рівноваги, поблизу якого буде досліджуватись рух системи. Це означає, що узагальнені координати слід подати у вигляді (19.1).

Якщо кінетична енергія залежить від координат  $q_i$ , то при обчисленні їм слід надати "рівноважні" значення  $q_{i0}$ .

Як узагальнені швидкості приймемо швидкості відхилення  $\dot{x}_i$ . В результаті отримуємо

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{jk} (q_{10}, \dots, q_{N0}) \dot{x}_j \dot{x}_k. \quad (19.8)$$

Отже, кінетична енергія лінеаризованої системи є додатно визначеною квадратичною формою швидкостей  $\dot{x}_i$  її відхилення від положення рівноваги.

2. Для потенціальної енергії використовуємо розкладення (19.4).

3. Дисипативну функцію Релея також записуємо у вигляді квадратичної форми швидкостей відхилень:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \beta_{jk} \dot{x}_j \dot{x}_k. \quad (19.9)$$

Оскільки  $q_{i0} = \text{const}$ , заміна  $\dot{q}_i$  на  $\dot{x}_i$  не впливає на коефіцієнти  $\beta_{jk}$ .

Як видно з виразів (19.4), (19.8), за узагальнені координати тепер маємо відхилення  $x_i$ . Саме для них і складаємо рівняння Лагранжа II роду, які будуть описувати малі коливання системи:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (19.10)$$

Підставляючи  $T$  і  $\Phi$  з виразів (19.8) та (19.4) у рівняння (19.10), дістанемо систему  $N$  лінійних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами:

$$\sum_{j=1}^N (a_{ij} \ddot{x}_j + \beta_{ij} \dot{x}_j + c_{ij} x_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (19.11)$$

Позначимо оператор диференціювання як  $p = \frac{d}{dt}$ . Тоді систему (19.11) можна переписати у вигляді

$$\sum_{j=1}^N (a_{ij} p^2 + \beta_{ij} p + c_{ij}) x_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (19.12)$$

Система рівнянь має нетривіальні розв'язки, якщо визначник системи (19.12) дорівнює нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} p^2 + \beta_{11} p + c_{11} & \dots & a_{1N} p^2 + \beta_{1N} p + c_{1N} \\ a_{21} p^2 + \beta_{21} p + c_{21} & \dots & a_{2N} p^2 + \beta_{2N} p + c_{2N} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} p^2 + \beta_{N1} p + c_{N1} & \dots & a_{NN} p^2 + \beta_{NN} p + c_{NN} \end{vmatrix} = 0,$$

або в явному вигляді

$$a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0. \quad (19.13)$$

де, очевидно,  $m = 2N$ . Це рівняння називають *характеристичним*. Взагалі кажучи, воно має  $2N$  комплексно-спряжених коренів, що мають вигляд  $p_k = \lambda_k \pm i\omega_k$ , де  $\lambda_k$  — дійсна частина;  $i^2 = -1$ ;  $\omega_k$  — циклічна частота коливань;  $k = 1, \dots, N$ .

Використовуючи формулу Ейлера

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t,$$

загальний розв'язок системи (19.11) можна подати у вигляді

$$x_i = \sum_{j=1}^N e^{\lambda_j t} (C_{ij} \cos \omega_j t + D_{ij} \sin \omega_j t),$$

$$i = 1, \dots, N, \quad (19.14)$$

де  $C_{ij}$ ,  $D_{ij}$  — сталі інтегрування.

Як можна бачити з виразу (19.14), для того, щоб положення рівноваги було асимптотично стійким відповідно до визначення (19.2), дійсні частини  $\lambda_i$  коренів характеристичного рівняння мають бути від'ємними.

Висновок про асимптотичну стійкість системи можна зробити, не знаходячи в явному вигляді характеристичного рівняння (19.13), на підставі **критерію Гурвіца**: для того, щоб всі корені рівняння (19.13) мали від'ємні дійсні частини, необхідно і достатньо, щоб усі головні діагональні мінори матриці,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_m \end{vmatrix},$$

що складена з коефіцієнтів рівняння (19.13), були додатними, тобто

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \dots,$$

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_m \end{vmatrix} > 0.$$

З цього критерію, зокрема, випливає, що всі коефіцієнти характеристичного рівняння мають бути додатними. Цей наслідок можна використовувати як найпростіший тест на правильність складання рівнянь малих коливань системи.

### 19.3. Приклади розв'язування задач

**Приклад 19.1.** Тіло (рис. 19.1) масою  $m$  може рухатись поступально вздовж гладенької похилої площини, встановленої під кутом  $\alpha$  до горизонту. Тіло підвішено на пружині жорсткістю  $c$ . У початковий момент часу тілу, що знаходиться в положенні рівноваги, надається швидкість  $v_0$ .

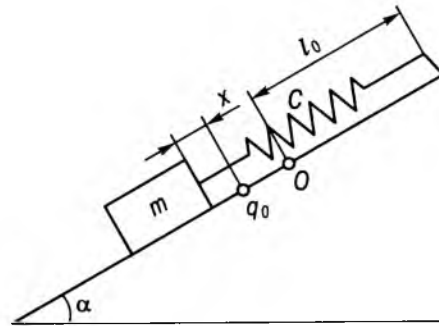


Рис. 19.1

Визначити положення рівноваги системи, взявши за початок відліку положення тіла, що відповідає недеформованій пружині. Перевірити його стійкість. Знайти закон малих коливань системи навколо положення рівноваги.

**Розв'язування.** Дану задачу неважко розв'язати, виходячи з елементарних міркувань, проте застосуємо загальну методику для того, щоб показати, як завдяки використанню загальних принципів отримують очікувані результати.

Отже, визначимо положення рівноваги системи. Відповідно до умов задачі, початок

відліку координати  $q$  матимемо в положенні тіла, що відповідає недеформованій пружині; координатну вісь напрямляємо вздовж похилої площини донизу.

Обчислимо потенціальну енергію системи. Перш за все, слід визначитися з положенням системи, що відповідає нулю потенціальної енергії. Оскільки потенціальна енергія завжди визначається з точністю до довільної сталої, цей вибір не принциповий і має на меті лише спрощення відповідних виразів.

Потенціальна енергія системи складається з потенціальної енергії  $\Pi_{\text{пр}}$  деформованої пружини і потенціальної енергії  $\Pi_{\text{мг}}$  тіла в полі сили тяжіння. За нульовий рівень  $\Pi_{\text{пр}}$  природно взяти положення тіла, що відповідає недеформованій пружині. Тоді маємо

$$\Pi_{\text{пр}} = \frac{cq^2}{2}. \quad (19.15)$$

Те саме положення прийемо і за нульовий рівень  $\Pi_{\text{мг}}$ , отримаємо

$$\Pi_{\text{мг}} = -mgs \sin \alpha. \quad (19.16)$$

Додаючи (19.15) і (19.16), знайдемо повну потенціальну енергію системи:

$$\Pi = \frac{cq^2}{2} - mgs \sin \alpha. \quad (19.17)$$

Для визначення положення рівноваги системи обчислимо

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = cq - mgs \sin \alpha. \quad (19.18)$$

Отримаємо рівняння рівноваги

$$cq - mgs \sin \alpha = 0,$$

з якого знайдемо положення рівноваги:

$$q_0 = \frac{mg}{c} \sin \alpha. \quad (19.19)$$

Цілком очевидно, що рівновага в даному випадку є сталою. Для того, щоб формально переконатись у цьому, достатньо, використавши (19.18), знайти

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} = c > 0. \quad (19.20)$$

Остання нерівність свідчить про те, що функція  $\Pi$  має в цьому положенні строгий мінімум. Отже, відповідно до теореми Лагранжа—Діріхле рівновага є сталою.

Перейдемо до складання рівняння малих коливань системи. Виконаємо заміну координат

$$q = q_0 + x, \quad (19.21)$$

де  $q_0$  — положення рівноваги системи, що визначається виразом (19.19).

Кінетична енергія системи

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} \quad (19.22)$$

і не залежить від конкретного значення  $q_0$ .

Потенціальну енергію системи запишемо на підставі (19.4) з урахуванням результату (19.20), отримаємо

$$\Pi = \frac{cx^2}{2}. \quad (19.23)$$

Неважко переконатись, що після формальної підстановки  $q$  (19.21) у вираз для потенціальної енергії (19.17) з урахуванням (19.19) одержимо той самий результат.

Отже, беручи до уваги отримані вирази (19.22) та (19.23), рівняння малих коливань системи запишемо у вигляді

$$m\ddot{x} + cx = 0. \quad (19.24)$$

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t, \quad (19.25)$$

де  $\omega = \sqrt{c/m}$  — циклічна частота коливань системи. Сталі інтегрування  $C_1$  та  $C_2$  обчислимо на підставі заданих початкових умов:

$$x(0) = 0; \quad \dot{x} = v(0) = v_0. \quad (19.26)$$

З (19.25) знаходимо

$$\dot{x}(t) = C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t.$$

Далі запишемо

$$x(0) = C_2 = 0; \quad \dot{x}(0) = C_1 \omega = v_0.$$

Нарешті,

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$

**Приклад 19.2.** Однорідний диск (рис. 19.2) радіусом  $R$  і вагою  $P$  може обертатися у вертикальній площині навколо нерухомої осі  $Oz$ , що проходить через його край. У точці  $A$ , що лежить на одному діаметрі з точкою  $O$ , до диска прикріплено пружину жорсткістю  $c$ , протилежний кінець якої закріплений нерухомо в точці  $B$ . Відстань  $OA = a$ . Коли відрізок  $OA$  займає вертикальне положення, вісь  $AB$  пружини горизонтальна, а пружина недеформована.

Довжину  $l$  недеформованої пружини вважати значно більшою за відстань  $a$ .

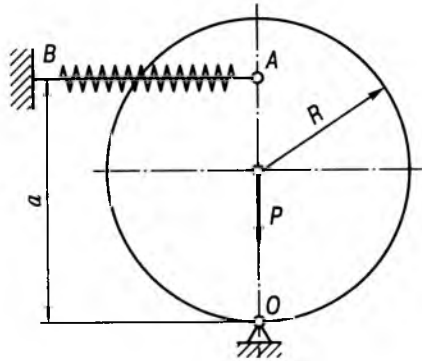


Рис. 19.2

Знайти положення рівноваги диска і перевірити їх стійкість.

**Розв'язування.** Розглядатимемо кут  $\varphi$  (рис. 19.3) відхилення відрізка  $OA$  від вертикалі як узагальнену координату.

Потенціальна енергія системи складається з потенціальної енергії  $\Pi_T$  диска в полі сили тяжіння та потенціальної енергії  $\Pi_{пр}$  деформації пружини:

$$\Pi = \Pi_T + \Pi_{пр}. \quad (19.27)$$

Знаходимо

$$\Pi_T = PR \cos \varphi \quad (19.28)$$

(за нульовий рівень потенціальної енергії сили тяжіння взято рівень шарніра  $O$ ). Далі запишемо

$$\Pi_{пр} = \frac{c \Delta^2}{2}, \quad (19.29)$$

де  $\Delta$  — зміна довжини пружини при деформації:

$$\Delta = \sqrt{l^2 + \left(2a \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2} - 2l \cdot 2a \sin \frac{\varphi}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) - l.$$

$$\text{Враховуючи, що } \beta = \frac{1}{2}(\pi - \varphi) = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2},$$

цей вираз можна звести до вигляду

$$\Delta = \sqrt{l^2 + 4a \left(a \sin \frac{\varphi}{2} + l \cos \frac{\varphi}{2}\right) \sin \frac{\varphi}{2}} - l.$$

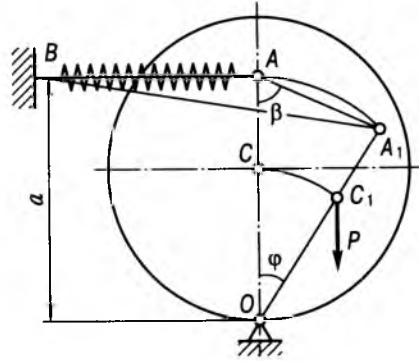


Рис. 19.3

Вважаючи довжину  $l$  недеформованої пружини дуже великою, знайдемо

$$\Delta = \lim_{l \rightarrow \infty} \sqrt{l^2 + 4a \left(a \sin \frac{\varphi}{2} + l \cos \frac{\varphi}{2}\right) \sin \frac{\varphi}{2}} - l = a \sin \varphi.$$

Підставивши знайдену зміну  $\Delta$  у (19.29), і далі (19.28) та (19.29) у (19.27), отримаємо

$$\Pi = PR \cos \varphi + \frac{ca^2}{2} \sin^2 \varphi. \quad (19.30)$$

Для визначення положень рівноваги обчислимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} &= -PR \sin \varphi + ca^2 \sin \varphi \cos \varphi = \\ &= (-PR + ca^2 \cos \varphi) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (19.31)$$

Звідси маємо рівняння рівноваги

$$(-PR + ca^2 \cos \varphi) \sin \varphi = 0.$$

Це рівняння має розв'язки

$$\varphi_1 = 0; \quad \varphi_2 = \pi; \quad \varphi_{3,4} = \pm \arccos \frac{PR}{ca^2}.$$

Зауважимо, що розв'язки  $\varphi_{3,4}$  існують лише за умови  $PR < ca^2$ .

Для перевірки стійкості застосуємо теорему Лагранжа—Діріхле. Повторно диференціюючи (19.31), знаходимо

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -PR \cos \varphi + ca^2 (2 \cos^2 \varphi - 1).$$

Після прямої підстановки отримаємо

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi=0} = -PR + ca^2.$$

Умови теореми Лагранжа—Діріхле буде виконано, якщо

$$ca^2 > PR.$$

Саме за такого співвідношення параметрів системи “верхнє” положення рівноваги ( $\varphi = 0$ ) буде стійким.

Далі

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi=\pi} = PR + ca^2.$$

Ця величина завжди додатна, тобто “нижнє” положення рівноваги ( $\varphi = \pi$ ) завжди стійке.

Нарешті, аналогічною підстановкою можна переконатися, що для  $\varphi_{3,4}$  умови теореми Лагранжа—Діріхле не виконуються ніколи в межах існування відповідних розв'язків. Можна показати, що відповідні положення рівноваги — завжди нестійкі, а кути  $\varphi_3$  та  $\varphi_4$

визначають граничні точки областей притягання до положень стійкої рівноваги  $\varphi_1$  та  $\varphi_2$ .

**Приклад 19.3.** Матеріальна точка  $M$  масою  $m$  вміщена в тонку трубку з діелектричного матеріалу, що утворює коло радіуса  $R$ . Трубку розташовано у вертикальній площині. Точка  $M$  несе сталий електричний заряд  $q_0$ . Такий самий точковий заряд  $q_0$  зафіксовано в найнижчій точці  $O$ . Знаки обох зарядів однакові.

Визначити положення рівноваги точки  $M$  і дослідити їх стійкість.

Впливом матеріалу трубки на електричне поле двох зарядів знехтувати.

**Вказівка:** потенціальна енергія системи двох точкових зарядів  $q_1, q_2$ , що знаходяться на відстані  $r$  один від одного,

$$\Pi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r},$$

де  $\epsilon_0$  — стала діелектрична проникність вакууму.

**Розв'язування.** Потенціальна енергія системи складається з потенціальної енергії матеріальної точки  $M$  в полі сили тяжіння

$$\Pi_1 = mgR(1 - \cos \varphi) \quad (19.32)$$

і потенціальної енергії електричного поля системи двох зарядів  $q_0$

$$\Pi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0^2}{OM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0^2}{2R \sin(\varphi/2)}. \quad (19.33)$$

Склавши (19.32) і (19.33), отримаємо повну потенціальну енергію системи:

$$\Pi = mgR(1 - \cos \varphi) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0^2}{2R \sin(\varphi/2)}. \quad (19.34)$$

Записавши рівняння рівноваги системи, одержимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} &= mgR \sin \varphi - \\ &- \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0^2}{2R \sin^2(\varphi/2)} \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2}. \end{aligned} \quad (19.35)$$

Рівняння рівноваги отримуємо, прирівнюючи цю часткову похідну до нуля. Після мінімальних перетворень наведеного вище виразу запишемо це рівняння у вигляді

$$\left(4mgR\sin\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0^2}{2R\sin^2(\varphi/2)}\right)\cos\frac{\varphi}{2} = 0. \quad (19.36)$$

Це рівняння має два розв'язки, що відповідають двом положенням рівноваги:

$$\sin\frac{\varphi_1}{2} = \sqrt{\frac{q_0^2}{32\pi\epsilon_0 mgR^2}}, \quad \varphi_2 = \pi. \quad (19.37)$$

Зауважимо, що положення рівноваги при  $\varphi = \varphi_1$  існує лише в тому разі, коли

$$q_0^2 \leq 32\pi\epsilon_0 mgR^2, \quad (19.38)$$

причому у випадку точної рівності розв'язки 1 і 2 збігаються, тобто  $\varphi_1 = \varphi_2$ . У випадку ж строгої нерівності точка  $M$  має два положення рівноваги: нижнє, що відповідає значенню координати  $\varphi = \varphi_1$ , і верхнє, при  $\varphi_2 = \pi$ , що є дійсно найвищим можливим положенням точки  $M$  у трубці.

Якщо нерівність (19.38) не виконується, точка має лише верхнє положення рівноваги.

Перевіримо знайдені положення рівноваги на стійкість. З (19.35) знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} &= mgR\cos\varphi + \frac{1}{16\pi\epsilon_0} \frac{q_0^2}{R\sin^3(\varphi/2)} \cos^2\frac{\varphi}{2} + \\ &+ \frac{1}{32\pi\epsilon_0} \frac{q_0^2}{R\sin(\varphi/2)} = mgR\cos\varphi + \\ &+ \frac{1}{16\pi\epsilon_0} \frac{q_0^2}{R\sin^3(\varphi/2)} \cos^2\frac{\varphi}{2} + \\ &+ \frac{1}{32\pi\epsilon_0} \frac{q_0^2}{R\sin^3(\varphi/2)} \sin^2\frac{\varphi}{2} = \\ &= mgR\cos\varphi + \frac{1}{32\pi\epsilon_0} \frac{q_0^2}{R\sin^3(\varphi/2)} + \\ &+ \frac{1}{32\pi\epsilon_0} \frac{q_0^2}{R\sin^3(\varphi/2)} \cos^2\frac{\varphi}{2}. \quad (19.39) \end{aligned}$$

Положення рівноваги буде стійким, якщо  $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} > 0$ , і нестійким, якщо  $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} < 0$ .

Враховуючи (19.36), знаходимо

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi=\varphi_1} &= mgR\cos\varphi_1 + mgR + mgR\cos^2\frac{\varphi_1}{2} = \\ &= mgR(1 + \cos\varphi_1) + \frac{1}{2}mgR(1 + \cos\varphi_1) = \\ &= \frac{3}{2}mgR(1 + \cos\varphi_1). \quad (19.40) \end{aligned}$$

При будь-якому  $\varphi_1 \neq \pi$  маємо

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi=\varphi_1} = \frac{3}{2}mgR(1 + \cos\varphi_1) > 0,$$

тобто нижнє положення рівноваги є стійким.

Далі запишемо

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi=\varphi_2=\pi} = -mgR + \frac{q_0^2}{32\pi\epsilon_0 R}.$$

Зрозуміло, що останній вираз буде додатним тоді і тільки тоді, коли не виконується нерівність (19.38). Інакше кажучи, верхнє положення рівноваги буде стійким тоді і тільки тоді, коли не існує нижнє.

Отже, точка  $M$  завжди має лише одне положення стійкої рівноваги. Якщо параметри системи задовольняють умову (19.38), то положення стійкої рівноваги визначається координатою  $\varphi = \varphi_1$  з (19.37). У іншому випадку положення рівноваги буде стійким, якщо точка  $M$  займає найвище положення, якому відповідає значення координати  $\varphi = \pi$ .

**Приклад 19.4.** Механічна система — куля масою  $m = 3$  кг, закріплена на горизонтальній гладенькій площині на трьох пружинах жорсткістю  $c_1 = 60$  Н/см,  $c_2 = 40$  Н/см і  $c_3 = 50$  Н/см (рис. 19.4). Всі пружини розташовані в горизонтальній площині, в якій здійснюється рух кулі. У положенні спокою пружини не деформовані. Кулю вважати матері-

альною точкою. Довжини пружин є значно більшими за їх деформації в процесі руху кулі.

Скласти рівняння малих коливань кулі навколо положення рівноваги.

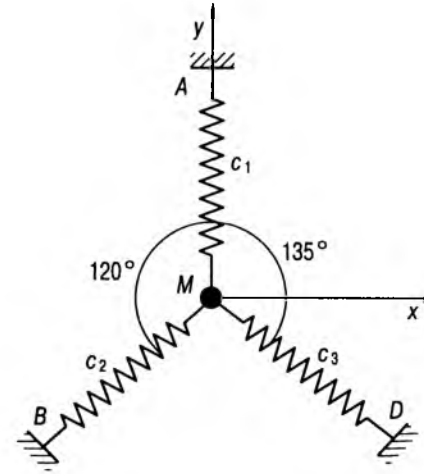


Рис. 19.4

розв'язування. Система має два степені вільності. За узагальнені координати приймаємо відхилення  $x$  та  $y$  кулі від положення рівноваги вздовж відповідних координатних осей.

Система рівнянь Лагранжа матиме вигляд

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) + \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0. \quad (19.41)$$

Порівнюючи ці рівняння із загальною формою (19.10), можна помітити, що ми одразу виключили доданки, які для даної системи, напевно, дорівнюють нулю. Зокрема, оскільки кінетична енергія  $T$  системи буде записуватись у положенні рівноваги, вона не залежатиме від узагальнених координат  $x$  та  $y$ ; тому відповідні частинні похідні дорівнюють нулю. Виключено також доданки, що містять функцію Релея, оскільки розсіювання енергії в даному прикладі не враховується.

Кінетична енергія кулі, що розглядається як матеріальна точка,

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (19.42)$$

Потенціальна енергія системи складається з потенціальних енергій деформації трьох пружин:

$$\Pi = \frac{c_1 \Delta_1^2}{2} + \frac{c_2 \Delta_2^2}{2} + \frac{c_3 \Delta_3^2}{2}, \quad (19.43)$$

де  $\Delta_{1,2,3}$  — деформація (зміна довжини) відповідної пружини.

Запишемо

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= AM - l_1 = \sqrt{x^2 + (l_1 - y)^2} - l_1, \\ \Delta_2 &= BM - l_2 = \\ &= \sqrt{(-l_2 \cos 30^\circ - x)^2 + (-l_2 \sin 30^\circ - y)^2} - l_2, \\ \Delta_3 &= DM - l_3 = \\ &= \sqrt{(l_3 \cos 45^\circ - x)^2 + (-l_3 \sin 45^\circ - y)^2} - l_3, \end{aligned} \quad (19.44)$$

де  $l_{1,2,3}$  — довжина відповідної пружини у недеформованому стані.

Враховуючи, що  $\Delta_1 \ll l_1$ , можемо наближено прийняти

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\approx \lim_{l_1 \rightarrow \infty} (AM - l_1) = \\ &= \lim_{l_1 \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 + (l_1 - y)^2} - l_1 \right) = \\ &= \lim_{l_1 \rightarrow \infty} \frac{x^2 + (l_1 - y)^2 - l_1^2}{\sqrt{x^2 + (l_1 - y)^2} + l_1} = \\ &= \lim_{l_1 \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2 - 2l_1 y}{\sqrt{x^2 + (l_1 - y)^2} + l_1} = \\ &= \lim_{l_1 \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2 - 2l_1 y}{2l_1} = -y. \end{aligned} \quad (19.45)$$

Аналогічно отримаємо

$$\Delta_2 \approx x \cos 30^\circ + y \sin 30^\circ, \quad (19.46)$$

$$\Delta_3 \approx -x \cos 45^\circ + y \sin 45^\circ. \quad (19.47)$$

Підставляючи  $\Delta_1, \Delta_2$  і  $\Delta_3$  з (19.45), (19.46), (19.47) в (19.43), запишемо

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2}c_1 y^2 + \frac{1}{2}c_2(x \cos 30^\circ + y \sin 30^\circ)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}c_3(y \sin 45^\circ - x \cos 45^\circ)^2 = \\ &= \frac{1}{2}(0,75c_2 + 0,5c_3)x^2 + (0,443c_2 - 0,5c_3)xy + \\ &+ \frac{1}{2}(c_1 + 0,25c_2 + 0,5c_3)y^2. \quad (19.48) \end{aligned}$$

Визначивши похідні від кінетичної та потенціальної енергії за узагальненими швидкостями і координатами та підставивши їх у рівняння (19.41), отримаємо систему двох диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{x} + c_{11}x + c_{12}y &= 0, \\ a_{22}\ddot{y} + c_{21}x + c_{22}y &= 0, \quad (19.49) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22} = m = 3 \text{ кг}, \\ c_{11} &= 0,75c_2 + 0,5c_3 = \\ &= 0,75 \cdot 40 + 0,5 \cdot 50 = 55 \text{ Н/см}, \\ c_{22} &= c_1 + 0,25c_2 + 0,5c_3 = \\ &= 60 + 0,25 \cdot 40 + 0,5 \cdot 50 = 95 \text{ Н/см}, \\ c_{12} &= c_{21} = 0,443c_2 - 0,5c_3 = \\ &= 0,443 \cdot 40 - 0,5 \cdot 50 = -7,28 \text{ Н/см}. \end{aligned}$$

Система рівнянь (19.49) описує малі коливання системи відносно положення рівноваги.

#### § 19.4. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

**19.1.** На верхньому кінці  $A$  однорідного стрижня  $OA$  (рис. 19.5) масою  $m$  завдовжки  $l$  закріплена пружина, яка при вертикальному положенні стрижня горизонтальна і недеформована.

Якій умові має задовольняти жорсткість  $c$  пружини, щоб вертикальне положення рівноваги стрижня було стійким? Визначити період

малих коливань стрижня навколо цього положення рівноваги.

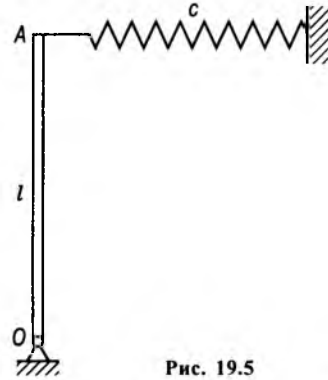


Рис. 19.5

Відповідь:  $c > \frac{mg}{2l}$ ;  $T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{3(2cl - mg)}}$ .

**19.2.** Вантаж  $A$  масою  $m$  закріплений на правому кінці невагомого стрижня  $OA$  (рис. 19.6) завдовжки  $l$ , який утримується у вертикальній площині за допомогою шарніра  $O$  і пружини  $BD$ . У положенні рівноваги стрижень розташований горизонтально,  $OB = d$ . Визначити період малих коливань стрижня навколо вказаного положення рівноваги, якщо в початковий момент часу йому надана мала кутова швидкість  $\omega_0$ .

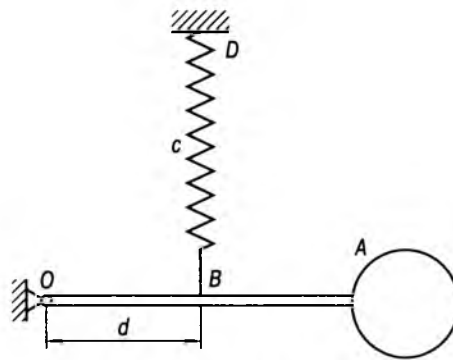


Рис. 19.6

Відповідь:  $T = 2\pi \frac{l}{d} \sqrt{\frac{m}{c}}$ .

**19.3.** Визначити власну частоту радіальних коливань тонкого круглого кільця (рис. 19.7). Радіус кільця  $R$ , площа поперечного перерізу  $F$ , густина матеріалу  $\rho$ , модуль пружності 1-го роду  $E$ .

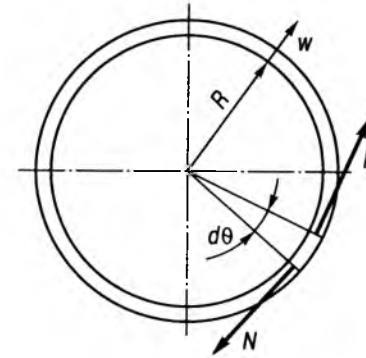


Рис. 19.7

*Вказівка.* У поперечному перерізі кільця при розтягненні-стисненні пружна сила  $N = EFR^{-1}w$ , де  $w$  — радіальна деформація кільця (додатні значення  $N$  та  $w$  відповідають розтягненню кільця).

Відповідь:  $f = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ .

**19.4.** Однорідний прямолінійний стрижень  $OA$  (рис. 19.8) завдовжки  $l$  масою  $m$  закріплений у вертикальній площині за допомогою шарніра  $O$  та вертикальної невагомої пружини жорсткістю  $c$ . У положенні рівноваги стрижень розташований горизонтально.

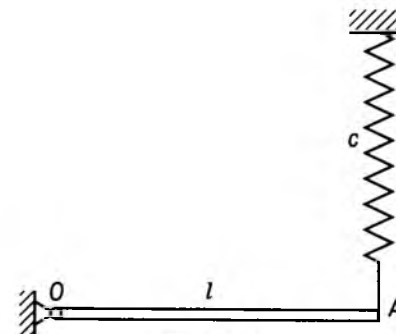


Рис. 19.8

Приймаючи за узагальнену координату кут  $\varphi$  повороту стрижня, визначити амплітуду та період його малих коливань. У початковий момент часу стрижень був відхилений від положення рівноваги на малий кут  $\varphi_0$  та відпущений без початкової швидкості.

Відповідь:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{3c}}$ ;  $\varphi = \varphi_0 \cos \sqrt{\frac{3c}{m}} t$ .

**19.5.** Однорідний суцільний диск (рис. 19.9) масою  $m$  закріплений у вертикальній площині за допомогою шарніра  $O$  і пружини жорсткістю  $c$ . У положенні рівноваги діаметр  $OA$  розташований вертикально, а пружина  $AB$  горизонтальна і недеформована.

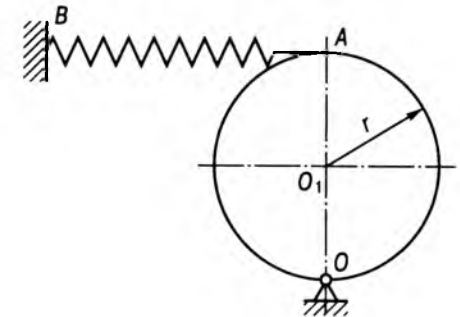


Рис. 19.9

Визначити, якій умові має задовольняти жорсткість пружини, щоб це положення рівноваги було стійким. Визначити також період малих коливань диска навколо вказаного положення рівноваги. Тертя в шарнірі  $O$  не враховувати.

Відповідь:  $c > \frac{mg}{4r}$ ,  $T = 2\pi \sqrt{\frac{3m}{2(4cr - mg)}}$ .

**19.6.** У механічній системі вертикальна рейка  $AB$  (рис. 19.10) закріплена за допомогою двох однакових пружин жорсткістю  $c$ . Маси рейки та кожного із двох однакових зубчастих коліс дорівнюють  $m$ .

Не враховуючи маси пружин і тертя на осях  $O_1$ ,  $O_2$  і вважаючи колеса суцільними

однорідними дисками, визначити циклічну частоту і період малих коливань стрижня  $AB$ .

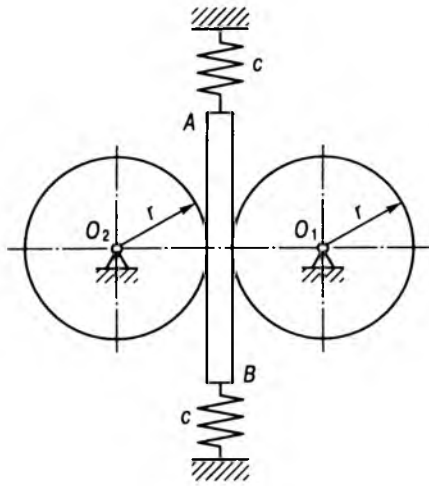


Рис. 19.10

Відповідь:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2c}{m}}$ ,  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2c}}$ .

19.7. Однорідний суцільний диск (рис. 19.11) завдовжки  $l$  може котитися без ковзання по горизонтальній площині. До центра  $O$  диска прикріплено дві однакові пружини жорсткістю  $c$  кожна. Визначити малі коливання центра  $O$  диска, якщо в початковий момент часу центр знаходився в положенні статичної рівноваги і йому надана мала початкова швидкість  $v_0$  паралельно  $AB$ . У положенні рівноваги пружини недеформовані.

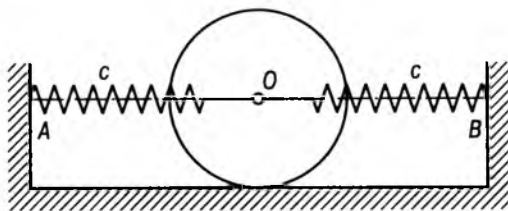


Рис. 19.11

Відповідь:

$$T = \pi\sqrt{\frac{3m}{c}}, \quad x(t) = \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{3m}{c}} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{3m}}t\right).$$

19.8. Астатичний маятник (рис. 19.12), який застосовується в сейсмографах для запису коливань ґрунту, складається із жорсткого стрижня завдовжки  $l$ , що несе на кінці вантаж масою  $m$ , затиснутий між двома горизонтальними пружинами жорсткістю  $c$  кожна. Масою стрижня знехтувати і вважати пружини в положенні рівноваги недеформованими.

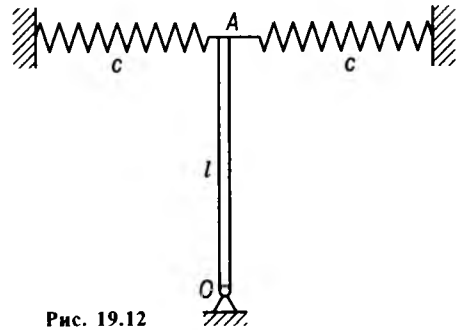


Рис. 19.12

Визначити, при якому співвідношенні між параметрами маятника його вертикальне положення рівноваги буде стійким. Визначити також період малих коливань маятника.

Відповідь:  $mg < 2cl$ ,  $T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{2cl - mg}}$ .

19.9. Маятник (рис. 19.13), який використовується у вібрографах для реєстрації низькочастотних горизонтальних коливань, складається з вантажу  $M$  масою  $m$ , з'єднаного з основою невагомим стрижнем завдовжки  $l$ . Між стрижнем та основою встановлено спіральну пружину жорсткістю  $c$ . Пружина при вертикальному положенні маятника не деформована.

Якій умові мають задовольняти параметри системи, щоб вертикальне положення рівноваги стрижня було стійким? Нехтуючи тертям, знайти період власних коливань системи, порівнявши його з періодом  $T_0$  математичного маятника завдовжки  $l$ .

Відповідь:  $l < \frac{c}{mg}$ ,  $T = T_0\sqrt{\frac{mgl}{c - mgl}}$ .

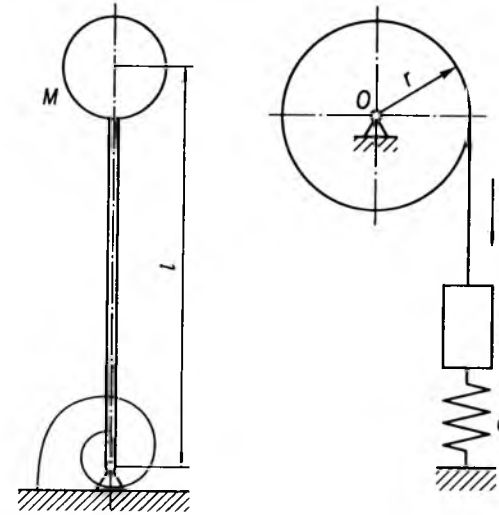


Рис. 19.13

Рис. 19.14

19.10. До перекинутого через блок з нерухомою віссю  $O$  троса підвішено підпружинений знизу вантаж  $A$  (рис. 19.14). Радіус блока  $r$ , жорсткість пружини  $c$ .

Визначити закон малих коливань вантажу  $A$ , якщо в початковий момент часу йому надана мала вертикальна швидкість  $v_0$ , направлена по осі  $x$ , і вантаж перебуває в положенні статичної рівноваги. Маса блока дорівнює  $M$  і рівномірно розподілена по його ободу, маса вантажу  $A$  дорівнює  $m$ . Тертя в підшипнику та масу пружини не враховувати.

Відповідь:

$$x(t) = v_0 k^{-1} \sin kt, \quad \text{де } k = \sqrt{\frac{c}{M + m}}.$$

19.11. Осі двох зубчастих коліс (рис. 19.15) радіусів  $R$  і  $r$  з'єднані невагомим стрижнем  $OA$ , при цьому колесо  $R$  нерухоме, а маса рухомого колеса радіуса  $r$  дорівнює  $m$ . До кінця  $A$  стрижня  $OA$  прикріплена вертикальна пружина жорсткістю  $c$ . У положенні рівноваги стрижень  $OA$  горизонтальний.

Визначити амплітуду і період малих коливань стрижня  $OA$ . У початковий момент часу стрижень відхилений від положення рівноваги на малий кут  $\varphi_0$  і йому надана початкова

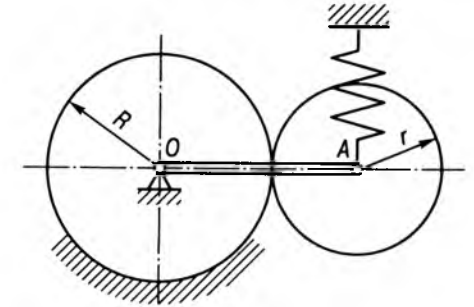


Рис. 19.15

кутова швидкість  $\varphi$ . Рухоме колесо розглядати як суцільний однорідний циліндр.

Відповідь:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{c}}; \quad A = (R + r)\sqrt{\varphi_0^2 + \frac{3m}{2c}\varphi_0^2}.$$

19.12. Вантаж  $M$  (рис. 19.16) масою  $m$  підвішено до троса  $AB$ , перекинутого через блок з нерухомою віссю  $O$ . Маса блока  $m_1$  рівномірно розподілена по колу радіуса  $r$ .

Визначити період і закон коливань вантажу, якщо в початковий момент часу він знаходиться в положенні статичної рівноваги і йому надана мала початкова швидкість  $v_0$ , спрямовану по вертикалі донизу. Тертям на осі  $O$  і вагою тросу знехтувати.

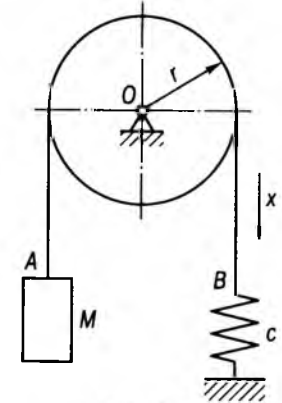


Рис. 19.16

Відповідь:

$$x(t) = \frac{v_0}{k} \sin kt, \quad \text{де } k = \sqrt{\frac{c}{m + 0,5m_1}}.$$

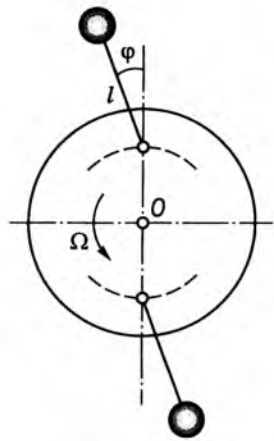


Рис. 19.17

**19.13.** Для гасіння крутильних коливань роторів, що обертаються, застосовуються маятники, осі яких розташовані з ексцентриситетом  $r$  відносно осі ротора  $O$  (рис. 19.17).

Вважаючи, що рух математичного маятника завдовжки  $l$  відбувається у горизонтальній площині, визначити період його власних коливань у відносному русі, якщо кутова швидкість обертання ротора  $\Omega$ .

Відповідь:  $T_0 = \frac{2\pi \sqrt{l}}{\Omega \sqrt{r}}$ .

**19.14.** Вантаж (рис. 19.18) масою  $m$  через пружину прикріплений до кінця пружної балки. Жорсткість пружини дорівнює  $c_{\text{п}}$ , довжина балки  $l$ , жорсткість на згин  $EJ_z$  ( $E$  — модуль пружності,  $J_z$  — осьовий момент інерції поперечного перерізу). Нехтуючи масою пружини та балки, визначити частоту вільних вертикальних коливань вантажу.

*Вказівка.* Прогин вільного кінця консольної балки при навантаженні її вертикальною силою  $P$  дорівнює  $Pl^3/(3EJ_z)$ .

Відповідь:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_{\text{б}} c_{\text{п}}}{(c_{\text{б}} + c_{\text{п}}) m}}, \text{ де } c_{\text{б}} = \frac{3EJ_z}{l^3}.$$

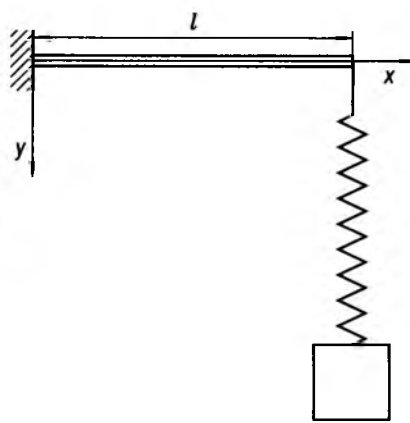


Рис. 19.18

**19.15.** Пневматичний амортизатор складається з циліндра та поршня зі штоком (рис. 19.19). Вільний об'єм циліндра ненавантаженого амортизатора  $V_0$ , площа поршня  $F$ , тиск повітря при заправці  $p_0$ . Під дією ваги  $G$  вантажу поршень осаджується в положення статичної рівноваги.

Вважаючи процес статичного осадження ізотермічним ( $pV = \text{const}$ ), а процес розширення-стиснення повітря при коливаннях навколо положення рівноваги адіабатним ( $pV^k = \text{const}$ ,  $k = \text{const} > 0$ ), визначити частоту малих коливань ( $x$  значно менше  $l$ ) штока з вантажем, якщо  $G > p_0 F$ .

*Вказівка.* Залежність тиску  $p$  повітря від об'єму  $V$  при адіабатичному процесі описується рівністю  $p/p_{\text{ст}} = (V/V_{\text{ст}})^k$ , де  $p_{\text{ст}}$ ,  $V_{\text{ст}}$  — тиск та об'єм повітря в положенні статичної рівноваги поршня; їх слід розкласти в ряд по степенях координати  $x$  і обмежитися членами до першого порядку малості.

Відповідь:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k \frac{gG}{p_0 V_0}}$$

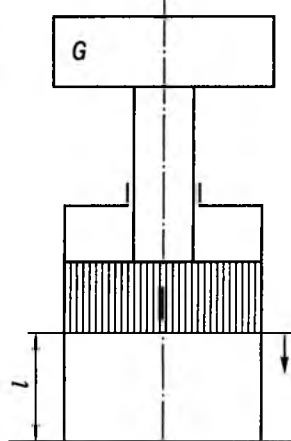


Рис. 19.19

## Розділ 20

### ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ

#### § 20.1. МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Нехай нелінійне диференціальне рівняння руху системи має вигляд

$$\ddot{x} + n^2 [x + \varepsilon f(x)] = 0, \quad (20.1)$$

де  $\varepsilon$  — малий параметр.

Згідно з методом малого параметра змінну  $x(t)$  і квадрат частоти  $n^2$  запишемо у вигляді рядів

$$\begin{aligned} x &= \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots, \\ n^2 &= p^2 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \dots \end{aligned} \quad (20.2)$$

Підставимо вирази рядів (20.2) у рівняння (20.1) і прирівняємо складові при однакових степенях  $\varepsilon$ . Матимемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_0 + p^2 \varphi_0 &= 0, \\ \ddot{\varphi}_1 + p^2 \varphi_1 &= -k_1 \varphi_0 - p^2 f(\varphi_0), \end{aligned} \quad (20.3)$$

Далі послідовно розв'язується кожне рівняння. При цьому в наступному рівнянні використовується розв'язок попереднього. Якщо в правих частинах рівнянь з'являються періодичні функції з частотою  $p$ , то з метою виключення резонансу коефіцієнт при цих складових прирівнюється до нуля.

**Приклад 20.1.** Дослідити диференціальне рівняння

$$\ddot{x} + n^2 \text{tg} x = 0 \quad (1)$$

за початкових умов  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

Розв'язування. Розкладемо функцію  $\text{tg} x$  в ряд за степенями  $x$ :

$$\text{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \dots$$

Якщо обмежитися першими двома членами цього ряду і ввести малий параметр  $\varepsilon = \frac{1}{3}$ , то рівняння (1) набуває вигляду

$$\ddot{x} + n^2 [x + \varepsilon x^3] = 0. \quad (2)$$

Розглянемо перші два рівняння системи (20.3), які для рівняння (2) запишемо так:

$$\ddot{\varphi}_0 + p^2 \varphi_0 = 0, \quad (3)$$

$$\ddot{\varphi}_1 + p^2 \varphi_1 = -k_1 \varphi_0 - p^2 \varphi_0^3. \quad (4)$$

Для розв'язання рівнянь (3), (4) запишемо початкові умови:

$$x_0 = \varphi_0(0) + \varepsilon \varphi_1(0), \quad 0 = \dot{\varphi}_0 + \varepsilon \dot{\varphi}_1(0). \quad (5)$$

Прирівнюючи складові з однаковими степенями  $\varepsilon$ , знаходимо:  $\varphi_0(0) = x_0$ ,  $\varphi_1(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}_0(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}_1(0) = 0$ . За таких початкових умов рівняння (3) має розв'язок

$$\varphi_0 = x_0 \cos pt. \quad (6)$$

Після підстановки  $\varphi_0$  з виразу (6) в рівняння (4) одержимо

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + p^2 \varphi_1 &= -k_1 x_0 \cos pt - p^2 x_0^3 \cos^3 pt = \\ &= -x_0 \left( k_1 + \frac{3}{4} p^2 x_0^2 \right) \cos pt - \frac{1}{4} p^2 x_0^3 \cos 3pt. \end{aligned} \quad (7)$$

Щоб виключити резонанс, накладаємо умову

$$\begin{aligned} k_1 + \frac{3}{4} p^2 x_0^2 &= 0, \\ k_1 &= -\frac{3}{4} p^2 x_0^2. \end{aligned} \quad (8)$$

тобто

Враховуючи (8), матимемо

$$n^2 = p^2 + \varepsilon k_1 = p^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} p^2 x_0^2 = p^2 \left( 1 - \frac{1}{4} x_0^2 \right).$$

Звідси частота коливань

$$p = \frac{n}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} x_0^2}} \approx \frac{n}{1 - \frac{1}{8} x_0^2} \approx n \left( 1 + \frac{1}{8} x_0^2 \right). \quad (9)$$

За умови (8) рівняння (7) набуває вигляду

$$\ddot{\varphi}_1 + p^2 \varphi_1 = -\frac{1}{4} n^2 x_0^3 \cos 3pt. \quad (10)$$



Загальний розв'язок рівняння (10) можна записати у вигляді суми

$$\varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{12}, \quad (11)$$

де  $\varphi_{11} = c_1 \sin pt + c_2 \cos pt$  — загальний розв'язок однорідного рівняння ( $c_1, c_2$  — стали інтегрування);  $\varphi_{12}$  — частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Змінну  $\varphi_{12}$  шукаємо у вигляді  $\varphi_{12} = B \cos 3pt$ . Після підстановки  $\varphi_{12}$  в (10) отримуємо

$$B = \frac{n^2}{32p^2} x_0^3. \text{ Таким чином,}$$

$$\varphi_1 = c_1 \sin pt + c_2 \cos pt + \frac{n^2}{32p^2} x_0^3 \cos 3pt.$$

Для нульових початкових умов змінної  $\varphi_1(t)$

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -\frac{n^2}{32p^2} x_0^3,$$

тобто

$$\varphi_1 = \frac{n^2}{32p^2} x_0^3 (\cos 3pt - \cos pt).$$

Остаточно маємо

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos pt + \frac{1}{3} \frac{n^2}{32p^2} x_0^3 (\cos 3pt - \cos pt) = \\ &= x_0 \cos pt + \frac{n^2}{96p^2} x_0^3 (\cos 3pt - \cos pt) \approx \\ &\approx x_0 \cos pt + \frac{x_0^3}{96} (\cos 3pt - \cos pt). \end{aligned} \quad (12)$$

### § 20.2. МЕТОД ГАРМОНІЧНОГО БАЛАНСУ

Нехай нелінійне рівняння руху системи має вигляд

$$\ddot{x} + n^2 x + f(x) = h \cos rt, \quad (20.4)$$

де  $h$  і  $r$  — амплітуда і частота збуджуючої сили.

Метод гармонічного балансу полягає в тому, що розв'язок рівняння (20.4) шукають у вигляді ряду Фур'є:

$$\begin{aligned} x &= a_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos krt + B_k \sin krt) = \\ &= a_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(krt + \sigma_k), \end{aligned} \quad (20.5)$$

$$\text{де } a_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}; \quad \text{tg } \sigma_k = -\frac{B_k}{A_k}.$$

Цей вираз підставляють у нелінійне рівняння, після чого прирівнюють коефіцієнти при однакових гармоніках у лівій і правій частинах рівняння і далі розв'язують отриману систему нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $a_0, A_k, B_k$  або  $a_0, a_k, \sigma_k$ .

**Приклад 20.2.** Розв'язати рівняння

$$\ddot{x} + n^2 \text{tg} x = h \cos rt. \quad (1)$$

Розв'язування. Розкладемо функцію  $\text{tg} x$  в ряд за степенями  $x$ :

$$\text{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \dots$$

Обмежуючись двома першими членами цього ряду, одержимо наступне нелінійне рівняння:

$$\ddot{x} + n^2 x + \frac{n^2}{3} x^3 = h \cos rt. \quad (2)$$

Розв'язок рівняння (2) шукатимемо у вигляді

$$x = a_0 + a_1 \cos(rt + \sigma_1). \quad (3)$$

Праву частину рівняння (2) запишемо так:

$$\begin{aligned} h \cos rt &= h \cos[(rt + \sigma_1) - \sigma_1] = \\ &= h [\cos(rt + \sigma_1) \cos \sigma_1 + \sin(rt + \sigma_1) \sin \sigma_1]. \end{aligned} \quad (4)$$

Після підстановки  $x$  і  $h \cos rt$  з виразів (3) і (4) в рівняння (2) матимемо

$$\begin{aligned} & (n^2 - r^2) a_1 \cos(rt + \sigma_1) + n^2 a_0 + \\ & + \frac{n^2}{3} \left\{ a_0^3 + \frac{a_1^3}{4} [3 \cos(rt + \sigma_1) + \cos 3(rt + \sigma_1)] + \right. \\ & \left. + 3a_0^2 a_1 \cos(rt + \sigma_1) + \frac{3}{2} a_0 a_1^2 [1 + \cos 2(rt + \sigma_1)] \right\} = \\ & = h [\cos(rt + \sigma_1) \cos \sigma_1 + \sin(rt + \sigma_1) \sin \sigma_1]. \end{aligned} \quad (5)$$

Далі прирівнюємо коефіцієнти при сталих складових лівої та правої частин рівняння (5), а також коефіцієнти при  $\cos(rt + \sigma_1)$  та  $\sin(rt + \sigma_1)$ . Одержимо таку систему рівнянь:

$$a_0 \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( a_0^2 + \frac{3}{2} a_1^2 \right) \right] = 0,$$

$$a_1 \left[ n^2 - r^2 + n^2 \left( \frac{1}{4} a_1^2 + a_0^2 \right) \right] = h \cos \sigma_1,$$

$$h \sin \sigma_1 = 0. \quad (6)$$

З першого рівняння знаходимо  $a_0 = 0$ , з третього одержимо  $\sigma_1 = 0$ . Тоді друге рівняння набуває вигляду

$$a_1 \left( n^2 - r^2 \right) + \frac{n^2}{4} a_1^3 = h. \quad (7)$$

Отже, маємо нелінійне алгебраїчне рівняння відносно амплітуди коливань.

### § 20.3. МЕТОД АМПЛІТУД, ЩО ПОВІЛЬНО ЗМІНЮЮТЬСЯ

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\ddot{x} + n^2 x + \varepsilon f(x) = \varepsilon h \cos rt, \quad (20.6)$$

де  $\varepsilon$  — малий параметр, який вводиться умовно для характеристики малізми відповідних членів.

Розв'язок рівняння (20.6) шукатимемо у вигляді

$$x = a(t) \cos(rt + \sigma(t)). \quad (20.7)$$

Якщо задано умову

$$\dot{a} \cos(rt + \sigma) - a \dot{\sigma} \sin(rt + \sigma) = 0, \quad (20.8)$$

матимемо

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ar \sin(rt + \sigma), \\ \ddot{x} &= -\dot{a}r \sin(rt + \sigma) - \\ & - ar^2 \cos(rt + \sigma) - ar \dot{\sigma} \cos(rt + \sigma). \end{aligned} \quad (20.9)$$

Після підстановки  $\dot{x}$  і  $\ddot{x}$  з виразів (20.9) у рівняння (20.6) з урахуванням умови (20.8) одержимо систему

$$\begin{cases} \dot{a} \sin(rt + \sigma) + \dot{\sigma} a \cos(rt + \sigma) = F, \\ \dot{a} \cos(rt + \sigma) - \dot{\sigma} a \sin(rt + \sigma) = 0, \end{cases} \quad (20.10)$$

де  $F = -\frac{\varepsilon}{r} [h \cos rt - f(a \cos(rt + \sigma)) + a \Delta \omega \cos(rt + \sigma)]$ ;  $\varepsilon \Delta \omega = r^2 - n^2$  — розлад частот.

Розв'язуючи систему (20.10) відносно  $\dot{a}$  та  $\dot{\sigma}$ , знаходимо

$$\dot{a} = F \sin(rt + \sigma), \quad a \dot{\sigma} = F \cos(rt + \sigma). \quad (20.11)$$

Далі переходимо до "скорочених" рівнянь, виконуючи усереднення виразів (20.11) за період коливань.

Позначаючи змінні після усереднення і до усереднення однаково, одержимо систему рівнянь

$$\dot{a} = \langle F \sin(rt + \sigma) \rangle = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} F(a, \varphi) \sin \varphi d\varphi,$$

$$\dot{\sigma} = \langle F \cos(rt + \sigma) \rangle = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} F(a, \varphi) \cos \varphi d\varphi. \quad (20.12)$$

де  $\varphi = rt + \sigma$  (символом  $\langle \rangle$  позначена процедура усереднення).

Маємо

$$\langle \cos(rt + \sigma) \sin(rt + \sigma) \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \sin 2(rt + \sigma) \right\rangle = 0,$$

$$\langle \cos(rt + \sigma) \cos(rt + \sigma) \rangle =$$

$$= \left\langle \frac{1}{2} (1 + \cos 2(rt + \sigma)) \right\rangle = \frac{1}{2},$$

$$\langle \cos rt \sin(rt + \sigma) \rangle =$$

$$= \langle \cos rt (\sin rt \cos \sigma + \cos rt \sin \sigma) \rangle =$$

$$= \cos \sigma \left\langle \frac{1}{2} \sin 2rt \right\rangle +$$

$$+ \sin \sigma \left\langle \frac{1}{2} (1 + \cos 2rt) \right\rangle = \frac{1}{2} \sin \sigma, \quad (20.13)$$

$$\begin{aligned} & \langle \cos rt \cos(rt + \sigma) \rangle = \\ & = \langle \cos rt (\cos rt \cos \sigma - \sin rt \sin \sigma) \rangle = \\ & = \cos \sigma \left\langle \frac{1}{2} (1 + \cos 2rt) \right\rangle - \sin \sigma \left\langle \frac{1}{2} \sin 2rt \right\rangle = \frac{1}{2} \cos \sigma. \end{aligned}$$

З урахуванням співвідношень (20.13) рівняння (20.12) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon}{r} \left[ \frac{h}{2} \sin \sigma - \langle f(a \cos(rt + \sigma)) \sin(rt + \sigma) \rangle \right], \\ a\dot{\sigma} &= -\frac{\varepsilon}{r} \left[ \frac{h}{2} \cos \sigma - \right. \\ & \left. - \langle f(a \cos(rt + \sigma)) \cos(rt + \sigma) \rangle + \frac{1}{2} a \Delta \omega \right]. \end{aligned} \quad (20.14)$$

У стаціонарному режимі ( $\dot{a} = 0, \dot{\sigma} = 0$ ) систему (20.14) можна записати так:

$$\begin{aligned} \langle f(a \cos(rt + \sigma)) \sin(rt + \sigma) \rangle &= \frac{h}{2} \sin \sigma, \\ \langle f(a \cos(rt + \sigma)) \cos(rt + \sigma) \rangle - \frac{1}{2} a \Delta \omega &= \frac{h}{2} \cos \sigma. \end{aligned} \quad (20.15)$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо шукані параметри коливань  $a$  та  $\sigma$ .

**Приклад 20.3.** Розглянемо рівняння (2) з прикладу 20.2, вважаючи, що нелінійна складова рівняння і амплітуда збуджуючої сили є величинами малими. Маємо

$$\varepsilon f = \frac{n^2}{3} x^3.$$

Тоді, згідно з (20.15),

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{n^2}{3} [a \cos(rt + \sigma)]^3 \sin(rt + \sigma) \right\rangle &= \frac{n^2}{12} a^3 \times \\ \times [3 \cos(rt + \sigma) + \cos 3(rt + \sigma)] \sin(rt + \sigma) &= 0, \\ \left\langle \frac{n^2}{3} [a \cos(rt + \sigma)]^3 \cos(rt + \sigma) \right\rangle &= \frac{n^2}{12} a^3 \times \\ \times [3 \cos(rt + \sigma) + \cos 3(rt + \sigma)] \cos(rt + \sigma) &= \\ = \frac{n^2}{8} a^3. \end{aligned}$$

З урахуванням цих співвідношень систему (20.15) запишемо так:

$$\begin{cases} 0 = h \sin \sigma, \\ a(n^2 - r^2) + \frac{n^2}{4} a^3 = h \cos \sigma. \end{cases} \quad (1)$$

З першого рівняння знаходимо  $\sigma = 0$ , тобто друге рівняння набуває вигляду

$$a(n^2 - r^2) + \frac{n^2}{4} a^3 = h, \quad (2)$$

отже воно таке, як і рівняння (7) з прикладу (20.2).

#### § 20.4. МЕТОД КОМПЛЕКСНИХ АМПЛІТУД

Розглянемо диференціальне рівняння (20.6), яке запишемо у вигляді

$$\ddot{x} + n^2 x + \varepsilon f(x) = \varepsilon \frac{h}{2} (e^{irt} + e^{-irt}). \quad (20.16)$$

Розв'язок цього рівняння шукатимемо у формі

$$\begin{aligned} x &= a \cos(rt + \sigma) = \frac{a}{2} [e^{i(\pi + \sigma)} + e^{-i(\pi + \sigma)}] = \\ &= \frac{a}{2} e^{i\sigma} e^{irt} + \frac{a}{2} e^{-i\sigma} e^{-irt} = C e^{irt} + D^{-irt}, \end{aligned} \quad (20.17)$$

де  $C = \frac{a}{2} e^{i\sigma}$ ;  $D = \frac{a}{2} e^{-i\sigma}$  — комплексні амплітуди.

Накладаючи умову  $\dot{C} e^{irt} + \dot{D} e^{-irt} = 0$ , аналогічно (20.9), (20.10), отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{C} e^{irt} - \dot{D} e^{-irt} = F, \\ \dot{C} e^{irt} + \dot{D} e^{-irt} = 0, \end{cases} \quad (20.18)$$

де

$$\begin{aligned} F &= \frac{\varepsilon}{ir} \left[ \frac{h}{2} (e^{irt} + e^{-irt}) - f(C e^{irt} + D e^{-irt}) + \right. \\ & \left. + \Delta \omega (C e^{irt} + D e^{-irt}) \right]. \end{aligned}$$

Розв'яжемо цю систему відносно  $\dot{C}$  та  $\dot{D}$ :

$$\dot{C} = \frac{1}{2} F e^{-irt}, \quad \dot{D} = -\frac{1}{2} F e^{irt}. \quad (20.19)$$

Виконуючи усереднення змінних за період коливань і позначаючи усереднені значення так, як і не усереднені, аналогічно (20.14) одержимо вирази

$$\begin{aligned} \dot{C} &= \frac{1}{2} \langle F e^{-irt} \rangle = \frac{\varepsilon}{2ir} \times \\ \times \left[ \frac{h}{2} + \Delta \omega C - \langle f(C e^{irt} + D e^{-irt}) e^{-irt} \rangle \right], & \quad (20.20) \\ \dot{D} &= -\frac{1}{2} \langle F e^{irt} \rangle = -\frac{\varepsilon}{2ir} \times \\ \times \left[ \frac{h}{2} + \Delta \omega D - \langle f(C e^{irt} + D e^{-irt}) e^{irt} \rangle \right]. \end{aligned}$$

У стаціонарному режимі ( $\dot{C} = \dot{D} = 0$ ) ця система записується так:

$$\begin{aligned} -\Delta \omega C + \langle f(C e^{irt} + D e^{-irt}) e^{-irt} \rangle &= \frac{h}{2}, \\ -\Delta \omega D + \langle f(C e^{irt} + D e^{-irt}) e^{irt} \rangle &= \frac{h}{2}. \end{aligned} \quad (20.21)$$

Ураховуючи співвідношення  $CD = \frac{a^2}{4}$ , з системи (20.21) знаходимо комплексні амплітуди  $C$ ,  $D$  та шукані параметри  $a$  та  $\sigma$ .

**Приклад 20.4.** Розглянемо рівняння (2) з прикладу (20.2). Знайдемо необхідні усереднені значення

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{n^2}{3} (C e^{irt} + D e^{-irt})^3 e^{-irt} \right\rangle = \\ & = \left\langle \frac{n^2}{3} \left( C^3 e^{3irt} + D^3 e^{-3irt} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 3C^2 D e^{irt} + 3CD^2 e^{-irt} \right) e^{-irt} \right\rangle = \\ & = n^2 C^2 D = \frac{1}{4} n^2 a^2 C; \\ & \left\langle \frac{n^2}{3} (C e^{irt} + D e^{-irt})^3 e^{irt} \right\rangle = \\ & = \left\langle \frac{n^2}{3} \left( C^3 e^{3irt} + D^3 e^{-3irt} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 3C^2 D e^{irt} + 3CD^2 e^{-irt} \right) e^{irt} \right\rangle = \\ & = n^2 CD^2 = \frac{1}{4} n^2 a^2 D. \end{aligned}$$

Система (20.21) набуває вигляду

$$\begin{cases} C \left[ -\Delta \omega + \frac{1}{4} n^2 a^2 \right] = \frac{h}{2}, \\ D \left[ -\Delta \omega + \frac{1}{4} n^2 a^2 \right] = \frac{h}{2}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{тобто } C = D = \frac{h}{2 \left( \frac{1}{4} n^2 a^2 + n^2 - r^2 \right)},$$

Повертаючись до амплітуди і фази коливань, знаходимо

$$\sigma = 0; \quad a = \frac{h}{n^2 - r^2 + \frac{1}{4} n^2 a^2}. \quad (2)$$

З останнього виразу матимемо шукане рівняння відносно амплітуди коливань

$$a(n^2 - r^2) + \frac{n^2}{4} a^3 = h.$$

#### § 20.5. МЕТОД ФАЗОВОЇ ПЛОЩИНИ

Метод фазової площини — це графічний метод дослідження систем другого порядку, диференціальне рівняння яких має вигляд

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, \frac{dx}{dt}), \quad (20.22)$$

де  $F(x, \frac{dx}{dt})$  — нелінійна функція.

Для подальшого аналізу рівняння (20.22) записується у формі системи двох рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = F(x, y). \end{cases} \quad (20.23)$$

Шляхом ділення другого рівняння на перше отримуємо таке рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F(x, y)}{y}, \quad (20.24)$$

Розв'язок цього рівняння дає фазову криву  $y = y(x)$ , графік якої будується на фазовій площині змінних  $x$  та  $y$ .

Загальні властивості фазових кривих такі: у верхній півплощині (де  $y > 0$ ) зображуюча точка рухається в напрямі збільшення  $x$ , а в нижній півплощині (де  $y < 0$ ) — в напрямі зменшення;

в точках перетину фазової кривої з віссю абсцис (де  $y = 0$ ) дотична до фазової траєкторії паралельна осі ординат.

**Приклад 20.5.** Дослідити рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -cF(x), \quad (1)$$

де  $F(x) = \text{sign } x$ .

Розв'язування. Запишемо рівняння (1) у формі  $\frac{dy}{dx} = -\frac{cF(x)}{y}$ , тобто  $y dy = -cF(x) dx$ . Прийmemo початкові умови:  $x(0) = 0; y(0) = y_{01} > 0$ . Точка на фазовій площині знаходиться у верхній півплощині, тобто рухається в напрямку збільшення  $x$ . Тому спочатку  $x > 0$  і ми маємо рівняння руху

$$y dy = -c dx, \quad (2)$$

розв'язок якого

$$\frac{y^2}{2} = -c x + C_1,$$

$$\text{де } C_1 = \frac{y_{01}^2}{2}.$$

Фазова траєкторія — парабола, яка для  $y_{01} = 8$  наведена на рис. 20.1 лінією 1 (прийнято  $c = 1$ ). Початок руху — в точці  $A$ .

У точці  $B$  змінюється знак змінної  $x$ , і рівняння руху набуває вигляду

$$y dy = c dx. \quad (3)$$

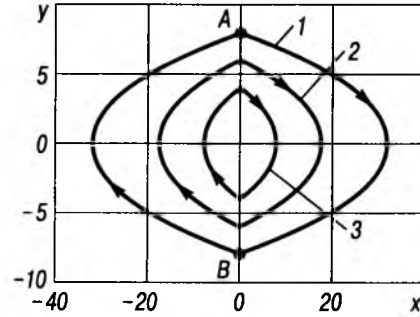


Рис. 20.1

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\frac{y^2}{2} = c x + C_2.$$

Початковими умовами цього рівняння є кінцеві умови попереднього рівняння. У точці  $B$  маємо:  $x_B = x_A = 0; y_B = -y_A = -y_{01}$ , тобто  $C_2 = C_1$ . Таким чином, фазова траєкторія при  $x < 0$  та  $x > 0$  симетрична відносно осі ординат (рис. 20.1).

Якщо змінювати початкові умови, отримаємо сім'ю парабол. Для початкових умов  $y_{01} = 6$  та  $y_{01} = 4$  фазові траєкторії наведено на рис. 20.1 лініями 2 та 3 відповідно.

### § 20.6. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

**20.1.** Рух матеріальної точки визначається диференціальним рівнянням

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x}^3 + n^2 x = h \cos rt,$$

де  $\alpha, n, h$  — коефіцієнти.

Знайти вираз для визначення амплітуди першої гармоніки:

- методом гармонічного балансу;
- методом амплітуд, що змінюють повільно;
- методом комплексних амплітуд.

Відповідь:

$$a^2 \left[ \left( n^2 - r^2 \right)^2 + \frac{9}{16} r^6 \alpha^2 a^4 \right] = h^2.$$

**20.2.** На матеріальну точку масою  $m$ , яка рухається вздовж горизонтальної осі  $Ox$ , діють сила пружності  $F_x = -cx$  та сила сухого тертя  $R_x = -k \text{sign} \dot{x}$ , де  $c, k$  — сталі додатні коефіцієнти.

Методом амплітуд, що повільно змінюються, знайти частоту загасаючих коливань  $\omega_1$ , а також величину зменшення амплітуди коливань  $\Delta a$  за один період.

$$\text{Відповідь: } \omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad \Delta a = \frac{4k}{c}.$$

**20.3.** Диференціальне рівняння руху системи має вигляд

$$\ddot{x} + n^2 \text{tg } x = 0,$$

де  $n$  — коефіцієнт.

За початкових умов  $x(0) = 0; \dot{x}(0) = V$  із точністю до величин першого порядку малості включно методом малого параметра визначити:

- частоту коливань  $p$ ;
- амплітуду першої гармоніки  $A_1$ ;
- амплітуду третьої гармоніки  $A_3$ .

$$\text{Відповідь: } p = \sqrt{n^2 + \frac{V^2}{4}},$$

$$A_1 = \frac{V}{p} \left( 1 + \frac{3V^2}{32p^2} \right), \quad A_3 = \frac{V^3}{32p^3}.$$

**20.4.** Матеріальна точка масою  $m$  рухається вздовж горизонтальної поверхні між двома пружними упорами. Сила пружності кожного з упорів дорівнює  $F_x =$

$$= -\frac{2h}{\pi} k \cdot \text{tg} \left( \frac{\pi x}{2h} \right), \text{ де } h, k \text{ — товщина та жорсткість упора.}$$

За початкових умов  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = V$  методом малого параметра знайти частоту коливань  $p$ .

$$\text{Відповідь: } p = \sqrt{\frac{4k^2}{m} + \frac{\pi^2 V^2}{16h^2}}.$$

**20.5.** На матеріальну точку масою  $m$ , яка рухається вздовж горизонтальної поверхні між двома пружними упорами (сила пружності

кожного з них  $F_x = -\frac{2h}{\pi} k \cdot \text{tg} \left( \frac{\pi x}{2h} \right)$ ), крім

сил пружності діють сила демпфірування  $R_x = -b\dot{x}$  та збурювальна сила  $Q_x = H \cos rt$ , де  $b, H, r$  — коефіцієнти.

Знайти вираз для визначення амплітуди першої гармоніки:

- методом гармонічного балансу;
- методом амплітуд, що повільно змінюються;
- методом комплексних амплітуд.

Відповідь:

$$a^2 \left[ \left( \frac{2k}{m} - r^2 + \frac{\pi^2 k}{8mh^2} a^2 \right) + \frac{b^2}{m^2} r^2 \right] = \frac{H^2}{m^2}.$$

**20.6.** Рух матеріальної точки визначається диференціальним рівнянням

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + n^2 (x + \gamma x^3) = h \cos rt,$$

де  $\alpha, n, \gamma, h$  — коефіцієнти.

Знайти вираз для визначення амплітуди першої гармоніки:

- методом гармонічного балансу;
- методом амплітуд, що повільно змінюються.

Відповідь:

$$a^2 \left[ \left( n^2 - r^2 + \gamma n^2 \frac{3}{4} a^2 \right) + \alpha^2 r^2 \right] = h^2.$$

## ДОДАТКИ

### Д.1. ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ

Функція	Похідна	Функція	Похідна	Функція	Похідна
$C$ (const)	0	$\log_a t$	$\frac{1}{t} \log_a e = \frac{1}{t \ln a}$	$\operatorname{arctg} t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$t$	1	$\lg t$	$\frac{1}{t} \lg e$	$\operatorname{arccotg} t$	$-\frac{1}{1+t^2}$
$t^n$	$nt^{n-1}$	$\sin t$	$\cos t$	$\operatorname{sh} t$	$\operatorname{ch} t$
$\frac{1}{t}$	$-\frac{1}{t^2}$	$\cos t$	$-\sin t$	$\operatorname{ch} t$	$\operatorname{sh} t$
$\frac{1}{t^n}$	$-\frac{n}{t^{n+1}}$	$\operatorname{tg} t$	$\frac{1}{\cos^2 t}$	$\operatorname{th} t$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$
$\sqrt{t}$	$\frac{1}{2\sqrt{t}}$	$\operatorname{ctg} t$	$-\frac{1}{\sin^2 t}$	$\operatorname{cth} t$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 t}$
$\sqrt[n]{t}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{t^{n-1}}}$	$\sec t$	$\sec t \cdot \operatorname{tg} t$	$\operatorname{Arsh} t$	$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$
$e^t$	$e^t$	$\operatorname{cosec} t$	$-\operatorname{cosec} t \cdot \operatorname{ctg} t$	$\operatorname{Arch} t$	$\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$
$a^t$	$a^t \ln a$	$\operatorname{arcsin} t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$\operatorname{Arth} t$	$\frac{1}{1-t^2}$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\operatorname{arccos} t$	$-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$\operatorname{Arcth} t$	$-\frac{1}{1-t^2}$

### Д.2. ТАБЛИЦЯ ІНТЕГРАЛІВ ДЕЯКИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	$\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\operatorname{ctg} t + C, (t \neq k\pi)$	$\int \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C, (a \neq 0)$
$\int t^\alpha dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$	$\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C, (t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2})$	$\int \frac{dt}{a^2-t^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{a+t}{a-t} \right  + C, (a \neq 0)$
$\int \frac{dt}{t} = \ln  t  + C$	$\int \cos t dt = \sin t + C$	$\int \frac{dt}{a^2-t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arth} \frac{t}{a} + C, ( t  < a)$
$\int e^t dt = e^t + C$	$\int \operatorname{ch} t dt = \operatorname{sh} t + C$	$\int \frac{dt}{t^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{t+a}{t-a} \right  + C, (a \neq 0)$
$\int a^t dt = \frac{a^t}{\ln a} + C, (a \neq 1)$	$\int \operatorname{sh} t dt = \operatorname{ch} t + C$	$\int \frac{dt}{t^2-a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{Arcth} \frac{t}{a} + C, ( t  > a)$
$\int \sin t dt = -\cos t + C$	$\int \operatorname{th} t dt = \ln  \operatorname{ch} t  + C$	$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{t}{a} + C, ( t  < a)$
$\int \cos t dt = \sin t + C$	$\int \operatorname{cth} t dt = \ln  \operatorname{sh} t  + C, (t \neq 0)$	$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2+t^2}} = \ln \left  t + \sqrt{a^2+t^2} \right  + C$
$\int \operatorname{tg} t dt = -\ln  \cos t  + C, (t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2})$	$\int \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{th} t + C$	$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}} = \ln \left  t + \sqrt{t^2-a^2} \right  + C, ( t  > a)$
$\int \operatorname{ctg} t dt = \ln  \sin t  + C, (t \neq k\pi)$	$\int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} = -\operatorname{cth} t + C, (t \neq 0)$	

### Д.3. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

При вивченні інтегралів потрібно: знайти  $y$ , якщо  $y = f'(x)$ , або  $dy = f(x)dx$ . Розв'язок, як відомо, подають формулою  $y = \int f(x)dx$  і він зводиться, таким чином, до обчислення невизначеного інтеграла. Проте на практиці значно частіше зустрічається набагато складніша задача: знайти функцію  $y$ , якщо відомо, що вона задовольняє співвідношення вигляду

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (\text{Д.3.1})$$

Такого роду співвідношення, що пов'язують незалежну змінну  $x$ , невідому функцію  $y$  і її похідні до деякого порядку  $n$  включно, називають *звичайними диференціальними рівняннями*.

Отже, у диференціальному рівнянні невідомою є функція, що входить у рівняння під знаком похідних (або диференціалів) певного порядку. Порядок найвищої похідної, що входить у диференціальне рівняння, називають *порядком цього диференціального рівняння*.

Усяку функцію, що задовольняє дане диференціальне рівняння, називають його *розв'язком*, або *інтегралом*. Розв'язати диференціальне рівняння — це означає знайти всі його розв'язки. Якщо для шуканої функції  $y$  нам вдалося одержати формулу, що дає всі розв'язки даного диференціального рівняння і тільки їх, то вважаємо, що знайшли його *загальний розв'язок*, або *загальний інтеграл*.

Загальний розв'язок диференціального рівняння  $n$ -го порядку містить  $n$  довільних сталих  $C_1, C_2, \dots, C_n$  і має вигляд

$$y = \Phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Якщо співвідношення, що пов'язує  $x, y$  і  $n$  довільних сталих, отримано у вигляді, не розв'язаному відносно  $y - \Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ , то будемо називати таке співвідношення *загальним інтегралом рівняння* (Д.3.1).

На противагу загальному розв'язку кожний конкретний розв'язок, тобто кожну конкретну функцію, що задовольняє дане диференціальне рівняння і не залежить від довільних сталих, називають *частинним розв'язком*, або *частинним інтегралом*. *Частинні розв'язки (інтеграли)* виходять із загального, коли сталі  $C_1, C_2, \dots, C_n$  дістають конкретні числові значення.

Графік кожного частинного розв'язку називають *інтегральною кривою*. Тому загальний розв'язок, що містить усі частинні розв'язки, є *сім'єю інтегральних кривих*. У випадку рівняння

першого порядку ця сім'я залежить від однієї довільної сталої, у випадку рівняння  $n$ -го порядку — від  $n$  довільних сталих.

У *задачі Коші* (початковій задачі) потрібно знайти частинні розв'язки для рівняння  $n$ -го порядку, що задовольняє  $n$  початкових умов:

$$y = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

за якими визначають  $n$  сталих  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Диференціальне рівняння 1-го порядку має загальний вигляд  $F(x, y, y') = 0$ , або вигляд, поданий відносно  $y'$ :  $y' = f(x, y)$ .

#### ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ (ДР) ПЕРШОГО ПОРЯДКУ, ЩО ДОПУСКАЮТЬ АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Розглянемо диференціальні рівняння трьох видів. *Рівняння із змінними, що відокремлюються*. Це рівняння вигляду

$$f_1(y)g_1(x)y'_x = f_2(y)g_2(x). \quad (\text{Д.3.2})$$

Обидві частини рівняння (Д.3.2) ділять на  $f_2(y)g_1(x)$ . У результаті цього отримують рівняння зі змінними, що відокремлені:

$$\frac{f_1(y)}{f_2(y)} y'_x = \frac{g_2(x)}{g_1(x)},$$

яке інтегрують

$$\int \frac{f_1(y)}{f_2(y)} dy = \int \frac{g_2(x)}{g_1(x)} dx + C,$$

$$\text{або } \int f(y) dy = \int g(x) dx + C.$$

Для знаходження частинного розв'язку, що задовольняє умову  $y(x_0) = y_0$ , записують

$$\int_{y_0}^y f(y) dy = \int_{x_0}^x g(x) dx.$$

Приклад Д.3.1. Розв'язати диференціальне рівняння  $(y+1)dy = -x dx$ .

*Розв'язування.* Загальний інтеграл цього диференціального рівняння має вигляд

$$\int (y+1) dy = -\int x dx + C, \text{ або } (y+1)^2 + x^2 = 2C.$$

Приклад Д.3.2. Розв'язати диференціальне рівняння  $x(y^2-1)dx = (x^2+1)y dy$ .

*Розв'язування.* Розділивши обидві частини рівняння на  $(x^2+1)(y^2-1)$ , отримуємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{x dx}{x^2+1} = \frac{y dy}{y^2-1}$$

Загальний інтеграл цього диференціального рівняння має вигляд  $\int \frac{xdx}{x^2+1} = \int \frac{ydy}{y^2-1}$  або

$$\frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(y^2-1)}{y^2-1} \Rightarrow \ln(x^2+1) = \ln|y^2-1| + \ln C, \text{ або } x^2+1 = C(y^2-1).$$

Рівняння вигляду

$$y' = f(ax+by) \quad (\text{Д.3.3})$$

за допомогою заміни  $t = ax+by$ , де  $t = t(x)$  — нова невідома функція ( $t' = a+by'$ ), зводиться до ДР (Д.3.2)

Приклад Д.3.3 Розв'язати диференціальне рівняння  $y' = \sin(y-2x)$ .

Розв'язування. Вводимо заміну  $t = y-2x$ , тоді  $t' = y' - 2$  і задане ДР набуває вигляду

$$y' - 2 = \sin t, \text{ або } y' = \sin t + 2.$$

Загальний інтеграл цього диференціального рівняння має вигляд

$$y = -\cos t + 2t + C,$$

$$\text{або } y = -\cos(y-2x) + 2y - 4x + C.$$

Однорідне рівняння

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{Д.3.4})$$

за допомогою заміни  $t = \frac{y}{x}$ , де  $t = t(x)$  — нова невідома функція ( $t + xt' = y'$ ), зводиться до ДР (Д.3.2)

Приклад Д.3.4 Розв'язати диференціальне рівняння  $xy' - y = x \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$ .

Розв'язування. Переписавши рівняння у вигляді

$$y' = \frac{y}{x} + \cos^2\left(\frac{y}{x}\right),$$

отримуємо однорідне ДР. Виконавши заміну  $t = \frac{y}{x}$ , отримуємо диференціальне рівняння зі змінними, що відокремлюються,  $xt' = \cos^2 t$ , або рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{dx}{x}.$$

Загальний інтеграл цього диференціального рівняння  $\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{dx}{x}$  або  $\operatorname{tg} t = \ln|x| + C \Rightarrow$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C.$$

Однорідне рівняння

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{mx+ny+p}\right) \quad (\text{Д.3.5})$$

за допомогою заміни  $u = x-x_0$  і  $v = y-y_0$ , де значення сталих  $x_0$  і  $y_0$  знаходять як розв'язки лінійної алгебраїчної системи

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0; \\ mx_0 + ny_0 + p = 0. \end{cases}$$

Внаслідок указаних перетворень отримують рівняння

$$v' = f\left(\frac{au+bv}{mu+nv}\right),$$

яке після ділення чисельника і знаменника аргументу функції на  $u$  зводиться до ДР виду (Д.3.4)

$$v' = f\left(\frac{a+b\frac{v}{u}}{m+n\frac{v}{u}}\right).$$

Лінійне диференціальне рівняння

$$y' + f(x)y = g(x). \quad (\text{Д.3.6})$$

Розв'язок шукають у вигляді добутку  $y = uv$ , де  $v = v(x)$  задовольняє лише частину рівняння:  $v' + f(x)v = 0$ , звідки один із частинних розв'язків  $v = e^{-F}$  ( $F = \int f(x)dx$ ). Для функції  $u = u(x)$  отримують рівняння зі змінними, що розділяються,  $v(x)u' = g(x)$ . Після інтегрування рівняння для  $u$  знаходимо загальний розв'язок:

$$y = e^{-F} \left( \int g e^F dx + C \right), \text{ де } F = \int f(x)dx.$$

Приклад Д.3.5 Розв'язати диференціальне рівняння  $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$ .

Розв'язування. Нехай  $y = uv$ , тоді  $y' = u'v + v'u$ . Після підстановки в рівняння маємо

$$u'v + u(v' - v \operatorname{ctg} x) = 2x \sin x.$$

З рівняння  $v' - v \operatorname{ctg} x = 0$  знаходимо частинний розв'язок  $\frac{dv}{v} = v \operatorname{ctg} x$  або  $\frac{dv}{v} = \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow$

$\frac{dv}{v} = \frac{d \sin x}{\sin x}$  або  $\ln|v| = \ln|\sin x|$ , тобто  $v = \sin x$ , а  $u$  знайдемо з рівняння  $u' \sin x = 2x \sin x \Rightarrow u' = 2x$  або  $u = x^2 + C$ .

Загальний інтеграл заданого диференціального рівняння має вигляд  $y = uv = (x^2 + C) \sin x$ .

Рівняння Бернуллі

$$y' + f(x)y = g(x)y^n, \quad n \neq 0, 1. \quad (\text{Д.3.7})$$

Рівняння Бернуллі розв'язують за допомогою заміни  $t = y^{1-n}$ , яка зводить його до лінійного рівняння  $t' + (1-n)f(x)t = (1-n)g(x)$ .

Загальний інтеграл рівняння Бернуллі має вигляд  $y^{1-n} = Ce^{-F} + (1-n)e^{-F} \int e^F g(x) dx$ , де  $F = (1-n) \int f(x) dx$ .

Рівняння в повних диференціалах

$$f(x,y)dy + g(x,y)dx = 0, \text{ де } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}. \quad (\text{Д.3.8})$$

Ліва частина цього рівняння є повним диференціалом деякої функції двох змінних  $U(x,y)$ .

Загальний інтеграл  $U(x,y) = C$ , де функція  $U$  визначається із системи

$$\frac{\partial U}{\partial y} = f; \quad \frac{\partial U}{\partial x} = g.$$

Після інтегрування першого рівняння, маємо функцію  $U = \int f(x,y)dy + u(x)$ , яку підставляємо у друге рівняння, щоб знайти  $u(x)$ , в результаті чого отримуємо  $U(x,y)$ . Отже, загальне рівняння в повних диференціалах можна подати у вигляді

$$\int_{y_0}^y f(x_0,t)dt + g(s,y)ds = C,$$

де  $x_0$  і  $y_0$  — довільні числа.

### ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

У розділі "Малі коливання механічної системи" доводиться зустрічатись із лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами, тому розглянемо розв'язування таких рівнянь. Диференціальне рівняння (Д.3.1) називають *лінійним*, якщо воно має вигляд

$$p_0(x)y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = f(x). \quad (\text{Д.3.9})$$

де  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$  і  $f(x)$  — задані функції. Якщо  $f(x) = 0$ , то рівняння (Д.3.9) називають *однорідним*, у протилежному випадку — *неоднорідним*. Загальний розв'язок рівняння (Д.3.9) є сумою якого-небудь його частинного розв'язку і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння:

$$p_0(x)y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = 0. \quad (\text{Д.3.10})$$

Якщо коефіцієнти  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$  сталі, то рівняння (Д.3.9) набуває вигляду

$$p_0 y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + p_{n-1} y'(x) + p_n y(x) = f(x). \quad (\text{Д.3.11})$$

Його називають *лінійним диференціальним рівнянням  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами*.

Неоднорідному рівнянню (Д.3.11) відповідає однорідне рівняння, яке виглядає так:

$$p_0 y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + p_{n-1} y'(x) + p_n y(x) = 0. \quad (\text{Д.3.12})$$

Розв'язок рівняння (Д.3.12) шукатимемо у вигляді  $y = e^{kx}$ , де  $k$  — стала. Маємо  $y' = ke^{kx}$ ,  $y'' = k^2 e^{kx}$ , ...,  $y^{(n)} = k^n e^{kx}$ . Підставивши отримані вирази в (Д.3.12), одержимо

$$e^{kx} (p_0 k^n + p_1 k^{n-1} + \dots + p_{n-1} k + p_n) = 0.$$

Оскільки  $e^{kx} \neq 0$ , то

$$p_0 k^n + p_1 k^{n-1} + \dots + p_{n-1} k + p_n = 0. \quad (\text{Д.3.13})$$

Рівність (Д.3.13) є алгебраїчним рівнянням з невідомим  $k$ . Його називають *характеристичним рівнянням* для диференціального рівняння (Д.3.13). Характеристичне рівняння є рівнянням  $n$ -го степеня, тому рівняння має  $n$  коренів  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , серед яких можуть бути кратні і комплексні. При цьому можемо отримати чотири випадки.

*Всі корені характеристичного рівняння  $k_1, k_2, \dots, k_n$  — дійсні і різні.* У такому разі однорідне рівняння (Д.3.12) має  $n$  лінійно незалежних частинних розв'язків  $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}$ , тобто його загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x}.$$

Приклад Д.3.6. Знайти загальний розв'язок рівняння  $y'' + 3y' - 4y = 0$ .

Розв'язування. Характеристичне рівняння має вигляд  $k^2 + 3k - 4 = 0$ , корені якого  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 1$ ,  $k_3 = -4$ .

Тому загальний розв'язок диференціального рівняння запишемо у вигляді  $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-4x}$ .

*Деякий дійсний корінь характеристичного рівняння  $k$  має кратність  $r$ .* Цьому кореню відповідають  $r$  лінійно незалежних частинних розв'язків вигляду  $e^{kx}, xe^{kx}, \dots, x^{r-1}e^{kx}$ , лінійна комбінація яких та решта  $n-r$  частинних розв'язків дають загальний розв'язок однорідного рівняння (Д.3.12):

$$y = (C_1 + C_2 x + \dots + C_r x^{r-1}) e^{kx} + C_{r+1} e^{k_1 x} + \dots + C_n e^{k_n x}.$$

Приклад Д.3.7. Знайти загальний розв'язок рівняння  $y''' + y'' - y' - y = 0$ .

**Розв'язування.** Характеристичне рівняння має вигляд  $k^3 + k^2 - k - 1 = 0$ , або  $(k+1)(k^2 - 1) = 0$ , корені якого  $k_1 = k_2 = -1$ ,  $k_3 = 1$ .

Тому загальний розв'язок диференціального рівняння запишемо у вигляді  $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + C_3e^x$ .

**Характеристичне рівняння має пару комплексно спряжених коренів  $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ .** Цій парі коренів відповідають два лінійно незалежних частинних розв'язки однорідного рівняння (Д.3.12):  $e^{\alpha x} \cos \beta x$ ,  $e^{\alpha x} \sin \beta x$ , які з рештою  $n - 2$  частинних розв'язків дають загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y = (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)e^{\alpha x} + C_3 e^{k_3 x} + \dots + C_n e^{k_n x}.$$

**Приклад Д.3.8.** Знайти загальний розв'язок рівняння  $y'' - 6y' + 13y = 0$ .

**Розв'язування.** Характеристичне рівняння має вигляд  $k^2 - 6k + 13 = 0$ , або  $k(k^2 - 6k + 13) = 0$ , корені якого  $k_1 = 0$ ,  $k_{2,3} = 3 \pm 2i$ .

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння запишемо у вигляді  $y = C_1 + (C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x)e^{3x}$ .

**Деяка пара комплексно спряжених коренів  $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$  характеристичного рівняння має кратність  $r$ .** Цій парі коренів відповідають  $2r$  лінійно незалежних частинних розв'язки однорідного рівняння (Д.3.12):

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{r-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{r-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

**Вигляд частинних розв'язків неоднорідного ДР  $y^{(n)}(x) + p_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + p_1y'(x) + p_0y(x) = f(x)$  зі сталими коефіцієнтами для правої частини спеціального вигляду**

Вигляд правої частини $f(x)$	Корені характеристичного рівняння $k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \dots + p_1k + p_0 = 0$	Вигляд частинного розв'язку $y = y^*(x)$
$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$	$0$ – не є коренем характеристичного рівняння ( $p_0 \neq 0$ )	$C_m x^m + C_{m-1} x^{m-1} + \dots + C_1 x + C_0$
	$0$ – є коренем характеристичного рівняння кратності $r$	$x^r (C_m x^m + C_{m-1} x^{m-1} + \dots + C_1 x + C_0)$
$(a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0) e^{\alpha x}$ , $\alpha$ – дійсне число	$\alpha$ – не є коренем характеристичного рівняння	$e^{\alpha x} (C_m x^m + C_{m-1} x^{m-1} + \dots + C_1 x + C_0)$
	$\alpha$ – є коренем характеристичного рівняння кратності $r$	$x^r e^{\alpha x} (C_m x^m + C_{m-1} x^{m-1} + \dots + C_1 x + C_0)$

Їх лінійна комбінація разом з рештою  $n - 2r$  частинних розв'язків дають загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y = (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)e^{\alpha x} + (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x)x e^{\alpha x} + \dots + (C_{2r-1} \cos \beta x + C_{2r} \sin \beta x)x^{r-1} e^{\alpha x} + \dots + C_n e^{k_n x}.$$

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ НЕОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ**

Розв'язок неоднорідного ДР є суперпозицією загального розв'язку відповідного йому однорідного ДР і частинного неоднорідного ДР  $y = y_\delta + y^*$ .

**Частинні розв'язки неоднорідних ДР з правою частиною  $f(x)$  спеціального вигляду.** Якщо права частина  $f(x)$  лінійних неоднорідних ДР зі сталими коефіцієнтами  $y^{(n)}(x) + p_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + p_1y'(x) + p_0y(x) = f(x)$  має спеціальний вигляд многочлена  $a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$   $m$ -го і  $b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$   $n$ -го степеня із заданими коефіцієнтами;

$e^{\alpha x}$  – експоненціальної функції;  
 $\sin \beta x$ ,  $\cos \beta x$  – тригонометричних функцій та їх комбінацій;

то його частинний розв'язок знаходять методом невизначених коефіцієнтів, а саме, за таблицею.

Вигляд правої частини $f(x)$	Корені характеристичного рівняння $k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \dots + p_1k + p_0 = 0$	Вигляд частинного розв'язку $y = y^*(x)$
$(a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0) \cos \beta x + (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0) \sin \beta x$	$i\beta$ – не є коренем характеристичного рівняння	$(D_\lambda x^\lambda + D_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + \dots + D_1 x + D_0) \cos \beta x + (F_\lambda x^\lambda + F_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + \dots + F_1 x + F_0) \sin \beta x$
	$i\beta$ – є коренем характеристичного рівняння кратності $r$	$x^r [(D_\lambda x^\lambda + D_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + \dots + D_1 x + D_0) \cos \beta x + (F_\lambda x^\lambda + F_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + \dots + F_1 x + F_0) \sin \beta x]$
$[(a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0) \cos \beta x + (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0) \sin \beta x] e^{\alpha x}$	$\alpha + i\beta$ – не є коренем характеристичного рівняння	$[(D_\lambda x^\lambda + D_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + \dots + D_1 x + D_0) \cos \beta x + (F_\lambda x^\lambda + F_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + \dots + F_1 x + F_0) \sin \beta x] e^{\alpha x}$
	$\alpha + i\beta$ – є коренем характеристичного рівняння кратності $r$	$x^r [(D_\lambda x^\lambda + D_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + \dots + D_1 x + D_0) \cos \beta x + (F_\lambda x^\lambda + F_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + \dots + F_1 x + F_0) \sin \beta x] e^{\alpha x}$

**Частинні розв'язки неоднорідних ДР неспеціального вигляду** знаходять методом варіації сталих. Нехай для неоднорідного ДР (Д.3.11) відомий загальний розв'язок відповідного однорідного ДР (Д.3.12):

$$y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

де  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , ...,  $y_n(x)$  – лінійно незалежні розв'язки однорідного ДР,  $C_1$ ,  $C_2$ , ...,  $C_n$  – довільні сталі. Частинний розв'язок  $y^*$  неоднорідного ДР шукають у вигляді

$$y^* = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \dots + C_n(x) y_n(x),$$

тобто довільні сталі заміняють невідомими функціями від  $x$ . Ці функції знаходять із системи лінійних диференціальних рівнянь для визначення похідних  $C'_1$ ,  $C'_2$ , ...,  $C'_n$ :

$$\begin{cases} C'_1(x) y_1(x) + C'_2(x) y_2(x) + \dots + C'_n(x) y_n(x) = 0; \\ C'_1(x) y'_1(x) + C'_2(x) y'_2(x) + \dots + C'_n(x) y'_n(x) = 0; \\ \dots \\ C'_1(x) y_1^{(n-1)}(x) + C'_2(x) y_2^{(n-1)}(x) + \dots + C'_n(x) y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases}$$

**Приклад Д.3.9.** Знайти загальний розв'язок рівняння  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ .

**Розв'язування.** Характеристичне рівняння має вигляд:  $k^2 - 2k + 1 = 0$ , або  $(k-1)^2 = 0$ , корені якого  $k_1 = k_2 = 1$ .

Тому загальний розв'язок диференціального рівняння запишемо у вигляді  $y_0 = (C_1 + C_2 x)e^x$ . Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді  $y^* = [C_1(x) + x C_2(x)]e^x$ . Для невідомих функцій  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$  складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} [C'_1(x) + x C'_2(x)] e^x = 0; \\ C'_1(x) e^x + C'_2(x) e^x + x C'_2(x) e^x = \frac{e^x}{x}, \end{cases}$$

або  $\begin{cases} C'_1(x) + x C'_2(x) = 0; \\ C'_1(x) + (1+x) C'_2(x) = \frac{1}{x}. \end{cases}$

Із системи знаходимо  $C'_2 = \frac{1}{x}$ ,  $C'_1 = -1$ . Звідси після інтегрування маємо  $C_1(x) = -x$ ;  $C_2(x) = \ln|x|$ . Частинний розв'язок неоднорідного ДР такий:  $y^* = (-x + x \ln|x|) e^x$ . Загальний розв'язок ДР має вигляд  $y = [C_1 + C_2 x + x(\ln|x| - 1)] e^x$ .

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Айзерман М. А. Классическая механика. — М.: Наука, 1980. — 367 с.
2. Бутенин Н. В. Введение в аналитическую механику. — М.: Наука, 1971. — 264 с.
3. Бутенин Н. В., Луцк Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. — СПб.: Лань, 1998. — 736 с.
4. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики: В 2 ч. — М.: Наука, 1972. — Ч. 1. — 467 с.; Ч. 2. — 332 с.
5. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. — М.: Наука, 1966. — 300 с.
6. Гернет М. М. Курс теоретической механики. — М.: Высш. шк., 1981. — 303 с.
7. Голубева О. В. Теоретическая механика. — М.: Высш. шк., 1976. — 283 с.
8. Добронравов В. В. Основы аналитической механики. — М.: Высш. шк., 1976. — 262 с.
9. Добронравов В. В., Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. — М.: Высш. шк., 1983. — 575 с.
10. Ишлинский А. Ю. Механика относительного движения и силы инерции. — М.: Наука, 1981. — 191 с.
11. Кильчевский Н. А. Курс теоретической механики: В 2 т. — М.: Наука, 1972–1977. — Т. 1. — 456 с.; Т. 2. — 543 с.
12. Кильчевский Н. А., Ремизова Н. И., Кильчевская Е. Н. Основы теоретической механики. — К.: Вища шк., 1986. — 295 с.
13. Кошляков В. Н. Краткий курс теоретической механики. Кинематика. Кинетика: Учеб. — К.: Вища шк., 1993. — 312 с.
14. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики: В 2 т. — М.: Наука, 1982–1983. — Т. 1. — 352 с.; Т. 2. — 640 с.
15. Маркеев А. П. Теоретическая механика: Учеб. пособие. — М.: Наука, 1990. — 414 с.
16. Ольховский И. И. Курс теоретической механики для физиков. — М.: Наука, 1978. — 574 с.
17. Павловский М. А. Теоретична механіка: Підруч. — К.: Техніка, 2002. — 512 с.
18. Павловский М. А., Акинфиева Л. Ю., Бойчук О. Ф. Теоретическая механика. Динамика. — К.: Вища шк., 1990. — 480 с.
19. Павловский М. А., Акинфиева Л. Ю., Бойчук О. Ф. Теоретическая механика. Статика. Кинематика. — К.: Вища шк. Головное изд-во, 1989. — 351 с.
20. Павловский М. А., Заплатный В. И. Аналітична механіка: Навч. посібник. — К.: НМК ВШ, 1990. — 144 с.
21. Павловский М. А., Путята Т. В. Теоретическая механика. — К.: Вища шк. Головное изд-во, 1985. — 328 с.
22. Савин Г. Н., Путята Т. В., Фрадлин Б. Н. Курс теоретической механики. — К.: Вища шк., 1973. — 359 с.
23. Старжинский В. М. Теоретическая механика. — М.: Наука, 1980. — 464 с.
24. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. — М.: Высш. шк., 2001. — 416 с.
25. Яблонский А. А. Курс теоретической механики: В 2 т. — М.: Высш. шк., 1977. — Т. 2. — 430 с.
26. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. — СПб.: Лань, 1999. — 768 с.
27. Яблонский А. А., Нореико С. С. Курс теории колебаний. — М.: Высш. шк., 1966 — 255 с.
28. Айзенберг Т. Б., Воронков И. М., Осецкий В. М. Руководство к решению задач по теоретической механике. — М.: Высш. шк., 1968. — 436 с.
29. Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах: В 2 т. — М.: Наука, 1990. — Т. 1. — 670 с.; Т. 2. — 683 с.
30. Березова О. В., Солодовников Р. В., Друшляк Г. Ю. Теоретична механіка: Зб. задач / За заг. ред. П. П. Лавриненка. — К.: ІЗМТ, 1998. — 408 с.
31. Божидарник В. В., Величко Л. Д. Методика розв'язування і збірник задач з теоретичної механіки: Навч. посібник. — Луцьк: Надстир'я, 2003. — 496 с.
32. Мешерский И. В. Задачи по теоретической механике. — СПб.: Лань, 2002. — 448 с.
33. Мисюрев М. Л. Методика решения задач по теоретической механике. — М.: Высш. шк., 1962. — 308 с.
34. Новожилов И. В., Зацепин М. Ф. Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ. — М.: Высш. шк., 1986. — 134 с.
35. Путята Т. В., Фрадлин Б. Н. Методика розв'язування задач з теоретичної механіки. — К.: Рад. шк., 1955. — 368 с.
36. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике/ Под ред. А. А. Яблонского. — М.: Интеграл-Пресс, 2003. — 384 с.
37. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие / Н. А. Бражниченко, В. Л. Кан, Б. Л. Минцберг, В. И. Морозов; Под ред. Н. А. Бражниченко. — М.: Высш. шк., 1986. — 480 с.
38. Сборник задач по теоретической механике/ К. С. Колесников, Г. Д. Блюмин, В. И. Дронг и др.; Под ред. К. С. Колесникова. — М.: Наука, 1983. — 320 с.
39. Сборник коротких задач по теоретической механике/ О. Э. Кеппе, Я. А. Виба, О. П. Грапис и др.; Под ред. О. Э. Кеппе. — М.: Высш. шк., 1989. — 386 с.
40. Яскілка М. Б. Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки: Посібн. — К.: Вища шк., 1999. — 351 с.

## ЗМІСТ

Передмова .....	3
<b>ЧАСТИНА I. СТАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА</b> .....	<b>5</b>
Визначення, аксіоми та найпростіші теореми .....	5
<b>Розділ 1. Система збіжних сил</b> .....	<b>8</b>
§ 1.1. Рівновага збіжної системи сил та методика розв'язування задач .....	8
§ 1.2. Плоска збіжна система сил. Рівновага простої конструкції .....	10
1.2.1. Короткі теоретичні відомості .....	10
1.2.2. Приклади розв'язування задач .....	11
1.2.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	16
§ 1.3. Рівновага складеної конструкції .....	18
1.3.1. Короткі теоретичні відомості .....	18
1.3.2. Приклади розв'язування задач .....	19
1.3.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	22
§ 1.4. Рівновага збіжної системи сил з урахуванням сил тертя .....	24
1.4.1. Короткі теоретичні відомості .....	24
1.4.2. Приклади розв'язування задач .....	25
1.4.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	29
§ 1.5. Просторова збіжна система сил .....	32
1.5.1. Короткі теоретичні відомості .....	32
1.5.2. Приклади розв'язування задач .....	32
1.5.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	33
<b>Розділ 2. Абсолютно тверде тіло під дією довільної плоскої системи сил</b> .....	<b>36</b>
§ 2.1. Рівняння рівноваги абсолютно твердого тіла .....	36
§ 2.2. Рівняння рівноваги складеної конструкції .....	37
§ 2.3. Приклади розв'язування задач .....	37
§ 2.4. Задачі для самостійного розв'язування .....	43
§ 2.5. Розрахункові завдання “Визначення реакцій опор складеної конструкції” .....	45
<b>Розділ 3. Плоскі ферми. Визначення зусиль у стрижнях</b> .....	<b>51</b>
§ 3.1. Короткі теоретичні відомості .....	51
§ 3.2. Приклади розв'язування задач .....	52
§ 3.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	62
§ 3.4. Розрахункові завдання “Визначення зусиль у стрижнях плоскої ферми” .....	65
<b>Розділ 4. Абсолютно тверде тіло під дією довільної просторової системи сил</b> .....	<b>68</b>
§ 4.1. Рівновага системи сил, довільно розмішених у просторі .....	68
4.1.1. Короткі теоретичні відомості .....	68
4.1.2. Приклади розв'язування задач .....	68
4.1.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	74
4.1.4. Розрахункові завдання “Визначення реакцій опор плит” .....	77
§ 4.2. Зведення системи сил до найпростішого вигляду .....	82

4.2.1. Короткі теоретичні відомості .....	82
4.2.2. Приклади розв'язування задач .....	83
4.2.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	86
§ 4.3. Центр системи паралельних сил .....	88
4.3.1. Короткі теоретичні відомості .....	88
4.3.2. Приклади розв'язування задач .....	96
4.3.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	101
4.3.4. Розрахункові завдання “Визначення центра ваги плоскої фігури” .....	103

## **ЧАСТИНА II. КІНЕМАТИКА** .....

<b>Розділ 5. Кінематика точки</b> .....	<b>108</b>
§ 5.1. Короткі теоретичні відомості .....	108
§ 5.2. Приклади розв'язування задач .....	110
§ 5.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	113
<b>Розділ 6. Найпростіші рухи твердого тіла і їх перетворення</b> .....	<b>114</b>
§ 6.1. Короткі теоретичні відомості .....	114
§ 6.2. Приклади розв'язування задач .....	118
§ 6.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	121
<b>Розділ 7. Складний рух точки</b> .....	<b>125</b>
§ 7.1. Короткі теоретичні відомості .....	125
§ 7.2. Методика розв'язування задач .....	126
§ 7.3. Приклади розв'язування задач .....	127
§ 7.4. Задачі для самостійного розв'язування .....	131
§ 7.5. Розрахункові завдання .....	134
<b>Розділ 8. Плоскопаралельний рух твердого тіла</b> .....	<b>138</b>
§ 8.1. Короткі теоретичні відомості .....	138
§ 8.2. Приклади розв'язування задач .....	143
§ 8.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	147
§ 8.4. Розрахункові завдання .....	149
<b>Розділ 9. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої точки</b> .....	<b>158</b>
§ 9.1. Короткі теоретичні відомості .....	158
§ 9.2. Приклади розв'язування задач .....	160
§ 9.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	162
<b>Розділ 10. Складний рух твердого тіла</b> .....	<b>163</b>
§ 10.1. Короткі теоретичні відомості .....	163
§ 10.2. Приклади розв'язування задач .....	168
§ 10.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	170

## **ЧАСТИНА III. ДИНАМІКА** .....

<b>Розділ 11. Динаміка матеріальної точки</b> .....	<b>173</b>
§ 11.1. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки .....	173
11.1.1. Короткі теоретичні відомості .....	173
11.1.2. Приклади розв'язування задач .....	176
11.1.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	185
§ 11.2. Коливання матеріальної точки .....	186
11.2.1. Короткі теоретичні відомості .....	186
11.2.2. Приклади розв'язування задач .....	192
11.2.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	199
<b>Розділ 12. Основні теореми динаміки</b> .....	<b>203</b>
§ 12.1. Теорема про зміну кількості руху системи матеріальних точок .....	203



12.1.1. Короткі теоретичні відомості .....	203
12.1.2. Приклади розв'язування задач .....	204
12.1.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	209
§ 12.2. Теорема про рух центра мас механічної системи .....	211
12.2.1. Короткі теоретичні відомості .....	211
12.2.2. Приклади розв'язування задач .....	211
12.2.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	214
§ 12.3. Теорема Ейлера про рух рідини .....	216
12.3.1. Короткі теоретичні відомості .....	216
12.3.2. Приклади розв'язування задач .....	216
12.3.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	218
§ 12.4. Теорема про зміну кінетичної енергії .....	220
12.4.1. Короткі теоретичні відомості .....	220
12.4.2. Приклади розв'язування задач .....	221
12.4.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	228
12.4.4. Розрахунково-графічна робота “Застосування теореми про зміну кінетичної енергії для вивчення руху механічної системи” .....	231
§ 12.5. Теорема про зміну моменту кількості руху (кінетичного моменту) .....	236
12.5.1. Короткі теоретичні відомості .....	236
12.5.2. Приклади розв'язування задач .....	238
12.5.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	243
12.5.4. Розрахункові завдання “Застосування теореми про зміну кінетичного моменту для визначення кутової швидкості твердого тіла” .....	245
<b>Розділ 13. Метод кінетостатики .....</b>	<b>253</b>
§ 13.1. Принцип Д'Аламбера для матеріальної точки .....	253
13.1.1. Короткі теоретичні відомості .....	253
13.1.2. Приклади розв'язування задач .....	254
13.1.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	256
§ 13.2. Принцип Д'Аламбера для системи .....	259
13.2.1. Короткі теоретичні відомості .....	259
13.2.2. Приклади розв'язування задач .....	260
13.2.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	263
<b>Розділ 14. Динаміка відносного руху .....</b>	<b>266</b>
§ 14.1. Короткі теоретичні відомості .....	266
§ 14.2. Приклади розв'язування задач .....	267
§ 14.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	274
<b>Розділ 15. Динаміка твердого тіла .....</b>	<b>278</b>
§ 15.1. Динамічні реакції .....	278
15.1.1. Короткі теоретичні відомості .....	278
15.1.2. Приклади розв'язування задач .....	279
15.1.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	284
15.1.4. Розрахунково-графічна робота .....	288
§ 15.2. Плоскопаралельний рух твердого тіла .....	295
15.2.1. Короткі теоретичні відомості .....	295
15.2.2. Методика розв'язування задач .....	296
15.2.3. Приклади розв'язування задач .....	297
15.2.4. Задачі для самостійного розв'язування .....	303
<b>Розділ 16. Елементарна теорія удару .....</b>	<b>306</b>
§ 16.1. Короткі теоретичні відомості .....	306
§ 16.2. Приклади розв'язування задач .....	307
§ 16.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	311

<b>ЧАСТИНА IV. ОСНОВИ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ .....</b>	<b>313</b>
<b>Розділ 17. Принцип можливих переміщень і принцип Д'Аламбера—Лагранжа .....</b>	<b>313</b>
§ 17.1. Принцип можливих переміщень .....	313
17.1.1. Короткі теоретичні відомості .....	313
17.1.2. Приклади розв'язування задач .....	314
17.1.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	324
§ 17.2. Принцип Д'Аламбера—Лагранжа .....	327
17.2.1. Короткі теоретичні відомості .....	327
17.2.2. Приклади розв'язування задач .....	329
17.2.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	338
<b>Розділ 18. Рівняння Лагранжа другого роду .....</b>	<b>341</b>
§ 18.1. Короткі теоретичні відомості .....	341
§ 18.2. Приклади розв'язування задач .....	343
§ 18.3. Задачі для самостійного розв'язування .....	357
§ 18.4. Розрахункові завдання .....	362
<b>Розділ 19. Малі коливання механічної системи .....</b>	<b>367</b>
§ 19.1. Стійкість рівноваги .....	367
§ 19.2. Складання та дослідження лінеаризованих рівнянь руху системи .....	368
§ 19.3. Приклади розв'язування задач .....	370
§ 19.4. Задачі для самостійного розв'язування .....	376
<b>Розділ 20. Елементи теорії нелінійних коливань .....</b>	<b>381</b>
§ 20.1. Метод малого параметра .....	381
§ 20.2. Метод гармонічного балансу .....	382
§ 20.3. Метод амплітуд, що повільно змінюються .....	383
§ 20.4. Метод комплексних амплітуд .....	384
§ 20.5. Метод фазової площини .....	385
§ 20.6. Задачі для самостійного розв'язування .....	386
<b>Додатки .....</b>	<b>388</b>
<b>Список рекомендованої літератури .....</b>	<b>394</b>

Навчальне видання

**Апостолюк** Олександр Семенович,  
**Воробйов** Валерій Михайлович,  
**Ільчишина** Діна Іванівна,  
**Кришталь** Володимир Федорович,  
**Левчук** Катерина Григорівна,  
**Рижков** Лев Михайлович,  
**Чкалов** Олексій Валерійович,  
**Шальда** Людмила Мирославівна,  
**Штефан** Наталія Іллівна

## **ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА**

**ЗБІРНИК ЗАДАЧ**

*Видано за рахунок державних коштів.  
Продаж заборонено*

Редактор *П. Ф. Боброва*  
Художнє оформлення *В. О. Гурлева*  
Художній редактор *С. В. Анненков*  
Технічний редактор *К. Є. Ставрова*  
Комп'ютерна верстка *А. Р. Романовської, О. Д. Ткаченка*  
Коректор *Ю. О. Шербак*



Підписано до друку 27.11.2007. Формат 70×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Папір офсетний. Друк офсетний. Гарнітура Times NR.  
Умов. друк. арк. 25. Обл.-вид. арк. 28,45.  
Тираж 7000 (у тому числі за держзамовленням 6400) прим.  
Зам. № 8-30.

Видавництво "Техніка". 04053 Київ, вул. Обсерваторна, 25.  
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру України  
суб'єктів видавничої справи ДК № 357 від 12.03.2001 р.

Віддруковано на Білоцерківській книжковій фабриці.  
09117 Біла Церква, вул. Леся Курбаса, 4.  
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру України  
суб'єктів видавничої справи ДК № 567 від 14.08.2001.

