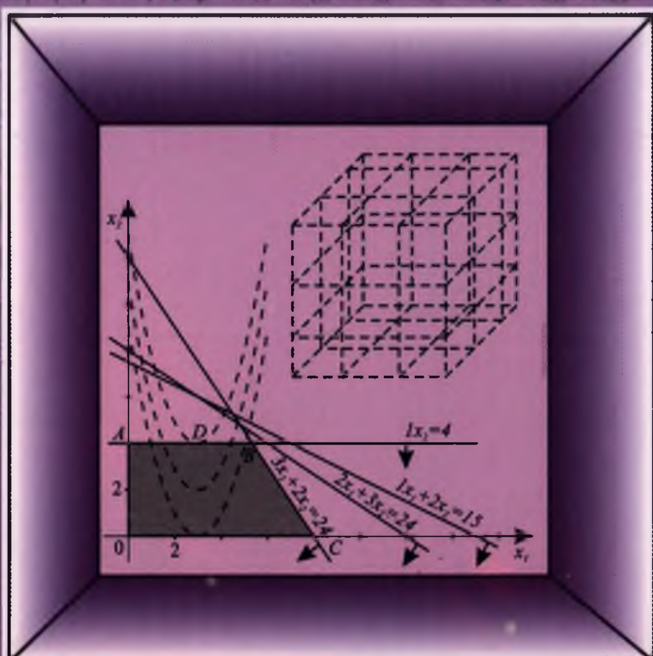
Ф.Г. Ващук,
О.Г. Лавер, Н.Я. Шумило

Математичне програмування та елементи варіаційного числення

Навчальний посібник



Серія "ВИЩА ОСВІТА XXI СТОЛІТТЯ"

Ф.Г. Ващук, О.Г. Лавер, Н.Я. Шумило

Математичне програмування та елементи варіаційного числення

Навчальний посібник

Друге видання, перероблене і доповнене

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Київ
"Знання"
2008

УДК 519.85 (075)
ББК 22.18я 7
В 23

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України (лист № 14/18.2-1709 від 16 липня 2004 р.)

Автори:

Ващук Федір Григорович — доктор технічних наук, професор, дійсний член Академії інформатики України, дійсний член Академії вищої школи України, ректор Закарпатського державного університету, завідувач кафедри загальної інформатики та математичного моделювання;

Лавер Олександр Георгійович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, заступник декана факультету інформатики Закарпатського державного університету, завідувач кафедри програмного забезпечення автоматизованих систем та фізико-математичних дисциплін;

Шумило Наталія Ярославівна — старший викладач кафедри програмного забезпечення автоматизованих систем та фізико-математичних дисциплін Закарпатського державного університету.

Рецензенти:

А.М. Завілопуло — д. фіз.-мат. н., заступник директора Інституту електронної фізики НАН України, лауреат Державної премії України;

В.Т. Маслюк — д. фіз.-мат. н., професор, завідувач відділу Інституту електронної фізики НАН України;

М.М Маляр — к. техн. н., доцент, декан математичного факультету Ужгородського національного університету, завідувач кафедри кібернетики та прикладної математики.

Ващук Ф.Г., Лавер О.Г., Шумило Н.Я.

В 23 Математичне програмування та елементи варіаційного числення: Навчальний посібник.— К.: Знання, 2008.— 368 с.— (Вища освіта XXI століття).

ISBN 978-966-346-455-8

У посібнику розглядаються задачі варіаційного числення, теорії оптимального управління, знаходження екстремумів нелінійних функцій без обмежень, задачі математичного програмування, задачі динамічного програмування, трьохіндексні транспортні задачі, сіткові графи та транспортні задачі на транспортних сітках. На початку кожного розділу посібника наводяться необхідні теоретичні відомості (означення, теореми, формули). Велика увага приділяється розв'язанню прикладних та практичних задач, які розглядаються на всіх етапах — від постановки до одержаного результату з перспективою їх подальшого розв'язання на ЕОМ. Для студентів вищих навчальних закладів природничого та технічного напрямів, економічних спеціальностей; магістрів та науково-педагогічних працівників, які цікавляться проблемами постановки, дослідження та розв'язання задач оптимізації.

УДК 519.85(075)
ББК 22.18я 7

ISBN 978-966-346-455-8

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА ДО ДРУГОГО ВИДАННЯ

У наш час вимоги до математичної підготовки інженера досить високі. Зокрема, він повинен уміти грамотно перекладати на математичну мову технічні, економічні та інші прикладні задачі, аналізувати залежність їх розв'язку від умов, режимів, параметрів реальних процесів і вибирати найкращі варіанти, тобто володіти навичками математичного моделювання і оптимізації реальних об'єктів. Тому курсу методів оптимізації (математичних методів дослідження операцій) відводиться значна роль у математичній підготовці студентів вузів.

Математичні методи дослідження операцій є математичною дисципліною, яка займається вивченням екстремальних задач і розробкою методів їх розв'язання. Ця наука ще досить молода. Проте в найрізноманітніших галузях практики — організації виробництва і постачання, експлуатації транспорту, завданнях військово-промислового комплексу, оптимального розміщення кадрів, побутового обслуговування населення, охорони здоров'я, зв'язку, обчислювальної техніки і т.д. — все частіше виникають задачі, схожі за постановкою, що мають ряд спільних ознак і розв'язуються подібними методами. Їх зручно об'єднати під загальною назвою "задачі дослідження операцій".

Пропонований посібник написаний на основі лекцій "Математичні методи дослідження операцій", які читаються в Закарпатському державному університеті. Застосований тут математичний апарат не є складним і не виходить за межі звичайного вузівського курсу математики. Крім того, з урахуванням потреб інженерної практики, при відборі матеріалу і його викладу наголос робився на прикладні й обчислювальні аспекти, на доведення до алгоритму та чисельної реалізації описаних методів оптимізації.

Посібник включає вступ і вісім розділів.

У вступі описані методи мінімізації функцій одної і багатьох змінних, які зазвичай лежать в основі подібних курсів, а також розглядається задача на умовний екстремум.

Розділ 1 присвячений вивченню задач варіаційного числення.

Розділ 2 містить описання методів розв'язання задач на знаходження екстремумів нелінійних функцій без обмежень.

Розділ 3 починає розгляд задач лінійного програмування. У ньому описано і проілюстровано на прикладах симплекс-метод, метод штучного базису, двоїсті задачі лінійного програмування та спеціальний клас задач лінійного програмування — транспортні задачі. До схеми задач лінійного програмування зводиться багато прикладних задач оптимізації.

Розділ 4 приурочений вивченню таких задач математичного програмування, як задачі параметричного програмування, задачі дробоволінійного програмування, задачі теорії ігор та зведення їх до задач лінійного програмування.

Розділ 5 містить описання методів розв'язання задач нелінійного програмування з допомогою геометричного методу та теореми Куна-Таккера.

У розділі 6 описані задачі динамічного програмування. На відміну від розв'язання задач лінійного і нелінійного програмування, процес знаходження розв'язку задач динамічного програмування є багатоетапним або багатокроковим.

У розділі 7 розглядаються задачі оптимізації на графах і транспортні задачі на транспортних сітках. Сіткові алгоритми оптимізації, як правило, зручніші для розв'язування задач із великою кількістю змінних, бо при користуванні ними достатньо зосередити увагу лише на деякій істотній частині складової досліджуваної системи.

У розділі 8 описані трьохіндексні транспортні задачі та метод потенціалів їх розв'язання.

Посібник ілюстрований графічно, наведено численні приклади розв'язування конкретних задач. Поданий матеріал можна використати при викладанні дисциплін "Варіаційне числення та методи оптимізації", "Дослідження операцій" для технічних спеціальностей вузів, а також дисципліни "Математичне програмування" для економічних спеціальностей вузів.

ВСТУП

1. Екстремум функції одної незалежної змінної

Кажуть, що функція $f(x)$ має в точці $x = x_0$ *максимум*, якщо значення функції в цій точці більші, ніж її значення у всіх точках, достатньо близьких до x_0. Інакше: функція $f(x)$ має максимум при $x = x_0$, якщо $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ для довільних Δx — як додатних, так і від'ємних, але досить малих за абсолютною величиною.

Кажуть, що функція $f(x)$ має в точці $x = x_0$ *мінімум*, якщо значення функції в цій точці менші, ніж її значення у всіх точках, достатньо близьких до x_0. Інакше: функція $f(x)$ має мінімум при $x = x_0$, якщо $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$ для довільних Δx — як додатних, так і від'ємних, але досить малих за абсолютною величиною.

Якщо в деякій точці функція має максимум або мінімум, то кажуть, що в цій точці має місце екстремум, а значення функції в цій точці називається екстремальним.

Зауваження. Слід пам'ятати: 1) Максимум (мінімум) не обов'язково є найбільшим (найменшим) значенням, що приймає функція. Поза розглядуваним околом точки x_0 функція може приймати більше (менше) значення, ніж у цій точці. 2) Функція може мати декілька максимумів і мінімумів. 3) Функція, визначена на відрізку, може досягати екстремуму тільки у внутрішніх точках цього відрізка.

Необхідна умова екстремуму. Якщо функція $f(x)$ має екстремум при $x = x_0$, то її похідна в цій точці дорівнює нулю, або ∞, або не існує.

З цього випливає, що точки екстремуму функції слід шукати тільки серед тих, у яких її перша похідна $f'(x) = 0$, $f'(x) = \infty$ або не існує. Дослідження інших точок відпадає. Точки, в яких перша похідна функції дорівнює нулю, нескінченності або не існує, але функція зберігає неперервність, називаються *критичними*.

Вказана ознака екстремуму є тільки необхідною, але не достатньою: похідна функції може дорівнювати нулю, ∞ або не існувати не тільки в тих точках, у яких функція досягає екстремуму. Тому, визначивши критичні точки, в яких функція може досягати екстремуму, потрібно кожну з точок окремо дослідити на підставі достатніх умов існування екстремуму.

Перша достатня умова існування екстремуму функції. Нехай точка $x = x_0$ є критичною точкою функції $f(x)$, а сама функція $f(x)$ неперервна і диференційована у всіх точках деякого інтервалу, що містить цю точку (за винятком, можливо, самої цієї точки). Тоді: 1) якщо при $x < x_0$ похідна функції $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) < 0$, то при $x = x_0$ має місце максимум, тобто, якщо при переході зліва направо через критичну точку перша похідна функції змінює знак із плюса на мінус, то в цій точці функція досягає максимуму; 2) якщо при $x < x_0$ $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) > 0$, то при $x = x_0$ має місце мінімум; інакше: якщо при переході зліва направо через критичну точку перша похідна функції змінює знак із мінуса на плюс, то в цій точці функція досягає мінімуму; 3) якщо при переході через критичну точку перша похідна функції не змінює знак, то екстремуму немає.

Друга достатня умова існування екстремуму функції. Якщо в точці $x = x_0$ перша похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю: $f'(x) = 0$, то при $x = x_0$ наявний максимум, якщо $f''(x_0) < 0$, і мінімум, якщо $f''(x_0) > 0$. Якщо ж $f''(x_0) = 0$, то для висновку про екстремум у цій точці потрібне подальше дослідження (допускається, що функція $f(x)$ в околі точки $x = x_0$ має неперервну другу похідну).

Для *дослідження функції на екстремум за першою похідною* слід:

1. Знайти $f'(x)$ — першу похідну функції.
2. Розв'язати рівняння $f'(x) = 0$, а також визначити ті значення x,

при яких $f'(x)=\infty$ або не існує, тобто знайти критичні точки функції $f(x)$. Нехай цими точками будуть точки $x_1, x_2, ..., x_n$, які знаходяться в інтервалі (a,b).

3. Усі критичні точки розмістити в порядку зростання їх абсцис в інтервалі (a,b): $a<x_1<x_2<...<x_n<b$.

4. Усередині кожного з інтервалів (a,x_1); (a,x_2); ... ; (a,x_n) взяти будь-яку точку і встановити у цій точці знак першої похідної функції (похідна зберігає знак у кожному інтервалі між двома сусідніми критичними точками).

5. Розглянути знак $f'(x)$ у двох сусідніх інтервалах, переходячи послідовно зліва направо від першого інтервалу до останнього. Якщо при такому переході знаки $f'(x)$ у двох сусідніх інтервалах різні, то екстремум у критичній точці є: максимум буде, якщо знак зміниться з "+" на "–", а мінімум, — якщо він зміниться з "–" на "+". Якщо ж у двох сусідніх інтервалах перша похідна зберігає свій знак, то екстремуму в розглядуваній точці нема.

6. Знайти значення функції в точках, де вона досягає екстремуму (екстремальні значення функції).

Приклад. Знайти екстремум функції $f(x)=\sqrt[3]{x^2}e^x$.

Розв'язання. Областю визначення функції є $(-\infty;+\infty)$. Знаходимо похідну функції $f'(x)=\dfrac{2+3x}{3\sqrt[3]{x}}e^x$. Похідна функції дорівнює нулю при $x=-\dfrac{2}{3}$ і не існує при $x=0$. Таким чином, маємо дві критичні точки $x_1=-\dfrac{2}{3}$ і $x_2=0$. Ці критичні точки розбивають весь інтервал $(-\infty;+\infty)$ існування функції на три інтервали: $\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{2}{3};0\right)$, $(0;+\infty)$. Дослідимо знак першої похідної в довільній точці кожного з цих інтервалів: $f'(-1)>0$; $f'\left(-\dfrac{1}{3}\right)<0$; $f'(1)>0$. Отже, при проходженні через точку $x_1=-\dfrac{2}{3}$ похідна змінює свій знак з "+" на "–", тобто в критичній точці $x=-\dfrac{2}{3}$ функція має максимум; при проходженні через точку $x_2=0$ похідна змінює свій знак з "–" на "+", тобто критична точка $x=0$ є точкою мінімуму.

Для *дослідження функції на екстремум за другою похідною* слід:

1. Знайти $f'(x)$ — першу похідну функції.
2. Розв'язати рівняння $f'(x)=0$.
3. Дослідити знак $f''(x)$ — другої похідної функції — в кожній точці, знайденої в п. 2. Якщо в розглядуваній точці $f''(x)>0$, то в цій точці буде мінімум, а якщо $f''(x)<0$, то в ній буде максимум. Якщо ж виявиться, що в розглядуваній точці $f''(x)=0$, то дослідження слід провести за першою похідною.

Приклад. Знайти екстремум функції $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2$.

Розв'язання. Областю існування функції є весь нескінченний інтервал $(-\infty;+\infty)$. Використовуючи необхідну умову, знайдемо критичні точки заданої функції. Знаходимо $f'(x)=x^3-2x^2-3x$. Розв'язуємо рівняння $x^3-2x^2-3x=0$ і знаходимо його корені: $x_1=0$; $x_2=3$; $x_3=-1$. Похідна скінчена за будь-якого x, тому критичними точками будуть тільки $x_1=0$; $x_2=3$; $x_3=-1$. Дослідимо функцію на екстремум з допомогою другої похідної. Для цього знайдемо другу похідну функції: $f''(x)=3x^2-4x-3$ і, згідно з другим правилом, визначимо знак другої похідної в кожній критичній точці:

$f''(-1)=4>0$; при $x=-1$ функція має мінімум,
$f''(0)=-3<0$; при $x=0$ функція має максимум,
$f''(3)=12>0$; при $x=3$ функція має мінімум.

Третя достатня умова локального екстремуму. Нехай в околі стаціонарної точки x_0 існує неперервна похідна $f^{(n)}(x)$, причому $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, $f'(x_0)=f''(x_0)=...= =f^{(n-1)}(x_0)=0$. Тоді:

1) якщо n — парне і $f^{(n)}(x_0)<0$, то $f(x)$ має в x_0 локальний максимум;

2) якщо n — парне і $f^{(n)}(x_0)>0$, то $f(x)$ має в x_0 локальний мінімум;

3) якщо n — непарне, то $f(x)$ в x_0 локального екстремуму немає.

Приклад. Дослідити на екстремум у точці $x=0$ функцію

$$f(x)=e^x+e^{-x}+ \quad +2\cos x.$$

Розв'язання.

$f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$, $\quad f'(0)=$
$f''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x$ $\quad f''(0)=0$
$f'''(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x$ $\quad f'''(x)=0$,
$f^{(4)}(x)=e^x+e^{-x}+2\cos$ $\quad f^{(4)}=4>0$.

Отже, задана функція в точці $x = 0$ має локальний мінімум.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то на цьому відрізку завжди знайдуться точки, в яких вона приймає найбільше і найменше значення. Цих значень функція досягає або в критичних точках, або на кінцях відрізка $[a, b]$. Тому, щоб визначити найбільше і найменше значення функції на відрізку, потрібно: 1) визначити критичні точки функції; 2) обчислити значення функції в критичних точках і на кінцях відрізка $[a, b]$; 3) найбільше із значень, знайдених у п. 2, буде найбільшим, а найменше — найменшим значенням функції на відрізку $[a, b]$.

2. Екстремум функції декількох незалежних змінних

Функція $u = f(x, y, z, ..., v)$ при деякій системі значень $x_0, y_0, z_0, ..., v_0$ незалежних змінних має максимум (мінімум), якщо приріст функції $\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z, ..., v_0 + \Delta v) - f(x_0, y_0, z_0, ..., v_0)$ від'ємний (додатний) при всіх можливих, достатньо малих за абсолютною величиною як додатних, так і від'ємних значеннях $\Delta x, \Delta y, \Delta z, ..., \Delta v$.

Максимум або мінімум функції називається її екстремумом.

Необхідна умова екстремуму. Якщо функція $u = f(x, y, z, ..., v)$ досягає екстремуму при значеннях незалежних змінних $x = x_0, y = y_0, z = z_0, ..., v = v_0, ...$, то при цих значеннях або виконуються рівності (1):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \ \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \ \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \ldots; \ \frac{\partial u}{\partial v} = 0, \qquad (1)$$

або частинні похідні при цих значеннях не існують.

Тобто, в точці екстремуму перший диференціал функції дорівнює нулю або не існує. Кількість рівнянь (1) дорівнює числу незалежних змінних.

Точки, в яких виконуються рівності (1), називаються стаціонарними точками функції.

Рівності (1) виражають необхідну, але не достатню умову екстремуму функції декількох незалежних змінних. Це означає, що не при всіх тих значеннях незалежних змінних, при яких ці рівності виконуються, функція має екстремум.

Для того, щоб вирішити питання, в яких із значень незалежних змінних, отриманих із рівнянь (1), функція досягає мінімуму або максимуму, або ні того, ні іншого, звертаються до дослідження диференціалу другого порядку цієї функції.

Достатня умова екстремуму. Якщо при значеннях незалежних змінних, знайдених із рівнянь (1), диференціал другого порядку функції зберігає постійний знак при всіх можливих достатньо малих за абсолютною величиною приростах незалежних змінних, то функція при цих значеннях має екстремум, причому максимум буде в тому випадку, коли диференціал другого порядку від'ємний, а мінімум — коли додатний.

Якщо диференціал другого порядку при значеннях незалежних змінних, знайдених із системи рівнянь (1), не зберігає постійного знака, то для цих значень функція не має ні максимуму, ні мінімуму.

Якщо ж виявиться, що при цих значеннях диференціал другого порядку перетворюється в нуль, то вирішення питання про екстремум вимагає дослідження диференціалів порядку вищого, ніж другий.

Для *визначення екстремуму функції* $z = f(x, y)$ *двох незалежних змінних* потрібно:

1. Визначити стаціонарні точки, в яких функція може досягати екстремуму, для чого потрібно розв'язати систему рівнянь $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

2. Визначити другі частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

3. Обчислити значення других частинних похідних у кожній стаціонарній точці, а отримані числа позначити відповідно через A, B і C.

4. Скласти вираз $\Delta = AC - B^2$. При цьому, якщо:

а) $\Delta > 0$, то екстремум у стаціонарній точці є: якщо $A > 0$, то буде мінімум, а при $A < 0$ — максимум;

б) $\Delta < 0$, то екстремуму в розглядуваній стаціонарній точці немає;

в) $\Delta = 0$, то має місце сумнівний випадок, і для висновку про екстремум потрібно розглянути частинні похідні порядку вищого, ніж другий.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію

$$z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430.$$

Розв'язання. Знаходимо похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 36y\,;\ \frac{\partial z}{\partial y} = 6y^2 - 36x\,.$$

Розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

яка в нашому випадку запишеться так:

$$\begin{cases} 6x^2 - 36y = 0, \\ 6y^2 - 36x = 0. \end{cases}$$

Розв'язками цієї системи будуть точки $(0;0)$ і $(6;6)$.

Отже, є дві пари розв'язків нашої системи. Тепер визначимо Δ, для чого знайдемо $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x\,;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y\,;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -36\,.$$

Підставимо сюди спочатку першу пару розв'язків, а потім другу і визначимо числа A, B, C і Δ.

1) Для точки $(0;0)$:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0\,;\ B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = -36\,;\ C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0\,,$$

а тому число $\Delta = AC - B^2 = -1296$.

Оскільки $\Delta < 0$, то при $x = 0$, $y = 0$ функція немає ні максимуму, ні мінімуму.

2) Для точки $(6;6)$:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{\substack{x=6\\y=6}} = 72\,;\ B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)\Bigg|_{\substack{x=6\\y=6}} = -36\,;\ C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{\substack{x=6\\y=6}} = 72\,.$$

Тепер число $\Delta = AC - B^2 = 72 \cdot 72 - 36^2 = 3888$, і так як воно додатне, то екстремум при значеннях $x = 6$, $y = 6$ існує. Враховуючи, що A — додатне число, робимо висновок, що при цих значеннях x та y присутній мінімум. Щоб знайти мінімальне значення функції, підставимо в неї $x = 6$, $y = 6$ і отримаємо $z_{\min} = -2$.

Зауваження. Із $\Delta > 0$ випливає, що $AC - B^2 > 0$, $AC > B^2$, тобто $AC > 0$, а це означає, що A і C у випадку, коли функція має екстремум, мають один і той же знак.

Приклад. Визначити екстремум функції

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy - 4yz - 2z\,.$$

Розв'язання. Використовуючи необхідну умову екстремуму функції, знаходимо критичні точки.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y\,;\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 2x - 4z\,;\ \frac{\partial f}{\partial z} = 10z - 4y - 2\,.$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0, \\ 4y - 2x - 4z = 0, \\ 10z - 4y - 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow\ x = 2\,,\ y = 2\,,\ z = 1\,.$$

Отже, точка $(2;2;1)$ — критична точка. Визначимо характер екстремуму функції, що досягається у цій точці. Для цього побудуємо матрицю Гессе і дослідимо її на знаковизначеність.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\,;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4\,;\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 10\,;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2\,;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0\,;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -4\,.$$

$$H = f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$2 > 0\,;\ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 > 0\,;\ \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 10 \end{vmatrix} = 8 > 0\,.$$

Матриця додатно визначена. Отже, в точці $(2;2;1)$ функція досягає свого мінімуму.

Функція, обмежена і диференційована в замкнутій області, досягає в цій області свого найбільшого і найменшого значення або у внутрішніх точках, які є точками стаціонарності функції, або на її границі.

Для того, щоб знайти найбільше і найменше значення функції двох незалежних змінних у замкнутій області, потрібно:

1. Знайти стаціонарні точки функції, для чого слід розв'язати систему рівнянь $\frac{\partial z}{\partial x}=0$; $\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

2. Обчислити в стаціонарних точках значення функції.

3. Знайти найбільше і найменше значення функції на кожній лінії, що обмежує область.

4. Порівняти всі отримані значення. Найбільше з них буде найбільшим, а найменше – найменшим значенням функції у замкнутій області.

3. Умовний екстремум. Метод множників Лагранжа

Нехай потрібно знайти $f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max (\min)$, (2)

при обмеженнях

$$\begin{aligned} &g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = b_1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = b_m, \end{aligned} \quad (3)$$

де $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ $(i=\overline{1,m})$ — неперервні функції разом зі своїми частинними похідними.

Задача (2) — (3) називається *задачею на умовний екстремум*. Розв'язок цієї задачі знаходять за допомогою методу множників Лагранжа. Основна ідея методу полягає в переході від задачі на умовний екстремум до задачі відшукання безумовного екстремуму деякої спеціально побудованої функції Лагранжа.

Щоб знайти розв'язок цієї задачі, вводять за числом обмежень набір змінних $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, які називаються *множниками Лагранжа* і складають *функцію Лагранжа*

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n)].$$

Для того, щоб вектор $X_0 = \{x_j^0\}$, $j=\overline{1,n}$ був розв'язком задачі (2) — (3), необхідно існування такого вектора $\Lambda_0 = \{\lambda_i^0\}$ $i=\overline{1,m}$, щоб пара векторів (X_0, Λ_0) відповідала системі $n+m$ рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X_0, \Lambda_0)}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \quad (j=\overline{1,n}); \\ \dfrac{\partial L(X_0, \Lambda_0)}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(X_0) = 0 \quad (i=\overline{1,m}). \end{cases} \quad (4)$$

Таким чином, *визначення екстремальних точок задачі* (2) — (3) *методом множників* Лагранжа полягає у виконанні таких етапів:

1. Складають функцію Лагранжа.

2. Знаходять частинні похідні від функції Лагранжа по змінних x_j та λ_i і прирівнюють їх до нуля.

3. Розв'язують систему рівнянь (4) і знаходять точки, в яких функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ може мати екстремум.

4. Серед точок, підозрілих на екстремум, знаходять такі, в яких досягається екстремум, і обчислюють значення функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ у цих точках.

Метод множників Лагранжа можна застосовувати і в тому випадку, коли умови зв'язку є нерівностями. Так, якщо потрібно знайти екстремум функції $z=f(X)$ за умови $g(X) \le b$, то спочатку слід знайти точки безумовного екстремуму функції $z=f(X)$ із рівнянь $\frac{\partial f}{\partial x_i}=0$ $(i=\overline{1,n})$, потім серед цих точок відібрати ті, координати яких задовольняють умову зв'язку $g(X)<b$, і, нарешті, визначити точки, які задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \quad (i=\overline{1,n}), \\ g(X)=b. \end{cases}$$

Точки, знайдені в результаті розв'язання цієї системи, разом із точками, визначеними на першому етапі і які задовольняють умову $g(X)<b$, підлягають подальшому дослідженню, як і при знаходженні безумовного екстремуму.

Приклад. За планом виробництва продукції підприємству необхідно виготовити 180 виробів. Ці вироби можуть бути виготовлені двома технологічними способами. При виробництві x_1 виробів I способом затрати дорівнюють $4x_1 + x_1^2$ грн., а при виготовленні x_2 виробів II способом вони становлять $8x_2 + x_2^2$ грн. Визначити, скільки виробів кожним із способів слід виготовити, щоб загальні витрати на виробництво продукції були мінімальними.

Розв'язання. Математична постановка задачі полягає у визначенні мінімального значення функції

$$f = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \qquad (5)$$

за умови

$$x_1 + x_2 = 180\,. \qquad (6)$$

Розв'яжемо цю задачу, використовуючи метод множників Лагранжа. Знайдемо мінімальне значення функції (5) за умови (6). Для цього складемо функцію Лагранжа

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2)\,,$$

обчислимо її частинні похідні по x_1, x_2, λ і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Перенісши в праві частини перших двох рівнянь λ і прирівнявши їх ліві частини, отримаємо

$$4 + 2x_1 = 8 + 2x_2 \text{ або } x_1 + x_2 = 2\,.$$

Розв'язуючи останнє рівняння разом із рівнянням $x_1 + x_2 = 180$, знаходимо $x_1^* = 91$ і $x_2^* = 89$. Точка $(91; 89)$ є підозрілою на екстремум. Використовуючи другі частинні похідні, визначимо характер екстремуму.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2\,;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2\,;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0\,.$$

$$2 > 0\,;\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0\,.$$

Отже, в точці (91; 89) функція f має умовний мінімум.

Це означає, що при виготовленні 91 виробу I способом і 89 виробів II способом загальні витрати на виробництво продукції будуть мінімальними.

Розділ 1

ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

1.1. Основні означення та леми

Вирішальний вплив на розвиток варіаційного числення виявили три основні задачі:

а) *Задача про брахістохрону.*

Серед всіх ліній, які з'єднують дві точки M_1 і M_2, знайти ту, по якій матеріальна точка, рухаючись під впливом сили тяжіння з M_1 без початкової швидкості, досягає M_2 за найкоротший час. Припускається, що точки M_1 і M_2 не лежать на одній вертикалі, і точка M_2 розміщена нижче, ніж M_1 (рис. 1.1). Крива M_1M_2, яка є розв'язком цієї задачі, називається *брахістохроною.*

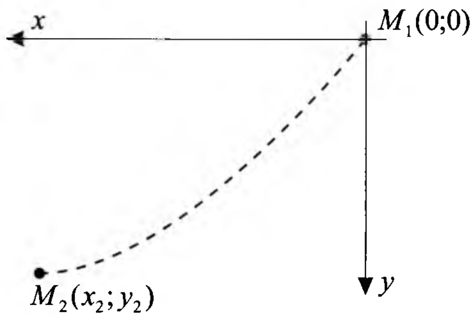


Рис. 1.1

б) *Задача про геодезичні лінії.*

Серед усіх ліній, що з'єднують точки M_1 і M_2 і лежать на заданій поверхні, знайти лінію найменшої довжини. Такі лінії називають *геодезичними.*

в) *Ізопараметрична задача.*

На площині знайти замкнуту лінію заданої довжини, яка обмежує найбільшу площу.

Нехай у кожній точці (x,y,z) деякого неоднорідного ізотропного середовища визначена швидкість $v(x,y,z)$, яка не залежить від напрямку. Знайдемо час, необхідний для того, щоб точка, рухаючись із швидкістю v, описала деяку лінію l. Елемент шляху ds буде пройдено за час $\frac{ds}{v}$, а для проходження всієї лінії l потрібен проміжок часу,

який виражається інтегралом $T=\int_l \frac{ds}{v(x,y,z)}$. Закріпимо крайні точки (x_0,y_0,z_0) і (x_1,y_1,z_1) лінії l, а саму лінію будемо змінювати. Залежно від зміни l буде змінюватися величина T. При цьому кажуть, що T — це *функціонал від лінії l.*

Основною задачею варіаційного числення є відшукання найбільших та найменших значень функціоналів від ліній та поверхонь, які виражаються деякими визначеними інтегралами.

Лема 1. Якщо інтеграл $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx=0$, де $f(x)$ — фіксована неперервна на $[x_0,x_1]$ функція, а $\eta(x)$ — це довільна, неперервна разом зі своєю похідною функція, причому $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$, то тоді $f(x)\equiv 0$ на інтервалі $[x_0,x_1]$.

Доведення. Доведемо від протилежного. Нехай у деякій точці $x=\xi$ функція $f(\xi)\neq 0$. Припустимо для визначеності, що $f(\xi)>0$. Через неперервність $f(x)>0$ в деякому інтервалі $[\xi_1,\xi_2]\subset[x_0,x_1]$, причому $\xi\in[\xi_1,\xi_2]$. Визначимо $\eta(x)$ так:

$$\eta(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x_0\le x<\xi_1\\ (x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2, & \text{якщо} \quad \xi_1\le x\le\xi_2\\ 0, & \text{якщо} \quad \xi_2<x\le x_1\end{cases}$$

Побудована функція $\eta(x)$ задовольняє всі умови леми. Таким чином одержуємо рівність

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx=\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2dx.$$

Інтеграл у правій частині рівності додатний, оскільки за припущенням $f(x)>0$. Але за умовою леми він повинен дорівнювати нулю. Одержане протиріччя доводить лему.

Лема 2. Якщо інтеграл $\iint_B f(x,y)\eta(x,y)dxdy=0$, де $f(x,y)$ — фіксована в області B функція, а $\eta(x,y)$ — це довільна неперервна в області B разом із першими частинними похідними функція, яка дорівнює нулю на контурі l області B, тоді $f(x,y)\equiv 0$ в області B.

Клас функцій $y(x)$, які мають неперервну першу похідну, позначимо як C_1. Відповідно клас функцій, які мають n неперервних похідних, позначимо як C_n. Назвемо *ε-близькістю* кривої $y = y(x)$ всі можливі криві $y_1(x)$, які на всьому проміжку $[x_0, x_1]$ задовольняють нерівність $|y(x) - y_1(x)| \le \varepsilon$. Інколи, окрім цієї нерівності, додають ще одну: $|y'(x) - y_1'(x)| \le \varepsilon$. У першому випадку констатують *ε-близькість нульового порядку*, а в другому випадку (при наявності двох нерівностей) — *ε-близькість першого порядку.*

Розглянемо задачу

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \to extr \ \ (\max \text{ або } \min) \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \tag{2}$$

де F — задана неперервна разом із похідними до другого порядку своїх аргументів функція в деякій області B площини (x, y), для всіх значень y', а y_0 та y_1 — задані константи.

Означення. Кажуть, що функціонал I досягає *відносного екстремуму* для кривої $y(x)$, що лежить всередині області B, і належить класу C_1 та задовольняє умови (2), якщо величина цього функціонала для $y(x)$ не менша (або не більша) його величини для будь-яких інших кривих класу C_1, що знаходяться в деякій ε-близькості до $y(x)$, та таких, що задовольняють умови (2).

Це поняття відносного екстремуму функціонала аналогічне поняттю максимуму та мінімуму функції. Поряд із поняттям відносного екстремуму вводиться поняття *абсолютного екстремуму.* Нехай D — це деякий клас функцій $y(x)$, для яких інтеграл (1) має зміст. Кажуть, що функціонал I досягає *в класі D абсолютного екстремуму* для кривої $y(x)$, якщо величина цього функціонала для $y(x)$ не менша (або не більша) його величини для всіх кривих класу D.

1.2. Виведення рівняння Ейлера

1.2.1. Рівняння Ейлера в найпростішому випадку

Розглянемо задачу (1) — (2):

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \to extr \quad (\max \text{ або } \min) \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1. \tag{2}$$

Візьмемо будь-яку функцію $\eta(x)$, таку, що $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, і поряд з $y(x)$ утворимо нову функцію $y(x) + \alpha\eta(x)$, де α — малий числовий параметр. Підставивши її в (1), одержимо

$$I(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x) + \alpha\eta(x), y'(x) + \alpha\eta'(x))dx\,. \tag{3}$$

Вираз (3) — це вже функція $I(\alpha)$, яка досягає екстремуму при $I'(0) = 0$. Виконуючи диференціювання по параметру α, будемо мати:

$$I'(\alpha)\big|_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x) + \alpha\eta(x), y'(x) + \alpha\eta'(x))dx\right)\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \left(\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial\alpha} F(x, y(x) + \alpha\eta(x), y'(x) + \alpha\eta'(x))dx\right)\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial(y + \alpha\eta)}\eta + \frac{\partial F}{\partial(y' + \alpha\eta')}\eta'\right]\Bigg|_{\alpha=0} dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1}\left[F_y(x, y, y')\cdot\eta(x) + F_{y'}(x, y, y')\cdot\eta'(x)\right]dx.$$

Отже, $\int_{x_0}^{x_1}\left[F_y(x, y, y')\cdot\eta(x) + F_{y'}(x, y, y')\cdot\eta'(x)\right]dx = 0.$ Інтегруючи по частинах, одержимо

$$I'(0) = \left[F_{y'}\cdot\eta(x)\right]\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\left[F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right]dx = 0\,. \tag{4}$$

Оскільки $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$, то позаінтегральний член у виразі (4) перетворюється в нуль, і застосовуючи лему 1, одержуємо рівність

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0. \qquad (5)$$

Рівняння (5) називають *рівнянням Ейлера.* Вираз $\frac{d}{dx}$ — це повна похідна по x, а тому, скориставшись формулою

$$\frac{d}{dx}=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot y'+\frac{\partial}{\partial y'}\cdot y'',$$

одержуємо *рівняння Ейлера у розгорнутому вигляді*

$$F_y-F_{xy'}-F_{yy'}\cdot y'-F_{y'y'}\cdot y''=0. \qquad (5')$$

Таким чином, знаходження функції $y(x)$, яка є розв'язком екстремальної задачі

$$I=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx\to extr \quad (\text{max або min})$$

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1,$$

еквівалентне знаходженню розв'язку крайової задачі для диференціального рівняння другого порядку (рівняння Ейлера):

$$\begin{cases}F_{y'y'}\cdot y''+F_{yy'}\cdot y'+F_{xy'}-F_y=0,\\ y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1.\end{cases}$$

Функція $y(x)$, яка буде розв'язком цієї задачі, називається *екстремаллю функціонала* (1).

Приклад. Виписати рівняння Ейлера для екстремальної задачі

$$\int_0^1\left[xy+(y')^2\right]dx\to extr,$$

$$y(0)=y(1)=2.$$

Розв'язання. У нашому випадку $F(x,y,y')=xy+(y')^2$. Отже, $F_y=x$, $F_{y'}=2y'$, $F_{xy'}=0$, $F_{yy'}=0$, $F_{y'y'}=2$. Таким чином, рівняння Ейлера виглядатиме так: $2y''-x=0$. Тоді функція $y(x)$ є розв'язком такої крайової задачі

$$\begin{cases}y''=\dfrac{x}{2},\\ y(0)=y(1)=2.\end{cases}$$

Добуток $I'(0)\cdot\alpha$, який є диференціалом функції $I(\alpha)$ при $\alpha=0$, називається *першою варіацією* функціонала I і позначається δI. Беручи до уваги вираз (4), одержуємо формулу першої варіації функціонала (1):

$$\delta I=I'(0)\cdot\alpha=\left[F_{y'}\cdot\delta y\right]\Big|_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y dx,\ \delta y=\alpha\eta(x).$$

1.2.2. Рівняння Ейлера у випадку кількох функцій

Розглянемо випадок двох функцій:

$$I=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',z,z')\ dx\to extr, \qquad (5)$$

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1,\quad z(x_0)=z_0,\quad z(x_1)=z_1. \qquad (6)$$

Будуємо дві функції $y(x)+\alpha\eta(x)$ та $z(x)+\alpha_1\eta_1(x)$, які залежать від малих параметрів α і α_1 та близькі відповідно до функцій $y(x)$ та $z(x)$. Припускаючи, що $\eta(x_0)=\eta(x_1)=\eta_1(x_0)=\eta_1(x_1)=0$ та підставляючи в (5) побудовані близькі функції, одержуємо функцію $I(\alpha,\alpha_1)=$

$$=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y(x)+\alpha\eta(x),y'(x)+\alpha\eta'(x),z(x)+\alpha_1\eta_1(x),z'(x)+\alpha_1\eta'_1(x))dx.$$

Для того, щоб $y(x)$ та $z(x)$ надавали екстремум функціоналу (5), необхідно, щоб частинні похідні від $I(\alpha,\alpha_1)$ по α і α_1 перетворювались на нуль при $\alpha=\alpha_1=0$. Проводячи обчислення, аналогічні попереднім, одержуємо такі вирази:

$$\begin{cases}I'_\alpha(0,0)=\left[F_{y'}\cdot\eta(x)\right]\Big|_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\left[F_y-\dfrac{d}{dx}F_{y'}\right]dx=0,\\ I'_{\alpha_1}(0,0)=\left[F_{z'}\cdot\eta_1(x)\right]\Big|_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\eta_1(x)\left[F_z-\dfrac{d}{dx}F_{z'}\right]dx=0.\end{cases} \qquad (7)$$

Оскільки внаслідок вибору функцій η і η_1 позаінтегральні члени перетворюються на нуль, то на основі леми 1 переконуємося, що для того, щоб функції $y(x)$ та $z(x)$ надавали екстремум функціоналу (5), необхідно, щоб вони були розв'язками системи рівнянь Ейлера

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx}F_{y'} = 0, \\ F_z - \dfrac{d}{dx}F_{z'} = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

та задовольняли крайові умови (6).

Приклад. Записати систему рівнянь Ейлера для такої задачі:

$$I = \int_0^{\pi} (9(y')^2 + 2y^2 + 16(z')^2 + 2yz)dx \to extr \ ,$$

$$y(0) = 4, z(0) = 1, y(\pi) = 6, z(\pi) = 5 \ .$$

Розв'язання. У цьому випадку $F = 9(y')^2 + 2y^2 + 16(z')^2 + 2yz$, а, отже, $F_y = 4y + 2z$, $F_{y'} = 18y'$, $F_{xy'} = 0$, $F_{yy'} = 0$, $F_{y'y'} = 18$, $F_z = 2y$, $F_{z'} = 32z'$, $F_{xz'} = 0$, $F_{zz'} = 0$, $F_{z'z'} = 32$. У результаті одержуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4y + 2z - 18y'' = 0, \\ 2y - 32z'' = 0. \end{cases}$$

Таким чином, функції $y(x)$ та $z(x)$, які надають екстремум шуканому функціоналу, є розв'язками такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2y + z - 9y'' = 0, \\ y - 16z'' = 0, \\ y(0) = 4, z(0) = 1, y(\pi) = 6, z(\pi) = 5. \end{cases}$$

Як і в попередньому випадку, перша варіація функціонала (5) запишеться так:

$$\delta I = I'_{\alpha}(0,0) \cdot \alpha + I'_{\alpha_1}(0,0) \cdot \alpha_1 =$$
$$= \left[F_{y'} \cdot \delta y + F_{z'} \cdot \delta z \right]\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} \right)\delta y + \left(F_z - \frac{d}{dx}F_{z'} \right)\delta z \right] dx,$$

$\delta y = \alpha\eta(x)$, $\delta z = \alpha_1\eta_1(x)$.

Задачу (5) — (6) можна узагальнити на випадок n функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x))dx \to extr, \quad (9)$$

$$y_k(x_0) = y_k^{(0)}, \quad y_k(x_1) = y_k^{(1)}, \ k = \overline{1,n}. \qquad (10)$$

За аналогією з попереднім випадком, функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, які надають екстремум функціоналу (9) при крайових умовах (10), будуть розв'язками такої системи рівнянь Ейлера:

$$\begin{cases} F_{y_k} - \dfrac{d}{dx}F_{y_k'} = 0, \quad k = \overline{1,n}, \\ y_k(x_0) = y_k^0; \quad y_k(x_1) = y_k^1. \end{cases}$$

Перша варіація функціонала (9) набуде вигляду

$$\delta I = \sum_{k=1}^{n} I_{\alpha_k}(0, 0, \dots, 0)\alpha_k = \left[\sum_{k=1}^{n} F_{y_k'} \delta y_k \right]\Bigg|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \sum_{k=1}^{n} \left(F_{y_k} - \frac{d}{dx}F_{y_k'} \right) \delta y_k dx$$

$(\delta y_k = \alpha_k \eta_k(x))$.

1.2.3. Рівняння Ейлера у випадку похідних вищих порядків

Розглянемо

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) dx \to extr. \qquad (11)$$

Як і вище, побудуємо близьку криву $y(x) + \alpha\eta(x)$, підставимо її в (11), продиференціюємо по α і покладемо $\alpha = 0$. Таким чином, одержимо

$$I'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y \eta(x) + F_{y'} \eta'(x) + \dots + F_{y^{(n)}} \eta^{(n)}(x) \right] dx \ .$$

Перетворимо всі доданки правої частини, крім першого, інтегруючи кілька разів по частинах:

3 - 8-1045

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y^{(k)}}\eta^{(k)}(x)dx = \left[F_{y^{(k)}}\eta^{(k-1)}(x) - \frac{d}{dx}F_{y^{(k)}}\eta^{(k-2)}(x) + \ldots \right.$$

$$\left. +(-1)^{k-1}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}F_{y^{(k)}}\eta(x)\right]\Bigg|_{x_0}^{x_1} + (-1)^k\int_{x_0}^{x_1}\frac{d^k}{dx^k}F_{y^{(k)}}\eta(x)dx.$$

Вважаємо, що $\eta(x)$ та її похідні до $(n-1)$-го порядку перетворюються на нуль на кінцях проміжку інтегрування. Внаслідок цього позаінтегральні члени перетворюються на нуль, а тому одержимо

$$I'(0) = \int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\left[F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \ldots + (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}\right]dx = 0,$$

звідки на основі леми 1 приходимо до такого рівняння Ейлера:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \ldots + (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0.$$

Це є диференціальне рівняння порядку $2n$. А, отже, для однозначного його розв'язання потрібно мати $2n$ граничних умов.

Приклад. Знайти $I = \int_{x_0}^{x_1}\left(2yy' - 2y^2 - y'^2 + y''^2\right)\,dx \to extr$.

Розв'язання. Тут $F\left(x, y, y', y''\right) = 2yy' - 2y^2 - y'^2 + y''^2$, а тому

$$F_y = 2y' - 4y;\quad F_{y'} = 2y - 2y';\quad \frac{d}{dx}F_{y'} = 2y' - 2y'';$$

$$F_{y''} = 2y'';\quad \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} = 2y^{(IV)}$$

Отже, рівняння Ейлера набуває такого вигляду:

$$(2y' - 4y) - (2y' - 2y'') + 2y^{(IV)} = 0 \text{ або } y^{(IV)} + y'' - 2y = 0.$$

Його розв'язком буде функція

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos\sqrt{2}x + C_4\sin\sqrt{2}x.$$

Для однозначного визначення невідомих констант $C_i, i = \overline{1,4}$ потрібно задати чотири граничні умови.

1.2.4. Частинні випадки рівняння Ейлера

Можливі такі частинні випадки задання підінтегральної функції $F(x, y, y')$:

1) *Функція F не містить y, тобто $F = F(x, y')$*. У цьому випадку рівняння Ейлера набуває вигляду $\frac{d}{dx}F_{y'} = 0$, і його перший інтеграл $F_{y'} = C$.

2) *Функція F залежить тільки від y', тобто $F = F(y')$*. У цьому випадку $F_y = F_{xy'} = F_{yy'} = 0$ і рівняння Ейлера буде мати вигляд $y''F_{y'y'} = 0$. Це рівняння розкладається на два рівняння: $y'' = 0$ та $F_{y'y'} = 0$.

3) *Функція F не залежить від y', тобто $F = F(x, y)$*. Тоді, очевидно, $F_{xy'} = F_{yy'} = F_{y'y'} = 0$, і рівняння Ейлера матиме вигляд $F_y = 0$. Тобто одержуємо скінчене, а не диференціальне рівняння.

Приклад. Знайти $y(x)$, якщо

$$I = \int_{x_0}^{x_1}(y^3 + x^2 + 3)\,dx \to extr$$

$$y(x_0) = y_0;\quad y(x_1) = y_1.$$

Розв'язання. Тут $F = y^3 + x^2 + 3$. Тоді рівняння Ейлера $F_y = 3y^2 = 0$, звідки $y = 0$. Отже, екстремаллю даного функціонала може бути тільки пряма $y = 0$ за умови, що $y(x_0) = y(x_1) = 0$.

4) *Функція F лінійно залежить від y', тобто $F(x, y, y') = P(x, y) + Q(x, y)\cdot y'$*. У цьому випадку можна довести, що варіаційна задача немає розв'язку в класі неперервних функцій.

5) *Функція F залежить тільки від y та y', тобто $F = F(y, y')$.* У цьому випадку $F_{xy'} = 0$, і рівняння Ейлера набуває вигляду $F_y - y'F_{yy'} - y''F_{y'y'} = 0$. Домножимо його на y'. Тоді

$$y'F_y - y'^2F_{yy'} - y'y''F_{y'y'} = 0 \text{ або } \frac{d}{dx}F(y, y') - \frac{d}{dx}(y'F_{y'}) = 0,$$

тобто $\frac{d}{dx}\left(F - y'F_{y'}\right) = 0$. Це рівняння має перший інтеграл виду $F - y'F_{y'} = C_1$. Одержане диференціальне рівняння першого порядку інтегрується або за допомогою розділення змінних, або шляхом введення параметра.

Приклад. Математична задача про брахістохрону формулюється так. Знайти екстремаль функціонала

$$I = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx \to extr,$$

$$y(0) = 0; \quad y(x_2) = y_2 .$$

Розв'язання. Оскільки $F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$ залежить тільки від y та y', то можна зразу записати перший інтеграл рівняння Ейлера $F - y'F_{y'} = C_1$. У нашому випадку це буде $\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C_1$ або після спрощень $y(1+y'^2) = C_1$. Якщо ввести параметр t за формулою $y' = ctg\, t$, то розв'язком задачі буде

$$\begin{cases} x = \frac{C_1}{2}(t_1 - \sin t_1), \\ y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos t_1), \end{cases}$$

де $t_1 = 2t$.

1.3. Кратні інтеграли. Рівняння Остроградського

Розглянемо задачу

$$I = \iint_B F(x, y, u, u_x, u_y)\, dxdy \to extr, \tag{1}$$

$$u(x,y)|_\Gamma = 0 \tag{2}$$

Шукається функція $u(x,y)$, яка неперервна разом зі своїми похідними до другого порядку включно в області B з границею Г. Складемо близьку функцію $u(x,y) + \alpha\eta(x,y)$, де $\eta(x,y)$ — довільна функція така, що $\eta(x,y)|_\Gamma = 0$. Підставляючи її в (1), диференціюючи по α і покладаючи $\delta u = \alpha$, одержимо такий вираз першої варіації функціонала:

$$\delta I = I'_\alpha(0)\alpha = \alpha \iint_B \left(F_u \eta + F_{u_x}\eta_x + F_{u_y}\eta_y\right) dxdy .$$

Скористаємося формулою Рімана: $\iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_\Gamma Pdx + Qdy$. Таким чином:

$$\iint_B \left(F_{u_x}\eta_x + F_{u_y}\eta_y\right) dxdy = \iint_B \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta F_{u_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta F_{u_y}\right)\right] dxdy -$$

$$- \iint_B \eta\left(\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right) dxdy = \int_\Gamma \eta F_{u_x} dy - \eta F_{u_y} dx -$$

$$- \iint_B \eta\left(\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right) dxdy .$$

Отже, будемо мати такий вираз першої варіації:

$$\delta I = \int_\Gamma \delta u\left(F_{u_x} dy - F_{u_y} dx\right) + \iint_B \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\delta u dxdy, \ \delta u = \alpha\eta(x,y).$$

Застосувавши лему 2, одержуємо *рівняння Остроградського*

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y} = 0$$

або в розгорнутому вигляді

$$F_{u_x u_x} \cdot u_{xx} + 2F_{u_x u_y} \cdot u_{xy} + F_{u_y u_y} \cdot u_{yy} + F_{u_x u} \cdot u_x + F_{u_y u} \cdot u_y + F_{x u_x} + F_{y u_y} - F_u = 0 .$$

Отже, знаходження екстремалі функціонала (1) за умови (2) є еквівалентним знаходженню розв'язку $u(x,y)$ такої задачі:

$$\begin{cases} F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y} = 0, \\ u(x,y)|_\Gamma = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Приклад. Знайти екстремаль функціонала

$$I = \iint_B \left(u_x^2 + u_y^2\right) dxdy \to extr$$

$$u(x,y)|_\Gamma = 0 .$$

Розв'язання. Тут $F=u_x^2+u_y^2$. Звідси $F_u=0$, $F_{u_x}=2u_x$, $F_{u_y}=2u_y$. Отже, функція $u=u(x,y)$, яка є екстремаллю функціонала, буде розв'язком задачі

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \\ u(x,y)\big|_\Gamma=0. \end{cases}$$

У випадку кратного інтеграла, який залежить від кількох функцій, ми будемо мати систему рівнянь Остроградського. У випадку потрійного інтеграла і функції $u(x,y,z)$ одержимо таке рівняння Остроградського:

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}-\frac{\partial}{\partial z}F_{u_z}=0.$$

Якщо під знак інтеграла входять похідні функції $u(x,y)$ до n-го порядку, то рівняння Остроградського набуває вигляду

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{u_{xx}}+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{u_{xy}}+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}F_{u_{yy}}+\ldots+(-1)^n\frac{\partial^n}{\partial y^n}F_{y^{(n)}}=0.$$

1.4. Ізопериметрична задача

Ізопериметрична задача ставиться так: серед усіх кривих $y(x)$, для яких

$$I_1=\int_{x_0}^{x_1}G(x,y,y')dx=a, \qquad (1)$$

де a — задане число, знайти криву, при якій

$$I=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx\to extr. \qquad (2)$$

Поставлена задача зводиться до звичайної задачі варіаційного числення за допомогою такої теореми.

Теорема Ейлера. Якщо крива $y(x)$ надає екстремум інтегралу (2) за умови (1) та при звичайних граничних умовах $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$, і якщо $y(x)$ не є екстремаллю інтеграла (1), то існує така константа λ, що крива $y(x)$ є екстремаллю функціонала $\int_{x_0}^{x_1}H(x,y,y')dx$, де $H=F+\lambda G$.

Доведення. Введемо в розгляд функцію $y(x)+\alpha_1\eta_1(x)+\alpha_2\eta_2(x)$, яка є близькою до $y(x)$. Тут α_1 і α_2 — малі параметри, η_1 і η_2 — неперервно диференційовані функції такі, що $\eta_1(x_0)=\eta_1(x_1)=\eta_2(x_0)=\eta_2(x_1)=0$. Підставивши цю функцію в інтеграл (1), будемо мати

$$I_1(\alpha_1,\alpha_2)=\int_{x_0}^{x_1}G(x,y(x)+\alpha_1\eta_1(x)+\alpha_2\eta_2(x),y'(x)+\alpha_1\eta_1'(x)+\alpha_2\eta_2'(x))dx.$$

Здійснивши звичайні обчислення, маємо:

$$\left.\frac{\partial I_1}{\partial\alpha_i}\right|_{\alpha_1=\alpha_2=0}=\int_{x_0}^{x_1}\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\eta_i dx,\quad i=1,2.$$

Оскільки $y(x)$ не є екстремаллю інтеграла (1), то $G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\neq 0$ на $[x_0,x_1]$, отже, можна підібрати $\eta_2(x)$ так, щоб $\int_{x_0}^{x_1}\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\eta_2 dx\neq 0.$

З іншого боку, за теоремою про неявні функції, рівняння $I_1(\alpha_1,\alpha_2)=a$ визначає α_2 як функцію від α_1 $\forall\alpha_1$, досить близьких до нуля, і

$$\left.\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}\right|_{\alpha_1=0}=-\int_{x_0}^{x_1}\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\eta_1 dx\div\int_{x_0}^{x_1}\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\eta_2 dx=k. \qquad (3)$$

Підставимо функцію $y(x)+\alpha_1\eta_1(x)+\alpha_2\eta_2(x)$ в інтеграл (2), продиференціювавши по α_1, і маючи на увазі, що α_2 є функція від α_1, одержимо:

$$\left.\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}\right|_{\alpha_1=0}=\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta_1 dx+k\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta_2 dx.$$

Скориставшись виразом (3), для константи k будемо мати

$$\left.\frac{dI}{d\alpha_1}\right|_{\alpha_1=0}=\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta_1 dx+\lambda\int_{x_0}^{x_1}\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\eta_1 dx,$$

де $\lambda=-\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta_2 dx\div\int_{x_0}^{x_1}\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\eta_2 dx$

або $\left.\frac{dI}{d\alpha_1}\right|_{\alpha_1=0}=\int_{x_0}^{x_1}\left[\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)+\lambda\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\right]\eta_1 dx.$

Якщо $y(x)$ має екстремум інтеграла (2) за умови (1), то має виконуватись рівність $\left.\frac{dI}{d\alpha_1}\right|_{\alpha_1=0}=0$, звідки, використовуючи лему 1 і покладаючи $H=F+\lambda G$, одержимо, що $H_y-\frac{d}{dx}H_{y'}=0$, а це рівняння Ейлера для інтеграла $\int_{x_0}^{x_1}H(x,y,y')dx$. Загальний інтеграл цього рівняння буде містити три довільні змінні, а саме: дві константи інтегрування та сталу λ. Ці константи повинні визначатися з граничних умов та умови (1).

У більш загальному випадку ізопериметрична задача має такий вигляд: знайти функції $y_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, які надають інтегралу

$$I=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1(x),y_2(x),...,y_n(x),y_1'(x),y_2'(x),...,y_n'(x))dx\to extr$$

при наявності зв'язків

$$\int_{x_0}^{x_1}G_s(x,y_1,y_2,...,y_n,y_1',y_2',...,y_n')dx=a_s\quad(s=\overline{1,p})$$

та граничних умов $y_i(x_0)=y_i^{(0)}$; $y_i(x_1)=y_i^{(1)}$, $i=\overline{1,n}$.

За наявності деякої додаткової умови, яка забезпечує, як і вище, застосування теореми про наявні функції, можна твердити, що функції $y_i(x)$, які дають розв'язок поставленої задачі, мають бути екстремалями для інтеграла $\int_{x_0}^{x_1}H(x,y_1,y_1',...,y_n,y_n')dx$, де $H=F+\sum_{s=1}^{p}\lambda_s G_s$. Тут λ_s — константи. Число зв'язків p може перевищувати число шуканих функцій n.

1.5. Умовний екстремум

Потрібно знайти дві функції $y(x)$ і $z(x)$ — такі, що

$$I=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',z,z')dx\to extr,\tag{1}$$

$$G(x,y,z)=0,\tag{2}$$

$$y(x_0)=y_0,\ z(x_0)=z_0,\ y(x_1)=y_1,\ z(x_1)=z_1,\tag{3}$$

причому координати (x_0,y_0,z_0) та (x_1,y_1,z_1) мають задовольняти рівняння (2).

Геометричний зміст задачі полягає в знаходженні ліній, які лежать на поверхні (2) і які надають екстремум інтегралу (1). Припустимо, що $G_z'\neq 0$. Тоді рівняння (2) можна розв'язати відносно z, тобто одержимо $z=\varphi(x,y)$. Після підстановки цього виразу в (1), інтеграл матиме вигляд

$$I=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',\varphi,\varphi_x+\varphi_y\cdot y')dx.\tag{4}$$

Позначимо через $[F]$ підінтегральну функцію в (4). Вона залежить тільки від (x,y,y'). Будемо мати:

$$\frac{\partial[F]}{\partial y}=F_y+F_z\varphi_y+F_{z'}(\varphi_{xy}+\varphi_{yy}\cdot y');\quad \frac{\partial[F]}{\partial y'}=F_{y'}+F_{z'}\varphi_y;$$

$\frac{d}{dx}\frac{\partial[F]}{\partial y'}=\frac{d}{dx}F_{y'}+\varphi_y\frac{d}{dx}F_{z'}+F_{z'}(\varphi_{xy}+\varphi_{yy})$. Тому рівняння Ейлера для інтеграла (4) $\frac{\partial[F]}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial[F]}{\partial y'}=0$ внаслідок написаних вище формул набуде вигляду $F_y+\varphi_{y}\left(F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}\right)-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$. З іншого боку, диференціювання (2) по y дає $G_y+G_z\varphi_y=0$. Виключаючи з двох останніх рівнянь φ_y, приходимо до рівності $\left(\frac{d}{dx}F_{y'}-F_y\right):G_y=\left(\frac{d}{dx}F_{z'}-F_z\right):G_z$. Вздовж екстремалі обидві частини написаної рівності становлять одну і ту ж функцію, яку позначимо через $\lambda(x)$. Тому можемо записати $\frac{d}{dx}F_{y'}-\left[F_y+\lambda(x)G_y\right]=0$; $\frac{d}{dx}F_{z'}-\left[F_z+\lambda(x)G_z\right]=0$. Необхідні умови екстремуму ще можна записати в такій формі:

$$\frac{d}{dx}F_{y'}^*-F_y^*=0;\quad \frac{d}{dx}F_{z'}^*-F_z^*=0,\text{ де } F^*=F+\lambda(x)G.$$

Викладені міркування можуть бути перенесені на задачі більш загального вигляду. Наприклад, знайти

$$I=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_1',...,y_n,y_n')dx\to extr$$

при наявності зв'язків

$$G_s(x, y_1, ..., y_n) = 0, \ s = 1, 2, ..., p \qquad (5)$$

та граничних умов

$$y_i(x_0) = y_i^{(0)}, \ y_i(x_1) = y_i^{(1)}, \ i = \overline{1, n}.$$

Відповідні рівняння Ейлера будуть такі:

$$\frac{d}{dx}F^*_{y_i'} - F^*_{y_i} = 0, \text{ де } F^* = F + \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(x) G_s.$$

Зв'язки (5), які не містять похідних від шуканих функцій, називаються *голономними зв'язками*. Зв'язки виду $G_s(x, y_1, y_1', ..., y_n, y_n') = 0$ називаються *неголономними*. Наведені вище твердження стосуються і неголономних зв'язків.

1.6. Природні граничні умови

Розглянемо задачу

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \to extr, \qquad (1)$$

$$y(x_0) = y_0, \qquad (2)$$

тобто лівий кінець шуканої кривої закріплений, а на правий кінець жодної умови не накладено. З'ясуємо, якою має бути умова на правому кінці. Запишемо першу варіацію функціонала (1):

$$\delta I = \left[F_{y'} \cdot \delta y\right]\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y dx \ , \ (\delta y = \alpha\eta(x) \ ).$$

Якщо $y(x)$ — екстремаль функціонала (1), то $\delta I = 0$. Член, який містить інтеграл, дорівнює нулю, оскільки $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$, а позаінтегральний член дорівнює нулю через вибір функції $\eta(x)$. Таким чином, приходимо до рівності $F_{y'}\eta\big|_{x=x_1} = 0$ або, внаслідок довільності функції $\eta(x)$, остаточно одержуємо

$$F_{y'}\big|_{x=x_1} = 0. \qquad (3)$$

Умова (3) називається *природною граничною умовою.* Повторюючи аналогічні міркування для випадку інтеграла

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_1', ..., y_n, y_n')dx,$$

одержимо на вільному кінці n природних граничних умов $F_{y_i'} = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Розглянемо інтеграл, що містить похідні другого порядку $I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')dx$. Оскільки $I'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y\eta(x) + F_{y'}\eta'(x) + F_{y''}\eta''(x)]dx$, а також

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'}\eta'(x)dx = \left[F_{y'}\eta\right]\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}F_{y'}\eta(x)dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y''}\eta''(x)dx = \left[F_{y''}\eta' - \frac{d}{dx}F_{y''}\eta\right]\Bigg|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2}F_{y''}\eta(x)dx,$$

то на вільному правому кінці природні граничні умови матимуть вигляд $F_{y'} - \frac{d}{dx}F_{y''} = 0$, $F_{y''} = 0$. Для подвійного інтеграла $I = \iint_B F(x, y, u, u_x, u_y)dxdy$ природні граничні умови виглядатимуть так: $F_{u_x}\frac{dy}{ds} - F_{u_y}\frac{dx}{ds} = 0$, де s — довжина дуги границі Γ області B.

1.7. Загальна форма першої варіації

Раніше ми припускали, що проміжок або область інтегрування не змінюються. Тепер не робимо такого припущення. Раніше ми вважали, що близькі криві $y(x) + \alpha\eta(x)$ відрізняються від основної кривої $y(x)$ доданком $\alpha\eta(x)$. Тепер вважаємо, що близькі криві $y(x) = y(x, 0)$. Отже, розглянемо інтеграл

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \qquad (1)$$

і введемо в нього близьку криву, вважаючи, що межі інтегрування залежать від α:

$$I_\alpha(0) = \int_{x_0(\alpha)}^{x_1(\alpha)} F[x, y(x, \alpha), y_x(x, \alpha)]dx, \qquad (2)$$

причому $y(x, 0) = y(x)$, $x_1(0) = x_1$, $x_0(0) = x_0$. Відповідно до загального означення варіації як добутку похідної по α при $\alpha = 0$ на α, можна записати

$$\delta x_0 = \left.\frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}\cdot\alpha \quad , \ \delta x_1 = \left.\frac{dx_1}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}\cdot\alpha \quad , \ \delta y = \left.\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\cdot\alpha ,$$

$$\delta y' = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial x}\right]\Bigg|_{\alpha=0}\cdot\alpha = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right]\Bigg|_{\alpha=0}\cdot\alpha = \frac{d}{dx}\delta y.$$

Вважаємо, що функція $y(x,\alpha)$ має неперервні похідні до другого порядку. Беручи від інтеграла (2) похідну по α, покладаючи в ній $\alpha=0$ та помноживши на α, одержуємо такий вираз першої варіації інтеграла:

$$\delta I = F(x_1,y_1,y_1')\delta x_1 - F(x_0,y_0,y_0')\delta x_0 + \int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y + F_{y'}\delta y')dx$$

або

$$\delta I = F(x,y,y')\delta x\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y + F_{y'}\delta y')dx.$$

Інтегруючи по частинах, одержимо

$$\int_{x_0}^{x_1}F_{y'}\delta y'dx = \int_{x_0}^{x_1}F_{y'}\frac{d}{dx}\delta y dx = F_{y'}(x_1,y_1,y_1')(\delta y)_1 -$$

$$- F_{y'}(x_0,y_0,y_0')(\delta y)_0 - \int_{x_0}^{x_1}\delta y\frac{d}{dx}F_{y'}dx. \qquad (3)$$

Тут $(\delta y)_1$ та $(\delta y)_0$ — граничні значення варіації функції y:

$$(\delta y)_i = \left[\frac{\partial f(x_i,\alpha)}{\partial\alpha}\right]\Bigg|_{\alpha=0}\cdot\alpha,\ i=0,1.$$

Знайдемо першу варіацію ординат кінців кривої, причому проведемо обчислення для правого кінця. Очевидно $y_1 = f(x_1(\alpha),\alpha)$, тоді

$$\delta y_1 = \left[\frac{d}{d\alpha}f(x_1(\alpha),\alpha)\right]\Bigg|_{\alpha=0}\cdot\alpha = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{d\alpha}\right]\Bigg|_{\alpha=0}\cdot\alpha + \left[\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right]\Bigg|_{\alpha=0}\cdot\alpha =$$

$$= y_1'\delta x_1 + (\delta y)_1.$$

Аналогічно, для варіації δy_0 ординати лівого кінця будуть $\delta y_0 = y_0'\delta x_0 + (\delta y)_0$. Підставивши в (3) замість $(\delta y)_1$ та $(\delta y)_0$ їх значення, з обчислених вище формул будемо мати

$$\delta I = \left[F(x_1,y_1,y_1') - y_1'F_{y'}(x_1,y_1,y_1')\right]\delta x_1 + F_{y'}(x_1,y_1,y_1')\delta y_1 -$$
$$-\left[F(x_0,y_0,y_0') - y_0'F_{y'}(x_0,y_0,y_0')\right]\delta x_0 - F_{y'}(x_0,y_0,y_0')\delta y_0 +$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y dx$$

або остаточно

$$\delta I = \left[(F - y'F_{y'})\delta x + F_{y'}\delta y\right]\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y dx. \qquad (4)$$

Обчислення, аналогічні попереднім, у випадку інтеграла, який залежить від n невідомих функцій $I = \int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',\ldots,y_n,y_n')dx$, приводять до формули

$$\delta I = \left[(F - \sum_{i=1}^{n}y_i'F_{y_i'})\delta x + \sum_{i=1}^{n}F_{y_i'}\delta y_i\right]\Bigg|_{x_0}^{x_1} +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{x_0}^{x_1}\left(F_{y_i} - \frac{d}{dx}F_{y_i'}\right)\delta y_i dx.$$

З'ясуємо геометрично різницю між величинами δy_1 і $(\delta y)_1$.

Координати правого кінця кривих порівняння $y = f(x_1(\alpha),\alpha)$ будуть: $x_1(\alpha)$ та $y_1(\alpha) = f(x_1(\alpha),\alpha)$. При зміні α правий кінець опише деяку лінію λ. Величина $(\delta y)_1$ є головною частиною приросту ординати на кінці $x_1(0)$ при переході з основної кривої $y(x)$ на криву порівняння $y = f(x,\alpha)$. На рис. 1.2 AB=$(\delta y)_1$, CD $=\delta y_1$.

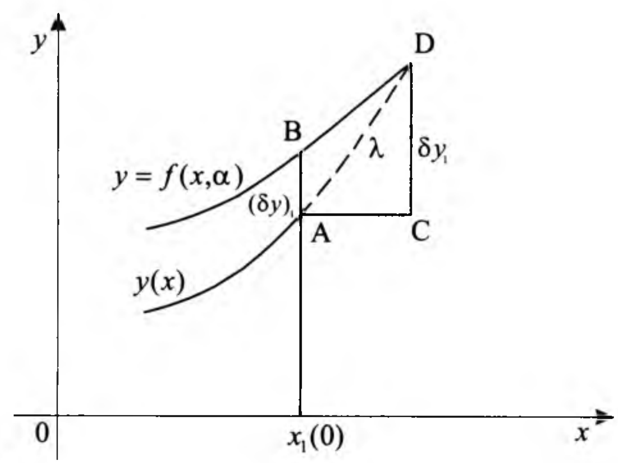


Рис. 1.2

Із формули (4) випливає, що рівність нулю першої варіації, коли $y(x)$ є екстремаллю, приводить до такої умови на рухомому кінці:

$$[F(x,y,y') - y'F_{y'}(x,y,y')]\delta x + F_{y'}(x,y,y')\delta y = 0. \qquad (5)$$

Ввівши позначення $\overline{y'} = \frac{\delta y}{\delta x}$, умову (5) можемо переписати так:

$$F(x,y,y') + (\overline{y'} - y')F_{y'}(x,y,y') = 0.$$

Остання рівність називається *умовою трансверсальності.* Вона встановлює зв'язок між кутовим коефіцієнтом y' дотичної до екстремалі та кутовим коефіцієнтом $\overline{y'}$ дотичної до кривої λ в кожній точці цієї кривої.

1.8. Інваріантність рівнянь Ейлера та Остроградського. Односторонній екстремум

Розглянемо найпростіший функціонал $I = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$ і позначимо $[F]_y = F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}$. Вводячи нову незалежну змінну ζ, можемо записати

$$F(x,y,y') = F\left[x(\zeta), y, \frac{dy/d\zeta}{dx/d\zeta}\right] = \Phi\left(\zeta, y, \frac{dy}{d\zeta}\right)$$

й інтеграл I по новій незалежній змінній набуває вигляду

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx = \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \Phi\left(\zeta, y, \frac{dy}{d\zeta}\right)\frac{dx}{d\zeta}d\zeta.$$

Вводячи близьку функцію $y + \alpha\eta$ і здійснюючи звичайні обчислення, будемо мати:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{x_0}^{x_1} F(x, y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta')dx\Big|_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1}[F]_y\eta dx.$$

Ця ж умова по новій незалежній змінній

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{x_0}^{x_1}\Phi\left(\zeta, y+\alpha\eta, \frac{dy}{d\zeta}+\alpha\frac{d\eta}{d\zeta}\right)\frac{dx}{d\zeta}d\zeta\Big|_{\alpha=0} = \int_{\zeta_0}^{\zeta_1}\left[\Phi\frac{dx}{d\zeta}\right]_y \eta dx.$$

Прирівнюючи одержані результати, можемо записати:

$$\int_{x_0}^{x_1}\left\{[F]_y - \left[\Phi\frac{dx}{d\zeta}\right]_y\frac{d\zeta}{dx}\right\}\eta dx = 0,$$

звідки одержуємо

$$[F]_y = \left[\Phi\frac{dx}{d\zeta}\right]_y\frac{d\zeta}{dx}.$$

Таким чином, рівняння Ейлера $[F]_y = 0$ рівносильне рівнянню $\left[\Phi\frac{dx}{d\zeta}\right]_y = 0$. Цей результат може бути узагальнений на випадок, коли підінтегральна функція містить кілька шуканих функцій.

Розглянемо функціонал для випадку двох незалежних змінних

$$I = \iint_B F(x,y,u,u_x,u_y)dxdy. \qquad (1)$$

Замість (x,y) вводимо дві незалежні змінні (ζ,η): $x = x(\zeta,\eta)$, $y = y(\zeta,\eta)$, причому вважаємо, що написані функції мають неперервні похідні та відповідний їм функціональний детермінант не перетворюється на нуль. Перетворена підінтегральна функція матиме вигляд:

$$F(x,y,u,u_x,u_y) = F(x(\zeta,\eta), y(\zeta,\eta), u, u_\zeta\zeta_x + u_\eta\eta_x, u_\zeta\zeta_y + u_\eta\eta_y) =$$
$$= \Phi(\zeta,\eta,u,u_\zeta,u_\eta).$$

Як і вище, вводячи близьку функцію $u + \alpha\eta$, диференціюючи по α і покладаючи $\alpha = 0$, будемо мати

$$\iint_B [F]_u\eta\, dxdy = \iint_{B_1}\left[\Phi\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\eta)}\right]_u d\zeta\, d\eta,$$

де B_1 — результат перетворення області B за допомогою вказаної заміни змінних, $\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\eta)}$ — позначення функціонального детермінанта, символ $[\cdot]_u$ означає ліву частину рівняння Остроградського, тобто $[F]_u = F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}$. Як і в попередньому випадку, одержуємо формулу $[F]_u = \left[\Phi\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\eta)}\right]_u\frac{D(\zeta,\eta)}{D(x,y)}$. Така ж формула одержується і у випадку більшого числа змінних. Отже, рівняння Остроградського $[F]_u = 0$ є рівносильним рівнянню Остроградського $\left[\Phi\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\eta)}\right]_u = 0$ в нових незалежних змінних.

Якщо вважати x та y функціями деякого параметра t, тобто

$x = x(t)$, $y = y(t)$, то функціонал $I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ перепишеться у вигляді

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right) x' dt, \tag{2}$$

де x' та y' — похідні по t, а t_0, t_1 — значення параметра, які відповідають кінцям кривої. Замість (2) розглянемо більш загальний функціонал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y')dt. \tag{3}$$

У випадку, коли функція F — однорідна по x' та y', тобто, коли виконується рівність $F(x, y, kx', ky') = kF(x, y, x', y')$, інтеграл (3) не змінює свого вигляду при будь-якій заміні параметра t. Рівняння Ейлера в такому випадку набудуть вигляду $F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} = 0$; $F_y - \frac{d}{dt}F_{y'} = 0$. Можна довести, що ці два рівняння зводяться до одного. У випадку інтеграла $I = \int_{t_0}^{t_1} F(x_1, x_1', \ldots, x_n, x_n')dx$, де $x_i = x_i(t)$, а x_i' — похідні, рівняння Ейлера матимуть вигляд

$$F_{x_i} - \frac{d}{dt}F_{x_i'} = 0 \tag{4}$$

або в розгорнутому вигляді

$$F_{x_i} - \sum_{k=1}^{n} x_k' F_{x_i' x_k} - \sum_{k=1}^{n} x_k'' F_{x_i' x_k'} = 0, \; i = \overline{1, n}.$$

Можна також довести, що в системі (4) одне з рівнянь Ейлера є наслідком інших.

Задача на односторонній екстремум ставиться так. Знайти

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \to extr, \tag{5}$$

$$y(x_0) = y_0, \; y(x_1) = y_1,$$

за додаткової умови:

$$y - \varphi(x) \geq 0,$$

де $\varphi(x)$ — задана функція, яка має неперервну похідну. Іншими словами, шукана крива $y(x)$ повинна знаходитися над кривою

$y = \varphi(x)$ і, окрім того, проходити через точки $M_0(x_0, y_0)$ та $M_1(x_1, y_1)$. Шукана крива може складатися як з проміжків, які знаходяться над кривою, так і з проміжків самої кривої.

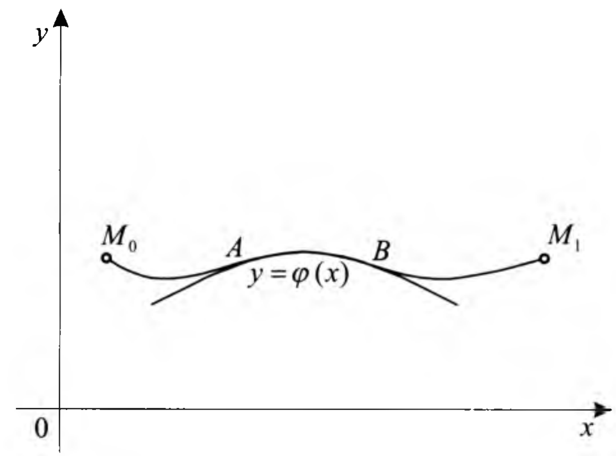


Рис. 1.3

На рис. 1.3 два проміжки M_0A та BM_1 знаходяться над кривою $y = \varphi(x)$, а AB — це проміжок самої кривої. Для проміжків M_0A та BM_1 можлива двостороння варіація і, як завжди, ці проміжки мають бути екстремалями інтеграла (5). На проміжку AB можлива лише одностороння варіація, при якій $\delta I \geq 0$. Тобто вздовж AB має виконуватись нерівність $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} \geq 0$. Окрім цього, для існування екстремуму має ще виконуватися і деяка умова в точках A і B. Як правило, вимагають, щоб в точках A і B лінії M_0A та BM_1 мали спільну дотичну з лінією AB.

1.9. Друга варіація

Рівність нулю першої варіації функціонала I, тобто $\delta I = 0$, дає лише необхідну умову того, що дана лінія або поверхня надає екстремум відповідному функціоналу. Більш важливим є встановлення достатніх умов. Розглянемо задачу

$$I=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx\to extr\,, \qquad (1)$$

$$y(x_0)=y_0\,,\;\; y(x_1)=y_1\,.$$

Розглянемо близьку функцію $y+\alpha\eta$, після підстановки якої в (1) одержуємо функцію $I(\alpha)$. Розкладемо її в ряд Маклорена в околі точки 0:

$$I(\alpha)=I(0)+\frac{I'(0)}{1!}\alpha+\frac{I''(0)}{2!}\alpha^2+\ldots$$

Визначимо другу варіацію функціонала (1), як компоненту розкладу $I(\alpha)$ по степенях α, яка містить α^2, тобто

$$\delta^2 I=\frac{\alpha^2}{2}\left[\frac{d^2 I}{d\alpha^2}\right]\Bigg|_{\alpha=0}\,.$$

Безпосереднє диференціювання функції

$$I(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y+\alpha\eta,y'+\alpha\eta')dx$$

приводить до формули

$$\delta^2 I=\frac{\alpha^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}(F_{yy}\eta^2+2F_{yy'}\eta\eta'+F_{y'y'}\eta'^2)dx\,.$$

Позначивши $P=F_{yy}$, $Q=F_{yy'}$, $R=F_{y'y'}$, будемо мати

$$\delta^2 I=\frac{\alpha^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}(P\eta^2+2Q\eta\eta'+R\eta'^2)dx\,.$$

Оскільки

$$2Q\eta\eta'=Q\frac{d(\eta^2)}{dx}\,,$$

то

$$\int_{x_0}^{x_1}2Q\eta\eta'\,dx=\int_{x_0}^{x_1}Q\frac{d(\eta^2)}{dx}=Q\eta^2\Bigg|_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\frac{dQ}{dx}\eta^2dx\,.$$

Тобто

$$\delta^2 I=\frac{\alpha^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}\left[\left(P-\frac{dQ}{dx}\right)\eta^2+R\eta'^2\right]dx\,.$$

Необхідною умовою мінімуму функціонала (1) є виконання нерівності $\delta^2 I\geq 0$. Можна довести, що ця нерівність еквівалентна нерівності $F_{y'y'}\geq 0$. Аналогічним чином, для того, щоб екстремаль надавала максимум інтегралу (1), необхідне виконання нерівності $F_{y'y'}\leq 0$. Ці умови називаються *умовами Лежандра.* У випадку строгих нерівностей кажуть про *підсилені умови Лежандра.*

Приклад 1. Знайти

$$I=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx\to extr\,,$$

$$y(x_0)=y_0\,,\;\; y(x_1)=y_1\,.$$

Розв'язання. Тут $F=\sqrt{1+y'^2}$. Звідси, $F_y=0$,

а $F_{y'}=\frac{1}{2}(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2y'=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$. Знайдемо $F_{y'y'}$

$$F_{y'y'}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}-y'\dfrac{y'}{(1+y'^2)^{1/2}}}{1+y'^2}=\frac{1+y'^2-y'^2}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Отже,

$$F_{y'y'}=\frac{1}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}>0\quad\forall y'\,.$$

Таким чином, екстремаль $y(x)$ реалізує мінімум функціонала. Знайдемо конкретний вигляд $y(x)$. Рівняння Ейлера $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$ набуває вигляду $y''F_{y'y'}=0$, звідки $\frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}=0$.

Таким чином, шукана екстремаль задовольняє рівняння $y''=0$, а, отже, $y(x)=c_1x+c_2$, де c_1 і c_2 — невідомі константи. Із крайових умов одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases}c_1x_1+c_2=y_1,\\ c_1x_2+c_2=y_2.\end{cases}$$

Застосувавши правило Крамера, знаходимо:

$$c_1=\frac{\begin{vmatrix}y_1 & 1\\ y_2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x_1 & 1\\ x_2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\,;\qquad c_1=\frac{\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x_1 & 1\\ x_2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}\,.$$

Отже, екстремаль, яка надає мінімум шуканому функціоналу, матиме такий вигляд:

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}.$$

Приклад 2. Знайти

$$I = \int_{x_0}^{x_1} (xy' + y'^2)dx \to extr,$$

$$y(x_0) = y_0, \; y(x_1) = y_1.$$

Розв'язання. Тут $F = xy' + y'^2$. Тоді, $F_y = 0$, а $F_{y'} = x + 2y'$. Отже, рівняння Ейлера має перший інтеграл $F_{y'} = c_1$, тобто $x + 2y' = c_1$, звідки $\frac{x^2}{2} + 2y = c_1 x + c_2$ або $y = -\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}c_1 x + c_2$. Оскільки $F_{y'y'} = 2 > 0$, то екстремаль $y(x)$ реалізовує мінімум шуканого функціонала.

1.10. Принцип Остроградського-Гамільтона

Варіаційне числення відіграє основну роль при виведенні рівнянь механіки та математичної фізики. Такі рівняння одержуються з використанням деякого варіаційного принципу з допомогою інтеграла енергії.

Припустимо, що є система n матеріальних точок, маси яких позначимо через m_k, а відповідні координати — (x_k, y_k, z_k). Нехай рух цієї системи підкорено зв'язкам $\varphi_s = 0$, $s = \overline{1,m}$ і проходить під дією сил, які мають силову функцію

$$X_k = \frac{\partial U}{\partial x_k}; \; Y_k = \frac{\partial U}{\partial y_k}; \; Z_k = \frac{\partial U}{\partial z_k},$$

причому φ_s та U — це задані функції координат точок і часу. Кінетична енергія системи виразиться формулою

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} m_k (x_k'^2 + y_k'^2 + z_k'^2).$$

Припустимо, що з деякого положення I, яке відповідає моменту часу $t = t_0$, розглядувана система перемістилася до моменту часу $t = t_1$ в інше положення II. Із усіх можливих способів, якими може відбутися переміщення системи з I у II, вибираємо *клас допустимих рухів системи*, а саме тих рухів, які сумісні із заданими

зв'язками і за заданий проміжок часу $[t_0, t_1]$ переводять систему з положення I в положення II.

Принцип Остроградського-Гамільтона твердить: дійсний рух системи виділяється з усіх допустимих рухів тим, що він задовольняє необхідну умову $\delta I = 0$ екстремуму інтеграла $I = \int_{t_0}^{t_1}(T + U)dt$.

Таким чином, маємо варіаційну задачу з голономними зв'язками та закріпленими границями. Для її розв'язання складемо за правилом множників Лагранжа допоміжну функцію $F = T + U + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s(t)\varphi_s$, для якої $F_{x_k'} = m_k x_k'$; $F_{x_k} = U_{x_k} + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s(t)\frac{\partial \varphi_s}{\partial x_k}$, і аналогічно для координат y_k і z_k. Отже, рівняння Ейлера будуть мати вигляд

$$\begin{cases} m_k x_k'' - X_k - \sum_{s=1}^{m} \lambda_s(t)\frac{\partial \varphi_s}{\partial x_k} = 0, \\ m_k y_k'' - Y_k - \sum_{s=1}^{m} \lambda_s(t)\frac{\partial \varphi_s}{\partial y_k} = 0, \\ m_k z_k'' - Z_k - \sum_{s=1}^{m} \lambda_s(t)\frac{\partial \varphi_s}{\partial z_k} = 0, \end{cases}$$

тобто вони співпадають із диференціальними рівняннями дійсного руху системи, що й треба було довести.

1.11. Абсолютний екстремум

До цього часу ми розглядали задачі на відносний екстремум. Задачу на абсолютний екстремум розглянемо на конкретному прикладі.

Знайти $I(y) = \int_0^l [p(x)y'^2 + q(x)y^2 + 2f(x)y]dx \to \min$, (1)

$$y(0) = a; \; y(l) = b. \quad (2)$$

Тут $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, $\frac{dp}{dx}$ — неперервні на $[0, l]$ функції, причому $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$. Рівняння Ейлера для цього функціонала має вигляд

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] - q(x)y = f(x). \qquad (3)$$

Нехай $y_0(x)$ — це розв'язок задачі (3) — (2), тобто $y_0(x)$ є екстремаллю функціонала (1). Оскільки в даному випадку розв'язується задача на абсолютний екстремум, потрібно довести, що виконується нерівність $I(y_0) \le I(y)$ $\forall y(x) \in D$, причому знак рівності має місце тільки в тому випадку, коли $y(x) \equiv y_0(x)$. Будь-яку функцію $y(x)$ з класу D можна подати у вигляді $y(x) = y_0(x) + \eta(x)$, де $\eta(x)$ — неперервна функція разом із похідною на $[0,l]$ і $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$. Складемо різницю

$$I(y) - I(y_0) = \int_0^l [p(x)(y_0' + \eta')^2 + q(x)(y_0 + \eta)^2 + 2f(x)(y_0 + \eta)]dx -$$

$$-\int_0^l [p(x)y_0'^2 + q(x)y_0^2 + 2f(x)y_0]dx = 2\int_0^l [p(x)y_0'\eta' + q(x)y_0\eta + f(x)\eta]dx +$$

$$+\int [p(x)\eta'^2 + q(x)\eta^2]dx.$$

Проінтегрувавши по частинах, одержимо:

$$I(y) - I(y_0) = 2\int_0^l \left[-\frac{d}{dx}(p(x)y_0') + q(x)y_0 + f(x)\right]\eta\, dx +$$

$$+\int_0^l [p(x)\eta'^2 + q(x)\eta^2]dx + p(x)y_0'\eta \Bigg|_{x=0}^{x=l}.$$

Внаслідок рівняння (3), перший інтеграл перетворюється на нуль, а через вибір функції $\eta(x)$ перетворюється на нуль позаінтегральний член. Таким чином,

$$I(y) - I(y_0) = \int_0^l [p(x)\eta'^2 + q(x)\eta^2]dx.$$

Оскільки за припущенням $p(x) > 0$, $q(x) \ge 0$, то одержимо нерівність $I(y) - I(y_0) \ge 0$ або $I(y) \ge I(y_0)$, що і треба було довести.

Аналогічним чином розв'язується задача на абсолютний екстремум інших функціоналів.

1.12. Варіаційний метод Рітца

Диференціальні рівняння варіаційного числення розв'язуються у скінченому вигляді надзвичайно рідко. Тому виникає необхідність застосувати наближені методи, одним із найпоширеніших серед яких є *метод Рітца.*

У гільбертовому просторі H розглянемо деякий оператор A.

Оператор A називається *додатним*, якщо для всякої функції u з його області визначення виконується нерівність $(Au,u) \ge 0$, де $(\,.\,,\,.\,)$ — скалярний добуток в H.

Оператор A називається *додатно-визначеним*, якщо для всякої функції u з його області визначення виконується нерівність $(Au,u) \ge \alpha\|u\|^2$, де $\alpha = const > 0$, $\|u\|^2 = (u,u)$.

Метод Рітца базується на таких двох теоремах.

Теорема 1. Нехай A — додатний оператор. Тоді, якщо операторне рівняння $Au = f$ має в H розв'язок, то цей розв'язок надає мінімального значення функціоналу $I(u) = (Au,u) - (u,f) - (f,u)$, і навпаки: якщо деякий елемент гільбертового простору H реалізує мінімум функціонала $I(u)$, то тоді він є розв'язком рівняння $Au = f$.

Нехай $d = \min I(u)$. Будь-яку послідовність елементів $\{u_n\} \in H$, для якої виконується співвідношення $\lim_{n\to\infty} I(u_n) = d$, будемо називати *мінімізуючою послідовністю.*

Теорема 2. Якщо оператор A — додатно-визначений, то всяка мінімізуюча послідовність збігається в метриці H до елемента, який реалізує мінімум функціонала $I(u)$.

На практиці побудова мінімізуючої послідовності здійснюється так. Вибирається повна в просторі H система лінійно-незалежних функцій $\{\varphi_n\}$, які називаються координатними функціями. Розв'язок рівняння $Au = f$ шукається у вигляді $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k$, де a_k — невідомі коефіцієнти, які потрібно визначити. При $n \to \infty$ $u_n \to u$. Підставивши функцію u_n в рівняння $Au = f$, домноживши на координатні функції φ_j, $j = \overline{1,n}$ та проінтегрувавши, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (A\varphi_k, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \; j = \overline{1,n}. \qquad (1)$$

Можна довести, що її детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} (A\varphi_1,\varphi_1) & (A\varphi_2,\varphi_1) & \cdots & (A\varphi_n,\varphi_1) \\ (A\varphi_1,\varphi_2) & (A\varphi_2,\varphi_2) & \cdots & (A\varphi_n,\varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A\varphi_1,\varphi_n) & (A\varphi_2,\varphi_n) & \cdots & (A\varphi_n,\varphi_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тобто із системи (1) невідомі коефіцієнти $a_1, a_2, \ldots, a_n$ визначаються однозначно.

1.12.1. Метод Рітца розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку

Нехай потрібно знайти функцію $y(x)$, яка є розв'язком задачі

$$I = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - 2xy)dx \to extr, \qquad (1)$$

$$y(0) = y(1) = 0. \qquad (2)$$

Випишемо для функціонала I відповідне рівняння Ейлера:

$$F = y'^2 - y^2 - 2xy$$

$$F_y = -2y - 2x \qquad F_{y'} = 2y'$$

$$F_{xy'} = 0 \qquad F_{yy'} = 0 \qquad F_{y'y'} = 2$$

Рівняння Ейлера $F_{xy'} + y'F_{yy'} + y''F_{y'y'} - F_y = 0$ у нашому випадку набуде вигляду

$$2y'' + 2y + x = 0,$$

звідки

$$-y'' - y = x.$$

Отже, задачі (1) — (2) є еквівалентна така задача:

$$Ay = -y'' - y = x,$$

$$y(0) = 0, \; y(1) = 0,$$

яку потрібно розв'язати методом Рітца.

Координатні функції $\{\varphi_n(x)\}$ підбираємо так, щоб виконувалися крайові умови. Тоді

$$\varphi_1(x) = x(1-x), \; \varphi_2(x) = x(1-x)x, \ldots, \varphi_n(x) = x(1-x)x^{n-1}, \ldots$$

Далі $A\varphi_k = -\varphi_k'' - \varphi_k$, а, отже,

$$(A\varphi_k, \varphi_j) = \int_0^1 (-\varphi_k'' - \varphi_k)\varphi_j dx.$$

У нашому випадку

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{n} a_k x(1-x)x^{k-1}.$$

Зафіксуємо $n = 1$. Тоді система (1) — це єдине рівняння. Враховуючи, що

$$\varphi_1(x) = x - x^2, \; \varphi_1'(x) = 1 - 2x, \varphi_1''(x) = -2,$$

це рівняння матиме вигляд

$$a_1 \int_0^1 [2 - x(1-x)]x(1-x)dx = \int_0^1 x^2(1-x)dx.$$

Обчисливши інтеграли, одержуємо, що $\frac{3}{10}a_1 = \frac{1}{12}$, звідки $a_1 = \frac{5}{18}$.

Таким чином, $u_1(x) = \frac{5}{18}x(1-x)$.

Зафіксуємо $n = 2$. Тоді $\varphi_1(x) = x - x^2$, $\varphi_2(x) = x^2 - x^3$. Як і в попередньому випадку, $\varphi_2'(x) = 2x - 3x^2$, $\varphi_2'(x) = 2 - 6x$. Система рівнянь (1) набуде вигляду

$$\begin{cases} a_1(A\varphi_1, \varphi_1) + a_2(A\varphi_2, \varphi_1) = (f, \varphi_1), \\ a_1(A\varphi_1, \varphi_2) + a_2(A\varphi_2, \varphi_2) = (f, \varphi_2), \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} a_1 \int_0^1 [2 - x(1-x)]x(1-x)dx + a_2 \int_0^1 \left[-2 + 6x - x^2(1-x)\right]x(1-x)dx = \\ = \int_0^1 x^2(1-x)dx, \\ a_1 \int_0^1 [2 - x(1-x)]x^2(1-x)dx + a_2 \int_0^1 \left[-2 + 6x - x^2(1-x)\right]x^2(1-x)dx = \\ = \int_0^1 x^3(1-x)dx. \end{cases}$$

Обчисливши інтеграли, одержуємо систему двох рівнянь із двома невідомими:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{10}a_1 + \dfrac{3}{20}a_2 = \dfrac{1}{12}, \\ \dfrac{3}{20}a_1 + \dfrac{13}{105}a_2 = \dfrac{1}{20}, \end{cases}$$

розв'язками якої є $a_1 = \dfrac{71}{369}$, $a_2 = \dfrac{7}{41}$. Таким чином,

$$u_2(x) = \left(\frac{71}{369} + \frac{7}{41}x\right)x(1-x).$$

Наближення $u_3(x)$, $u_4(x)$,... шукаються аналогічно. Порівнюючи точний розв'язок задачі $y(x) = \dfrac{\sin x}{\sin 1} - x$ з u_1 та u_2, маємо:

x	$y(x)$	$u_1(x)$	$u_2(x)$
$\frac{1}{4}$	0,044	0,052	0,044
$\frac{1}{2}$	0,07	0,069	0,069
$\frac{3}{4}$	0,06	0,052	0,06

Отже, при $n = 1; 2$ метод Рітца дає хороші наближення точного розв'язку вихідної задачі.

1.12.2. Метод Рітца розв'язання крайових задач для рівнянь із частинними похідними

Нехай у прямокутнику $0 < x < a$, $0 < y < b$ потрібно розв'язати крайову задачу

$$-\Delta u = 1,$$

$$u(x,y)\big|_{x=0} = u(x,y)\big|_{y=0} = u(x,y)\big|_{x=a} = u(x,y)\big|_{y=b} = 0.$$

У якості координатних функцій, які задовольняють задані крайові умови, візьмемо функції

$$\varphi_{km}(x,y) = \sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}, \quad k, m = 1, 2, \ldots,$$

причому

$$\frac{\partial^2\varphi_{km}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_{km}}{\partial y^2} = -\pi^2\left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)\varphi_{km}$$

або

$$\Delta\varphi_{km} = -\pi^2\left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)\varphi_{km}.$$

Наближення $u_n(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{m=1}^{n} a_{km}\sin\dfrac{k\pi x}{a}\sin\dfrac{m\pi y}{b}$. Тоді система (1) запишеться так:

$$\sum_{k,m=1}^{n} a_{km}(-\Delta\varphi_{km}, \varphi_{rs}) = (1, \varphi_{rs}); \; r, s = 1, 2, .., n$$

або в еквівалентному вигляді

$$a_{rs}\pi^2\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2}\right)\|\varphi_{rs}\|^2 = (1, \varphi_{rs}),$$

де

$$\|\varphi_{rs}\|^2 = \int_0^a \sin^2\frac{r\pi x}{a}dx\int_0^b \sin^2\frac{s\pi y}{b}dx = \frac{ab}{4},$$

$$(1, \varphi_{rs}) = \int_0^a \sin\frac{r\pi x}{a}dx\int_0^b \sin\frac{s\pi y}{b}dy = \frac{ab}{\pi^2 rs}\left[1-(-1)^r\right]\left[1-(-1)^s\right].$$

Звідси бачимо, що якщо хоча б одне з чисел r і s — парне, то $a_{rs} = 0$. Якщо ж r та s — непарні, то $a_{rs} = \dfrac{16a^2b^2}{\pi^4 rs(b^2r^2 + a^2s^2)}$. Тоді наближений розв'язок поставленої задачі запишеться у вигляді:

$$u_n(x,y) = \sum_{k,m=1,3,5,\ldots,n} \frac{16a^2b^2}{\pi^4 km(b^2k^2 + a^2m^2)}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}.$$

1.13. Метод прогонки розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

Метод Рітца, незважаючи на те, що дає досить хороші наближення точного розв'язку, має суттєвий недолік: потрібно підраховувати велику кількість визначених інтервалів. Метод прогонки позбавлений цього недоліку і, крім того, легко реалізовується на ЕОМ.

Розглянемо таку задачу. Знайти розв'язок диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{1}$$

при $x \in [a,b]$, причому крайові умови можуть бути такі:

$$y(a) = \alpha, \; y(b) = \beta, \tag{2'}$$

$$y'(a) = \alpha, \; y'(b) = \beta, \tag{2''}$$

$$\begin{cases} a_0 y(a) + a_1 y'(a) = \alpha, \\ b_0 y(b) + b_1 y'(b) = \beta. \end{cases} \tag{2'''}$$

Задамо ціле число n, виберемо крок $h = \dfrac{b-a}{n}$ та розбиття $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Замінюємо першу та другу похідні функції $y(x)$ у вузлі x_i їх різницевими аналогами: $y''(x_i) \approx \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$, $y'(x_i) \approx \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$. Тоді рівняння (1) зводиться до такої системи алгебраїчних рівнянь:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = r_i, \tag{3}$$

де $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $r_i = r(x_i)$, $i = \overline{1, n-1}$. Якщо крайові умови мають вигляд $(2')$, то треба додати $y_0 = \alpha$, $y_n = \beta$, а у випадках $(2'')$ та $(2''')$ — апроксимувати перші похідні. Звівши рівняння (3) до спільного знаменника і проапроксимувавши крайові умови, замість задачі (1) — (2) одержуємо таку:

$$\begin{cases} a_j y_{j-1} - c_j y_j + b_j y_{j+1} = -f_j, \quad j = \overline{1, n-1}, & (4) \\ y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1; \quad y_n = \chi_2 y_{n-1} + \mu_2. & (5) \end{cases}$$

Тут a_j, c_j, b_j, f_j, χ_1, χ_2, y_0, y_n, μ_1, μ_2 — відомі числа. У випадку крайової умови $(2')$ $\chi_1 = \chi_2 = 0$.

Розв'язок системи (4) – (5) шукаємо у вигляді

$$y_j = \alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad j = \overline{0, n-1}, \tag{6}$$

де α_{j+1}, β_{j+1} — невідомі коефіцієнти. Аналогічно (6), запишемо

$$y_{j-1} = \alpha_j y_j + \beta_j =$$

$$= \alpha_j \left(\alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}\right) + \beta_j = \alpha_j \alpha_{j+1} y_{j+1} + \left(\alpha_j \beta_{j+1} + \beta_j\right), \; j = \overline{1, n-1}.$$

Підставляючи значення y_j та y_{j-1} у рівняння (4), одержуємо:

$$a_j \left[\alpha_j \alpha_{j+1} y_{j+1} + \left(\alpha_j \beta_{j+1} + \beta_j\right)\right] - c_j \left(\alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}\right) + b_j y_{j+1} = -f_j$$

або

$$\left[\alpha_{j+1}(a_j \alpha_j - c_j) + b_j\right] y_{j+1} + \left[\beta_{j+1}(a_j \alpha_j - c_j) + a_j \beta_j + f_j\right] = 0. \tag{7}$$

Рівняння (7) буде виконуватись, якщо коефіцієнти α_j та β_j підібрати таким чином, щоб вирази у квадратних дужках перетворювалися в нуль. Таким чином, одержимо, що

$$\alpha_{j+1} = \frac{b_j}{c_j - a_j \alpha_j}; \; \beta_{j+1} = \frac{a_j \beta_j + f_j}{c_j - a_j \alpha_j}; \; j = \overline{1, n-1}. \tag{8}$$

Початкові значення α_1 та β_1 знаходять з еквівалентності умов $y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1$; $y_n = \chi_1 y_1 + \mu_1$, звідки

$$\alpha_1 = \chi_1; \; \beta_1 = \mu_1. \tag{9}$$

Знаходження коефіцієнтів α_{j+1}, β_{j+1} за формулами (8), (9) називається *прямою прогонкою.* Далі невідомі значення y_i знаходяться за формулами (6). Для цього потрібно знайти y_n, яке визначається із співвідношень

$$\begin{cases} y_n = \chi_2 y_{n-1} + \mu_2, \\ y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n, \end{cases}$$

звідки

$$y_n = \frac{\chi_2 \beta_n + \mu_2}{1 - \chi_2 \alpha_n}. \tag{10}$$

Знаходження невідомих значень y_j за формулами (6), (10) називається *оберненою прогонкою.*

За допомогою методу прогонки можна розв'язувати нелінійні задачі виду:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a,b], \tag{11}$$

$$\begin{cases} a_0 y(a) + a_1 y'(a) = \alpha, \\ b_0 y(b) + b_1 y'(b) = \beta. \end{cases} \tag{12}$$

Припускаємо, що функція $f(x,y,z)$ — неперервна в деякій області G трьохвимірного простору. Як і раніше, розбиваємо відрізок $[a,b]$ на n рівних частин точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $h = \dfrac{b-a}{n}$. Замість задачі (11) — (12) одержуємо таку:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = f\left(x_k, y_k, \dfrac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}\right), \quad k = \overline{1, n-1}, & (13) \\ R_0(y) = a_0 y_0 + a_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = \alpha; \quad R_n(y) = b_0 y_n + b_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = \beta. & (14) \end{cases}$$

Система (11) — (12) — це система $n+1$ нелінійних рівнянь відносно $n+1$ невідомих. Таку систему можна розв'язувати ітераційними методами, тобто замість системи рівнянь (13) — (14) розв'язувати таку:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{k+1}^{(r+1)} - 2y_k^{(r+1)} + y_{k-1}^{(r+1)}}{h^2} = f\left(x_k, y_k^{(r)}, \dfrac{y_{k+1}^{(r)} - y_{k-1}^{(r)}}{2h}\right), \quad (k = \overline{1, n-1}) & (15) \\ R_0(y^{(r+1)}) = \alpha; \quad R_n(y^{(r+1)}) = \beta. & (16) \end{cases}$$

Система (15) — (16) — це система лінійних рівнянь, яку можна розв'язувати викладеним вище методом прогонки. Для того, щоб знайдені розв'язки $\{y_k^{(r)}\}$ системи (15) — (16) збігалися до розв'язку $\{y_k\}$, $k = \overline{0, n}$ системи (13) — (14), необхідно вимагати, щоб нелінійна функція $f(z, y, z)$ задовольняла умову Лівшиця по змінних y та z.

Проблемою є не стільки розв'язання крайової задачі для рівняння Ейлера методом прогонки, скільки зведення вихідної задачі до перетвореної у вигляді (4) — (5). Розглянемо це перетворення на прикладі.

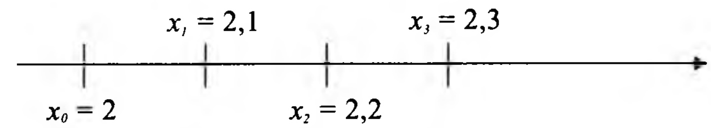
Приклад. Звести задачу

$$y'' + xy' - \frac{y}{2x} = 1,$$

$$\begin{cases} y(2) + 2y'(2) = 1, \\ y(2{,}3) = 2{,}15 \end{cases}$$

до задачі у вигляді (4) — (5).

Розв'язання. Розіб'ємо відрізок $[2; 2{,}3]$ на частини з кроком $h = 0{,}1$, в результаті чого отримаємо чотири вузлові точки з абсцисами



Дві точки $x_0 = 2$ та $x_3 = 2{,}3$ є зовнішніми, а точки x_1 і x_2 — внутрішніми. У внутрішніх точках вихідне рівняння апроксимуємо таким чином:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - \frac{y_i}{2x_i} = 1 \qquad (i = 1, 2),$$

звідки одержуємо

$$2x_i\left(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}\right) + hx_i^2\left(y_{i+1} - y_{i-1}\right) - h^2 y_i = 2h^2 x_i,$$

$$\left(2x_i - hx_i^2\right)y_{i-1} - \left(4x_i + h^2\right)y_i + \left(2x_i + hx_i^2\right)y_{i+1} = -\left(-2h^2 x_i\right)$$

для $i = 1, 2$. Позначивши

$$a_i = 2x_i - hx_i^2;\ c_i = 4x_i + h^2;\ b_i = 2x_i + hx_i^2;\ f_i = -2h^2 x_i,$$

одержуємо рівняння (4)

$$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i \qquad (i = 1, 2).$$

Апроксимуємо крайові умови. Умова на лівому кінці інтервала $y(2) + 2y'(2) = 1$ набуває вигляду

$$y_0 + 2\frac{y_1 - y_0}{h} = 1,$$

звідки

$$(h-2)y_0 + 2y_1 = h \qquad \text{або} \qquad y_0 = \frac{2}{2-h}y_1 + \frac{h}{h-2}.$$

Позначивши $\chi_1 = \dfrac{2}{2-h}$; $\mu_1 = \dfrac{h}{h-2}$, одержуємо першу крайову умову (5):

$$y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1.$$

Друга крайова умова (5) буде такою: $y_3 = 2{,}15$, звідки $\chi_2 = 0$, $\mu_2 = 2{,}15$.

1.14. Задачі оптимального управління. Принцип максимуму Понтрягіна

Задача оптимального управління ставиться так. Знайти вектор-функції $x(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))\in R^n$ та $x(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))\in R^n$ при $t\in[t_0,T]$, які надають екстремум (максимум або мінімум) функціоналу $I(x,u)$, тобто

$$I(x,u)\to extr \qquad (1)$$

при диференціальних зв'язках

$$\dot{x}=f(x,u,t),\quad f=(f_1,f_2,...,f_n),\qquad \dot{x}=\frac{dx}{dt}, \qquad (2)$$

які обмежені вздовж траєкторії

$$(x,u,t)\in G \qquad (3)$$

та крайовими умовами

$$(x,t_0)\in G_0,\ (x,T)\in G_T. \qquad (4)$$

Будемо вважати, що f_i — неперервні та диференційовні функції по сукупності змінних x та u. Множина G — це деяка область простору $R^n\times R^m\times 1$, а множини G_0 та G_T — деякі області в просторі $R^n\times R^1$. Функції $x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)$ називаються *фазовими координатами об'єкта,* а $u_1(t),u_2(t),...,u_m(t)$ — *параметрами,* або *рулями управління.*

Конкретизація виразів (1) — (4) породжує різні типи задач оптимального управління. Типи задач розбиваються на три групи залежно від того, яка з умов (1) — (4) береться в якості визначальної характеристики: або вигляд функціонала (1), або обмеження вздовж траєкторії (3), або обмеження на крайові умови (4).

Залежно від того, який розглядається функціонал $I(x,u)$, розрізняють задачі Лагранжа, задачу Больца та задачу Майєра.

Задача Лагранжа ставиться так. Знайти

$$I(x,u)=\int_{t_0}^{T}F(x,u,t)dt\to extr,$$

де F — це неперервна і диференційовна функція своїх змінних при обмеженнях $\dot{x}=f(x,u,t)$, $(x,t_0)\in G_0$, $(x,T)\in G_T$.

У *задачі Майєра* розглядається функціонал $I(x,u)=\Phi(x(T),T)$, а в *задачі Больца*

$$I(x,u)=\int_{t_0}^{T}F(x,u,t)dt+\Phi(x(t_0),t_0,x(T),T).$$

Обмеження (3) конкретизуються наступним чином. Оскільки можливості управління завжди обмежені, то *найбільш частими* є обмеження типу $|u(t)|\le\alpha(t)$, де $\alpha(t)$ — відома неперервна вектор-функція. Окрім цього розглядають *обмеження на фазові змінні.* Причому розрізняють обмеження *типу рівностей* $Q_j(x(t),t)=0$, $j=1,2,...,k\le n$ та *типу нерівностей* $Q_j(x(t),t)\le 0$, $j=1,2,...,k\le n$.

Можуть розглядатися *спільні обмеження на управління та фазові змінні*

$$Q_j(x(t),u(t),t)=0,\ j=1,2,...,k\le n+m$$

або

$$Q_j(x(t),u(t),t)\le 0,\ j=1,2,...,k\le n+m,$$

та *задачі з інтегральними обмеженнями* типу

$$\int_{t_0}^{T}\psi_j(x(t),u(t),t)dt=l_j,\ j=\overline{1,n},$$

де ψ_j — неперервні функції, l_j — задані константи.

Стосовно умов (4), то розглядаються задачі *із закріпленими кінцями,* коли значення $x(t_0)$ та $x(T)$ задані, та задачі *з вільним кінцем,* коли значення $x(t_0)$ (або $x(T)$) не задане.

Задачі оптимального управління розв'язуються за допомогою *принципу максимуму Понтрягіна.* Нехай диференціальні зв'язки задаються рівнянням

$$\frac{dx}{dt}=f(x,u,t), \qquad (5)$$

де x — вектор-стовпчик фазових координат, а u — це вектор-стовпчик рулів управління. Нехай вектор управління додатково підкорений умові

$$g(u)\le 0. \qquad (6)$$

Академік Л.С. Понтрягін запропонував розглядати таку функцію

$$\rho=\sum_{i=1}^{n}b_ix_i(t_k),\ \rho>0, \qquad (7)$$

яка одержала назву *функції Понтрягіна.* Тут $b=(b_1,b_2,...,b_n)$ — вектор бажаного руху, а $x(t_k)=(x_1(t_k),x_2(t_k),...,x_n(t_k))$ — вектор руху в

5 - 8-1045

кінцевий момент часу. Тоді мінімум функції ρ (близькість до нуля) *означає наближену ортогональність* векторів x та b — істинний рух системи максимально близько наближається до бажаного. Кінцева точка оптимальної траєкторії t_k може бути вільною або закріпленою. Аналогічно вектор b може бути жорстко орієнтованим у просторі або змінним.

Вимога одночасного задоволення початкових та граничних умов ускладнює задачу оптимального управління. Наприклад, якщо при постановці задачі потрібно знайти екстремум (max або min) інтеграла від квадрата однієї із змінних, то вводячи нову змінну $x_{n+1} = \int_{t_0}^{t_k} x_s^2 dt$, одержують додаткове нелінійне рівняння

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = x_s^2, \; x_{n+1}(0) = 0 .$$

Л.С. Понтрягін припустив існування зв'язку оптимального управління з максимумом енергії і сформулював цей факт як спеціальний принцип — *принцип максимуму.* Цей принцип твердить: якщо вектор u — оптимальний, тобто забезпечує мінімум функції Понтрягіна ρ, то енергетична функція Гамільтона $H(x,p,u,t)$ набуває максимуму відносно u в інтервалі управління.

Функція Гамільтона вводиться так:

$$H(x,p,u,t) = (p,f) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i , \tag{8}$$

де p — вектор кількості руху, а f — вектор правої частини рівняння (5). Вектор p визначається як розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dp_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \; i = \overline{1,n}, \tag{9}$$

де $p_i(t_k) = -b_i$, b_i — відомі константи, які входять у функцію Понтрягіна. Диференціюючи рівняння (8) по p_i, знаходимо

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = f_i . \tag{10}$$

З іншого боку, диференціювання того ж рівняння (8) по x_i дає

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} . \tag{11}$$

Порівнюючи (11) і (9), одержуємо

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} .$$

Системою канонічних рівнянь Гамільтона називається система рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}. \end{cases} \tag{12}$$

Система (12) підкорена початковим та граничним умовам

$$\begin{cases} x_i(t_0) = x_i^0, \\ p_i(t_k) = -b_i, \end{cases} \quad i = \overline{1,n} . \tag{13}$$

Треба показати, що максимум H співпадає з мінімумом ρ . Розглянемо приріст $\Delta\rho$ функції Понтрягіна і, беручи до уваги, що $p_i(t_k) = -b_i$, будемо мати

$$\Delta\rho = \sum_{i=1}^{n} b_i \Delta x_i \Big|_{t_0}^{t_k} = -\sum_{i=1}^{n} p_i \Delta x_i \Big|_{t_0}^{t_k} ,$$

тут $\Delta x_i(t_0) = 0$. Враховуючи, що рівняння (5) можна подати в еквівалентній формі, будемо мати

$$\Delta\rho = -\int_{t_0}^{t_k} \sum_{i=1}^{n} p_i [f_i(x^* + \Delta x, u^* + \Delta u, t) - f_i(x^*, u^*, t)] dt =$$

$$= -\int_{t_0}^{t_k} \sum_{i=1}^{n} p_i [f_i(x^*, u^* + \Delta u, t) - f_i(x^*, u^*, t) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x^*, u^* + \Delta u, t)}{\partial x_j} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i(x^* + \xi\Delta x, u^* + \Delta u, t)}{\partial x_j \partial x_s} \Delta x_j \Delta x_s] \, dt.$$

Тут x^* та u^* — оптимальні значення x та u, $0 < \xi < 1$.

Розглянемо частинний випадок функцій f_i, коли $f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j + \varphi(u,t)$. Така ситуація є характерною для лінійних автоматичних систем. В цьому випадку в розкладі (14) третя і четверта компоненти зникнуть і будемо мати

$$\Delta\rho = -\int_{t_0}^{t_k} [H(x^*, u^* + \Delta u, t) - H(x^*, u^*, t)] dt .$$

Звідси бачимо, що мінімум ρ ($\Delta\rho > 0$) досягається при виконанні нерівності $H(x^*, u^* + \Delta u, t) - H(x^*, u^*, t) \le 0$.

5*

Аналогічний факт можна довести і у випадку нелінійної функції f_i. Отже, процедура розв'язку задачі оптимального управління за Понтрягіним зводиться до таких кроків:

1) За вихідною системою рівнянь (5) складається спряжена система (9), а далі функція H (8).

2) Відшуковується максимум функції H по u. Записується система канонічних рівнянь (12) та умов (13).

3) Підставляючи умови максимуму функції Гамільтона в канонічні рівняння, знаходять диференціальні рівняння, які визначають оптимальний процес при граничних умовах.

Приклад 1. Дано рівняння $\frac{d^2x}{dt^2}=u$ та $|u|<u_m$, де u_m — відоме число.

Розв'язання. Позначимо $x=x_1$ і $\frac{dx_1}{dt}=x_2$. Тоді одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}=f_1=x_2, \\ \frac{dx_2}{dt}=f_2=u. \end{cases}$$

Функція Гамільтона набуде вигляду $H=p_1f_1+p_2f_2=p_1x_2+p_2u$. Спряжена система

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt}=-p_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}-p_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \frac{dp_2}{dt}=-p_1\frac{\partial f_1}{\partial x_2}-p_2\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dp_1}{dt}=0, \\ \frac{dp_2}{dt}=-p_1, \end{cases}$$

звідки $p_1=c_1$, $p_2=c_2-c_1t$. Тоді функція Гамільтона $H=c_1x_2+(c_2-c_1t)u$, звідки $\frac{\partial H}{\partial u}=c_2-c_1t$. $H_{\max}$ буде у випадку $(c_2-c_1t)u>0$, тобто при $u=u_m sign(c_2-c_1t)$.

Функція (c_2-c_1t) дає рівняння прямої лінії, яка перетинає вісь t один раз. Така оптимальна за швидкодією система називається *релейною,* а управління має два граничних значення $-u_m$ та $+u_m$.

Приклад 2. Існує об'єкт з рівнянням руху

$$T\frac{dx}{dt}+x=ku, \quad |u|\le u_m, \quad x(t_0)=x_0.$$

Визначити управління u таким чином, щоб

$$I(x,u)=\int_{t_0}^{t_k}x^2(u,t)dt\to\min.$$

Розв'язання. Позначимо $x=x_1$, $x_2=\int_{t_0}^{t_k}x_1^{\,2}dt$. Тоді система рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}=-\frac{1}{T}x_1+\frac{k}{T}u, \\ \frac{dx_2}{dt}=x_1^2. \end{cases}$$

Функція Гамільтона

$$H=p_1f_1+p_2f_2=p_1\left(-\frac{1}{T}x_1+\frac{k}{T}u\right)+p_2x_1^2$$

або, виділивши повний квадрат,

$$H=p_2\left(x_1-\frac{p_1}{2p_2T}\right)^2-\frac{p_1^2}{4p_2T^2}+\frac{p_1k}{T}u.$$

Оскільки $\frac{\partial H}{\partial u}=\frac{p_1k}{T}$, то u буде надавати функції H максимум, якщо співпадають знаки p_1 та u, тобто $u=u_m sign\, p_1$. Випишемо канонічну систему рівнянь (12):

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt}=-\frac{1}{T}x_1+\frac{k}{T}u_m sign\, p_1, \\ \frac{dx_2}{dt}=x_1^2. \end{cases}$$

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad \begin{cases} \frac{dp_1}{dt}=\frac{p_1}{T}-2x_1p_2, \\ \frac{dp_2}{dt}=0. \end{cases}$$

Умови (13) будуть такими: $x_1(t_0)=x_0$, $x_2(t_0)=0$, $p_1(t_k)=-b_1$, $p_2(t_k)=-b_2$. Розв'язком цієї системи є оптимальний процес

$$x=-ku_m\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right).$$

Розділ 2

МЕТОДИ ПОШУКУ ЕКСТРЕМУМІВ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІЙ БЕЗ ОБМЕЖЕНЬ

Якщо відома функція n змінних $f(x_1, x_2,..., x_n)$, яка припускається неперервною, то пошук екстремуму такої функції розроблений, і він складається з двох етапів. На першому етапі складають систему рівнянь $\frac{\partial f}{\partial x_i}=0,\ i=\overline{1,n}$. Корені цієї системи є критичними точками функції $f(x_1, x_2,..., x_n)$. На другому етапі, використовуючи критерій Сильвестра, встановлюють, чи є ці точки точками максимуму чи мінімуму, або в них екстремуму не існує. Але на практиці, коли число змінних є великим, вказаний метод є громіздким і застосовувати його досить важко, оскільки сама система рівнянь $\frac{\partial f}{\partial x_i}=0,\ i=\overline{1,n}$ може бути дуже важкою для розв'язання, а функція $f(x_1, x_2,..., x_n)$ не обов'язково може мати неперервні похідні. Тому виникає проблема розробки таких методів, які б не мали вказаних недоліків і легко реалізовувались на ЕОМ.

Відомі методи відшукання екстремуму нелінійної функції залежно від використаної інформації для отримання наступної точки можна поділити на три групи:

1. Прямі методи, які використовують тільки значення функції.
2. Методи першого порядку, які додатково використовують і значення першої похідної.
3. Методи другого порядку, які використовують другі похідні.

Зауважимо, що похідні можуть обчислюватися і аналітично (якщо функція задана аналітично), і чисельно.

2.1. Прямі методи одновимірного пошуку

Розглянемо задачу мінімізації функції однієї змінної $f(x)$ за умови $a \le x \le b$. Оскільки точний локальний мінімум f на $[a,b]$ невідомий, то назвемо цей інтервал інтервалом невизначеності. Взагалі $[a,b]$ називається інтервалом невизначеності, якщо точка мінімуму $x^* \in [a,b]$, хоча її точне значення невідоме.

Нехай функція $f(x)$ визначена на непустій опуклій множині R^n. Кажуть, що функція f квазіопукла, якщо для довільних $x_1, x_2 \in R$ і $\lambda \in (0,1)$ виконується нерівність $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$, функція $f(x)$ називається квазіввігнутою, якщо $-f(x)$ — квазіопукла функція.

Нехай функція $f(x)$ визначена на непустій випуклій множині R. Функція f — строго квазіопукла, якщо для довільних $x_1, x_2 \in R$, таких, що $f(x_1) \neq f(x_2)$ при всіх $\lambda \in (0,1)$ виконується нерівність $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \max\{f(x_1), f(x_2)\}$. Функція $f(x)$ називається строго квазіввігнутою, якщо $(-f(x))$ — строго квазіопукла функція.

Якщо функція $f(x)$ опукла або строго квазіопукла, то інтервал невизначеності може бути скорочений за допомогою обчислення значень $f(x)$ у двох точках цього інтервалу (рис. 2.1).

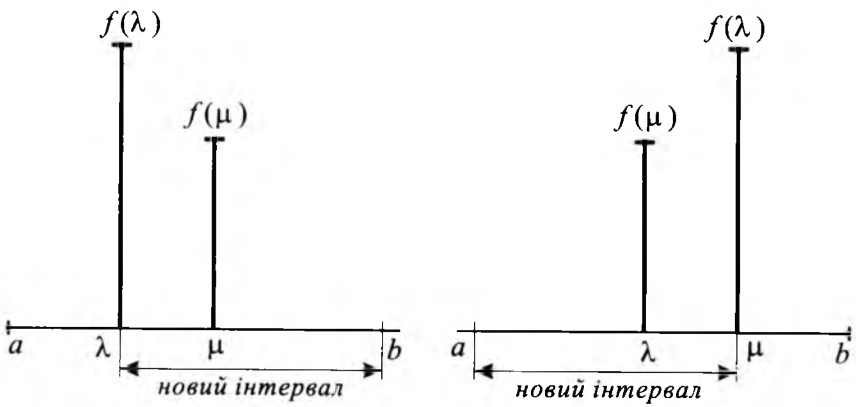


Рис. 2.1

Теорема. Нехай $f(x)$ випукла або строго квазіопукла функція в інтервалі $[a,b]$. Нехай $\lambda, \mu \in [a,b]$ такі, що $\lambda < \mu$. Якщо $f(\lambda) > f(\mu)$, то $f(z) \geq f(\mu)$ для всіх $z \in [a, \lambda)$. Якщо ж $f(\lambda) \leq f(\mu)$, то $f(z) \geq f(\lambda)$ для всіх $z \in (\mu, b]$.

2.1.1. Дихотомічний пошук

Нехай задана строго квазіопукла функція $f(x)$, яку потрібно мінімізувати на інтервалі $[a_1, b_1]$. На рис. 2.2. маємо випадок, коли $f(\lambda_1) < f(\mu_1)$ і, отже, згідно з теоремою, новим інтервалом невизначеності буде $[a_1, \mu_1]$. На рис. 2.3. у нас зафіксовано випадок $f(\lambda_1) > f(\mu_1)$. Тоді новим інтервалом невизначеності буде інтервал $[\lambda_1, b_1]$. Таким чином, залежно від виду функції довжина нового інтервалу невизначеності рівна або $|\mu_1 - a_1|$, або $|b_1 - \lambda_1|$. Але апріорі невідомо, яка з нерівностей буде виконуватись. Тому оптимальна стратегія вибору точок λ_1 і μ_1 полягає в мінімізації максимуму величин $\mu_1 - a_1$ і $b_1 - \lambda_1$. Це може бути досягнуто вибором у якості λ_1 і μ_1 середини інтервалу $[a_1, b_1]$. Однак у цьому випадку будемо мати тільки одну точку і не зможемо далі скорочувати інтервал невизначеності. Тому вибираємо λ_1 і μ_1 симетрично відносно середини інтервалу на відстані ε від нього. Тут число $\varepsilon > 0$ настільки мале, щоб, з одного боку, довжина нового інтервалу невизначеності $\varepsilon + \frac{b_1 - a_1}{2}$ була достатньо близькою до теоретично оптимального значення $\frac{b_1 - a_1}{2}$ і в той же час значення функції $f(\lambda_1)$ і $f(\mu_1)$ були б різними.

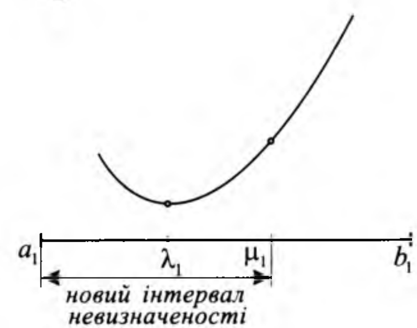


Рис. 2.2.

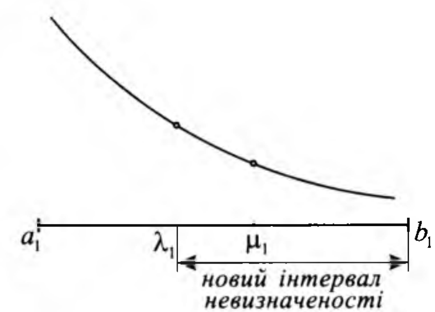


Рис. 2.3.

У дихотомічному пошуку місце кожного з двох перших λ_1 і μ_1 вибираються симетрично на відстані ε від середини $\frac{b_1 + a_1}{2}$. Залежно від значень функції $f(x)$ у точках λ_1 і μ_1 визначається новий інтервал невизначеності.

Алгоритм дихотомічного пошуку.

Попередній етап. Вибираємо константу $\varepsilon > 0$ і допустиму скінчену довжину інтервалу невизначеності $l > 0$. Нехай $[a_1, b_1]$ — початковий інтервал невизначеності. Покладемо $k = 1$ і перейдемо до основного етапу.

Основний етап. Він складається із скінченого числа однотипних ітерацій.

k *-а ітерація.*

Крок 1. Якщо $b_k - a_k \le l$, то кінець алгоритму, точка мінімуму належить інтервалу $[a_k; b_k]$. У протилежному випадку обчислюємо $\lambda_k = \dfrac{a_k + b_k}{2} - \varepsilon$, $\mu_k = \dfrac{a_k + b_k}{2} + \varepsilon$ і переходимо до кроку 2.

Крок 2. Якщо $f(\lambda_k) < f(\mu_k)$, покладаємо $a_{k+1} = a_k$ і $b_{k+1} = \mu_k$. У протилежному випадку покладаємо $a_{k+1} = \lambda_k$ і $b_{k+1} = b_k$. Замінюємо k на $k+1$ і переходимо до кроку 1.

Відзначимо, що довжина інтервалу невизначеності на початку $(k+1)$ -ї ітерації дорівнює $b_{k+1} - a_{k+1} = \dfrac{1}{2^k}(b_1 - a_1) + 2\varepsilon\left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)$. Дане співвідношення можна використовувати для визначення числа ітерацій, необхідних для досягнення бажаної точності.

2.1.2. Метод золотого перерізу

У методі золотого перерізу числа λ_k і μ_k шукаються за формулами $\lambda_k = a_k + (1-\alpha)(b_k - a_k)$ і $\mu_k = a_k + \alpha(b_k - a_k)$, де $\alpha = 0{,}618$ — коефіцієнт стискання. При цьому коефіцієнті стиснення для нової ітерації λ_{k+1} і μ_{k+1} вибираються так, що або λ_{k+1} співпадає з μ_k, або μ_{k+1} співпадає з λ_k. Тому на першій ітерації необхідні два обчислення функції в точках λ_1 і μ_1, а на всіх наступних — тільки одне.

Алгоритм методу золотого перерізу.

Попередній етап. Вибираємо допустиму скінчену довжину інтервалу невизначеності $l > 0$. Нехай $[a_1; b_1]$ — початковий інтервал невизначеності. Покладемо $\lambda_1 = a_1 + (1-\alpha)(b_1 - a_1)$ і $\mu_1 = a_1 + \alpha(b_1 - a_1)$, де $\alpha = 0{,}618$. Обчислимо $f(\lambda_1)$ і $f(\mu_1)$, покладемо $k = 1$ і перейдемо до основного етапу.

Основний етап.

Крок 1. Якщо $b_k - a_k < l$, то зупиняємося, оптимальна точка належить інтервалу $[a_k; b_k]$. У протилежному випадку, якщо $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$, то перейдемо до кроку 2, а якщо $f(\lambda_k) \le f(\mu_k)$, то до кроку 3.

Крок 2. Покладемо $a_{k+1} = \lambda_k$, $b_{k+1} = b_k$, $\lambda_{k+1} = \mu_k$, $\mu_{k+1} = a_k + \alpha(b_{k+1} - a_{k+1})$. Обчислимо $f(\mu_{k+1})$ і перейдемо до кроку 4.

Крок 3. Покладемо $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = \mu_k$, $\mu_{k+1} = \lambda_k$, $\lambda_{k+1} = a_{k+1} + (1-\alpha)(b_{k+1} - a_{k+1})$. Обчислимо $f(\lambda_{k+1})$ і перейдемо до кроку 4.

Крок 4. Замінимо k на $k+1$ і перейдемо до кроку 1.

Приклад. Знайти мінімум функції $f(x) = x^2 + 2x$ за умови $-3 \le x \le 5$.

Розв'язання. Очевидно, функція $f(x)$ строго квазівипукла і початкова довжина інтервалу невизначеності дорівнює 8. Скоротимо цей інтервал невизначеності до інтервалу, довжина якого не більша $0{,}2$. Визначимо перші дві точки: $\lambda_1 = -3 + 0{,}382 \cdot 8 = 0{,}056$; $\mu_1 = -3 + 0{,}618 \cdot 8 = 1{,}944$. Обчислимо $f(\lambda_1) = 0{,}115$ і $f(\mu_1) = 7{,}667$. Бачимо, що $f(\lambda_1) < f(\mu_1)$. Отже, новий інтервал невизначеності дорівнює $[-3; 1{,}944]$. Цей процес повторюється аналогічно. Результати обчислень подаються у таблиці 2.1. Після восьми ітерацій, що містять 9 обчислень функцій, інтервал невизначеності є рівним [–1,112; – 0,936], так що за точку мінімуму може бути взята, наприклад, середина цього інтервалу (–1,024). Відзначимо, що точкою точного мінімуму є (–1,0).

Таблиця 2.1

k	a_k	b_k	λ_k	μ_k	$f(\lambda_k)$	$f(\mu_k)$
1	2	3	4	5	6	7
1	–3,000	5,000	0,056	1,944	0,115	7,667
2	–3,000	1,944	–1,112	0,056	–0,987	0,115
3	–3,000	0,056	–1,832	–1,112	–0,308	–0,987
4	–1,832	0,056	–1,112	–0,664	–0,987	–0,887
5	–1,832	–0,664	–1,384	–1,112	–0,853	–0,987

Закінчення табл. 2.1

1	2	3	4	5	6	7
6	–1,384	–0,664	–1,112	–0,936	–0,987	–0,996
7	–1,384	–0,936	–1,208	–1,112	–0,957	–0,987
8	–1,208	–0,936	–1,112	–1,032	–0,987	–0,999
9	–1,112	–0,936				

2.1.3. Метод Фібоначчі

Метод Фібоначчі є ефективним методом одновимірної (лінійної) оптимізації квазівипуклих функцій. Подібно до методу золотого перерізу він вимагає двох обчислень функції на першій ітерації, а на кожній іншій тільки по одному.

Однак цей метод відрізняється від методу золотого перерізу тим, що скорочення інтервалу невизначеності змінюється від ітерації до ітерації.

Метод базується на послідовності Фібоначчі $\{F_v\}$, яка визначається таким чином:

$$F_{v+1} = F_{v-1} + F_v,\ v = 1, 2, \ldots,\ F_0 = F_1 = 1.$$

Отже, послідовність має вигляд 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... Припустимо, що на k-й ітерації інтервал невизначеності дорівнює $[a_k; b_k]$. Розглянемо дві точки λ_k і μ_k, які визначаються наступним чином:

$$\lambda_k = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k), \quad k = \overline{1, n-1};$$

$$\mu_k = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k), \quad k = \overline{1, n-1},$$

де n — задане загальне число обчислень функції. Коефіцієнт стиснення в методі Фібоначчі дорівнює $\dfrac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}$.

Алгоритм методу Фібоначчі.

Попередній етап. Вибираємо допустиму скінчену довжину інтервалу невизначеності $l > 0$ і константу $\varepsilon > 0$. Нехай задано початковий інтервал невизначеності $[a_1; b_1]$. Вибираємо число обчислень функції так, щоб $F_n > \dfrac{b_1 - a_1}{l}$. Покладемо $\lambda_1 = a_1 + \dfrac{F_{n-2}}{F_n}(b_1 - a_1)$, $\mu_1 = a_1 + \dfrac{F_{n-1}}{F_n}(b_1 - a_1)$. Обчислимо $f(\lambda_1)$ і $f(\mu_1)$, покладемо $k = 1$ і перейдемо до основного етапу.

Основний етап.

Крок 1. Якщо $f(\lambda_k) \ge f(\mu_k)$, то перейдемо до кроку 2, а якщо $f(\lambda_k) < f(\mu_k)$, то до кроку 3.

Крок 2. Покладемо $a_{k+1} = \lambda_k$, $b_{k+1} = b_k$, $\lambda_{k+1} = \mu_k$, $\mu_{k+1} = a_{k+1} + \dfrac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_{k+1} - a_{k+1})$. Якщо $k = n-2$, то перейдемо до кроку 5, у протилежному випадку обчислюємо $f(\mu_{k+1})$ і перейдемо до кроку 4.

Крок 3. Покладемо $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = \mu_k$, $\mu_{k+1} = \lambda_k$, $\lambda_{k+1} = a_{k+1} + \dfrac{F_{n-k-2}}{F_{n-k+1}}(b_{k+1} - a_{k+1})$. Якщо $k = n-2$, то перейдемо до кроку 5, у протилежному випадку обчислимо $f(\lambda_{k+1})$ і перейдемо до кроку 4.

Крок 4. Замінимо k на $k+1$ і перейдемо до кроку 1.

Крок 5. Покладемо $\lambda_n = \lambda_{n-1}$ і $\mu_n = \lambda_n + \varepsilon$. Якщо $f(\lambda_n) > f(\mu_n)$, то покладемо $a_n = \lambda_n$ і $b_n = b_{n-1}$. У протилежному випадку, тобто якщо $f(\lambda_n) \le f(\mu_n)$, то покладемо $a_n = a_{n-1}$, $b_n = \mu_n$. Кінець. Оптимальний розв'язок міститься в інтервалі $[a_n; b_n]$.

Приклад. Розглянемо ту ж задачу, що і в попередньому прикладі. Знайти мінімум функції $f(x) = x^2 + 2x$ за умови $-3 \le x \le 5$.

Розв'язання. Будемо вимагати, щоб довжина кінцевого інтервалу невизначеності не перевищувала 0,2. Отже, $F_n > \dfrac{8}{0,2} = 40$ і звідси $n = 9$. Вибираємо $\varepsilon = 0,01$. Два перших обчислення значень функції приводяться в точках $\lambda_1 = -3 + \dfrac{F_7}{F_9} \cdot 8 = 0,0545$; $\mu_1 = -3 + \dfrac{F_8}{F_9} \cdot 8 = 1,945$. Через те, що $f(\lambda_1) < f(\mu_1)$, новий інтервал невизначеності буде дорівнювати [-3,000; 1,945]. Далі обчислення здійснюються аналогічним чином. Результати ітерацій подаються в таблиці 2.2.

Таблиця 2.2

k	a_k	b_k	λ_k	μ_k	$f(\lambda_k)$	$f(\mu_k)$
1	–3,000	5,000	0,545	1,9454	0,112	7,676
2	–3,000	1,9454	–1,109	0,0545	–0,988	0,112
3	–3,000	0,0545	–1,836	–1,109	–0,300	–0,988
4	–1,836	0,0545	–1,109	–0,673	–0,988	–0,893
5	–1,836	–0,673	–1,399	–1,109	–0,840	–0,988
6	–1,399	–0,673	–1,109	–0,964	–0,988	–0,999
7	–1,109	–0,673	–0,964	–0,818	–0,999	–0,967
8	–1,109	–0,818	–0,964	–0,954	–0,999	–0,998
9	–1,109	–0,964	–0,964	–0,964	–0,999	–0,999

Оскільки $f(\lambda_k) < f(\mu_k)$, кінцевий інтервал невизначеності $[a_9; b_9]$ дорівнює [–1,109; –0,964], довжина $l = 0,145$. В якості наближеного значення точки мінімуму вибираємо середину цього відрізка.

2.2. Прямі методи багатовимірного пошуку

Будемо досліджувати задачі оптимізації, які зводяться до пошуку точок мінімуму функцій багатьох змінних $f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданих в n-вимірному евклідовому просторі E_n. У більшості випадків така задача буває складнішою задачі мінімізації функцій однієї змінної, бо із зростанням розмірності простору змінних, як правило, зростає об'єм обчислень і складність алгоритмів, а також стає важчим аналіз поведінки цільової функції.

2.2.1. Метод конфігурацій

Метод конфігурацій (метод Хука-Дживса) включає два основних етапи:

1) пошук навколо базисної точки;

2) пошук у напрямку, вибраному для оптимізації.

На першому етапі методу досліджується окіл вибраної точки $X_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ (наприклад, змінюючи по одній компоненті век-

тора X_0). Після того, як знайдено прийнятний напрямок, на другому етапі в цьому напрямку проводять обчислення функції, причому крок пошуку поступово збільшується. Це продовжується до тих пір, поки пошук у даному напрямку продовжує приводити до точок з меншим значенням заданої функції $f(X)$. Якщо ж у напрямку установленої конфігурації не вдається знайти точку з меншим значенням функції, то розмір кроку зменшують. Після кількох послідовних скорочень розмірності кроку здійснюють новий етап дослідження околу.

Таким чином, згідно з цим методом робляться спроби знайти напрямок яру цільової функції з тим, щоб рухатися по такому яру. Перевагою цього методу є те, що він дозволяє шляхом пошуку на наступному етапі досліджень відновити напрям руху в тих випадках, коли внаслідок викривлення яру раніше знайдена конфігурація втрачалася.

Алгоритм методу конфігурацій.

Попередній етап. Задаємо в якості $s_1, s_2, ..., s_n$ координатні напрямки. Вибираємо $\varepsilon > 0$ для зупинки алгоритму, початковий крок $\lambda > 0$ і прискорюючий множник $\alpha > 0$. Вибираємо початкову точку $X_1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1)$, покладаємо $Y_1 = X_1$, $k = j = 1$ і переходимо до основного етапу.

Основний етап.

Крок 1. Якщо $f(Y_j + \lambda s_j) < f(Y_j)$, то крок вважається успішним, покладаємо $Y_{j+1} = Y_j + \lambda s_j$ і переходимо до кроку 2.

Якщо $f(Y_j + \lambda s_j) \geq f(Y_j)$, то крок вважається неуспішним. У цьому випадку, якщо $f(Y_j - \lambda s_j) < f(Y_j)$, то покладаємо $Y_{j+1} = Y_j - \lambda s_j$ і переходимо до кроку 2. Якщо ж $f(Y_j - \lambda s_j) \geq f(Y_j)$, то покладаємо $Y_{j+1} = Y_j$ і переходимо до кроку 2.

Крок 2. Якщо $j < n$, то замінимо j на $j+1$ і повернемось до кроку 1. У протилежному випадку перейдемо до кроку 3, якщо $f(Y_{n+1}) < f(X_k)$, і до кроку 4, якщо $f(Y_{n+1}) < f(X_k)$.

Крок 3. Покладемо $X_{k+1} = Y_{n+1}$, $Y_1 = X_{k+1} + \alpha(X_{k+1} - X_k)$. Замінюємо k на $k+1$, покладаємо $j = 1$ і переходимо до кроку 1.

Крок 4. Якщо $\lambda \leq \varepsilon$, то зупиняємося, X_k — розв'язок. У протилежному випадку замінюємо λ на $\dfrac{\lambda}{2}$. Покладаємо $Y_j = X_k$, $X_{k+1} = X_k$. Замінюємо k на $k+1$, покладаємо $j = 1$ і повертаємося до кроку 1.

Як видно з опису алгоритму, кроки 1 і 2 здійснюють пробний пошук, крок 3 є прискорюючим кроком по напрямку $X_{k+1}-X_k$, а крок 4 скорочує довжину кроку λ.

Переваги методу конфігурацій:

1. Він не вимагає задання цільової функції в явному вигляді.
2. Метод дозволяє легко враховувати обмеження, що накладаються на змінні, а також на допустиму область пошуку.

Недолік методу конфігурацій полягає в тому, що він може застрявати, тобто зупинятися поблизу локального мінімуму, не в змозі забезпечити подальше поліпшення.

Приклад. Знайти мінімум функції

$$f(x_1,x_2)=(x_1-2)^4+(x_1-2x_2)^2.$$

Розв'язання. Для розв'язання цього прикладу скористаємося методом Хука-Дживса з дискретним кроком, а значення параметрів α, λ виберемо відповідно 1,0 і 0,2. Результати пошуку наведені в таблиці 2.3.

Таблиця 2.3

k	λ	X_k $f(X_k)$	j	Y_j $f(Y_j)$	s_j	$Y_j+\lambda s_j$ $f(Y_j+\lambda s_j)$	$Y_j-\lambda s_j$ $f(Y_j-\lambda s_j)$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,2	[2,00; 3,00] 16,0	1	[2,00; 3,00] 16,0	[1,0; 0,0]	[2,20; 3,00] 14,44(У)	—
			2	[2,20; 3,00] 14,44	[0,0; 1,0]	[2,20; 3,20] 17,64(Н)	[2,20; 2,80] 11,56(У)
2	0,2	[2,20; 2,80] 11,56	1	[2,40; 2,60] 7,87	[1,0; 0,0]	[2,60; 2,60] 6,89(У)	—
			2	[2,60; 2,60] 6,89	[0,0; 1,0]	[2,60; 2,80] 9,13(Н)	[2,60; 2,40] 4,47(У)
3	0,2	[2,60; 2,40]	1	[3,00; 2,00] 2,00	[1,0; 0,0]	[3,20; 2,00] 2,71(Н)	[2,80; 2,00] 1,85(У)
			2	[2,80; 2,00] 1,85	[0,0; 1,0]	[2,80; 2,20] 2,97(Н)	[2,80; 1,80] 1,05(У)
4	0,2	[2,80; 1,80] 1,05	1	[3,00; 1,20] 1,36	[1,0; 0,0]	[3,20; 1,20] 2,71(Н)	[2,80; 1,20] 0,57(У)
			2	[2,80; 1,20] 0,57	[0,0; 1,0]	[2,80; 1,40] 0,41(У)	—

Закінчення табл. 2.3

1	2	3	4	5	6	7	8
5	0,2	[2,80; 1,40] 0,41	1	[2,80; 1,40] 1,05	[1,0; 0,0]	[3,00; 1,00] 2,00(Н)	[2,60; 1,00] 0,49(У)
			2	[2,60; 1,00]	[0,0; 1,0]	[2,60; 1,20] 0,17(У)	—
6	0,2	[2,60; 1,20] 0,17	1	[2,40; 1,00] 0,19	[1,0; 0,0]	[2,60; 1,00] 0,49(Н)	[2,20; 1,00] 0,04(У)
			2	[2,20; 1,00] 0,04	[0,0; 1,0]	[2,20; 1,20] 0,04(Н)	[2,20; 0,80] 0,36(Н)
7	0,2	[2,20; 1,00] 0,04	1	[1,80; 0,80] 0,04	[1,0; 0,0]	[2,00; 0,80] 0,16(Н)	[1,60; 0,80] 0,03(У)
			2	[1,60; 0,80] 0,03	[0,0; 1,0]	[1,60; 1,00] 0,19(Н)	[1,60; 0,60] 0,19(Н)
8	0,2	[1,60; 0,80]	1	[1,00; 0,60] 0,67	[1,0; 0,0]	[1,20; 0,60] 0,41(У)	—
			2	[1,20; 0,60] 0,41	[0,0; 1,0]	[1,20; 0,80] 0,57(Н)	[1,20; 0,40] 0,57(Н)
9	0,1	[1,60; 0,80]	1	[1,60; 0,80] 0,03	[1,0; 0,0]	[1,70; 0,80] 0,02(У)	—
			2	[1,70; 0,80] 0,02	[0,0; 1,0]	[1,70; 0,90] 0,02(Н)	[1,70; 0,70] 0,10(Н)
10	0,1	[1,70; 0,80] 0,02	1	[1,80; 0,80] 0,04	[1,0; 0,0]	[1,90; 0,80] 0,09(Н)	[1,70; 0,80] 0,02(У)
			2	[1,70; 0,80] 0,02	[0,0; 1,0]	[1,70; 0,90] 0,02(Н)	[1,70; 0,70] 0,10(Н)

Тут символом (У) позначений вдалий (успішний) крок, а символом (Н) — невдалий. На всіх ітераціях кожного разу, коли $f(Y_j)\geq f(X_k)$, в якості вектора Y_1 береться X_k. У протилежному випадку $Y_1=2X_{k+1}-X_k$. У кінці десятої ітерації отримана точка [1,70; 0,80], в якій значення функції дорівнює 0,02. Якщо вимагається більша точність, то слід зменшити значення λ до 0,05. Хід знаходження мінімуму заданої функції зображено на рис. 2.4.

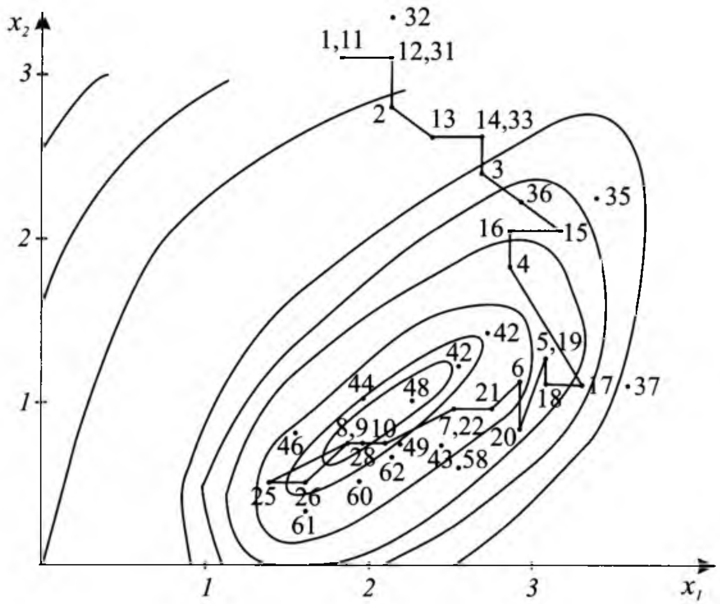


Рис. 2.4

2.2.2. Метод Розенброка

Метод Розенброка полягає в тому, що в кожному циклі проводиться пошук уздовж взаємно-ортогональних напрямків (аналогічно етапу дослідження в алгоритмі методу конфігурацій). Якщо, наприклад, цільова функція має вузький викривлений гребінь, то пошук по взаємно-ортогональних напрямках має ту властивість, що результуючий напрямок прагне розміститися вздовж осі яру.

Даний метод реалізується таким чином. Нехай $s_1(k), s_2(k),...,s_n(k)$ — одиничні вектори в просторі $R^{(n)}$, де індекс $k=0,1,...$ означає етапи пошуку. Ортонормовані вектори $s_1(k), s_2(k),...,s_n(k)$ будуються на основі інформації, отриманої на $(k-1)$-му етапі пошуку.

Розглянемо k-й етап пошуку, і нехай $X_0(k)=X_n(k-1)$ являє собою точку в $R^{(n)}$, із якої починається пошук, а $\lambda_1, \lambda_2,...,\lambda_n$ — довжини кроків, зв'язаних з відповідними напрямками $s_1, s_2,...,s_n$.

Крок 1. Пошук починаємо з точки $X_0(k)$ шляхом введення кроку, рівного $\lambda_1(k)\cdot s_1(k)$, в першому координатному напрямку.

Якщо $f\left(X_0(k)+\lambda_1(k)s_1(k)\right)\le f\left(X_0(k)\right)$, то крок вважається успішним, при цьому покладаємо $X_1(k)=X_0(k)+\lambda_1(k)s_1(k)$, а величину кроку λ_1 домножуємо на множник α $(\alpha>0)$. Якщо ж $f\left(X_0(k)+\lambda_1(k)s_1(k)\right)>f\left(X_0(k)\right)$, то крок вважається неуспішним, $X_0(k)$ не замінюється на наступну точку, а домножується на множник β $(\beta<0)$. Далі задається збурення (пробний крок) по напрямку $s_2(k)$. Після того, як пройдено всі n напрямків $s_1(k), s_2(k),...,s_n(k)$, переходимо до кроку 2.

Крок 2. Якщо $f\left(X_n(k)\right)<f\left(X_0(k)\right)$, тобто хоча б один спуск по напрямку виявиться успішним, то покладаємо $X_0(k+1)=X_n(k)$ і повторюємо крок 1. При цьому реалізуємо пробний крок із довжиною $\alpha\lambda_1(k)$ або $\beta\lambda_1(k)$ залежно від результату попереднього збурення по цьому напрямку (Розенброк запропонував вибрати $\alpha=3$ і $\beta=-0{,}5$).

Збурення по вибраному напрямку пошуку задаються доти, поки по кожному з напрямків за успіхом не настане невдача. На цьому k-й етап пошуку закінчується. Остання отримана точка стає початковою точкою наступного етапу: $X_0(k+1)=X_n(k)$. Нормований напрямок $s_1(k+1)$ вибирається паралельним $A(k)=X_0(k+1)-X_0(k)$, а інші напрямки вибираються ортонормованими один одному і до $s_1(k)$ за допомогою одного з відомих методів.

Метод Розенброка не забезпечує автоматичне закінчення процесу пошуку після того, як знайдено екстремум $f(X)$. Пошук проводиться або на визначене число етапів, або закінчується після того, як величина $\|A(k)\|$ стане меншою певного значення на декількох послідовних етапах.

Приклад. Знайти мінімум функції $f(x_1,x_2)=(x_1-2)^4+(x_1-2x_2)^2$.

Розв'язання. Будемо шукати мінімум заданої функції методом Розенброка з дискретним кроком, поклавши $\lambda_1=\lambda_2=0{,}1$; $\alpha=2{,}0$; $\beta=-0{,}5$.

Результати обчислень для початкової точки $X_1 = [0{,}0;\ 3{,}0]^T$ наведені в таблиці 2.4, де символом (У) відмічено успішні, а символом (Н) — неуспішні кроки за напрямком. Відзначимо, що в межах кожної ітерації напрямки s_1 і s_2 фіксовані. Після сьомої реалізації кроку 1 із точки $X_1 = [0{,}0;\ 3{,}0]^T$ отримана точка $X_2 = [3{,}10;\ 1{,}45]^T$ (рис. 2.5). У цій точці знадобилася зміна напрямку. Зокрема, $(X_2 - X_1) = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$, де $\lambda_1 = 3{,}10$; $\lambda_2 = -1{,}55$. Можна легко перевірити, що новими напрямками пошуку будуть [0,89; – 0,45] та [– 0,45; – 0,89]. Ці напрямки використані на другій ітерації, на якій процедура була зупинена.

Таблиця 2.4

k	X_k $f(X_k)$	j	Y_j $f(Y_j)$	λ_j	s_j	$Y_j + \lambda_j s_j$ $f(Y_j + \lambda_j s_j)$
1	2	3	4	5	6	7
1	[0,00; 3,00] 52,00	1	[0,00; 3,00] 52,00	0,10	[1,00; 0,00]	[0,10; 3,00] 47,84(У)
		2	[0,10; 3,00] 47,84	0,10	[0,00; 1,00]	[0,10; 3,10] 50,24(Н)
		1	[0,10; 3,00] 47,84	0,20	[1,00; 0,00]	[0,30; 3,00] 40,84(У)
		2	[0,30; 3,00] 40,84	–0,05	[0,00; 1,00]	[0,30; 2,95] 39,70(У)
		1	[0,30; 2,95] 39,71	0,40	[1,00; 0,00]	[0,70; 2,95] 29,90(У)
		2	[0,70; 2,95] 29,90	–0,10	[0,00; 1,00]	[0,70; 2,85] 27,86(У)
		1	[0,70; 2,85] 27,86	0,80	[1,00; 0,00]	[1,50; 2,85] 17,70(У)
		2	[1,50; 2,85] 17,70	–0,20	[0,00; 1,00]	[1,50; 2,65] 14,59(У)

Закінчення табл. 2.4

1	2	3	4	5	6	7
		1	[1,50; 2,65] 14,50	1,60	[1,00; 0,00]	[3,10; 2,65] 6,30(У)
		2	[3,10; 2,65] 6,30	–0,40	[0,00; 1,00]	[3,10; 2,25] 3,42(У)
		1	[3,10; 2,25] 3,42	3,20	[1,00; 0,00]	[6,30; 2,25] 342,12(Н)
		2	[3,10; 2,25] 3,42	–0,80	[0,00; 1,00]	[3,10; 1,45] 1,50(У)
		1	[3,10; 1,45] 1,50	–1,60	[1,00; 0,00]	[1,50; 1,45] 2,02(Н)
		2	[3,10; 1,45] 1,50	1,60	[0,00; 1,00]	[3,10; –0,15] 13,02(Н)
2	[3,10; 1,45] 1,50	1	[3,10; 1,45] 1,50	0,10	[0,89; –0,45]	[3,19; 1,41] 2,14(Н)
		2	[3,10; 1,45] 1,50	0,10	[– 0,45; – 0,89]	[3,06; 1,36] 1,38(У)
		1	[3,06; 1,36] 1,38	0,05	[0,89; – 0,45]	[3,02; 1,38] 1,15(У)
		2	[3,02; 1,38] 1,15	0,20	[–0,45; –0,89]	[2,93; 1,20] 1,03(У)
		1	[2,93; 1,20] 1,03	–0,10	[0,89; –0,45]	[2,84; 1,25] 0,61(У)
		2	[2,84; 1,25] 0,61	0,40	[–0,45; –0,89]	[2,66; 0,89] 0,96(Н)
		1	[2,84; 1,25] 0,61	–0,20	[0,89; –0,45]	[2,66; 1,34] 0,19(У)
		2	[2,66; 1,34] 0,19	–0,20	[–0,45; –0,89]	[2,75; 1,52] 0,40(Н)

Хід знаходження мінімума заданої функції зображено на рис. 2.5.

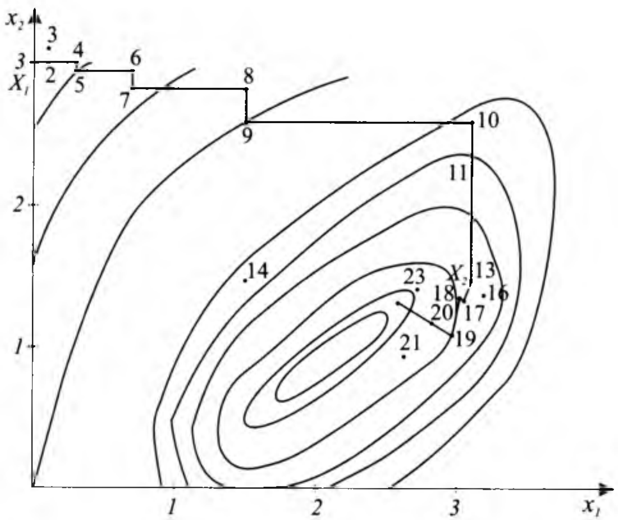


Рис. 2.5

2.3. Методи пошуку екстремуму першого та другого порядків

Як правило, при розв'язуванні задач нелінійного програмування без обмежень градієнтні методи (методи пошуку екстремуму першого порядку) і методи, що використовують другу похідну, збігаються швидше, ніж прямі методи пошуку. Проте, застосовуючи на практиці методи, які використовують похідні, стикаємося з такими труднощами.

По-перше, в задачах із великою кількістю змінних важко або неможливо отримати похідні у вигляді аналітичних функцій, необхідних для градієнтних алгоритмів або алгоритмів, які використовують похідні вищих порядків.

По-друге, градієнтні методи оптимізації вимагають досить багато часу порівняно з прямими методами на підготовку задачі до розв'язання.

Градієнтні методи являють собою одну з найбільш численних груп методів пошуку екстремуму, і всі вони використовують значення градієнта функції $f(X)=f(x_1,x_2,...,x_n)$.

2.3.1. Метод найскорішого спуску

Позначимо вектор-градієнт $f(X)$ у точці X_k через $\nabla f(X_k)$:

$$\nabla f(X_k)=\left[\frac{\partial f(X_k)}{\partial x_1},\frac{\partial f(X_k)}{\partial x_2},...,\frac{\partial f(X_k)}{\partial x_n}\right].$$

Рух точки в градієнтному методі описується формулою $X_{k+1}=X_k-\lambda_k\nabla f(X_k)$, де λ_k — величина кроку на k-й ітерації ($\lambda_k>0$).

У різних варіантах градієнтних методів використовуються різні способи вибору λ. Цей вибір може залежати і від степені близькості X_k до X^* — точки мінімуму. В тому випадку, коли величина кроку λ визначається з умови $\lambda^*=\min\limits_{\lambda>0} f(X_k-\lambda s_k)$, відповідний метод називається методом *найскорішого спуску*.

Згідно з цим методом в якості X_{k+1} вибирається така точка, розміщена в напрямку s_k, в якій функція $f(X)$ набуває мінімального значення. Далі визначається нове значення градієнта $\nabla f(X_{k+1})$ в точці X_{k+1} і процедура повторюється знову.

Відзначимо, що метод найскорішого спуску в загальному випадку не володіє якими-небудь оптимальними властивостями, наприклад, віднайти шукану точку X^* за мінімальне число кроків або при мінімальному обсязі підрахунків.

Алгоритм методу найскорішого спуску.

Початковий етап. Нехай $\varepsilon>0$ — константа зупинки. Виберемо початкову точку X_1, покладемо $k=1$ і перейдемо до основного етапу.

Основний етап. Якщо $\|\nabla f(X_k)\|<\varepsilon$, то потрібно зупинитися. У протилежному випадку покладемо $s_k=-\nabla f(X_k)$ і знайдемо λ_k — оптимальний розв'язок задачі оптимізації $f(X_k+\lambda s_k)$ при $\lambda\ge 0$. Покладемо $X_{k+1}=X_k-\lambda_k s_k$, замінимо k на $k+1$ і повторимо основний етап.

Приклад. Знайти мінімум функції $f(x_1,x_2)=(x_1-2)^4+(x_1-2x_2)^2$.

Розв'язання. Будемо мінімізовувати задану функцію методом найскорішого спуску при початковій точці $X_0=[0{,}00;3{,}00]^T$.

Результати обчислень помістимо в таблицю 2.5.

Таблиця 2.5

k	X_k	$f(X_k)$	$\nabla f(X_k)$	$\lVert\nabla f(X_k)\rVert$	$s_k=-\nabla f$	λ_k	X_{k+1}
1	[0,00; 3,00]	52,00	[–44,0; 24,0]	50,12	[44,0; –24,0]	0,062	[2,70; 1,51]
2	[2,70; 1,51]	0,34	[0,73; 1,28]	1,47	[–0,73; –1,28]	0,24	[2,52; 1,20]
3	[2,52; 1,20]	0,09	[0,80; –0,48]	0,93	[–0,80; 0,48]	0,11	[2,43; 1,25]
4	[2,43; 1,25]	0,04	[0,18; 0,28]	0,33	[–0,18; –0,28]	0,31	[2,37; 1,16]
5	[2,37; 1,16]	0,02	[0,30; –0,20]	0,36	[–0,30; 0,20]	0,12	[2,33; 1,18]
6	[2,33; 1,18]	0,01	[0,08; 0,12]	0,14	[–0,08; –0,12]	0,36	[2,30; 1,14]
7	[2,30; 1,14]	0,009	[0,15; –0,08]	0,17	[–0,15; 0,08]	0,13	[2,28; 1,15]
8	[2,28; 1,15]	0,007	[0,05; 0,08]	0,09			

Після семи ітерацій отримана точка $X_8=[2,28;1,15]^T$. Через те, що норма $\lVert\nabla f(X_8)\rVert=0,09$ досить мала ($\varepsilon=0,10$), робота алгоритму зупинена. Відзначимо, що точкою мінімуму для даної задачі є $X^*=[2,00;1,00]^T$. На рис. 2.6 показаний процес мінімізації за допомоги цього методу.

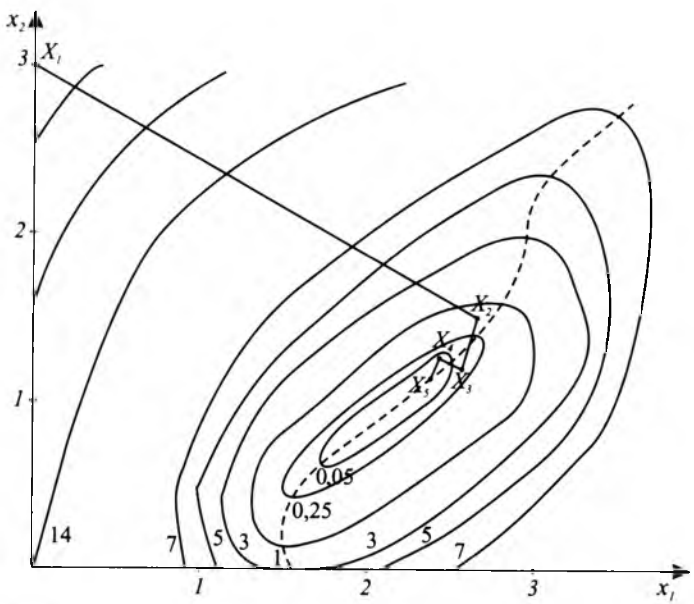


Рис. 2.6

2.3.2. Метод спряженого градієнта

Припустимо, що необхідно мінімізувати $f(X)$ і процес мінімізації починається в точці X_0 з початковим напрямком s_0. Тоді вектор X_1 визначається співвідношенням $X_1=X_0-\lambda_0 s_0$, де довжина кроку λ_0 знаходиться з умови мінімуму $f(X)$ по λ: $\dfrac{\partial f(X_0-\lambda s_0)}{\partial\lambda}=0$.

Після обчислення λ_0 і X_1 для продовження процесу мінімізації $f(X)$ необхідно вибрати новий напрямок. Цей напрямок s_1 називається спряженим до старого напрямку s_0, якщо виконується умова: $s_1^T\nabla f(X_0)s_0=0$.

У загальному випадку система лінійно незалежних напрямків пошуку $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ називається спряженою у відношенні до деякої додатно визначеної матриці Q, якщо $s_i^T Q s_j=0$, $i\neq j$; $i,j=\overline{1,n-1}$.

У методі спряженого градієнта (Флетчера-Рівса) будується послідовність напрямків пошуку, що є лінійними комбінаціями $\nabla f(X_k)$, поточного напрямку s_k і попередніх напрямків $s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}$, причому таких, щоб зробити напрямки пошуку спряженими. При цьому для обчислення нового напрямку пошуку в точці X_k використовується тільки поточний градієнт і передостанній градієнт.

Розглянемо ідею методу. Нехай початковим напрямком пошуку буде $s_0=-\nabla f(X_0)$. Покладемо $X_1-X_0=\lambda_0^* s_0$ і побудуємо $s_1=-\nabla f(X_1)+\omega_1 s_0$, де ω_1 — ваговий коефіцієнт, який вибирається так, щоб зробити s_1 і s_0 спряженими у відношенні до додатно визначеної матриці H: $s_0^T H s_1=0$. Щоб отримати s_0 з останньої рівності, скористаємося очевидним співвідношенням

$$\nabla f(X_{k+1})-\nabla f(X_k)=\nabla^2 f(X_k)(X_{k+1}-X_k)=H\lambda_k s_k,$$

де $\lambda_k s_k=\Delta X_k$, а також співвідношенням

$$s_0^T=\frac{(X_1-X_0)^T}{\lambda_0^*}=\frac{[\nabla f(X_1)-\nabla f(X_0)]^T H^{-1}}{\lambda_0^*}.$$

Отже, $[\nabla f(X_1)-\nabla f(X_0)]^T H\left[-\nabla f(X_1)+\omega_1 s_0\right]=0$.

Внаслідок розглянутих вище властивостей всі перехресні члени зникають так, що

$$\omega = \frac{\nabla^T f(X_1)\nabla f(X_1)}{\nabla^T f(X_0)\nabla f(X_0)}.$$

Напрямок пошуку s_2 представляється у вигляді лінійної комбінації $\nabla f(X_2)$, s_1 і s_0, причому так, щоб він був спряженим s_1. Повторюючи подані вище викладки для випадків $s = 2, 3, \ldots$, отримаємо

$$\omega_k = \frac{\nabla^T f(X_k)\nabla f(X_k)}{\nabla^T f(X_{k-1})\nabla f(X_{k-1})} = \frac{\|\nabla f(X_k)\|^2}{\|\nabla f(X_{k-1})\|^2}.$$

Алгоритм методу спряженого градієнта.

Початковий етап. Вибираємо $\varepsilon > 0$ для зупинки алгоритму і початкову точку X_1. Покладемо $Y_1 = X_1$, $s_1 = -\nabla f(X_1)$, $k = j = 1$ і перейдемо до основного етапу.

Основний етап.

Крок 1. Якщо $\|\nabla f(Y_j)\| < \varepsilon$, то зупиняємося. В протилежному випадку беремо в якості λ_j оптимальний розв'язок задачі мінімізації $f(Y_j + \lambda s_j)$ при $\lambda \geq 0$ і покладаємо $Y_{j+1} = Y_j + \lambda_j s_j$. Якщо $j < n$, то переходимо до кроку 2, у протилежному випадку – до кроку 3.

Крок 2. Покладаємо $s_{j+1} = -\nabla f(Y_{j+1}) + \omega_j s_j$, де

$$\omega_j = \frac{\|\nabla f(Y_{j+1})\|^2}{\|\nabla f(Y_j)\|^2}.$$

Замінюємо j на $j+1$ і переходимо до кроку 1.

Крок 3. Покладемо $Y_1 = X_{k+1} = Y_{n+1}$, $s_1 = -\nabla f(Y_1)$, $j = 1$, замінюємо k на $k+1$ і переходимо до кроку 1.

Приклад. Розглянемо ту ж задачу, що і в попередньому випадку. Знайти мінімум функції $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$.

Розв'язання. Результати обчислень за методом спряжених градієнтів подані нижче у таблиці 2.6. На кожній ітерації $s_1 = -\nabla f(Y_1)$, а $s_2 = -\nabla f(Y_2) + \omega_1 s_1$, де

$$\omega_1 = \frac{\|\nabla f(Y_2)\|^2}{\|\nabla f(Y_1)\|^2}.$$

Таблиця 2.6

k	X_k	$f(X_k)$	j	Y_j	$f(Y_j)$	$\nabla f(Y_j)$
1	[0,00; 3,00]	52,00	1	[0,00; 3,00]	52.00	[–44,0; 24,0]
			2	[2,70; 1,51]	0,34	[0,73; 1,28]
2	[2,54; 1,21]	0,10	1	[2,54; 1,21]	0,10	[0,87; –0,48]
			2	[2,44; 1,26]	0,04	[0,18; 0,32]
3	[2,25; 1,10]	0,08	1	[2,25; 1,10]	0,008	[0,16; –0,20]
			2	[2,23; 1,12]	0,003	[0,03; 0,04]
4	[2,19; 1,09]	0,0017	1	[2,19; 1,09]	0,0017	[0,05; –0,04]
			2	[2,185; 1,094]	0,0012	[0,02; 0,01]

Закінчення табл. 2.6

k	$\|\nabla f(Y_j)\|$	ω_j	s_j	λ_j	Y_{j+1}
1	50,12	—	[44,0; –24,0]	0,062	[2,7; 1,51]
	1,47	0,0009	[–0,69; 1,3]	0,23	[2,54; 1,21]
2	0,99	—	[–0,87; 0,48]	0,11	[2,44; 1,26]
	0,37	0,14	[–0,30; –0,25]	0,63	[2,25; 1,10]
3	0,32	—	[–0,16; 0,20]	0,10	[2,23; 1,12]
	0,05	0,04	[–0,036; –0,03]	1,02	[2,19; 1,09]
4	0,06	—	[–0,05; 0,04]	0,11	[2,185; 1,094]
	0,022				

Крім того, Y_{j+1} отриманий оптимізацією вздовж s_j з початковою точкою Y_j. Після четвертої ітерації отримана точка $Y_2 = [2{,}185; 1{,}094]^T$, яка достатньо близька до оптимальної точки $[2{,}00; 1{,}00]^T$. Оскільки норма градієнта в цій точці рівна 0,02, тобто досить мала, то процедура була зупинена. На рис. 2.7 показано процес розв'язання задачі методом спряжених градієнтів.

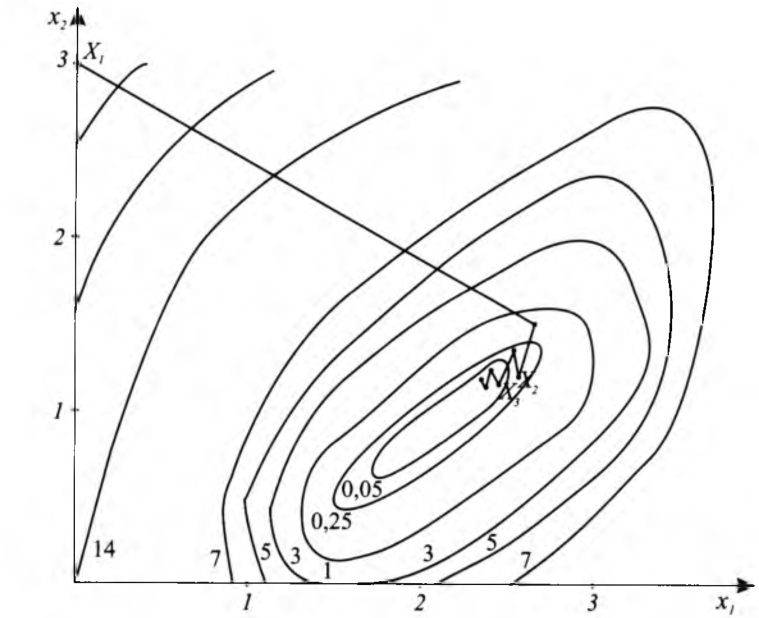


Рис. 2.7

2.3.3. Метод других похідних (метод Ньютона)

Градієнтні методи пошуку, включаючи метод найскорішого спуску, використовують лінійну апроксимацію цільової функції

$$X_{k+1} = X_k - \lambda_k \nabla f(X_k).$$

Метод других похідних виник із квадратичної апроксимації $f(X)$.

Розглянемо схему методу Ньютона.

Напрямок пошуку s в методі Ньютона вибирається так. Знайдемо квадратичну апроксимацію функції $f(X)$ в околі точки X_k шляхом розкладу її в ряд Тейлора:

$$f(X) = f(X_k) + \nabla^T f(X_k)(X - X_k) + \\ + \frac{1}{2}(X - X_k)^T \nabla^2 f(X_k)(X - X_k), \tag{1}$$

де $\nabla^2 f(X_k)$ — матриця Гессе функції $f(X)$, яка являє собою матрицю других частинних похідних $f(X)$ в точці X_k:

$$\nabla^2 f(X_k) = H(X_k) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(X_k)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(X_k)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X_k)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(X_k)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X_k)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X_k)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(X_k)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X_k)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X_k)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Замінимо в розкладі (1) X на X_{k+1}, а $X - X_k$ на ΔX_k і отримаємо квадратичну апроксимацію $f(X_k)$ через ΔX_k:

$$f(X_{k+1}) = f(X_k) + \nabla^T f(X_k)\Delta X_k + \frac{1}{2}\Delta X_k^T \nabla^2 f(X_k)\Delta X_k.$$

Знайдемо напрямок $\Delta X_k = X_{k+1} - X_k$, в якому $f(X_{k+1})$ буде мінімальна. Для цього продиференціюємо $f(X_k)$ по кожній із компонент ΔX_k і прирівняємо до 0 отримані вирази. В результаті отримаємо таке співвідношення: $\Delta X_k = -\left[\nabla^2 f(X_k)\right]^{-1} \nabla f(X_k)$, де $\left[\nabla^2 f(X_k)\right]^{-1}$ — матриця, обернена до матриці Гессе в точці X_k. Тоді перехід із X_k в X_{k+1} за методом Ньютона буде описуватися співвідношенням $X_{k+1} = X_k - \left[\nabla^2 f(X_k)\right]^{-1} \nabla f(X_k)$.

Відзначимо, що тут як напрямок, так і величина кроку точки визначені. Якщо $f(X)$ — квадратична функція, то $\nabla^2 f(X) = H$, і для досягнення мінімуму $f(X)$ досить тільки одного кроку. Але в загальному випадку мінімуму $f(X)$ не можна досягти за один крок, і тому рівняння пошуку $X_{k+1} = X_k - \left[\nabla^2 f(X_k)\right]^{-1} \nabla f(X_k)$ зазвичай приводять до стандартного вигляду $X_{k+1} = X_k - \lambda_k s_k$ (де s_k — одиничний вектор) шляхом введення довжини кроку як параметра:

$$X_{k+1} = X_k - \lambda_k \frac{\left[\nabla^2 f(X_k)\right]^{-1} \nabla f(X_k)}{\left\| \left[\nabla^2 f(X_k)\right]^{-1} \nabla f(X_k) \right\|}.$$

Це рівняння пошуку застосовується ітеративно, поки не буде задоволений критерій закінчення процесу.

Критерій, що гарантує збіжність методу Ньютона, при припущенні, що $f(X)$ — двічі неперервно диференційована, полягає в тому, що матриця, обернена до матриці Гессе, повинна бути додатно визначеною.

Приклад. Знайти мінімум функції

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 .$$

Розв'язання. Відповідні результати обчислень наведені у таблиці 2.7. На кожній ітерації точка X_{k+1} визначається за формулою

$$X_{k+1} = X_k - H(X_k)^{-1} \nabla f(X_k) .$$

Після шести ітерацій отримана точка $X_7 = [1,83; 0,91]^T$. У цій точці $\|\nabla f(X_7)\| = 0,04$, і процедура зупинена.

Таблиця 2.7

k	X_k	$f(X_k)$	$\nabla f(X_k)$	$H(X_k)$
1	[0,00; 3,00]	52,00	[–44,00; 24,00]	$\begin{bmatrix} 50,0 & -4,0 \\ -4,0 & 8,0 \end{bmatrix}$
2	[0,67; 0,33]	3,13	[–9,40; –0,04]	$\begin{bmatrix} 23,2 & -4,0 \\ -4,0 & 8,0 \end{bmatrix}$
3	[1,11; 0,56]	0,63	[–2,84; –0,04]	$\begin{bmatrix} 11,5 & -4,0 \\ -4,0 & 8,0 \end{bmatrix}$
4	[1,41; 0,70]	0,12	[–0,80; 0,14]	$\begin{bmatrix} 6,2 & -4,0 \\ -4,0 & 8,0 \end{bmatrix}$
5	[1,61; 0,80]	0,02	[–0,22; –0,04]	$\begin{bmatrix} 3,83 & -4,0 \\ -4,0 & 8,0 \end{bmatrix}$
6	[1,74; 0,87]	0,005	[–0,07; 0,00]	$\begin{bmatrix} 2,81 & -4,0 \\ -4,0 & 8,0 \end{bmatrix}$
7	[1,83; 0,91]	0,0009	[0,0003; –0,04]	

Закінчення табл. 2.7

k	$H(X_k)^{-1}$	$H(X_k)^{-1} \cdot \nabla f(X_k)$	X_{k+1}
1	$\frac{1}{384}\begin{bmatrix} 8,0 & 4,0 \\ 4,0 & 50,0 \end{bmatrix}$	[0,67; –2,67]	[0,67; 0,33]
2	$\frac{1}{170}\begin{bmatrix} 8,0 & 4,0 \\ 4,0 & 23,2 \end{bmatrix}$	[0,44; 0,23]	[1,11; 0,56]
3	$\frac{1}{76}\begin{bmatrix} 8,0 & 4,0 \\ 4,0 & 11,5 \end{bmatrix}$	[0,30; 0,14]	[1,41; 0,75]
4	$\frac{1}{33,4}\begin{bmatrix} 8,0 & 4,0 \\ 4,0 & 6,2 \end{bmatrix}$	[0,20; 0,10]	[1,61; 0,80]
5	$\frac{1}{14,6}\begin{bmatrix} 8,0 & 4,0 \\ 4,0 & 3,83 \end{bmatrix}$	[0,13; 0,07]	[1,74; 0,87]
6	$\frac{1}{6,48}\begin{bmatrix} 8,0 & 4,0 \\ 4,0 & 2,8 \end{bmatrix}$	[0,09; 0,04]	[1,83; 0,91]

Траєкторія руху, побудована за методом Ньютона, зображена на рис. 2.8.

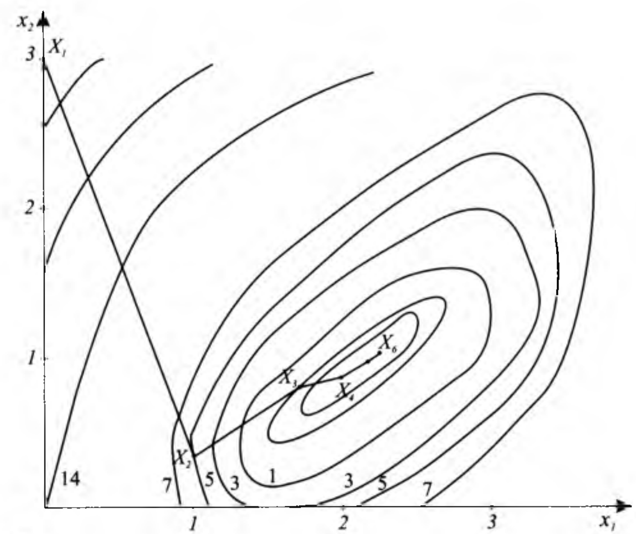


Рис. 2.8

На практиці часто порівняння алгоритмів проводять з допомогою обчислювальних експериментів при розв'язанні так званих спеціальних тестових задач. Наведемо декілька загальноприйнятих тестів, на яких досліджено більшість відомих методів мінімізації:

1. *Тест Розенброка*:

$$f(X) = 100(x_2 - x_1)^2 + (1 - x_1)^2 \to \min,$$

початкове наближення $X^0 = (-1,2; 1)$, точка мінімуму $X^* = (1; 1)$, $f(X^*) = 0$.

2. *Тест Пауелла*:

$$f(X) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + 10(x_1 - x_4)^4 \to \min,$$

початкове наближення $X^0 = (-3; -1; 0; 1)$, точка мінімуму

$$X^* = (0; 0; 0; 0), \quad f(X^*) = 0.$$

3. *Тест Вуда*:

$$f(X) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 90(x_4 - x_3^2)^2 + (1 - x_3)^2 +$$
$$+10,1(x_2 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2 + 19,8(x_2 - 1)(x_4 - 1) \to \min,$$

початкове наближення $X^0 = (-3; -1; -3; -1)$, точка мінімуму

$$X^* = (1; 1; 1; 1), \quad f(X^*) = 0.$$

Розділ 3

ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

7 - 8-1045

Велика кількість планово-виробничих і економічних задач пов'язана з розподілом яких-небудь, як правило, обмежених ресурсів (сировини, робочої сили, енергії, палива і т. ін.). Часто розподіл ресурсів можна здійснити не єдиним чином. Наприклад, дану продукцію можна отримати різними способами, по-різному вибираючи технологію, сировину, застосовуючи обладнання, організацію процесу. При цьому кожний спосіб розподілу ресурсів, що оцінюється з позиції деякого критерію (прибуток, обсяг випуску продукції і т. ін.), характеризується певним значенням показника цього критерію. Природним тому є намір знайти такий варіант розподілу (програму, план), який би гарантував найбільший економічний ефект. Такий план називають оптимальним.

Реальні економічні процеси досить складні. При їх математичному описанні доводиться враховувати багато різних факторів. Тому математична модель містить велике число умов обмежень із багатьма невідомими. Якщо невідомі входять в модель тільки в першій степені, то задача належить до розділу лінійного програмування, в протилежному випадку — до розділу нелінійного програмування. Оптимізаційні задачі, в яких потрібно враховувати послідовність дій або фактор часу, розглядаються в розділі динамічного програмування. Якщо в задачі фігурують параметри, що є випадковими величинами, то вона відноситься до задач стохастичної оптимізації.

Предметом дослідження математичного програмування є математичні моделі, пов'язані у більшості випадків із визначеними економічними процесами, що описують економіку підприємства, промислового об'єднання, народного господарства або окремих економічних процесів у них.

Математичне програмування — це розділ математики, який розробляє теорію і чисельні методи розв'язання багатовимірних задач з обмеженнями, тобто задач на екстремум функції багатьох змінних з обмеженнями на область зміни цих змінних. На відміну від класичної теорії екстремальних задач, яка є частиною математичного програмування, основна увага приділяється тим задачам, в яких активно беруть участь обмеження на область зміни змінних.

3.1. Приклади задач лінійного програмування

1. *Задача оптимального виробничого планування*

Однією із найбільш розповсюджених задач даної групи є задача про максимальний випуск продукції із наявних обмежених запасів сировини при різних технологіях виробництва. Сюди ж можна віднести задачу досягнення максимальної рентабельності підприємства при виробництві із наявних запасів ресурсів різних видів продукції.

Приклад 1. Для виготовлення трьох видів виробів A, B і C використовується токарне, фрезерне, зварювальне і шліфувальне обладнання. Затрати часу на обробку одного виробу для кожного з типів обладнання вказані в таблиці 3.1. У ній же вказаний загальний фонд робочого часу кожного із типів обладнання, що використовується, а також прибуток від реалізації одного виробу кожного виду.

Таблиця 3.1

Тип обладнання	Затрати часу (верстато-год.) на обробку одного виробу виду			Загальний фонд робочого часу обладнання (год.)
	A	B	C	
Фрезерне	2	4	5	120
Токарне	1	8	6	280
Зварювальне	7	4	5	240
Шліфувальне	4	6	7	360
Прибуток (грн.)	10	14	12	

Вимагається визначити, скільки виробів і якого виду потрібно виготовити підприємству, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним. Скласти математичну модель задачі.

Розв'язання. Припустимо, що буде виготовлено x_1 одиниць виробів виду A, x_2 одиниці – виду B і x_3 одиниці – виду C. Тоді для виробництва такої кількості виробів потрібно затратити $2x_1 + 4x_2 + 5x_3$ верстато-годин фрезерного обладнання.

Оскільки загальний фонд робочого часу верстатів даного типу не може перевищувати 120, то повинна виконуватися нерівність

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120 .$$

Аналогічні міркування стосовно можливого використання токарного, зварювального і шліфувального обладнання призведуть до таких нерівностей:

$$x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280,$$
$$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240,$$
$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360.$$

При цьому через те, що кількість виробів, які виготовляються, не може бути від'ємною, то

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \quad (1)$$

Далі, якщо буде виготовлено x_1 одиниць виробів виду А, x_2 одиниць виробів виду В і x_3 одиниць виробів виду С, то прибуток від їх реалізації складе $F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$.

Таким чином, приходимо до наступної математичної задачі: дана система

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360 \end{cases} \quad (2)$$

чотирьох лінійних нерівностей з трьома невідомими x_j $(j = \overline{1,3})$ і лінійна функція відносно цих змінних

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3; \quad (3)$$

потрібно серед усіх невід'ємних розв'язків системи нерівностей (2) знайти такий, при якому функція (3) набуває максимального значення. Як це зробити, буде показано пізніше.

Лінійна функція (3), максимум якої потрібно визначити, разом із системою нерівностей (2) і умовою невід'ємності змінних (1) утворюють математичну модель початкової задачі.

Оскільки функція (3) лінійна, а система (2) містить тільки лінійні нерівності, то задача (1) — (3) є задачею лінійного програмування.

Приклад 2. Міський молочний завод виготовляє молоко, кефір і сметану, розфасовані в пляшки. На виробництво 1т молока, кефіру і сметани потрібно відповідно 1010, 1010 і 9450 кг молока. При цьому затрати робочого часу при розливі 1т молока і кефіру складають 0,18 і 0,19 машино-годин. На розфасовці 1т сметани зайняті спеціальні автомати протягом 3,25 год. Усього для виробництва молочних виробів завод може використати 136 000 кг молока. Основне обладнання може бути зайняте протягом 21,4 машино-годин, а автомати з розфасовки сметани – впродовж 16,25 год. Прибуток від реалізації 1 т молока, кефіру і сметани відповідно становить 30, 22 і 136 грн. Завод повинен щодня виробляти не менше 100 т молока, розфасованого в пляшки. На виробництво іншої продукції немає будь-яких обмежень.

Потрібно визначити, яку продукцію і в якій кількості потрібно щодня виробляти заводу, щоб прибуток від її реалізації був максимальний. Скласти математичну модель задачі.

Розв'язання. Припустимо, що молочний завод щодня виготовлятиме x_1 тонну молока, x_2 тонни кефіру і x_3 тонни сметани. Тоді йому для виробництва цієї продукції необхідно $1010x_1 + 1010x_2 + 9450x_3$ тонни молока.

Оскільки завод може використовувати щодня не більше 136000 т молока, то повинна виконуватися нерівність

$$1010x_1 + 1010x_2 + 9450x_3 \le 136000.$$

Аналогічні міркування, проведені відносно можливого використання ліній розливу молочної продукції і автоматів з розфасовки сметани, дозволяють записати такі нерівності:

$$0{,}18x_1 + 0{,}19x_2 \le 21{,}4,$$
$$3{,}25\, x_2 \le 16{,}25.$$

Оскільки щодня повинно вироблятися не менше 100 т молока, то $x_1 \ge 100$. Далі, за своїм економічним значенням змінні x_2 і x_3 можуть набувати тільки невід'ємних значень: $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$. Загальний прибуток від реалізації x_1 тонни молока, x_2 тонни кефіру і x_3 тонни сметани дорівнює $30x_1 + 22x_2 + 136x_3$ грн. Таким чином, переходимо до наступної математичної задачі: дана система

$$\begin{cases} 1010x_1 + 1010x_2 + 9450x_3 \le 136000, \\ 0{,}18x_1 + 0{,}19x_2 \le 21{,}4, \\ 3{,}25x_2 \le 16{,}25, \\ x_1 \ge 100 \end{cases} \quad (4)$$

чотирьох лінійних нерівностей із трьома невідомими x_1, x_2, x_3 і лінійна функція відносно цих же змінних

$$F = 30x_1 + 22x_2 + 136x_3. \quad (5)$$

Потрібно серед усіх невід'ємних розв'язків системи нерівностей (4) знайти такий, при якому функція (5) матиме максимальне значення. Оскільки система (4) являє собою співвідношення лінійних нерівностей і функція (5) лінійна, то вихідна задача є задачею лінійного програмування.

2. *Задача про оптимальний склад суміші*

Досить широкий клас задач програмування становлять так звані задачі на складання сумішей або задачі на використання замінників.

Приклад 3. При відгодівлі кожна тварина щодня повинна одержувати не менше 60 одиниць поживної речовини A, не менше 50 одиниць речовини B і не менше 12 одиниць речовини C. Вказані поживні речовини містяться в трьох видах корму. Склад одиниць поживних речовин в 1кг кожного з видів корму наведений у таблиці 3.2.

Таблиця 3.2

Поживні речовини	Кількість одиниць поживних речовин в 1кг виду корму		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

Скласти денний раціон, що забезпечує отримання необхідної кількості поживних речовин при мінімальних грошових витратах, якщо ціна 1кг корму I виду складає 9 коп., корму II виду — 12 коп. і корму III виду — 10 коп.

Приклад 4. Для виробництва чавунного литва використовується n різних початкових шихтових матеріалів (чавун різних марок, сталевий брухт, ферофосфор та ін.). Хімічний склад чавунного литва визначається вмістом у ньому хімічних елементів (кремнію, марганцю, фосфору та ін.). Готовий чавун повинен мати строго визначений хімічний склад, який задається величинами H_j, що є частками (у відсотках) j-го хімічного елементу в готовому продукті. При цьому відомі величини: h_{ij} — вміст (у відсотках) j-го хімічного елементу в i-му початковому шихтовому матеріалі; c_i — ціна одиниці кожного i-го шихтового матеріалу. Визначити склад шихти, що забезпечує отримання литва заданої якості при мінімальній загальній вартості використовуваних шихтових матеріалів.

3. *Задача про оптимальний план перевезень*

Цю задачу часто називають транспортною. У простішому варіанті транспортна задача виникає при необхідності найбільш раціонального перевезення деякого однорідного вантажу. При цьому споживачам байдуже, з яких пунктів він надходить, важливо, щоб був задоволений попит, а кожен постачальник має можливість постачати вантаж будь-якому споживачу. Зворотні перевезення не передбачаються.

Приклад 5. У трьох пунктах відправлення зосереджено однорідний вантаж у кількостях, відповідно рівних 420, 380 і 400 т. Цей вантаж необхідно перевезти в три пункти призначення в кількостях, відповідно рівних 260, 520 і 420 т. Вартості перевезень 1 т вантажу з кожного пункту відправлення в кожен пункт призначення є відомими величинами і задаються матрицею

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Знайти план перевезень, що забезпечує вивіз наявного в пунктах відправлення і завезення необхідного в пункти призначення вантажу при мінімальній загальній вартості перевезень.

4. *Задача про оптимальне розміщення виробництва*

Це одна з важливих модифікацій транспортної задачі.

Приклад 6. У m пунктах можуть бути розміщені підприємства, що виробляють деяку однорідну продукцію. Ця продукція надходить у n пунктів її споживання, причому в j-му пункті потреби в продукції рівні a_j одиницям. Витрати, пов'язані з доставкою одиниці продукції з i-го пункту відправлення в j-й пункт споживання, складають c_{ij} грн. Відомо, що в i-му пункті виготовлення продукції максимальний обсяг її виробництва не може перевищувати b_i одиниць, а витрати, пов'язані з виготовленням одиниці продукції, складають d_i грн. Визначити таке розміщення підприємств, при якому забезпечуються потреби в продукції у кожному з пунктів її споживання при якнайменших загальних затратах, пов'язаних із виробництвом і доставкою продукції.

5. ***Задача про раціональний розкрій матеріалів***

Модель цієї задачі має важливе значення для економії матеріалів та сировини.

Приклад 7. На швейній фабриці тканина може бути розрізана кількома способами для виготовлення потрібних деталей швейних виробів. Нехай при j-му варіанті розкрою $(j=\overline{1,n})$ 100 м^2 тканини виготовляється b_{ij} деталей i-го виду $(i=\overline{1,m})$, а розміри відходів при даному варіанті розкрою дорівнюють c_j м^2. Знаючи, що деталей i-го виду потрібно виготовляти B_i штук, потрібно розкроїти тканину так, щоб було одержано необхідну кількість деталей кожного виду при мінімальних загальних відходах. Скласти математичну модель задачі.

6. ***Задача динаміки виробництва і створення запасів***

Ця задача полягає в оптимальному розподілі деякої продукції та її запасів. В умовах діючого підприємства всяка зміна обсягу випуску продукції пов'язана з додатковими витратами. Зберігання готової продукції також вимагає певних витрат. У випадках, коли попит на готову продукцію в окремі відрізки часу не постійний, виникає потреба пошуку такого компромісного плану випуску, при якому сумарні затрати на розширення і згортання виробництва, а також на зберігання залишків продукції були б мінімальними за умови своєчасного і повного задоволення потреб.

7. ***Стохастична задача комплектування станочного парку***

Приклад 8. На авторемонтний завод протягом деякого відрізку часу надходять замовлення на виконання ремонтних робіт. Наперед невідомі час надходження замовлень і їх кількість. Однак зрозуміло, що якщо верстатів для виконання різноманітних замовлень недостатньо, то це призведе до затримки у здійсненні ремонту, а замовники звернуться за послугами до інших, більш укомплектованих підприємств, і даний завод зазнає збитків у зв'язку з недоотриманням прибутку.

З другого боку, якщо набір різних верстатів занадто розширити, то більшу частину часу вони простоюватимуть, а завод, витративши

гроші на їх закупівлю, змушений буде і далі терпіти збитки у зв'язку з утримуванням надлишкової кількості оснащення.

У даному випадку прибуток, що отримує завод, є випадковою величиною, а тому говорити про його максимізацію немає сенсу. Тому на практиці як цільова функція вибирається або математичне сподівання прибутку, обчислене на основі відомих ймовірностей надходження замовлень (цей випадок зводиться до звичайної задачі лінійного програмування), або ймовірності того, що розмір доходу буде не меншим заданої величини (тут потрібні спеціальні методи досліджень).

3.2. Загальна і основна задачі лінійного програмування

У попередньому пункті були розглянуті приклади задач лінійного програмування. У всіх цих задачах потрібно знайти максимум або мінімум лінійної функції за умови, що її змінні набували невід'ємних значень і задовольняли деяку систему лінійних рівнянь або лінійних нерівностей або систему, що містить як лінійні нерівності, так і лінійні рівняння. Кожна з цих задач є окремим випадком загальної задачі лінійного програмування.

Загальною задачею лінійного програмування називається задача, яка полягає у визначенні максимального (мінімального) значення функції

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i=\overline{1,k}), \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i=\overline{k+1,m}), \tag{3}$$

$$x_j \ge 0 \ (j=\overline{1,l}, \quad l\le n), \tag{4}$$

де a_{ij}, b_i, c_j — задані постійні величини і $k\le m$.

Функція (1) називається *цільовою функцією* (або *лінійною формою)* задачі (1) — (4), а умови (2) — (4) — обмеженнями даної задачі.

Стандартною (або *симетричною) задачею* лінійного програмування називається задача, яка полягає у визначенні максимального значення функції (1) при виконанні умов (2) і (4), де $k=m$ і $l=n$.

Канонічною (або *основною) задачею* лінійного програмування називається задача, яка полягає у визначенні максимального значення функції (1) при виконанні умов (3) і (4), де $k=0$ і $l=n$.

Сукупність чисел $X=(x_1, x_2, ..., x_n)$, що задовольняють обмеженням задачі (2) — (4), називається *допустимим розв'язком* (або *планом).*

План $X^*=(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, при якому цільова функція задачі (1) набуває свого максимального (мінімального) значення, називається *оптимальним.*

Значення цільової функції (1) при плані X будемо позначати через $F(X)$. Отже, X^* — *оптимальний* план задачі, якщо для будь-якого X виконується нерівність $F(X) \le F(X^*)$ [відповідно $F(X) \ge F(X^*)$].

Вказані вище три форми задачі лінійного програмування еквівалентні в тому значенні, що кожна з них за допомогою нескладних перетворень може бути переписана у формі іншої задачі. Це означає, що якщо є спосіб знаходження розв'язку однієї з вказаних задач, то тим самим може бути визначений оптимальний план будь-якої з трьох задач.

Щоб перейти від однієї форми запису задачі лінійного програмування до іншої, потрібно в загальному випадку вміти, по-перше, зводити задачу мінімізації функції до задачі максимізації, по-друге, переходити від обмежень-нерівностей до обмежень-рівності і навпаки, по-третє, замінювати змінні, які не підлягають умові невід'ємності.

У тому випадку, коли вимагається знайти мінімум функції $F=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n$, можна перейти до знаходження максимуму функції $F_1=-F=-c_1x_1-c_2x_2-...-c_nx_n$, оскільки $\min F=-\max(-F)$.

Обмеження-нерівність початкової задачі лінійного програмування, що має вигляд "$\le$", можна перетворити в обмеження-рівність додаванням до його лівої частини додаткової невід'ємної змінної, а обмеження-нерівність виду "$\ge$" — в обмеження-рівність відніманням від його лівої частини додаткової невід'ємної змінної. Таким чином, обмеження-нерівність

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n \le b_i$$

перетвориться в обмеження-рівність

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n+x_{n+1}=b_i \ (x_{n+1}\ge 0), \tag{5}$$

а обмеження-нерівність

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n \ge b_i$$

— в обмеження-рівність

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n-x_{n+1}=b_i \ (x_{n+1}\ge 0). \tag{6}$$

У той же час кожне рівняння системи обмежень

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n=b_i$$

можна записати у вигляді нерівностей:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n-x_{n+1}\le b_i, \\ -a_{i1}x_1-a_{i2}x_2-...-a_{in}x_n+x_{n+1}\ge -b_i. \end{cases} \tag{7}$$

Число додаткових невід'ємних змінних, що вводяться, при перетворенні обмежень-нерівностей в обмеження-рівність дорівнює числу перетворюваних нерівностей.

Додаткові змінні, що вводяться, мають цілком певний економічний зміст. Так, якщо в обмеженнях початкової задачі лінійного програмування відображається витрата і наявність виробничих ресурсів, то числове значення додаткової змінної в плані задачі, записаної у формі основної, дорівнює обсягу невживаного відповідного ресурсу.

Відзначимо, нарешті, що якщо змінна x_k не підлягає умові невід'ємності, то її слід замінити двома невід'ємними змінними u_k і v_k, прийнявши $x_k=u_k-v_k$.

Приклад 1. Записати у формі основної задачі лінійного програмування наступну задачу: знайти максимум функції $F=3x_1-2x_2-5x_4+x_5$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \le 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \le 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \le 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \ge 8, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.$$

Розв'язання. У даній задачі вимагається знайти максимум функції, а система обмежень містить чотири нерівності. Отже, щоб записати її у формі основної задачі, потрібно перейти від обмежень-нерівностей до обмежень-рівності. Оскільки число нерівностей, що входять у систему обмежень задачі, дорівнює чотирьом, то цей перехід може бути здійснений введенням чотирьох додаткових невід'ємних змінних. При цьому до лівих частин кожної з нерівностей типу "$\le$" відповідна додаткова змінна додається, а від лівих частин кожної з нерівностей типу "$\ge$" віднімається. У результаті обмеження набувають вигляду рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_9 \ge 0.$$

Отже, дана задача може бути записана у формі основної задачі таким чином: максимізувати функцію $F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_9 \ge 0.$$

Приклад 2. Записати задачу, що полягає в мінімізації функції $F = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \ge 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

у формі основної задачі лінійного програмування.

Розв'язання. У даній задачі вимагається знайти мінімум цільової функції, а система обмежень містить три нерівності. Отже, щоб записати її у формі основної задачі, замість знаходження мінімуму функції F потрібно знайти максимум функції $F_1 = -F$. Нерівності перетворюємо в обмеження-рівності шляхом додавання до лівих частин кожного обмеження-нерівності типу "$\le$" додаткової невід'ємної змінної і віднімання додаткових змінних від лівих частин кожного з обмежень-нерівностей типу "$\ge$".

Отже, початкова задача може бути записана у формі основної задачі лінійного програмування так: знайти максимум функції $F_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_6 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_7 = 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_7 \ge 0.$$

Приклад 3. Записати у формі стандартної задачі лінійного програмування наступну задачу: знайти максимум функції $F = 6{,}5x_1 - 7{,}5x_3 + 23{,}5x_4 - 5x_5$ за умов

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 12, \\ 2x_1 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 14, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 = 6, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_5 \ge 0.$$

Розв'язання. Методом послідовного виключення невідомих зведемо дану задачу до наступної: знайти максимум функції $F = 6{,}5x_1 - 7{,}5x_3 + 23{,}5x_4 - 5x_5$ за умов

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_3 + 10x_4 + x_5 = 26, \\ x_1 + x_3 + 11x_4 = 20, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_5 \ge 0.$$

Остання задача записана у формі основної для задачі, що полягає у знаходженні максимального значення функції $F = x_3 + 2x_4$ за умов

$$\begin{cases} x_3 + x_4 \le 6, \\ 3x_3 + 10x_4 \le 26, \\ x_3 + 11x_4 \le 20, \end{cases}$$
$$x_3, x_4 \ge 0.$$

Цільова функція задачі перетворена за допомогою підстановки замість x_1 і x_5 їх значень відповідно до рівнянь системи обмежень задачі.

3.3. Геометричний метод розв'язування задач лінійного програмування

Розглянемо основну задачу лінійного програмування. Вона полягає у визначенні максимального значення функції

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1,m}),$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}).$$

Перепишемо цю задачу у векторній формі: знайти максимум функції

$$F = CX \tag{1}$$

за умов

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_n P_n = P_0, \tag{2}$$

$$X \geq 0, \tag{3}$$

де $C = (c_1; c_2; \ldots; c_n)$, $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$; CX – скалярний добуток; $P_1, \ldots, P_n$, і P_0 – m-вимірні вектор-стовпці, складені з коефіцієнтів при невідомих і вільних членах системи рівнянь задачі:

$$P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \ \ldots; \ P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

План $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ називається *опорним планом* основної задачі лінійного програмування, якщо система векторів P_j, що входять у розклад (2) з додатними коефіцієнтами x_j, лінійно незалежна.

Оскільки вектори P_j є m-вимірними, то з визначення опорного плану випливає, що число його додатних компонент не може бути більше, ніж m.

Опорний план називається *невиродженим,* якщо він містить рівно m додатних компонент, у протилежному випадку він називається *виродженим.*

Властивості основної задачі лінійного програмування (1) — (3) тісно пов'язані з властивостями опуклих множин.

Нехай X_1, X_2, ..., X_n — довільні точки евклідового простору E_n. *Опуклою лінійною комбінацією* цих *точок* називається сума $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n$, де α_i — довільні невід'ємні числа, сума яких дорівнює 1:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \qquad \alpha \geq 0 \quad (i = \overline{1,n}).$$

Множина називається *опуклою,* якщо разом із будь-якими двома своїми точками вона містить і їх довільну опуклу лінійну комбінацію.

Точка X опуклої множини називається *кутовою,* якщо вона не може бути представлена у вигляді опуклої лінійної комбінації якихнебудь двох інших різних точок даної множини.

Теорема 1. Множина планів основної задачі лінійного програмування є опуклою (якщо вона не порожня).

Непорожня множина планів основної задачі лінійного програмування називається *багатогранником розв'язків,* а будь-яка кутова точка багатогранника розв'язків — *вершиною.*

Теорема 2. Якщо основна задача лінійного програмування має оптимальний план, то максимального значення цільова функція задачі набуває в одній з вершин багатогранника розв'язків. Якщо максимального значення цільова функція задачі набуває більш ніж в одній вершині, то вона набуває його у будь-якій точці, що є опуклою лінійною комбінацією цих вершин.

Теорема 3. Якщо система векторів $P_1, P_2, \ldots, P_k \ (k \leq n)$ у розкладі (2) лінійно незалежна і така, що

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_k P_k = P_0, \tag{4}$$

де всі $x_j \geq 0$, то точка $X = (x_1; x_2; \ldots; x_k, 0, \ldots; 0)$ є вершиною багатогранника розв'язків.

Теорема 4. Якщо $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ — вершина багатогранника розв'язків, то вектори P_j, що відповідають додатним x_j в розкладі (2), лінійно незалежні.

Сформульовані теореми дозволяють зробити такі *висновки.*

Непорожня множина планів основної задачі лінійного програмування утворює опуклий багатогранник. Кожна вершина цього багатогранника визначає опорний план. В одній із вершин багатогранника розв'язків (тобто для одного з опорних планів) значення цільової функції є максимальним (за умови, що функція обмежена зверху на множині планів). Якщо максимального значення функція набуває більш ніж в одній вершині, то цього ж значення вона набуває в будь-якій точці, яка є опуклою лінійною комбінацією даних вершин.

Вершину багатогранника розв'язків, у якій цільова функція набуває максимального значення, знайти порівняно просто, якщо задача, записана у формі стандартної, містить не більше двох змінних, або якщо задача, записана у формі основної, містить не більше двох вільних змінних.

Знайдемо розв'язок задачі, що полягає у визначенні максимального значення функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{5}$$

за умов

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i \quad (i = \overline{1,k}), \tag{6}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1,2). \tag{7}$$

Кожна з нерівностей (6), (7) системи обмежень задачі геометрично визначає напівплощину відповідно з граничними прямими $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$ $(i = \overline{1,k})$ $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$. У тому випадку, якщо система нерівностей (6), (7) сумісна, областю її розв'язків є множина точок, що належать усім вказаним напівплощинам. Оскільки множина точок перетину даних напівплощин опукла, то областю допустимих розв'язків задачі (5) — (7) є опукла множина, яка називається багатокутником розв'язків (введений раніше термін "багатогранник розв'язків" зазвичай використовується, якщо $n \ge 3$). Сторони цього багатокутника лежать на прямих, рівняння яких отримуються з початкової системи обмежень заміною знаків нерівностей на знаки точної рівності.

Таким чином, початкова задача лінійного програмування полягає у відшуканні такої точки багатокутника розв'язків, в якій цільова функція F набуває максимального значення. Ця точка існує тоді, коли багатокутник розв'язків не порожній і на ньому цільова функція обмежена зверху. За вказаних умов в одній із вершин багатокутника розв'язків цільова функція набуває максимального значення. Для визначення даної вершини побудуємо лінію рівня $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ (де h — деяка стала), яка проходить через багатокутник розв'язків, і пересуватимемо її у напрямі вектора $\vec{C} = (c_1; c_2)$ доти, поки вона не пройде через останню

її спільну точку з багатокутником розв'язків. Координати вказаної точки і визначають оптимальний план даної задачі.

Закінчуючи розгляд геометричної інтерпретації задачі (5) — (7), відзначимо, що при знаходженні її розв'язку можуть зустрітися випадки, зображені на рис. 3.1 — 3.4. Рис. 3.1 характеризує такий випадок, коли цільова функція набуває максимального значення в єдиній точці A. Із рис. 3.2 видно, що максимального значення цільова функція набуває в будь-якій точці відрізка AB. На рис. 3.3 зображений випадок, коли цільова функція не обмежена зверху на множині допустимих розв'язків, а на рис. 3.4 — випадок, коли система обмежень задачі несумісна.

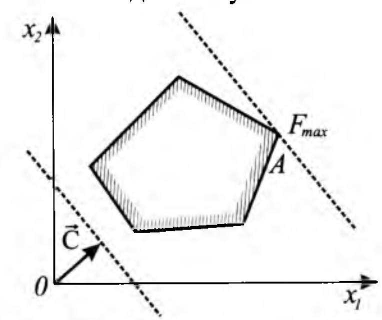


Рис. 3.1

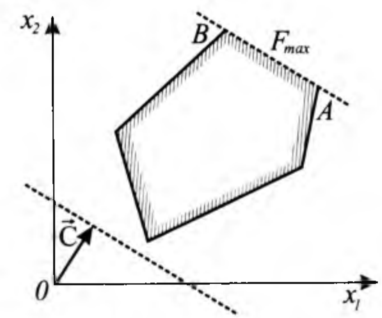


Рис. 3.2

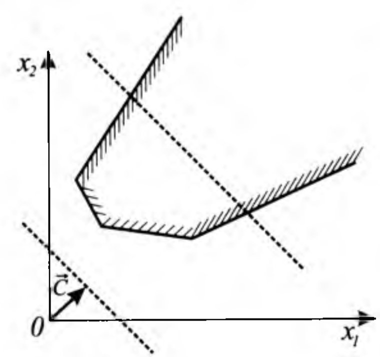


Рис. 3.3

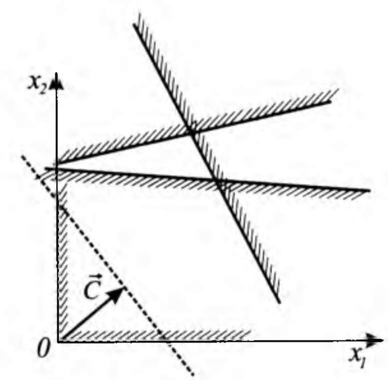


Рис. 3.4

Відзначимо, що знаходження мінімального значення лінійної функції при даній системі обмежень відрізняється від знаходження її максимального значення за тих же обмежень лише тим, що лінія рівня $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ пересувається не у напрямі вектора $\vec{C} = (c_1; c_2)$, а в протилежному напрямі. Таким чином, описані вище випадки, що зустрічаються при знаходженні максимального значення цільової функції, присутні і при визначенні її мінімального значення.

Отже, *знаходження розв'язку задачі лінійного програмування* (5) — (7) *на основі її геометричної інтерпретації включає наступні етапи*:

1. Будують прямі, рівняння яких отримуємо в результаті заміни в обмеженнях (6) і (7) знаків нерівностей на знаки точної рівності.
2. Знаходять напівплощини, що визначаються кожним з обмежень задачі.
3. Знаходять багатокутник розв'язків.
4. Будують вектор $\vec{C} = (c_1; c_2)$.
5. Будують пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = h$, яка проходить через багатокутник розв'язків.
6. Рухають лінію рівня $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ у напрямі вектора $\vec{C}$. Остання спільна точка (точки) лінії рівня і багатокутника розв'язків і є точкою (відрізком), в якій цільова функція набуває максимального значення. Або встановлюють необмеженість зверху функції на множині планів.
7. Визначають координати точки максимуму функції і обчислюють значення цільової функції в цій точці.

Приклад 1. Для виробництва двох видів виробів A і B підприємство використовує три види сировини. Норми витрат сировини кожного виду на виготовлення одиниці продукції даного виду наведені в таблиці 3.3. У ній же вказано прибуток від реалізації одного виробу кожного виду і загальна кількість сировини даного виду, яка може бути використана підприємством.

Таблиця 3.3

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на один виріб		Загальна кількість сировини (кг)
	A	B	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	30	40	

Враховуючи, що вироби A і B можуть виготовлятися в будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений), вимагається встановити такий план їх випуску, при якому прибуток підприємства від реалізації всіх виробів буде максимальним.

Розв'язання. Припустимо, що підприємство виготовить x_1 виробів виду A і x_2 виробів виду B. Оскільки виробництво продукції обмежене кількістю сировини кожного виду і кількість виробів, що виготовляється, не може бути від'ємною, то повинні виконуватися нерівності:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Загальний прибуток від реалізації x_1 виробів виду A і x_2 виробів виду B складе $F = 30x_1 + 40x_2$.

Таким чином, ми приходимо до наступної математичної задачі: серед усіх невід'ємних розв'язків даної системи лінійних нерівностей вимагається знайти такий, при якому функція F набуває максимального значення.

Знайдемо розв'язок сформульованої задачі, використовуючи її геометричну інтерпретацію. Спочатку визначимо багатокутник розв'язків. Для цього в нерівностях системи обмежень і в умовах невід'ємності змінних знаки нерівностей замінимо на знаки точної рівності і побудуємо відповідні прямі:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 = 300, & (I) \\ 4x_1 + 4x_2 = 120, & (II) \\ 3x_1 + 12x_2 = 252, & (III) \\ x_1 = 0, & (IV) \\ x_2 = 0. & (V) \end{cases}$$

Ці прямі зображені на рис. 3.5. Кожна з побудованих прямих ділить площину на дві півплощини. Координати точок однієї півплощини задовольняють початкову нерівність, а іншої — ні. Щоб визначити шукану півплощину, потрібно взяти яку-небудь точку, що належить одній із півплощин, і перевірити, чи задовольняють її координати дану нерівність. Якщо координати взятої точки задовольняють дану нерівність, то шуканою є та півплощина, якій належить ця точка, в протилежному випадку — інша півплощина.

Знайдемо, наприклад, півплощину, що визначається нерівністю $12x_1 + 4x_2 < 300$. Для цього, побудувавши пряму $12x_1 + 4x_2 = 300$ (на рис. 3.5 це пряма *I*), візьмемо яку-небудь точку, що належить одній із двох отриманих півплощин, наприклад, точку $O = (0;0)$. Координати цієї точки задовольняють нерівність $12 \cdot 0 + 4 \cdot 0 < 300$. Отже, півплощина, якій належить точка $O = (0;0)$, визначається нерівністю $12x_1 + 4x_2 \le 300$. Це і показано стрілками на рис. 3.5.

Перетин отриманих півплощин і визначає багатокутник розв'язків даної задачі.

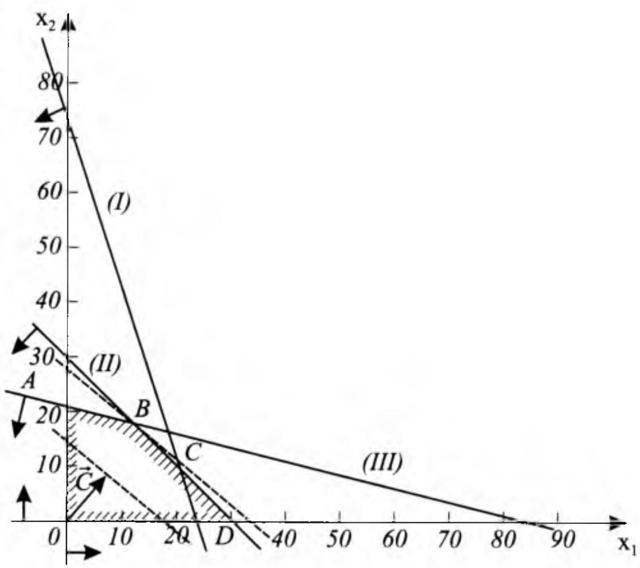


Рис. 3.5

Як видно з рис. 3.5, багатокутником розв'язків є п'ятикутник *OABCD*. Координати будь-якої точки, що належить цьому п'ятикутнику, задовольняють дану систему нерівностей і умову невід'ємності змінних. Тому сформульована задача буде розв'язана, якщо ми зможемо знайти точку, що належить п'ятикутнику *OABCD*, в якій функція F набуває максимального значення. Щоб знайти вказану точку, побудуємо вектор $\vec{C} = (30;40)$ і пряму $30 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = h$,

де h — деяка стала така, що пряма $30 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = h$ має спільні точки з багатокутником розв'язків. Покладемо, наприклад, $h = 480$ і побудуємо пряму $30x_1 + 40x_2 = 480$. На рис. 3.5 ці прямі (лінії рівня) зображені пунктирною лінією.

Якщо тепер взяти яку-небудь точку, що належить побудованій прямій і багатокутнику розв'язків, то її координати визначають такий план виробництва виробів A і B, при якому прибуток від їх реалізації дорівнює 480 грн. Далі, вважаючи h рівним деякому числу, більшому, ніж 480, ми одержуватимемо різні паралельні прямі. Якщо вони мають спільні точки з багатокутником розв'язків, то ці точки визначають плани виробництва виробів A і B, при яких прибуток від їх реалізації перевершить 480 грн.

Рухаючи побудовану пряму $30x_1 + 40x_2 = 480$ у напрямі вектора $\vec{C}$, бачимо, що останньою спільною точкою її з багатокутником розв'язків задачі слугує точка B. Координати цієї точки і визначають план випуску виробів A і B, при якому прибуток від їх реалізації є максимальним.

Знайдемо координати точки B як точки перетину прямих (II) і (III). Отже, її координати задовольняють рівняння цих прямих

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 = 252. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, отримаємо $x_1^* = 12$, $x_2^* = 18$. Отже, якщо підприємство виготовить 12 виробів виду A і 18 виробів виду B, то воно отримає максимальний прибуток, рівний $F_{max} = 30 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 1080$ (грн.).

Приклад 2. Знайти максимум і мінімум функції $F = x_1 + x_2$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Розв'язання. Побудуємо багатокутник розв'язків (рис. 3.6).

Як видно з рис. 3.6, багатокутником розв'язків є трикутник ABC. Координати точок цього трикутника задовольняють умову невід'ємності і нерівності системи обмежень задачі. Отже, задача буде розв'язана, якщо серед точок трикутника ABC знайти такі, в яких функція $F = x_1 + x_2$ набуває максимального і мінімального значення. Для знаходження цієї точки побудуємо пряму $x_1 + x_2 = 4$ і вектор $\vec{C} = (1;1)$.

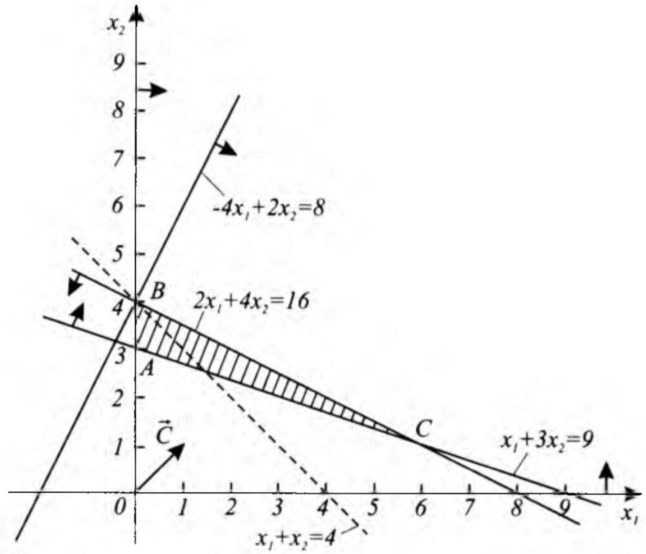


Рис. 3.6

Рухаючи дану пряму паралельно самій собі у напрямі вектора $\vec{C}$, бачимо, що її останньою спільною точкою з багатокутником розв'язків задачі є точка C. Отже, в цій точці функція F матиме максимальне значення. Оскільки C — точка перетину прямих $2x_1 + 4x_2 = 16$ і $x_1 + 3x_2 = 9$, то її координати задовольняють рівняння цих прямих:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16, \\ x_1 + 3x_2 = 9. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, отримаємо $x_1^* = 6$, $x_2^* = 1$. Таким чином, максимальне значення функції $F_{\max} = 7$.

Для знаходження мінімального значення цільової функції задачі рухаємо пряму $x_1 + x_2 = 4$ в напрямку, протилежному напряму вектора $\vec{C} = (1;1)$. Для визначення координат точки A розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9, \\ x_1 = 0, \end{cases}$$

звідки $x_1^* = 0$, $x_2^* = 3$. Підставляючи знайдені значення змінних у цільову функцію, отримаємо $F_{\min} = 3$.

Приклад 3. Знайти максимальне значення функції

$$F = -16x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 8, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Розв'язання. На відміну від розглянутих вище задач, у даній задачі обмеження задані у вигляді рівнянь. При цьому число невідомих дорівнює п'яти. Тому дану задачу потрібно звести до задачі, в якій число невідомих дорівнювало б двом. Для цього перейдемо від запису заданої задачі у формі основної до задачі, записаної у стандартній формі:

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 8, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,2}.$$

Із цільової функції початкової задачі змінні x_3, x_4, x_5 виключені за допомогою підстановки їх значень із відповідних рівнянь системи обмежень.

Побудуємо багатокутник розв'язків отриманої задачі (рис. 3.7).

Як видно з рис. 3.7, максимального значення цільова функція задачі набуває в точці C. Тому в кожній із вершин отриманого багатокутника розв'язків останньої задачі принаймні дві змінні початкової задачі набувають нульових значень. Так, у точці C маємо $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Підставляючи ці значення в перше і друге рівняння системи обмежень початкової задачі, отримаємо $x_1^* = 3$, $x_2^* = 4$. Підставляючи знайдені значення x_1 і x_2 у третє рівняння системи обмежень початкової задачі, знайдемо $x_5 = 14$.

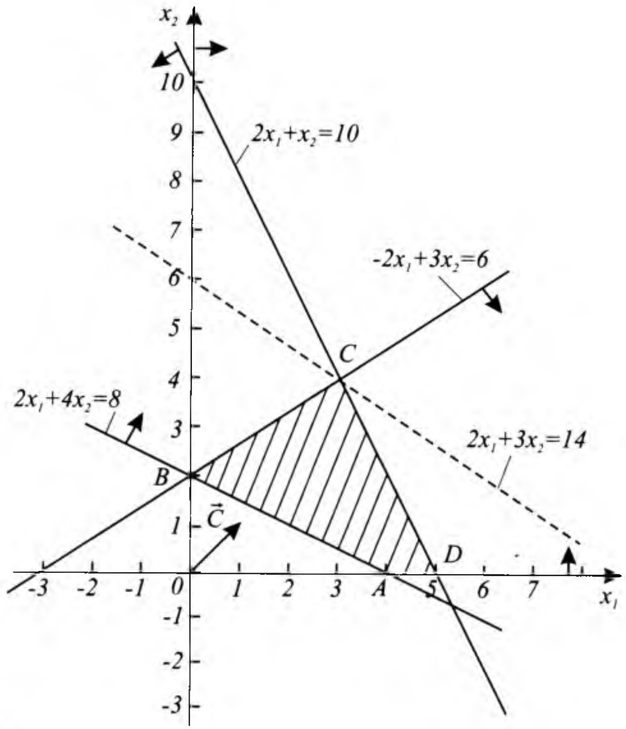


Рис. 3.7

Отже, оптимальним планом заданої задачі буде $X^* = (3; 4; 0; 0; 14)$. При цьому плані $F_{\max} = 18$.

3.4. Симплекс-метод знаходження розв'язку задач лінійного програмування

Симплекс-метод розв'язання задачі лінійного програмування полягає у переході від одного опорного плану до іншого, при якому значення цільової функції зростає (за умов, що дана задача має оптимальний план і кожен її опорний план є невиродженим). Вказаний перехід можливий, якщо відомий який-небудь початковий опорний план. Розглянемо задачу, для якої цей план можна безпосередньо записати.

Нехай потрібно знайти максимальне значення функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n}).$$

Тут a_{ij}, b_i та c_j $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ — задані сталі числа $(m < n \ i \ b_i > 0)$.

Векторна форма даної задачі має такий вигляд: знайти максимум функції

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

за умов

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_mP_m + \ldots + x_nP_n = P_0, \tag{2}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n}), \tag{3}$$

де

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \cdots; \quad P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$P_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \vdots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix}; \cdots; \quad P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}; \quad P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$b_1P_1 + b_2P_2 + \ldots + b_mP_m = P_0,$$

то за означенням опорного плану $X = (b_1; b_2; \ldots; b_m; 0; \ldots; 0)$ є опорним планом даної задачі (останні $n - m$ компонент вектора X дорівнюють нулю). Цей план визначається системою одиничних векторів $P_1, P_2, \ldots, P_m$, які утворюють базис m-вимірного простору. Тому кожний із векторів $P_1, P_2, \ldots, P_n$, а також вектор P_0 можуть бути представлені у вигляді лінійної комбінації векторів даного базису. Нехай

$$P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}P_i \ \ (j = \overline{0,n}).$$

Покладемо $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}$ $(j = \overline{1,n})$; $\Delta_j = z_j - c_j$ $(j = \overline{1,n})$. Оскільки вектори $P_1, P_2, \ldots, P_m$ – одиничні, то $x_{ij} = a_{ij}$ і $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$, а

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j .$$

Теорема 1. (*Ознака оптимальності опорного плану*). Опорний план $X^* = (x^*_1; x^*_2; \ldots; x^*_m; 0; 0; \ldots; 0)$ задачі (1) — (3) є оптимальним, якщо $\Delta_j \geq 0$ для будь-якого j $(j = \overline{1,n})$.

Теорема 2. Якщо $\Delta_k < 0$ для деякого $j = k$ і серед чисел a_{ik} $(i = \overline{1,m})$ немає додатних $(a_{ik} \leq 0)$, то цільова функція (1) задачі (1) — (3) не обмежена на множині її планів.

Теорема 3. Якщо опорний план X задачі (1) — (3) невироджений і $\Delta_k < 0$, але серед чисел a_{ik} є додатні (не всі $a_{ik} \leq 0$), то існує опорний план X' такий, що $F(X') > F(X)$.

Сформульовані теореми дозволяють перевірити, чи є знайдений опорний план оптимальним, і виявити доцільність переходу до нового опорного плану.

Дослідження опорного плану на оптимальність, а також подальший обчислювальний процес зручніше вести, якщо умова задачі і початкові дані, одержані після визначення початкового опорного плану, записати так, як показано в таблиці 3.4.

У стовпці C_σ цієї таблиці записують коефіцієнти при невідомих у цільовій функції, які мають ті ж індекси, що і вектори даного базису.

У стовпці P_0 записують додатні компоненти початкового опорного плану, в ньому ж у результаті обчислень одержують додатні компоненти оптимального плану. Стовпці векторів P_j є коефіцієнтами розкладу цих векторів по векторах даного базису.

У табл. 3.4 перші m рядків визначаються початковими даними задачі, а показники $(m+1)$-го рядка обчислюють. У цьому рядку в стовпці вектора P_0 записують значення цільової функції, якого вона набуває при даному опорному плані, а в стовпці вектора P_j – значення $\Delta_j = z_j - c_j$.

Значення z_j знаходиться як скалярний добутку вектора P_j $(j = \overline{1,m})$ на вектор $C_\sigma = (c_1; c_2; \ldots; c_m)$:

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \quad (j = \overline{1,n}) .$$

Значення F_0 дорівнює скалярному добутку вектора P_0 на вектор C_σ:

$$F_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i .$$

Таблиця 3.4

i	Базис	$C\sigma$	P_0	c_1	c_2	…	c_r	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n
				P_1	P_2	…	P_r	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r	P_r	c_r	b_r	0	0	…	1	…	0	a_{rm+1}	…	a_{rk}	…	a_{rn}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	P_m	c_m	b_m	0	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}
$m+1$			F_0	0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_k	…	Δ_n

Після заповнення табл. 3.4 початковий опорний план перевіряють на оптимальність. Для цього переглядають елементи $(m+1)$-го рядка таблиці. У результаті можливим є один із наступних трьох випадків:

1) $\Delta_j \geq 0$ для $j = m+1,\ m+2, \ldots, n$ (при $j = \overline{1,m}$, $z_j = c_j$). Тому в даному випадку числа $\Delta_j \geq 0$ для всіх j від 1 до n. У цьому випадку на підставі ознаки оптимальності початковий опорний план є оптимальним.

2) $\Delta_j < 0$ для деякого j, і всі відповідні цьому індексу величини $a_{ij} \leq 0$ $(j = \overline{1,m})$. У цьому випадку цільова функція не обмежена зверху на множині планів.

3) $\Delta_j < 0$ для деяких індексів j, і для кожного такого j принаймні одне з чисел a_{ij} додатне. У цьому випадку можна перейти від початкового плану до нового опорного плану, при якому значення цільової функції збільшиться. Цей перехід від одного опорного плану до іншого здійснюється виключенням із початкового базису

якого-небудь із векторів і введенням у нього нового вектора. Як вектор, що вводиться в базис, можна взяти будь-який із векторів P_j, що має індекс j, для якого $\Delta_j < 0$. Нехай, наприклад, $\Delta_k < 0$ і вирішено ввести в базис вектор P_k.

Для визначення вектора, що підлягає виключенню з базису, знаходять $\min\,(b_i / a_{ik})$ для всіх $a_{ik} > 0$. Нехай цей мінімум досягається при $i = r$. Тоді з базису виключають вектор P_r, а число a_{rk} називають *ключовим елементом.*

Стовпець і рядок, на перетині яких знаходиться ключовий елемент, називають *провідними.*

Після виділення провідного рядка і провідного стовпця знаходять новий опорний план і коефіцієнти розкладу векторів P_j, через вектори нового базису, що відповідають новому опорному плану. Це легко реалізувати, якщо скористатися методом Жордана-Гауса. При цьому можна показати, що додатні компоненти нового опорного плану обчислюються за формулами

$$b_i' = \begin{cases} b_i - (b_r / a_{rk}) a_{ik} & \textit{при } \; i \neq r, \\ b_r / a_{rk} & \textit{при } \; i = r, \end{cases} \tag{4}$$

а коефіцієнти розкладу векторів P_j через вектори нового базису, відповідних новому опорному плану, – за формулами

$$a_{ij}' = \begin{cases} a_{ij} - (a_{rj} / a_{rk}) a_{ik} & \textit{при } \; i \neq r, \\ a_{rj} / a_{rk} & \textit{при } \; i = r. \end{cases} \tag{5}$$

Після обчислення b_i' та a_{ij}' за формулами (4) і (5) їх значення заносять до табл. 3.5. Елементи $(m+1)$-го рядка цієї таблиці можуть бути обчислені або за формулами

$$F_0' = F_0 - (b_r / a_{rk}) \Delta_k, \tag{6}$$

$$\Delta_j' = \Delta_j - (a_{rj} / a_{rk}) \Delta_k\,, \tag{7}$$

або на підставі їх визначення.

Наявність двох способів знаходження елементів $(m+1)$-го рядка дозволяє здійснювати контроль правильності обчислень, що проводяться.

Таблиця 3.5

i	Базис	$C\sigma$	P_0	c_1	c_2	$\cdots$	c_r	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_n
				P_1	P_2	$\cdots$	P_r	$\cdots$	P_m	P_{m+1}	$\cdots$	P_k	$\cdots$	P_n
1	P_1	c_1	b_1'	1	0	$\cdots$	a_{1r}'	$\cdots$	0	a_{1m+1}'	$\cdots$	0	$\cdots$	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2'	0	1	$\cdots$	a_{2r}'	$\cdots$	0	a_{2m+1}'	$\cdots$	0	$\cdots$	a_{2n}'
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r	P_k	c_k	b_r'	0	0	$\cdots$	a_{rr}'	$\cdots$	0	a_{rm+1}'	$\cdots$	1	$\cdots$	a_{rn}'
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	P_m	c_m	b_m'	0	0	$\cdots$	a_{mr}'	$\cdots$	1	a_{mm+1}'	$\cdots$	0	$\cdots$	a_{mn}'
$m+1$			F_0	0	0	$\cdots$	$z_r' - c_r$	$\cdots$	0	$z_{m+1}' - c_{m+1}$	$\cdots$	Δ_k	$\cdots$	Δ_n

З формули (6) випливає, що при переході від одного опорного плану до іншого найбільш доцільно ввести в базис вектор P_j, що має індекс j, при якому максимальним за абсолютною величиною є число $(b_r / a_{rj})\Delta_j$ $(\Delta_j < 0,\ a_{rj} > 0)$. Проте з метою спрощення обчислювального процесу надалі будемо вектор, що вводиться в базис, визначати, виходячи з максимальної абсолютної величини від'ємних чисел Δ_j. Якщо ж таких чисел декілька, то в базис вводитимемо вектор, що має такий же індекс, як і максимальне з чисел c_j, визначений даними числами $\Delta_j\,(\Delta_j < 0)$.

Отже, перехід від одного опорного плану до іншого зводиться до переходу від однієї симплекс-таблиці до іншої. Елементи нової симплекс-таблиці можна обчислити як за допомогою рекурентних формул (4) — (7), так і за правилами, що безпосередньо з них випливають. Ці правила полягають у наступному.

У стовпцях векторів, що входять у базис, на перетині рядків і стовпців однойменних векторів проставляються одиниці, а всі решта елементів даних стовпців вважають рівними нулю.

Елементи векторів P_0 і P_j у рядку нової симплекс-таблиці, в якій записаний вектор, що вводиться в базис, отримують з елементів цього ж рядка початкової таблиці шляхом поділу їх на величину ключового елемента. У стовпці C_σ у рядку вектора, що вводиться в базис, ставлять величину c_k, де k — індекс вектора, що вводиться.

Решта елементів стовпців векторів P_0 і P_j нової симплекс-таблиці обчислюють за *правилом трикутника*.

Для обчислення якого-небудь із цих елементів знаходять три числа:

1) число, що стоїть у початковій симплекс-таблиці на місці шуканого елемента нової симплекс-таблиці;

2) число, що стоїть у початковій симплекс-таблиці на перетині рядка, в якому знаходиться шуканий елемент нової симплекс-таблиці, і стовпця відповідного вектора, що вводиться в базис;

3) число, що стоїть у новій симплекс-таблиці на перетині стовпця, в якому знаходиться шуканий елемент, і рядка вектора, що вводиться в базис (як зазначено вище, цей рядок отримуємо з рядка початкової симплекс-таблиці шляхом поділу її елементів на ключовий елемент).

Ці три числа утворюють своєрідний трикутник, дві вершини якого відповідають числам, що знаходяться в початковій симплекс-таблиці, а третя — числу в новій симплекс-таблиці. Для обчислення шуканого елемента нової симплекс-таблиці від першого числа віднімають добуток другого на третє.

Після заповнення нової симплекс-таблиці проглядають елементи $(m+1)$-го рядка. Якщо всі $z_j^{'} - c_j \geq 0$, то новий опорний план є оптимальним. Якщо ж серед вказаних чисел є від'ємні, то, використовуючи описану вище послідовність дій, знаходять новий опорний план. Цей процес продовжують доти, доки або не одержують оптимальний план задачі, або не встановлюють її нерозв'язність.

При знаходженні розв'язку задачі лінійного програмування ми припускали, що ця задача має опорні плани і кожен такий план є невиродженим. Якщо ж задача має вироджені опорні плани, то на одній з ітерацій одна або декілька змінних опорного плану можуть виявитися рівними нулю. Таким чином, при переході від одного опорного плану до іншого значення функції може залишитися попереднім. Більше того, можливим є випадок, коли функція зберігає своє значення протягом декількох ітерацій, а також можливе повернення до первинного базису. У останньому випадку зазвичай говорять, що відбулося *зациклення.*

Отже, *знаходження оптимального плану симплекс-методом включає наступні етапи*:

1. Знаходять опорний план.

2. Складають симплекс-таблицю.

3. З'ясовують, чи є хоча б одне від'ємне число Δ_j. Якщо ні, то знайдений опорний план оптимальний. Якщо ж серед чисел Δ_j є від'ємні, то або встановлюють нерозв'язність задачі, або переходять до нового опорного плану.

4. Знаходять провідний стовпець і рядок. Провідний стовпець визначається найбільшим за абсолютною величиною від'ємним числом Δ_j, а провідний рядок — мінімальним співвідношенням компонент стовпця вектора P_0 до додатних компонент провідного стовпця.

5. За формулами (4) — (7) визначають додатні компоненти нового опорного плану, коефіцієнти розкладу векторів P_j по векторах нового базису і числа $F_0^{'}, \Delta_j^{'}$. Всі ці числа записуються в новій симплекс-таблиці.

6. Перевіряють знайдений опорний план на оптимальність. Якщо план не оптимальний і необхідно перейти до нового опорного плану, то повертаються до етапу 4, а у випадку отримання оптимального плану або встановлення нерозв'язності процес розв'язання задачі закінчують.

Приклад 1. Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі *A*, *B* і *C* використовує три види основної сировини: цукровий пісок, патоку і фруктове пюре. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво 1 т карамелі даного виду наведені в таблиці 3.6.

У ній же вказані загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана фабрикою, а також прибуток від реалізації 1 т карамелі даного виду.

Таблиця 3.6

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на 1 т карамелі			Загальна кількість сировини (т)
	A	B	C	
Цукровий пісок	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,4	0,3	600
Фруктове пюре	–	0,1	0,1	120
Прибуток від реалізації 1т продукції (грн.)	108	112	126	

Знайти план виробництва карамелі, який би забезпечив максимальний прибуток від її реалізації.

Розв'язання. Складемо математичну модель задачі. Позначимо через x_1 шуканий план виготовлення карамелі A, через x_2 — карамелі B і через x_3 — карамелі C. Оскільки фонд сировини для виготовлення цих трьох видів карамелі обмежений, то змінні x_1, x_2, x_3 повинні задовольняти систему нерівностей:

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3 \le 800, \\ 0,4x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 \le 600, \\ \qquad\qquad 0,1x_2 + 0,1x_3 \le 120. \end{cases}$$

Загальна вартість виготовленої фабрикою карамелі за умов випуску x_1 т карамелі виду A, x_2 т — виду B і x_3 т виду C становить

$$F = 108x_1 + 112x_2 + 126x_3.$$

За своїм економічним змістом x_1, x_2, x_3 можуть набувати тільки невід'ємних значень:

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Таким чином, отримали таку математичну задачу:

$$F = 108x_1 + 112x_2 + 126x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3 = 800, \\ 0,4x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 = 600, \\ \qquad\qquad 0,1x_2 + 0,1x_3 = 120, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Зведемо цю задачу до канонічного вигляду. Для цього введемо три додаткові змінні x_4, x_5, x_6, у результаті чого обмеження запишуться у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3 + x_4 = 800, \\ 0,4x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 + x_5 = 600, \\ \qquad 0,1x_2 + 0,1x_3 + x_6 = 120. \end{cases}$$

Економічний зміст.

Ці додаткові змінні за економічним змістом означають невикористану за даним планом виробництва кількість сировини того чи

іншого виду. Наприклад, x_4 — це невикористана кількість тонн цукрового піску, x_5 — патоки, x_6 — фруктового пюре.

Запишемо нашу систему рівнянь у векторній формі:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0,$$

де

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,4 \\ 0 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,4 \\ 0,1 \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,3 \\ 0,1 \end{pmatrix},\ P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ P_0 = \begin{pmatrix} 800 \\ 600 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

Оскільки серед векторів $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ є три одиничних вектора (P_4, P_5, P_6), то для даної задачі можна безпосередньо записати опорний план: $X = (0; 0; 0; 800; 600; 120)$.

Складемо симплекс-таблицю (табл.3.7) для першої ітерації, обчислимо значення F_0 і Δ_j, перевіримо план на оптимальність:

$$F_0 = (C_\sigma, P_0) = 0 \cdot 800 + 0 \cdot 600 + 0 \cdot 120 = 0;$$

$$\Delta_1 = (C_\sigma, P_1) - c_1 = 0 \cdot 0,8 + 0 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0 - 108 = -108;$$

$$\Delta_2 = (C_\sigma, P_2) - c_2 = 0 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,1 - 112 = -112;$$

$$\Delta_3 = (C_\sigma, P_3) - c_3 = 0 \cdot 0,6 + 0 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,1 - 126 = -126.$$

Для базисних векторів $\Delta_j = 0$.

Таблиця 3.7

i	Б	C_σ	P_0	108	112	126	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	800	0,8	0,5	0,6	1	0	0
2	P_5	0	600	0,4	0,4	0,3	0	1	0
3	P_6	0	120	0	0,1	0,1	0	0	1
4			0	–108	–112	–126	0	0	0

Як видно з таблиці 3.7, значення всіх основних змінних x_1, x_2, x_3 дорівнюють нулю, а додаткові змінні набувають своїх значень у відповідності з обмеженнями задачі. Ці значення змінних відповідають такому плану, при якому нічого не виготовляється, сировина не використовується і значення цільової функції дорівнює нулю. Цей план, звичайно, не є оптимальним.

Це видно із 4-го рядка нашої таблиці: $\Delta_1 = -108 < 0$, $\Delta_2 = -112 < 0$, $\Delta_3 = -126 < 0$. Від'ємні числа не тільки свідчать про можливість збільшення прибутку, але й показують, наскільки збільшиться ця сума при введенні в план одиниці того чи іншого виду продукції.

Економічний зміст.

Число (–108) означає, що при включенні в план виробництва однієї тонни карамелі *A* забезпечується збільшення прибутку на 108 грн. Якщо включити в план виробництва по одній тонні карамелі *B* і *C*, то прибуток зросте відповідно на 112 і 126 грн. Тому з економічної точки зору найбільш доцільним є включення в план виробництва карамелі *C*.

Це ж необхідно зробити і на основі формальної ознаки симплексного методу, оскільки максимальне за абсолютною величиною від'ємне число Δ_j відповідає вектору P_3.

Визначимо вектор, який будемо виключати з базису. Для цього складаємо співвідношення:

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{i3}}\right\} \text{ для } a_{i3} > 0\text{, тобто } \min\left\{\frac{800}{0,6};\frac{600}{0,3};\frac{120}{0,1}\right\} = \frac{120}{0,1} = 1200.$$

Оскільки мінімум досягається за третім рядком, то з базису виводиться вектор P_6. Стовпчик вектора P_3 та рядок вектора P_6 називаються *провідними*, а елемент 0,1, який знаходиться на їх перетині, називається *ключовим* елементом.

Економічний зміст.

Знайшовши число $\frac{120}{0,1}$, ми таким чином, з економічної точки зору, визначимо, скільки тонн карамелі *C* кондитерська фабрика може виготовити із врахуванням норм витрат і наявних обсягів сировини кожного виду. Через те, що сировини даного виду відповідно є 800, 600, 120 тонн, а на одну тонну карамелі *C* потрібно витратити сировини кожного виду відповідно 0,6; 0,3; 0,1 т, то максимальна кількість тонн карамелі *C*, яка може бути виготовлена підприємством, дорівнює $\min\left\{\frac{800}{0,6};\frac{600}{0,3};\frac{120}{0,1}\right\} = \frac{120}{0,1} = 1200$, тобто обмежуючим фактором для виробництва карамелі *C* є наявний обсяг фруктового пюре. З урахуванням його наявності фабрика може виготовити 1200 т карамелі *C*. При цьому фруктове пюре буде повністю використане.

Заповнюємо таблицю наступної ітерації (табл. 3.8).

Таблиця 3.8

i	Б	$C_б$	P_0	108	112	126	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	80	0,8	– 0,1	0	1	0	–6
2	P_5	0	240	0,4	0,1	0	0	1	–3
3	P_3	126	1200	0	1	1	0	0	10
4			151200	–108	14	0	0	0	1260

Спочатку заповнюємо рядок щойно введеного в базис вектора (третій рядок). Для цього кожен елемент третього рядка попередньої симплекс-таблиці ділимо на 0,1 (на ключовий елемент). Далі заповнюємо елементи стовпців для векторів, що входять у новий базис. У цих стовпцях на перетині однойменних векторів ставимо 1, а всі інші елементи покладаємо рівними 0.

Для обчислення інших елементів таблиці 3.8 використовуємо правило трикутника. Почнемо із P_0. Обчислюємо перший елемент стовпчика. Для цього знаходимо три числа:

1) число, що знаходиться у шуканій клітинці в попередній симплекс-таблиці (табл.3.7) (тобто, на перетині першого рядка і стовпчика P_0): 800;

2) число, що знаходиться у провідному стовпці навпроти першого числа (тобто, що знаходиться на перетині стовпчика вектора P_3 і першого рядка таблиці 3.7): 0,6;

3) число нової симплекс-таблиці, отримане шляхом поділу провідного рядка на ключовий елемент, що стоїть у стовпчику P_0 (тобто, на перетині стовпчика P_0 і третього рядка табл. 3.8): 1200.

Обчислюємо вираз $800 - 0,6 \cdot 1200 = 80$ і записуємо його в першому рядку стовпчика вектора P_0.

Знаходимо значення третього елемента стовпчика P_0. Для цього згідно з правилом трикутника перші два числа старої симплекс-таблиці (табл. 3.7) — це 600 і 0,3, третє число — 120 з нової таблиці (табл. 3.8). Отже, третім елементом стовпчика P_0 буде число $600 - 0,3 \cdot 1200 = 240$.

Обчислимо елементи стовпчика P_1. Для обчислення першого елемента маємо два числа таблиці 3.7. — 0,8 та 0,6 і третє число таблиці 3.8 — 0. Отже, $a'_{41} = 0,8 - 0,6 \cdot 0 = 0,8$. Аналогічно для третього елемента стовпчика P_1: $0,4 - 0,3 \cdot 0 = 0,4$.

Аналогічним чином заповнюються стовпчики P_2 і P_6.

Залишилося заповнити останній, четвертий рядок:

$$F_0 = (C_\sigma, P_0) = 0 \cdot 80 + 0 \cdot 240 + 126 \cdot 1200 = 151200;$$
$$\Delta_1 = (C_\sigma, P_1) - c_1 = 0 \cdot 0,8 + 0 \cdot 0,4 + 126 \cdot 0 - 108 = -108;$$
$$\Delta_2 = (C_\sigma, P_2) - c_2 = 0 \cdot (-0,1) + 0 \cdot 0,1 + 126 \cdot 1 - 112 = 14;$$
$$\Delta_6 = (C_\sigma, P_6) - c_6 = 0 \cdot (-6) + 0 \cdot (-3) + 126 \cdot 10 - 0 = 1260;$$
$$\Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5 = 0.$$

Одержаний опорний план $X = (0; 0; 1200; 80; 240; 0)$ не є оптимальним, оскільки $\Delta_1 < 0$.

Економічний зміст.

Згідно даного плану виготовляється 1200 т карамелі C і залишаються невикористаними 80 т цукрового піску і 240 т патоки. Прибуток тут складає 151200 грн. Розглянемо для прикладу дані стовпчика P_1. Число 0 у третьому рядку показує, на скільки слід зменшити виготовлення карамелі C, якщо запланувати випуск однієї тонни карамелі A. Числа 0,8 і 0,4 в 1-му і 2-му рядках вектора P_1 показують відповідно, скільки потрібно цукрового піску і патоки при включенні в план виробництва однієї тонни карамелі A, а число (– 108) у четвертому рядку підказує, що випуск 1т карамелі A забезпечить збільшення прибутку на 108 грн. Такий же зміст мають числа стовпчика P_2. Дещо інший економічний зміст містять числа, записані в стовпці P_6 Число 10 у 3-му рядку показує, що збільшення запасів фруктового пюре на 1 т дозволило б збільшити випуск карамелі C на 10 т. При цьому знадобилося б 6 т цукрового піску і 3 т патоки. Збільшення випуску карамелі C на 10 т призведе до збільшення прибутку на 1260 грн.

Із викладеного економічного змісту даних таблиці 3.8 випливає, що отриманий план не є оптимальним.

Оскільки єдине $\Delta_1 < 0$, то P_1 включаємо в базис. Для визначення провідного рядка шукаємо $\min\left\{\frac{80}{0,8}; \frac{240}{0,4}\right\} = \frac{80}{0,8} = 100$; а, отже, з базису виключаємо P_4. Число 0,8 буде ключовим елементом.

Будуємо нову симплекс-таблицю (табл. 3.9).

Таблиця 3.9

i	Б	C_σ	P_0	108	112	126	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	108	100	1	– 0,125	0	1,25	0	–7,5
2	P_5	0	200	0	0,15	0	–5	1	0
3	P_3	126	1200	0	1	1	0	0	10
4			162000	0	0,5	0	135	0	450

Спочатку ділимо всі елементи першого рядка таблиці 3.8 на 0,8 і результат записуємо в першому рядку таблиці 3.9. Далі заповнюємо елементи стовпчиків векторів базису і за правилом трикутника всі інші числа таблиці. Після цього підраховуємо елементи 4-го рядка нової симплекс-таблиці:

$$F_0 = (C_\sigma, P_0) = 162000; \ \Delta_2 = (C_\sigma, P_2) - c_2 = 0,5;$$
$$\Delta_4 = (C_\sigma, P_4) - c_4 = 135; \ \Delta_6 = (C_\sigma, P_6) - c_6 = 450; \ \Delta_1 = \Delta_3 = \Delta_5 = 0.$$

Оскільки всі $\Delta_j \geq 0$ $(j = \overline{1,6})$, то план $X = (100; 0; 1200; 0; 200; 0)$ буде оптимальним і $F_{max} = 162000$.

Економічний зміст.

Отже, оптимальний план виготовлення карамелі включає виготовлення 100 т карамелі A, 1200 т карамелі C. При даному плані повністю використовується цукровий пісок і фруктове пюре, але залишаються невикористаними 200 т патоки. Прибуток при такому плані складає 162000 грн.

Оптимальним планом виготовлення карамелі не передбачено випуск карамелі B. Введення у план виготовлення 1 т карамелі B призвело б до зменшення прибутку на 0,5 грн. (це видно з 4-го рядка стовпчика P_2).

Приклад 2. Знайти максимум функції

$$F = 2x_1 - 6x_2 + 5x_5$$

за умов

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 20, \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 24, \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 = 18, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,6}).$$

Розв'язання. Систему рівнянь задачі запишемо у векторній формі:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0,$$

де

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}; \quad P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad P_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 24 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Оскільки серед векторів P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 є три одиничних вектори, то для даної задачі можна безпосередньо знайти опорний план. Таким є план $X = (0; 0; 20; 24; 0; 18;)$. Складаємо симплекс-таблицю (табл.3.10) і перевіряємо, чи є даний опорний план оптимальним.

Таблиця 3.10

Б	C_σ	P_0	2	-6	0	0	5	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_3	0	20	–2	1	1	0	1	0
P_4	0	24	–1	–2	0	1	3	0
P_6	0	18	3	–1	0	0	–12	1
		0	–2	6	0	0	–5	0

Як видно з таблиці 3.10, початковий опорний план не є оптимальним. Тому переходимо до нового опорного плану. Це можна зробити, оскільки в стовпцях векторів P_1 і P_5, четвертий рядок яких містить від'ємні числа, є додатні елементи. Для переходу до нового опорного плану введемо в базис вектор P_5 і виключимо з базису вектор P_4. Складаємо таблицю II ітерації (табл. 3.11).

Таблиця 3.11

Б	C_σ	P_0	2	-6	0	0	5	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_3	0	12	–5/3	5/3	1	–1/3	0	0
P_5	5	8	–1/3	–2/3	0	1/3	1	0
P_6	0	114	–1	–9	0	4	0	1
		40	–11/3	8/3	0	5/3	0	0

Як видно з таблиці 3.11, новий опорний план задачі не є оптимальним, оскільки в четвертому рядку стовпця вектора P_1 стоїть від'ємне число (–11/3). Оскільки в стовпці цього вектора немає додатних елементів, то дана задача не має оптимального плану.

3.5. Метод штучного базису

Як показано вище, для задачі, записаної у формі основної задачі лінійного програмування, можна безпосередньо вказати її опорний план, якщо серед векторів P_j, компонентами яких слугують коефіцієнти при невідомих у системі рівнянь даної задачі, є m одиничних. Проте для багатьох задач лінійного програмування, записаних у формі основної задачі, які мають опорні плани, серед векторів P_j не завжди є m одиничних. Розглянемо таку задачу:

Нехай потрібно знайти максимум функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{1}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n}), \tag{3}$$

де $b_i \geq 0$ $(i=\overline{1,m})$, $m<n$ і серед векторів

$$P_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix};\quad P_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix};\quad \ldots;\quad P_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

немає m одиничних.

Задача, що полягає у визначенні максимального значення функції

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n-Mx_{n+1}-\ldots-Mx_{n+m} \qquad (4)$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m, \end{cases} \qquad (5)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,n+m}), \qquad (6)$$

де M — деяке достатньо велике додатне число, конкретне значення якого зазвичай не задається, називається *розширеною задачею (М-задачею)* відносно до задачі (1) — (3).

Розширена задача має опорний план

$$X=(\underbrace{0;\ 0\ ;\ \ldots;\ 0}_{n};\ b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_m),$$

визначається системою одиничних векторів $P_{n+1}, P_{n+2}, \ldots, P_{n+m}$, що утворюють базис m-вимірного векторного простору, який називається *штучним.* Самі вектори, так само як і змінні x_{n+i} $(i=\overline{1,m})$, називаються *штучними.* Оскільки розширена задача має опорний план, то її розв'язок може бути знайдений симплексним методом.

Теорема. Якщо в оптимальному плані

$$X^*=(x_1^*;x_2^*;\ldots;x_n^*;x_{n+1}^*;\ldots;x_{n+m}^*)$$

розширеної задачі (4) — (6) значення штучних змінних $x^*_{n+i}=0$ $(i=\overline{1,m})$, то $X^*=(x_1^*;x_2^*;\ldots;x_n^*)$ є оптимальним планом задачі (1) — (3).

Таким чином, якщо в знайденому оптимальному плані розширеної задачі значення штучних змінних дорівнюють нулю, то тим самим одержано оптимальний план початкової задачі. Тому зупинимося детальніше на знаходженні розв'язку розширеної задачі.

При опорному плані $X=(0;\ 0;\ \ldots;\ 0;\ b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_m)$ розширеної задачі значення лінійної форми $F_0=-M\sum_{i=1}^{m} b_i$, а значення $\Delta_j=z_j-c_j$ дорівнюють $-M\sum_{i=1}^{m} a_{ij}-c_j$. Таким чином, F_0 і різниці z_j-c_j складаються з двох незалежних частин, одна з яких залежить від M, а інша – ні.

Після обчислення F_0 і Δ_j їх значення, а також початкові дані розширеної задачі заносять у таблицю, яка містить на один рядок більше, ніж звична симплекс-таблиця. При цьому в $(m+2)$-й рядок записують коефіцієнти при M, а в $(m+1)$-й — доданки, що не містять M.

При переході від одного опорного плану до іншого в базис вводять вектор, що відповідає найбільшому за абсолютною величиною від'ємному числу $(m+2)$-го рядка. Штучний вектор, виключений із базису в результаті деякої ітерації, надалі не має сенсу вводити ні в один з подальших базисів і, отже, перетворення стовпців цього вектора зайве. Проте якщо потрібно знайти розв'язок двоїстої задачі для даної (про що буде сказано в 3.8), то таке перетворення необхідне. Може трапитися так, що в результаті деякої ітерації жоден із штучних векторів із базису не буде виключений.

Перерахунок симплекс-таблиць при переході від одного опорного плану до іншого здійснюють за загальними правилами симплекс-методу.

Ітераційний процес по $(m+2)$-му рядку ведуть доти, поки:

1) всі штучні вектори не будуть виключені з базису;

2) не всі штучні вектори виключені, але $(m+2)$-й рядок не містить більше від'ємних елементів у стовпцях векторів $P_1, P_2, \ldots, P_{n+m}$.

У першому випадку базис відповідає деякому опорному плану початкової задачі і відшукання її оптимального плану продовжують за $(m+1)$-м рядком.

У другому випадку, якщо елемент, що стоїть в $(m+2)$-му рядку стовпця вектора P_0, від'ємний, початкова задача не має розв'язку; якщо ж він дорівнює нулю, то знайдений опорний план початкової задачі є виродженим і базис містить принаймні один із векторів штучного базису.

Якщо початкова задача містить декілька одиничних векторів, то їх слід включити в штучний базис.

Отже, *процес знаходження розв'язку задачі* (1) — (3) *методом штучного базису включає такі основні етапи*:

1) складають розширену задачу (4) — (6);

2) знаходять опорний план розширеної задачі;

3) за допомогою звичайних обчислень симплекс-методу виключають штучні вектори з базису. В результаті або знаходять опорний план початкової задачі (1) — (3), або встановлюють її нерозв'язність;

4) використовуючи знайдений опорний план задачі (1) — (3), або знаходять симплекс-методом оптимальний план початкової задачі, або встановлюють її нерозв'язність.

Приклад 1. Знайти мінімум функції

$$F=-2x_1+3x_2-6x_3-x_4$$

за умов

$$\begin{cases}2x_1+\ \ x_2-2x_3+x_4=24,\\ x_1+2x_2+4x_3\qquad\le 22,\\ x_1-\ \ x_2+2x_3\qquad\ge 10,\end{cases}$$

$$x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0\,.$$

Розв'язання. Запишемо дану задачу у формі основної задачі: знайти максимум функції $F=2x_1-3x_2+6x_3+x_4$ за умов

$$\begin{cases}2x_1+\ \ x_2-2x_3+x_4\qquad\quad=24,\\ x_1+2x_2+4x_3\qquad+x_5\quad=22,\\ x_1-\ \ x_2+2x_3\qquad\quad-x_6=10,\end{cases}$$

$$x_j\ge 0\ \ (j=\overline{1,6}).$$

У системі рівнянь останньої задачі розглянемо вектори з коефіцієнтів при невідомих:

$$P_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix};\quad P_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix};\quad P_3=\begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix};\quad P_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$P_5=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\quad P_6=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Серед векторів $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ тільки два одиничних (P_4 *і* P_5). Тому в ліву частину третього рівняння системи обмежень задачі додамо додаткову невід'ємну змінну x_7 і розглянемо розширену задачу, що полягає у знаходженні максимуму функції

$$F=2x_1-3x_2+6x_3+x_4-Mx_7$$

за умов

$$\begin{cases}2x_1+\ \ x_2-2x_3+x_4\qquad\qquad\quad=24,\\ x_1+2x_2-4x_3\quad+x_5\qquad\quad=22,\\ x_1-\ \ x_2+2x_3\qquad\quad-x_6+x_7=10,\end{cases}$$

$$x_j\ge 0\ \ (j=\overline{1,7}).$$

Розширена задача має опорний план $X=(0;0;0;24;22;0;10)$, визначений системою трьох одиничних векторів: $P_4; P_5; P_7$.

Складаємо таблицю I ітерації, що містить п'ять рядків (табл. 3.12).

Таблиця 3.12

i	Б	C_σ	P_0	2	-3	6	1	0	0	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_4	1	24	2	1	–2	1	0	0	0
2	P_5	0	22	1	2	4	0	1	0	0
3	P_7	$-M$	10	1	–1	2	0	0	–1	1
4			24	0	4	–8	0	0	0	0
5			–10	–1	1	–2	0	0	1	0

Для заповнення 4-го і 5-го рядків знаходимо F_0 і значення $\Delta_j\,(j=\overline{1,7})$:

$$F_0=24-10M;\ \Delta_1=0-M;\ \Delta_2=4+M;\ \Delta_3=-8-2M;\ \Delta_4=0;$$
$$\Delta_5=0;\ \Delta_6=0+M;\ \Delta_7=0.$$

Значення F_0 і Δ_j складаються з двох доданків, один з яких містить M, а другий — ні. Для зручності ітераційного процесу число, що стоїть при M, записуємо в 5-й рядок, а доданок, який не містить M,— у 4-й рядок.

У 5-му рядку таблиці 3.12 в стовпцях векторів P_1 і P_3 є два від'ємних числа (–1 і –2). Наявність цих чисел свідчить про те, що даний опорний план розширеної задачі не є оптимальним. Переходимо до нового опорного плану розширеної задачі. У базис вводимо вектор P_3. Щоб визначити вектор, що виключається з базису, знаходимо $\min\left\{\frac{22}{4};\frac{10}{2}\right\}=\frac{10}{2}$. Отже, вектор P_7 виключаємо з базису. Цей вектор немає сенсу вводити в жоден із подальших базисів, тому надалі стовпець даного вектора не заповнюється.

Складаємо таблицю II ітерації (табл. 3.13). Вона містить тільки чотири рядки, оскільки штучний вектор із базису виключений.

Таблиця 3.13

i	Базис	C_σ	P_0	2	-3	6	1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	1	34	3	0	0	1	0	–1
2	P_5	0	2	–1	4	0	0	1	2
3	P_3	6	5	1/2	–1/2	1	0	0	1/2
4			64	4	0	0	0	0	–4

Отримуємо новий опорний план задачі $X=(0;0;5;34;2;0)$ цієї таблиці. Перевіримо його на оптимальність. Для цього розглянемо елементи 4-го рядка. У цьому рядку в стовпці вектора P_6 є від'ємне число (– 4). Отже, даний опорний план не є оптимальним і може бути поліпшений шляхом введення в базис вектора P_6. З базису виключається вектор P_5. Складаємо таблицю III ітерації (табл. 3.14).

У 4-му рядку таблиці 3.14. серед чисел Δ_j немає невід'ємних. Це означає, що знайдений новий опорний план початкової задачі $X^*=(0;0;11/2;35;0;1)$ є оптимальним. При цьому плані значення $F_{\max}=68$.

Таблиця 3.14

i	Базис	C_σ	P_0	2	-3	6	1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	1	35	5/2	2	0	1	1/2	0
2	P_6	0	1	–1/2	2	0	0	1/2	1
3	P_3	6	11/2	1/4	1/2	1	0	1/4	0
4			68	2	8	0	0	2	0

Приклад 2. Знайти мінімум функції

$$F=2x_1-x_2-x_4$$

за умов

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3 = 10,\\ -2x_1-x_2-2x_4\ge 18,\\ 3x_1+2x_2+x_4\ge 36,\end{cases}$$

$$x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0.$$

Розв'язання. Запишемо дану задачу у формі основної задачі лінійного програмування: знайти максимум функції

$$F=-2x_1+x_2+x_4$$

за умов

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3 = 10,\\ -2x_1-x_2-2x_4-x_5 = 18,\\ 3x_1+2x_2+x_4-x_6=36,\end{cases}$$

$$x_j\ge 0\ \ (j=\overline{1,6}).$$

Оскільки серед векторів

$$P_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix};\quad P_2=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix};\quad P_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$P_4=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}\quad P_5=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix};\quad P_6=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

є тільки один одиничний (P_3), то знаходимо розв'язок розширеної задачі, що полягає у визначенні максимального значення функції

$$F = -2x_1 + x_2 + x_4 - Mx_7 - Mx_8$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_4 - x_5 + x_7 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 - x_6 + x_8 = 36, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,8}).$$

Розширена задача має опорний план $X = (0; 0; 10; 0; 0; 0; 18; 36)$, що визначається системою трьох одиничних векторів: P_3, P_7 і P_8.

Складаємо таблицю І ітерації (табл. 3.15).

Таблиця 3.15

i	Б	$C_б$	P_0	–2	1	0	1	0	0	$-M$	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
1	P_3	0	10	–1	–2	1	0	0	0	0	0
2	P_7	$-M$	18	–2	–1	0	–2	–1	0	1	0
3	P_8	$-M$	36	3	2	0	1	0	–1	0	1
4			0	2	–1	0	–1	0	0	0	0
5			–54	–1	–1	0	1	1	1	0	0

У п'ятому рядку таблиці 3.15 у стовпцях векторів P_1 і P_2 є від'ємні числа. Тому переходимо до нового опорного плану розширеної задачі. У базис вводимо вектор P_2, а з базису виключаємо вектор P_8.

Складаємо таблицю II ітерації (табл. 3.16). Оскільки виключений із базису штучний вектор P_8 немає сенсу вводити в жоден із подальших базисів, то в таблиці цей вектор не вказується.

Таблиця 3.16

i	Б	$C_б$	P_0	–2	1	0	1	0	0	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_3	0	46	4	0	1	1	0	–1	0
2	P_7	$-M$	36	–1/2	0	0	–3/2	–1	–1/2	1
3	P_2	1	18	3/2	1	0	1/2	0	–1/2	0
4			18	7/2	0	0	–1/2	0	–1/2	0
5			–36	1/2	0	0	3/2	1	1/2	0

У п'ятому рядку таблиці 3.16 у стовпчиках векторів $P_1, P_2, ..., P_7$ не міститься від'ємних елементів. У стовпці вектора P_0 цього рядка знаходиться від'ємний елемент (– 36).

Отже, вихідна задача не має опорного плану.

3.6. Поняття про вироджений розв'язок

При розгляді симплекс-методу припускалося, що $b_i > 0$, $i = \overline{1,m}$ як у вихідній системі обмежень, так і в системах, які одержуються після чергових ітерацій. Якщо ж у деяких рівняннях вільні члени $b_i = 0$, то в опорному плані, який відповідає цій системі, базисні змінні, відносно яких ці рівняння розв'язані, набувають нульового значення. Опорний план, в якому хоча б одна з базисних змінних набуває нульового значення, називається *виродженим планом*, а задача лінійного програмування, яка має хоча б один вироджений план, — *виродженою задачею*. Застосовуючи в цьому випадку алгоритм симплекс-методу, ми можемо повернутися до такого набору базисних та вільних змінних, які зустрічалися раніше, тобто з'являється так зване зациклювання в схемі розрахунку. В цьому випадку доцільно користуватися правилом *усунення можливого зациклювання*, суть якого є наступною.

Якщо на якомусь етапі виконання симплекс-методу виникає невизначеність у виборі провідного рядка, тобто виявляється кілька рівних мінімальних відношень $\frac{b_i}{a_{ip}}$, то слід вибирати той рядок, для якого відношення елементів наступного стовпчика до провідного виявиться найменшим. Якщо при цьому знову виявляються рівними мінімальні відношення, то складають відношення елементів наступного стовпчика, і так доти, поки провідний рядок не визначиться однозначно.

Приклад. Розв'язати задачу лінійного програмування

$$f = 4x_5 + 2x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_5 + x_6 = 12, \\ x_2 + 5x_5 - x_6 = 30, \\ x_3 + x_5 - 2x_6 = 6, \\ 2x_4 + 3x_5 - 2x_6 = 18, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,6}.$$

Розв'язання. Розділивши останнє рівняння на 2, складаємо таблицю симплекс-методу (табл. 3.17).

Таблиця 3.17

i	Б	C_σ	P_0	0	0	0	0	4	2
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	0	12	1	0	0	0	1	1
2	P_2	0	30	0	1	0	0	5	–1
3	P_3	0	6	0	0	1	0	1	–2
4	P_4	0	9	0	0	0	1	3/2	–1
5			0	0	0	0	0	–4	–2

Для вибору провідного рядка маємо співвідношення:

$$\min\left\{\frac{12}{1}; \frac{30}{5}; \frac{6}{1}; \frac{9}{3/2}\right\} = \min\{12; 6; 6; 6\}.$$

Складаємо співвідношення елементів стовпця P_6 до елементів стовпця P_5:

$$\min\left\{\frac{1}{1}; \frac{-1}{5}; \frac{-2}{1}; \frac{-1}{3/2}\right\} = -2.$$

Отже, виводимо вектор P_3 (табл. 3.18).

Таблиця 3.18

i	Б	C_σ	P_0	0	0	0	0	4	2
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	0	6	1	0	–1	0	0	3
2	P_2	0	0	0	1	–5	0	0	9
3	P_5	4	6	0	0	1	0	1	–2
4	P_4	0	0	0	0	–3/2	1	0	2
5			24	0	0	4	0	0	–10

Складаємо відношення:

$$\min\left\{\frac{6}{3}; \frac{0}{9}; \frac{0}{2}\right\}.$$

Взявши за основу стовпчик P_3, маємо:

$$\min\left\{\frac{-1}{3}; \frac{-5}{9}; \frac{1}{-2}; \frac{-3/2}{2}\right\} = -\frac{3}{4}.$$

Отже, виводимо вектор P_4 (табл. 3.19).

Таблиця 3.19

i	Б	C_σ	P_0	0	0	0	0	4	2
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	0	6	1	0	5/4	–3/2	0	0
2	P_2	0	0	0	1	7/4	–9/2	0	0
3	P_5	4	6	0	0	–1/2	1	1	0
4	P_6	2	0	0	0	–3/4	1/2	0	1
5			24	0	0	–7/2	5	0	0

$$\min\left\{\frac{6}{5/4};\frac{0}{7/4}\right\}=0\,.$$

Виводимо вектор P_2 (табл. 3.20).

Таблиця 3.20

i	Б	C_σ	P_0	0	0	0	0	4	2
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	0	6	1	–5/7	0	12/7	0	0
2	P_3	0	0	0	4/7	1	–18/7	0	0
3	P_5	4	6	0	2/7	0	–2/7	1	0
4	P_6	2	0	0	3/7	0	–10/7	0	1
5			24	0	2	0	–4	0	0

Таблиця 3.21

i	Б	C_σ	P_0	0	0	0	0	4	2
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	7/2	7/12	–5/12	0	1	0	0
2	P_3	0	9	3/2	–1/2	1	0	0	0
3	P_5	4	7	1/6	1/6	0	0	1	0
4	P_6	2	5	5/6	–1/6	0	0	0	1
5			38	7/3	1/3	0	0	0	0

Оптимальним планом задачі є вектор $X^*=\left(0;0;9;\frac{7}{2};7;5\right)$, при якому $f_{\max}=38$ (табл. 3.21).

У даній схемі розрахунків зациклювання не з'явилося, хоча протягом трьох ітерацій (таблиці 3.18, 3.19, 3.20) ми фактично "тупцювали на місці", оскільки змінювалися тільки базисні та вільні змінні, а значення цільової функції залишалося тим же: $f=24$. Оптимальний розв'язок було одержано завдяки тому, що на перших ітераціях застосувалося правило усунення можливого зациклювання, описане вище.

3.7. Модифікований симплекс-метод

При розв'язанні задач лінійного програмування симплексним методом здійснювався впорядкований перехід від одного опорного плану до іншого доти, поки або не була встановлена нерозв'язність задачі, або не було знайдено її оптимальний план. При цьому для визначення: є знайдений опорний план оптимальним, чи ні, на кожній з ітерацій потрібно було знаходити числа

$$\Delta_j=Z_j-c_j=c_{i_1}x_{i_1j}+c_{i_2}x_{i_2j}+\ldots+c_{i_m}x_{i_mj}-c_j\,,$$

де $i_1,i_2,\ldots,i_m$ — номери базисних векторів, а $x_{i_1j},x_{i_2j},\ldots,x_{i_mj}$ — коефіцієнти розкладу векторів P_j по векторах даного базису. Всі зазначені коефіцієнти потрібно було визначати на кожній з ітерацій обчислювального процесу. Ця необхідність відпадає при розв'язанні задач лінійного програмування модифікованим симплекс-методом. У цьому випадку на кожній з ітерацій обчислюють вектор

$$\Omega=C_\sigma B^{-1}\,, \tag{1}$$

де B^{-1} — матриця, обернена матриці B, що складена з компонентів векторів даного базису, а потім знаходять числа Δ_j за формулою:

$$\Delta_j=\Omega P_j-c_j\,. \tag{2}$$

Визначимо компоненти вектора Ω і чисел Δ_j у випадку розв'язання основної задачі лінійного програмування модифікованим симплекс-методом.

Отже, нехай дана задача лінійного програмування записана у формі основної задачі, і нехай для неї знайдено опорний план, який визначається базисом, утвореним із векторів $P_{i_1},P_{i_2},\ldots,P_{i_m}$. Відповідно, відома матриця B, для якої можна знайти обернену матрицю B^{-1}. Наступні обчислення зручніше вести, якщо їхні результати, як і при розв'язанні задачі симплекс-методом, оформляти у вигляді таблиць. У цьому випадку при переході від однієї так званої основної таблиці до іншої використовується допоміжна таблиця.

Допоміжна таблиця (табл. 3.22) відрізняється від звичайної симплекс-таблиці тим, що в ній знаходяться додаткові стовпці і рядки, у яких відповідно записують координати векторів $\Omega^{(i)}$ і значення $\Delta_j^{(1)}$, отримані в процесі знаходження розв'язку задачі.

Таблиця 3.22

i	Б	$C_б$	P_o	c_1	c_2	…	c_n	$\Omega^{(1)}$	$\Omega^{(2)}$	…	$\Omega^{(k)}$
				P_1	P_2	…	P_n				
1	P_{i_1}	c_{i_1}	$X_{i_1 0}$	$X_{i_1 1}$	$X_{i_1 2}$	…	$X_{i_1 n}$	$\lambda_1^{(1)}$	$\lambda_1^{(2)}$	…	$\lambda_1^{(k)}$
2	P_{i_2}	c_{i_2}	$X_{i_2 0}$	$X_{i_2 1}$	$X_{i_2 2}$	…	$X_{i_2 n}$	$\lambda_2^{(1)}$	$\lambda_2^{(2)}$	…	$\lambda_2^{(k)}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	P_{i_m}	c_{i_m}	$X_{i_m 0}$	$X_{i_m 1}$	$X_{i_m 2}$	…	$X_{i_m n}$	$\lambda_m^{(1)}$	$\lambda_m^{(2)}$	…	$\lambda_m^{(k)}$
$m+1$	$\Delta_j^{(1)}$			$\Delta_1^{(1)}$	$\Delta_2^{(1)}$	…	$\Delta_n^{(1)}$				
$m+2$	$\Delta_j^{(2)}$			$\Delta_1^{(2)}$	$\Delta_2^{(2)}$	…	$\Delta_n^{(2)}$				
…	…			…	…	…	…				
$m+k$	$\Delta_j^{(k)}$			$\Delta_1^{(k)}$	$\Delta_2^{(k)}$	…	$\Delta_n^{(k)}$				

Таблиця 3.23

i	Б	$C_б$	$P_о$	A_1	A_2	…	A_m	P_s
1	P_{i_1}	$c_{i_1 0}$	$X_{i_1 0}$	a_{11}	a_{11}	…	a_{1m}	$X_{i_1 s}$
2	P_{i_2}	$c_{i_2 0}$	$X_{i_2 0}$	a_{21}	a_{22}	…	a_{2m}	$X_{i_2 s}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…
r	P_{i_r}	$c_{i_2 0}$	$X_{i_2 0}$	a_{r1}	a_{r2}	…	X_{rm}	$X_{i_r s}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	P_{i_m}	$c_{i_m o}$	$X_{i_m 0}$	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mm}	$X_{i_m s}$
$m+1$	$\Omega^{(1)}F_0$			$\lambda_1^{(1)}$	$\lambda_2^{(1)}$	…	$\lambda_m^{(1)}$	$\Delta_s^{(i)}$

Основна таблиця (табл. 3.23) відрізняється від звичайної симплекс-таблиці, по-перше, тим що замість стовпців векторів P_j з відповідними числами c_j записують стовпці векторів A_i , координатами яких є відповідні стовпці матриці B^{-1}; по-друге, в $m+1$-му рядку записують компоненти векторів Ω, а не числа Δ_j ; по-третє, табл. 3.23 має один додатковий стовпець, у перших m рядках якого

записують координати вектора P_s у базисі $P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_m}$ і який було б доцільно включити в базис у наступній ітерації.

Щоб визначити вектор P_s, спочатку знаходять вектор $\Omega^{(1)}$. Його компоненти визначають як скалярний добуток вектора C_σ на відповідні вектори A_i, тобто за формулою $\Omega = C_\sigma B^{-1}$. Знайдені компоненти вектора $\Omega^{(1)}$ записують в останньому рядку табл. 3.23, і у стовпці $\Omega^{(1)}$ табл. 3.22. Після цього за формулою (2) знаходять елементи $(m+1)$-го рядка допоміжної таблиці. Якщо серед знайдених чисел $(m+1)$-го рядка допоміжної таблиці немає від'ємних значень, то вихідний опорний план є оптимальним. Якщо ж є від'ємні, то або задача не має розв'язку, або можна перейти до нового опорного плану, при якому значення цільової функції не зменшиться. Для з'ясування цього вибирають серед від'ємних чисел $(m+1)$-го рядка табл. 3.22 найбільше за модулем значення. У тому випадку, коли таких чисел є декілька, вибирають будь-яке. Нехай цим числом буде $\Delta_s^{(1)}$. Тоді останній стовпець табл. 3.23 відводять для вектора P_s. У перших m рядках цього стовпця записують компоненти вектора P_s, а в базис — $P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_m}$. Їх отримуємо шляхом множення матриці B^{-1}, записаної в табл. 3.23, на вектор P_s, компоненти якого вказані в табл. 3.22. Після визначення чисел $x_{i_1 s}, x_{i_2 s}, ..., x_{i_m s}$ з'ясовують, є серед них додатні чи ні. Якщо такі числа відсутні, то задача немає розв'язку. Якщо ж додатні числа є, то переходять до наступного опорного плану задачі. Для цього знаходять $\min\limits_{x_{i_k s}>0}(x_{i_k 0}/x_{i_k s})$. Нехай $\min\limits_{x_{i_k s}>0}(x_{i_k 0}/x_{i_k s}) = \dfrac{x_{i_r 0}}{x_{i_r s}}$. Тоді новий опорний план визначається базисом, отриманим із вихідного опорного плану шляхом виключення з базису вектора P_{i_r} і введенням замість нього вектора P_s. Вважаючи елемент $x_{i_r s}$ ключовим, а r рядок і стовпець вектора P_s провідними, переходять до нової основної таблиці. Перші m рядків стовпців векторів $P_0, A_1, A_2, ..., A_m$ нової таблиці знаходять за відомими правилами переходу від однієї симплекс-таблиці до іншої, розглянутими вище. Після обчислення цих елементів знаходять вектор $\Omega^{(2)}$. Компоненти названого вектора записують як у новій основній таблиці, так і у допоміжній таблиці (табл. 3.22). Потім обчислюють числа $\Delta_j^{(2)}$ і перевіряють новий опорний план на оптимальність. Якщо план не оптимальний, то або встановлюють нерозв'язність вихідної задачі, або переходять до нового опорного плану. Продовжуючи ітераційний процес, після скінченого числа кроків або знаходять оптимальний план задачі, або встановлюють її нерозв'язність.

Таким чином, *процес знаходження розв'язку задачі модифікованим симплекс-методом включає такі етапи*:

1. Знаходять опорний план задачі.
2. Обчислюють матрицю B^{-1}, обернену матриці B, що складена з компонентів векторів вихідного базису.
3. Знаходять вектор $\Omega = C_\sigma B^{-1}$.
4. Обчислюють числа $\Delta_j = \Omega P_j - c_j$. Якщо всі Δ_j додатні, то досліджуваний опорний план є оптимальним. Якщо ж серед чисел Δ_j є від'ємні, то вибирають серед них найбільше за модулем. Нехай це буде Δ_s.
5. Обчислюють компоненти вектора P_s у вихідному базисі. Якщо серед компонентів вектора P_s немає додатних, то цільова функція задачі не обмежена на множині планів. Якщо ж серед компонентів вектора P_s є додатні, то переходять до нового опорного плану.
6. За відомими правилами симплекс-методу знаходять провідний рядок й обчислюють додатні компоненти нового опорного плану, а також матрицю B^{-1}, обернену матриці B, що складена з компонентів векторів нового базису.
7. Перевіряють новий опорний план на оптимальність і у разі необхідності повторюють обчислення, починаючи з етапу 3.

3.8. Двоїсті задачі лінійного програмування

3.8.1. Пряма і двоїста задачі

Кожній задачі лінійного програмування можна певним чином поставити у відповідність деяку іншу задачу лінійного програмування, яку називають двоїстою або спряженою відносно до вихідної чи прямої.

Розглянемо задачу:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \tag{1}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+11}x_1 + a_{k+12}x_2 + \ldots + a_{k+1n}x_n = b_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,l}, \quad l \le n). \tag{3}$$

Задача, яка полягає у знаходженні

$$F^* = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min \tag{4}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \ldots + a_{ml}y_m \ge c_l, \\ a_{1l+1}y_1 + a_{2l+1}y_2 + \ldots + a_{ml+1}y_n = c_{l+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m = c_n, \end{cases} \tag{5}$$

$$y_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,k}, \quad k \le m). \tag{6}$$

називається *двоїстою* відносно до задачі (1) — (3).

Для побудови двоїстої задачі слід перевірити, чи виконуються для вихідної задачі такі умови:

1) в усіх обмеженнях вільні члени містяться у правій частині рівності (нерівності), члени з невідомими — в лівій;

2) всі обмеження нерівності вихідної задачі мають бути записані так, щоб знаки нерівності в них були спрямовані в один і той же бік (для цього досить окремі нерівності помножити на -1);

3) загальний член нерівності системи обмежень пов'язується із цільовою функцією так:

$$\text{“}\le\text{”} \to \max; \qquad \text{“}\ge\text{”} \to \min.$$

Будуючи двоїсту задачу, потрібно виконувати такі правила:

1. Цільова функція вихідної задачі (1) — (3) задається на максимум, а цільова функція двоїстої (4) — (6) — на мінімум.

2. Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{21}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

складена з коефіцієнтів при невідомих у системі обмежень (2) вихідної задачі (1) — (3), і аналогічна матриця

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11}a_{21}\dots a_{m1} \\ a_{12}a_{22}\dots a_{m2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}a_{2n}\dots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (8)$$

двоїстої задачі (4) — (6) одержується одна з другої транспонуванням.

3. Число змінних у двоїстій задачі (4) — (6) дорівнює числу обмежень у системі (2) вихідної задачі, а число обмежень у системі (5) двоїстої задачі — числу змінних у вихідній задачі.

4. Коефіцієнтами при невідомих у цільовій функції (4) двоїстої задачі (4) — (6) є вільні члени в системі (2) вихідної задачі (1) — (3), а правими частинами в співвідношеннях системи (5) двоїстої задачі — коефіцієнти при невідомих у цільовій функції (1) вихідної задачі.

5. Якщо змінна x_j вихідної задачі (1) — (3) може приймати тільки додатні значення, то j-ва умова в системі (5) двоїстої задачі є нерівністю виду "$\geq$". Якщо ж змінна x_j приймає як додатні, так і від'ємні значення, то j-ве співвідношення в системі (5) являє собою рівняння. Аналогічні зв'язки мають місце між обмеженнями (2) вихідної задачі (1) — (3) і змінними двоїстої задачі (4) — (6).

Двоїсті пари задач поділяють на симетричні і несиметричні. У симетричній парі двоїстих задач обмеження (2) прямої задачі і співвідношення (5) двоїстої задачі є нерівності виду "$\leq$". Таким чином, змінні обох задач можуть приймати тільки невід'ємні значення.

Приклад. Двоїстою задачею до задачі $f = 6x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max$;

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 \leq 15, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 16, \\ 6x_1 + 5x_2 - 8x_3 \leq 12, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}$$

буде така:

$$f^* = 15y_1 + 16y_2 + 12y_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + 6y_3 \geq 6, \\ -7y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq -1, \\ 5y_1 - 4y_2 - 8y_3 \geq 3, \end{cases}$$

$$y_1, y_3 \geq 0.$$

3.8.2. Зв'язок між розв'язками прямої і двоїстої задач

Розглянемо пару двоїстих задач, утворену основною задачею лінійного програмування і двоїстою до неї.

Вихідна задача

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (9)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1,m}); \qquad (10)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}). \qquad (11)$$

Двоїста задача:

$$F^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min \qquad (12)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i \geq c_j \quad (j = \overline{1,n}). \qquad (13)$$

Кожна із задач двоїстої пари (9) — (11) та (12), (13) фактично є самостійною задачею лінійного програмування і може бути розв'язана незалежно одна від одної. Однак при визначенні симплексним методом оптимального плану однієї із задач водночас знаходиться розв'язок другої.

Лема 1. Якщо X — деякий план вихідної задачі (9) — (11), а Y — довільний план двоїстої задачі (12), (13), то значення цільової функції вихідної задачі при плані X завжди не перевершує значення цільової функції двоїстої задачі при плані Y, тобто $F(X) \le F^*(Y)$.

Лема 2. Якщо $F(X^*) = F^*(Y^*)$ для деяких планів X^* і Y^* задач (9) — (11) і (12), (13), то X^* — оптимальний план вихідної задачі, а Y^* — оптимальний план двоїстої задачі.

Теорема 1 (перша теорема двоїстості). Якщо у двоїстих задачах одна з них має розв'язок, то існуватиме розв'язок й іншої, а оптимальні значення при цьому збігаються, тобто $F_{\max} = F^*_{\min}$.

Теорема 2 (друга теорема двоїстості). Для того, щоб

$X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ і $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ були оптимальними планами задачі (9) – (11) та (12), (13) відповідно, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) x_j^* = 0;$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) y_i^* = 0.$$

3.8.3. Геометрична інтерпретація двоїстих задач

Якщо число змінних у прямій і двоїстій задачах, що утворять дану пару, дорівнює двом, то, використовуючи геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування, можна легко знайти розв'язок даної пари задач. При цьому можливим є один із таких трьох випадків: 1) обидві задачі мають плани; 2) плани має тільки одна задача; 3) для кожної задачі двоїстої пари множина планів порожня.

Приклад. Для задачі

$$f = 2x_1 + 7x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 14, \\ x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

скласти двоїсту задачу і знайти розв'язок обох задач за допомогою графічного методу.

Розв'язання. Двоїстою задачею до вихідної буде задача

$$F^* = 14y_1 + 8y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 \ge 2, \\ 3y_1 + y_2 \ge 7, \end{cases}$$

$$y_1, y_2 \ge 0.$$

Як бачимо з рис. 3.8, максимального значення цільова функція вихідної задачі набуває в точці B. Отже, $X^* = (2;6)$ є оптимальним планом, при якому $F_{\max} = 46$.

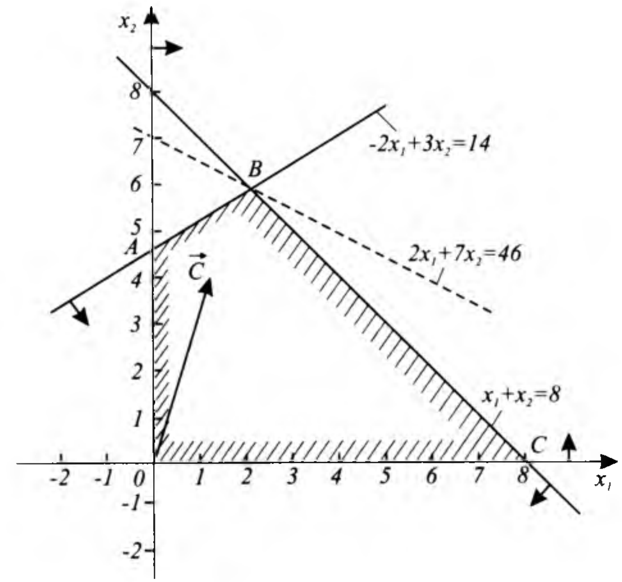


Рис. 3.8

Мінімального значення цільова функція двоїстої задачі набуває в точці E (рис. 3.9). Отже, $Y^* = (1;4)$ є оптимальним планом двоїстої задачі, при якому $F^*_{\min} = 46$.

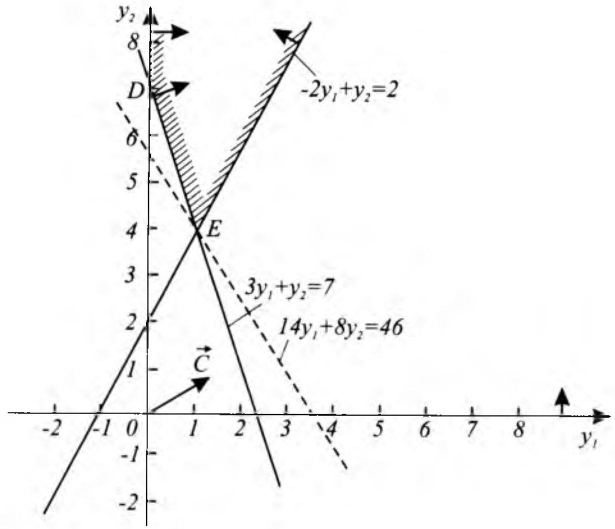


Рис. 3.9

Таким чином, значення цільових функцій вихідної і двоїстої задач при їхніх оптимальних планах рівні між собою.

З рис. 3.8 видно, що при будь-якому плані вихідної задачі значення цільової функції не більше 46. Одночасно, як бачимо з рис. 3.9, значення цільової функції двоїстої задачі при будь-якому її плані не менше 46. Отже, при будь-якому плані вихідної задачі значення цільової функції не перевершує значення цільової функції двоїстої задачі при її довільному плані.

3.8.4. Знаходження розв'язку двоїстих задач

Розглянемо пари двоїстих задач — основну задачу лінійного програмування (9) — (11) і двоїсту до неї задачу (12), (13).

Припустимо, що за допомогою симплексного методу знайдений оптимальний план X^* задачі (9) – (11) і цей план визначається базисом, утвореним векторами $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_m}$.

Позначимо через $C_\sigma = (c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m})$ вектор-рядок, складений із коефіцієнтів при невідомих у цільовій функції (9) задачі (9) — (11), а через P^{-1} – матрицю, обернену матриці P, що складена із компонент векторів $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_m}$ базису. Тоді отримаємо наступну теорему.

Теорема. Якщо основна задача лінійного програмування має оптимальний план X^*, то $Y^* = C_\sigma P^{-1}$ є оптимальним планом двоїстої задачі.

Таким чином, якщо знайти симплекс-методом оптимальний план задачі (9) — (11), то, використовуючи останню симплекс-таблицю, можна визначити C_σ та P^{-1} і за допомогою співвідношення $Y^* = C_\sigma P^{-1}$ знайти оптимальний план двоїстої задачі (12), (13).

У тому випадку, коли серед векторів $P_1, P_2, \ldots, P_n$, складених з коефіцієнтів при невідомих у системі рівнянь (10), є m одиничних, зазначену матрицю P^{-1} утворять числа перших m рядків останньої симплекс-таблиці, що знаходяться у стовпцях даних векторів. Тоді немає необхідності визначати оптимальний план двоїстої задачі множенням C_σ на P^{-1}, оскільки компоненти цього плану співпадають з відповідними елементами $(m+1)$-го рядка стовпців одиничних векторів (якщо даний коефіцієнт $c_j = 0$) і дорівнюють сумі відповідного елемента цього рядка і c_j, якщо $c_j \neq 0$.

Сказане вище є характерним і для симетричної пари двоїстих задач. Оскільки система обмежень вихідної задачі містить нерівності виду "≤", то компоненти оптимального плану двоїстої задачі тут дорівнюють відповідним числам $(m+1)$-го рядка останньої симплекс-таблиці розв'язку вихідної задачі. Вказані числа стоять у стовпцях векторів, що відповідають додатковим змінним.

Приклад. Для задачі

$$F = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 12, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 17, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0,$$

скласти двоїсту задачу і знайти її розв'язок.

Розв'язання. Двоїстою задачею до вихідної буде задача:

$$F^* = 12y_1 + 17y_2 + 4y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 1, \\ 4y_1 + y_2 - y_3 \ge 2, \\ -2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge -1, \end{cases}$$

$$y_1, y_2 \ge 0.$$

Для знаходження розв'язку двоїстої задачі шукаємо розв'язок вихідної задачі методом штучного базису (табл. 3.24).

Таблиця 3.24

i	Базис	$C_б$	P_0	1	2	−1	0	0	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	12	−1	4	−2	1	0	0
2	P_5	0	17	1	1	2	0	1	0
3	P_6	$-M$	4	2	−1	2	0	0	1
4			0	−1	−2	1	0	0	0
5			−4	−2	1	−2	0	0	0
1	P_4	0	14	0	7/2	−1	1	0	1/2
2	P_5	0	15	0	3/2	1	0	1	−1/2
3	P_1	1	2	1	−1/2	1	0	0	1/2
4			2	0	−5/2	2	0	0	1/2
1	P_2	2	4	0	1	−2/7	2/7	0	1/7
2	P_5	0	9	0	0	10/7	−3/7	1	−5/7
3	P_1	1	4	1	0	6/7	1/7	0	4/7
4			12	0	0	9/7	5/7	0	6/7

Розв'язком вихідної задачі буде $X^* = (4; 4; 0)$. Оскільки вектори P_4, P_5, P_6 утворювали базис вихідної задачі, то числа, які стоять в останьому рядку відповідних стовпців, утворюють план двоїстої задачі. Тобто: $Y^* = \left(\frac{5}{7}; 0; \frac{6}{7}\right)$. $F_{\max}(X^*) = F^*_{\min}(Y^*) = 12$.

3.8.5. Економічна інтерпретація двоїстих задач

Економічну інтерпретацію двоїстих задач і двоїстих оцінок розглянемо на прикладі.

Приклад. Для виробництва трьох видів виробів *A, B* і *C* використовується три різних види сировини. Кожний із видів сировини може бути використаний у кількості, відповідно не більшій 180, 210 і 244 кг. Норми витрат кожного з видів сировини на одиницю продукції даного виду і ціна одиниці продукції кожного виду наведені в таблиці 3.25.

Таблиця 3.25

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на одиницю продукції		
	A	*B*	*C*
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Ціна одиниці продукції	10	14	12

Визначити план випуску продукції, згідно якого забезпечується її максимальна вартість, і оцінити кожний із видів сировини, що використовується для виробництва продукції. Оцінки, що приписуються кожному з видів сировини, повинні бути такими, щоб оцінка всієї сировини, що використовується, була мінімальною, а сумарна оцінка сировини, що використовується на виробництво одиниці продукції кожного виду,— не менша ціни одиниці продукції даного виду.

Розв'язання. Припустимо, що виробляється x_1 виробів *A*, x_2 виробів *B* і x_3 виробів *C*. Математична модель задачі:

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to \max, \tag{14}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 244, \end{cases} \tag{15}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0. \tag{16}$$

Припишемо кожному з видів сировини, використаних для виробництва продукції, двоїсту оцінку, відповідно рівну y_1, y_2, і y_3. Тоді загальна оцінка сировини, використаної для виробництва продукції, складе

$$F^* = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \to \min \qquad (17)$$

Згідно з умовою, двоїсті оцінки повинні бути такими, щоб загальна оцінка сировини, використаної для виробництва одиниці продукції кожного виду, була не менше ціни одиниці продукції даного виду, тобто y_1, y_2, і y_3 повинні задовольняти наступну систему нерівностей:

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 10, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 14, \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 12, \end{cases} \qquad (18)$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0. \qquad (19)$$

Як бачимо, задачі (14) — (16) і (17) — (19) утворюють симетричну пару двоїстих задач. Розв'язок прямої задачі дає оптимальний план виробництва виробів *A, B* і *C*, а розв'язок двоїстої — оптимальну систему оцінок сировини, використаної для виробництва цих виробів. Щоб знайти розв'язок запропонованих задач, потрібно спочатку відшукати розв'язок будь-якої з них. Через те, що система обмежень задачі (14) — (16) містить лише нерівності виду "$\le$", то доцільно спочатку знайти розв'язок цієї задачі. Її розв'язок наведено в таблиці 3.26.

Таблиця 3.26

i	Базис	C_σ	P_0	10	14	12	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	14	82	19/8	1	0	5/8	0	–1/8
2	P_5	0	80	23/8	0	0	1/8	1	–5/8
3	P_3	12	16	–3/4	0	1	–1/4	0	1/4
			1340	57/4	0	0	23/4	0	5/4

З таблиці 3.26 видно, що оптимальним планом виробництва виробів є такий, при якому виготовляється 82 вироби *B* і 16 виробів *C*. При даному плані виробництва залишаються невикористаними 80 кг сировини II виду, а загальна вартість виробів дорівнює 1340 грн. Також бачимо, що оптимальним розв'язком двоїстої задачі є

$$y_1^* = 23/4; \quad y_2^* = 0; \quad y_3^* = 5/4.$$

Змінні y_1^* і y_3^* позначають умовні двоїсті оцінки одиниці сировини, відповідно I і III видів. Ці оцінки відмінні від нуля, а сировина I і III видів цілком використовується при оптимальному плані виробництва продукції. Двоїста оцінка одиниці сировини II виду дорівнює нулю. Цей вид сировини не повністю використовується при оптимальному плані виробництва продукції.

Таким чином, позитивну двоїсту оцінку мають лише ті види сировини, що цілком використовуються при оптимальному плані виробництва виробів. Тому двоїсті оцінки визначають дефіцитність використаної підприємством сировини. Більше того, величина даної двоїстої оцінки показує, на скільки зростає максимальне значення цільової функції прямої задачі при збільшенні кількості сировини відповідного виду на 1 кг. Отже, збільшення кількості сировини I виду на 1 кг призведе до того, що з'явиться можливість знайти новий оптимальний план виробництва виробів, згідно якого загальна вартість виготовленої продукції зросте на 5,75 грн. і стане рівною 1340 + 5,75 = 1345,75 грн. При цьому числа, що стоять у стовпці вектора P_4 таблиці 3.26, показують, що зазначене збільшення загальної вартості виготовленої продукції може бути досягнуто за рахунок збільшення випуску виробів *B* на 5/8 одиниць і скорочення випуску виробів *C* на 1/4 одиниць. Внаслідок цього використання сировини II виду зменшиться на 1/8 кг. Аналогічно, збільшення на 1 кг сировини III виду дозволить знайти новий оптимальний план виробництва виробів, при якому загальна вартість виготовленої продукції зросте на 1,25 грн. і складе 1340 +1,25=1341,25 грн. Це буде досягнуто в результаті збільшення випуску виробів *C* на 1/4 одиниць і зменшення виготовлення виробів *B* на 1/8 одиниць, причому обсяг використаної сировини II виду зросте на 5/8 кг.

Продовжимо розгляд оптимальних двоїстих оцінок. Обчислюючи мінімальне значення цільової функції двоїстої задачі

$$F_{\min}^* = 180 \cdot (23/4) + 210 \cdot 0 + 244 \cdot (5/4) = 1340,$$

бачимо, що воно збігається з максимальним значенням цільової функції вихідної задачі.

При підстановці оптимальних двоїстих оцінок у систему обмежень двоїстої задачі одержуємо

11 - 8-1045

$$\begin{cases} 23+5/4>10, \\ 23/4+5/2=14, \\ 23/4+25/4=12. \end{cases}$$

Перше обмеження двоїстої задачі виконується як строга нерівність. Це означає, що двоїста оцінка сировини, використаної на виробництво одного виробу виду *А*, вища ціни цього виробу і, отже, випускати виріб виду *А* невигідно. Його виробництво і не передбачене оптимальним планом прямої задачі. Друге і третє обмеження двоїстої задачі виконуються як строгі рівності. Це означає, що двоїсті оцінки сировини, використаної для виробництва одиниці відповідно виробів *В* і *С*, співпадають з їх цінами. Тому випускати ці два види продукції за двоїстими оцінками економічно доцільно. Їхнє виробництво передбачене оптимальним планом прямої задачі.

Таким чином, двоїсті оцінки тісно пов'язані з оптимальним планом прямої задачі. Будь-яка зміна вихідних даних прямої задачі може вплинути як на її оптимальний план, так і на систему оптимальних двоїстих оцінок. Тому, щоб проводити економічний аналіз із використанням двоїстих оцінок, потрібно знати їх інтервал стійкості.

3.8.6. Двоїстий симплекс-метод

Двоїстий симплекс-метод, як і симплекс-метод, використовується при пошуку розв'язку задачі лінійного програмування, записаної у формі основної задачі, для якої серед векторів P_j, складених із коефіцієнтів при невідомих у системі рівнянь, є m одиничних. Разом із тим двоїстий симплекс-метод можна застосовувати при розв'язанні задачі лінійного програмування, вільні члени системи рівнянь якої можуть бути будь-якими числами (при розв'язанні задачі симплексним методом ці числа припускалися невід'ємними).

Отже, розглянемо задачу:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max \qquad (20)$$

за умов

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \cdots + x_mP_m + x_{m+1}P_{m+1} + \cdots + x_nP_n = P_0, \qquad (21)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}), \qquad (22)$$

де

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \ldots\ldots; \quad P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$P_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ a_{3m+1} \\ \ldots\ldots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix}; \quad \ldots\ldots; \quad P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}; \quad P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

і серед чисел b_i $(i = \overline{1,m})$ є від'ємні.

У даному випадку $X = (b_1; b_2; \ldots; b_m; 0; \ldots; 0)$ є розв'язком системи лінійних рівнянь (21). Однак цей розв'язок не є планом задачі (20) — (22), тому що серед його компонентів є від'ємні числа.

Розв'язок $X = (b_1; b_2; \ldots; b_m; 0; \ldots; 0)$ системи лінійних рівнянь (21), який визначається базисом $P_1, P_2, \ldots, P_m$, називається *псевдопланом* задачі (20) — (22), якщо $\Delta_j \ge 0$ для кожного j $(j = \overline{1,n})$.

Теорема. Якщо у псевдоплані $X = (b_1; b_2; \ldots; b_m; 0; \ldots; 0)$, що визначається базисом $P_1, \ldots, P_m$, є хоча б одне від'ємне число $b_i < 0$ таке, що всі $a_{ij} \ge 0$ $(j = \overline{1,n})$, то задача (20) — (22) взагалі не має планів.

Теорема. Якщо у псевдоплані $X = (b_1; b_2; \ldots; b_m; 0; \ldots; 0)$, що визначається базисом $P_1, P_2, \ldots, P_m$, є від'ємні числа $b_i < 0$ такі, що для довільного з них існують числа $a_{ij} < 0$, то можна перейти до нового псевдоплану, при якому значення цільової функції задачі (20) — (22) не зменшиться.

На основі сформульованих теорем можна скласти алгоритм двоїстого симплекс-методу.

Продовжимо розгляд задачі (20) — (22).

Нехай $X = (b_1; b_2; \ldots; b_m; 0; \ldots; 0)$ — псевдоплан цієї задачі. На основі вихідних даних складають симплекс-таблицю (табл. 3.27), у якій деякі елементи стовпця вектора P_0 є від'ємними числами. Якщо таких чисел нема, то в симплекс-таблиці записаний оптимальний план задачі (20) — (22), оскільки, за припущенням, усі $\Delta_j \geq 0$. Тому для визначення оптимального плану задачі за умов, що він існує, слід здійснювати впорядкований перехід від однієї симплекс-таблиці до іншої доти, поки зі стовпчика вектора P_0 не будуть виключені від'ємні елементи. При цьому щоразу повинні залишатися невід'ємними всі елементи $(m+1)$-го рядка, тобто $\Delta_j \geq 0$ для всіх $j = \overline{1,n}$.

Таким чином, після складання симплекс-таблиці перевіряють, чи є в стовпчику вектора P_0 від'ємні числа. Якщо їх немає, то знайдено оптимальний план вихідної задачі. Якщо ж вони є (що ми і припускаємо), то вибирають найбільше за модулем від'ємне число. У тому випадку, коли таких чисел декілька, беруть яке-небудь одне з них: нехай це число b_i. Вибір цього числа задає вектор, що виключається з базису, тобто в даному випадку з базису виводиться вектор P_i. Щоб визначити, який вектор варто ввести в базис, знаходимо $\min(-\Delta_j / a_{ij})$, де $a_{ij} < 0$.

Нехай це мінімальне значення приймається при $j = r$. Тоді в базис вводять вектор P_r. Число a_{ir} є ключовим елементом. Перехід до нової симплекс-таблиці роблять за звичайними правилами симплекс-методу. Ітераційний процес продовжують доти, поки в стовпчику вектора P_0 не буде більше від'ємних чисел. При цьому знаходять оптимальний план вихідної задачі, а отже, і двоїстої. Якщо на деякому кроці виявиться, що в i-му рядку симплекс-таблиці у стовпчику вектора P_0 є від'ємне число b_i, а серед інших елементів цього рядка від'ємні відсутні, то вихідна задача не має розв'язку.

Таким чином, *пошук розв'язку задачі* (20) — (22) *двоїстим симплекс-методом включає наступні етапи*:

1. Знаходять псевдоплан задачі.

2. Перевіряють цей псевдоплан на оптимальність. Якщо псевдоплан оптимальний, то знайдено розв'язок задачі. У протилежному випадку або встановлюють нерозв'язність задачі, або переходять до нового псевдоплану.

3. Вибирають провідний рядок за допомогою визначення найбільшого за модулем від'ємного числа стовпця вектора P_0 і провідний стовпець за допомогою пошуку найменшого за модулем відношення елементів $(m+1)$-го рядка до відповідних від'ємних елементів провідного рядка.

4. Знаходять новий псевдоплан і повторюють усі операції, починаючи з другого етапу.

Таблиця 3.27

i	Базис	C_σ	P_0	c_1	c_2	…	c_e	…	c_m	c_{m+1}	…	c_r	…	c_n
				P_1	P_2	…	P_e	…	P_m	P_{m+1}	…	P_r	…	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1r}	…	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2r}	…	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
e	P_e	c_e	b_e	0	0	…	1	…	0	a_{em+1}	…	a_{er}	…	a_{en}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	P_i	c_i	b_i	0	0	…	0	…	0	a_{im+1}	…	a_{ir}	…	a_{in}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	P_m	c_m	b_m	0	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mr}	…	a_{mn}
$m+1$			F_0	0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_r	…	Δ_n

Приклад. Знайти розв'язок задачі

$$F = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Розв'язання. Запишемо нашу задачу у формі основної задачі лінійного програмування, попередньо помноживши другу і третю нерівність на (–1):

$$F = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max \tag{23}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = -4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = -6, \end{cases} \tag{24}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_5 \geq 0. \quad (25)$$

Складемо для заданої задачі двоїсту.

$$F^* = 8y_1 - 4y_2 - 6y_3 \to \min, \quad (26)$$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 \geq 1, \\ y_1 + y_2 - 2y_3 \geq 1, \\ y_1 \geq 2, \end{cases} \quad (27)$$

$$y_2, y_3 \geq 0. \quad (28)$$

Складемо симплекс-таблицю для вихідної задачі (табл. 3.28).

Таблиця 3.28

i	Базис	C_σ	P_0	1	1	2	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	2	8	1	1	1	0	0
2	P_4	0	–4	–1	1	0	1	0
3	P_5	0	–6	–1	–2	0	0	1
4			16	1	1	0	0	0

Оскільки вектори P_3, P_4, P_5 утворюють базис, то план двоїстої задачі, як було зазначено раніше, утворюють елементи останнього рядка стовпчиків одиничних векторів, якщо $c_j = 0$, і якщо $c_j \neq 0$, то вони дорівнюють сумі відповідного елемента цього рядка та c_j.

У нашому випадку $c_3 = 2 \neq 0$, отже

$$y_1 = 0 + 2 = 2; \ c_4 = c_5 = 0 \Rightarrow y_2 = y_3 = 0.$$

План двоїстої задачі буде таким: $Y = (2;\ 0;\ 0)$, $F^* = 16$.

Оскільки в стовпчику вектора P_0 є два від'ємних числа (–4 та –6), а в 4-му рядку таблиці немає від'ємних чисел, то, відповідно до алгоритму двоїстого симплекс-методу, переходимо до нової симплекс-таблиці. Це можна зробити, оскільки в рядках векторів P_4 і P_5 є від'ємні числа.

Вибираємо $\max\{|-4|; |-6|\} = 6$, отже, вектор P_5 виключаємо з базису. Щоб визначити, який вектор потрібно ввести в базис, знаходимо

$$\min\left\{\frac{-\Delta_j}{a_{5j} < 0}\right\} = \min\left\{\frac{-\Delta_1}{a_{51}}; \frac{-\Delta_2}{a_{52}}\right\} = \min\left\{\frac{-1}{-1}; \frac{-1}{-2}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Тобто, в базис вводимо вектор P_2. Переходимо до нової симплекс-таблиці (табл. 3.29).

Таблиця 3.29

i	Базис	C_σ	P_0	1	1	2	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	2	5	1/2	0	1	0	1/2
2	P_4	0	–7	–3/2	0	0	1	1/2
3	P_2	1	3	1/2	1	0	0	–1/2
			13	1/2	0	0	0	1/2

З цієї таблиці видно, що отримано новий план двоїстої задачі $Y = (2; 0; 1/2)$, $F^* = 13$.

Оскільки в стовпці вектора P_0 є від'ємне число (–7), то розглянемо елементи 2-го рядка. Серед цих чисел є одне від'ємне (–3/2). Якби таке число було відсутнє, то вихідна задача була б нерозв'язна. У даному випадку переходимо до нової симплекс-таблиці (табл. 3.30).

Таблиця 3.30

i	Базис	C_σ	P_0	1	1	2	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	2	8/3	0	0	1	1/3	2/3
2	P_1	1	14/3	1	0	0	–2/3	–1/3
3	P_2	1	2/3	0	1	0	1/3	–1/3
			32/3	0	0	0	1/3	2/3

Як видно з цієї таблиці, знайдені оптимальні плани вихідної і двоїстої задач. Ними є $X^* = (14/3;\ 2/3;\ 8/3)$ і $Y^* = (2;\ 1/3;\ 2/3)$. При цих планах $F_{\max} = F^*_{\min} = 32/3$.

3.9. Цілочислові задачі лінійного програмування

3.9.1. Економічна і геометрична інтерпретації задачі цілочислового лінійного програмування

Екстремальна задача лінійного програмування, змінні якої набувають тільки цілочислових значень, називається задачею цілочислового лінійного програмування.

Приклад. У цеху підприємства вирішено встановити додаткове устаткування, для розміщення якого виділено 19/3 м^2 площі. На придбання устаткування підприємство може витратити 10 тис. грн., при цьому воно може купити устаткування двох видів. Комплект устаткування I виду коштує 1000 грн., а II виду — 3000 грн. Придбання одного комплекту устаткування I виду дозволяє збільшити випуск продукції за зміну на 2 одиниці, а одного комплекту устаткування II виду — на 4 одиниці. Знаючи, що для встановлення одного комплекту устаткування I виду потрібно 2м^2 площі, а устаткування II виду — 1м^2 площі, визначити такий набір додаткового устаткування, який дає можливість максимально збільшити випуск продукції.

Розв'язання. Складемо математичну модель задачі. Припустимо, що підприємство придбає x_1 комплектів устаткування I виду і x_2 комплектів устаткування II виду. Тоді змінні x_1 і x_2 повинні задовольняти наступні нерівності:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \le 10. \end{cases} \tag{1}$$

Якщо підприємство придбає вказану кількість устаткування, то загальне збільшення випуску продукції складе

$$F = 2x_1 + 4x_2. \tag{2}$$

За своїм економічним змістом змінні x_1 і x_2 можуть набувати тільки цілих невід'ємних значень, тобто

$$x_1, x_2 \ge 0, \tag{3}$$

$$x_1, x_2 \text{ — цілі.} \tag{4}$$

Таким чином, приходимо до наступної математичної задачі: знайти максимальне значення лінійної функції (2) при виконанні

умов (1), (3) і (4). Оскільки невідомі можуть мати тільки цілі значення, то задача (1) — (4) є задачею цілочислового програмування. Оскільки число невідомих задачі дорівнює двом, розв'язок даної задачі можна знайти, використовуючи її геометричну інтерпретацію. Для цього перш за все побудуємо багатокутник розв'язків задачі, що полягає у визначенні максимального значення лінійної функції (2) при виконанні умов (1) і (3) (рис. 3.10). Координати всіх точок побудованого багатокутника розв'язків *OAEBC* задовольняють систему лінійних нерівностей (1) та умови невід'ємності змінних (3). Разом з тим умову (4), тобто умову цілочисловості змінних, задовольняють координати лише 12 точок, позначених на рис. 3.10.

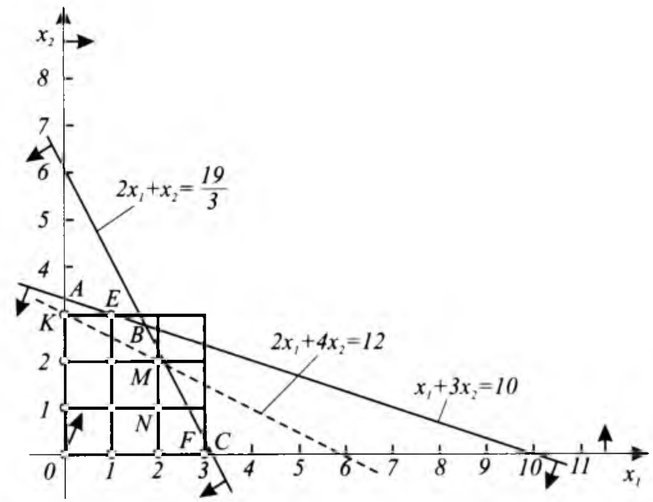


Рис. 3.10

Щоб знайти точку, координати якої визначають розв'язок початкової задачі, замінимо багатокутник *OABC* багатокутником *OKEMNF*, що містить усі допустимі точки з цілочисловими координатами, і таким, в якому координати кожної з вершин є цілими числами. Значить, якщо знайти точку максимуму функції (2) на багатокутнику *OKEMNF*, то координати цієї точки і визначать оптимальний план задачі.

Для цього побудуємо вектор $\vec{C} = (2;4)$ і пряму $2x_1 + 4x_2 = 12$, що проходить через багатокутник розв'язків *OKEMNF* (число 12 узято довільно). Побудовану пряму рухаємо у напрямі вектора $\vec{C}$ доти, поки вона не пройде через останню спільну точку з даним багатокутником. Координати цієї точки і визначають оптимальний план, а значення цільової функції в ній є максимальним.

У даному випадку шуканою є точка $E=(1;3)$, в якій цільова функція набуває максимального значення $F_{\max}=14$. Отже, координати точки E визначають оптимальний план задачі (1) — (4). Згідно з цим планом підприємству слід придбати один комплект устаткування I виду і три комплекти устаткування II виду. Це забезпечить підприємству при наявних обмеженнях на виробничі площі і грошові кошти максимальне збільшення випуску продукції, що дорівнює 14 од. за зміну.

3.9.2. Визначення оптимального плану задачі цілочислового лінійного програмування

Розглянемо задачу

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i=\overline{1,m}), \tag{6}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,n}), \tag{7}$$

$$x_j \text{ — цілі } (j=\overline{1,n}). \tag{8}$$

Розглянемо два методи відшукання оптимального плану задачі (5) — (8): метод Гоморі та метод гілок і границь.

3.9.2.1. Метод Гоморі

Знаходження розв'язку задачі цілочислового програмування методом Гоморі починають із визначення симплексним методом оптимального плану задачі (5) — (7) без врахування умови (8). Після того як цей план знайдено, переглядають його компоненти. Якщо серед компонент немає дробових чисел, то знайдений план є оптимальним планом задачі цілочислового програмування (5) — (8). Якщо ж в оптимальному плані задачі (5) — (7) змінна x_j набуває дробового значення, то до системи рівнянь (6) додають нерівність

$$\sum_j f(a_{ij}^*)x_j \ge f(b_i^*) \tag{9}$$

і знаходять розв'язок задачі (5) – (7), (9).

У нерівності (9) a_{ij}^* і b_i^* — перетворені вихідні величини a_{ij} й b_i, значення яких узяті з останньої симплекс-таблиці, а $f(a_{ij}^*)$ і $f(b_i^*)$ — дробові частини чисел (дробовою частиною деякого числа a є найменше невід'ємне число b, таке, що різниця між a і b складає ціле число). Якщо в оптимальному плані задачі (5) — (7) дробових значень набувають декілька змінних, то додаткова нерівність (9) визначається найбільшою дробовою частиною.

Якщо у знайденому плані задачі (5) — (7), (9) змінні набувають дробових значень, то знову додають одне додаткове обмеження й процес обчислень повторюють. Проводячи скінчене число ітерацій, або одержують оптимальний план задачі цілочислового програмування (5) — (8), або встановлюють її нерозв'язність.

Якщо вимога цілочисловості (8) накладається тільки на деякі змінні, то такі задачі називаються *частково цілочисловими*. Їх розв'язок також знаходять послідовним розв'язуванням задач, кожна з яких отримується із попередньої за допомогою введення додаткового обмеження. У цьому випадку таке обмеження має вигляд

$$\sum_j \gamma_{ij} x_j \ge f(b_i^*), \tag{10}$$

де γ_{ij} визначаються з наступних співвідношень:

1) для x_j, які можуть набувати нецілочислових значень,

$$\gamma_{ij}=\begin{cases} a_{ij}^*, & при\ a_{ij}^* \ge 0, \\ \dfrac{f(b_i^*)}{1-f(b_i^*)}\left|a_{ij}^*\right|, & при\ a_{ij}^* < 0; \end{cases} \tag{11}$$

2) для x_j, які можуть набувати тільки цілочислових значень,

$$\gamma_{ij}=\begin{cases} f(a_{ij}^*), & при\ f(a_{ij}^*) \le f(b_i^*), \\ \dfrac{f(b_i^*)}{1-f(b_i^*)}\left|1-f(a_{ij}^*)\right|, & при\ f(a_{ij}^*) > f(b_i^*). \end{cases} \tag{12}$$

Отже, можемо записати *алгоритм знаходження оптимального плану цілочислової задачі лінійного програмування методом Гоморі*.

1. Використовуючи симплекс-метод, знаходять розв'язок задачі (5) — (7) без врахування вимоги цілочисловості змінних (8).

2. Складають додаткове обмеження (9) для змінної, яка в оптимальному плані задачі (5) — (7) має максимальне дробове значення, а в оптимальному плані задачі (5) — (8) повинна бути цілочисловою.

3. Використовуючи двоїстий симплекс-метод, знаходять розв'язок задачі (5) — (7), (9).

4. Якщо є потреба, складають ще одне додаткове обмеження й продовжують ітераційний процес до одержання оптимального плану задачі (5) — (8), або встановлюють її нерозв'язність.

Приклад. Методом Гоморі знайти розв'язок задачі

$$F = x_1 - x_2 \to \max \tag{13}$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 3, \end{cases} \tag{14}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}), \tag{15}$$

$$x_j \text{ — цілі } (j = \overline{1,4}). \tag{16}$$

Розв'язання. Для визначення оптимального плану задачі (13) — (16) спочатку знаходимо оптимальний план задачі (13) — (15) (табл. 3.31):

Таблиця 3.31

i	Б	$C_б$	P_0	1	–1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	0	1	1	–2	1	0
2	P_4	0	3	1	3	0	1
3			0	–1	1	0	0
1	P_1	1	1	1	–2	1	0
2	P_4	0	2	0	5	–1	10
3			1	0	–1	1	0
1	P_1	1	9/5	1	0	3/5	2/5
2	P_2	–1	2/5	0	1	–1/5	1/5
3			7/5	0	0	4/5	1/5

Як видно з таблиці 3.31, знайдений оптимальний план $X = (9/5; 2/5\ 0; 0)$ задачі (13) — (15) не є оптимальним планом задачі (13) — (16), оскільки дві змінні x_1 та x_2 мають нецілочислові значення. Дробова частина x_1 дорівнює 4/5, а змінної x_2 рівна 2/5. Тому для змінної x_1 $(4/5 > 2/5)$ складаємо додаткове обмеження. Із останньої симплекс-таблиці маємо:

$$x_1 + \left(\frac{3}{5}\right)x_3 + \left(\frac{2}{5}\right)x_4 = \frac{9}{5}.$$

Таким чином, до системи обмежень задачі (13) — (15) додаємо нерівність

$$f(1)x_1 + f\left(\frac{3}{5}\right)x_3 + f\left(\frac{2}{5}\right)x_4 \geq f\left(\frac{9}{5}\right) \quad ;$$

$$\frac{3}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 \geq \frac{4}{5};$$

$$3x_3 + 2x_4 \geq 4.$$

Отже, обмеження задачі матимуть вигляд

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 = \frac{9}{5}, \\ x_2 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = \frac{2}{5}, \\ 3x_3 + 2x_4 \geq 4. \end{cases}$$

Віднімемо додаткову змінну $x_5 \geq 0$ в останній нерівності, і помножимо одержану рівність на (–1). Для розв'язання отриманої задачі потрібно застосувати двоїстий симплекс-метод (табл. 3.32, 3.33).

Таблиця 3.32

i	Б	$C_б$	P_0	1	–1	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_1	1	9/5	1	0	3/5	2/5	0
2	P_4	–1	2/5	0	2/5	–1/5	1/5	0
3	P_5	0	–4	0	0	–3	–2	1
4			7/5	0	0	4/5	1/5	0

Таблиця 3.33

i	Б	$C_б$	P_0	1	–1	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_1	1	1	1	0	0	0	3/5
2	P_2	–1	0	0	1	–1/5	0	1/10
3	P_4	0	2	0	0	3/2	1	–1/2
4			1	0	0	1/2	0	1/10

Із таблиці 3.33 видно, що вихідна задача цілочислового програмування має оптимальний план $X^* = (1; 0; 0; 2)$, при якому $F_{\max} = 1$.

3.9.2.2. Метод гілок та границь

Метод гілок та границь належить до групи методів, що враховують комбінаторний характер задачі, дискретність окремих змінних. Метод базується на упорядкованому переборі варіантів, розгляді лише тих варіантів, що виявляються за певними ознаками перспективними, і відкиданні одразу цілих множин варіантів, що є безперспективними.

Вперше цей метод запропонували Ленд і Дойг у 1960 році. Проте по-справжньому він був оцінений після праць Літтла, Мурті, Суїні, Керела, присвячених задачі комівояжера.

Розглянемо задачу цілочислового лінійного програмування: знайти

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (5)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}, \qquad (6)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \qquad (7)$$

$$x_j \text{ — цілі числа, } j = \overline{1,n}. \qquad (8)$$

Згідно із загальною ідеєю спочатку розв'язується задача з послабленими обмеженнями, тобто задача (5) — (7). Нехай одержали деякий розв'язок $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ цієї задачі. Якщо він задовольняє умову (8), то вихідна задача розв'язана. Якщо ж ні, то значення

$F^0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0$ є нижньою границею оптимальності цільової функції задачі.

При розв'язанні задач цілочислового лінійного програмування методом гілок та границь використовується правило бінарного галуження. Тобто на кожному кроці задача розбивається на дві підзадачі шляхом введення двох обмежень, що взаємовиключаються і вичерпують усі можливості.

Нехай x_k — цілочислова змінна $(k \in N)$, значення якої x_k^0 в оптимальному плані послабленої задачі є дробовим. Інтервал $\left[x_k^0\right] < x_k < \left[x_k^0\right] + 1$ (де [α] — ціла частина числа α) не містить допустимих цілочислових компонент плану. Тому допустимий цілочисловий розв'язок повинен задовольняти одну з нерівностей:

$$x_k \leq \left[x_k^0\right], \qquad (17)$$

$$x_k \geq \left[x_k^0\right] + 1. \qquad (17`)$$

Введення цих умов у вихідну задачу породжує дві не зв'язані між собою задачі цілочислового програмування:

(5) — (7), (17) і (5) — (7), (17`).

Говорять, що вихідна задача розбивається на дві підзадачі.

Дерево пошуку розв'язків будемо зображати так, як показано на рис. 3.11.

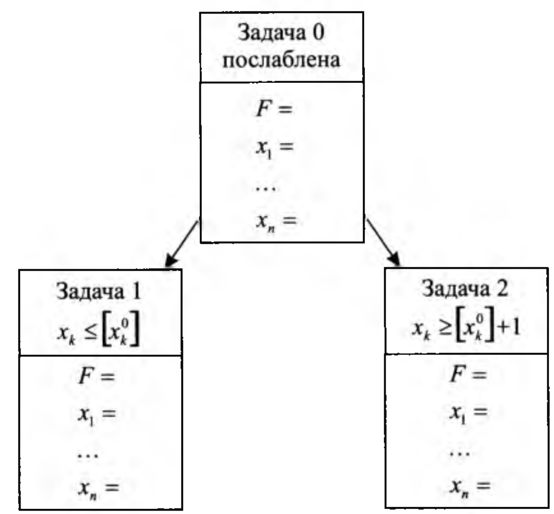


Рис. 3.11.

Для кожної вершини дерева значення послабленої задачі дає нижню оцінку відповідної множини розв'язків.

Припустимо, що рекордний розв'язок (найкращий допустимий, знайдений до поточного моменту часу) має значення цільової функції F^0 (рекорд). І нехай у дереві розгалуження є вершина з нижньою оцінкою: $F \geq F^0$. Це означає, що будь-який допустимий розв'язок X задачі (5) — (8), який можна отримати в результаті розробки цієї вершини, матиме значення цільової функції $C^T X \geq F \geq F^0$. І, отже, немає сенсу розгалужувати цю вершину, тому що відповідна їй підмножина допустимих розв'язків не містить розв'язків, кращих за поточний рекордний. Таким чином відповідна вершина може бути виключена з розгляду.

Приклад. Знайти розв'язок задачі

$$F = 3x_1 + x_2 \to \max \tag{18}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 13, \end{cases} \tag{19}$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \tag{20}$$

$$x_1, x_2 - \text{цілі.} \tag{21}$$

Розв'язання. Заповнимо початкову симплекс-таблицю для послабленої задачі (табл. 3.34):

Таблиця 3.34

i	Б	$C_б$	P_0	3	1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	0	16	1	4	1	0
2	P_4	0	13	2	5	0	1
3			0	–3	–1	0	0
1	P_3	0	19/2	0	3/2	1	–1/2
2	P_1	3	13/2	1	5/2	0	1/2
3			39/2	0	13/2	0	3/2

Оптимальний розв'язок послабленої задачі (18)—(20) $X = \left(\frac{13}{2}; 0\right)$ не задовольняє умову (21). Обидві змінні не цілі. Проведемо розгалуження по змінній x_1: $x_1 \leq 6$; $x_1 \geq 7$ (отримаємо відповідно задачу 1 і задачу 2).

Задача 1.

$$F = 3x_1 + x_2 \to \max \tag{18}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 13, \end{cases} \tag{19}$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \tag{20}$$

$$x_1 \leq 6. \tag{22}$$

Для врахування нового обмеження (22) необхідно виконати наступне:

1) ввести вільну змінну x_5:

$$x_1 + x_5 = 6; \tag{23}$$

2) виразити базисну змінну, що входить у (22) через небазисні з відповідного рядка оптимальної симплекс-таблиці задачі 0:

$$x_1 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4;$$

3) підставити вираз для базисної змінної в (23):

$$-\frac{5}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2};$$

4) ввести отримане обмеження в оптимальну симплекс-таблицю задачі 0 і виконати ітерацію двоїстого симплекс-методу (табл. 3.35).

Таблиця 3.35

i	Базис	$C_б$	P_0	3	1	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	0	19/2	0	3/2	1	–1/2	0
2	P_1	0	13/2	1	5/2	0	1/2	0
3	P_5	0	–1/2	0	–5/2	0	–1/2	1
4			0	0	13/2	0	3/2	0
1	P_3	0	46/5	0	0	1	–4/5	3/5
2	P_1	3	6	1	0	0	0	1
3	P_2	1	1/5	0	1	0	1/5	–2/5
4			91/5	0	0	0	1/5	13/5

12 - 8-1045

Задача 2.

$$F = 3x_1 + x_2 \to \max \quad (18)$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 16, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13, \end{cases} \quad (19)$$

$$x_1, x_2 \ge 0, \quad (20)$$

$$x_1 \ge 7. \quad (24)$$

Для врахування нового обмеження (24) необхідно виконати наступне.

Обмеження (24) зведемо до типу "$\le$", домноживши його на (–1). Потім для цього обмеження виконаємо пункти 1) — 3), як і для задачі 1:

1) $-x_1 + x_6 = -7$;

2) $x_1 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4$;

3) $\frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 + x_6 = -\frac{1}{2}$.

З останньої рівності видно, що обмеження (24) суперечить обмеженням (20), адже всі коефіцієнти при змінних у лівій частині рівності додатні, а права частина рівності від'ємна. Це означає, що задача 2 допустимих розв'язків не має.

Отже, маємо тільки одну підмножину розв'язків, що відповідає задачі 1.

Проведемо розгалуження задачі 1 по змінній x_2: $x_2 \le 0$ та $x_2 \ge 1$ (отримаємо відповідно задачу 3 і задачу 4).

Задача 3.

$$F = 3x_1 + x_2 \to \max \quad (18)$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 16, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13, \end{cases} \quad (19)$$

$$x_1, x_2 \ge 0, \quad (20)$$

$$x_1 \le 6, \quad (22)$$

$$x_2 \le 0. \quad (25)$$

Враховуючи обмеження (20) і (25), маємо $x_2 = 0$. У даному випадку немає необхідності в застосуванні симплекс-методу. Задача 3 зводиться до розв'язання системи нерівностей:

$$3x_1 + x_2 \to \max \qquad 3x_1 \to \max \qquad 3x_1 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 16 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13 \\ x_1 \le 6 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \le 16 \\ 2x_1 \le 13 \\ x_1 \le 6 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \le 16 \\ x_1 \le 13/2 \\ x_1 \le 6 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow F = 18.$$

Задача 4.

$$F = 3x_1 + x_2 \to \max \quad (18)$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 16, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13, \end{cases} \quad (19)$$

$$x_1, x_2 \ge 0, \quad (20)$$

$$x_1 \le 6, \quad (22)$$

$$x_2 \ge 1. \quad (26)$$

Для врахування нового обмеження (26), яке запишемо у вигляді $-x_2 \le -1$, виконуємо пункти 1) — 4) (як і в задачі 1):

1) $-x_2 + x_7 = -1$;

2) $x_2 = -\frac{1}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_5 + \frac{1}{5}$ (з оптимальної симплекс-таблиці (табл. 3.35) задачі 1);

3) $\frac{1}{5}x_4 - \frac{2}{5}x_5 + x_7 = -\frac{4}{5}$;

4) розв'язуємо двоїстим симплекс-методом (табл. 3.36).

Таблиця 3.36

i	Базис	$C_б$	P_0	3	1	0	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_7
1	P_3	0	46/5	0	0	1	–4/5	3/5	0
2	P_1	3	6	1	0	0	0	1	0
3	P_2	1	1/5	0	1	0	1/5	–2/5	0
4	P_7	0	–4/5	0	0	0	1/5	–2/5	1
5			91/5	0	0	0	1/5	13/5	0

Закінчення табл. 3.36

i	Базис	C_σ	P_0	3	1	0	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_7
1	P_3	0	8	0	0	1	–1/2	0	3/2
2	P_1	3	4	1	0	0	1/2	0	5/2
3	P_2	1	1	0	1	0	0	0	–1
4	P_5	0	2	0	0	0	–1/2	1	–5/2
5			13	0	0	0	3/2	0	13/2

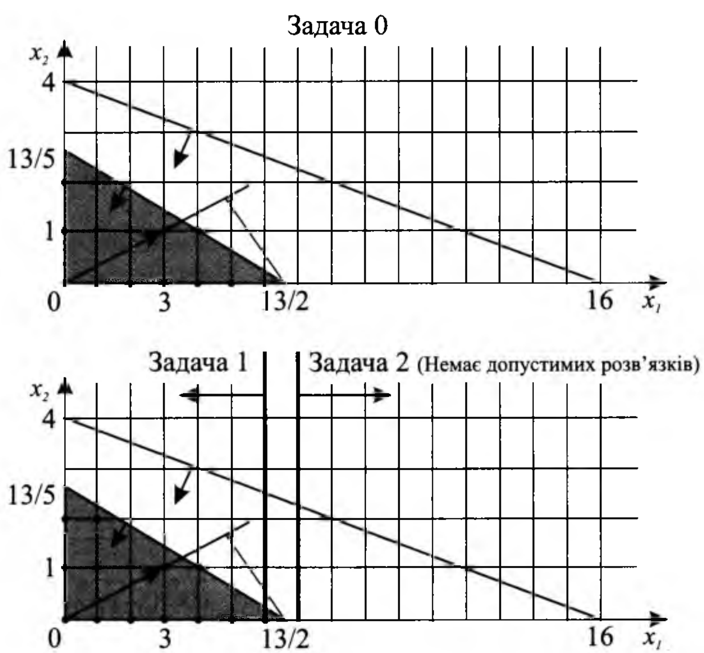
У результаті розв'язання поставленої задачі ми отримали два допустимих цілочислових розв'язки:

1) $x_1 = 6$, $x_2 = 0$, $F = 18$;

2) $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $F = 13$.

Оптимальним є перший розв'язок.

На рис. 3.12 наведено графічну ілюстрацію відшукання розв'язку задачі.



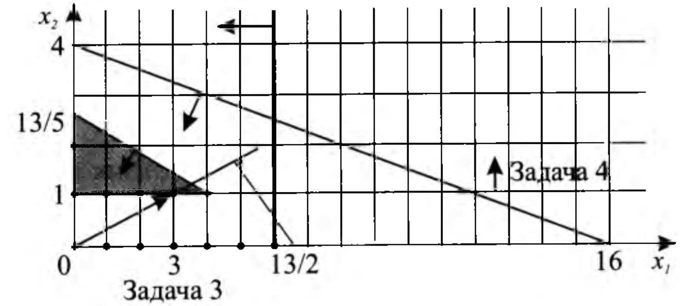


Рис. 3.12.

На рис. 3.13 зображено хід розв'язання задачі у вигляді дерева пошуку розв'язків.

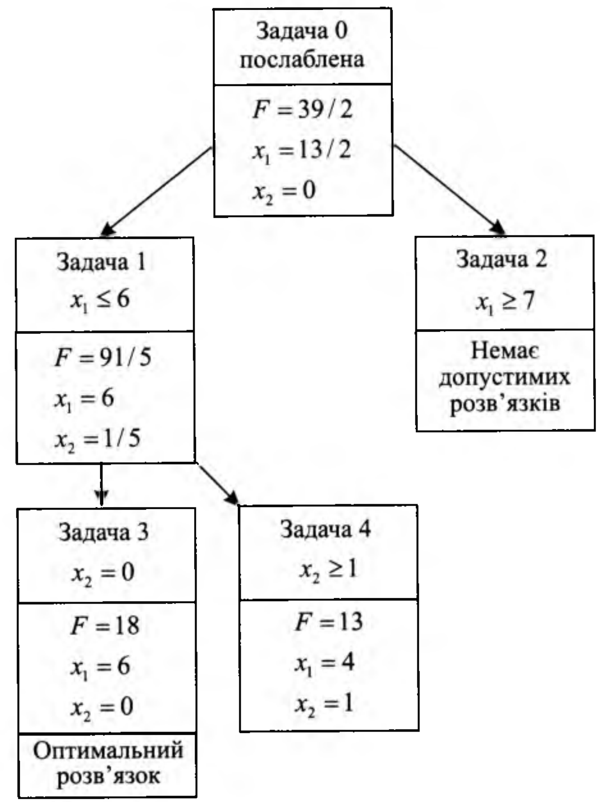


Рис. 3.13.

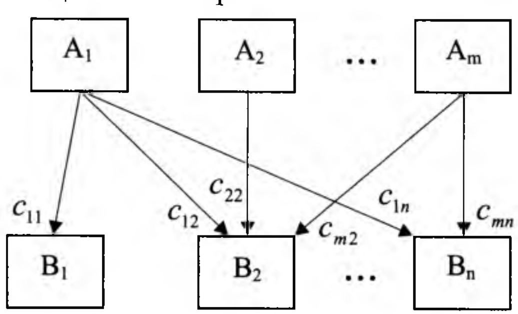
3.10. Транспортні задачі

Транспортна задача є однією з важливих спеціальних моделей задач лінійного програмування. Перша строга постановка задачі належить Хічкоку, а тому вона інколи ще називається задачею Хічкока.

3.10.1. Математична постановка задачі

Нехай у m пунктах постачання $A_1, A_2, ..., A_m$ виробляється або зберігається деякий однорідний продукт, причому обсяг його запасу в пункті A_i становить a_i одиниць. Припустимо, що даний продукт використовується в n пунктах споживання $B_1, B_2, ..., B_n$, причому обсяг використання (споживання) в пункті B_j дорівнює b_j одиниць. Позначимо через c_{ij} тарифи перевезень одиниці продукту з i-го пункту постачання в j-й пункт споживання.

Схематично це можна зобразити так:



Тарифи c_{ij} складають матрицю тарифів C, або ще її називають матрицею транспортних витрат:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Нехай x_{ij} – кількість одиниць продукту, який перевозиться з пункту A_i в пункт B_j. Тоді математична модель задачі має вигляд:

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \quad (1)$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1,n}), \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1,m}), \quad (3)$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad (i = \overline{1,m};\ \ j = \overline{1,n}). \quad (4)$$

Рівності (2) гарантують повне задоволення потреб усіх пунктів споживання, рівності (3) забезпечують повний вивіз продукту з усіх пунктів постачання. Умови (4) виключають зворотні перевезення.

Будь-який невід'ємний розв'язок системи лінійних рівнянь (2) та (3), що визначається матрицею $X = (x_{ij})$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$, називається *планом* транспортної задачі.

План $X^* = (x_{ji}^*)$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$, при якому функція (1) набуває свого мінімального значення, називається *оптимальним планом* транспортної задачі.

Зазвичай вхідні дані транспортної задачі записують у вигляді таблиці (табл. 3.37).

Таблиця 3.37

Пункт відправлення	Пункти призначення					Записи
	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
...	...	...	...	...		...
A_i	c_{i1} x_{i1}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	...	b_j	...	b_n	

Умова $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (5) називається *умовою балансу*.

Якщо виконується умова (5), то модель такої транспортної задачі називається *закритою* (збалансованою), у протилежному випадку задача називається *відкритою*.

Теорема. Для того, щоб транспортна задача (1) — (4) мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб запаси вантажу в пунктах виробництва дорівнювали потребам у вантажі у пунктах споживання, тобто, щоб виконувалася рівність (5).

У випадку перевищення запасів над потребами, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводиться фіктивний $(n+1)$-й пункт споживання з потребою у вантажі $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, і відповідні тарифи на перевезення дорівнюють нулю, тобто $c_{in+1} = 0 \quad (i = \overline{1,m})$. Отримана задача є транспортною, для якої виконується рівність (5).

Аналогічно, при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводиться фіктивний $(m+1)$-й пункт постачання із запасом вантажу $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i$, а тарифи $c_{m+1j} = 0 \quad (j = \overline{1,n})$.

Оскільки умови (2), (3) містять $(m+n-1)$ лінійно незалежних рівнянь, то і опорний план транспортної задачі може мати не більше $(m+n-1)$ відмінних від нуля невідомих. Якщо в опорному плані число ненульових компонент дорівнює $(m+n-1)$, то план називається невиродженим, якщо менше — виродженим.

3.10.2. Визначення опорного плану транспортної задачі

Як і при розв'язанні задачі лінійного програмування симплексним методом, визначення оптимального плану транспортної завдачі починають із знаходження якого-небудь її опорного плану. Його знаходять методом північно-західного кута, методом мінімального елемента або методом апроксимації Фогеля. Суть цих методів полягає в тому, що опорний план знаходять послідовно за $n+m-1$ кроків, на кожному з яких у таблиці умов завдання заповнюють одну клітинку, яку називають *зайнятою*. Заповнення однієї з клітинок забезпечує повністю або задоволення потреби у вантажі одного з пунктів споживання (того, в стовпці якого знаходиться заповнена клітинка), або вивіз вантажу з одного з пунктів постачання (з того, в рядку якого знаходиться заповнена клітинка).

У першому випадку тимчасово виключають із розгляду стовпець, що містить заповнену на даному кроці клітинку, і розглядають задачу, таблиця умов якої містить на один стовпець менше, ніж було перед цим кроком, але має ту ж кількість рядків і відповідно змінені запаси вантажу в одному з пунктів постачання (у тому, за рахунок запасу якого була задоволена потреба у вантажі пункту споживання на даному кроці). У другому випадку тимчасово виключають з розгляду рядок, що містить заповнену клітинку, і вважають, що таблиця умов має на один рядок менше при незмінній кількості стовпців і при відповідній зміні потреби у вантажі у пункті споживання, у стовпці якого знаходиться заповнена клітинка.

Після того, як виконано $n+m-2$ описаних вище кроків, одержують задачу з одним пунктом постачання і одним пунктом споживання. При цьому залишиться вільною тільки одна клітинка, а запаси пунктів постачання і споживання, що залишилися, будуть рівні потребам пункту споживання, що залишився. Заповнивши цю клітинку, здійснюють $(n+m-1)$-й крок і одержують шуканий опорний план. Слід відзначити, що на деякому кроці (але не на останньому) може трапитися так, що потреби чергового пункту споживання будуть рівні запасам чергового пункту постачання. У цьому випадку також тимчасово виключають з розгляду або стовпець, або рядок (що-небудь одне). Таким чином, або запаси відповідного пункту постачання, або потреби даного пункту споживання вважають рівними нулю. Цей нуль вписують у чергову заповнювану клітинку. Вказані вище умови гарантують отримання $(n+m-1)$ зайнятих клітинок, у яких стоять компоненти опорного плану, що є початковою умовою для перевірки останнього на оптимальність і знаходження оптимального плану.

Метод північно-західного кута. При знаходженні опорного плану транспортної задачі методом північно-західного кута на кожному кроці розглядають перші з пунктів постачання і споживання, що залишилися. Заповнення клітинок таблиці умов починається з лівої верхньої клітинки для невідомої x_{11} (“північно-західний кут”) і закінчується клітинкою для невідомої x_{mn}, тобто рухаємося начебто по діагоналі таблиці.

Приклад. На три бази A_1, A_2, A_3 надійшов однорідний вантаж у кількостях відповідно рівних 140, 180 та 160 одиниць. Цей вантаж потрібно перевезти у п’ять пунктів споживання B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 відповідно у кількостях 60, 70, 120, 130 та 100 одиниць. Тарифи перевезень задані матрицею

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ 8 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 9 & 7 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти опорний план транспортної задачі методом північно-західного кута.

Розв’язання. У табличній формі цю задачу можна записати так:

2	3	4	2	4	140
8	4	1	4	1	180
9	7	3	7	2	160
60	70	120	130	100	

Оскільки 60+70+120+130+100=140+180+160=460, то умова балансу виконується. Можемо перейти до побудови опорного плану. Починаємо з клітинки x_{11}.

$$\begin{array}{ccccc|c} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & 140 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & 180 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & 160 \\ \hline 60 & 70 & 120 & 130 & 100 & \end{array} \xrightarrow{\min\{60;140\}} \begin{array}{ccccc|c} 60 & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & 80 \\ 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & 180 \\ 0 & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & 160 \\ \hline 0 & 70 & 120 & 130 & 100 & \end{array} \to$$

$$\xrightarrow{\min\{70;80\}} \begin{array}{ccccc|c} 60 & 70 & x_{13} & x_{14} & x_{15} & 10 \\ 0 & 0 & x_{23} & x_{24} & x_{25} & 180 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & x_{35} & 160 \\ \hline 0 & 0 & 120 & 130 & 100 & \end{array} \xrightarrow{\min\{120;10\}} \begin{array}{ccccc|c} 60 & 70 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{23} & x_{24} & x_{25} & 180 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & x_{35} & 160 \\ \hline 0 & 0 & 110 & 130 & 100 & \end{array} \to$$

$$\xrightarrow{\min\{110;180\}} \begin{array}{ccccc|c} 60 & 70 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & x_{24} & x_{25} & 70 \\ 0 & 0 & 0 & x_{34} & x_{35} & 160 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 130 & 100 & \end{array} \xrightarrow{\min\{130;70\}} \begin{array}{ccccc|c} 60 & 70 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{34} & x_{35} & 160 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 60 & 100 & \end{array} \to$$

$$\xrightarrow{\min\{60;160\}} \begin{array}{ccccc|c} 60 & 70 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & x_{35} & 100 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & \end{array} \to \text{опорний план} \quad X=\begin{pmatrix} 60 & 70 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 100 \end{pmatrix}.$$

$$L(X)=2\cdot 60+3\cdot 70+4\cdot 10+1\cdot 110+4\cdot 70+7\cdot 60+2\cdot 100=1380.$$

Метод мінімального елемента. У методі північно-західного кута на кожному кроці потреби першого з пунктів споживання, що залишився, задовольнялися за рахунок запасів першого з пунктів постачання, що залишився. Очевидно, вибір пунктів постачання і споживання доцільно проводити, орієнтуючись на тарифи перевезень, а саме: на кожному кроці слід вибирати яку-небудь клітинку, що відповідає мінімальному тарифу (якщо таких клітинок декілька, то слід вибрати будь-яку з них), і розглянути пункти постачання і споживання відповідно до вибраної клітинки. Суть методу мінімального елемента і полягає у виборі клітинки з мінімальним тарифом. Зазначимо, що цей метод, як правило, дозволяє знайти опорний план транспортної задачі, при якому загальна вартість перевезень вантажу менша, ніж загальна вартість перевезень при плані, знайденому для даної задачі за допомогою методу північно-західного кута. Тому найдоцільніше опорний план транспортної задачі знаходити методом мінімального елемента.

Приклад. Для прикладу знайдемо опорний план попередньої задачі за допомогою методу мінімального елемента. Спочатку пронумеруємо у порядку зростання елементи матриці тарифів за принципом “зліва направо, знизу вверх”. Отримаємо

$$C=\begin{pmatrix} 2^{(4)} & 3^{(7)} & 4^{(10)} & 2^{(5)} & 4^{(11)} \\ 8^{(14)} & 4^{(8)} & 1^{(1)} & 4^{(9)} & 1^{(2)} \\ 9^{(15)} & 7^{(12)} & 3^{(6)} & 7^{(13)} & 2^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Починаємо з клітинки, у якій знаходиться тариф з індексом (1):

$$\begin{array}{ccccc|c} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & 140 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & 180 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & 160 \\ \hline 60 & 70 & 120 & 130 & 100 & \end{array} \xrightarrow[1^{(1)}]{\min\{120;180\}} \begin{array}{ccccc|c} x_{11} & x_{12} & 0 & x_{14} & x_{15} & 140 \\ x_{21} & x_{22} & 120 & x_{24} & x_{25} & 60 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & x_{34} & x_{35} & 160 \\ \hline 60 & 70 & 0 & 130 & 100 & \end{array} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[1^{(2)}]{\min\{100;60\}} \begin{array}{ccccc|c} x_{11} & x_{12} & 0 & x_{14} & x_{15} & 140 \\ 0 & 0 & 120 & 0 & 60 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & x_{34} & x_{35} & 160 \\ \hline 60 & 70 & 0 & 130 & 40 & \end{array} \xrightarrow[2^{(3)}]{\min\{40;160\}} \begin{array}{ccccc|c} x_{11} & x_{12} & 0 & x_{14} & 0 & 140 \\ 0 & 0 & 120 & 0 & 60 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & x_{34} & 40 & 120 \\ \hline 60 & 70 & 0 & 130 & 0 & \end{array}$$

$$\xrightarrow[2^{(4)}]{\min\{60;140\}} \begin{array}{ccccc|c} 60 & x_{12} & 0 & x_{14} & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 120 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{34} & 40 & 120 \\ \hline 0 & 70 & 0 & 130 & 0 & \end{array} \xrightarrow[2^{(5)}]{\min\{130;80\}} \begin{array}{ccccc|c} 60 & 0 & 0 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{34} & 40 & 120 \\ \hline 0 & 70 & 0 & 50 & 0 & \end{array}$$

$$\rightarrow X = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 0 & 60 \\ 0 & 70 & 0 & 50 & 40 \end{pmatrix}.$$

$$L(X) = 2 \cdot 60 + 2 \cdot 80 + 1 \cdot 120 + 1 \cdot 60 + 7 \cdot 70 + 7 \cdot 50 + 2 \cdot 40 = 1380.$$

Метод апроксимації Фогеля. При визначенні опорного плану транспортної задачі методом апроксимації Фогеля на кожній ітерації у всіх стовпцях і всіх рядках знаходять різниці між двома мінімальними тарифами. Їх записують у спеціально відведених для цього рядку і стовпці в таблиці умов задачі. Серед вказаних різниць вибирають мінімальну. У рядку (або в стовпці), якому дана різниця відповідає, визначають мінімальний тариф. Клітинку, в якій він записаний, заповнюють на даній ітерації.

Якщо мінімальний тариф однаковий для декількох клітинок даного рядка (стовпця), то для заповнення вибирають ту клітинку, яка розташована в стовпці (рядку), що відповідає найбільшій різниці між двома мінімальними тарифами, які знаходяться в даному стовпці (рядку).

3.10.3. Визначення оптимального плану транспортної задачі методом потенціалів

Загальний принцип знаходження оптимального плану транспортної задачі є аналогічним принципу розв'язання задачі лінійного програмування: спочатку знаходять опорний план транспортної задачі, а потім його послідовно поліпшують до одержання оптимального плану.

Теорема. Якщо для деякого опорного плану $X = (x_{ij})$ $(i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n})$ транспортної задачі (1) — (4) існують такі числа $u_1, u_2, \ldots, u_m$, $v_1, v_2, \ldots, v_n$, що

$$v_j - u_i = c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0 \quad \text{та} \quad v_j - u_i \le c_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0$$

для всіх $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, то $X = (x_{ij})$ — оптимальний план транспортної задачі.

Числа u_i $(i = \overline{1,m})$, v_j $(j = \overline{1,n})$ називаються *потенціалами* відповідно пунктів постачання і пунктів споживання.

Сформульована теорема дозволяє побудувати алгоритм знаходження розв'язку транспортної задачі.

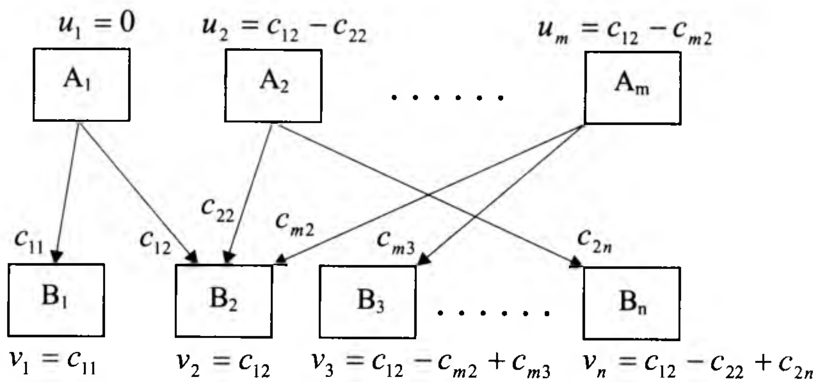
Нехай одним із розглянутих вище методів побудовано опорний план транспортної задачі. Для кожного з пунктів постачання і споживання визначають потенціали u_i та v_j $(i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n})$. Ці числа знаходять із системи рівнянь

$$v_j - u_i = c_{ij}, \tag{6}$$

де c_{ij} — тарифи, що стоять у заповнених клітинках таблиці умов транспортної задачі.

Оскільки число заповнених клітинок дорівнює $m + n - 1$, то система (6) з $m + n$ невідомих містить $m + n - 1$ рівнянь. Через те що кількість невідомих перевищує на одиницю кількість рівнянь, то одне з невідомих можна покласти рівним довільному числу, наприклад, $u_1 = 0$, і знайти послідовно з (6) значення решти невідомих.

Обчислення потенціалів ще можна здійснити за допомогою зображеної схеми:



Як ми домовились, $u_1 = 0$. Тоді, рухаючись за напрямом стрілки, будемо додавати тариф до знайденого значення потенціалу u_i $(i = \overline{1,m})$ (наприклад, $v_1 = u_1 + c_{11} = c_{11}$, $v_2 = u_1 + c_{12} = c_{12}$), а супроти руху стрілки — віднімати тариф від знайденого значення потенціалу v_j $(j = \overline{1,n})$ (наприклад, $u_2 = v_2 - c_{21} = c_{12} - c_{21}$, $u_m = v_2 - c_{m2} = c_{12} - c_{m2}$).

Після того, як усі потенціали знайдено, для кожної з вільних клітинок визначають числа

$$\alpha_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}. \qquad (7)$$

Якщо серед чисел α_{ij} немає додатних, то знайдений опорний план є оптимальним. Якщо ж для деякої вільної клітинки $\alpha_{ij} > 0$, то початковий опорний план не є оптимальним і необхідно перейти до нового опорного плану. Для цього оглядають усі вільні клітинки, для яких $\alpha_{ij} > 0$, і серед даних чисел вибирають максимальне. Клітинку, якій це число відповідає, слід заповнювати.

Заповнюючи вибрану клітинку, необхідно змінити об'єми постачань, записаних у ряді інших зайнятих клітинок і зв'язаних із заповненою так званим циклом.

Циклом у таблиці умов транспортної задачі називається ламана лінія, вершини якої розташовані в зайнятих клітинках таблиці, а ланки – уздовж рядків і стовпчиків, причому в кожній вершині циклу зустрічаються рівно дві ланки, одна з яких знаходиться в рядку, а інша — у стовпчику.

Якщо ламана лінія, яка утворює цикл, перетинається, то точки самоперетину не будуть вершинами.

За правильної побудови опорного плану для будь-якої вільної клітинки можна побудувати лише один цикл. Після того, як це буде зроблено, слід перейти до нового опорного плану. Для цього необхідно здійснити переміщення вантажу в межах клітинок, пов'язаних з даною вільною клітинкою. Це переміщення здійснюють за такими правилами:

1) кожній з клітинок, зв'язаних циклом з даною вільною клітинкою, приписують певний знак, причому вільній клітинці — знак плюс, а решті клітинок — по черзі знаки мінус і плюс (називатимемо ці клітинки мінусовими і плюсовими);

2) у дану вільну клітинку переносять менше з чисел x_{ij}, що стоять у мінусових клітинках. Одночасно це число додають до відповідних чисел, що стоять у плюсових клітинках і віднімають від чисел, що стоять у мінусових клітинках. Клітинка, яка раніше була вільною, стає зайнятою, а від'ємна клітинка, в якій стояло мінімальне з чисел x_{ij}, вважається вільною.

Після вказаних вище переміщень вантажу в межах клітинок, зв'язаних циклом із даною вільною клітинкою, визначають новий опорний план транспортної задачі.

Описаний вище перехід від одного опорного плану транспортної задачі до іншого її опорного плану називається *зсувом по циклу перерахунку.*

Відзначимо, що при зсуві по циклу перерахунку кількість зайнятих клітинок залишається незмінною, а саме дорівнює $n + m - 1$. Якщо в мінусових клітинках є два (і більше) однакових чисел x_{ij}, то звільняють лише одну з таких клітинок, а інші залишають зайнятими (з нульовими постачаннями).

Одержаний новий опорний план транспортної задачі перевіряють на оптимальність. Для цього визначають потенціали пунктів постачання та споживання і знаходять числа $\alpha_{ij} = v_i - u_j - c_{ij}$ для всіх вільних клітинок. Якщо серед цих чисел не виявиться додатних, то це свідчить про те, що ми отримали оптимальний план. Якщо ж додатні числа є, то слід перейти до нового опорного плану. В результаті ітераційного процесу після скінченого числа кроків одержують оптимальний план задачі.

Отже, *процес знаходження розв'язку транспортної задачі методом потенціалів включає наступні етапи*:

1. Знаходять опорний план. При цьому число заповнених клітинок повинно дорівнювати $n + m - 1$.

2. Знаходять потенціали v_j і u_i відповідно пунктів споживання і постачання.

3. Для кожної вільної клітинки визначають число α_{ij}. Якщо серед чисел α_{ij} немає додатних, то одержано оптимальний план транспортної задачі, якщо ж вони є, то переходять до нового опорного плану.

4. Серед додатних чисел α_{ij} вибирають максимальне, будують для вільної клітинки, якій воно відповідає, цикл перерахунку і проводять зсув по циклу перерахунку.

5. Одержаний опорний план перевіряють на оптимальність, тобто знову повторюють всі дії, починаючи з етапу 2.

Зауважимо, що при визначенні опорного плану або в процесі розв'язання задачі може бути одержаний вироджений опорний план. Щоб уникнути в цьому випадку зациклення, відповідні нульові елементи опорного плану слід замінити як завгодно малим додатним числом ε і розв'язувати задачу як невироджену. В оптимальному плані такої задачі вважаємо, що ε дорівнює нулю.

Приклад. Для будівництва чотирьох об'єктів використовується цегла, яка виготовляється на трьох заводах. Щодня кожен із заводів може виготовити 100, 150, і 50 умовних одиниць цегли. Щоденні потреби в цеглі на кожному з об'єктів, що будуються, відповідно рівні 75, 80, 60 і 85 ум. од. Відомі також тарифи перевезень 1 ум. од. цегли з кожного із заводів до кожного з будівельних об'єктів:

$$C=\begin{pmatrix}6 & 7 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 5 & 6\\ 8 & 10 & 20 & 1\end{pmatrix}.$$

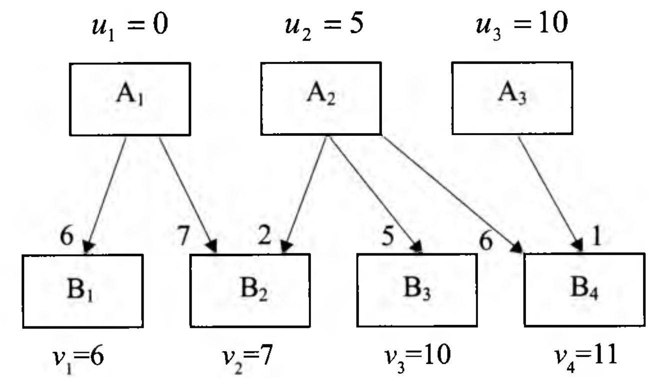
Скласти такий план перевезень цегли до будівельних об'єктів, при якому загальна вартість перевезень буде мінімальною.

Розв'язання. Оскільки умова балансу виконується: 100+150+50= =75+80+60+85=300, можемо будувати опорний план задачі. Методом північно-західного кута отримаємо опорний план транспортної задачі

$$X_0=\begin{pmatrix}75 & 25 & 0 & 0\\ 0 & 55 & 60 & 35\\ 0 & 0 & 0 & 50\end{pmatrix},$$

при якому загальна вартість перевезень складає
$L(X_0)=75\cdot 6+25\cdot 7+55\cdot 2+60\cdot 5+35\cdot 6+50\cdot 1=1295$ (грош. од.).

Оскільки $m+n-1=6$ і ненульових елементів в X_0 теж 6, то план X_0 не вироджений і ми можемо перевірити його на оптимальність. Для цього знаходимо потенціали пунктів постачання і пунктів споживання.



Схематично зобразимо перевезення цегли із 3 заводів на 4 об'єкти будівництва відповідно до плану перевезень X_0. Біля кожної стрілки вкажемо тариф перевезень із певного заводу на певний об'єкт. Покладемо $u_1=0$. Тоді, рухаючись за напрямом стрілки, будемо до потенціалу u_i ($i=\overline{1,3}$) додавати відповідний тариф, а проти стрілки – від потенціалу v_j ($j=\overline{1,4}$) віднімати відповідний тариф.

$$\begin{aligned}
&v_1=u_1+6=0+6=6,\\
&v_2=u_1+7=0+7=7,\\
&u_2=v_2-2=7-2=5,\\
&v_3=u_2+5=5+5=10,\\
&v_4=u_2+6=5+6=11,\\
&u_3=v_4-1=11-1=10.
\end{aligned}$$

Тепер для нульових елементів матриці X_0 обчислюємо α_{ij}.

$$\begin{aligned}
&\alpha_{13}=v_3-u_1-c_{13}=10-0-3=7,\\
&\alpha_{14}=v_4-u_1-c_{14}=11-0-5=6,\\
&\alpha_{21}=v_1-u_2-c_{21}=6-5-1=0,
\end{aligned}$$

$$\alpha_{31}=v_1-u_3-c_{31}=6-10-8=-12,$$
$$\alpha_{32}=v_2-u_3-c_{32}=7-10-10=-13,$$
$$\alpha_{33}=v_3-u_3-c_{33}=10-10-20=-20.$$

Через те, що серед чисел α_{ij} є додатні, то побудований план перевезень X_0 не є оптимальним і потрібно перейти до нового опорного плану. Найбільшим серед додатних α_{ij} є $\alpha_{13}=7$. Тому для даної клітинки будуємо цикл перерахунку і здійснюємо зсув по цьому циклу.

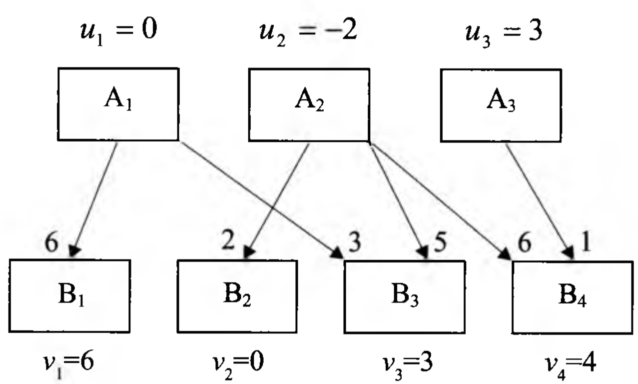
$$\begin{pmatrix} 75 & {}^{-}25 & 0^{+} & 0 \\ 0 & {}^{+}55 & 60^{-} & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}.$$

Цикл буде мати вершини в клітинках $(1,3)^+$; $(2,3)^-$; $(2,2)^+$; $(1,2)^-$. У мінусових клітинках $\min\{25;60\}=25$, а отже, число 25 віднімаємо від мінусових клітинок і додаємо до плюсових. Тоді покращений опорний план набуде вигляду:

$$X_1=\begin{pmatrix} 75 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 80 & 35 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}.$$

Вартість перевезень при плані X_1 становить
$L(X_1)=75\cdot6+25\cdot3+80\cdot2+35\cdot5+35\cdot6+50\cdot1=1120$ (грош. од.).

Цей план перевіряємо на оптимальність. Обчислюємо потенціали:



Для кожної нульової клітинки матриці перевезень обчислюємо α_{ij}:

$$\alpha_{12}=v_2-u_1-c_{12}=0-0-7=-7,$$
$$\alpha_{14}=v_4-u_1-c_{14}=4-0-5=-1,$$
$$\alpha_{21}=v_1-u_2-c_{21}=6-(-2)-1=7,$$
$$\alpha_{31}=v_1-u_3-c_{31}=6-3-8=-5,$$
$$\alpha_{32}=v_2-u_3-c_{32}=0-3-10=-13,$$
$$\alpha_{33}=v_3-u_3-c_{33}=3-3-20=-20.$$

Оскільки $\alpha_{21}=7>0$, то план X_1 не є оптимальним, а отже, будуємо цикл перерахунку для 0, що стоїть у клітинці (2,1). Вершинами циклу будуть клітинки $(2,1)^+$; $(1,1)^-$; $(1,3)^+$; $(2,3)^-$.

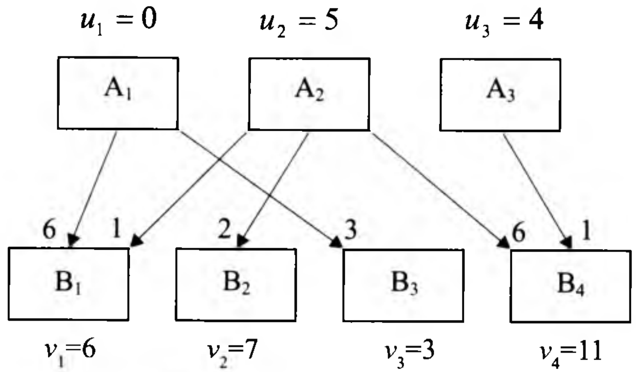
$$X_1=\begin{pmatrix} {}^{-}75 & 0 & 25^{+} & 0 \\ {}^{+}0 & 80 & 35^{-} & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо мінусові клітинки $\min\{75;35\}=35$. Число 35 додамо до плюсових вершин циклу та віднімемо від мінусових. Отримаємо новий опорний план X_2:

$$X_2=\begin{pmatrix} 40 & 0 & 60 & 0 \\ 35 & 80 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}.$$

Вартість перевезень при цьому плані дорівнює
$L(X_2)=40\cdot6+60\cdot3+35\cdot1+80\cdot2+35\cdot6+50\cdot1=875$ (грош. од.).

Для того, щоб визначити, чи буде план X_2 оптимальним, знайдемо спочатку потенціали u_i $(i=\overline{1,3})$, v_j $(j=\overline{1,4})$, а потім підрахуємо α_{ij}.

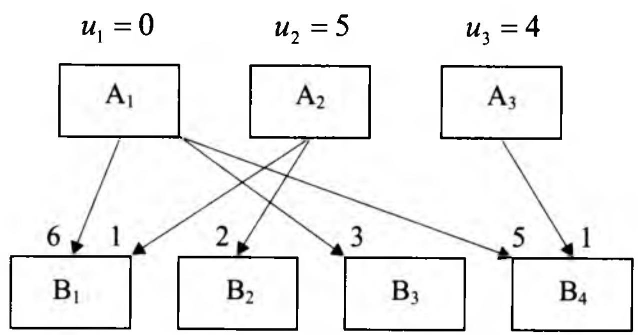


$$\alpha_{12}=0,\quad \alpha_{23}=-7,\quad \alpha_{32}=-13,$$
$$\alpha_{14}=6,\quad \alpha_{31}=-12,\quad \alpha_{33}=-27.$$

План X_2 не оптимальний, оскільки α_{14}=6 > 0. Будуємо цикл із вершинами $(1,4)^+$; $(2,4)^-$; $(2,1)^+$; $(1,1)^-$. $\min\{40,35\}=35$.

$$X_3=\begin{pmatrix}5&0&60&35\\70&80&0&0\\0&0&0&50\end{pmatrix}.$$

$L(X_3)=5\cdot6+60\cdot3+35\cdot5+70\cdot1+80\cdot2+50\cdot1=665$ (грош. од.)



v_1=6 $\quad$ v_2=7 $\quad$ v_3=3 $\quad$ v_4=5

$$\alpha_{12}=0,\quad \alpha_{24}=-6,\quad \alpha_{32}=-7,$$
$$\alpha_{23}=-7,\quad \alpha_{31}=-6,\quad \alpha_{33}=-21.$$

Оскільки всі $\alpha_{ij}\le 0$, то план X_3 є оптимальним. При цьому плані вартість перевезень складає 665 грош. од.

3.10.4. Метод диференціальних рент

Якщо при визначенні оптимального плану транспортної задачі методом потенціалів спочатку знаходився який-небудь її опорний план, а потім він послідовно поліпшувався, то при знаходженні розв'язку транспортної задачі методом диференціальних рент спочатку якнайкраще розподіляють між пунктами споживання частину вантажу (так званий умовно оптимальний розподіл) і на наступних ітераціях поступово зменшують загальну величину нерозподілених поставок. Первинний варіант розподілу вантажу визначають таким чином. У кожному із стовпців таблиці даних транспортної задачі знаходять мінімальний тариф. Знайдені числа обводять кружечками (або підкреслюють), а клітинки, в яких стоять вказані числа, заповнюють. У них записують максимально можливі числа. В результаті отримують деякий розподіл поставок вантажу в пункти призначення. Цей розподіл у загальному випадку не задовольняє обмеження вихідної транспортної задачі. Тому в результаті наступних кроків слід поступово скорочувати нерозподілені поставки вантажу так, щоб при цьому загальна вартість перевезень залишалася мінімальною. Для цього спочатку визначають надмірні і недостатні рядки.

Рядки, які відповідають постачальникам, запаси котрих повністю розподілені, а потреби пунктів призначення, що пов'язані з даними споживачами запланованими поставками, не задоволені, вважаються недостатніми. Ці рядки іноді називають також від'ємними. Рядки, запаси яких вичерпані не повністю, вважаються надлишковими. Іноді їх називають також додатними.

Після того, як визначено надлишкові і недостатні рядки, для кожного із стовпців знаходять різниці між числом у кружечку і найближчим до нього тарифом, записаним у надлишковому рядку. Якщо число в кружечку знаходиться в додатному рядку, то різницю не визначають. Серед одержаних чисел знаходять найменше. Це число називається *проміжковою рентою*. Після визначення проміжкової ренти переходять до нової таблиці. Її отримуємо з попередньої таблиці додаванням до відповідних тарифів, що стоять у невід'ємних рядках, проміжкової ренти. Решта елементів не змінюється. При цьому всі клітинки нової таблиці вважають вільними. Після побудови нової таблиці починають заповнювати її клітинки. Тепер уже число заповнюваних клітинок є на одиницю більшим, ніж на попередньому етапі. Ця додаткова клітинка знаходиться у стовпчику, в якому була записана проміжкова рента. Всі інші клітинки знаходяться по одній в кожному із стовпців, і в них записані найменші для даного стовпця числа, обведені кружечками. Обведеними кружечками будуть і два однакових числа, що стоять у стовпчику, в якому у попередній таблиці була записана проміжна рента.

Оскільки в новій таблиці число заповнених клітинок більше, ніж число стовпців, то при заповненні клітинок слід користуватися спеціальним правилом, суть якого така. Вибирають деякий стовпець (рядок), в якому є одна клітинка з поміщеним у ній кружечком. Цю клітинку заповнюють і виключають із розгляду даний стовпець (рядок). Після цього розглядають певний рядок (стовпець), в якому є одна клітинка з поміщеним у ній кружечком. Цю клітинку заповнюють і виключають із розгляду даний рядок (стовпець). Продовжуючи діяти таким чином, після скінченого числа кроків заповнюють усі клітинки, в яких поміщені кружечки з числами. Якщо до того ж вдається розподілити весь вантаж, наявний у пунктах постачання, між пунктами споживання, то одержують оптимальний план транспортної задачі. Якщо ж оптимальний план не одержано, то переходять до нової таблиці. З цією метою знаходять надлишкові і недостатні рядки, проміжкову ренту і на їх основі будують нову таблицю. Тут можуть виникнути деякі ускладнення при визначенні знаку рядка, коли її нерозподілений залишок рівний нулю. В цьому випадку рядок вважають додатним за умови, що друга заповнена клітинка, котра стоїть у стовпці, який зв'язаний з даним рядком ще однією заповненою клітинкою, розташована в додатному рядку.

Після скінченого числа описаних вище ітерацій нерозподілений залишок стає рівним нулю. В результаті одержують оптимальний план даної транспортної задачі.

Описаний вище метод розв'язання транспортної задачі має простішу логічну схему розрахунків, ніж розглянутий вище метод потенціалів. Тому в більшості випадків для знаходження розв'язку конкретних транспортних задач із використанням ЕОМ застосовується метод диференціальних рент.

Приклад. Методом диференціальних рент знайти оптимальний план транспортної задачі, яка задана в табличній формі:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	12	4	8	5	180
A_2	1	8	6	5	3	350
A_3	6	13	8	7	4	20
	110	*90*	*120*	*80*	*150*	

Розв'язання. Дана транспортна задача збалансована, оскільки 180+350+20=110+90+120+80+150. Тому можемо перейти до нової таблиці, додавши до заданої один додатковий стовпчик для фіксування надлишку та недостачі і один рядок для запису відповідних різниць (табл. 3.38).

Таблиця 3.38

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси	Надлишок (+) Недостача (–)
A_1	7	12	$\underline{4}$ 120	8	8	180	+ 60
A_2	$\underline{1}$ 110	$\underline{8}$ 90	6	$\underline{5}$ 80	$\underline{3}$ 70	350	– 80
A_3	6	13	8	7	4	20	+ 20
Потреби	110	90	120	80	150	550	
Різниця	5	4	–	2	1		

У кожному із стовпчиків B_1 — B_5 знаходимо мінімальні тарифи і обводимо або підкреслюємо їх. Кожну з клітинок, яка містить мінімальні тарифи, заповнюємо, записуючи в неї максимально допустиме число.

Наприклад, у клітинку (1, 3) записуємо число 120. Оскільки більше підкреслених чисел у першому рядку немає, то тоді 180 –120 = 60, і в останньому стовпчику таблиці записуємо + 60. Тобто перший рядок виявився надлишковим або плюсовим. Аналогічно в третьому рядку підкреслених чисел немає зовсім, тому в останній стовпчик записуємо +20 — запаси пункту A_3, які не використані. Тому третій рядок, як і перший, плюсовий. Заповнюємо клітинки другого рядка. У клітинку (1, 2) поміщаємо 110, в (2, 2) — 90, в (2, 4) — 80, що в сумі дає 280. У клітинку (2, 5) потрібно б було помістити число 150, але 280+150 = 450, а це перевищує запаси пункту A_I на 80 одиниць. Тому в клітинку (2, 5) поміщається число 70, оскільки 280+70 = 350, а 80 одиниць, яких не вистачає, записують в останній стовпчик зі знаком "–". Таким чином, другий рядок є недостатнім або мінусовим.

Отже, нами отримано умовно оптимальний план, згідно з яким повністю задоволені потреби пунктів B_1, B_2, B_3, B_4, а пункту B_5 – частково. Тепер потрібно знайти різниці між мінімальними тарифами, записаними у надлишкових рядках, і тарифами, що стоять у заповнених клітинках. Результати записуємо в останній рядок. Отже, маємо 6 –1=5; 12–8=4; 7–5=2; 4–3=1.

Вибираємо найменшу із знайдених різниць, яка називається проміжковою рентою. У даному випадку проміжкова рента дорівнює 1. Це число потрібно додати до кожного з тарифів мінусового рядка.

Одержуємо нову таблицю (табл. 3.39):

Таблиця 3.39

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси	Надлишок (+) Недостача (–)
A_1	7	12	$\underline{4}$ 120	8	8	180	+ 60
A_2	$\underline{2}$ 110	$\underline{9}$ 90	6	$\underline{6}$ 80	$\underline{4}$ 70	350	– 60
A_3	6	13	8	7	$\underline{4}$ 20	20	0
Потреби	110	90	120	80	150	550	
Різниця	5	3	–	2	1		

Як і в попередньому випадку, знаходимо мінімальні тарифи, підкреслюємо їх і заповнюємо відповідні клітинки. У п'ятому стовпчику таких клітинок уже виявилось дві.

У (1, 3) поміщаємо 120, а значить 180 – 120 = + 60, і перший рядок виявився плюсовим. Аналогічно у (3, 5) поміщаємо 20, а отже, $20-20=0$, і третій рядок виявляється нульовим. Заповнюючи другий рядок, поміщаємо в клітинки (2, 1) — 110, (2, 2) — 90, (2, 4) — 80, що в сумі дає 280. У клітинку (2, 5) поміщаємо 70, а недостачу 60 записуємо в останньому стовпчику.

Визначаємо проміжкову ренту:

$$\min\{7–2;\ 12–9;\ 8–6;\ 5–4\} = \min\{5;\ 3;\ 2;\ 1\} = 1.$$

Третій рядок нульовий, а тому його елементи при визначенні проміжкової ренти до розгляду не беруться. Переходимо до нової таблиці (табл. 3.40):

Таблиця 3.40

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси	
A_1	7	12	$\underline{4}$ 120	8	$\underline{5}$ 60	180	0
A_2	$\underline{3}$ 110	$\underline{10}$ 90	8	$\underline{7}$ 80	$\underline{5}$ 70	350	0
A_3	7	14	9	8	$\underline{5}$ 20	20	0
	110	90	120	80	150	550	

Оскільки $m+n-1=7$ і число заповнених клітинок також дорівнює семи, останній стовпчик нульовий. А це означає, що всі запаси пунктів виробництва розподіляються відповідно до фактичних потреб пунктів споживання. Отже, ми отримали оптимальний план

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 120 & 0 & 60 \\ 110 & 90 & 0 & 80 & 70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix},$$

при якому загальні витрати на перевезення будуть такими:

$$L(X)=120\cdot 4+60\cdot 5+110\cdot 1+90\cdot 8+80\cdot 5+70\cdot 3+20\cdot 4=2300.$$

3.10.5. Визначення оптимального плану транспортних задач, що мають деякі ускладнення в їх постановці

При знаходженні розв'язку ряду конкретних транспортних задач часто буває необхідно враховувати додаткові обмеження, які не зустрічалися вище при розгляді простих варіантів даних задач. Зупинимося докладніше на деяких можливих ускладненнях в постановках транспортних задач.

1. За деяких реальних умов перевезення вантажу з певного пункту постачання A_i в пункт споживання B_j не можуть бути здійснені. Для визначення оптимальних планів таких задач припускають, що тариф перевезення одиниці вантажу з пункту A_i в пункт B_j є як завгодно великою величиною M, і за цієї умови відомими методами знаходять розв'язок нової транспортної задачі. За таким припущен-

ням виключається можливість при оптимальному плані транспортної задачі перевозити вантаж із пункту A_i в пункт B_j. Такий підхід до знаходження розв'язку транспортної задачі називають *забороною перевезень* або *блокуванням* відповідної клітинки таблиці даних задачі.

2. У окремих транспортних задачах додатковою умовою є забезпечення перевезення по відповідних маршрутах певної кількості вантажу. Нехай, наприклад, з пункту відправлення A_i в пункт призначення B_j потрібно обов'язково перевезти α_{ij} одиниць вантажу. Тоді в клітинку таблиці даних транспортної задачі, що знаходиться на перетині рядка A_i і стовпця B_j, записують вказане число α_{ij}, і надалі цю клітинку вважають вільною з як завгодно великим тарифом перевезень M. Для отримання таким чином нової транспортної задачі знаходять оптимальний план, який визначає оптимальний план вихідної задачі.

3. Іноді потрібно знайти розв'язок транспортної задачі, при якому з пункту відправлення A_i в пункт призначення B_j повинно бути завезено не менше заданої кількості вантажу α_{ij}. Для визначення оптимального плану такої задачі вважають, що запаси пункту A_i і потреби пункту B_j менші фактичних на α_{ij} одиниць. Після цього знаходять оптимальний план нової транспортної задачі, на підставі якого і визначають розв'язок вихідної задачі.

4. У деяких транспортних задачах потрібно знайти оптимальний план перевезень за умови, що з пункту відправлення A_i в пункт призначення B_j, перевозиться не більше ніж α_{ij} одиниць вантажу, тобто $x_{ij} \le \alpha_{ij}$.

Сформульовану задачу можна розв'язати так. У таблиці початкових даних задачі для кожного j-го обмеження $x_{ij} \le \alpha_{ij}$ передбачають додатковий стовпець, тобто вводять додатковий пункт споживання. У даному стовпці записують ті ж тарифи, що і в стовпці B_j за винятком тарифу, що знаходиться в i-му рядку. У додатковому стовпці в цьому рядку тариф вважають рівним деякому скільки завгодно великому числу M. При цьому потреби пункту B_j вважають рівними α_{ij}, а потреби щойно введеного пункту споживання вважають рівними $b_j - a_{ij}$. Розв'язок отриманої транспортної задачі може бути знайдено методом потенціалів, і тим самим буде визначений оптимальний план або встановлена нерозв'язність початкової задачі. Відзначимо, що початкова транспортна задача має розв'язок лише у

тому випадку, коли для неї існує хоча б один опорний план.

Сформульовану вище задачу можна розв'язати і таким способом. З урахуванням обмеження $x_{ij} \le \alpha_{ij}$ за правилом мінімального елемента будують опорний план. При цьому, якщо величина записаного на даному кроці у відповідну клітинку числа визначається тільки обмеженням $x_{ij} \le \alpha_{ij}$, то в подальшому з розгляду виключають тільки заповнену клітинку. В інших випадках із розгляду виключають або рядок, або стовпець (що-небудь одне).

Якщо в результаті складання плану постачань усі наявні запаси пунктів постачання розподілені і потреби в пунктах споживання задоволені, то отримано опорний план транспортної задачі.

Якщо в якомусь рядку (а отже, і в стовпці) залишився нерозподілений залишок, рівний *d*, то вводять додатковий пункт споживання і додатковий пункт постачання з потребами і запасами, рівними *d*. У клітинці, що знаходиться на перетині стовпця додаткового пункту споживання і рядка додаткового пункту постачання, тариф вважають рівним нулю. У всіх інших клітинках даного рядка і стовпця тарифи вважають рівними деякому як завгодно великому числу *M*. Отриману в результаті цього транспортну задачу розв'язують методом потенціалів. Після скінченого числа кроків або встановлюють, що початкова задача не має опорного плану, або знаходять її оптимальний план. При цьому (x_{ij}^*) — оптимальний план початкової задачі, якщо

$$\begin{cases} \beta_j - \alpha_i \le c_{ij} & & x_{ij}^* = 0, \\ \beta_j - \alpha_i \ge c_{ij} & \text{при} & x_{ij}^* = a_{ij}, \\ \beta_j - \alpha_i = c_{ij} & & 0 < x_{ij}^* < a_{ij}. \end{cases}$$

Зауважимо, що описаними вище методами можна також знайти розв'язок багатьох інших задач, які за своєю економічною суттю не пов'язані з транспортними перевезеннями.

Розділ 4

СПЕЦІАЛЬНІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

4.1. Задачі параметричного програмування

Нехай параметр t приймає свої значення в деякому проміжку $[\alpha,\beta]$, тобто $t \in [\alpha,\beta]$. Тоді, якщо коефіцієнти цільової функції лінійно залежать від параметра t, то задача параметричного програмування полягає в знаходженні

$$f = \sum_{j=1}^{n} (c_j' + c_j'' t) x_j \to \max \tag{1}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = \overline{1,m}), \tag{2}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}), \tag{3}$$

де c_j', c_j'', a_{ij}, b_i — задані константи.

Якщо ж від параметра $t \in [\alpha,\beta]$ лінійно залежать вільні члени обмежень (2), то задача параметричного програмування ставиться так: знайти

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{1'}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i' + b_i'' t \ (i = \overline{1,m}), \tag{2'}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}), \tag{3'}$$

де b_i', b_i'', a_{ij}, c_j — задані константи.

Задачу параметричного програмування ще можна поставити так: при $t \in [\alpha,\beta]$ знайти

$$f = \sum_{j=1}^{n} (c_j' + c_j'' t) x_j \to \max \tag{1''}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i' + b_i'' t \ (i = \overline{1,m}), \tag{2''}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}). \tag{3''}$$

Узагальненням виписаних вище задач є така: для всіх $t \in [\alpha,\beta]$ знайти

$$f = \sum_{j=1}^{n} (c_j' + c_j'' t) x_j \to \max \tag{1'''}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n}(a'_{ij}+a''_{ij}t)x_j = b'_i + b''_i t \quad (i=\overline{1,m}), \tag{2'''}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,n}). \tag{3'''}$$

Розв'язок сформульованих задач можна знайти методами лінійного програмування.

4.1.1. Геометричний метод розв'язання задач параметричного програмування

Нехай $j=1;2$, множина $R(x)$ задачі (1) — (3) не пуста і включає в себе більше ніж одну точку. Тоді вихідна задача полягає у визначенні при кожному значенні параметра $t\in[\alpha,\beta]$ такої точки багатогранника розв'язків, в якій цільова функція f набуває максимального значення. Після того, як знайдено точку $t=t_0$, в якій функція f набуває максимального значення, шукається множина тих значень t, для яких координати вказаної точки визначають оптимальний план задачі (1) — (3). Знайдені значення параметра t виключаються з розгляду, береться деяке нове значення $t\in[\alpha,\beta]$, і процедура обчислень повторюється. В результаті після скінченого числа кроків для кожного значення параметра $t\in[\alpha,\beta]$ або знаходиться оптимальний план задачі, або встановлюється її нерозв'язність.

Приклад. Підприємство має випустити два види продукції — *A* та *B*, для виготовлення якої використовується три види сировини (табл. 4.1).

Таблиця 4.1

Вид сировини	Норми витрат сировини на виробництво одиниці продукції		Запаси сировини
	A	*B*	
I	4	1	16
II	2	2	22
III	6	3	36

Відомо, що ціна одиниці продукції може змінюватись для виробу *A* від 2 до 12 грошових одиниць, а для виробу *B* — від 13 до 3 грошових одиниць, причому ці зміни визначаються співвідношеннями: $c_1=2+t$, $c_2=13-t$, $t\in[0;10]$. Для кожного з можливих значень ціни одиниці продукції кожного з видів знайти такий план виробництва, при якому загальна вартість продукції буде максимальною.

Розв'язання. Нехай підприємство виготовляє x_1 одиниць продукції *A* та x_2 одиниць продукції *B*. Тоді математична модель задачі буде такою: для всіх значень параметра $t\in[0;10]$ знайти

$$f=(2+t)x_1+(13-t)x_2 \to \max \tag{4}$$

$$\begin{cases} 4x_1+x_2\leq 16, \\ 2x_1+2x_2\leq 22, \\ 6x_1+3x_2\leq 36, \end{cases} \tag{5}$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \tag{6}$$

Будуємо багатокутник розв'язків $R(x)$, який відповідає системі обмежень (5) — (6) (рис. 4.1).

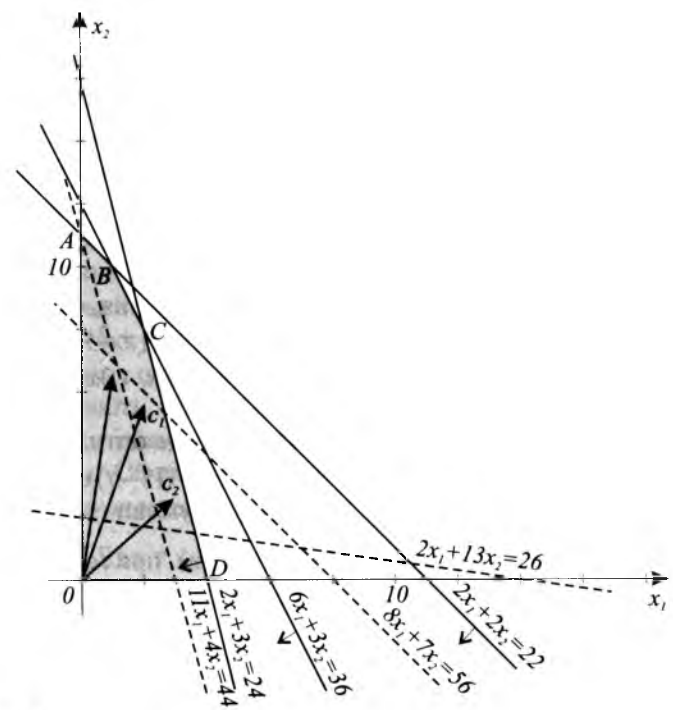


Рис. 4.1

У нашому випадку $R(x) = OABCD$. При $t=0$ цільова функція матиме вигляд $f = 2x_1 + 13x_2$. Нехай $2x_1 + 13x_2 = 26$. Ця пряма проходить через точки $x_1 = 1$ і $x_2 = 2$, градієнт $\overline{C}$=(2; 13). Якщо рухати пряму $2x_1 + 13x_2 = 26$ вверх паралельно самій собі, то неважко бачити, що остання спільна точка прямої з $R(x)$ буде $A(0; 11)$. Отже, при $t=0$ оптимальний план задачі буде X_0^*= (0; 11), f_{max} = 143.

Покладемо t=2 і побудуємо $f = (2+2)x_1 + (13-2)x_2 = 4x_1 + 11x_2$. Нехай $4x_1+11x_2 = 44$. У цьому випадку $\overline{C}_1$=(4; 11) і пряма проходить через точки $x_1 = 11$ і $x_2 = 4$. Знову ж таки останньою точкою $R(x)$, яку перетне ця пряма, буде $A(0; 11)$. Тобто, оптимальним планом залишається X_0^*= (0;11), але $f_{max} = (2+2)\cdot 0 + (13-2)\cdot 11 = 121$.

Стає зрозумілим, що план випуску продукції X_0^* буде залишатись оптимальним доти, поки пряма $(2+t)x_1 + (13-t)x_2 = h$ (h — деяке число) не стане паралельною до прямої $2x_1 + 2x_2 = 22$. З умови паралельності $\dfrac{2+t}{2} = \dfrac{13-t}{2}$ одержуємо, що це відбудеться при $t = 5{,}5$. При цьому значенні t координати будь-якої точки відрізка AB будуть давати оптимальний план задачі (4) — (6).

Таким чином, при $t\in[0; 5{,}5]$ задача (4) — (6) має оптимальний план X_0^*= (0; 11) і $f_{max} = (2+t)\cdot 0 + (13-t)\cdot 11$= 143 – 11$t$.

Візьмемо тепер значення параметра $t \ge 5{,}5$. Наприклад, $t=6$. У цьому випадку $f = (2+6)x_1 + (13-6)x_2 = 8x_1 + 7x_2$. Нехай $8x_1 + 7x_2 = 56$. Тоді ця пряма пройде через точки $x_1 = 7$, $x_2 = 8$ і $\overline{C}_2$= (8, 7). Рухаючи пряму $8x_1 + 7x_2 = 56$ вверх паралельно самій собі, бачимо, що останньою точкою множини $R(x)$, яку перетне лінія рівня, буде точка B. Її координати знаходять із системи рівнянь: $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 22, \\ 6x_1 + 3x_2 = 36. \end{cases}$ Звідки $x_1 = 1$, $x_2 = 10$; $B(1, 10)$, $f_{max} = 8\cdot 1 + 7\cdot 10 = 78$.

З рисунка 4.1 видно, що план X_1^*=(1; 10) буде оптимальним планом задачі (4) — (6) доти, поки пряма $(2+t)x_1 + (13-t)x_2 = h$ не стане паралельною до прямої $6x_1 + 3x_2 = 36$. З умови паралельності $\dfrac{2+t}{6} = \dfrac{13-t}{3}$ одержуємо, що t = 8. Таким чином, при $t\in[5{,}5; 8]$ оптимальним планом задачі (4) — (6) буде X_1^*= (1; 10), причому $f_{max} = (2+t)\cdot 1 + (13-t)\cdot 10 = 132 - 9t$.

Продовжуючи аналогічні міркування бачимо, що при $t\in[8; 10]$ оптимальним планом задачі (4) — (6) буде X_2^*= (2; 8), причому f_{max} ==108 – 6t.

Підіб'ємо *підсумок*. Задача параметричного програмування

$$f = (2+t)x_1 + (13-t)x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 16, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 22, \\ 6x_1 + 3x_2 \le 36, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

має такі оптимальні розв'язки:

— при $t\in[0; 5{,}5]$, X_0^*=(0; 11), f_{max}=143 – 11t;
— при $t\in[5{,}5; 8]$, X_1^*=(1; 10), f_{max}=132 – 9t;
— при $t\in[8; 10]$, X_2^*=(2; 8), f_{max}=108 – 6t.

4.1.2. Розв'язання задачі, цільова функція якої містить параметр

Розглянемо задачу (1) — (3), і нехай $n > 2$. Процес знаходження її розв'язку включає такі етапи:

1. Вважаючи значення параметра t рівним деякому числу $t_0 \in [\alpha;\beta]$, знаходять симплекс-методом оптимальний план X^* або встановлюють нерозв'язність одержаної задачі лінійного програмування.
2. Визначають множину значень параметра $t \in [\alpha;\beta]$, для якої знайдений план буде оптимальним, або задача нерозв'язною. Ці значення параметра виключають із розгляду.
3. Покладають значення параметра t рівним деякому числу з тої частини проміжку $[\alpha;\beta]$, яка залишилась, і симплекс-методом знаходять розв'язок одержаної задачі лінійного програмування.
4. Визначають множину значень параметра t, для яких новий оптимальний план залишається оптимальним, або задача є нерозв'язною. Обчислення повторюють доти, поки не будуть досліджені всі значення $t \in [\alpha;\beta]$.

Приклад. Для $\forall$ $t\in(-\infty; +\infty)$ знайти

$$f = 2x_1 + (3+4t)x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad = 12, \\ x_1 - x_2 \quad + x_4 \quad = 10, \\ -x_1 + x_2 \quad\quad + x_5 = 6, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

14 - 8-1045

Розв'язання. Приймаємо значення параметра $t=0$ (число 0 взято довільно). Вектори P_3, P_4, P_5 утворюють базис. Застосувавши симплекс-метод, одержимо (табл. 4.2):

Таблиця 4.2

i	Базис	C_σ	P_0	2	$3+4t$	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	0	12	1	1	1	0	0
2	P_4	0	10	1	–1	0	1	0
3	P_5	0	6	–1	1	0	0	1
4			0	–2	$-3-4t$	0	0	0
1	P_3	0	6	2	0	1	0	–1
2	P_4	0	16	0	0	0	1	1
3	P_2	$3+4t$	6	-1	1	0	0	1
4			$18+24t$	$-5-4t$	0	0	0	$3+4t$
1	P_1	2	3	1	0	$^1/_2$	0	$-^1/_2$
2	P_4	0	16	0	0	0	1	1
3	P_2	$3+4t$	9	0	1	$^1/_2$	0	$^1/_2$
4			$33+36t$	0	0	$2,5+2t$	0	$0,5+2t$

План X_0^*= (3; 9; 0; 16; 0) буде оптимальним, якщо мають місце нерівності:

$$\begin{cases} 2,5+2t\ge 0, \\ 0,5+2t\ge 0, \end{cases} \Rightarrow t\ge -0,25 \Rightarrow t\in[-0,25; +\infty).$$

Тепер потрібно розглянути значення параметра $t<-0,25$. При $t<-0,25$ план X_0^* не буде оптимальним. Тому переходимо до нового опорного плану (табл. 4.3).

Таблиця 4.3

i	Базис	C_σ	P_0	2	$3+4t$	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_1	2	11	1	0	0,5	0,5	0
2	P_5	0	16	0	0	0	1	1
3	P_2	$3+4t$	1	0	1	0,5	– 0,5	0
4			$25+4t$	0	0	$2,5+2t$	$-0,5-2t$	0

План X_1^* = (11; 1; 0; 0; 16) буде оптимальним, якщо

$$\begin{cases} 2,5+2t\ge 0, \\ -0,5-2t\ge 0, \end{cases} \Rightarrow -1,25\le t\le -0,25 \Rightarrow t\in[-1,25; -0,25].$$

Наступна ітерація (табл. 4.4) дає:

Таблиця 4.4

i	Базис	C_σ	P_0	2	$3+4t$	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_1	2	10	1	–1	0	1	0
2	P_5	0	16	0	0	0	1	1
3	P_3	0	2	0	2	1	–1	0
4			20	0	$-5-4t$	0	2	0

План X_2^*= (10; 0; 2; 0; 16) буде оптимальним, якщо $-5-4t\ge 0$ або $t\le -1,25$.

Таким чином, залежно від значень параметра t задача має такі розв'язки:

$t\in(-\infty; -1,25]$, X_2^*=(10; 0; 2; 0; 16), $f_{max}=20$;
$t\in[-1,25; -0,25]$, X_1^*=(11; 1; 0; 0; 16), $f_{max}=25+4t$;
$t\in[-0,25; +\infty)$, X_0^*=(3; 9; 0; 16; 0), $f_{max}=33+36t$.

4.1.3. Розв'язання задачі, праві частини якої містять параметр

Алгоритм знаходження розв'язку задачі (1′) — (3′) включає такі основні етапи:

1. Вважаючи значення параметра t рівним деякому числу $t_0 \in [\alpha;\beta]$, знаходять оптимальний план X^* або встановлюють нерозв'язність одержаної задачі лінійного програмування.

2. Знаходять значення параметра $t \in [\alpha;\beta]$, для яких задача (1′) — (3′) має один і той же план або нерозв'язна. Ці значення параметра t виключають із розгляду.

3. Вибирають значення параметра t із частини інтервалу, що залишилась, і встановлюють можливість визначення нового оптимального плану. У випадку існування оптимального плану його знаходять двоїстим симплекс-методом.

4. Визначають множину значень параметра t, для яких задача має один і той же новий оптимальний план, або є нерозв'язною. Обчислення проводять доти, поки не будуть досліджені всі значення параметра $t \in [\alpha;\beta]$.

Приклад. Для $\forall\ t \in (-\infty; +\infty)$ знайти

$$f = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 4x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12 + t, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 8 + 4t, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_5 = 10 - 6t, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}.$$

Розв'язання. Вважаючи значення параметра $t = 0$, знаходимо розв'язок даної задачі. Застосувавши симплекс-метод одержимо (табл.4.5):

Таблиця 4.5

i	Базис	C_σ	P_0	3	–2	5	0	–4
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	5	$12 + t$	1	1	1	0	0
2	P_4	0	$8 + 4t$	2	–1	0	1	0
3	P_5	– 4	$10 - 6t$	–2	2	0	0	1
4			$20 + 29t$	10	–1	0	0	0
1	P_3	5	$7 + 4t$	2	0	1	0	$-1/2$
2	P_4	0	$13 + t$	1	0	0	1	$1/2$
3	P_2	–2	$5 - 3t$	–1	1	0	0	$1/2$
4			$25 + 26t$	9	0	0	0	$1/2$

Для того, щоб план $X_0^* = (0;\ 5 - 3t;\ 7 + 4t;\ 13 + t;\ 0)$ був оптимальним планом задачі, необхідно, щоб виконувались нерівності

$$\begin{cases} 7 + 4t \geq 0, \\ 13 + t \geq 0, \\ 5 - 3t \geq 0, \end{cases} \Rightarrow t \in \left[-\frac{7}{4};\ \frac{5}{3}\right],\quad f_{\max} = 25 + 26t\,.$$

Дослідимо, чи має задача оптимальний план при $t > \frac{5}{3}$. Для цього проведемо ще одну ітерацію (табл. 4.6):

Таблиця 4.6

i	Базис	C_σ	P_0	3	–2	5	0	–4
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	5	$17 - 2t$	0	2	1	0	$1/2$
2	P_4	0	$18 - 2t$	0	1	0	1	1
3	P_1	3	$-5 + 3t$	1	–1	0	0	$-1/2$
4			$70 - t$	0	9	0	0	5

Щоб $X_1^* = (-5 + 3t;\ 0;\ 17-2t;\ 18-2t;\ 0)$ був оптимальним планом задачі, необхідне виконання нерівностей

$$\begin{cases} 17-2t \ge 0, \\ 18-2t \ge 0, \\ -5+3t \ge 0, \end{cases} \Rightarrow t \in \left[\frac{5}{3};\ \frac{17}{2}\right],\ f_{\max} = 70 - t.$$

При $t > \frac{17}{2}$ X_1^* не є оптимальним планом задачі, оскільки $17 - 2t < 0$. Крім того, в першому рядку (де розміщена компонента $17 - 2t$) немає від'ємних чисел. Це означає, що при $t > \frac{17}{2}$ вихідна задача не має розв'язку. У випадку $t < -\frac{7}{4}$ $X^* = (-5 + 3t;\ 0;\ 7 + 4t;\ 13 + t;\ 0)$ не є оптимальним планом задачі, оскільки $7+4t<0$. Щоби при даному значенні параметра знайти оптимальний план (це можна зробити, бо в рядку вектора P_3 стоїть від'ємне число $-^1/_2$), треба, згідно з алгоритмом двоїстого симплекс-методу, виключити з базису вектор P_3 і ввести в базис вектор P_5 (табл. 4.7).

Таблиця 4.7

i	Базис	$C_б$	P_0	3	-2	5	0	-4
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_5	–4	$-14 - 8t$	–4	0	–2	0	1
2	P_4	0	$20 + 5t$	3	0	1	1	0
3	P_2	–2	$12 + t$	1	1	1	0	0
4			$32 + 30t$	11	0	1	0	0

З таблиці 4.7 видно, що $X_2^* = (0;\ 12 + t;\ 0;\ 20 + 5t;\ -14 - 8t)$ буде оптимальним планом задачі, якщо:

$$\begin{cases} -14-8t \ge 0, \\ 20+5t \ge 0, \\ 12+\ t \ge 0, \end{cases} \Rightarrow t \in \left[-4; -\frac{7}{4}\right],\ f_{\max} = 32 + 30t.$$

З таблиці 4.7 також бачимо, що при $t < -4$ елемент стовпчика P_0 $20 + 5t < 0$, але елементи відповідного рядка додатні. Отже, при $t < -4$ вихідна задача не має розв'язку.

Таким чином, при $t \in (-\infty; -4)$ задача розв'язків не має;

при $t \in \left[-4; -\frac{7}{4}\right]$, $X_2^* = (0;\ 12 + t;\ 0;\ 20 + 5t;\ -14 - 8t)$, $f_{\max} = 32 + 30t$;

при $t \in \left(-\frac{7}{4}; \frac{5}{3}\right]$, $X_0^* = (0;\ 5 - 3t;\ 7 + 4t;\ 13 + t;\ 0)$, $f_{\max} = 25 + 26t$;

при $t \in \left[\frac{5}{3}; \frac{17}{2}\right]$, $X_1^* = (-5 + 3t;\ 0;\ 17 - 2t;\ 18 - 2t;\ 0)$, $f_{\max} = 70 - t$;

при $t \in \left(\frac{17}{2}; +\infty\right)$ задача не має розв'язку.

4.1.4. Розв'язання задачі, цільова функція і праві частини обмежень якої містять параметр

Використовуючи описані вище алгоритми, можна знайти розв'язок задачі, в якій від параметра t лінійно залежать як коефіцієнти цільової функції, так і вільні члени системи обмежень.

Приклад. Знайти $\forall\ t \in (-\infty; +\infty)$ розв'язок задачі

$$f = (8-5t)x_1 + (9-3t)x_2 + (-3+5t)x_3 - (2+4t)x_4 \to \max$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 24 - 12t, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = -18 + 10t, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Розв'язання. Нехай $t_0=2$, вектори P_3 і P_4 складають базис. Знаходимо симплекс-методом розв'язок отриманої задачі (табл. 4.8).

Таблиця 4.8

i	Ба-зис	C_σ	P_0	$8-5t$	$9-3t$	$-3+5t$	$-2-4t$
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	$-3+5t$	$24-12t$	1	1	1	0
2	P_4	$-2-4t$	$-18+10t$	-1	2	0	1
3			$-36+208t-100t^2$	$14t-9$	$-10t-10$	0	0
1	P_3	$-3+5t$	$15-7t$	$^1/_2$	0	1	$^1/_2$
2	P_2	$9-3t$	$-9+5t$	$-^1/_2$	1	0	$^1/_2$
3			$-126+168t-50t^2$	$9t-14$	0	0	$5t+5$

Очевидно, що при $t_0 = 2$ план $X_0^* = (0; -9+5t; 15-7t; 0)$ буде оптимальним. Він таким залишиться доти, поки виконуються нерівності $\begin{cases} 9t-14 \geq 0, \\ 5t+5 \geq 0, \end{cases}$ і $\begin{cases} 15-7t \geq 0, \\ -9+5t \geq 0, \end{cases}$ тобто при $t \in \left[\frac{9}{5}; \frac{15}{7}\right]$.

При $t < \frac{9}{5}$ $-9+5t<0$ і вектор X_0^* уже не буде оптимальним планом вихідної задачі. Переходимо до нової симплекс-таблиці (табл. 4.9), виключивши з попередньої P_2 і ввівши замість нього P_1.

Таблиця 4.9

i	Базис	C_σ	P_0	$8-5t$	$9-3t$	$-3+5t$	$-2-4t$
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	$-3+5t$	$6-2t$	0	1	1	1
2	P_1	$8-5t$	$18-10t$	1	-2	0	-1
3			$126-134t+40t^2$	0	$-28t+18$	0	$14t-9$

Як і в попередньому випадку, вектор $X_1^* = (18-10t; 0; 6-2t; 0)$ буде оптимальним планом задачі, якщо виконуються такі нерівності

$$\begin{cases} -28+18t \geq 0, \\ 14t-9 \geq 0, \end{cases} \text{ і } \begin{cases} 6-2t \geq 0, \\ 18-10t \geq 0. \end{cases}$$

Звідси $t \in \left[\frac{14}{9}; \frac{9}{5}\right]$. При $t > \frac{15}{7}$ $15-7t<0$ і вектор $X^* = (0; -9+5t; 15-7t; 0)$ не буде оптимальним планом задачі. Оскільки в рядку вектора P_3 немає від'ємних чисел, то при $t > \frac{15}{7}$ задача розв'язку не має.

Розглянемо значення $t < \frac{14}{9}$. Нова симплекс-таблиця буде такою (табл. 4.10):

Таблиця 4.10

i	Базис	C_σ	P_0	$8-5t$	$9-3t$	$-3+5t$	$-2-4t$
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_2	$9-3t$	$6-2t$	0	1	1	1
2	P_1	$8-5t$	$30-14t$	1	0	2	-1
3			$294-298t+76t^2$	0	0	$28-18t$	$19-4t$

При $t \in \left(-\infty; \frac{14}{9}\right]$ план $X_2^* = (30-14t; 6-2t; 0; 0)$ буде оптимальним планом задачі, $f = 76t^2 - 298t + 294$.

Отже, при $t \in \left(-\infty; \frac{14}{9}\right]$ $X_2^* = (30-14t; 6-2t; 0; 0)$, $f = 76t^2 - 298t + 294$;

при $t \in \left[\frac{14}{9}; \frac{9}{5}\right]$ $X_1^* = (18-10t; 0; 6-2t; 0)$, $f = 40t^2 - 134t + 126$;

при $t \in \left[\frac{9}{5}; \frac{15}{7}\right]$ $X_0^* = (0; -9+5t; 15-7t; 0)$, $f = 50t^2 - 168t + 126$;

при $t \in \left(\frac{15}{7}; +\infty\right)$ задача розв'язку не має.

4.2. Задачі дробово-лінійного програмування

Постановка задачі є такою. Знайти

$$f = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} = \frac{f_1}{f_2} \to \max \tag{1}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1,m}), \tag{2}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}), \tag{3}$$

де a_{ij}, b_i, c_j, d_j — задані числа, $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j > 0$ в області $R(X)$ системи обмежень (2) — (3).

4.2.1. Геометричний метод розв'язання задачі дробово-лінійного програмування

Нехай $n = 2$. Тоді задача (1) — (3) набуває вигляду:

$$f = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} \to \max \tag{1'}$$

за умов

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i, \ (i = \overline{1,m}), \tag{2'}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \tag{3'}$$

причому $d_1 x_1 + d_2 x_2 \neq 0$.

Процес знаходження розв'язку задачі (1′) — (3′) включає такі три основні етапи:

1. У системі обмежень (2′) знаки нерівностей замінюють на знаки рівностей і будують багатокутник розв'язків $R(X)$ задачі (2′) — (3′).

2. Будують пряму $\frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} = h$, де $h = const$.

3. Визначають точку максимуму або встановлюють нерозв'язність задачі (1′) — (3′).

4. Знаходять значення цільової функції f у точці максимуму.

Приклад. Знайти

$$f = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 \leq 26, \\ x_1 + x_2 \geq 4, \\ 12x_1 + 3x_2 \leq 39, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Використовуючи систему обмежень, будуємо багатокутник розв'язків $R(X)$ поставленої задачі (рис. 4.2). Прямі лінії обмежень проходять через точки:

x_1	0	13
x_2	3¼	0

x_1	0	4
x_2	4	0

x_1	0	3¼
x_2	13	0

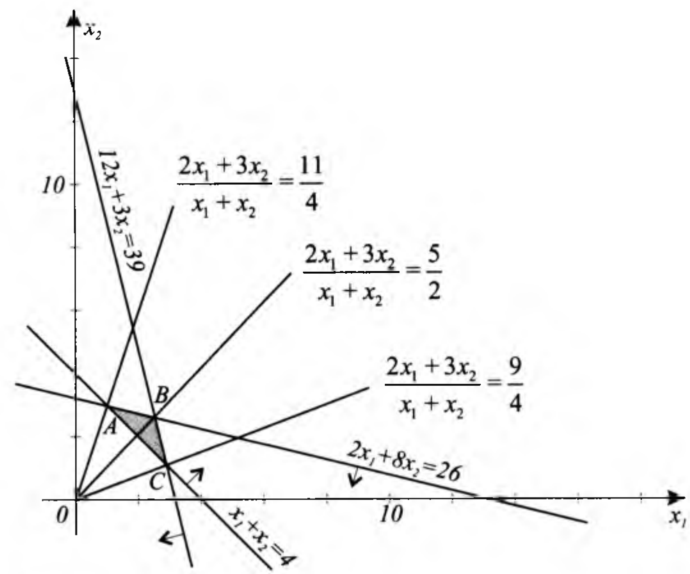


Рис. 4. 2

У даному випадку $R(X) = \Delta\, ABC$. Нехай

$$\frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = \frac{11}{4} \Rightarrow -3x_1 + x_2 = 0.$$

Це рівняння визначає пряму, що проходить через початок координат. Другою точкою, що задає цю пряму, буде $A(1; 3)$. Тобто при різних значеннях константи h рівняння $f = \dfrac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = h$ — це рівняння прямих, що проходять через початок координат. Аналогічно, при $h = \dfrac{9}{4}$, пряма (4) пройде через точку $C(3; 1)$.

Оскільки $f(A) = f(1; 3) = \dfrac{11}{4}$; $f(B) = f(3; 3) = \dfrac{5}{2}$; $f(C) = f(3; 1) = \dfrac{9}{4}$, то розв'язком задачі буде $f_{\min} = f(C) = \dfrac{9}{4}$. Аналогічно $f_{\max} = f(A) = \dfrac{11}{4}$.

При знаходженні розв'язку задачі дробово-лінійного програмування можуть бути такі випадки:

1) Багатокутник розв'язків $R(X)$ — обмежений, максимум і мінімум досягаються в його кутових точках (рис. 4.3).

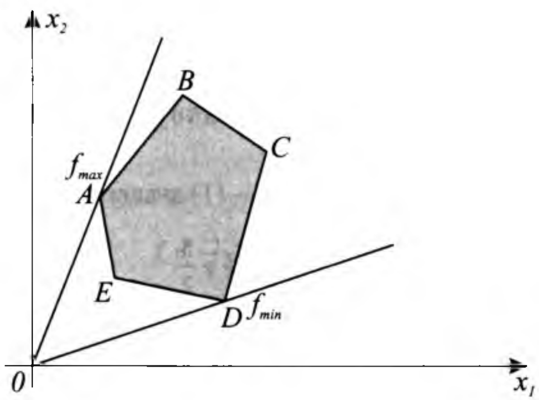


Рис. 4.3

2) Багатокутник розв'язків $R(X)$ не обмежений, але існують кутові точки, в яких цільова функція набуває максимального та мінімального значення (рис. 4.4).

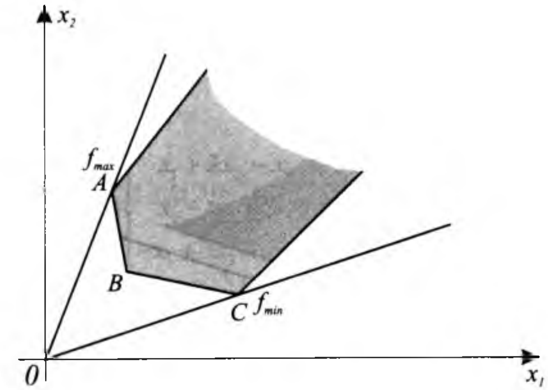


Рис. 4.4

3) Багатокутник розв'язків $R(X)$ не обмежений, і досягається один із екстремумів. Наприклад, мінімум досягається в одній із його вершин і функція f має так званий асимптотичний максимум (рис. 4.5).

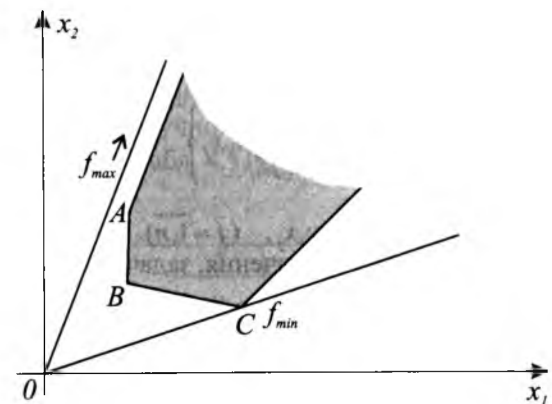


Рис. 4.5

4) Багатокутник $R(X)$ не обмежений; як максимум, так і мінімум є асимптотичними (рис. 4.6).

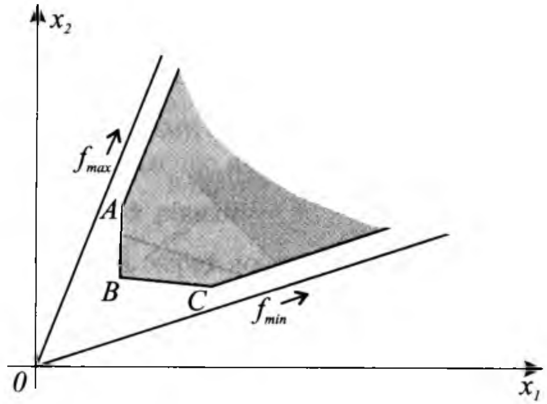


Рис. 4.6

4.2.2. Зведення задачі дробово-лінійного програмування до задачі лінійного програмування

Задачу (1) — (3) можна звести до задачі лінійного програмування. Позначимо

$$y_0 = \left\{ \sum_{j=1}^{n} d_j x_j \right\}^{-1} \qquad (4)$$

і введемо нові змінні

$$y_j = y_0 x_j, \quad (j = \overline{1,n}). \qquad (5)$$

Використовуючи введені позначення, задачу (1) — (3) зведемо до такої: знайти

$$f^* = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \to \max \qquad (6)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0 \quad (i = \overline{1,n}), \qquad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j y_j = 1, \qquad (8)$$

$$y_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}), \; y_0 \ge 0. \qquad (9)$$

Задача (6) — (9) є задачею лінійного програмування. Знаючи її оптимальний план, із співвідношень (5) одержуємо оптимальний план вихідної задачі (1) — (3).

Приклад. Знайти:

$$f = \frac{2x_1 + x_2}{x_1 + x_2} \to \max,$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 & = 11, \\ x_1 - x_2 + x_4 & = 8, \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 & = 9, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Розв'язання. Позначимо $y_0 = (x_1 + x_2)^{-1}$ і введемо нові змінні $y_j = y_0 x_j$, $j = \overline{1,5}$. Одержуємо таку задачу:

$$f^* = 2y_1 + y_2 \to \max$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 - 11y_0 = 0, \\ y_1 - y_2 + y_4 - 8y_0 = 0, \\ -y_1 + 3y_2 + y_5 - 9y_0 = 0, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases}$$

$$y_j \ge 0, \quad j = \overline{0,5}.$$

Ця задача вже є задачею лінійного програмування, і її розв'язок знаходимо методом штучного базису. Остання симплекс-таблиця матиме такий вигляд (табл. 4.11):

Таблиця 4.11

i	Базис	C_σ	P_0	2	1	0	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_0
1	P_2	1	$^1/_{10}$	0	1	$-^8/_{30}$	$-^{11}/_{30}$	0	0
2	P_1	2	$^9/_{10}$	1	0	$^8/_{30}$	$^{11}/_{30}$	0	0
3	P_5	0	$^{15}/_{10}$	0	0	$^5/_3$	$^7/_6$	1	0
4	P_0	0	$^1/_{10}$	0	0	$^2/_{30}$	$-^1/_{30}$	0	1
5			$^{19}/_{10}$	0	0	$^8/_{30}$	$^{11}/_{30}$	0	0

Отже, оптимальним планом задачі буде $Y^*=(^9/_{10};\ ^1/_{10};\ 0;\ 0;\ ^{15}/_{10};\ ^1/_{10})$. Оскільки $y_0 = {}^1/_{10}$, а $y_j = y_0 x_j$, то оптимальний план вихідної задачі $X^*=(9;\ 1;\ 0;\ 0;\ 15)$, причому $f_{\max} = {}^{19}/_{10}$.

4.3. Задачі теорії ігор та лінійне програмування

Уже на підставі поверхневих відомостей про найбільш поширені ігри можна зробити висновок, що в кожному випадку маємо таку ситуацію, коли дві або декілька осіб чи груп виявляють прямо протилежні інтереси, причому результати, до яких вони прагнуть, залежать не лише від їх власних дій, але і від дій супротивника. Виграш одного з гравців часто означає програш другого. Тому в процесі гри кожен із гравців своїми ходами бажає досягти виграшу і перешкоджає такому ж прагненню супротивника.

Ситуація називається *конфліктною*, якщо в ній беруть участь сторони, інтереси яких повністю або частково протилежні. Сторони, які беруть участь у конфліктній ситуації, називаються *гравцями* (*суперниками*), а результат конфлікту — *виграшем* (або *програшем*) однієї із сторін. Отже, *гра* — це дійсний або формальний конфлікт, у якому є принаймні два гравці (учасники), кожен з яких намагається досягнути власної цілі. Найбільш поширеними є ігри з двома гравцями (сторонами), або, як їх ще називають — *парні ігри*. Допустимі дії кожного з гравців, спрямовані на досягнення деякої мети, називаються *правилами гри*. Кількісна оцінка результатів гри називається *платежем*. Парна гра називається *грою з нульовою сумою*, якщо сума платежів дорівнює нулю, тобто якщо програш одного гравця дорівнює виграшу іншого. *Ходом* називається вибір одного з можливих у певній ситуації варіантів продовження гри і його здійснення. Сукупність правил, що визначають певний вибір кожного ходу гравця при довільній ситуації, яка може виникнути в процесі гри, називається його *стратегією*. Стратегія гравця називається *оптимальною*, якщо при багатократному повторенні гри вона забезпечує максимально можливий середній виграш (або, що одне й теж, мінімально можливий середній програш).

Нехай є два гравці, перший з яких може вибрати i-у стратегію з m можливих стратегій ($i=\overline{1,m}$), а другий, не знаючи вибору першого,

вибирає j-у стратегію із n своїх можливих стратегій ($j=\overline{1,n}$). Як результат, перший гравець виграє величину a_{ij}, а другий програє цю величину. З чисел a_{ij} складаємо матрицю:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \ldots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \ldots\ a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ a_{m3}\ \ldots\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Рядки матриці A відповідають стратегіям першого гравця, а стовпчики — стратегіям другого. Ці стратегії називаються *чистими*.

Матриця A називається *платіжною* (або матрицею гри). Гру, яка визначається матрицею A, що має n рядків і m стовпчиків, називають *скінченою грою розмірності $m \times n$*. Головною проблемою є складання матриці A, а отже, методи теорії ігор застосовуються власне до матриці A, яка через це називається просто *грою*. Тому найчастіше до реального змісту ігор не вдаються, а досліджують лише матриці, якими їх подано.

Для складання матриці гри A розглянемо такий приклад.

Приклад. Два гравці одночасно називають або записують один із таких трьох предметів: камінь, папір, ножиці. Коли вони називають один і той же предмет, то гра закінчується внічию. В іншому випадку виграш очка визначається з умов, що ножиці ріжуть папір, камінь розбиває ножиці, папір накриває камінь. Треба записати матрицю гри, що має назву “камінь — папір — ножиці”.

Розв’язання. Маємо таблицю:

		2-й гравець		
		камінь	папір	ножиці
1-й гравець	камінь	0	–1	1
	папір	1	0	–1
	ножиці	–1	1	0

У першій клітинці першого рядка стоїть 0, бо вона відповідає тому випадку, коли обидва гравці назвуть “камінь”. Коли перший

15 - 8-1045

гравець —"камінь", а другий — "папір", то другий гравець виграє очко, а перший програє очко. Якщо перший гравець вибере стратегію "камінь", а другий — "ножиці", то очко виграє перший гравець, а другий його програє і т.д. Отже, матриця гри

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Число $\alpha=\max_i(\min_j a_{ij})$ називають *нижньою ціною гри*, або *максиміном*, а відповідну йому стратегію гравця *максимінною*. Число $\beta=\min_j(\max_i a_{ij})$ називається *верхньою ціною гри*, або *мінімаксом*.

Теорема. Нижня ціна гри завжди не перевищує верхньої ціни гри.

Приклад. Нехай матриця гри

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тоді $\alpha=\max(6,5)=6$, $\beta=\min(7,6)=6$.

Гра, в якій $\alpha=\beta$, називається *грою із сідловою точкою*, а саме число $\alpha=\beta=\nu$ — називають *ціною гри*. В нашому прикладі $v = 6$ є ціною гри. Якщо гра, яка задана матрицею, не має сідлової точки, то для знаходження її розв'язків використовуються *змішані стратегії*.

Вектор, кожна з компонент якого показує відносну частоту використання гравцем відповідної чистої стратегії, називається *змішаною стратегією* гравця.

З даного означення безпосередньо випливає, що сума компонент вказаного вектора дорівнює одиниці, а самі компоненти — невід'ємні. Як правило, змішану стратегію першого гравця позначають як вектор $U=(u_1; u_2;\ldots; u_m)$, а змішану стратегію другого гравця — як вектор $Z=(z_1; z_2;\ldots; z_n)$. Тут $u_i\ge 0$ $(i=\overline{1,m})$; $z_j\ge 0$ $(j=\overline{1,n})$; $\sum_{i=n}^{m} u_i=1$, $\sum_{j=1}^{n} z_j=1$.

Якщо U^* — це оптимальна стратегія першого гравця, а Z^* — оптимальна стратегія другого гравця, то

$$v=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^* z_j^*$$

буде ціною гри.

Теорема 1. Всяка матрична гра з нульовою сумою має розв'язок у змішаних стратегіях.

Теорема 2. Для того, щоб число v було ціною гри, а U^* та Z^* — оптимальними стратегіями, необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^* \ge v\ (j=\overline{1,n}) \text{ і } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_j^* \ge v,\ (i=\overline{1,m}).$$

Теорема 3. Якщо один із гравців застосовує оптимальну змішану стратегію, то його виграш дорівнює ціні гри v незалежно від того, з якими частотами буде застосовувати другий гравець стратегії, які ввійшли в оптимальну (в тому числі також чисті стратегії).

4.3.1. Розв'язання матричних ігор та їх геометрична інтерпретація

Приклад 1. Знайти розв'язок гри, заданої матрицею:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

та дати геометричну інтерпретацію одержаного розв'язку.

Розв'язання. Перевіримо, чи є в даній матриці сідлова точка: $\alpha=\max(2;4)$, $\beta=\min(6;5)$, отже, $\alpha\ne\beta$, а значить, розв'язком гри є змішані оптимальні стратегії, а ціна гри $4\le v\le 5$.

Нехай для гравця A стратегія задається вектором U. Тоді на основі теореми 3 при застосуванні гравцем B чистої стратегії B_1 або B_2 гравець A одержить середній виграш, який дорівнює ціні гри, тобто

$$\begin{cases} 2u_1^*+6u_2^*=v & \text{(при стратегії } B_1) \\ 5u_1^*+4u_2^*=v & \text{(при стратегії } B_2), \end{cases}$$

а також $u_1^*+u_2^*=1$.

Розв'язком цієї системи будуть $u_1^*=\dfrac{2}{5}$, $u_2^*=\dfrac{3}{5}$, $v=\dfrac{22}{5}$.

Знайдемо оптимальну стратегію для гравця B. Нехай для даного гравця вона задається вектором $Z=(z_1, z_2)$. Тоді

$$\begin{cases} 2z_1^* + 5z_2^* = \dfrac{22}{5}, \\ 6z_1^* + 4z_2^* = \dfrac{22}{5}, \\ z_1^* + z_2^* = 1, \end{cases} \Rightarrow z_1^* = \frac{1}{5}, z_2^* = \frac{4}{5}.$$

Таким чином, $U^* = \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right)$ та $Z^* = \left(\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right)$ — розв'язок гри, а $v = \frac{22}{5}$ — ціна гри.

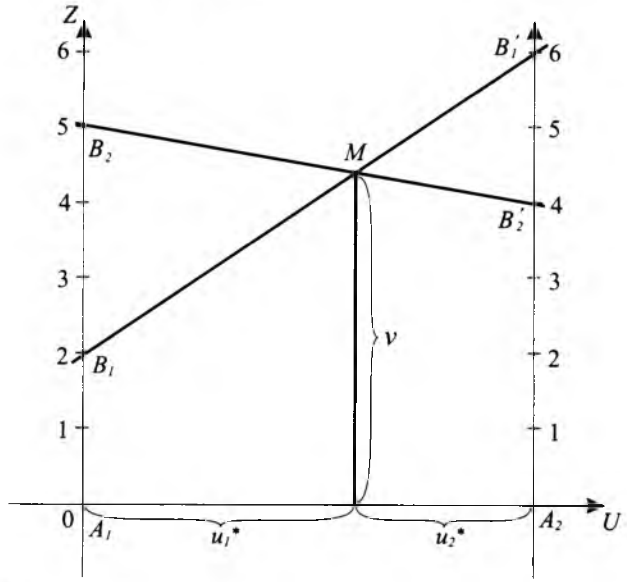


Рис. 4.7

Геометрична інтерпретація розв'язку даної гри є такою. Задамо систему координат Ouz, на осі Ou відкладемо відрізок одиничної довжини A_1A_2 (рис. 4.7). Кожній точці цього відрізка поставимо у відповідність деяку змішану стратегію $U = (u_1; u_2) = (u_1; 1 - u_1)$. Зокрема, точці $A_1(0; 1)$ відповідає стратегія A_1, $A_2(1, 0)$ — стратегія A_2 і т.д. У точках A_1 і A_2 проводимо перпендикуляри і на одержаних прямих відкладаємо виграші гравців. Якщо гравець A застосовує стратегію A_1, то його виграш при стратегії B_1 гравця B дорівнює 2, а при стратегії B_2 він дорівнює 5. Цим числам на осі Oz відповідають точки B_1 і B_2.

Якщо ж гравець A застосовує стратегію A_2, то його виграш при стратегії B_1 гравця B дорівнює 6, а при стратегії B_2 — 4. Цим числам відповідають точки B_1' і B_2'. З'єднуючи між собою точки B_1 і B_1', B_2 і B_2', одержимо дві прямі, відстань до яких від осі Ou визначає середній виграш при будь-якому співвідношенні відповідних стратегій. Ординати точок, які належать ламаній B_1MB_2', визначають мінімальний виграш гравця A при застосуванні ним будь-яких змішаних стратегій. Ця мінімальна величина буде максимальною в точці M, а отже, цій точці відповідає оптимальна стратегія $U^* = (u_1', u_1')$, а її ордината рівна ціні гри v. Координатами точки M будуть координати точок перетину прямих B_1B_1' та B_2B_2'. Відповідні три рівняння мають вигляд:

$$\begin{cases} 2u_1^* + 6u_2^* = v, \\ 5u_1^* + 4u_2^* = v, \\ u_1^* + u_2^* = 1, \end{cases} \Rightarrow u_1^* = \frac{2}{5}, u_2^* = \frac{3}{5}, v = \frac{22}{5}.$$

Аналогічно отримана стратегія для гравця B зводиться до системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2z_1^* + 5z_2^* = \dfrac{22}{5}, \\ z_1^* + z_2^* = 1, \end{cases} \Rightarrow z_1^* = \frac{1}{5}, z_2^* = \frac{4}{5}.$$

Тоді розв'язком гри є змішані стратегії $U^* = \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right)$ та $Z^* = \left(\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right)$, а ціна гри $v = \frac{22}{5}$.

Виходячи з розв'язаної задачі, *основними етапами знаходження розв'язку гри 2×n або n×2 будуть такі*:

1. Будуються прямі, які відповідають стратегіям другого (першого) гравця.
2. Визначають нижню (верхню) границю виграшу.
3. Знаходять дві стратегії другого (першого) гравця, яким відповідають дві прямі, які перетинаються в точці з максимальною (мінімальною) ординатою.

Приклад 2. Знайти розв'язок гри, заданої матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 10 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Будуємо пряму $B_1 B_1'$, яка проходить через точки $B_1(0; 7)$ та $B'_1(1; 10)$, пряму $B_2 B_2'$ — через точки $B_2(0; 9)$ та $B_2'(1; 6)$, пряму $B_3 B_3'$ — через точки $B_3(0; 8)$ та $B_3'(1; 9)$ (див. рис. 4.8).

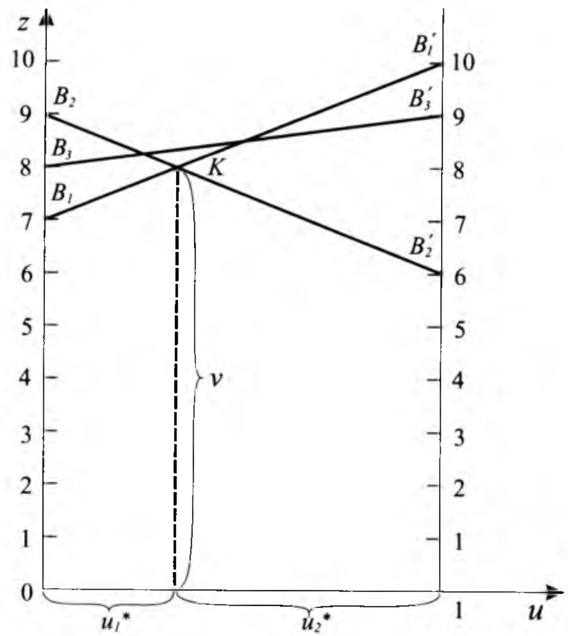


Рис. 4.8

Ламана $B_1 K B_2'$ відповідає нижній границі виграшу гравця B.

$$\begin{cases} 7u_1^* + 10u_2^* = v, \\ 9u_1^* + 6u_2^* = v, \quad \Rightarrow u_1^* = \dfrac{2}{3}, u_2^* = \dfrac{1}{3}, v = 8. \\ u_1^* + u_2^* = 1, \end{cases}$$

Для визначення оптимальної стратегії гравця B маємо систему

$$\begin{cases} 7z_1^* + 9z_2^* + 8z_3^* = 8, \\ 10z_1^* + 6z_2^* + 9z_3^* = 9, \Rightarrow z_1^* = \dfrac{1}{2}, z_2^* = \dfrac{1}{2}, z_3^* = 0. \\ z_1^* + z_2^* + z_3^* = 1, \end{cases}$$

Отже, гра має розв'язок $U^* = \left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$, $Z^* = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; 0\right)$; $v = \dfrac{43}{8}$.

Приклад 3. Швейне підприємство планує до масового випуску нову модель одягу. Попит на цю модель не може бути точно визначений. Але можна припустити, що його величина характеризується трьома станами (I, II, III). З урахуванням цих станів аналізуються три можливих варіанти випуску даної моделі (А, Б, В). Кожний із цих варіантів вимагає конкретних затрат і забезпечує різний ефект. Прибуток (у тис. грош. одиниць), який одержить підприємство при даному обсязі випуску моделі і відповідному стані попиту, визначається матрицею

$$\begin{array}{c} \\ \text{А} \\ \text{Б} \\ \text{В} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 22 & 22 & 22 \\ 21 & 23 & 23 \\ 20 & 21 & 24 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Потрібно знайти обсяг випуску моделі одягу, яка забезпечує середню величину прибутку для будь-якого стану попиту.

Розв'язання. Перевіримо, чи має матриця сідлову точку. З одного боку $\alpha = \max(22; 21; 20) = 22$, з іншого — $\beta = \min(22; 23; 24) = 22$. Отже, $\alpha = \beta = 22$ є ціною гри. Гра має сідлову точку, яка відповідає першому варіанту випуску моделі одягу. Обсяг випуску моделі, яка відповідає даному варіанту, забезпечує прибуток у 22 тис. грошових одиниць при будь-якому стані попиту.

4.3.2. Зведення задач теорії ігор до задач лінійного програмування

Розглянемо гру $m \times n$, яка задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Згідно з теоремою 2, для оптимальної стратегії першого гравця $U^* = (u_1^*; u_2^*; \ldots; u_n^*)$ і ціни гри v виконується нерівність:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* \ge v \quad (j = \overline{1, n}). \qquad (1)$$

Нехай для визначеності $v > 0$. Це завжди можна зробити, оскільки додавання до всіх елементів матриці A однієї і тієї ж константи C не призводить до зміни оптимальних стратегій, а тільки збільшує ціну гри на C. Розділивши обидві частини нерівності (1) на v, одержимо:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\frac{u_i^*}{v} \geq 1 \;\; (j=\overline{1,n}).$$

Якщо позначити $y_i^* = \dfrac{u_i^*}{v}$, тоді $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq 1 \;\; (j=\overline{1,n}),\;\; y_i^* \geq 0 \;\; (i=\overline{1,m})$.

З умови $\sum_{i=1}^{m} u_i^* = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} y_i^* = \dfrac{1}{v}$.

Оскільки перший гравець прагне одержати максимальний виграш, то він повинен забезпечити мінімум величині $\dfrac{1}{v}$. Враховуючи цю необхідність, означення оптимальної стратегії першого гравця зводиться до знаходження

$$f^* = \sum_{i=1}^{m} y_i \to \min$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq 1 \;\; (j=\overline{1,n}),$$
$$y_i \geq 0 \;\; (i=\overline{1,m}).$$

Аналогічні міркування показують, що пошук оптимальної стратегії другого гравця зводиться до задачі: знайти

$$f = \sum_{j=1}^{n} x_j \to \max$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1 \;\; (i=\overline{1,m}),$$
$$x_j \geq 0 \;\; (j=\overline{1,n}),\;\; x_j = \frac{z_j}{v}.$$

Отже, щоб знайти розв'язок даної гри, яка визначається матрицею A, треба скласти таку пару двоїстих задач та знайти їх розв'язок:

пряма задача: знайти

$$f = \sum_{j=1}^{n} x_j \to \max$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1, \;\; (i=\overline{1,m}),$$
$$x_j \geq 0 \;\; (j=\overline{1,n});$$

двоїста задача: знайти

$$f^* = \sum_{i=1}^{m} y_i \to \min$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq 1 \;\; (j=\overline{1,n}),$$
$$y_i \geq 0 \;\; (i=\overline{1,m}).$$

Використовуючи розв'язок пари двоїстих задач, одержуємо формули для визначення стратегій та ціни гри:

$$u_i^* = \frac{y_i^*}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*} = v y_i^*;\;\; z_j^* = \frac{x_j^*}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*} = v x_j^*;\;\; v = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*};\;\; i=\overline{1,m},\;\; j=\overline{1,n}.$$

Отже, процес знаходження розв'язку гри з використанням методів лінійного програмування включає такі етапи:

1. Складають пару задач лінійного програмування, які еквівалентні даній матричній грі.
2. Визначають оптимальні плани пари двоїстих задач.
3. Використовуючи співвідношення між планами двоїстих задач і оптимальними стратегіями та ціною гри, знаходять розв'язок гри.

Приклад. Знайти розв'язок гри, яка визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Пряма задача буде такою: знайти

$$f = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_3 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\; j=1, 2, 3.$$

Двоїста задача: знайти

$$f^* = y_1 + y_2 + y_3 \to \min$$

за умов

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 1 \\ 2y_1 \qquad + \ y_3 \ge 1 \\ \qquad y_2 \qquad \ge 1 \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \ i = 1, 2, 3.$$

У прямій задачі обмеження-нерівності замінюємо на обмеження рівності:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad + x_4 \qquad\qquad = 1, \\ x_1 \qquad + x_3 \qquad + x_5 \qquad = 1, \\ 2x_1 + \ x_2 \qquad\qquad\qquad + x_6 = 1. \end{cases}$$

Базисними векторами будуть P_4, P_5, P_6. Хід розв'язання подано у таблиці 4.12.

Таблиця 4.12

i	Базис	C_σ	P_0	1	1	1	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	1	1	2	0	1	0	0
2	P_5	0	1	1	0	1	0	1	0
3	P_6	0	1	2	1	0	0	0	1
4			0	–1	–1	–1	0	0	0
1	P_4	0	1	1	2	0	1	0	0
2	P_3	1	1	1	0	1	0	1	0
3	P_6	0	1	2	1	0	0	0	1
4			1	0	–1	0	0	1	0

Закінчення табл. 4.12

i	Базис	C_σ	P_0	1	1	1	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	1	$^1/_2$	$^1/_2$	1	0	$^1/_2$	0	0
2	P_3	1	1	1	0	1	0	1	0
3	P_6	0	$^1/_2$	$^3/_2$	0	0	$-^1/_2$	0	1
4			$^3/_2$	$^1/_2$	0	0	$^1/_2$	1	0

Бачимо, що пряма задача має оптимальний план $X^* = \left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$, а двоїста задача — оптимальний план $Y^* = \left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$. Тоді ціна гри $v = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}$, а оптимальні стратегії гравців $U^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0\right)$, $Z^* = \left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Отже, для кожної матричної гри можна записати симетричну пару двоїстих задач. Тут справедливе обернене твердження: для будь-якої симетричної пари двоїстих задач можна записати матричну гру.

Нехай задана симетрична пара двоїстих задач — пряма задача:

$$f = CX, \ AX \le B, \ X \ge 0;$$

та двоїста задача:

$$f^* = BY, \ YA \ge C, \ Y \ge 0.$$

Тоді цій парі задач ставлять у відповідність гру, яка визначається матрицею

$$D = \begin{pmatrix} 0 & A & -B \\ -A^T & 0 & C^T \\ B^T & -C & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад. Побудувати гру, яка відповідає такій парі двоїстих задач: пряма задача:

$$f = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10 \\ -x_1 + 3x_2 \le 12 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

двоїста задача:

$$f^* = 10y_1 + 12y_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 \ge 2, \\ y_1 + 3y_2 \ge 3, \end{cases}$$
$$y_1, y_2 \ge 0.$$

Розв'язання. У даному випадку

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $A^T=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}$; $B^T=(10;12)$; $C=(2;3)$; $C^T=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Отже, матриця D матиме такий вигляд:

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -12 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 10 & 12 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відзначимо, що якщо кожна матрична гра має оптимальні стратегії, то не кожна задача лінійного програмування має розв'язки.

При розв'язанні задач скінчених ігор розмірності $m \times n$ доцільно дотримуватися такої схеми:

1) виключити з вихідної платіжної матриці явно невигідні стратегії;

2) знайти верхню та нижню ціни гри та перевірити, чи має гра сідлову точку. Якщо така точка є, то відповідні їй стратегії будуть оптимальними, гра має розв'язок у чистих стратегіях, а ціна гри дорівнює верхній (нижній) ціні;

3) якщо сідлова точка відсутня, розв'язок гри необхідно шукати у змішаних стратегіях, приводячи, наприклад, до задачі лінійного програмування.

На практиці розв'язок у змішаних стратегіях може бути реалізований по-різному. Наприклад, чисті стратегії використовуються в послідовності, заданій відповідними ймовірностями за умови, що гра може

повторюватися багато разів. За інших умов виконується певний фізичний розподіл у пропорціях, визначених ймовірностями.

Моделі гри з ненульовою сумою використовуються для дослідження ситуації, коли учасники процесу не лише мають антагоністичні цілі, а, навпаки, можуть і вигравати, і програвати водночас. Якщо в моделі гри з *нульовою сумою* кожному учаснику невигідно було інформувати партнера про свою стратегію, бо це могло призвести до зменшення суми виграшу, то за гри з *нульовою сумою* часто доцільно партнерам координувати свої дії з метою одержання найбільшого виграшу.

Ігри з ненульовою сумою поділяються на *кооперативні* і *некооперативні.* У некооперативних іграх гравці приймають рішення незалежно один від одного або тому, що рішення не можна узгодити або узгодження заборонено правилами гри. Кооперативною грою називається гра ненульовою сумою, в якій гравцям дозволяється узгоджувати перед грою свої дії (стратегії), тобто створювати коаліції. Основна задача кооперативної гри зводиться до розподілу виграшу між членами коаліції.

Ігри, які можна реалізувати як певну послідовність дій гравців, називають *позиційними.* Кількість гравців і кроків реалізації може бути довільною. До позиційних багатокрокових ігор двох гравців, де кожний учасник приймає рішення, маючи певну інформацію про попередні дії партнера, належать ігри в шахи та шашки.

Оскільки позиційні ігри реалізовуються послідовністю певних дій, то їх представляють не матрицею виграшів, а графом розв'язання, який відображає послідовність дій гравців від вихідної позиції до завершальної.

Розділ 5

ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

У загальному вигляді задача нелінійного програмування ставиться так.

Знайти

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \max\ (\min) \tag{1}$$

за умов

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le b_i \quad (i = \overline{1, m}), \tag{2}$$

де f та g_i — нелінійні функції від n змінних, а b_i — задані числа. У випадку, коли (2) — обмеження-рівності, задача (1) — (2) — це задача на умовний екстремум, яка розв'язується за допомогою методу множників Лагранжа. Універсальних методів розв'язання нелінійної задачі (1) — (2) немає, а тому розглядаються методи розв'язання спеціальних типів нелінійних задач (1) — (2).

5.1. Геометричний метод розв'язання задач нелінійного програмування

Цей метод застосовується при $n = 2$ і включає такі основні етапи:

1. Знаходять область допустимих розв'язків $R(X)$ задачі, яка визначається співвідношеннями (2). Якщо вона пуста, то задача не має розв'язку.

2. Будують лінії рівня $f(x_1, x_2) = h$, де h — деякі числа.

3. Знаходять спільну точку $R(X)$ і лінії найвищого (найнижчого) рівня $f(x_1, x_2) = h$ і визначають у ній значення функції (1).

Приклад 1. Знайти

$$f(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2 + 6x_1 \to \max \tag{3}$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \\ x_2 \le 4, \end{cases} \tag{4}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \tag{5}$$

Розв'язання. Задача (3) — (5) — це задача нелінійного програмування. Побудуємо область $R(X)$ (рис. 5.1). Пряма $2x_1+3x_2=24$ проходить через точки (0; 8) та (12; 0), пряма $x_1+2x_2=15$ — через точки (0; 7,5) та (15; 0), пряма $3x_1+2x_2=24$ — через точки (0; 12) та (8; 0), а пряма $x_2=4$ паралельна осі Ox_1.

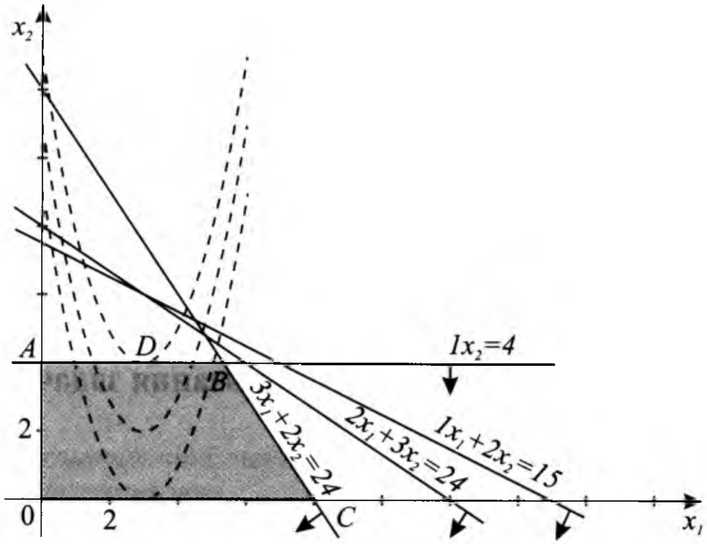


Рис. 5.1

Таким чином, $R(X)=OABC$. Отже, треба знайти таку точку $OABC$, в якій функція $f(x_1,x_2)=x_2-x_1^2+6x_1$ набуває максимального значення. Якщо h — деяка константа, то лінія $x_2-x_1^2+6x_1=h$ є параболою, причому чим більшою є константа h, тим більше ця парабола віддалена від осі Ox_1. Максимуму цільова функція (3), очевидно, досягає в точці D — точці дотику параболи та прямої AB. Визначимо константу h, яка відповідає такому положенню параболи.

$$\begin{cases} x_2-x_1^2+6x_1=h, \\ x_2=4, \end{cases} \Rightarrow 4-x_1^2+6x_1=h \Rightarrow x_1^2-6x_1+(h-4)=0.$$

Із умови $\sqrt{36-4(h-4)}=0$ маємо $h=13$. Координати шуканої точки D визначаються як розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} x_2-x_1^2+6x_1=13, \\ x_2=4, \end{cases} \Rightarrow x_1^*=3,\ x_2^*=4.$$

Отже, $X^*=(3;4)$, а $f_{\max}=4-9+18=13$. У даному випадку точка максимуму D не є вершиною багатокутника $R(X)$. Тому процедура перебору вершин багатокутника, яка застосовується при розв'язанні задач лінійного програмування, в даному випадку незастосовна.

Приклад 2. Знайти

$$f=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2 \to \max, \min \tag{6}$$

за умов

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2 \ge 7, \\ 10x_1-x_2 \le 8, \\ -18x_1+4x_2 \le 12 \end{cases} \tag{7}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \tag{8}$$

Розв'язання. Побудуємо область допустимих розв'язків $R(X)$ (рис. 5.2).

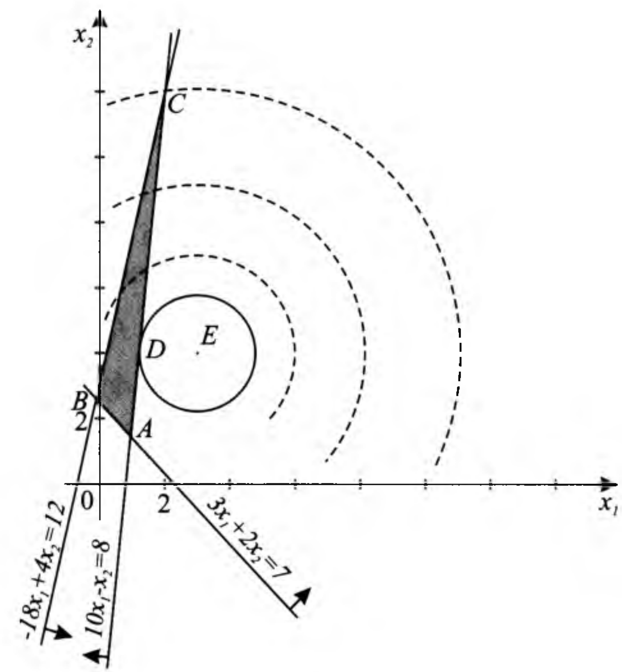


Рис. 5.2

Пряма $3x_1+2x_2=7$ проходить через точки (0; 3,5) та (2,3; 0), пряма $10x_1-x_2=8$ — через точки (0; –8) та $\left(\frac{4}{5};0\right)$, пряма $-18x_1+4x_2=12$ — через точки (0; 3) та $\left(-\frac{2}{3};0\right)$.

У даному випадку $R(X)=\Delta ABC$ з координатами вершин $A(1;2)$, $B(0;3{,}5)$, $C(2;12)$. Якщо замість (6) записати лінію рівня

$$(x_1-3)^2+(x_2-4)^2=h,\ h=const, \tag{9}$$

то рівняння (9) — це рівняння кола із центром у точці $E(3;4)$ і радіусами $\sqrt{h}$. Проводячи з точки E кола різних радіусів, бачимо, що найменшого значення функція f набуває в точці D, де коло дотикається до $R(X)$. Для знаходження координат цієї точки скористаємося рівністю кутових коефіцієнтів прямої $10x_1-x_2=8$ та дотичної до кола в точці D. Оскільки $x_2=10x_1-8\Rightarrow k_1=10$. Кутовий коефіцієнт дотичної до кола в точці D визначимо як значення похідної функції x_2 від змінної x_1 у цій точці. Диференціюючи рівняння (9), одержимо:

$$2(x_1-3)+2(x_2-4)\cdot x_2'=0\Rightarrow x_2'=-\frac{x_1-3}{x_2-4}.$$

З рівності

$$-\frac{x_1-3}{x_2-4}=10\Rightarrow -x_1+3=10x_2-40\Rightarrow x_1+10x_2=43.$$

Таким чином, координати точки D знаходяться як розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases}x_1+10x_2=43,\\10x_1-x_2=8,\end{cases}\Rightarrow x_1^*=\frac{123}{101},\quad x_2^*=\frac{422}{101},\quad f_{\min}=\frac{324}{101}.$$

З рисунка 5.2 бачимо, що максимуму цільова функція досягає в точці C (2; 12). Отже, $x_1^*=2$, $x_2^*=12$, $f_{\max}=65$.

Приклад 3. Знайти

$$f=3x_1+4x_2\to\max \tag{10}$$

за умов

$$\begin{cases}x_1^2+x_2^2\le 25,\\ x_1\cdot x_2\ge 4,\end{cases} \tag{11}$$

$$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0. \tag{12}$$

Розв'язання. Рівняння $x_1^2+x_2^2=25$ — це рівняння кола з радіусом $R=5$, а $x_1\cdot x_2=4$ — це рівняння гіперболи. Область $R(X)$ зображено на рисунку 5.3.

Записавши $3x_1+4x_2=h$, де h — довільна константа, одержуємо замість цільової функції (10) лінії рівня. При $h=6$ пряма $3x_1+4x_2=6$ проходить через точки $\left(0;\frac{3}{2}\right)$ та (2; 0). З рисунка 5.3 видно, що свого максимуму цільова функція досягає в точці E, координати якої потрібно знайти.

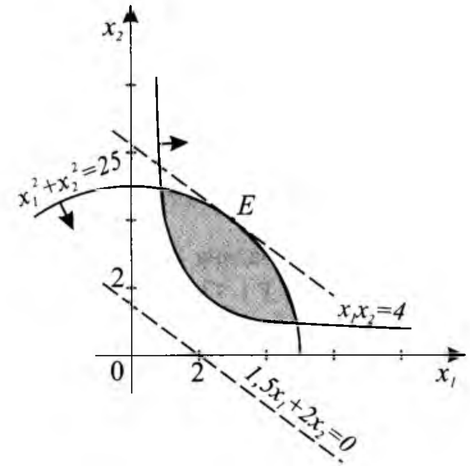


Рис. 5.3

Диференціюючи рівняння $x_1^2+x_2^2=25$, одержуємо:

$$2x_1+2x_2x_2'=0\Rightarrow x_2'=-\frac{x_1}{x_2}.$$

З іншого боку, кутовий коефіцієнт прямої $3x_1+4x_2=h$ буде дорівнювати $-\frac{3}{4}$. Прирівнюючи, одержуємо:

$$-\frac{x_1}{x_2}=-\frac{3}{4}=3x_1-4x_2=0.$$

Таким чином, координати точки E одержуються як розв'язки системи рівнянь $\begin{cases}3x_2-4x_1=0,\\x_1^2+x_2^2=25,\end{cases}$ звідки $x_1^*=4$, $x_2^*=3$, $f_{\max}=25$.

5.2. Задачі опуклого програмування

Розглянемо таку задачу.
Знайти

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max \tag{1}$$

за умов

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \quad (i = \overline{1,m}), \tag{2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{3}$$

де f та g_i — це деякі функції від n змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, а b_i — задані числа.

Функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, яка задана на опуклій множині X, називається *опуклою*, якщо $\forall x_1, x_2 \in X$ і $\forall \lambda \in [0, 1]$ виконується нерівність

$$f[\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1] \le \lambda f(x_2) + (1-\lambda) f(x_1).$$

Функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *вгнутою*, якщо $\forall x_1, x_2 \in X$ і $\forall \lambda \in [0, 1]$ виконується нерівність

$$f[\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1] \ge \lambda f(x_2) + (1-\lambda) f(x_1).$$

Кажуть, що множина допустимих розв'язків $R(X)$ задачі (1) — (3) задовольняє *умову регулярності*, якщо існує хоча б одна точка $x_i \in R(X)$ — така, що $g_i(x_i) < b_i$, $i = \overline{1,m}$.

Задача (1) — (3) називається задачею опуклого програмування, якщо функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ є вгнутою (опуклою), а функції $g_i(X)$, $i = \overline{1,m}$ — опуклими.

Теорема 1. Будь-який локальний максимум (мінімум) задачі опуклого програмування є глобальним максимумом (мінімумом).

Функцією Лагранжа задачі опуклого програмування (1) — (3) називається функція

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n)],$$

де $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ — множники Лагранжа.

Точка $(X_0, \Lambda_0) = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0)$ називається *сідловою точкою функції Лагранжа*, якщо $\forall x_j \ge 0$, $j = \overline{1,n}$ і $\forall \lambda_i \ge 0$, $i = \overline{1,m}$ виконується нерівність

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0) \le L(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0) \le$$
$$\le L(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m).$$

Теорема Куна-Таккера. Для задачі опуклого програмування (1) — (3), множина $R(X)$ якої має властивість регулярності, вектор $X_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ буде оптимальним планом тоді і тільки тоді, коли існує такий вектор $\Lambda_0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0)$, $\lambda_i^0 \ge 0, \forall i = \overline{1,m}$, при якому пара векторів (X_0, Λ_0) буде сідловою точкою функції Лагранжа.

Якщо припустити, що цільова функція f та функції g_i неперервно диференційовні, то теорема Куна-Таккера може бути доповнена аналітичними виразами, які визначають необхідні і достатні умови для того, щоб пара векторів (X_0, Λ_0) була сідловою точкою функції Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x_j} \le 0, \quad j = \overline{1,n}, & (4) \\ x_j^0 \dfrac{\partial L_0}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1,n}, & (5) \\ x_j^0 \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, & (6) \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial \lambda_i} \ge 0, \quad i = \overline{1,m}, & (7) \\ \lambda_i^0 \dfrac{\partial L_0}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i = \overline{1,m}, & (8) \\ \lambda_i^0 \ge 0, \quad i = \overline{1,m}, & (9) \end{cases}$$

де $\dfrac{\partial L_0}{\partial x_j}$ та $\dfrac{\partial L_0}{\partial \lambda_i}$ — це значення відповідних частинних похідних функції Лагранжа, обчислених у сідловій точці.

Квадратичною формою відносно змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ називається функція $f = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j$.

Квадратична форма f називається *додатно (від'ємно) визначеною*, якщо $\forall X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, крім $X = 0$, виконується нерівність $f(X) \ge 0$ ($f(X) \le 0$). Квадратична форма f називається *додатно (від'ємно) напіввизначеною*, якщо $\forall X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, крім $X = 0$, виконується нерівність $f(X) \ge 0$ ($f(X) \le 0$) і крім цього існує такий набір змінних $X' = (x_1', x_2', ..., x_n')$, де не всі змінні одночасно рівні нулю, що $f(X') = 0$.

Теорема 2. Квадратична форма буде опуклою функцією, якщо вона додатно напіввизначена, і вгнутою функцією, якщо вона від'ємно напіввизначена.

Задачею квадратичного програмування є така задача.

Знайти

$$f(X)=\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j \to \max\ (\min) \tag{10}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=\overline{1,m}, \tag{11}$$

$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}, \tag{12}$$

де $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j$ — від'ємно (додатно) напіввизначена квадратична форма.

Для сформульованої задачі квадратичного програмування функція Лагранжа записується так:

$$L=\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right).$$

Якщо функція L має сідлову точку

$(X_0, \Lambda_0) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0)$, то в цій точці виконуються співвідношення (4) — (9). Якщо ввести додаткові змінні v_j, $j=\overline{1,n}$, та w_i, $i=\overline{1,m}$, які перетворюють нерівності (4) та (7) в рівності, то співвідношення (4) — (9) для задачі квадратичного програмування перепишуться так:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x_j} + v_j = 0, \quad j=\overline{1,n}, & (13) \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial \lambda_i} - w_i = 0, \quad i=\overline{1,m}, & (14) \\ x_j^0 v_j = 0, \quad j=\overline{1,n}, & (15) \\ \lambda_i^0 w_i = 0, \quad i=\overline{1,m}, & (16) \end{cases}$$

$$x_j^0 \ge 0,\ v_j \ge 0,\ \lambda_i^0 \ge 0,\ w_i \ge 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \tag{17}$$

Таким чином, щоб знайти розв'язок задачі квадратичного програмування (10) — (12), потрібно визначити невід'ємний розв'язок

системи лінійних рівнянь (13) та (14), які задовольняють умови (15) та (16). Цей розв'язок знаходять за допомогою методу штучного базису для знаходження $F=-\sum_{i=1}^{m} Mg_i \to \max$ при обмеженнях (13), (14) і (17) з урахуванням (15) та (16). Тут g_i — це штучні змінні, введені у рівняння (13) і (14).

Використовуючи метод штучного базису та враховуючи умови (15) і (16), після скінченого числа кроків або встановлюємо нерозв'язність, або одержуємо оптимальний план вихідної задачі.

Отже, *процес знаходження розв'язку задачі квадратичного програмування* (10) — (12) *включає такі етапи*:

1. Складають функцію Лагранжа.
2. Записують у вигляді виразів (13) — (17) необхідні та достатні умови існування сідлової точки для функції Лагранжа.
3. Використовуючи метод штучного базису або встановлюють відсутність сідлової точки для функції Лагранжа, або знаходять її координати.
4. Записують оптимальний розв'язок вихідної задачі і знаходять значення цільової функції.

Приклад. Знайти $f=2x_1+4x_2-x_1^2-2x_2^2 \to \max$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \le 12, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Розв'язання. Функція f — вгнута, оскільки є сумою лінійної функції $f_1=2x_1+4x_2$, яку можна розглядати як вгнуту, та квадратичної форми $f_2=-x_1^2-2x_2^2$, яка є від'ємно визначеною, а, значить, також вгнутою. Оскільки система нерівностей лінійна, скористаємося теоремою Куна-Таккера. Складаємо функцію Лагранжа

$$L=2x_1+4x_2-x_1^2-2x_2^2+\lambda_1(8-x_1-2x_2)+\lambda_2(12-2x_1+x$$

і запишемо у вигляді виразів (13) — (17) необхідні та достатні умови існування сідлової точки побудованої функції.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \le 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 \le 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 8 - x_1 - 2x_2 \ge 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 12 - 2x_1 + x_2 \ge 0.
\end{cases}
\tag{18}
$$

$$
\begin{cases}
x_1 \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_1(2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2) = 0, \\
x_2 \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_2(4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2) = 0, \\
\lambda_1 \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) = 0, \\
\lambda_2 \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \lambda_2(12 - 2x_1 + x_2) = 0.
\end{cases}
$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \ \lambda_1 \ge 0, \quad \lambda_2 \ge 0.$$

Систему обмежень (18) перепишемо так:

$$
\begin{cases}
2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 \ge 2, \\
4x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 \ge 4, \\
x_1 + 2x_2 \le 8, \\
2x_1 - x_2 \le 12.
\end{cases}
\tag{19}
$$

Перетворимо обмеження-нерівності (19) в обмеження-рівності.

$$
\begin{cases}
2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 = 2, \\
4x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 - v_2 = 4, \\
x_1 + 2x_2 + w_1 = 8, \\
2x_1 - x_2 + w_2 = 12.
\end{cases}
\tag{20}
$$

$$x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \ge 0.$$

Ще записуємо рівності

$$v_1 x_1 = 0, \quad v_2 x_2 = 0, \quad w_1 \lambda_1 = 0, \quad w_2 \lambda_2 = 0. \tag{21}$$

Якщо знайти базисний розв'язок системи лінійних рівнянь (20) з урахуванням (21), то одержимо сідлову точку функції Лагранжа для вихідної задачі, тобто її оптимальний розв'язок.

Для знаходження базисного розв'язку системи рівнянь (20) скористаємося методом штучного базису. Вводячи штучні змінні y_1 та y_2, розглянемо таку задачу:

$$\overline{f} = -My_1 - My_2 \to \max \tag{22}$$

за умов

$$
\begin{cases}
2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 + y_1 = 2, \\
4x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 - v_2 + y_2 = 4, \\
x_1 + 2x_2 + w_1 = 8, \\
2x_1 - x_2 + w_2 = 12,
\end{cases}
\tag{23}
$$

$$x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, v_1, v_2, w_1, w_2, y_1, y_2 \ge 0. \tag{24}$$

Застосуємо симплекс-метод для отримання допустимого базисного розв'язку системи (23) (табл. 5.1).

Таблиця 5.1

i	Базис	C_σ	P_0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$
				P_{x_1}	P_{x_2}	P_{λ_1}	P_{λ_2}	P_{v_1}	P_{v_2}	P_{w_1}	P_{w_2}	P_{y_1}	P_{y_2}
1	P_{y_1}	$-M$	2	2	0	1	2	–1	0	0	0	1	0
2	P_{y_2}	$-M$	4	0	4	2	–1	0	–1	0	0	0	1
3	P_{w_1}	0	8	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0
4	P_{w_2}	0	12	2	–1	0	0	0	0	0	1	0	0
5			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6			–6	–2	–4	–3	–1	1	1	0	0	0	0
1	P_{y_1}	$-M$	2	2	0	1	2	–1	0	0	0	1	0
2	P_{x_2}	0	1	0	1	1/2	–1/4	0	–1/4	0	0	0	1/4
3	P_{w_1}	0	6	1	0	–1	1/2	0	1/2	1	0	0	–1/2
4	P_{w_2}	0	13	2	0	1/2	–1/4	0	–1/4	0	0	0	1/4
5			0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
6			–2	–2	0	–1	–2	1	0	0	0	0	1

Закінчення табл. 5.1

i	Ба-зис	C_σ	P_0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$
				P_{x_1}	P_{x_2}	P_{λ_1}	P_{λ_2}	P_{v_1}	P_{v_2}	P_{w_1}	P_{w_2}	P_{y_1}	P_{y_2}
1	P_{x_1}	0	1	1	0	1/2	1	–1/2	0	0	0	1/2	0
2	P_{x_2}	0	1	0	1	1/2	–1/4	0	–1/4	0	0	0	1/4
3	P_{w_1}	0	5	0	0	–3/2	–1/2	1/2	1/2	1	0	–1/2	–1/2
4	P_{w_2}	0	11	0	0	–1/2	–9/4	–1	–1/4	0	1	–1	1/4
5			0	0	0	0	0	0	0	0	0	M	M

Звідси $x_1^0 = 1; x_2^0 = 1; w_1 = 5; w_2 = 11; \lambda_1^0 = \lambda_2^0 = v_1 = v_2 = 0$. Оскільки $x_1^0 v_1 = 0;\ x_2^0 v_2 = 0;\ \lambda_1^0 w_1 = 0;\ \lambda_2^0 w_2 = 0$, то $(X_0, \Lambda_0) = (1; 1; 0; 0)$ є сідловою точкою функції Лагранжа для вихідної задачі. Отже, $X^* = (1;1)$ — це оптимальний план задачі і $f_{\max} = 3$.

5.3. Градієнтні методи

Використовуючи градієнтні методи, можна знайти розв'язок будь-якої задачі нелінійного програмування. Проте найбільш доцільно використовувати градієнтні методи для знаходження розв'язку задач опуклого програмування, в яких локальний екстремум є одночасно і глобальним. Суть градієнтних методів полягає в тому, що, починаючи з деякої точки $X^{(k)}$, здійснюється послідовний перехід до деяких інших точок доти, поки не з'явиться прийнятний розв'язок вихідної задачі. Градієнтні методи поділяються на дві групи.

До першої групи належать методи, при використанні яких досліджувані точки не виходять за межі області допустимих розв'язків задачі. Найбільш поширеним із них є *метод Франка-Вулфа*. До другої групи належать методи, при використанні яких досліджувані точки можуть як належати, так і не належати області допустимих розв'язків. Найбільш поширеними серед них є *метод штрафних функцій* та *метод Ерроу-Гурвіца*.

При знаходженні розв'язку задач градієнтними методами ітераційний процес здійснюється доти, поки градієнт функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ у черговій точці $X^{(k+1)}$ не стане рівним нулю або ж поки не одержуємо нерівність $\left| f(X^{(k+1)}) - f(X^{(k)}) \right| < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ — досить мале число, яке характеризує точність одержаного розв'язку.

5.3.1. Метод Франка-Вулфа

Розглянемо задачу. Знайти

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max \tag{1}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{3}$$

причому функція f припускається вгнутою функцією.

Процес знаходження розв'язку задачі починають із знаходження точки, яка належить області допустимих розв'язків задачі. Нехай ця точка $X^{(k)}$. Тоді в ній обчислюють градієнт

$$\nabla f(X^{(k)}) = \left(\frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_1}; \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_2}; ...; \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_n} \right)$$

і будують лінійну функцію

$$F = \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_2} x_2 + ... + \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_n} x_n. \tag{4}$$

Потім знаходять максимум цієї функції при обмеженнях (2) і (3). Нехай це буде точка $Z^{(k)}$. Тоді як новий допустимий розв'язок вихідної задачі сприймають точку

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda_k (Z^{(k)} - X^{(k)}). \tag{5}$$

Тут λ_k — це деяке число, яке називають *кроком обчислень*, і $\lambda_k \in [0; 1]$. Для його визначення знаходять розв'язок рівняння $\frac{df}{d\lambda_k} = 0$ і вибирають його найменший корінь. Якщо $\lambda_k > 1$, то покладають $\lambda_k = 1$. Після визначення числа λ_k знаходять координати точки $X^{(k+1)}$, обчислюють у ній значення цільової функції і з'ясовують необхідність переходу до нової точки $X^{(k+2)}$. Якщо є така необхідність, то обчислюють у точці $X^{(k+1)}$ градієнт цільової функції, переходять до відповідної задачі лінійного програмування і знаходять її розв'язок. Визначають координати точки $X^{(k+2)}$ і досліджують необхідність проведення подальших обчислень. Після скінченого числа кроків одержують із необхідною точністю розв'язок вихідної задачі.

Отже, *знаходження розв'язку задачі* (1) — (3) *методом Франка-Вулфа включає такі етапи*:

1. Визначають вихідний допустимий розв'язок задачі.
2. Знаходять градієнт функції (1) у точці допустимого розв'язку.
3. Будують функцію (4) і знаходять її максимум за умов (2) і (3).
4. Визначають крок обчислень.
5. За формулами (5) знаходять компоненти нового допустимого розв'язку.
6. З'ясовують необхідність переходу до наступного допустимого розв'язку. У разі необхідності переходять до етапу 2, в протилежному випадку знайдено прийнятний розв'язок вихідної задачі.

Приклад. Методом Франка-Вулфа знайти розв'язок задачі

$$f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \to \max \tag{6}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \le 12, \end{cases} \tag{7}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \tag{8}$$

Розв'язання. Знаходимо градієнт

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = (2 - 2x_1; 4 - 4x_2).$$

Як вихідний допустимий розв'язок беремо точку $X^{(0)} = (0; 0)$, а як критерій оцінки якості одержаного розв'язку — нерівність

$$\left| f(X^{(k+1)}) - f(X^{(k)}) \right| < \varepsilon, \text{ де } \varepsilon = 0{,}01.$$

I *ітерація.* У точці $X^{(0)} = (0; 0)$ градієнт $\nabla f(X^{(0)}) = (2; 4)$. Знаходимо максимум функції

$$F_1 = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \le 12, \end{cases} \tag{9}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \tag{10}$$

У нашому випадку $R(X) = OABC$ (рис. 5.4), і нехай $2x_1 + 4x_2 = 8$.

Як бачимо, в цьому випадку $x_1^* = 0$, $x_2^* = 4$, а, отже, оптимальний план $Z^{(0)} = (0; 4)$. Тоді новий допустимий розв'язок

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \lambda_1 (Z^{(0)} - X^{(0)}), \ \lambda_1 \in [0; 1]$$

або

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0 + \lambda_1 \cdot 0, \\ x_2^{(1)} = 0 + \lambda_1 \cdot 4. \end{cases} \tag{11}$$

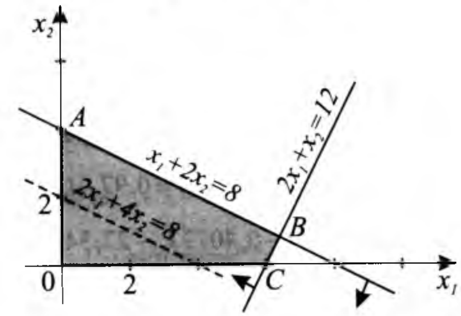


Рис. 5.4

Знайдемо число λ_1. Підставимо в (6) замість x_1 та x_2 їх значення з (11). Одержимо:

$$f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 = 16\lambda_1 - 32\lambda_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(\lambda_1) = 16 - 64\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Оскільки $\lambda_1 = 0{,}25 \in [0; 1]$, то приймаємо його за величину кроку. Отже, $X^{(1)} = (0; 1)$, $f(x^{(1)}) = 2$, $\left| f(X^{(1)} - f(X^{(0)}) \right| = 2 > \varepsilon$.

II *ітерація.* У точці $X^{(1)}$ градієнт $\nabla f = (2 - 2x_1; 4 - 4x_2) = (2; 0)$. Знаходимо $F_2 = 2x_1 \to \max$ при обмеженнях (9), (10). Як бачимо, F_2 досягає максимуму в точці B, координати якої знаходяться як розв'язки системи рівнянь.

$$B: \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ 2x_1 - x_2 = 12, \end{cases} \Rightarrow x_1^* = 6{,}4; \quad x_2^* = 0{,}8 \Rightarrow Z^{(1)} = (6{,}4; 0{,}8).$$

Складаємо $X^{(2)} = X^{(1)} + \lambda_2 (Z^{(1)} - X^{(1)}$, яке перепишемо так ($X^{(1)} = (0; 1)$):

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 6{,}4\lambda_2 \\ x_2^{(2)} = 1 + \lambda_2(0{,}8 - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(2)} = 6{,}4\lambda_2 \\ x_2^{(2)} = 1 - 0{,}2\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\lambda_2) = 12{,}8\lambda_2 + 4(1 - 0{,}2\lambda_2) - (6{,}4\lambda_2)^2 - 2(1 - 0{,}2\lambda_2)^2$$

або $f(\lambda_2) = 2 + 12{,}8\lambda_2 - 41{,}76\lambda_2^2$, звідки

$$f'(\lambda_2) = 12{,}8 - 83{,}52\lambda = 0 \Rightarrow \lambda \approx 0{,}15.$$

Таким чином,

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0{,}96 \\ x_2^{(2)} = 0{,}97 \end{cases} \Rightarrow X^{(2)} = (0{,}96;\, 0{,}97) \Rightarrow f(X^{(2)}) = 2{,}9966,$$

причому $f(X^{(2)}) - f(X^{(1)}) = 2{,}9966 - 2 = 0{,}9966 > \varepsilon = 0{,}01$.

III *ітерація*. У точці $X^{(2)}$ $\nabla f(X^{(2)}) = (0{,}08;\, 0{,}12)$. Отже, знаходимо $F_3 = 0{,}08x_1 + 0{,}12x_2 \to \max$ при обмеженнях (9), (10). Розв'язком буде $Z^{(2)} = (6;\, 0)$. Знаходимо $X^{(3)} = X^{(2)} + \lambda_3(Z^{(2)} - X^{(2)})$, звідки

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0{,}96 + \lambda_3(6 - 0{,}96) = 0{,}96 + 5{,}04\lambda_3, \\ x_2^{(3)} = 0{,}97 + \lambda_3(0 - 0{,}97) = 0{,}97 - 0{,}97\lambda_3. \end{cases}$$

$$f(\lambda_3) = 2{,}9384 + 0{,}4032\lambda_3 - 27{,}3416\lambda_3^2,$$

$$f'(\lambda_3) = 0{,}4032 - 54{,}6832\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 \approx 0{,}007.$$

Отже,

$X^{(3)} = (0{,}99528;\, 0{,}96321) \Rightarrow f(X^{(3)}) = 2{,}99957 \Rightarrow f(X^{(3)}) - f(X^{(2)}) =$
$= 2{,}99957 - 2{,}9966 = 0{,}00297 < \varepsilon = 0{,}01$.

Таким чином, $X^{(3)} = (0{,}99528;\, 0{,}96321)$ є шуканим розв'язком вихідної задачі. Задавши менше значення ε, можна (здійснивши більшу кількість ітерацій) підійти ближче до точки максимального значення цільової функції, справжнє значення якої $X^* = (1;\, 1)$.

5.3.2. Метод штрафних функцій

Розглянемо задачу.

Знайти

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max \tag{1}$$

при обмеженнях

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{3}$$

де $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ — вгнута функція, $g_i(x_1, x_2, ..., x_n),\, i = \overline{1, m}$ — опуклі функції.

Замість того, щоб безпосередньо розв'язувати задачу (1) — (3), знаходять $F(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + H(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max$, де

$H(x_1, x_2, ..., x_n)$ — так звана *штрафна функція*. Її шукають у вигляді

$$H(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x_1, x_2, ..., x_n) g_i(x_1, x_2, ..., x_n),$$

де

$$\alpha_i(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0; \\ \alpha_i, & \text{якщо} \quad b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n) < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Тут α_i — це деякі числа, які є вагомими коефіцієнтами. Використовуючи штрафну функцію H, послідовно переходять від однієї точки до іншої доти, поки не одержують прийнятний розв'язок. При цьому координати наступної точки знаходять за формулою

$$x_j^{(k+1)} = \max\left\{0;\, x_j^{(k)} + \lambda\left[\frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\partial g_i(X^{(k)})}{\partial x_j}\right]\right\}. \tag{5}$$

Із співвідношення (5) випливає, що якщо попередня точка знаходиться в області допустимих розв'язків вихідної задачі, то другий доданок у квадратних дужках дорівнює нулю і перехід до наступної точки визначається тільки градієнтом цільової функції. Якщо ж розглядувана точка не належить області допустимих розв'язків, то за рахунок даного доданку на наступних ітераціях досягається повернення в область допустимих розв'язків. При цьому чим менше α_i, тим швидше знаходиться прийнятний розв'язок, але знижується точність його визначення. Тому ітераційний процес, як правило, починають при порівняно малих значеннях α_i і, продовжуючи його, ці значення поступово збільшують.

Отже, *процес знаходження розв'язку задачі опуклого програмування методом штрафних функцій включає такі етапи*:

1. Визначають вихідний допустимий розв'язок.
2. Вибирають крок обчислень.
3. Знаходять по всіх змінних частинні похідні від цільової функції та функцій, які визначають область допустимих розв'язків задачі.
4. За формулою (5) знаходять координати точки, яка визначає можливий новий розв'язок задачі.
5. Перевіряють, чи задовольняють координати знайденої точки систему обмежень задачі. Якщо ні, то переходять до наступного етапу. Якщо координати знайденої точки визначають допустимий розв'язок задачі, то досліджують необхідність переходу до наступного допустимого розв'язку. У випадку такої необхідності перехо-

дять до етапу 2, в протилежному випадку знайдено прийнятний розв'язок вихідної задачі.

6. Встановлюють значення вагових коефіцієнтів і переходять до етапу 4.

Приклад. Знайти

$$f = -x_1^2 - x_2^2 \to \max \qquad (6)$$

при обмеженнях

$$(x_1 - 7)^2 + (x_2 - 7)^2 \le 18, \qquad (7)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \qquad (8)$$

Розв'язання. Цільова функція f — від'ємновизначена квадратична форма, а, значить є вгнутою функцією; обмеження (7) — опуклою функцією. Отже, задача (6) — (8) — це задача опуклого програмування. Побудуємо область допустимих розв'язків задачі та лінії рівня, які визначаються цільовою функцією (6) (рис. 5.5).

Точка $E(7;7)$ — центр кола радіуса $3\sqrt{2}$, а лінії рівня цільової функції (6) — це кола різних радіусів із центром у точці (0;0). Точка дотику однієї з ліній рівня цільової функції з областю допустимих розв'язків буде оптимальним розв'язком задачі (6) — (8).

Нехай $X^{(0)} = (6;7)$. Візьмемо значення $\lambda = 0{,}1$ і позначимо

$$g(x_1, x_2) = 18 - (x_1 - 7)^2 - (x_2 - 7)^2.$$

Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -2x_1;\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_2;\ \frac{\partial g}{\partial x_1} = -2x_1 + 14;\ \frac{\partial g}{\partial x_2} = -2x_2 + 14.$$

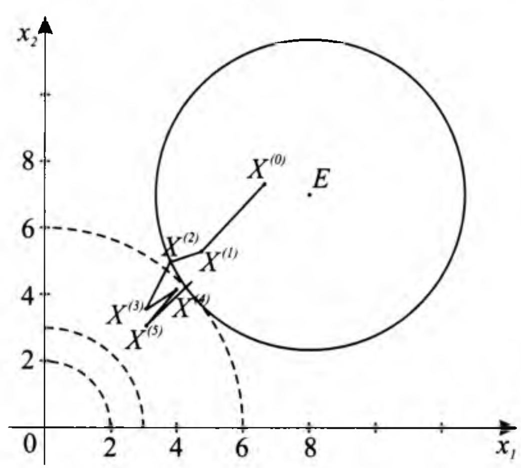


Рис. 5.5

Використовуючи формулу (5), будуємо послідовність точок, одна з яких визначить прийнятний розв'язок.

I *ітерація.*

За формулою (5)

$$x_1^{(1)} = \max\left\{0;\ x_1^{(0)} + \lambda\frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_1}\right\} = \max\{0;\ 6 + 0{,}1\cdot(-2)\cdot 6\} =$$

$$= \max\{0;\ 4{,}8\} = 4{,}8;$$

$$x_2^{(1)} = \max\left\{0;\ x_2^{(0)} + \lambda\frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_2}\right\} = \max\{0;\ 7 + 0{,}1\cdot(-2)\cdot 7\} =$$

$$= \max\{0;\ 5{,}6\} = 5{,}6;$$

Знаходимо $g(X^{(1)}) = 18 - (4{,}8 - 7)^2 - (5{,}6 - 7)^2 = 18 - 4{,}84 - 1{,}96 = 11{,}2$. Оскільки $g(X^{(1)}) > 0$, то $X^{(1)}$ належить області допустимих розв'язків. У цій точці $f(X^{(1)}) = -54{,}4$.

II *ітерація.*

$$x_1^{(2)} = \max\{0; 4{,}8 + 0{,}1\cdot(-2)\cdot 4{,}8\} = 3{,}84;$$

$$x_2^{(2)} = \max\{0; 5{,}6 + 0{,}1\cdot(-2)\cdot 5{,}6\} = 4{,}48;$$

$$g(X^{(2)}) = 18 - 9{,}9856 - 6{,}3504 = 1{,}664 > 0;$$

$$f(X^{(2)}) = -34{,}816.$$

III *ітерація.*

$$x_1^{(3)} = \max\{0;\ 3{,}84 + 0{,}1\cdot(-2)\cdot 3{,}84\} = 3{,}072;$$

$$x_2^{(3)} = \max\{0;\ 4{,}48 + 0{,}1\cdot(-2)\cdot 4{,}48\} = 3{,}584;$$

$$g(X^{(3)}) = 18 - 15{,}429184 - 11{,}669056 \approx -9{,}0981.$$

IV *ітерація.*

Оскільки точка $X^{(3)}$ не належить області допустимих розв'язків, тоді за формулою (5)

$$x_1^{(4)} = \max\left\{0;\ x_1^{(3)} + \lambda\left[\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_1} + \alpha\frac{\partial g(X^{(3)})}{\partial x_1}\right]\right\} =$$

$$= \max\{0;\ 3{,}072 + 0{,}1[(-2)\cdot 3{,}072 + \alpha[(-2)\cdot 3{,}072 + 14]]\} =$$

$$= \max\{0;\ 2{,}4576 + \alpha\cdot 0{,}7856\};$$

$$x_2^{(4)} = \max\left\{0;\ x_2^{(3)} + \lambda\left[\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_2} + \alpha\frac{\partial g(X^{(3)})}{\partial x_2}\right]\right\} =$$

17 - 8-1045

$$= \max\left\{0;\ 3,584 + 0,1\left[(-2)\cdot 3,584 + \alpha\left[(-2)\cdot 3,584 + 14\right]\right]\right.$$

$$= \max\{0;\ 2,8672 + \alpha\cdot 0,6832\}.$$

Параметр α вибирається з таких міркувань, щоб точка $X^{(4)}$ не дуже далеко віддалялась від області допустимих розв'язків і водночас належала цій області. Наприклад, при $\alpha = 1,9$

$$x_1^{(4)} = \max\{0;\ 2,4576 + 1,9\cdot 0,7856\} \approx 3,95;$$

$$x_2^{(4)} = \max\{0;\ 2,8672 + 1,9\cdot 0,6832\} \approx 4,165;$$

$$g(X^{(4)}) = 18 - 9,3025 - 8,037225 \approx 0,66;\ f(X^{(4)}) \approx -32,95.$$

V *ітерація.*

$$x_1^{(5)} = \max\{0; 3,95 + 0,1\cdot(-2)\cdot 3,95\} = 3,16;$$

$$x_2^{(5)} = \max\{0; 4,165 + 0,1\cdot(-2)\cdot 4,165\} = 3,332;$$

$$g(X^{(5)}) = 18 - 14,7456 - 13,454224 \approx -10,2.$$

VI *ітерація.*

При $\alpha = 1,9$

$$x_1^{(6)} = \max\left\{0;\ 3,16 + 0,1\left[(-2)\cdot 3,16 + 1,9\left[(-2)\cdot 3,16 + 14\right]\right]\right\} \approx 3,987;$$

$$x_2^{(6)} = \max\left\{0;\ 3,332 + 0,1\left[(-2)\cdot 3,332 + 1,9\left[(-2)\cdot 3,332 + 14\right]\right]\right\} \approx 4,059;$$

$$g(X^{(6)}) = 18 - 9,078169 - 8,649481 \approx 0,272;\ f(X^{(6)}) \approx -32,372.$$

VII *ітерація.*

$$x_1^{(7)} = \max\{0;\ 3,987 + 0,1\cdot(-2)\cdot 3,987\} \approx 3,189;$$

$$x_2^{(7)} = \max\{0;\ 4,059 + 0,1\cdot(-2)\cdot 4,059\} \approx 3,247;$$

$$g(X^{(7)}) = 18 - 10,169721 - 10,543009 \approx -2,713.$$

VIII *ітерація.*

При $\alpha = 1,9$

$$x_1^{(8)} = \max\left\{0;\ 3,189 + 0,1\left[(-2)\cdot 3,189 + 1,9\left[(-2)\cdot 3,189 + 14\right]\right]\right\} \approx 3,999;$$

$$x_2^{(8)} = \max\left\{0;\ 3,247 + 0,1\left[(-2)\cdot 3,247 + 1,9\left[(-2)\cdot 3,247 + 14\right]\right]\right\} \approx 4,027;$$

$$g(X^{(8)}) = 18 - 9,006001 - 8,856576 \approx 0,137;\ f(X^{(8)}) \approx -32,185.$$

IX *ітерація.*

$$x_1^{(9)} = \max\{0;\ 3,999 + 0,1\cdot(-2)\cdot 3,999\} \approx 3,199;$$

$$x_2^{(9)} = \max\{0; 4,027 + 0,1\cdot(-2)\cdot 4,027\} \approx 3,219;$$

$$g(X^{(9)}) = 18 - 14,447601 - 14,295961 \approx -10,744.$$

X *ітерація.*

При $\alpha = 1,9$

$$x_1^{(10)} = \max\left\{0;\ 3,199 + 0,1\left[(-2)\cdot 3,199 + 1,9\left[(-2)\cdot 3,199 + 14\right]\right]\right\} \approx 4,004;$$

$$x_2^{(10)} = \max\left\{0;\ 3,219 + 0,1\left[(-2)\cdot 3,219 + 1,9\left[(-2)\cdot 3,219 + 14\right]\right]\right\} \approx 4,012;$$

$$g(X^{(10)}) = 18 - 8,976016 - 8,928144 \approx 0,096;\ f(X^{(10)}) \approx -32,128.$$

XI *ітерація.*

$$x_1^{(11)} = \max\{0; 4,004 + 0,1\cdot(-2)\cdot 4,004\} \approx 3,203;$$

$$x_2^{(11)} = \max\{0; 4,012 + 0,1\cdot(-2)\cdot 4,012\} \approx 3,210;$$

$$g(X^{(11)}) = 18 - 14,417209 - 14,3641 \approx -10,781.$$

XII *ітерація.*

При $\alpha = 1,9$

$$x_1^{(12)} = \max\left\{0;\ 3,203 + 0,1\left[(-2)\cdot 3,203 + 1,9\left[(-2)\cdot 3,203 + 14\right]\right]\right\} \approx 4,005;$$

$$x_2^{(12)} = \max\left\{0;\ 3,210 + 0,1\left[(-2)\cdot 3,210 + 1,9\left[(-2)\cdot 3,210 + 14\right]\right]\right\} \approx 4,008;$$

$$g(X^{(12)}) \approx 0,079;\ f(X^{(12)}) \approx -32,104.$$

Порівнюючи значення цільової функції, одержані в X та XII ітераціях ($f(X^{(10)}) \approx -32,128, f(X^{(12)}) \approx -32,104$), бачимо, що вони з точністю 10^{-1} співпадають. Це свідчить про близькість точки, знайденої на останній ітерації, до точки максимального значення цільової функції. Отже, точку $X^* = (4,005; 4,008)$ можна вважати прийнятним розв'язком задачі (6) — (8).

Послідовність точок, отриманих під час знаходження розв'язку задачі, проілюстровано на рис. 5.5.

5.3.3. Метод Ерроу-Гурвіца

У методі штрафних функцій параметри α_i вибиралися довільним чином. За методом Ерроу-Гурвіца числа $\alpha_i^{(k)}$ вибираються за формулою

$$\alpha_i^{(k)} = \max\left\{0;\ \alpha_i^{(k-1)} - \lambda g_i(X^{(k)})\right\},\quad i = \overline{1,m}. \tag{9}$$

Як початкові значення $\alpha_i^{(0)}$ беруться довільні додатні числа.

Приклад. Розв'язати задачу (6) — (8) методом Ерроу-Гурвіца.

Розв'язання. У III ітерації ми отримали $g(X^{(3)}) < 0$.

IV *ітерація.*

Оскільки $g(X^{(3)})<0$, то координати точки $x^{(4)}$ знаходимо за формулою (5):

$$x_1^{(4)}=\max\left\{0;\ x_1^{(3)}+\lambda\left[\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_1}+\alpha^{(4)}\frac{\partial g(X^{(3)})}{\partial x_1}\right]\right\}=$$

$$=\max\left\{0;\ 3{,}072+0{,}1\left[(-2)\cdot 3{,}072+\alpha^{(4)}\left[(-2)\cdot 3{,}072+14\right]\right]\right\};$$

$$x_2^{(4)}=\max\left\{0;\ x_2^{(3)}+\lambda\left[\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_2}+\alpha^{(4)}\frac{\partial g(X^{(3)})}{\partial x_2}\right]\right\}=$$

$$=\max\left\{0;\ 3{,}584+0{,}1\left[(-2)\cdot 3{,}584+\alpha^{(4)}\left[(-2)\cdot 3{,}584+14\right]\right]\right\}.$$

Число $\alpha^{(4)}$ знаходимо за формулою (9):

$$\alpha^{(4)}=\max\left\{0;\alpha^{(3)}-0{,}1\cdot g(X^{(3)})\right\}=\max\left\{0;0-0{,}1\cdot(-9{,}0981)\right\}\approx 0{,}91.$$

Таким чином, $x_1^{(4)}\approx 3{,}172$; $x_2^{(4)}\approx 3{,}489$; $g(X^{(4)})\approx -8{,}981$.

V *ітерація.*

Знайдена точка $X^{(4)}=(3{,}172;3{,}489)$ не належить області допустимих розв'язків даної задачі. За формулою (9)

$$\alpha^{(5)}=\max\left\{0;\ 0{,}91-0{,}1\cdot(-8{,}981)\right\}\approx 1{,}81.$$

$$x_1^{(5)}=\max\left\{0;\ 3{,}172+0{,}1\left[(-2)\cdot 3{,}172+1{,}81\left[(-2)\cdot 3{,}172+14\right]\right]\right\}\approx 3{,}923;$$

$$x_2^{(5)}=\max\left\{0;\ 3{,}489+0{,}1\left[(-2)\cdot 3{,}489+1{,}81\left[(-2)\cdot 3{,}489+14\right]\right]\right\}\approx 4{,}062;$$

$$g(X^{(5)})\approx -0{,}1.$$

VI *ітерація.*

Маємо $\alpha^{(6)}=\max\left\{0;\ 0{,}81-0{,}1\cdot(-0{,}1)\right\}\approx 1{,}82$;

$$x_1^{(6)}=\max\left\{0;\ 3{,}923+0{,}1\left[(-2)\cdot 3{,}923+1{,}82\left[(-2)\cdot 3{,}923+14\right]\right]\right\}\approx 4{,}258;$$

$$x_2^{(6)}=\max\left\{0;\ 4{,}062+0{,}1\left[(-2)\cdot 4{,}062+1{,}82\left[(-2)\cdot 4{,}062+14\right]\right]\right\}\approx 4{,}319;$$

$$g(X^{(6)})\approx 1{,}294;\ f(X^{(6)})\approx -36{,}784.$$

VII *ітерація.*

$$x_1^{(7)}=\max\left\{0;\ 4{,}258+0{,}1\left[(-2)\cdot 4{,}258\right]\right\}\approx 3{,}406;$$

$$x_2^{(7)}=\max\left\{0;4{,}319+0{,}1\left[(-2)\cdot 4{,}319\right]\right\}\approx 3{,}455;$$

$$g(X^{(7)})\approx -7{,}484.$$

VIII *ітерація.*

Визначаємо $\alpha^{(8)}$: $\alpha^{(8)}=\max\left\{0;\ 1{,}82-0{,}1\cdot(-7{,}484)\right\}\approx 2{,}57$.

$$x_1^{(8)}=\max\left\{0;\ 3{,}406+0{,}1\left[(-2)\cdot 3{,}406+2{,}57\left[(-2)\cdot 3{,}406+14\right]\right]\right\}\approx 4{,}572;$$

$$x_2^{(8)}=\max\left\{0;\ 3{,}455+0{,}1\left[(-2)\cdot 3{,}455+2{,}57\left[(-2)\cdot 3{,}455+14\right]\right]\right\}\approx 4{,}586;$$

$$g(X^{(8)})\approx 6{,}278;\ f(X^{(8)})\approx -41{,}935.$$

IX *ітерація.*

$$x_1^{(9)}=\max\left\{0;\ 4{,}572+0{,}1\left[(-2)\cdot 4{,}572\right]\right\}\approx 3{,}658;$$

$$x_2^{(9)}=\max\left\{0;4{,}586+0{,}1\left[(-2)\cdot 4{,}586\right]\right\}\approx 3{,}669;$$

$$g(X^{(9)})\approx 4{,}625.$$

X *ітерація.*

Маємо $\alpha^{(10)}=\max\left\{0;\ 2{,}57-0{,}1\cdot(-4{,}265)\right\}\approx 3{,}0$;

$$x_1^{(10)}=\max\left\{0;\ 3{,}658+0{,}1\left[(-2)\cdot 3{,}658+3{,}0\left[(-2)\cdot 3{,}658+14\right]\right]\right\}\approx 4{,}931;$$

$$x_2^{(10)}=\max\left\{0;\ 3{,}669+0{,}1\left[(-2)\cdot 3{,}669+3{,}0\left[(-2)\cdot 3{,}669+14\right]\right]\right\}\approx 4{,}934;$$

$$g(X^{(10)})\approx 9{,}451.$$

XI *ітерація.*

$$x_1^{(11)}=\max\left\{0;4{,}931+0{,}1\left[(-2)\cdot 4{,}931\right]\right\}\approx 3{,}945;$$

$$x_2^{(11)}=\max\left\{0;4{,}934+0{,}1\left[(-2)\cdot 4{,}934\right]\right\}\approx 3{,}947;$$

$$g(X^{(11)})\approx -0{,}654.$$

XII *ітерація.*

Маємо $\alpha^{(12)}=\max\left\{0;\ 3{,}0-0{,}1\cdot(-0{,}654)\right\}\approx 3{,}06$;

$$x_1^{(12)}=\max\left\{0;\ 3{,}945+0{,}1\left[(-2)\cdot 3{,}945+3{,}06\left[(-2)\cdot 3{,}945+14\right]\right]\right\}\approx 5{,}026;$$

$$x_2^{(12)}=\max\left\{0;\ 3{,}947+0{,}1\left[(-2)\cdot 3{,}947+3{,}06\left[(-2)\cdot 3{,}947+14\right]\right]\right\}\approx 5{,}026;$$

$$g(X^{(12)})\approx 10{,}207;\ f(X^{(12)})\approx -50{,}521.$$

XIII *ітерація.*

$$x_1^{(13)}=\max\left\{0;5{,}026+0{,}1\left[(-2)\cdot 5{,}026\right]\right\}\approx 4{,}021;$$

$$x_2^{(13)}=\max\left\{0;5{,}026+0{,}1\left[(-2)\cdot 5{,}026\right]\right\}\approx 4{,}021;$$

$$g(X^{(13)})\approx 0{,}251;\ f(X^{(13)})\approx -32{,}337.$$

Одержаний на даній ітерації розв'язок $X^*=(4{,}021;4{,}021)$ можна вважати прийнятним.

5.4. Знаходження розв'язку задач нелінійного програмування, які містять сепарабельні функції

Функція $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *сепарабельною*, якщо

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i).$$

Якщо цільова функція та функції в системі обмежень задачі нелінійного програмування є сепарабельними, то наближений розв'язок такої задачі можна знайти з використанням *методу кусково-лінійної апроксимації*. Розглянемо цей метод для задачі опуклого програмування.

Знайти

$$F = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \to \max \tag{1}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j) \le b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Функція F припускається вгнутою.

Щоб знайти розв'язок задачі (1) — (3), замінимо функції $f_j(x_j)$ та $g_{ij}(x_j)$ кусково-лінійними функціями $\hat{f}_j(x_j)$ та $\hat{g}_{ij}(x_j)$ і перейдемо від задачі (1) — (3) до задачі

$$F = \sum_{j=1}^{n} \hat{f}_j(x_j) \to \max \tag{1'}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{g}_{ij}(x_j) \le b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2'}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{3'}$$

У задачі (1′) — (3′) поки не визначено вигляд функцій. Будемо вважати, що змінна $x_j \in [0; \alpha_j]$, де α_j — максимальне значення змінної x_j. Розіб'ємо проміжок $[0; \alpha_j]$ на r_j проміжків за допомогою $r_j + 1$ точок так, що $x_{0j} = 0$; $x_{r_j j} = \alpha_j$. Тоді функції $\hat{f}_j(x_j)$ та $\hat{g}_{ij}(x_j)$ можна записати у вигляді

$$\hat{f}_j(x_j) = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} f_{kj}, \; \hat{g}_{ij}(x_j) = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} g_{kij}, \tag{4}$$

де $f_{kj} = f_j(x_k)$; $g_{kij} = g_{ij}(x_k)$, $i = \overline{1,m}$; $x_j = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} x_{kj}$.

$\sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} = 1$, $\lambda_{kj} \ge 0$, $\forall k, j$

причому для даного x_j не більше двох чисел λ_{kj} можуть бути додатними і повинні бути сусідніми. Підставивши в (1′) і (2′) вирази (4), приходимо до такої задачі. Знайти

$$\hat{F} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} f_{kj} \lambda_{kj} \to \max \tag{1''}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} g_{kij} \lambda_{kj} \le b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2''}$$

$$\sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} = 1, \; j = \overline{1,n}, \tag{3''}$$

$$\lambda_{kj} \ge 0 \quad \forall k, j. \tag{4''}$$

Задача (1″) — (4″) відрізняється від звичайної задачі лінійного програмування накладенням додаткового обмеження на λ_{kj}, яке полягає в тому, що $\forall j$ не більше двох λ_{kj} є додатними і вони сусідні. Виконання цих умов може бути дотриманим при розв'язанні задачі (1″) — (4″) симплекс-методом за рахунок відповідного вибору базису, який визначає як кожний опорний план, так і оптимальний план даної задачі. При цьому в загальному випадку точність одержаного розв'язку залежить від прийнятого кроку розбиття проміжку $[0; \alpha_j]$. Чим меншим є крок, тим точнішим буде одержаний розв'язок.

Таким чином, процес знаходження розв'язку задачі нелінійного програмування методом кусково-лінійної апроксимації включає такі етапи:

1. Кожну із сепарабельних функцій замінюють на кусково-лінійну функцію.
2. Будують задачу лінійного програмування (1″) — (4″).
3. За допомогою симплекс-методу знаходять розв'язок задачі (1″) — (4″).
4. Визначають оптимальний план задачі (1) — (3) і знаходять значення цільової функції при цьому плані.

Приклад. Використовуючи метод кусково-лінійної апроксимації, знайти

$$F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 - 9 \to \max$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \\ x_2 \le 4, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Розв'язання. Подамо цільову функцію F у такому вигляді: $F = f_1(x_1) + f_2(x_2) = (-x_1^2 + 6x_1 - 9) + x_2$. Отже, функція F — сепарабельна і є сумою двох вгнутих функцій, а $R(X)$— опукла. Тоді для розв'язання даної задачі можна застосувати метод кусково-лінійної апроксимації. Оскільки нелінійною функцією є лише $f_1(x_1)$, то апроксимуємо тільки її. З вигляду $R(X)$ (див. розділ 5.1) випливає, що $x_1 \in [0; 8]$. Розіб'ємо проміжок $[0; 8]$ на 8 рівних частин точками $x_{01} = 0$; $x_{11} = 1$; $x_{21} = 2$; $x_{31} = 3$; $x_{41} = 4$; $x_{51} = 5$; $x_{61} = 6$; $x_{71} = 7$; $x_{81} = 8$. Значення функції $f_1(x_1)$ у цих точках будуть такими:

x_{k1}	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_1(x_{k1})$	–9	–4	–1	0	–1	–4	–9	–16	–25

За формулами (4) маємо:

$$\hat{f}_1(x_1) = -9\lambda_{01} - 4\lambda_{11} - \lambda_{21} - \lambda_{41} - 9\lambda_{61} - 16\lambda_{71} - 25\lambda_{81}.$$

$$x_1 = 0 \cdot \lambda_{01} + 1 \cdot \lambda_{11} + 2 \cdot \lambda_{21} + 3 \cdot \lambda_{31} + 4 \cdot \lambda_{41} + 5 \cdot \lambda_{51} + 6 \cdot \lambda_{61} + 7 \cdot \lambda_{71} + 8 \cdot \lambda_{81}.$$

Підставимо знайдені вирази $f_1(x_1)$ та x_1 у вихідні дані і одержимо:

$$\hat{F} = -9\lambda_{01} - 4\lambda_{11} - \lambda_{21} - \lambda_{41} - 9\lambda_{61} - 16\lambda_{71} - 25\lambda_{81} + x_2 \to \max,$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 2\lambda_{11} + 4\lambda_{21} + 6\lambda_{31} + 8\lambda_{41} + 10\lambda_{51} + 12\lambda_{61} + 14\lambda_{71} + 16\lambda_{81} + 3x_2 + x_3 = 24, \\ \lambda_{11} + 2\lambda_{21} + 3\lambda_{31} + 4\lambda_{41} + 5\lambda_{51} + 6\lambda_{61} + 7\lambda_{71} + 8\lambda_{81} + 2x_2 + x_4 = 15, \\ 3\lambda_{11} + 6\lambda_{21} + 9\lambda_{31} + 12\lambda_{41} + 15\lambda_{51} + 18\lambda_{61} + 21\lambda_{71} + 24\lambda_{81} + 2x_2 + x_5 = 24, \\ x_2 + x_6 = 4, \end{cases}$$

$$\lambda_{01} + \lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{31} + \lambda_{41} + \lambda_{51} + \lambda_{61} + \lambda_{71} + \lambda_{81} = 1,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{2, 6}; \qquad \lambda_{k1} \ge 0, \quad k = \overline{1, 8}.$$

Оскільки в даній задачі п'ять векторів P_{01}, P_3, P_4, P_5 і P_6 є одиничними, то її розв'язок може бути знайдений за допомогою симплекс-методу (табл. 5.2).

Таблиця 5.2

i	Б	C_σ	P_0	–9	–4	–1	0	–1	–4	–9	–16	–25	1	0	0	0	0
				P_{01}	P_{11}	P_{21}	P_{31}	P_{41}	P_{51}	P_{61}	P_{71}	P_{81}	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_3	0	24	0	2	4	6	8	10	12	14	16	3	1	0	0	0
2	P_4	0	15	0	1	2	3	4	5	6	7	8	2	0	1	0	0
3	P_5	0	24	0	3	6	9	12	15	18	21	24	2	0	0	1	0
4	P_6	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
5	P_{01}	–9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
6			–9	0	–5	–8	–9	–8	–5	0	7	16	–1	0	0	0	0
1	P_3	0	18	–6	–4	–2	0	2	4	6	8	10	3	1	0	0	0
2	P_4	0	12	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	2	0	1	0	0
3	P_5	0	15	–9	–6	–3	0	3	6	9	12	15	2	0	0	1	0
4	P_6	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
5	P_{31}	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
6			0	9	4	1	0	1	4	9	2	25	–1	0	0	0	0
1	P_3	0	6	–6	–4	–2	0	2	4	6	8	10	0	1	0	0	–3
2	P_4	0	4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	0	0	1	0	–2
3	P_5	0	7	–9	–6	–3	0	3	6	9	12	15	0	0	0	1	–2
4	P_2	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
5	P_{31}	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
6			4	9	4	1	0	1	4	9	2	25	0	0	0	0	1

Знаходимо $x_1^* = 3\lambda_{31} = 3 \cdot 1 = 3$, $x_2^* = 4$. Отже, $X^* = (3; 4)$ буде оптимальним розв'язком, причому $f_{\max} = 4$.

Розділ 6

ЗАДАЧІ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

6.1. Геометрична та економічна інтерпретації задач динамічного програмування

У розглянутих задачах лінійного та нелінійного програмування розв'язок шукається в один етап, тому вони одержали назву *одноетапних* або *однокрокових*. На відміну від цих задач, задачі динамічного програмування є *багатоетапними* або *багатокроковими*. Тому термін "динамічне програмування" не стільки визначає особливий тип задач, скільки характеризує методи знаходження розв'язку окремих класів задач математичного програмування, які можуть належати до задач як лінійного, так і нелінійного програмування. Дамо загальну постановку задачі динамічного програмування і визначимо єдиний підхід до її розв'язання.

Припустимо, що дана фізична система S перебуває в деякому початковому стані $S_0 \in \overline{S_0}$ і є керованою. Таким чином, завдяки здійсненню деякого управління U вказана система переходить із початкового стану S_0 в кінцевий стан $S_{кінц} \in \overline{S_R}$. При цьому якість кожного з реалізованих управлінь U характеризується відповідним значенням функції $W(U)$. Задача полягає в тому, щоб з множини можливих управлінь U знайти таке U^*, при якому функція $W(U)$ набуває екстремального (максимального або мінімального) значення $W(U^*)$. Сформульована задача і є *загальною задачею динамічного програмування.*

Геометрична інтерпретація цієї задачі є такою. Нехай стан системи характеризується деякою точкою S на площині x_1Ox_2 (рис. 6.1), і ця точка завдяки деякому управлінню переміщується вздовж лінії з області можливих початкових станів $\tilde{S}_0$ в область допустимих кінцевих станів $\tilde{S}_R$. Кожному управлінню U рухом точки, тобто кожній траєкторії руху точки, поставимо у відповідність значення деякої функції $W(U)$ (наприклад, довжину шляху, пройденого точкою під дією даного управління). Тоді задача полягає в тому, щоб з усіх допустимих траєкторій руху точки S знайти таку, яка одержується в результаті реалізації управління U^*, яке забезпечує екстремальне значення функції $W(U^*)$.

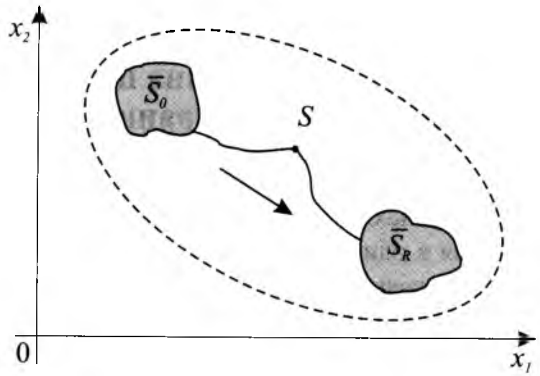


Рис. 6.1

Економічну інтерпретацію загальної задачі динамічного програмування розглянемо на конкретних прикладах.

Приклад 1. У розпорядження міністерства, в підпорядкуванні якого знаходиться k підприємств, виділені кошти у розмірі K тис. грошових одиниць для використання їх на розвиток підприємств протягом m років. Ці кошти на початку кожного року (тобто в моменти часу $t_1, t_2, ..., t_m$) розподіляються між підприємствами. Одночасно між підприємствами розподіляється також одержаний ними за минулий рік прибуток. Таким чином, на початку кожного i-го року розглядуваного періоду j-ве підприємство одержує в своє розпорядження $x_i^{(j)}$ тис. грошових одиниць. Задача полягає у визначенні таких значень $x_i^{(j)}$, тобто в знаходженні таких розподілів виділених коштів між підприємствами та одержаного ними прибутку, при яких за m років забезпечується одержання максимального прибутку всіма підприємствами. Потрібно сформулювати поставлену задачу в термінах загальної задачі динамічного програмування.

Розв'язання. Припускаючи, що j-му підприємству на i-й рік виділяється $x_i^{(j)}$ тис. грошових одиниць, будемо розглядати даний розподіл коштів як реалізацію деякого управління U_i. Таким чином, управління U_i полягає в тому, що на i-му кроці першому підприємству виділяється $x_i^{(1)}$ тис. грошових одиниць, другому — $x_i^{(2)}$ тис. грошових одиниць і т. д. Сукупність чисел $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, ..., x_i^{(k)}$ визначає всю сукупність управлінь $U_1, U_2, ..., U_m$ на m кроках розподілу коштів, як m точок в k-вимірному просторі.

Критерієм оцінки якості вибраного розподілу коштів, тобто реалізованих управлінь, взято сумарний прибуток за m років, який залежить від цієї сукупності управлінь $W = W(U_1, U_2, ..., U_m)$. Отже, задача полягає у виборі таких управлінь U_i^*, тобто в такому виборі коштів, при якому функція W набуває максимального значення.

Сформульована задача є багатоетапною. Ця багатоетапність визначається її умовами, якими передбачено прийняття певних рішень на початку кожного року розглядуваного періоду часу. Разом із тим у ряді інших задач динамічного програмування така багатоетапність безпосередньо не випливає з їх умов. Але з метою знаходження розв'язку такі задачі доцільно розглядати як багатоетапні.

Приклад 2. Підприємствам, для збільшення обсягу випуску продукції, яка користується підвищеним попитом, виділені капіталовкладення в обсязі S тис. грошових одиниць. Використання i-им підприємством x_i тис. грошових одиниць із вказаних засобів забезпечує приріст випуску продукції, який визначається значенням нелінійної функції $f_i(x_i)$. Знайти розподіл капіталовкладень між підприємствами, який забезпечує максимальне збільшення випуску продукції.

Розв'язання. Математична постановка задачі полягає в тому, щоб знайти

$$F = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max \tag{1}$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = S, \tag{2}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Задача (1) — (3) є задачею лінійного програмування. У випадку, коли $f_i(x_i)$ — опуклі (або вгнуті) функції, її розв'язок можна знайти, наприклад, методом множників Лагранжа. Якщо ж функції $f_i(x_i)$ такими не будуть, то відомі методи знаходження розв'язку задач нелінійного програмування не дозволяють визначити глобальний максимум функції (1). Тоді розв'язок задачі (1) — (3) можна знайти за допомогою динамічного програмування. Для цього вихідну задачу слід розглянути як багатоетапну або багатокрокову. Замість того, щоб розглядати допустимі варіанти розподілу капіталовкладень між n підприємствами і оцінювати їх ефективність, будемо досліджувати ефективність вкладення коштів на одному підприємстві, на двох підприємствах і т. д., нарешті на n підприємствах. Таким чином, одержимо n етапів — на кожному з них стан системи (в ролі якої виступають підприємства) характеризується обсягом коштів, які мають освоїти k підприємств, $k=\overline{1,n}$. Рішення про обсяги капіталовкладень, які виділяються k-му підприємству ($k=\overline{1,n}$), і будуть управліннями. Задача полягає у виборі таких управлінь, при яких функція (1) набуває найбільшого значення.

6.2. Знаходження розв'язків задач методом динамічного програмування

Розглянемо розв'язання задачі динамічного програмування в загальному вигляді. Будемо вважати, що стан системи S на k-му кроці ($k=\overline{1,n}$) визначається сукупністю чисел $X^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},...,x_n^{(k)})$, які одержані в результаті реалізації управління U_k, яке забезпечує перехід системи S із стану $X^{(k-1)}$ у стан $X^{(k)}$. При цьому будемо припускати, що стан $X^{(k)}$, у який перейшла система S, залежить від даного стану $X^{(k-1)}$ і вибраного управління U_k і не залежить від того, яким чином система S прийшла до стану $X^{(k-1)}$.

Далі будемо вважати, що коли в результаті k-го кроку забезпечено певний прибуток або виграш, який також залежить від вихідного стану системи $X^{(k-1)}$ і вибраного управління U_k і який рівний $W_k(X^{(k-1)},U_k)$, то загальний прибуток або виграш за n кроків складає

$$F=\sum_{k=1}^{n}W_k(X^{(k-1)},U_k). \qquad (1)$$

Таким чином, нами сформульовано дві умови, які повинна задовольняти розглядувана задача динамічного програмування. Перша умова називається *умовою відсутності післядії*, а друга — *умовою адитивності цільової функції* задачі.

Виконання для задачі динамічного програмування першої умови дозволяє сформулювати для неї *принцип оптимальності Беллмана.* Перш ніж це зробити, дамо означення *оптимальної стратегії управління.* Під такою стратегією будемо розуміти сукупність управлінь $U^*=(U_1^*,U_2^*,...,U_n^*)$, у результаті реалізації яких система S за n кроків переходить із початкового стану $X^{(0)}$ у кінцевий $X^{(k)}$ і при цьому функція (1) набуває максимального значення.

Принцип оптимальності Беллмана. Яким би не був стан системи перед черговим кроком, потрібно вибрати управління так, щоб виграш на даному кроці плюс оптимальний виграш на всіх наступних кроках був максимальним.

Звідси випливає, що оптимальну стратегію управління можна одержати, якщо спочатку знайти оптимальну стратегію управління на n-му кроці, потім на двох останніх кроках, потім на трьох останніх кроках і т.д., аж до першого кроку. Таким чином, розв'язок розглядуваної задачі динамічного програмування доцільно починати з визначення оптимального розв'язку на останньому, n-му кроці. Для того, щоб знайти цей розв'язок, треба зробити різні припущення про те, як зміг закінчитися останній крок, і з урахуванням цього вибрати управління U_n^0, яке забезпечує максимальне значення функції $W_n(X^{(n-1)},U_n)$. Таке управління U_n^0, що вибране при певних припущеннях про те, як закінчився попередній крок, називається *умовно оптимальним управлінням.* Отже, принцип оптимальності вимагає знаходити на кожному кроці умовно оптимальне управління для будь-якого з можливих результатів попереднього кроку.

Дамо математичне формулювання принципу оптимальності. Позначимо $F_n(X^{(0)})$ — максимальний прибуток, який одержується за n кроків при переході системи S із початкового стану $X^{(0)}$ у кінцевий стан $X^{(n)}$ при реалізації оптимальної стратегії управління $U=(U_1,U_2,...,U_n)$, а $F_{n-k}(X^{(k)})$ — максимальний прибуток, який одержується при переході з будь-якого стану $X^{(k)}$ у кінцевий стан $X^{(n)}$ при оптимальній стратегії управління на $n-k$ кроках, які залишилися. Тоді

$$F_n(X^{(0)})=\max\left[W_1(X^{(0)},U_1)+...+W_n(X^{(n-1)},U_n)\right]; \qquad (2)$$

$$F_{n-k}(X^{(k)})=\max\left[W_{k+1}(X^{(k)},U_{k+1})+F_{n-k+1}(X^{(k+1)})\right],\quad k=\overline{0,n-1}. \qquad (3)$$

Вираз (3) є математичним записом принципу оптимальності і називається *основним функціональним рівнянням Беллмана.* Використовуючи дане рівняння, знаходимо розв'язок розглядуваної задачі динамічного програмування.

Покладаючи $k=n-1$ у рекурентному співвідношенні (3), одержимо таке функціональне рівняння:

$$F_1(X^{(n-k)}) = \max_{U_n}\left[W_n(X^{(n-1)},U_n) + F_0(X^{(n)})\right]. \qquad (4)$$

У (4) вважаємо $F_0(X^{(n)})$ відомою величиною. Використовуючи (4) і розглядаючи всі можливі допустимі стани системи S на $(n-1)$-му кроці $X_1^{(n-1)}, X_2^{(n-1)},..., X_m^{(n-1)},...$, знаходимо умовно оптимальні розв'язки $U_n^0(X_1^{(n-1)}), U_n^0(X_2^{(n-1)}),..., U_n^0(X_m^{(n-1)}),...$ і відповідні значення функції (4) $F_1^0(X_1^{(n-1)}), F_1^0(X_2^{(n-1)}),..., F_1^0(X_m^{(n-1)}),...$ Таким чином, на *n*-му кроці знаходимо умовно оптимальне управління для будь-якого допустимого стану системи S після $(n-1)$-го кроку. Тобто, в якому б стані система не виявилася після $(n-1)$-го кроку, нам уже відомо, яке слід прийняти рішення на *n*-му кроці. Відомо також відповідне значення функції (4). Розглянемо функціональне рівняння при $k = n-2$.

$$F_2(X^{(n-1)}) = \max_{U_{n-1}}\left[W_{n-1}(X^{(n-2)},U_{n-1}) + F_1(X^{(n-1)})\right]. \qquad (5)$$

Для того, щоб знайти значення F_2 для всіх допустимих значень $X^{(n-2)}$, потрібно знати $W_{n-1}(X^{(n-2)},U_{n-1})$ і $F_1(X^{(n-1)})$. Значення $F_1(X^{(n-1)})$ уже визначені. Тому потрібно провести обчислення для $W_{n-1}(X^{(n-2)},U_{n-1})$ при деякому наборі допустимих значень $X^{(n-2)}$ і відповідних управлінь U_{n-1}. Ці обчислення дозволяють визначити умовно оптимальне управління U_{n-1}^0 для кожного $X^{(n-2)}$. Кожне з таких управлінь сумісно з уже вибраним управлінням на останньому кроці забезпечує максимальне значення прибутку на двох останніх кроках.

Послідовно здійснюючи описаний вище ітераційний процес, доходимо нарешті до першого кроку. На цьому кроці нам відомо, в якому стані може знаходитися система. Тому вже немає потреби робити припущення про допустимі стани системи, а залишається тільки вибрати управління, яке є найкращим з урахуванням умовно оптимальних управлінь, уже прийнятих на всіх наступних кроках. Таким чином, у результаті послідовного знаходження всіх етапів від кінця до початку визначаємо максимальне значення виграшу за n кроків і для кожного з них знаходимо умовно оптимальне управління.

Щоб знайти оптимальну стратегію управління, тобто визначити шуканий розв'язок задачі, треба тепер пройти всю послідовність кроків, тільки цього разу від початку і до кінця. А саме: на першому кроці в якості оптимального управління U_1^* візьмемо знайдене оптимальне управління U_1^0. На другому кроці знайдемо стан X_1^*, в

який переводить систему управління U_1^*. Цей стан визначає знайдене умовно оптимальне управління U_2^0, яке тепер будемо вважати оптимальним. Знаючи U_2^*, знаходимо X_2^*, а отже, визначаємо U_3^* і т. д. У результаті цього знаходимо розв'язок задачі, тобто максимально можливий прибуток і оптимальну стратегію управління U^*, яке включає оптимальні управління на окремих кроках: $U^* = (U_1^*, U_2^*,...,U_n^*)$. Розглянемо розв'язання задачі динамічного програмування на конкретних прикладах.

Приклад 1. На підприємстві встановлене нове обладнання. Залежність продуктивності цього обладнання від його використання підприємством наведена в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1

	Час τ, протягом якого використовується обладнання (роки)					
	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції $R(\tau)$ у вартісному виразі (в тис. грошових одиниць)	80	75	65	60	60	55
Щорічні витрати $Z(\tau)$, пов'язані з утриманням та ремонтом обладнання (в тис. грошових одиниць)	20	25	30	35	45	55

Знаючи, що витрати, пов'язані з придбанням та установкою нового обладнання, ідентичного із вже встановленим, складають 40 тис. грошових одиниць, а обладнання, яке замінюється, — списують, скласти такий план заміни обладнання протягом п'яти років, при якому загальний прибуток за даний період часу є максимальним.

Розв'язання. Цю задачу можна розглядати як задачу динамічного програмування, де в якості системи S виступає обладнання. Стани цієї системи визначаються фактичним часом використання обладнання (його віком) τ, тобто описуються єдиним параметром τ. Як управління виступають рішення про заміну і збереження обладнання, що приймаються на початку кожного року. Позначимо через U_1 рішення про збереження обладнання, а через U_2 — рішення про заміну обладнання. Тоді задача полягає в знаходженні такої стратегії управління, яка визначається рішеннями, що приймаються

18 - 8-1045

на початку кожного року, і при якій загальний прибуток підприємства за 5 років буде максимальним. Отже, вихідна задача сформульована в термінах задачі динамічного програмування. Ця задача має властивості адитивності та відсутності післядії. Значить, її розв'язок можна знайти за допомогою описаного вище алгоритму розв'язання задачі динамічного програмування, який реалізується в два етапи. На першому етапі — при русі від початку 5-го року п'ятирічки до початку першого року — для кожного допустимого стану обладнання знайдемо умовно оптимальне управління (рішення), а на другому етапі, при русі від початку першого року до початку п'ятого року, з умовно оптимальних рішень для кожного року складемо оптимальний план заміни обладнання на 5 років.

Для визначення умовно оптимальних розв'язків спочатку необхідно скласти функціональне рівняння Беллмана.

Оскільки за припущенням до початку k-го року $(k=\overline{1,5})$ може прийматися тільки одне з двох рішень – замінити або не заміняти обладнання, то прибуток підприємства за k-й рік складе

$$F_k(\tau^{(k)},U_k)=\begin{cases} R(\tau^{(k)})-Z(\tau^{(k)}) & \text{при } U_1, \\ R(\tau^{(k)}=0)-Z(\tau^{(k)}=0)-C_n & \text{при } U_2, \end{cases}$$

де $\tau^{(k)}$ — вік обладнання на початок k-го року $(k=\overline{1,5})$; U_k — управління, яке реалізується на початок k-го року ; C_n — вартість нового обладнання. Таким чином, в даному випадку рівняння Беллмана матиме вигляд:

$$F_k(\tau^{(k)})=\max_{\tau}\left\{\begin{matrix} R(\tau^{(k)})-Z(\tau^{(k)})+F_{k+1}(\tau^{(k+1)}), \\ R(\tau^{(k)}=0)-Z(\tau^{(k)}=0)-C_n+F_{k+1}(\tau^{(k+1)}=1) \end{matrix}\right\}. \qquad (6)$$

Використовуючи рівняння (6), приступаємо до розв'язання задачі. Розв'язання починаємо з визначення умовно оптимального управління (рішення) для останнього, п'ятого року. У зв'язку з цим знаходимо множину допустимих станів обладнання на початок даного (п'ятого) року. Оскільки на початок першого року є нове обладнання ($\tau^{(1)}=0$), то вік обладнання на початок п'ятого року може складати 1, 2, 3 та 4 роки. Тому допустимі стани системи на даний період часу будуть такими: $\tau_1^{(5)}=1;\ \tau_2^{(5)}=2;\ \tau_3^{(5)}=3;\ \tau_4^{(5)}=4$. Для кожного із цих станів знайдемо умовно оптимальний розв'язок і від-

повідне значення функції $F_5(\tau^{(5)})$. Використовуючи рівняння (6) і відношення $F_6(\tau^{(k+1)})=0$ (оскільки розглядається останній, п'ятий, рік), одержуємо:

$$F_5(\tau^{(5)})=\max\left\{\begin{matrix} R(\tau^{(5)})-Z(\tau^{(5)}), \\ R(\tau^{(5)}=0)-Z(\tau^{(5)}=0)-C_n \end{matrix}\right\}. \qquad (7)$$

Підставивши у формулу (7) замість $\tau^{(5)}$ його значення, яке рівне одиниці, і врахувавши дані таблиці, одержуємо:

$$F_5(\tau_1^{(5)})=\max\left\{\begin{matrix} R(\tau^{(5)}=1)-Z(\tau^{(5)}=1) \\ R(\tau^{(5)}=0)-Z(\tau^{(5)}=0)-C_n \end{matrix}\right\}=\max\left\{\begin{matrix} 75-25 \\ 80-20-40 \end{matrix}\right\}=$$

$$=\max\left\{\begin{matrix} 50 \\ 20 \end{matrix}\right\}=50,\ U^0=U_1.$$

Отже, умовно оптимальний розв'язок у даному випадку буде U_1.

Аналогічні обчислення для інших допустимих станів обладнання на початок п'ятого року будуть такими:

$$F_5(\tau_2^{(5)})=\max\left\{\begin{matrix} 65-30 \\ 80-20-40 \end{matrix}\right\}=\max\left\{\begin{matrix} 35 \\ 20 \end{matrix}\right\}=35,\quad U^0=U_1;$$

$$F_5(\tau_3^{(5)})=\max\left\{\begin{matrix} 60-35 \\ 80-20-40 \end{matrix}\right\}=\max\left\{\begin{matrix} 25 \\ 20 \end{matrix}\right\}=25,\quad U^0=U_1;$$

$$F_5(\tau_4^{(5)})=\max\left\{\begin{matrix} 60-45 \\ 80-20-40 \end{matrix}\right\}=\max\left\{\begin{matrix} 15 \\ 20 \end{matrix}\right\}=20,\quad U^0=U_2.$$

Одержані результати обчислень заносимо у таблицю 6.2.

Таблиця 6.2

Вік обладнання $\tau^{(5)}$, років	Значення функції $F_5(\tau^{(5)})$, тис. грошових одиниць	Умовно оптимальний розв'язок
1	50	U_1
2	35	U_1
3	25	U_1
4	20	U_2

Розглянемо можливі стани обладнання на початок четвертого року. Допустимими станами будуть $\tau_1^{(4)}=1;\ \tau_2^{(4)}=2;\ \tau_3^{(4)}=3$. Для кожного з них визначаємо умовно оптимальний розв'язок і відповідне значення функції $F_4(\tau^{(4)})$. Для цього використовуємо рівняння (6) і дані двох таблиць.

$$F_4(\tau_1^{(4)})=\max\begin{cases}R(\tau^{(4)}=1)-Z(\tau^{(4)}=1)+F_5(\tau^{(5)}=2)\\R(\tau^{(4)}=0)-Z(\tau^{(4)}=0)-C_n+F_5(\tau^{(5)}=1)\end{cases}=$$

$$=\max\begin{cases}75-25+35\\80-20-40+50\end{cases}=\max\begin{cases}85\\70\end{cases}=85,\quad U^0=U_1;$$

$$F_4(\tau_2^{(4)})=\max\begin{cases}65-30+25\\80-20-40+50\end{cases}=\max\begin{cases}60\\70\end{cases}=70,\quad U^0=U_2;$$

$$F_4(\tau_3^{(4)})=\max\begin{cases}60-35+20\\80-20-40+50\end{cases}=\max\begin{cases}45\\70\end{cases}=70,\quad U^0=U_2.$$

Одержані результати записуємо у таблицю 6.3.

Таблиця 6.3

Вік обладнання $\tau^{(4)}$, років	Значення функції $F_4(\tau^{(4)})$, тис. грошових одиниць	Умовно оптимальний розв'язок
1	85	U_1
2	70	U_2
3	70	U_2

Визначаємо умовно оптимальний розв'язок для кожного з допустимих станів на початок третього року. Відповідно з рівнянням (6) при

$\tau_1^{(3)}=1;\ \tau_2^{(3)}=2$

маємо:

$$F_3(\tau_1^{(3)})=\max\begin{cases}R\left(\tau^{(3)}=1\right)-Z\left(\tau^{(3)}=1\right)+F_4\left(\tau^{(4)}=2\right)\\R\left(\tau^{(3)}=0\right)-Z\left(\tau^{(3)}=0\right)-C_n+F_4\left(\tau^{(4)}=1\right)\end{cases}=$$

$$=\max\begin{cases}75-25+70\\80-20-40+85\end{cases}=\max\begin{cases}120\\105\end{cases}=120,\quad U^0=U_1;$$

$$F_3(\tau_2^{(3)})=\max\begin{cases}R\left(\tau^{(3)}=2\right)-Z\left(\tau^{(3)}=2\right)+F_4\left(\tau^{(4)}=3\right)\\R\left(\tau^{(3)}=0\right)-Z\left(\tau^{(3)}=0\right)-C_n+F_4\left(\tau^{(4)}=1\right)\end{cases}=$$

$$=\max\begin{cases}65-30+70\\80-20-40+85\end{cases}=\max\begin{cases}105\\105\end{cases}=105,\quad U^0=U_2.$$

Із останнього виразу бачимо, що якщо на початок третього року вік обладнання складає два роки, то незалежно від того, буде прийняте рішення U_1 чи U_2, величина прибутку залишається тією ж. Це означає, що в якості умовно оптимального розв'язку можна взяти будь-який, наприклад, U_2. Одержані значення записуємо у таблицю 6.4.

Таблиця 6.4

Вік обладнання $\tau^{(3)}$, років	Значення функції $F_3(\tau^{(3)})$, тис. грошових одиниць	Умовно оптимальний розв'язок
1	120	U_1
2	105	U_2

На початок другого року вік обладнання може бути рівний тільки одному року. Отже, $F_2(\tau^{(2)})=75-25+105=155,\quad U^0=U_1$. На початок першого року

$$F_1(\tau^{(1)})=R(\tau_2^{(1)}=0)-Z(\tau_1^{(1)}=0)+F_2(\tau^{(1)}=1)=80-20+155=215,$$

$U^0=U_1$.

Таким чином, максимальний прибуток підприємства може дорівнювати 215 тис. грошових одиниць. Він відповідає оптимальному плану заміни обладнання, який визначається на основі попередніх таблиць. Для першого року рішення єдине — слід зберегти обладнання. Отже, вік обладнання на початок другого року складає один рік. Тоді єдиним рішенням може бути рішення про збереження обладнання. На початок третього року вік обладнання стає рівним двом. При такому віці його слід замінити. Після заміни, на початок четвертого року, його вік складе один рік. Тому на початок п'ятого року вік обладнання складе два роки і його міняти недоцільно. Отже, оптимальний план заміни обладнання є таким:

	Роки				
	1	2	3	4	5
Оптимальне рішення	Зберегти обладнання	Зберегти обладнання	Провести заміну обладнання	Зберегти обладнання	Зберегти обладнання

Приклад 2. Знайти $F = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max,$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = S,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n},$$

якщо S = 700 тис. грошових одиниць, n = 3, а значення x_i та $f_i(x_i)$ наведені в таблиці 6.5.

Таблиця 6.5

Обсяг капіталовкладень x_i (тис. грош. од.)	Приріст випуску продукції $f_i(x_i)$ залежно від обсягу капіталовкладень (тис. грошових одиниць)		
	Підприємство 1	Підприємство 2	Підприємство 3
0	0	0	0
100	30	50	40
200	50	80	50
300	90	90	110
400	110	150	120
500	170	190	180
600	180	210	220
700	210	220	240

Розв'язання. Для розв'язання даної задачі слід скласти рекурентне співвідношення Беллмана. Одержуємо такі функціональні рівняння:

$$\varphi_1(x) = \max_{0 \leq x_1 \leq x} \{f_1(x_1)\},$$

$$\varphi_2(x) = \max_{0 \leq x_2 \leq x} \{f_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2)\}, \tag{8}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_{n-1}(x) = \max_{0 \leq x_{n-1} \leq x} \{f_{n-1}(x_{n-1}) + \varphi_{n-2}(x - x_{n-1})\}.$$

Тут функції $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, n-1}$ визначають максимальний приріст випуску продукції при відповідних розподілах x тис. грошових одиниць капіталовкладень між i підприємствами. Тому значення функції $\varphi_n(x)$ обчислюється лише для одного значення $x = S$, оскільки об'єм капіталовкладень, що виділяються для всіх n підприємств, дорівнює S тис. грошових одиниць.

Почнемо з визначення умовно оптимальних капіталовкладень, які виділяються для розвитку першого підприємства. Для цього знаходимо $\varphi_1(x)$ $\forall x = \{0, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700\}$.

$$x = 0 \Rightarrow \varphi_1(0) = 0; \;\; x = 100 \Rightarrow \varphi_1(100) = \max \begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \end{Bmatrix} = 30, \;\; x_1^0 = 100.$$

Тут перший рядок відповідає рішенню $x_1 = 0$, а другий – рішенню $x_2 = 100$. Оскільки при першому рішенні приріст випуску продукції не забезпечується, а при другому рівний 30 тис. грошових одиниць, то умовно оптимальним рішенням буде $x_1^0 = 100$.

Аналогічно

$$\varphi_1(200) = \max \begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \end{Bmatrix} = 50, \quad x_1^0 = 200; \;\; \varphi_1(300) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \end{Bmatrix} = 90, \quad x_1^0 = 300;$$

$$\varphi_1(400) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \end{Bmatrix} = 110, \quad x_1^0 = 400; \quad \varphi_1(500) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \end{Bmatrix} = 170, \quad x_1^0 = 500;$$

$$\varphi_1(600)=\begin{Bmatrix}0\\30\\50\\90\\110\\170\\180\end{Bmatrix}=180,\quad x_1^0=600;\quad \varphi_1(700)=\begin{Bmatrix}0\\30\\50\\90\\110\\170\\180\\210\end{Bmatrix}=210,\quad x_1^0=700.$$

Результати обчислень і одержані відповідні умовно оптимальні розв'язки записуємо у таблицю 6.6.

Таблиця 6.6

Обсяг капіталовкладень x, які виділяються першому підприємству (тис. грош. одиниць)	Максимальний приріст $\varphi_1(x)$ випуску продукції (тис. грош. одиниць)	Умовно оптимальний обсяг капіталовкладень x_1^0, які виділяються першому підприємству (тис. грош. одиниць)
0	0	0
100	30	100
200	50	200
300	90	300
400	110	400
500	170	500
600	180	600
700	210	700

Використовуючи дані таблиць 6.5 і 6.6, знайдемо умовно оптимальні обсяги капіталовкладень, які виділяються другому підприємству. Знайдемо

$$\varphi_2(x)=\max_{0\le x_2\le x}\{f_2(x_2)+\varphi_1(x-x_2)\}\quad \forall x=\overline{0;700}.$$

$$\varphi_2(0)=0,\quad x_2^0=100;$$

$$\varphi_2(100)=\max_{0\le x_2\le 100}\begin{Bmatrix}f_2(0)+\varphi_1(100)\\f_2(100)+\varphi_1(0)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+30\\50+0\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}30\\50\end{Bmatrix}=$$

$$=50,\quad x_2^0=100;$$

$$\varphi_2(200)=\max_{0\le x_2\le 200}\begin{Bmatrix}f_2(0)+\varphi_1(200)\\f_2(100)+\varphi_1(100)\\f_2(200)+\varphi_1(0)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+50\\50+30\\80+0\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}50\\80\\80\end{Bmatrix}=$$

$$=80,\quad x_2^0=100;$$

$$\varphi_2(300)=\max_{0\le x_2\le 300}\begin{Bmatrix}f_2(0)+\varphi_1(300)\\f_2(100)+\varphi_1(200)\\f_2(200)+\varphi_1(100)\\f_2(300)+\varphi_1(0)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+90\\50+50\\80+30\\90+0\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}90\\100\\110\\90\end{Bmatrix}=$$

$$=110,\quad x_2^0=200;$$

$$\varphi_2(400)=\max_{0\le x_2\le 400}\begin{Bmatrix}f_2(0)+\varphi_1(400)\\f_2(100)+\varphi_1(300)\\f_2(200)+\varphi_1(200)\\f_2(300)+\varphi_1(100)\\f_2(400)+\varphi_1(0)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+110\\50+90\\80+50\\90+30\\150+0\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}110\\140\\130\\120\\150\end{Bmatrix}=$$

$$=150,\quad x_2^0=400;$$

$$\varphi_2(500)=\max_{0\le x_2\le 500}\begin{Bmatrix}f_2(0)+\varphi_1(500)\\f_2(100)+\varphi_1(400)\\f_2(200)+\varphi_1(300)\\f_2(300)+\varphi_1(200)\\f_2(400)+\varphi_1(100)\\f_2(500)+\varphi_1(0)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+170\\50+110\\80+90\\90+50\\150+30\\190+0\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}170\\160\\170\\140\\180\\190\end{Bmatrix}=$$

$$=190,\quad x_2^0=500;$$

$$\varphi_2(600)=\max_{0\le x_2\le 600}\begin{Bmatrix}f_2(0)+\varphi_1(600)\\f_2(100)+\varphi_1(500)\\f_2(200)+\varphi_1(400)\\f_2(300)+\varphi_1(300)\\f_2(400)+\varphi_1(200)\\f_2(500)+\varphi_1(100)\\f_2(600)+\varphi_1(0)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+180\\50+170\\80+110\\90+90\\150+50\\190+30\\210+0\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}180\\220\\190\\180\\200\\220\\210\end{Bmatrix}=$$

$$=220,\quad x_2^0=100;$$

$$\varphi_2(700) = \max_{0\le x_2\le 700}\left\{\begin{array}{c} f_2(0)+\varphi_1(700)\\ f_2(100)+\varphi_1(600)\\ f_2(200)+\varphi_1(500)\\ f_2(300)+\varphi_1(400)\\ f_2(400)+\varphi_1(300)\\ f_2(500)+\varphi_1(200)\\ f_2(600)+\varphi_1(100)\\ f_2(700)+\varphi_1(0)\end{array}\right\} = \max\left\{\begin{array}{c} 0+210\\ 50+180\\ 80+170\\ 90+110\\ 150+90\\ 190+50\\ 210+30\\ 220+0\end{array}\right\} = \max\left\{\begin{array}{c} 210\\ 230\\ 250\\ 200\\ 240\\ 240\\ 240\\ 220\end{array}\right\} =$$

$= 250, \quad x_2^0 = 200.$

Отримані результати і знайдені умовно оптимальні обсяги капіталовкладень, які виділяються другому підприємству, записуємо в табл. 6.7.

Таблиця 6.7

Обсяг капіталовкладень x, які виділяються двом підприємствам (тис. грош. одиниць)	Максимальний приріст $\varphi_2(x)$ випуску продукції (тис. грош. одиниць)	Умовно оптимальний обсяг капіталовкладень x_2^0, які виділяються другому підприємству (тис. грош. одиниць)
0	0	0
100	50	100
200	80	100
300	110	200
400	150	400
500	190	500
600	220	100
700	250	200

Переходимо до знаходження значень

$$\varphi_3(x) = \max_{0\le x_3\le x}\{f_3(x_3)+\varphi_2(x-x_3)\}.$$

Оскільки число підприємств рівне трьом, проводимо обчислення лише для одного значення $x = 700$.

$$\varphi_3(700) = \left\{\begin{array}{c} 0+250\\ 40+220\\ 50+190\\ 110+150\\ 120+110\\ 120+80\\ 180+80\\ 220+50\\ 240+0\end{array}\right\} = 270, \quad x_3^0 = 600.$$

Отже, максимальний приріст випуску продукції складає 270 тис. грошових одиниць. Це трапиться тоді, коли третьому підприємству виділити 600 тис. грош. одиниць, а першому і другому – 200 тис. грош. одиниць. Як видно з таблиці 6.7, другому підприємству слід виділити 100 тис. грош. одиниць. Отже, нами одержано оптимальний план розподілу капіталовкладень між підприємствами, згідно з яким забезпечується максимальний приріст випуску продукції.

Розділ 7

СІТКОВІ ГРАФИ. ТРАНСПОРТНІ ЗАДАЧІ НА ТРАНСПОРТНИХ СІТКАХ

7.1. Деякі задачі, що приводять до поняття графа

Багато практичних задач оптимізації можна ефективно розв'язувати за допомогою теорії графів. До них належать: аналіз електричних ліній зв'язку, транспорту, вивчення механізму хімічних реакцій і т. д. Суть поняття графа розглянемо на прикладах.

Приклад 1. У таблиці 7.1 зафіксовано результати спортивних змагань, які відбулися між окремими з команд K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7.

Таблиця 7.1

Назва команди	У кого виграла	Кому програла
K_1	K_4, K_7	K_2, K_3, K_6
K_2	K_1	K_4, K_5
K_3	K_1, K_5, K_6	K_4, K_7
K_4	K_2, K_3	K_1, K_6
K_5	K_2	K_3, K_6, K_7
K_6	K_1, K_4	K_3, K_7
K_7	K_3, K_5, K_6	K_1

Потрібно зобразити ці результати аналітично і графічно.

Розв'язання. Позначимо команди-учасниці змагання точками, розміщеними довільно на площині, і якщо команда K_i виграла у команди K_j, то проведемо стрілку від K_i до K_j (рис. 7.1).

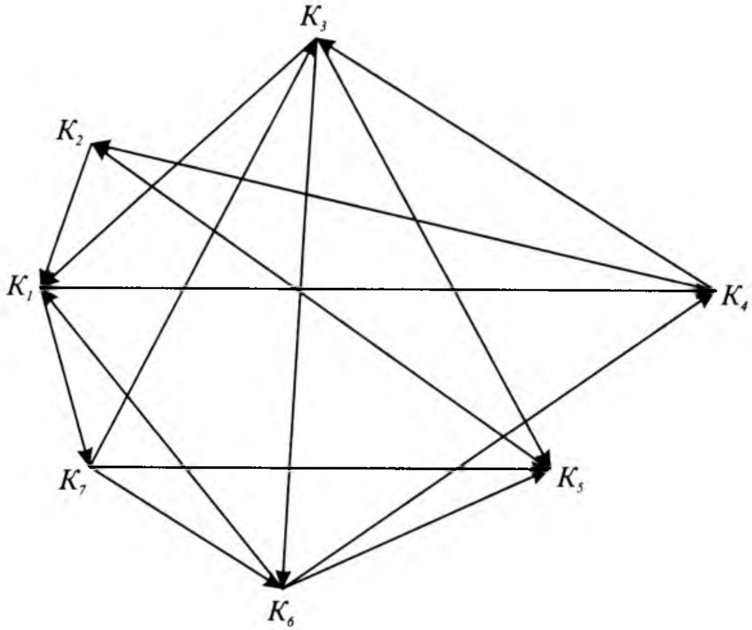


Рис. 7.1

Результати цих змагань можна зобразити інакше. Кожну стрілку від K_i до K_j подамо у вигляді пари (K_i, K_j), а учасників змагань — у вигляді множини $M=\{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7\}$. Тоді таблицю можна подати у вигляді пари (M, P), де
$P=\{(K_1,K_4), (K_1,K_7), (K_2,K_1), (K_3,K_1), (K_3,K_6), (K_3,K_5), (K_4,K_3), (K_4,K_2), (K_5,K_2), (K_6,K_1), (K_6,K_4), (K_7,K_3), (K_7,K_5), (K_7,K_6)\}$.

Якщо нас цікавлять не результати змагань, а лише які команди конкретно зустрічалися, то замість стрілок сполучатимемо відрізками відповідні точки (рис. 7.2). Лінії тут замінюють дві протилежні стрілки: якщо команда K_i грала з K_j, то K_j грала з K_i.

Якщо на рис. 7.1 кожній стрілці відповідала пара (K_i, K_j), то на рис. 7.2 кожній лінії відповідає множина її кінцевих точок $\{K_i, K_j\}$. Двохелементні множини називаються *невпорядкованими парами*. Тоді інформацію рис. 7.2 запишемо так: (M, W), де

$$M=\{K_1, K_2, ..., K_7\} \quad W=\{\{K_1, K_2\}, ..., \{K_6, K_7\}\}.$$

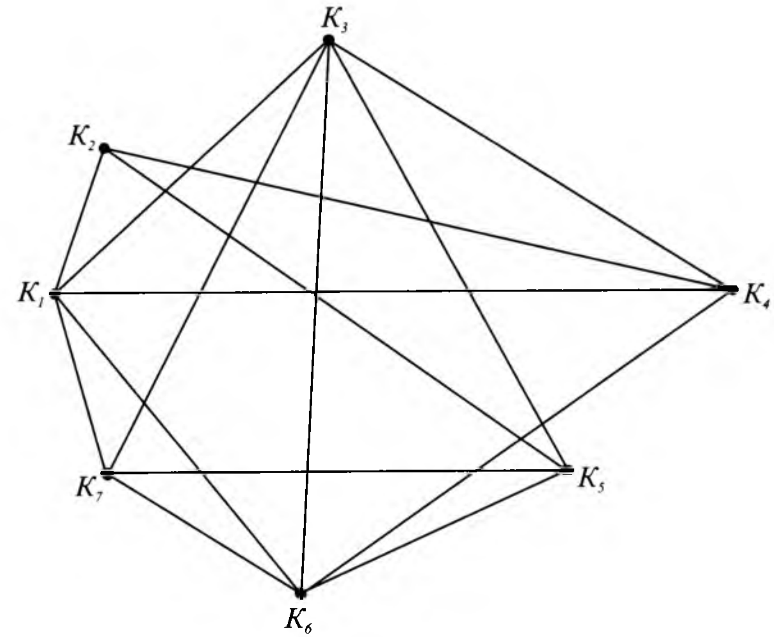


Рис. 7.2

Приклад 2. Дано множину чисел $V=\{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$, на якій задано відношення між ними, що описується реченням “число a взаємно просте з числом b”, а отже, “число b взаємно просте з a”. Потрібно зобразити це відношення аналітично і графічно.

Розв’язання. Зобразимо кожне з чисел множини V точкою на площині, і між кожними двома точками, які зображують взаємно прості числа, проведемо відрізок (рис. 7.3).

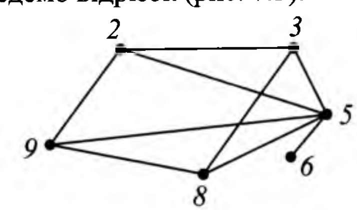
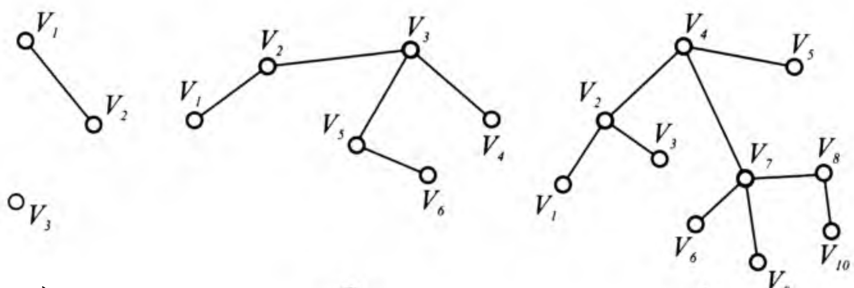


Рис. 7.3

Аналітичний запис матиме вигляд: (V, W), де $V=\{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$, а $W=\{\{2,3\}, \{2,5\}, \{2,9\}, \{3,5\}, \{3,8\}, \{5,6\}, \{5,8\}, \{5,9\}, \{8,9\}\}$.

7.2. Основні поняття теорії графів

Простим графом G називається система, що складається з непорожньої множини V і множини U деяких невпорядкованих пар з V. Коротко це позначають так: $G=(V,U)$. Елементи множини V будемо зображати малими кружечками на площині і називати їх *вершинами*, а елементи множини U зображатимемо лініями (зокрема відрізками) і називатимемо *ребрами графа*. Малюнок, який при цьому отримаємо, також називається *графом*. Такі малюнки іноді називають *діаграмами графа*. Як прості графи можна розглядати, наприклад, такі (рис. 7.4):



а) б) в)

Рис. 7.4

Якщо ребро сполучає вершини V_r і V_s, то кажуть, що вони *належать* цьому ребру, а саме ребро відповідно належить вершинам V_r і V_s. При цьому вершини V_r і V_s називаються *суміжними*. На рис. 7.4 б) вершини V_1 і V_2, V_3 і V_4 суміжні, а вершини V_1 і V_5, V_4 і V_6 — несуміжні. Аналогічно два різних ребра називаються *суміжними*, якщо вони мають хоча б одну спільну вершину. Наприклад, на рис. 7.4 б) ребра V_1V_2 і V_2V_3 — суміжні, бо мають спільну вершину V_2. А ребра V_1V_2 і V_3V_4 — несуміжні. Кожне ребро суміжне самому собі.

Скінчена послідовність суміжних ребер (не обов'язково різних) графа G, тобто така послідовність, в якій кожне ребро, починаючи з другого, суміжне з попереднім, називається *маршрутом* в G. У графі на рис. 7.4 б) можемо виділити такі маршрути:

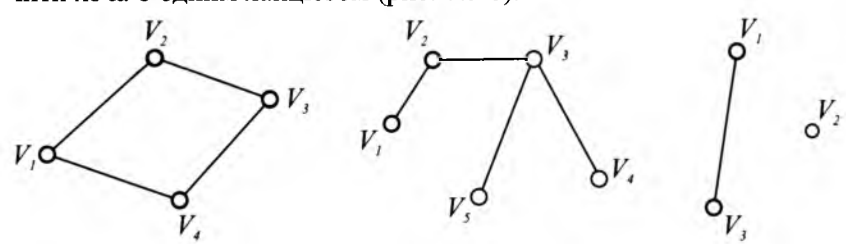
$$\alpha=\{(V_1V_2),(V_2V_3),(V_3V_4)\},\ \beta=\{(V_1V_2),(V_2V_3),(V_3V_5),(V_5V_6)\}.$$

Кожне ребро є маршрут.

Маршрути зручніше позначати як послідовності вершин, через які проходить маршрут. Ці вершини називаються *кінцевими вершинами маршруту*. Щоб підкреслити, що маршрут немає орієнтації, тобто маршрут з вершини V_r у вершину V_s є одночасно маршрутом з V_s у V_r, позначення вершини відділяємо рисками. Тоді попередні два маршрути позначимо відповідно так:

$$\alpha=(V_1-V_2-V_3-V_4),\ \beta=(V_1-V_2-V_3-V_5-V_6).$$

Довжиною маршруту називається число ребер у ньому, однакові ребра рахують стільки разів, скільки разів вони входять у маршрут. Довжину маршруту α позначають $l(\alpha)$. У нашому випадку $l(\alpha)=3$; $l(\beta)=4$. Поняття маршруту є допоміжним для введення основних понять ланцюга і циклу. *Ланцюгом* називається маршрут, в якому всі ребра різні. Ланцюг, у якому кінцеві вершини V_r і V_s збігаються, називається *циклом* (рис. 7.5 а). Ланцюг (відповідно цикл), у якому всі вершини різні, називається *простим* або *елементарним*. Граф G називається *зв'язним*, якщо будь-які дві його вершини можна сполучити хоча б одним ланцюгом (рис. 7.5 б).



Цикл *Зв'язний граф* *Незв'язний граф*

а) б) в)

Рис. 7.5

Зв'язний граф без циклів називається *деревом*. Незв'язний граф без циклів називається *лісом*, якщо кожний компонент зв'язності такого графа буде деревом (рис. 7.6).

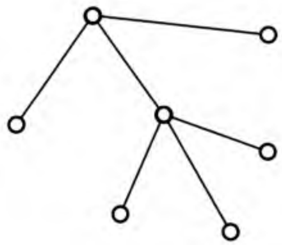
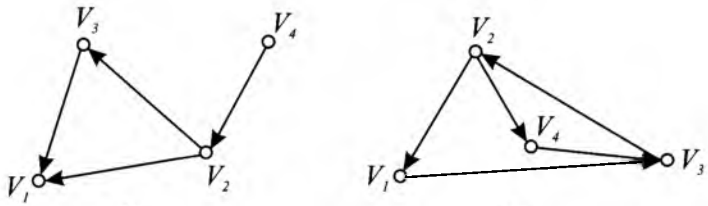


Рис. 7.6

Орієнтованим графом (або *орграфом*) називається система, яка складається з непорожньої множини V і непорожньої множини P деяких пар елементів із V. Скорочений запис орграфів є таким: $O=(V,P)$. Елементи множини V орграфа називаються *вершинами*, а множини P — *дугами* або напрямленими ребрами орграфа. Приклади орграфів зображені на (рис.7.7):

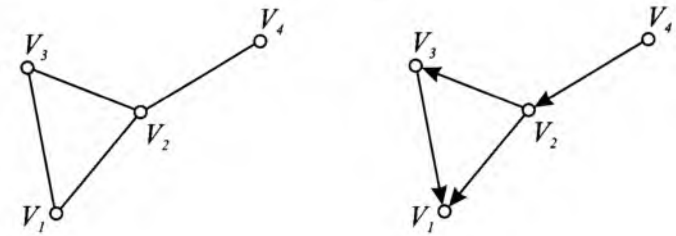


а) б)

Рис. 7.7

Орієнтованим маршрутом (або *ормаршрутом*) називається скінчена послідовність таких суміжних дуг, коли в кожну вершину, починаючи з другої, заходить дуга з попередньої вершини. Наприклад, на рис. 7.7 а) ормаршрутом буде $\alpha=(V_4\to V_2\to V_3\to V_1)$, а на рис. 7.7 б) — $\beta=(V_2\to V_4\to V_3)$. *Орієнтованим ланцюгом* (або *орланцюгом*) називається ормаршрут, у якому всі дуги різні. Орланцюг, у якому кінцеві вершини збігаються, називається *орциклом*.

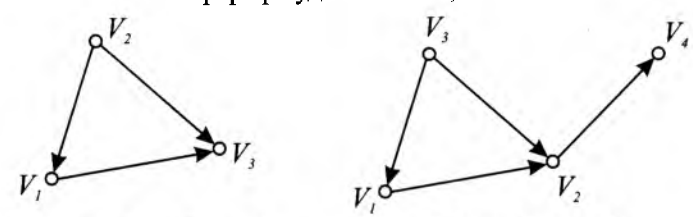
Поняття зв'язності орграфів має дві форми: зв'язність (або слабка зв'язність) та сильна зв'язність. Якщо O — деякий орграф, то *основою* орграфа O назвемо такий граф G, який дістанемо з O заміною кожної дуги (V_r,V_s) відповідним ребром $\{V_r,V_s\}$ (рис. 7.8).



Основа орграфа *Сам орграф*

Рис. 7.8

Орграф O називається *зв'язним*, якщо його основа зв'язна, і *сильно зв'язним*, якщо для будь-яких його двох вершин V_r і V_s існує ланцюг з V_r у V_s і навпаки (рис. 7.9). З цього означення випливає, що будь-який сильно зв'язний орграф буде зв'язним, але не навпаки.



Сильно зв'язний граф *Зв'язний орграф*

а) б)

Рис. 7.9

Орграф на рис. 7.9 б) не є сильно зв'язним, бо не існує орланцюга з V_3 у V_4.

7.3. Побудова сіткового графа

Під час будівництва різноманітних споруд, виготовлення технічних виробів і т. д. доводиться виконувати велику кількість робіт. Виконання їх пов'язане в часі: розпочати одні роботи (за винятком початкової) можна лише тоді, коли виконано одну або кілька інших підготовчих робіт. Інформацію про взаємозв'язок і порядок виконання всіх робіт якогось проекту найчастіше подають за допомогою орграфа, який доповнюють певними числовими даними, такими, наприклад, як кількість часу, потрібного для завершення конкретних робіт; час початку певної роботи; номери вершин графа і т. д. Такий орграф називається *сітковим графом* (скорочено СГ) даного проекту. На СГ дугами зображають процеси виконання робіт або просто роботи, а вершинами – відповідні події, які настають у результаті виконання однієї або кількох робіт.

Під *роботою* розуміють будь-який процес або дію, за допомогою якої досягають певних результатів. Наприклад, при спорудженні будинку можна назвати такі види робіт: 1) виготовлення проекту; 2) одержання дозволу на будівництво; 3) доставка потрібних будівельних матеріалів і т. д.

Подіями називаються результати виконання однієї або кількох робіт. Перераховані вище роботи приводять до таких подій: 1) проект виготовлено; 2) дозвіл на будівництво будинку одержано; 3) потрібні будматеріали завезено і т. д.

У СГ виділяють дві вершини: V_1, яка є початком, і V_n, яка є завершенням усього проекту. Всі інші вершини називають *проміжними*.

Найважливіші правила побудови СГ:

1. Скласти список робіт, які потрібно виконати для реалізації проекту (такі списки можуть бути деталізованими або укрупненими).

2. Відповідно до списку робіт скласти список подій.

3. Якщо подія, яка є завершенням операцій $D_1, D_2, \ldots, D_n$ дає можливість розпочати операції $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, то на СГ це зображається так (рис. 7.10):

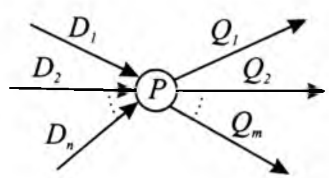


Рис. 7.10

4. Якщо операція D_3 йде за операціями D_1 і D_2, а D_4 йде лише за D_2, причому завершення операцій D_1 і D_2 дає подію P, то вводять *додаткову подію* P' і *фіктивну операцію* D (рис. 7.11).

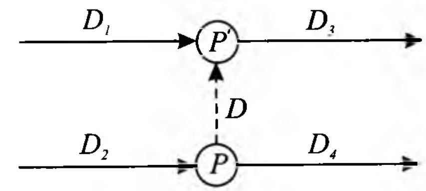


Рис. 7.11

Роботу називають *фіктивною*, якщо її виконання не вимагає затрати часу. У нашому випадку робота D полягає в тому, що за допомогою додаткової події P' відображають той факт, що D_4 не залежить від D_1, а D_3 залежить від D_1 і D_2.

5. Якщо між подіями P_1 і P_2 виконуються дві паралельні операції D_1 і D_2, то використовують одну допоміжну подію і фіктивну операцію (рис. 7.12).

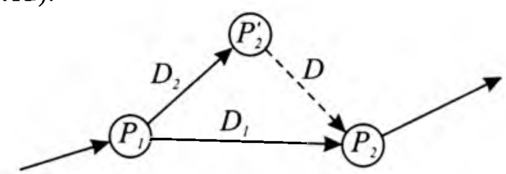


Рис. 7.12

Якщо виконується кілька паралельних операцій, то вводять відповідну кількість допоміжних подій і фіктивних операцій.

6. У СГ не повинно бути так званих *тупикових подій*, тобто таких проміжних подій, які не дають початку будь-якій роботі. Наприклад, тупиковою подією на рис. 7.13 є P_5.

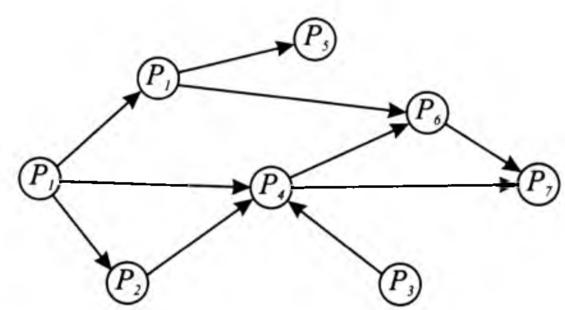


Рис. 7.13

7. У СГ не повинно бути так званих *хвостових подій*, тобто таких проміжних подій, яким не передує ніяка робота. На рис. 7.13 такою подією є P_3.

8. У СГ не повинно бути орциклів, бо в такому разі створилася б практично неможлива ситуація, коли кожна операція з орциклу фактично ніколи не могла б початися: її початок залежав би від виконання інших операцій цього циклу.

Приклад. Наведемо приклад побудови СГ для виготовлення вібростенда. Нехай створено відповідний перелік подій і робіт (табл. 7.2):

Таблиця 7.2

Номер подій	Назви подій	Позначення робіт	Назви робіт
0	Рішення про проектування нового стенда прийнято	(0; 1)	Розробка технічних умов (ТУ) для стенда
		(0; 2)	Затвердження постачальників вузлів
1	ТУ для стенда розроблено	(1; 2)	Оформлення і розміщення замовлення на придбання вузлів
		(1; 3)	Проектування загального компонування стенда
2	Постачальників вузлів затверджено. Замовлення на виготовлення вузлів прийнято	(2; 7)	Погодження ТУ для вузлів і приймання вузлів
3	Загальне компонування стенда готове	(3; 4)	Відливання заготовки для стола стенда
		(3; 5)	Проектування механізму передачі вібрації
4	Заготовку для стола зроблено	(4; 6)	Механічна обробка стола
5	Проект механізму передачі вібрації виготовлено	(5; 6)	Виготовлення механізму передачі вібрації

Закінчення табл. 7.2

Номер подій	Назви подій	Позначення робіт	Назви робіт
6	Стіл і механізм для передачі вібрації виготовлено	(6; 7)	Монтаж механізму передачі вібрацій у столі стенда
7	Механізм передачі вібрацій змонтовано; закуплені вузли одержано	(7; 8)	Загальне збирання і випробування стенда
8	Стенд випробуваний і придатний для експлуатації		

Відповідний сітковий граф (рис. 7.14) міститиме 9 подій (вершин графа), з яких нульова подія буде початковою, а дев'ята (8) — завершальною. Всі дуги виписано в колонці "назви робіт".

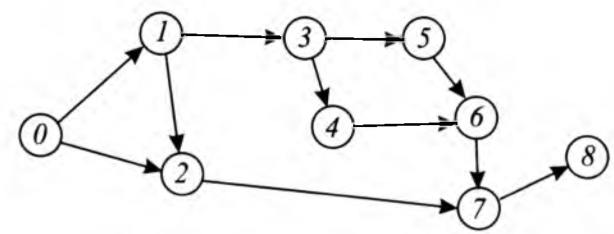


Рис. 7.14

У процесі аналізу і розрахунків на СГ нумерувати вершини зручно так, щоб для кожної дуги (r, s), де r і s — номери вершин, виконувалось співвідношення $r < s$.

Одним із способів нумерації вершин є спосіб *викреслювання дуг*. Для цього вершини спочатку розбивають на *ранги*, а потім нумерують. Розбиття на ранги здійснюють так. Вершини, в які не заходять жодна із дуг, називають *вершинами рангу* 0. Після цього викреслюють усі дуги, які виходять з вершин рангу 0. Ті вершини, в які не заходить, крім цих, жодна дуга, називаються *вершинами першого рангу*. Така вершина знайдеться хоча б одна, бо в СГ немає орциклів. Далі з усіх вершин першого рангу викреслюють усі дуги, які виходять із них. Вершинам, які мають вхідні дуги лише розглянутих двох видів, присвоюють ранг 2 і т. д. Через відповідну кількість кроків усі вершини будуть розбиті на ранги. Розглянемо цей метод на такому графі (рис. 7.15):

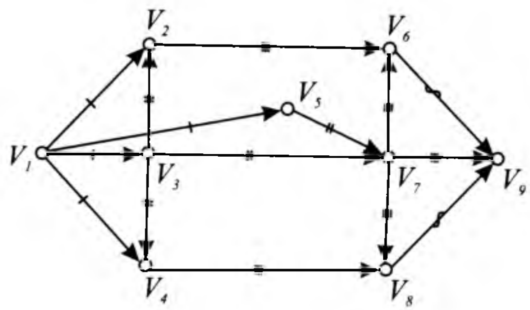


Рис. 7.15

Єдина вершина, що немає вхідних дуг – це V_1; їй присвоюємо ранг 0. Викреслюємо (однією рискою) всі дуги, які проходять з вершини V_1. Після цього без вхідних дуг інших видів виявилося дві вершини: V_3 і V_5. Це будуть вершини 1-го рангу. Далі викреслюємо всі дуги, які виходять з вершин V_3 і V_5. Позначимо їх двома рисками. При цьому вершини V_2, V_4, V_7 залишилися без вхідних дуг усіх розглянутих видів, тому їх ранг дорівнює 2. Викресливши трьома рисками всі дуги, які виходять з вершин V_2, V_4, V_7, встановимо, що вершини V_6, V_8 матимуть ранг 3. І нарешті, викресливши дуги , які виходять з V_6, V_8, одержимо, що вершина V_9 має ранг 4. Запишемо ці дані в табл. 7.3.

Таблиця 7.3

Назва вершини	Ранг
V_1	0
V_3, V_5	1
V_2, V_4, V_7	2
V_6, V_8	3
V_9	4

Нумерацію вершин тепер проводять так. Вершині рангу 0 присвоюють номер 1. Потім у довільному порядку нумерують усі

вершини рангу 1. Нехай V_3 приймає номер 1, а V_5— 2. Далі нумерують усі вершини рангу 2, використовуючи наступні номери. Таку нумерацію подаємо у вигляді таблиці (табл. 7.4).

Таблиця 7.4

Вершини	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9
Номери вершин	0	4	1	3	2	6	5	7	8

Коли вершини пронумеровані, надалі їх позначають своїми номерами, які записують у кружечках (рис. 7.16).

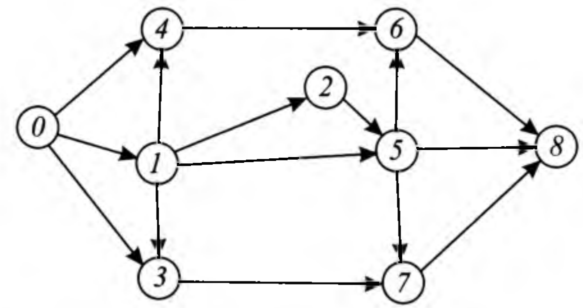


Рис. 7.16

Зауважимо: коли є кілька вершин одного рангу, то розглянутим способом отримаємо неоднозначну нумерацію, тому що в межах цього рангу нумерувати вершини можна в довільному порядку. Однак це не має принципового значення, бо завжди для кожної дуги (r, s) виконується співвідношення $r < s$.

7.4. Розрахунки в сітковому графі

СГ реальних проектів часто містять велику кількість робіт і подій, і тому важливо виділити таку невелику кількість робіт і подій, стежачи за виконанням яких, можна тримати в полі зору хід виконання всього проекту. Так приходять до поняття *критичного шляху* в СГ. Суть цього поняття пояснимо на прикладі.

Приклад 1. Розглянемо рисунок 7.17.

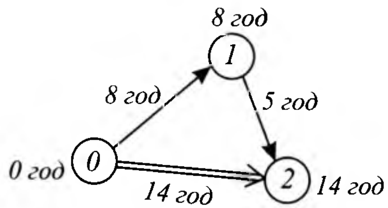


Рис. 7.17

Завершальна подія 2 настане після виконання трьох робіт: роботи (0; 1), яка через 8 годин призведе до події 1, роботи (1; 2), яка через 5 годин призведе до події 2, і роботи (0; 2), яка через 14 годин призведе до події 2. Отже, завершальна подія 2 настане після початкової події через 14 годин, хоча роботи (0; 1) і (1; 2) закінчаться через 8+5=13 годин, оскільки вони виконуються послідовно: спочатку робота (0; 1), а потім — (1; 2). Час завершення подій записуємо на СГ біля відповідних вершин. Початкова подія є початком відліку для робіт, тобто час її завершення беруть за 0. Роботу (0; 2) називають *критичним шляхом*, тобто шляхом "найдовшої" роботи, до виконання якої завершальна подія 2 настати не може.

Приклад 2. Розглянемо такий СГ (рис. 7.18):

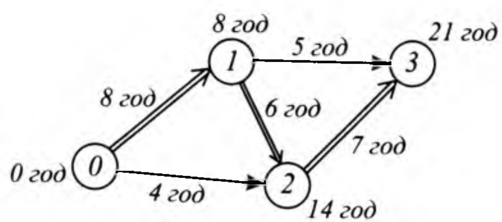


Рис. 7.18

Початок події 1 залежить лише від виконання роботи (0; 1), і тому вона настане через 0 + 8 = 8 год. Подія 2 настане після закінчення двох робіт (1; 2) і (0; 2). Роботу (1; 2) буде закінчено через 8+6 = 14 год., а роботу (0; 2) — через 4 год. Вибираємо більше з чисел 14 і 4 та записуємо його біля вершини 2 — це буде час настання події 2. Нарешті, подія 3 настане після завершення робіт (1; 3) і (2; 3). Роботу (2; 3) буде закінчено через 14+7=21 год., а (1; 3) — через 8+5=13 год.

Із двох чисел, 21 і 13, вибираємо більше — 21 і записуємо його біля вершини 3 — це буде час настання завершальної події 3, тобто час завершення цього проекту.

Отже, проект не може бути завершеним раніше, ніж за 21 год. після початку його реалізації (при стабільних строках виконання всіх робіт). Час виконання всіх робіт на шляху (0; 1), (1; 2), (2; 3) також дорівнює 21 год. (8+6+7=21). Це теж критичний шлях на цьому СГ.

Отже, *критичний шлях* — це найдовший у часі ланцюг робіт, які ведуть від початкової до завершальної події.

Щоб проект було виконано в строк, потрібно, щоб усі події на критичному шляху настали не пізніше запланованих строків. Затримка будь-якої події на критичному шляху призводить до затримки виконання всього проекту. Щоб мати уявлення про хід виконання усього проекту, достатньо стежити за виконанням подій на критичному шляху.

Строки появи подій, які визначають розглянутим способом, називають *мінімальними строками*. Мінімальний строк для події i будемо позначати через T_i^m. Якщо під *довжиною* деякого шляху ланцюга СГ розуміти суму часу виконання всіх робіт на цьому шляху, то T_i^m є максимальною з довжин усіх шляхів, які ведуть від початкової вершини до вершини i. Розглянемо рисунок 7.19.

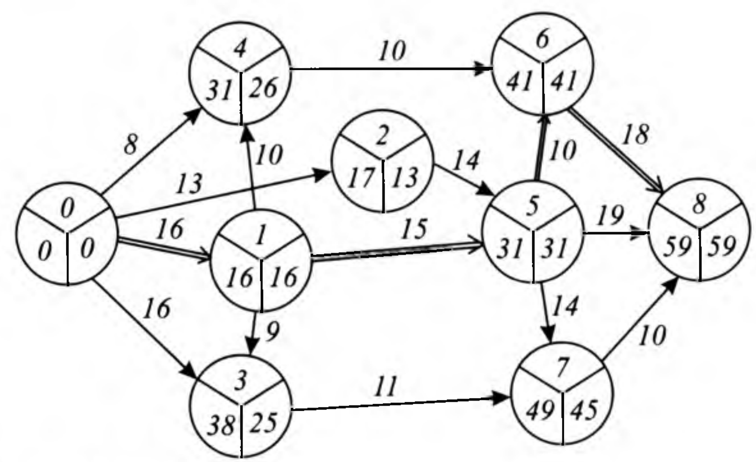


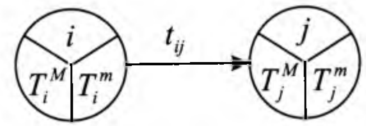
Рис. 7.19

Кожну вершину (кружечок) розділимо на 3 сектори: у верхньому секторі запишемо номер вершини, у правому — мінімальний строк настання відповідної події, в лівому — максимальний строк настання події, який позначимо через T_i^m для події.

За означенням покладемо $T_0^m = 0$. У вершину 1 входить одна стрілка, тому $T_1^m = 0+16 = 16$. У вершину 3 входять дві стрілки: з вершин 0 і 1. Тому обчислюємо дві суми: 16+9=25 і 0+16 =16, і вибираємо max{25; 16}=25. У вершину 4 – max{0+8; 16+10}= max{8; 26}=26. У вершинах 5 – max{13+14; 16+15}= max{27; 31}=31, 6 – max{26+10; 31+10}= max{36; 41}= 41, 7 – max{25+11; 31+14}= max{36; 45}= 45, 8 – max{41+18; 31+19; 45+10}= max{59; 50; 55}=59. Отже, при даних строках виконання робіт проект повинен бути закінчений через $T_8^m = 59$ одиниць часу. Критичний шлях, який відповідає цьому терміну: $0 \to 1 \to 5 \to 6 \to 8$.

Розглянемо тепер величини T_5^m і T_7^m для подій 5 і 7. Очевидно, що $T_5^m = 31$ збільшувати не можна, бо із її збільшенням зросте величина T_6^m, а отже, і T_8^m, тобто буде порушено строк виконання проекту. Якщо розглянути T_7^m, то максимальний строк, який не збільшить строку завершення усього проекту, буде рівний 59–10 = 49 одиницям часу. Отже, для настання події 7 є резерв часу, який рівний 49 – 45 = 4 одиницям часу: роботи, які проводяться до появи події 7, можна виконати з максимальним запізненням на 4 одиниці часу, а відповідні резерви використати на інших, напруженіших ділянках роботи.

Це дає підставу ввести поняття *максимального строку* настання події, тобто такого строку, перевищення якого спричинить відповідну затримку завершення всього проекту. Позначимо його через T_i^M для події *i*. Різницю $D_i = T_i^M - T_i^m$ назвемо *резервом часу* для події *i*. Обчислення величин T_i^M проводять від завершальної події до початкової, причому можуть трапитися два випадки: 1) від події *i*, для якої обчислюємо значення T_i^M, відходить одна стрілка (наприклад, до події *j*); 2) від неї відходять дві (наприклад, до подій r та k) і більше стрілок (коли стрілок більше двох, обчислення проводяться аналогічно). Через t_{ij} будемо позначати час виконання роботи від події *i* до події j, який записується в СГ на стрілках (рис. 7.20).



$$T_i^M = T_j^M - t_{ij}$$

Рис. 7.20

Тобто максимальний строк T_i^M події *i* дорівнює різниці між максимальним строком T_j^M події j та часом t_{ij} виконання роботи вздовж дуги (i, j). За цією формулою обчислюємо $T_7^M = 59 - 10 = 49$; $T_6^M = 59 - 18 = 41$; $T_3^M = 49 - 11 = 38$; $T_4^M = 41 - 10 = 31$; $T_2^M = 31 - 14 = 17$ і результати записуємо в лівий сектор відповідних вершин.

У другому випадку обчислюємо $T_r^M - t_{ir}$, $T_k^M - t_{ik}$ і в якості T_i^M приймаємо $T_i^M = \min\{T_r^M - t_{ir}; T_k^M - t_{ik}\}$ (рис. 7.21). Якби T_i^M було більше найменшої з цих різниць, наприклад, $T_k^M - t_{ik}$, то мали б: $T_i^M > T_k^M - t_{ik} \Rightarrow T_i^M + t_{ik} > T_k^M$, що неможливо, оскільки T_k^M — максимальний строк події k. Аналогічно, значення T_i^M не може бути меншим від найменшої з цих різниць.

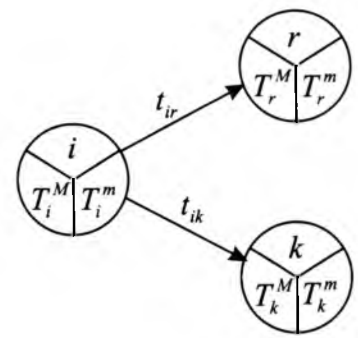


Рис. 7.21

Знайдемо тепер на СГ значення T_5^M, T_1^M. Будемо мати:

$$T_5^M = \min\{T_8^M - 19; T_6^M - 10; T_7^M - 14\} = \min\{59 - 19; 41 - 10; 49 - 14\} = ;$$
$$= \min\{40; 31; 35\} = 31$$

$$T_1^M = \min\{T_5^M - 15; T_4^M - 10; T_3^M - 9\} = \min\{31 - 15; 31 - 10; 38 - 9\} =$$
$$= \min\{16; 21; 29\} = 16.$$

За означенням $T_0^M = 0$.

Перевірка.

$$T_0^M = \min\{T_3^M - 16; T_1^M - 16; T_4^M - 8\} = \min\{38-16; 16-16; 31-8\} =$$
$$= \min\{22; 0; 23\} = 0$$

свідчить, що всі значення T_i^M обчислено правильно.

Заповнивши так усі вершини СГ, ми легко обчислюємо резерви часу для всіх подій і знаходимо критичний шлях: він проходить через ті вершини, для яких резерв часу дорівнює нулю. Це найкращий спосіб знаходити критичний шлях, особливо коли СГ містить багато вершин і дуг. СГ може містити кілька критичних шляхів.

7.5. Транспортні сітки

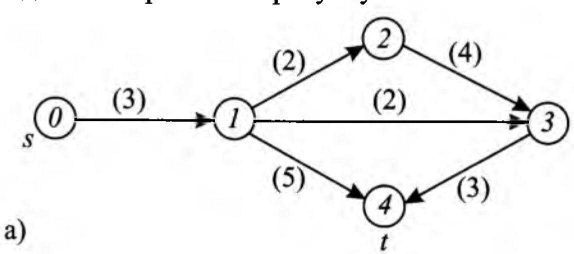
Транспортною сіткою називається зв'язний орграф $O = (V, U)$ з такими властивостями:

1. Існує одна і тільки одна вершина, в яку не входить жодна стрілка з інших вершин графа. Цю вершину називають *входом сітки* і позначають через s.

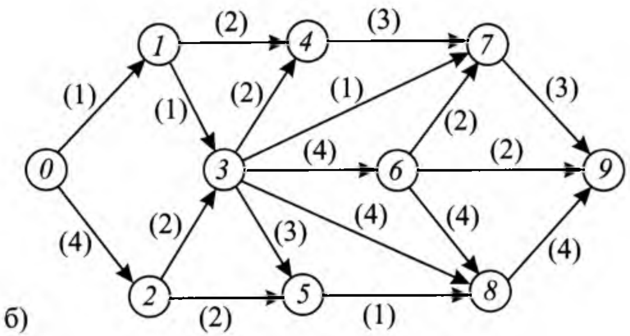
2. Існує одна і тільки одна вершина, з якої не виходить жодна стрілка в інші вершини графа. Цю вершину називають *виходом сітки* і позначають через t.

3. На множині U визначена цілочислова функція, яка кожній дузі $(x, y) \in U$ ставить у відповідність ціле невід'ємне число $\rho(x, y)$, яке називається *пропускною спроможністю* дуги (x, y). Пропускну спроможність записують на відповідній дузі в круглих дужках, щоб відрізнити її від інших характеристик.

Приклади ТС зображені на рисунку 7.22.



а)



б)

Рис. 7.22

Для унаочнення ТС можна розглядати як водопровідну систему з одностороннім пропусканням води в трубах, де входом сітки є джерело води, дугами — труби, вузлами — сполучення труб, виходом — стік води, пропускною спроможністю — поперечний переріз труби або кількість води, що може проходити за одиницю часу по дузі (x, y). Можна розглядати ТС як транспортну систему певного району, систему зв'язку і т. д.

Будемо розглядати стабільні потоки, інтенсивність яких протягом періоду, що розглядається, не змінюється. Одним з основних понять, пов'язаних із ТС, є поняття *потоку*. Якщо $v \in V$ — довільна вершина ТС, то через U_V^- позначимо множину дуг, які заходять у v, а через U_V^+ — множину дуг, які виходять з V (рис. 7.23).

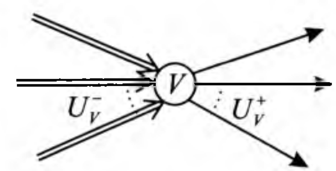


Рис. 7.23

Нехай на дугах ТС (U, V) визначено деяку функцію f і $A \in U$. Тоді вираз $\sum\limits_{(x,y)\in A} f((x, y))$ позначає суму значень функції f на всіх дугах, які входять у множину A. Функцію f називають *цілочисловою невід'ємною*, якщо вона для будь-якого аргументу набуває цілого невід'ємного значення.

Цілочислова невід'ємна функція φ, задана на множині U транспортної сітки (V,U), називається *потоком у сітці*, якщо вона має такі властивості:

1. $\sum_{(x,y)\in U_v^-} \varphi((x,y)) = \sum_{(x,y)\in U_v^+} \varphi((x,y))$, $(v \neq s, v \neq t)$.
2. $\varphi(x,y) \le \rho(x,y) \quad \forall (x,y)\in U$.

З цього означення випливає, що потік – це система закріплених за кожною дугою цілих невід'ємних чисел, які пов'язані між собою і з пропускними спроможностями дуг умовами 1) і 2). Число $\varphi(x,y)$ називається *дуговим потоком* або *потоком по дузі* (x,y). Записуватимемо його в ТС праворуч пропускної спроможності (через кому). Як приклад розглянемо ТС, зображену на рис. 7.24.

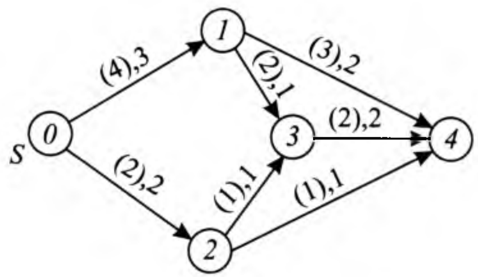


Рис. 7.24

Повернемося знову до водопровідної системи як аналогу ТС. Якщо число $\varphi(x,y)$ розглядати як кількість води, що проходить по дузі (x,y) від x до y, то перша умова означення стверджує, що в кожній вершині, відмінній від початкової s та кінцевої t, реалізується динамічний баланс: скільки води за одиницю часу надходить у вершину, стільки ж і виходить, вода в цих вершинах не накопичується. Наведений вище рис. 7.24 можна прокоментувати так: у вершину (1) надходить три одиниці якоїсь речовини (наприклад, газу) і виходить також 3 — дві у вершину (4) і одна — у вершину (3). Аналогічна закономірність характерна і для вершин (2) і (3).

Величиною потоку φ ТС називається число $\rho = \sum_{(x,y)\in U_s^+} \varphi((x,y))$.

Результатом динамічного балансу в ТС є рівності

$$\sum_{(x,y)\in U_s^+} \varphi((x,y)) = \sum_{(x,y)\in U_t^-} \varphi((x,y)) = \rho.$$

Величина потоку в ТС на рис. 7.24 дорівнює $\rho = 3+2 = 2+2+1 = 5$ (умовних одиниць).

Друга умова означення потоку має очевидний зміст: дуговий потік не повинен перевищувати пропускної спроможності дуги.

Розрізом ТС (U,V) називається така множина $P \subset V$ вершин ТС (V,U), що $s \notin P, t \in P$ і множина всіх дуг, які заходять в P, тобто сполучають вершини $x \notin P$ з вершинами $y \in P$.

З цього означення випливає, що розріз визначає кожна множина P дуг, яка містить вихідну вершину t і не містить вхідної вершини s. Приклади розрізів на попередній ТС записані в табл. 7.5.

Таблиця 7.5

	P	U_p^-
1	{1; 4}	{(0; 1); (3; 4); (2; 4)}
2	{3; 4}	{(1; 3); (1; 4); (2; 3); (2; 4)}
3	{1; 2; 4}	{(0; 1); (0; 2); (3; 4)}

Пропускною спроможністю $\rho(U_p^-)$ розрізу U_p^- називається сума пропускних спроможностей усіх дуг, які входять у U_p^-, тобто

$$\rho(U_p^-) = \sum_{(x,y)\in U_p^-} \rho((x,y)).$$

Різні розрізи в даній ТС можуть мати різні пропускні спроможності. Наприклад, розріз {1; 4} таблиці 7.5 має пропускну спроможність 3+2+1=6, а розріз {1; 2; 4} має пропускну спроможність 3+2+2=7.

Оскільки в кожній ТС можна побудувати лише скінчену кількість розрізів, то серед них знайдеться хоча б один розріз із найменшою пропускною спроможністю.

Розріз, який має найменшу пропускну спроможність серед усіх розрізів даної ТС, називається *мінімальним розрізом*.

Якщо з ТС вилучити дуги довільного її розрізу U_p^-, то потік припиниться — зв'язок між входом і виходом буде перервано, кожний потік через ТС проходить через будь-який її розріз, у тому числі і мінімальний. Отже, найбільша максимальна величина потоку, який можна пропустити через ТС, дорівнює пропускній спроможності її мінімального розрізу. Цей важливий висновок теорії транспортних сіток має назву *теореми про максимальні і мінімальні розрізи*, або *теореми Форда-Фалкерсона*.

20 - 8-1045

Важливою є така задача: в довільній ТС із фіксованими пропускними спроможностями її дуг побудувати максимальний потік, який вона може пропустити.

Розв'язання цієї задачі проводять в три етапи:

1) побудова довільного потоку;
2) побудова повного потоку;
3) побудова максимального потоку.

Побудова довільного потоку регламентується лише умовами 1, 2 з означення потоку, будь-яких інших правил при цій побудові не використовують, а тому довільний потік визначається неоднозначно.

Для знаходження повного потоку введемо спочатку два поняття. Дугу $(x, y) \in U$ будемо називати *насиченою потоком*, якщо $\varphi(x, y) = \rho(x, y)$, тобто величина дугового потоку дорівнює пропускній спроможності цієї дуги. Потік φ називається *повним*, якщо кожний шлях (орланцюг) від s до t містить принаймні одну насичену дугу (такий шлях також називатимемо повним). Отже, для знаходження повного потоку потрібно відшукати серед шляхів від s до t усі неповні й перетворити їх у повні шляхи за таким правилом: якщо, наприклад, шлях $\beta = (s \to v_i \to \ldots \to t)$ неповний, то для всіх дуг цього шляху знаходимо різниці $\rho(x, y) - \varphi(x, y)$. Нехай k — найменша з цих різниць. Збільшуємо на k усі дугові потоки на шляху β, у результаті чого він перетворюється в повний потік.

Приклад. Розглянемо наступну ТС (рис. 7.25):

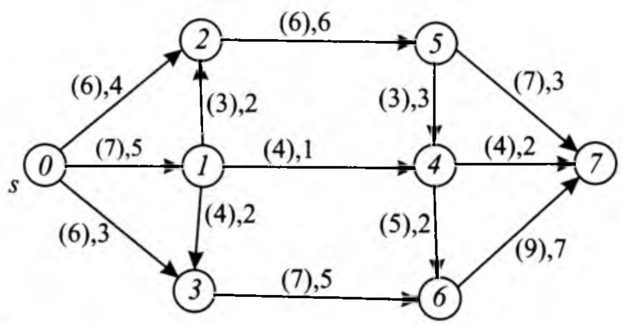


Рис. 7.25

Неповними на даній ТС будуть такі шляхи:

$$\beta_1 = (0 \to 1 \to 4 \to 7),\ \beta_2 = (0 \to 1 \to 4 \to 6 \to 7),$$

$$\beta_3 = (0 \to 1 \to 3 \to 6 \to 7),\ \beta_4 = (0 \to 3 \to 6 \to 7).$$

Для β_4, наприклад, маємо $k = \min\{6-3; 7-5; 9-7\} = \min\{3; 2; 2\} = 2$. Додавши до всіх дугових потоків цього шляху по 2, перетворимо його у повний шлях. При цьому в повні шляхи перетворяться також β_2 і β_3, бо дуги (3; 6) і (6; 7) стануть насиченими. Для перетворення β_1 у повний шлях потрібно всі його дугові потоки збільшити на 2. Відповідний повний потік зображено на рис. 7.26.

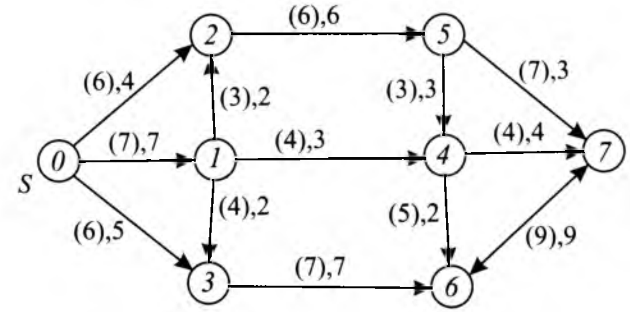


Рис. 7.26

Зауважимо, що повний потік для конкретної ТС визначається неоднозначно.

Розглянемо один із найпоширеніших методів розв'язування задачі знаходження максимального потоку, який називається *методом розміщення індексів*. Цей метод складається з двох етапів, які повторюють один за одним доти, поки не одержать максимальний потік.

Перший етап — процес розміщення індексів. *Індекси* — це пари чисел, які записують біля відповідних вершин. Якщо вершина має індекс, то вона називається *позначеною*. Біля початкової вершини $s = 0$ записують індекс $(0^+, \Delta 0 = \infty)$. Знак "+" біля 0 вгорі справа означає, що у вершину $s = 0$ можна посилати потік, а символ "∞" означає, що величина потоку у вершину $s = 0$ зверху необмежена.

Нехай тепер j — довільна позначена вершина. Вибираємо всі непозначені вершини x, в які йдуть ненасичені дуги з вершини j і позначаємо ці вершини індексами $(j^+, \Delta x)$, де

$$\Delta x = \min\{\Delta j, \rho((j, x)) - \varphi((j, x))\}.$$

Іншим непозначеним вершинам y, сусіднім із j, для яких $\varphi(y, j) > 0$, приписуємо індекс $(j^-, \Delta y)$, де $\Delta y = \min\{\Delta j, \varphi((y, j))\}$. Продовжуючи цей процес далі, отримаємо одне з двох: кінцева вершина t не позначена або вершина t має індекс. У першому випадку побудовано максимальний потік, у другому — потік можна збільшити (потрібно переходити до етапу 2).

Пояснимо процес розміщення індексів на рисунку 7.27.

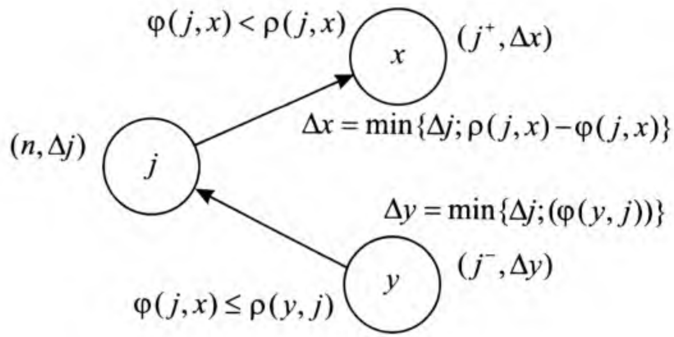


Рис. 7.27

Нехай j — якась позначена вершина з індексом $(n, \Delta j)$, а x та y — це непозначені вершини. Якщо стрілка йде у вершину x від вершини j і дуга (j,x) — ненасичена, тобто $\varphi((j,x)) < \rho((j,x))$, то вершині x надаємо індекс $(j^+, \Delta x)$. Значення $\Delta x = \min\{\Delta j, \rho((j,x)) - \varphi((j,x))\}$. Якщо дуга (j,x) насичена, тобто $\varphi((j,x)) = \rho((j,x))$, то вершині x за допомогою вершини j індексу приписати не можна.

Якщо стрілка йде від непозначеної вершини y до вершини j і $\varphi((y,j)) > 0$, тобто дуговий потік $\varphi((y,j))$ не порожній, то біля вершини y пишемо індекс $(j^-, \Delta y)$. Знак "–" біля j означає, що стрілка йде від y до j. Значення Δy дорівнює меншому з двох значень $\Delta y = \min\{\Delta j, \varphi((y,j))\}$. Якщо $\varphi((y,j)) = 0$, то вершині y з допомогою вершини j індексу приписати не можна. Якщо з непозначеної вершини y відходять дві або кілька дуг до позначених вершин, то вершині y можна приписати індекс за будь-якою із цих позначених вершин.

Другий етап — зміна потоку. Якщо вершина k має індекс $(j^+, \Delta k)$, то $\varphi((j,k))$ замінимо на $\varphi((j,k)) + \Delta t$ (t — кінцева вершина) і переходимо до вершини j. Якщо ж k має індекс $(j^-, \Delta k)$, то $\varphi((k,j))$ замінюємо на $\varphi((k,j)) - \Delta t$ і переходимо до вершини j (рис. 7.28). Продовжуємо цей процес доти, поки не дійдемо до початкової вершини s. Після цього витираємо всі попередні індекси і знову повертаємось до етапу 1.

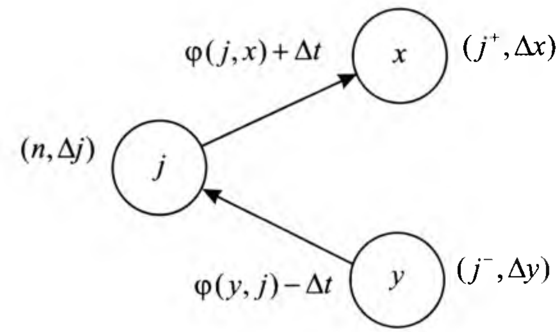


Рис. 7.28

Процес продовжується доти, поки кінцеву вершину t не можна буде позначити. Пояснимо зміну потоку на такому прикладі (рис. 7.29).

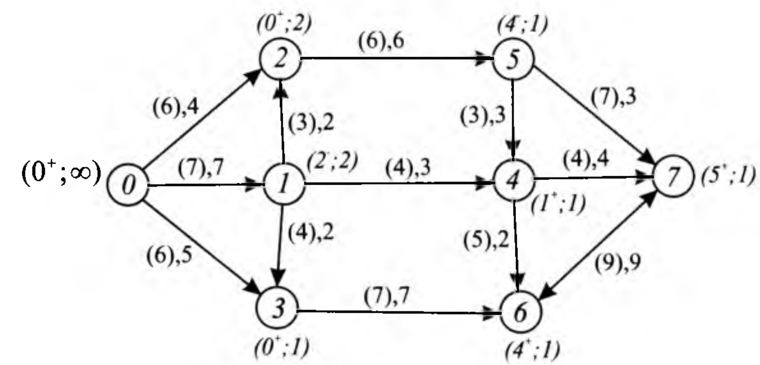


Рис. 7.29

Зміну потоку починаємо з кінцевої вершини t. На цьому етапі ми використовуємо лише перші компоненти індексів — вони показують напрям, в якому відбувається зміна потоку, і характер зміни, тобто збільшуються чи зменшуються відповідні дугові потоки. Якщо перша компонента індексу має знак "+", то відповідний дуговий потік збільшується на Δt (Δt — друга компонента індексу кінцевої вершини t), якщо ж знак "–", то зменшують на Δt. Другі компоненти в індексах обчислюють для того, щоб знайти Δt, — на другому етапі тільки Δt використовують при зміні потоків.

На рис. 7.29 вершині $s = 0$ приписуємо індекс $(0^+, \infty)$. Від вершини 0 йдуть дві ненасичені дуги: (0; 2) і (0; 3). Вершині 2 приписуємо індекс $(0^+, 2)$, бо $2 = \min\{$ [illegible] алогічно вершині 3 приписуємо індекс $(0^+, 1)$.

Розглянемо вершину 1. З неї виходить дуга у вершину 2, а також $\varphi((1; 2)) = 2$. Тому їй (вершині 1) приписуємо індекс $(2^-; 2)$. Оскільки з вершини 1 виходить дуга і у вершину 3, а також у цьому випадку $\varphi((1; 3)) = 2$, то вершині 1 можна було б приписати індекс $(3^-; 2)$, але на результат розв'язання задачі це не вплине. Вершини 5 і 6 поки що позначити не можемо, бо відповідні дуги (2; 5) і (3; 6) — насичені.

Розглянемо вершину 4. Оскільки в неї входить ненасичена дуга (1; 4) з вершини 1, то за правилом присвоюємо їй індекс $(1^+; 1)$, бо $\Delta 4 = \min\{\Delta 1; 4 - 3\} = \min\{2; 1\} = 1$. Тепер можна позначити вершини 5, 6 і 7. Вершині 5 приписуємо індекс $(4^-; 1)$, бо з неї виходить дуга у позначену вершину і $\Delta 5 = \min\{\Delta 4; 3\} = \min\{1; 3\} = 1$. Аналогічно вершина 6 дістає індекс $(4^+; 1)$, бо в неї заходить дуга з вершини 4, і $\Delta 6 = \min\{\Delta 4; 5 - 2\} = \min\{1; 3\} = 1$; вершина 7 має індекс $(5^+; 1)$. Процес розміщення індексів закінчено.

Тепер вносимо зміни в потік. Починаємо з кінцевої вершини $t = 7$. Індекс $(5^+; 1)$ біля вершини 7 вказує на те, що потік по ненасиченій дузі потрібно збільшити на 1, і він тепер становитиме 3+1= 4. Далі переходимо до вершини 5, бо на це вказує індекс $(5^+; 1)$ біля вершини 7. Вершина 5 має індекс $(4^-; 1)$, отже, за правилом величину потоку по дузі (5; 4) потрібно зменшити на $\Delta t = 1$, тобто він становитиме $3 - 1 = 2$. Індекс $(4^-; 1)$ біля вершини 5 вказує на те, що потрібно перейти до вершини 4. Оскільки вона має індекс $(1^+; 1)$, то величину потоку по дузі (1; 4) потрібно збільшити на $\Delta t = 1$, тобто він становитиме 3+1=4. Далі треба внести зміни у дугові потоки: $\varphi_2((1; 2)) = 2 - 1 = 1$, $\varphi_2((0; 2)) = 4 + 1 = 5$, де φ_2 — новий потік.

Повторюємо знову процес розміщення індексів. Виявляється, що позначити можна лише вершини 0, 1, 2, 3. Інші вершини, в тому числі $t = 7$, залишилися непозначеними (рис. 7.30).

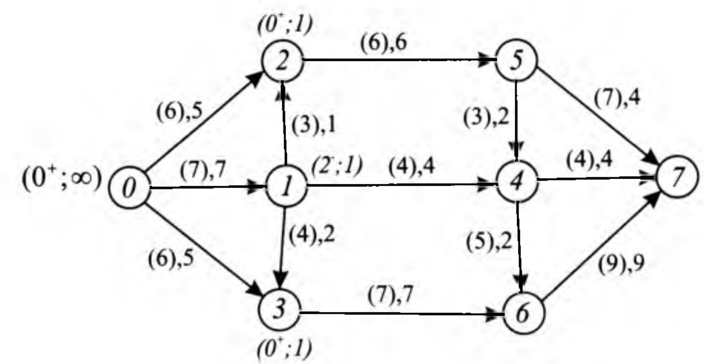


Рис. 7.30

Отже, потік, знайдений на попередньому кроці, — максимальний і його величина $\rho = 5 + 7 + 5 = 4 + 4 + 9 = 17$.

7.6. Транспортні задачі на транспортних сітках

Нехай задана довільна ТС (P, K). На множині P пунктів ТС визначена функція виробництва і споживання $q(p_i)$; на множині U задані функція пропускних здатностей $d(k_{ij})$ та функція транспортних затрат $c(k_{ij}) \geq 0$. Розглянемо транспортну задачу на ТС (P, K) із функціями $Q = \{q(p_i)\}$; $D = \{d(k_{ij})\}$; $C = \{c(k_{ij})\}$. Ця задача може бути задана на множині як арифметичних, так і алгебраїчних планів.

Будемо казати, що функція $X = \{x(k_{ij})\}$, яка задовольняє умови

$$x(p_i, P) = \sum_{k_{ij} \in E_i} x(k_{ij}) = q(p_i), \quad i = \overline{1, n} \tag{1}$$

$$x(k_{ij}) \leq d(k_{ij}), \quad k_{ij} \in K', \tag{2}$$

$$x(k_{ij}) = -x(k_{ji}), \tag{3}$$

називається *алгебраїчним планом*, котрий є сумісним із функціями Q, D та C. Тут $E_i = E_i' \cup E_i''$, де E_i' — це множина комунікацій, які виходять з p_i, а E_i'' — множина комунікацій, які входять у p_i. Множина K' одержується з K додаванням таких комунікацій $k_{ij} \notin K$, що $k_{ji} \in K$. При цьому, якщо $k_{ij} \notin K$, покладаємо $x(k_{ij}) = d(k_{ij}) = 0$.

За допомогою функцій $c(k_{ij})$ утворюємо систему функцій $\varphi_{ij}(x_{ij})$, які визначають вартість перевезення x_{ij} по комунікації k_{ij}:

$$\varphi_{ij}(x_{ij}) = \begin{cases} c_{ij}x_{ij}, \text{ якщо } x_{ij} \geq 0, \\ -c_{ij}x_{ij}, \text{ якщо } x_{ij} < 0. \end{cases}$$

У загальному випадку $\varphi_{ij}(x_{ij})$ зображено на рисунку 7.31.

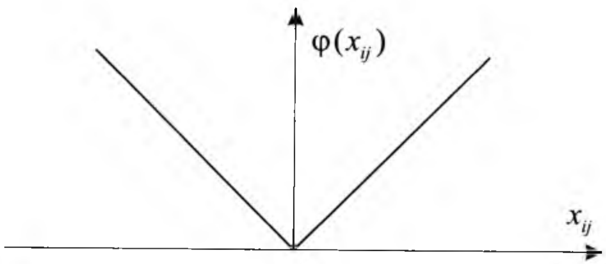


Рис. 7.31

Транспортна задача на сітці (P,K) з функціями виробництва-споживання $Q=\{q(p_i)\}$, пропускних здатностей $D=\{d(k_{ij})\}$ та транспортних затрат $C=\{c(k_{ij})\}$ полягає в побудові такого плану перевезень $X=\{x(k_{ij})\}$, $k_{ij}\in K'$, який задовольняє умови (1) — (3) і для якого сумарні транспортні затрати

$$\Phi(X)=\frac{1}{2}\sum_{k_{ij}\in K'}\varphi_{ij}(x_{ij})\to\min. \tag{4}$$

Задача (4) не є задачею лінійного програмування через нелінійність $\Phi(X)$, але може бути зведена до лінійної, якщо від алгебраїчних планів перейти до арифметичних.

Транспортна задача на сітці (P,K) із функціями Q, D і C у термінах арифметичних планів полягає в знаходженні

$$L(X)=\sum_{k_{ij}\in K}c_{ij}x(k_{ij})\to\min \tag{5}$$

за умов

$$x(p_i,P)-x(P,p_i)=q(p_i),\quad i=\overline{1,n}, \tag{6}$$
$$0\leq x(k_{ij})\leq d(k_{ij}),\quad k_{ij}\in K. \tag{7}$$

Якщо $X=\{x(k_{ij})\}$, $k_{ij}\in K$ — арифметичний план, то $Y=y(k_{ij})=x(k_{ij})-x(k_{ji})$, $k_{ij}\in K'$ — алгебраїчний план. Аналогічним чином кожному алгебраїчному плану $Y=\{y(k_{ij})\}$ відповідає арифметичний план

$$X=x(k_{ij})=\begin{cases} y(k_{ij}) \text{ при } y(k_{ij})\geq 0, \\ 0 \quad \text{ при } y(k_{ij})<0. \end{cases}$$

Можна довести, що задачі (1) — (3) та (5) — (7) — еквівалентні. Надалі для зручності транспортну задачу на транспортній сітці з функціями Q, D і C будемо позначати $T(q,d,c)$. Для того, щоб задача $T(q,d,c)$ мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб існував принаймні один план, який би задовольняв умови (2) — (3) або (6) — (7).

Необхідною умовою існування розв'язку задачі $T(q,d,c)$ є виконання *узагальненої умови балансу* для сітки $\sum_{p_i\in P}q(p_i)=0$.

7.6.1. Критерії оптимальності плану задачі $T(q,d,c)$

Зв'яжемо з пунктом p_i сітки (P,K) число u_i, яке називається його *потенціалом*. Критерій оптимальності арифметичного плану задачі $T(q,d,c)$ дає наступна теорема.

Теорема 1. Для оптимальності плану $X=\{x(k_{ij})\}$, $k_{ij}\in K$ задачі $T(q,d,c)$ необхідно і достатньо, щоб існували числа $u_1,u_2,...,u_n$, — такі, що

$$u_j-u_i=c(k_{ij}),\text{ якщо } 0<x(k_{ij})<d(k_{ij}), \tag{8}$$
$$u_j-u_i\leq c(k_{ij}),\text{ якщо } x(k_{ij})=0, \tag{9}$$
$$u_j-u_i\geq c(k_{ij}),\text{ якщо } x(k_{ij})=d(k_{ij}). \tag{10}$$

Критерій оптимальності алгебраїчного плану задачі $T(q,d,c)$ дає теорема 2.

Теорема 2. Для оптимальності алгебраїчного плану $X=x(k_{ij})$, $k_{ij}\in K'$ задачі (1) — (4) необхідно і достатньо, щоб існували числа $u_1,u_2,...,u_n$, — такі, що

$$u_j-u_i=c(k_{ij}),\text{ якщо } 0<x(k_{ij})<d(k_{ij}), \tag{11}$$
$$u_j-u_i=-c(k_{ji}),\text{ якщо } -d(k_{ji})<x(k_{ij})<0, \tag{12}$$
$$u_j-u_i\geq c(k_{ij}),\text{ якщо } x(k_{ij})=d(k_{ij}), \tag{13}$$
$$u_j-u_i\leq -c(k_{ji}),\text{ якщо } x(k_{ij})=-d(k_{ji}), \tag{14}$$
$$-c(k_{ji})\leq u_j-u_i\leq c(k_{ij}),\text{ якщо } x(k_{ij})=0. \tag{15}$$

Зауважимо, що в умовах (11) — (15) величина $c(k_{ij})=\infty$, якщо $k_{ij}\notin K$. Арифметичний план $X=\{x(k_{ij})\}$, $k_{ij}\in K$ називається *опорним*, якщо не можна скласти замкнений маршрут із комунікацій плану, для яких

$$0<x(k_{ij})<d(k_{ij}). \quad (16)$$

Для алгебраїчного плану транспортної сітки ознака опорності виглядає так. Алгебраїчний план $X=\{x(k_{ij})\}$, $k_{ij}\in K'$ називається *опорним*, якщо неможливо скласти направлений замкнутий маршрут з комунікацій $k_{ij}\in K'$, для яких виконується умова

$$x(k_{ij})\neq d_{ij},0,-d_{ji}. \quad (17)$$

Комунікації, які задовольняють умову (16) для арифметичного плану та умову (17) для алгебраїчного, — називаються *основними*. Тому опорний план можна визначити як план, з основних комунікацій якого не можна скласти замкнений маршрут. Основні комунікації опорного плану X об'єднаємо в множину K_x.

Опорний план X називається *невиродженим*, якщо сітка (P,K_x) є зв'язною, тобто, якщо будь-які два пункти P можуть бути з'єднані маршрутом, який складається з основних комунікацій $k_{ij}\in K_x$. Зауважимо, що у відповідності з означенням основних комунікацій алгебраїчного плану пункти p_i та p_j або взагалі не зв'язані комунікаціями множини K_x, або з'єднані двома протилежними комунікаціями множини K_x.

Теорема 3. Множина основних комунікацій K_x складається рівно з $(n-1)$ пар протилежних комунікацій, де n — загальна кількість пунктів сітки.

Назвемо пункти транспортної сітки, зв'язані хоча б одною комунікацією, *сусідніми*. Введемо такі позначення: P_1 — множина пунктів сітки (P,K_x), сусідніх пункту p_1, $P_i\,(i=1,2,...)$ — множина пунктів сітки (P,K_x), які сусідні одному з пунктів множини P_{i-1}. Очевидно, множини $P_i\,(i=1,2,...)$ не мають загальних пунктів, бо в протилежному випадку неодмінно існував би замкнений маршрут з основних комунікацій $k_{ij}\in K_x$, а це суперечить означенні опорності плану X. Звідси випливає існування числа t, починаючи з якого (при $i>t$) множини P_i не містять жодного пункту.

7.6.2. Метод потенціалів для транспортної задачі на транспортній сітці

Процес розв'язання задачі $T(q,d,c)$ методом потенціалів складається з попереднього етапу та скінченого числа ітерацій. На попередньому етапі будується початковий опорний план. Кожна ітерація складається з двох етапів. На першому етапі перевіряється на оптимальність раніше одержаний опорний план. Якщо він не задовольняє умови оптимальності, то на другому етапі будується новий опорний план.

Нехай вже проведено r ітерацій і одержано невироджений план $X=\{x(k_{ij})\}$, $k_{ij}\in K$. Проведемо опис $(r+1)$-ї ітерації.

Перший етап. Вибираємо довільний пункт множини P, наприклад, p_1, і починаючи з нього, розраховуємо потенціали $u_i=u(p_i)$, $p_i\in P$ плану X за формулами

$$u(p_j)-u(p_i)=\begin{cases} c_{ij}=c(k_{ij}) & \text{при} \quad x(k_{ij})>0,k_{ij}\in K_x,\\ -c_{ji}=-c(k_{ji}) & \text{при} \quad x(k_{ij})<0,k_{ij}\in K_x.\end{cases} \quad (18)$$

Потенціали u_i послідовно підраховуються для пунктів, які належать $P_0,P_1,...$ згідно з правилом

$$u_1=u(p_1)=0\,,\; u_s-u_t=\begin{cases} c(k_{ts}) & \text{при} \quad x(k_{ts})>0,\\ -c(k_{st}) & \text{при} \quad x(k_{ts})<0,\end{cases} \quad (19)$$

де $p_s\in P_i$, $p_t\in P_{i-1}$, причому p_s,p_t — сусідні пункти сітки (P,K_x). Далі для кожної неосновної комунікації $k_{ij}\in K'$ складають різницю u_j-u_i. Якщо виконуються умови

$$\begin{cases} -c_{ji}\le u_j-u_i\le c_{ij} & \text{при} \quad x(k_{ij})=0,\\ u_j-u_i\ge c_{ij} & \text{при} \quad x(k_{ij})=d_{ij},\\ u_j-u_i\le -c_{ij} & \text{при} \quad x(k_{ij})=-d_{ji},\end{cases} \quad (20)$$

то у відповідності з критерієм оптимальності (теореми 1, 2) план X — оптимальний. Якщо хоча б для одної неосновної комунікації умова (20) порушується, то переходять до основного етапу.

Другий етап. Розглядаються пари пунктів, для яких порушуються умови (20). Нехай вибирається деяка пара p_λ, p_μ. Далі розглядаємо, яка з умов (20) порушується.

а) Нехай порушується права частина першої нерівності (20), тобто $u_\mu - u_\lambda > c_{\lambda\mu}$ при $x(k_{\lambda\mu}) = 0$. Тоді будують направлений маршрут l з p_μ в p_λ, використовуючи комунікації $k_{ij} \in K_x$. Ця операція здійснюється шляхом послідовного формування множин P_i, починаючи з $P_0 = p_\mu$ доти, поки пункт p_λ не потрапить у множину P_s при деякому s. Нехай направлений маршрут l з μ в λ має вигляд $k_{\mu i_1}, k_{i_1 i_2}, .., k_{i_{s-1} i_s}, k_{i_s \lambda}$. Приєднавши до маршруту l комунікацію $k_{\lambda\mu}$, одержуємо замкнутий маршрут γ. Тоді новий план X' одержиться з нового плану X шляхом зміни складових потоку $x(k_{ij})$ вздовж замкненого маршруту згідно із співвідношенням

$$x'(k_{ij}) = \begin{cases} x(k_{ij}) + \theta, & \text{якщо } k_{ij} \in \gamma, \\ x(k_{ij}) - \theta, & \text{якщо } k_{ji} \in \gamma, \\ x(k_{ij}) & \text{у всіх інших випадках.} \end{cases} \qquad (21)$$

Параметр θ вибирається максимально можливим, але так, щоб не були порушені пропускні спроможності $d(k_{ij})$ комунікацій та складові $x(k_{ij})$ не змінили знака. Таким чином,

$$\theta = \min_{k_{ij} \in \gamma} \delta(k_{ij}), \qquad (22)$$

де

$$\delta(k_{ij}) = \begin{cases} d_{ij} - x(k_{ij}) & \text{при} \quad x(k_{ij}) > 0, k_{ij} \in l, \\ -x(k_{ij}) & \text{при} \quad x(k_{ij}) < 0, k_{ji} \in l, \\ d_{\lambda\mu} & \text{при} \quad k_{ij} = k_{\lambda\mu}. \end{cases} \qquad (23)$$

б) Нехай порушується друга умова системи (20), тобто $u_\mu - u_\lambda < c_{\lambda\mu}$, $x(k_{\lambda\mu}) = d_{\lambda\mu}$. У цьому випадку план X' утворюється з плану X шляхом збільшення на $\theta\,(\theta > 0)$ перевезень уздовж комунікацій замкненого маршруту γ_1, який складається з $k_{\mu\lambda}$ та маршруту l_1 з p_λ в p_μ. Замкнений маршрут γ_1 відрізняється від γ тільки напрямком. План X' обчислюється за формулами (21), (22), (23), в яких замкнутий маршрут γ замінено на γ_1.

в) Якщо порушена остання з умов (20), тобто $u_\mu - u_\lambda > -c_{\mu\lambda}$ при $x(k_{\lambda\mu}) = -d_{\mu\lambda}$, то, переходячи до комунікації $k_{\mu\lambda}$, переходимо до випадку б), розглянутому вище, тобто $u_\lambda - u_\mu < c_{\mu\lambda}$, $x(k_{\mu\lambda}) = d_{\mu\lambda}$.

Приклад. Розв'язати транспортну задачу на транспортній сітці, заданій рисунком 7.32.

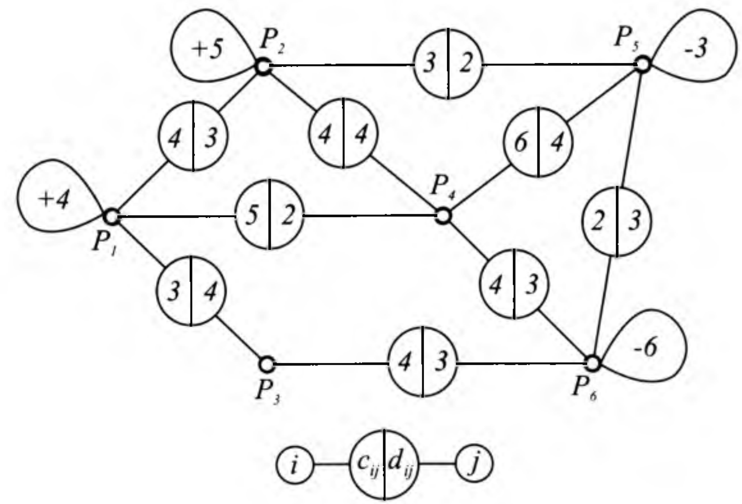


Рис. 7.32

Розв'язання. Тут використані позначення: на кожній комунікації k_{ij} число в кружечку зліва означає c_{ij}, а справа – d_{ij}. Вважаємо матриці C та D симетричними, тобто $c_{ij} = c_{ji}$, $d_{ij} = d_{ji}$. Обсяги виробництва дорівнюють $q(p_1) = 4$, $q(p_2) = 5$, а споживання $q(p_5) = -3$, $q(p_6) = -4$. У пунктах p_3 і p_4, $q(p_3) = q(p_4) = 0$. Такі пункти називаються *перевалочними*.

Попередній етап. Перевіряємо умову балансу

$$\sum_{i=1}^{6} q(p_i) = 5 + 4 - 3 - 6 = 0.$$

Отже, умова балансу виконується. Будуємо початковий опорний план. Оскільки $n = 6$, то число базисних елементів дорівнюватиме $n - 1 = 5$. Будуємо початковий опорний план, використовуючи алгоритм побудови максимального потоку.

Маємо $x_{12} = x_{65} = 0$; $x_{25} = d_{25} = 2$ та $x_{14} = d_{14} = 2$. Отже, комунікації k_{12}, k_{65}, k_{25} та k_{14} не є основними. Інші комунікації плану X_0 — $\{k_{13}, k_{36}, k_{46}, k_{24}, k_{45}\}$ будуть основними, і оскільки сітка, складена з цих комунікацій, не містить циклів і є зв'язною, то план X_0 — опорний і невироджений. Основні комунікації позначені суцільними лініями (рис. 7.33).

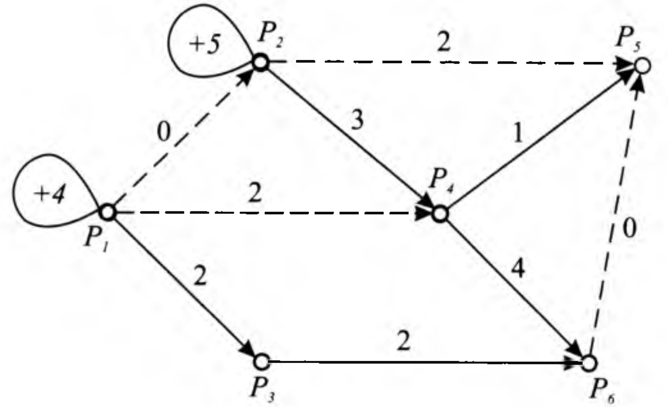


Рис. 7.33

I *ітерація.*

Перший етап. Обчислюємо потенціали. Приймемо $u_1 = 0$. Тоді одержимо

$$u_3 = u_1 + c_{13} = 0 + 3 = 3;\ u_6 = u_3 + c_{36} = 3 + 4 = 7;$$
$$u_4 = u_6 - c_{46} = 7 - 3 = 4;\ u_5 = u_4 + c_{45} = 4 + 6 = 10;$$
$$u_2 = u_4 - c_{24} = 4 - 4 = 0.$$

Складаємо різниці потенціалів для всіх основних комунікацій і перевіряємо умови оптимальності:

$$u_2 - u_1 = 0 - 0 = 0 < c_{12} = 4,\quad x_{12} = 0;$$
$$u_5 - u_2 = 10 - 0 = 10 > c_{25} = 2,\quad x_{25} = d_{25} = 2;$$
$$u_4 - u_1 = 4 - 0 = 4 < c_{14} = 5,\quad x_{14} = d_{14} = 2;$$
$$-c_{65} = -2 > u_6 - u_5 = 7 - 10 = -3 < c_{56} = 2,\quad x_{56} = \theta.$$

Бачимо, що умови порушуються для комунікацій k_{14} і k_{65}.

Другий етап. Вибираємо комунікацію $k_{14}\ (x_{14} = d_{14})$. Будуємо направлений маршрут l з p_1 в p_4 з основних комунікацій. Він буде таким: $l = \{k_{13}, k_{36}, k_{64}\}$. Додамо до цього маршруту комунікацію k_{14} і одержуємо замкнений маршрут $\gamma = (l, k_{14})$. Знаходимо $\theta_1 = \min\{x_{46}, d_{36} - x_{36}, d_{13} - x_{13},\ x_{14}\} = \min\{4; 1; 2\} = 1$. Обчислюємо новий опорний план X_1 за співвідношеннями

$$x'(k_{ij}) = \begin{cases} x(k_{ij}) + \theta_1, \text{ якщо } k_{ij} \in \gamma, \\ x(k_{ij}) - \theta_1, \text{ якщо } k_{ji} \in \gamma, \\ x(k_{ij}) \text{ у всіх інших випадках.} \end{cases}$$

Маємо: $x^{(1)}(k_{46}) = x_{46} - \theta_1 = 4 - 1 = 3$; $x^{(1)}(k_{14}) = x_{14} - \theta_1 = 2 - 1 = 1$; $x^{(1)}(k_{13}) = x_{13} + \theta_1 = 2 + 1 = 3$; $x^{(1)}(k_{36}) = x_{36} + \theta_1 = 2 + 1 = 3$. Оскільки $x_{36}^{(1)} = d_{36} = 3$, а $x_{14}^{(1)} = 1 < d_{14} = 2$, то новому опорному плану відповідають комунікації k_{14}, k_{13}, k_{24}, k_{45}, k_{46} (рис. 7.34).

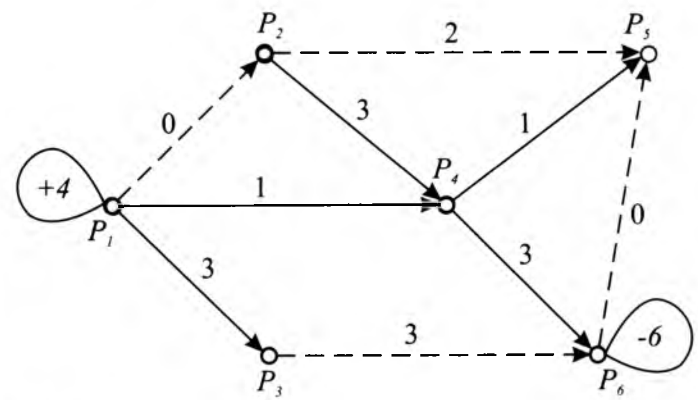


Рис. 7.34

II ітерація. Підраховуємо потенціали, які відповідають плану X_1. Покладаючи $u_1 = 0$, маємо:

$$u_3 = u_1 + c_{13} = 0 + 3 = 3;\ u_4 = u_1 + c_{14} = 5;$$
$$u_6 = u_4 + c_{46} = 5 + 3 = 8;\ u_5 = u_4 + c_{45} = 5 + 6 = 11;$$
$$u_2 = u_4 - c_{24} = 5 - 4 = 1.$$

Перевіряємо умови оптимальності для всіх неосновних комунікацій:

$k_{12}:\ u_2 - u_1 = 1 - 0 = 1 < c_{12} = 4,\quad x_{12} = 0;$

$k_{25}:\ u_5 - u_2 = 11 - 1 = 10 > c_{25} = 2,\quad x_{25} = d_{25} = 2;$

$k_{36}:\ u_6 - u_3 = 8 - 3 = 5 > c_{36} = 4,\quad x_{36} = d_{36} = 3;$

$k_{65}:\ u_5 - u_6 = 11 - 8 = 3 > c_{56} = 2,\quad x_{65} = 0.$

Умови порушені для комунікації k_{65}. Переходимо до другого етапу.

Другий етап. Будуємо маршрут з p_5 в p_6. Цей маршрут $l = \{k_{54}, k_{46}\}$. Тоді замкнений маршрут $\gamma = \{k_{54}, k_{46}, k_{65}\}$. Обчислюємо $\theta_2 = \min\{x_{45}, d_{46} - x_{46}, d_{65}\} = \min\{1; 6 - 3; 3\} = 1$. Визначаємо план X_2, змінюючи потік уздовж замкненого маршруту γ на величину θ_2:

$x^{(2)}(k_{45}) = x_{45}^{(1)} - \theta_2 = 1 - 1 = 0$; $x^{(2)}(k_{65}) = x_{65}^{(1)} + \theta_2 = 0 + 1 = 1$;

$x^{(2)}(k_{46}) = x_{46}^{(1)} + \theta_2 = 3 + 1 = 4$.

Одержаному плану X_2 відповідає рисунок 7.35.

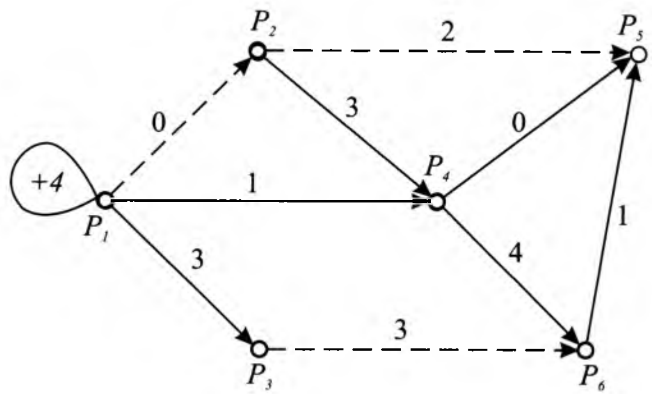


Рис. 7.35

ІІІ ітерація. Підраховуємо потенціали, які відповідають плану X_2. Покладаючи $u_1 = 0$, маємо:

$$u_3 = u_1 + c_{13} = 0 + 3 = 3;\ u_4 = u_1 + c_{14} = 0 + 5 = 5;$$
$$u_6 = u_4 + c_{46} = 5 + 3 = 8;\ u_5 = u_6 + c_{65} = 8 + 2 = 10.$$

Перевіряємо виконання умов оптимальності:

$$u_2 - u_1 = 1 - 0 = 1 < c_{12} = 4, \quad x_{12} = 0;$$
$$u_6 - u_3 = 8 - 3 = 5 > c_{36} = 4, \quad x_{36} = d_{36} = 3;$$
$$u_5 - u_4 = 10 < c_{45} = 6, \quad x_{45} = 0;$$
$$u_5 - u_2 = 10 - 1 = 9 > c_{25} = 2, \quad x_{25} = d_{25} = 2.$$

Таким чином, умови оптимальності виконуються, а, отже, план X_2 — оптимальний.

Розділ 8

ТРЬОХІНДЕКСНІ ТРАНСПОРТНІ ЗАДАЧІ

21 - 8-1045

8.1. Класифікація транспортних задач

Транспортні задачі розглядаються як спеціальний клас задач лінійного програмування. З іншого боку, задачі лінійного програмування можна розглядати як спеціальні класи транспортних задач. З цієї точки зору розрізняють такі класи транспортних задач:

1. Знайти такий набір чисел $X^* = \{x_j\}_{j=1}^n$, при якому

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

і задовольняються обмеження

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = b,$$

$$x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,n}).$$

Така задача називається *одноіндексною транспортною задачею* і позначається T_1.

2. Знайти набір чисел $X^* = \{x_j\}_{j=1}^n$, при якому

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

і задовольняються обмеження

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b,$$

$$x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,n}).$$

Ця задача називається *одноіндексною розподільчою задачею* і позначається D_1. Заміною змінних $y_j = a_j x_j$ вона зводиться до задачі T_1.

3. Знайти $X^* = \{x_j\}_{j=1}^n$, при яких

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

і задовольняються обмеження

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b,$$

$$d_j^- \le x_j \le d_j^+, \quad j=\overline{1,n},$$

де d_j^-, d_j^+ — задані додатні числа. Ця задача позначається D_1^0. Заміною змінних $y_j = (x_j - d_j^-)a_j$ одержуємо одноіндексну транспортну задачу *з обмеженими пропускними спроможностями*.

4. *Задача лінійного програмування:* знайти $X^* = \{x_j\}_{j=1}^n$, при яких

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i=\overline{1,m}),$$

$$x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,n}).$$

5. Знайти $X^* = \{x_{ij}\}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, при яких

$$L(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

і які задовольняють обмеженням

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} = a_i,$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}).$$

Ця задача називається *двохіндексною аксіальною розподільчою задачею* і позначається $D_2 - A$. Вона розпадається на m одноіндексних задач виду:

знайти набір $X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}\}$, що надає

$$L_i(X_i)=\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} = a_i,$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad j=\overline{1,n}, \quad \forall i=\overline{1,m}.$$

6. Знайти набір $X = \{x_{ij}\}$, що надає

$$L(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i=\overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j=\overline{1,n},$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad j=\overline{1,n}, \quad i=\overline{1,m}.$$

Ця задача називається *двохіндексною біаксіальною транспортною задачею* і позначається T_2-2A. Задача T_2-2A допускає таке узагальнення: знайти $X=\{x_{ij}\}$, $j=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,m}$, при якому

$$L(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} = a_i \quad (i=\overline{1,m}),$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij}x_{ij} = b_j \quad (j=\overline{1,n}),$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad j=\overline{1,n}, \quad i=\overline{1,m}.$$

Ця задача називається *двохіндексною біаксіальною розподільчою задачею* і позначається D_2-2A.

8.2. Трипланарна транспортна задача

На практиці виникає задача складання плану транспортування деякого однорідного продукту від пунктів виробництва до пунктів споживання з використанням транспортних засобів різних типів, реалізація якого забезпечила б мінімальні транспортні затрати. Класичними методами розв'язати таку задачу неможливо, оскільки вартість транспортування одиниці продукту залежить не тільки від взаємного розміщення пунктів виробництва і споживання, але й від типу транспорту, і до звичайних транспортних обмежень додаються обмеження на кількість продукту, який перевозиться транспортними засобами даного типу.

Введемо такі позначення. *Пунктам виробництва* присвоїмо індекс $i \in I=\{1,2,\dots,m\}$, *пунктам споживання* — індекс $j \in J=\{1,2,\dots,n\}$, *типам транспортних засобів* — індекс $k \in K=\{1,2,\dots,p\}$. Нехай нам відомі наступні невід'ємні величини:

$a_i, i \in I$ — кількість (запас) продукції i-го пункту виробництва;

$b_j, j \in J$ — кількість продукції, необхідної j-му пункту споживання;

$c_k, k \in K$ — кількість продукції, яка може бути перевезена усіма одиницями транспорту k-го типу;

c_{ijk} — вартість транспортування одиниці продукту з i-го пункту виробництва в j-й пункт споживання транспортним засобом k-го типу.

Сукупність чисел $\{c_{ijk}\}, i \in I, j \in J, k \in K$ називається *трьохіндексною матрицею* розмірності $m \times n \times p$. Матрицю $\{c_{ijk}\}$ можна представити у вигляді *трьохвимірної числової решітки,* зображеної на рис. 8.1.

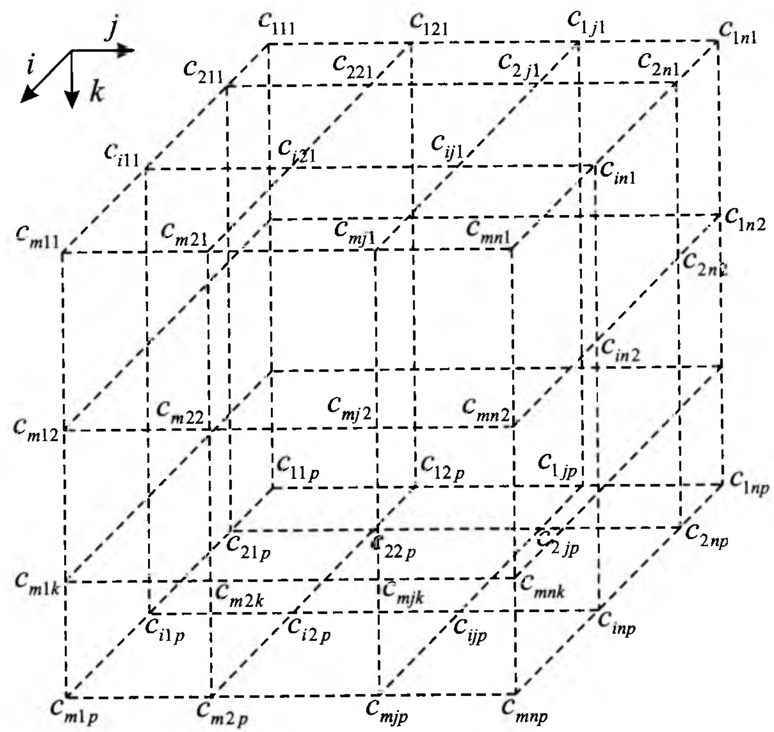


Рис. 8.1

Сукупність елементів матриці $\{c_{ijk}\}$ з фіксованим значенням одного індексу, наприклад i, називається *двохвимірним перерізом* орієнтації (j,k). Двохвимірний переріз – це звичайна двохіндексна матриця. Сукупність елементів матриці з фіксованими значеннями двох індексів, наприклад i, j, називається *одновимірним перерізом* орієнтації k. При цьому одновимірний переріз орієнтації i називають *стовпчиком*, орієнтації j — *рядком*, орієнтації k — *колонкою*.

Стовпчик матриці $\{c_{ijk}\}$ з фіксованими індексами j_0, k_0 запишеться так: $c^i_{j_0k_0} = \{c_{1j_0k_0}, c_{2j_0k_0}, ..., c_{mj_0k_0}\}$.

Нехай x_{ijk}, $i \in I, j \in J, k \in K$ є кількість продукції, яку планується перевезти з i-го центру виробництва в j-й пункт споживання транспортними засобами k-го типу. Тоді сукупність чисел $X = \{x_{ijk}\}$ називається *планом* транспортної задачі, а сам елемент матриці x_{ijk} — *компонентою плану.*

Вимоги до плану транспортування:

1. Із центрів виробництва має бути вивезений увесь запас продукції.
2. Попит усіх споживачів має бути задоволений у точній відповідності з їх потребами.
3. Кількість продукції, яка планується для перевезення k-го типу, має бути рівною можливостям засобів цього типу.

Все вищесказане приводить до таких рівностей:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk} = a_i\,,\ i \in I = \{1,2,...,m\}, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk} = b_j\,,\ i \in I = \{1,2,...,n\}\,, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = c_k\,,\ k \in K = \{1,2,...,p\}. \tag{3}$$

До цих умов додаємо вимогу невід'ємності кожної компоненти плану

$$x_{ijk} \geq 0 \quad \forall\ i \in I, j \in J, k \in K\,. \tag{4}$$

Вартість перевозки x_{ijk} одиниць продукту рівна $c_{ijk}x_{ijk}$. Підсумовуючи такі добутки за трьома індексами, одержуємо загальну величину транспортних затрат

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} c_{ijk}x_{ijk}\,. \tag{5}$$

Транспортна задача у випадку трьох змінних ставиться так: знайти набір чисел $X^* = \{x^*_{ijk}\}$, який мінімізує функцію (5) і задовольняє умови (1) — (4).

Задача (1) — (5) називається *трипланарною транспортною задачею* і позначається $T-3P$. Величини a_i, b_j, c_k, c_{ijk} називаються *параметрами* задачі $T-3P$, а набір $\{x_{ijk}\}$ — *набором змінних* задачі $T-3P$.

8.2.1. Властивості задачі $T-3P$

Набір змінних $\{x_{ijk}\}$, які задовольняють умовим (1) — (4), називається *допустимим планом*, або *планом задачі.* Кожному плану відповідає певне значення цільової функції. Допустимий план, який забезпечує мінімальне значення серед значень цільової функції на множині всіх допустимих планів, називається *оптимальним планом задачі.*

Теорема 1. Для того, щоб трипланарна задача (1) — (5) мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{k=1}^{p} c_k = S\,. \tag{6}$$

Умова (6) називається *умовою балансу*, а задача (1) — (5), для якої виконується умова (6), називається *збалансованою.* Таким чином, у збалансованій трипланарній транспортній задачі загальна кількість продукції, яка вивозиться з пунктів виробництва, співпадає із загальним попитом споживачів та із загальною вантажопідйомністю транспортних засобів.

Теорема 2 *(Про число лінійно незалежних рівнянь).*

Задача (1) — (3) містить $m+n+p-2$ лінійно незалежних рівнянь.

З теореми 2 випливає, що опорний план задачі $T-3P$ містить не більше, ніж $m+n+p-2$ додатних компонент. Якщо опорний план задачі (1) — (4) містить рівно $m+n+p-2$ додатних компонент, то такий план називається *невиродженим*, у протилежному випадку — *виродженим*.

Сформулюємо задачу двоїсту до $T-3P$. Введемо вектор двоїстих змінних

$V=\{u_1,u_2,\dots,u_m;v_1,v_2,\dots,v_n;w_1,w_2,\dots,w_p\}$. Двоїста задача формулюється так: знайти набір V, при якому

$$L(V)=\sum_{i=1}^{m}a_iu_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j+\sum_{k=1}^{p}c_kw_k\to\max$$

і виконуються обмеження

$$u_i+v_j+w_k<c_{ijk},\ i\in I,\ j\in J,\ k\in K.$$

Величини u_i,v_j,w_k називаються *потенціалами* задачі $T-3P$. Двоїсту задачу позначають $\tilde{T}-3P$.

Теорема 3. Нехай набори $X=\{x_{ijk}\}$ та $V=\{u_i,v_j,w_k\}$ — допустимі плани задач $T-3P$ і $\tilde{T}-3P$. Тоді справедливим є співвідношення

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}c_{ijk}x_{ijk}\ge\sum_{i=1}^{m}a_iu_i=\sum_{j=1}^{n}b_jv_j=\sum_{k=1}^{p}c_kw_k,$$

яке обертається в рівність тоді і тільки тоді, коли плани X та V оптимальні.

Теорема 4 (*Критерій оптимальності*).

Для оптимальності плану X та V задачі $T-3P$ необхідне і достатнє існування чисел $u_i, i\in I$, $v_j, j\in J$, $w_k, k\in K$ таких, щоб $u_i+v_j+w_k\le c_{ijk}$, $i\in I, j\in J, k\in K$, причому $u_i+v_j+w_k=c_{ijk}$, $(i,j,k)=\{(i,j,k):x_{ijk}>0\}$.

План $X=\{x_{ijk}\}$ можна записувати або у вигляді числової решітки (за аналогією з матрицею $C=\{c_{ijk}\}$), або у вигляді таблиці змінних T_x. У таблиці T_x значення змінних x_{ijk} записуються по діагоналі кожного блоку таблиці. Крапка, яка поставлена замість індекса, означає, що по цьому індексу проведено сумування. Наприклад, $x_{i\bullet k}=\sum_{j=1}^{n}x_{ijk}$. У нижньому рядку таблиці записуються числа b_j, у крайньому правому стовпчику — числа a_i, в правому нижньому куті — c_k. Таблиця змінних (табл. 8.1) T_x, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,p}$ має ось такий вигляд:

Таблиця 8.1

x_{111}, x_{112}, …, x_{11p}	x_{121}, x_{122}, …, x_{12p}	…	x_{1n1}, x_{1n2}, …, x_{1np}	$x_{1\cdot1}$, $x_{1\cdot2}$, …, $x_{1\cdot p}$	a_1
x_{211}, x_{212}, …, x_{21p}	x_{221}, x_{222}, …, x_{22p}	…	x_{2n1}, x_{2n2}, …, x_{2np}	$x_{2\cdot1}$, $x_{2\cdot2}$, …, $x_{2\cdot p}$	a_2
…	…		…	…	
x_{m11}, x_{m12}, …, x_{m1p}	x_{m21}, x_{m22}, …, x_{m2p}	…	x_{mn1}, x_{mn2}, …, x_{mnp}	$x_{m\cdot1}$, $x_{m\cdot2}$, …, $x_{m\cdot p}$	a_m
b_1	b_2	…	b_n	c_1 c_2 ⋯ c_p	

Аналогічно записується таблиця коефіцієнтів цільової функції c_{ijk} T_c і відповідних значень потенціалів із замінами $x_{ijk}\leftrightarrow c_{ijk}$, $a_i\leftrightarrow u_i$, $b_j\leftrightarrow v_j$, $c_k\leftrightarrow w_k$.

Розглянемо умови (1) — (3), наприклад, при $m=3, n=3, p=2$. Будемо мати

$$\begin{aligned}
&x_{111}+x_{112}+x_{121}+x_{122}+x_{131}+x_{132} &&=a_1,\\
&x_{211}+x_{212}+x_{221}+x_{222}+x_{231}+x_{232} &&=a_2,\\
&x_{311}+x_{312}+x_{321}+x_{322}+x_{331}+x_{332} &&=a_3,\\
&x_{111}+x_{112}+x_{211}+x_{212}+x_{311}+x_{312} &&=b_1,\\
&x_{121}+x_{122}+x_{221}+x_{222}+x_{321}+x_{322} &&=b_2,\\
&x_{131}+x_{132}+x_{231}+x_{232}+x_{331}+x_{332} &&=b_3,\\
&x_{111}+x_{121}+x_{131}+x_{211}+x_{221}+x_{231}+x_{311}+x_{321}+x_{331} &&=c_1,\\
&x_{112}+x_{122}+x_{132}+x_{212}+x_{222}+x_{232}+x_{312}+x_{322}+x_{332} &&=c_2.
\end{aligned}$$

На основі умов (7) відповідну числову решітку формуємо за таким правилом. Малюємо паралелепіпед, потім вибираємо напрями i, j, k, і згідно з вибраним напрямом проставляємо x_{ijk} та відомі числа a_i, b_j, c_k. У результаті одержуємо числову решітку, зображену на рис. 8.2:

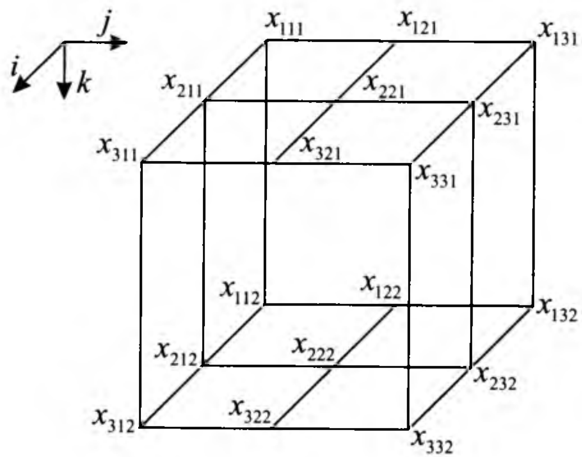


Рис. 8.2

Цю числову решітку ще подається у вигляді (рис. 8.3):

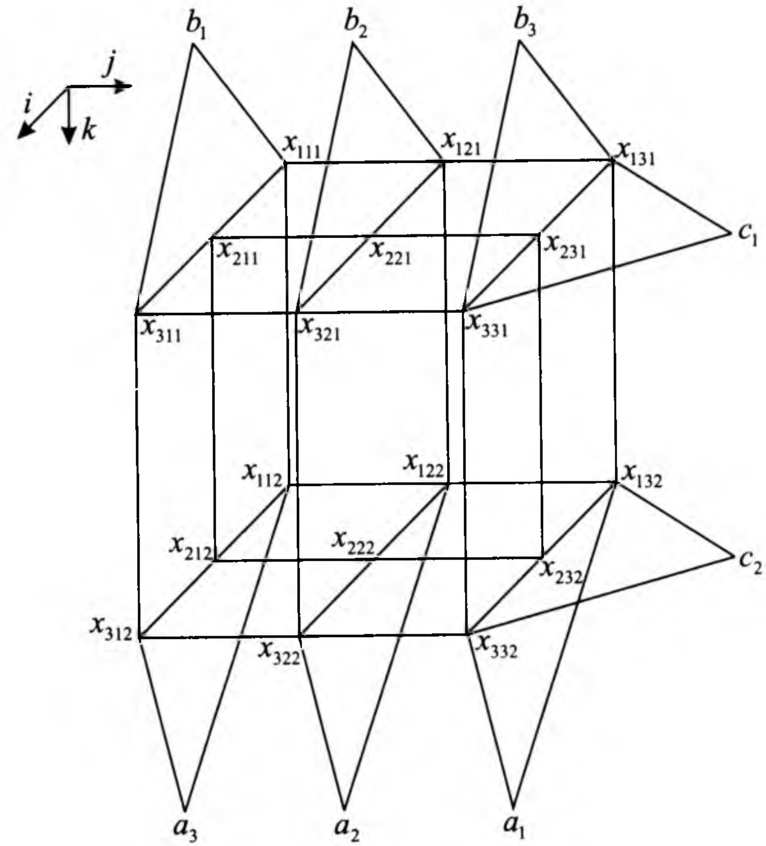


Рис. 8.3

Окрім виписаної вище числової решітки, обмеження (7) можна скомпонувати в таку таблицю (табл.8.2).

Таблиця 8.2

	i	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	R
	j	1	1	2	2	3	3	1	1	2	2	3	3	1	1	2	2	3	3	
	k	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	
1	E_1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a_1
2		0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	a_2
3		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	a_3
4	E_2	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	b_1
5		0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	b_2
6		0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	b_3
7	E_3	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	c_1
8		0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	c_2

Вектор вільних членів системи обмежень (7) позначимо як R, а матрицю коефіцієнтів при невідомих — як Π. Матриця Π є сукупністю вектор-стовпчиків P_{ijk}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,p}$ або $\Pi=\{P_{111},P_{112},...,P_{mnp}\}$.

8.2.2. Побудова початкового опорного плану трипланарної транспортної задачі

Метод північно-західного кута, який використовується для розв'язання двохвимірної транспортної задачі, допускає узагальнення на випадок трьох і більше індексів. У випадку трьох індексів метод північно-західного кута називається *методом послідовного розподілу*. Алгоритм цього методу є таким.

Вибираємо довільний елемент $x_{i_1j_1k_1}$ матриці $X=\{x_{ijk}\}$ і покладаємо $x_{i_1j_1k_1}=\min\{a_{i_1},b_{j_1},c_{k_1}\}$. Елемент $x_{i_1j_1k_1}$ входить у три обмеження:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}x_{i_1jk}=a_{i_1};\quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}x_{ij_1k}=b_{j_1};\quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ijk_1}=c_{k_1}.$$

Якщо прийняти для визначеності $\min\{a_{i_1},b_{j_1},c_{k_1}\}=a_{i_1}$, то перше з

обмежень буде виконано, а для двох інших виконуються нерівності типу "<". Введемо $b'_{j_1}=b_{j_1}-a_{i_1}$; $c'_{k_1}=c_{k_1}-a_{i_1}$. Прийнявши значення інших змінних в перерізі $X_{i_1}^{jk}=\{x_{i_1jk}\}_{j=1,k=1}^{n,p}$ рівними нулю, можна виключити цей переріз із матриці $X=\{x_{ijk}\}$, зменшивши таким чином розмірність матриці X на одиницю. В результаті одержимо матрицю розмірності $(m-1)\times n\times p$ і новий вектор обмежень

$$R'=\{a_1,...,a_{i-1},a_{i+1},...,a_m,b_1,...,b_{j_1},...,b_k,c_1,...,c_{k_1},...,c_p\}.$$

Вказана процедура може бути продовжена. На $(v+1)$-му кроці обчислювальна процедура проводиться так:

$$x_{i_{v+1},j_{v+1},k_{v+1}}^{(v+1)}=\min\{a_{i_{v+1}}^{(v)},b_{j_{v+1}}^{(v)},c_{k_{v+1}}^{(v)}\}=d_v;\quad a_{i_{v+1}}^{(v+1)}=a_{i_{v+1}}^{(v)}-d_v;$$

$$b_{j_{v+1}}^{(v+1)}=b_{j_{v+1}}^{(v)}-d_v;\quad c_{k_{v+1}}^{(v+1)}=c_{k_{v+1}}^{(v)}-d_v;$$

$$i_{v+1}=\begin{cases} i_v+1, \text{ якщо } dv=a_{i_{v+1}}^{(v)},\\ i_v, \text{ в протилежному випадку;}\end{cases}$$

$$j_{v+1}=\begin{cases} j_v+1, \text{ якщо } dv=b_{j_{v+1}}^{(v)},\\ j_v, \text{в протилежному випадку;}\end{cases}$$

$$k_{v+1}=\begin{cases} k_v+1, \text{ якщо } dv=c_{k_{v+1}}^{(v)},\\ k_v, \text{в протилежному випадку, де } v=0,1,...\end{cases}$$

Приклад. Знайти початковий опорний план трипланарної задачі

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{3}c_{ijk}x_{ijk}\to\min,\ x_{ijk}\ge 0,\ i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,4};\ k=\overline{1,3}$$

при таких обмеженнях:

$$\begin{aligned}
&x_{111}+x_{112}+x_{113}+x_{121}+x_{122}+x_{123}+x_{131}+x_{132}+x_{133}+x_{141}+x_{142}+x_{143} &&=7,\\
&x_{211}+x_{212}+x_{213}+x_{221}+x_{222}+x_{223}+x_{231}+x_{232}+x_{233}+x_{241}+x_{242}+x_{243} &&=7,\\
&x_{311}+x_{312}+x_{313}+x_{321}+x_{322}+x_{323}+x_{331}+x_{332}+x_{333}+x_{341}+x_{342}+x_{343} &&=16,\\
&x_{111}+x_{112}+x_{113}+x_{211}+x_{212}+x_{213}+x_{311}+x_{312}+x_{313} &&=1,\\
&x_{121}+x_{122}+x_{123}+x_{221}+x_{222}+x_{223}+x_{321}+x_{322}+x_{323} &&=12,\\
&x_{131}+x_{132}+x_{133}+x_{231}+x_{232}+x_{233}+x_{331}+x_{332}+x_{333} &&=9,\\
&x_{141}+x_{142}+x_{143}+x_{241}+x_{242}+x_{243}+x_{341}+x_{342}+x_{343} &&=8,\\
&x_{111}+x_{121}+x_{131}+x_{141}+x_{211}+x_{221}+x_{231}+x_{241}+x_{311}+x_{321}+x_{331}+x_{341} &&=3,\\
&x_{112}+x_{122}+x_{132}+x_{142}+x_{212}+x_{222}+x_{232}+x_{242}+x_{312}+x_{322}+x_{332}+x_{342} &&=5,\\
&x_{113}+x_{123}+x_{133}+x_{143}+x_{213}+x_{223}+x_{233}+x_{243}+x_{313}+x_{323}+x_{333}+x_{343} &&=22.
\end{aligned}$$

Розв'язання. Відповідна числова решітка буде такою (рис. 8.4):

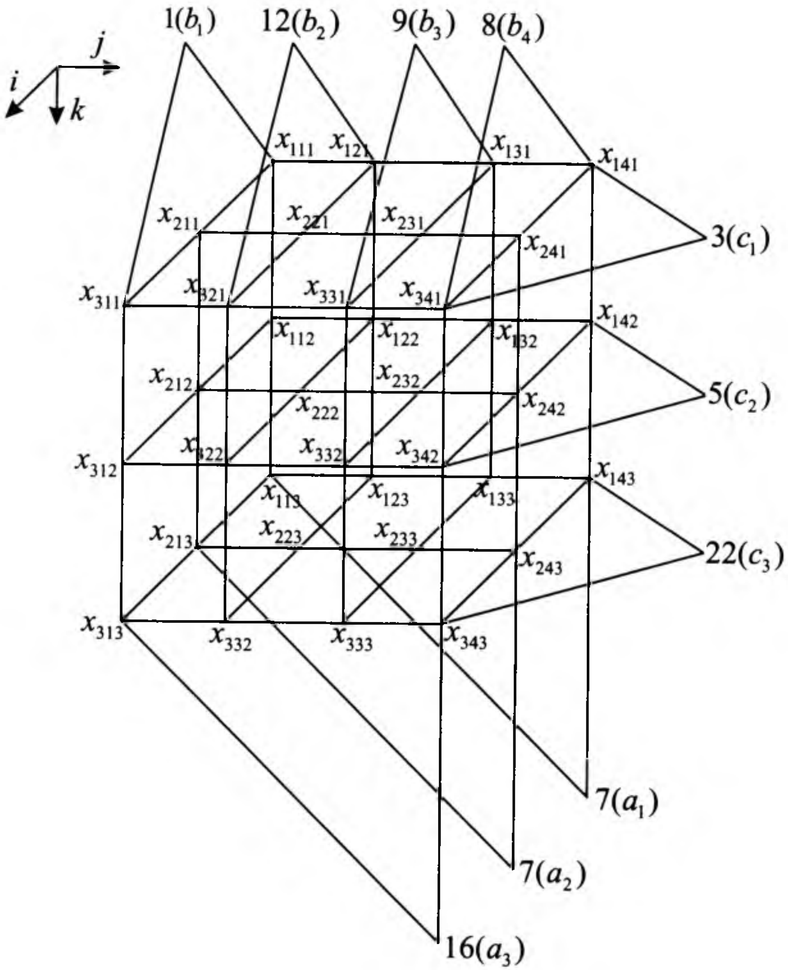


Рис. 8.4.

Відповідна таблиця T_x (табл. 8.3) набуде вигляду:

Таблиця 8.3

i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	R
j	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	
k	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
E_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																									7
													1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1													7
																									1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	16
E_2	1	1	1										1	1	1										1	1	1										1
				1	1	1										1	1	1										1	1	1							12
							1	1	1										1	1	1										1	1	1				9
										1	1	1										1	1	1										1	1	1	8
E_3	1			1			1			1			1			1			1			1			1			1			1			1			3
		1			1			1			1			1			1			1			1			1			1			1			1		5
			1			1			1			1			1			1			1			1			1			1			1			1	22

У нашому випадку
$a=(a_1,a_2,a_3)=(7,7,16)$; $b=(b_1,b_2,b_3,b_4)=(1,12,9,8)$;
$c=(c_1,c_2,c_3)=(3,5,22)$.

$$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{4}b_j=\sum_{k=1}^{3}c_k=30.$$

Задана трипланарна задача є збалансованою, а отже, має розв'язок. Знаходимо його методом послідовного розподілу.

1. Фіксуємо індекси $i_1=1$, $j_1=1$, $k_1=1$ і покладаємо

$$x_{111}=d_1=\min\{a_1,b_1,c_1\}=\min\{7,1,3\}=1,$$

звідки $a_1^{(1)}=a_1-d_1=7-1=6$;

$$b_1^{(1)}=b_1-d_1=1-1=0;\ c_1^{(1)}=c_1-d_1=3-1=2.$$

Далі покладаємо $i_2=1$, $j_2=j+1$, $k_2=1$. Елемент x_{111} вводимо в таблицю, а інші значення перерізу x_1^{ik} прирівнюємо до нуля, тобто
$X_1^{ik}=\{x_{111},x_{112},x_{113},x_{211},x_{212},x_{213},x_{311},x_{312},x_{313}\}=$
$=\{1,0,0,0,0,0,0,0,0\}$.

2. На другому кроці покладаємо
$x_{121}=d_2=\min\{a_1,b_2,c_1\}=\min\{6,12,2\}=2$.

Отже, $d_2=c_1=2$. Тоді
$a_1^{(2)}=a_1^{(1)}-d_2=6-2=4$; $b_2^{(2)}=b_2-d_2=12-2=10$;
$c_2^{(2)}=c_1^{(2)}-d_2=2-2=0$.

Далі $i_3=1$, $j_3=2$, $k_3=k_2+1=1+1=2$. Вводимо в таблицю T_x елемент x_{121}, інші елементи перерізу x_1^{ik} прирівнюємо до нуля:

$X_1^{ij}=\{x_{111},x_{121},x_{131},x_{141},x_{211},x_{221},x_{231},x_{241},x_{311},x_{321},x_{331},x_{341}\}=$
$=\{1,2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\}$.

Далі $x_{122}=d_3=\min\{a_1,b_2,c_2\}=\min\{4,10,5\}=4$.

3. $a_1^{(3)}=a_1^{(2)}-d_3=4-4=0$; $b_2^{(3)}=b_2^{(2)}-d_3=10-4=6$;
$c_2^{(3)}=c_2-d_3=5-4=1$.
$d_3=a_1$, звідси $i_4=i_3+1=2$; $j_4=2$; $k_4=2$.
$X_1^{jk}=\{x_{111},x_{112},x_{113},x_{121},x_{122},x_{123},x_{131},x_{132},x_{133},x_{141},x_{142},x_{143}\}=$
$=\{1,0,0,2,4,0,0,0,0,0,0,0\}$.

4. $x_{222}=d_4=\min\{a_2,b_2,c_2\}=\min\{7,6,1\}=1$, звідки $d_4=c_2=1$.

$a_2^{(4)}=a_2-d_4=7-1=6$; $b_2^{(4)}=6-1=5$; $c_2^{(4)}=1-1=0$. Оскільки $d_4=c_2$, то $i_5=2$; $j_5=2$; $k_5=3$.

5. $x_{223}=d_5=\min\{a_2,b_2,c_3\}=\min\{6,5,22\}=5$,
$a_2^{(5)}=6-5=1$; $b_2^{(4)}=6-1=5$; $c_2^{(5)}=22-5=17$; $i_6=2$; $j_6=3$; $k_6=3$.

6. $x_{233}=d_6=\min\{a_2,b_3,c_3\}=\min\{1,9,17\}=1$,
$a_2^{(6)}=0$; $b_3^{(6)}=8$; $c_3^{(6)}=16$; $i_7=2+1=3$; $j_7=3$; $k_7=3$.

7. $x_{333}=d_7=\min\{a_3,b_3,c_3\}=\min\{16,8,16\}=8$,
$a_3^{(7)}=8$; $b_3^{(7)}=0$; $c_3^{(7)}=8$; $i_8=3$; $j_8=3+1=4$; $k_8=3$.

8. $x_{343}=d_8=\min\{a_3,b_4,c_3\}=\min\{8,8,8\}=8$,
звідки $a_3^{(8)}=b_4^{(8)}=c_3^{(8)}=0$.

Опорний план трипланарної задачі знайдено. Він містить рівно $m+n+p-2=8$ додатних компонент. Геометрично знайдений опорний план зображено на рис. 8.5.

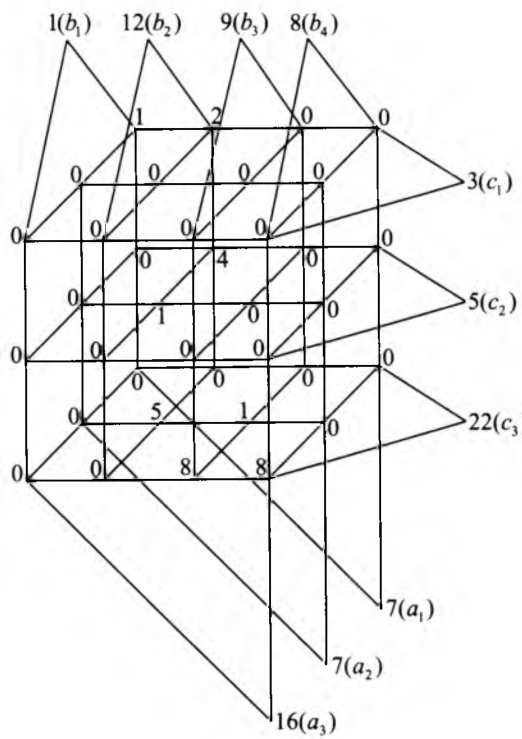


Рис. 8.5

Таблиця значень T_x (табл. 8.4) з урахуванням проміжкових обчислень записується так:

Таблиця 8.4

$i \backslash j$	1	2	3	4					$a_i^{(0)}$	$a_i^{(1)}$	$a_i^{(2)}$	$a_i^{(3)}$	$a_i^{(4)}$	$a_i^{(5)}$	$a_i^{(6)}$	$a_i^{(7)}$
1	1 0 0	2 4 0	0 0 0	0 0 0					7	6	4	0	0	0	0	0
2	0 0 0	0 1 5	0 0 1	0 0 0					7	7	7	7	6	1	0	0
3	0 0 0	0 0 0	0 0 8	0 0 8					16	16	16	16	16	16	16	8
$b_j^{(0)}$	1	12	9	8	$c_k^{(0)}$	3	5	22								
$b_j^{(1)}$	0	12	9	8	$c_k^{(1)}$	2	5	22								
$b_j^{(2)}$	0	10	9	8	$c_k^{(2)}$	0	5	22								
$b_j^{(3)}$	0	6	9	8	$c_k^{(3)}$	0	1	22								
$b_j^{(4)}$	0	5	9	8	$c_k^{(4)}$	0	0	22								
$b_j^{(5)}$	0	0	9	8	$c_k^{(5)}$	0	0	17								
$b_i^{(6)}$	0	0	8	8	$c_k^{(6)}$	0	0	16								
$b_j^{(7)}$	0	0	0	8	$c_k^{(7)}$	0	0	8								

8.2.3. Метод потенціалів розв'язання трипланарної транспортної задачі

Метод потенціалів розв'язання трипланарної транспортної задачі включає в себе попередній етап, на якому знаходиться початковий опорний план задачі, та скінчене число однотипних ітерацій.

У першій ітерації використовується початковий опорний план $X^{(0)} = \{x_{ijk}^{(0)}\}$ та матриця $C^{(0)} = C = \{c_{ijk}^{(0)}\}$. Нехай в $(q-1)$-й ітерації одержано опорний план $X^{(q-1)} = \{x_{ijk}^{(q-1)}\}$ та матрицю потенціалів $C^{(q-1)} = \{c_{ijk}^{(q-1)}\}$.

Трійку значень індексів i, j, k будемо називати *індексним елементом.* Множину $R_{q-1} = \{(i,j,k): x_{ijk}^{(q-1)} > 0\}$ будемо називати *множиною суттєвих індексних елементів.* Для невироджених задач число елементів множини R_{q-1} дорівнює $m+n+p-2$.

Алгоритм** q**-вої ітерації.

Крок 1. Для перевірки оптимальності плану $X^{(q-1)}$ розв'язуємо систему рівнянь

$$u_i + v_j + w_k = c_{ijk}^{(q-1)}, \ (i,j,k) \in R_{q-1}. \qquad (8)$$

Ця система складається з $m+n+p-2$ рівнянь і містить $m+n+p$ невідомих, тобто є недовизначеною. Для цього дві довільні невідомі системи (8) прирівнюють до нуля. Наприклад, $u_{i_0} = v_{j_0} = 0$.

Нехай $V = \{u_1, u_2, ..., u_m, v_1, v_2, ..., v_n, w_1, w_2, ..., w_p\}$ — розв'язок системи (8). Числа $u_i,\ i \in I,\ \ v_j,\ j \in J,\ \ w_k, k \in K$ називаються *потенціалами* задачі $T-3P$. Відповідно до теореми 4, ознакою оптимального плану $X^{(q-1)} = \{x_{ijk}^{(q-1)}\}$ є виконання умов

$$c_{ijk}^{(q)} = c_{ijk}^{(q-1)} - (u_i + v_j + w_k) \geq 0, \quad (i,j,k) \in E.$$

Якщо хоча б одна із цих умов не виконується, то переходять до наступного кроку.

Крок 2. Вводимо в попередній план компоненту $x_{i^* j^* k^*}$, для якої $c_{i^* j^* k^*}^{(q)} = \min\limits_{(i,j,k)\in E} \{c_{ijk}^{(q)}\}$. Робиться це так. Розв'язуємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих θ_{ijk}

$$\sum_{(i,j,k)\in R_{q-1}} P_{ijk}\theta_{ijk} = -P_{i^* j^* k^*}. \qquad (9)$$

Тут P_{ijk} — вектор-стовпчики з матриці $П$. Система (9) містить $m+n+p$ рівнянь з $m+n+p-2$ невідомими. Однак вона не є невизначеною, оскільки за теоремою 2 два рівняння є наслідком інших і можуть бути відкинуті.

Нехай θ'_{ijk}, $(i,j,k)\in R_{q-1}$ — розв'язок системи (9). Введемо підмножину $R^{-}_{q-1}\left\{(i,j,k):\theta'_{ijk}<0\right\}$, $R^{-}_{q-1}\subset R_{q-1}$. Знайдемо величину

$$\theta_0^{(q)} = \max_{(i,j,k)\in R^{-}_{q-1}} \left\{ \frac{x_{ijk}^{(q-1)}}{\theta'_{ijk}} \right\}.$$

Компоненти нового опорного плану $X^{(q)}=\left\{x_{ijk}^{(q)}\right\}$ знаходяться за формулою

$$x_{ijk}^{(q)} = x_{ijk}^{(q-1)} - \theta_{ijk}^{(q)}\cdot\theta_0^{(q)},$$

де

$$\theta_{ijk}^{(q)} = \begin{cases} 1, & (i,j,k)=(i^*,j^*,k^*), \\ \theta'_{ijk}, & (i,j,k)\in R_{q-1}, \\ 0, & (i,j,k)\notin\left\{R_{q-1}\cup(i^*,j^*,k^*)\right\}. \end{cases}$$

Після виконання другого кроку здійснюється перехід до наступної $(q+1)$-ї ітерації. Ітерації продовжуються доти, поки не буде виконано критерій оптимальності $c_{ijk}^{(r)}-(u_i+v_j+w_k)\geq 0,\quad (i,j,k)\in E$.

Приклад. Знайти набір $X=\left\{x_{ijk}\right\}$, який мінімізує цільову функцію

$$L(X)=5x_{111}+32x_{112}+12x_{121}+10x_{122}+11x_{131}+$$
$$+4x_{211}+9x_{212}+21x_{221}+5x_{222}+10x_{231}+8x_{232}\to\min$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned}
&x_{111}+x_{112}+x_{121}+x_{122}+x_{131}+x_{132} &&=1,\\
&x_{211}+x_{212}+x_{221}+x_{222}+x_{231}+x_{232} &&=8,\\
&x_{111}+x_{112}+x_{211}+x_{212} &&=3,\\
&x_{121}+x_{122}+x_{221}+x_{222} &&=2,\\
&x_{131}+x_{132}+x_{231}+x_{232} &&=4,\\
&x_{111}+x_{121}+x_{131}+x_{211}+x_{221}+x_{231} &&=2,\\
&x_{112}+x_{122}+x_{132}+x_{212}+x_{222}+x_{232} &&=7,
\end{aligned}$$

$$x_{ijk}\geq 0,\ i=1,2;\ j=1,2,3;\ k=1,2.$$

Розв'язання. Матрицю $C=\left\{c_{ijk}\right\}$ подано на рис. 8.6:

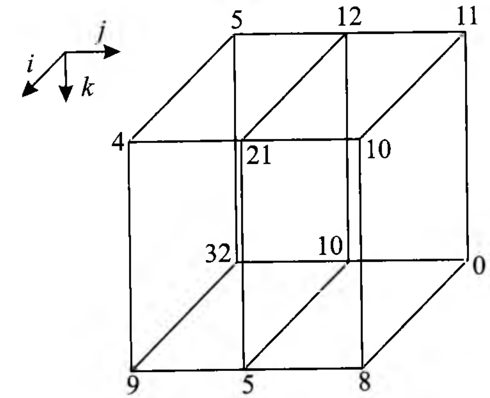


Рис. 8.6

Набір $X=\left\{x_{ijk}\right\}$ представимо у вигляді числової решітки (рис. 8.7):

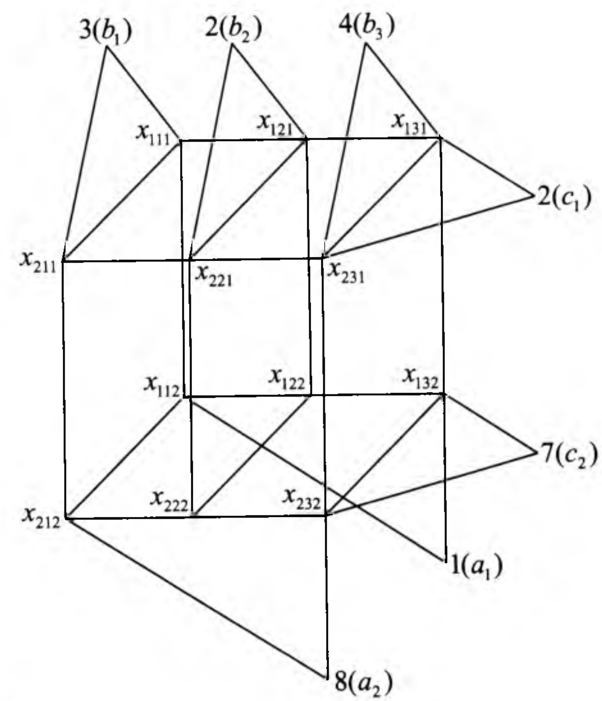


Рис. 8.7

Знаходимо початковий опорний план методом послідовного розподілу, оскільки умова балансу виконується і $S=9$.

1) $x_{111}=\min\{a_1,b_1,c_1\}=\min\{1,3,2\}=1$; $d_1=a_1$; $a_1^{(1)}=1-1=0$; $b_1^{(1)}=3-1=2$; $c_1^{(1)}=2-1=1$.

$$X_1^{jk}=\{x_{111},x_{112},x_{121},x_{122},x_{131},x_{132}\}=\{1,0,0,0,0,0\}.$$

2) $i_2=2$; $j_2=1$; $k_2=1$; $x_{211}=\min\{a_2,b_1,c_1\}=\min\{8,2,1\}=1$; $d_2=c_1$; $a_2^{(2)}=8-1=7$; $b_1^{(2)}=2-1=1$; $c_1^{(2)}=1-1=0$.

$$X_1^{ij}=\{x_{111},x_{121},x_{131},x_{211},x_{221},x_{231}\}=\{1,0,0,1,0,0\}.$$

3) $i_2=2$; $j_2=1$; $k_2=2$; $x_{212}=\min\{a_2,b_1,c_2\}=\min\{7,1,7\}=1$; $d_3=b_1$; $a_2^{(3)}=7-1=6$; $b_1^{(3)}=1-1=0$; $c_2^{(3)}=7-1=6$.

$$X_1^{ik}=\{x_{111},x_{112},x_{211},x_{212}\}=\{1,0,1,1\}.$$

4) $i_3=2$; $j_3=2$; $k_3=2$; $x_{222}=\min\{a_2,b_2,c_2\}=\min\{6,2,6\}=2$; $a_2^{(4)}=4$; $b_2^{(4)}=0$; $c_2^{(4)}=4$.

$$X_2^{ik}=\{x_{121},x_{221},x_{122},x_{222}\}=\{0,0,0,2\}.$$

5) $i_4=2$; $j_4=3$; $k_4=2$; $x_{232}=\min\{a_2,b_3,c_2\}=\min\{4,4,4\}=4$.

У вигляді числової решітки початковий опорний план запишемо так (рис. 8.8):

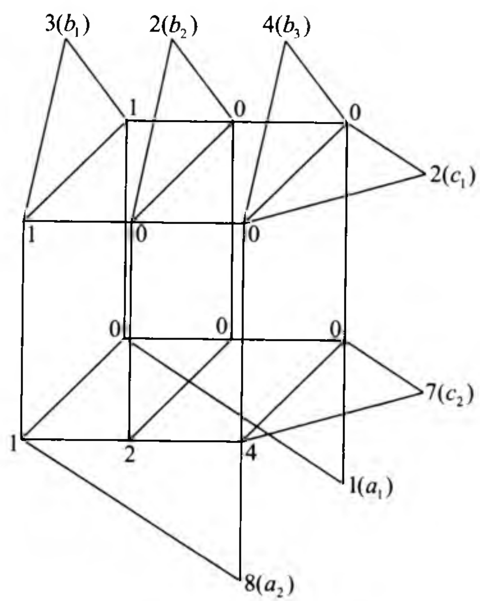


*Рис.*8.8

У вигляді таблиці T_x (табл. 8.5) початковий опорний план виглядатиме так:

Таблиця 8.5

$i \backslash j$	1	2	3				$a_i^{(0)}$	$a_i^{(1)}$	$a_i^{(2)}$	$a_i^{(3)}$	$a_i^{(4)}$	$a_i^{(5)}$
1	1 0	0 0	0 0				1	0	0	0	0	0
2	1 1	0 2	0 4				8	8	7	6	4	0
$b_j^{(0)}$	3	2	4	$c_k^{(0)}$	2	7						
$b_j^{(1)}$	2	2	4	$c_k^{(1)}$	1	7						
$b_j^{(2)}$	1	2	4	$c_k^{(2)}$	0	7						
$b_j^{(3)}$	0	2	4	$c_k^{(3)}$	0	6						
$b_j^{(4)}$	0	0	4	$c_k^{(4)}$	0	4						
$b_j^{(5)}$	0	0	0	$c_k^{(5)}$	0	0						

У даному випадку $L(X^{(0)})=60$ і множина

$$R_0=\{(1,1,1),(2,1,1),(2,1,2),(2,2,2),(2,3,2)\}.$$

І ітерація.

Крок 1. Перевіряємо план $X^{(0)}$ на оптимальність, для чого розв'язуємо систему рівнянь $u_i+v_j+w_k=c_{ijk}$, $(i,j,k)\in R_0$. Одержуємо

$$u_1+v_1+w_1=5,$$
$$u_2+v_1+w_1=4,$$
$$u_2+v_1+w_2=9,$$
$$u_2+v_2+w_2=5,$$
$$u_2+v_3+w_2=8.$$

Поклавши $v_1=w_1=0$, знаходимо

$$u_1=5;\ u_2=4;\ w_2=5;\ v_2=-4;\ v_3=-1.$$

Далі обчислюємо різниці

$$c_{ijk}^{(q)} = c_{ijk}^{(q-1)} - (u_i + v_j + w_k) \geq 0, \quad (i,j,k) \in E .$$

У нашому випадку

$$c_{111}^{(1)} = c_{111} - (u_1 + v_1 + w_1) = 5 - 5 = 0,$$

$$c_{112}^{(1)} = c_{112} - (u_1 + v_1 + w_2) = 32 - 10 = 22 .$$

Аналогічно одержуємо

$$c_{121}^{(1)} = 11;\ c_{122}^{(1)} = 4;\ c_{131}^{(1)} = 7;\ c_{132}^{(1)} = -9;\ c_{211}^{(1)} = 0;\ c_{212}^{(1)} = 0;$$

$$c_{221}^{(1)} = 21;\ c_{222}^{(1)} = 0;\ c_{231}^{(1)} = 10; c_{232}^{(1)} = 0 .$$

Одержаний план $X^{(0)}$ не оптимальний, бо $c_{132}^{(1)} = -9 < 0$.

Крок 2. Знаходимо мінімальний елемент серед $\{c_{ijk}^{(1)}\}$. Ним буде елемент $c_{132}^{(1)} = -9$. Отже, $(i^* j^* k^*) = (1\,3\,2)$. Далі розв'язуємо систему рівнянь $\sum\limits_{(i,j,k)\in R_{q-1}} P_{ijk}\theta_{ijk} = -P_{i^* j^* k^*}$. Виписуємо таблицю обмежень (табл. 8.6):

Таблиця 8.6

	i	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	R_1
	j	1	1	2	2	3	3	1	1	2	2	3	3	
	k	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	
E_1		1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1
		0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	8
E_2		1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	3
		0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	2
		0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	4
E_3		1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	2
		0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	7

Вектор-стовпчик $(i^* j^* k^*) = (1\,3\,2)$ має вигляд: $(1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$. Систему рівнянь складаємо на множині R_0 з умов

$$\begin{aligned}
&\theta_{111} &&= -1,\\
&\theta_{211} + \theta_{212} + \theta_{222} + \theta_{232} &&= 0,\\
&\theta_{111} + \theta_{211} + \theta_{212} &&= 0,\\
&\theta_{222} &&= 0,\\
&\theta_{232} &&= -1,\\
&\theta_{111} + \theta_{211} &&= 0,\\
&\theta_{212} + \theta_{222} + \theta_{232} &&= -1.
\end{aligned}$$

Розв'язком системи рівнянь буде

$$\theta_{111} = -1; \theta_{222} = 0; \theta_{232} = -1; \theta_{211} = 1; \theta_{212} = 0 .$$

Тоді множина R_0^- включатиме два елементи $R_0^- = \{(1,1,1), (2,3,2)\}$. Знаходимо $\theta_0^{(1)} = \max\limits_{(i,j,k)\in R_0^-} \left\{ \dfrac{x_{111}^{(0)}}{\theta_{111}}, \dfrac{x_{232}^{(0)}}{\theta_{232}} \right\} = \max\{-1; -4\} = -1$. Обчислюємо $\theta_{ijk}^{(1)}$:

$$\theta_{ijk}^{(q)} = \begin{cases} 1, & (i,j,k) = (1,3,2),\\ \theta_{ijk}, & (i,j,k) \in R_0,\\ 0, & (i,j,k) \notin \{R_0 \cup (1,3,2)\}. \end{cases}$$

Оскільки $\theta_{212} = 0$ і $\theta_{222} = 0$, то замінюємо 4 компоненти за формулою $x_{ijk}^{(1)} = x_{ijk}^{(0)} - \theta_{ijk}^{(1)} \cdot \theta_0^{(1)}$. Одержуємо:

$$x_{111}^{(1)} = x_{111}^{(0)} - \theta_{111}^{(1)} \cdot \theta_0^{(1)} = 1 - (-1)(-1) = 1 - 1 = 0;$$

$$x_{211}^{(1)} = x_{211}^{(0)} - \theta_{211}^{(1)} \cdot \theta_0^{(1)} = 1 + 1 = 2;$$

$$x_{232}^{(1)} = x_{232}^{(0)} - \theta_{232}^{(1)} \cdot \theta_0^{(1)} = 4 - (-1)(-1) = 3 ;\ x_{132}^{(1)} = x_{132}^{(0)} - \theta_{132}^{(1)} \cdot \theta_0^{(1)} = 0 + 1 = 1 .$$

Таблиця T_x (табл. 8.7) для плану $X^{(1)}$ набуде такого вигляду:

Таблиця 8.7

0 / 0	0 / 0	0 / 1	0 / 1	1	1	a_1
2 / 1	0 / 2	0 / 3	2 / 6	6	8	a_2
3	2	4	2	7		
b_1	b_2	b_3	c_1	c_2		

II ітерація.

Крок 1. Перевіряємо план $X^{(1)}$ на оптимальність, для чого складаємо систему рівнянь

$$u_i + v_j + w_k = c_{ijk}^{(1)},\ (i,j,k) \in R_1,$$

$$R_1 = \{(1,3,2),(2,1,1),(2,1,2),(2,2,2),(2,3,2)\}.$$

Одержуємо

$$u_1 + v_3 + w_2 = -9,$$
$$u_2 + v_1 + w_1 = 0,$$
$$u_2 + v_1 + w_2 = 0,$$
$$u_2 + v_2 + w_2 = 0,$$
$$u_2 + v_3 + w_2 = 0.$$

Поклавши $v_3 = w_2 = 0$, знаходимо $u_1 = -9; u_2 = 0; v_1 = w_1 = 0$. Далі обчислюємо різниці $c_{ijk}^{(2)} = c_{ijk}^{(1)} - (u_i + v_j + w_k)$, $(i,j,k) \in E$. Одержуємо

$$c_{111}^{(2)} = 9,\ c_{112}^{(2)} = 31,\ c_{121}^{(2)} = 20;\ c_{122}^{(2)} = 13;$$

$$c_{131}^{(2)} = 16;\ c_{132}^{(2)} = 0;\ c_{211}^{(2)} = 0;\ c_{212}^{(2)} = 0;\ c_{231}^{(2)} = 10; c_{232}^{(2)} = 0.$$

Оскільки всі різниці $c_{ijk}^{(2)} \geq 0$, то план $X^{(1)}$ — оптимальний. Відповідна числова решітка матиме наступний вигляд (рис. 8.9):

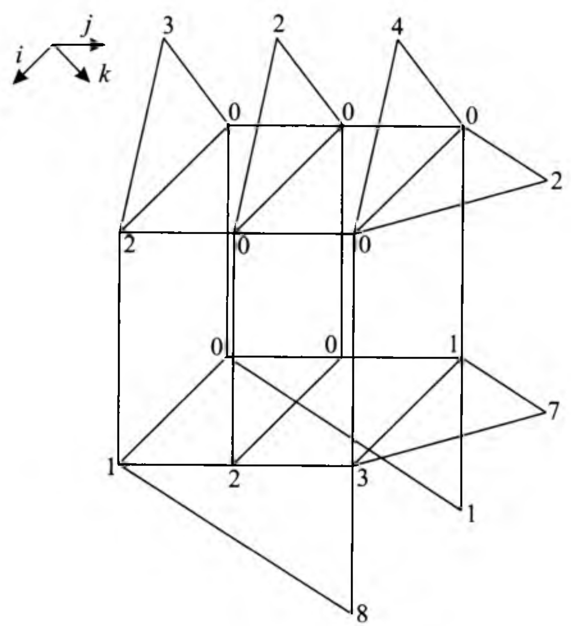


*Рис.*8.9

8.3. Наближені методи розв'язання трипланарних транспортних задач

Необхідність розробки та застосування наближених методів розв'язання трипланарних транспортних задач диктується такими причинами: 1) чисельні значення параметрів реальних транспортних задач, як правило, не є точними; 2) із збільшенням розмірності транспортних задач різко зростає трудоємкість їх розв'язку; 3) ефективний наближений алгоритм дозволяє одержувати опорний план, близький до оптимального.

8.3.1. Метод найменшого елемента в рядку

Розглянемо цей метод на прикладі, розв'язаному вище в пункті 8.2.2. Отже, нехай $i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4;\ k = 1,2,3$, а вектори обмежень $a = (7,7,16);\ b = (1,12,9,8),\ c = (3,5,22)$.

Ця транспортна задача може бути представлена так, як зображено на рис. 8.10 (у числовій решітці виписані значення матриці C).

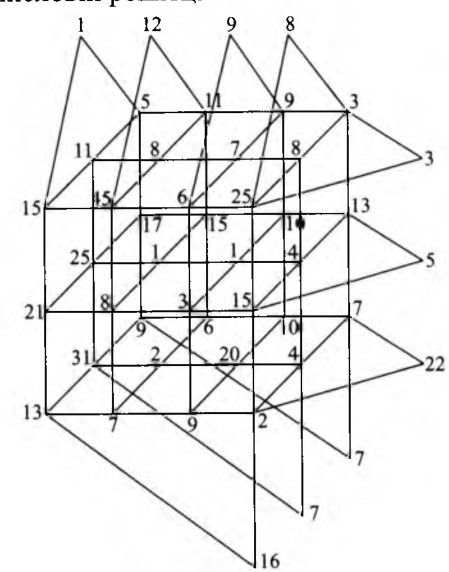


Рис. 8.10

1. У рядку c_{11}^j знаходимо перший ведучий індексний елемент із співвідношення

$$\min_j \{c_{1j1}\} = \min\{5, 11, 9, 3\} = 3 = c_{141}.$$

Обчислюємо $\min\{a_1^{(0)}, b_1^{(0)}, c_1^{(0)}\} = \min\{7, 8, 3\} = 3$. Приймаємо $x_{141} = 3$. З умови $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} x_{ij1} = 3$, всі $x_{ij1} = 0$ за винятком $x_{141} = 3$. Також $a_1^{(1)} = 7 - 3 = 4$; $b_1^{(1)} = 8 - 3 = 5$; $c_1^{(1)} = 3 - 3 = 0$.

2. Вибираємо рядок c_{12}^j і знаходимо

$$\min_j \{c_{1j2}\} = \min\{17, 15, 10, 13\} = 10 = c_{132}.$$

Відповідний

$$\min\{a_1^{(1)}, b_3^{(1)}, c_2^{(1)}\} = \min\{4, 9, 5\} = 4 = x_{132}.$$

За винятком x_{132}, всі інші елементи $x_{1jk} = 0$, а також

$$a_1^{(2)} = 0;\ b_3^{(2)} = 5;\ c_2^{(2)} = 1.$$

3. Вибираємо рядок c_{22}^j і обчислюємо

$$\min_j \{c_{2j2}\} = \min\{25, 1, 1, 4\} = 1 = c_{232}.$$

Відповідний

$$x_{232} = \min\{a_2^{(2)}, b_3^{(2)}, c_2^{(2)}\} = \min\{7, 5, 1\} = 1.$$

Решта $x_{ij2} = 0 \quad \forall (i, j) \neq (3, 2)$.

4. $\min_j \{c_{2j3}\} = \min\{31, 2, 20, 4\} = 2 = c_{223}$;

$x_{223} = \min\{a_2^{(3)}, b_3^{(3)}, c_3^{(3)}\} = \min\{6, 12, 22\} = 6$.

Всі інші $x_{2j3} = 0$.

5. $\min_j \{c_{3j3}\} = \min\{13, 7, 9, 2\} = 2 = c_{343}$; $x_{343} = \min\{16, 5, 16\} = 5$.

6. $\min_j \{c_{3j3}\} = \min\{13, 7, 9\} = 7 = c_{323}$; $x_{323} = \min\{11, 6, 11\} = 6$.

7. $x_{333} = 4$.

8. $x_{313} = 1$.

Після проведення обчислень отримаємо рис. 8.11.

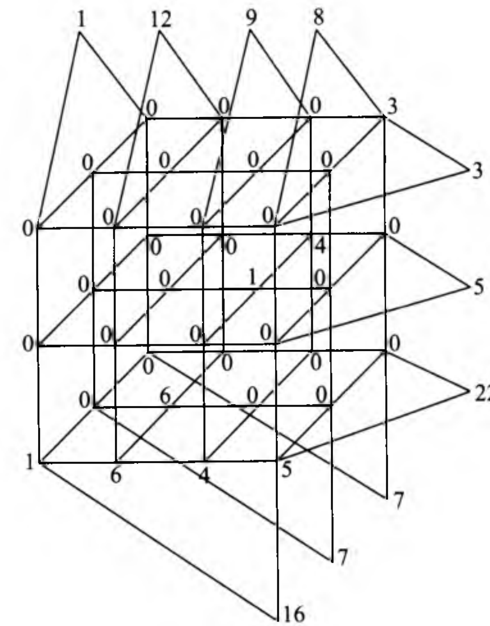


Рис. 8.11

Значення цільової функції $L(X_1) = 163$. Для опорного плану X_0, одержаного методом послідовного розподілу, $L(X_0) = 207$. Тобто, значення $L(X)$ зменшилося на 20%. Обчислення зручно проводити у вигляді таблиці (табл.8.8).

Таблиця 8.8

$i \backslash j$	1	2	3	4		a_i^0
1	5 0	11 0	9 0	3 3		7
	17 0	15 0	10 4	13 0		
	9 0	6 0	10 0	7 0		

Закінчення табл. 8.8

<table>
<tr><td>j / i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td colspan="3"></td><td>a_i^0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>11 0
25 0
31 0</td><td>8 0
1 0
2 6</td><td>7 0
1 1
20 0</td><td>8 0
4 0
4 0</td><td colspan="3"></td><td>7</td></tr>
<tr><td>3</td><td>15 0
21 0
13 1</td><td>45 0
8 0
7 6</td><td>6 0
3 0
9 4</td><td>25 0
15 0
2 5</td><td colspan="3">$\overbrace{\qquad\qquad}^{c_k^0}$</td><td>16</td></tr>
<tr><td>b_j^0</td><td>1</td><td>12</td><td>9</td><td>8</td><td>3</td><td>5</td><td>22</td><td></td></tr>
</table>

Проміжкові обчислення є такими (табл. 8.9):

Таблиця 8.9

$a_i^{(0)}$	7	7	16	$b_j^{(0)}$	1	12	9	8	$c_k^{(0)}$	3	5	22
$a_i^{(1)}$	4	7	16	$b_j^{(1)}$	1	12	9	5	$c_k^{(1)}$	0	5	22
$a_i^{(2)}$	0	7	16	$b_j^{(2)}$	1	12	5	5	$c_k^{(2)}$	0	1	22
$a_i^{(3)}$	0	6	16	$b_j^{(3)}$	1	12	4	5	$c_k^{(3)}$	0	0	22
$a_i^{(4)}$	0	0	16	$b_j^{(4)}$	1	6	4	5	$c_k^{(4)}$	0	0	16
$a_i^{(5)}$	0	0	11	$b_j^{(5)}$	1	6	4	0	$c_k^{(5)}$	0	0	11
$a_i^{(6)}$	0	0	5	$b_i^{(6)}$	1	0	4	0	$c_k^{(6)}$	0	0	5
$a_i^{(7)}$	0	0	1	$b_j^{(7)}$	1	0	0	0	$c_k^{(7)}$	0	0	1

8.3.2. Метод мінімального елемента в перерізі c_1^{jk}

Розв'яжемо цим методом попередній приклад. Вибираємо переріз c_1^{jk} і знаходимо в ньому ведучий елемент за правилом:

1. $\min\limits_{j,k}\{c_{1jk}\} = \min\{5, 11, 9, 3, 17, 15, 10, 13, 9, 10, 6, 7\} = 3 = c_{141}$. Відповідний

$$x_{141} = \min\{a_1^{(0)}, b_4^{(0)}, c_1^{(0)}\} = \min\{7, 8, 3\} = 3.$$

Оскільки $\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{4} x_{ij1} = 3$, то всі $x_{ij1} = 0$, якщо $(i, j) \neq (1, 4)$,

$a_1^{(1)} = 4;\ b_1^{(1)} = 5;\ c_1^{(1)} = 0$.

2. Продовжуємо пошук ведучого елемента в перерізі c_1^{jk} при $k = 2, 3$. Маємо $\min\{17, 15, 10, 13, 9, 6, 10, 7\} = 6 = c_{123}$. Відповідний

$$x_{123} = \min\{a_1^{(1)}, b_2^{(1)}, c_3^{(1)}\} = \min\{4, 12, 22\} = 4.$$

Решта $x_{1jk} = 0$ при $(j, k) \neq (2, 3)$, $a_1^{(2)} = 0;\ b_2^{(2)} = 8;\ c_3^{(2)} = 18$.

3. Переходимо до перерізу c_2^{jk}. Оскільки при $k = 1$ відповідні x_{ijk} вже визначені, підраховуємо

$$\min_{j,k}\{c_{2jk}\} = \min\{25, 1, 1, 4, 31, 2, 20, 4\} = 1 = c_{232};$$

$$x_{232} = \min\{a_2^{(2)}, b_3^{(2)}, c_2^{(2)}\} = \min\{7, 9, 5\} = 5.$$

Решта $x_{ij2} = 0$ при $(i, j) \neq (2, 3)$, $a_2^{(3)} = 2;\ b_3^{(3)} = 4;\ c_2^{(3)} = 0$.

4. Розглядаємо переріз c_2^{jk} при $k = 3$.

$$\min\{31, 2, 20, 4\} = 2 = c_{223},$$

$$x_{223} = \min\{a_3^{(3)}, b_2^{(3)}, c_3^{(3)}\} = \min\{2, 8, 18\} = 2.$$

Всі $x_{2jk} = 0$, окрім $(j, k) = (2, 3)$.

Ітерації 5—8 проводяться аналогічно. Здійснені обчислення записуємо в таблицю 8.10.

Таблиця 8.10

$i \backslash j$	1	2	3	4					$a_i^{(0)}$	$a_i^{(1)}$	$a_i^{(2)}$	$a_i^{(3)}$	$a_i^{(4)}$	$a_i^{(5)}$
1	5 / 0 17 / 0 9 / 0	11 / 0 15 / 0 6 / 4	9 / 0 10 / 0 10 / 0	3 / 3 13 / 0 7 / 0					7	4	0	0	0	0
2	11 / 0 25 / 0 31 / 0	8 / 0 1 / 0 2 / 2	7 / 0 1 / 5 20 / 0	8 / 0 4 / 0 4 / 0					7	7	7	2	0	0
3	15 / 0 21 / 0 13 / 1	45 / 0 8 / 0 7 / 6	6 / 0 3 / 0 9 / 4	25 / 0 15 / 0 2 / 5					16	16	16	16	16	11
$b_j^{(0)}$	1	12	9	8	$c_k^{(0)}$	3	5	22						
$b_j^{(1)}$	1	12	9	5	$c_k^{(1)}$	0	5	22						
$b_j^{(2)}$	1	8	9	5	$c_k^{(2)}$	0	5	18						
$b_j^{(3)}$	1	8	4	5	$c_k^{(3)}$	0	0	18						
$b_j^{(4)}$	1	6	4	5	$c_k^{(4)}$	0	0	16						
$b_j^{(5)}$	1	6	4	0	$c_k^{(5)}$	0	0	11						

При знайденому плані X_2 цільова функція $L(X_2)=148$. У попередніх випадках значення були такі: $L(X_0)=207$, $L(X_1)=163$.

8.3.3. Метод нуль-перетворень

Нуль-перетворенням цільової функції задачі $T-3P$ будемо називати еквівалентне перетворення

$$c_{ijk}^{(0)}=c_{ijk}-(\alpha_i+\beta_j+\gamma_k),$$

таке, що

$$\min_{j,k}\{c_{ijk}^{(0)}\}=0,\quad i\in\{1,2,\ldots,m\},$$

$$\min_{i,k}\{c_{ijk}^{(0)}\}=0,\quad j\in\{1,2,\ldots,n\},$$

$$\min_{i,j}\{c_{ijk}^{(0)}\}=0,\quad k\in\{1,2,\ldots,p\},$$

$$c_{ijk}^{(0)}\ge 0,\ (i,j,k)\in E.$$

Для визначеності параметри $\alpha_i,\beta_j,\gamma_k$ обчислюються за формулами:

$$\alpha_i=\min_{j,k}\{c_{ijk}\},\quad i\in\{1,2,\ldots,m\};$$

$$\beta_j=\min_{i,k}\{c_{ijk}-\alpha_i\},\quad j\in\{1,2,\ldots,n\};$$

$$\gamma_k=\min_{i,j}\{c_{ijk}-\alpha_i-\beta_j\},\quad k\in\{1,2,\ldots,p\}.$$

Індексний елемент (i,j,k), для якого $c_{ijk}^{(0)}=0$, будемо називати 0-*значним*. Введемо множину 0-значних індексних елементів $R_0=\{(i,j,k):c_{ijk}^{(0)}=0\}$.

Розв'яжемо методом 0-перетворень попередній приклад, для чого матрицю $C=\{c_{ijk}\}$ запишемо у вигляді таблиці (табл. 8.11).

Таблиця 8.11

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	5 17 9	11 15 6	9 10 10	3 13 7
2	11 25 31	8 1 2	7 1 20	8 4 4
3	15 21 13	45 8 7	6 3 9	25 15 2

Крок 1.

Визначаємо $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$:

$$\alpha_1 = \min_{j,k}\{c_{1jk}\} = \min\{5, 11, 9, 3, 17, 15, 10, 13, 9, 6, 10, 7\} = 3;$$

$$\alpha_2 = \min_{j,k}\{c_{2jk}\} = \min\{11, 8, 7, 8, 25, 1, 1, 4, 31, 2, 20, 4\} = 1;$$

$$\alpha_3 = \min_{j,k}\{c_{3jk}\} = \min\{15, 45, 6, 25, 21, 8, 3, 15, 13, 7, 9, 2\} = 2;$$

$$\beta_1 = \min_{i,k}\{c_{i1k} - \alpha_i\} = \min\left\{\begin{matrix} 5-3;\ 17-3;\ 9-3;\ 11-1; \\ 25-1;\ 31-1;\ 15-2;\ 21-2;\ 13-2 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \min\{2, 14, 6, 10, 24, 30, 13, 19, 11\} = 2;$$

$$\beta_2 = \min_{i,k}\{c_{i2k} - \alpha_i\} = \min\left\{\begin{matrix} 11-3;\ 15-3;\ 6-3;\ 8-1;\ 1-1; \\ 2-1;\ 45-2;\ 8-2;\ 7-2 \end{matrix}\right\} = 0;$$

$$\beta_3 = \min_{i,k}\{c_{i3k} - \alpha_i\} = \min\left\{\begin{matrix} 9-3;\ 10-3;\ 10-3;\ 7-1;\ 1-1; \\ 20-1;\ 6-2;\ 3-2;\ 9-2 \end{matrix}\right\} = 0;$$

$$\beta_4 = \min_{i,k}\{c_{i4k} - \alpha_i\} = \min\left\{\begin{matrix} 3-3;\ 13-3;\ 7-3;\ 8-1; \\ 4-1;\ 4-1;\ 25-2;\ 15-2;\ 2-2 \end{matrix}\right\} = 0.$$

Аналогічним чином обчислюються $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$. Коефіцієнти $c_{ijk}^{(0)}$ знаходяться із співвідношення $c_{ijk}^{(0)} = c_{ijk} - (\alpha_i + \beta_j + \gamma_k)$. Маємо:

$$c_{111}^{(0)} = c_{111} - (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) = 5,$$

$$c_{112}^{(0)} = c_{112} - (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_2) = 17 - 3 - 2 = 12 \text{ і т. д.}$$

Результати обчислень $c_{ijk}^{(0)}$ записуємо у таблицю 8.12:

Таблиця 8.12

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	0 12 4	8 12 3	6 7 7	0 10 4
2	8 22 28	7 0 1	6 0 19	7 3 3
3	11 17 9	43 6 5	4 1 7	23 13 0

Множина 0-значних елементів (тобто таких, для яких $c_{ijk}^{(0)} = 0$) буде такою: $R_0 = \{(1,1,1), (1,4,1), (2,2,2), (2,3,2), (3,4,3)\}$. Знаходимо відповідні значення x'_{ijk} та ключовий індексний елемент.

$$x'_{111} = \min\{7, 1, 3\} = 1;\ x'_{141} = \min\{7, 8, 3\} = 3;\ x'_{222} = \min\{7, 12, 5\} = 5;$$

$$x'_{232} = \min\{7, 9, 5\} = 5;\ x'_{343} = \min\{16, 8, 22\} = 8;$$

$$\max\{x'_{111}, x'_{141}, x'_{222}, x'_{232}, x'_{343}\} = \max\{1, 3, 5, 5, 8\} = 8 = x'_{343}.$$

Отже, ведучий індексний елемент — це трійка індексів $i = 3, j = 4, k = 3$. Оскільки $8 = b_4^{(0)}$, то заповнюємо переріз X_4^{ik}, який містить елементи

$$X_4^{ik} = \{x_{i4k}\} = \{x_{141}, x_{142}, x_{143}, x_{241}, x_{242}, x_{243}, x_{341}, x_{342}, x_{343}\}.$$

Крок 2.

Здійснюємо 0-перетворення матриці $c_{ijk}^{(0)}$, вилучивши переріз c_4^{ik}:

$$\alpha_1 = \min_{j,k}\{c_{1jk}\} = 0;\quad \alpha_2 = 0;\quad \alpha_3 = 1;\quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0;$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0;\quad \gamma_3 = 1.$$

Одержуємо нову матрицю $c_{ijk}^{(1)} = c_{ijk}^{(0)} - (\alpha_i + \beta_j + \gamma_k)$, причому $i = 1, 2, 3;\ \ j = 1, 2, 3;\ \ k = 1, 2, 3$ (табл. 8.13).

Таблиця 8.13

$i \backslash j$	1	2	3
1	0 12 3	8 12 2	6 7 6
2	8 22 27	7 0 0	6 0 18
3	10 16 7	42 5 3	3 0 5

Множина $R_0 = \{(1,1,1), (2,2,2), (2,2,3), (2,3,2), (3,3,2)\}$,

$$x'_{111} = \min\{7, 1, 3\} = 1;\ x'_{222} = \min\{7, 12, 5\} = 5;$$

$$x'_{223} = \min\{7, 12, 22\} = 7\ ;\ x'_{232} = \min\{7, 9, 5\} = 5\ ;$$

$$x'_{332} = \min\{16, 9, 5\} = 5\ .$$

Далі $\max\{x'_{111}, x'_{222}, x'_{223}, x'_{232}, x'_{332}\} = \max\{1, 5, 7, 5, 5\} = 7 = x'_{223}$. Отже, ведучий індексний елемент – це трійка індексів $i = 2, j = 2, k = 3$. Із матриці C виключається переріз c_2^{jk}, бо $a_2^{(0)} = 7$. Заповнюємо

$$X_2^{jk} = \{x_{211}, x_{212}, x_{213}, x_{221}, x_{222}, x_{223}, x_{231}, x_{232}, x_{233}\}.$$

Крок 3.

Параметрами 0-перетворення будуть $\alpha_1 = 0;\quad \alpha_2 = 0;\quad \beta_1 = 0;$

$$\beta_2 = 2;\ \beta_3 = 0;\ \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0\ .$$

Відповідна множина $R_0 = \{(1,1,1), (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$.

Здійснюючи операції, аналогічні попереднім крокам, одержуємо такі ненульові компоненти опорного плану: $x_{111} = 1$; $x_{131} = 1$; $x_{123} = 5$; $x_{223} = 7$; $x_{331} = 1$; $x_{332} = 5$; $x_{333} = 2$; $x_{343} = 8$.

Відповідна таблиця значень буде такою (табл. 8.14):

Таблиця 8.14

i \ j	1	2	3	4				
1	1 0 0	0 0 5	1 0 0	0 0 0				7
2	0 0 0	0 0 7	0 0 0	0 0 0				7
3	0 0 0	0 0 0	1 5 2	0 0 8				16
$b_j^{(0)}$	1	12	9	8	$c_k^{(1)}$	3	5	22	

Одержаний опорний план відрізняється від оптимального на 0,9%.

ОГЛЯД ПАКЕТІВ ПРИКЛАДНИХ ПРОГРАМ У ДОСЛІДЖЕННІ ОПЕРАЦІЙ

Сучасний розвиток ЕОМ обумовив її проникнення в усі сфери суспільного життя. Велика кількість розроблених програм, що реалізовують різні алгоритми, дозволяють спеціалістам певних галузей розв'язувати поставлені перед ними задачі будь-якого типу. Сукупність програм розв'язання задач певного класу називається *пакетом програм*.

Пакети прикладних програм зробили методи аналізу даних більш доступними та наочними. Зараз спеціалісту необов'язково володіти професійними навичками програміста для розв'язання задач певного типу, знати декілька мов програмування. Цілком досить підібрати вже готову програму, яка реалізовує певний алгоритм. Для тих, хто не вміє програмувати, створені пакети прикладних програм.

Пакети прикладних програм — це сукупність взаємопов'язаних прикладних програм для виконання типових розрахунків у досить формалізованих галузях знань. Вони повинні задовольняти загальним вимогам:

— простота освоєння та використання;

— відповідність високим вимогам до введення, перетворення та зберігання даних;

— широкий вибір засобів графічного подання даних і результатів їх обробки;

— можливість включення таблиць і графіків у звіт;

— широкий набір методів аналізу даних;

— докладність документації.

Пакети прикладних програм, що використовуються для аналізу даних, можна умовно поділити на математичні (Maple, MathCad та ін.) і статистичні (StatGraphics, Stadia, Statistica та ін.). Внаслідок великої популярності та необхідності використання методів аналізу даних відповідні засоби почали включатися в табличні процесори (Quattro Pro, Lotus, Excel та ін.), а також у деякі бази даних. Найчастіше у таких пакетах зустрічаються засоби описової статистики, методи регресійного аналізу, засоби аналізу часових рядів, згладжування та прогнозування.

Статистичні пакети можна поділити на спеціалізовані пакети та пакети загального призначення.

Спеціалізовані пакети містять методи, які використовуються в конкретній предметній галузі. Як правило, такі пакети розраховані на спеціалістів, добре знайомих з цими методами, і застосовуються у випадках, коли необхідно систематично розв'язувати задачі з цієї галузі, а можливостей пакета загального призначення не вистачає.

У пакетах загального призначення відсутня пряма орієнтація на специфічну предметну галузь, але вони мають широкий діапазон методів аналізу даних. До цієї групи пакетів належать системи StatGraphics, Stadia, Statistica, SPSS.

Пакет **Stadia** орієнтований на масового користувача з невеликим досвідом у статистичному аналізі та у користуванні комп'ютером. Пакет поєднує діалоговий характер інтерфейсу з ієрархічною системою меню та контекстово-орієнтованою допомогою.

У пакеті крім простих процедур статистичної обробки інформації представлені також складні процедури аналізу даних:

— параметричні тести (кореляція, тести Стьюдента та Фішера, гістограма, нормальність);

— непараметричні тести;

— аналіз часових рядів (кореляційний, спектральний, згладжування, фільтрація);

— дисперсійний аналіз (одно-двофакторний параметричний і непараметричний);

— регресійний аналіз (порівняння двох регресій, проста регресія (тренд), множинна лінійна регресія, покрокова регресія, загальна регресія);

— багатовимірні методи.

Пакет Stadia має також досить повний набір двомірних і тримірних діаграм розсіяння, функціональних графіків однієї або декількох змінних, стовпців і кругових діаграм тощо.

У цій системі відсутній текстовий редактор для підготовки звітів, але передбачене все для того, щоб одержані результати були оброблені за допомогою зовнішнього редактора.

Пакет має внутрішню експертну систему з вибору та використання методів аналізу, для чого використовується спеціальна класифікація різноманітних можливих типів статистичних даних і для кожного з них вказані можливі методи обробки, призначення та порядок роботи з ними.

Безперечними достоїнствами пакету **StatGraphics** є повнота представлених у ньому методів аналізу даних, добра двомірна та тримірна графіка, широкі можливості оперування даними. Пакет розрахований на спеціалістів, добре знайомих з концепціями використовуваних процедур.

Крім процедур аналізу даних, представлених у пакеті й аналогічних процедурам пакета Stadia, до StatGraphics включений великий запас загально математичних алгоритмів. Графічний редактор пакета дозволяє настроювати всі можливі елементи графіка від області визначення, розмірів, масштабу по кожній з осей, рамки заголовка до типів і кольорів ліній, точок, графіка та детального оформлення осей координат. У режимі інтерактивного редагування графіка пакет StatGraphics дозволяє розміщувати мітки точок, змінюючи при цьому їх вигляд і розташування, виводити значення координат точок тощо. Пакет дозволяє здійснити повну підготовку підсумкового звіту. Документація StatGraphics досить широка та змістовна.

Математичні пакети розв'язують такі проблеми:

— тотожні перетворення алгебраїчних, тригонометричних, логарифмічних, експоненційних, дробово-раціональних виразів;

— точні та наближені обчислення;
— символьне та чисельне диференціювання та інтегрування;
— операції над векторами та матрицями;
— обчислення імовірнісних і статистичних функцій;
— побудова та перетворення графіків функцій (двомірні та тримірні графіки, графіки функцій, задані в різних системах координат).

Застосування математичних методів для дослідження цілеспрямованої людської діяльності називається дослідженням операцій. До цих методів належать:

— лінійне програмування; використовується для розв'язання задач з лінійною цільовою функцією при лінійних обмеженнях на змінні та умові їх невід'ємності;
— нелінійне програмування; застосовується для розв'язання задач з нелінійною цільовою функцією та (або) обмеженнями;
— динамічне програмування; використовується для пошуку оптимальних багатоетапних розв'язків;
— задачі на графах; застосовується для розв'язання мережевих задач;
— теорія ігор;
— теорія запасів;
— теорія масового обслуговування та ін.

Всі ці методи повністю або частково можна реалізувати за допомогою математичних пакетів.

Maple V6.01 — середовище для виконання математичних розрахунків на комп'ютері. Maple дозволяє аналізувати та моделювати найрізноманітніші процеси, розв'язувати рівняння, складати звіти.

Maple може виконувати складні алгебраїчні перетворення та спрощення над полем комплексних чисел, знаходити скінченні та нескінченні суми, добутки, границі та інтеграли, розв'язувати у символьному вигляді та чисельно-алгебраїчні системи рівнянь і нерівностей, знаходити всі корені многочленів, розв'язувати чисельно та аналітично системи звичайних диференціальних рівнянь та деякі класи рівнянь у частинних похідних. До Maple включені пакети підпрограм для розв'язання задач лінійної та тензорної алгебри, Евклідової та аналітичної геометрії, теорії ймовірностей і математичної статистики, чисельної апроксимації та лінійної оптимізації (симплекс-метод), задачі фінансової математики та ін.

Огляд пакетів прикладних програм у дослідженні операцій

Програма дозволяє водночас працювати з кількома робочими аркушами та встановлювати між ними динамічні зв'язки (тобто переводити обчислення з одного аркуша на інший).

Система має добрий текстовий редактор, який дозволяє використовувати всі інстальовані на комп'ютері шрифти, змінювати їх тип, форматувати розділи тексту.

До складу Maple входять 32 додаткових пакети підпрограм.

Exsel — це програмний продукт, який належить до категорії електронних таблиць. Ця програма дає необмежені можливості в обчисленні даних у вигляді таблиць, у виконанні бухгалтерських розрахунків, аналізі даних, статистичних обчисленнях, вирішенні наукових задач, пов'язаних з виконанням багатьох математичних операцій. Усі ці розрахунки можна також представити у вигляді різноманітних графіків, діаграм.

Можливості програми Exsel 2000:

— створення багатосторінкових файлів. Файли Exsel, які називаються робочими книгами, можуть складатися з будь-якого числа окремих аркушів — робочих або аркушів діаграм;
— багато віконний інтерфейс. В Exsel можна працювати з кількома файлами одночасно і здійснювати обмін інформацією між даними в різних робочих книгах;
— інтерактивна довідкова система;
— панелі інструментів, які настроюються;
— керування списками, що дає можливість сортувати, фільтрувати, обробляти дані робочого аркуша;
— зведені таблиці дозволяють звести разом дані з кількох таблиць або вибрати потрібну інформацію з бази даних;
— керування базами даних;
— вбудовані функції, які можна використовувати у формулах;
— розширені засоби аналізу, такі, як алгоритм підбору параметрів, процедура пошуку оптимальних рішень, а також надбудова Пакет анализа, яка включає в себе безліч статистичних, фінансових, інженерних і наукових функцій та процедур;
— різноманітність діаграм — можливість не тільки створювати діаграми та графіки різних типів, але й модифікувати існуючі та

поповнювати їх асортимент. Розташувати діаграму можна в будь-якому місці робочого аркуша або на спеціальному аркуші діаграми;

— використання можливостей картографії. Exsel дозволяє розмістити числові дані, прив'язавши їх до географічної карти;

— інструменти малювання дозволяють створювати діаграми та малюнки безпосередньо на робочому аркуші або діаграмі;

— мова програмування Visual Basic for Applications, вбудована в Exsel, розкриває нові можливості;

— підтримка Internet. Exsel 2000 має широкий набір нових засобів, які дозволяють мати доступ до інформації в Internet, зберігати документи у форматі HTML і створювати гіперзв'язки безпосередньо у своїй робочій книзі.

Надзвичайна простота інтерфейсу **MathCad** зробила його одним із популярних і самим поширеним у студентському середовищі математичним пакетом. І з дидактичної точки зору MathCad є найбільш оптимальним для засвоєння студентами. Це пов'язано з тим, що, з одного боку, MathCad — це потужне і у той же час просте універсальне середовище для розв'язання задач у різних галузях науки і техніки, фінансів та економіки, фізики і астрономії, будівництва та архітектури, математики і статистики, організації виробництва і управління, тощо. З другого боку, виконуючи рутинні чи несуттєві з точки зору матеріалу, що вивчається, операції, пакет дозволяє студенту, який не володіє у повній мірі технікою математичних перетворень, самостійно виконувати громіздкі обчислення, розв'язувати змістовні задачі, набути стійких навиків розв'язування прикладних задач. При цьому студент спілкується з комп'ютером на рівні математичних понять, ідей, загальних підходів і за незначний час може розглянути самостійно багато прикладів.

Крім того, пакет MathCad можна використовувати як засіб модернізації курсів, як середовище для спілкування студента з викладачем, як засіб контролю і самоконтролю, як інструмент допомоги студенту при самостійній роботі. При створенні навчальних курсів MathCad допомагає викладачам підготувати змістовні динамічні ілюстрації, перенести акценти на концептуальні аспекти проблем, що вивчаються, збагатити курс прикладами, які виникають у різних галузях науки і практики, і які

зазвичай не розглядаються в навчальних курсах внаслідок їх складності. Лекційні демонстрації можна підготувати таким чином, що кожен студент отримає стільки прикладів, скільки йому необхідно для розуміння суті питання. Для одного і того ж розділу можна підготувати різні за об'ємом, формою і глибиною навчальні курси.

Переваги роботи у середовищі MathCad:

— система MathCad більш доступна для масового користувача: вона у декілька разів дешевша своїх аналогів;

— MathCad — це універсальна, а не спеціалізована математична система. Для прикладу, для розв'язання складних задач у аналітичному вигляді краще застосовувати Maple, а для розв'язання складних задач лінійної алгебри — MatLab і т.п.;

— математичні вирази у середовищі MathCad записуються у їх загальноприйнятому вигляді: чисельник дробу знаходиться зверху, а знаменник — внизу, у визначеному інтегралі межі інтегрування розміщені на своїх звичних місцях і т.п. Це суттєво візуально допомагає при аналізі математичних моделей, форма і зміст яких єдині;

— у середовищі MathCad процес створення "програми" йде паралельно з її налагодженням. Користувач, після введення нового виразу у MathCad-документ, може не тільки відразу підрахувати, чому він дорівнює при певних значеннях змінних, але й побудувати графік чи поверхню;

— у пакеті MathCad інтегрований достатньо потужний математичний апарат, який дозволяє розв'язувати проблеми без виклику зовнішніх процедур;

— пакет MathCad має довідник з основних математичних та фізико-хімічних формул і констант, які можна автоматично переносити у документ;

— до пакету MathCad можна придбати ті чи інші електронні підручники з різних дисциплін;

— розв'язуючи задачу, користувач може вводити не тільки числові значення змінних, але й доповнювати їх розмінностями. При цьому користувач може обрати і систему одиниць;

— система MathCad обладнана засобами анімації, що дозволяє реалізовувати створені моделі не тільки у статиці, але й у динаміці;

— у систему MathCad інтегровані засоби символьної математики, що дозволяє розв'язувати задачі не тільки чисельно, але й аналітично;

— не виходячи із середовища MathCad, можна відкривати нові документи на інших серверах і користуватись тими перевагами інформаційних технологій, які надає Internet.

Система MathCad існує у трьох основних варіантах:

1) MathCad Standart — стандартна версія; ідеальна система для повсякденних розрахунків. Розрахована для масової аудиторії та широкого використання в навчальному процесі;

2) MathCad Professional — версія для професіоналів; промисловий стандарт для прикладного використання математики у технічних додатках. Орієнтована на математиків і наукових співробітників, які виконують складні і трудомісткі розрахунки. Це найбільш повна і потужна версія;

3) MathCad Professional Academic — професіональне академічне видання; пакет програм для професійного використання математичного апарату з електронними посібниками і ресурсами.

Література

1. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. — М., 1986.

2. *Бугір М.К.* Математика для економістів: Посібник. — К.: Видавничий центр "Академія", 2003. – 520 с.— (Альма-матер).

3. *Буслаев В.С.* Вариационное исчисление. — Л., 1980.

4. *Васильев В.Ф.* Численные методы решения экстремальных задач. — М., 1988.

5. *Ващук Ф.Г., Поляк С.С., Пономарьова І.О.* Практикум з алгебри. Навчальний посібник. — Ужгород, 1999.

6. *Вивальнюк Л.М.* та ін. Задачі оптимізації. — К., 1991.

7. *Воробьева Г.Н., Данилова А.Н.* Практикум по вычислительной математике. — М., 1990.

8. *Жданова О.Г.* Методичні вказівки з дисципліни "Математичні методи дослідження операцій". Метод гілок та границь. Частина 7. — К., НТУУ-"КПІ", 1998.

9. *Зайченко Ю.П.* Исследование операций. — К., 1979.

10. *Зайченко Ю.П., Шумилова С.А.* Исследование операций. Сборник задач. — К., 1990.

11. *Кузнецов А.В., Холод Н.И.* Математическое программирование (Учеб. пособие для эконом. спец. вузов). — Мн.: Высш. шк., 1984. — 221 с., ил.

12. *Лавер О.Г.* Застосування методів лінійного програмування до розв'язання прикладних задач економіки. — Ужгород, 1998.

13. *Лавер О.Г., Кузка О.І.* Методи Рітца і Бубнова-Гальоркіна розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь ІІ-го порядку та двовимірного еліптичного рівняння. Методична розробка для студентів математичного факультету УжДУ. — Ужгород, 1995.

14. *Ляшенко И.Н.* Линейное и нелинейное программирование. — К., 1975.

15. Математический практикум. — М., 1960.

16. Математичне програмування: Навч. посіб./ *В.М. Дякон, Л. Є. Ковальов*; за заг. ред. В.М. Міхайленко. — К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2007. — 497 с. — Бібліогр.: с. 481—482.

17. *Раскин Л.Г., Кириченко И.О.* Многоиндексные задачи линейного программирования (теория, методы, приложения). — М., 1982.

18. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т.4, М.—Л., 1954.

19. *Ульянченко О.В.* Дослідження операцій в економіці: Підручник для студентів вузів / Харк. нац. аграр. ун-т ім. В.В. Докучаєва. — Х.: Гриф, 2002. — 580 с.

20. *Чинаев П.И.* и др. Высшая математика. Специальные главы. — М., 1976.

Навчальне видання
Серія **"Вища освіта XXI століття"**

ВАЩУК Федір Григорович,
ЛАВЕР Олександр Георгійович,
ШУМИЛО Наталія Ярославівна

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ ТА ЕЛЕМЕНТИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник

Підп. до друку 18.07.08. Формат 60x90 1/16. Папір офс. Друк офс.
Гарнітура Times. Ум. друк. арк. 23,0.
Обл.-вид. арк. 22,96. Зам. № 8/1045.

Видавництво "Знання"
01034, Київ, вул. Стрілецька, 28
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 1591 від 03.12.2003
Тел.: (044) 234-80-43, 234-23-36.
E-mail: sales@znannia.com.ua
http://www.znannia.com.ua

Віддруковано ЗАТ "ВІПОЛ".
03151, Київ, вул. Волинська, 60
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
серія ДК № 752 від 27.12.2001 р.