Григорій Гнатієнко, Віталій Снитюк

ЕКСПЕРТНІ ТЕХНОЛОГІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Г.М. Гнатієнко, В.Є. Снитюк

Експертні технології прийняття рішень

Київ
2008

ББК 22.17
УДК 519.816
Г 43

Монографія друкується за рішенням Вченої ради Черкаського державного технологічного університету від 17.12. 2007 року

Рецензенти:
Івахненко О.Г. – академік НАН України, Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій і систем Національної академії наук та Міністерства освіти і наук України;
Ляшенко І.М. – доктор фіз.-мат. наук, професор, Київський національний університет ім. Тараса Шевченка;
Златкін А.А. – доктор технічних наук, професор, Черкаський державний технологічний університет
Науковий редактор:
Волошин О.Ф. – доктор технічних наук, професор

Г 43 Гнатієнко Г.М., Снитюк В.Є. Експертні технології прийняття рішень: Монографія. – К.: ТОВ „Маклаут", – 2008. – 444 с.

ISBN 978-966-96939-4-8

Монографія присвячена розробці та обгрунтуванню моделей і обчислювальних методів розв'язання задач прийняття рішень, проблемам, що супроводжують процеси створення відповідного алгоритмічного забезпечення. Особлива увага приділена способам та методам одержання, обробки, аналізу та інтерпретації експертної інформації. Здійснено аналіз ефективності моделей і методів, які використовуються у процесах прийняття рішень та базуються на парадигмах „м'яких" обчислень.

Викладено методи та алгоритми обробки експертної інформації в задачах прийняття рішень. Виконано формалізований опис математичних моделей ситуацій прийняття рішень.

Для наукових працівників та практичних фахівців в області комп'ютерних наук та прикладної математики, економістів, інженерів, адміністраторів, діяльність яких пов'язана з прийняттям технічних чи господарських рішень і котрі бажають оволодіти сучасною методологією та математичним апаратом прийняття рішень.

ББК 22.17
УДК 519.816

ISBN 978-966-96939-4-8

Зміст

Передмова

Напевне, ні у кого не викликає сумніву твердження про те, що життя – це процес прийняття рішень. Визначальних рішень, від яких залежить існування людської спільноти, а також тривіальних рішень, наприклад, щодо планування робочого дня. В обох випадках основою для процесів прийняття рішень є експертні технології, як сукупність моделей, методів і засобів, що за допомогою певних перетворень дозволяють досягти бажаного результату. Розробці і дослідженню елементної бази експертних технологій прийняття рішень присвячена ця монографія.

Значну кількість результатів, представлених на сторінках книги, одержано вперше. До них належать багатокритеріальні постановки задач визначення результуючого ранжування, застосування схеми послідовного аналізу варіантів до задач експертного оцінювання великої розмірності, всебічне дослідження особливостей інтервального задання нормованих вагових коефіцієнтів та оригінальні непрямі методи їх визначення. Виконано розробку та дослідження методу визначення компетентності експертів на основі аксіоми незміщеності, запропоновано адаптивну процедуру коригування експертних висновків.

Оскільки значна кількість задач, які потребують в процесі розв'язку експертного втручання, є важко формалізованими та слабко структурованими, то авторами обґрунтовано застосовуються технології „м'яких обчислень" до розв'язання задачі кластеризації та відновлення пропусків.

На увагу заслуговує історичний огляд застосування експертного оцінювання.

Наведені у книзі наукові результати мають теоретичне спрямування, але вже знайшли і знаходять практичне застосування у різних галузях народного господарства, зокрема, при:

– розв'язанні задачі оптимального спостереження за групою цілей;

– моделюванні задач спільного інвестування;

– дослідженні механізмів та визначенні темпів приватизації;

– моделюванні мікробіологічного захисту рослин;
– моделюванні складних технічних систем та їх еволюції;
– застосуванні математичних методів в історичних дослідженнях;
– дослідженні впливу корупції на економіку України;
– прийнятті порядку денного у колегіальних органах;
– проведенні соціальної експертизи та дослідженні її математичних аспектів;
– моделюванні задач управління персоналом та його мотивації;
– послідовному аналізі та розподілі обмежених ресурсів;
– аналізі трудової участі членів колективу.

Усі наведені приклади практичного застосування наукових результатів об'єднує єдиний підхід – використання експертних технологій при вирішенні проблем.

Результати монографії склали науковий фундамент розробки програмно-алгоритмічного забезпечення, впровадженого на підприємствах та в організаціях України для аналізу фінансового стану акціонерних товариств; обробки експертної інформації при проведенні іспитів; досліджень приватизаційних процесів в Україні; підтримки прийняття рішень в інвестиційному бізнесі, у банківській діяльності, на ринку нерухомості, при пожежогасінні тощо.

Структура викладення матеріалу монографії включає ретроспективний аналіз експертних технологій прийняття рішень, представлення та дослідження нових моделей і методів, а також приклади їх застосування при розв'язанні практичних задач. Така послідовність інформаційних одиниць сприятиме інтересу до монографії як науковців, так і практичних спеціалістів. Вона, безперечно, стане корисною для студентів та аспірантів, які цікавляться технологіями прийняття рішень.

Професор *О.Ф. Волошин*

Вступ

Загальноприйнятою методологією, що використовується при створенні та дослідженні складних соціально-економічних та технічних систем, є системний аналіз. Більшість його етапів базується на проведенні експертиз та застосуванні експертних оцінок, зокрема при виборі структури системи, її оптимізації та розв'язанні задач діагностики, класифікації і прогнозування. Експертні технології прийняття рішень лежать в основі процесів технологічного передбачення та сценарного аналізу. Вказані проблеми і задачі супроводжуються значною невизначеністю, неповнотою апріорної інформації, які пропонується мінімізувати, використовуючи технології ранжування об'єктів. Разом із тим необхідно зауважити, що адекватне застосування експертних оцінок вимагає попереднього дослідження особливостей прийняття рішень людиною.

При розв'язанні багатьох практичних задач недооцінюється значення коректного одержання та обробки експертної інформації. Крім того, аналіз ситуацій прийняття рішень у більшості випадків свідчить про недостатнє використання наукових результатів.

Задачі прийняття рішень супроводжуються двома визначальними аспектами: необхідністю врахування суб'єктивних впливів та застосування математичних формалізмів при їх формулюванні та розв'язанні. Для математиків вирішення проблеми починається з побудови моделі досліджуваного явища. Психологічні дослідження обмежуються експериментами та поодиноким застосуванням окремих статистичних методів. Особи, відповідальні за прийняття рішення, виправдано відповідають на такі розрізнені підходи при моделюванні практичних ситуацій недовірою до "ізольованих" наукових розробок і використовують стихійно-вольовий підхід. Викладені матеріали є спробою поєднати різні аспекти прийняття рішень, які традиційно використовуються в цій області досліджень.

Монографія присвячена розробці та обґрунтуванню моделей і обчислювальних методів розв'язання задач експертного оцінювання, проблемам створення відповідного алгоритмічного забезпечення. Особливу увагу приділено способам та методам одержання, обробки, аналізу та інтерпретації експертної інформації. Основу математичного апарату, який застосовувався при роботі над монографією, складають кілька наукових напрямків.

Оскільки має місце тенденція орієнтації сучасного програмного забезпечення на використання експертної інформації, то зростає роль фахівця в процесі автоматизованого розв'язання задач. Проблема ефективного залучення експертів в процес розв'язання задачі є актуальною, оскільки необхідно використовувати евристики для адекватного моделювання процесів, які автоматизуються. Тому велику увагу приділено питанням одержання та аналізу експертної інформації, зокрема в роботах М.А. Айзермана, А.Р. Бєлкіна, О.І. Ларичева, М.Ш. Лєвіна, Б.Г. Литвака, Б.Г. Міркіна, М.В. Михалевича, В.І. Паніотто, Т.Л. Сааті, Ю.І. Саєнка, Н.В. Хованова та інших авторів.

В останні десятиріччя активно розробляється і добре зарекомендував себе в різних областях науки та народного господарства багатокритеріальний підхід, який дозволяє застосовувати математичний апарат з використанням евристик. Тут доречно відзначити роботи Ю.Б. Гермейера, С.В. Ємельянова, В.Л. Волковича, В.І. Ірікова, В.С. Михалевича, Н.Н. Мойсеєва, В.В. Подіновського, М.Є. Сулуквадзе та інших вітчизняних і закордонних авторів.

У задачах великої обчислювальної складності успішно застосовуються схеми послідовного аналізу варіантів, загальний формалізм яких запропоновано В.С. Михалевичем та Н.З. Шором і розроблено В.Л. Волковичем, О.Ф. Волошиним, А.І. Куксою, В.В. Шкурбою та іншими вченими.

Більша частина монографії є результатом багаторічних досліджень авторів в галузі теорії прийняття рішень, задач експертного оцінювання, участі у науково-дослідних розробках зі створення інформаційного, алгоритмічного та програмного забезпечення прикладних систем підтримки прийняття рішень. Значну частину результатів було депоновано або опубліковано у відомчих виданнях і тому вони не відомі достатньою мірою читачеві.

Ще одним важливим аспектом монографії є застосування для розв'язання важко формалізованих та слабко структурованих задач прийняття рішень технологій, які проф. Лотфі

Заде назвав „м'якими обчисленнями". Їх складовими є еволюційне моделювання, методи теорії нечітких множин, нейромережні та гібридні технології. За допомогою методів, що є складовими таких технологій, ефективно розв'язуються задачі ідентифікації та оптимізації, які далі використовуються в процесах прийняття рішень для діагностики, прогнозування та класифікації. Значний внесок у розробку та розвиток "м'яких обчислень" внесли Д.І. Батіщев, Д. Голдберг, К. Де Йонг , М. Доріго, Д. Дюбуа, Л. Заде, О.Г. Івахненко, Д. Коза, В.М. Курейчик, Н.М. Куссуль, З. Міхалєвіч, Л.А. Растригін, Д. Холланд, К. Ферейра, Л. Фогель, Я.З. Ципкін. Саме їх роботи стали першоджерелом того значного інтересу наукової спільноти, який спостерігається сьогодні, до застосування теорії і методів „м'яких обчислень" в експертних технологіях прийняття рішень.

У цілому монографію присвячено проблемам, в яких так чи інакше використовується евристика. В одних випадках людині пропонується взяти участь у формуванні адекватної моделі проблеми, в інших – вибрати формулу агрегування інформації, в третіх – визначити відношення переваги на окремих елементах математичної моделі, в четвертих – назвати ймовірність здійснення деяких подій тощо. Це є наслідком того, що експертне оцінювання в багатьох випадках є єдино можливим методом вирішення реальних проблем. Успішне застосування експертних оцінок у цьому процесі багато в чому обумовлюється досконалістю математичного апарату аналізу та обробки експертної інформації.

У першому розділі монографії висвітлено основні поняття, які використовуються в задачах прийняття рішення. Наводиться огляд шкал вимірювання, способів нормування значень, мір близькості, способів агрегування інформації, принципів оптимальності об`єктів, які найчастіше використовуються в теорії прийняття рішень, які вже публікувалися в науковій літературі, але в систематичному вигляді подаються вперше. Класифікація задач прийняття рішень, яка пропонується у першому розділі, включає метрики, критерії, форми представлення даних та постановки задач, які використовуються в задачах експертного оцінювання і зустрічаються в різних роботах, але вперше наводяться у повному та систематизованому вигляді.

У цьому ж розділі розглядаються особливості впливу фактора суб'єктивності на прийняття рішень, досліджуються особливості колективного прийняття рішень, наводиться ретроспективний огляд формалізованого експертного оцінювання.

Другий розділ присвячено опису математичного забезпечення задач експертного оцінювання. Зокрема, розглядається постановка задачі та методи знаходження компромісного розв'язку задачі багатокритеріальної оптимізації, різні методи колективного вибору, які застосовуються у теорії голосування та загальна схема послідовного аналізу варіантів. Важливим напрямком у процесах прийняття рішень є застосування методів "м'яких" обчислень, зокрема нейромережних технологій, еволюційного моделювання та елементів теорії нечітких множин.

У розділі 2 наводиться також історичний огляд застосування евристики для вирішення різноманітних проблем, історія застосування послідовного аналізу варіантів та ретроспективний огляд застосування процедур колективного вибору.

У третьому розділі описано способи представлення матриць відношень між парами об'єктів, у систематизованому вигляді наведено формули перетворень між різними способами задання парних відношень переваги, розглянуто поняття кардинальної узгодженості метризованих відношень. Описується алгоритм локалізації матриці парних порівнянь за інтервалами вагових коефіцієнтів об'єктів, формули визначення міри схожості суджень експертів за вибраними ними підмножинами об'єктів. Наводяться формули визначення міри схожості експертів за експертним розподілом об'єктів по кластерах та алгоритм побудови матриці парних порівнянь шляхом порівняння наборів параметрів, які знаходяться поряд з антиутопічними точками. Описано процедури агрегування матриць парних порівнянь і алгоритм знаходження результуючого відношення на множині об'єктів. Наводяться також приклади застосування процедур побудови матриць парних порівнянь.

Четвертий розділ присвячено описові використання схем послідовного аналізу варіантів та методології багатокритеріальної оптимізації в задачах строгого ранжування об'єктів. Розглядаються процедури послідовного аналізу варіантів, які базуються на використанні умови ациклічності розв'язку. Наводяться необхідні означення та твердження. Наведено огляд задач колективного ранжування об'єктів та їх класифікація. Вводиться поняття ранжованості ряду та процедури визначення коефіцієнта ранжованості. Описуються послідовні алгоритми розв'язання задач визначення строгого результуючого ранжування об'єктів для різних метрик та за різними критеріями. Наводяться процедури послідовного аналізу варіантів, які базуються на використанні умови ациклічності розв'язку. Запропоновано базові елементи технології експертних оцінок при розв'язанні задачі синтезу складних систем.

Методи та алгоритми розв'язання задач нестрогого ранжування об'єктів описуються у п'ятому розділі. Наводяться процедури послідовного аналізу варіантів у задачах нестрогого ранжування об'єктів, що базуються на умові ациклічності розв'язку. Описуються послідовні алгоритми розв'язання одно- та багатокритеріальних задач визначення колективного ранжування об'єктів. Наводиться аналіз базисних підмножин у задачах нестрогого ранжування об'єктів. Описано послідовні алгоритми визначення нестрогих колективних ранжувань для неповних експертних матриць парних порівнянь та результати дослідження ефективності алгоритмів послідовного аналізу та відсіювання варіантів для задач визначення результуючого ранжування.

Шостий розділ присвячено задачам визначення вагових коефіцієнтів об'єктів. Наводиться проблематика визначення вагових коефіцієнтів та досліджуються особливості інтервальної форми вагових коефіцієнтів в задачах експертного оцінювання. Описано методи непрямого визначення інтервалів вагових коефіцієнтів за неповною матрицею парних порівнянь, метризації ранжувань об'єктів, узагальнення метода стабілізації переваг, визначення границь зміни інтервалів вагових коефіцієнтів об'єктів, одержаних при розв'язанні задач лінійного програмування. Наводяться процедури перетворення між інтервальними бальними оцінками та нормованими ваговими коефіцієнтами. Описуються адаптивні процедури визначення інтервалів вагових коефіцієнтів параметрів за відношеннями між об'єктами з використанням різних евристик, а також узагальнення процедури непрямого визначення інтервалів вагових коефіцієнтів параметрів на випадок метризованого задання відношень між об'єктами. Наведено також приклади розв'язання задач визначення вагових коефіцієнтів.

У сьомому розділі описується огляд та аспекти прийняття групових рішень у нечітких умовах. Наводиться алгоритм побудови розмитої функції належності на неспівпадаючих терм-множинах. Описується процедура визначення функції належності шляхом аналізу частотності значень. Розглядається зв'язок та взаємна відповідність функції належності та гіперпаралелепіпеда вагових коефіцієнтів об'єктів. Наводяться процедури визначення функції належності на основі матриці парних порівнянь. Описуються приклади застосування методів та алгоритмів обробки нечіткої інформації.

Запропоновано процедуру експертного аналізу визначення міри узгодженості вимоги певного значення параметра із можливістю його отримання, яка є необхідною при прийнятті рішень і базується на суб'єктивних судженнях експертів про варіанти розвитку майбутніх процесів. Розроблено і виконано аналіз технології вибору оптимальної альтернативи в умовах композиційної невизначеності, а також наведено моделі процесу прийняття адаптивних рішень композиційної структури з детермінованими та ймовірнісними характеристиками. Описано еволюційні моделі і методи, які застосовуються при розв'язанні задач кластеризації та відновленні пропусків у даних.

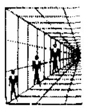
Восьмий розділ присвячено задачам визначення компетентності експертів. Розглядаються особливості взаємооцінки експертів та визначення компетентності експертів на основі аналізу інтервалів вагових коефіцієнтів. Описуються результати дослідження компетентності у випадку непрямого визначення вагових коефіцієнтів та компетентність експертів у задачі "узагальненого оцінювання". Також наведено класифікацію питань анкети та процедуру визначення компетентності експертів за відсутності апріорної інформації на основі аксіоми незміщеності.

В монографії прийнята подвійна нумерація формул, таблиць, тверджень, теорем, рисунків тощо: перше число вказує на номер поточного розділу, а друге є порядковим номером у цьому розділі.

Список скорочень

АЗПП – алгоритм зворотного поширення помилки
БКЗ – багатокритеріальна задача
ГА – генетичний алгоритм
ГВК – гіперпаралелепіпед вагових коефіцієнтів
ЕА – еволюційний алгоритм
ІАС – інформаційно-аналітична система
ЗБКО – задача багатокритеріальної оптимізації
ЗЕО – задача експертного оцінювання
ЗЛП – задача лінійного програмування
ЗПР – задача прийняття рішень
МПП – матриця парних порівнянь
НМ – нейронна мережа
ОПР – особа, що приймає рішення
ПАВ – послідовний аналіз варіантів
ПР – прийняття рішень
ФН – функція належності
ЦФ – цільова функція

Розділ 1 Основні поняття в задачах експертного оцінювання



1.1. Системний аналіз проблеми експертного оцінювання

Задачі експертного оцінювання (ЗЕО) постійно виникали у людському суспільстві. Але систематичне вивчення цих задач почалося лише у минулому столітті. Передумовами розвитку експертного оцінювання стало передусім прискорення науково-технічного прогресу, ускладнення технологій та подорожчання "ціни помилки". Основними принципами системного підходу, на яких будується система експертних оцінок [64], є:

- вирівнювання інформаційної неоднорідності, яка властива експертній групі, на етапі формування моделі явища, що аналізується;
- забезпечення незалежності експертів при формуванні їхніх суджень, збереження анонімності експертних висновків, взаємне обговорення аргументів в експертній групі, при обґрунтуванні суджень;
- обмеження різноманіття суджень експертів шляхом застосування інтерактивного уточнення колективної думки групи експертів на основі надходження нової інформації із зовнішнього середовища;

- забезпечення обміну інформацією в експертній групі "без перекручування" за рахунок створення "психологічного клімату", який дозволяє виявити індивідуальні можливості кожного експерта;
- вимірювальність наборів ознак об'єктів, що оцінюються, і яким у відповідність можуть бути поставлені деякі числа у встановлених шкалах вимірювання.

1.1.1. *Учасники та етапи експертного оцінювання*

Традиційно виділяються кілька груп суб'єктів, що приймають участь в процесі вирішення проблем експертного оцінювання: особа або група осіб, що приймають рішення (ОПР), експерти та аналітики (консультанти).

ОПР – це особа, яка має мету, що слугує мотивом постановки ЗЕО і несе відповідальність за вирішення проблеми [71].

Експерт (від лат. "expertus" – досвідчений) – людина, що має практичний досвід в експертній області, до якої звертаються за оцінками та прогнозами результатів тих чи інших рішень [114].

Консультант (аналітик) – особа, що допомагає ОПР в організації експертного оцінювання – формалізації задачі, організації роботи з експертами, аналізі структури переваг експертів тощо [71].

Для одержання якісної експертної інформації має бути забезпечена наявність:

- кваліфікованої експертної комісії;
- професійної аналітичної групи, яка володіє технологією організації та проведення експертиз;
- процедур одержання достовірної експертної інформації;
- алгоритмів коректної обробки та аналізу експертної інформації.

Схему експертного оцінювання з урахуванням послідовності залучення і функцій основних груп суб'єктів можна представити у вигляді етапів, що наводяться у табл. 1.1 [9–14, 31, 35, 44, 71, 75, 104, 109].

Таблиця 1.1. **Етапи експертного оцінювання**

№ етапу	Зміст етапу експертного оцінювання	Суб'єкти
1	Визначення мети експертного оцінювання	ОПР
2	Діагностика проблеми, формулювання ЗЕО, попередній аналіз та виявлення проблем, постановка задачі	ОПР
3	Формалізація ЗЕО: складення переліку критеріїв, обмежень задачі, побудова шкал вимірювання, формування множини об'єктів	ОПР, консультанти, експерти
4	Вибір класу математичних моделей, у якому найзручніше (найадекватніше, найефективніше) формалізувати проблему, що досліджується	консультанти
5	Формування експертної групи, формування правил роботи експертної групи	ОПР, консультанти
6	Визначення (знаходження, виділення, генерація) множини допустимих об'єктів	консультанти, експерти
7	Одержання початкових даних – вимірювання, багатокритеріальне оцінювання об'єктів	експерти
8	Формування правил оцінки компетентності експертів	ОПР, консультанти
9	Формування правил підготовки колективного судження групи	ОПР, консультанти
10	Обробка даних та розв'язування конкретної задачі з використанням математичних методів та обчислювальної техніки	консультанти
11	Аналіз узгодженості експертної інформації, "згладжування" результатів	консультанти
12	Організація зворотного зв'язку з метою підвищення достовірності експертних оцінок	консультанти, експерти
13	Пояснення мотивів та шляхів вибору остаточної експертної оцінки об'єктів, ілюстрація одержаних результатів	консультанти, ОПР
14	Прийняття остаточної експертної оцінки	ОПР

Наведені етапи мають місце у будь-якій конкретній ситуації експертного оцінювання [36, 39, 44]. Зрозуміло, що не всі етапи експертного оцінювання обов'язково присутні у явному вигляді. У реальних задачах деякі етапи можуть агрегуватися в окремі блоки, інші етапи деталізуються додатковими операціями, порядок слідування етапів може частково змінюватися. Але стандартний алгоритм експертного оцінювання має вигляд, наведений у табл. 1.1.

При аналізі експертних оцінок, навіть якщо вони одержані від кваліфікованих спеціалістів, виникають задачі представлення цих оцінок в систематизованій формі, порівняння та агрегування оцінок. Використання математичних методів при аналізі експертних оцінок дозволяє узагальнити судження спеціалістів та виявити інформацію, якою вони володіють у прихованому вигляді.

1.1.2. *Шкали вимірювання*

Безліч об'єктів, які нас оточують, характеризуються нескінченою кількістю властивостей. Деякі властивості у конкретних ситуаціях експертного оцінювання дослідники вважають важливими і для їх вимірювання розробляються відповідні експертні процедури. Важливим чинником при застосуванні математичного апарату є шкали вимірювання властивостей об'єктів. Для формального описання шкал вимірювання введемо деякі означення [58].

Емпіричною системою з відношеннями називається система $U=\{V,P\}$, де V – множина властивостей об\`єктів, $P$ – множина відношень між об\`єктами за властивостями V.

Шкалою називається трійка елементів $\langle U,G,\varphi\rangle$, де U – емпірична система, G – числова система, φ – відображення $\varphi: U\to G$.

Шкали $\langle U,G_1,\varphi_1\rangle$ та $\langle U,G_2,\varphi_2\rangle$ належать *до шкал одного типу,* якщо $G_1=\varphi_1(U)$, $G_2=\varphi_2(U)$, $G_1\subset G$, $G_2\subset G$, та існує таке перетворення f, що: $G_1=f(G_2)$ та $G_2=f^{-1}(G_1)$. Перетворення f називається *допустимим перетворенням* для шкал даного типу [117].

Згідно [101], теоретично існує нескінчена кількість шкал для вимірювання властивостей об`єктів. Шкали найчастіше розрізняють за рівнем вимірювання – від "найслабкіших" до "найсильніших", У цьому випадку виділяють п'ять рівнів шкал [88, 89, 90, 101, 119, 120, 129, 131, 132]: номінальні, порядкові, інтервальні, шкали відношень та абсолютні шкали. Тому, коли говорять про можливість проведення якісного та кількісного аналізу експертної інформації [88], то мають на увазі дослідження властивостей об`єктів, виміряних відповідно у перших двох та останніх трьох шкалах. Інтервальні шкали та шкали відношень часто об`єднують в один тип – *метричні шкали*.

Абсолютною шкалою називається впорядкована трійка $\langle U, G, \varphi \rangle$, якщо її допустиме перетворення є тотожним перетворенням: $f(G) = G$. Результатом вимірювання у такій шкалі є, наприклад, кількість елементів у множині.

Шкала відношень (подібності) є "слабкішою" від абсолютної шкали. Допустимим перетворенням результатів вимірювання у цій шкалі є множення результатів на одне й те саме число, тобто зміна масштабу: $G_2 = f(G_1) = aG_1$, $a > 0$. Це, наприклад, шкали вимірювання маси, довжини тощо. У випадку шкали відношень, приписавши деяке число певному об`єкту, тим самим фіксуються числа, які приписуються всім аналогічним об`єктам.

Шкала інтервалів (інтервальна) допускає додатні лінійні перетворення. Тобто, для кожного G_1 виконується співвідношення $G_2 = f(G_1) = \alpha G_1 + \beta$, де β – дійсне число, $\alpha > 0$. Це означає, що в такій шкалі можна змінювати як початок відліку, так і одиниці вимірювання. Прикладами шкал інтервалів є шкали вимірювання температури, тиску, часу тощо. Нерідко використовуються псевдоінтервальні шкали, які за деякими ознаками нагадують інтервальні, але за своєю сутністю є порядковими.

Шкала порядку (порядкова) – це шкала, допустимими перетвореннями якої є монотонні перетворення, тобто такі, при яких не змінюється порядок чисел. При вимірюваннях у шкалах такого типу отримують інформацію лише про порядок слідування об`єктів за деякою ознакою. Прикладами такої шкали можуть бути шкали вимірювання твердості матеріалів, визначення "схожості" об`єктів тощо. До цієї групи належить більшість шкал, які використовуються в соціологічних та психологічних дослідженнях і взагалі в ситуаціях, де використовуються експертні оцінки. Частинним випадком порядкових шкал є бальні оцінки, які використовуються в спортивному суддівстві, при оцінці знань у навчальних закладах тощо.

Для побудови порядкових шкал необхідно вміти встановлювати не лише відношення рівноцінності між об`єктами за деякою ознакою, але й відношення порядку. Це відношення типу "більше, ніж", "краще, ніж" і т.д. Кожному пункту порядкової шкали може бути приписане деяке число. Між цими числами мають місце ті ж відношення, що й між об`єктами. Але відома лише їх послідовність, а не відстань між ними – відстані між точками шкали не рівні між собою. Деяку інформацію про ці відстані можна отримати, використовуючи спеціальні евристичні процедури. Ранги визначають відносну інтенсивність якості, але не її "абсолютну" величину.

Від *шкал найменувань (номінальних)* вимагається лише взаємна однозначність їх допустимих перетворень. У випадку номінальної шкали числа, якими позначаються класи об'єктів, використовуються виключно для ідентифікації об`єктів досліджуваної множини та віднесення їх до відповідних класів. Єдина вимога до цих чисел – відмінність одного від іншого. Ці числа відіграють роль символів, "ярликів", які в разі потреби можна без проблем замінити іншими знаками. Крім порівняння на співпадання, будь-які арифметичні дії над цими цифрами є недопустимими. Прикладами слугують позиції в документах: "стать", "професія" тощо. Шкала найменувань є "найслабкішою" серед шкал вимірювання.

Якщо інформації, яка міститься у вимірюваннях, здійснених у двох шкалах різного типу, достатньо для розв`язання деякої конкретної задачі, то доцільно використовувати вимірювання у більш слабкій з цих двох шкал. Але необгрунтоване використання слабких шкал може також призвести до втрати дослідником інформації про ситуацію експертного оцінювання [37, 133, 134].

1.1.3. *Формальне представлення* ЗЕО

Для описання ЗЕО будемо використовувати її символьне представлення у вигляді кортежу [24, 33–35, 37] $\langle A,S,R,E,C,P\rangle$, де A – множина об'єктів, S – множина обмежень, що враховуються при експертній оцінці, R – множина принципів оптимальності, E – множина формальних характеристик експертів, C – множина цілей, що стоять перед дослідниками, P – система переваг групи експертів.

Розглянемо *множину*[1] A, що складається з n *об'єктів*[2], які необхідно порівняти між собою:

$$a_i \in A,\ i \in \{1,\dots,n\} = I. \tag{1.1}$$

Об'єкти у ЗЕО можуть бути:

- незалежними;
- залежними;
- заздалегідь заданими;
- такими, що з'являються після розробки правила експертного оцінювання;
- такими, що конструюються в процесі експертного оцінювання.

Незалежними є об'єкти, довільні дії з якими (виділення кращого об'єкта чи підмножини об'єктів, виключення з подальшого розгляду, упорядкування за деякими ознаками тощо) не впливають на якість інших об'єктів. При *залежних* об'єктах рішення щодо одних із них впливають на якість інших. Виділяють різні типи залежності об'єктів.

Найпростішою і природною є *безпосередня групова залежність*: якщо вирішено розглядати хоча б один об'єкт з групи, то слід розглядати всю групу.

[1] Автори вживають терміни: множина [1, 4, 5, 6, 8, 19, 26, 65, 75, 88, 102, 104, 106, 107, 111], набір [102, 104], сукупність [77, 87], група тощо.

[2] Використовуються терміни: об`єкти [22, 29, 37, 38, 47, 60, 63, 65, 67, 75, 76, 80, 83, 88, 94, 100, 102, 106], варіанти [4, 5, 6, 14, 22, 23, 26, 38, 45, 59, 61, 102], альтернативи [26, 42, 45, 59, 61, 100, 102, 107, 119], плани [4, 6, 14, 54, 72], проекти [4, 6, 37], елементи [23, 73, 102], учасники [6, 107], кандидати [4, 107], стратегії [14], спостереження [60], індивіди [77], вимірювання [104], ситуації [102], робочі точки [19], гравці [85], члени колективу [107], передвиборчі програми [102], багатовимірні дані [20] тощо.

Іншим типом залежності об'єктів є *залежність від об'єктів, що виключаються з розгляду* [81]. Умова незалежності вибору від звуження множини об'єктів у загальній теорії вибору одержала назву умови спадковості [3].

Третім типом залежності є *залежність від неіснуючих, "фантомних" об'єктів* [68]. Образ ідеального об'єкта, створюваний людиною під час вибору, може впливати на вибір із реальних об'єктів, особливо якщо є надія на те, що ідеальний варіант може бути реалізовано [13].

Методи експертного оцінювання мають бути пристосовані до різних типів залежності об'єктів. ЗЕО можуть істотно відрізнятися також за кількістю об'єктів та їх наявністю на момент вироблення політики оцінки [90]. Зустрічаються задачі, коли всі об'єкти вже задано і необхідно здійснити лише вибір із цієї множини. Існує також множина задач [9], де всі об'єкти або значна їх частина не сформовані на момент експертного оцінювання. Якщо об'єктів багато (сотні і тисячі), то зростає необхідність у застосуванні формальних правил вибору, у використанні експертних оцінок та у розробці засобів, що дозволяють реалізувати несуперечливу і послідовну політику прийняття рішень (ПР).

1.1.4. *Бінарні відношення*

Бінарним відношенням B, заданим на множині об'єктів A, називається довільна підмножина декартового добутку $A \times A = A^2$. Факт знаходження пари об'єктів a_1 та a_2 у бінарному відношенні B будемо позначати як $a_1 B a_2$. Якщо об'єкти a_1, a_2 *не знаходяться у відношенні* B, тобто $(a_1, a_2) \in A^2 \setminus B$, то застосовується позначення $a_1 \overline{B} a_2$.

Існує чотири основних способи задання відношень: безпосереднє задання усіх пар, представлення графами, матрицями та перетинами.

Широко розповсюдженим способом представлення бінарних відношень є використання *орієнтованих графів*, вершини яких відповідають елементам a_i, а дуги з a_i в a_j відповідають відношенню $a_i B a_j$. Зазначені графи є геометричними зображеннями бінарних відношень.

Для бінарних відношень, заданих на скінчених множинах, часто використовується *матричний спосіб задання*. Бінарне відношення B (бінарні відношення та відповідні їм матриці будемо позначати однаковими символами) між елементами a_i скінченої множини $A = \{a_1, ..., a_n\}$ можна задавати матрицею $B = (b_{ij})$ $i, j \in I = \{1, \ldots, n\}$, з нулів та одиниць, елементи якої задаються як

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a_i B a_j, \\ 0, & \text{якщо } a_i \overline{B} a_j. \end{cases}$$

Для бінарних відношень справедливі усі операції, які визначаються для множин. Такі операції дозволяють за деякими відомими відношеннями між наборами об'єктів одержати логічні наслідки шляхом відповідних дій над множинами. Операції над бінарними відношеннями, які найчастіше використовуються, наводяться в табл. 1.2 [27, 62, 116].

Основні властивості бінарних відношень, які мають місце в ЗЕО при матричному представленні, представлені в табл. 1.3.

Формальне означення видів відношень задається через наявність у них тих чи інших властивостей. Найчастіше відношення поділяють на такі класи: симетричні, антисиметричні та усі інші відношення. Симетричні відношення, у свою чергу, розбиваються на підкласи – рефлексивні відношення схожості (подібності, толерантності, байдужості, нерозрізненості) та антирефлексивні відношення відмінності (двоїсте до схожості). Антисиметричні відношення називаються передпорядками: підклас рефлексивних відношень – нестрогі порядки, підклас антирефлексивних – строгі порядки. З третього класу виділяють рефлексивні відношення, які називаються слабкими порядками.

Властивості різних типів відношень у задачах порівняння об'єктів наводяться у табл. 1.4. У цій таблиці знак "+" означає наявність властивості у відношення; відсутність позначення – відсутність у відношення відповідної властивості.

Таблиця 1.2. **Операції над бінарними відношеннями та їх означення**

№ пп	Назва операції	Символьне позначення	Відповідні операції над елементами матриці $B(A)$
1	вкладення (включення)	$B^{(1)} \subseteq B^{(2)}$	$b_{ij}^{(1)} \le b_{ij}^{(2)}, \forall i, j$, де $\forall$ – квантор загальності
2	перетин	$B^{(1)} \bigcap B^{(2)}$	$b_{ij} = b_{ij}^{(1)} \wedge b_{ij}^{(2)}, \forall i, j$, де $\wedge$ – знак кон'юнкції;
3	об'єднання	$B^{(1)} \bigcup B^{(2)}$	$b_{ij} = b_{ij}^{(1)} \vee b_{ij}^{(2)}, \forall i, j$, де $\vee$ – знак диз'юнкції;
4	обернення	B^{-1}	$a_1 B^{-1} a_2 \Leftrightarrow a_2 B a_1 \quad (b_{ij} = b_{ji}, \forall i, j)$;
5	двоїстість	B^d	$B^d = \left(\bar{B}\right)^{-1}$;
6	добуток або композиція	$a_1 (B^{(1)} \times B^{(2)}) a_2$	$\exists a_3 \in A : a_1 B^{(1)} a_3 \wedge a_3 B^{(2)} a_2)$. Зокрема, якщо $B^{(1)} = B^{(2)}$, то $B^{(1)} \circ B^{(2)} = B^2$
7	транзитивне замикання	B^*	$a_1 B^* a_2 \Leftrightarrow \exists a_3, \ldots, a_n \in A : a_1 B a_3 \wedge a_3 B a_4 \wedge \ldots \wedge a_n B a_2$ (або, очевидно, $B^* = B \cup B^2 \cup \ldots \cup B^n$)

Таблиця 1.3. **Основні властивості бінарних відношень та їх означення**

№ пп	Назва властивості відношення	Означення властивості
1	рефлексивність	$aBa,\ \forall a \in A,\ \left(b_{ii} = 1,\ \forall i\right)$
2	антирефлексивність	$a\overline{B}a, \forall a \in A\ \ (b_{ii} = 0, \forall i)$
3	симетричність	якщо a_1Ba_2, то a_2Ba_1 для $\forall a_1, a_2 \in A$, тобто $a_1Ba_2 \Rightarrow a_2Ba_1\ \ (b_{ij} = b_{ji}, \forall i, j)$
4	асиметричність	$a_1Ba_2 \Rightarrow a_2\overline{B}a_1, \forall a_1, a_2 \in A\ \ (b_{ij} \wedge b_{ji} = 0, \forall i, j)$
5	антисиметричність	$a_1Ba_2 \wedge a_2Ba_1 \Rightarrow a_1 = a_2 (b_{ij} \wedge b_{ji} = 0, i \neq j)$
6	транзитивність	$a_1Ba_3 \wedge a_3Ba_2 \Rightarrow a_1Ba_2, \forall a_1, a_2, a_3 \in A,\ (\bigvee_{j=1}^{n} (b_{ij} \wedge b_{jk}) \le b_{ik}, i, j, k = \overline{1,n})$
7	від'ємна (негативна) транзитивність	доповнення $\overline{B}$ – є транзитивним
8	ациклічність	$a_1Ba_3 \wedge a_3Ba_4 \wedge \ldots \wedge a_kBa_2 \Rightarrow a_1 \neq a_2, \forall a_1, a_3, a_4, \ldots, a_k \in A$
9	повнота (зв'язність)	$a_1Ba_2, \forall a_1, a_2 \in A$
10	лінійність або слабка повнота	$(\forall a_1, a_2 \in A,\ a_1 \neq a_2 \Rightarrow a_1Ba_2 \vee a_2Ba_1)$;
11	порожність	$a_1\overline{B}a_2, \forall a_1, a_2 \in A$

Таблиця 1.4. **Властивості відношень**

Тип відношення	Симетричність	Антисиметричність	Асиметричність	Рефлексивність	Антирефлексивність	Транзитивність	Антитранзитивність	Зв'язність (повнота)	Неповнота
Подібність (толерантність)	+			+					
Еквівалентність	+			+		+			
Частковий нестрогий порядок (нестрогий порядок)		+		+		+			
Лінійний (повний, досконалий) нестрогий порядок		+		+		+		+	
Неповний нестрогий порядок		+		+		+			+
Строгий порядок		+			+	+			
Досконалий (повний) строгий порядок		+			+	+		+	
Неповний строгий порядок		+			+	+			+
Відношення предикації		+			+		+		
Повний порядок		+				+		+	
Неповний порядок		+				+			+
Домінування			+		+				
Строгий частковий порядок			+		+	+			
Строгий лінійний порядок			+		+	+		+	
Перевага				+					
Квазіпорядок (передпорядок)				+		+			
Впорядкування (повний квазіпорядок)				+		+		+	
Строгий квазіпорядок					+	+			

1.1.5. *Параметри об`єктів та обмеження*

У деяких задачах об'єкти розглядаються у цілісному вигляді ("гештальт") і їх вибір та експертне оцінювання здійснюється без формального врахування їх властивостей. Інколи вважається, що об'єкти можуть бути описані множиною *m* параметрів[1], тобто кожний об'єкт є точкою деякого парамет-

[1] В літературі вживаються поняття:

параметри [40, 45, 73, 83, 84], **критерії** [37, 54, 59, 67, 83, 101, 104], **озн аки** [8, 59, 60, 63, 65, 102, 104, 119], **характеристики** [72, 80, 84], **оцінки** [42, 100, 119], **атрибути** [83, 119], **показники** [59, 67, 83, 87], **аспекти** [59], **факт ори** [64] тощо.

ричного простору Ω^m [33, 37, 40, 43]

$$a_i = \left(a_i^1, ..., a_i^m\right), \ a_i \in A, \ i \in I, \ A \subset \Omega^m, \tag{1.2}$$

де a_i^j, $i \in I$, $j \in \{1,...,m\} = J$, – значення j-го параметра i-го об`єкта[1].

Надалі, якщо параметри не враховуються, будемо говорити про елементи множини A і називати їх об`єктами. Якщо ж знання значень параметрів є суттєвим для експертного оцінювання, будемо використовувати термін "набір (ансамбль, кортеж) параметрів". У багатьох задачах на область зміни параметрів накладаються обмеження[2].

Для кожного параметра можуть бути відомі (або визначатися) вагові коефіцієнти їх відносної важливості

$$\beta_1, ..., \beta_m,$$

а також задано напрями оптимізації параметрів [50, 91] (іноді кажуть [138], що відома природа параметрів – незростаюча чи спадна, або що параметри позитивно або негативно орієнтовані [14]). Множину індексів позитивно орієнтованих параметрів позначимо через $J_1, J_1 \subseteq J$, а негативно орієнтованих – $J_2, J_2 \subseteq J$. Зрозуміло, що $J_1 \cup J_2 = J$.

[1] Визначення числових значень для кожного показника об`єкта, згідно [48], здійснюється з використанням одного з чотирьох способів або будь-якої їх сукупності:

– аналітичного (розрахункового);
– дослідно-статистичного;
– експериментального;
– експертного.

[2] Визначення вигляду та значень обмежень на область зміни параметрів є самостійною задачею, розв`язанню якої деякі автори приділяють увагу. Обмеження накладаються як на значення параметрів кожного об`єкта, так і на їх комбінації. В [49] розрізняють три групи обмежень:

– функціональні (коли від параметра вимагається підтримка значення на заданому рівні);

– обмеження на область допустимих значень, які, в свою чергу, можуть бути чотирьох видів: з нижніми обмеженнями на параметри, верхніми, двосторонніми (комбінація перших двох) та зв`язними; термін "зв`язні обмеження" вживається з таким змістом: це лінійні рівняння або нерівності, які об`єднують логічно зв`язані між собою параметри з деякими коефіцієнтами при них в спільні обмеження;

– екстремальні, коли вказуються напрямки бажаної зміни параметрів – за змістом задачі слід зменшувати чи збільшувати їх.

Кількісні (абсолютні чи відносні, нормовані) значення параметрів об`єктів (1.2) можуть бути як точковими, так і заданими у вигляді інтервалів допустимих значень. Деякі автори [5, 124, 138] виходять з того, що експертам складно давати точну кількісну оцінку ознаки об`єкта, а легше вказати інтервал, в якому ця оцінка лежить, тобто приблизну оцінку [38]. Методи такого інтервального оцінювання вперше розглядалися у [118]. В [123] запропоновано процедуру обробки таких оцінок з урахуванням компетентності експертів. Інколи експерт дає верхню, середню (найімовірнішу, найприйнятнішу чи бажану) та нижню оцінки [122]. Якщо метод обробки експертної інформації розрахований на використання точкових значень параметрів, здійснюється їх обчислення одним із способів

$$a^{(1)} = \left(3a^H + 2a^B\right)/5, \ a^{(2)} = \left(a^H + a^B\right)/2,$$

$$a^{(3)} = \left(a^H + 4a^* + a^B\right)/6, \ a^{(4)} = \left(a^H + 2a^* + a^B\right)/4,$$

де a^H, a^B, a^* – відповідно нижня, верхня та бажана (прогнозована чи найбільш імовірна) оцінки значень деякого параметра.

Експертне оцінювання завжди здійснюється в умовах різноманітних обмежень: фінансових, матеріальних, правових тощо. Тому при постановці задачі формується *множина обмежень* $S = \{S_1, ..., S_k\}$, які мають враховуватися при експертному оцінюванні. Наприклад, множина об`єктів (1.2) може бути також задана обмеженнями виду

$$g_{*l} \le g_l\left(a^1, ..., a^m\right) \le g_l^*, \ l \in \{1, ..., l_0\}, \tag{1.3}$$

де g_l – довільні дійснозначні функції дискретного аргументу, a^i, $i \in J$, – параметри об`єктів, g_{*l}, g_l^* – дійсні числа, l_0 – кількість обмежень.

Деякі автори розглядають множину об`єктів з нечіткими значеннями параметрів та змішаними значеннями, що містять різні форми задання параметрів об`єктів [87]. Розглядаються також задачі з неповною інформацією про об`єкти [93].

Іноді невизначеність можливих значень параметрів у вказаних інтервалах описується з допомогою деякого апріорного розподілу ймовірностей. У випадку повної невизначеності вибирають рівномірний неперервний розподіл на інтервалах $\left[a^{H(i)}, a^{B(i)}\right]$, $i \in J$. При цьому границі інтервалів одержуються на основі гіпотез або оцінок.

1.1.6. *Множина експертів та система переваг*

Група[1], що складається з k експертів[2], з множиною їх характеристик $E=\{E_1,...,E_k\}$, в межах однакових для всіх обмежень (наприклад, вказівки про кількість об'єктів, що мають бути вибрані, про спосіб ранжування об'єктів тощо) задають бінарні відношення на множині об'єктів (для простоти ці відношення та відповідні їм матриці позначатимемо однаковими символами):

$$B^l=\left(b_{ij}^l\right),\ i,j \in I,\ l \in L=\{1,...,k\}. \tag{1.4}$$

Елементи b_{ij}^l, $i,j \in I$, $l \in L$, матриць $B^l, l \in L$, виражають у деякій шкалі результат порівняння l-м експертом об'єктів чи наборів параметрів з індексами $i,j \in I$ (як правило, розглядається відношення переваги об'єктів, іноді –"схожість-відмінність" чи належність до нечіткої множини). Надалі, якщо аналізується інформація, одержана від одного експерта, тобто $k=1$, верхній індекс опускаємо, залишаючи те ж

[1] Використовуються наступні терміни:
група [4, 8, 26, 45, 67, 100, 102], колектив [4, 38, 100, 102, 107], комісія [6, 102], колегія [85, 102], комітет [4, 28], збори [4], множина [1, 20], набір [20], бригада.

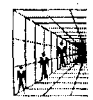
[2] У різних роботах використовують такі поняття:
експерти [1, 6, 8, 19, 20, 23, 25, 26, 28, 29, 30, 37, 40, 42, 47, 59, 67, 72, 73, 76, 80, 87, 88, 96, 100, 101, 102, 106, 118, 120, 122], особи, що приймають рішення [19, 37, 45, 54, 61, 69, 73, 119], виборці [4, 5, 38, 102], індивіди [4, 23, 38, 76, 102, 107], фахівці [37, 45, 102], суб`єкти [38, 76], люди [21, 45], консультанти [45, 59], дослідники [59, 100], особи [38, 45], аналітики [45, 59, 119], члени робочої групи [59, 76, 100, 102], люди, відповідальні за вибір [37, 45], виборщики [28], учасники опитування [101, 107], гравці [28], методи [96], кола турнірів [96], серії експериментів [96], судді [85], респонденти [76], замовники [119], менеджери [119], політики [119], "датчики" інформації [100], покупці [119], споживачі [100], користувачі [100], агенти[57] тощо.

позначення для матриці відношень $B=\left(b_{ij}\right)$, $i,j \in I$.

Можуть бути також задані чи обчислюватись коефіцієнти компетентності експертів ("ваги", кваліфікації, відносної ерудованості, важливості експертів, ефективності методів порівняння об'єктів, рейтингу турнірів тощо):

$$\rho_1,...,\rho_k. \tag{1.5}$$

Проблема виявлення переваг суб'єктів є найсуттєвішим моментом у ЗЕО [17]. Слід зазначити, що інформація (1.2), (1.4) може бути як об`єктивною, тобто результатами вимірювання, так і одержаною від експертів. Інформація (1.3), (1.5), як правило, має евристичний характер.



1.2. Класифікація задач експертного оцінювання

Будемо класифікувати ЗЕО за такими аспектами [33, 34, 37, 43]:

- за способами одержання та представлення експертної інформації;
- за формальною мовою, яка використовується для моделювання ЗЕО;
- за цілями, що стоять перед дослідником.

1.2.1. *Способи одержання та представлення експертної інформації*

Залежно від того, яким видом даних оперує дослідник, здійснюється класифікація ЗЕО за способом представлення даних. Більшість операцій з обробки інформації людиною в методах експертного оцінювання можна поділити на три групи [74]: операції з об'єктами, операції з об'єктами та критеріями, операції з критеріями. Доцільність застосування тієї чи іншої операції визначається параметрами задачі: кількістю критеріїв, характером шкал вимірювання інформації, кількістю об'єктів, характером оцінки об'єктів за шкалами критеріїв (словесні, кількісні, наближені, точні).

Потреба в оцінюванні об'єктів виникає у випадках, коли, по-перше, їх кількість є невеликою (до 20), а по-друге, проблема є погано структурованою і об'єкти легше оцінити як цілісні образи. Експертні оцінки критеріїв найчастіше застосовуються в практиці експертного оцінювання, що передусім пов'язано з набагато більшою кількістю об'єктів, порівняно з кількістю критеріїв [7, 53, 86].

За способами оцінювання всі перелічені операції можна поділити на два класи: одержання абсолютних та відносних оцінок об'єктів. В погано структурованих задачах, відповідно до досліджень [17, 70, 79], для одержання абсолютних оцінок об'єктів використовуються також вербально-числові шкали, в яких, поряд з кількісними оцінками значень градацій шкал, використовується їх вербальна інтерпретація. Перспективним вважається напрямок дослідження зв'язків та співвідношень між вербально-числовими шкалами та теорією нечітких множин.

Методи проведення групової експертизи поділяються на очні та заочні, індивідуальні та колективні, із зворотним зв'язком та без зворотного зв'язку. Загальна схема класифікації ЗЕО за використанням експертної інформації наводиться в табл. 1.5.

Таблиця 1.5. **Схема класифікації ЗЕО за даними**

1. Формування множини об`єктів. Проблемне наповнення:		
	– кількість об`єктів	
	– можливість появи нових об`єктів у процесі розв`язання задачі	
	– характер оцінок об'єктів: об`єктивні, експертні	
	– без параметрів	
	– з параметрами	
		= кількість параметрів
		= характер шкал (дискретні–неперервні)
		= кількість оцінок на шкалах (для дискретних параметрів)
		= фіксовані параметри в різних шкалах (номінальних, порядкових, інтервальних, подібності, абсолютних, змішаних)
		= інтервальне задання параметрів в різних шкалах
		= параметри з обмеженнями

Продовження таблиці 1.5

1. Формування множини об`єктів. Проблемне наповнення:			
			≡ існує функціональна залежність між параметрами
			≡ задано вигляд функцій (поліноми, позиноми, лінійні, квадратичні, тригонометричні, експонента тощо)
		= змішані значення параметрів	
2. Вагові коефіцієнти параметрів			
	– не виділяються		
	– задаються в порядковій шкалі		
		= ранжування параметрів	
		= нетранзитивна матриця парних порівнянь між параметрами	
	– фіксовані значення		
		= вектор вагових коефіцієнтів	
		= нетранзитивна матриця парних порівнянь між параметрами	
	– інтервальні значення (бальні, нормовані, центровані)		
3. Спосіб задання множини для вибору			
	– серед заданих експертами об`єктів		
	– дискретна множина		
		= без обмежень	
		= з обмеженнями	
			≡ задана множина точок
			≡ паралелепіпед
			≡ лінійні обмеження (прямі або зв`язні)
			≡ квадратичні
			≡ монотонні
			≡ сепарабельні
			≡ опуклі, ввігнуті тощо
	– неперервна множина		
		= без обмежень	
		= з обмеженнями	
			≡ паралелепіпед
			≡ лінійні обмеження (прямі або зв`язні)
			≡ квадратичні
			≡ монотонні
			≡ сепарабельні
			≡ опуклі, ввігнуті тощо

Продовження таблиці 1.5

4. Вигляд вхідної інформації			
	– задані строгі ранжування		
	– задані нестрогі ранжування		
	– бюлетені для голосувань		
	– матриця парних порівнянь		
		= одержана процедурою парних порівнянь	
		= одержана процедурою множинних порівнянь	
	– побудовані ранжування		
		= шляхом аналізу значень параметрів в різних шкалах	
		= знаходження компромісного (результуючого, групового) ранжування	
5. Форма задання матриць парних порівнянь			
	– якісні в різних шкалах		
	– кількісні		
		= процедури метризації (арифметизації)	
		= безпосереднє задання	
			≡ для ранжувань
			≡ для парних порівнянь
	– задачі перетворення в шкалах		
6. Задання інформації про експертів			
	– кількість можливих експертів		
	– можливість та спосіб одержання інформації від експертів		
	– особисті дані про кожного експерта		
	– визначення компетентності, вибір процедури, ієрархії експертної групи		
7. Вагові коефіцієнти компетентності експертів			
	– експерти рівноцінні		
	– вагові коефіцієнти задаються		
		= вид задання	
			≡ фіксовані
			≡ інтервальні
		= форма задання	
			≡ довільна (з дискретної множини значень або неперервної)
			≡ додатні
			≡ нормовані
			≡ центровані

Продовження таблиці 1.5

7. Вагові коефіцієнти компетентності експертів		
	– обчислюються або читаються з бази даних	
		= тестування (за заданими ранжуваннями, за ідеальним об`єктом)
		= задання матриці взаємооцінок (якісної чи метризованої)
		= процедури самооцінки
	– задачі перетворення форм задання коефіцієнтів	
8. Вибір метрики. Ранжування метрик, тобто вибір головної та допоміжних		
	– Хемінгова	
	– Евклідова	
	– ланцюгова	
	– Манхеттенська	
	– інші	
9. Вигляд агрегуючого критерію. Вибір головного та допоміжних критеріїв, визначення пріоритетності критеріїв		
	– мінімаксний	
	– лінійна згортка	
	– максимінний	
	– інші	
10. Параметри задачі		
	– термін між отриманням інформації про задачу та наданням рішення	
	– час, який ОПР може виділити для роботи над проблемою	
	– наявність кількох ОПР з неспівпадаючими цілями, їх ієрархічна підпорядкованість	
	– стабільність переваг ОПР (як у часі, так і залежно від підмножини допустимих розв`язків)	
11. Підхід до розв`язання задачі		
	– лексикографічний вибір	
	– метод обмежень	
	– метод послідовних поступок	
	– метод головного критерію	
	– лінійна згортка	
	– нелінійна схема компромісів	
	– правило знаходження розв`язку: Кондорсе, Борда, Нансона, відносної більшості голосів тощо	

Продовження таблиці 1.5

12. Завдання дослідника (визначення типу потрібного рішення)		
	– визначення ваги об`єктів	
	– визначення кращої підмножини (за Парето, мажоритарний підхід, за Еджвортом тощо)	
		= виділення єдиного об`єкта
	– визначення ранжування об`єктів)(точний чи евристичний метод, вибір критерію оптимальності ранжування, простору тощо)	
	– визначення компетентності експертів	
	– задачі розбиття (класифікації, кластеризації)	
	– підтримка обчислювального експерименту	
	– задача узгодження розв`язків в ієрархічній системі	
	– обчислення коефіцієнта ранжованості	
	– характер оцінок, які вимагаються (прогнозовані чи ті, що відносяться до поточного моменту)	
13. Аналіз результатів		
	– узгодження думок експертів	
	– прогноз (або екстраполяція)	
	– відновлення (або інтерполяція)	
	– порівняння різних методів за ефективністю та іншими показниками	
	– порівняння результатів в різних метриках	
	– порівняння ефективності різних критеріїв	
	– рекомендації, висновки, ілюстрації тощо	

1.2.2. *Математичні моделі, що використовуються в* ЗЕО

Найсуттєвішими характеристиками, за якими класифікуються методи розв'язання ЗЕО, є такі [56].

X1. Наявність чи відсутність об'єктивної моделі експертного оцінювання. Існує широкий клас проблем, для яких можна побудувати достатньо адекватну кількісну модель.

X2. Вигляд кінцевого розв'язку ЗЕО:

– виділення одного найкращого об'єкта;

– розділення досліджуваної множини об'єктів на кілька класів;

– впорядкування об'єктів за якістю;

– комбінації описаних вище вимог.

X3. Новизна проблеми для експерта. У випадку, коли проблема повторюється, експерт може вибрати типові правила експертного оцінювання, оскільки має можливість неодноразово спостерігати результати їх застосування. До нових відносяться проблеми, для яких експерт виробляє правило в ході її розв'язання, та проблеми, для яких типові правила ще не розроблено.

X4. За інформованістю експерта проблеми експертного оцінювання розділяються на два класи:

– якщо у експерта є цілісне уявлення про об'єкти, тобто гештальт, який часто є набагато ширшим та глибшим від його формального представлення за сукупністю оцінок по багатьох параметрах;

– коли експерт не має цілісного уявлення про об'єкти до початку процесу оцінювання: це уявлення виникає в нього лише як сукупність оцінок об'єкта за багатьма критеріями; ці проблеми називаються проблемами критеріально-експертного вибору.

X5. Розмірність проблеми експертного оцінювання: кількість критеріїв та кількість об'єктів вибору (альтернативних варіантів експертного оцінювання).

Перші три наведені характеристики є основними і характеризують обстановку експертного оцінювання. Дві останні характеристики пов'язані з вибором методу розв'язання для ситуацій експертного оцінювання. Ці ситуації наводяться в табл. 1.6.

Таблиця 1.6. **Класифікація ситуацій експертного оцінювання**

Тип моделі	Тип розв'язку	Критеріально-експертний вибір	Цілісний вибір
Об'єктивна модель при багатьох критеріях	Унікальні розв'язки	C1	C2
	Розв'язки, які повторюються	C3	C4
Суб'єктивна модель	Унікальні розв'язки	C5	C6
	Розв'язки, які повторюються	C7	C8

Прикладами ситуацій С1, С3 є задачі математичного програмування. Прикладом ситуації С2 є вибір об'єкта при наявності багатьох критеріїв. Ситуація С5 відповідає задачам багатокритеріальної оптимізації (ЗБКО). Ситуація С6 виникає при прийнятті особистих рішень. Ситуація С8 виникає при побудові експертних систем і може бути названа проблемою виявлення знань. В ситуації С7 використовуються моделі, які апроксимують поведінку людини [56]. Класифікація типових ЗБКО, яку наведено в [12], нараховує близько 100 типів. У випадку невеликої кількості елементів множини (1.2) (10–30 об'єктів [107, 138]) виникає задача багатоатрибутного вибору. У першому випадку головна увага приділяється алгоритмам пошуку найкращих рішень, в другому – процедурам порівняння наборів параметрів [107].

1.2.3. *Цілі, що стоять перед дослідником у задачах експертного оцінювання*

За *множиною цілей* $\left(C = \{C_1, ..., C_k\}\right)$, що стоять перед дослідником, розрізняють такі класи ЗЕО [82, 105, 108]:

– лінійне впорядкування об'єктів;
– виділення кращого об'єкта;
– виділення невпорядкованої підмножини кращих об'єктів;
– виділення впорядкованої підмножини кращих об'єктів;
– ранжування (упорядкування) усієї множини об'єктів;
– знаходження результуючого (колективного, групового) ранжування об'єктів за індивідуальними ранжуваннями, заданими експертами;
– впорядковане розбиття об'єктів (стратифікація, групове впорядкування);
– невпорядковане розбиття об'єктів (класифікація);
– визначення вагових коефіцієнтів об'єктів;
– колективний вибір.

За *цілями*, що стоять перед дослідником, серед ЗЕО можна виділити наступні класи задач [19, 20, 22, 34, 37, 43].

Задачі ранжування (упорядкування) об'єктів, у яких потрібно визначити порядок на множині об'єктів, є поширеними ЗЕО. У загальному випадку вимога впорядкування об'єктів означає, що ми хочемо визначити відносну цінність кожного з об'єктів. Часто для розв'язання задачі досить визначити квазіпорядок, де не всі об'єкти можна порівняти між собою. При цьому деякі об'єкти мають однакові ранги. Деякі задачі ранжування об'єктів описано у четвертому розділі цієї монографії. Задачі нестрогого ранжування описуються у п'ятому розділі.

Виділення невпорядкованої підмножини кращих об'єктів або одного кращого об'єкта, як частинний випадок. Нехай A – непуста „допустима" для вибору підмножина множини (1.1), що складається з $|A|$ об'єктів, яка називається пред'явленням [60]. Вибір полягає у виділенні з A деякої підмножини об'єктів A', $A' \subseteq A$, за певною ознакою чи ознаками.

Задачі кластеризації, класифікації об'єктів полягають у розділенні (розбитті) заданої множини об'єктів на групи (таксони, блоки, класи, згущення тощо), що складаються із взаємопов'язаних, „схожих" один на одного об'єктів [84]. Такі задачі вивчає кластер-аналіз (кластеризація, кластерний аналіз). На сьогодні відомо більше тисячі публікацій у цій області [84] і теорія ще знаходиться у стадії становлення.

Задача визначення вагових коефіцієнтів об'єктів полягає у приписуванні об'єктам деяких чисел – вагових коефіцієнтів їхньої важливості. Задачі визначення вагових коефіцієнтів розглядаються у шостому розділі монографії.

Задачі визначення компетентності експертів можна вважати частинним випадком визначення вагових коефіцієнтів об'єктів. З огляду на особливості постановки зазначених задач вони виділені в окрему групу і розглядаються у восьмому розділі.

Задачі відновлення. В багатьох застосуваннях [103] виникає ситуація, коли значення якоїсь ознаки є визначеними для одних і не визначеними (не відомими чи не достовірними) для інших об'єктів. Така ситуація може мати місце як для значень параметрів об'єктів (1.2), так і для деяких елементів матриці відношень (1.4), якщо вона є неповною. Деякі аспекти зазначеної задачі розглядаються у наступному розділі.

1.3. Деякі аспекти визначення оптимальних об'єктів

Різні аспекти порівняння об'єктів у ЗЕО та визначення оптимальних об'єктів досить повно розглянуто у роботах [33, 34, 37].

1.3.1. *Нормування значень*

Оскільки параметри об`єктів мають різну фізичну розмірність (вони характеризують властивості об`єктів, що мають різний фізичний зміст), то доцільно розглядати не самі значення параметрів об`єктів $a_i^j, i \in I, j \in J$, а відповідні їм нормовані значення $\omega_i^j\left(a_i^j\right), i \in I, j \in J,-$ монотонні перетворення, що приводять параметри до безрозмірного виду і дозволяють порівнювати їх між собою. У [91] наводяться такі види перетворень значень параметрів:

$$\omega_i^{(1)}=\omega_i^{(1)}\left(a^i\right)=\left(a_i^0-a^i\right)/\left(a_i^0-a_i^{\Gamma}\right), \tag{1.6}$$

$$\omega_i^{(2)}=\omega_i^{(2)}\left(a^i\right)=\left(a_i^0-a^i\right)/a_i^0, \tag{1.7}$$

$$\omega_i^{(3)}=\omega_i^{(3)}\left(a^i\right)=\omega_i^s\left(a^i\right),\ i \in J,\ s \geq 2, \tag{1.8}$$

де $a_i^0, a_i^{\Gamma}, i \in J,-$ відповідно оптимальне та найгірше значення $i-$го параметра. У виразі (1.8) величини $\omega_i^s\left(a^i\right), i \in I$, можуть визначатися співвідношеннями (1.6), (1.7), а показник s є цілим числом. Для перетворення (1.6) величини $\omega_i^{(1)}\left(a^i\right), \forall i \in I$, завжди лежать в інтервалі від нуля до одиниці, а для (1.7) величини $\omega_i^{(2)}(a^i), \forall i \in I$, можуть і не лежати в цьому інтервалі.

Крім зазначених, існує ще кілька способів нормування параметрів, метою яких є усунення проблеми непорівнянності параметрів у формальному відношенні. Серед найпоширеніших прийомів нормування кількісних показників наводяться:

– нормування середнім, якщо середні значення $a_i^C, i \in J$, i-го параметра на множині (1.2), суттєво відрізняються, а за змістом вони мають співпадати [60, 100]:

$$\omega_i^{(4)}=\omega_i^{(4)}\left(a^i\right)=a^i / a_i^C, i \in J, \tag{1.9}$$

– якщо мають співпадати не лише середні, а й дисперсії $\sigma_i, i \in J$, [38, 76]:

$$\omega_i^{(5)}=\omega_i^{(5)}\left(a^i\right)=\left(a^i-a_i^C\right)/\sigma_i, i \in J, \tag{1.10}$$

– якщо відоме $a_i^E, i \in J,-$ еталонне (нормативне, істинне, ідеальне, виміряне, відоме, бажане тощо) значення i-го параметра:

$$\omega_i^{(6)}=\omega_i^{(6)}\left(a^i\right)=a^i / a_i^E, i \in J, \tag{1.11}$$

$$\omega_i^{(7)}=\omega_i^{(7)}\left(a^i\right)=a^i / a_i^0, i \in J. \tag{1.12}$$

В роботі [5] наводиться такий спосіб нормування величин $a^i, i \in J$:

$$\omega_i^{(8)}=\omega_i^{(8)}\left(a^i\right)=\left(\left(a^i-a_i^C\right)/\sigma_i-a_i^{\Gamma}\right)/\left(a_i^0-a_i^{\Gamma}\right),\ i \in J, \tag{1.13}$$

що є похідним від способів (1.6) та (1.10) і приводить до розподілу значень параметрів між нулем та одиницею.

1.3.2. *Критерії експертного оцінювання*

У ЗЕО розглядаються два підходи до оцінювання – кардинальний (кількісний) та ординальний (порядковий) [119]. Класичний кардинальний підхід приписує кожному об'єкту кількісну оцінку (число) – значення деякої функції (показника якості розв'язку). Кардинальний підхід до оцінки об'єкта не охоплює багатьох природних ситуацій експертного оцінювання. Далеко не завжди об'єкт вдається оцінювати єдиною функцією. Істотно ширшими є застосування ординального підходу до оцінок об'єктів. Останній не вимагає оцінки кожного об'єкта, а пов'язаний лише з порівнянням будь-якої пари об'єктів та виділенням того з них, який має більшу перевагу. Формалізм ординального підходу базується на теорії бінарних відношень. Розглянемо основні поняття, що використовуються в цій теорії.

Кожна векторна оцінка створює в ОПР образ деякого об'єкта, який має відповідні властивості. Інколи для граничних значень параметрів об`єктів вводяться спеціальні назви.

Найяскравішими, найконтрастнішими для ОПР є образи, які відповідають лише найкращим та найгіршим оцінкам за всіма критеріями.

Утопічною (ідеальною) точкою (об`єктом) [95] називається точка a^+ з координатами $a^+ = \left(\min_{i\in I} \rho_1\omega_1^i, ..., \min_{i\in I} \rho_m\omega_m^i\right)$, де $\rho_j, j \in J$ – елементи вектора вагових коефіцієнтів параметрів.

Антиутопічною точкою (об`єктом) [95] називається точка a^- з координатами $a^- = \left(\max_{i\in I} \rho_1\omega_1^i, ..., \max_{i\in I} \rho_m\omega_m^i\right)$.

Векторні оцінки, які мають лише найкращі та найгірші значення за всіма критеріями, називаються *опорними ситуаціями.*

Прямокутник, вершинами якого є точки a^+ та a^-, називається *полем корисності рішень.*

Наведемо приклади найчастіше використовуваних підходів до визначення критерію оптимальності об'єктів.

К1. Поширеною схемою компромісів є мінімаксна модель (згортка Гермейєра) [18, 91]:

$$a^* \in Arg \min_{i\in I} \max_{j\in J} \rho_j \omega_i^j q_j,$$

де q_j – значення функції розподілу ймовірностей значень параметрів об`єктів. Іноді цей критерій записується у вигляді

$$a^* \in Arg \max_{j\in J} \min_{i\in I} \rho_j \omega_i^j q_j.$$

Критерій Гермейєра застосовується тоді, коли [95]:

- ймовірності появи значень параметрів відомі;
- слід враховувати появу тих чи інших значень параметрів (кожного окремо чи у комплексі);
- допускається деякий ризик;
- рішення реалізується один або декілька разів.

Цей критерій є узагальненням мінімаксного критерію, який опишемо нижче. У випадку рівномірного розподілу $q_i = 1/m$, $i \in J$, мінімаксний критерій та критерій Гермейєра співпадають. Якщо функція розподілу є невідомою [95], а рішення реалізується невелику кількість разів, то, використовуючи критерій Гермейєра, отримують необгрунтовано великий ризик.

К2. Мінімаксний критерій є таким:

$$a^* \in Arg \min_{i\in I} \max_{j\in J} \rho_j \omega_i^j, \tag{1.14}$$

Вираз (1.14) інколи записується так:

$$a^* \in Arg \max_{j\in J} \min_{i\in I} \rho_j \omega_i^j.$$

Цей критерій характеризує дуже обережну ОПР. Застосування цього критерію виправдане тоді, коли ситуація експертного оцінювання характеризується такими обставинами [95]:

- про закономірності виникнення різних значень параметрів об`єктів нічого не відомо;
- доводиться зважати на появу різних значень параметрів;
- рішення реалізується лише один раз;
- необхідно виключити будь-який ризик, тобто ні за яких обставин неможливо допустити результат менший, ніж дає критерій (1.14).

К3. Іноді [95] використовується розширений мінімаксний критерій

$$a^* \in Arg \max_{p} \min_{q} \sum_{j\in J} \sum_{i\in I} \rho_j \omega_i^j p_i q_j, \tag{1.15}$$

де p – вектор значень функції розподілу для об`єктів, $q$ – вектор значень функції розподілу для параметрів. Розширений мінімаксний критерій дає можливість знайти найвигідніший розподіл ймовірностей на множині об`єктів, якщо у багаторазово повторюваній ситуації експертного оцінювання немає відомостей про ймовірності параметрів об`єктів.

К4. У [29] вважається, що із зменшенням напруженості ситуації переваги на множині параметрів вирівнюються. Тому, якщо ситуація не є напруженою, можна застосовувати модель інтегральної оптимальності (позицію нейтралітету)

$$a^* \in Arg \min_{i\in I} \sum_{j\in J} \rho_j \omega_i^j.$$

К5. Максимінний критерій [16, 121] є таким:

$$a^* \in Arg \max_{i\in I} \min_{j\in J} \rho_j \omega_i^j,$$

і він відповідає максимальній обережності ОПР, тобто цей критерій характеризує песимістичну позицію ОПР, яка прагне одержати найкращий результат у найгіршому випадку.

К6. Критерій мінімального "жалкування" за i-м об`єктом [16, 121] представляється так:

$$a^* \in Arg \min_{j\in J}\left(\max_{i\in I} \rho_j\omega_i^j - \rho_j\omega_i^j\right).$$

К7. Інколи використовують критерій Севіджа, який характеризує позицію відносного песимізму [16, 121]:

$$a^* \in Arg \min_{i\in I}\max_{j\in J}\left(\max_{i\in I} \rho_j\omega_i^j - \rho_j\omega_i^j\right). \qquad (1.16)$$

К8. Критерій максимаксу [16, 121]

$$a^* \in Arg \max_{i\in I}\max_{j\in J} \rho_j\omega_i^j,$$

характеризує ОПР, схильну ризикувати, і відображає її оптимістичну позицію.

К9. Критерій Гурвіца описується як

$$a^* \in Arg \max_{i\in I}\left(\alpha^{(1)}\min_{j\in J}\rho_j\omega_i^j + \left(1-\alpha^{(1)}\right)\max_{j\in J}\rho_j\omega_i^j\right),$$

де значення вагового множника $\alpha^{(1)}$ фіксоване в інтервалі $[0,1]$: $\alpha^{(1)}\in[0,1]$. Цей критерій застосовується тоді, коли ОПР виходить з компромісу між оптимістичним та песимістиним підходами. При $\alpha^{(1)}=0$ він перетворюється у критерій азартного гравця, а при $\alpha^{(1)}=1$ – у мінімаксний критерій. У реальних практичних ситуаціях адекватний вибір значення $\alpha^{(1)}$ настільки складний, як і вибір адекватного критерію (принципу оптимальності) взагалі. Найчастіше значення $\alpha^{(1)}$ фіксується на рівні $\alpha^{(1)}=0,5$.

К10. Критерій Ходжа-Лемана представляється формулою

$$a^* \in Arg\left(\alpha^{(2)}\sum_{j\in J}\rho_j\omega_i^j q_j + \left(1-\alpha^{(2)}\right)\min_{j\in J}\rho_j\omega_i^j\right), \qquad (1.17)$$

де $\alpha^{(2)}$ – параметр, що відображає ступінь довіри ОПР до розподілу ймовірностей параметрів $q_j, j\in J$. Якщо ця довіра велика, тобто $\alpha^{(2)}=1$, то критерій Ходжа-Лемана переходить у критерій Байеса-Лапласа, який опишемо нижче. При $\alpha^{(2)}=0$ – перетворюється на мінімаксний критерій (1.14). Ситуація, в якій застосовується критерій Ходжа-Лемана, має задовольняти таким вимогам [95]:

– ймовірності появи значень параметрів об`єктів не відомі, але можливі деякі припущення щодо розподілу ймовірностей;

– прийняте рішення теоретично допускає нескінчену кількість реалізацій;

– при малій кількості реалізацій допускається деякий ризик.

К11. Критерій Лапласа (згідно [95] – Байеса-Лапласа), при якому вважається, що всі значення з допустимих інтервалів зміни параметрів об`єктів однаково ймовірні

$$a^* \in Arg \max_{i\in I}\left(\sum_{j\in J}\rho_j\omega_i^j q_j\right)/m.$$

При цьому критерії передбачається [95], що ситуація, в якій приймається рішення, характеризується такими обставинами:

– ймовірності появи значень параметрів є відомими і не залежать від часу;

– рішення теоретично реалізується нескінчену кількість разів;

– для невеликого числа реалізацій рішення допускається деякий ризик.

Цей критерій характеризує позицію нейтралітету ОПР. Він співпадає з критерієм (1.14) у випадку рівномірного розподілу $q_j = 1/m,\ j\in J$.

К12. У [29] пропонується шукати найкращий об`єкт, використовуючи правило

$$a^* \in Arg \min_{i\in I}\sum_{j\in J}\left(\left(1-\omega_i^j\right)^{-1} + \rho_j\omega_i^j\left(1-\omega_i^j\right)\right).$$

Згідно із [10, 95] критерії (1.14)–(1.16) та (1.17) використовуються у випадку ідеалізованих практичних ситуацій з метою вивчення внутрішніх зв'язків проблеми експертного оцінювання. Вони дозволяють краще відчути особливості ситуації, яка моделюється, і, таким чином, послабити вплив суб`єктивного фактора на експертне оцінювання. Результати застосування різних критеріїв у вигляді одержаних підмножин найкращих рішень пред'являються ОПР для остаточного вибору.

1.3.3. *Міри близькості*

При знаходженні розв`язку ЗЕО [103] важливе значення мають відстані між відповідними матрицями бінарних відношень (1.4) та між наборами параметрів (1.2) у просторі параметрів. Для вимірювання близькості наборів параметрів (1.2) чи відношень (1.4) спочатку нормуються ознаки (перетвореннями (1.6)-(1.13)), а потім вводиться міра близькості [84]: типу *відстані* d (чим більшою є величина, тим менш схожими є об`єкти) або типу *міри схожості* δ (зворотна залежність). Як правило, вважається, що $0 \le d < \infty$, $0 \le \delta \le 1$. У такому випадку легко перейти від d до δ : $\delta = 1/(1+d)$. Часто на відстань накладається необхідність виконання нерівності трикутника: $d_{ij} + d_{jl} \ge d_{il}$, $i,j,l \in I$. До найпоширеніших мір близькості можна віднести такі.

В [82] наводиться відстань

$$d_{il}^{(1)} = \left(\sum_{j \in J} \left| a_i^j - a_l^j \right|^s \right)^{1/s}, \quad i,l \in I,$$

між об`єктами $a_i \in A$ та $a_l \in A$, $i,l \in I$, які характеризуються кількісними ознаками: $a_i = (a_i^1,...,a_i^m)$, $a_i^j \in R$, $i \in I$, $j \in J$. При $s = 2$ одержуємо звичайну евклідову відстань [5, 82, 84, 85, 111]

$$d_{il}^{(2)} = \left(\sum_{j \in J} \left(a_i^j - a_l^j \right)^2 \right)^{1/2}, \quad i,l \in I. \tag{1.18}$$

При $s = 1$ маємо манхеттенську метрику [5, 82, 84, 85]

$$d_{il}^{(3)} = \sum_{j \in J} \left| a_i^j - a_l^j \right|, \; i,l \in I. \tag{1.19}$$

При $s \to \infty$ одержуємо рівномірну чебишовську метрику [5, 82]

$$d_{il}^{(4)} = \max_{j \in J} \left| a_i^j - a_l^j \right|, \; i,l \in I.$$

В [75] пропонується розглядати евклідову міру близькості на метризованих відношеннях

$$d_{il}^{(5)} = \left(2 \sum_{j > t} \left(b_{jt}^i - b_{jt}^l \right)^2 \right)^{1/2}, \quad i,l \in L, \; j,t \in I.$$

Але найпоширенішою мірою для відношень у порядкових шкалах є метрика (відстань) Хеммінга [30, 82, 88, 90, 111 та ін.]

$$d_{il}^{(6)} = \frac{1}{2} \sum_{j \in I} \sum_{t \in I} \left| b_{jt}^i - b_{jt}^l \right|, \; i,l \in L. \tag{1.20}$$

В [75] міра близькості між двома метризованими відношеннями вводиться як

$$d_{il}^{(7)} = \sum_{j > t} \left| b_{jt}^i - b_{jt}^l \right|, \; i,l \in L, \; j,t \in I.$$

Відстань Махаланобіса [84] для наборів кількісних показників $a_i = (a_i^1,...,a_i^m), i \in I$, задається як

$$d_{il}^{(8)} = (a_i - a_l)^T W^{-1} (a_i - a_l), \; i,l \in I,$$

де W^{-1} – матриця, обернена до коваріаційної, T – знак тран-спонування.

Застосовується також відстань Журавльова для наборів параметрів у змішаних шкалах (кількісних, рангових, номінальних) [84]

$$d_{il}^{(9)} = \sum_{j \in J} \alpha_{il}^j, \; i,l \in I, \tag{1.21}$$

де $\alpha_{il}^j = \begin{cases} 1, & \text{коли } \left| a_i^j - a_l^j \right| \le \varepsilon_j, \\ 0, & \text{у протилежному випадку,} \end{cases}$

ε_j – порогове значення j – ї ознаки, $j \in J$.

Автори роботи [5] до основних мір близькості при розгляді задачі комівояжера відносять афінну метрику

$$d_{il}^{(10)} = \left(\sum_{j \in J} \left(a_i^j - a_l^j \right)^2 + \prod_{j \in J} \left(a_i^j - a_l^j \right) / 2 \right)^{1/2} \quad i,l \in I. \tag{1.22}$$

Міра схожості Хеммінга для номінальних ознак [84] має вигляд:

$$\delta_{il}^{(1)} = \alpha_{il} / m, \; i,l \in I, \tag{1.23}$$

де α_{il} – кількість одиниць та нулів по ознаках i -го та l -го наборів параметрів, що співпадають.

Міра схожості Роджерса-Танімато для номінальних ознак [84] задається так

$$\delta_{il}^{(2)} = \alpha_{il}^{(1)} / \left(\alpha_i^{(2)} + \alpha_l^{(2)} - \alpha_{il}^{(1)} \right), \ i,l \in I, \qquad (1.24)$$

де $\alpha_{il}^{(1)}$ – кількість одиниць по ознаках i-го та l-го наборів параметрів, що співпадають, $\alpha_i^{(2)}$ – кількість одиниць серед ознак i-го набору параметрів.

Апроксимаційна міра схожості для об`єктів, заданих у змішаних шкалах (кількісних та номінальних) [84] визначається за формулою:

$$\delta_{il}^{(3)} = \sum_{j \in J} \alpha_{il}^j, \ i,l \in I,$$

де $\alpha_{il}^j = \begin{cases} \omega_i^{j(5)} \omega_l^{j(5)} - \text{для кількісних показників} \\ \qquad \text{при нормуванні їх за формулою (1.10)}, \\ 1/\alpha_S^{j(1)} \sqrt{\alpha_j^{(2)} - 1}, \ - \text{для номінальних показників}, \end{cases}$

$\alpha_S^{(1)}$ – кількість спостережень в s-й градації, $\alpha_j^{(2)}$ – кількість градацій.

В [5] наводиться міра порівняння якісних відношень

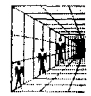
$$\delta_{il}^{(4)} = \sum_{j,t \in J} \left[\left| b_{jt}^i - b_{jt}^l \right| \right] / \left(\sum_{j,t \in J} \left(b_{jt}^i \right)^2 \sum_{j,t \in J} \left(b_{jt}^l \right)^2 \right)^{1/2}, \ i,l \in L,$$

де квадратні дужки означають цілу частину. Якщо відношення B^i та B^l співпадають, то $\delta_{il}^{(4)} = 0$, коли ж відношення є повністю протилежними, то $\delta_{il}^{(4)} = 1$. Тому в [5] вводиться міра узгодженості відношень:

$$\delta_{il}^{(5)} = 1 - \delta_{il}^{(4)}, \ i,l \in L.$$

Згідно [84], формула (1.20) для визначення відстані застосовується у задачах, в яких наявність чи відсутність градацій ознаки не має значення; формула (1.21) – коли наявність градацій є важливішою від їх відсутності; формулу (1.19) доцільно застосовувати у поєднанні з (1.11) та (1.12) у тих випадках, коли є сенс додавати відхилення від еталона (наприклад, при багатокритеріальній оцінці якості); відстань (1.18), як правило, поєднується з (1.10) і має перевагу "природної", людської метрики, орієнтованої на виявлення об`єктів, які знаходяться близько один від одного; застосування формули (1.22) виправдане у багатовимірній ситуації сконструйованих

ознак, якщо скорочення розмірності простору ще не проведено; формула (1.23) визначається кількістю ознак, по яких об`єкти $a_i, a_l$, $i,l \in I$, віддалені не більше, ніж на величину значення деякого порогу $\varepsilon_j, j \in J$, який задається експертами; міру вигляду (1.24) одержано як наслідок використання функціоналів якості класифікації об`єктів досить загального виду, тобто вона є обгрунтованою теоретично.



1.4. Вплив фактора суб′єктивності на прийняття рішень

Процеси одержання, формалізації та передачі експертної інформації крім об`єктивних труднощів, які породжуються власне досліджуваним науковим напрямком, супроводжуються ще й труднощами суб`єктивного характеру, що виникають при організації експертного опитування, координації дій колективу експертів, у взаємовідносинах групи дослідників, узгодженні знань, одержаних від різних експертів тощо [15, 133, 134]. Згідно [124], недооцінка проблеми організації опитування колективу експертів при проведенні експертизи ставить під сумнів цінність результатів дослідження взагалі. Проблеми одержання від експертів повної, достовірної, несуперечливої інформації та можливості людини при оцінці та аналізі реальних ситуацій широко досліджувалися багатьма фахівцями і знайшли відображення в літературі [15, 36, 37, 39, 41, 59, 69, 133, 134, 137, 140, 143 та ін.].

1.4.1. *Критерії оцінки можливостей експертів*

Згідно [136], експерт повинен вміти узагальнювати знання, усвідомлювати та виявляти проблеми, робити правдоподібні висновки з неповної інформації, пояснювати свої судження, реконструювати та реорганізовувати свою інформацію, визначати, чи знаходиться проблема в його компетентності, тощо. Критеріями оцінки можливостей експертів слугують [73, 135]:

- порівняння із заздалегідь відомими вірними відповідями об`єктивного характеру, хоча не для всіх типів ЗЕО можна підібрати ситуації, для яких заздалегідь відомо правдиві відповіді;

– послідовність, сталість, повторюваність у вираженні переваг, коли експертам пропонуються ті ж питання, ті ж об`єкти, але рознесені у часі та послідовності пред`явлення;

– можливість побудови складного правила розв`язання [135] з урахуванням всіх критеріїв без спрощення стратегії при експертному оцінюванні;

– транзитивність, що є дуже поширеною умовою, яку інколи називають основним правилом логічного виводу.

Як свідчать експерименти [28, 72, 96, 126], результати порівнянь експертами різних об`єктів часто не відповідають постулату транзитивності. В [69, 137, 140, 142] навіть стверджується, що люди ведуть себе нетранзитивно у більшості випадків. Вважається [90], що нетранзитивність є характерною для суджень про об`єкти, до яких експерт ставиться досить байдуже. В [82], навпаки, стверджується, що найсприятливішим є той випадок, коли для експерта є байдужим кінцевий результат експертизи – це є запорукою об`єктивності. Огляд деяких досліджень, пов`язаних з критеріями оцінки можливостей експертів, наводиться в [132].

1.4.2. *Можливості експертів*

Раніше постулювалась можливість одержання від експертів надійної інформації майже в будь-якому вигляді [73]. Але на сьогодні відомо результати психологічних досліджень, які показують, що при порівнянні багатовимірних об`єктів, класифікації, оцінці їх загальної корисності поведінка людини суттєво відрізняється від раціональної. В багатьох роботах формулюється теза про обмежені можливості людини при розв`язанні нею задач оцінки, порівняння багатовимірних об`єктів та інших ЗЕО. В таких задачах люди часто використовують спрощені стратегії при збільшенні навантаження на понятійний апарат [54]: одні відразу спрощують задачу, зменшуючи таким чином кількість параметрів, інші намагаються врахувати всі параметри і в цьому випадку обмежені можливості людини проявляються у непослідовності оцінок, в нетранзитивності [52, 54].

Експерт може послідовно та надійно виражати свою стратегію біля опорних ситуацій [135]. Людина використовує, як правило, лише невелику частину інформації [69], причому є приклади того, що надання їй додаткової інформації не змінювало рішень, тобто вона її не використовувала. Тому, що людина використовує евристики, які призводять до протиріччя [74], розв`язання проблеми вибору, зроблене при використанні лише частини інформації, нічого не дає особі, відповідальній за вибір [59].

Навіть можливості людини з упорядкування об`єктів за їх важливістю є досить обмеженими. Результати експериментів [135] свідчать про те, що при семи параметрах і двох градаціях на шкалах людина ще досить впевнено проводить порівняння об`єктів. При збільшенні кількості параметрів об'єктів людські можливості не дозволяють здійснювати надійне та стабільне порівняння об'єктів. Крім того, було проведено експеримент [135], який доводить: значущі для експерта об`єкти ранжувалися надійно і стало. Обмеженість людини в одержанні та обробці інформації залежить не стільки від її індивідуальних особливостей, скільки від спільної для всіх людей структури організації пам`яті. Наприклад, в [59] експериментально доведено, що при 7-8 параметрах з 2–6 оцінками на шкалах експерт може послідовно і несуперечливо порівнювати об`єкти, що відрізняються оцінками за двома параметрами, причому інші оцінки цих об`єктів мають належати опорній ситуації, тобто мати найкращі чи найгірші значення по всіх параметрах.

Серед основних характеристик експерта при розв'язанні задач аналізу експертної інформації відзначаються:

– об'єм короткочасної людської пам`яті дуже обмежений – вона вміщує від 5 до 9 структурних одиниць інформації [65, 69];

– пластичність, коли людина або пристосовується до типу складної для неї інформації, або пристосовує задачу до своїх можливостей шляхом введення евристик в складних ЗЕО [67];

– здатність експерта до навчання на своїх діях методом "спроб та помилок" [135].

В [92] припускається, що існує обумовлене метою функціонування системи, але не відоме експертові правило π порівняння об`єктів, що має властивості відношення переваги, та його порушена експертом реалізація. Характеристикою такого порушення виступає ймовірність $\pi(a_i, a_j)$ помилкової (в порівнянні з $\pi$) відповіді експерта при порівнянні експертами об`єктів $a_i, a_j, i, j \in I$. Навіть при незначній величині нетранзитивні ланцюжки порівнянь при великій кількості проведених експериментів (чи невеликій множині об`єктів, що порівнюються) будуть з`являтися досить часто. В [92] досліджується ймовірність сприйняття експертом ланцюжків деяких співвідношень як транзитивних, які насправді не є такими.

У багатьох випадках експертам легше запропонувати розмиту оцінку значень параметрів об`єктів, вагових коефіцієнтів чи відношень між об`єктами [109]. Нечіткість властива не тільки поведінці людини [96], але й часто зустрічається при дослідженні різних фізичних та технічних задач. Деякі експерименти свідчать, що оцінки фахівців дають похибку не більше 5%, яка, як правило, цілком порівняна з похибкою багатьох технічних розрахунків. А згідно [106], від експертних оцінок у багатьох випадках слід чекати похибку до 5-10 %. Нечіткість інформації може бути також наслідком того, що розглядаються об`єкти, в яких є велика похибка у вимірюваннях параметрів, нестійкість ситуацій у часі, зміни значень параметрів об`єктів залежно від підмножини об`єктів чи важливості параметрів від їх значень, наявності відмінностей у думках експертів тощо [14, 51, 63, 138]. Але відомо, наприклад [73], що застосування кількох евристичних правил суттєво зменшує кількість помилок, які робляться при виявленні експертної інформації. Тому у цій монографії така значна увага приділяється введенню та використанню евристики.

Не зважаючи на те, що дані цілої низки досліджень підтверджують обмеженість можливостей експертів в ЗЕО [135], можливості людини можна зробити значно ефективнішими, застосовуючи відповідні математичні методи. Адекватність експертної інформації та способів її обробки реальним про-

цесам значно підвищується при застосуванні комплексного аналізу – якщо використовується комбінація кількох експертиз та методів їх обробки. Вважається [79], що експерт може розв'язати задачу ранжування для не більше, ніж 20 об'єктів, а в деяких роботах [46, 73] називається кількість не більше, як 7-10 об'єктів. При цьому ранжування може здійснюватися експертом кількома способами. Детальний огляд задач ранжування наведено, наприклад, в [46, 78, 79]. Відомо також, що найпоширенішою шкалою є бальна шкала. В той же час бальна шкала є найзручнішою за трудомісткістю для експертів та щодо витрат на проведення експертизи [125].

Дослідження проблем цілісного вибору показали [73], що виникнення образу об'єкта у експерта суттєво підвищує надійність результатів експертизи. Особливо це справедливо для погано структурованих задач, коли виникають складності побудови шкал вимірювання для окремих критеріїв і експертові легше порівняти чи оцінити цілісний образ об'єкта. Але задача порівняння об'єктів за критеріями є досить складною для експерта вже при наявності трьох критеріїв [66, 73].

1.4.3. *Вимоги до колективу експертів*

Крім дослідження особистих якостей експертів у ЗЕО слід враховувати також особливості діяльності групи експертів. Відомо, що:

- коли кількість об`єктів складає від 3 до 12 одиниць, узгодженість між експертами, як правило, є дуже високою [126];
- доцільно включати в групу від 10 до 20 експертів [82], хоча можливі деякі відхилення як в бік збільшення, так і в бік зменшення групи; при надто великій кількості експертів виникають труднощі в організації експертизи;
- експерти чутливі до зворотного зв`язку і наближають свої оцінки до середньогрупової оцінки, яка їм передається, навіть якщо за неї видається фіктивна оцінка;
- в проміжних ситуаціях (тобто не в опорних точках) найбільшою мірою проявляється відмінність між оцінками експертів [73];

– аналіз самооцінок не показав їхнього впливу на результати опитування зв`язку самооцінок з близькістю оцінок експертів до середньогрупових оцінок та з інтенсивністю змін в різних турах експертизи;

– для того, щоб забезпечити стабільність оцінок експертів та в серіях експериментів, слід розглядати невелику кількість об`єктів, які порівнюються: від 5 до 9 об'єктів;

– надійнішим правилом зупинки експертної процедури автори роботи [124] вважають не узгодженість оцінок експертів, а їх стабілізацію від туру до туру, мірою якої може бути, наприклад, частка експертів, які змінили оцінки між сусідніми турами експертизи.

1.4.4. *Процедури експертного опитування*

В [59] зазначається, що проблема коректного одержання інформації від експертів є ключовою. Вважається також, що анонімність опитування – скоріше недолік при одержанні експертної інформації. Можна виділити два типи процедур експертного опитування [124]: процедури з особистими контактами між експертами та багатотурові, ітеративні процедури без особистих контактів з контрольованим зворотним зв'язком. Не зважаючи на те, що в практиці, особливо вітчизняній, широко застосовуються процедури першого типу, пріоритет на сьогодні належить процедурам другого типу – вони глибше опрацьовані в науковому плані і широко застосовуються в зарубіжній практиці експертних оцінок. До першого типу належать: метод інтелектуальної атаки, метод віднесеної оцінки, процедури номінальної групи. До другого – метод Делфі та деякі інші процедури.

Результати експериментів [124], а також роботи соціальних психологів, що показали негативні ефекти впливу колективу на оцінку, дозволяють надати перевагу повній анонімності (з трьох альтернатив: повної анонімності, часткової анонімності та її відсутності) при обміні інформацією. Щодо вигляду інформації для передачі по зворотному зв`язку (оцінки, обгрунтування, оцінки та обгрунтування), то пропонується зупинитися на змішаному варіанті – оцінки та обгрунтування. Питання про кількість "датчиків" інформації в одному турі безпосередньо пов`язане з небезпекою конформізму – тому

найкращим вважається індивідуальний зворотний зв`язок. Критеріями якості експертних процедур можуть бути:

– ступінь суб`єктивної впевненості експерта у своїх відповідях;

– втрати часу на реалізацію процедури;

– трудомісткість проведення експертизи для експертів та дослідника;

– оцінка самими експертами якості процедур.

Щодо процедур експертного опитування, то, наприклад, при порівнянні методу "Делфі" та методу комітету (дискусії за "круглим столом") не було зафіксовано статистично значимого зв`язку між точністю відповідей експертів та самооцінками компетентності, розміром групи експертів (брали участь 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11 чоловік, а у [110] називається кількість 3, 5, 7, 9, 11 учасників експертизи) та методом опитування [124]. Взагалі виділяють такі види взаємодії експертів [82]: вільний обмін інформацією; обмін інформацією регламентований; експерти ізольовані. Відзначається [59], що анонімність опитування є скоріш недоліком, ніж позитивною рисою при прийнятті відповідних рішень, оскільки керівник має знати, на думку яких експертів він покладається; зворотний же зв`язок по проміжних результатах підштовхує експертів до конформізму.

1.4.5. *Класифікація методів одержання експертної інформації*

Проблема коректного одержання інформації від експертів є ключовою у ЗЕО. Класифікація методів одержання експертної інформації наводиться в табл. 1.7.

Таблиця 1.7. **Класифікація методів одержання експертної інформації**

1. Класифікація за ступенем автоматизації		
	– а) Не автоматизовані, діалогові методи	
		= фокусоване інтерв'ю з експертом (при заданому списку тем та відкритих запитань)
		= аналіз протоколів – розшифровка суджень експертів, які прозвучали в ході роботи
		= генерування ідей – форсоване генерування великої кількості гіпотез групою фахівців

Продовження таблиці 1.7

1. Класифікація за ступенем автоматизації			
		= спостереження за співучасниками експертизи	
		= психологічне шкалювання – введення шкал	
		= структуроване інтерв'ю – інтерв'ю на основі запланованої структурованої програми діалогу	
		= інтерв'ю з навчанням – інженер по знаннях демонструє розуміння експерта шляхом перефразування або розв'язання проблеми	
		= одержання неточних знань, коли експерт висловлює неточні знання (гіпотези)	
		= неструктуроване інтерв'ю – на основі загальних запитань	
		= самоспостерігання, самозвітність	
		= критичний огляд	
	– б) Автоматизовані (інтерактивні) або частково автоматизовані (змішані) методи		
		= методи, які ґрунтуються на інтерв'ю	
			≡ інтерв'ю із змінною ініціативою, коли дослідник бере інтерв'ю в експерта і навпаки
			≡ аналіз узгодженості експертної інформації
			≡ планування на основі діаграм впливу
			≡ моделювання – використання моделей предметної області при інтерв'ю (поглибленої моделі, причинної, когнітивної), можливо незалежно від засобів одержання експертної інформації
			≡ використання багатьох джерел незалежно, а після цього їх порівняння та узагальнення
			≡ використання різних методів експертного оцінювання
			≡ аналіз протоколів
			≡ репертуарні решітки
			≡ аналіз текстів
		= методи, які ґрунтуються на навчанні	
			≡ аналогія – застосування способів експертного оцінювання для аналогічних ситуацій
			≡ учнівство – навчання шляхом спостереження за роботою експерта
			≡ вибір зразків – вибір відповідної множини зразків для навчання

Продовження таблиці 1.7

1. Класифікація за ступенем автоматизації			
			≡ навчання на основі пояснення – виведення загального правила з прикладів
			≡ дерево розв'язків – створення та аналіз дерев розв'язків
			≡ індуктивне виведення моделі за прикладами
			≡ виведення правил з інших форм знань
			≡ виведення по аналогії – порівняння схожості з прикладами з позитивним результатом пошуку несправності на відміну від негативних
			≡ виведення часткових результатів на основі загальних законів
2. Класифікація за характером методології			
	– керовані (прямі) методи (інтерв'ю; перелік запитань; аналіз розв'язків; аналіз протоколів; аналіз виведення)		
	– некеровані (непрямі) (багатофункціональне шкалювання; ієрархічна кластеризація; мережі з узагальненою вагою; впорядковані дерева; репертуарні решітки)		

В реальних системах експертного оцінювання часто комбінуються декілька підходів до одержання експертної інформації або використовуються різні методи для різних типів експертної інформації [139].

1.5. Особливості колективного експертного оцінювання

Різні аспекти колективного вирішення ЗЕО достатньо повно розглядалися у роботах [24, 33, 34, 36, 37, 39, 41, 133, 134].

1.5.1. *Поняття узгодженості*

Будемо використовувати поняття *узгодженості* у чотирьох аспектах:

– якщо задано відношення на множині об'єктів і вибирається деяке результуюче відношення, узгоджене із заданими;

– коли аналізується узгодженість експертів за заданими ними відношеннями на множині об'єктів, не знаходячи результуючого відношення;

– для метризованих відношень вводиться поняття кардинальної узгодженості в силу переваги або надтранзитивності;

– в деяких роботах під узгодженістю розуміють задачу визначення ранжування об'єктів за метризованою чи якісною матрицею парних порівнянь, яка відповідає нетранзитивному відношенню.

Накопичений досвід експертного оцінювання в різних областях людської діяльності переконливо свідчить про те, що будь-які статистичні операції стають кориснішими та обґрунтованішими при зменшенні кількості ознак, що використовуються для аналізу [84]. Тому проблема агрегування ознак об'єктів у меншу кількість сконструйованих "факторів" [40] (аспектів [82] тощо) займає значне місце в ЗЕО. Аналіз сукупності експертних оцінок всієї групи експертів полягає у визначенні рівня загальної узгодженості експертних оцінок та виділенні, при необхідності, в групі "однорідних" підгруп, які об'єднують експертів з узгодженими оцінками. Постановка цих задач продиктована тим, що перехід до агрегування суджень експертів є можливим лише після виявлення структури експертних суджень. Наприклад, якщо загальна узгодженість експертних оцінок є низькою і експертна група ділиться на декілька підгруп, всередині яких узгодженість експертних оцінок є високою, то слід здійснювати агрегування експертних суджень для цих підгруп. Фундаментальне дослідження проблеми групового вибору було виконано К. Ерроу [130]. Він сформулював п'ять аксіом, які відповідають інтуїтивному уявленню про справедливий груповий вибір:

– аксіома універсальності;

– аксіома зв'язку групового впорядкування з індивідуальними впорядкуваннями (умова монотонності);

– аксіома незалежності незв'язних об'єктів;

– аксіома суверенності членів групи;

– аксіома відсутності диктатора.

Ерроу довів, що при числі об'єктів більше двох не існує правила узгодженості індивідуальних переваг, яке б задовольняло усім наведеним умовам (парадокс Ерроу). Детально проблеми і основні результати в галузі групового вибору розглянуто Муленом у [95]. Ним же наведено класифікацію, опис методів, алгоритмів та процедур, які широко застосовуються у світовій практиці колективного експертного оцінювання.

1.5.2. *Оцінка узгодженості думок експертів*

Одним із основних інструментів, що використовуються для аналізу та обробки експертної інформації, є визначення міри близькості. Як правило [54], оцінка близькості суджень експертів базується на використанні поняття компактності, наочне уявлення про яку дає геометрична інтерпретація результатів експертизи. У [98] вважається, що узгодженість оцінок експертів адекватна їх рівнорозподіленості. Таким чином, перевіркою узгодженості переваг експертів є перевірка гіпотези про рівнорозподіленість їх оцінок. Пропонується зокрема метод перевірки цієї гіпотези для випадку незалежних парних порівнянь.

Необхідність оцінки узгодженості думок експертів виникає у випадку, коли потрібно проаналізувати узгодженість інформації, одержаної від експертної групи за заданими експертними даними, не знаходячи результуючого відношення. Наприклад, для ранжування об'єктів найпоширенішими показниками узгодженості експертних оцінок є коефіцієнти рангової кореляції та конкордації. *Коефіцієнти рангової кореляції* виступають мірами узгодженості ранжувань об'єктів двома експертами, *коефіцієнти конкордації* (*дисперсійний та ентропійний*) – мірами узгодженості ранжувань, заданих усіма членами експертної групи [61, 78].

В [126] описується застосування коефіцієнта Кендалла для виявлення міри узгодженості вагових коефіцієнтів – як для серій експериментів, так і для групи експертів. Але *коефіцієнт Кендалла* є показником, що виявляє різницю лише для порядку розміщення, а не за величиною інтервалів даних. В [101] наводиться коефіцієнт *рангової кореляції Спірмена* для характеристики неузгодженості між парами експертів в задачах строгого та нестрогого ранжування об'єктів. В [112] вказується, що операція ранжування є можливою лише в тому випадку, коли деякі інтегральні характеристики важливості об'єктів є близькими до натурального ряду чисел. Але, оскільки в реальних ситуаціях це неможливо, то в [112] пропонується ввести *коефіцієнт ранжованості ряду*. Один з параграфів присвячено розвитку та дослідженню цієї ідеї.

Описані підходи до визначення узгодженості експертної інформації є широко розповсюдженими, оскільки мають невелику обчислювальну складність і не передбачають попереднього визначення результуючого відношення переваги експертів.

1.5.3. *Агрегування групових оцінок*

Однією з поширених ЗЕО є вибір у заздалегідь фіксованому класі відношень деякого результуючого (групового, колективного, компромісного) відношення, певним чином узгодженого з відношеннями виду (1.4). Якщо бінарні відношення відповідають результатам опитування експертів, результуюче відношення інтерпретується як групова думка колективу експертів. При обробці багатовимірних даних відношення, що відповідають матрицям виду (1.4), породжуються одновимірними розподіленнями окремих ознак, а компромісне відношення є результатом їх агрегування. Задачу знаходження результуючого відношення у цьому випадку називають задачею узгодження думок експертів, узгодженням одновимірних розподілень тощо. Найчастіше на основі кількох суперечливих показників провадиться "згортання" (агрегування, узагальнення тощо) показників у деякий єдиний інтегральний показник Q_i, $i \in I$, $Q_i = Q_i\left(a_i^1, \ldots, a_i^m\right)$.

Побудувати згортку (узагальнений, агрегуючий, інтегральний критерій якості об`єкта) – це означає доповнити частковий порядок на множині об`єктів (1.1) або (1.2) до повного [127]. Це може бути зроблено багатьма способами і з необхідністю включає елемент суб`єктивності. У зв`язку з цим є думки [127], що метод згортки має бути обгрунтований лише в тій мірі, що повний порядок, який породжується згорткою, повинен узгоджуватися з природним частковим порядком. В [93, 107] серед найпоширеніших вказуються такі сімейства згорток:

- лінійна згортка

$$Q_i^{(1)} = \sum_{j \in J} \rho_j \omega_i^j, \ i \in I,$$

мультиплікативна згортка

$$Q_i^{(2)} = \prod_{j \in J} \rho_j \omega_i^j, \ i \in I,$$

- узагальнена згортка показників (в [93, 127] називається ще принципом "вузького місця"

$$Q_i^{(3)} = \max_{j \in J} \rho_j \omega_i^j, \ i \in I,$$

де $\omega_i^j, i \in I, j \in J$, – нормовані значення параметрів об`єктів $a_i^j, i \in I, j \in J$, визначені перетвореннями (1.6)–(1.13). В [93] наводиться також згортка

$$Q_i^{(4)} = \prod_{j \in J} \rho_j \left(\left(\omega_i^j - \min_{j \in J} \omega_i^j \right) / \min_{j \in J} \omega_i^j \right), \ i \in I.$$

В [127] пропонується такий підхід для визначення повного порядку на множині об`єктів. Множина наборів параметрів (1.2) відповідає деякій "хмарі" точок багатовимірного простору. Коли вважати, що кожний об`єкт має одиничну масу, то перетворення Карунена–Лоєва [127] дає можливість знайти деяку вісь V, що проходить через середню точку (центр ваги об`єктів), навколо якої момент інерції системи точок є найменшим. Після центрування значень параметрів об`єктів

$$\omega_i^{j(ц)} = \frac{1}{n} \sum_{i \in I} \omega_i^j, \ i \in I, j \in J,$$

центр ваги об`єктів знаходиться в початку координат і пряма V проходить через нього. Тоді задача зводиться до знаходження такої прямої V, для якої досягає мінімуму функціонал виду

$$Q^{(5)} = \sum_{i \in I} \left\| \omega_i^{j(ц)} - pr_V \omega_i^{j(ц)} \right\|^2,$$

де $\omega_i^{(ц)}$ – вектор-рядок нормованої матриці значень параметрів, $pr_V \omega_i^{(ц)}$ – вектор-рядок матриці проекцій об`єктів $\omega_i^{(ц)}$ на вісь $V$, $\| \cdot \|$ – відстань між точками $\omega_i^{(ц)}$ та $pr_V \omega_i^{(ц)}$. Для визначення якості набору параметрів розглядаються відстані від проекцій об`єктів $pr_V\omega_i^{(U)}$ до проекції деякого ідеального (утопічного) об`єкта на вісь $V$. Цей метод може бути узагальнений на випадок зважених значень параметрів, а також, якщо є відомими деякі апріорні "якості" об`єктів.

Іноді узагальнений критерій якості об`єктів вводиться як

$$Q_i^{j(6)} = \sum_{l=1}^{j} \omega_i^l, \ i \in I,$$

де ω_i^l – нормовані формулами (1.6)-(1.13) значення параметрів об`єктів. Найкращим вважається об`єкт, що має значення показників $Q_i^{j(6)}$ для $\forall j \in J, i \in I$, кращі, ніж відповідні значення інших об`єктів і найкращим чином співпадає за напрямом з гіпотетичним ідеальним вектором $Q_i^{j(6)}, j \in J$, значення всіх елементів якого рівні одиниці. В [7] для агрегування інформації по об`єктах використовується згортка

$$Q^{(7)} = \frac{1}{m} \sum_{j \in J} \left(\omega_i^{j(U)} \right)^2,$$

де $\omega_i^{j(U)} = \left(\omega_i^j - \omega_j^C\right) / \left(\frac{1}{n} \sum_{i \in I} \left(\omega_i^j - \omega_j^C\right) \right)^{1/2}, i \in I, j \in J, \ \omega_j^C = \frac{1}{n} \sum_{i \in I} \omega_i^j.$

Слід зазначити, що при нелінійних функціях показників експертові важко інтерпретувати свої побажання у термінах ваги показників [107], що суттєво знижує цінність вказаного підходу.

1.5.4. *Проблеми розподіленої обробки експертної інформації*

На практиці часто виникають задачі, які сучасний рівень наукових знань дозволяє розв'язати лише експертним шляхом, тобто з допомогою безпосереднього залучення знань фахівців з досліджуваної проблеми – експертів. В цьому випадку виникає *перша проблема* – розробки процедур коректного одержання інформації від експертів, формалізація її для забезпечення можливості подальшої передачі та обробки цієї інформації.

Друга проблема – власне обробка експертної інформації. Адже від способу обробки одержаної від експертів інформації значною мірою залежить результат дослідження. При цьому використовуються різні математичні методи обробки інформації, різні психологічні підходи тощо.

Для підвищення достовірності інформації дослідники змушені часто опиратися на інформацію, одержану з різних джерел – результатів застосування різноманітних методів дослідження, різних експертних даних тощо, тому виникає *третя проблема* – узгодження одержаних даних, узагальнення їх з метою одержання деякого компромісного результату, який вважається достовірнішим та обґрунтованим. Для цього існують процедури взаємодії експертів або їх ізольованого опитування. Розроблено також потужний математичний апарат визначення узгодженого рішення.

Четверта серйозна *проблема* використання експертної інформації – інтерпретація результатів, одержаних в процесі вирішення попередніх трьох проблем. Від ступеня адекватності інтерпретації результуючих даних реальному досліджуваному явищу залежить достовірність розв'язання задачі в цілому, а відтак і якість прийнятих за результатами дослідження рішень.

Розподілена обробка експертної інформації з огляду на означені вище проблеми може розглядатися в таких аспектах:

– розподілені процедури одержання експертної інформації; способи коректного представлення цієї інформації; методи коректного збору інформації, одержаної з різних джерел в базах знань та базах даних комп'ютерних систем; способи взаємодії експертів різних рівнів між собою та з комп'ютерною системою;

– розподілена обробка інформації, одержаної від експертів, має враховувати перш за все рівень ієрархії та компетентності експертів; у разі застосування складних обчислювальних алгоритмів формалізації знань – розподілена обробка на паралельних процесорах автономних підзадач після декомпозиції процесу;

– процедури узгодження експертної інформації вимагають застосування складних обчислювальних алгоритмів, які часто допускають використання декомпозиційних схем, що дозволяє здійснювати їх паралельну обробку;

– задачі інтерпретації результатів при аналізі одного й того ж явища для експертів різних рівнів відрізняються, що вимагає застосування різних алгоритмів інтерпретації і розподіленої взаємодії експертів з цією підсистемою.

1.6. Ретроспективний огляд формалізованого експертного оцінювання

Історія експертних оцінок тісно пов'язана з історією людського суспільства. Це пояснюється тим, що науковий розвиток значною мірою визначає розвиток цивілізації. Розвиток експертних оцінок, вплив на суспільне життя суджень експертів, методів експертизи, визначаються розвитком освіти, ідеології, державного устрою тощо.

Потреба у вимірюванні експертної інформації виникла у прадавні часи. Адже з давніх-давен виникали ситуації, які неможливо виміряти "об'єктивними" інструментами, або які допускають різну інтерпретацію та вимагають застосування евристик. Протягом існування цивілізації людство здійснювало експертне оцінювання, намагалося формалізувати оцінки експертів, знайти адекватні алгоритми їх обробки та інтерпретації, забезпечити ефективне застосування.

Експертні технології почали застосовуватися ще у первісному суспільстві. У давніх суспільствах існували процедури вибору старійшин чи вождів, жерців чи шаманів. Ці процедури напевне не були тривіальними, адже вибір здійснювався не за єдиним критерієм. Правила вибору у вигляді династичних традицій регулювали складні родинні взаємини правлячих кланів, регламентували правила наслідування. Основна мета проведення експертизи у подібних випадках – підвищити професійний рівень експертного оцінювання за рахунок спеціально розроблених та практично перевірених технологій. При цьому важливо було мати міри та критерії якості експертного оцінювання.

Проведення експертизи є традиційним методом, який застосовується для розв'язання задач на основі думок висококваліфікованих фахівців. В основі методу лежить досвід експертів, можливість людини знаходити розв'язок на основі інтуїції. У різних суспільствах залучали фахівців для обговорення актуальних проблем. У складних ситуаціях завжди намагалися врахувати думки групи спеціалістів у різних сферах життєдіяльності. На основі узагальнення цього соціального досвіду з часом виникли різні методики використання знань експертів.

Важливою умовою полегшення експертного оцінювання є формалізація інформації, яку найчастіше неможливо виміряти кількісно. Така формалізація допомагає ОПР вибирати єдиний об'єкт з множини можливих об'єктів. Формалізація полягає у виявленні та уточненні змісту явища або процесу, що вивчається, через розкриття та фіксування його форми, а також оперування цією формою. У найзагальнішому вигляді під формалізацією розуміють дослідження змісту, яке здійснюється шляхом виявлення елементів форми. Протягом багатовікової історії людства були розроблені і застосовувалися різні варіації математичної та логічної формалізації. Але більність видатних рішень приймалося на підставі власного багаторічного досвіду ОПР, довгих роздумів, нелегких пошуків альтернативних варіантів, сумнівів та ризику. Тобто самі ОПР нерідко були одночасно і експертами.

Значну роль у розвитку астрономії та математики, які зародилися у Вавілонії, Єгипті, Індії та Китаї, зіграли *експертні технології*. Астрономія забезпечила створення календаря, вимірювання часу, що дозволяло передбачати погоду та сприяло розвитку землеробства. Математика також виникла у зв'язку з розвитком господарського життя, необхідністю розв'язання практичних задач у торгівлі – при розрахунках та обміні, землеробстві та будівництві – при вимірюванні земельних ділянок. Розвиток астрономії та марематики був необхідною умовою розвитку суспільства. Обов'язковою умовою систематизації астрономічних та математичних досліджень, перетворення їх на придатні для використання, адаптації до практикних потреб було застосування експертних оцінок. Тобто експертні оцінки часто ставали достатньою умовою завершеності, цілісності, системності набутої емпірично сукупності знань у різних сферах пізнання.

Деякі історичні відомості про формалізоване експертне оцінювання наведено у роботах [36, 39].

1.6.1. *Зародження формалізованих експертних оцінок в епоху античності*

У *Книзі Буття* (15 ст. до н.е.) розповідається, що коли Авраам та Лот прийшли з Єгипту до Вефілю, земля там не могла прогодувати їхні отари. Це призвело до розбрату між людьми. Щоб вийти із цього становища, Авраам запропонував Лоту правило поділу, яке застосовується і сьогодні при розподілі чогось однорідного: "Один ділить, другий вибирає". Таке правило передбачає, що тому, хто ділить, не вигідно ділити ресурс на нерівні частини.

У *Гомера* (8 ст. до н.е.) наводиться експертна оцінка важливості лікарів, які користувалися великою повагою у античному суспільстві. За твердженням Гомера, коли лікаря Махаона було поранено Парісом, усе військо було збентежене від однієї думки, що лікар міг загинути, адже "вартий багатьох воювників один цілитель майстерний". Такою була експертна оцінка відношення переваги між лікарем та воїном. Дослідниками підраховано, що в "Іліаді" Гомера згадано 147 випадків поранень. Серед них 31 випадок поранення голови, причому усі вони виявилися смертельними. Обчислено навіть, що загальна летальність серед героїв творів Гомера складає 77,6 %.

Давні тексти містять спроби авторів формалізувати розмиті поняття. Наприклад, в одному з пророцтв *Ісаїї* (745–695рр. до н.е.) йдеться про едемського сторожа часів вигнання євреїв: "Кричать мені з Сеїра: "Сторож! Скільки ночі? Сторож! Скільки ночі?" – Сторож відповідає: "Наближається ранок, але ще ніч. ""

Видатний давньокитайський стратег *Сунь-Цзи* (6–5 ст. до н.е.) у книзі "Мистецтво стратегії" сформулював основні правила за ре-зультатами експертної оцінки сил противників: "Якщо сил у 10 разів більше, ніж у ворога, оточи його; якщо сил у 5 разів більше, атакуй його; якщо у 2 рази більше, розділи свої війська. Якщо сили рівні, можеш побороться з ворогом. Якщо сил менше, перехитри його. Якщо тебе переважають, уникай бою".

Намагання легендарного Піфагора та його учнів виразити усі явища числами також можна вважати спробами експертної формалізації навколишнього світу. Піфагореєць *Філолай* (5 ст. до н.е.) писав: "Якби не число та його природа, ніщо існуюче неможливо було б осягнути. Міць чисел проявляється у всіх діяннях та помислах людей, у всіх ремеслах та музиці".

За допомогою експертних оцінок древні мислителі намагалися визначити відношення переваги для нечітко структурованих понять. Видатний давньогрецький публіцист і оратор *Ісократ* (436–338 рр. до н.е.) вважав, що недобір є ближчим до помірності, ніж перебір, адже перебір виправдати значно важче. Той, хто береться вибирати та вносити зміни, привласнює собі право судити і має бути твердо впевнений у помилковості того, що він відміняє, і в корисності того, що вводиться.

За вченням засновника Кіренської філософської школи *Арістіппа* (435–360 рр. до н.е.), наші сприйняття є суто суб'єктивними станами індивіда і не дають нам ніякого знання про речі поза нами. Ми усвідомлюємо, що маємо відчуття солодкого, білого тощо, але предмети, які створюють ці відчуття, приховані від нас. Від нас приховано,

чи є солодким предмет, чи є він білим і т.д. Один і той же предмет нерідко викликає у різних індивідів абсолютно різне враження. Навіть у одного й того ж суб'єкта у різний час один і той же предмет викликає різні відчуття.

Загальновизнаний експерт у галузі філософії *Платон* (427–347 рр. до н.е.) перелічує фізичні та життєві блага у такому порядку: здоров'я $\succ$ краса $\succ$ сила $\succ$ багатство. Крім того, він вважає, що багатство зовсім не сліпе, що воно є прозорливим, якщо його освітлює розсудливість.

Стрункою системою було також вчення Платона про категорії. *Система категорій* Платона є всеосяжною, охоплює все існуюче і містить у собі усі поняття. Для Платона наука є системою понять, причому усі поняття утворюють ієрархію, у якій кожне окреме поняття займає визначене, строго фіксоване місце. За вченням Платона, людське пізнання проходить послідовно чотири ступеня:
< відчуття → думка → дискурсивне мислення → інтуїція розуму >.

Людське пізнання у своєму розвитку йде від повного незнання до досконалого знання. Середні ступені пізнання (думка та дискурсивне мислення) висловлюються у словесні вирази. Мова належить до середньої області, яка лежить між чуттєвим сприйняттям та істинним знанням. Виражаючи підсумки свого вчення про пізнан-ня символічно в математичних поняттях, Платон називав істинне знання одиницею, або точкою, дискурсивне мислення – числом 2 або довжиною, думку – числом 3 або поверхнею, і відчуття – числом 4 або геометричним тілом. Всю повноту людського знання, яке охоплює усі його ступені, Платон символічно позначав числом 10 = 1 + 2 + 3 + 4.

У творах *Арістотеля* (384–322 рр. до н.е.) "Категорії" та "Топіка" наводиться таблиця десяти категорій, зміст яких можна пояснити таким прикладом: людина або кінь є *субстанцією*; величиною у два лікті – *кількістю*; біла – *якістю*; подвійний, половинний, великий – *відношенням*; в Лікеї, на площі – *місцем*; вчора – *часом*; сидить, лежить – *положенням*; взутий, озброєний – *володінням*; ріже, палить – *дією*; його ріжуть, палять – *стражданням*.

Згідно із Арістотелем, істина і хибність є суб'єктивними, оскільки вони є властивостями психічних процесів. Але з іншого боку, поняття істини у Арістотеля є об'єктивним та реалістичним. Судження, за вченням Арістотеля, є істинним лише тоді, коли відношення спільного або роздільного буття двох змістів думки, встановлені у суб'єктивному русі мислення, є адекватним відображенням реальних відношень. В категорію відношення Арістотель включає відношення між числами (арифметичні та геометричні відношення), відношення того, що виміряне, до міри і відношення сили до результату її застосування. Відношення є там, де щонебудь співвіднесено з чимось іншим.

Арістотель вважав, що суб'єктивним положенням можна приписувати більшу чи меншу істинність. Наприклад, той, хто 4 вважає за 5, – помиляється, але не такою мірою, як той, хто вважає 4 за 1000. Очевидно, що перший помиляється менше, тобто перший стоїть ближче до істини, ніж другий. А якщо це так, то має існувати абсолютна істина, виходячи з якої можна вимірювати відмінність ступенів наближення чи віддалення від неї.

Суб'єктивне мислення, тобто психологічний бік судження, на думку Арістотеля, є єдиним джерелом хибних думок та помилкових суджень. Реальною ж основою істинності є перш за все саме об'єктивне буття і лише в другу чергу – суб'єктивне мислення. Сприйняття та інтуїція розуму ніколи не впадають в обман. Помилка виникає на стадії аналітично-синтетичної діяльності, яка перетворює розумовий матеріал в судження.

Давні вчені переймалися також проблемами вимірювання нечітких величин. Представнику Мегарської філософської школи *Евбуліду з Мілета* (4 ст. до н.е.) приписувалися кілька парадоксів. Наприклад, парадокс "Купа" передбачав відповідь на запитання: "Коли додавання чергового зерна до інших зерен створить купу?" Парадокс "Лисий" вимагав відповіді на питання: "З якої за рахунком вирваної волосини людина стає лисою?"

Психологічним аспектам експертного оцінювання у давнину також приділялася значна увага. *Епікур* (341-270 рр. до н.е.) вважав, що помилки та хибні думки доходять до людини не від почуттєвих даних, а від того, що до них привносить розум, як він тлумачить ці дані, до чого їх відносить, у чому бачить їхню причину.

Широко застосовувалися експертні оцінки у суспільному житті. У *Давньому Римі* існував традиційний порядок проходження державних посад та вікового цензу на них: квестура – в 27 років, едилітет – в 37 років, претура – в 40 років, консулат – в 43 роки. Відповідно до законів Давнього Риму, *тріумфу* (урочистого в'їзду до Рима полководця-переможця на чолі переможного війська) удостоювалися пол-ководці, які одержали перемогу над зовнішнім ворогом, якщо загинуло не менше, ніж 5 тисяч ворожих воїнів. Коли ж перемога не задовольняла заданим критеріям, полководцю призначалася нижча за рангом нагорода – *овація*.

Широко освітлюються аспекти формалізації експертних оцінок у *Талмуді*, створеному в епоху Учителів (200 р. до н.е. – 200 р. н.е.). Талмуд – це дві книги – Гемара та Мішна – об'єднані разом, у

яких викладено єврейський закон. Мішна є систематичною збіркою висновлювань та судових рішень єврейських мудреців – Учителів.

Відповідно до Мішни, якщо людина передала на зберігання зерно, то зберігач має право повернути дещо меншу кількість: якщо це пшениця або рис, то на 2,5 відсотка за рік; якщо ячмінь, то на 5 відсотків; а насіння льону – на 10 . Такі норми пов'язані з тим, що миші можуть з'їсти деяку частину зерна. Якщо людина віддала на зберігання вино або оливкове масло, то зберігач повертає на 1/6 частину менше, оскільки рідина має властивість випаровуватися, усмоктуватися в стінки глиняних глечиків та осідати у вигляді осаду, який не повертають. Деякі Учителі, які проживали у місцевостях, в яких посудина виготовлялася з більш пористої глини, називають експертну оцінку зменшення рідини в 1/5.

Кожна монета має дві вартості, які не завжди співпадають – та, що виражається відкарбованим на ній номіналом, а також вартістю металу, з якого зроблено цю монету. Від частого використання монети стираються. Талмуд розглядає питання: до якої міри стертість монети можна вважати допустимою: щоб вона вважалася при цьому монетою тієї ж вартості? Різні Учителі називають такі оцінки зменшення ваги: 1/24, 1/12, 1/6 від відкарбованої на монеті вартості.

У Мішні розглядається модель управління активами підприємства. Кредитор дає гроші менеджеру. Вони укладають договір: менеджер управляє фінансовими операціями, а прибуток або збитки ділять, наприклад, порівну. Можна вважати, що половина капіталу віддана менеджеру в борг і він, маніпулюючи боргом, прибуток бере собі. Але друга половина капіталу дається менеджеру лише в управління, адже кредитор щороку, щомісяця чи щодня одержує свою частину прибутку з цієї частини капіталу. Тому Талмуд радить платити менеджеру зарплату, щоб не виходило, що менеджер за те, що кредитор дар йому гроші в борг, надає послугу кредитору.

У Талмуді описується ситуація, коли померлий залишив борги трьом кредиторам відповідно 100, 200 та 300 монет. Талмудом розглядається випадок, коли спадок померлого є меншим від суми боргів і доводиться, що можливим рішенням може бути не обов'язково повернення пропорційно величині боргів. Якщо спадщина оцінюється у 100 монет, тоді кожен з кредиторів одержує третину суми. Якщо спадщина оцінюється у 200 монет, то перший кредитор одержує 50, інші – по 75 монет. Коли ж спадщина складає 300 монет і більше, то Талмуд пропонує пропорційне розділення боргу.

Древні мислителі робили спроби порівняти інтенсивність переваг між різними об'єктами. *Плутарх* (близько 50–120 н.е.), маючи на увазі душевні та внутрішні якості людини, пише, що людина від людини відрізняється більшою мірою, ніж тварина від тварини.

У одному з листів *Гай Пліній Цецилій Секунд Молодший* (61–114) розмірковує на тему: що спільного між стратою та засланням. На його думку, схожість між ними є не більшою, ніж між засланням та виправданням. Але виправдання, за експертною оцінкою Плінія Молодшого, є дещо ближчим до заслання, ніж до страти, адже у обох перших випадках у обвинувачуваного залишається життя, а при страті – віднімається.

Християнська Церква також приділяла увагу формалізації експертних оцінок. Відповідно до уявлень апологетів християнської релігії, між Всемогутнім, Всевидящим, Всезнаючим, Всеблагим Богом та людськими істотами існує спільнота вищих істот, які іменуються Ангелами. На думку святого *Діонісія Ареопагіта* (1 ст. н.е.), Ангели – це узагальнена назва усіх небесних створінь. Діонісій розділяє усіх ангелів на три тріади. Першу тріаду ангельських чинів, найближчу до Бога, складають Херувими, Серафими та Престоли. Друга тріада: Господства, Сили, Власті. Третя тріада: Начала, Архангели, Ангели. Тобто, ранжування, яке відповідає ангельській ієрархії, має вигляд: Ангели $\prec$ Архангели $\prec$ Начала $\prec$ Власті $\prec$ $\prec$ Сили $\prec$ Господства $\prec$ Престоли $\prec$ Серафими $\prec$ Херувими.

Християнський теолог та філософ *Оріген* (близько 185–254) припускав, що відмінність ангелів у чинах обумовлена ступенем їх вірності Богу, але православна Церква відкинула таке трактування. За християнськими експертними оцінками, функції Небесного Воїнства такі:

- Серафими, Херувими, Престоли характеризуються найбільшою близькістю до Бога;
- Господства, Сили, Власті відображують принцип божественного світопанування;
- Начала, Архангели, Ангели здійснюють зв'язок людей з Богом.

Найвідоміший представник вірменського неоплатонізму *Давід Анахт (Непереможний)* (475-1-а половина 6 ст.) вважав, що наукове пізнання є необхідним тому, що багато чого у природі не виявляється безпосередньо, але міститься у прихованому вигляді. Задача науки полягає у тому, щоб вивідати у природи те, що приховано. Давід визнавав п'ять ступенів пізнання:

$<$ відчуття $\to$ уявлення $\to$ думка $\to$ міркування $\to$ розум $>$.

Відчуття він розуміє як результат впливу зовнішнього світу на людину – воно дає лише часткове знання, знання одиничних речей. Уявлення також відноситься до чуттєвого знання і має місце при відсутності зовнішнього предмета. Думка, згідно вчення Давіда Непереможного, виходить за межі чуттєвого одиничного, оскільки містить умовивід та узагальнення. Міркування є раціональною формою мислення, з його допомогою ми відкриваємо підстави та робимо теоретичні висновки. Розум – найвища ступінь раціонального пізнання, через яку досягаються найвищі всеохоплюючі узагальнення.

1.6.2. *Використання експертних оцінок при створенні календарних систем*

Осмислення існування плинності часу та його обчислення можна вважати найвидатнішим відкриттям людини. Перші уявлення про вимірювання часу, його рух виникли із щоденних потреб первісних людей, які стали об'єднуватися у роди та племена. *Календарі* для обчислення місячних фаз, сонцестояння та рівнодення були відомі ще на початку існування людства – у верхньому палеоліті, *20 тисяч років тому*.

З давніх-давен календар сприймався не лише як засіб для обчислення часу, але й як інструмент організації часу та визначальний чинник біологічного, історичного та космічного життя. Річні цикли, які регулярно повторювалися, допомагали упорядкувати сезонні роботи, у кращі терміни здійснювати сіянку та жнива, точніше відзначати свята, виконувати традиційні обряди. Календар перетворився на організатора та охоронця колективної пам'яті народів. Зміна календаря призводить до розриву з попередньою культурою та переорієнтації соціальної свідомості.

Люди завжди цікавилися циклічністю життєвих процесів. Поняття природних ритмів пов'язане зі зміною дня та ночі, місячних циклів, сезонів тощо. Історично *першою мірою часу була зміна дня та ночі*. *Гомер* вів рахунок часу "по світанках", а кельти та германці рахували час на "ночі". *Афіняни, галли, германці та юдеї* повним днем вважали проміжок часу від одного вечора до наступного вечора. А *вавілонські астрономи* та *римські понтифіки* межею зміни дати вва-жали час опівночі. День був першою самостійною одиницею, яка стала виділятися та запам'ятовуватися у потоці подій. Можливо, добовий цикл став першим астрономічним відкриттям прадавніх вчених.

Тисячоліттями люди намагалися створити зручну та придатну до використання календарну систему. Задачу створення календаря можна трактувати як узгодження трьох циклів: зміни дня і ночі, фаз місяця та річного сонячного циклу, тобто зміну співвідношення дня і ночі шляхом введення деяких евристик. Проблема полягає у тому, що людям зручно користуватися цілими числами, а жоден із зазначених циклів не укладається ціле число разів в інші цикли. Тому історія знає велику кількість календарних систем. У різні часи існувало понад дві сотні літочислень, пов'язаних з великими подіями: початком царювання монархів, заснуванням міст чи країн, початком проведення олімпіад, створенням світу, Всесвітнім потопом тощо. Одна із найпопулярніших точок відліку – ера "від створення світу" або "від Адама" (якого було створено у п'ятницю 1 березня 1 року цієї ери) – має близько 200 варіацій, які не співпадають між собою більше ніж на 3500 років. Період часу від створення світу до Різдва Христового нараховував від 3483 до 6984 років.

У всіх без винятку давніх цивілізаціях (Межиріччі, Єгипті, Греції, Китаї, Протоамериці) календарі були місячними або місячно-сонячними. Давні вчені помітили, що четверті Місяця можна використовувати для вимірювання часу. Від молодика до повного місяця та від повного місяця до його зникнення проходить 14 днів. Ще у 2 тисячолітті до н.е. китайці ділили рік на 12 місяців, а місяць – на чотири тижні. Експертна оцінка кількості днів у тижні в сучасному календарі дорівнює семи. Існує гіпотеза, що така евристика пов'язана з періодом обертання Місяця навколо землі: тиждень є четвертою частиною місячного циклу.

Для стародавніх людей критерієм досконалості календаря була його узгодженість не тільки з порами року, але й з багатьма іншими ритмами біосфери. Для узгодження зміни місячних фаз (синодичний місяць = 29,53 доби) з річним рухом Сонця (365,24 доби) необхідно було знайти календарні цикли, в яких ціла кількість років з достатньою точністю дорівнювала б цілій кількості місяців. Такий період довжиною 19 років було знайдено грецьким вченим *Метоном* у 5 ст. до н.е. А у *Давньому Китаї*, наприклад, широко застосовувався побутовий 60-річний циклічний календар.

Створення *єгипетської місячної календарної системи* відноситься до 4236 року до н.е., а *єгипетський сонячний календар* було створено у 17–15 ст. до н.е. Чотири тисячі років тому єгипетські жерці користувалися системою із 24 годин: 10 денних годин + 2 години сутінок + 12 нічних годин. В Єгипті було знайдено найдавніший водяний (близько 1600 р. до н.е.) та найдавніший сонячний (близько 1450 р. до н.е.) годинники. *Грецька календарна система*, основою якої були Олімпійські ігри, виникла три тисячі років тому. *Римський республіканський календар* брав початок від заснування Рима 753 р. до н.е.

Знадобилися сторіччя обробки експертної інформації, роботи вчених з пошуків способів узгодження інформації, поки у 45 р. до н.е. з'явився *юліанський календар*. Календарна реформа *Юлія Цезаря* (100–44 рр. до н.е.), проведена з допомогою олександрійського вченого *Созігена*, вводила у Римській імперії простий, зручний і досить точний варіант єгипетського календаря – помилка розміром у добу накопичувалася протягом 128 років. Цезар відмовився узгоджувати календар з місяцем. Юліанський календар має чотирирічний цикл, протягом якого для узгодження календарного та істинного сонячних років вводиться один додатковий день.

Сучасний *григоріанський календар* введено у 1582 році. Цей календар має період 400 років (роки 1600, 2000 – високосні, а 1700, 1800 та 1900 не є високосними). Григоріанський календар можна було б удосконалити та зробити ще точнішим. Для цього досить раз на 4 тисячі років один з високосних років (наприклад, 4000, 8000 і т.д.) вважати звичайним роком. Календарна похибка в 0,0003 доби у рік за 4000 років складе близько 1,2 доби. Тоді збережеться похибка у 0,2 доби за 4000 років або одна доба за 20 тисяч років. Але така точність календаря нікому не потрібна – зазначені періоди є непорівнянними не тільки із людським життям, але й з існуванням цивілізацій.

У ритуальному *побутовому календарі майя* короткий рік дорівнював 260 днів, що приблизно відповідає періоду вагітності жінки. За обчисленнями жерців-астрономів майя, синодичний місяць лише на 0,0006 доби відрізнявся від прийнятої сьогодні тривалості синодичного місяця. Тривалість сонячного (тропічного) року була визначена майя з точністю до 0,0005 доби.

"Ідеальний" календар взагалі неможливий. Будь-яка календарна система – це компроміс між зручністю та точністю. Для григоріанського календаря, наприклад, цього компромісу було досягнуто в іншій точці у порівнянні з юліанським календарем – трохи менше зручності, зате менше й неточності.

1.6.3. *Експертні оцінки у законодавстві*

Експертне визначення покарання через суд чи інші інстанції є реакцією держави на вчинений особою злочин, офіційною державною експертною оцінкою діяння особи у вигляді обвинувачувального вироку. Найдавнішою та однією з найпростіших експертних оцінок злочину та кари є *закон таліона*, який зафіксовано у найдавніших юридичних документах та широко застосовувався у давнину – "око за око, зуб за зуб", тобто призначення покарання, рівного за силою злочину. Принцип таліона полягав у нанесенні за спричинену шкоду такої ж шкоди винному. Найяскравіше принцип таліону був виражений у *Законах Хаммурапі* та у *римських законах 12 таблиць*.

Розквіт Вавілона припадає на часи правління шостого царя першої Вавілонської династії *Хаммурапі* (роки правління 1792–1750 до н.е.), який був видатним державним діячем, сильним стратегом, умілим дипломатом, хорошим законодавцем та організатором. Він був одним з найвидатніших політиків давнини. Імперія Хаммурапі протрималася близько двох століть. Не останньою мірою цьому сприяв фундамент у вигляді законів, які було підготовлено досвідченими експертами. Хаммурапі видав збірку законів, що контролювали усі сфери життєдіяльності суспільства. Своїми законами Хаммурапі намагався узгодити та примирити інтереси різних прошарків населення, спираючись на волю верховного божества. Бог Мардук, за словами Хаммурапі, через царя дає людям звід правил, які встановлюють справедливість у взаєминах між людьми. Ці закони було викарбовано на великих базальтових стовпах, які виставили у різних кінцях країни.

У законах Хаммурапі формалізовані експертні оцінки займають суттєву роль. Текст законів умовно поділяється дослідниками на 282 статті, з яких 247 збереглися. При цьому 42 статті містять числові оцінки відповідальності за злочини, тобто 17 відсотків з тих, що збереглися. Наприклад, у Давньовавілонському царстві широкого розповсюдження набуло гендлярство. Ріст складав 20 % і навіть 33 % від суми позики. За законами Хаммурапі орендна плата за землю складала 1/3 або 1/2 врожаю, а за сад – 2/3. Причому, орендар у випадку відсутності врожаю не звільнявся від плати власнику поля. Числові значення у законах можна вважати спробами формалізації експертної оцінки відповідності (еквівалентності, рівноцінності) злочину та його грошового еквіваленту.

Широко застосовувалися формалізовані експертні оцінки у епоху античності. Легендарний спартанський законодавець *Лікург* (9–8 ст. до н.е.) встановив віковий ценз 60 років для обрання старійшин (*геронтів*) серед найдоблесніших. Народні збори (*апела*), що складалися із громадян Спарти, не молодших 30 років, та *колегія ефорів* із 5 чоловік обиралися на один рік. Лікург об'єднав усі спартанські землі, а потім знову перерозподілив їх на наділи такого розміру, що кожен наділ давав 70 медимнів (3675 літрів) ячменю на одного чоловіка і 12 медимнів (630 літрів) ячменю на кожну спартанську жінку.

Спартанець-батько зобов'язаний був показати новонароджену дитину експертній раді – групі старійшин. Вирощувати дитину

дозволялося лише у випадку, якщо експертна група визнавала її життєздатною. Слабких дітей скидали в урочище з гори Тайгет. Дітей від народження не сповивали, щоб вони росли загартованими. Платон пише, що спартанських дітей, які досягли 7-річного віку, забирали у батьків і передавали у розпорядження державних вихователів. До 14 років кожна дитина звикала до фізичних та душевних випробувань. Перед посвяченням у підлітки у 15-річному віці було вироблено звичай *криптії*, який полягав у посилених формах випробувань – проходженні бойових навчань при придушенні повстань ілотів. Після проходження річного випробувального терміну підлітки потрапляли до групи ейренів. *Ейрени* вчилися володіти зброєю, проходили стройову підготовку, кулачні бої тощо. Тих, хто досяг 20-річного віку піддавали випробуванням і переводили до групи *ефебів*. Систематичне військове навчання продовжувалося до 30 років.

Норми, які відділяють громадянське суспільство від юрби, приймають форму *цензів*. Основних цензів чотири – віковий, освітній, майновий та ценз осідлості. Вони доповнюються сімейним цензом (повноту прав має лише голова сім'ї, в якій ростуть діти) та цензом відношення до військової служби (правоздатним є лише військовозобов'язаний, який несе тяготи, пов'язані з обороною країни).

Реформи афінянського архонта *Солона* (близько 640–559 рр. до н.е.) здійснювалися за критеріями майнового цензу – тимократичної конституції. Усі громадяни поділялися на 4 класи чи розряди за кількістю доходів з землі. Солон увів оцінку майна громадян і розділив суспільство на *п'ятсотмірників* (тих, хто виробив у сукупності 500 мір сухих та рідинних продуктів); другими поставив *вершників* (300 мір); *зевгитами* були названі люди третього цензу (200 мір). Решту жителів він назвав *фетами* (менше 200 мір) і дозволив їм бути суддями або брати участь в управлінні лише шляхом участі у народних зборах. Посади архонтів і членів Ареопагу могли обіймати лише представники 1-го розряду, а інші державні посади – тільки громадяни перших трьох розрядів.

Відповідно до реформ Солона кожен, хто вважав, що платить надто великий податок, міг обмінятися своєю власністю з тим, хто платить менший податок, при умові згоди останнього. Тобто ще у Древніх Афінах було розроблено процедуру, яка забезпечує відсутність заздрощів – коли жоден з учасників процедури не погоджується обміняти свою частку на частку іншої сторони.

У античних Афінах діти до 7 років виховувалися у сім'ї під наглядом раба чи рабині. Після 7 років дівчата продовжували виховуватися дома, а хлопчики до 16 років відвідували державну чи приватну школу. У гімнастичних школах навчалися з 12 років. З 14 років продовжували навчання у мусичних школах. З 16–18 років юнаки після гімнастичних та мусичних шкіл навчалися в гімнасіях: Академії, Лікеї чи Кіносаргу. З 18 років молодих людей переводили в державну військову організацію ефебів, де вони несли військову службу.

У Давньому Римі *Закони 12 таблиць* (451–450 рр. до н.е.) були створені комісією 10 децемвірів. Ці закони було накреслено на 12 мідних дошках-таблицях і виставлено для загального огляду на головній площі Рима – Форумі. Цими Законами встановлювалися експертні оцінки забороненого до забудови місця навколо будівлі у 2,5 фути. Регламентувалося також встановлення паркану – 1 фут від чужої межі. Якщо копався колодязь, слід було відступити на 6 футів від межі, якщо саджали оливку або шовковицю – треба було відступити від сусідньої ділянки на 9 футів, а при насадженні решти дерев – на 5 футів. Відповідно до Законів 12 таблиць, якщо виникав спір про межу, то проводилося розмежування за участю експертної комісії з трьох посередників. Цими ж Законами визначалася експертна рада з 5 свідків та вагаря, в присутності якої укладалися угоди самозакладу або відчуження речей.

Згідно давньоримського законодавства, вільнонароджені жінки звільнялися від опіки тоді, коли вони народили трьох дітей, а вільновідпущені – якщо у них народилося четверо дітей. Свобода раба, наприклад, коштувала 10 тисяч сестерцій. Експертна оцінка зламаної під час бійки кістки вільної людини становила 300 асів, а зламаної кістки раба – 150 асів. "Вага" образи визначалася штрафом у 25 асів. Законами 12 таблиць визначалося, зокрема, що співвідношення між номінальною вартістю краденої речі та штрафом за неї складає від 1 до 3. Неповнолітнім присуджувалося відшкодування спричиненої шкоди у подвійному розмірі. Вперше 12 таблицями була встановлено верхню експертну оцінку кредитного відсотка – не більше 1% на місяць.

Для древніх цивілізацій характерною рисою є чітка регламентованість суспільства. Крім введення цензів застосовувалася технологія ранжування варн: давньоіндійська система варн встановлювала упорядкування чотирьох основних груп суспільства: брахмани $\succ$ $\succ$ кшатрії $\succ$ вайш'ї $\succ$ шудри. Брахманські закони забороняли кровозмішення між варнами, а також перехід із однієї групи в іншу.

Закони міфічного предка людей *Ману* (Індія, близько 2 ст. до н.е.– 1 ст. н.е.) написані санскритом і містять 2650 двовіршів (*шлок*), поділених на 12 розділів. Зокрема, розділ 8 містить наставлення щодо

судочинства та юридичної практики. Розділи 9 та 10 присвячені сімейним стосункам, покаранням за різні злочини, обов'язкам членів варн. Цими Законами передбачено, що для шудри призначена дружина шудрянка, для вайшія – шудрянка і своєї варни, для кшатрія – обидві попередні і своєї варни, для брахмана – три визначені раніше, а також своєї варни. В цих же законах сформульовано правило: за різниці у свідченнях свідків перевага віддається більшості, за рівності – наділеним видатними якостями, при різниці між різними – брахманам.

Закони Ману повідомляють про класифікацію рабів на 7 розрядів, серед яких – раби за їжу, за спадком, в силу покарання та інші. Відповідно до цих законів, після смерті батька майно успадковували лише сини. Найстарший син успадковував додаткову частину у розмірі 1/20 всього майна. Дочки не одержували спадщини, але їхні брати мали виділити із свого майна по 1/4 частині як посаг для своїх сестер.

Експертні оцінки вартості наклепів між представниками різних варн були такими. Кшатрій, що звів наклеп на брахмана, платив штраф у розмірі 100 пан (пан = 9,76 г срібла), вайшія – 150–200 пан, шудра підлягав тілесному покаранню. За наклеп на кшатрія бра-хман платив 50 пан, вайшія – 25 пан, шудра – 12 пан. Держава встановлювала відсотки за позику: для брахмана 2 % на місяць, кшатрія – 3 %, вайшія – 4 %, шудрі – 5 %. Крадіжки зерна, тварин та інших речей понад 50 пан каралися штрафом у 11-кратному розмірі вартості украденого.

Відповідно до законів Ману, індієць міг змінити дружину, яка не народжувала дітей, на 8 році подружнього життя. Якщо дружина народжувала мертвих дітей – на 10 році, а ту, що народжувала лише дівчат – на 11 році сімейного життя. За цими законами сварливу дружину можна було змінити негайно. Тобто закони встановлювали чіткі відношення переваги на множині фізичних та психологічних властивостей жінки.

Мусульманське право поділяє вчинки правовірних на 5 категорій: а) вчинки, які є обов'язковими; б) ті, що рекомендуються; в) ті, що дозволяються; г) ті, що не дозволяються; д) ті, що забороняються. За крадіжку *Коран* (створений 610-632 рр.) встановлює точно визначену міру покарання – позбавлення руки. Але при цьому експерти визначають, що вартість вкраденого має бути вищою в різних варіантах від 1/4 до 1 динара. Відповідно до мусульманського права, розмір викупу за вбивство вільного мусульманина встановлювався у 100 верблюдів або 1 тисячі золотих динарів чи 12 тисяч динарів паперовими грошима. За вбивство жінки виплачувалася сума удвічі менша.

У стародавні часи надзвичайно популярною була експертна оцінка натурального або грошового податку у вигляді данини з підкорених племен на користь переможців: *полюддя* або *повіз*. Широко відомий історичний приклад ваги невірної експертної оцінки – доля руського *князя Ігоря*. Помилка в оцінці розмірів та термінів збору данини, майнової спроможності древлян та межі людського терпіння у 945 році (6454 від створення світу) коштували київському князю життя. *Княгиня Ольга* (близько 890-969 рр.) жорстоко помстилася за вбивство чоловіка, та змушена була встановити нові норми життя суспільства: "правильні" експертні оцінки розміру данини та місця її збирання – *уроки* та *погости*.

Формалізовані експертні оцінки у Київській Русі використовувалися досить регулярно. Наприклад, за законами великого князя *Ярослава Мудрого* (980–1054), вбивця чужого коня мав заплатити в казну 12 гривень і 1 гривню потерпілому. А за вбивство вільного селянина – лише 3 гривні.

1.6.4. *Застосування експертних технологій при створенні систем мір*

Сенс введення будь-якої міри – в її об'єктивності, безумовній точності для кожного користувача. Тому *проблема точності мір* та їх перевірки виникла разом з народженням системи мір. Майже у всіх народів перші еталони мір ваги зберігалися у храмах.

Міри, що виникли на ранніх стадіях розвитку суспільства, були хоч і не точними, але мали найдоступніші для кожного експерта еталони: *ступня, п'ядь, палець, лікоть, долоня, сажень, аршин*. Мірами були також і можливості людини захопити щось чи віднести своїми руками – *пригорща, оберемок*. Для деяких цивілізацій мірами ваги слугували зерна ячменю та пшениці. Стрункі системи мір з'явилися як ознака цивілізації. Будь-яка держава не могла обійтися без терезів, мірок, безмінів, гирь та грошей.

Давньогрецький скульптор *Поліктет* (5 ст. до н.е.) розробив канон – систему ідеальних пропорцій людського тіла, згідно його уявлень про ідеал. За результатами обчислень скульптора, голова має бути розміром 1/7 людського зросту, обличчя та кисть руки – 1/10, а ступня – 1/6 зросту людини.

Давньоримський архітектор *Марк Вітрувій Поліон* (1 ст. н.е) у трактаті з теорії архітектури стверджував, що природа у побудові людського тіла розпорядилася такими пропорціями, які слід використовувати у архітектурних спорудах. Вітрувій наводить основні антропометричні закономірності, зокрема:

- чотири долоні ~ ступня;
- шість долонь ~ один лікоть;
- 24 долоні ~ людський зріст ~ 4 ліктя;
- розмах рук людини ~ зріст людини;
- відстань від лінії волосся до підборіддя ~ 10 % людського зросту;
- ширина чоловічих плечей ~ 25 % зросту чоловіка;
- довжина ступні ~ 1/7 зросту людини.

У книзі "Про співрозмірність храмів людському тілу та про архітектурні деталі" Вітрувій писав, що висота сходів має бути від 9 до 10 дюймів для того, щоб сходження не було важким. Ширина сходинок, на його думку, має бути у межах від півтора до двох футів.

У часи Київської Русі "золотий пояс" великого князя *Святослава Ярославича* (1027-1076) слугував зразковою мірою довжини. В уставі новгородського князя *Всеволода Мстиславича* (правив 1117–1136) "Про церковні суди і про людей і про мірила торгівлі" приписувалося "...торговия все веси і меріла блюсті без пакості, ні умаліваті, ні умноживаті, а всякій год ізвещіваті..." Порушник міг бути покараний аж до "...преданія казні смертію".

1.6.5. *Розвиток формалізованих експертних оцінок у 15–18 століттях*

Джіроламо Савонарола (1452–1498), порівнюючи формалізовані експертні оцінки різних наук, писав: "Хоча достовірніша наука є відносно більш гідною, але абсолютно вона менш гідна, якщо трактує про менш достойні речі. Таким чином, науки реальні ми називаємо абсолютно благороднішими від науки раціональної, оскільки їхній предмет є благороднішим. Адже реальне буття є благороднішим від буття уявного." Виходячи з цього, Савонарола вважав математичні науки, хоч і достовірнішими від фізичних, але абсолютно менш "благороднішими". Астрономія є "достойнішою" від оптики і теорії музики через більше "благородство" свого предмета і свою більшу достовірність. Оптика є абсолютно достойнішою від теорії музики тому, що предмет зору є "благороднішим" від предмета слуху, а також тому, що вона є стійкішою.

Леонардо да Вінчі (1452-1519) широко використовував елементи обробки експертної інформації. У "Атлантичному кодексі" Леонардо да Вінчі є думки про подібність. Він розглядає питання – чому кит є більшим від слона і наводить порівняння. Леонардо аналізував також, хто з його 20 учнів стане справжнім художником, хто з них є талановитим і на кого є сенс витрачати час. Учителеві легко визначити переваги за окремими ознаками: один учень легко освоює натюрморт, другому легше дається пейзаж, третій більш схильний до перспективи і т.д. А от шостий учень, наприклад, поступається першому у написанні натюрмортів, гірше другого пише пейзажі, не так добре як третій освоює перспективу, оскільки цей учень не має схильності до спеціалізації, тобто не може домінувати інших по окремих ознаках. Але він усім цікавиться, тому Леонардо дає інтегральну оцінку такому учневі - він буде справжнім художником.

Леонардо да Вінчі був одним з перших, хто досліджував накреслення літер. Він вважав, що кожна літера має вписуватися у квадрат. *Альбрехт Дюрер* (1471–1528) висунув свою теорію: слід максимально виділяти у літерах усі вертикальні лінії. Але ідеал геометрричних пропорцій написання літер шукається ще і в наш час. Дослідженнями встановлено, що оптимальне співвідношення ширини літер до їхньої висоти складає близько 2 до 3. Найприйнятнішим співвідношенням з точки зору сприйняття товщини літер до висоти є 1:6 для прямої контрастності (чорні літери на білому фоні) та 1:10 для зворотної контрастності (білі літери на чорному фоні).

Експертні комісії створювалися вже кілька століть тому і не були позбавлені помилок. Понад сто років у Флоренції лежав величезний шматок мармуру, зіпсований скульптором Дікуччо. Рада художників, очолювана Леонардо да Вінчі, визнала, що цей шматок ні до чого не придатний. *Мікеланджело Буонаротті* (1475–1564) не погодився з експертною оцінкою поважної комісії і створив з цієї мармурової брили свого "Давіда".

Мішель де Монтень (1533-1592) висловлював обурення щодо принципів експертних процедур, які домінували протягом усієї людської історії. На його думку те, що є загальновизнаним, сприймається як деяка умовна мова, незрозуміла непосвяченим. Так світ сповнюється безглуздістю та брехнею. У багатьох речах не сумніваються тому, що загальновизнаних думок ніколи не перевіряють. Найчастіше переймаються не тим, чи правильним є дещо, а тим, який авторитет стоїть за цією думкою. Не питають, чи сказав Гален дещо цінне, а переймаються лише тим - сказав він так чи інакше.

Монтень вважав, що світ - це нескінчене різноманіття та несхожість. Усі пороки цілком схожі між собою у тому, що вони є пороками. Але вони є пороками не однаковою мірою. "Важко припустити, - пише Монтень, - щоб той, хто переступив установлену межу на сто кроків, не був би більш тяжким злочинцем, ніж

той, хто переступив її на 10; або ж, що здійснити святотатство не гірше, ніж вкрасти на городі качан капусти". Порівнюючи славу чотирьох чудових перемог давніх греків (при Саламіні, Платеях, при Мікалі і в Сицилії), Монтень робить висновок, що сумарна слава зазначених перемог не може перевищувати славу поразки *царя Леоніда* та його воїнів у Фермопільській ущелині.

Сутність *істинної індукції*, за вченням *Френсіса Бекона* (1561–1622), полягає у тому, що за допомогою найретельнішого порівняння максимальної множини фактичних даних, які мають відношення до явища, що вивчається, пізнаються та виключаються несуттєві умови явищ. Таким чином, залишаються лише суттєві умови. Необхідно максимально повно накопичити матеріал і скласти таблиці:

- таблицю присутності, яка охоплює усі випадки наявності властивості, яка вивчається;
- таблицю відсутності, якщо дана властивість є відсутньою - достатньо обмежитися зазначенням випадків, дуже схожих з тими, у яких присутня властивість, яка досліджується;
- таблицю ступенів або порівнянь, яка охоплює випадки, в яких властивість, що вивчається, присутня різною мірою.

Складання таких таблиць Бекон вважає необхідною попередньою умовою для застосування істинної індукції. Бекон робить відкриття, що бувають випадки прерогативні, які мають ту перевагу, що в них досліджуване явище виступає у такому чистому та незмішаному вигляді, що є можливість швидко та легко розрізняти випадкове від суттєвого. Нечисленних *прерогативних інстанцій* достатньо для надійного висновку. Він нараховує 27 видів прерогативних інстанцій. Бекон вважав, що його метод дає людському розуму начебто циркуль та лінійку, за допомогою яких найнедосвідченіша рука може без великих зусиль креслити круги та прямі лінії. Перевага ж у науковому дослідженні одних перед іншими полягає у тому, що ті, які керуються знанням правильних логічних прийомів, краще керують своїм розумом у справі відкриття нових істин. Бекон намагався на практиці застосовувати свій метод істинної індукції і вибрав предметом свого дослідження явища тепла та холоду. Він прийшов до висновку, що причиною тепла є вібруючий рух найдрібніших часток матерії і цей рух передається від тепліших тіл до менш теплих.

Галілео Галілей (1564–1642) вважав, що пізнати сутність речі - означає визначити її кількісно: встановити її положення у просторі і часі, з'ясувати характер її руху. У фізиці все треба звести до розміру, форми та руху. Галілей вважав, що такі ознаки як колір, температура не відносяться до сутності речі. Велика наукова заслуга Галілея полягає у зведенні складного різноманіття природи до дії єдиних універсальних законів.

До нашого часу дійшли міркування Галілео Галілея про точність експертних оцінок. Складність проблеми вибору критерію апостеріорної оцінки прогнозу відображує суперечка між Галілео Галілеєм та Ноцціліно про точність оцінок вартості коня. Цього коня одним оцінщиком було оцінено в 10, другим – у 1000 скудо, а продано згодом за 100 скудо. На думку Ноцціліно, точнішим виявився перший експерт, оскільки він помилився лише на 90 скудо, а другий – на 900. Але Галілео Галілей зазначає, що і перший і другий помилилися однаково – у 10 разів.

Молодший сучасник і друг Френсіса Бекона *Томас Гоббс* (1588-1679) вважав, що залежно від інтересів різних осіб та їхніх смаків одні й ті ж вчинки одними людьми називаються добрими, іншими визнаються поганими. Наприклад, те, що один називає боягузтвом, інший – розсудливістю. Гоббс говорив про невиразність, плутаність та суперечливість моральних, юридичних та політичних понять, про їхню нестійкість та мінливість.

Гоббс дав також кілька класифікацій суджень. За якістю він поділяє їх на позитивні та негативні залежно від того, предикатом є позитивне чи негативне ім'я. За кількістю він поділяє судження на універсальні (загальні), партикулярні (окремі), невизначені (без зазначення кількості) та одиничні. Третій поділ суджень – на істинні та хибні. Далі Гоббс поділяє судження на первісні та непервісні, відносячи до первісних означення, які довільно встановлюються людьми і слугують принципами доведення, хоча їх самих неможливо довести.

Рене Декарт (1596–1650) побудував *теорію хибних думок*. Він вважав, що хибні думки людини залежать від її розуму, пізнавальної здібності та волі – здатності вибирати чи вільно вирішувати. Омани народжуються від того, що воля, будучи ширшою від розуму, не втримує людину у межах, але розповсюджується на речі, які людина не осягає. Декарт вважав, що теорія помилок є суто психологічною. За Декартом, існують такі шляхи відшукання істини: <інтуїція; дедукція; індукція; порівняння; аналогія>. Для пізнання предметів людина має такі здібності, "інструменти": <розум; уява; пам'ять; відчуття>.

Декарт вважав, що логіка має складатися з чотирьох основних правил:

- вважати за істинне лише те, що з очевидністю є таким і у жодному разі не може бути піддане сумніву;

- розділяти усі труднощі досліджуваних проблем на стільки частин, на скільки це необхідно для їх кращого вирішення;
- будь-які думки по порядку починати з найпростіших та найдрібніших і поступово підніматися до складніших, допускаючи, що є порядок навіть між такими думками, які безпосередньо не пов'язані між собою;
- робити скрізь переліки настільки повними і огляди настільки загальними, щоб бути упевненим, що нічого не втрачено.

Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646–1716) вважав, що джерелом хибних думок людей та їхніх помилкових суджень є чотири причини:

- брак доведень;
- недостатнє вміння користуватися ними;
- відсутність бажання їх використовувати;
- невірні правила ймовірності.

Лейбніц ввів у логіку поряд з достовірністю і ймовірність. Він зазначив, що через відсутність достовірних знань інколи доводиться користуватися "сутінками ймовірності". Лейбніц вважав серйозним недоліком традиційної логіки відсутність у ній дослідження ступеня ймовірності. Ймовірність він розглядав не як психологічну невпевненість дослідника у істинності досліджуваного положення, а як об'єктивно більшу чи меншу можливість певного явища, яка залежить від самої природи речей.

Описуючи ретроспективу використання формалізованих експертних оцінок слід згадати відомі роботи *Якоба Бернуллі* (1654-1705) щодо суб'єктивної ймовірності. Ще у 17 столітті виникла ідея математичного сподівання. З часом її стали використовувати у процесах ПР. Було сформульовано положення про те, що при виборі слід для кожної альтернативи визначити можливі наслідки та їх ймовірності. Я. Бернуллі висунув ідею про *суб'єктивну цінність альтернатив*.

Спроби формалізованого експертного оцінювання робилися *Джонатаном Свіфтом* (1667–1745). У 1736 р. він склав список, в якому поділив своїх знайомих на чотири категорії: <"невдячних"; "вдячних"; "ні те, ні се"; "тих, які викликають сумнів">. До цього списку ввійшли 20 осіб, які виділялися своєю вченістю, знатністю та високими посадами. Причому для декого з цього списку він робить змішані оцінки ("викликає сумнів + вдячний", "невдячний + викликає сумнів") і, таким чином, розширює шкалу оцінювання.

Дослідженнями обробки формалізованої експертної інформації займався також *Леонард Ейлер* (1707–1783) у роботах, пов'язаних з *функціями корисності*.

Михайло Васильович Ломоносов (1711–1765) поділяв ідеї на прості і складні. Властивості речей Ломоносов поділяє на *матеріальні та "життєві"*. До матеріальних властивостей він відносить ті, що однаково властиві як живим, так і неживим тілам: величина, фігура, вага, твердість, пружність, рух, колір, смак, запах, тепло, холод тощо. До "життєвих" властивостей (властивостей тіл живої природи) він відносить "душевні обдарування" – пам'ять, кмітливість, волю; пристрасті – радість і сум, любов і ненависть, честь та сором, бажання та відразу тощо; властивості людської особистості – її чесноти і пороки. До особливої групи М.В. Ломоносов виділяє "противні" речі, які одночасно разом існувати не можуть – як, наприклад, день та ніч, спека та холод, багатство та бідність.

Іммануїл Кант (1724–1804) заперечував пізнання всього того, що виходить за межі можливого досвіду, взагалі заперечував психологію як науку. Про психічні явища, по Канту, можна лише сказати, що вони є неперервним потоком одного вимірювання і що до них не можна прикласти апріорну форму простору і категорію розуму. Апріорні принципи, які є умовою можливості пізнання, по Канту, відносяться лише до зовнішнього протяжного світу.

Розділивши категорію розуму на чотири види (*кількість, якість, відношення і модальність*), Кант кожен з цих видів поділяє на три підвиди, одержуючи таблицю 12 категорій:

- категорії кількості: <єдність; множина; загальність>;
- категорії якості: <реальність; заперечення; обмеження>;
- категорії відношення: <субстанція та акциденція; причина і дія; взаємодія>;
- категорії модальності: <можливість; існування; неможливість>; – з їхніми протилежностями: <неможливість, неіснування; випадковість>.

Початком наукової *теорії* ПР вважається робота французького математика, механіка та астронома, члена Паризької Академії наук *Жозефа Луї Лагранжа* (1736–1813) щодо визначення кількості землі, яку має брати на лопату землекоп, щоб продуктивність його праці протягом зміни була найбільшою. В результаті досліджень виявилося, що теза "бери щонайбільше, кидай якомога далі, поки летить – відпочивай" є невірною.

Експертні оцінки широко використовувалися у соціальній практиці. У 17–18 *століттях* за французькими законами комендант Бастилії зобов'язаний був щоденно видавати в'язню, який є принцом крові, 50 ліврів, ув'язненому маршалу Франції 36 ліврів, генерал-лейтенанту – 24, парламентському раднику – 15 ліврів, знатному міщанину – 5 ліврів. Таке розподілення видатків на утримання можна розглядати як кількісні експертні оцінки інтегральної важливості для держави різних категорій громадян.

1.6.6. *Приклади застосування формалізованих експертних оцінок у нові часи*

Напередодні жовтневого перевороту 1917 року *Володимир Ілліч Ульянов (Ленін)* (1870–1924), точно передбачив: "Сьогодні рано, завтра буде пізно. Зволікання подібне до смерті". Тобто все мало відбутися протягом якихось кількох годин. І не помилився "Старик" (один із 102 псевдонімів В.І. Ульянова). Щоправда дещо погарячкував із світовою революцією. Але терміни перемоги світової революції на той час не було формалізовано. Про її невідворотність хоч і заявлялося упевнено, але без зазначення конкретних дат, тобто розмито і доволі безвідповідально. З 1918 року у практику судових органів Радянської Росії навіть увійшли вироки: позбавлення волі до *перемоги світової революції*. На ті часи такий вирок здавався не строгим і виносився інколи навіть за дрібні правопорушення.

За експертними оцінками В.І. Леніна революція має черпати свої сили серед робітників та селян Росії. Експерт *Лев Давидович Троцький (Бронштейн)* (1879–1940) вважав, що необхідні для революції сили можна почерпнути лише на арені світової революції пролетаріату. Перед жовтневим переворотом Л.Б. Троцький видав брошуру "Програма миру", у якій стверджував, що перемога соціалізму в одній країні є неможливою: "Переможна революція у Росії або Англії є немислимою без революції у Німеччині і навпаки". Майже через століття ми впевнилися, що Троцький був у цьому аспекті кращим експертом від Леніна. Більше того: ілюзорна перемога соціалізму в одній окремо взятій країні взагалі поховала соціалістичну ідею або, як мінімум, революційні шляхи її реалізації.

Неадекватність експертної інформації призводить до помилкових, несправедливих чи неефективних рішень. Завищені експертні оцінки можливостей радянських військ і недооцінка військ імовірного противника перед Вітчизняною війною мали трагічні наслідки для усього перебігу війни. 13 січня 1941 року на нараді у Кремлі за участю вищого командного та політичного складу Збройних Сил СРСР начальник Генерального штабу *К.А. Мерецков* зробив таку заяву: "При розробці Статуту ми виходили з того, що наша дивізія є значно сильнішою від дивізії німецько-фашистської армії і що в зустрічному бою безумовно розіб'є німецьку дивізію. В обороні ж одна наша дивізія відіб'є удар двох-трьох ворожих дивізій. У наступі півтори дивізії подолають оборону ворожої дивізії".

Тобто виходило, що дивізія Червоної Армії має не менш як подвійну перевагу над німецькою. Насправді ж виявилося, що наша стрілецька дивізія того часу була удвічі слабкішою від німецької піхотної дивізії.

Першому секретареві ЦК КПРС *Микиті Сергійовичу Хрущову* (1894–1971) спроба формалізації експертної оцінки також не вдалася: обіцянка на 20 з'їзді КПРС побудувати *комунізм до 1980 року* дуже тішила радянських людей, та виявилася не більше, ніж політичним прожектерством.

Широко розповсюдженим сьогодні є *вимірювання економічних властивостей* продукції шляхом визначення її вартості та ціни. Наприклад, якість продукції визначається такими показниками як її призначення, надійність функціонування, естетичність, економічність використання, ергономічність, технологічність, транспортабельність, уніфікованість, патентна чистота, екологічність, безпечність тощо.

Точність вимірювання цих показників поки що не може порівнятися з досягнутою точністю вимірювання фізичних величин, але здебільшого є достатньою як для порівняння різних видів товарної продукції між собою, так і для маніпуляції цією інформацією з боку спеціалістів з маркетингу та реклами. Нескінчені рейтинги використовуються здебільшого для впливу на споживчий попит: хто кращим чином зможе представити вигідну для фірми інформацію.

У сучасному світі елементи експертного оцінювання часто застосовуються у *маркетингових технологіях*, причому роль орієнтирів для підприємців та бізнесменів при оцінці діяльності підприємств виконують різні конкурси, експертні оцінки, рейтинги тощо. Такі форми експертного аналізу у цивілізованих країнах викликають цікавість у споживачів при умові проведення науково обгрунтованих досліджень, незалежності дослідницьких інститутів та пред'явлення відповідної інформації.

Потреба суспільства у *незалежній інформації* швидко зростає. Ця потреба у сучасній масовій аудиторії викликана дезорієнтацією внаслідок надзвичайного зростання пропозиції товарів, які часто є близькими між собою за якістю. У поєднанні з сучасними рекламними стратегіями та маркетинговими технологіями така ситуація здатна нав'язати рядовому споживачу відповідні варіанти ринкової поведінки. На сьогодні конкуренція у ринковому середовищі часто зводиться до конкуренції способів просування товару.

Експертні оцінки широко застосовуються при створенні *системи оплати праці*. Заробітна плата поділяється на основну, додаткову, інші заохочувальні та компенсаційні виплати. Усі ці складові

заробітної плати визначаються безпосередньо експертним шляхом або опосередковано через тарифні ставки, оклади, відрядні розцінки тощо. *Мінімальна заробітна плата* також є експертною оцінкою, яку здійснює Верховна Рада за поданням Кабінету Міністрів. Яке б наукове підгрунтя не підводилося під розміри мінімальної заробітної плати, ця величина за своєю природою є експертною. Одна з функцій цієї величини – слугувати точкою відліку для тарифної системи оплати праці та бути індикатором в комплексі з іншими експертними оцінками – *прожитковим мінімумом, неоподатковуваним мінімумом* тощо.

У наш час дедалі інтенсивніше здійснюється перехід до кількісних методів досліджень на основі вимірюваної інформації в *психології, соціології, біології, мистецтві, медицині, педагогіці, спорті* тощо. Звичним стало вимірювання знань учнів та студентів, майстерності спортсменів, творців художніх творів, натхнення, таланту, краси, артистизму та інших властивостей.

Література до розділу 1

1. *Адамов А.П., Гаджиев Ю.А., Пирбудагов Г.М., Соцкая А.Н.* Об определении компетентности экспертов методом взаимооценки // Автоматика и телемеханика. – 1989. – № 3. – С. 185–189.

2. *Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т.* Синтез локальных моделей коллективного выбора // Автоматика. – 1988. – № 1. – С. 71–83.

3. *Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т.* Выбор вариантов (основы Теории). – М.: Наука, 1990. – 240 с.

4. *Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т.* Функциональные локальные операторы в теории голосований. //Автоматика и телемеханика. – 1984. – № 5. – С. 79–88.

5. *Алескеров Ф.Т., Бауман Е.В., Вольский В.И.* Методы обработки интервальных экспертных оценок // Автоматика и телемеханика. – 1984. – № 3. – С. 127–133.

6. *Бадалян Л.Г.* Количественный анализ качественных признаков. Математические методы в социологических исследованиях. – М.: Ин-т социал. исследований АН СССР, 1984. – С. 88–112.

7. *Бевз С.Н.* Агрегирование признаков по критерию непротиворечивости // Автоматика. – 1987. – № 2. – С.22–25.

8. *Белкин А.Р.* Желательные свойства оптимальных линейных упорядочений // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1987. – № 2. – С. 3–21.

9. *Белкин А.Р., Левин М.Ш.* Принятие решений: комбинаторные модели аппроксимации информации. – М.: Наука, 1990. – 160 с.

10. *Беляев Л.С.* Решение сложных оптимизационных задач в условиях неопределенности. – Новосибирск: Наука, 1978. – 126 с.

11. Березина Л.Ю. Графы и их применение. – М.: Просвещение, 1979. – 143 с.

12. *Березовский Б.А., Борзенко В.И., Полящук М.В.* Моделирование структуры предпочтений лица, принимающего решение. Обзор моделей и методов. – М.: Научный совет по проблеме "Кибернетика" АН СССР. – 1987. – № 6. – С.17–34.

13. *Березовский Б.А., Гнедин А.В.* Задача наилучшего выбора. – М.: Наука, 1984. – 196 с.

14. *Берман В.П., Наумов Г.Е.* Отношение предпочтения с интервальным оцениванием замещений в критериальном пространстве // Автоматика и телемеханика. – 1989. – № 3. – С. 139–153.

15. *Бондаренко В.В., Гнатієнко Г.М.* Методологічні та психологічні аспекти можливостей адаптації людей в ситуаціях прийняття рішень // Вісн. Черніг. держ. технол. ун-ту. – 2001. – № 12. – С. 151–155.

16. *Борисов А.Н., Вильюмс Э.Р., Сукур Л.Я.* Диалоговые системы принятия решений на базе мини-ЭВМ: информационное, математическое и программное обеспечение. – Рига, 1986. – 195 с.

17. *Браверман Э.М., Мучник И.Б.* Структурные методы обработки эмпирических данных – М.: Наука, 1983. – 464 с.

18. *Вилкас Э.Й., Майминас Е.З.* Решения: теория, информация, моделирование. – М.: Радио и связь, 1981. – 328 с.

19. *Волошин А.Ф., Гнатиенко Г.Н.* Диалоговая система поддержки принятия решений на базе СМ ЭВМ // Исследование операций и АСУ. – 1991. – Вып. 35. – С. 100–109.

20. *Волошин А.Ф., Гнатиенко Г.Н.* Задача технического обслуживания сети элементов связи и алгоритм ее решения // Исследование операций и АСУ. – 1991. – Вып. 37. – С. 99–105.

21. *Волошин А.ф., Гнатиенко Г.Н., Косматый Д.Ю.* Система поддержки принятия решений в банковской деятельности // Знания-Диалог-Решение: Сб. научн. трудов Межд. конф. (9–14 октября 1995 г). Том 1. – Ялта, 1995. – С. 188–194.

22. *Волошин А.Ф., Гнатиенко Г.Н.* Многокритериальный подход к задаче сопровождения группы объектов в игровой постановке // Автоматика. – 1992. – № 4. – С. 53–55.

23. *Волошин А.Ф., Гнатиенко Г.Н.* Построение компромиссной ранжировки в задаче группового выбора//Проблемы теоретической кибернетики: Матеріали 8-й Всесоюз. конф., ч. 2. – Волгоград, 1991. – С. 44–46.

24. *Волошин О.Ф., Гнатієнко Г.М.* Проблеми узгодженості експертної інформації в задачах прийняття рішень// Знание-Диалог-Решение, KDS-97: Збірник наук. праць Міжн. конф. - Ялта, 1997. - Т. 2. - С. 332–335.

25. *Волошин О.Ф., Гнатієнко Г.М.* Процедури визначення компетентності експертів // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. 1993. - № 3. - С. 102–111.

26. *Волошин А.Ф., Гнатиенко Г.Н., Требин С.Л.* Диалоговая система многокритериальной и системной оптимизации на базе СМ ЭВМ // Внедрение САПР - путь совершенствования инженерного труда и качества разработок: Тез. докл. Республ. конф. (30 июня - 2 июля 1987 г). - Винница, 1987. - С. 18.

27. *Волошин О.Ф., Мащенко С.О.* Теорія прийняття рішень: Навчальний посібник. - К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2006. - 304 с.

28. *Вольский В.И.* Правила выбора лучших вариантов на ориентированных графах и графах-турнирах // Автоматика и телемеханика. - 1988. - № 3. - С. 3–17.

29. *Воронин А.Н.* Нелинейная схема компромиссов в многокритериальных задачах управления // Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика. - 1990. - № 4. - С. 37–46.

30. *Гильбурд М.М.* Об эвристических методах построения медианы в задачах группового выбора // Автоматика и телемеханика. - 1988. - № 7. - С. 131–136.

31. *Глазунов В.М. Силин В.П.* Финансовый анализ и оценка реальных инвестиций. - М.: Финстатинформ, 1997. - 135 с.

32. *Глотов В.А.* Координатно-модульные отношения // Автоматика и телемеханика. - 1984. - № 2. - С. 99–104.

33. *Гнатієнко Г.М.* Алгоритми обробки експертної інформації в задачах ранжування та їх застосування: Дис. ... канд. техн. наук: 05.13.16. - К., 1994. - 133 с.

34. *Гнатієнко Г.М.* Алгоритми обробки експертної інформації в задачах ранжування та їх застосування: Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.13.16 / К., 1994. - 16 с.

35. *Гнатиенко Г.Н.* Алгоритм последовательного поиска строгой компромиссной ранжировки в задачах группового выбора // Киев. ун-т. - К., 1992. - 16 с. - Рус. - Деп. в УкрНИИНТИ 18.02.92, № 212 - Ук92.

36. *Гнатієнко Г.М.* Деякі математичні аспекти соціальної експертизи // Соціальна експертиза в Україні: методологія, методика, досвід впровадження / За ред. Ю.І.Саєнка. - К.: Ін-т соціології НАНУ, 2000. - 194 с.

37. *Гнатієнко Г.М.* Класифікація задач однієї моделі аналізу даних // Київ. ун-т. - К., 1992.- 89с. - Укр. - Деп. в УкрНДІНТІ 18.06.92, № 911 - Ук92.

38. *Гнатієнко Г.М., Косматий Д.Ю.* Апроксимація метризованої матриці парних порівнянь конусом переваг // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 1993. – № 3. – С. 122–128.

39. *Гнатієнко Г.М.* Методи оцінки компетентності спеціалістів. Математичні та інформаційні проблеми прогнозування наслідків техногенних та природних катастроф // Соціально-економічні наслідки техногенних та природних катастроф: експертне оцінювання / Відп. ред.: В.В. Дурдинець, Ю.І. Саєнко. – К.: "Стилос", 2000. – 260 с.

40. *Гнатиенко Г.Н., Микулич А.Ю.* Программный комплекс поддержки принятия решений в задачах системной оптимизации линейных многокритериальных моделей на базе СМ ЭВМ // Киев. ун-т. – К., 1993. – 10 с. – Рус. – Деп. в УкрНИИНТИ 10.03.93, № 433 –Ук93.

41. *Гнатієнко Г.М.* Проблематика розподіленої обробки експертної інформації // Теорія прийняття рішень: Праці міжн. школи-семінару. – Ужгород: УжНу, 2002. – С. 26.

42. *Гнатиенко Г.Н.* Программная реализация комплекса инструментальных средств синтеза диалоговых систем на языке высокого уровня на базе СМ ЭВМ // Киев. ун-т. – К., 1992. – 12 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 16.07.1992, №934. –Ук92.

43. *Гнатиенко Г.Н.* Система поддержки принятия решений в задачах анализа данных на базе СМ ЭВМ // Киев. ун-т. – К., 1992. – 22 с. – Рус. – Деп. в УкрНИИНТИ 18.02.92, № 211-92.

44. *Гнатієнко Г.М.* Якість соціологічної експертизи та можливості маніпулювання її результатами // К.: "Генеза", 1998. – № 1–2. – С. 53–55.

45. *Горелик А.Л., Абаев Л.Ч.* К вопросу расчета согласованности экспертных оценок в задаче группового выбора и принятия решений // Кибернетика. – 1990. – № 3. – С. 65–69.

46. *Губанов В.А.* Введение в системный анализ. – Л.: ЛГУ, 1988. – 227 с.

47. *Гурвич Б.А., Меньшиков И.С.* Институты согласия. – М.: Знание, 1989. – 48 с.

48. *Дехтяренко В.А., Бартко А.А.* Метод генерирования и оценки альтернатив проектирования информационных и управляющих комплексов АСУТП энергоблоков и ТЭС // Управляющие системы и машины. – 1984. – № 6. – С. 33–38.

49. *Дехтяренко В.А.* Методические основы комплексной оценки и принятия решений на ранних стадиях проектирования сложных систем. – В кн.: Автоматизация проективно-конструкторских работ и технологической подготовки производства в машиностроении. – Минск: Вышэйшая школа, 1976. – С. 57–76.

50. *Доленко Г.А.* Задание вектора предпочтений критериев на интервалах в задачах векторной оптимизации. Сб. "Кибернетика и вычислительная техника". Вып. 51. – К., 1981. – С. 101–108.

51. *Дубов Ю.А., Травкин С.И., Якимец В.Н.* Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. – М.: Наука, 1986. – 295 с.

52. *Дэвид Г.* Метод парных сравнений. – М.: Статистика. – 1978. – 144 с.

53. *Дюран Б., Оделл П.* Кластерный анализ. – М.: Статистика, 1977. – 124 с.

54. *Евланов Л.Г.* Теория и практика принятия решений. – М.: Экономика, 1984. – 176 с.

55. *Емеличев В.А., Янушкевич О.А.* Алгоритм линейной свертки последовательной оптимизации критериев / Минск, 1996. – 28 с. (Препринт / Ин-т техн. кибернетики АН Беларуси; № 5).

56. *Емельянов С.В., Ларичев О.И.* Многокритериальные методы принятия решений. – М.: Знание, 1985. – 32 с.

57. *Ермолов А.Н.* Механизм общественного выбора при полной информированности участников // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 1. – С. 126–136.

58. *Загоруйко Н.Г.* Классификация задач прогнозирования в таблицах "объект-свойство" //Вычислительные системы. – Новосибирск. – 1981. – Вып.88: Машинные методы обнаружения закономерностей. – С. 3–8.

59. *Зуев Ю.А., Ларичев О.И., Филиппов В.А., Чуев Ю.В.* Проблемы оценки предложений по проведению научных исследований // Вестник АН СССР. – 1979. – С. 29–39.

60. *Илюнин О.К., Попов Б.В.* Функциональные операторы большинства в теории голосований // Автоматика и телемеханика. – 1988. – № 7. – С. 137–145.

61. *Кендэл М.Дж.* Ранговые корреляции. – М.: Статистика, 1975. – 214 с.

62. *Кігель В.Р.* Математичні методи прийняття рішень у ефективному підприємництві: [Монографія]. – К.: ІЕУГП, 1999. – 269 с.

63. *Кини Р.Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещениях. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.

64. *Китаев Н.Н.* Групповые экспертные оценки. – М.: Знание, 1975. – 64 с.

65. *Клацки Р.* Память человека: структуры и процессы. – М.: Мир, 1970. – 320 с.

66. *Кристофидес К.* Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.

67. *Ларичев О.И.* Анализ процессов принятия решений при альтернативах, имеющих оценки по многим критериям // Автоматика и телемеханика. – 1981. – № 8. – С. 25–39.

68. *Ларичев О.И., Мошкович Е.М.* Качественные методы принятия решений. Вербальный анализ информации. – М.: Радио и связь, 1996. – 207 с.

69. *Ларичев О.И., Мошкович Е.М.* О возможностях получения от человека непротиворечивых оценок многомерных альтернатив / Дескриптивный подход к изучению процессов принятия решений при многих критериях // Сб. трудов ВНИИСИ. – 1980. – № 9. – С. 58–66.

70. *Ларичев О.И.* Наука и искусство принятия решений. – М.: Наука, 1979. – 200 с.

71. *Ларичев О.И.* Объективные модели и субъективные решения. – М.: Наука, 1987. – 176 с.

72. *Ларичев О.И., Поляков О.А.* Человеко-машинные процедуры решения многокритериальных задач математического программирования (обзор). Сборник трудов ВНИИСИ, 1980. – № 1. – С. 129–145.

73. *Ларичев О.И.* Системный анализ и принятие решений // Сб. трудов ВНИИСИ. – 1982. – Вып. 6. – С. 83–97.

74. *Левин М.Ш., Журцев М.В.* Задача анализа значимости отказов компонентов технических устройств // Стандарт. Экспресс-информация. – М. Изд-во стандартов. – 1987. – Вып. 26. – С. 1–6.

75. *Литвак Б.Г.* Меры близости и результирующие ранжирования // Кибернетика. – 1983. – № 1. – С. 57–63.

76. *Литвак Б.Г.* Меры близости на метризованных отношениях / В кн.: Прикладной многомерный статистический анализ. – М.: Наука, 1978. – С. 138–150.

77. *Литвак Б.Г.* Об упорядочении объектов по предпочтениям. – М.: МГУ. – Математические методы управления производством. – 1973. – Вып. 5. – С. 47–56.

78. *Литвак Б.Г.* Экспертная информация: Методы получения и анализа. – М.: Радио и связь, 1982. – 184 с.

79. *Литвиненко А.Е.* Математические модели планирования инвестиций // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 6. – С. 104–112.

80. *Ляшко И.И., Тюптя В.И., Кигель В.Р.* Диалоговые процедуры многокритериальной оптимизации. Учеб. пособие. – К.: КГУ, 1985. – 76 с.

81. *Льюс Р., Райфа Х.* Игры и решения. – М.: ИЛ, 1961. – 642 с.

82. *Макаров И.М., Виноградская Т.М., Рубчинский А.А. и др.* Теория выбора и принятия решений: Учебное пособие. – М.: Наука, 1982. – 328 с.

83. *Максимов В.И.* Устойчивое восстановление входных воздействий по результатам измерений // Автоматика. – 1990. – № 4. – С. 60–65.

84. *Мандель И.Д., Миркин Б.Г.* Кластер-анализ и смежные вопросы: краткий обзор основных напрвлений // Автоматика. – 1987. – № 2. – С. 72–82.

85. *Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.* Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. – 1989. – № 9. – С. 3–33.

86. *Мельник В.А.* Ринок цінних паперів. – К.: ЛТД, 1998. – 560 с.

87. Методы и алгоритмы автоматизированного проектирования сложных систем управления/ Волкович В.Л., Волошин А.Ф. и др. – К.: Наук. думка, 1984. – 216 с.

88. *Миркин Б.Г.* Анализ качественных признаков и структур. – М.: Статистика, 1980. – 319 с.

89. *Миркин Б.Г.* Анализ качественных признаков: Математические модели и методы. – М.: Статистика, 1976. – 166 с.

90. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. – М.: Наука, 1974. – 256 с.

91. *Михалевич В.С., Волкович В.Л.* Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. – М.: Наука, 1982. – 286 с.

92. *Михалевич М.В.* Анализ устойчивости к ошибкам ЛПР стохастических методов поиска наиболее предпочтительного элемента // Кибернетика. – 1985. – № 3. – С.41–48.

93. *Михалевич М.В.* Стохастические алгоритмы решения оптимизационных задач на отношениях предпочтений: Дисс... д-ра физ.-мат. наук: – К., 1990. – 257 с.

94. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991. – 464 с.

95. *Мушик Э., Мюллер П.* Методы принятия технических решений. – М.: Мир, 1990. – 208 с.

96. *Налимов В.В.* Функция распределения вероятностей как способ задания размытых множеств: Наброски метатеории // Автоматика. – 1979. – № 6. – С. 80–87.

97. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А. Поспелова. – М.: Наука, 1986. – 312 с.

98. *Орлов А.И.* Проверка согласованности в модели независимых парных сравнений // Экспертные методы в системных исследованиях. – М.: ВНИИСИ. – 1979. – С. 37–46

99. Пакет прикладных программ ОТЭКС (для анализа данных)/ Н.Г. Загоруйко, В.Н. Елкина, С.В. Емельянов, Г.С. Лбов. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 160 с.

100. *Паниотто В.И.* Качество социологической информации. Методы оценки и процедуры обеспечения. – К.: Наук. думка, 1986. – 207 с.

101. *Паниотто В.И., Максименко В.С.* Количественные методы в социологических исследованиях. – К.: Наук. думка. – 1982. – 272 с.

102. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

103. Проблемы анализа дискретной информации. 2 часть. Сб. научн. трудов. Научн. редактор Миркин Б.Г. - Новосибирск, 1976. - 160 с.

104. Разработка математического и программного обеспечения для задач принятия решений на основе экспертной информации в условиях локальной сети ЕС-СМ-ПЭВМ со стороны СМ ЭВМ / А.Ф. Волошин, Г.Н. Гнатиенко, А.Ю. Микулич и др. - К., 1989. - 96 с.

105. *Райфа Г.* Анализ решений. - М.: Наука, 1977. - 408 с.

106. *Райхман Э.П., Азгальдов Г.Г.* Экспертные методы в оценке качества товаров. - М.: Экономика, 1974. - 149 с.

107. *Растригин Л.А., Эйдук Ю.А.* Адаптивные методы многокритериальной оптимизации // Автоматика и телемеханика. - 1985. - № 1. - С. 5-26.

108. *Руа Б.* Классификация и выбор при наличии нескольких критериев // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. - М.: Мир, 1976. - С. 80-107.

109. *Садовский А.Л.* Определение качественных характеристик систем на основе нечеткой экспертной информации // Автоматика. - 1988. - № 2. - С. 32-35.

110. *Садовский Л.Е., Садовский Л.А.* Математика и спорт. - М.: Знание, 1990. - 48 с.

111. *Саенко Ю.И.* Моделирование показателей развития социальной инфраструктуры /АН УССР. Ин-т философии: Отв. ред. Н.Н. Чуриков. - К.: Наук. думка, 1991. - 168 с.

112. *Саенко Ю.И.* Некоторые критерии сравнения по модулям отклонений / Экспертные оценки в социологических исследованиях. - К. - 1990. - С. 297-308.

113. *Салуквадзе М.Е., Топчишвили А.Л.* Свойства слабо—эффективных решений последовательности многокритериальных задач / Препринт. - Тбилиси: Институт систем управления АН Грузии. - 1990. - 20 с.

114. *Сидельников Ю.В.* Теория и организация экспертного прогнозирования. - М.: ИМЭМО РАН, 1990. - 196с.

115. *Скофенко А.В.* Применение нечеткой логики при ранжировании объектов методом парных сравнений // Кибернетика. - 1983. - № 3. - С. 116-118.

116. *Соловьев А.Е.* Специальная математика. Конспект лекций. - Пермь, 2001. - 114 с.

117. *Супес П., Зинес Дж.* Основы теории измерений // Психологические измерения. - М.: Мир, 1967. - С. 9-100.

118. *Фишберн П.К.* Измерение относительной ценности/В кн.: Статистическое измерение качественных характеристик. – М.: Статистика, 1972. – С. 35–94.

119. *Хованов Н.В.* Математические основы теории шкал измерения качества. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. – 185 с.

120. *Хованов Н.В.* Стохастические модели теории квалиметрических шкал: Учебное пособие. – Л.: Изд ЛГУ, 1986. – 80 с.

121. *Чернов Г., Мозес Л.* Элементарная теория статистических решений. – М.: Сов. радио, 1962. – 40 с.

122. *Чуев Ю.В., Михайлов Ю.Б.* Прогнозирование в военном деле. – М.: Воениздат, 1975. – 501 с.

123. *Шер А.П., Зингер М.Я.* Размытое решение системы неравенств и согласование интервальных экспертных оценок / В кн.: Моделирование и оптимизация сложн. систем управления. – М.: Наука, 1981. – С. 167–173.

124. *Шнейдерман М.В.* Процедуры коллективного экспертного опроса и их экспериментальное исследование // Автоматика и телемеханика. – 1988. – № 5. – С. 3–16.

125. *Штойер Р.* Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения. – М: Радио и связь, 1992. – 246 с.

126. *Экенроде Р.Т.* Взвешенные многомерные критерии. В кн.: Статистическое измерение качественных характеристик / Под ред. Е.М. Четыркина. – М.: Статистика, 1972. – С. 139–154.

127. *Юрачковский Ю.П.* Применение разложения Карунена-Лоэва для построения скалярной свертки векторного критерия на примере оценки качества поверхностных вод суши // Автоматика. – 1987. – № 1. – С. 14–25.

128. *Юшманов С.В.* Метод нахождения весов, не требующий полной матрицы парных сравнений // Автоматика и телемеханика. – 1990. – № 2. – С. 187–189.

129. *Black D.* The theory of commitees and elektions. – Cambridge univ. press, 1958. – 222 p.

130. *Brans J. P., Vincke Ph, Mereschal B.* How to select and how to rank projects: The PROMETHEE method. // European Journal of operational research. - 1986. – Vol. 24. – № 2. - Pp. 228–238.

131. *Cool W.D., Kress M.* Ordinalranking with intensivity of preference // Manag. SCI. - 1985. - V. 31. - № 1. – Pp. 26–32.

132. *Copeland A.H.* A reasonable social welfare function / Univ. of Michigan. Seminar on application of mathematics to the social scienses. – Ann Arbor, 1951. – 234 p.

133. *Gnatiyenko G.N., Ripnytska M.V., Ripnizky I.A.* Methods of working with experts in view of expert systems creation // Wiedza-Dialog-Decyzja, KDS-98: Zeszyt prac naukowych VII Miedzynarodowa

konferencja (21–25 wrzesnja 1998) / Polska, Szczecin. - Tom 2. - Pp. 10–17.

134. *Gnatiyenko G.N., Ripnytska M.V., Ripnizky I.A.* Using of expert knowledge in information technology // The Information Technolodgy Contribution to the Building of a Safe Regional Environment / Proceedings and Abstracts (May 28-29) / Kiev, Ukraine. - 1998. - Pp. 178–188.

135. *Larichev O., Boichenko V., Moshkovich H., Sheptalova L.* Modelling multiattribute information processing strategies in a binary decision task / Organiz. Behav. and human perform. - V. 26. - 1980. - Pp. 278–291.

136. *Michaelsen R.H., Michie D.X., Boulanger A.* The technology of expert systems // Byte. - 1985. - № 4. - Pp. 303–312.

137. *Montgomery H., Svenson O.* On decision rules and information processing for choices amoung multiattribute alternatives / Scand .J. Psycol. - 1976. - Vol. 17. - Pp. 57–72.

138. *Muhittin Oral and Ossama Kettani.* Modelling the process of multiattribute choice // J. Opl. Res. - 1989. - Vol.40. - № 3. - Pp. 281–291.

139. *Pradip Rey, Kevin D. Reilly.* Integrating knowledge acquisition methods. // Proc. IEEE Int. Conf. Syst., Men and Cybern., Atlanta, Ca, Oct. 14-17. - 1986. - Vol. 1. - Pp. 557–562.

140. *Russo J.E., Rossen L.D.* An eye fixation analysis of multialternative choice / Mem. and cognit. - 1975. - Vol. 3. - Pp.17–32.

141. *Saaty T.L.* The analytic hierarchy process. - Mc Graw Hill, N.-Y., - 1980. - 350.

143. *Tyersky A.* Elimination by aspects: a theory of choice. // Psycol. Rey. - 1972. - Vol. 79. - Pp. 55–64.

144. *Voloshin A.F., Gnatienko G.N., Kosmatiy D.Y.* About algorithmic software of the decision making support system for analysis and control of banking // Internation theories & applications: Third international conference (20–24 March 1995). - Sandansky, Bulgaria. - Vol. 3. - № 3. - Pp. 12–19.

Розділ 2 Основні елементи математичного забезпечення задач експертного оцінювання

Для опису методів та алгоритмів розв'язання ЗЕО наведемо основні поняття, які будуть використовуватися у подальшому викладенні. Під ЗЕО (спрощено, див. п. 1.1.3) розуміють пару $\langle C, A\rangle$ це C – принцип оптимальності, A – задана множина об'єктів. Розв'язком ЗЕО $\langle C, A\rangle$ є підмножина об'єктів $A_0 \subset A$, одержана з використанням принципу оптимальності: $A_0 = C(A)$. В теорії дослідження операцій [20] пара $\langle C, A\rangle$ називається:

- задачею прийняття рішень (ЗПР), якщо C та A не є апріорно заданими і можуть варіюватися;
- задачею вибору, якщо множина об'єктів A є заданою, а принцип оптимальності C – таким, що варіюється;
- загальною задачею оптимізації, коли C та A є заданими.

2.1. Задачі багатокритеріальної оптимізації

На сьогодні застосовуються три основних підходи до опису ЗЕО [2]: з використанням бінарних відношень, функції вибору та критеріальний підхід. Останній підхід пов'язаний з припущенням, що кожен об'єкт можна оцінити конкретним числом, яке є значенням критерію, тому порівняння об'єктів зводиться до порівняння відповідних їм чисел. У багатьох ситуаціях експертного оцінювання є доцільним задавати не одну скалярну оцінку якості об'єктів, а сукупність показників якості і розглядати задачу у векторній постановці. При цьому виникає задача багатокритеріальної оптимізації (ЗБКО). Часто багатокритеріальність є способом збільшення адекватності описання цілі.

ЗБКО формалізується у такій постановці:

$$y_i = f_i(x) \to \max, \; i \in L_1, \tag{2.1}$$

$$y_i = f_i(x) \to \min, \; i \in L_2, \tag{2.2}$$

$$x \in A, \; A \subseteq E^m, \tag{2.3}$$

де A – множина об'єктів, які характеризуються m параметрами, тобто належать простору E^m; $y(x) = (f_1(x),\dots,f_k(x))$ – вектор оцінок об'єктів або критеріїв, який задається відображенням $f : A \to E^k$, $L = \{1,\dots,k\}$– множина індексів критеріїв, $L_1 = \{1,\dots,k_1\}$, $L_2 = \{k_1+1,\dots,k\}$ – множини індексів критеріальних функцій, які, відповідно, максимізуються та мінімізуються, $L_1 \cup L_2 = L$. У деяких задачах множина об'єктів виділяється із ширшої множини $A \subseteq D \subset E^m$ за допомогою обмежень, які найчастіше задаються системою нерівностей.

Основною особливістю багатокритеріальних задач є те, що вони не мають єдиного розв'язку. Тому пропонуються різні підходи до визначення єдиного розв'язку і надзвичайно важливим аспектом задач багатокритеріальної (векторної) оптимізації є обгрунтування розв'язку. Не всі об'єкти множини A можна порівняти за множиною критеріальних функцій.

Для подальшого викладення введемо деякі означення.

Вектори $y = (y_1,\dots,y_k)$ та $y' = (y'_1,\dots,y'_k)$, $y \neq y'$, *знаходяться у відношенні* ">", якщо $y_i \geq y'_i$ $\forall i \in L$, і хоча б одна нерівність є строгою.

Оцінка об'єкта $y^0 = f(a_0)$, $y^0 = (y_1^0,\dots,y_k^0)$, називається *ефективною (оптимальною за Парето, паретооптимальною, непокращуваною, мажорантною, недомінованою)*, за відношенням ">", якщо не існує іншої оцінки y, яка б строго переважала y^0, тобто виконувалося б відношення $y > y^0$.

***Теорема* 2.1** [25]. Два ефективних об'єкти є або еквівалентними, або непорівняними між собою за множиною критеріїв.

Проблема визначення області Парето є строго об`єктивною і вирішується без застосування будь-яких евристик [9, 25]. Але область компромісів є множиною точок, з яких у більшості випадків треба вибрати одну. Звуження області ефективних об`єктів потребує застосування додаткової інформації від експертів, оскільки ефективні набори параметрів не можна порівняти один з одним формально.

Ефективна оцінка $y^0 = f(a_0)$ називається *власнеефективною (оптимальною за Джофріоном)*, якщо $\exists \theta > 0: \; \forall i \in L$, $(\forall y: \; y_i > y_i^0)$, $\exists j \in L: \; y_j < y_j^0$, для яких виконується нерівність: $(y_i - y_i^0)/(y_j^0 - y_j) \leq \theta$.

Проблема розв'язання багатокритеріальної задачі (БКЗ) полягає у заданні деякого правила вибору на множині ефективних об'єктів. Проблема вибору єдиного розв'язку БКЗ не може бути вирішена формально і потребує введення додаткових евристик. Наведемо умови раціональності, сформульовані Вільгельмом [7, 32]:

- вибір може бути зроблений завжди: $R(X,f) \neq \varnothing$;
- вибір здійснюється з множини ефективних об'єктів;
- якщо для вибраного об'єкта $a' \in R(A,f)$ існує рівноцінний об'єкт $a'' \in A$, $a'' \sim a'$, то і він має бути вибраний правилом вибору $R(X,f)$, тобто $a'' \in R(A,f)$;
- вибраний об'єкт може бути не єдиним, інакше це означає, що $a' \sim a''$;
- для $A' \subseteq A$, якщо $R(A,f) \cap A' \neq \varnothing$, то $R(A,f) \cap A' = R(A',f)$.

Наявність кількох критеріїв призводить до того, що необхідно використовувати спрощуючі евристики, які поділяють на дві групи: стратегії компенсації та стратегії виключення [18]. *Стратегії компенсації* застосовуються, коли ОПР намагається співставити оцінки кожного об'єкта. До стра-тегій компенсації можна віднести такі евристики.

Евристика **Е2.1.** *(Адитивна стратегія).* Загальна оцінка об'єкта визначається як сума оцінок по кожному критерію з урахуванням відносної важливості критеріїв.

Евристика **Е2.2.** *(Стратегія адитивних різниць).* При попарних порівняннях об'єктів експерт здійснює не загальну оцінку кожного об'єкта, а тільки визначає відмінності між окремими оцінками об'єктів. Формально порівнюється сума зважених різниць оцінок об'єктів за усіма критеріями.

Евристика **Е2.3.** (*Стратегія ідеальної точки*). Об'єкти порівнюються не між собою, а з деяким еталонним, ідеальним об'єктом. Найкращим вважається об'єкт, найближчий до ідеального.

Стратегії виключення або *некомпенсуючі стратегії* полягають у застосуванні простих евристик, які дозволяють виключити з розгляду якомога більше несуттєвих об'єктів і залишити невелику кількість тих, які слід розглядати. У межах цієї групи стратегій можна розглянути такі евристики.

Евристика **Е2.4.** (*Стратегія домінування*). Шукається об'єкт, який за усіма оцінками є не гіршим і хоча б за однією оцінкою є кращим від усіх об'єктів. Така евристика дозволяє скоротити початкову множину об'єктів.

Евристика **Е2.5.** (*Кон'юнктивна стратегія*). Виключаються об'єкти, які не задовольняють деяким мінімальним вимогам по усіх оцінках одночасно. Якщо розв'язок задачі не знайдено, то необхідно послабити вимоги по деяких оцінках об'єктів.

Евристика **Е2.6.** *(Диз'юнктивна стратегія).* Кожен об'єкт оцінюється за критеріями незалежно від значень тих критеріїв, які є несуттєвими. Для остаточного вибору залишаються тільки ті об'єкти, які є кращими по кожній окремій оцінці. Інші об'єкти виключаються із подальшого розгляду.

Евристика **Е2.7.** *(Лексикографічна стратегія).* Спочатку відбираються об'єкти, кращі від усіх об'єктів за найважливішим критерієм. Якщо таких об'єктів кілька, то серед них вибирається об'єкт, кращий за найважливішою оцінкою серед тих, що залишилися і т.д.

Евристика **Е2.8.** *(Стратегія вилучення за аспектами).* Спочатку вилучаються об'єкти, які не задовольняють наважливішому критерію, потім серед тих, що залишилися, вилучаються об'єкти, які не задовольняють менш важливому критерію і т.д.

Як правило, експерти не обмежуються однією евристикою, а використовують їх комбінації. Причому, спочатку скорочують множину об'єктів застосуванням стратегій виключення, а потім серед них вилучають найкращий об'єкт з допомогою певної стратегії компенсації.

Оцінки об'єктів мають різну розмірність, оскільки характеризують різні фізичні властивості об'єктів, тому доцільно розглядати не абсолютні значення оцінок об'єктів, а їх безрозмірні значення. Монотонні перетворення, які переводять оцінки об'єктів до безрозмірного виду, наведено у першому розділі, в якому вони представлені формулами (1.6)–(1.13).

Для описання одного із способів розв'язання ЗБКО, на якому грунтуються методи та алгоритми, описані у наступних розділах, введемо деякі евристики та теореми.

Евристика **Е2.9.** Вибір виду монотонного перетворення $\omega_i(a)$, $i \in L$, $a \in A$, для переведення значень параметрів об'єктів до безрозмірного виду здійснюється експертом за формулами, які мають задовольняти таким вимогам:

- враховувати необхідність мінімізації відхилень від оптимальних значень по кожній цільовій функції (ЦФ);

- мати загальний початок відліку і однаковий порядок зміни значень на усій множині об'єктів;

- зберігати відношення переваги на множині об'єктів, які порівнюються, за сукупністю ЦФ, і ,таким чином, не змінювати множину ефективних об'єктів.

Розв'язок БКЗ може виявитися не оптимальним для жодної ЦФ виду (2.1), (2.2), але одночасно бути у певному розумінні найкращим розв'язком для усіх критеріальних функцій одночасно.

***Евристика* E2.10.** Найкращим об'єктом при розв'язанні ЗБКО слід вважати такий об'єкт, для якого відхилення від найкращих значень по кожній оцінці є мінімальними.

Якщо найменші значення відхилень по кожному критерію не досягаються одночасно на жодному об'єкті, то виникає необхідність порівнювати ці відхилення між собою, що пов'язано з необхідністю залучення додаткових евристик від експертів. Для конструктивного визначення найкращого об'єкта наведемо ще одну теорему.

Теорема 2.2 [18]. Для кожного об'єкта $a \in A$, такого, що у просторі перетворених значень ЦФ справедливі нерівності $0 < \omega_i(a) < 1$, $\forall i \in L$, існує вектор $\rho = (\rho_i, i \in L)$, який задовольняє співвідношенням нормованості:

$$\rho_i > 0, \quad i \in L, \tag{2.4}$$

$$\sum_{i \in L} \rho_i = 1, \tag{2.5}$$

і число k_0, такі, що об'єкт $a \in A$, задовольняє одночасно k рівностям

$$\rho_i \omega_i(a) = k_0, \quad \forall i \in L. \tag{2.6}$$

Введемо ще три евристики.

***Евристика* E2.11.** Вектор вагових коефіцієнтів ЦФ $\rho = (\rho_i, i \in L)$, який задовольняє співвідношенням (2.4), (2.5), будемо інтерпретувати як відношення переваги у кількісному вигляді на множині ЦФ.

***Евристика* E2.12.** Під розв'язком ЗБКО для заданого вектора вагових коефіцієнтів $\rho = (\rho_i, i \in L)$, будемо розуміти такий компромісний об'єкт, який належить множині ефективних об'єктів і знаходиться на напрямку, який визначається вектором $\rho = (\rho_i, i \in L)$.

***Евристика* E2.13.** Компромісний розв'язок $a_0 \in A$ ЗБКО має забезпечувати однакові мінімальні зважені відносні відхилення $\rho_i \omega_i(a_0)$, $i \in L$, за всіма критеріями одночасно.

Справедливі такі теореми.

Теорема 2.3 [25]. Якщо $a_0 \in A$ є ефективним об'єктом для вектора $\rho = (\rho_i, i \in L)$, то цьому об'єкту відповідає найменше значення параметра k_0, при якому система (2.6) виконується одночасно для усіх ЦФ.

Теорема 2.4 [25]. Для того, щоб об'єкт $a^* \in A$, такий, що $\omega_i(a^*) > 0$, $\forall i \in L$, був ефективним при заданому векторі вагових коефіцієнтів $\rho = (\rho_i, i \in L)$, достатньо, щоб $a^* \in A$ був єдиним розв'язком системи нерівностей

$$\rho_i \omega_i(a) \le k_0, \quad \forall i \in L, \tag{2.7}$$

для мінімального значення параметра k_0^*, при якому ця система є сумісною.

Таким чином, компромісний розв'язок ЗБКО, визначений евристикою E2.13, може бути знайдений як єдиний розв'язок системи нерівностей (2.7) для мінімального значення параметра k_0, при якому ця система ще сумісна. У просторі відносних значень параметрів об'єктів компромісному об'єкту відповідає точка перетину променя, направляючі косинуси якого визначаються заданим вектором відносної важливості ЦФ $\rho = (\rho_i, i \in L)$, з множиною ефективних об'єктів. Якщо такої точки не існує, тобто на промені, що визначається вектором $\rho = (\rho_i, i \in L)$, не лежить жодна точка, яка відповідає ефективному об'єкту, то компромісним об'єктом вважається той, для якого виконується система нерівностей (2.7) і цьому об'єкту відповідає точка, найближча до заданого променя. Якщо компромісний об'єкт не єдиний, тобто існує деяка підмножина ефективних об'єктів, еквівалентних з точністю до деякого достатньо малого числа за значенням параметра k_0, то вибір компромісного об'єкта здійснюється з допомогою іншого критерію, одного із представлених у розділі 1 цієї монографії.

Крім наведеного підходу до визначення компромісного розв'язку ЗБКО існують різні методи знаходження компромісного об'єкта. Обмежимося перерахуванням деяких методів багатокритеріального вибору з множини об'єктів:

- метод ідеальної точки;
- вибір з урахуванням кількості домінуючих критеріїв;
- метод послідовних поступок (Вентцель О.С.);
- метод послідовного вводу обмежень (Ларічев О.І);
- метод бажаної точки;
- метод задоволення вимог ОПР.

2.2. Порівняння об'єктів у задачах експертного оцінювання

У багатьох практичних задачах [23] виникає необхідність у порівнянні значень наборів параметрів з множини (1.2). Для відношень між двома наборами параметрів $a_1 \in A$ та $a_2 \in A$ будемо використовувати такі позначення:

- $a_1 \geq a_2$ (слабка перевага) тоді і тільки тоді, коли

$$a_1^j \geq a_2^j, j \in J_1, \ \ a_1^j \leq a_2^j, j \in J_2 \qquad (2.8)$$

- $a_1 > a_2$ (об'єкт $a_1 \in A$ строго домінує, переважає, є кращим від об'єкта $a_2 \in A$) тоді і тільки тоді, коли система нерівностей (2.8) виконується і хоча б одна з нерівностей є строгою;
- $a_1 >> a_2$ (сильна перевага), якщо усі нерівності виду (2.8) є строгими, тобто $a_1^j > a_2^j, \forall j \in J_1, \ \ a_1^j < a_2^j, \forall j \in J_2$;
- $a_1 \sim a_2$ (еквівалентність) тоді і тільки тоді, коли $a_1^j = a_2^j$ для $\forall j \in J$, тобто набори параметрів є рівноцінними з точки зору експерта; але інколи таке позначення застосовується для об'єктів, які неможливо порівняти.

Згідно [10], розв'язання задачі вибору при багатьох критеріях, як правило, здійснюється деякою системою процедур, що називається механізмом вибору. В класичних механізмах багатокритеріального вибору постулюється вид взаємозв'язку критеріїв:

- відсутність взаємозв'язку (вибір за Парето, мажоритарний вибір);
- функціональний взаємозв'язок критеріїв (вибір за скалярним критерієм);
- "жорстке" впорядкування критеріїв (лексикографічний вибір);
- вибір за головним критерієм;
- вибір за методом послідовних поступок;
- інші види взаємозв'язку.

При аналізі наборів параметрів $a_i = \left(a_i^1, ..., a_i^m\right), i \in I$, виділяють такі підмножини множини (1.2):

- набори параметрів, оптимальні за Парето (ефективні) [31, 36];
- оптимальні за Слейтером (слабко-ефективні) [31, 35];
- оптимальні за Джофріоном (власне-ефективні) [31, 36];
- оптимальні за Борвейном (дійсно-ефективні) [31].

Введемо кілька означень.

Набір параметрів $a_1 \in A$ *домінує* об'єкт $a_2 \in A$ *за параметрами*, коли $\omega_j(a_1) \leq \omega_j(a_2)$, $\forall j \in J$, і хоча б одна з нерівностей є строгою.

Набір параметрів $a_0 \in A$ називається *ефективним за параметрами (Парето-оптимальним, оптимальним за Парето, недомінованим, непокращуваним за множиною параметрів, мажорантним)*, якщо на множині $A \subseteq E^m$ не існує такого набору параметрів a', для якого виконувались би нерівності

$$a'^j \geq a_0^j, \ \ \forall j \in J_1, \ \ a'^j \leq a_0^j, \ \ \forall j \in J_2,$$

і хоча б одна з них була строгою.

Взаємозв'язок між різними типами ефективності наводиться у [31] і схематично може бути представлений таким чином: власна ефективність $\rightarrow$ дійсна ефективність $\rightarrow$ ефективність $\rightarrow$ слабка ефективність. При розгляді не порожнього випуклого компакту у просторі всіх дійснозначних векторів R^m має місце такий ланцюжок вкладень між підмножинами [35]: власне-ефективні (оптимальні за Джофріоном) $\subset$ ефективні (оптимальні за Парето) $\subset$ слабко ефективні (оптимальні за Слейтером).

Нехай пара (X, f) є ЗБКО, де X – множина допустимих рішень, $f = (f_1,..., f_k)$ – векторний критерій $f : X \to R^k, k > 1$, компонентами якого є часткові критерії. Введемо наступні позначення і наведемо деякі співвідношення між множинами згідно [13]:

$P(X, f)$ – множина Парето;

$L(X, f)$ – лексикографічна множина; відомо, що $L(X, f) \subseteq \subseteq P(X, f)$;

$\Lambda(X, f)$ – об`єднання аргументів оптимумів лінійної згортки часткових критеріїв; у [12] вказується, що $L(X, f) \subseteq \subseteq \Lambda(X, f)$;

$G(X, f)$ – множина оптимумів Джофріона: $G(X, f) \subseteq \subseteq P(X, f)$, $\Lambda(X, f) \subseteq G(X, f)$;

$G^*(X, f)$ – множина строгих оптимумів Джофріона, або S – оптимумів: $G^*(X, f) \subseteq G(X, f)$, $G^*(X, f) \subseteq L(X, f)$, $G^*(X, f) \subseteq \subseteq \Lambda(X, f)$;

$G_*(X, f)$ – множина сильних оптимумів Джофріона, причому мають місце такі співвідношення між множинами $G_*(X, f) \subseteq G(X, f)$, $L(X, f) \cap G_*(X, f) \subseteq G^*(X, f)$.

Відомо [12], що є справедливим наступний ланцюжок імплікацій:

$$L(X, f) \subseteq G_*(X, f) \Rightarrow L(X, f) \subseteq G^*(X, f) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L(X, f) \subseteq \Lambda(X, f) \Rightarrow L(X, f) \subseteq G(X, f).$$

Відомо також [13], що коли множина векторних оцінок (тобто значень у критеріальному просторі) скінченна, то є справедливими такі співвідношення:

$$L(X, f) = G^*(X, f) \subseteq G_*(X, f) = G(X, f) = P(X, f).$$

2.3. Задачі голосування

В теорії колективного вибору вивчається проблема незалежного вибору групою k експертів на множині з n об'єктів. Формально правила голосування вирішують проблему колективного вибору k експертами одного об'єкта з множини A. Нехай експерти задають свої переваги у вигляді ранжувань об'єктів $R(A)$. Тоді правило голосування є відображенням $R^n(A) \to A$ [29]. Будемо розглядати дві групи правил – для великої кількості експертів та голосування у малих групах.

2.3.1. *Процедури голосування для великих груп експертів*

Розглянемо найпростіші та найрозповсюдженіші процедури голосування, які застосовуються здебільшого для великої кількості експертів.

П2.1. Поширеним способом визначення колективної експертної оцінки є *процедура "S голосів"* [1], яка базується на такій евристиці.

***Евристика* Е2.14.** З метою визначення процедури голосування ОПР заздалегідь фіксується число $1 \le S \le k$, і рішення приймається колективом експертів, якщо за нього голосують не менше, ніж S експертів.

Для застосування процедури "S голосів" кожен експерт віддає перевагу одному об'єкту. Використовується кілька поширених систем голосування, що базуються на процедурі "S голосів".

П2.2. *Процедура "проста більшість голосів"* базується на конкретизації попередньої евристики введенням додаткової евристики Е2.15.

***Евристика* Е2.15.** Для процедури вибору "проста більшість" значення параметра S покладається рівним $S = [k/2]+1$.

Принцип більшості є основою багатьох систем голосування [11]. Вибір за простою більшістю голосів є найдавнішим способом колективного ПР. Справедлива наступна теорема.

***Теорема* 2.5** (К. Мея) [29]. Правило більшості голосів – єдиний метод, який є анонімним (рівноправність експертів), нейтральним (рівноправність об'єктів) і строго монотонним.

П2.3. *Процедура "кваліфікована більшість голосів"* також часто застосовується і виникає при введенні такої евристики.

***Евристика* Е2.16.** Для процедури вибору "кваліфікована більшість" значення параметра S покладається рівним $S = \alpha k$, де значення параметра α є у свою чергу евристикою і у конкретних випадках приймається рівним $\alpha = 2/3$, $\alpha = 3/5$ тощо.

П2.4. *Процедура "одноголосно"* є особливим випадком процедури "S голосів", коли для ПР воно має бути підтримане усіма експертами. Процедура "одноголосно" виникає при застосуванні наступної евристики.

***Евристика* Е2.17.** Для породження процедури вибору "одноголосно" значення параметра S покладається рівним $S = k$.

П2.5. *Процедура "хоч би один голос"* також є частковим випадком процедури "S голосів". Така процедура виникає при введенні евристики Е2.18.

***Евристика* Е2.18.** Для застосування процедури "хоч би один голос" значення параметра S покладається рівним $S = 1$.

П2.6. *Правило відносної більшості.* Кожен експерт вибирає на множині A найпереважніший для себе об'єкт. Найпереважнішим для групи k експертів стає об'єкт, який є найпереважнішим для найбільшої кількості експертів. Тобто той об'єкт, який набрав більше голосів, ніж інші об'єкти.

П2.7. *Двохступінчате правило "відносної більшості". (Відносна більшість з вибуванням).* Якщо якийсь із об'єктів набрав просту більшість голосів, тобто понад 50 %, то він стає переможцем. Інколи застосовується модифікація цього правила, коли переможцем вже на першому етапі може стати той об'єкт, який набрав, наприклад, 40 % голосів. Тобто для визначення переможця першого етапу вводиться відповідна евристика. Якщо такого об'єкта немає, то застосовується два етапи голосування. На першому етапі вибираються два об'єкти, які набрали найбільшу кількість голосів. На другому етапі переможець голосування вибирається з цих двох об'єктів.

П2.8. *Метод альтернативних голосів для відносної більшості.* З множини A спочатку виключаються об'єкти, які одержали найменшу кількість голосів. Потім підраховуються голоси для тих об'єктів, що залишилися, і знову виключаються найгірші. Ця операція повторюється до тих пір, поки не залишиться один об'єкт або утворюється множина об'єктів з рівною кількістю голосів.

П2.9. *Процедура схвального голосування.* Кожен експерт має зазначити, проти якого з об'єктів він не заперечує, причому число таких об'єктів для кожного експерта не обмежується. Після цього для кожного об'єкта підраховується, скільки експертів включили його у свій вибір. Перемагає той об'єкт, який набрав таким чином найбільшу кількість голосів.

2.3.2. *Процедури побудови колективних рішень у малих групах*

Для вибору переможця з множини трьох і більше об'єктів найпопулярнішим є правило відносної більшості. Але ще Борда (1781) і Кондорсе (1785) помітили, що це правило може призводити до вибору об'єкта, який є гіршим від будь-якого іншого об'єкта при попарному порівнянні [29]. Згідно [29], ідеї Кондорсе та Борда привели до двох найважливіших сімейств правил голосування: до методів, обгрунтованих за Кондорсе, та методів підрахунку балів за різними процедурами.

Основними нормативними властивостями правил голосування є такі [29]:

– *оптимальність за Парето:* якщо об'єкт $a_1 \in A$ є кращим від об'єкта $a_2 \in A$ для усіх експертів, то об'єкт $a_2 \in A$ не може бути вибраним;

– *анонімність:* усі експерти є рівноцінними – якщо довільні два експерти поміняються голосами, то результат виборів не зміниться;

– *нейтральність:* назви об'єктів не мають значення – при зміні назв об'єктів відповідним чином змінюються результати голосування;

- *монотонність:* більша підтримка об'єкта експертами не може зменшити його шансів бути вибраним;

- *поповнення*: дві групи експертів з індексами з множин $L_1, L_2 \subseteq L$, які не перетинаються, обирають з множини об'єктів A; нехай обидві групи обирають один і той же об'єкт a, тоді експерти з індексами з множини $L_1 \cup L_2$ також мають обрати об'єкт $a \in A$;

- *властивість участі*: нехай об'єкт $a \in A$ обирається із множини A експертами із множини L; розглянемо зовнішнього експерта, тобто $i \notin L$, тоді експерти із множини $L \cup \{i\}$ повинні обрати або об'єкт $a \in A$, або інший об'єкт, який для експерта $i \notin L$ є строго переважнішим від $a \in A$.

Для більшості значень показників кількості експертів k та кількості об'єктів n не існує однозначного правила голосування, яке б задовольняло трьом першим основним нормативним властивостям. При практичному застосуванні правила голосування, для яких виконуються перші три нормативних принципи, інколи призводять до наявності кількох переможців з рівною кількістю балів. У таких випадках використовується [29] *неанонімне* правило, наприклад, вводиться евристика – серед колективних переможців вибирається єдиний об'єкт, який є найкращим для першого експерта, або *ненейтральне* правило, наприклад, вводиться евристика – серед переможців вибирається перший у алфавітному порядку об'єкт.

П2.10. *Правило Кондорсе.* Для визначення переможця слід здійснити попарне порівняння об'єктів. Якщо знайдеться об'єкт, який за більшістю голосів є кращим від будь-якого іншого, то він є переможцем по Кондорсе. Це правило враховує переваги усіх експертів. Але можуть виникати ситуації, коли не існує об'єкта, який є кращим від усіх інших за більшістю голосів. Кондорсе звернув увагу на фундаментальний парадокс у проблемі ПР більшістю, коли вибір здійснюється з множини, яка містить більше двох об'єктів. Тобто відношення переваги, що виникає при голосуванні, не задовольняє умові транзитивності. У деяких випадках парадокса Кондорсе

можна уникнути, якщо зробити розумну модифікацію правила Кондорсе.

П2.11. *Правило Копленда.* Порівняємо об'єкт $a \in A$ з будь-яким іншим об'єктом $x \in A$. Додамо до його балів +1, якщо для більшості $a > x$; додамо -1, якщо для більшості $x > a$; *0* – при рівності голосів. Склавши загальну кількість балів по $\forall x \in A, x \neq a$, отримаємо оцінку Копленда. Переможець повинен мати найвищу оцінку. Правило Копленда є обґрунтованим за Кондорсе і переможець за Коплендом є узагальненням переможця за Кондорсе.

П2.12. *Правило Сімпсона.* Позначимо через $N(a,x)$ – кількість експертів, для яких $a > x$. Оцінкою Сімпсона для $a \in A$ називається $\min\limits_{\substack{x \in A \\ x \neq a}} N(a,x)$. Переможцем у голосуванні при застосуванні цього правила буде той об'єкт, який має найбільшу оцінку Сімпсона.

Правило визначення переможця за Сімпсоном, як і попереднє правило, є правилом, обґрунтованим за Кондорсе, а переможці за вказаними правилами задовольняють вимогам оптимальності за Парето, анонімності, монотонності та нейтральності.

П2.13. *Правило Борда.* Кожен експерт надає свої індивідуальні переваги у вигляді строгого ранжування об'єктів множини A. За зайняте у кожному індивідуальному ранжуванні місце об'єкту приписується кількість балів, рівна кількості об'єктів, яку він переважає у ранжуванні. Переможцем за Борда є об'єкт, у якого сума балів по усіх експертних ранжуваннях є найбільшою.

Відомо [29], що колективне рішення за Кондорсе та за Борда можуть не співпадати. Переможець за правилом відносної більшості може бути найгіршим за правилом Кондорсе [29]. Переможець за Борда не може бути найгіршим за Кондорсе [29].

П2.14. *Правило виключення тих, хто програв за правилом Борда.* При використанні цього правила, як і в правилі Борда, підраховується сумарне значення балів і на кожному кроці виключаються об'єкти. Переможцем стає той об'єкт, який набрав найбільшу кількість балів.

П2.15. *Правило голосування з підрахунком балів.* Для застосування цього правила вводиться евристика.

Евристика **Е2.19.** Утворюється неспадна послідовність дійсних чисел $s_0 \le s_1 \le \ldots \le s_{k-1}$, причому $s_0 < s_{k-1}$, що відповідає інтуїтивному уявленню експертів про відносну важливість місць, зайнятих об'єктами при голосуванні.

Експерти здійснюють ранжування об'єктів, після чого s_0 балів присвоюється об'єкту за останнє місце в експертному ранжуванні, а s_{k-1} – за перше місце. Проміжні члени послідовності дійсних чисел, введеної евристикою Е2.19, присвоюються об'єктам за проміжні місця в індивідуальних ранжуваннях об'єктів. Вибирається об'єкт з максимальною сумою балів. Це правило є узагальненням правила Борда і правила відносної більшості.

Будь-яке правило, яке базується на послідовному вилученні за методом підрахунку балів, порушує властивість монотонності для деяких профілів переваг [29]. Цікаве порівняння правил підрахунку балів і правила Кондорсе зробив С. Фішберн.

Теорема **2.6** (С. Фішберн) [29]. Існують профілі переваг, при яких переможець Кондорсе не може бути вибраний при жодному методі підрахунку балів.

Справедливі також такі теореми.

Теорема **2.7** (Я.П. Янг) [29]. Всі правила підрахунку балів задовольняють властивості поповнення. Не існує правила голосування, яке було б обгрунтоване за Кондорсе і задовольняло властивості поповнення.

Теорема **2.8** (Е. Мулен) [29]. Для усіх правил голосування з підрахунком балів, коли при рівності балів вибір здійснюється за допомогою заданого порядку на множині A, виконується властивість участі. Якщо множина A складається хоча б з чотирьох об'єктів, то жодне правило голосування, яке було б обгрунтоване за Кондорсе, не задовольняє властивості участі.

П2.16. *Правило антибільшості.* Правилом антибільшості називається правило з такою евристикою: $s_0 = 0 < s_1 = = \ldots s_{k-1} = 1$ при $k > 2$.

Правила відносної більшості (П2.6), схвального голосування (П2.9), процедура Борда (П2.13) та правило виключення тих, хто програв за правилом Борда (П2.14), належать до так званих позиційних методів побудови колективних рішень. У цих методах при побудові колективних рішень використовується інформація про положення кожного об'єкта в упорядкуванні. При знаходженні переможця за Кондорсе використовується тільки інформація про результати парних порівнянь об'єктів. Для позиційних методів є характерними кілька недоліків, зокрема, ці правила можуть виключати з вибору переможця за Кондорсе. Відомі навіть приклади, коли переможцем за Борда стає об'єкт, який у парних порівняннях "програє" усім іншим об'єктам крім одного. Іншим суттєвим недоліком позиційних методів є те, що при одних і тих же упорядкуваннях експертів ці методи дають різний вибір.

Правила Борда, Копленда і Сімпсона є оптимальними за Парето, анонімними та нейтральними. Це справедливо для будь-якого правила голосування з підрахунком балів, якщо усі числа в евристиці Е2.19 є різними, тобто $s_i < s_{i+1}$ для $i = 1,\ldots,k-1$. Але деякі правила голосування з підрахунком балів, для яких остання умова не виконується, не є оптимальними за Парето.

П2.17. *Багатотурове попарне голосування.* У цій процедурі на кожному кроці голосування приймають участь лише два об'єкти, а переможець у кожному турі визначається за правилом простої більшості і порівнюється із наступним об'єктом. Існують різні модифікації цього правила.

П2.18. *Голосування з правом вето.* Це правило застосовується для ситуацій, коли слід забезпечити права меншості. Якщо існують дві коаліції експертів, то кожен представник коаліції, яка знаходиться у меншості, може заблокувати ПР.

При наявності більше ніж двох об'єктів для вибору проявляються суттєві недоліки, найважливіший з яких – повне ігнорування думки меншості. Принцип обмеженого вето дозволяє більш рівномірно розподілити силу коаліцій експертів. Кожний експерт $i \in L$, одержує певне число $\alpha_i^{(1)}, i \in L$, вето-карток, що визначають його вето-силу. Кожному об`єктові $a_j, j \in I$, приписується натуральне число $\alpha_j^{(2)}, j \in I$,– його вето-опірність, тобто число вето-карток, які потрібно проти нього поставити, щоб забалотувати. Вето-сили експертів та вето-опірність об`єктів можуть відрізнятися з різних причин, наприклад, через різний апріорний авторитет експерта, або тому, що експерти та об`єкти представляють різні групи тощо. Вважається, що загальна вето-сила експертів на одиницю менша від загальної вето-опірності об`єктів:

$$\sum_{j \in I} \alpha_j^{(2)} - \sum_{i \in L} \alpha_i^{(1)} = 1,$$

тобто всі об'єкти не можуть бути забалотованими.

При цьому заздалегідь фіксується обумовлений порядок ходів, згідно з яким експерти ставлять по одній картці проти об`єктів. Забороняється ставити картку проти вже забалотованого об`єкта. Коли всі експерти витратять всі вето-картки, лише один об`єкт залишиться невідведеним. Він і вважається обраним.

Існують інші процедури вето-голосувань, наприклад, таємне.

П2.19. *Коаліційне правило Парето.* Згідно із класичним правилом Парето, об'єкт $a \in A$ включається до колективного рішення, якщо не існує іншого об'єкта $a' \in A$, який кожний експерт оцінює вище від об'єкта $a \in A$. Такі об'єкти називаються Парето-оптимальними. Недоліком класичного правила Парето є те, що вибраними можуть бути надто багато об'єктів. Якщо розглядати усі парето-оптимальні об'єкти для кожної з коаліцій двох експертів, то остаточне колективне рішення буде складатися з об'єктів, які входять до вибору всіх коаліцій. Недоліком цього правила є те, що вибір інколи є порожньою множиною, тобто колективне рішення може не існувати.

П2.20. *Процедура "вибір за максимальним значенням".* У цьому правилі враховується більше інформації про переваги експертів у порівнянні з позиційними методами: береться до уваги інтенсивність переваги між об'єктами. Ця процедура легко маніпулюється експертом, оскільки експерти мають сильні стимули завищувати інтенсивність своїх переваг, якщо вони знають переваги інших експертів. Це призводить до того, що експерти втрачають стимули для чесного повідомлення своїх істинних інтенсивностей переваги між об'єктами.

П2.21. *Голосування з послідовним виключенням.* Експертам попарно пред'являються об'єкти. Спочатку за правилом більшості виключається той об'єкт, який не став переможцем у першій парі. Переможець першого туру порівнюється з наступним об'єктом. Для виключення ситуації рівності вводиться евристика.

***Евристика* Е2.22.** При рівності голосів програє той об'єкт, якого включено до пари на останньому турі експертизи.

Правило голосування з послідовним виключенням є обгрунтованим за Кондорсе.

П2.23. *Правило паралельного виключення.* Спочатку за правилом більшості здійснюється парне порівняння об'єктів. Переможці кожної з пар у наступному турі знову порівнюються за правилом більшості. У випадку рівності голосів переможцем стає, згідно додаткової евристики, той, хто йде раніше за алфавітом. Це правило також є обгрунтованим за Кондорсе.

П2.24. *Метод Нансона* полягає у послідовному виключенні об'єктів, найгірших за Борда. Нові оцінки обчислюються після кожного туру голосування та виключення чергового об'єкта таким же чином, як і у методі альтернативних голосів для відносної більшості. Цей метод є обгрунтованим за Кондорсе і не є монотонним.

П2.25. Один з варіантів ефективного, анонімного та нейтрального колективного вибору дає *функція Кумбса.* Серед об`єктів виявляються ті, які мають максимальну кількість останніх місць за перевагами. На множині об`єктів, що залишилися, проводиться така ж процедура і т. д. В силу відсутності однакових ранжувань об'єктів, тобто симетричних профілів переваг, ця процедура не відкидає всіх об`єктів, доки їх більше одного. Об`єкт, що залишився, вважається найкращим.

Існує значно більша кількість правил колективних рішень, ніж наведено у цьому параграфі. Деякі з існуючих правил є цікавими лише з теоретичної точки зору, інші використовуються у реальних виборах у різних країнах світу та у різні часи [8].

У цій монографії деякі правила вибору використовуються для порівняння з результатами застосування алгоритмів визначення колективного ранжування об'єктів, які описано у розділах 4 та 5.

2.4. Схеми послідовного аналізу варіантів

Одним із найзагальніших методів розв'язання ЗЕО є метод послідовного конструювання, аналізу та відсіювання варіантів, або послідовного аналізу варіантів (ПАВ), запропонований В.С. Михалєвичем [24, 28], та розвинутий в роботах [4, 5, 6, 26, 27]. Схема ПАВ зводиться до такої послідовності процедур:

- розбиття множини варіантів рішень задачі на підмножини, кожна з яких має специфічні властивості;
- використання цих специфічних властивостей для знаходження логічних протиріч в описі деяких підмножин;
- виключення з подальшого розгляду тих підмножин рішень, в описі яких є логічні протиріччя.

Методика послідовного аналізу та відсіву варіантів [4] полягає у такій побудові операторів аналізу варіантів рішень, які дозволяють відсіювати безперспективні частини варіантів до їх повної побудови, по мірі визначення такої безперспективності. Оскільки при цьому відсіюються і варіанти у цілому, то таким чином значно скорочується початкова область рішень і відбувається значне зменшення обчислювальної складності задачі.

Загальний підхід ПАВ описано, наприклад, у монографії [21]. Нехай задано деяку скінчену множину можливих варіантів $X = \{x = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_m)\}$. Нехай з компонентою x_j вектора x пов'язана множина $X_j, j \in J$, можливих варіантів значень j – го параметра об'єктів. Тобто множина X є прямим добутком множин $X_j, j \in J$. Множини $X_j, j \in J$. можуть мати довільну структуру, але існує вимога їх конструктивного задання, тобто вони можуть бути, наприклад:

- множиною значень функції дискретного аргументу;
- задаватися таблично;
- бути множиною перестановок деякої базової множини параметрів.

Підваріантом довжини q назвемо вектор $v = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_q})$, де $x_{j_1} \in X_{j_1}, \ldots, x_{j_q} \in X_{j_q}$, $1 \le j_1 < \ldots < j_q \le m$, $q = 1, \ldots, m$.

Варіантом або *повним варіантом* є підваріант довжини $q = m$.

Множину усіх підваріантів позначимо через $P(X)$. У цій множині виділимо множину допустимих підваріантів $D(X) \subseteq P(X)$. У множині $D(X)$ виділимо підмножину повних допустимих підваріантів $D \subseteq D(X)$, яка є одночасно підмножиною множини X, тобто $D \subseteq X$.

Розглянемо задачу знаходження варіанта x:

$$x \in \underset{x \in D}{Arg\max} F(x); \tag{2.9}$$

$$\underset{x \in D}{Arg\max} F(x) = \left\{x \in D : F(x) = \max_{x' \in D} F(x')\right\}. \tag{2.10}$$

Варіант x, при якому досягається максимум функціонала $F(x)$ на деякій підмножині $X^{(S_0)} \subseteq X$, яка будується у процесі роботи алгоритму, називається *максимальним*.

Множина $D(X)$ допустимих підваріантів описується системою нерівностей:

$$D(X) = \left\{v : g_i(v) \le g_i^*, \quad v \in P(X)\right\}$$

де $g_i(v), i = 1, \ldots, l_0$ – функціонали підваріанта v, визначені на множині $P(X)$; $g_i^*, i = 1, \ldots, l_0$ – дійсні числа; l_0 – кількість обмежень. Множина повних допустимих підваріантів (варіантів) визначається як

$$D = \left\{x : g_i(x) \le g_i^*, x \in X\right\} \tag{2.11}$$

Одним з основних понять ПАВ є поняття родової множини підваріанта.

Родовою множиною підваріанта $v \in D(X)$ називається множина $R(v)$, яка складається з варіантів x, які включають підваріант v.

Допустимою родовою множиною $R'(v)$ підваріанта v називається підмножина родової множини $R(v)$, яка складається з допустимих варіантів $x \in D$. Родовою множиною $R(v)$ деякої підмножини підваріантів $P \subseteq P(X)$ називається множина $R'(v) = \bigcup_{v \in P} R(v)$, яка є об'єднанням родових множин підваріантів v.

Відповідно до методології ПАВ необхідно побудувати процедуру аналізу родових множин підваріантів та виключення тих, для яких допустимі родові множини є порожніми або не містять оптимальних варіантів.

Другим важливим поняттям ПАВ є поняття допуску.

Величина Δg_v^i називається *допуском для підваріанта* v відносно множини D за i – м обмеженням, якщо з того, що виконується нерівність $g_i(v) > \Delta g_v^i$, слідує, що допустима родова множина $R'(v)$ підваріанта v є порожньою. Якщо величина Δg_v^i є допуском для усіх підваріантів v, які належать множині $P \subseteq P(X)$, то Δg_v^i є допуском для множини підваріантів v за i – м обмеженням.

Позначимо через $Q(P) = \{\Delta g_v^i\}\, i = 1, ..., l_0$, множину допусків відносно множини D для множини підваріантів P за усіма обмеженнями. Множина допусків $Q(P) = \{\Delta g_v^i\}\, i = 1,...,l_0$, є переважнішою від множини допусків $Q'(P) = \{\Delta g_v'^i\}$ $i = 1,...,l_0$, тобто $Q(P) > Q'(P)$, якщо $\Delta g_v^i \le \Delta g_v'^i$, $i = 1,...,l_0$, причому хоча б для одного індексу $i \in \{1,...,l_0\}$ виконується строга нерівність. Покращення допусків може здійснюватися як за рахунок уточнення значень допусків для множини P, так і за рахунок звуження самих множин $P \subseteq P(X)$.

Визначимо на множині P оператор $E = E(P, Q)$ відсіву підваріантів, які не задовольняють множині допусків Q. Застосувавши оператор E на множині P, одержимо множину підваріантів P', таку, що $P' \subseteq P$. Таким чином із подальшого розгляду виключаються лише підваріанти $v \in P \setminus P'$, допустимі родові множини яких є порожніми і, відповідно,

$$R'(P) = R'(P'). \tag{2.12}$$

Нехай $\wp = \cup P$ – деяке сімейство множин підваріантів $P \subseteq P(X)$, таке, що $R(\wp) = X$, $R'(\wp) = D$. Позначимо через $\wp = \cup P$ систему допусків для вибраного сімейства $\wp$. Система допусків $Q(\wp) = \cup Q(P)$ є переважнішою від системи допусків $Q'(\wp) = \cup Q'(P)$ відносно множини допустимих варіантів D, тобто $Q(\wp) > Q'(\wp)$, якщо $Q(P) > Q'(P)$, причому хоча б для однієї $P \subseteq \wp$ відношення переваги є строгим.

Визначимо на множині $\wp$ оператор $\Im$ апроксимації множини $D \subseteq X$, який полягає в обчисленні системи допусків $Q(\wp)$ і у звуженні множини X шляхом застосування оператора E на множинах $P \subseteq \wp$. У монографії [16] наводиться схема роботи оператора $\Im$ та доведення твердження про те, що його робота завершується за скінчену кількість кроків.

У результаті застосування оператора $\Im$ одержуємо послідовність систем допусків $Q(\wp^{(s)})$, $s = 1,2,...,s_0$, та відповідних їм послідовностей множин $\wp^{(s)}$ та $X^{(s)}$, $s = 1,2,...,s_0$, для яких є справедливими співвідношення

$$Q(P^{(s_0)}) = Q(\wp^{(s_0-1)}) > Q(\wp^{(s_0-2)}) > ... > Q(\wp^{(0)})$$

та відповідно включення

$$P^{(s_0)} = P^{(s_0-1)} \subseteq ... \subseteq P^{(0)},$$

$$X^{(s_0)} = X^{(s_0-1)} \subseteq X^{(s_0-2)} \subseteq ... \subseteq X^{(0)},$$

де s_0 – крок завершення застосування процедури $\Im$.

Таким чином, у результаті застосування оператора $\Im$ конструктивно задається множина можливих варіантів $X^{(s_0)}$, така, що

$$D \subseteq X^{(S_0)} \subseteq X,$$

тобто множина $X^{(S_0)}$ "апроксимує" множину D. Зокрема, якщо $X^{(S_0)} = \varnothing$, то і множина $D = \varnothing$, тобто застосування оператора $\Im$ приводить до виключення усієї множини підваріантів із сімейства, що свідчить про недопустимість початкової задачі (2.9), (2.10).

У багатьох випадках ПАВ є ефективним інструментом знаходження розв'язку задачі. У цій монографії методи ПАВ використовуються, зокрема, в задачах визначення результуючого ранжування об'єктів та при визначенні інтервалів вагових коефіцієнтів.

2.5. Огляд методів обробки неповних даних та задачі відновлення

Згідно [14] при аналізі матриць (таблиць) "об`єкт-ознака" можуть виникати задачі, направлені, по-перше, на *виявлення закономірностей* між різними частинами матриць, і, по-друге, на використання цих закономірностей для *відновлення* невідомих (пропущених або втрачених) елементів матриць.

Першим критерієм для класифікації таких задач є належність їх до однієї з груп передбачення або відновлення значень елементів:

- однієї й тієї ж колонки;
- одного й того ж рядка;
- які знаходяться в різних колонках та рядках матриці "об`єкт-ознака".

Другим критерієм класифікації задачі відновлення є кількість елементів t, значення яких необхідно передбачити (відновити):

- один елемент $(t = 1)$;
- більше одного, але не весь рядок ($1 < t < n$) або не всю колонку ($1 < t < m$);
- весь рядок ($t = n$), всю колонку ($t = m$), або всю матрицю ($t = m \cdot n$).

Третім критерієм класифікації задач відновлення є тип шкали, в якій вимірюються значення відновлюваних елементів:

- номінальні;
- порядкові;
- кількісні (метризовані);
- елементи різнотипні, тобто такі, що відносяться до різних шкал.

Враховуючи сказане вище, в [30] наводиться таблиця можливих класів задач (табл. 2.1), які можуть виникати при розв`язанні проблеми відновлення значень елементів матриці "об`єкт-ознака".

Таблиця 2.1. **Класифікація задач відновлення**

Типи шкал вимірювання елементів	Відновлення елементів однієї колонки			Відновлення елементів одного рядка			Відновлення елементів різних колонок та рядків	
Номінальні	№1	№4	№8	№12	№15	№19	№23	№27
Порядкові	№2	№5	№9	№13	№16	№20	№24	№28
Метризовані	№3	№6	№10	№14	№17	№21	№25	№29
Різнотипні	–	№7	№11	–	№18	№22	№26	№30

Задачі №№ 1-7, №№ 12-18, №№ 23-26 є власне задачами відновлення. Задачі №№ 8-11 в [24] називаються задачами "автоматичної класифікації" і можуть бути зокрема задачами визначення результуючої експертної оцінки у вказаній шкалі. Задачі №№ 19-22 використовуються тоді, коли необхідно, наприклад, оцінити інформативність властивостей (ознак), представлених колонками матриць об'єкт-ознака. Задачі №№ 27-30 є задачами генерації матриць з заданими властивостями: тестових даних для перевірки програм, таблиць випадкових чисел тощо.

Ще одним критерієм класифікації є належність пропусків значень до різного типу ознак [37]. З деякими особливостями розв'язується задача їх відновлення залежно від того, де знаходяться пропуски:

- лише серед значень вхідних факторів;
- лише серед значень результуючих характеристик;
- серед значень і вхідних факторів, і результуючих характеристик;

– серед значень таблиці, в якій вхідні фактори і результуючі характеристики не виділені.

Найпоширенішими методами обробки неповної інформації в таблицях даних є такі:

1. *Вилучення некомплектних рядків з таблиці.* Рядок або стовпчик таблиці даних називається некомплектним, якщо в ньому відсутнє хоча б одне значення. Метод застосовується при великій розмірності таблиці і незначній кількості пропусків. В інших випадках його застосування веде до зміщеності оцінок, оскільки рядки з пропущеними значеннями містять нову інформацію, необхідну для аналізу.

2. *Заповнення пропусків середніми значеннями.* У результаті застосування такого методу декілька значень одного фактора виявляються однаковими, що вказує на його низьку точність.

3. *Метод найближчих сусідів* [16]. Знаходять рядки таблиці, які за певним критерієм (найчастіше, мінімуму евклідової відстані), є найближчими до рядка з пропуском. Для його заповнення значення фактора у сусідів усереднюються з ваговими коефіцієнтами, обернено пропорційними їх евклідовій відстані до рядка, який містить пропуск. Метод точніший від попереднього, але його практично неможливо застосувати у випадку великої кількості пропусків і він базується на припущенні про існування зв'язку між об'єктами.

4. *Регресійний метод* [16]. Якщо прямокутна частина таблиці початкових даних містить усі значення без пропусків, то її називають комплектною. За комплектними даними будується рівняння лінійної множинної регресії і обчислюються пропущені значення факторів. Метод неможливо застосувати, якщо в рядку є більше ніж один пропуск, що призводить до множини розв'язків. Крім того, у реальних задачах залежності найчастіше нелінійні, тому його точність є невисокою.

5. *Метод максимальної правдоподібності і ЕМ-алгоритм* [19, 38]. Є необхідною перевірка гіпотез про розподіл значень факторів. Застосування ускладнюється у разі великої кількості їх пропущених значень.

6. *Алгоритм* ZET [15, 30]. Головна ідея алгоритму полягає в підборі „компетентної матриці", використовуючи дані якої

знаходять параметри залежності, що використовуються для прогнозування пропущеного значення. Недоліком алгоритму є його локальність, оскільки для обчислення відсутнього значення використовуються не всі дані таблиці, а лише їх частина. Суб'єктивізм визначення розмірності „компетентної матриці" призводить до врахування неінформативних „шумових факторів" і зміщення оцінки невідомого значення.

7. *Алгоритм ZetBraid* [15]. Основна відмінність від алгоритму ZET полягає у визначенні оптимального розміру „компетентної матриці". Для оцінки „якості" такої матриці використовується дисперсійний метод і метод „хреста". Усі інші недоліки, включаючи і статистичну оцінку невідомого значення виключно на основі кореляційно-регресійного аналізу, залишаються.

8. *Метод Бартлетта* [16, 19]. Неітеративний метод, який застосовується для заповнення пропусків у векторі значень результуючої характеристики в припущенні, що значення вхідних факторів є комплектними. Його недоліком є базування на припущенні про лінійну залежність між факторами, водночас відсутність перевірки передумов застосування методу найменших квадратів призводить до помилок.

9. *Resampling* [16]. Метод має ті ж недоліки, що і попередній. Він є ітеративним і має дві модифікації. У першій з них некомплектні рядки випадковим чином замінюють на комплектні з початкової матриці і розраховують рівняння регресії. В другому варіанті рівняння регресії одержують з комплектної підматриці, знаходять оцінки невідомих значень Y_i і замінюють пропуски на $Y_i + \varepsilon_i$, $i = k, k+1, \ldots, m$, де ε_i – значення помилок попередніх кроків. Шукають рівняння регресії. Після певної кількості ітерацій значення коефіцієнтів усереднюють. Інформаційна надмірність на фоні малої потужності множини комплектних даних в першій модифікації resampling і інформаційна недостатність у композиції з випадковим формуванням значень початкової характеристики не дозволяють одержувати прийнятні результати. Крім того, відсутні процедури оптимізації методу.

10. *Моделювання неповних даних многовидами малої розмірності* [34]. Методи, що представляють даний напрям, розроблені вченими Красноярської школи нейроматематики. Їх головна ідея полягає в тому, що набір точок, який є многовидом за наявності пропусків, дозволяє будувати лінійні і нелінійні наближення – моделі, за допомогою яких відновлюють пропущені значення. Результати алгоритмізації цих методів і експериментальних перевірок засвідчили достатньо високу точність. Проведені дослідження вказують на задовільне функціонування алгоритму при 10–15 % пропусків. У той же час, математичні конструкції методу базуються на достатньо сильних припущеннях про розподіл вхідних даних, гладкості функцій і обумовленості матриці початкових значень. До недоліків слід також віднести складність реалізації і верифікації алгоритму.

У цій монографії описано методи, які базуються на використанні неповної інформації, зокрема, при визначенні вагових коефіцієнтів об'єктів, а також у деяких методах визначення коефіцієнтів компетентності експертів.

2.6. Нейромережні технології в задачах апроксимації залежностей та кластеризації

За висловом російського вченого професора О.М. Горбаня з допомогою штучних нейронних мереж (neural networks) можна розв'язати чи не всі задачі, які розв'язуються іншими методами. Таке концептуальне твердження є насправді підгрунтям того значного інтересу, який спостерігається сьогодні у світі до вивчення теорії та практики нейромереж (НМ). Зростаюча наукова активність свідчить на користь позитивної відповіді на питання про "універсальність" парадигм, що втілені у НМ. У той же час поряд із романтичним сприйняттям та вивченням концептуальних ідей, у них реалізованих, не можна не вказати на проблеми, які супроводжують процес застосування НМ для розв'язання практичних задач.

Таким чином, на їх користь свідчать:

– наслідування певних механізмів роботи людського мозку;

– можливість універсальної апроксимації будь-яких неперервних залежностей;

– здатність до відновлення інформації при руйнуванні чи вилученні деякої частини нейромережі;

– паралельна обробка інформації.

До недоліків НМ відносять:

– відсутність чіткої теорії та механізмів інтерпретації функціонування і результатів роботи;

– низька швидкість навчання та необхідність розробки алгоритмів уникнення "паралічу", перенавчання та влучання у локальні оптимуми;

– необхідність вибору нейромережевих парадигм та розробки відповідної формалізації для розв'язування задач.

Вказані обставини є причиною того, що нейромережні технології є досить привабливими для вивчення, дослідження та вдосконалення, а також розробки систем, що інтегрують в собі НМ та інші методи, але їх практичне застосування є ще досить обмеженим. Значною мірою це залежить від якості програмного забезпечення, що реалізує певні нейропарадигми, а також від необхідності виконання значного обсягу робіт, пов'язаного із попередньою підготовкою апріорних даних та визначенням архітектури і структури НМ. Тому прогнозування майбутніх процесів не може бути ефективно здійсненим лише шляхом використання нейромережевих технологій, необхідним є і знання їх "інфраструктури".

НМ відносять до біокібернетичного напряму в науці, сутність якого полягає в адаптації принципів функціонування природи до методів розв'язання задач штучного інтелекту. Від представників класичної інтегро-диференціальної парадигми часто можна почути, що результати, які одержують за допомогою НМ, є необгрунтованими і недоказовими. Але не можна заперечувати і того факту, що значна кількість теоретичних результатів не знайшла свого застосування, а НМ мають практичне значення, підтверджене експериментально в результаті впровадження та використання.

Наведемо короткі відомості та зауваження. Клітини мозку називаються нейронами. Кожний нейрон має приблизно 100–1000 входів (дендритів) і один вихід (аксон), який розгалужується. Таким чином, один нейрон взаємодіє з множиною інших. Взаємодіючі нейрони утворюють скупчення і відповідають за певні функції.

Звичайні комп'ютери здійснюють послідовні обчислення. Багатопроцесорні системи все ще є неефективними через проблеми з управлінням паралелізацією потоків даних, а також тим, що сучасний рівень розвитку технічних засобів не дозволяє здійснювати з'єднання великої кількості процесорів. Реалізація по-справжньому паралельних обчислень можлива виключно апаратно. Програмно можна реалізувати лише послідовні або ілюзорно паралельні обчислення. Через такі причини комп'ютер не може відновити образ людини за однією чи декількома характерними ознаками за прийнятний час, на відміну від самої людини. Головною причиною цього є паралелізм обчислень в мозку людини і послідовні обчислення комп'ютером.

Основою функціонування біологічного нейрона є електрохімічні реакції. Досягнення порогового значення потенціалу нейрона дозволяє йому генерувати імпульс (спайк), що передається по аксону. Потенціал нейрона змінюється під впливом сигналів від інших нейронів, що посилюються або послаблюються синапсами, а також навколишнім середовищем. Має місце дуальність непізнаності механізмів функціонування мозку і аналітичної неінтерпретованості механізмів та результатів роботи НМ.

2.6.1. *Короткий екскурс в історію нейромереж*

У 1943 році Маккалок і Пітс описують штучний нейрон [47]. У 1957 році Розенблат [33] розглядає перцептрон – деяке об'єднання штучних нейронів. Неможливість моделювання функції "виключне АБО" (XOR) одношаровим перцепторном строго доведено у 1969 році математиком Мінским [22]. У 1986 році Руммельхарт, Хінтон і Вільямс [46] пропонують алгоритм зворотного поширення помилки (АЗПП) – квінтесенцію теорії НМ, у тому ж році Хопфілд [43], запропонувавши мережі із зворотними зв'язками, здійснив прорив в методах реалізації НМ.

Алгоритм зворотного поширення помилки надав вирішального поштовху поверненню уваги вчених світу до НМ після відомої роботи Мінского і Пейперта [22]. З'ясуємо, як АЗПП використовується при розв'язанні задач прогнозування.

Розглянемо деяку складну систему (економічну, технічну, соціальну). Позначимо $\overline{X} = (X_1, X_2, .., X_n)$ – вектор вхідних факторів, $Y = (Y_1, Y_2, .., Y_m)$ – вектор вихідних величин (показників), F – функціональне перетворення, здійснюване системою S. Припустимо, що $Y_i = f_i(X_1, X_2, .., X_n), i = 1, ..., m$, і результуюча характеристика

$$Z = F(Y_1, Y_2, .., Y_m) = F(f_1(X_1, X_2, .., X_n), f_2(X_1, X_2, .., X_n), .., f_m(X_1, X_2, .., X_n)). \quad (2.13)$$

Структурна і параметрична ідентифікація останньої залежності відомими інтегро-диференціальними методами – задача, яка у більшості випадків не має розв'язку. НМ може "розв'язати" цю задачу шляхом самоорганізації вагових коефіцієнтів, щоправда, за вказаним алгоритмом. Тому таку ідентифікацію, методологія якої виходить за класичні границі, називають синтетичною. Це означає, що залежність (2.13) у вигляді математичного виразу (функції) отримати неможливо. Але за заданими значеннями вектора $\overline{X}$ можна обчислювати значення $\overline{Y}$ і навіть визначати чутливість зміни Z до зміни кожної компоненти $\overline{X}$.

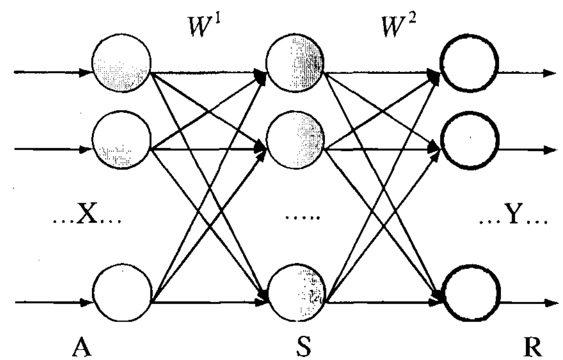


Рис. 2.1. Штучна нейронна мережа

Розглянемо НМ (перцептрон) наступного виду (рис. 2.1). Шар A містить n нейронів, шар S – l нейронів, шар $R-m$ нейронів. Нейрони шару A ніяких функцій не виконують, окрім розподілу сигналів. Початкові дані знаходяться в таблиці типу "експеримент-характеристика", де k – кількість початкових образів.

Вектор $\overline{X}=(X_1,X_2,..,X_n)$ містить значення вхідних факторів, $D=(D_1,D_2,..,D_m)$ – значення реальних вихідних величин, отриманих в результаті спостережень, експериментів або є даними статистики. Перша операція полягає в ініціалізації вагових коефіцієнтів w_{ij}^1, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,l$ і $w_{ij}^2, i=1,\dots,l$, $j=1,\dots,m$, випадковими числами з інтервалу (0,1). Для приведення початкових даних до єдиної шкали їх нормують. Далі для кожного нейрона прихованого шару S обчислюється сума $\sum_{i=1}^{n} w_{ij}x_i = z_j$, $j=1,\dots,l$, яку називають активацією. На виході нейронів шару S одержуємо $y_j^1 = f(z_j)$, де $f(*)$ – активаційна функція. Для нашого прикладу і для більшості інших раціонально використовувати такі активаційні функції:

$f_1(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\operatorname{th}x$ (гіперболічний тангенс) і

$f_2(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ (класичний сигмоїд).

Розрахуємо виходи нейронів шару R за формулою $y_j^2=\sum_{i=1}^{l} w_{ij}^2 y_i^1$, $j=1,\dots,m$. Вони і є виходами НМ. Природно, що одержані величини відрізнятимуться від реальних виходів D_j, $j=1,\dots,m$. Процес навчання НМ полягає в перетвореннях вагових коефіцієнтів з метою наближення реальних значень розрахованими. Для цього необхідно мінімізувати функцію

$$E(w)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}(d_{ij}-y_{ij}^2)^2, \qquad (2.14)$$

де d_{ij} – реальне значення j-го виходу мережі для поданого i-го образу, y_{ij}^2 – обчислене значення. Мінімізувати (2.14) можна, як вказано вище, шляхом адаптації вагових коефіцієнтів. Зробити це проблематично, оскільки шарів для настройки коефіцієнтів два, а помилки, як відомо, мають властивість накопичуватись. Головна ідея АЗПП полягала у тому, що помилку на останньому шарі можна просто обчислити, і відповідно до методу градієнтного спуску скоригувати вагові коефіцієнти останнього шару. Далі, використовуючи той факт, що входи нейронів наступного шару є виходами нейронів попереднього шару, обчислити помилки і скоригувати вагові коефіцієнти інших, попередніх шарів.

Найпоширенішими є повнозв'язні, прямозв'язні НМ та мережі з оберненими зв'язками. Повнозв'язною є мережа, де існують зв'язки між усіма нейронами; у прямозв'язній НМ нейрони попереднього шару зв'язані з нейронами наступного шару; у НМ із оберненими зв'язками, у загальному випадку, нейрони наступного шару зв'язані з нейронами попереднього. Найчастіше використовують:

- градієнтні методи навчання, прикладом яких є АЗПП;
- стохастичні методи, зокрема машини Больцмана та Коші;
- прямі неітераційні методи.

2.6.2. *Реалізація принципу самоорганізації у карті Кохонена*

Вибір ефективної структури мережі та алгоритму її функціонування визначається задачею, яку необхідно розв'язати.

Зокрема, для задачі кластеризації використовують мережу [38, 44], запропоновану фінським ученим Т. Кохоненом у 1984 р. Її структура відрізняється від зображеної на рис. 2.1 тим, що відсутній середній шар нейронів і, відповідно, є лише один шар вагових коефіцієнтів. Досить часто нейрони останнього шару представляють вузлами двохвимірної решітки (карти самоорганізації). Їх просторове розміщення є індикатором статистичних ознак, які містяться у вхідних образах.

При формуванні карти самоорганізації відбувається реалізація трьох процесів: конкуренції, кооперації та синаптичної адаптації. Основою конкуренції серед нейронів є обчислення дискримінантної функції, значення якої розраховують для кожного вхідного образа. Нейрон, який за цим значенням є "переможцем", "визначає" просторове розміщення свого топологічного околу, забезпечуючи тим самим базис кооперації між нейронами. Внаслідок синаптичної кооперації збуджені нейрони збільшують власні значення дискримінантних функцій по відношенню до вхідних образів через відповідне коригування вагових коефіцієнтів. Вказані принципи становлять основу реалізації принципу самоорганізації у карті Кохонена.

Алгоритм навчання карти Кохонена є таким:

Крок 1. Виконання ініціалізації матриці вагових коефіцієнтів $W(0) = (w_{ij}(0))_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{k}$ випадковими значеннями з малою амплітудою відхилень, або випадковий вибір множини вагових коефіцієнтів з множини вхідних векторів $X = (x_{ij})_{i=1}^{p}{}_{j=1}^{n}$, де n – кількість ознак вхідного вектора, k – кількість нейронів вихідного шару, p – потужність множини вхідних образів.

Крок 2. Випадковим чином вибирають вхідний вектор x і подають на вхід мережі.

Крок 3. Виконують розрахунок відстаней від вектора x до нейронів вихідного шару (відповідного вектора вагових коефіцієнтів) та визначають нейрон $i(x)$, який є "переможцем", використовуючи критерій мінімуму Евклідової відстані:

$$i(x) = \arg\min_j \left\| x - w_j \right\|, \ j = 1,\dots,k .$$

Крок 4. Коригують вектори вагових коефіцієнтів усіх нейронів, використовуючи формулу:

$$w_j(t+1) = w_j(t) + \eta(t) h_{j,i(x)}(t)(x - w_j(t)),$$

де t – номер ітерації, $\eta(t)$ – параметр швидкості навчання, $h_{j,i(x)}(t)$ – функція, за допомогою якої визначається окіл нейрона, що "виграв". Ці дві величини в процесі навчання мережі динамічно змінюються.

Крок 5. Перехід на крок 2 та продовження обчислень до тих пір, поки в карті ознак відбуватимуться достатньо істотні зміни.

Зробимо кілька зауважень до алгоритму та його реалізації. Застосування такого алгоритму навчання є проблематичним, якщо значною кількістю образів утворюється скупчення незначних розмірів в області навчання. У такому випадку результат роботи класичного алгоритму буде невірним і потрібно застосовувати попередню обробку даних. Деякою оптимізацією запропонованого алгоритму є використання методу опуклої комбінації, в одному з варіантів якого пропонується прирівняти всі вагові коефіцієнти одній і тій же величині $w_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Крім того, необхідно модифікувати кожну компоненту вхідного вектора X: $x_i = \alpha \cdot x_i + \frac{1-\alpha}{\sqrt{n}}$. На початку навчання $\alpha = 0$ і вхідні вектори співпадають з ваговими коефіцієнтами. В процесі навчання значення α збільшується, поступово наближаючись до одиниці. Цей метод приводить до правильного розподілу вхідних векторів і є достатньо ефективним.

В іншому підході пропонується до істинних значень вхідного вектора додавати шум (зміщення). У третьому підході настроюють всі вагові коефіцієнти, а не лише нейрона, що "виграв". Можливим є і такий варіант: якщо один з нейронів частіше, ніж інші стає переможцем, то поріг його спрацьовування збільшується.

У результаті навчання мережі Кохонена формується топологічна карта, нейрони якої реагують на відповідні вхідні вектори. Таким чином, розв'язується задача кластеризації. Якщо подати на вхід мережі новий образ, то він буде віднесений до певного кластеру, у залежності від того, який нейрон буде збудженим, що вказує на розв'язання задачі класифікації.

Задачі кластеризації та класифікації досить часто передують або є складовими частинами ЗПР, а їх розв'язання направлене на збільшення точності таких рішень.

Нейромережні технології є методологічним апаратом, який далі використовується у монографії. Зокрема, алгоритм зворотного поширення похибки застосовано для ідентифікації невідомих залежностей у задачі відновлення пропущеної інформації, а самоорганізуюча карта Кохонена є інструментарієм для порівняння результатів розв'язання задачі кластеризації.

2.7. Еволюційне моделювання процесів оптимізації експертних оцінок

Існують різні варіанти класифікації класичних методів, що використовуються у ЗЕО. Значну їх частину складають методи оптимізації, які використовуються при розв'язанні задач лінійного, нелінійного, цілочисельного, опуклого, динамічного, стохастичного, геометричного програмування та інших. До сьогоднішнього дня не розроблені методи, які були б інваріантними до розмірності і змісту області даних, структури і параметрів ЦФ. Рухаючись у цьому напрямку, незалежно різними вченими були запропоновані парадигми, що базуються на ідеях і принципах природної еволюції. До них відносять методи еволюційного моделювання, які ще називають еволюційними алгоритмами (ЕА):

- еволюційне програмування;
- еволюційні стратегії;
- генетичні алгоритми (ГА);
- генетичне програмування.

Особливості кожного з вказаних ЕА:

- генетичні алгоритми призначені для оптимізації функцій дискретних змінних, в них акцентується увага на рекомбінаціях бінарних представлень;
- методи еволюційного програмування орієнтовані на оптимізацію неперервних функцій без використання рекомбінацій;
- еволюційні стратегії орієнтовані на оптимізацію неперервних функцій з використанням рекомбінацій;
- генетичне програмування використовує еволюційний метод для оптимізації комп'ютерних програм.

Така класифікація запропонована професором В.Г. Редьком. Проте сьогоднішні реалії вказують на те, що кожний з ЕА застосовується для розв'язання й інших задач. Крім того,

з'явилися методи, які також вважають представниками еволюційної парадигми. Це мурашині і меметичні алгоритми, програмування генетичних виразів.

Оскільки кожен з ЕА є ітераційним методом, то необхідно використовувати обчислювальну техніку. Неминуче виникають проблеми збіжності кожного із них, швидкості збіжності (для ЕА вони як і раніше є актуальними), проведення препроцесінгу даних. Ефективний вибір і використання ЕА залежать від правильного співвідношення формалізованої задачі, сутності методу її розв'язання та очікуваних результатів.

Елементи еволюційного підходу присутні і у методі групового врахування аргументів, розробленого академіком НАН України О.Г. Івахненком [17].

Реалізація ЕА, у більшості випадків, пов'язана із необхідністю поділу генеральної сукупності даних на дві вибірки – навчальну і контрольну. Найпоширенішим, але не єдиним, є підхід, при якому в навчальну послідовність вибирають точки експериментів з більшим значенням дисперсії, а у контрольну – з меншим.

ЕА відрізняються особливостями реалізації. Але всі вони базуються на принципах еволюції:

1. Індивіди мають скінченний час життя; розмноження необхідне для продовження роду.
2. Деякою мірою нащадки відрізняються від батьків.
3. Індивіди існують в середовищі, в якому виживання є боротьбою за існування, і їх зміни сприяють кращій адаптації до умов зовнішнього середовища.
4. За допомогою природної селекції краще адаптовані індивіди мають тенденцію до тривалішого життя і більшої кількості нащадків.
5. Нащадкам властиво успадковувати корисні характеристики своїх батьків, що впливає на збільшення пристосованості індивідів у часі.

2.7.1. *Генетичний алгоритм – метод еволюційної оптимізації*

З біології відомо, що генетичний код індивіда називається його генотипом, а його фізична реалізація – фенотипом. Ці та інші визначення є базовими в термінології ГА, що не означає точного наслідування біологічних процесів, і лише в деякому наближенні ГА можна вважати їх моделлю. ГА – складова частина еволюційного моделювання як наукового напрямку, що базується на принципах природного відбору за Ч. Дарвіном. В ГА хромосома представлена рядком, записаним в двохелементному алфавіті, який складається з нуля і одиниці.

До базових операторів ГА відносять кроссовер (рекомбінації, кроссинговер), мутації та інверсії. З їх допомогою здійснюється домінуюче розмноження краще адаптованих до зовнішнього середовища індивідів, а також одержання індивідів з характеристиками, які були відсутні у індивідів попередніх поколінь. В оптимізаційних задачах, таким чином, реалізується наближення до оптимального розв'язку і вибивання ЦФ з локальних екстремумів.

ГА є одним із методів знаходження екстремумів складних функцій. ГА вперше був запропонований в 1975 році в Мічиганському університеті Джоном Холландом [42]. Він отримав назву репродуктивний план Холланда і надалі активно використовувався як базовий алгоритм в еволюційних обчисленнях. Подальший розвиток ГА, як власне і назву, отримав в роботах Девіда Голдберга [40] в лабораторії ГА Іллінойського університету, Кеннета де Йонга [39] в університеті Джорджа Мейсона, штат Вірджинія, США та їх учнів.

Базовий ГА є таким.

Крок 1. Ініціалізувати початковий момент часу $t=0$.

Крок 2. Випадковим чином сформувати початкову популяцію, що складається з k індивідів. $B_0=\{A_1,A_2,\ldots,A_k\}$.

Крок 3. Обчислити *пристосованість* кожного індивіда $F_{A_i}=\text{fit}(A_i)$, $i=1,\ldots,k$, і популяції в цілому $F_t=\text{fit}(B_t)$ (її називають фітнес-функцією (fitness-function)). Значення цієї функції вказує на те, наскільки оптимальним є індивід, що описується даною хромосомою.

Крок 4. Вибрати індивіда A_{c_1} з популяції. $A_{c_1}=\text{Get}(B_t)$.

Крок 5. Вибрати другого індивіда з популяції $A_{c_2}=\text{Get}(B_t)$ і з певною ймовірністю (ймовірністю кроссоверу P_c) виконати оператор кроссоверу.

Крок 6. З ймовірністю 0,5 з A_{c_1} і A_{c_2} відібрати одного індивіда. $A_c=\text{Get}(A_{c_1},A_{c_2})$.

Крок 7. З певною ймовірністю (ймовірністю мутації P_m) виконати оператор мутації. $A_c=\text{mutation}(A_c)$.

Крок 8. З певною ймовірністю (ймовірністю інверсії P_i) виконати оператор інверсії. $A_c=\text{inversion}(A_c)$.

Крок 9. Помістити отриману хромосому в нову популяцію. $\text{Insert}(B_{t+1},A_c)$.

Крок 10. Виконати операції, починаючи з кроку 3, k раз.

Крок 11. Збільшити номер поточної епохи. $t=t+1$.

Крок 12. Якщо виконується умова зупинки, то завершити роботу, інакше перейти на крок 3.

2.7.2. *Аспекти реалізації генетичного алгоритму*

Нехай S – деяка система або процес. Її атрибутами є X – вектор вхідних і внутрішніх параметрів, Y – вектор результуючих характеристик. Припустимо, що перетворення $Y=f(X)$ є ідентифікованим і залежність $f(*)$ достатньо складна. Відомі також границі можливих змін значень складових вектора X. Необхідно знайти такі значення вектора X, щоб значення Y було оптимальним.

Не можна стверджувати, що така задача не може бути розв'язаною іншими методами, але у разі достатньо складної, можливо розривної, поліекстремальної функції $f(*)$ робити це дуже і дуже складно.

Як розв'язується задача з використанням ГА? Функція $f(*)$ і є фітнес-функцією. Можливі значення елементів вектора X є його фенотипом. Двійковим представленням фенотипу є генотип (наприклад, 34→100010). Генотип має певну кількість елементів (генів, бітів). Один або декілька генотипів (по кількості елементів в X) утворюють хромосому. *Кроссовером* називають поділ двох хромосом і обмін частинами (наприклад, батьки - 1100 і 1010→нащадки - 1110 і 1000). *Мутація* – інвертування одного з елементів хромосоми (наприклад, $0000 \to 0100$). *Інверсія* – зміна порядку місцезнаходження частин хромосоми (наприклад, $1100 \to 0011$). У штучній системі деяка частина факторів може бути обмеженою, тобто їх значення визначаються в певних границях аналітиком з ціллю мінімізації або максимізації Y. Без обмеження загальності вважатимемо всі фактори обмеженими, а також відомими границі зміни їх значень, тобто інтервали (a_i, b_i), $i = 1,...,n$. Якщо ці умови не виконані, то задача буде мати іншу постановку. У нашому випадку *задача* полягає в знаходженні максимуму функції f з точністю ε, при відомих припущеннях про інтервали їх значень.

Вказана точність розв'язку свідчить про апріорне допущення про те, що отриманий розв'язок відрізнятиметься від точного розв'язку на величину ε і це не суперечить цілі розв'язання задачі. Таку задачу можна розв'язати і методом повного перебору, але комбінаторна складність такого підходу часто робить його непридатним через час розрахунку порівнянного з часом існування людства або Всесвіту. Тому використовують більш компактний алгоритм пошуку розв'язку на базі ГА. Його початкові кроки:

Крок 1. Вибирають такий інтервал, для якого справедливою є рівність: $b_j - a_j = \max_i(b_i - a_i)$. Нехай його довжина m.

Крок 2. Для того, щоб точність розв'язку була ε, розбивають цей інтервал і всі інші на $k - 1 = m / \varepsilon$ відрізків. Довжиною кожного відрізка є ε, що при попаданні розв'язку на певний відрізок і гарантуватиме необхідну точність.

Значення факторів можна нормувати, використовуючи різні вирази, але у такому випадку необхідно перераховувати точність результату ε, а потім і сам результат.

Нехай, наприклад, $a = 0, b = 8, m = 8, \varepsilon = 0{,}4$, тоді $k = 21$. В результаті розбиття отримаємо такі точки відрізка $[0,8]$: $:\{0;0{,}4;0{,}8;...;8\}$. Така множина можливих значень називається фенотипом. Поставимо у відповідність фенотипу його цілочисельний аналог таким чином:

$$\{0;0{,}4;0{,}8;...;8\} \to \{0;1;2;...;21\}.$$

Цілочисельному аналогу потрібно зіставити його двійковий генотип. Для цього заздалегідь необхідно визначити кількість розрядів двійкового представлення, оскільки всі його елементи для коректної роботи ГА повинні мати однакову довжину, наприклад, $p = [\log_2 k] + 1$. Неминуче виникає надмірність, оскільки можливих генотипів буде більше, ніж реальних фенотипів. Деякі автори пропонують вважати значення функції f в таких точках рівним нулю. Тоді виникають додаткові кроки ГА і час обчислень зростає. Традиційно пропонують розбивати початковий інтервал на $2^p + 1$ інтервалів, тим самим збільшуючи точність. У результаті виконання таких процедур отримаємо набори фенотипів, цілочисельних аналогів і генотипів. Усі підготовчі операції завершено і можна застосувати ГА для пошуку оптимуму.

2.7.3. *Особливості застосування еволюційного підходу*

Варіантів реалізації алгоритмів ГА існує досить багато, але щороку з'являються нові і нові. Напевне, поява оптимального залишається все ще попереду. Відомо, що вибір ЕА, який перевершує всі конкуруючі з ним алгоритми, не має сенсу без точного опису конкретних задач і ЦФ, для яких еволюційний алгоритм має перевагу перед іншими алгоритммами. Не можна розраховувати знайти один алгоритм, який буде результативнішим за інші для будь-яких ЦФ оптимізації.

Для того, щоб знайти прийнятний розв'язок для заданого класу задач, необхідно спочатку ідентифікувати характерні особливості класу задач і потім на їх основі шукати відповідний алгоритм (може виявитися, що алгоритм, яким успішно розв'язується одна задача, абсолютно не підходить для іншої).

Еволюційні обчислення мають певні переваги та недоліки:

1. *Переваги*:

– широка область застосування;

– можливість проблемно-орієнтованого кодування рішень, підбору початкової популяції, комбінування еволюційних обчислень з нееволюційними алгоритмами, продовження процесу еволюції за умови наявності необхідних ресурсів;

– придатність для пошуку в складному просторі розв'язків великої розмірності;

– відсутність обмежень на тип ЦФ;

– ясність схеми і базових принципів еволюційних обчислень;

– інтеграція еволюційних обчислень з іншими некласичними парадигмами штучного інтелекту, такими, як штучні нейромережі і нечітка логіка.

2. *Недоліки*:

– евристичний характер еволюційних обчислень не гарантує оптимальності отриманого розв'язку (на практиці, найчастіше, важливо за заданий час отримати один або декілька субоптимальних альтернативних розв'язків, тим більше, що початкові дані в задачі можуть динамічно змінюватися, бути неточними або неповними);

– відносно висока обчислювальна складність, яка долається за рахунок розпаралелювання на рівні організації еволюційних обчислень і на рівні їх безпосередньої реалізації в обчислювальній системі;

– відносно невисока ефективність на заключних фазах моделювання еволюції (оператори пошуку в ЕА не орієнтовані на швидке попадання в локальний оптимум);

– невирішеність проблеми самоадаптації.

Таким чином, порівняльний аналіз показує, що еволюційні обчислення *якнайменше підходять* для розв'язання задач, в яких:

– вимагається знайти глобальний оптимум;

– є ефективний неволюційний алгоритм;

– змінні, від яких залежить розв'язок, незалежні;

– характерний високий ступінь епістазії (одна змінна пригнічує іншу);

– значення ЦФ у всіх точках, за винятком оптимуму, є приблизно однаковими.

Принципово відповідними для розв'язання за допомогою еволюційних обчислень є:

– задачі багатовимірної оптимізації з мультимодальними ЦФ, для яких немає відповідних неволюційних методів розв'язання;

– стохастичні задачі;

– динамічні задачі з блукаючим оптимумом;

– задачі комбінаторної оптимізації;

– задачі прогнозування і розпізнавання образів.

Як і для інших ЕА, для ГА гостро стоїть питання збіжності. При виконанні певних умов має місце така теорема [41].

***Теорема* 2.9.** Нехай виконуються такі умови:

1. Послідовність популяцій $P_0, P_1, \ldots$, що генерується алгоритмом – монотонна, тобто:

$$\forall i \in N : \min\{f(a)|a \in P_{i+1}\} \le \min\{f(a)|a \in P_i\}.$$

2. $\forall a, a'$ елемент a' досяжний із a за допомогою мутації і кроссоверу, тобто через послідовність переходів у ряді структур.

Тоді глобальний оптимум a^* функції f відшукується з ймовірністю 1:

$$\lim_{i \to \infty} P\{a^* \in P_i\} = 1.$$

Очевидно, що в практичних реалізаціях ГА друга умова теореми виконується завжди. Монотонність мінімального значення fitness-function – достатньо строга умова, оскільки в існуючих ГА реалізуються численні оператори вибору батьків і формування нової популяції. Теоретичне обгрунтовування монотонності для різних комбінацій генетичних операторів є сучасною актуальною науковою задачею.

Оскільки майже всі задачі відновлення втраченої інформації та кластеризації базуються на оптимізації ЦФ, то застосування еволюційних методів є виправданим і необхідним.

2.8. Основні поняття теорії нечітких множин

Методи теорії нечітких множин поряд із НМ та методами еволюційного моделювання належать до парадигми "Soft Computing". Таку назву для вказаних технологій визначив професор Каліфорнійського університету Лотфі Заде, який і дав початковий поштовх аналізу нечіткої і неповної інформації, опублікувавши у 1965 році статтю "Fuzzy Sets" у восьмому номері журналу "Information and Control" [48].

Л. Заде розширив класичне поняття множини, припустивши, що функція-індикатор належності елемента множині може приймати не лише значення [0,1], а і будь-яке значення з відрізка [0,1]. Такі множини він назвав нечіткими (fuzzy). Були також запропоновані операції над нечіткими множинами і узагальнені методи логічного виводу modus ponens і modus tollens. Необхідно також згадати теорему FAT (Fuzzy Approximation Theorem), доведену Бартоломієм Коско [45] у 1993 році. Сутність її полягає у тому, що будь-яка математична система може бути апроксимованою системою, що базується на нечіткій логіці.

Теорія нечітких множин спрямована на обробку суджень людини, які, як відомо, у переважній більшості випадків, є нечіткими, розпливчатими. Її методи утворюють основу для опису процесів інтелектуальної діяльності, підтримки процесів прийняття рішень в умовах невизначеності та неповноти вихідної інформації.

При вивченні теорії нечітких множин варто пам'ятати, що $\pi(A)+\pi(\overline{A})$ не обов'язково дорівнює одиниці, де $\pi(*)$ – міра можливості, $\overline{A}$ – протилежна подія до події A, на відміну від теорії ймовірностей, де $P(A)+P(\overline{A})=1$, $P(A)$ – ймовірність події A.

Нехай Ω – універсальна множина, що описує предметну область, елемент $x\in\Omega$. Підмножина $A\subset\Omega$ є набором пар $A=\{(x,\mu_A(x))\}$, де

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$$

Нечітка підмножина $A\subset\Omega$ є набором пар $A=\{(x,\mu_A(x))\}$, де $x\in\Omega$ і $\mu_A:\Omega\to[0;1]$ – функція належності (ФН), яка є суб'єктивною мірою відповідності елемента x нечіткій підмножині A. *Висотою* нечіткої множини вважають $h=\sup\limits_{x\in\Omega}\mu_A(x)$.

Нечітку множину називають *нормальною*, якщо $h=1$, в іншому випадку вона є *субнормальною*. Нечітка множина називається унімодальною, якщо $\mu_A(x)=1$ лише для одного $x\in\Omega$. Нечітка множина *порожня*, якщо $\forall x\in\Omega$: $\mu_A(x)=0$. Непорожну субнормальну множину можна нормалізувати за формулою $\mu_A(x)=\mu_A(x)/\sup\limits_{x\in X}\mu_A(x)$. Елементи $x\in\Omega$, для яких $\mu_A(x)=0{,}5$ називаються *точками переходу* множини A. Носієм нечіткої множини A є звичайна множина $\mathrm{supp}(A)=\{x|x\in \in\Omega,\mu_A(x)>0\}$.

Нечіткі множини і відповідні ФН можуть мати дискретну і кусково-неперервну форму запису. Так, дискретна форма запису найчастіше є такою:

$$A=\{\frac{\mu_A(x_1)}{x_1},\frac{\mu_A(x_2)}{x_2},\dots,\frac{\mu_A(x_n)}{x_n}\},$$

де $\mu_A(x_i)$, $i=1,\dots,n$, – значення ФН елемента $x_i\in\Omega$ нечіткій множині A. Неперервна форма запису, у загальному випадку, є такою:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}\mu_{A_1}, & x\in A_1,\\ \mu_{A_2}, & x\in A_2,\\ \dots \\ \mu_{A_m}, & x\in A_m,\end{cases}$$

де $A=A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_m, A_i\cap A_j=\varnothing, i\neq j$, μ_{A_i} – неперервна ФН елемента $x\in\Omega$ множині A_i, $i=1,\dots,m$. Такі неперервні ФН, найчастіше, є трикутними (параметри a і c), трапецієподібними різного виду (у загальному випадку 5 параметрів $-\underline{m},\overline{m},\alpha,\beta,h$), дзвоноподібними (гаусівськими з двома параметрами m і σ) (рис. 2.2) та іншими.

Нечіткі множини мають такі властивості:

1. Якщо $\mu_A(x)=\mu_B(x)$ $\forall x\in\Omega$, то A і B – еквівалентні нечіткі множини.

2. Якщо $\mu_A(x)\le\mu_B(x)$ $\forall x\in\Omega$, то $A\subseteq B$, де $A\subseteq\Omega$ і $B\subseteq\Omega$.

Доповненням $\bar{A}$ нечіткої множини A називається нечітка множина з ФН $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)\ \forall x \in \Omega$.

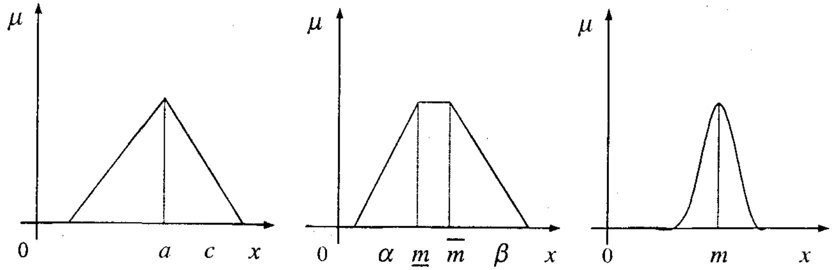


Рис. 2.2. Найбільш поширені функції належності

Перетином $A \cap B$ нечітких множин A і B називається нечітка множина із ФН $\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)\ \forall x \in \Omega$.

Об'єднанням $A \cup B$ нечітких множин називається нечітка множина із ФН $\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)\ \forall x \in \Omega$.

Нечітким числом називається опукла нормальна нечітка множина з кусково-неперервною ФН, що задана на множині дійсних чисел.

Теорема 2.10 *(Принцип узагальнення Заде)*. Якщо $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – функція від n незалежних змінних і аргументи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ задані нечіткими числами $\hat{x_1}, \hat{x_2}, \ldots, \hat{x_n}$, відповідно, то значенням функції $\tilde{u} = f(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \ldots, \hat{x_n})$ є нечітке дійсне число $\tilde{u}$ з ФН

$$\mu_{\tilde{u}}(u^*) = \sup_{\substack{u^* = f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \\ x_i^* \in supp(\hat{x_i}), i=1,\ldots,n}} \min_{i=1,\ldots,n} \mu_{\hat{x_i}}(x_i^*).$$

Згідно із цим принципом можна знайти ФН нечіткого числа, що відповідає значенню чіткої функції від нечітких аргументів. Його реалізація здійснюється за таким *алгоритмом*:

Крок 1. Зафіксувати значення $u = u^*$.

Крок 2. Знайти всі набори $(x_{1j}^*, x_{2j}^*, \ldots, x_{nj}^*)$, $j = 1, \ldots, k$, що задовольняють умовам $u^* = f(x_{1j}^*, x_{2j}^*, \ldots, x_{nj}^*)$ і $x_{ij}^* \in \mathrm{supp}(\hat{x_i})$, $i = 1, \ldots, n$.

Крок 3. Міру належності елемента u^* нечіткому числу $\tilde{u}$ обчислити за формулою $\mu_{\tilde{u}}(u^*) = \max_{j=1,\ldots,k} \min_{i=1,\ldots,n} \mu_{\hat{x_i}}(x_{ij}^*)$.

Крок 4. Перевірити умову "Чи вибрані всі елементи u?" Якщо так, то перейти на крок 5. В іншому випадку зафіксувати нове значення u^* і перейти на крок 2.

Крок 5. Закінчення алгоритму.

Лінгвістичною змінною називають п'ятірку $< I, T, \Omega, S, P >$, де

I – ідентифікатор лінгвістичної змінної;

T – терм-множина, яка є сукупністю найменувань нечітких змінних, кожна з яких визначена в Ω;

S – синтаксична процедура, що дозволяє генерувати нові терми;

P – семантична процедура, яка призначена для перетворення значень лінгвістичної змінної в нечіткі змінні.

У роботі Беллмана Р. і Заде Л. [3] визначені особливості процесів ПР в умовах нечіткості, складовими якого є:

– множина альтернатив;

– множина обмежень, які необхідно враховувати при виборі між різними альтернативами;

– функція вибору, яка ставить у відповідність кожній альтернативі виграш чи програш, який буде отримано в результаті вибору цієї альтернативи.

Відзначено, що елементи нечіткості нівелюють відмінності між цілями та обмеженнями і дозволяють спростити процес формування на їх основі розв'язку.

Припустимо, що $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – множина альтернатив. Нечітка ціль Z ототожнюється з фіксованою нечіткою множиною Z в A. Якщо A є дійсною прямою, то нечітка ціль "значення a має бути значно більшим від 5" представимо нечіткою множиною з ФН

$$\mu_Z(a) = \begin{cases} 0, & a < 10, \\ (1 + (a-5)^{-2})^{-1}, & x \geq 10. \end{cases}$$

При звичайному підході функція вибору, що використовується в процесі вибору, необхідна для встановлення лінійної впорядкованості на множині об'єктів. У нечітких умовах таку ж задачу виконує ФН нечіткої цілі. Важливим аспектом є те, що ціль та обмеження розглядають як нечіткі множини у просторі об'єктів і це дає можливість не розрізняти їх при формуванні рішень.

Припустимо, що нечітка ціль Z і нечітке обмеження R задані так:

Z : значення a має бути значно більшим від 10 і

R : значення a повинне бути в околі 15.

Зауважимо, що ціль і обмеження з'єднані між собою за допомогою частки "і", а, як відомо, "і" означає перетин нечітких множин. Це вказує на те, що сукупний вплив цілі та обмеження на вибір альтернатив може бути представленим перетином $Z \cap R$. ФН для перетину є такою

$$\mu_{Z \cap R}(a) = \mu_Z(a) \wedge \mu_R(a),$$

або у розгорнутій формі

$$\mu_{Z \cap R}(a) = \begin{cases} \min\{(1+(a-10)^{-2})^{-1}, (1+(a-15)^4)^{-1}\}, & a \geq 10, \\ 0, & a < 10. \end{cases}$$

Автори висувають ідею, що нечіткий розв'язок є нечіткою множиною у просторі альтернатив, який одержують у результаті перетину заданих цілей та обмежень і формалізують це у вигляді означення.

Означення. Нехай у просторі альтернатив задана нечітка ціль Z та нечітке обмеження R. Тоді нечітка множина D, яка утворюється як перетин Z і R, називається розв'язком. Тобто $D = Z \cap R$.

У визначенні нечіткого розв'язку D як перетину цілей та обмежень вважалось, що всі цілі та обмеження мають однакову важливість. Але зустрічаються ситуації, в яких деякі цілі та обмеження є більш важливими, ніж інші. У такому випадку розв'язок D виражається випуклою комбінацією цілей і обмежень із ваговими коефіцієнтами, які характеризують відносну важливість складових елементів. Таким чином, одержимо

$$\mu_D(a) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(a)\mu_{Z_i}(a) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(a)\mu_{R_j}(a),$$

де α_i і β_j – ФН, такі, що

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(a) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(a) = 1.$$

З урахуванням цього обмеження функції $\alpha_i(a)$ і $\beta_j(\alpha)$ можуть бути підібрані таким чином, щоб передати відносну важливість цілей $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ та обмежень $R_1, R_2, ..., R_m$. Формули (2.14)–(2.15) нагадують відомий спосіб зведення векторного критерію до скалярного за допомогою утворення лінійної комбінації компонент векторної функції цілі.

2.9. Історичний огляд застосування евристики у задачах експертного оцінювання

Евристичні методи спрямовані на зменшення варіантів перебору і підвищують ймовірність одержання прийнятного, хоч і не завжди оптимального, розв'язку задачі. З допомогою евристичних методів часто знаходять вихід із надто складних чи не передбачуваних ситуацій. Потреби в евристиці виникають при вирішенні проблем, для яких ще не розроблено теорію, і які описуються неповними чи недостовірними даними.

Різні автори називають від кількох базових до сотень евристичних методів. Достатньо повний перелік евристичних методів наводиться у книзі [12]. Серед найпопулярніших та найчастіше використовуваних слід зазначити: ранжування об'єктів, упорядкований пошук шляхом застосування теорії ПР, проектування людино-машинних систем, пошук літератури, системотехніка, анкетне опитування, вибір шкал вимірювання, накопичення та агрегування даних, мозкова атака чи мозковий штурм А. Осборна, синектика У. Гордона, вибір критеріїв, складання технічного завдання тощо.

На відміну від алгоритмів, які описують набір кроків, операцій чи процедур для одержання конкретного результату, евристики є загальними рекомендаціями чи підходами, які грунтуються на статистичній очевидності або теоретичних міркуваннях. На сьогодні термін "*евристика*" використовується у кількох значеннях:

– *наука*, яка вивчає творчу та пізнавальну діяльність, закономірності і методи відкриття, психологія творчості;

– *евристична діяльність* – організація процесу продуктивного творчого мислення, яка використовує сукупність притаманних людині механізмів мислення, з допомогою яких породжуються процедури розв'язання творчих задач, незалежно від галузі застосування;

- *евристичні методи* – методи вирішення творчих, нестандартних, креативних проблем в умовах невизначеності, яка використовують метод спроб та помилок, а також результати експериментів для знаходження рішень;

- *система навчання*, яка сприяє розвитку кмітливості, вмінню самостійно здобувати знання, пізнавальній активності, потребі у пізнанні і є предметом евристичної педагогіки;

- *підхід* до створення програмного забезпечення з використанням прийомів евристичного програмування.

Різні аспекти людської діяльності, які пов'язані із словом "евристика", можна описати за причинами та способами застосування евристичних правил:

- *евристика міркувань*: ментальне спрощення, яке використовується людьми для формування швидких та ефективних суджень;

- *евристика доступності*: ментальне практичне правило, згідно якого люди у своїх судженнях спираються на те, що вони легко пригадують;

- *евристика репрезентативності*: ментальне спрощення, з допомогою якого люди класифікують об'єкти відповідно до того, наскільки ці об'єкти подібні до якогось прикладу;

- *евристика прив'язки та пристосування*: ментальне спрощення, яке передбачає використання якоїсь цифри або величини як початку обліку та наступне коригування своєї відповіді, відштовхуючись від цієї прив'язки, причому люди часто вносять у свою відповідь не надто багато коректив.

2.9.1. *Історія евристики*

Евристичний спосіб збагнення істини широко застосовувався ще в античності. Евристика – це додаткова неформалізована інформація від експертів. Слово "евристичний" у перекладі з грецької означає "той, що сприяє відкриттю". Найдавніші спроби пояснити закономірності творчого мислення робилися ще у античні часи і знайшли своє втілення у працях *Геракліта Ефеського* (кінець 6 – початок 5 ст. до н.е.), *Сократа* (бл.470–399 рр. до н.е.), *Платона* (427–347 рр. до н.е.), *Арістотеля Стагірита* (384–322 рр. до н.е.), *Архімеда Сіракузького* (бл. 287–212 рр. до н.е.), *Аполонія Пергського* (бл.260–бл.170 рр. до н.е.), *Паппа Олександрійського* (3 ст. н.е.) та інших мислителів.

За одними джерелами, вчення про евристику було розроблено та практично застосовано *Сократом* у вигляді винайденого ним методу маєвтики, тобто "повивального мистецтва" – способу народження істини, коли у ході бесіди він своїми питаннями та запереченнями підводив співбесідника до вірних висновків. Автором кількох евристичних прийомів є *Платон*. Він вважав, що душа людини у пошуках істини має справу з думками, гадками, поглядами, які є темнішими від знань, але виразливішими від незнання. Людина у своїх скорботах, утіхах, бажаннях, страхах має свої погляди і намагається її зберегти. Евристична роль поглядів полягає у їх синтетичній функції, тобто здатності підносити до єдиної ідеї розрізнені явища з метою пояснення ситуацій, які спостерігають люди.

Деякі автори пріоритет першого згадування про евристику віддають працям *Арістотеля із Стагіри*. Арістотель об'єднав інтуїтивне розуміння, таємницю та передчуття ранньогрецької традиції з ретельним аналізом та строгим науковим мисленням. За легендою, слово "еврика", від якого походить термін "евристика", вигукнув грецький вчений та винахідник *Архімед* із Сіракуз, коли відкрив закон про вагу тіла, зануреного у рідину. Тиран міста Сіракузи доручив своєму близькому родичу Архімеду визначити складові виготовленої для нього царської золотої корони. Для вирішення цієї часткової проблеми Архімед застосував евристику, яка розв'язувала загальну задачу. Виявилося, що закон "виштовхувальної сили", яка діє на тіло, занурене у рідину, легше застосувати у цьому конкретному випадку, ніж застосовувати якісь інші евристики. За іншими даними, термін "евристика" вперше з'явився у трактаті "Мистецтво розв'язувати задачі" давньогрецького математика *Паппа Олександрійського*. Папп називав евристикою особливе зібрання принципів, призначених для тих, хто бажає навчитися розв'язувати математичні задачі. Секрети цього мистецтва трималися у суворій таємниці, їх заборонено було описувати.

Антична філософія намагалася ввести евристику, визначивши кілька початкових елементів, з допомогою яких можна пояснити різні явища. *Фалес Мілетський* (бл.625 р.–бл.547 р. до н.е.) зводив усе різноманіття явищ і речей до єдиної першостихії – води. Давньогрецький філософ *Анаксімен* (585–525 рр. до н.е.) стверджував, що першоосновою Всесвіту є повітря: при розрідженні повітря перетворюється на вогонь, а по мірі згущення стає водою, потім землею і, нарешті, каменем. *Геракліт Ефеський* намагався пояснити явища природи, визначивши вогонь основою всього сущого, основною субстанцією, що «місцями спалахує, а місцями – згасає», відроджуючи все суще в різноманітних формах, що переходять одна в одну.

Емпедокл з Агрігента (490–430 рр. до н.е.) є творцем евристичної теорії чотирьох початків світобудови. Згідно Емпедокла, всі матеріальні об'єкти утворяться при з'єднанні вічних і незмінних елементів-стихій: води, повітря, землі і вогню під дією космічних сил любові (тяжіння) і ненависті (відштовхування). Теорію елементів Емпедокла прийняв і розвинув *Платон*, який уточнив, що сили добра і зла можуть перетворювати ці елементи один в інший. Згідно учення *Арістотеля*, Всесвіт побудовано з п'яти елементів: вогню, повітря, води, землі та ефіру. Арістотель вважав, що природним місцем Землі є центр світу – адже якщо підкинути камінь, то він буде рухатися до місця, властивого йому за природою – до центра Землі, оскільки центр Землі і центр Всесвіту – один і той же. Оскільки земля – найважчий елемент, то знаходиться знизу. А оскільки світ сферичний, то низом Всесвіту буде центр Землі.

У античності для пояснення видимого руху небесних світил широкою популярністю користувалася евристика геоцентричності. Учені античності намагалися побудувати моделі руху планет, грунтуючись на евристиці геоцентричності, таким чином, щоб модель відображувала істинний видимий рух планет. *Платон* приписував кругові рівномірні рухи небесним тілам і сформулював для астрономів проблему: завдяки яким гіпотетичним та рівномірним рухам можливо пояснити планетарні явища?

Концепція сфер одержала подальший розвиток у *Евдокса Кнідського* (408–355 рр. до н.е.). Він спробував організувати емпіричний матеріал астрономічних спостережень відповідно до принципів рівномірного кругового руху планет та платонівської концепції сфер. Для того, щоб побудувати геоцентричну систему світу, у якій би зберігався видимий рух світил, Евдоксу знадобилося 26 сфер: по 4 сфери для кожної із п'яти планет, для Сонця і Місяця він використав ще по 3 сфери. *Каліпп із Кізіка* (370–300 рр. до н.е.) спробував виправити астрономічну схему Евдокса і йому знадобилося 33 сфери, хоча система залишалася незадовільною. У системі світу *Арістотеля* центром усіх сфер є нерухома Земля. Навколо неї у такому ж порядку, як у Евдокса та Каліппа, розташовано вкладені системи сфер Місяця, Сонця, Меркурія, Венери, Марса, Юпітера, Сатурна та нерухомих зірок. Загальна кількість сфер у Арістотеля дорівнювала 55.

Як правило, призначенням евристики є побудова моделей процесу ПР. У пізніші часи до піонерів науки про евристику відносять також великих математиків і філософів свого часу *Рене Декарта (Картезія)* (1596–1650) та *Готфріда Вільгельма Лейбніца* (1646–1716). У їхніх творах евристика часто ототожнювалася з інтуїцією. У книзі "Правила для керівництва розуму" Декарт чітко відділяє інтуїтивну форму пізнання від ланцюга послідовних логічних міркувань. Він рекомендує у деяких випадках відкинути усі силогізми, довіритися інтуїції як єдино можливому шляху, що залишився. У незакінченій роботі *Р. Декарта* викладено кілька евристичних правил, які до цього часу викликають значний інтерес. *Лейбніц* у 1678 році у листі до Конрінга писав, що найкращою похвалою підтвердженій гіпотезі, тобто евристиці у його інтерпретації, є те, що з її допомогою можна передбачити невідомі раніше явища або ще не проведені експерименти.

Про неусвідомлювані сторони процесів мислення поряд з логічною структурою міркувань писав також *Бенедикт Спіноза* (1632–1677). Він підкреслював, що вірний метод має забезпечувати оптимальний вибір, містити евристичні правила пізнання невідомого, визначати евристичний порядок відкидання непотрібних можливостей. Щоправда, теорію такого метода Спінозі створити не вдалося.

2.9.2. *Історія застосування послідовного відсіву варіантів*

У *Книзі Суддів* (11 ст. до н.е.) описано процедуру послідовного аналізу при наборі одним із найвидатніших суддів ізраїлевих *Гедеоном* до війська мужів Ізраїля. Коли з усіх кінців країни прийшли 32 тисячі добровольців, Гедеон за порадою Бога запропонував тим із них, хто боїться, повернутися додому. На цьому етапі військо зменшилося на 22 тисячі осіб. На другому етапі ПР усі воїни, що залишилися, були піддані додатковому тестуванню. Тим, хто пив з річки воду, ставши навколішки, також було запропоновано розходитися по домівках. В результаті залишилося 300 відбірних воїнів, які з Божою допомогою перемогли 135 тисяч ворогів.

Платон у діалозі "Політик" увів прийом послідовного дихотомічного розділення. Вирішуючи проблему визначення поняття "політик", Платон пояснює своє визначення людини як двоногої істоти без пір'я при допомозі такого послідовного дихотомічного підходу. Цей прийом у подальшому став слугувати евристичним механізмом для пошуку вірних визначень, а також знаходження розв'язків багатьох задач.

Послідовний аналіз та відсів варіантів було застосовано для пошуку нареченої для Великого князя московського *Василя* III (1479–1533), батька першого московського царя Івана Грозного. З 1500 дівчат, яких було призначено для першого туру оглядин, відібрали 300. Після другого туру прийняття рішень залишилося 200, а після третього – 100 претенденток. Врешті батько Василя III, Іван Васильович, вибрав для сина дружину – Соломонію, доньку боярина Юрія Сабурова. Щоправда, навіть такий науковий підхід до вибору супутниці життя не був успішним – після довгих років безплідного подружнього життя Василь III розлучився з Соломонією і відправив її 1526 року до Різдвяного московського монастиря. А

Іван Васильович Грозний народився від другої дружини Василя III, 18-річної Олени Глинської, вибраної не науковим, а традиційним способом – "красоти лица єйо раді і благообразія возраста", тобто за коханням.

З 1589 по 1703 роки діяло правило послідовного вибору *Патріарха Московського і Всея Русі*. Воно було таким. Члени Священного синоду голосували за кандидатів, а остаточний вибір серед підмножини трьох переможців першого туру виборів, які набрали найбільшу кількість голосів, здійснювався випадковим чином. Тобто, на першому етапі алгоритму люди вибирали підмножину найдостойніших кандидатів на підставі власних евристик, а на завершальному етапі вибору покладалися на випадок, чи на провидіння. Тобто передбачалося, що остаточний вибір здійснюється за Божим втручанням.

2.9.3. *Ретроспективний огляд застосування процедур колективного вибору*

Проблема агрегування думок експертів у колективне рішення має багатовікову історію. Процедури голосування для досягнення єдиного колективного (групового, суспільного) рішення вивчалися з прадавніх часів. Ще у античній Греції застосовувалися референдуми, коли рішення по заздалегідь оголошеній політичній проблемі чи законопроекту передбачало участь у голосуванні усіх громадян, які мають право голосу.

Дельфійський оракул у Давній Греції віщав вселені згори пророцтва, а рада старійшин їх інтерпретувала, намагаючись вірно визначити передвіщене богами рішення. Виявлення божественної волі було процедурою, пов'язаною з таїнством спілкування з богом, а не публічним видовищем. Дельфійські жерці відігравали важливу роль у всій Еладі. Пріоритет Дельф у релігійних питаннях зобов'язував жерців установлювати державні свята, тобто календар, культ богів та героїв, очисних процедур тощо.

З Дельфами пов'язують різні види пророцтв. Зокрема, вважалося, що бог віщує з листя лаврового дерева, зв'язок з божеством вбачався також у шелесті листя священного дуба. Гадання за жеребом найчастіше передбачало відповідь на альтернативне запитання – "так" чи "ні". Але жеребкуванням можна було виявити і складніше виявлення волі бога:

- вибір опонімів для десяти афінських філ із імен ста героїв, запропонованих *Ксенофонтом*;
- вибір царя Фессалії витягуванням жереба з іменем одного з кандидатів;

- визначення божества, якому слід приносити жертви у кожному конкретному випадку;
- вибір з двох та більше проектів рішень;
- послідовність звертання до оракула після звернень привілейованих осіб та громад.

Позачергово мали право звертатися до оракула дельфійці. Існувала практика надання почесного права деяким особам та державам запитувати оракул перед основною масою бажаючих. Жінкам звертатися до оракула без посередників було заборонено.

Спартанці нічого не робили без поради з Дельф. За легендою, царська влада у Спарті завдячує своїм походженням Дельфам. Кожен з двох спартанських царів вибирав собі двох посланців, які разом з царями приймали участь у трапезах за суспільний рахунок і виконували обов'язки щодо збереження дельфійських висловлювань. *Фукідід* (бл. 460–400 рр. до н.е.) розповідає, що під час Другої священної війни спартанці вигнали фокідян, зайняли святилище і передали його дельфійцям. Після цього спартанці одержали в нагороду за звільнення Дельф право позачергового звернення до оракула.

Процедура звернення паломників до оракула була чітко формалізованою і починалася з ритуального очищення водами Кастальського джерела. Необхідним елементом було також попереднє жертвоприношення, яке складало певний етап консультацій з оракулом. На підставі реакції жертовної тварини визначалося, чи схильний бог давати поради тим, хто в цей день до нього звертається. Причому, лише сприятливі підстави робили можливим звернення до дельфійської провидиці піфії. Джерелом натхнення піфії вважається жування лавра і вода святого джерела. Певну роль відігравав також незмінний атрибут ритуалу – тринога, з якої віщувала піфія. Спроби підкупу піфії були надзвичайно рідкими і суворо каралися. Звернення до оракула вимагало деяких зусиль та витрат – ті, хто запитував оракула, мали бути піддані очищувальним церемоніям, здійснювати жертвопринесення, внести деяку платню, для звернення за пророцтвом існували певні дні.

У глибоку давнину консультації з оракулом відбувалися один раз на рік, у сьомий день весняного місяця Бісія. Надалі процедури стали організовуватися щомісяця, в сьомий день, присвячений Аполону. У період розквіту дельфійського храму оракул за жеребом діяв у всі дні, крім "важких днів". Лише протягом трьох місяців щороку, коли Аполон вирушав до країни гіпербореїв, оракул не діяв або відповіді його вважалися ненадійними.

Плутарх (близько 46 – близько 127 рр. н.е.) розповідає про нововведення спартанського законодавця *Лікурга* (9–8 ст. до н.е.) щодо процедур прийняття колективних рішень. До ради старійшин Лікург постановив вибирати найдостойніших громадян, яким виповнилося 60 років. Старійшини вибиралися до кінця своїх днів і тому, зважаючи на важливість рішення, процедура вибору була чітко формалізованою. Коли на площу сходилися люди для участі у виборах, попередньо вибрані експерти закривалися у сусідньому будинку, щоб вони нікого не бачили і ніхто не міг впливати на їхні оцінки. Народ, як і у всіх виборах того часу, виголошував свою волю криком. А експерти мали можливість лише чути і оцінювати силу голосів, а також зафіксувати це. Претенденти на посаду за жеребом по черзі проходили перед зборами. Експерти оцінювали силу крику і ставили на спеціальних табличках у відповідність кожній оцінці номер кандидата. Обраним до ради старійшин ставав той кандидат, якому збори кричали найголосніше. Якщо вважати, що кожен виборець кричав лише один раз, тобто віддавав свій голос тільки за одного кандидата, то Плутарх описав процедуру відносної більшості голосів, при якій вибирається кандидат, який одержав більшу кількість голосів, ніж його конкуренти. Але імовірніше, що виборці кричали на підтримку кількох кандидатів, тобто народом Спарти використовувалася процедура схвального голосування, коли виборці мають можливість підтримувати зразу кількох кандидатів, а вибирається той, хто набрав найбільшу кількість голосів.

Плутарх розповідає також про традицію спартанців влаштовувати спільні трапези, на які щоразу збиралися приблизно по 15 чоловік. Існувала особлива процедура включення бажаючих стати учасником трапези. Кожен з учасників брав хлібний м'якуш і мовчки клав його до спеціальної посудини. Якщо учасник трапези хотів виразити незгоду з участю нового претендента в трапезі, він попередньо сильно стискав м'якуш. Якщо хоча б один такий стиснутий шматочок знаходили у посудині, кандидатові у прийомі до гурту відмовляли, оскільки вважалося, що кожен учасник трапези мав бути задоволений від спілкування один з одним. Тобто, описана процедура була процедурою "одноголосно" і грунтувалася на застосуванні права вето.

Початок афінської державності пов'язують з діяльністю напівлегендарного *Тесея* (12–11 ст. до н.е). Державний апарат *Давніх Афін* складався із таких органів влади: народні збори (*екклесія*), Рада п'ятисот, геліея, колегія стратегів та колегія архонтів. Порядок голосування у екклесії (відкрите чи таємне) визначався самими народними зборами. Відкрите голосування екклесії проводилося шляхом підняття рук (хайратонії). Цей спосіб застосовувався при виборах посадових осіб. Лише у деяких випадках – при наданні

привілеїв та прав громадянства – застосовувалося таємне голосування білими та чорними камінцями, кольоровими бобами або черепками. У Афінах для законності рішення треба було набрати 6 тисяч голосів.

Вища судова влада в Афінах належала *геліеї*, яка була створена у 594 р. до н.е. і вибиралася шляхом жеребкування з усіх громадян, які досягли 30 років. Назва геліеї походить від слова "геліос" – сонце, оскільки її засідання проходили вдень на відміну від нічних засідань аріопага. Щорічний склад геліеї – 6000 чоловік – 5000 суддів та 1000 запасних. Рік ділився на 10 частин, протягом яких чергові 500 суддів та 100 запасних виконували свої функції.

Засідання вищого судового органу Давніх Афін *Ареопагу* проходили просто неба вночі, протягом останніх трьох ночей кожного місяця. Для голосування використовувалися маленькі камінці, які клали в спеціальну урну: білий або цільний – як ознаку виправдання підозрюваного, а чорний або просверлений – як ознаку звинувачення. Якщо число голосів "за" і "проти" виявлялося однаковим, суд визначав, що Афіна Паллада схилилася на бік обвинувачуваного.

У 488 р. до н.е. під керівництвом афінського державного діяча *Клісфена* було введено процедуру особливого виду таємного голосування остракізму, "суду черепків" – вигнання на 10 років за межі Афін потенційно небезпечних політиків, здатних встановити тир-нію. Рішення приймалося народними зборами, де мало бути при-сутніми не менше 6000 чоловік – близько п'ятої частини громадян. Щорічно одні з народних зборів були присвячені Остракізму. У Афінах остракізм застосовувався до 417 р. до н.е.

Піфагор (бл. 600 р.–бл. 500 р. до н.е.) також має деяке відношення до правил вибору: він ввів у філософію ідею «порядку» (влада аристократів), яку протиставляв «демократії» як «порушенню цього порядку». *Платон* у своєму творі "Держава" писав, що тиранія виникає саме з демократії, тобто із свободи громадянина виникає жорстоке рабство. Але Платон вважав обидві форми правління "хворобами" держави: демократію – тяжкою, а тиранію – дуже тяжкою формою "хвороби". Тому він пропонував таке ранжування способів правління державою: ідеальна форма, заснована на політичному мистецтві $\succ$ монархія $\succ$ аристократія $\succ$ демократія $\succ$ олігархія $\succ$ тиранія. *Арістотель* вважав демократію найприйнятнішим серед збочень державного устрою і пропонував таке ранжування "правильності" державних форм: демократія $\succ$ аристократія $\succ$ царська влада. *Карнеад* із Кірени (214–129 до н.е.) вважав тиранію, олігархію і демократію однаково поганими політичними формами правління, тобто: тиранія ~ олігархія ~ демократія.

У *Давньому Римі* голосування у народних зборах і на суді здійснювалося з допомогою табличок, на яких виборці відмічали свою згоду або незгоду, а при виборах посадових осіб писали імена кан-дидатів. У одному з листів до відомого юриста Тітія Арістона *Гай Пліній Цециліій Секунд Молодший* (61–114 н.е.) описує процедуру ма-ніпулювання голосуванням, яку він особисто організував, коли був головуючим у Сенаті під час розгляду кримінальної справи. На його думку, розроблена ним процедура голосування привела до визначення справжніх позицій членів Сенату щодо міри покарання обвинувачуваних. На попередніх слуханнях за виправдання подали голоси k_1 сенаторів, за заслання $-k_2$, за страту $-k_3$ Причому, думки у Сенаті розділилися таким чином: $k_1 > k_2$, $k_1 > k_3$, $k_2 + k_3 > k_1$.

Пліній вважає, що коли поставити на голосування усі три альтернативи, то існує небезпека, що дві останніх групи сенаторів об'єднаються і буде прийнята альтернатива "страта". Тому Пліній вважає, що треба відокремити голоси, подані за кожне з трьох рішень. Кількість прибічників страти k_3 та заслання k_2 слід спочатку порівняти із кількістю схильних до виправдання k_1, а потім вже між собою. Як у деяких гладіаторських поєдинках жереб виділяє та ставить збоку людину, яка потім буде змагатися з переможцем, так і для сенатських сутичок при наявності трьох альтернатив слід встановити два етапи голосування. На першому етапі, вважає Пліній, розділяються прихильники виправдання та покарання. А на другому, якщо прихильників покарання виявиться більше, голосуючі розділяються за вибраною ними мірою покарання. Таким чином, замість процедури простої більшості голосів була використана процедура відносної більшості голосів. При цьому була врахована велика ймовірність зміни кількості голосів у групах, зокрема, частина прибічників смертної кари схилилася до варіанту заслання, і в результаті відбулося прийняття потрібного для організатора голосування рішення. Тобто, ще на початку 2 ст. н. е. Пліній Молодший вперше запропонував розглядати стратегію поведінки організатора голосування з метою прогнозування результатів вибору альтернатив у конкретних умовах. Він обґрунтував можливості зміни думок виборців і варіанти маніпулювання множиною альтернатив та процедурою голосування з метою досягнення прийнятного для організатора результату голосування.

У середньовічних французьких ченців ще з 10–11 століття використовувалася процедура голосування при виборі прийнятного для усього колективу напою. Існувала дегустаційна чаша і вони обговорювали якості запропонованих до трапези вин. Протягом обіду

три-чотири рази до спільного столу приносили наполовину наповнений кубок. Ченці після дегустації приймали колективне рішення щодо вибору кращого вина із багатьох запропонованих сортів.

Перші згадки про голосування у *Київській Русі* зустрічаються у літопису 1097 року. Основною процедурою тоді була процедура надбільшості, тобто переважної більшості. Для вибору колективної експертної оцінки необхідно було майже одноголосне рішення, яке є очевидним без підрахунку голосів. Це пояснюється тим, що процедури вибору не регламентувалися законом і досягти виконання рішення більшість могла лише силою.

Засновниками теорії голосувань вважаються академіки Паризької академії наук Борда і Кондорсе. Ця наука народилася 16 червня 1770 р., коли *Жан Шарль де Борда* (1733–1799), автор назви одиниці вимірювання довжини "метр", на засіданні Академії зробив доповідь "Про спосіб проведення виборів", у якій запропонував процедуру обрання "безсмертних" – членів Академії наук, яка грунтувалася на ранжуванні претендентів. Запропонована Борда система давала широкі можливості для маніпулювання, тому сам Борда попереджав, що вона створена для благородних людей. Маркіз *Кондорсе Марія Жан Антуан Нікола де Карітa* (1743–1794) застосував теорію ймовірностей до соціальної науки і розробив теорему присяжних. На думку Кондорсе, неможливо створити таку судову систему, за якої не буде засуджено жодного невинного. Але коли відомо, що кожен присяжний є порядною людиною і зробить вірну експертну оцінку, то ймовірність судової помилки буде значно знижена за умови, що для визнання підозрюваного винним застосовується одна з процедур більшості голосів. Кондорсе намагався знайти процедуру голосування, яка дозволила б визначити "вірну" колективну експертну оцінку. За його розрахунками потрібна була надзвичайно велика кількість присяжних і тому практичного застосування його ідея мати не могла. Такий підхід привів Кондорсе до відкриття циклів мажоритарного правила: якщо щонайменше три експерта здійснюють ранжування принаймні трьох об'єктів, завжди є можливим утворення циклів у результуючому ранжуванні об'єктів. Кондорсе запропонував евристики для визначення того об'єкта, який він вважав "справжнім" переможцем, тобто який одержав більшість голосів незалежно від наявності чи відсутності циклів. У роботі "Есе по застосуванню ймовірнісного аналізу прийняття рішень більшістю голосів" він у 1784 р. вперше ввів у науку попарні порівняння об'єктів як основу теорії побудови процедур голосування. Кондорсе хотів створити "соціальну математику". Він припускав, що у суспільних науках не все буде доступним обчисленню, але, як і у фізиці, у суспільних науках існує безмежна кількість точок застосування математики.

Література до розділу 2

1. *Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т.* Синтез локальных моделей коллективного выбора // Автоматика. - 1988. - № 1. - С. 71-83.

2. *Ашихмин А.А.* Разработка и принятие управленческих решений: формальные модели и методы выбора. - М.: МГГУ, 2001. - 78 с.

3. *Беллман Р., Заде Л.* Принятие решений в расплывчатых условиях: В кн.: Вопросы анализа и процедуры принятия решений. - М.: Мир, 1976. - С. 172-215.

4. *Волкович В.Л. Волошин А.Ф.* Об одной схеме последовательного анализа и отсеивания вариантов // Кибернетика. - 1978. - № 4. - С. 98-105.

5. *Волкович В.Л., Волошин А.Ф., Заславский В.А.* Модели и методы оптимизации надежности сложных систем / Под ред. Михалевича В.С. - К.: Наук. думка, 1993. - 312 с.

6. *Волошин А.Ф.* Метод локализации области оптимума в задачах математического программирования // Доклады АН СССР. - 1987. - Т. 293. - № 3. - С. 549-553.

7. *Волошин О.Ф., Мащенко С.О.* Теорія прийняття рішень: Навчальний посібник. - К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2006. - 304 с.

8. *Вольский В.И., Лезина З.М.* Голосование в малых группах. - М.: Наука, 1991. - 192 с.

9. *Воронин А.Н.* Нелинейная схема компромиссов в многокритериальных задачах управления // Изв. АН СССР. - Техн. Кибернетика. - 1990. - № 4. - С. 37-46.

10. *Глотов В.А.* Координатно-модульные отношения // Автоматика и телемеханика. - 1984. - № 2. - С. 99-104.

11. *Гурвич Б.А., Меньшиков И.С.* Институты согласия. - М.: Знание, 1989. - 48 с.

12. *Джонс Дж.К.* Методы проектирования. - М.: Мир, 1986. - 326 с.

13. *Емеличев В.А., Янушкевич О.А.* Алгоритм линейной свертки последовательной оптимизации критериев. - Минск, 1996. - 28 с. (Препринт / Ин-т техн. кибернетики АН Беларуси. № 5).

14. *Загоруйко Н.Г.* Классификация задач прогнозирования в таблицах "объект-свойство" // Вычислительные системы. - Новосибирск. - 1981. - Вып. 88: Машинные методы обнаружения закономерностей. - С. 3-8.

15. *Загоруйко Н.Г.* Методы распознавания и их применение. - М.: Сов. радио, 1972. - 216 с.

16. *Злоба Е., Яцкив И.* Статистические методы восстановления пропущенных данных // Computer Modelling & New Technologies. - 2002. - Vol. 6. - № 1. - Pp. 51-61.

17. *Ивахненко А.Г.* Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами. - К.: Техніка, 1975. - 312 с.

18. *Калугин О.А.* Принятие решений в организациях. - СПб.: "Сентябрь", 2001. - 139 с.

19. *Литтл Р. Дж. А., Рубин Д.Б.* Статистический анализ данных с пропусками. - М.: Финансы и статистика, 1991. - 336 с.

20. *Макаров И.М., Виноградская Т.М., Рубчинский А.А.* и др. Теория выбора и принятия решений: Учебное пособие. - М.: Наука, 1982. - 328 с.

21. Методы и алгоритмы автоматизированного проектирования сложных систем управления / Волкович В.Л., Волошин А.Ф., Горлова Т.М. и др. - К.: Наук. думка, 1984. - 216 с.

22. *Минский М., Пейперт С.* Персептроны. - М.: Мир, 1971. - 271 с.

23. *Миркин Б.Г.* Анализ качественных признаков: Математические модели и методы. - М.: Статистика, 1976. - 166 с.

24. *Михалевич В.С.* Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение. - I, II. // Кибернетика. - 1965. - № 1. - С. 45-55; - № 2. - С. 85-88.

25. *Михалевич В.С., Волкович В.Л.* Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. - М.: Наука, 1982. - 286 с.

26. *Михалевич В.С., Волкович В.Л., Волошин А.Ф.* Метод последовательного анализа в задачах линейного программирования большого размера // Кибернетика. - 1981. - № 4. - С. 114-120.

27. *Михалевич В.С., Волкович В.Л., Волошин А.Ф.* Метод последовательного анализа при согласовании решений оптимизационных задач в двухуровневых иерархических системах: Препр. / АН УССР. - К.: 1981. - 22 с.

28. *Михалевич В.С., Шор Н.З.* Численное решение многовариантных задач по методу последовательного анализа вариантов. - М.: Изд-во ЛЭММ АГ СССР, 1962. - 246 с.

29. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. - М.: Мир, 1991. - 464 с.

30. Пакет прикладних программ ОТЭКС (для анализа данных) / Н.Г. Загоруйко, В.Н. Елкина, С.В. Емельянов, Г.С. Лбов. - М.: Финансы и статистика, 1986. - 160 с.

31. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. - М.: Наука, 1982. - 256 с.

32. *Розен В.В.* Цель – оптимальность – решение (математические модели принятия оптимальных решений). – М.: Радио и связь, 1982. – 168 с.
33. *Розенблатт Ф.* Принципы нейродинамики. – М.: Мир, 1965. – 480 с.
34. *Россиев А.А.* Моделирование данных при помощи кривых для восстановления пробелов в данных // Методы нейроинформатики; под ред. А.Н. Горбаня. – КГТУ: Красноярск, 1998. – С. 6–22.
35. *Салуквадзе М.Е., Топчишвили А.Л.* Свойства слабо-эффективных решений последовательности многокритериальных задач / Препринт. – Тбилиси: Институт систем управления АН Грузии. – 1990. – 20 с.
36. *Скофенко А.В.* Применение нечеткой логики при ранжировании объектов методом парных сравнений // Кибернетика. – 1983. – № 3. – С.116–118.
37. *Снитюк В.Е.* Эволюционный метод восстановления пропусков в данных // Интеллектуальный анализ информации: Сб. трудов VI-й Межд. конф. – Киев. – 2006. – С. 262-271.
38. *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс. – М.: "Вильямс", 2006. – 1104 с.
39. *De Jong K.A.* Analysis of behavior of a class of genetic adaptive systems. PhD Thesis. – University of Michigan: Ann Arbor, MI. – 1975. – 256 p.
40. *Goldberg D.* Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. – Addison-Wesley, 1989. – 196 p.
41. *Harti R.E.* A global convergence proof for class of genetic algorithms. – Technische Universitaet Wien, 1990. – 136 p.
42. *Holland J.* Adaptation in natural and artificial systems. – University of Michigan Press, 1975. – 211 p.
43. *Hopfield J.J., Tank D.W.* Computing with neural circuits: A model // Science. – № 233. – Pp. 625-633.
44. *Kohonen T.* Self-organization and associative memory. Series in Information Sciences. – Berlin: Springer Verlag, 1984. – Vol. 8. – 312 p.
45. *Kosko B.* Fuzzy systems as universal approximations // Proceedings of lst IEEE International Conference on Fuzzy System (FUZZ_IEEE '92). – San Diego (Ca), USA. – 1992. – Pp. 153–162.
46. *Rumelhart D.E., Hinton G.E., Williams R.J.* Learning representation back-propagation errors// Nature. – 1986. – Vol. 323. – Pp. 533–536.
47. *W.S. McCulloch, W. Pitts.* A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. // Bull. Math. Biophys. 1943. – № 5. – Pp. 115–133.
48. *Zadeh L.* Fuzzy sets // Information and Control. – 1965. – № 8. – Pp. 338–353.

Розділ 3 Процедури побудови матриць парних порівнянь

3.1. Способи представлення матриць відношень між парами об'єктів та перетворення між ними

На практиці часто виникають ЗЕО, у яких деякі властивості об'єктів зручніше виражати не у термінах параметрів та їх значень, а у термінах відношень між об'єктами за деякими властивостями [30]. Тому поширеною при обробці експертної інформації є проблема визначення відношень на заданій множині об'єктів. При цьому існують різноманітні способи представлення зазначених відношень і обчислення відповідностей між ними також має суттєве значення при розв'язанні ЗЕО.

Результати досліджень розв'язання задачі порівняння двох об'єктів та виявлення "кращого" з них свідчать про те, що така операція є складною для експерта, якщо об'єкт характеризується великою кількістю параметрів. Уже при наявності трьох характеристик об'єктів експерти використовують спрощуючі задачу евристики, які можуть призвести до протиріч. Ці обмеження властиві людині в силу специфічних характеристик її "оперативної" пам'яті [27]. При цьому, згідно [44], в задачах цілісного вибору можливості експертів є дуже великими, оскільки вони використовують цілісний образ об'єкта (*гештальт*) як одну структурну одиницю інформації. Гештальт, як правило, є багатшим від відповідного набору параметрів. У зв'язку з цим рішення, прийняті на основі цілісного представлення, часто не співпадають з рішеннями тих же задач формальними методами.

Нехай задано множину n об'єктів виду (1.1), параметри яких не розглядаються. Експертові пропонується визначити відношення (переваги, схожості-відмінності, близькості чи інші) між об'єктами, використовуючи власний досвід чи деякі інші непрямі свідчення. Цілісний вибір здійснюється, як правило, у зв'язку з тим, що

– параметри об'єктів неможливо виміряти;

– параметри є невідомими з деяких причин;

– параметри є несуттєвими для експертного оцінювання.

Одним з основних способів представлення відношень між об'єктами множини (1.1) є матриці парних порівнянь (МПП) виду (1.4). Елементами $b_{ij}, i, j \in I$, матриць виду (1.4) є дійсні числа, які відображують у деякій шкалі результати порівняння експертом об'єктів з індексами $i, j \in I$. Симетричні елементи b_{ij} та b_{ji} матриці (1.4) вибираються рівними, якщо об'єкти, які їм відповідають, є рівноцінними з точки зору експерта. Коли ж об'єкт з індексом $i, i \in I$, на думку експерта, є "кращим" від об'єкта з індексом $j, j \in I$, тобто $a_i \succ a_j, i, j \in I$, то відношення між симетричними елементами матриці встановлюються у вигляді $b_{ij} > b_{ji}$, $b_{ij}, b_{ji} \in B$, $i, j \in I$. Крім цих очевидних умов на елементи матриці вигляду (1.4), як правило, накладаються додаткові (калібрувальні) обмеження, які однозначно зв'язують попарно симетричні елементи b_{ij} та b_{ji}.

Залежно від умов задачі, значення елементів $b_{ij}, i, j \in I$, матриць виду (1.4) можуть мати різний зміст. Матриця B може

– характеризувати відносну "вагу" об'єктів, якщо визначається вектор переваг на множині об'єктів (1.1);

– вказувати на відносну важливість параметрів об'єктів при експертному оцінюванні;

– свідчити про відносну компетентність експертів.

Одним з найпоширеніших та найнадійніших методів виявлення відношень на заданій множині об'єктів (1.1) є метод парних (інколи використовують термін – попарних [36, 43]) порівнянь [22, 28, 31]. При використанні цього методу результати експертизи заносяться в МПП виду (1.4) або представляються у вигляді орієнтованого графа парних порівнянь, вершинами якого є об'єкти, а дуги характеризують відношення між ними. Відношення на заданій множині об'єктів виявляються також шляхом використання методів множинного порівняння [37], ранжування [31], приписування балів [26] та інших методів. При цьому МПП є найзагальнішим способом представлення відношень на множині об'єктів [30]. Способи представлення МПП розглядалися в роботах [7, 16, 17, 21].

МПП виду (1.4) можуть бути повними, якщо усі елементи матриці B є визначеними, або неповними, тобто такими, у яких не всі елементи $b_{ij} \in B$, $i, j \in I$, є відомими. У останньому випадку може виникати задача відновлення невідомих елементів МПП [23], а також визначення "ваги" об'єктів за неповною МПП [42]. У реальних експертизах спеціалісти не завжди є послідовними у своїх перевагах внаслідок складності задачі, невизначеності відношень між об'єктами, недостатньої компетентності, особистої упередженості тощо. Закономірним наслідком особливостей людської психіки є неточність, розмитість та суперечливість експертних суджень. Тому елементи матриці виду (1.4) інколи представляють в інтервальному вигляді або у вигляді ФН.

Згідно [30], при порівнянні об'єктів множини (1.1) існує чотири основних способи представлення результатів такого порівняння у вигляді елементів МПП. Оцінка експертом відношення між об'єктами може виражати:

П1 – просто факт переваги одного об'єкта над іншим або рівноцінності між об'єктами з точки зору експерта (проста структура) [24, 25, 28];

П2 – частку сумарної інтенсивності переваги об'єктів, що порівнюються, яка припадає на кожен з об'єктів [28], так що $b_{ij}+b_{ji}=T$, $i,j\in I$, де $T\geq 0$ – деяке дійсне число, однакове для усіх $b_{ij}\in B$, $i,j\in I$; найчастіше $T=1$ і тоді кажуть, що застосовується ймовірнісне калібрування; при $T=0$ має місце кососиметричне калібрування, а при $T>0$ – турнірне калібрування;

П3 – бальну оцінку відношення [26] $b_{ij}\in R$, $b_{ji}\in R$, $i,j\in I$, де R – множина дійсних чисел; іноді встановлюються односторонні чи двосторонні границі допустимого приписування балів;

П4 – оцінку того, у скільки разів один об'єкт переважає інший, тобто $b_{ij}=1/b_{ji}$, $i,j\in I$, – кажуть, що має місце степеневе калібрування [2, 30].

Якщо відношення між парами об'єктів задаються у формах П1 або П2, то матриця виду (1.4) є кососиметричною (антисиметричною), тобто з елементами, які пов'язані умовою $b_{ij}=-b_{ji}$, $i,j\in I$, або легко зводиться до такої. Якщо ж відношення задано у формі П3 або П4, то матриця (1.4) є оберненою симетричною, тобто виконується співвідношення $b_{ij}=1/b_{ji}$, $i,j\in I$, або зводиться до неї.

Формули перетворень між різними способами представлення попарних відношень між об'єктами наводяться у табл. 3.1 [21]. У цій таблиці через $p_{ij},i,j\in I$, позначено початкові значення елементів матриці виду (1.4), а через $b_{ij},i,j\in I$, – результуючі значення цих елементів при розв'язанні задачі перетворення їх у потрібну для дослідника форму представлення.

Таблиця 3.1. **Тотожні перетворення між способами представлення відношень між об'єктами**

			Проста структура ПС {0,1/2,1}	Проста структура ПС {–1,0,1}	Проста структура ПС {0,1,2}	Бальна структура (Б)	Ступеневе калібрування (С)
Якісні (кваліметричні) відношення	Проста структура (ПС)	Проста структура ПС {0,1/2,1}	—	$b_{ij} = 2(p_{ij} - 1/2)$	$b_{ij} = 2p_{ij}$	ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ МЕТРИЗАЦІЇ	
		Проста структура ПС {–1,0,1}	$b_{ij} = (p_{ij} + 1)/2$	—	$b_{ij} = 2p_{ij} + 1$		
		Проста структура ПС {0,1,2}	$b_{ij} = p_{ij}/2$	$b_{ij} = p_{ij} - 1$	—		
Кількісні (метризовані) відношення	Бальна оцінка (зважена структура) $p_{ij} \geq 0, \forall i, j \in I$, (Б)		$b_{ij} = [\text{sign}(p_{ij} - p_{ji}) + 1]/2$	$b_{ij} = \text{sign}(p_{ij} - p_{ji})$	$b_{ij} = \text{sign}(p_{ij} - p_{ji}) + 1$	—	$b_{ij} = p_{ij}/p_{ij}$
	Мультиплікативні матриці	Ступеневе калібрування $p_{ij} * p_{ji} = 1, p_{ij} > 0, \forall i, j \in I$, (С)	$b_{ij} = [\text{sign}(p_{ij} - p_{ji}) + 1]/2$	$b_{ij} = \text{sign}(\log_T p_{ij})$, $T > 1$	$b_{ij} = \text{sign}(p_{ij} - p_{ji}) + 1$	$b_{ij} = T_1 p_{ij}/(T_2 + p_{ij})$, $T_1 > 0$, $T_2 \geq 1$	—
	Адитивні матриці	Турнірне калібрування $p_{ij} + p_{ji} = T, \forall i, j \in I$, (Т)	$b_{ij} = [\text{sign}(p_{ij} - p_{ji}) + 1]/2$	$b_{ij} = \text{sign}(p_{ij} - p_{ji})$	$b_{ij} = \text{sign}(p_{ij} - p_{ji}) + 1$	$b_{ij} = p_{ij}$	$b_{ij} = p_{ij}/p_{ij}$
		Ймовірнісне калібрування (В) $p_{ij} + p_{ji} = 1, 0 \leq p_{ij} \leq 1, \forall i, j \in I$	$b_{ij} = [\text{sign}(p_{ij} - p_{ji}) + 1]/2$	$b_{ij} = \text{sign}(p_{ij} - p_{ji})$	$b_{ij} = \text{sign}(p_{ij} - p_{ji}) + 1$	$b_{ij} = T p_{ij}$, $T > 0$	$b_{ij} = p_{ij}/p_{ij}$
		Кососиметричне калібрування $p_{ij} + p_{ji} = 0, \forall i, j \in I$, (К)	$r_{ij} = [\text{sign}(p_{ij} - p_{ji}) + 1]/2$	$r_{ij} = \text{sign}(p_{ij} - p_{ji})$	$r_{ij} = \text{sign}(p_{ij} - p_{ji}) + 1$	$r_{ij} = (p_{ij} + T_1)/T_2$, $T_1 > \max p_{ij}$, $T_2 \neq 0$	$rij = T^{p_{ij}}$; $T > 1$

Таблиця 3.1. **Тотожні перетворення між способами представлення відношень між об'єктами (продовження)**

			Турнірне калібрування (Т)	Ймовірнісне калібрування (Й)	Кососиметричне калібрування (К)
Якісні (кваліметричні) відношення	Проста структура (ПС)	Проста структура ПС {0,1/2,1}	ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ МЕТРИЗАЦІЇ		
		Проста структура ПС {-1,0,1}			
		Проста структура ПС {0,1,2}			
Кількісні (метризовані) відношення	Бальна оцінка (зважена структура) $p_{ij} \ge 0, \forall i, j \in I$, (Б)		$b_{ij} = p_{ij} + (\max\limits_{i,j} S_{ij} - S_{ij})/2;$ $b_{ij} = p_{ij} + (p_{ij} * \max\limits_{i,j} S_{ij})/S_{ij};$ $S_{ij} = p_{ij} + p_{ji}.$	$b_{ij} = p_{ij} + (\max\limits_{i,j} S_{ij} - S_{ij})/2$ $b_{ij} = p_{ij} + (p_{ij} * \max\limits_{i,j} S_{ij})/S_{ij};$ $S_{ij} = p_{ij} + p_{ji};\ b_{ij} = p_{ij}/(p_{ij} + p_{ji}).$	$b_{ij} = p_{ij} - S_{ij};$ $S_{ij} = p_{ij} + p_{ji};$ $b_{ij} = (p_{ij} - p_{ji})/2.$
Кількісні (метризовані) відношення	Мультиплікативні матриці	Ступеневе калібрування $p_{ij} * p_{ji} = 1, p_{ij} > 0, \forall i, j \in I$, (С)	$b_{ij} = p_{ij}/(1 + p_{ij});$ $b_{ij} = Tp_{ij}/(1 + p_{ij});$ T>0	$b_{ij} = p_{ij}/(1 + p_{ij}).$	$b_{ij} = \log_T p_{ij};$ T>1. .
Кількісні (метризовані) відношення	Адитивні матриці	Турнірне калібрування $p_{ij} + p_{ji} = T, \forall i, j \in I$, (Т)	—	$b_{ij} = p_{ij}/(p_{ij} + p_{ji}).$	$b_{ij} = p_{ij} - p_{ji};$ $b_{ij} = (p_{ij} - p_{ji})/2.$
		Ймовірнісне калібрування (В) $p_{ij} + p_{ji} = 1, 0 \le p_{ij} \le 1, \forall i, j \in I$,	$b_{ij} = Tp_{ij}$, T>0 .	—	$b_{ij} = T(p_{ij} - p_{ji});$ T>0 .
		Кососиметричне калібрування $p_{ij} + p_{ji} = 0, \forall i, j \in I$, (К)	$b_{ij} = p_{ij}(\operatorname{sign} p_{ij} + 1)/2 +$ $+(\max\limits_{i,j} p_{ij} - \lvert p_{ij} \rvert)/2;$ $b_{ij} = T(p_{ij} + \max\limits_{i,j} p_{ij});$ T>0 .	$b_{ij} = (p_{ij} + \max\limits_{i,j} p_{ij})/$ $/(2 \max\limits_{i,j} p_{ij})$	—

Відношення, представлені у формі П1, є заданими у якісній (кваліметричній, ординальній) шкалі. Останні три форми представлення відношень між об'єктами, які виражають кількісну міру відношень, називають метризованими (кардинальними) і кажуть, що вони відображують інтенсивність відношень. Форма П2 називається ще адитивним, а форма П4 – мультиплікативним відношенням. Між формами П2, П3, П4 існує взаємнооднозначна відповідність [30, 40]. Мультиплікативні МПП та їх елементи будемо позначати через

$$M = \left(\mu_{ij}\right), i, j \in I. \tag{3.1}$$

До результатів вимірювання кількісних величин застосовується апарат математичної статистики. Для використання статистичних методів до результатів експертного оцінювання у кількісних шкалах необхідно нечислову інформацію метризувати [1, 28]. Метризацією (оцифровкою [1, 41], арифметизацією [40]) кваліметричної шкали називається побудова відповідності між формою П1 та іншими формами. Не кожна реляційна система може бути ізоморфно метризованою [6]. З іншого боку, деякі кваліметричні шкали можуть бути метризовані різними способами. Методи метризації кваліметричних відношень наводяться, наприклад, у роботах [1, 18].

3.2. Кардинальна узгодженість метризованих відношень

Для метризованих відношень переваги вводиться поняття *кардинальної узгодженості* в силі переваги (або *надтранзитивності*), якщо у відношеннях, які задано матрицями виду (3.1), крім традиційної вимоги транзитивності виконуються ще й умови для інтенсивності адитивних відношень між об'єктами:

$$\mu_{il} + \mu_{lj} = \mu_{ij}, \quad 1 \le i < l < j \le n, \tag{3.2}$$

або для мультиплікативних відношень:

$$\mu_{il} / \mu_{lj} = \mu_{ij}, \quad 1 \le i < l < j \le n. \tag{3.3}$$

Якщо умови (3.2) або (3.3) не виконуються, то виникає задача узгодженості відношень. У цьому випадку порушується пропорційність, яка, взагалі кажучи, може і не порушувати транзитивність відношень. Якщо є кардинальна узгодженість у судженні експерта, то ранг матриці M дорівнює 1. Кардинальна неузгодженість може бути наслідком різних причин [5]:

– відображенням реальної дійсності (наприклад, турнірна задача);

– нетранзитивності міркувань, що є природним для людської психіки явищем;

– непослідовності у міркуваннях експерта;

– недостатньої компетентності експерта;

– окремих помилок експерта, наприклад, через велику розмірність матриці (3.1) тощо.

Задачі знаходження надтранзитивних відношень за заданими експертами неузгодженими відношеннями виду (3.1) досліджувалися багатьма вченими. Частковим випадком такої задачі є побудова вектора вагових коефіцієнтів або гіперпаралелепіпеда вагових коефіцієнтів (ГВК) за МПП. Далі у монографії буде запропоновано кілька підходів до розв'язання цієї проблеми, які успішно використовуються в практичних ситуаціях.

3.3. Локалізація матриці парних порівнянь за інтервалами вагових коефіцієнтів

Нехай задано нормований ГВК об'єктів з індексами $i \in I$:

$$\Gamma = \prod_{i \in I} \left[\rho_i^H, \rho_i^B \right], \qquad (3.4)$$

де $\rho_i^H, \rho_i^B, i \in I,$ – відповідно нижня та верхня границі зміни елементів векторів $\rho_i, i \in I$, і виконується умова $0 < \rho_i^H \le \rho_i^B < 1, i \in I$. Задача полягає у визначенні мультиплікативної МПП об'єктів шляхом послідовного уточнення відношень переваги експерта [20], заданих у вигляді ГВК об'єктів виду (3.4).

У випадку інтервального задання вагових коефіцієнтів породжується сімейство матриць $M = (\mu_{ij})$, $i, j \in I$, елементи яких визначаються співвідношенням $\mu_{ij} = \rho_i / \rho_j$, $\forall i, j \in I$. Для локалізації відношень переваги на множині об'єктів та вибору

єдиної МПП об'єктів виникає необхідність у наданні експертові відповідного математичного апарату, який дозволить зробити це послідовно та обгрунтовано.

На кожному кроці процедури визначається один з елементів матриці M: μ_{ij} або μ_{ji}, $i, j \in I$, $i \ne j$, оскільки МПП є оберненосиметричою, тобто $\mu_{ij} = 1/\mu_{ji}$, $i, j \in I$, $i \ne j$. Елемент μ_{ij}, $i, j \in I$, матриці M відображує інтенсивність переваги об'єкта з індексом $i \in I$, над об'єктом з індексом $j \in I$, тому очевидно, що множина допустимих значень цієї величини лежить в інтервалі $\left[\rho_i^H / \rho_j^B, \rho_i^B / \rho_j^H \right]$, $i, j \in I$.

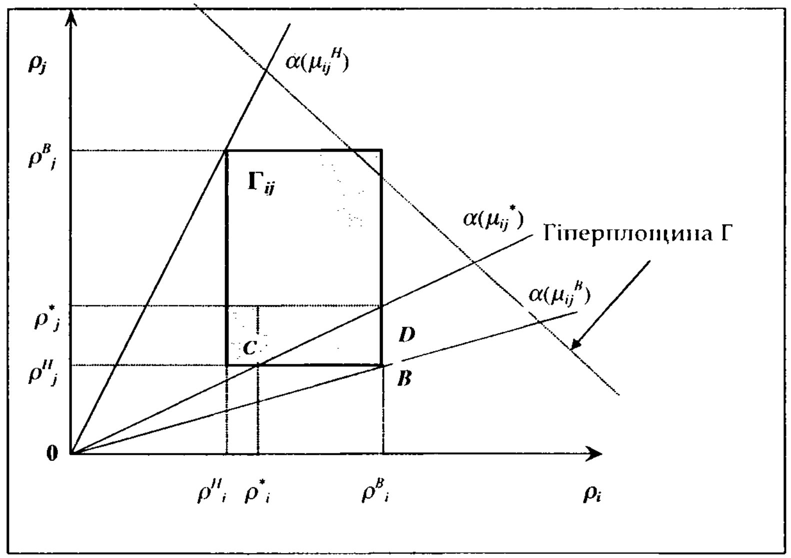


Рис. 3.1. Ілюстрація вибору елемента $\mu^*_{ij} \in M$.

Для ілюстрації ситуації вибору експертом елемента $\mu^*_{ji} \in M$, $i, j \in I$, $i \ne j$, розглянемо рис. 3.1, який демонструє відповідність між проекцією ГВК на площину, утворену осями $O\rho_i$, $O\rho_j$: $\Gamma_{ij} = \left[\rho_i^H / \rho_i^B \right] \times \left[\rho_j^H / \rho_j^B \right]$, $i, j \in I$, та елементами МПП, яким у просторі вагових коефіцієнтів відповідають промені, позначені на рисунку через $\alpha(\mu_{ij})$.

Відношення $\rho_i^H/\rho_j^B, \rho_i^B/\rho_j^H$, $i,j\in I$, є тангенсами кутів нахилу відповідних променів $\alpha^H=\alpha\left(\mu_{ij}^H\right)$ та $\alpha^B=\alpha\left(\mu_{ij}^B\right)$ до осі $O\rho_i$, а $\alpha^*=\alpha\left(\mu_{ij}^*\right)$ є тангенсом кута, утвореного променем, який задано експертом, та віссю $O\rho_i$. Справедливими є співвідношення $\mathrm{tg}\,\alpha=\mathrm{tg}\,\alpha\left(\mu_{ij}\right)=\mu_{ij}$, або $\alpha=\alpha\left(\mu_{ij}\right)=\mathrm{arctg}\,\mu_{ij}$.

Експерт вибирає фіксоване значення елемента μ_{ij}^* (на рисунку 3.1 промінь $\alpha\left(\mu_{ij}^*\right)$), яке є бажаним (прийнятним) для нього, з інтервалу $\mu_{ij}^*\in\left[\rho_i^H/\rho_j^B, \rho_i^B/\rho_j^H\right]$, $i,j\in I$. Внаслідок цього фіксуються нові значення границь ГВК на площині, утвореній осями $O\rho_i$, $O\rho_j$, залежно від варіанту перетину. Тобто, розглядається новий ГВК, якому на рис. 3.2 відповідають заштриховані області.

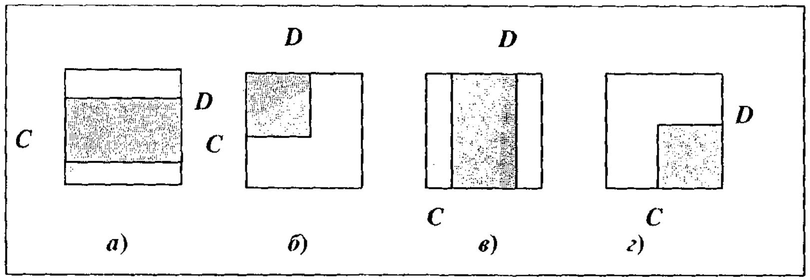


Рис. 3.2. Варіанти уточнення границь ГВК

Для аналізу ситуацій перетину променя $\alpha\left(\mu_{ji}^*\right)$, породженого точкою $\mu_{ji}^*\in\left[\rho_i^H/\rho_j^B, \rho_i^B/\rho_j^H\right]$, $i,j\in I$, з проекцією Γ_{ij}, слід розглянути промені $\alpha\left(\rho_i^H,\rho_j^H\right)$ та $\alpha\left(\rho_i^B,\rho_j^B\right)$. Таким чином одержуємо інтервали:

$$\left[\mu_{ji}^H,\mu_{ji}^B\right]=\left[\mu_{ji}^H,\mu_{ji}^{(1)}\right]\cup\left(\mu_{ji}^{(1)},\mu_{ji}^{(2)}\right]\cup\left(\mu_{ji}^{(2)},\mu_{ji}^B\right],$$

де $\mu_{ji}^{(1)}=\min\left(\rho_i^H/\rho_j^H, \rho_i^B/\rho_j^B\right)$, $\mu_{ji}^{(2)}=\max\left(\rho_i^H/\rho_j^H, \rho_i^B/\rho_j^B\right)$.

Ситуація $\mu_{ji}^{(1)}=\rho_i^B/\rho_j^B\le\rho_i^H/\rho_j^H=\mu_{ji}^{(2)}$ відповідає варіанту А на рисунка 3.3, ситуація $\mu_{ji}^{(1)}=\rho_i^H/\rho_j^H<\rho_i^B/\rho_j^B=\mu_{ji}^{(2)}$ – варіанту Б цього рисунка.

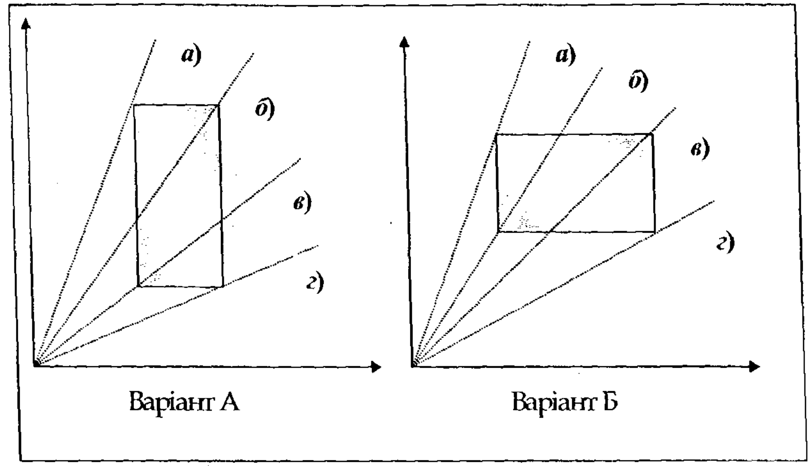


Рис. 3.3. Варіанти перетину променя з ГВК на площині, утвореній осями $O\rho_i, O\rho_j$

Залежно від того, в який з трьох інтервалів $\left[\mu_{ji}^H,\mu_{ji}^{(1)}\right]$, $\left(\mu_{ji}^H,\mu_{ji}^{(1)}\right]$ чи $\left(\mu_{ji}^{(2)},\mu_{ji}^B\right]$ потрапляє значення μ_{ji}^*, задане експертом, реалізується один з випадків, показаних на рис 3.3. При цьому відповідним чином здійснюється уточнення границь паралелепіпеда, як це ілюструється на рис. 3.2. На рис. 3.3 зображено таку ситуацію, що коли $\mu_{ji}^*\in\left[\mu_{ji}^H,\mu_{ji}^{(1)}\right]$, тобто якщо $\rho_i^H/\rho_j^B<\mu_{ji}^*\le\min\left(\rho_i^H/\rho_j^H, \rho_i^B/\rho_j^B\right)$, то реалізується випадок б) рис. 3.2: значення ρ_i^H,ρ_j^B залишаються незмінними, а за відношеннями $\mu_{ji}^*=tg\alpha^*=\rho_i^{B1}/\rho_j^B$ та $\mu_{ji}^*=\rho_i^H/\rho_j^{H1}$ визначаються значення вагових коефіцієнтів відповідно $\rho_i^{B1}=\mu_{ji}^*\rho_j^B$ та $\rho_j^{H1}=\rho_i^H/\mu_{ji}^*$.

Якщо значення $\mu_{ji}^{*} \in \left(\mu_{ji}^{(2)}, \mu_{ji}^{B}\right]$, то реалізується випадок г) рис. 3.2: вагові коефіцієнти ρ_i^B, ρ_j^H залишаються незмінними, а за відношеннями $\mu_{ji}^{*} = tg\alpha^{*} = \rho_i^B / \rho_j^{B1} = \rho_i^{H1} / \rho_j^H$ визначаються відповідні величини $\rho_j^{B1} = \rho_i^B / \mu_{ji}^{*}$, $\rho_i^{H1} = \mu_{ji}^{*} \rho_j^H$. Якщо $\mu_{ji}^{*} \in \left(\mu_{ji}^{(1)}, \mu_{ji}^{(2)}\right]$, то можливі два випадки. При $\mu_{ji}^{(1)} = \rho_i^B / \rho_j^B$, $\mu_{ji}^{(2)} = \rho_i^H / \rho_j^H$, (що відповідає варіанту А на рис. 3.3), реалізується випадок а) рис. 3.2: значення ρ_i^H, ρ_i^B залишаються незмінними, а за відношеннями $\mu_{ji}^{*} = \rho_i^B / \rho_j^{B1} = \rho_i^H / \rho_j^{H1}$ визначаються вагові коефіцієнти $\rho_j^{B1} = \rho_i^B / \mu_{ji}^{*}$ та $\rho_j^{H1} = \rho_i^H / \mu_{ji}^{*}$. При $\mu_{ji}^{(1)} = \rho_i^H / \rho_j^H$, $\mu_{ji}^{(2)} = \rho_i^B / \rho_j^B$, (варіант Б на рис. 3.3), реалізується випадок в) рис. 3.2: значення ρ_j^H, ρ_j^B залишаються незмінними, а за відношеннями $\mu_{ji}^{*} = \rho_i^{B1} / \rho_j^B = \rho_i^{H1} / \rho_j^H$ визначаються вагові коефіцієнти $\rho_i^{B1} = \rho_j^B / \mu_{ji}^{*}$, $\rho_i^{H1} = \rho_j^H / \mu_{ji}^{*}$.

У випадку, якщо задане експертом значення $\mu_{ji}^{*} \in \left[\mu_{ji}^{H}, \mu_{ji}^{B}\right]$ проходить через точки $\mu_{ji}^{(1)} = \mu_{ji}^{(2)} = \mu_{ji}^{*}$, то уточнення границь ГВК не відбувається.

На наступній ітерації процедури експертові для вибору поточного значення μ_{ji}^{*} пред`являються вже змінені границі інтервалів, якщо наступна площина породжується однією з осей $O\rho_i, i \in I$, або $O\rho_j, j \in J$.

Описана процедура надає можливість розкласти процес визначення МПП об'єктів на елементарні операції, які є доступними для сприйняття експертом та послідовного визначення ним відношень переваги між об'єктами.

3.4. Визначення міри схожості суджень експертів за вибраними ними підмножинами об'єктів

Важливим етапом процесів експертного оцінювання є аналіз сукупності експертних суджень, формування експертних

груп на основі аналізу переваг та обчислення мір схожості суджень експертів. Визначення структури переваг експертів та мір схожості експертних суджень може бути також і самостійною задачею. Така задача виникає у багатьох інших випадках застосування експертних технологій. Елементи МПП інтерпретуються іноді як ступені схожості–відмінності між об'єктами a_i та a_j, $i, j \in I$. Саме виходячи з цього будемо будувати у цьому параграфі схему знаходження елементів МПП виду (3.1).

Нехай на множині об'єктів $a_i \in A$, $i \in I$, параметри яких не виділяються, група k експертів вибирає бажані для кожного з експертів підмножини об'єктів, $A^j \subseteq A$, $j \in L = \{1, \ldots, k\}$. Задача полягає у визначенні міри схожості вподобань експертів $A^j \subseteq A$, $j \in L$, на основі вибраних експертами підмножин. Така постановка використовується, наприклад, при визначенні якості інформаційно-пошукових систем на основі порівняння швидкості та змісту їх відповідей на однакові запити. Можливе також використання описаної процедури для тестування на психологічну сумісність, "схожість" деяких технічних систем тощо.

Загальна система аксіом, яким мають задовольняти міри схожості, складається з:

- *аксіоми обмеженості* міри схожості μ; у загальному випадку передбачається, що $0 \le \mu \le 1$;

- *аксіоми симетричності* міри схожості, тобто

$$\mu\left(A^1, A^2\right) = \mu\left(A^2, A^1\right);$$

- *аксіоми транзитивності*, тобто у випадку, якщо має місце відношення $\mu\left(A^1, A^2\right) = 1$ і $\mu\left(A^2, A^3\right) = 1$, то є справедливим

$$\mu\left(A^1, A^3\right) = 1, \text{ де } A^1, A^2, A^3 \subseteq A.$$

Визначимо також додаткові вимоги до функції схожості. Оскільки міри схожості переваг експертів вводяться на підмножинах вибраних ними об'єктів, то очевидно, що вони мають залежати від величини підмножин $A^1, A^2 \subseteq A$, їх перетину та об'єднання, а також від загального об'єму множини A.

Для подальшого викладення введемо такі позначення:

$$x_1 = A \supseteq A^1 \cup A^2;\ x_2 = A^1;\ x_3 = A^2;\ x_4 = A^1 \cap A^2.$$

Символом (*) позначимо фіксоване значення x, $x \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Таким чином, міри схожості переваг експертів можна описати у вигляді кортежа

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle. \quad (3.5)$$

Додаткові вимоги до функції схожості структури переваг експертів визначимо як:

- $\mu(x_1^1,*,*,*) > \mu(x_1^2,*,*,*)$, якщо $x_1^1 > x_1^2$, тобто міра схожості вибраних підмножин буде тим більшою, чим більшим є загальний об'єм множини A, при фіксованих значеннях інших компонент (3.5);
- $\mu(*,x_2^1,*,*) > \mu(*,x_2^2,*,*)$, якщо $x_2^1 < x_2^2$, тобто має місце обернена залежність значення міри схожості та значення x_2;
- $\mu(*,*,x_3^1,*) > \mu(*,*,x_3^2,*)$, якщо $x_3^1 < x_3^2$, тобто існує також обернена залежність значення міри схожості та значення x_3;
- $\mu(*,*,*,x_4^1) > \mu(*,*,*,x_4^2)$, якщо $x_4^1 > x_4^2$, тобто міра схожості прямо залежить від величини перетину цих підмножин при фіксованих значеннях інших компонент кортежу (3.5).

Міри схожості переваг експертів, які задовольняють системі аксіом та додатковим вимогам до функції схожості, будемо обчислювати за формулами, які наводяться у роботах [14, 19]:

$$\mu_{12}^{(1)} = \frac{|A^1 \cap A^2|}{|A^1 \cup A^2|} \cdot \left(1 - \frac{|A^1 \cup A^2| - |A^1 \cap A^2|}{|A|}\right), \quad (3.6)$$

$$\mu_{12}^{(1)} = \frac{|A^1 \cap A^2|}{\max\left(|A^1|, A^2|\right)} \cdot \left(1 - \frac{|A^1 \cup A^2| - |A^1 \cap A^2|}{|A|}\right), \quad (3.7)$$

$$\mu_{12}^{(1)} = \frac{|A^1 \cap A^2|}{|A^1 \cup A^2|} \cdot \left(1 - \frac{|A^1 \cup A^2| - \min\left(|A^1|,|A^2|\right)}{|A|}\right), \quad A_1, A_2 \subseteq A. \quad (3.8)$$

При наявності кількох експертів міри схожості типу (3.6)–(3.8) можуть бути зведені у відповідну метризовану МПП з метою проведення подальшого аналізу. Зокрема, на наступних етапах можуть

- визначатися коаліції експертів зі схожою структурою переваг;
- обчислюватися міра узгодженості суджень групи експертів;
- визначатися "експерти-антагоністи", переваги яких дуже відрізняються від суджень більшості представників групи;
- обчислюватися інші характеристики.

До одержаних у такий спосіб метризованих МПП для виділення компактних експертних груп можна застосувати процедури кластеризації.

Елементи МПП виду (3.6)–(3.8) можна інтерпретувати як ФН експертів з індексами i, j, $i, j \in I$, до розмитої множини „дружньої коаліції". Це здійснюється у випадку визначення коаліцій та розв'язання ЗЕО із застосуванням апарату нечітких множин.

3.5. Визначення міри схожості експертів за експертним розподілом об'єктів по кластерах

Задачі класифікації об'єктів (процесів, явищ тощо) є широко розповсюдженими на практиці. У медичній діагностиці на основі проведених досліджень шляхом розв'язання зазначеної задачі ставиться діагноз; у геології на основі даних геологорозвідки робиться висновок про наявність родовищ корисних копалин; у технічній діагностиці шляхом аналізу непрямих показників визначається причина збою чи виходу з ладу системи; при розв'язанні задачі вибору варіанта забудови в архітектурі робиться висновок про відповідність вибору певним вимогам; у соціально-економічних дослідженнях розв'язується задача виділення соціально однорідних груп населення, схожих економічних районів тощо. Задача класифікації, як один з етапів дослідження, може мати місце у будь-якій сфері практичної діяльності. Зокрема, у галузі розробки штучного інтелекту при побудові експертних систем, систем спілкування природною мовою, систем машинного зору, систем сприйняття мовних команд тощо одним з найважливіших напрямків робіт є розробка систем класифікації складних об'єктів.

Нехай задано множину об'єктів $a_i \in A$, $i \in I = \{1,...,n\}$. Експерти, множину індексів яких позначимо через $L = \{1,...,k\}$, відносять кожен з об'єктів до одного з кластерів з індексами l, $l \in \{1,...,\lambda\}$. Задача полягає у визначенні міри схожості переваг експертів. Значення цієї міри дорівнює 1, коли переваги експертів повністю співпадають, і дорівнює 0, якщо переваги абсолютно не схожі. Запис $\mu_{ij} = 0{,}8$, $i, j \in I$, означає, наприклад, що думки i – го та j – го експертів "схожі" на 80 відсотків.

Позначимо через $A_{il} \in A$, $i \in I, l = \{1,...,\lambda\}$, підмножину об'єктів, яку j – й експерт відніс до l – го кластера. Під виразом $|A_{il}|, i \in I, l \in \{1,...\lambda\}$. будемо розуміти кількість об'єктів множини A_{il}, $i \in I, l \in \{1,...,\lambda\}$. Формули визначення мір схожості переваг експертів, які запропоновано в роботі [9], є такими:

$$\mu_{ij}^{(1)} = 2\sum_{l=1}^{\lambda}\left(\left|A_{il} \cap A_{jl}\right| / \left(\left|A_{il}\right| + \left|A_{jl}\right|\right)\right) / \lambda, \tag{3.9}$$

$$\mu_{ij}^{(2)} = 2\sum_{l=1}^{\lambda}\left(\left|A_{il} \cap A_{jl}\right| / \max\left(\left|A_{il}\right|, \left|A_{jl}\right|\right)\right) / \lambda, \tag{3.10}$$

$$\mu_{ij}^{(3)} = 2\sum_{l=1}^{\lambda}\left(\left|A_{il} \cap A_{jl}\right| / \left|A_{il} \cup A_{jl}\right|\right) / \lambda, \tag{3.11}$$

$$\mu_{ij}^{(4)} = \sum_{l=1}^{\lambda} d^l(i,j), \tag{3.12}$$

де величини $d^l(i,j)$, $i, j \in L, l \in \{1,...,\lambda\}$, визначаються таким чином:

$$d^l(i,j) = \begin{cases} 1/\lambda, \text{ якщо експерти з індексами } i, j \\ \quad \text{віднесли } l\text{-й об'єкт до одного класу,} \\ 0, \text{ якщо до різних класів.} \end{cases}$$

Очевидно, що МПП схожості суджень експертів $M = (\mu_{ij})$, $i, j \in L$, визначена шляхом застосування формул (3.9)–(3.12), є

метризованою адитивною матрицею, але не є надтранзитивною [31]. Зрозуміло, що шляхом аналізу такої матриці можна визначити також ступінь узгодженості всієї групи експертів.

3.6. Побудова матриці парних порівнянь шляхом порівняння наборів параметрів, розміщених поряд з антиутопічними точками

Нехай задано довільну множину A наборів параметрів, які будемо представляти у вигляді:

$$a = \left(a^1,...,a^m\right), \ a \in A. \tag{3.13}$$

Необхідно на підставі експертного попарного порівняння наборів параметрів, значення яких відповідають спеціальним вимогам, визначити МПП на множині параметрів. В теорії корисності така експертиза широко застосовується при обчисленні шкаліруючих констант для визначення вигляду багатовимірних функцій цінності [3, 26]. Перехід до визначення елементів МПП з використанням експертизи шкаліруючих констант вперше було описано в роботах [12, 13, 39].

На першому етапі експертизи експерт має визначити індекси параметрів об'єктів, які він вибрав для оцінки, та вказати відношення переваги між ними. Тобто, експерт спочатку зазначає відношення переваги між довільною парою параметрів $a^i \pi a^j$, $i, j \in J$, $i \neq j$, $\pi \in \{\succ, \succeq, \sim, \preceq, \prec\}$. Після цього йому пред'являються для порівняння вектори виду (3.13) – для уточнення числового значення інтенсивності переваг на множині параметрів, тобто здійснюється метризація елементів МПП.

Далі експертові пропонуються для розгляду вектори a_1 та a_2, усі елементи яких за виключенням одного, рівні найгіршим значенням параметрів. Якщо експерт вважає, що між ваговими коефіцієнтами параметрів $\beta_i, i \in J$ має місце відношення $\beta_i > \beta_{i+1}$, тобто параметри $a^i \succ a^{i+1}$, то розглядаються вектори виду

$$\left(a^{(1)H},...,a^{(i-1)H},a^{(ij)*},a^{(i+1)H},...,a^{(m)H}\right)$$
та (3.14)
$$\left(a^{(1)H},...,a^{(i)H},...,a^{(j-1)H},a^{(j)0},a^{(j+1)H},...,a^{(m)H}\right),\ 1\le i<j\le m,$$

де $a^{(j)0},a^{(j)H}$, $j\in J$ – відповідно оптимальні та найгірші значення кожного параметра, $a^{(ij)*},i,j\in J$ – прийнятне для експерта значення параметра $a^j, j\in J$, при пред`явленні параметрів $\{a^i,a^j\}$, тобто таке, що "доставляє" відношення рівноцінності об`єктам a_1 та a_2.

Вектори виду (3.14) відрізняються лише i-ю та j-ю компонентами. Така експертиза розбиває процес визначення елементів МПП на послідовність елементарних етапів. Вона є гнучкою і єдиною вимогою до цієї процедури виступає необхідність пред'явлення для порівняння кожного параметра у складі пари виду (3.14) щонайменше один раз.

Значення параметра $a^j, j\in J$, змінюється в межах $a^j\in\left[a^{(j)H},a^{(j)0}\right], j\in J_1$, або $a^j\in\left[a^{(j)0},a^{(j)H}\right], j\in J_2$, до тих пір, поки не наступить ситуація рівноваги, "момент байдужості", тобто поки вектори виду (3.14) не будуть здаватися експертові рівноцінними (еквівалентними або непорівняними) (J_1,J_2 – множини індексів параметрів, що, відповідно, максимізуються та мінімізуються, $J_1\cup J_2=J$):

$$a_1=\left(a^{(1)H},...,a^{(i-1)H},a^{(ij)*},a^{(i+1)H},...,a^{(m)H}\right)\sim$$
$$\sim\left(a^{(1)H},...,a^{(i)H},...,a^{(j-1)H},a^{(j)0},a^{(j+1)H},...,a^{(m)H}\right)=a_2. \quad (3.15)$$

Для визначення елементів МПП будемо використовувати такі евристики.

***Евристика* Е3.1.** Умова $\sum_{j\in J}\beta_j\ \omega_j\left(a_1^j\right)=\sum_{j\in J}\beta_j\ \omega_j\left(a_2^j\right)$ означає, що набори параметрів a_1 та a_2 є рівноцінними з точки зору експерта.

Крім того, вводимо ще одну евристику, обернену до евристики Е3.1.

***Евристика* Е3.2.** З рівноцінності наборів параметрів $a_1\sim a_2$ випливає тотожність виразів $\sum_{j\in J}\beta_j\ \omega_j\left(a_1^j\right)=\sum_{j\in J}\beta_j\ \omega_j\left(a_2^j\right)$.

Тобто з відношення рівноцінності наборів параметрів (3.15), виявленого за допомогою експерта, випливає справедливість рівності

$$a_1\sim a_2\ \Leftrightarrow\ \sum_{j\in J}\beta_j\ \omega_j\left(a_1^j\right)=\sum_{j\in J}\beta_j\ \omega_j\left(a_2^j\right). \quad (3.16)$$

Зважаючи на вигляд монотонного перетворення $\omega_j\left(a^j\right)$, $j\in J$, введеного формулою (1.6), рівняння (3.16) перепишеться у вигляді

$$\beta_1+...+\beta_i\left(a^{(ij)*}-a^{(i)H}\right)/\left(a^{(i)0}-a^{(i)H}\right)+...+\beta_m=\beta_1+...+\beta_j+...+\beta_m. \quad (3.17)$$

Відношення (3.17) означає, що є справедливим відношення

$$\beta_j\left(a^{(ij)*}-a^{(i)H}\right)/\left(a^{(i)0}-a^{(i)H}\right)=\beta_j,$$

де $a^{(ij)*}$ – прийнятне для експерта значення параметра $a^i, i\in J$, при пред`явленні пари $\{a^i,a^j\}$, тобто таке, при якому набори параметрів a_i та a_j є рівноцінними з точки зору експерта. Таким чином, можна записати

$$\beta_i/\beta_j=1/\left(1-\omega_i\left(a^{(ij)*}\right)\right),$$

де $\omega_i\left(a^{(ij)*}\right)=\left(a^{(ij)*}-a^{(i)H}\right)/\left(a^{(i)0}-a^{(i)H}\right)$.

За результатами попарного пред`явлення експерту векторів виду (3.13) формуються МПП, елементи яких визначаються таким чином

$$\mu_{ij}=\begin{cases}1/\left(1-\omega_i\left(a^{(ij)*}\right)\right), \text{ при } i>j,\\ 1-\left(\omega_i\left(a^{(ij)*}\right)\right), \text{ при } i<j,\\ 1, \text{ при } i=j,\\ 0 - \text{у всіх інших випадках,}\end{cases}$$

де $\omega_i\left(a^{(ij)*}\right)$ – значення параметра $a^{(ij)*},i,j\in J$, які приведено до безрозмірного виду.

Для обчислення елементів МПП $\mu_{ij}, i, j\in J$, можуть застосовуватися інші евристики.

***Евристика* Е3.3.** Умова

$$\sum_{j\in J}\beta_j\left(\omega_j\left(a_1^j\right)\right)^2=\sum_{j\in J}\beta_j\left(\omega_j\left(a_2^j\right)\right)^2$$

означає, що об`єкти a_1 та a_2 є рівноцінними з точки зору експерта.

Введемо також евристику, обернену до евристики Е 3.3.

***Евристика* Е3.4.** З рівноцінності об`єктів $a_1\sim a_2$ випливає справедливість рівності виразів

$$\sum_{j\in J}\beta_j\left(\omega_j\left(a_1^j\right)\right)^2=\sum_{j\in J}\beta_j\left(\omega_j\left(a_2^j\right)\right)^2.$$

Тоді, скориставшись монотонним перетворенням виду (1.6), маємо рівність

$$\beta_1+\ldots+\beta_i\left(\left(a^{(ij)*}-a^{(i)H}\right)/\left(a^{(i)0}-a^{(i)H}\right)\right)^2+\ldots+\beta_m=\beta_1+\ldots+\beta_j+\ldots+\beta_m.$$

Звідси елементи МПП визначаються за формулою

$$\mu_{ij}=\begin{cases}1/\left(1-\omega_i\left(a^{(ij)*}\right)\right)^2, & \text{при } i>j,\\ \left(1-\left(\omega_i\left(a^{(ij)*}\right)\right)\right)^2, & \text{при } i<j,\\ 1, \text{ при } i=j, & \\ 0, \text{ у всіх інших випадках,} & \end{cases}$$

Алгоритм визначення відношень між наборами параметрів є гнучким. У випадку, якщо експерт не може впевнено виявити відношення переваги між двома черговими пред'явленими наборами параметрів, експертові надається право вибору індексів об'єктів наступної пари, оскільки існує $(m-1)$ варіант встановлення зв`язку одного параметра з іншими [13].

Якщо розглядаються набори з десяти і більше параметрів, то замість векторів виду (3.13) експерту можуть пред'являтися не повні набори параметрів, а значення окремих пар параметрів

$$\left(a^{(ij)*},a^{(j)H}\right) \text{ та } \left(a^{(i)H},a^{(j)0}\right),\ i,j\in J, \tag{3.18}$$

для визначення рівноваги між ними. При цьому експерт попереджається про те, що мова йде про образи об'єктів біля опорних ситуацій. До того ж слід зауважити, що в такому випадку може спостерігатися деяке спотворення інформації експертом, оскільки образи об'єктів видів (3.13) та (3.18) для експерта психологічно мають деяку відмінність.

3.7. Процедури агрегування матриць парних порівнянь

Поширеною ЗЕО є задача визначення результуючих відношень переваги між об'єктами, які є числовою оцінкою індивідуальної експертної інформації про переваги на множині об'єктів. Загальноприйнятими підходами до агрегування експертних переваг вважаються статистичний [29, 38], що базується на ймовірнісних методах, та алгебраїчний, в основі якого лежить використання метрик.

Нехай інформація від k експертів про переваги на множині n об'єктів представляється адитивними МПП виду (3.1). Причому способи задання елементів МПП можуть бути такими:

- одноточкова, тобто $M^l=\left(\mu_{ij}\right),\ l\in L,\ i,j\in I$;
- інтервальна, коли $M^l=\left(\left[\mu_{ij}^H,\mu_{ij}^B\right]\right),\ l\in L,\ i,j\in I$;
- трьохточкова, для якої

$$M^l=\left(\mu_{ij}^H,\mu_{ij}^*,\mu_{ij}^B\right),\ l\in L,\ i,j\in I;$$

де $\mu_{ij}^H,\mu_{ij}^*,\mu_{ij}^B,\ i,j\in I,$ – відповідно верхня, нижня та найімовірніша чи бажана для експерта оцінка відношення переваги, $L=\{1,\ldots,k\},\ I=\{1,\ldots,n\}$ – множини індексів відповідно експертів та об'єктів. Елементами МПП можуть бути також ФН, які містять інформацію про інтенсивність попарної переваги між об'єктами та про міру впевненості експерта у заданому значенні інтенсивності переваги. Але така форма задання МПП у монографії не розглядається.

Необхідно побудувати результуючу (групову, агреговану, інтегровану тощо) матрицю M^*, яка у певному розумінні є "найближчою" до заданих індивідуальних матриць $M^l = (\mu_{ij})$, $l \in L$, $i, j \in I$. В рамках алгебраїчного підходу для визначення результуючої МПП будемо застосовувати такі метрики [22, 29]:

– Хемінга: $d(M^*, M^l) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} |\mu_{ij}^* - \mu_{ij}^l|$, $l \in L$, $i, j \in I$;

– квадратичну:

$$d(M^*, M^l) = \left(\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} (\mu_{ij}^* - \mu_{ij}^l)^2 \right)^{1/2} \quad l \in L,\ i, j \in I;$$

– метрику домінування:

$$d(M^*, M^l) = \max_{i,j\in I} |\mu_{ij}^* - \mu_{ij}^l|, \quad l \in L,\ i, j \in I.$$

Агрегування МПП, елементи яких задані одноточково, здійснюється різними процедурами усереднення. Елементи результуючої МПП можуть визначатися як

– середнє арифметичне:

$$\mu_{ij}^* = \sum_{l\in L} \mu_{ij}^l / k, \quad i, j \in I; \tag{3.19}$$

– середнє квадратичне:

$$\mu_{ij}^* = \sqrt{\sum_{l\in L} (\mu_{ij}^l)^2 / k}, \quad i, j \in I; \tag{3.20}$$

– середнє геометричне:

$$\mu_{ij}^* = \sqrt[k]{\prod_{l\in L} \mu_{ij}^l}, \quad i, j \in I; \tag{3.21}$$

– середнє гармонійне:

$$\mu_{ij}^* = k / \sum_{l\in L} (1/\mu_{ij}^l), \quad i, j \in I. \tag{3.22}$$

Інтервальне задання елементів МПП адекватніше від одноточкового відображає експертну інформацію, яка за своєю природою [34] є розмитою, неоднозначною, наближеною. Агрегування інтервальних елементів МПП, можна здійснювати, наприклад, за формулами [35]:

$$\mu_{ij}^{*(H)} = \max_{l\in L} \mu_{ij}^H, \quad \mu_{ij}^{*(B)} = \min_{l\in L} \mu_{ij}^B, \quad i, j \in I,$$

$$\mu_{ij}^{*(H)} = \sum_{l\in L} \mu_{ij}^H / k, \quad \mu_{ij}^{*(B)} = \sum_{l\in L} \mu_{ij}^B / k, \quad i, j \in I.$$

При формуванні інтервальних оцінок таким чином може виникнути ситуація, коли $\mu^{*(H)}_{ij} > \mu^{*(B)}_{ij}$, $i, j \in I$, тобто наведені перетворення призводять до виродженої задачі. Для того, щоб позбутися таких ситуацій, введемо евристику.

Евристика **Е3.5.** У випадках, коли має місце нерівність $\mu^{*(H)}_{ij} > \mu^{*(B)}_{ij}$, $i, j \in I$, для уникнення протиріччя покладаємо $\mu^{*(H)}_{ij} = \mu^{*(B)}_{ij}$, $i, j \in I$.

Відповідно до евристики Е3.5, інтервал зміни відношень переваги між об'єктами з індексами $i, j \in I$, у цьому випадку розглядається як точка.

Агрегування індивідуальних МПП, елементи яких задано інтервалами, будемо здійснювати у два або чотири етапи, залежно від форми представлення результуючої МПП. Наведемо процедуру агрегування МПП, в якій використовуються зазначені вище метрики та вводяться деякі додаткові евристики [10, 11].

Етап 1. Перевірка елементів індивідуальних МПП на узгодженість попарно симетричних елементів. Критерієм узгодженості агрегованих матриць будемо вважати відсутність надлишкових значень на інтервалах визначення елементів МПП, тобто для фіксованих інтервалів $[\mu^H_{ij}, \mu^B_{ij}]$ мають виконуватися співвідношення:

$$\mu^B_{ji} \le 1 - \mu^H_{ij}, \quad \mu^H_{ji} \ge 1 - \mu^B_{ij}, \quad i, j \in I. \tag{3.23}$$

Етап 2. Знаходження точкових значень елементів агрегованої МПП, які апроксимують відповідні множини інтервалів індивідуальних МПП, одним із способів:

– як центр ваги інтервалів:

$$\mu^C_{ij} = \sum_{l\in L} (\mu^{B(l)}_{ij} - \mu^{H(l)}_{ij})(\mu^{B(l)}_{ij} + \mu^{H(l)}_{ij}) \Big/ 2\sum_{l\in L} (\mu^{B(l)}_{ij} - \mu^{H(l)}_{ij}), \quad i, j \in I; \tag{3.24}$$

– шляхом об'єднання інтервалів та визначення спільного центру:

$$\mu^S_{ij} = (\min_{l\in L} \mu^{H(l)}_{ij} + \max_{l\in L} \mu^{B(l)}_{ij})/2, \quad i, j \in I; \tag{3.25}$$

– як точку рівномірних розрізів:

$$\sum_{l\in L}\left(0,\min\left(\mu_{ij}^{P}-\mu_{ij}^{H(l)},\ \mu_{ij}^{B(l)}-\mu_{ij}^{H(l)}\right)\right)= \\ =\sum_{l\in L}\left(0,\min\left(\mu_{ij}^{B(l)}-\mu_{ij}^{H(l)},\mu_{ij}^{B(l)}-\mu_{ij}^{P}\right)\right),\ i,j\in I. \qquad (3.26)$$

Етап 3. Знаходження агрегованих МПП з елементами у вигляді інтервалів можна здійснювати з використанням додаткових евристик Е3.6-Е3.8.

Евристика **Е3.6.** Для визначення агрегованих елементів МПП слід здійснити знаходження мінімальних відстаней від результуючих точок до нижніх границь відповідних інтервалів на множині індивідуальних МПП:

$$\mu^{*(H)}=\min_{l\in L}\left(\mu_{ij}^{\Phi}-\mu_{ij}^{H(l)}\right),\ \mu^{*(B)}=\min_{l\in L}(\mu_{ij}^{B(l)}-\mu_{ij}^{\Phi}),\ i,j\in I;$$

де $\mu_{ij}^{\Phi}\in\left\{\mu_{ij}^{C},\mu_{ij}^{S},\mu_{ij}^{P}\right\}$, а значення $\mu_{ij}^{C},\mu_{ij}^{S},\mu_{ij}^{P}$ знайдено за формулами (3.24)-(3.26).

Евристика **Е3.7**. "Вага" верхньої границі результуючого інтервалу є удвічі більшою від "ваги" нижньої границі інтервалу:

$$2\mu_{ij}^{H}\left(\mu_{ij}^{\Phi}-\mu_{ij}^{H}\right)=\mu_{ij}^{B}\left(\mu_{ij}^{B}-\mu_{ij}^{\Phi}\right),\ i,j\in I.$$

Евристика **Е3.8.** Визначення агрегованих значень границь інтервалів здійснюється шляхом застосування співвідношення "золотого перетину" між перерізами:

$$1{,}618*\sum_{l\in L}\left(0,\min\left(\mu_{ij}^{P}-\mu_{ij}^{H(l)},\mu_{ij}^{B(l)}-\mu_{ij}^{H(l)}\right)\right)= \\ =\sum_{l\in L}\left(0,\min\left(\mu_{ij}^{B(l)}-\mu_{ij}^{H(l)},\mu_{ij}^{B(l)}-\mu_{ij}^{P}\right)\right),\ i,j\in I.$$

Використовуючи наведені співвідношення, визначаємо агреговані значення елементів МПП.

Після третього етапу розв'язання задачі необхідно елементи агрегованої МПП у вигляді інтервалів перевірити на надлишковість за формулою (3.23). Для агрегування елементів МПП, заданих трьохточково, спочатку знаходиться усереднена оцінка трьох точок за формулами (3.19)-(3.22), а потім граничні точки перевіряються на надлишковість за формулою (3.23).

Етап 4. Порівняння МПП, знайдених на перших трьох етапах, між собою. "Якість" апроксимації індивідуальних МПП виду $M^l, l\in L$, агрегованою матрицею M^* будемо визначати за критеріями:

$$\min_{t\in T}\sum_{l\in L} d\left(M^{t*},M^{l}\right),\ \text{або}\ \min_{t\in T}\max_{l\in L} d\left(M^{t*},M^{l}\right),$$

де T – множина способів агрегування МПП, наведених вище; M^{t*} – матриця, знайдена t-м способом агрегування, $t\in T$.

3.8. Структура інформації в задачах порівняння об'єктів у ординальних шкалах

На фіксованій множині n об'єктів $a_i\in A$, $i\in I$, групою k експертів з індексами $i\in I$ задано повні МПП, які будемо позначати B_{ij}^{l}, $i,j\in I$, $l\in L$.

Елементи b_{ij}^{l}, $i,j\in I$, $l\in L$, матриць B^{l}, $l\in L$, виражають результат порівняння l-м експертом об'єктів з індексами $i,j\in I$, і при розв'язанні задачі знаходження результуючого ранжування об'єктів найчастіше визначаються таким чином:

$$b_{ij}^{l}=\begin{cases}1, & \text{якщо } a_i\succ a_j,\\ 0, & \text{якщо } a_i\sim a_j \text{ або } i=j,\\ -1, & \text{якщо } a_i\prec a_j,\end{cases} \qquad (3.27)$$

$$b_{ij}^{l}+b_{ji}^{l}=0,\ \forall i,j\in I,\ i\neq j,\ l\in L,$$

де "$\succ$", "$\sim$" – символи відношень переваги та рівноцінності об'єктів, відповідно. Множина всіх можливих МПП включає множину всіх можливих ранжувань об'єктів.

Для вимірювання відстані між відношенням B, яке задано експертом, та відношенням R, яке відповідає результуючому ранжуванню об'єктів, будемо використовувати найпоширенішу в цьому класі задач метрику Хемінга

$$d(B,R)=0{,}5\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\left|b_{ij}-r_{ij}\right|,$$

де b_{ij}, r_{ij}, $i,j\in I$, – елементи матриць відповідно B та R.

Оскільки матриці відношень B та R є кососиметричними, то їх можна записати [7, 8] у вигляді векторів c та x з компонентами

$$c_t = b_{ij},\ x_t = r_{ij},$$
$$t = (i-1)n + j - (i+1)i/2,\ 1 \le i < j \le n. \tag{3.28}$$

Позначимо через $N = n(n-1)/2$ кількість елементів векторів виду (3.28), а через $H = \{1,...,N\}$ – множину індексів елементів цих векторів. Тоді відстань між відношеннями B та R запишеться у вигляді

$$d(B,R) = \sum_{t\in H} |c_t - x_t|,\ t \in H.$$

Наведені вище перетворення та позначення будуть використовуватися у наступному параграфі та у розділах 4, 5 при описанні задач ранжування.

3.9. Знаходження результуючого відношення на множині об'єктів

Розглянемо задачу знаходження результуючого відношення на множині об'єктів за відношеннями, заданими експертами. Група, що складається з k експертів, задає відношення на множині об'єктів $A = \{a_1,...,a_n\}$. Ці відношення та відповідні їм матриці позначатимемо однаковими символами $B^i, i \in L$. Для знаходження результуючого відношення B^* за відношеннями $B^i, i \in L$, заданими експертами, слід розв'язати БКЗ:

$$\rho_i d(B, B^i) \to \min_{B\in\Re},\ i \in L, \tag{3.29}$$

де $\Re$ – множина всіх можливих відношень, $\rho_i, i \in L,$ – задані нормовані коефіцієнти компетентності експертів. Задача (3.29) формалізується в класі багатокритеріальних цілочисельних моделей:

$$f_i(x) = \sum_{j\in H} f_{ij}(x_j) = \sum_{j\in H} |x_j - c_{ij}| \to \min,\ i \in L,\ x \in X^0, \tag{3.30}$$

де $c_{ij}, i \in L, j \in H,$ – елементи матриці, що складається з векторів, які відповідають перевагам експертів, $x_j \in X_j^0$, $X_j^0 = \{-1,0,1\}$, $x \in X^0$, $X^0 = \prod_{j\in H} X_j^0$.

Алгоритм розв'язання БКЗ знаходження результуючого відношення переваги на множині об'єктів описано в роботі [15]. Згідно [33], в основі розв'язування задачі (3.30) лежить метод обмежень, який полягає в тому, що потрібно знайти розв'язок параметричної задачі

$$k_0 \to \min,$$
$$f_i(x) \le f^*(k_0),\ i \in L, \tag{3.31}$$

де k_0 – параметр, $f^*(k_0) = k_0(f_i^H - f_i^0)/\rho_i$; f_i^H, f_i^0 – відповідно найбільше та оптимальне значення функції $f_i, i \in L$, що досягаються на множині X^0.

З урахуванням того, що $f_i(x) = \sum_{j\in H} |x_j - c_{ij}|$, $i \in L$, задачу (3.31) можна записати у такому вигляді:

$$k_0 \to \min, \tag{3.32}$$
$$\sum_{j\in H} |x_j - c_{ij}| \le k_0/\rho_i,\ i \in L.$$

Згідно [4], розмірність задачі (3.32) є втричі більшою за розмірність задачі (3.30). Тому для скорочення розмірності введемо позначення:

$$H_i^- = \{j : j \in H, c_{ij} = -1\},\ h_i^- = |H_i^-| < N,\ H_i^- \subset H,$$
$$H_i^0 = \{j : j \in H, c_{ij} = 0\},\ h_i^0 = |H_i^0| < N,\ H_i^0 \subset H,$$
$$H_i^+ = \{j : j \in H, c_{ij} = 1\},\ h_i^+ = |H_i^+| < N,\ H_i^+ \subset H,$$

де вираз $|\cdot|$ означає потужність множини; $H_i^- \cup H_i^0 \cup H_i^+ = H$ для $\forall i \in L$.

Здійснимо заміну змінних $x_j' = x_j + 1$, $c_{ij}' = c_{ij} + 1$, $i \in L, j \in H$, і запишемо задачу (3.32) у вигляді:

$$k_0 \to \min,$$
$$\sum_{j\in H_i^-} |x_j' - c_{ij}'| + \sum_{j\in H_i^0} |x_j' - c_{ij}'| + \sum_{j\in H_i^+} |x_j' - c_{ij}'| \le k_0/\rho_i,\ i \in L, \tag{3.33}$$
$$x_j' \in \{0,1,2\},\ c_{ij}' \in \{0,1,2\},\ i \in L, j \in H.$$

Перший та третій вирази під знаком модуля в нерівності (3.33) не змінюють знак при будь-яких значеннях $x_j', j \in H$.

Тому, згрупувавши їх почленно, задачу (3.33) можна записати таким чином:

$$k_0 \to \min,$$

$$\sum_{j\in H_i^-} x_j' + \sum_{j\in H_i^0} \left|x_j' - 1\right| - \sum_{j\in H_i^+} x_j' \le k_0 / \rho_i - 2h_i^+, \; i \in L, \tag{3.34}$$

$$x_j' \in \{0,1,2\}, \; i \in L, j \in H.$$

Далі задачу (3.34) можна заміною $x_j' - 1 = x_j'' - x_j'''$, $j \in H$, звести до задачі виду:

$$k_0 \to \min, \tag{3.35}$$

$$\sum_{j\in H_i^-} x_j' + \sum_{j\in H_i^0} \left(x_j'' - x'''\right) - \sum_{j\in H_i^+} x_j' \le k_0 / \rho_i - 2h_i^+, \; i \in L, \tag{3.36}$$

$$x_j' - x_j'' + x_j''' = 1, j \in H_i^0, x_j' \in \{0,1,2\}, x_j'' \in \{0,1\},$$
$$x_j''' \in \{0,1\}, i \in L, j \in H. \tag{3.37}$$

Розв'язання задачі (3.35)–(3.37) при мінімально можливому значенні параметра k_0 визначає розв'язок задачі (3.30). Для конкретизації алгоритму розв'язування задачі обчислимо межі зміни параметра k_0. Зважаючи на те, що розмірність простору відстаней між відношеннями дорівнює кількості заданих експертами бінарних відношень, можна записати

$$\delta_1 = \left(0, d_{12}, ..., d_{1k}\right),$$
$$\delta_2 = \left(d_{21}, 0, d_{23}, ..., d_{2k}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta_k = \left(d_{k1}, ..., d_{k,k-1}, 0\right),$$

де $d_{ij} = d\left(B^i, B^j\right), i, j \in L$ – відстані між відношеннями B^i, B^j.

Точка δ^*, яка відповідає компромісному відношенню B^*, повинна мати координати

$$\delta^* = \left(d_{*1}, d_{*2}, ..., d_{*k}\right),$$

де $d_{*i} = d(B^*, B^i), i \in L$ – відстані між відношеннями B^* та $B^i, i \in L$.

Отже, необхідно знайти мінімальне k_0, при якому система нерівностей (3.36) є сумісною. Якщо такий розв'язок єдиний, то він є шуканим. Якщо розв'язок не єдиний, то з множини таких розв'язків вибирається той, що забезпечує мінімум узагальненому критерію:

$$F = \sum_{i\in L} \rho_i \left(\left(\sum_{j\in H_i^-} x_j' + \sum_{j\in H_i^0} \left(x_j'' - x_j'''\right) - \sum_{j\in H_i^+} x_j' + 2h_i^+ + h_i^0 \right) / \right.$$
$$\left. / \left(2h_i^- + h_i^0 - \sum_{j\in H_i^-} x_j' + \sum_{j\in H_i^+} x_j' - \sum_{j\in H_i^0} \left(x_j'' - x_j'''\right) \right) \right).$$

Перевірка сумісності системи нерівностей (3.36) базується на процедурі послідовного аналізу та відсіву [32], яка складається з $|L|$ елементарних процедур відсіву по i – му критерію тих значень змінних $x_j', x_j'', x_j''', j \in H$, яких компоненти допустимого розв'язку задачі (3.36) набувати не можуть.

Для лінійних обмежень загального виду:

$$0 \le \sum_{j\in H} a_{ij} x_j \le b_i, i \in L,$$
$$b_j^H \le x_j \le b_j^B, j \in H, \tag{3.38}$$

де $x_j, j \in H$, – цілі; $b_j^H, b_j^B, j \in H$, – задані числа, правило відсіву формулюється так. Якщо $x_j, j \in H$, задовольняє нерівності

$$a_{ij} x_j > b_i - \sum_{\substack{l\ne j \\ a_{il}>0}} a_{il} b_l^H - \sum_{\substack{l\ne j \\ a_{il}<0}} a_{il} b_l^B,$$

хоча б для одного $i, i \in L$, то j – та компонента допустимого розв'язку задачі (3.38) не може набувати значення, що дорівнює $x_j, j \in H$.

Згідно цього правила процедура перевірки сумісності системи нерівностей (3.36) полягає у виконанні $|L|$ елементарних процедур відсіву по i-му критерію елементів $x_j', x_j'', x_j''', j \in H$, які не задовольняють нерівностям:

$$x_j' \le k_0 / \rho_i + h_i^0, j \in H_i^-,$$
$$x_j' \le k_0 / \rho_i + h_i^0 - 2, j \in H_i^+,$$
$$x_j'' \le k_0 / \rho_i + h_i^0, j \in H_i^0,$$
$$x_j''' \le k_0 / \rho_i + h_i^0 - 1, j \in H_i^0, i \in L. \tag{3.39}$$

Шукане значення k_0 можна знайти, наприклад, методом дихотомії, перевіряючи при цьому на кожному кроці s задання параметра k_0^S сумісність системи нерівностей (3.39). Після застосування процедури відсіву на s-му кроці алгоритму можливі три випадки:

– $X\left(k_0^S\right)=\varnothing$ (множина $X\left(k_0^S\right)$ складається з тих елементів множини X^0, що не відсіялись) – це означає, що система нерівностей (3.36) для заданого параметра k_0^S несумісна і необхідно збільшувати значення параметра k_0 ($k_0^{S+1} > k_0^S$);

– $X\left(k_0^S\right)\neq\varnothing$ і є досить великою – у цьому випадку необхідно здійснити процедуру відсіву з меншим значенням параметра k_0 ($k_0^{S+1} < k_0^S$);

– $X\left(k_0^S\right)\neq\varnothing$ і є досить малою. Тоді ця множина досліджується на існування в ній такого розв'язку $x^* \in X\left(k_0^S\right)$, при якому функціонал F досягає мінімуму.

Якщо такий розв'язок єдиний і задовольняє нерівностям

$$f_i\left(x^*\right)\leq f_i^*\left(k_0^S\right), i\in L, \tag{3.40}$$

то він і є шуканим. Якщо умова (3.40) для x^* не виконується, то застосовується процедура, яка полягає у відсіві елементів $x_j', x_j'', x_j''', j\in H$, початкових множин, що не дозволяють побудувати розв'язки, які задовольняли б умовам

$$f_i\left(x^*\right)\leq f_i^*\left(k_0^S\right), i\in L.$$

Після k – кратного застосування процедури будується множина $X'\left(x^*\right)$. Таким чином, знаходиться розв'язок $x'^* \in X'\left(x^*\right)$, який мінімізує критерій F. Він і є шуканим згідно критерію оптимальності, наведеного в [32].

3.10. Приклади застосування процедур побудови матриць парних порівнянь

3.10.1. *Приклад застосування процедури локалізації* МПП *за інтервалами вагових коефіцієнтів, наведеної у п.* 3.3

Нехай задано початковий ГВК у тривимірному просторі:

$$\rho_1\in[0.2,0.4],\ \ \rho_2\in[0.3,0.6],\ \ \rho_3\in[0.4,0.5].$$

Обчислимо значення границь зміни елементів МПП:

$$\mu_{12}^0\in[0.333,1.333],\ \ \mu_{13}^0\in[0.4,1.0],\ \ \mu_{23}^0\in[0.6,1.5].$$

Нехай розглядається площина, утворена осями $O\rho_1, O\rho_2$, і експерт задає значення елемента $\mu_{12}^*=1.2$. Таким чином він фіксує відношення величин $\rho_1^H/\rho_2^B=\rho_1^B/\rho_2^H$ на рівні 1.2, тобто $\mu_{12}^*=\rho_1^H/\rho_2^B=$ $=\rho_1^B/\rho_2^H=1,2$. Це відповідає випадку г) рис. 3.2 і зумовлює уточнення інтервалів зміни коефіцієнтів ρ_1 та ρ_2 (ρ_2^H та ρ_1^B залишаються незмінними): $\rho_1\in[0.36,0.4]$, $\rho_2\in[0.3,0.333]$, а отже і пов'язаних з ними елементів матриці M :

$$\mu_{12}^1\in[1.08,1.333],\ \ \mu_{13}^1\in[0.72,1.0],\ \ \mu_{23}^1\in[0.6,0.83].$$

Як бачимо, хоч експерт і вказав фіксоване значення елемента $\mu_{12}^*=1.2$, він таким чином лише зафіксував рівень відношення компонент ρ_1, ρ_2 ГВК, але не їх значення, тобто не перетворив ГВК у фіксоване значення ρ вагових коефіцієнтів. Якщо експерт знову повторить бажане значення $\mu_{12}^*=1.2$, то ГВК не зміниться. Тому переходимо до іншої площини, наприклад, до площини, утвореної осями $O\rho_1, O\rho_3$.

Експерту пропонується вказати бажане значення μ_{13}^* з інтервалу $[0.72,1.0]$. Нехай він вибрав $\mu_{13}^*=0.8$. Це відповідає випадку А рисунка 3.3. А задане експертом значення потрапляє на межу випадків а), б) рис. 3.2. При цьому значення ρ_1^B та ρ_1^H залишаються без зміни і, таким чином, повторно обчислені границі зміни компонент ρ_1, ρ_3 ГВК мають такі значення $\rho_1\in[0.36,0.4]$, $\rho_3\in[0.45,0.5]$.

Знову обчислимо інтервали зміни елементів матриці М:

$$\mu_{12}^2\in[1.08,1.333],\ \ \mu_{13}^2\in[0.72,0.89],\ \ \mu_{23}^2\in[0.6,0.74].$$

Переходимо до площини, утвореної осями $O\rho_2, O\rho_3$.

Експерт вказує бажане значення μ_{23}^* з інтервалу $[0.6,0.74]$: $\mu_{23}^*=0.7$. Це відповідає випадку 2) рисунка 3.2: значення ρ_2^B та ρ_3^H залишаються незмінними, $\rho_3^B=\rho_2^B/\mu_{23}^*$, $\rho_2^H=\rho_3^H\mu_{23}^*$. Тобто

$$\rho_2\in[0.315,0.333],\ \ \rho_3\in[0.45,0.47].$$

Обчислимо нові значення границь інтервалів зміни елементів МПП:

$$\mu_{12}^3 \in [1.08, 1.27],\ \mu_{13}^3 \in [0.77, 0.89],\ \mu_{23}^3 \in [0.67, 0.74].$$

Застосуємо значення $\mu_{12}^* = 1.2$, вказане експертом у першому турі, до нового ГВК. Це відповідає випадку в) рис. 3.2: при цьому ρ_2^B та ρ_2^H залишаються незмінними, $\rho_1^H = \rho_2^H / \mu_{12}^*$, $\rho_1^B = \rho_2^B \mu_{12}^*$. Отримаємо нові інтервали зміни вагових коефіцієнтів $\rho_1 \in [0.38, 0.4]$, $\rho_2 \in [0.315, 0.333]$, $\rho_3 \in [0.45, 0.47]$.

Будемо вважати, що новий ГВК є достатньо малим, щоб вибрати з нього середній вектор для остаточного визначення елементів матриці M: нехай цей вектор складається з таких елементів $\rho_1 = 0.39$, $\rho_2 = 0.32$, $\rho_3 = 0.46$.

Але визначений таким чином вектор не відповідає умові нормованості. Причина цього – у наявності надлишкових значень у початковому ГВК і задання експертом рівня μ_{12}^* саме серед надлишкових значень. Тобто, наведеним вище алгоритмом проілюстровано важ-ливість урахування наявності надлишкових значень ГВК.

Тому для зведення ГВК $\Gamma^{(0)}$ до ГВК без надлишкових значень обчислимо значення величин нев'язок $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = 0$, $\Delta_1 = 0.1$, $\Delta_2 = 0.2$, $\Delta_3 = 0$.

Таким чином отримаємо ГВК $\Gamma^{(1)}$ без надлишкових значень

$$\Gamma^{(1)}\left(\Gamma^{(0)}\right) = [0.2, 0.3] \times [0.3, 0.4] \times [0.4, 0.5].$$

Визначимо допустимі границі зміни елементів МПП у цьому випадку

$$\mu_{12}^0 \in [0.5, 1.0],\ \mu_{13}^0 \in [0.4, 0.75],\ \mu_{23}^0 \in [0.6, 1.0].$$

Як бачимо, рівня $\mu_{12}^* = 1.2$ у новій структурі переваг не існує. Нехай експерт вибирає рівень $\mu_{12}^* = 0.8$. Тоді реалізується випадок г) рис. 3.2, тобто ρ_1^B та ρ_2^H не змінюються, а інші границі визначаються таким чином $\rho_1^H = \rho_2^H / \mu_{12}^*$, $\rho_2^B = \rho_1^B / \mu_{12}^*$. Тобто, маємо: $\rho_1 \in [0.24, 0.3]$, $\rho_2 \in [0.3, 0.375]$, $\rho_3 \in [0.4, 0.5]$. Тому

$$\mu_{12}^1 \in [0.64, 1.0],\ \mu_{13}^1 \in [0.48, 0.75],\ \mu_{23}^1 \in [0.6, 0.94].$$

Далі, нехай у площині, утвореної осями $O\rho_1, O\rho_3$, експерт задає $\mu_{13}^* = 0.7$.

Тоді реалізується випадок г) рис. 3.2, тобто ρ_1^B та ρ_3^H не змінюються, а інші границі визначаються за формулами $\rho_1^H = \rho_3^H \mu_{13}^*$, $\rho_3^B = \rho_1^B / \mu_{13}^*$. Таким чином, маємо нові значення: $\rho_1 \in [0.28, 0.3]$, $\rho_2 \in [0.3, 0.375]$, $\rho_3 \in [0.4, 0.43]$. Звідки $\mu_{12}^2 \in [0.75, 1.0]$, $\mu_{13}^2 \in [0.65, 0.75]$, $\mu_{23}^2 \in [0.7, 0.94]$.

Переходимо до площини, утвореної осями $O\rho_1, O\rho_3$. Нехай $\mu_{23}^* = 0.8$.

Маємо випадок в) рис. 3.2, тобто ρ_3^B та ρ_3^H залишаються без зміни, а інші границі обчислюються як $\rho_2^H = \rho_3^H \mu_{23}^*$, $\rho_2^B = \rho_3^B \mu_{23}^*$. Таким чином, маємо $\rho_1 \in [0.28, 0.3]$, $\rho_2 \in [0.32, 0.34]$, $\rho_3 \in [0.4, 0.43]$, тобто $\mu_{12}^3 \in [0.82, 0.94]$, $\mu_{13}^3 \in [0.65, 0.75]$, $\mu_{23}^3 \in [0.74, 0.85]$.

Припустимо, що експерт задав $\mu_{12}^* = 0.82$.

У цьому випадку не відбувається уточнення границь ГВК (неспівпадання значень елемента μ_{12}^*, заданих експертом й обчисленого, відбувається за рахунок точності обчислень). Тобто, маємо матрицю

$$\rho_1 = 0.28,\ \rho_2 = 0.34,\ \mu_{13}^4 \in [0.65, 0.7],\ \mu_{23}^4 \in [0.79, 0.85].$$

$$\mu_{13}^* = 0.7,\ \rho_1 = 0.28,\ \rho_2 = 0.4,\ \mu_{23}^* = 0.85.$$

Таким чином, у результаті наведених обчислень отримали

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0.82 & 0.7 \\ 1.22 & 1 & 0.85 \\ 1.43 & 1.18 & 1 \end{bmatrix}.$$

У просторі МПП точка M належить гіперпаралелепіпеду $\Gamma^{(2)}$. До того ж, вона побудована за експертними даними шляхом поступового урахування переваг експерта.

3.10.2. *Дослідження мір схожості, введених у п. 3.4*

Визначення адекватності використання формального способу знаходження міри схожості вподобань експертів є складною задачею. В [14] описано результати обчислювального експерименту, який полягав у визначенні лінійного коефіцієнта кореляції значень введених у п. 3.4 мір схожості за формулою

$$\mu_{ij} = (\mu_i - \mu_i^C)(\mu_j - \mu_j^C) / \left(\sum_{i=1}^{3} (\mu_i - \mu_i^C)^2 \sum_{j=1}^{3} (\mu_j - \mu_j^C)^2 \right)^{1/2}, i, j \in \{1,2,3\},$$

де μ_i^C – середнє арифметичне значень $\mu_i, i = 1,2,3$.

Значення мір схожості μ_1, μ_2, μ_3 обчислювалося для усіх можливих комбінацій значень величин $|A|$, $|A^1|$, $|A^2|$, $|A^1 \cup A^2|$, $|A^1 \cap A^2|$, які вибиралися з інтервалу $[10,1000]$.

За результатами обчислювального експерименту можна стверджувати про еквівалентність мір μ_1 та μ_3 (табл. 3.2).

Таблиця 3.2. **Матриця коефіцієнтів кореляції мір схожості μ_1, μ_2, μ_3**

	μ_1	μ_2	μ_3
μ_1	1	0.80	0.94
μ_2	0.80	1	0.75
μ_3	0.94	0.75	1

3.10.3. *Приклад застосування мір схожості експертних розподілів об'єктів за належністю до кластерів, введених у п.* 3.5

У роботі [9] наведено приклад застосування мір схожості, описаних у п. 3.5. Нехай п'ять експертів розв'язують задачу розподілення об'єктів по трьох кластерах, які позначено номерами I, II, III і наведено в табл. 3.3.

Таблиця 3.3. **Експертні розподілення об'єктів за кластерами**

Індекси експертів	Номери кластерів		
	I	II	III
1	1 3 7	2 5 6 8	4 9
2	1 2 3 7	5 6 8 9	4
3	1 3 5 7 8	2 4 6 9	-
4	2 3 4 5	1 6 8	7 9
5	2 3 5 7 8	1 4	6 9

У клітинках таблиці записано індекси об'єктів, які кожен з експертів відніс до відповідного кластера. Порядок слідування індексів об'єктів при віднесенні його експертом до конкретного кластера є несуттєвим і свідчить лише про факт віднесення, а не про важливість його при віднесенні до цього кластера. Прочерк означає, що експерт з індексом 3 не відніс до третього кластеру жодного об'єкта.

У результаті обчислення мір схожості, заданих формулами (3.9)–(3.12), одержимо табл. 3.4.

Таблиця 3.4. **Значення мір схожості для заданих експертних розподілів об'єктів за кластерами**

Елемент МПП	Номер міри схожості			
	1	2	3	4
μ_{12}	0,669	0,583	0,617	0,778
μ_{13}	0,417	0,367	0,311	0,556
μ_{14}	0,397	0,333	0,3	0,444
μ_{15}	0,278	0,217	0,222	0,333
μ_{23}	0,389	0,367	0,278	0,556
μ_{24}	0,357	0,333	0,244	0,444
μ_{25}	0,333	0,283	0,222	0,333
μ_{34}	0,243	0,217	0,151	0,333
μ_{35}	0,378	0,350	0,289	0,556
μ_{45}	0,522	0,478	0,361	0,556

3.10.4. *Аналіз результатів обчислювального експерименту для процедур агрегування* МПП, *наведених у п.* 3.7

Для виявлення ефективності запропонованих у параграфі 3.7 процедур знаходження елементів агрегованої МПП, зокрема у вигляді інтервальних значень, було проведено обчислювальний експеримент, результати якого наводяться у роботі [10].

Обчислювальний експеримент проводився за схемою:

Крок 1. Генерування випадковим чином індивідуальних інтервальних МПП розмірністю 5 та 6, а також перевірка їх на надлишковість за введеними у п. 3.7 формулами.

Крок 2. Знаходження елементів МПП, визначених різними способами агрегування.

Крок 3. Знаходження інтервальних елементів агрегованих МПП з урахуванням різних евристик.

Крок 4. Порівняння знайдених агрегованих МПП між собою за "якістю" агрегування індивідуальних МПП за введеними критеріями. Відстані між МПП знаходились за метриками Хемінга, Евкліда та домінування. Відповідні апроксимуючі точки знаходилися шляхом застосування процедур усереднення.

Індивідуальні МПП кількістю від 5 до 10 з числом об'єктів порівняння від 5 до 10 генерувалися випадковим чином і оброблялися за наведеною схемою. Для точково заданих МПП результат їх порівняння свідчать, що найкращим чином агрегують початкові МПП матриці, елементи яких знаходилися як середні квадратичні відповідних елементів індивідуальних МПП (майже у всіх випадках із 1000).

Результати експерименту для 1000 випадків генерування інтервальних МПП наводяться в таблиці 3.5. У таблиці вказано число випадків (із 1000), коли результуюча МПП найкращим чином агрегує початкові МПП за відповідним критерієм.

Таблиця 3.5. **Порівняльна характеристика агрегованих різними процедурами МПП**

Тип точки агрегування МПП	Тип евристики	Метрики		
		$\min\sum_{k\in I} d(M^*,M^k)$	$\min\max_{k\in I} d(M^*,M^k)$	$\min\sum_{k\in I} d^2(M^*,M^k)$
Центр ваги	Подвійна перевага	41	108	24
	Min плеча до границь	348	245	262
	Золотий переріз	0	13	0
Центр об'єд. інтервалів	Подвійна перевага	0	0	0
	Min плеча до границь	0	0	0
	Золотий переріз	0	0	0
Центр рівн. розрізів	Подвійна перевага	371	121	0
	Min плеча до границь	225	193	10
	Золотий переріз	0	15	0
Інтервал як maxmin границь		0	72	0
Інтервал як центри ваги границь		15	233	704

Розглядалися адитивні МПП як найбільш розповсюджений вид метризованих МПП. Але наведену схему агрегування елементів результуючих МПП можна розповсюдити на будь-який інший спосіб задання метризованих матриць, які легко зводяться один до другого.

Результати експерименту показали, що розподілення кращих процедур за різними критеріями оцінки їх "якості" відбувається по-різному. За критерієм лінійної згортки "найкращий" результат досягнуто на МПП з елементами, знайденими у метриках Хемінга та Евкліда. "Лідером" серед евристик виявилися евристика у метриці Хемінга та у метриці Евкліда. Причому тенденції збереглись по усіх точках апроксимації відповідних МПП.

За критерієм мінімаксу "найкращий" результат досягається на МПП з елементами, агрегованими з використанням евристики Е3.5. Описані тенденції також збереглися для усіх типів точок апроксимації відповідних МПП.

Враховуючи значну "розпорошеність" результатів, необхідно зазначити, що доцільність використання певних типів агрегування точкових елементів МПП і відповідних евристик для знаходьження інтервальних елементів МПП залежить передусім від критеріїв оцінки "якості" процедур агрегування.

Література до розділу 3

1. Бевз С.Н. Непротиворечивая метризация качественных признаков // Автоматика. – 1989. – № 3. – С. 17–23.

2. Белкин А.Р., Левин М.Ш. Принятие решений: комбинаторные модела аппроксимации информации. – М.: Наука, 1990. – 160 с.

3. Борисов А.Н., Вильюмс Э.Р., Сукур Л.Я. Диалоговые системы принятия решений на базе мини-ЭВМ: информационное, математическое и программное обеспечение. – Рига, 1986. – 195 с.

4. Вагнер Г. Основы исследования операций (в 3-х томах). Т. 2. – М.: Мир, 1973. – 488 с.

5. Волошин О.Ф., Гнатієнко Г.М. Проблеми узгодженості експертної інформації в задачах прийняття рішень// Знание-Диалог-Решение, KDS-97: Збірник наукових праць Міжн. конф. – Ялта, 1997. – Т. 2. – С. 332–335.

6. Гильбурд М.М. Об эвристических методах построения медианы в задачах группового выбора // Автоматика и телемеханика. – 1988. – № 7. – С. 131–136.

7. Гнатієнко Г.М. Алгоритми обробки експертної інформації в задачах ранжування та їх застосування. Дис… канд. техн. наук. – К., 1994. – 133 с.

8. Гнатієнко Г.М. Алгоритми обробки експертної інформації в задачах ранжування та їх застосування. Автореф. дис… канд. техн. наук. – 05.13.16. – К., 1994. – 16 с.

9. Гнатієнко Г.М. Визначення міри схожості експертних розподілів об'єктів за належністю до кластерів // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2001. – № 3. – С. 220–223.

10. Гнатієнко Г.М., Дробот О.В. Застосування процедур агрегування адитивних матриць парних порівнянь // Збірник наукових праць Кіровоградського національного технічного університету / техніка в сільськогосподарському виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація / – Вип. 16. – Кіровоград: КНТУ, 2005. – С. 276–280.

11. Гнатієнко Г.М., Дробот О.В., Санько-Новік М.А. Процедури агрегування матриць парних порівнянь // Теорія прийняття рішень: Праці міжнародної школи-семінару. – Ужгород: УжНу, 2002. – С. 27.

12. Гнатиенко Г.Н. Задание предпочтений на множестве критериальных функций в задачах многокритериальной оптимизации // Вестн. Киев. ун-та. Моделирование и оптимизация слож. систем. – 1990. – Вып. 9. – С. 87–92.

13. *Гнатієнко Г.М., Єпик Н.Б.* Побудова матриці парних порівнянь з використанням експертизи методу шкаліруючих констант // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – Київ. – 1999. – Вип. 4. – С. 116–119.

14. *Гнатієнко Г.М., Єпик Н.Б.* Про визначення міри схожості вподобань експертів // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – Київ. – 1997. – № 3. – С. 159–165.

15. *Гнатієнко Г.М., Єпик Н.Б.* Розв'язання задачі знаходження результуючого відношення переваги // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – Київ. –1997. – № 2. – С. 161–166.

16. *Гнатієнко Г.М.* Класифікація задач однієї моделі аналізу даних // Київ. ун-т. – Київ,1992. – 89 с. –Укр. – Деп. в УкрНДІНТІ 18.06.92, № 911. –Ук92.

17. *Гнатиенко Г.Н., Косматый Д.Ю.* Обобщение метода стабилизации предпочтений на случай неполных метризованных матриц парных сравнений // Киев. ун-т. – Киев. – 1992. – 22 с. – Рус. – Деп. в УкрНИИНТИ 8.06.1992, № 847. –Ук92.

18. *Гнатиенко Г.Н., Микулич А.Ю.* Методы метризации качественных ранжировок объектов // Киев. ун-т. – Киев, 1993. –10 с. – Рус. – Деп. в УкрНИИНТИ 10.03.93, № 432. –Ук93.

19. *Гнатієнко Г.М., Присяжнюк О.В.* Процедура визначення міри схожості структури переваг експертів за вибраними ними підмножинами об'єктів// Теорія прийняття рішень: Праці III-ї міжнародної школи-семінару. – Ужгород: УжНу, 2006. – С. 38-39.

20. *Гнатієнко Г.М.* Процедура локалізації матриці парних порівнянь об'єктів // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – Київ. – 2002. – № 3. – С. 189–192.

21. *Гнатиенко Г.Н.* Способы представления матриц отношений между парами объектов и превращения между ними // Knowledge-Dialogue-Solution: Proceedings of the XII-th International Conference (June 20-25, 2006). – Varna (Bulgaria). – Sofia, FOI-COMMERCE – 2006. – Pp. 229-235.

22. Дэвид Г. Метод парных сравнений. – М.: Статистика, 1978. – 144 с.

23. Загоруйко Н.Г. Прикладные методы анализа данных и знаний. – Новосибирск: Издательство института математики, 1999. – 270 с.

24. *Кемени Дж.Г., Снелл Дж.Л.* Кибернетическое моделирование. – М.: Советское радио, 1972. – 192 с.

25. *Кендэл М.Дж.* Ранговые корреляции. – М.: Статистика, 1975. – 214 с.

26. *Кини Р.Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь. – 1981. – 560 с.

27. *Ларичев О.И., Мошкович Ш.М.* О возможностях получения от человека непротиворечивых оценок многомерных альтернатив / Дескриптивный подход к изучению процессов принятия решений при многих критериях // Сб. трудов ВНИИСИ. – 1980. – № 9. – С. 58–66.

28. *Литвак Б.Г.* Экспертная информация: Методы получения и анализа. – М.: Радио и связь, 1982. – 184 с.

29. *Макаров И.М., Виноградская Т.М., Рубчинский А.А. и др.* Теория выбора и принятия решений: Учебное пособие. – М.: Наука, 1982. – 328 с.

30. *Миркин Б.Г.* Анализ качественных признаков и структур. – М.: Статистика, 1980. – 319 с.

31. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. – М.: Наука, 1974. – 256 с.

32. *Михалевич В.С., Волкович В.Л., Волошин А.Ф.* Метод последовательного анализа в задачах линейного программирования большого размера // Кибернетика. – 1981. – № 4. – С. 114–120.

33. *Михалевич В.С., Волкович В.Л.* Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. – М.: Наука, 1982. – 286 с.

34. *Нариньяни А.С.* Неточность как НЕ-фактор. Попытка до-формального анализа: Препр. / РосНИИ ИИ. – Москва-Новосибирск, 1994. – 34 с.

35. *Овезгельдиев А.О., Петров К.Э.* Адаптивная математическая модель многофакторного оценивания // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 3. – С. 90–97.

36. *Паниотто В.И.* Качество социологической информации. Методы оценки и процедуры обеспечения. – К.: Наук. думка, 1986. – 207 с.

37. *Паниотто В.И., Максименко В.С.* Количественные методы в социологических исследованиях. – К.: Наук. думка, 1982. – 272 с.

38. *Панкова Л.А., Петровский А.М., Шнейдерман М.В.* Организация экспертизы и анализ экспертной информации – М.: Наука, 1984. – 120 с.

39. Разработка математического и программного обеспечения для задач принятия решений на основе экспертной информации в условиях локальной сети ЕС-СМ-ПЭВМ со стороны СМ ЭВМ / А.Ф.Волошин, Г.Н. Гнатиенко и др. – К., 1989. – 86 с.

40. *Хованов Н.В.* Математические основы теории шкал измерения качества. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. – 185 с.

41. *Хованов Н.В.* Стохастические модели теории квалиметрических шкал: Учебное пособие. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. – 80 с.

42. *Чеботарев П.Ю.* Обобщение метода строчных сумм для неполных парных сравнений // Автоматика и телемеханика, 1989. – № 8. – С. 125–137.

43. *Юшманов С.В.* Метод нахождения весов, не требующий полной матрицы парных сравнений // Автоматика и телемеханика. – 1990. – № 2. – С. 187–189.

44. *Larichev O., Boichenko V., Moshkovich H., Sheptalova L.* Modolling multiattribute information processing strategies a binary decision task / Org. Behav. and human perf. – V. 26. – 1980 – Pp. 278–291.

Розділ 4 Методи і алгоритми строгого ранжування об'єктів

Ранжування - це спосіб оцінки об'єктів у порядковій шкалі, коли кожному з них приписується місце в послідовності об'єктів. Задача упорядкування множини об`єктів за ступенем прояву деяких властивостей є однією з найпоширеніших ЗЕО [16, 33, 38, 39, 43]. Строгим ранжуванням об'єктів називають таке їх упорядкування, при якому ступінь прояву деяких властивостей у різних об'єктів не може бути однаковим.

Серед ЗЕО проблема упорядкування об`єктів виділяється великою кількістю конкретних застосувань та безсумнівною актуальністю теми. Ця проблема традиційно знаходиться в центрі уваги дослідників і кількість робіт, присвячених питанням побудови оптимальних у тому чи іншому розумінні ранжувань об`єктів, постійно зростає.

4.1. Задачі колективного ранжування об'єктів та їх формалізація

Проблемі створення ефективних алгоритмів розв'язання задач великої розмірності, коли методи прямого перебору варіантів стають неефективними, присвячено багато робіт. Для підвищення об'єктивності ранжування об'єктів ця процедура здійснюється групою експертів або різними методами і в цьому випадку виникає задача узгодження суджень експертів чи знаходження колективного ранжування об'єктів. До складу експертної групи часто входять спеціалісти різних напрямків, що забезпечує можливість різнобічного аналізу об'єктів. Колективне судження експертів вважається більш обгрунтованим, ніж індивідуальне [22]. Міркін Б.Г. розглядає проблему групового (колективного) вибору [33] як проблему аналізу та агрегування інформації про переваги експертів. Детально проблеми та методи групового вибору розглянуто Е. Муленом у монографії [38], де наведено класифікацію алгоритмів та процедур, які широко використовуються у світовій практиці експертного оцінювання. Задачі колективного ранжування об'єктів досліджувалися також у роботах [4, 8, 9, 17, 19]. Задача знаходження результуючого ранжування об'єктів за індивідуальними ранжуваннями, заданими експертами, є однією з найпоширеніших задач лінійного упорядкування об'єктів [26, 27].

Нехай k експертів з множиною індексів $l \in L = \{1,...,k\}$ задають свої переваги на множині об'єктів A у вигляді строгих ранжувань $R^l, l \in L$.. Індивідуальні переваги кожного експерта на множині об'єктів можна представити у вигляді матриці

$$B^l = \left(b_{ij}^l\right),\ i,j \in I,\ l \in L, \tag{4.1}$$

де $b_{ij}^l = 1,\ i,j \in I,\ l \in L,$ тоді і тільки тоді, коли на думку l-го експерта i-й об'єкт переважає j-й об'єкт. Якщо l-й експерт вважає, що $a_i \prec a_j$, то $b_{ij}^l = -1,\ i,j \in I,\ l \in L.$ До того ж, $b_{ij}^l + b_{ji}^l = 1,\ \ i \neq j,\ \ b_{ii}^l = 0,\ \ i,j \in I,\ l \in L.$ Для задання матриці $B^l, l \in L,$ експертові необхідно порівняти кожний об'єкт з кожним, тобто здійснити $n(n-1)/2$ порівнянь на множині об'єктів A.

На множині ранжувань або відповідних їм МПП вводяться поняття міри їх близькості. Для вимірювання відстаней між ранжуваннями застосовуються різні метрики [27, 33, 39, 43]. Для визначення відстані між ранжуваннями об'єктів використовують

– метрику неспівпадання рангів об'єктів у індивідуальних ранжуваннях

$$d\left(R^j, R^l\right) = \sum_{i \in I} \left| r_i^j - r_i^l \right|, \tag{4.2}$$

де r_i^l ранг i-го об'єкта у ранжуванні l-го експерта, $R^l, l \in L$, $1 \le r_i^l \le n$,

– метрику Хемінга

$$d\left(B^j, B^l\right) = 0{,}5 \sum_{i \in I} \sum_{t \in I} \left| b_{it}^j - b_{it}^l \right|, \tag{4.3}$$

– метрики

$$\begin{aligned} d^E\left(R^j, R^l\right) &= d^2\left(R^j, R^l\right), \\ d^E\left(B^j, B^l\right) &= d^2\left(B^j, B^l\right), \end{aligned} \tag{4.4}$$

у яких значення $d\left(R^j, R^l\right)$ та $d\left(B^j, B^l\right)$ визначено за формулами (4.2), (4.3).

Задача полягає у визначенні результуючого (колективного, групового, компромісного, інтегрального, інтергованого, агрегованого, узгодженого тощо [5, 27, 38, 39]) ранжування, яке відносно деякого критерію є "найближчим" до усіх індивідуальних ранжувань, заданих k експертами. Це ранжування має бути також оптимальним за Парето і задовольняти аксіомі одностайності [38]. Найпоширенішими є кілька задач знаходження результуючого ранжування об'єктів.

Задача знаходження порядку на множині об'єктів є складною комбінаторною задачею, NP – повною у сильному смислі [26, 32]. Тому для побудови результуючого ранжування R^* застосовуються алгоритми локальної оптимізації, евристичні алгоритми або алгоритми, що базуються на методі гілок та границь. До цього класу задач застосовувалися також методи

ПАВ [1-4, 8-15, 18, 19, 21, 44-46].

Найпоширенішим методом знаходження результуючого ранжування об'єктів вважається обчислення медіани заданих ранжувань у вигляді:

$$R^{KC} \in Arg \min_{R \in \Omega} \sum_{l \in L} d\left(R, B^l\right), \tag{4.5}$$

де $d\left(R, B^l\right), l \in L$, – "відстань" між ранжуваннями об'єктів $R \in \Re$ та $B^l, l \in L$, $\Re$ – множина всіх можливих строгих ранжувань об'єктів. Відстань між ранжуваннями задається формулами виду (4.2)–(4.4).

Для класу ранжувань задачу (4.5), в якій використовується метрика Хемінга, вперше сформульовано Кемені та Снеллом в роботі [24]. Розв'язок задачі (4.5) для зазначеної метрики одержав назву медіани Кемені–Снелла. При використанні адитивного (утилітарного [38]) критерію виникає задача визначення медіани Кука–Сейфорда для строгих ранжувань. Специфіка задачі знаходження строгого компромісного ранжування полягає в тому, що елементи вектора розв'язку, який відповідає ранжуванню об'єктів, мають бути попарно неспівпадаючими натуральними числами в інтервалі від 1 до n. Тобто мають виконуватися умови $r_i \ne r_j$, $\forall i \ne j$, $i, j \in I$.

Якщо впорядкувати набори експертних ранжувань $R^l, l \in L$, в порядку зростання номерів об'єктів, то кожне індивідуальне ранжування можна представити відповідним вектором рангів $R^l = (r_1^l, \ldots, r_n^l), l \in L$.

Не зважаючи на те, що серед задач знаходження результуючого ранжування найбільш поширеною є задача знаходження медіани Кемені-Снелла, її не завжди можна вважати найприйнятнішим розв`язком, оскільки це ранжування нівелює думки експертів, згладжує позиції експертів-"дисидентів", на які, згідно [33], слід звернути увагу в першу чергу. Для вибору ранжування, яке б більшою мірою враховувало думки усіх членів експертної групи, доцільно ввести егалітарний [34, 38] критерій

$$R^{B\Gamma} \in Arg \min_{R \in \Omega} \max_{l \in L} d\left(R, B^l\right). \tag{4.6}$$

Для метрики Хемінга цей критерій одержав назву $B\Gamma$-

медіани [46], а для метрики неспівпадання рангів об'єктів – ГВ-медіана [19]. Розв'язок задачі (4.5) є ефективним (оптимальним за Парето і таким, що задовольняє аксіомі одностайності [38]). Для коректності ВГ-медіани або ГВ-медіани вигляду (4.6) має виконуватися така умова: якщо ранг i-го об'єкта в ранжуванні кожного експерта не нижчий за ранг j-го об'єкта, то і в колективному ранжуванні $R^{ВГ}$ співвідношення рангів має зберігатися.

В узагальненій постановці задаються або визначаються $\rho_l, l \in L$, нормовані коефіцієнти компетентності експертів $\sum_{l \in L} \rho_l = 1,\ \rho_l > 0, l \in L$. Тоді слід записати

$$R^{КС} \in Arg \min_{R \in \Omega} \sum_{l \in L} \rho_l d\left(R, B^l\right), \tag{4.7}$$

або

$$R^{ВГ} \in Arg \min_{R \in \Omega} \max_{l \in L} \rho_l d\left(R, B^l\right). \tag{4.8}$$

У цій монографії до розв'язання задач (4.7) та (4.8) пропонується застосувати ідеї ПАВ [30], що знайшов успішне застосування в різноманітних класах задач [7, 31, 36, 37].

В [26] наводиться також алгоритм знаходження результуючого середнього ранжування у вигляді

$$R^{E} \in Arg \min_{R \in \Omega} \sum_{l \in L} \rho_l d^2\left(R, B^l\right).$$

Для розв'язання задач (4.7) та (4.8) можна використати два підходи, які породжують чотири напрямки розробки алгоритмів.

При *першому підході* ранжування $R^{КС}$ та $R^{ВГ}$ шукаються на множині всіх МПП множини n об'єктів. При цьому, в свою чергу, можливі два напрямки.

Один з напрямків – відсіювати безперспективні варіанти за критерієм циклічності в процесі побудови розв'язку.

Другий напрямок розв'язку задач (4.7) та (4.8) – шукати розв'язок без аналізу його на циклічність і лише після його знаходження перевіряти належність розв'язку задачі до класу ранжувань. Коли розв'язок не є ациклічним, він виключається з подальшого розгляду, але параметри алгоритму ПАВ, визначені при знаходженні цього розв'язку, стають опорними для подальшого знаходження компромісного ранжування. Тобто колективне ранжування шукається на наступному етапі вже в околі опорного розв'язку, який виявився не ациклічним і не відповідає ранжуванню.

При *другому підході* колективне ранжування $R^{КС}$ або $R^{ВГ}$ шукається у просторі ранжувань n об'єктів. У цьому випадку також виникає два напрямки.

При реалізації *першого напрямку* можна застосовувати ПАВ у "класичному" вигляді, за алгоритмами, описаними в [30]. Після одержання розв'язку задачі (4.7) чи (4.8) здійснюється перевірка його належності до класу ранжувань об'єктів. Якщо одержаний розв'язок не є ранжуванням, слід вважати його опорним та послабити обмеження задачі. Розв'язок задачі, який задовольняє умові (4.7) чи (4.8), слід шукати в околі опорного розв'язку.

Іншим напрямком побудови послідовних алгоритмів при другому підході до знаходження ранжування $R^{КС}$ або $R^{ВГ}$ є використання процедур ПАВ.

Через те, що задачі (4.7) та (4.8) мають специфіку (зокрема, необхідність виконання обмеження щодо попарного неспівпадання елементів розв'язку задачі), не всі кроки процедури ПАВ W_2 описаної в [30] є допустимими і виникає необхідність його модифікації. На кожному кроці процедури W_2 [30] перевіряється структура області допустимих розв'язків, а також здійснюється додатковий відсів варіантів розв'язку відповідно до вимоги належності розв'язку задачі (4.7) та (4.8) до класу ранжувань. При цьому слід також зауважити, що задачі (4.7) та (4.8) не є дискретними сепарабельними задачами, оскільки існує вимога попарного неспівпадання елементів вектора розв'язку. Тому визначення оптимальних значень критеріальних функцій не є тривіальною задачею і також потребує застосування ПАВ.

4.2. Класифікація задач ранжування об'єктів

Огляд різних підходів та процедур упорядкування об'єктів наводиться в роботі [40]. Класифікацію задач ранжування об'єктів можна здійснювати за кількома параметрами:

- використання експертної інформації про відношення на множині об'єктів від одного ($П1 = 1$) експерта чи від експертної комісії ($П1 = k$);

- вигляд вхідної інформації: індивідуальні ранжування експертів ($П2 = 1$), повні МПП ($П2 = 2$), неповні МПП ($П2 = 3$);

- метрика, яка використовується для визначення відстані між ранжуваннями об'єктів у просторі рішень: метрика Хемінга ($П3 = 1$), модуль різниць між рангами об'єктів ($П3 = 2$), Евклідова метрика ($П3 = 3$);

- клас відношень між об'єктами, для якого будуються алгоритми знаходження розв'язку: строгі ранжування об'єктів ($П4 = 1$), нестрогі ранжування об'єктів ($П4 = 2$), довільні МПП ($П4 = 3$);

- вид критерію оптимальності ЗЕО: мінімаксний критерій ($П5 = 1$), лінійна згортка ($П5 = 2$), квадратичний критерій ($П5 = 3$).

Значення наведених вище п'яти параметрів визначають вигляд розв'язку задачі ранжування об'єктів та диктують особливості алгоритмів розв'язання зазначених задач. Класифікація деяких задач, які виникають при різних значеннях параметрів, та параграфи монографії, у яких описано алгоритми їх розв'язання, наводиться у табл. 4.1.

Для розв'язання будь-якої із наведених вище задач можуть бути ефективно застосовані методи ПАВ. Але, зважаючи на специфіку задач ранжування, кожен із алгоритмів має особливості та потребує дослідження. Крім того, алгоритми розв'язання задач ранжування можуть бути адаптовані до розв'язання класичних комбінаторних задач – комівояжера, про призначення тощо.

Таблиця 4.1. **Приклади класифікації задач визначення результуючого відношення між об'єктами**

№ пп	Назва результуючого розв'язку	Параграфи, в яких описано алгоритми	П1	П2	П3	П4	П5
1	Медіана Кемені-Снелла	5.2	2	$1 \vee 2 \vee 3$	1	$1 \vee 2$	2
2	ВГ-медіана	5.3	2	$1 \vee 2 \vee 3$	1	$1 \vee 2$	1
3	Квазіпорядок	5.4	1	$2 \vee 3$	1	$1 \vee 2$	$1 \vee 2$
4	Медіана Кука-Сейфорда	4.4	2	1	2	1	2
5	ГВ-медіана	4.5	2	1	2	1	1
6	Середнє	–	2	1	3	$1 \vee 2$	2
7	Упорядкування об'єктів	4.7	1	$2 \vee 3$	1	1	$1 \vee 2$
8	Медіана Кемені-Снелла для неповних МПП	5.6	2	$2 \vee 3$	$1 \vee 2$	$1 \vee 2$	$1 \vee 2$
9	ГВ-медіана для неповних МПП	5.7	2	3	$1 \vee 2$	$1 \vee 2$	$1 \vee 2$
10	Результуюча МПП	3.9	2	$2 \vee 3$	1	3	2

4.3. Поняття ранжованості ряду та процедури визначення коефіцієнта ранжованості

Процедура ранжування об'єктів є обов'язковою у багатьох практичних задачах. Але у деяких випадках така процедура є недопустимою через "непорівняність" значень параметрів об'єктів, які експертові пропонується упорядкувати. Під час ранжування експерт, як правило, здійснює перехід від "сильнішої" абсолютної чи інтервальної шкали до "слабкішої" порядкової. Це може призвести до порушення структури одержаної від експерта інформації. У роботі [41] пропонується ввести коефіцієнт ранжованості ряду, сутність якого полягає у визначенні кількісного показника допустимості ранжування об'єктів. Визначення значення цього коефіцієнта є актуальним у багатьох ЗЕО. Зокрема, при розв'язанні задач ранжування [1, 2, 4, 10, 11, 13-15, 19, 44, 46], як правило, виходять з припущення про рівномірність відношень на множині об'єктів. Тому застосування процедур визначення допустимості ранжування, має здійснюватися на попередніх етапах формалізації ЗЕО. Застосування методів розв'язання задач ранжування до наборів значень параметрів, які мають недопустимі значення коефіцієнта ранжованості, може викликати сумніви ОПР щодо результатів експертизи.

Операція ранжування є обґрунтованою у тих випадках, коли упорядковані за зростанням числові інтегральні характеристики n об'єктів a_i, $i \in I$, є у якомусь сенсі "близькими" до рангового ряду r_i, $i \in I$, $r_i \neq r_j, \forall i, j \in I$. У більшості реальних ситуацій абсолютне співпадання упорядкованих числових характеристик об'єктів з ранговим рядом є неможливим, тому слід розглядати міру допустимості ранжування. Можна запропонувати кілька підходів до оцінки правомірності ранжування.

4.3.1. *Визначення адекватності ранжування на основі оптимізації масштабу вимірювання*

Процедура визначення коефіцієнта ранжованості ряду наводиться в роботі [20]. Цей показник може бути визначений як розв'язок однієї з наступних оптимізаційних задач:

$$\sum_{i=1}^{n} \left| a_i - \alpha^{(1)} r_i + \alpha^{(2)} \right| \to \min, \tag{4.9}$$

$$\max_{i=1,\dots,n} \left| a_i - \alpha^{(1)} r_i + \alpha^{(1)} \right| \to \min, \tag{4.10}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(a_i - \alpha^{(1)} r_i + \alpha^{(2)} \right)} \to \min, \tag{4.11}$$

$$\alpha^{(1)} > 0,\ \alpha^{(2)} - \text{дійсне число}, \tag{4.12}$$

де $\alpha^{(1)}$ – "масштаб" вимірювання або коефіцієнт "розтягування", оптимальне значення якого доставляє мінімум функціям (4.9)-(4.11); $\alpha^{(2)}$ – "зміщення" початку відліку - параметр, правильний вибір якого робить ряд r_i, $i \in I$, визначений при розв'язанні наведених вище задач $\left(a_i - \alpha^{(1)} r_i + \alpha^{(2)} \right)$, $i \in I$, найближчим до заданого ряду a_i, $i \in I$, за критеріями (4.9)–(4.11).

4.3.2. *Процедура визначення коефіцієнта ранжованості як "ступеня" належності числових характеристик прямій*

Абсолютна ранжованість ряду може інтерпретуватися як умова належності всіх числових характеристик $a_i, i \in I$, одній прямій. Тобто можна формалізувати задачу у вигляді:

$$f\left(a, r^*\right) = \sum_{i \in I} \left| a_i - r_i^* \right| \to \min, \tag{4.13}$$

$$r_i^* = \alpha^{(1)} i + \alpha^{(2)},\ \alpha^{(1)} > 0, \alpha^{(2)} - \text{дійсне число},$$

де ЦФ (4.13) – є мірою близькості між вектором заданих числових характеристик $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ та вектором з елементами $r_i^* = \alpha^{(1)} i + \alpha^{(2)}$, $i \in I$. Таким чином, коефіцієнт ранжованості можна визначити як показник близькості між векторами a та $r^* = \left(r_1^*, \dots, r_n^* \right)$, де r^* – розв'язок задачі (4.13).

***Твердження* 4.1.** При інтерпретації коефіцієнта ранжованості як міри близькості між числовими характеристиками a та r^* цей коефіцієнт не залежить від вибору вигляду критерію (4.13) у просторі безрозмірних значень числових характеристик об'єктів.

Нехай $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$ – розв'язок задачі (4.13). До значень $r_i^* = \alpha^{(1)} i + \alpha^{(2)}$ та $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ застосуємо монотонні перетворення

$$\omega_i\left(r^*\right) = \frac{r_i^* - r_i^{*0}}{r_i^{*\max} - r_i^{*0}} = \frac{i-1}{n-1}, \text{ та } \omega_i(a) = \frac{a_i - a_i^o}{a_{i(\max)} - a_i^o} = \frac{a_i - a_1}{a_n - a_1},$$

які приводять значення числових характеристик до безрозмірного виду в інтервалі від 0 до 1. Тому для перетворень $\omega_i\left(r^*\right), i \in I$, та $\omega_i(a), i \in I$, можемо розглядати різні способи визначення коефіцієнтів:

$$Q^{(1)} = \frac{2}{n-2} \sum_{i \in I} \left| \omega_i(a) - \omega_i\left(r^*\right) \right|; \tag{4.14}$$

$$Q^{(2)} = \frac{2}{(n-2)(n-1)} \sum_{i=2}^{n-1} \left| 1 + \omega_i(a)(n-1) - i \right|; \tag{4.15}$$

$$Q^{(3)} = \sqrt{\frac{6}{(n-2)(n-1)(2n-3)}\sum_{i=2}^{n-1}(1+\omega_i(a)(n-1)-i)^2}. \qquad (4.16)$$

4.3.3. *Визначення коефіцієнта ранжованості як "середнього" показника*

Визначимо значення $\alpha^{(1)},\alpha^{(2)}$ як розв'язок такої оптимізаційної задачі

$$f(a,i)=\sum_{i\in I}\left(\alpha^{(1)}i+\alpha^{(2)}-a_i\right)^2 \to \min, \qquad (4.17)$$

$$\alpha^{(1)}>0,\alpha^{(2)} - \text{дійсне число.}$$

Оскільки ЦФ (4.17) є двічі неперервно-диференційованою, то з необхідних умов оптимальності першого порядку отримуємо такі значення параметра $\alpha^{(1)}$:

$$\alpha^{(1)}=\left(n\sum_{i=1}^{n}ia_i-\sum_{i=1}^{n}i\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\Bigg/\left(n\sum_{i=1}^{n}i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)^2\right), \qquad (4.18)$$

та значення параметра $\alpha^{(2)}$:

$$\alpha^{(2)}=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-k\sum_{i=1}^{n}i\right).$$

Можна розглядати також задачу визначення "відстані" між заданим набором чисел $a_i, i\in I$, та ранговим рядом $r_i,\ i\in I$,

$$f(a,r^*)=\sum_{i=1}^{n-1}\left(a_{i+1}-a_i-\alpha^{(1)}\right)^2 \to \min, \qquad (4.19)$$

$$\alpha^{(1)}>0,\alpha^{(2)} - \text{довільне дійсне число}$$

ЦФ задачі (4.19) також є двічі неперервно-диференційованою та строго опуклою, тому з необхідних умов оптимальності першого порядку отримуємо такий розв'язок:

$$\alpha^{(1)}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)=\frac{a_n-a_1}{n-1}. \qquad (4.20)$$

Коефіцієнт ранжованості можна розглядати як деякий «середній» показник. Зазначимо, що для $\forall i:\min_{i\in I}\left(a_{i+1}-a_i,\alpha^{(1)}\right)\le$

$\le\max_{i\in I}\left(a_{i+1}-a_i,\alpha^{(1)}\right)$. Тому в цьому випадку коефіцієнт ранжованості можна обчислити за формулою:

$$Q^{(4)}=1-\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\min\left\{a_{i+1}-a_i,\alpha^{(1)}\right\}}{\max\left\{a_{i+1}-a_i,\alpha^{(1)}\right\}}, \qquad (4.21)$$

де $\alpha^{(1)}$ - значення, визначені за формулами (4.18) або (4.20).

Значення коефіцієнтів (4.14)-(4.16), (4.21), знаходяться в інтервалі [0,1). Очевидно, що $Q^{(i)}=0, i=1,\ldots,4$, тоді, коли заданий ряд співпадає з ранговим рядом. При $Q^{(i)}\to 1$, $i=1,\ldots,4$, значення коефіцієнтів ранжованості ряду свідчать про ступінь недопустимості ранжування - чим більшим є значення $Q^{(i)}=0, i=1,\ldots,4$, тим "віддаленішим" від рангового ряду є заданий упорядкований набір чисел.

4.4. Послідовний алгоритм розв'язання задачі визначення строгого результуючого ранжування об'єктів для метрики неспівпадання рангів (медіани Кука-Сейфорда)

Проблеми визначення колективного упорядкування об'єктів та методи розв'язання таких задач досліджувалися у роботах [10, 14, 15, 19]. Задача знаходження результуючого ранжування об'єктів з використанням метрики неспівпадання рангів формалізується у класі однокритеріальних комбінаторних моделей:

$$f(x)=\sum_{l\in L}f_l(x)=\sum_{l\in L}\rho_l\sum_{i\in I}\left|r_i^l-x_i\right|\to\min,\ x\in X_0. \qquad (4.22)$$

Якщо розв'язок, одержаний за критерієм (4.22) не єдиний, тобто побудовано множину варіантів, еквівалентних за (4.22), то результуюче ранжування може бути вибране із зазначеної множини розв'язків із застосуванням іншого критерію.

Твердження 4.2. Інтервали зміни рангів об'єктів за заданими експертами ранжуваннями визначаються за формулами

$$r_i^H=\min_{l\in L}r_i^l,\ r_i^B=\max_{l\in L}r_i^l,\ i\in I.$$

Для розв'язання задачі (4.22) на початковому етапі будується матриця X^0, що відповідає області допустимих розв'язків $\{1 \le r_i \le n, i \in I\}$, з елементами $x_{ij} \in X^0, i, j \in I$, які визначаються таким чином

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ коли } r_i^H > j \text{ або } r_i^B < j, \\ j, \text{ коли } r_i^H \le j \le r_i^B. \end{cases}$$

Для кожного вектора експертних ранжувань $R^l, l \in L$, генерується матриця втрат, кожен елемент якої визначається [26] таким чином:

$$\Delta_{ij}^l = \left| r_i^l - x_{ij} \right|, \ i, j \in I, \ l \in L. \qquad (4.23)$$

Елемент Δ_{ij}^l, $i, j \in I$, $l \in L$, є величиною "неузгодженості" (розбіжності) рангової оцінки експертом об'єкта $a_i \in A, i \in I$, з рангом цього ж об'єкта, представленого елементом у матриці X^0. Сутність методу полягає у послідовному відсіюванні з початкової матриці X^0 тих елементів $x_{ij} \in X^0, i, j \in I$, які мають найбільшу розбіжність з індивідуальними експертними ранжуваннями. Таким чином, мінімізується сумарна матриця "неузгодженості" виду

$$\Delta_{ij} = \sum_{l \in L} \left| r_i^l - x_{ij} \right|, \ i, j \in I. \qquad (4.24)$$

В результаті відсіювання деякі елементи матриці X^0 фіксуються, зменшуючи розмірність задачі, а в окремих випадках отримуються розв'язки у вигляді строгих результуючих ранжувань, які мінімізують на множині всіх можливих розв'язків критерій виду (4.22).

4.4.1. *Процедура U відсіву недопустимих варіантів з урахуванням того, що розв'язок має бути строгим ранжуванням*

На кожному кроці процедури знаходження розв'язку задачі (4.22) будується матриця $X^S = \prod_{i \in I} X_i^S, s = 1, 2, \ldots$, шляхом відсіювання безперспективних елементів матриці $X^{S-1} = \prod_{i \in I} X_i^{S-1}$,

$s = 1, 2, \ldots$ Рядки та стовпчики матриці X^S, $s = 1, 2, \ldots$, будемо називати відповідно рядками об'єктів та стовпчиками рангів.

Звуженою матрицею $X^S, s = 1, 2, \ldots$, будемо називати матрицю, яка в порівнянні з матрицею $X^{S-1}, s = 1, 2, \ldots$, має меншу кількість ненульових елементів.

Варіантом задачі (4.22) назвемо вектор довжини n, елементами якого є елементи відповідних стовпчиків матриці $X^S, s = 0, 1, 2, \ldots$

Допустимим (повним) варіантом задачі (4.22) назвемо вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ довжини n, який не містить нульових значень і всі його елементи є попарно різними.

Частковим розв'язком задачі (4.22) назвемо вектор довжини n, всі ненульові елементи якого є попарно різними.

Допустимою матрицею $X^S, s = 0, 1, 2, \ldots$ при розв'язанні задачі визначення колективного ранжування будемо вважати таку, в якій немає жодного нульового рядка та жодного нульового стовпчика.

Допустимим підваріантом задачі (4.22) назвемо вектор $x' = (x_1', \ldots, x_{n'}')$ довжини n', $n' < n$, який не містить нульових елементів і всі його елементи є попарно різними.

Справедливими є такі твердження.

***Твердження* 4.3.** З елементів допустимої матриці $X^S, s = 0, 1, 2, \ldots$ завжди можна вибрати вектор довжини n, який відповідає ранжуванню об'єктів.

Оскільки будується строге ранжування об'єктів, то необхідно дослідити випадки, коли жоден із стовпчиків рангів та жоден із рядків об'єктів не містять всіх нульових елементів, а також випадки, коли в стовпчиках та рядках матриці $X^S, s = 0, 1, 2, \ldots$ залишається єдиний ненульовий елемент, тобто ранг об'єкта фіксується.

***Твердження* 4.4.** Ранг об'єкта у груповому ранжуванні фіксується, якщо:

а) всі інші допустимі значення рангів для цього об'єкта відсіялися в результаті застосування процедур відсіву на попередніх ітераціях, тобто у відповідному рядку матриці

$X^S, s=0,1,2,...$ залишився єдиний ненульовий елемент;

б) у відповідному стовпчику матриці $X^S, s=0,1,2,...$ залишився єдиний ненульовий елемент.

Твердження **4.5.** В результаті фіксування результуючого рангу об'єкта зменшується розмірність початкової задачі.

Твердження **4.6.** Фіксування рангу об'єкта в колективному ранжуванні може бути як результатом відсіву шляхом застосування класичних процедур ПАВ, так і результатом застосування однієї з умов твердження 4.4.

Твердження **4.7.** Умовами недопустимості відсіву варіантів розв'язку задачі за алгоритмом $W_2^S, s=0,1,2,...,$ є:

а) $\exists i: x_{ij}=0,\ \forall j \in I$, тобто наявність нульового рядка матриці X^S;

б) $\exists j: x_{ij}=0,\ \forall i \in I$, тобто наявність нульового стовпчика матриці X^S;

в) $\exists i,j: r_i^{\Phi}=r_j^{\Phi}$, де $r_i^{\Phi}=x_{il}^H=x_{il}^B,\ r_j^{\Phi}=x_{jl}^H=x_{jl}^B,\ i\neq j,\ i,j,l \in I$;

г) $\exists i,j,l:\ r_{i(j)}^{\Phi}=r_{i(l)}^{\Phi}$ – тобто існування стовпчиків, у яких індекси єдиних ненульових елементів співпадають: $r_{i(j)}^{\Phi}=x_{ij}^H=x_{ij}^B,\ r_{i(l)}^{\Phi}=x_{il}^H=x_{il}^B,\ j\neq l,\ i,j,l\in I$.

4.4.2. *Послідовний алгоритм ММ визначення оптимальних значень цільової функції при пошуку розв'язку задачі у вигляді строгого ранжування об'єктів*

Задача визначення максимального (мінімального) значення ЦФ при пошуку розв'язку задачі у вигляді строгого ранжування об'єктів формулюється таким чином:

$$\sum_{i\in I} x_i \to \max(\min), \tag{4.25}$$

$$x_i \in X_i^S, i\in I. \tag{4.26}$$

Алгоритм розв'язання задачі (4.25)–(4.26) описується такою послідовністю кроків.

Крок 1. Визначення початкового значення $x^{*S} = (x^{HS}+x^{BS})/2$.

Крок 2. Перетворення елементів матриці $X^S, s=0,1,2,...$ таким чином: $x_{ij}^{S+1}=\{x_{ij}^S$, якщо $x_{ij}^S \geq (\leq) x_{ij}^{*S}$; 0, якщо $x_{ij}^S < (>) x_{ij}^{*S}\}$.

Крок 3. Перевірка допустимості матриці $X^S, s=0,1,2,...$ Якщо матриця є недопустимою, перехід до кроку 4, інакше – до кроку 5.

Крок 4. Зменшення (для задачі на мінімум – збільшення) значення x^{*S}, наприклад, методом дихотомії $x^{*S+1}=(x^{*S}+x^{HS})/2$ (для задачі на мінімум: $x^{*S+1}=(x^{*S}+x^{BS})/2$). Коли $x^{*S+1}\leq x_i, \forall x_i, i\in I$, (для задачі на мінімум: $x^{*S+1}\geq x_i, \forall x_i, i\in I$). Інакше – перехід до кроку 2.

Крок 5. Якщо матриця $X^S, s=0,1,2,...$ є допустимою, то перевірка умов твердження 4.4. Коли деякі елементи матриці $X^S, s=0,1,2,...$ фіксуються, то здійснюється зменшення розмірності задачі. Якщо матриця $X^S, s=0,1,2,...$ є недопустимою, то перехід до кроку 4. Інакше – до кроку 6.

Крок 6. У разі, якщо не здійснюється відсів і матриця є допустимою, здійснюється верхня оцінка кількості варіантів. Якщо це значення є великим для прямого перебору, то здійснюється збільшення (для задачі на мінімум – зменшення) значення x^{*S}, $x^{*S+1}=(x^{*S}+x^{BS})/2$ (для задачі на мінімум – $x^{*S+1}=(x^{*S}+x^{HS})/2$).

Крок 7. Прямий перебір варіантів з урахуванням вимоги до розв'язку задачі: $x_{ij}^S < x_i \neq x_j,\ \forall i\neq j,\ i,j\in I$.

В результаті застосування алгоритму ММ ПАВ задачі (4.25)-(4.26) знаходимо максимальне (або мінімальне) значення критеріальної функції (4.25).

4.4.3. *Процедура W_2 відсіювання безперспективних варіантів, модифікована для випадку строгого ранжування об'єктів*

Для розв'язання задачі (4.22) візьмемо за основу метод W_2, описаний в роботі [30], який є ітераційною процедурою з параметром k_0. На кожному кроці s процедури $W_2^S, s=0,1,2,...,$ при $k_0 = k_0^S$ перевіряється сумісність системи нерівностей

$$\sum_{j\in I} f_i\left(x_j^i\right) \le f_i^*\left(k_0^S\right),\ i\in I, \qquad (4.27)$$

де величина $f_i^*(k_0^S)$ визначається за формулою

$$f_i^*\left(k_0^S\right) = f_i^{0S} + k_0^S\left(f_i^{HS} - f_i^{0S}\right)/\rho_i, i\in I, \qquad (4.28)$$

а величини f_i^{0S}, f_i^{HS} – є відповідно мінімальними та максимальними значеннями функції $f_i, i\in I$, на s-му кроці послідовного алгоритму, $s=0,1,2,...,$ які визначаються шляхом застосування алгоритму ММ, наведеного у попередньому параграфі.

Введемо такі позначення

$$X^S = \prod_{j\in I} X_j^S,$$

$$x^i = \sum_{j\in I} \arg\min_{\substack{x_j\in X_i^S \\ j\in I}} f_i\left(x_j\right),\ \forall i\in I,$$

$$x^i \setminus x_j = \left(x_1^i,...,x_{j-1}^i, x_{j+1}^i,...,x_n^i\right),\ i,j\in I.$$

Тоді умови відсіву елементів множин $X_j^S, j\in I$, які не дозволяють побудувати колективне ранжування об'єктів, що задовольняє обмеженню (4.27), будуть такими:

$$f_i\left(x_j^i\right) > f_i^{*j}\left(k_0^S\right), \forall i\in I, \qquad (4.29)$$

де $f_i^{*j}\left(k_0^S\right) = f_i^*\left(k_0^S\right) + f_i\left(x^i\setminus x_j\right) = f_i^*\left(k_0^S\right) - \sum_{l\in I} f_i\left(\arg\min_{\substack{x_j\in X_i^S \\ l\ne j}}\right), i\in I.$

Розглянемо модифікацію процедури W_2 для випадку розв'язання задачі визначення строгого ранжування об'єктів.

Крок 1. Визначення початкового значення $f^{*S} = \left(f^H + f^B\right)/2$.

Крок 2. Перетворення елементів матриці $X^S, s=0,1,2,...,$ таким чином:

$$x_{ij}^{s+1} = \begin{cases} x_{ij}^s, \text{ якщо } \Delta_{ij} \le f^{*s} \\ 0, \text{ якщо } \Delta_{ij} > f^{*s} \end{cases}.$$

Крок 3. Перевірка допустимості матриці $X^S, s=0,1,2,...$ за умовами твердження 4.3. Якщо матриця є недопустимою, то перехід до кроку 4, інакше – до кроку 5.

Крок 4. Збільшення значення f^{*S}, наприклад, методом дихотомії $f^{*S+1} = \left(f_S^* + f^B\right)/2$. Перехід до кроку 2.

Крок 5. Якщо матриця $X^S, s=0,1,2,...,$ є допустимою, то перевірка умов твердження 4.3. Якщо деякі елементи матриці $X^S, s=0,1,2,...,$ фіксуються, то здійснюється зменшення розмірності задачі. Якщо матриця $X^S, s=0,1,2,...,$ є недопустимою, то перехід до кроку 4. Інакше – до кроку 6.

Крок 6. В разі, коли не здійснюється відсів і матриця є допустимою, визначається верхня оцінка кількості варіантів:

$$y^s = \prod_{i\in I}\left(\max_{j\in I} x_{ij}^S - \min_{j\in I, x_{ij}^S>0} x_{ij}^S\right). \qquad (4.30)$$

Коли верхня оцінка (4.30) є великою для прямого перебору, то здійснюється зменшення значення $f^*, f^{*S+1} = \left(f_S^* + f^H\right)/2$. Перехід до кроку 2.

Крок 7. Прямий перебір варіантів розв'язку з урахуванням вимоги попарного неспівпадання елементів розв'язку, які інтерпретуються як ранги об'єктів.

У результаті застосування описаного алгоритму визначається найкраще значення адитивної функції виду (4.22) на елементах множини $X^S, s=0,1,2,...,$ які відповідають строгому ранжуванню об'єктів.

4.4.4. *Декомпозиційний алгоритм послідовного аналізу варіантів*

Важливою особливістю задачі визначення колективного ранжування є її розкладність. Введемо позначення $x_j^H = \min_{i\in I, x_{ij}^S>0} x_{ij}$, $x_j^B = \max_{i\in I, x_{ij}^S>0} x_{ij}$. Якщо впорядкувати рядки матриці X^0 за зростанням величин $x_j^H, j\in I$, а для однакових нижніх границь зміни рангів – за зростанням величин $x_j^B, j\in I$, то матриця X^0 приводиться до "діагонального" вигляду. Тому, не зменшуючи загальності, будемо вважати, що матриця X^0 має "діагональний" вигляд, оскільки цього можна досягти перенумерацією об'єктів.

Справедливе наступне твердження.

Твердження **4.8.** Умовою розкладності матриці $X^S, s = 0,1,2,\ldots$, є існування в ній рядків з індексами i та $(i+1)$, $1\le i<n$, $i\in I$, для яких виконується умова $x_{ij}^B < x_{i+1,j}^H$, де x_{ij}^B – останній ненульовий елемент i-го рядка, $x_{i+1,j}^H$ – перший ненульовий елемент $(i+1)$-го рядка.

Відомо [33], що у випадку розкладності матриці $X^S, s = 0,1,2,\ldots$, її розкладні блоки можуть розглядатися автономно, оскільки розкладність означає, що всі елементи однієї групи (блока) переважають всі елементи іншої групи (блоку) або навпаки. Тобто у випадку розкладності матриці $X^S, s = 0,1,2,\ldots$, початкова задача розпадається на кілька задач значно меншої розмірності, які розв'язуються автономно і після їх розв'язання тривіально конструюється остаточний розв'язок задачі – групове ранжування об'єктів.

Декомпозиційний алгоритм послідовного аналізу та відсіювання варіантів розв'язку задачі (4.22) можна представити таким чином.

Крок 1. Формування матриці $X^S, s=0,1,2,\ldots$, яка відповідає області допустимих розв'язків.

Крок 2. Перевірка розкладності матриці $X^S, s=0,1,2,\ldots$ шляхом застосування твердження 4.8. Якщо матриця X^S є розкладною, то відбувається декомпозиція задачі і перехід до кроку 3. Коли матриця X^S є нерозкладною, то здійснюється продовження розв'язання задачі за допомогою описаного вище алгоритму.

Крок 3. Застосування алгоритму для розв'язання Θ задач виду (4.22), в яких матриці допустимих значень рангів об'єктів є автономними блоками $X^{S(t)}, X^{S(t)} \subset X^S$, $t=1,\ldots,\Theta$, матриці $X^S, s=0,1,2,\ldots$ Одержання допустимих підваріантів $x^{(t)}, t=1,\ldots,\Theta$, цих задач. Якщо деякі автономні блоки $X^{S(t)}$, $t=1,\ldots,\Theta$, при розв'язанні підзадач задачі (4.22) виявляються розкладними, то перехід до кроку 1 та розв'язання підзадач другого рівня.

Крок 4. Формування повного розв'язку задачі (4.22) з часткових розв'язків, одержаних на кроці 3.

Застосування декомпозиційного алгоритму для задач спеціального виду може суттєво збільшити швидкість розв'язання задачі, оскільки в ньому враховано специфіку її структури.

4.5. Послідовний алгоритм розв'язання задачі визначення колективного ранжування за мірою неспівпадання рангів об'єктів (ГВ-медіани)

Багатокритеріальний підхід до колективного упорядкування об'єктів запропоновано та досліджено у роботах [10, 19, 46]. Задачу знаходження колективного ранжування будемо формалізувати як багатокритеріальну дискретну комбінаторну задачу

$$f_i(x) = \sum_{j\in I} f_i(x_{ij}) = \sum_{j\in I} |x_{ij} - x_j| \to \min,\ i\in L, \tag{4.31}$$

$$x\in X^0 = \prod_{j\in I} X_j^0, \qquad x_j \in X_j^0,\ j\in I, \tag{4.32}$$

$$x_j \ne x_l, l\ne j, j,l\in I. \tag{4.33}$$

Розв'язок задачі (4.31)–(4.33) будемо називати ГВ-медіаною. Слід зазначити, що в загальному випадку не існує єдиного розв'язку задачі визначення строгих ранжувань об'єктів (4.31)-(4.33), тому слід розглядати не єдиний розв'язок, а підмножину еквівалентних розв'язків задачі (4.31)-(4.33). Для звуження підмножини одержаних розв'язків чи визначення єдиного розв'язку на цій підмножині можна шукати медіану Кука-Сейфорда або єдиний розв'язок за іншим критерієм.

Задача (4.31)-(4.33) не є дискретною сепарабельною задачею, оскільки існує умова (4.33). Тому виникає необхідність визначення оптимальних значень критеріальних функцій (4.31). Враховуючи сформульовані твердження та наведені у попередньому параграфі процедури, опишемо алгоритм відсіву недопустимих варіантів та визначення строгого ранжування.

Крок 1. Присвоєння початкових нульових значень елементів вектора розв'язку $x: x_j = 0,\ j \in I$. Обчислення мінімального та максимального значень ЦФ шляхом застосування алгоритму ММ.

Крок 2. Обчислення величин f^{*S} за формулою (3.28).

Крок 3. Застосування процедури W_2^S. Якщо відсіювання є недопустимим, то перехід до кроку 9. Інакше - до наступного кроку.

Крок 4. Після застосування процедури відсіву здійснюється побудова матриці $X^S, s = 0,1,2,\ldots$, яка також перевіряється на допустимість відповідно до твердження 4.6. У випадку недопустимості матриці $X^S, s = 0,1,2,\ldots$, здійснюється збільшення параметра k_0^S та здійснення переходу до кроку 9. Інакше - збільшення кроку $s = s + 1$ і перехід до наступного кроку.

Крок 5. Перевірка умов твердження 4.5. Якщо деякі ранги об'єктів фіксуються, то відбувається добудування часткового розв'язку задачі (4.31)-(4.33) та зменшення розмірності матриці $X^S, s = 0,1,2,\ldots$

Крок 6. Обчислення меж зміни ЦФ f^{HS}, f^{BS} шляхом застосування процедури ММ. Коли межі змінилися, перехід до кроку 2, інакше - перехід до наступного кроку.

Крок 7. Висновок про здійснення допустимого відсіювання.

Якщо на множині $X^S, s = 0,1,2,\ldots$ існують допустимі повні варіанти і загальна кількість можливих варіантів, обчислених за формулою (4.30), є великою для прямого перебору, то перехід до наступного кроку. Інакше – до кроку 10.

Крок 8. Зменшення значення f^{*S} – вибір f^{*S+1}, наприклад, методом дихотомії $f^{*S+1} = (f^{*S} + f^{HS})/2)$. Перехід до кроку 2.

Крок 9. Збільшення f^{*S} – вибір f^{*S+1} з інтервалу $f^{*S+1} \in \in \left(f^{*S}, f^{HS}\right)$. Перехід до кроку 2.

Крок 10. Коли кількість можливих розв`язків на множині $X^S, s = 0,1,2,\ldots$ не є великою, то шляхом прямого перебору відбувається знаходження розв`язку x^*, який є допустимим варіантом і мінімізує ЦФ (4.31) задачі (4.31)–(4.33).

Якщо знайдений розв`язок не є єдиним, то експертові пропонується вибрати серед розв'язків, еквівалентних за ЦФ (4.31) задачі (4.31)–(4.33), той розв'язок, який йому найбільше підходить. Або для порівняння еквівалентних за критерієм (4.31) розв`язків застосовується інша ЦФ виду (4.22).

4.5.1. *Декомпозиційний алгоритм визначення ГВ-медіани*

Декомпозиційний алгоритм послідовного аналізу та відсіювання варіантів розв'язку задачі (4.31)–(4.33) можна представити таким чином.

Крок 1. Формування матриці $X^S, s = 0,1,2,\ldots$

Крок 2. Перевірка розкладності матриці $X^S, s = 0,1,2,\ldots$ шляхом застосування умов твердження 4.8. Якщо матриця X^S є розкладною, то здійснення декомпозиції задачі і перехід до кроку 3. Коли матриця X^S не є розкладною, то продовження розв'язання задачі за допомогою алгоритму, описаного вище.

Крок 3. Застосування алгоритму, наведеного у цьому параграфі, для розв'язання Θ задач (4.31)–(4.33), в яких матриці

(4.32) є автономними блоками $X^{S(t)}, X^{S(t)} \subset \subset X^S, t=1,...,\Theta$, матриці $X^S, s=0,1,2,...$ Одержання допустимих підваріантів $x^{(t)}, t=1,...,\Theta$, цих задач. Якщо деякі автономні блоки $X^{S(t)}, t=1,...,\Theta$, при розв'язанні підзадач задачі (4.31)-(4.33) виявляються розкладними, то перехід до кроку 1 та розв'язання підзадач другого рівня шляхом застосування алгоритму, який наведено у цьому параграфі.

Крок 4. Формування повного розв'язку задачі (4.31)-(4.33) з часткових розв'язків, одержаних на кроці 3.

4.6. Процедури послідовного аналізу, що базуються на використанні ациклічності розв'язку

Процедури ПАВ для задач строгого ранжування об'єктів розглядаються у роботах [1, 2, 21]. Для описання процедур послідовного аналізу, які базуються на використанні умови ациклічності розв'язку скористаємося перетвореннями, подібними до тих, які наведено в параграфі 3.8 цієї монографії. Зважаючи на те, що розглядається задача строгого ранжування, елементи індивідуальних МПП $b_{ij}^l \in B_{ij}^l$, $i,j \in I$, $l \in L$, які відповідають строгим ранжуванням, можуть набувати лише двох значень, тобто

$$b_{ij}^l = \begin{cases} 1, \text{ якщо } a_i > a_j, \\ -1, \text{ якщо } a_i < a_j, \end{cases} \quad (4.34)$$

$$b_{ij}^l + b_{ji}^l = 0, \ \forall i,j \in I, \ i \neq j, \ l \in L,$$

де " > "– символ відношення переваги між об'єктами.

З урахуванням попередніх зауважень, будемо розглядати замість МПП, які відповідають ранжуванням, вектори c та x виду (3.28).

4.6.1. *Основні властивості варіантів з урахуванням умови ациклічності розв`язку*

При побудові процедури ПАВ яка базується на використанні вимоги ациклічності розв`язку в задачі знаходження результуючого строгого ранжування, застосовано

застосовано схеми послідовного аналізу варіантів, запропоновані в роботах [6, 35]. Для описання цієї процедури наведемо деякі означення.

Ациклічним відношенням на множині A [38] називається повне бінарне відношення B, у якого строга компонента $B^{(s)}$ [38] не має циклів: не існує послідовності об`єктів $a_1, a_2, ..., a_\Theta$, такої, що $a_t B^{(s)} a_{t+1}$, $t=1,...,\Theta-1$ та $a_\Theta B^{(s)} a_1$.

Для випадків, які розглядаються у цьому розділі, є справедливим наступне твердження.

***Твердження* 4.9.** [27]. В силу властивостей МПП з елементами вигляду (3.1), вимога відсутності циклів еквівалентна вимозі відсутності циклів довжини три $(\Theta=3)$.

Позначимо через X^0 – множину всіх можливих векторів вигляду (3.28); через D^A – множину векторів, які відповідають ациклічним відношенням $D^A \subset X^0$; через c_{ij} – j-ту компоненту вектора, побудованого за матрицею $B^i, i \in L$, заданою i-м експертом. Розглянемо ланцюжок об`єктів $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$ із заданими відношеннями переваги, які будемо позначати символами $a_{i_1} \pi \ a_{i_2} \pi \ a_{i_3}$, $i_1, i_2, i_3 \in I$.

Базисним підваріантом задачі визначення строгого ранжування об'єктів, який породжується трійкою об`єктів $(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3})$, назвемо елементи вектора виду (3.28) з компонентами

$$\begin{gathered} (c_{t_1}, c_{t_2}, c_{t_3}), \ 1 \le t_1 < t_2 < t_3 \le N, \\ c_{t_1}, c_{t_2}, c_{t_3} \in c, \ c_{t_1}, c_{t_2}, c_{t_3} \in \{-1, 1\}, \end{gathered} \quad (4.35)$$

значення яких відповідають відношенням виду

$$(a_{i_1} \pi \ a_{i_2}, a_{i_2} \pi \ a_{i_3}, a_{i_3} \pi \ a_{i_1}), \ a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3} \in A, \ \pi \in \{>, <\}.$$

Оскільки верхня трикутна матриця $B^i, i \in L$, містить повну інформацію про всю матрицю, то індекси об'єктів та індекси вектора c вигляду (3.28), побудованого за матрицею B, достатньо розглядати лише за зростанням, тобто $1 \le t_1 < t_2 < t_3 \le N$. Будемо також розглядати лише значення елементів матриці з множини {1, -1}, яка відповідає відношенням π, $\pi \in \{>,<\}$. Базисний підваріант може як відповідати ациклічному відношенню на множині трьох об`єктів $\{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}\}$, $i_1, i_2, i_3 \in I$, так і не відповідати. Це мінімальна підмножина об`єктів з множини A, на якій можна виявити цикл.

Елементи вектора c виду (3.28), що утворюють базисний підваріант (4.35), назвемо *спряженими* між собою.

Допустимим базисним підваріантом назвемо базисний підваріант, який породжується трійкою об`єктів, відношення між якими задовольняють умові ациклічності.

Повним варіантом (варіантом довжини N) назвемо вектор, який відповідає повному бінарному відношенню на множині об`єктів A.

Допустимим варіантом x^D назвемо повний варіант, який відповідає ациклічному відношенню на множині всіх n об`єктів, тобто $x^D \in D^A$.

Базисним підваріантом фіксованого варіанта $x^\Phi = (x_1^\Phi, ..., x_N^\Phi)$ назвемо трійку $(x_{t_1}^\Phi, x_{t_2}^\Phi, x_{t_3}^\Phi)$, $1 \le t_1 < t_2 < t_3 \le N$. Тобто для кожного конкретного варіанта x^Φ існує $C_N^3 = N(N-1)(N-2)/6$ його базисних підваріантів. Всі інші можливі трійки, складені з трьох елементів вектора x^Φ, які не задовольняють умові $1 \le t_1 < t_2 < t_3 \le N$, не є базисними підваріантами варіанта x^Φ.

Справедливим є таке твердження.

***Твердження* 4.10.** Необхідною і достатньою умовою допустимості варіанта (3.28) є допустимість всіх можливих його базисних підваріантів.

Справедливість цього твердження випливає з означення допустимого варіанта та справедливості твердження 4.9.

Множину $X^S = \bigcup_{i \in H} X_i^S$, $X^S \subset X^0$, $s = 1,2,...$, будемо називати *звуженою* (відносно початкової множини X^0).

4.6.2. Аналіз варіантів з урахуванням умови ациклічності розв'язку

Позначимо множину всіх можливих значень, яких можуть набувати елементи базисного підваріанта, через P^0. Множини виду P^0 утворюються з множини X^0 шляхом об'єднання трьох різних стовпчиків матриці X^0: $X_{j_1}^0 \cup X_{j_2}^0 \cup X_{j_3}^0$, $1 \le j_1 < j_2 < j_3 \le N$, $X_{j_1}^0, X_{j_2}^0, X_{j_3}^0 \in X^0$. Потужність цієї множини рівна $|P^0| = 6$

Базисною множиною $P^0 = P_1^0 \times P_2^0 \times P_3^0$, $P_i^0 = (-1,1)^T$, $i = 1,2,3$, назвемо матрицю, з якої вибираються значення базисних векторів, де T – знак транспонування.

Звуженою базисною множиною P^S, $P^S \subset P^0$, $s = 1,2,...$, назвемо матрицю, яка утворюється з матриці P^0 шляхом вилучення з неї окремих елементів.

Справедливі такі твердження.

***Твердження* 4.11.** Підваріант є допустимим лише при кількості елементів у будь-якій підмножині базової множини, не меншій 1, тобто $|P_i^0| \ge 1, i = 1,2,3$.

Справедливість цього твердження випливає з означення повного варіанта, адже будь-яка порожня підмножина базисної множини призводить до неможливості побудувати повний варіант.

***Твердження* 4.12.** Базисний підваріант є недопустимим тоді і тільки тоді, коли $c_{j_1} = -c_{j_2} = c_{j_3}$, $j_1, j_2, j_3 \in H$.

Тобто циклічних підваріантів на базисній підмножині існує два: $(1,-1,1)$ та $(-1,1,-1)$.

Легко бачити, що серед всіх восьми можливих відношень між трійками об'єктів $(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3})$ цикли утворюються лише у двох випадках:

$$\text{якщо } a_{i_1} > a_{i_2} > a_{i_3} > a_{i_1}, \tag{4.36}$$

або, якщо $a_{i_1} < a_{i_2} < a_{i_3} < a_{i_1}$. (4.37)

Представимо ці відношення у вигляді МПП та візьмемо її верхню трикутну частину. Легко бачити, що випадку (4.36) відповідає вектор відношень $c = (-1,1,-1)$, а випадку (4.37) – вектор відношень $c - (1,-1,1)$. Тобто недопустимому підваріанту відповідає вектор з відношеннями між його елементами вигляду $c_{j_1} = -c_{j_2} = c_{j_3}$, де $c_{j_1}, c_{j_2}, c_{j_3} \in \{-1,1\}$.

Твердження **4.13.** Якщо на базисній множині існує базисна підмножина з єдиним елементом, то на базисній множині не може існувати двох недопустимих підваріантів.

Припустимо, що на звуженій базисній підмножині існує два недопустимих підваріанти. Відповідно до твердження 4.12, у випадку циклічності відношення між елементами базисного підваріанта мають відповідати умові $c_{j_1} = -c_{j_2} = c_{j_3}$ або $-c_{j_1} = c_{j_2} = -c_{j_3}$. Очевидно, що коли будь-яка підмножина містить єдиний елемент, це призводить до неможливості утворювати обидва цикли виду (4.36) та (4.37) – адже можливим є лише один з випадків.

Твердження **4.14.** На базисній підмножині, яка містить підмножину з єдиним елементом, обов'язково існує один недопустимий підваріант.

Відповідно до твердження 4.12, недопустимі базисні підваріанти є векторами, елементи яких мають такі властивості: $c_{j_1} = -c_{j_2} = c_{j_3}$ або $-c_{j_1} = c_{j_2} = -c_{j_3}$. Очевидно, що два цикли на одній базисній підмножині утворюються лише при умові, що у всіх підмножинах базисної підмножини є присутніми елементи c_j та $-c_j$ Коли ж у якійсь із підмножин базисної множини існує лише один елемент, це призводить до виключення можливості утворення на базисній множині одного з недопустимих підваріантів. Тобто залишається можливість утворення єдиного недопустимого базисного підваріанта.

Нехай фіксується елемент з індексом j_1 або j_3, тобто $c_j \in \{c_j\}$, $j \in \{1,3\}$ Тоді на підмножині P_{j_2} існує елемент $c_{j_2} \in P_{j_2}$, який утворює відношення: $-c_{j_2} = c_{j_1} = c_{j_3}$, що відповідає недопустимому підваріанту. Якщо фіксується елемент з індексом j_2, $j_2 \in H$, тобто $c_{j_2} \in \{c_{j_2}\}$, то на множинах P_{j_1} та P_{j_3} існують елементи, які утворюють співвідношення: $c_{j_2} = -c_{j_1} = -c_{j_3}$, що відповідає недопустимому підваріанту.

Твердження **4.15.** Якщо на базисній підмножині $P^S, s = 1,2,...$, можна побудувати лише два базисних підваріанти і один з базисних підваріантів є недопустимим, то виключення з підмножини P_{j_2} (для якої $|P_j| = 2$) того елемента, який утворює недопустимий підваріант, не призведе до втрати оптимального варіанту задачі визначення вектора, який відповідає ранжуванню об'єктів.

Якщо не відсіяти елемент, який утворює недопустимий підваріант, то можлива ситуація, коли в процесі подальшого відсіювання з підмножини, для якої $|B_j| = 2, j = 1,2,3,$ буде виключено елемент, який не утворює недопустимого підваріанта. Тоді для фіксованої трійки елементів $(c_{j_1}, c_{j_2}, c_{j_3})$ буде існувати єдиний недопустимий підваріант. З цього випливає недопустимість повного варіанта, а відтак і ранжування n об'єктів, що призведе до недопустимості задачі.

Твердження **4.16.** (Критерій зупинки відсіву). При відсіюванні понад двох елементів з базисної множини $P^S, s = 1,2,...$, виключається необхідність подальшого розгляду цієї множини.

Умова, зазначена у твердженні, означає, що у базисній множині залишилося лише три елементи і відсіювання жодного з них за будь-якими процедурами є неможливим. Очевидно, що у випадку існування на базисній підмножині трьох елементів можливі три випадки:

а) $\exists j: \ P_j = \varnothing$; зрозуміло, що у цьому випадку жодного базисного підваріанту на базисній множині не існує;

б) підваріант на базисній множині $P^S, s = 1,2,...,$ можна побудувати, але він є недопустимим;

в) підваріант, побудований на базисній множині $P^S, s = 1,2,...,$ є допустимим базисним підваріантом.

У будь-якому з трьох розглянутих випадків подальший відсів елементів є неможливим.

***Твердження* 4.17.** При виключенні понад трьох елементів з базисної множини $P^S, s = 1,2,...,$ серед підмножин $P_j, j \in \{j_1, j_2, j_3\}$, обов'язково існує порожня підмножина (тобто $\exists j: \ P_j = \varnothing$), що призводить до недопустимості задачі.

Зважаючи на те що кількість елементів у базисній множині $P^S, s = 1,2,...,$ складає 6, а при виключенні понад трьох з них не залишається трьох елементів для побудови базисного підваріанта, справедливість твердження 4.17 є очевидною.

***Твердження* 4.18.** Закономірності, виявлені та доведені у твердженнях 4.13–4.17, є справедливими для будь-яких трійок об'єктів з індексами $i_1 > i_2 > i_3$, $i_1, i_2, i_3 \in I$, яким відповідають індекси елементів вектора c:

$$j_1 > j_2 > j_3, \ \ j_1, j_2, j_3 \in H.$$

4.6.3. *Процедура Z скорочення множини допустимих розв'язків*

На основі введених означень та доведених тверджень побудуємо *процедуру* Z [4, 45] скорочення множини допустимих розв`язків $X^S = \left(X_1^S \times X_2^S \times ... \times X_N^S\right)$ за умовою ациклічності відношення, яке відповідає розв`язку задачі знаходження строгого результуючого ранжування об`єктів множини A.

Позначимо через ψ функцію двох аргументів, значення якої обчислюються за формулою $j = \psi(i_1, i_2) = (i_1 - 1)n + i_2 - (i_1 + 1)i_1 / 2$, $1 \le i_1 < i_2 < n$. Для визначення індексів об'єктів, які утворюють відношення з індексом j, $j = 1,...,N$, будемо застосовувати такі формули:

$$i_1 = \arg \max_{t=1,...,n-1} nt - t/2 - t^2/2 < j;$$

$$i_2 = j + i_1(i_1 + 1)/2 - (i_1 - 1)n.$$

Через δ_j^1, $j = 1,...,N$, позначимо кількість циклів довжини три, які утворюються відношенням з індексом j, $j = 1,...,N$. Через δ_j^2, $j = 1,...,N$, позначимо кількість циклів довжини три, які утворюються інверсією відношення з індексом j, $j = 1,...,N$. Кількість усіх трійок n об'єктів, відношення між якими утворюють цикли, $k_3 = n(n-1)(n-2)/6$. Кількість циклів на множині n об'єктів $d = (n^3 - 4n)/24$ для парних значень n та $d = (n^3 - n)/24$ для непарних n.

Позначимо через $y^S = \left|X^S\right|$ вектор, елементи якого дорівнюють кількості елементів у множині X_j^S, тобто $y_j^S = \left|X_j^S\right|$, $j \in H$; s – ітерація алгоритму.

Крок 0. Покладемо початкові значення рівними $s = 0$, $y_j^S = 2, j = H$.

Крок 1. Організація трьох вкладених циклів: $i := 1$ до $n - 2$; $i_1 := i + 1$ до $n - 1$; $i_2 := i_1 + 1$ до n. Змінні циклів i, i_1, i_2 є індексами об'єктів. В тілі цих циклів виконуються наступні кроки - від кроку 2 до кроку 8.

Крок 2. Визначення індексів елементів j, j_1, j_2 поточної базисної множини P_j^0 за індексами об'єктів i, i_1, i_2, які визначаються за формулами $j = \psi(i, i_1)$, $j_1 = \psi(i, i_2)$, $j_2 = \psi(i_1, i_2)$.

Крок 3. Визначення кількості варіантів у базисній множині: $S = y_j^S y_{j_1}^S y_{j_2}^S$.

Крок 4. Якщо $S = 0$, то задача є недопустимою. Кінець процедури Z.

Крок 5. Коли $S = 1$ і підваріант $\left(c_j, c_{j_1}, c_{j_2}\right)$ є недопустимим, то задача також є недопустимою. Кінець процедури Z.

Якщо $S = 1$ і підваріант $\left(c_j, c_{j_1}, c_{j_2}\right)$ є допустимим, то задача також є допустимою. Збільшення змінної циклу $i = i + 1$, перехід до кінця циклу по i.

Крок 6. Якщо $S = 4$ або $S = 8$, то задача є допустимою, але відсів не відбувається. Збільшення змінної циклу $i=i+1$, перехід до кінця циклу по i.

Крок 7. Якщо $S=2$ і $y_j^S=2$, то перевірка: коли $x_{j_1}^S=x_{j_2}^S$, то відсів не відбувається; коли $x_{j_1}^S \neq x_{j_2}^S$, то з підмножини X_j^S здійснюється відсів елемента: $x_j^S=x_{j_2}^S$. Покладаємо $y_j^S=1$, $X_j^S=\{x_j^S=x_{j_1}^S\}$. Збільшення змінної циклу $i=i+1$, перехід до кінця циклу по i.

Якщо $S=2$ і $y_{j_1}^S=2$, то перевірка: якщо $x_j^S=x_{j_2}^S$, то відсів не відбувається; якщо $x_j^S=x_{j_2}^S$, то з підмножини $X_{j_1}^S$ здійснюється відсів елемента: $x_{j_1}^S \neq x_j^S$. Покладаємо $y_{j_1}^S=1$, $X_{j_1}^S=\{x_{j_1}^S=x_j^S\}$. Збільшення змінної циклу $i=i+1$, перехід до кінця циклу по i.

Якщо $S=2$ і $y_{j_2}^S=2$, то перевірка: коли $x_j^S=x_{j_1}^S$, то відсів не відбувається; коли $x_j^S \neq x_{j_1}^S$, то з підмножини $X_{j_1}^S$ здійснюється відсів елемента: $x_{j_2}^S=x_j^S$. Покладаємо $y_{j_2}^S=1$, $X_{j_2}^S=\{x_{j_2}^S=x_{j_1}^S\}$. Збільшення змінної циклу $i=i+1$, перехід до кінця циклу по i.

Крок 8. Закінчення циклів по i, i_1, i_2.

Процедура Z використовується для розв'язання однокритеріальної задачі при пошуку медіани Кемені-Снелла та БКЗ визначення ГВ-медіани.

4.7. Послідовний алгоритм розв'язання задачі побудови лінійного порядку об'єктів, найближчого до заданого нетранзитивного відношення

Алгоритм розв'язання задачі визначення строгого ранжування об'єктів, найближчого до заданого довільного відношення на множині об'єктів наводиться та досліджується у роботах [12, 44, 45]. Задача знаходження лінійного порядку, найближчого до заданого на множині об'єктів відношення, формалізується у вигляді

$$\sum_{j\in J}\left|c_{ij}-x_{ij}\right| \to \min, \tag{4.38}$$

$$x_j \in X_j^0=\{-1,1\},\ j\in J, \tag{4.39}$$

$$x\in D^A \subset X^0,\ X^0=\prod_{j\in J} X_j^0, \tag{4.40}$$

де D^A – множина векторів виду (3.28), які відповідають ациклічним відношенням між об'єктами.

Алгоритм послідовного аналізу та відсіювання недопустимих елементів в задачі визначення лінійного порядку, найближчого до заданого циклічного відношення, описується такою послідовністю кроків.

Крок 1. Покладемо початкове значення розв'язку задачі рівним $x(j)=c(j)$, $j\in J$.

Крок 2. Покладемо також початкові значення $\delta_j=\delta_j^1=\delta_j^2=0$, $j\in J$.

Крок 3. Організація циклу: $j=1,\dots,N$. Змінна циклу j, $j=1,\dots,N$, є індексом відношення між об'єктами з індексами i_1, i_2. В тілі цього циклу виконуються кроки 4–11.

Крок 4. Визначення індексів об'єктів i_1, i_2, які утворюють відношення з індексом j, $j=1,\dots,N$, $1\le i_1<i_2\le n$.

Крок 5. Організація циклу: $i=1,\dots,n$. Змінна циклу i, $i=1,\dots,n$, є індексом об'єкта. В тілі цього циклу виконуються кроки 6-10.

Крок 6. Якщо $(i\neq i_1)\&(i\neq i_2)$, то виконуються кроки 7-10 циклу по $i=1,\dots,n$.

Крок 7. Якщо $i<i_1$, то покладаємо значення індексів j_1, j_2, рівними $j_1=\psi(i,i_1)$, $j_2=\psi(i,i_2)$. Коли $(x_j=x_{j_1})\&(x_j=-x_{j_2})$, то $\delta_j^1=\delta_j^1+1$. Коли $(-x_j=x_{j_1})\&(x_j=x_{j_2})$, то $\delta_j^2=\delta_j^2+1$.

Крок 8. Якщо $(i_1<i)\&(i<i_2)$, то покладаємо j_1, j_2, рівними $j_1=\psi(i_1,i)$, $j_2=\psi(i,i_2)$. Коли має місце $(-x_j=x_{j_1})\&$ $\&(-x_j=x_{j_2})$, то $\delta_j^1=\delta_j^1+1$. Коли $(x_j=x_{j_1})\&(x_j=x_{j_2})$, то $\delta_j^2=\delta_j^2+1$.

Крок 9. Якщо $i_2 < i$, то покладаємо j_1, j_2, рівними $j_1 = \psi(i_1, i)$, $j_2 = \psi(i_2, i)$. Коли є справедливим $(x_j = -x_{j_1})\&$ $\&(x_j = x_{j_2})$, то $\delta_j^1 = \delta_j^1 + 1$. Коли $(x_j = x_{j_1})\&(-x_j = x_{j_2})$, то $\delta_j^2 = \delta_j^2 + 1$.

Крок 10. Визначення значення різниць $\delta_j = \delta_j^1 - \delta_j^2$, $j = 1,\dots,N$.

Крок 11. Закінчення циклу по i, $i = 1,\dots,n$.

Крок 12. Закінчення циклу по j, $j = 1,\dots,N$.

Крок 13. Визначення сум: $\Delta^1 = \sum_{j=1}^{N} \delta_j^1$, $\Delta^2 = \sum_{j=1}^{N} \delta_j^2$.

Крок 14. Визначення максимального значення нев'язки: $\delta^M = \max_{j=1,\dots,N} \delta_j^1$, та індекса $j^M = \arg \max_{j=1,\dots,N} \delta_j^1$.

Крок 15. Зміна відношення з індексом j^M, $j^M \in \{1,\dots,N\}$, на інверсне до нього: $x_{j^M} = -x_{j^M}$.

Крок 16. Якщо існують відношення, які утворюють цикли, тобто $\exists j : \delta_j^1 \neq 0$, $j = 1,\dots,N$, то перехід до кроку 3. Повторення пунктів 3-15 наведеного алгоритму до тих пір, поки у розв'язку $x(j)$, $j \in J$, задачі (3.38)-(3.40) існують цикли.

Крок 17. Відношення $x(j), j = 1,\dots,N$, визначене таким чином, що $\delta_j^1 = 0, \forall j, j = 1,\dots,N$, є ациклічним і відповідає ранжуванню на множині об'єктів з індексами i, $i = 1,..,n$.

Описаний алгоритм було програмно реалізовано та здійснено відповідні обчислювальні експерименти, які довели його ефективність.

4.8. Експертні оцінки в задачах синтезу

Багаторівнева оптимізація складних систем на початкових етапах життєвого циклу (дослідження та проектування), включає врахування впливу аспектів складових предметних областей: економіки, організації, технології і техніки. Кожна із них так чи інакше є залежною від іншої. Отримати рішення,

що є оптимальним в кожній з цих областей, найчастіше неможливо. При покращенні характеристик в одній з областей погіршуються характеристики в іншій. Такі залежності не обов'язково є лінійними і встановити їх аналітично досить важко. Об'єктивні дані і результати доповнюють суб'єктивними судженнями фахівців і експертів. Однією з макрозадач, яку розв'язують таким чином, є задача синтезу.

Нехай P – вектор прикладних задач, що розв'язуються системою, S – вектор можливих структур, C – вектор можливих стратегій управління (розподілу ресурсів). Відомо [28, 29], що задача синтезу полягає в знаходженні

$$\max_{c \in C, s \in S} E(P, C, S) \tag{4.41}$$

або

$$\max_{c \in C, s \in S} E(P, c(P), s(P)) \tag{4.42}$$

де E – інтегральний критерій ефективності. Множину задач, що розв'язується системою, вважаємо інваріантною до зміни структур і стратегій управління.

Припустимо, що проводиться ретроспективне дослідження існування розв'язку задачі (4.41)-(4.42). Вважаємо, що є статистична інформація про варіанти структур в аналогічних системах (прототипах). Позначимо: $p_1, p_2, \dots, p_l$ – відносні частоти використання структур, l – їх кількість. Тоді апріорна ентропія вибору структури є такою:

$$H = -\sum_{i=1}^{l} p_i \log p_i, \quad \sum_{i=1}^{l} p_i = 1, \; p_i \geq 0. \tag{4.43}$$

Можливі декілька ситуацій:

- враховується лише об'єктивна інформація, для ПР значення ентропії повинне бути меншим певного рівня;
- враховуються судження експертів про альтернативні структури, компетентність експертів вважаємо однаковою;
- враховуються і судження, і компетентність експертів.

Розглянемо перший випадок.

Позначимо $H_{\min}$ – значення ентропії, досягнення якого достатньо для ПР. Кількість інформації в системі дослідження може бути збільшена за допомогою залучення нових експертів, появи нових об'єктів, що прямо або непрямо вказують на перевагу тієї чи іншої структури. Для двох елементів дослідження (експертів, об'єктів) називатимемо інформаційним елементом дані ОПР про елемент або про їх взаємодію. Тоді кількість інформаційних елементів в системі

$$R_n^k = \frac{k(n^2+n)}{2} = f(n^2) \qquad (3.44)$$

де k - кількість експертів, n – кількість об'єктів. У припущенні, що інформаційні елементи не суперечать один іншому, кількість інформації в системі $I(*)$ є пропорційною кількості інформаційних елементів, тобто існує залежність $I(*) = g(R_n^k)$. Якщо в систему був доданий новий об'єкт (рис. 4.1), то отримаємо

$$R_{n+1}^k = \frac{k}{2}\left(n^2+3n+1\right), \quad R_{n+1}^k - R_n^k = \frac{k}{2}(2n+1),$$

$$R_{n+m}^k - R_n^k = \frac{k}{2}\left(2nm+m^2\right),$$

де m – кількість доданих елементів.

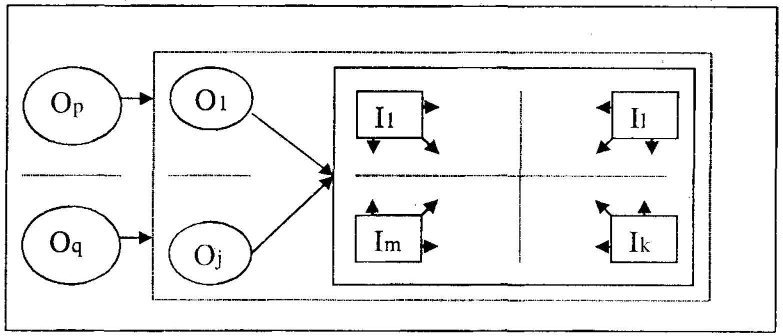


Рис. 4.1. Вибір оптимальної структури

Так, на рис. 4.1 I_t – підсистеми, або елементи, $O_1 - O_j$ – об'єкти і експерти, що беруть участь у визначенні оптимальної структури, $O_p - O_q$ – додаткові об'єкти і експерти. Якщо в дослідженні беруть участь нові експерти, то кількість інформаційних елементів

$$K = k\frac{n^2+n}{2} + k(k-1) + k\frac{(k-1)(k-2)}{2} = \frac{k}{2}(k^2+n^2+n-k),$$

де перший доданок – кількість елементів, що інформують про об'єкти і їх взаємодію, другий – інформаційні елементи, що свідчать про експертів, третій – про взаємодію експертів, їх взаємозалежність.

Припустимо, що додаткові експерти і об'єкти надходять в систему послідовно. Тоді

$$H_K = \sum_{i=1}^{l}\left(p_i + \varepsilon_K^i\right)\log(p_i + \varepsilon_K^i),$$

де $p_i + \varepsilon_K^i$ – скоригована ймовірність з урахуванням додавання елемента d_K. Якщо $\exists N$ таке, що $\forall K > N$ зберігається монотонність ε_K^i $\forall i$, або, що теж саме, $\varepsilon_K^i = g(K)$, де g – монотонна функція для $\forall K > N$, то $\exists K : H_K < H_{\min}$. Оптимальною структурою є та, для якої $p_i + \varepsilon_K^i$ має максимальне значення.

В іншому випадку враховуються судження експертів. Однією з можливих процедур зменшення ентропії є така. Кожному експерту пропонується впорядкувати ряд альтернативних об'єктів по мірі їх оптимальності, тобто отримати ранжовану систему

$$s_{i1} \prec s_{i2} \prec \ldots \prec s_{in},$$

де n - кількість можливих структур. Для кожного l-го об'єкта визначимо l_j – його місце в ряді j-го експерта. Підсумувавши величини l_j по j, отримаємо абсолютні оцінки об'єктів L_l. Помноживши L_l на p_l і виконавши нормування добутків, отримаємо уточнені значення ймовірностей у виразі (3.43).

Якщо враховувати і судження експертів, і їх компетентність, то уточнені значення розраховують за формулою:

$$p_i^* = \frac{L_i * p_i * \gamma_i}{\sum_{j=1}^{n} L_j * p_j * \gamma_j},$$

де γ_i – компетентність i-го експерта.

Пошук оптимальної стратегії управління системою, який полягає в розподілі ресурсів – процедура менш формалізована, ніж вибір структури. Значна залежність від взаємодії із зовнішнім середовищем, інших суб'єктивних факторів, становить значні труднощі при спробі формалізації задачі і представленні її для розв'язання як самостійно, так і за допомогою комп'ютерів.

Технологія проведення досліджень має своїми складовими:

- складання персоніфікованої анкети експерта;
- визначення плану дослідження (одноразове, багатократне, після дискусії і ознайомлення з підсумковими таблицями інших учасників анкетування, визначення дискусійних груп експертів, що дали однакові відповіді на питання, тестове анкетування для визначення початкових рівнів компетентності, процедури такого визначення, за процедурою взаємооцінки;
- аналіз результатів анкетування, включаючи визначення кореляції суджень експертів:
- видача рекомендацій, якщо це можливо.

Реалізація такої технології передбачає поділ суб'єктів дослідження на дві групи – системні аналітики і ОПР. Використовуючи програмні системи підтримки прийняття рішень скористаємось наступними алгоритмами.

Алгоритм роботи ОПР з програмною системою є таким.

Крок 1. Складання бази тем для дослідження розв'язуваної задачі Ω на макрорівні.

Крок 2. Складання бази питань.

Крок 3. Складання бази відповідей, якщо це необхідно.

Крок 4. Визначення ієрархії тем і питань.

Крок 5. Визначення кількості і компетентності експертів.

Крок 6. Складання бази тестів для визначення (уточнення) компетентності експертів (якщо необхідно).

Крок 7. Створення бази правил для оцінки компетентності експертів.

Крок 8. Складання бази рекомендацій.

Крок 9. Проведення оцінки компетентності експертів.

Крок 10. Занесення в базу даних інформації про експертів, їх кількість тощо.

Крок 11. Складання логічної схеми задач у вигляді графа "І-Або".

Алгоритм роботи системного аналітика (експерта) складається з такої послідовності кроків.

Крок 1. Визначення відповідей на глобальні питання (як якісного, так і кількісного характеру). На графі логічної схеми задач – верхній рівень.

Крок 2. Здійснення перевірки на виконання одного з критеріїв (належність області, асоціативна ознака тощо).

Крок 3. Якщо хоча б для однієї задачі верхнього рівня значення критерію є неприйнятним, то задача Ω не має розв'язку і дослідження припиняються.

Крок 4. Вивчення та аналіз статистичного матеріалу (для ретроспективного дослідження):

- перевірка гіпотез;
- формування моделей на базі відомих залежностей;
- корекція моделей, зокрема, за критерієм мінімуму розходження.

Крок 5. Дослідження нижнього рівня (задачі аналізу, оптимізації та прогнозування):

- прогнозування з використанням оптимізаційних процедур на базі апроксимуючих моделей і аналізу нечітких множин;
- дослідження властивостей лінійних динамічних систем за критеріями матричної алгебри;
- аналіз існуючої залежності і виявлення дестабілізуючих факторів з використанням дисперсійного, кореляційного і факторного аналізу;
- пошук оптимуму кусково-неперервних функцій.

Дослідження розв'язуваності задачі системного проектування має прогнозно-невизначений характер, тому оцінка якості отриманих розв'язків визначається значно пізніше. Рекомендується використовувати критерії, які мають властивості інформативності, чутливості, точності, потужності, а також, враховуючи невизначений характер – мінімальної дисперсії оцінок і максимальної ентропії, що вказує на точність і повноту процесів, які вивчаються [23, 42].

4.9. Додаткові відомості про задачі ранжування об'єктів

4.9.1. *Результати обчислювального експерименту з дослідження коефіцієнтів ранжованості, введених у параграфі* 4.3

З метою дослідження запропонованих у параграфі 4.3 коефіцієнтів ранжованості було проведено обчислювальний експеримент. На різних значеннях числових характеристик об'єктів було обчислено усі зазначені коефіцієнтів. Приклади числових рядів, до яких застосовувалися запропоновані коефіцієнти та значення відповідних коефіцієнтів наводяться в наступній таблиці.

Таблиця 4.2. **Значення коефіцієнтів ранжованості ряду для різних наборів числових характеристик**

№	Числові характеристики	K_r^1	K_r^3	K_r^4	K_r^5
1	1,2,3,4,5,6,10	0,33333	0,33333	0,314309	0,381944
2	1,2,3,4,5,1000	0,99499	0,99499	0,965661	0,955835
3	2,5,8,15,30,45,60	0,358620	0,34745	0,451621	0,453639
4	1,3,5,15,17,19,21	0,24	0,235101	0,489377	0,444444
5	2,3,5,10,11,14,15,20	0,158730	0,160128	0,452732	0,452834
6	2,5,7,9	0,142857	0,142857	0,164734	0,169312
7	2,5,7,9,11	0,111111	0,111111	0,134848	0,145833
8	1,2,3,4,5,6	0	0	0	0

1. Було проведено обчислення коефіцієнтів ранжованості для 1000 контрольних прикладів, у яких розмірність та набори значень величин, які слід упорядковувати, формувалися випадковим чином. Цей експеримент показав, що у всіх випадках значення коефіцієнтів Q_r^1, Q_r^3 домінують значення Q_r^4, Q_r^5, тобто $\{Q_r^1, Q_r^3\} > \{Q_r^4, Q_r^5\}$.

2. Коефіцієнти Q_r^1, Q_r^3, Q_r^3 є "чутливішими" до наборів числових характеристик об'єктів, "ранжованість" яких є сумнівною з точки зору експертів. Тобто, зазначені коефіцієнти є "критичнішими" до відхилення величин, що упорядковуються, від рівномірності, та "швидше" свідчать про відхилення від натурального ряду.

3. Межею ранжованості ряду для усіх коефіцієнтів логічно вибрати значення 0,5.

4. Усі коефіцієнти мають невелику обчислювальну складність і при необхідності можуть застосовуватися до множин, що складаються із тисяч чи мільйонів параметрів об'єктів.

5. Жоден коефіцієнт не досягає значення 1. Тобто неможливо ввести поняття абсолютно недопустимого ранжування.

4.9.2. *Ілюстрація алгоритму визначення медіани Кука–Сейфорда для метрики неспівпадання рангів, описаного в параграфі* 4.4

Для ілюстрації роботи алгоритму розглянемо випадок, коли 10 експертів строго ранжують 10 об'єктів, причому всі ранжування вважатимемо рівноцінними (табл. 4.3):

Таблиця 4.3. **Таблиця індивідуальних ранжувань об'єктів, заданих експертами**

1-й експерт:	$a_6 > a_1 > a_4 > a_2 > a_5 > a_9 > a_7 > a_8 > a_{10} > a_3$
2-й експерт:	$a_7 > a_2 > a_6 > a_4 > a_1 > a_8 > a_9 > a_3 > a_5 > a_{10}$
3-й експерт:	$a_2 > a_6 > a_1 > a_4 > a_7 > a_3 > a_8 > a_7 > a_5 > a_{10}$
4-й експерт:	$a_6 > a_7 > a_2 > a_1 > a_3 > a_5 > a_4 > a_{10} > a_9 > a_8$
5-й експерт:	$a_1 > a_2 > a_6 > a_9 > a_5 > a_4 > a_3 > a_7 > a_{10} > a_8$
6-й експерт:	$a_6 > a_5 > a_2 > a_3 > a_4 > a_1 > a_7 > a_8 > a_9 > a_{10}$
7-й експерт:	$a_2 > a_5 > a_4 > a_1 > a_7 > a_6 > a_3 > a_{10} > a_8 > a_9$
8-й експерт:	$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6 > a_7 > a_8 > a_9 > a_{10}$
9-й експерт:	$a_4 > a_2 > a_1 > a_5 > a_3 > a_6 > a_{10} > a_8 > a_7 > a_9$
10-й експерт:	$a_4 > a_1 > a_5 > a_2 > a_6 > a_3 > a_{10} > a_7 > a_9 > a_8$

Побудуємо за експертними ранжуваннями матрицю рангів об'єктів (табл. 4.4).

Таблиця 4.4. **Таблиця рангів об'єктів**

Експ. / Об'єкт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	5	3	4	1	6	4	1	3	2
2	4	2	1	3	2	3	1	2	2	4
3	10	8	6	5	7	4	7	3	5	6
4	3	4	4	7	6	5	3	4	1	1
5	5	9	9	6	5	2	2	5	4	3
6	1	3	2	1	3	1	6	6	6	5
7	7	1	8	2	8	7	5	7	9	8
8	8	6	7	10	10	8	9	8	8	10
9	6	7	5	9	4	9	10	9	10	9
10	9	10	10	8	9	10	8	10	7	

Можливі значення рангів об'єктів занесемо в табл. 4.5.

Таблиця 4.5. **Таблиця значень рангів об'єктів**

ранг / Об'єкт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6				
2	1	2	3	4						
3			3	4	5	6	7	8	9	10
4	1	2	3	4	5	6	7			
5		2	3	4	5	6	7	8	9	
6	1	2	3	4	5	6				
7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
8						6	7	8	9	10
9				4	5	6	7	8	9	10
10							7	8	9	10

На наступному кроці алгоритму будуються таблиці значень критеріальних функцій для 10 експертів. Наведемо приклад побудови такої таблиці лише для 1-го експертного ранжування в табл. 4.6.

Таблиця 4.6. **Таблиця значень критеріальних функцій для першого експерта**

$$f=\left\|\begin{array}{cccccccccc}
\lvert 1-2\rvert & \lvert 2-2\rvert & \lvert 3-2\rvert & \lvert 4-2\rvert & \lvert 5-2\rvert & \lvert 6-2\rvert & & & & \\
\lvert 1-4\rvert & \lvert 2-4\rvert & \lvert 3-4\rvert & \lvert 4-4\rvert & & & & & & \\
 & & \lvert 3-10\rvert & \lvert 4-10\rvert & \lvert 5-10\rvert & \lvert 6-10\rvert & \lvert 7-10\rvert & \lvert 8-10\rvert & \lvert 9-10\rvert & \lvert 10-10\rvert \\
\lvert 1-3\rvert & \lvert 2-3\rvert & \lvert 3-3\rvert & \lvert 4-3\rvert & \lvert 5-3\rvert & \lvert 6-3\rvert & \lvert 7-3\rvert & & & \\
 & \lvert 2-5\rvert & \lvert 3-5\rvert & \lvert 4-5\rvert & \lvert 5-5\rvert & \lvert 6-5\rvert & \lvert 7-5\rvert & \lvert 8-5\rvert & \lvert 9-5\rvert & \\
\lvert 1-1\rvert & \lvert 2-1\rvert & \lvert 3-1\rvert & \lvert 4-1\rvert & \lvert 5-1\rvert & \lvert 6-1\rvert & & & & \\
\lvert 1-7\rvert & \lvert 2-7\rvert & \lvert 3-7\rvert & \lvert 4-7\rvert & \lvert 5-7\rvert & \lvert 6-7\rvert & \lvert 7-7\rvert & \lvert 8-7\rvert & \lvert 9-7\rvert & \\
 & & & & & \lvert 6-8\rvert & \lvert 7-8\rvert & \lvert 8-8\rvert & \lvert 9-8\rvert & \lvert 10-8\rvert \\
 & & & \lvert 4-9\rvert & \lvert 5-9\rvert & \lvert 6-9\rvert & \lvert 7-9\rvert & \lvert 8-9\rvert & \lvert 9-9\rvert & \lvert 10-9\rvert \\
 & & & & & & \lvert 7-9\rvert & \lvert 8-9\rvert & \lvert 9-9\rvert & \lvert 10-9\rvert
\end{array}\right\|=\left\|\begin{array}{cccccccccc}
1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & & & \\
3 & 2 & 1 & 0 & & & & & & \\
 & & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & & \\
 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & & \\
6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & \\
 & & & & & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
 & & & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & & & & 2 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right\|$$

$$f^{1}_{\max}=41,\quad f^{1}_{\min}=0,\quad f^{*(1)}_{1}=20{,}5.$$

Аналогічно обраховуються значення критеріальних функцій та $f^{i}_{\max}$, $f^{i}_{\max}$, $f_{1}^{*(i)}, i\in I.$

Після першого відсіву ранги не фіксуються (табл. 4.7).

Таблиця 4.7. **Таблиця допустимих рангів об'єктів після першого відсіву**

ранг / Об'єкт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6				
2	1	2	3	4						
3					5	6	7	8		
4		2	3	4	5	6				
5				4	5	6	7			
6	1	2	3	4	5	6				
7				4	5	6				
8						6	7	8	9	10
9					5	6	7	8	9	
10							7	8	9	10

Другий відсів елементів відбувається на 8-й ітерації алгоритму (табл. 4.8).

Таблиця 4.8. **Таблиця допустимих рангів об'єктів після 8-ї ітерації алгоритму**

ранг / Об'єкт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		2	3	4	5					
2	1	2	3	4						
3						6	7			
4			3	4	5					
5					5	6				
6		2	3	4	5					
7					5					
8						6	7	8	9	10
9						6	7	8		
10							7	8	9	10

Можливі ранги об'єктів після фіксації деяких рангів представлено в табл. 4.9.

Таблиця 4.9. **Таблиця рангів об'єктів після фіксування рангів**

ранг / Об'єкт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		2	3	4	5					
2	1									
3						6	7			
4			3	4	5					
5					5	6				
6		2	3	4	5					
7					5					
8						6	7	8	9	10
9						6	7	8		
10							7	8	9	10

Останнє фіксування рангів відбувається на 26-й ітерації алгоритму. Таблиця рангів при цьому має такий вигляд (табл. 4.10).

Таблиця 4.10. **Таблиця рангів об'єктів після фіксування рангів**

ранг / Об'єкт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		2								
2	1									
3						6				
4				4						
5					5					
6			3							
7							7			
8								8	9	10
9								8	9	
10								8	9	10

На подальших ітерацій відсів елементів не здійснюється (недопустимість таблиці після відсіву). На тій ітерації, коли виконується умова $\left|f^{*s}-f^{*s-1}\right|<\varepsilon$, де ε – наперед задана точність обчислень, ітераційний процес закінчується і подальше результуюче ранжування знаходиться методом прямого перебору. Кількість варіантів можливого результуючого ранжування з урахуванням даних останньої таблиці можливих рангів всіх об'єктів дорівнює 4 (обчислено в ході побудови варіантів результуючих ранжувань). Таблиця всіх можливих варіантів ранжувань об'єктів для прямого перебору є такою (табл. 4.11).

Таблиця 4.11. **Таблиця можливих варіантів ранжувань об'єктів для прямого перебору**

Експ. Варіанти	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сума
1	14	20	12	20	15	14	16	9	15	16	151
2	14	20	11	19	14	15	17	12	18	15	155
3	14	21	13	17	11	17	17	12	19	13	154
4	15	23	15	15	13	17	15	12	16	11	152

В кожній клітині таблиці розміщено значення відстані між результуючим ранжуванням $j, j=1,..,15$, та ранжуванням відповідного експерта з індексом $i, i=1,..10$. В правій колонці розташовано значення узагальненого критерію. З таблиці видно, що мінімум узагальненого критерію досягається на першому варіанті можливого результуючого ранжування.

Кінцева таблиця, після прямого перебору варіантів має наступний вигляд (табл. 4.12).

Таблиця 4.12. **Таблиця рангів об'єктів після прямого перебору**

ранг Об'єкт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		2								
2	1									
3						6				
4				4						
5					5					
6			3							
7							7			
8								8		
9									9	
10										10

4.9.3. *Основні властивості алгоритму, наведеного у параграфі* 4.7

Основними властивостями, визначеними під час обчислювальних експериментів з дослідження наведеного алгоритму є:

1. У процесі роботи алгоритму значення суми $\Delta^1=\sum_{j=1}^{N}\delta_j^1$, монотонно зменшується, а значення суми $\Delta^2=\sum_{j=1}^{N}\delta_j^2$, при цьому монотонно зростає.

2. Значення суми Δ^1 є кратною трьом за побудовою.

3. На кожному кроці алгоритму сума Δ^1 зменшується на число, кратне трьом, а значення суми Δ^2 зменшується на величину, утричі меншу.

4. Має місце таке відношення $\Delta^1/3+\Delta^2=\text{const}=3\cdot\Delta^M$, де Δ^M – кількість усіх трійок n об'єктів, відношення між якими утворюють цикли. Тобто, на кожному кроці алгоритму сума $\Delta^1/3+\Delta^2$ є сталою величиною і дорівнює потроєній кількості усіх можливих трійок на множині n об'єктів, відношення між якими можуть утворювати цикли.

Література до розділу 4

1. *Антосяк П.П., Гнатієнко Г.М.* Алгоритм послідовного аналізу варіантів у задачі визначення медіани строгих парних порівнянь об'єктів // Теорія прийняття рішень: Праці ІІ-ї міжнародної школи-семінару. - Ужгород: УжНу, 2004. - С. 3.

2. *Антосяк П.П., Гнатиенко Г.Н.* Алгоритм последовательного анализа и отсеивания элементов в задаче определения медианы строгих ранжирований объектов // Knowledge-Dialogue-Solution: Proceeding of the XI-th International Conference (June 20-30, 2005). - Varna (Bulgaria). - Vol. 1. -Sofia, FOI-COMMERCE. - 2005. - Pp. 250-253.

3. *Волошин О.Ф., Гнатієнко Г.М., Єпик Н.Б.* Алгоритм розв'язання задачі прийняття порядку денного // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. - Київ. - 1997. - № 4. - С. 124-131.

4. *Волошин О.Ф., Гнатієнко Г.М.* Побудова колективного ранжування за мірою неспівпадання рангів об'єктів // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. - Київ. - 2001. - № 4. - С. 201-205.

5. *Волошин А.Ф., Гнатиенко Г.Н.* Построение компромиссной ранжировки в задаче группового выбора // Проблемы теоретической кибернетики: Тез. 8-ї Всесоюзн. конф., ч. 2. - Волгоград, 1990. - С.44-46.

6. *Волошин А.Ф.* Метод локализации области оптимума в задачах математического программирования /"Наука", Докл. АН СССР. - Т. 293. - № 3. - 1987. - С. 549-553.

7. Вычислительные методы выбора оптимальных проектных решений / Михалевич В.С., Шор Н.З. и др. - К.: Наук. думка, 1977. - 178 с.

8. *Гнатієнко Г.М.* Алгоритми обробки експертної інформації в задачах ранжування та їх застосування. Дис... канд. техн. наук. - К., 1994. - 133 с.

9. *Гнатієнко Г.М.* Алгоритми обробки експертної інформації в задачах ранжування та їх застосування: Автореф дис... канд. техн. наук: 05.13.16/ - К., 1994. - 16 с.

10. *Гнатієнко Г.М.* Алгоритм последовательного поиска строгой компромиссной ранжировки в задачах группового выбора // Киев. ун-т. - К., 1992. - 16 с. - Рус. - Деп. в УкрНИИНТИ 18.02.92, №212-Ук92.

11. *Гнатієнко Г.М.* Аналіз множини допустимих розв'язків в задачах ранжування об'єктів // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. - Київ. - 2000. - № 2. - С. 220-226.

12. *Гнатієнко Г.М., Гнатієнко О.Г.* Дослідження алгоритма побудови ранжування, найближчого до заданого довільного відношення на множині об'єктів // Теорія прийняття рішень: Праці ІІІ-ї міжнародної школи-семінару. – Ужгород: УжНу. – 2006. – С. 34–36.

13. *Гнатієнко Г.М.* Деякі математичні аспекти соціальної експертизи // Соціальна експертиза в Україні методологія, методика, досвід впровадження / За ред. Ю.І. Саєнка/ – К.: Ін-т Соціології НАНУ. – 2000. – 194 с.

14. *Гнатієнко Г.М., Дробот О.В.* Алгоритм побудови групового ранжування об'єктів множини експертних ранжувань // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат.науки. – Київ. – 2002. – № 3. – С. 193–197.

15. *Гнатієнко Г.М., Дробот О.В.* Застосування схеми послідовного аналізу варіантів для розв'язання задачі комівояжера // Обчислювальна та прикладна математика: Зб. тез міжнародної конференції (9.09.–10.09). – К., 2002. – С. 34.

16. *Гнатиенко Г.Н.* Задание предпочтений на множестве критериальных функций в задачах многокритериальной оптимизации // Вестн. Киев. ун-та. Моделирование и оптимизация сложн. систем. – 1990. – Вып. 9. – С. 87–92.

17. *Гнатієнко Г.М.* Класифікація задач однієї моделі аналізу даних // Київ. ун-т. – Київ, 1992. –89 с. – Укр. – Деп. в УкрНДІНТІ 18.06.92, № 911–Ук92.

18. *Гнатієнко Г.М.* Методи оцінки компетентності спеціалістів. Математичні та інформаційні проблеми прогнозування наслідків техногенних та природних катастроф // Соціально-економічні наслідки техногенних та природних катастроф: експертне оцінювання / Відп.ред.: В.В .Дурдинець, Ю.І. Саєнко. – К.: "Стилос", 2000. – 260 с.

19. *Гнатієнко Г.М.* Послідовні алгоритми знаходження строгого компромісного упорядкування об'єктів у задачах ранжування // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – Київ. – 2001. – № 4. – С. 218–225.

20. *Гнатієнко Г.М.* Процедура визначення адекватності ранжування об'єктів // Теорія прийняття рішень: Праці ІІ-ї міжнародної школи-семінару. – Ужгород: УжНу, 2004. – С. 24.

21. *Гнатієнко Г.М.* Процедура послідовного аналізу та відсіювання варіантів з урахуванням ациклічності розв'язку // Збірник наукових праць Кіровоградського національного технічного університету/техніка в сільськогосподарському виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація. – Вип. 16. – Кіровоград: КНТУ, 2005. – С. 294–299.

22. *Гохман О.Г.* Экспертное оценивание. – Воронеж, 1991. – 152 с.

23. *Железнов И.Г.* Сложные технические системы (оценка характеристик). – М.: Высшая школа, 1984. – 119 с.

24. *Кемени Дж.Г., Снелл Дж.Л.* Кибернетическое моделирование. – М.: Советское радио, 1972. – 192 с.

25. *Ларичев О.И., Мошкович Ш.М.* О возможностях получения от человека непротиворечивых оценок многомерных альтернатив / Дескриптивный подход к изучению процессов принятия решений при многих критеріях // Сб. трудов ВНИИСИ. – 1980. – № 9. – С. 58–66.

26. *Литвак Б.Г.* Меры близости и результирующие ранжирования // Кибернетика. – 1983. – № 1. – С. 57–63.

27. *Макаров И.М., Виноградская Т.М., Рубчинский А.А. и др.* Теория выбора и принятия решений: Учебное пособие. – М.: Наука, 1982. – 328 с.

28. *Матвеевский С.Ф.* Основы системного проектирования комплексов летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1987. – 239 с.

29. *Месарович М., Мако Д., Такахара Й.* Теория иерархических многоуровневых систем. – М.: Мир, 1973. – 344 с.

30. Методы и алгоритмы автоматизированного проектирования сложных систем управления/ Волкович В.Л., Волошин А.Ф. и др. – К.: Наук. думка, 1984. – 216 с.

31. Методы последовательной оптимизации в дискретных сетевых задачах оптимального распределения ресурсов / Михалевич В.С., Кукса А.И. – М.: Наука, 1983. – 208 с.

32. *Миркин Б.Г.* Анализ качественных признаков: Математические модели и методы. – М.: Статистика, 1976. – 166 с.

33. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. – М.: Наука, 1974. – 256 с.

34. *Михалевич В.С., Волкович В.Л.* Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. – М.: Наука, 1982. – 286 с.

35. *Михалевич В.С.* Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение. – I, II. / Кибернетика. – 1965. – № 1. – С. 45–55. – № 2. – С. 85–88.

36. *Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З.* Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования: Модели, методы, алгоритмы. – М.: Наука, 1986. – 264 с.

37. Модели и методы оптимизации надежности сложных систем / Волкович В.Л., Волошин А.Ф. и др. – К.: Наук. думка. – 1992. – 312 с.

38. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991. – 464 с.

39. *Паниотто В.И., Максименко В.С.* Количественные методы в социологических исследованиях. – К.: Наук. думка. – 1982. – 272 с.

40. Разработка математического и программного обеспечения

для задач принятия решений на основе экспертной информации в условиях локальной сети ЕС-СМ-ПЭВМ со стороны СМ ЭВМ / А.Ф. Волошин, Г.Н. Гнатиенко и др. - К., 1989. - 86 с.

41. *Саенко Ю.И.* Некоторые критерии сравнения по модулям отклонений / Экспертные оценки в социологических исследованиях. - К., 1990. - С. 297–308.

42. Снитюк В.Е. Об одном подходе к уменьшению энтропии выбора оптимальной структуры сложной системы // Збірник наук. праць. - К.: УТУ, ТАУ, 1998. - С. 217–220.

43. Экспертные оценки в социологических исследованиях/ С.Б.Крымский, Б.Б.Жилин, В.И.Паниотто и др. - К., 1990. - 320 с.

44. *G.Gnatienko.* Algorithm of consecutive definition of ranking of the objects nearest to the set cyclic relation between objects // International Journal "Information theories&applications". - Vol. 13. - Number 4. - 2006. - Pp. 349–353.

45. *Gnatienko G.M.* Consecutive algorithm of definition of the order nearest to the set any relation between objects // Knowledge-Dialogue-Solution: Proceeding of the XII-th International Conference (June 20-25, 2006). - Varna (Bulgaria). - Sofia, FOI-COMMERCE. - 2006. - Pp. 259–262.

46. *Voloshin O.F., Gnatienko G.M.* Sequencial algorythm for finding rigorous VG-median in the task of objects ranking // Problems of stochastic and discrete optimization: Abstracts of International Ukrainian-Polish Workshop (may 10–15, 2005). - Ukraine, Kaniv. - 2005. - Pp. 45–47.

Розділ 5 Методи і алгоритми нестрогого ранжування об'єктів

5.1. Процедури послідовного аналізу варіантів у задачах нестрогого ранжування об'єктів, що базуються на умові ациклічності розв`язку

При побудові процедури ПАВ, яка базується на використанні вимоги ациклічності розв`язку в задачі знаходження результуючого ранжування, застосовано схеми послідовного аналізу варіантів, запропоновані в роботах [4, 19]. Модифі-

кації зазначених схем та їх адаптація до нових класів задач з урахуванням специфіки задач ранжування розглядалися також у роботах [5-7].

По аналогії з означенням (4.35) базисного підваріанту, введеного у попередньому розділі для визначення строгих ранжувань об'єктів, введемо означення базисного підваріанту задачі визначення нестрогого ранжування.

Базисним підваріантом нестрогого ранжування об'єктів, який породжується трійкою об`єктів $\left(a_{i_1},a_{i_2},a_{i_3}\right)$, назвемо елементи вектора вигляду (3.28) з компонентами

$$\begin{gathered}\left(c_{t_1},c_{t_2},c_{t_3}\right),\ 1\le t_1<t_2<t_3\le N,\\ c_{t_1},c_{t_2},c_{t_3}\in c,\ \ c_{t_1},c_{t_2},c_{t_3}\in\{-1,0,1\},\end{gathered}\tag{5.1}$$

значення яких відповідають відношенням виду

$$\left(a_{i_1}\pi\ a_{i_2},a_{i_2}\pi\ a_{i_3},a_{i_3}\pi\ a_{i_1}\right),\ a_{i_1},a_{i_2},a_{i_3}\in A,\ \pi\in\{\succ,\approx,\prec\}.$$

Будемо розглядати лише символи $\{1,-1,0\}$, які відповідають відношенням π, $\pi\in\{\succ,\prec\ ,\sim\}$. Крім того, для задачі визначення нестрогих ранжувань об'єктів у просторі МПП (векторів виду (3.28)) справедливі всі означення, введені у розділі 4: спряжених елементів вектора виду (3.28), допустимого базисного підваріанта, повного варіанта, допустимого варіанта, базисного підваріанта фіксованого варіанта, скороченої множини всіх можливих векторів виду (3.28).

Сформулюємо кілька тверджень, які дозволять побудувати процедури, які використовують умови ациклічності розв'язку.

***Твердження* 5.1.** Умовою допустимості базисного підваріанту (5.1) є рівність його $(0,0,0)$, або наявність у ньому двох компонентів із значеннями -1 та 1.

Кількість можливих базисних підваріантів виду (5.1) для відношень $\pi\in\{\succ,\prec\ ,\sim\}$ складає $3^3=27$. Їх допустимість і справедливість твердження 5.1 легко перевіряється експериментом.

З побудови варіанту (3.28) слідує, що при перевірці допустимості базисних підваріантів виду (5.1), що утворюються об`єктами a_{i_1},a_{i_2},a_{i_3}, $1\le i_1<i_2<i_3\le n$, слід розглядати відношен-

ня у вигляді $\left(a_{i_1} \pi\ a_{i_2}, a_{i_2} \pi\ a_{i_3}, a_{i_1} \bar{\pi}\ a_{i_3}\right)$, де $\bar{\pi}$ – відношення, обернене до π: тобто $a_{i_1} \pi\ a_{i_3} \Leftrightarrow a_{i_3} \bar{\pi}\ a_{i_1}$.

***Твердження* 5.2**. На множині можливих базисних підваріантів, які утворюються елементами скорочених множин $X_{t_1}^s, X_{t_2}^s, X_{t_3}^s$, завжди існує допустимий базисний підваріант, якщо $\max\limits_{j=1,2,3} \left|X_{t_j}^s\right| = 3$, де символом $|\cdot|$ позначено потужність множини.

Для визначеності розглянемо ситуацію, коли $\left|X_{t_1}^s\right| = \left|X_{t_2}^s\right| = 1$, а $\left|X_{t_3}^s\right| = 3$. Можливі два випадки.

а) $X_{t_1}^s = X_{t_2}^s = \{0\}$. Тоді допустимий базисний підваріант утворюється вибором з множини $X_{t_3}^s$ елемента $x_{t_3} = 0$.

б) Щонайменше одна з множин $X_{t_1}^s, X_{t_2}^s$ не дорівнює $\{0\}$. Тоді, згідно твердження 5.1, коли обидві ці множини не представляють в базисному підваріанті елемент, рівний 1, він вибирається з третьої підмножини $X_{t_3}^s$. Таким же чином доводиться справедливість твердження для ситуації з елементом, рівним -1.

***Твердження* 5.3.** Якщо $\min\limits_{j=1,2,3} \left|X_{t_j}^s\right| > 1$, то на множині можливих базисних підваріантів, що утворюються елементами множин $X_{t_1}^s, X_{t_2}^s, X_{t_3}^s$, завжди існує допустимий базисний підваріант.

Оскільки доведення всіх можливих випадків наведеного твердження тривіальне, доведемо лише випадок, коли $\left|X_{t_j}^s\right| = 2$ для $\forall j \in \{1,2,3\}$. Якщо $X_{t_1}^s \neq X_{t_2}^s$, з цих множин завжди можна вибрати елементи 1 та -1 і тоді склад множини $X_{t_3}^s$ не має значення. Якщо $X_{t_1}^s = X_{t_2}^s$ і значення одного з елементів будь-якої множини дорівнює 0 (випадок рівності множин $X_{t_1}^s = X_{t_2}^s = \{-1,1\}$ є тривіальним), на множині $X_{t_3}^s$ або існує елемент, рівний 0, або $X_{t_3}^s = \{-1,1\}$ і, отже завжди може утворитися допустимий базисний підваріант.

Для опису наступних процедур введемо ще одне означення.

Циклічним елементом множини $X_t^s, t \in H$, називається такий елемент $x_t^Ц \in X_t^s$, який не утворює жодного допустимого базисного підваріанту зі спряженими з ним елементами.

5.1.1. *Процедура Ф скорочення множини допустимих розв'язків*

На основі введених означень та доведених тверджень можна побудувати *процедуру* Ф скорочення множини допустимих розв`язків $X^s = \left(X_1^s \times X_2^s \times \ldots \times X_N^s\right)$ за умовою ациклічності відношення, яке відповідає розв`язку задачі знаходження результуючого ранжування об`єктів множини A. Процедура Ф складається з N підпроцедур $\varphi_t, t \in H$, кожна з яких описується таким чином.

Крок 1. Коли потужність множини $\left|X_t^s\right| > 1$, перехід до кроку 2. Інакше кінець підпроцедури φ_t.

Крок 2. Визначення індексів об`єктів i_1, i_2, відношення між якими відповідає фіксованому значенню $x_t^Ф$ $\left(\left\{x_t^Ф\right\} = X_t^s\right)$, з умови

$$t = \tau\left(i_1, i_2\right) = \left(i_1 - 1\right)n + i_2 - \left(i_1 + 1\right)i_1 / 2,\ 1, \leq i_1 < i_2 \leq n.$$

Крок 3. Побудова множини можливих базисних підваріантів P_t між трійками об`єктів $\left(a_j, a_{i_1}, a_{i_2}\right)$ з елементами $p_j^{i_1 i_2} = \left(x_t, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}\right)$, $j \in I$, $j \neq i_1$, $j \neq i_2$, з урахуванням складу множин $X_{\tau_1}^s, X_{\tau_2}^s$, де

$$\tau_1 = \begin{cases} \tau\left(j, i_1\right), & \text{якщо } j < i_1, \\ \tau\left(i_1, j\right), & \text{якщо } i_1 < j < i_2 \text{ або } i_2 < j, \end{cases}$$

$$\tau_2 = \begin{cases} \tau\left(j, i_2\right), & \text{якщо } j < i_1 \text{ або } i_1 < j < i_2, \\ \tau\left(i_2, j\right), & \text{якщо } i_2 < j, \end{cases}$$

$$P_t = \left\{p_j^{i_1 i_2}\right\},\ t \in H,\ j \in I,\ j \neq i_1, j \neq i_2.$$

Крок 4. Перевірка допустимості базисних підваріантів з множини P_t за умовою ациклічності відповідних відношень. Можливі кілька випадків.

а) Допустимий базисний підваріант єдиний $|P_t^D|=1$ ($P_t^D \subseteq P_t$ – множина допустимих базисних підваріантів з P_t) і утворюється об`єктами з індексами $i_1, i_2, j_\Phi$. Позначимо зв`язані з ним індекси повного варіанту через τ_1^Φ, τ_2^Φ (поточний індекс підпроцедури – t).

а1) $\left|X_{\tau_1^\Phi}^S\right| = \left|X_{\tau_2^\Phi}^S\right| = 1$, тобто всі три змінні з індексами $t, \tau_1^\Phi, \tau_2^\Phi$ вже фіксовані. Кінець підпроцедури φ_t.

а2) Потужність хоча б однієї множини $X_{\tau_1}^S$ або $X_{\tau_2}^S$ є більшою від 1. Фіксуються ті змінні з множин $X_{\tau_1}^S, X_{\tau_2}^S$, які утворюють допустимий базисний підваріант $p_{j_\Phi}^{i_1 i_2}$. Кінець підпроцедури φ_t.

б) Допустимий базисний підваріант не єдиний: $|P_t^D|>1$. Підпроцедура φ_t не відсіює жодного елемента і закінчується.

в) На множині P_t немає допустимих базисних підваріантів $P_t^D = \varnothing$, тобто змінна x_t циклічна і на звуженій множині X_t^S не існує допустимих повних варіантів виду (3.28). Завершення підпроцедури φ_t. Необхідно збільшувати множину допустимих значень елементів розв`язку: $X_t^S \subset X_t^{S+1}$.

Процедура Ф закінчується, якщо жодна з підпроцедур $\varphi_t, t \in H$, вже не відсіює елементів, або коли в результаті роботи однієї з підпроцедур φ_t, а отже і всієї процедури Ф, виявлено відсутність на скороченій множині X^S допустимих варіантів.

5.1.2. *Процедура* Λ *пошуку та відсіювання циклічних елементів*

Процедура Λ пошуку та відсіювання циклічних елементів множин $X_t^S, t \in H$, складається з N підпроцедур $\lambda_t, t \in H$, які описуються такою послідовністю кроків.

Крок 1. Коли потужність множини $|X_t^s|=1$, кінець підпроцедури λ_t. Інакше – перехід до кроку 2.

Крок 2. Визначення з умови (5.2) індексів об`єктів i_1, i_2, відношення між якими відповідає значенню t-ї компоненти вектора виду (3.28).

Крок 3. Виділення з множини $X_t^S, t \in H$, фіксованого елемента x_t^Φ. Коли всі елементи множини $X_t^S, t \in H$, перевірено на допустимість, то закінчення підпроцедури λ_t.

Крок 4. Побудова множини можливих базисних підваріантів P_t на трійках об`єктів $(a_j, a_{i_1}, a_{i_2}), j \in I,\ j \neq i_1, j \neq i_2$, з елементами $p_j^{i_1 i_2} = (x_t, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}),\ j \in I,\ \ j \neq i_1,\ \ j \neq i_2$, з урахуванням складу множин $X_{\tau_1}^s, X_{\tau_2}^s$, де індекси τ_1, τ_2 визначаються відношеннями (5.2).

Крок 5. Пошук на множині P_t допустимих базисних підваріантів. Якщо множина допустимих базисних підваріантів порожня: $P_t^D = \varnothing$, то виключення елемента x_t^Φ з множини X_t^S як циклічного: $X_t^{S+1} = X_t^S \setminus \{x_t^\Phi\}$. Інакше множина X_t^S не змінюється. Перехід до кроку 3.

Процедура Λ закінчується після одноразового застосування кожної з підпроцедур $\lambda_t, t \in H$.

Зважаючи на специфіку задач ранжування об'єктів, процедури Ф та Λ складають основу ПАВ при пошуку розв'язків задач колективного ранжування.

5.2. Послідовний алгоритм розв'язання задачі визначення медіани Кемені-Снелла нестрогих ранжувань об'єктів

Розглянемо задачу побудови результуючого (групового, узгодженого, колективного тощо) нестрогого ранжування об`єктів множини (1.1) за матрицями відношень між об`єктами виду (1.4), які задано експертами у вигляді медіани Кемені-Снелла [5, 6, 9, 11]. Нормовані коефіцієнти компетентності експертів $\rho_i, i \in I$, які задають індивідуальні відношення переваги між об'єктами є відомими. Коефіцієнти відносної компетентності експертів можуть визначатися методами, наведеними у розділі 8 цієї монографії.

Така задача формалізується в класі однокритеріальних комбінаторних моделей [5, 11]

$$f(x)=\sum_{j\in H} f_j(x)=\sum_{j\in H}\sum_{i\in L}\left|c_{ij}-x_j\right|\to\min, \tag{5.3}$$

$$x_j\in X_j^0=\{-1,0,1\},\ j\in H, \tag{5.4}$$

$$x\in D^A\subset X^0,\ X^0=\prod_{j\in H} X_j^0. \tag{5.5}$$

5.2.1. *Процедура послідовного аналізу та відсіювання варіантів за обмеженнями на цільову функцію*

Ітераційна процедура W^S [15] пошуку розв`язку задачі (5.3)-(5.5), яка базується на ПАВ, описується наступним чином. Введемо такі позначення для множин, які містять компоненти початкових векторів вигляду (3.28) і які мають однакові значення:

$$H_j^-=\{j: c_{ij}=-1,\forall i\in L\},\quad H_j^0=\{j: c_{ij}=0,\forall i\in L\},$$
$$H_j^+=\{j: c_{ij}=1,\forall i\in L\}.$$

Очевидно, що $\left|H_j^-\right|+\left|H_j^0\right|+\left|H_j^+\right|=k.$

Введемо також позначення для сум відстаней до j-х компонент векторів, заданих експертами, залежно від значень цих компонент:

$$h_1^j=\left|H_j^0\right|+2\left|H_j^+\right|,\quad h_2^j=\left|H_j^-\right|+\left|H_j^+\right|,$$
$$h_3^j=2\left|H_j^-\right|+2\left|H_j^+\right|.$$

Введемо обмеження на ЦФ задачі (5.3):

$$\sum_{j\in H}\sum_{i\in L}\left|c_{ij}-x_j\right|\le f^{*S}=\left(f^{HS}+f^{BS}\right)/2, \tag{5.6}$$

де f^{HS}, f^{BS} – відповідно мінімальне та максимальне значення ЦФ на s-й ітерації, $s=0,1,2,...$:

$$f^{HS}=\sum_{j\in H}\min_{x_j\in X_j^S}\sum_{i\in L}\left|c_{ij}-x_j\right|,\quad f^{BS}=\sum_{j\in H}\max_{x_j\in X_j^S}\sum_{i\in L}\left|c_{ij}-x_j\right|. \tag{5.7}$$

Умова відсіювання елементів множини $X_j^S, \forall j\in H$, які не можуть приймати участі в побудові розв`язку $x\in X^S$ задачі (5.3)-(5.5), є такою:

$$\sum_{i\in L}\left|c_{ij}-x_j\right|>f^{*S}-\sum_{\substack{t\in H\\ t\neq j}}\sum_{i\in L}\left|c_{ij}-\arg\min_{x_t\in X_t^S}\left|c_{it}-x_t\right|\right|.$$

Коли одержана в результаті відсіювання елементів множина залишається великою, то значення f^{*S} збільшується (вибирається, наприклад, значення $f^{*S+1}=\left(f^{*S}+f^{BS}\right)/2$). Коли на множині X^S не існує варіантів x, які задовольняють умові (5.6), або не існує жодного допустимого за умовою (5.6) ациклічного варіанта, значення f^{*S} зменшуємо (покладаючи, наприклад, $f^{*S+1}=\left(f^{*S}+f^{HS}\right)/2$). Алгоритм, який реалізує процедуру W^S, складається з такої послідовності кроків.

Крок 1. Обчислення допусків на елементи x_j за формулою:

$$\Delta f_{ij}=\sum_{\substack{t\in H\\ t\neq j}}\sum_{i\in L}\left|c_{ij}-\arg\min_{x_t\in X_t^S}\left|c_{it}-x_t\right|\right|.$$

Крок 2. Якщо значення $f^{(j)*}=f^{*S}-\Delta f_{ij}>\max\left(h_1^j,h_2^j,h_3^j\right)$, то відсіювання не відбувається. Коли $h_{l_1}^j<f^{(j)*}<h_{l_2}^j$ та $h_{l_1}^j<$ $<f^{(j)*}<h_{l_3}^j$, де $l_1,l_2,l_3\in\{1,2,3\}$, то $X_j^S=X_j^{S-1}\setminus\left\{x_j^{l_1}\right\}$ для $h_{l_1}^j<h_{l_2}^j$ та $h_{l_1}^j<h_{l_3}^j$.

Крок 3. У випадку $f^{(j)*}<\min\left(h_1^j,h_2^j,h_3^j\right)$, або коли всі елементи бодай однієї множини, які повинні залишитися після кроку 2, вже відсіяні попередньою процедурою W^{S-1}, задача є недопустимою. Кінець процедури W^S.

5.2.2. *Алгоритм знаходження результуючого ранжування*

З урахуванням описаних процедур W,Φ,Λ можна побудувати алгоритм аналізу та відсіювання недопустимих елементів в задачі знаходження результуючого ранжування.

Крок 1. Обчислення значення f^{*S} за формулами (5.6)–(5.7).

Крок 2. Застосування процедури W^S. Якщо відсіювання є недопустимим, перехід до кроку 7. Інакше – до наступного кроку.

Крок 3. Застосування процедури Ф. Якщо відсіювання є недопустимим, перехід до кроку 7. Інакше – до наступного кроку.

Крок 4. Обчислення границь зміни ЦФ f^{HS}, f^{BS}. Якщо границі змінилися, тобто $f^{HS} > f^{HS-1}$ або $f^{BS} > f^{BS-1}$, перехід до кроку 1, інакше – до кроку 5.

Крок 5. Допустиме відсіювання: $X_j^S \neq \varnothing$ для $\forall j \in H$. Якщо на множині X^S існують допустимі повні варіанти і загальна кількість можливих варіантів, утворених множиною X^S, яка складає $y^s = \prod\limits_{j \in H} \left| X_j^S \right|$, є великою для прямого перебору, перехід до наступного кроку. Інакше – до кроку 8.

Крок 6. Зменшення значення f^{*S} – вибір, наприклад, методом дихотомії, нового значення $f^{*S+1} = \left(f^{*S} + f^{HS} \right)/2$. Перехід до кроку 2.

Крок 7. Збільшення f^{*S} – вибір нового значення f^{*S+1} з інтервалу $f^{*S+1} \in \left(f^{*S}, f^{HS} \right)$. Перехід до кроку 2.

Крок 8. Застосування процедури Λ. Якщо Λ здійснює відсіювання циклічних елементів, перехід до кроку 1. Інакше – до наступного кроку.

Крок 9. Якщо кількість можливих варіантів у множині X^S не є великою, то шляхом прямого перебору знаходимо розв\`язок x^*, який є допустимим варіантом і мінімізує узагальнений критерій

$$\min_{x \in X^S} \{ F(x) \} = \min_{x \in X^S} \sum_{i \in L} \rho_i \sum_{j \in H} \left| c_{ij} - x_j \right|. \tag{5.8}$$

Якщо такий розв\`язок є єдиним і задовольняє нерівність (5.6), то він є шуканим розв\`язком і відповідає результуючому ранжуванню – медіані Кемені–Снелла.

Крок 10. Якщо допустимий варіант, що мінімізує критерій виду (5.8), не є єдиним, тобто побудовано множину X^{*S} еквівалентних за критерієм (5.8) розв\`язків, то розв\`язком x^* задачі (5.3)–(5.5) може бути вибраний той, на якому мінімізується критерій

$$\min_{x \in X^{*S}} \{ F(x) \} = \min_{x \in X^{*S}} \max_{i \in L} \rho_i \sum_{j \in H} \left| c_{ij} - x_j \right|, \tag{5.9}$$

і виконується співвідношення (5.6).

Крок 11. Якщо умова (5.6) для $\forall x^* \in X^S$ не виконується, то знову здійснюється застосування процедур W, Φ, Λ, які полягають у відсіюванні тих елементів множини $x \in X^{*S}$, які не дозволяють побудувати допустимі варіанти і задовольняють нерівності $f(x) \le f(x^*), x \in X^{*S}$. При цьому відсіювання відбувається при перевірці нерівності (5.6), в яку замість значення f^* підставляється значення $f(x^*)$. Після застосування процедур W, Φ, Λ будується множина $\tilde{X}(x^*)$.

Крок 12. Знаходження розв\`язку $x^* \in \tilde{X}(x^*)$, який мінімізує критерії (5.8) та (5.9).

5.3. Багатокритеріальна модель та послідовний алгоритм знаходження компромісного розв\`язку нестрогих ранжувань об'єктів

Багатокритеріальну постановку задачі ранжування вперше запропоновано у роботі [3]. Методи та алгоритми розв'язання такої задачі розглядалися у роботах [5, 6, 9, 11]. Задача визначення колективного ранжування об'єктів має вигляд:

$$\rho_i d\left(R, B^i \right) \to \min_{R \in \Re}, \; i \in L,$$

де ρ_i – задані чи обчислені нормовані коефіцієнти компетентності експертів; $d\left(R, B^i \right)$ – відстань між відношеннями $R \in \Re$ та $B^i \in \Re, i \in L$; R – відношення, яке відповідає нестрогому ранжуванню об\`єктів; $\Re$ – множина всіх можливих нестрогих ранжувань заданої кількості об\`єктів.

Задача знаходження компромісного ранжування об`єктів в наведеній постановці формалізується в класі багатокритеріальних комбінаторних моделей [3, 5, 11] для нестрогих ранжувань:

$$f_i(x)=\sum_{j\in H} f_i(x_j)=\sum_{j\in H}|c_{ij}-x_j|\to\min,\ i\in L, \tag{5.10}$$

$$x_j\in X_j^0=\{-1,0,1\},\ j\in H, \tag{5.11}$$

$$x\in D^A\subset X^0,\ X^0=\prod_{j\in H} X_j^0. \tag{5.12}$$

Розв`язок задачі (5.10)-(5.12) може бути одержаний методом, викладеним у роботах [5, 11]. Одним з елементів методу є використання процедури W^2, описаної в роботі [15]. У даному випадку вона є ітераційною процедурою з параметром k_0, на кожному кроці якої $s=0,1,2,...$, при $k_0=k_0^S$ перевіряється сумісність нерівностей

$$\sum_{j\in H}|c_{ij}-x_j|\le f_i^*(k_0^S),\ i\in L,\ x_j\in X_j^S, \tag{5.13}$$

де величини $f_i^*(k_0^S)$ для $\forall i\in L$ знаходяться із співвідношень

$$f_i^*(k_0^S)=f_i^{0S}+k_0^{*S}(f_i^{HS}-f_i^{0S})/\rho_i,\ \ \forall i\in I, \tag{5.14}$$

в яких значення f_i^{H0}, f_i^{0S} визначаються з урахуванням сепарабельності критеріїв, тобто

$$f_i^{HS}=\sum_{j\in H}\min_{x_j\in X_j^S} f_i(x_j),\ \ f_i^{0S}=\sum_{j\in H}\max_{x_j\in X_j^S} f_i(x_j). \tag{5.15}$$

Введемо позначення

$$x^i=\arg\min_{x\in X^S} f_i(x)=\sum_{j\in H}\arg\min_{x\in X^S} f_i(x_j),\ \ \forall i\in L,$$

$$x^i\setminus x_j=(x_1^i,...,x_{j-1}^i,x_{j+1}^i,...,x_N^i).$$

Тоді умови відсіювання елементів множини $X_j^S, j\in H$, які не приймають участі в побудові розв`язку задачі (5.10)-(5.12) $x\in X^S$, і задовольняють умовам (5.13) при застосуванні процедури ПАВ [15], є такими:

$$f_i(x_j^i)>f_i^{*j}(k_0^S),\forall i\in L, j\in H, \tag{5.16}$$

де $f_i^{*j}(k_0^S)=f_i^*(k_0^S)-f_i(x^i\setminus x_j)=f_i^*-\sum_{\substack{t\in H\\ t\ne j}} f_i(x_t^i),\ \ x_t^i=\arg\min_{x_t\in X_t^S} f_i(x_t)$.

При цьому слід мати на увазі, що вектор x має задовольняти умові ациклічності, тобто належати множині допустимих варіантів D^A умови (5.12).

В ЗБКО при застосуванні методу обмежень вибір параметра k_0 суттєво впливає на швидкість збіжності процедури. Побудуємо оцінку верхньої границі зміни цього параметра. Для цього підставимо значення (5.14), (5.15) в нерівності (5.16) і перетворимо їх до виду

$$f_i(x_j)>f_i^0+k_0^*(f_i^H-f_i^0)/\rho_i-\left(f_i^0-\min_{x_j\in X_j^S} f_i(x_j)\right).$$

У ліву частину цієї нерівності підставимо верхню границю значення функції $f_i(x_j)$, тобто $\max_{x_j\in X_j^S} f_i(x_j)$. Зробимо необхідні скорочення і випишемо верхню границю параметра k_0 в явному вигляді:

$$k_0^B=\max_{i\in L}\left(\rho_i/(f_i^H-f_i^0)\left(\max_{j\in H}\left(\max_{x_j\in X_j^S} f_i(x_j)-\min_{x_j\in X_j^S} f_i(x_j)\right)\right)\right). \tag{5.17}$$

З виразу (5.17) видно, що початкове значення верхньої границі параметра k_0 є рівним

$$k_0^B=\max_{i\in L}(\rho_i/f_i^H)-\varepsilon,$$

де $\varepsilon>0-$ є достатньо малим числом з інтервалу $(0,1)$.

Оскільки початкові області допустимих значень адитивних складових критеріальних функцій $f_i(x_j), i\in L, j\in H$, рівні $\{0,1,2\}$ і в результаті застосування процедур відсіювання з них можуть бути виключені тільки значення 1 та 2, оптимальні значення на початковому етапі рівні $f_i^0=0,\forall i\in L$, нижня межа зміни співвідношення (5.14) така:

$$f_i^*(k_0)=f_i^0+k_0^*(f_i^H-f_i^0)/\rho_i>1-\varepsilon.$$

Звідси знаходимо мінімальне значення k_0^H параметра k_0 у вигляді $k_0^H=\min_{i\in L}(1-\varepsilon)(\rho_i/f_i^H)$.

5.3.1. *Процедура послідовного аналізу та відсіювання варіантів за обмеженнями на критеріальні функції*

Процедура W^S послідовного аналізу та відсіювання недопустимих елементів множини $X^S=\prod_{j\in H}X_j^S$ [15] для розв'язання задачі (5.10)-(5.12) складається з k підпроцедур $W^i\left(k_0^S\right), i\in L$, кожна з яких полягає у відсіюванні тих елементів множин $X_j^S, \forall j\in H$, які не дозволяють побудувати варіанти, які б задовольняли нерівностям (5.13). Це здійснюється при перевірці i-ї нерівності системи (5.16) для фіксованого значення $k_0=k_0^S$ на s-й ітерації процедури, $s=0,1,2,...$, причому, $X_j^S=\{-1,0,1\}$, $\forall j\in H$. Алгоритм, який реалізує підпроцедуру $W^i\left(k_0^S\right), i\in L$, складається з такої послідовності кроків.

Крок 1. Обчислення допусків на елементи $x_j, j\in H$, для i-го вектора, який відповідає відношенню $B^i, i\in L$, за формулою $\Delta f_{ij}=\sum_{\substack{t\in H\\ t\neq j}}f_i\left(x_t^i\right)$, де $x_t^i=\arg\min_{x_t\in X_t^S}f_i\left(x_t\right)$.

Крок 2. Якщо значення $f_i^{(j)*}=f_i^*\left(k_0^S\right)-\Delta f_{ij}>2$ або коли $1<f_i^{(j)*}<2$ і $c_{ij}=0$, відсіювання не відбувається. Для $1<f_i^{(j)*}<2$ при $c_{ij}=-1$, маємо $X_j^S=X_j^{S-1}\setminus\{1\}$. При $c_{ij}=1$, маємо $X_j^S=X_j^{S-1}\setminus\{-1\}$. Для $f_i^{(j)*}<1$ має місце $X_j^S=\{c_{ij}\}$.

Крок 3. Для випадків, не передбачених кроком 2, або якщо елементи бодай однієї множини $X_j^{S-1}, j\in H$, вказані на кроці 2, відсіяно попередньою процедурою $W(k_0^{S-1})$ або однією з підпроцедур $W^t\left(k_0^S\right), t\neq i,\ t,i\in L$, то відсіювання є недопустимим. Завершення підпроцедури $W^i\left(k_0^S\right)$.

Процедура $W\left(k_0^S\right)$ закінчується після k-кратного застосування підпроцедур $W^i\left(k_0^S\right), i\in L$. Якщо хоча б одна з підпроцедур закінчилася "аварійно", то очевидно, що уся процедура W_2 здійснила недопустиме відсіювання.

5.3.2. *Алгоритм знаходження "компромісного" ранжування*

З урахуванням описаних процедур W,Φ,Λ побудуємо алгоритм послідовного аналізу та відсіювання недопустимих елементів в задачі (5.10)-(5.12) знаходження компромісного ранжування.

Крок 1. Оптимальні значення критеріїв (5.10) задачі (5.10)-(5.12) покладаються рівними нулю: $f_i^0=0, i\in L$. Здійснюється обчислення найгірших значень критеріїв за формулою (5.15). Зауважимо при цьому, що $\max_{l=1,2,3}f_i\left(x_j^l\right)=\{2$ при $c_{ij}\neq 0$; 1 при $c_{ij}=0\}$, де $x_j^l\in X_j^l, l=1,2,3, j\in H$.

Крок 2. Обчислення початкового значення параметра k_0.

Крок 3. Обчислення величин $f_i^*\left(k_0^S\right), i\in L$, за формулою (5.14).

Крок 4. Застосування процедури $W\left(k_0^S\right)$. Коли відсіювання є недопустимим, то перехід до кроку 9. Інакше – до наступного кроку.

Крок 5. Застосування процедури Ф. Якщо відсіювання є недопустимим, то перехід до кроку 9. Інакше – перехід до наступного кроку.

Крок 6. Обчислення границь зміни критеріїв $f_i^H, f_i^0, \forall i\in L$. Якщо границі змінилися, перехід до кроку 3, інакше – перехід до наступного кроку.

Крок 7. Допустиме відсіювання: $X_j^S\neq\varnothing$ для $\forall j\in H$. Коли на множині X^S існують допустимі повні варіанти і загальна кількість можливих варіантів, яка складає $y^S=\prod_{j\in H}\left|X_j^S\right|$, є великою для прямого перебору, то перехід до наступного кроку. Інакше – до кроку 10.

Крок 8. Зменшення параметра k_0^S – вибір значення k_0^{S+1}, наприклад, методом дихотомії з інтервалу $\left(0,k_0^S\right)$. Перехід до кроку 3.

Крок 9. Збільшення параметра k_0^S – вибір значення k_0^{S+1} з інтервалу $\left(k_0^S, k_0^{\max}\right)$. Перехід до кроку 3.

Крок 10. Застосування процедури Λ. Якщо процедура Λ здійснює відсіювання циклічних елементів, перехід до кроку 3. Інакше – до наступного кроку.

Крок 11. Якщо кількість можливих варіантів у множині X^S є невеликою, то шляхом прямого перебору знаходимо розв`язок x^*, який є допустимим варіантом і мінімізує узагальнений критерій

$$\min_{x\in X^S}\{F(x)\}=\min_{x\in X^S}\max_{i\in L}\rho_i\sum_{j\in H}\left|c_{ij}-x_j\right|. \qquad (5.18)$$

Якщо такий розв`язок є єдиним і задовольняє нерівності (5.13), то він є шуканим компромісним розв`язком.

Крок 12. Якщо допустимий варіант задачі (5.10)–(5.12), що мінімізує критерій вигляду (5.18), не є єдиним, тобто побудовано множину X^{*S} еквівалентних за критерієм (5.18) розв`язків, то розв`язком x^* задачі може бути вибраний той, на якому мінімізується критерій

$$\min_{x\in X^{*S}}\{F(x)\}=\min_{x\in X^{*S}}\sum_{i\in L}\rho_i\sum_{j\in H}\left|c_{ij}-x_j\right|, \qquad (5.19)$$

і виконується співвідношення (5.13).

Крок 13. Якщо умови (5.13) для $\forall x^*\left(k_0^S\right)\in X^S$ не виконуються, то знову застосовуються процедури W,Φ,Λ, які полягають у відсіюванні тих елементів множини $x^{*S}\in X^{*S}$, які не дозволяють побудувати допустимі варіанти, що задовольняли б нерівностям $f_i(x)\le f_i\left(x^*\left(k_0^S\right)\right),\forall i\in L, x\in X^{*S}$. При цьому відсіювання відбувається при перевірці системи нерівностей (5.16), в які замість значень $f_i^*\left(k_0^S\right),\forall i\in L,$ підставляються значення $f_i\left(x^*\left(k_0^S\right)\right),\forall i\in L.$ Після застосування процедур W,Φ,Λ будується множина $\tilde{X}\left(x^*\left(k_0^S\right)\right)$.

Крок 14. Знаходиться розв`язок $x^*\in\tilde{X}\left(x^*\left(k_0^S\right)\right)$, який мінімізує критерії (5.18) та (5.19).

5.4. Визначення квазіпорядку, найближчого до заданого нетранзитивного відношення

Побудова лінійного квазіпорядку вимагає внесення досить великих змін у задану експертом структуру переваг виду (1.4). Тому вирішенню цієї проблеми приділяється значна увага і на сьогодні існує досить багато моделей, що певним чином апроксимують лінійними квазіпорядками задані експертом циклічні відношення на множині A.

Задача знаходження лінійного квазіпорядку, найближчого до заданого на множині (1.1) циклічного відношення (1.4), може бути формалізована у класі моделей дискретного програмування [5, 6]

$$\sum_{j\in H}\left|c_j-x_j\right|\to\min, \qquad (5.20)$$

$$x_j\in X_j^0=\{-1,0,1\},\ j\in H, \qquad (5.21)$$

$$x\in D^A\subset X^0,\ X^0=\prod_{j\in H}X_j^0. \qquad (5.22)$$

Специфіка задачі (5.20)–(5.22) полягає у тому, що її розв`язок $x\in X$ має бути таким, щоб матриця $R$, якій відповідає знайдений вектор $x$, задовольняла умові ациклічності, оскільки відношення, яке задається цією матрицею, повинно відповідати нестрогому ранжуванню об`єктів множини (1.1), тобто належати до класу лінійних квазіпорядків.

5.4.1. *Процедура послідовного аналізу та відсіювання варіантів за обмеженнями на цільову функцію*

Ітераційна процедура W_2 [15] одержання розв'язку задачі (5.20)–(5.22), яка базується на ПАВ, починається з введення обмеження на ЦФ (5.20):

$$\sum_{j\in H}\left|c_j-x_j\right|\le f^{*S}=\left(f^{HS}+f^{BS}\right)/2, \qquad (5.23)$$

де f^{HS}, f^{BS} – відповідно мінімальне та максимальне значення ЦФ на s-й ітерації, $s=0,1,2,\dots$:

$$f^{HS}=\sum_{j\in H}\min_{x_j\in X_j^S}\left|c_j-x_j\right|,\quad f^{0S}=\sum_{j\in H}\max_{x_j\in X_j^S}\left|c_j-x_j\right|. \qquad (5.24)$$

Умова відсіювання елементів множини $X_j^S, \forall j \in H$, які не можуть приймати участі в побудові розв`язку $x \in X^S$ задачі (5.20)-(5.22), є такою:

$$\left|c_j - x_j\right| > f^{*S} - \sum_{\substack{t \in H \\ t \neq j}} \left|c_j - \arg\min_{x_t \in X_t^S} \left|c_t - x_t\right|\right|.$$

При цьому слід мати на увазі, що вектор x повинен задовольняти умові ациклічності. Якщо одержана в результаті відсіювання елементів множина X^S залишається великою, то значення f^{*S} збільшується (вибирається, наприклад, значення $f^{*S+1} = \left(f^{*S} + f^{*0}\right)/2$). Якщо на множині X^S не існує варіантів x, які задовольняють умові ациклічності, значення f^{*S} зменшується (покладається, наприклад, $f^{*S+1} = \left(f^{*S} + f^{*H}\right)/2$ або рівним іншому значенню з інтервалу $\left(f^{*HS}, f^{*S}\right)$).

Таким чином, процедура W_2 полягає у відсіюванні елементів множин $X_j^S, \forall j \in H$, які не дозволяють побудувати варіанти, що задовольняли б нерівності (5.23). Алгоритм, що реалізує процедуру W_2, складається з таких кроків.

Крок 1. Обчислення допусків на елементи x_j за формулою:

$$\Delta f_j = \sum_{\substack{t \in H \\ t \neq j}} \left|c_j - \arg\min_{x_t \in X_t^S} \left|c_t - x_t\right|\right|.$$

Крок 2. Якщо значення $f^{(j)*} = f^{*S} - \Delta f_j > 2$ або, якщо $1 < f^{(j)*} < 2$ і $c_j = 0$, то відсіювання не відбувається. Для $1 < f^{(j)*} < 2$ при $c_j = -1$, маємо $X_j^S = X_j^{S-1} \setminus \{1\}$. При $c_j = 1$, маємо $X_j^S = X_j^{S-1} \setminus \{-1\}$. Для $f^{(j)*} < 1$ множина X_j^S складається з одного елемента: $X_j^S = \{c_j\}$.

Крок 3. Для випадків, не передбачених умовами, описаними на кроці 2, або коли елементи хоча б однієї множини $X_j^{S-1}, j \in H$, які повинні залишитися після кроку 2, відсіялися попередньою процедурою W^{S-1}, то відсіювання є недопустимими. Завершення процедури W^S.

5.4.2. *Алгоритм знаходження результуючого ранжування*

З урахуванням описаних вище процедур W, Φ, Λ можна побудувати алгоритм послідовного аналізу та відсіювання недопустимих елементів в задачі визначення лінійного квазіпорядку, найближчого до заданого нетранзитивного відношення [5, 6].

Крок 1. Оптимальне значення ЦФ (5.20) задачі (5.20)-(5.22) покладається рівним нулю: $f^0 = 0$. Обчислюється найгірше значення ЦФ за формулою (5.24). Зауважимо, що

$$\max_{l=1,2,3} f\left(x_j^l\right) = \left\{2 \text{ при } c_j \neq 0;\ 1 \text{ при } c_j = 0\right\},$$

де $x_j^l \in X_j^l, l = 1,2,3, j \in H$.

Крок 2. Обчислення величин f^{*S} за формулами (5.23) та (5.24).

Крок 3. Застосування процедури W^S. Якщо відсіювання є недопустимим, то перехід до кроку 8. Інакше – перехід до наступного кроку.

Крок 4. Застосування процедури Ф. Коли відсіювання є недопустимим, то перехід до кроку 8. Інакше – до наступного кроку.

Крок 5. Обчислення границь зміни ЦФ f^H, f^0. Якщо границі змінилися, перехід до кроку 2, інакше – перехід до наступного кроку.

Крок 6. Якщо на множині X^S існують допустимі повні варіанти і загальна кількість можливих варіантів, яка складає $y^S = \prod_{j \in H} \left|X_j^S\right|$, є великою для прямого перебору, то перехід до наступного кроку. Інакше – до кроку 9.

Крок 7. Зменшення значення f^{*S} – вибір f^{*S+1}, наприклад, методом дихотомії $f^{*S+1} = \left(f^{*S} + f^{HS}\right)/2$ або іншим методом. Перехід до кроку 2.

Крок 8. Збільшення f^{*S} – вибір f^{*S+1} з інтервалу $f^{*S+1} \in$ $\in (f^{*S}, f^{BS})$. Перехід до кроку 2.

Крок 9. Застосування процедури Λ. Якщо процедура Λ здійснює відсіювання циклічних елементів, перехід до кроку 2. Інакше – до наступного кроку.

Крок 10. Коли кількість можливих розв`язків на множині $X^S$ є не великою, то шляхом прямого перебору знаходимо розв`язок x^*, який є допустимим варіантом і мінімізує ЦФ (5.20) задачі (5.20)–(5.22).

Якщо знайдений розв`язок є не єдиним, то експертові пропонується вибрати серед еквівалентних за ЦФ (5.20) задачі (5.20)–(5.22) той розв'язок, який йому найбільше підходить. Або для порівняння розв`язків застосовується інша ЦФ чи інша метрика.

5.5. Аналіз базисних підмножин у задачах нестрогого ранжування об'єктів

Через велику "довжину" задачі знаходження колективного ранжування у просторі векторів вигляду (3.28) специфічну множину можливих значень кожного елемента вектора розв'язків, яка складається всього з трьох елементів $\{-1,0,1\}$, процедура W_2 аналізу та відсіву заздалегідь недопустимих варіантів, часто зупиняється і породжує при варіації параметра k_0 лише дві ситуації – недопустиму задачу або неможливість відсіву. Процедури Φ та Λ відсіву за умовою ациклічності розв'язку також не можуть суттєво допомогти в цій ситуації, оскільки, по-перше, є варіантом повного перебору і, по-друге, не є достатньо чутливими до наявності єдиного базисного підваріанту.

З метою більш повного використання можливостей ПАВ слід здійснити аналіз базисних підмножин. Позначимо матрицю усіх можливих значень, яких можуть набувати елементи базисного підваріанту через

$$P^0 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (5.25)$$

Множину, яка складається з елементів матриці (5.25), також будемо позначати через P^0 і називати її *базисною підмножиною*. Множини вигляду P^0 утворюються з множини X^0 шляхом об'єднання трьох різних стовпчиків матриці X^0: $P^0 = X_i^0 \cup$ $\cup X_j^0 \cup X_l^0$, $1 \le i < j < l \le N$, $X_i^0, X_j^0, X_l^0 \in X^0$. *Базисною підмножиною* $P^0 = \prod_{i=1}^{3} P_i^0$, $P_i^0 = (-1,0,1)^T$ назвемо підмножину, з елементів якої утворюються базисні підваріанти. *Звуженою базисною підмножиною* P^S, $P^S \subset P^0, s = 1,2,...$, назвемо підмножину, яка утворюється з базисної підмножини P^0 шляхом вилучення з неї окремих елементів.

Метою аналізу варіантів при знаходженні розв'язку задачі ранжування об'єктів є знаходження та відсів тих елементів множини X^0, які є заздалегідь неперспективними, тобто не можуть приймати участі у побудові допустимого варіанта, який є розв'язком задачі. Тому для дослідження множини X^0 слід досліджувати властивості її підмножин вигляду P^0. Для виявлення властивостей цих підмножин було проведено обчислювальний експеримент з метою визначення множин особливих конфігурацій звужених підмножин. Доцільно виділити серед можливих підмножин множини P^0 такі:

- множину допустимих підваріантів;
- множини з єдиним допустимим підваріантом;
- множину недопустимих варіантів;
- множини, в яких відсутні допустимі підваріанти.

Наведемо множини $\wp^i = \{p_j^i\}, i = 1,...,8; j = 1,2,...,$ які складаються з базисних підмножин P^S, які одержано шляхом обчислювального експерименту:

$\wp^1$ – множина допустимих варіантів, яка складається з 13 елементів $p_j^1 \in \wp^1$, $j = 1,...,13$: $\{\{-1,-1,-1\}, \{-1,-1,0\}, \{-1,-1,1\}, \{-1,0,1\}, \{-1,1,1\}, \{0,-1,-1\}, \{0,0,0\}, \{0,1,1\}, \{1,-1,-1\}, \{1,0,-1\}, \{1,1,-1\}, \{1,1,0\}, \{1,1,1\}\}$;

$\wp^2$ – множина з елементами потужності $1\times1\times2$ з єдиним допустимим варіантом, яка складається з 14 елементів $p_j^2 \in \wp^2$, $j=1,\ldots,14$: $\{\{-1,0,\{0,1\}\}$, $\{-1,0,\{-1,1\}\}$, $\{-1,1,\{0,1\}\}$, $\{-1,1,\{-1,1\}\}$, $\{0,-1,\{-1,1\}\}$, $\{0,-1,\{-1,0\}\}$, $\{0,0,\{0,1\}\}$, $\{0,0,\{-1,0\}\}$, $\{0,1,\{0,1\}\}$, $\{0,1,\{-1,1\}\}$, $\{1,-1,\{-1,1\}\}$, $\{1,-1,\{-1,0\}\}$, $\{1,0,\{-1,1\}\}$, $\{1,0,\{-1,0\}\}\}$;

$\wp^3$ – множина з елементами потужності $1\times2\times2$ з єдиним допустимим елементом, яка складається з 6 підмножин $p_j^3 \in \wp^3$, $j=1,\ldots,6$: $\{\{0,\{0,1\},\{-1,1\}\}$, $\{0,\{0,1\},\{-1,0\}\}$, $\{0,\{-1,1\},\{0,1\}\}$, $\{0,\{-1,1\},\{-1,0\}\}$, $\{0,\{-1,0\},\{0,1\}\}$, $\{0,\{-1,0\},\{-1,1\}\}\}$;

$\wp^4$ – множина з елементами потужності $2\times2\times2$ з єдиним допустимим варіантом, яка складається з 2 підмножин $p_j^4 \in \wp^4$, $j=1,2$: $\{\{\{0,1\},\{-1,0\},\{0,1\}\}$, $\{\{-1,0\},\{0,1\},\{-1,0\}\}\}$;

$\wp^5$ – множина з елементами потужності $1\times1\times3$ з єдиним допустимим варіантом, яка складається з 7 підмножин $p_j^5 \in \wp^5$, $j=1,\ldots,7$: $\{\{-1,0,\{-1,0,1\}\}$, $\{-1,1,\{-1,0,1\}\}$, $\{0,-1,\{-1,0,1\}\}$, $\{0,0,\{-1,0,1\}\}$, $\{0,1,\{-1,0,1\}\}$, $\{1,-1,\{-1,0,1\}\}$, $\{1,0,\{-1,0,1\}\}\}$;

$\wp^6$ – множина недопустимих варіантів, яка складається з 14 елементів $p_j^6 \in \wp^6$, $j=1,\ldots,14$: $\{\{-1,0,-1\}$, $\{-1,0,0\}$, $\{-1,1,-1\}$, $\{-1,1,0\}$, $\{0,-1,0\}$, $\{0,-1,1\}$, $\{0,0,-1\}$, $\{0,0,1\}$, $\{0,1,-1\}$, $\{0,1,0\}$, $\{1,-1,0\}$, $\{1,-1,1\}$, $\{1,0,0\}$, $\{1,0,1\}\}$;

$\wp^7$ – множина з елементами потужності $1\times1\times2$, в якій відсутні допустимі варіанти, яка складається з 7 підмножин $p_j^7 \in \wp^7$, $j=1,\ldots,7$: $\{\{-1,0,\{-1,0\}\}$, $\{-1,1,\{-1,0\}\}$, $\{0,-1,\{0,1\}\}$, $\{0,0,\{-1,1\}\}$, $\{0,1,\{-1,0\}\}$, $\{1,-1,\{0,1\}\}$, $\{1,0,\{0,1\}\}\}$;

$\wp^8$ – множина з елементами потужності $1\times2\times2$, в якій відсутні допустимі варіанти, яка складається з 2 підмножин $p_j^8 \in \wp^8$, $j=1,2$: $\{\{-1,\{0,1\},\{-1,0\}\}$, $\{1,\{-1,0\},\{0,1\}\}\}$;

Повний варіант x та його базисні підваріанти будуються в такій послідовності, в якій розташовані індекси об'єктів множини A, незалежно від відношень переваги між ними. Аналогічним чином вони і досліджувалися шляхом застосування обчислювального експерименту. Тобто немає сенсу змінювати порядок слідування індексів елементів розв'язку, а слід застосовувати твердження, які будуть наведені нижче, таким же чином – зліва направо в порядку збільшення індексів елементів множини X^0.

Наведемо твердження, одержані на основі аналізу об'єднання закономірностей, визначених на множинах $\wp^1,\ldots,\wp^8$, справедливість яких визначено безпосередніми обчислюваннями і які використовуються при побудові алгоритмів ПАВ.

***Твердження* 5.4.** Необхідною і достатньою умовою існування допустимого повного варіанта x^*, який відповідає ранжуванню об'єктів R^*, на звуженій множині X^S, є існування хоча б одного базисного підваріанта хоча б на одному з елементів кожної підмножини $X_j^S, j\in H$.

***Твердження* 5.5.** Допустимими базисними підваріантами є: $\{-1,-1,-1\}$, $\{-1,-1,0\}$, $\{-1,-1,1\}$,$\{-1,0,1\}$, $\{-1,1,1\}$, $\{0,-1,-1\}$, $\{0,0,0\}$, $\{0,1,1\}$, $\{1,-1,-1\}$, $\{1,0,-1\}$, $\{1,1,-1\}$, $\{1,1,0\}$, $\{1,1,1\}$.

***Твердження* 5.6.** Умовою існування в звуженій базисній підмножині $P^S, s=1,2,\ldots$, єдиного допустимого базисного підваріанта (крім умов твердження 5.5 для $|P^S|=1\times1\times1$) є такий склад базисної підмножини:

– для потужності підмножини $|P^S|=1\times1\times2$: $\{-1,0,\{0,1\}\}$, $\{-1,0,\{-1,1\}\}$, $\{-1,1,\{0,1\}\}$, $\{-1,1,\{-1,1\}\}$, $\{0,-1,\{-1,1\}\}$, $\{0,-1,\{-1,0\}\}$, $\{0,0,\{0,1\}\}$, $\{0,0,\{-1,0\}\}$, $\{0,1,\{0,1\}\}$, $\{0,1,\{-1,1\}\}$, $\{1,-1,\{-1,1\}\}$, $\{1,-1,\{-1,0\}\}$, $\{1,0,\{-1,1\}\}$, $\{1,0,\{-1,0\}\}$;

– для потужності підмножини $|P^S| = 1\times 2\times 2$: $\{0,\{0,1\},\{-1,1\}\}$, $\{0,\{0,1\},\{-1,0\}\}$, $\{0,\{-1,1\},\{0,1\}\}$, $\{0,\{-1,1\},\{-1,0\}\}$, $\{0,\{-1,0\},\{0,1\}\}$, $\{0,\{-1,0\},\{-1,1\}\}$;

– для потужності підмножини $|P^S| = 2\times 2\times 2$: $\{\{0,1\},\{-1,0\},\{0,1\}\}$, $\{\{-1,0\},\{0,1\},\{-1,0\}\}$;

– для потужності підмножини $|P^S| = 1\times 1\times 3$: $\{-1,0,\{-1,0,1\}\}$, $\{-1,1,\{-1,0,1\}\}$, $\{0,-1,\{-1,0,1\}\}$, $\{0,0,\{-1,0,1\}\}$, $\{0,1,\{-1,0,1\}\}$, $\{1,-1,\{-1,0,1\}\}$, $\{1,0,\{-1,0,1\}\}$.

***Твердження* 5.7.** (Наслідок 1 твердження 5.6). Необхідною умовою допустимості базисної підмножини P^S є один з таких мінімальних варіантів її складу: $P^S = \{|1|,|1|,|2|\}$; $P^S = \{|1|,|2|,|2|\}$; $P^S = \{|2|,|2|,|2|\}$; $P^S = \{|1|,|1|,|3|\}$. Допустимими базисними підмножинами є такі підмножини, потужності яких є не меншими від наведених.

***Твердження* 5.8.** (Наслідок 2 твердження 5.6). Єдиний фіксований базисний підваріант на множині P^S може існувати лише при $\max\limits_{i=1,2,3}|P_i^S| \le 2$ або у останньому випадку твердження 5.6.

***Твердження* 5.9.** Недопустимими базисними підваріантами є: $\{-1,0,-1\}$, $\{-1,0,0\}$, $\{-1,1,-1\}$, $\{-1,1,0\}$, $\{0,-1,0\}$, $\{0,-1,1\}$, $\{0,0,-1\}$, $\{0,0,1\}$, $\{0,1,-1\}$, $\{0,1,0\}$, $\{1,-1,0\}$, $\{1,-1,1\}$, $\{1,0,0\}$, $\{1,0,1\}$.

***Твердження* 5.10.** Умовою недопустимості звуженої базисної підмножини $P^S \subset P^0, s = 1,2,...$, тобто відсутність у ньому хоча б одного допустимого базисного підваріанта (крім умов твердження 5.9 для $|P'| = 1\times1\times1$) є такий склад підмножини:

– для потужності підмножини $|P^S| = 1\times1\times2$: $\{-1,0,\{-1,0\}\}$, $\{-1,1,\{-1,0\}\}$, $\{0,-1,\{0,1\}\}$, $\{0,0,\{-1,1\}\}$, $\{0,1,\{-1,0\}\}$, $\{1,-1,\{0,1\}\}$, $\{1,0,\{0,1\}\}$.

– для потужності підмножини $|P^S| = 1\times2\times2$: $\{-1,\{0,1\},\{-1,0\}\}$, $\{1,\{-1,0\},\{0,1\}\}$.

***Твердження* 5.11.** (Наслідок твердження 5.10). У випадку наявності на звуженій множині X^S недопустимої базисної підмножини P^S вся множина X^S є недопустимою, тобто неперспективною для визначення ациклічних варіантів.

Виконання умов твердження 5.11 означає, що наявність підмножини P^S, в якій не існує жодного допустимого базисного підваріанта тягне за собою недопустимість задачі знаходження колективного ранжування.

***Твердження* 5.12.** У випадку наявності в базисній підмножині P^S єдиного допустимого підваріанта $x^Д$, ця підмножина може бути звужена до цього підваріанта $P^S = \{x^Д\}$ без втрати перспективних розв'язків.

Виконання умов твердження 5.12 означає, що наявність підмножини P^S з єдиним допустимим базисним підваріантом тягне за собою можливість звуження цієї множини до єдиного допустимого варіанту. Тобто всі інші елементи базисної підмножини можуть бути відсіяні – вони є неперспективними.

Наведені твердження можуть виявитися корисними при побудові алгоритму знаходження ациклічного вектора x^*, який відповідає результуючому ранжуванню об'єктів R^*, оскільки виявлення на початкових етапах роботи алгоритму ситуації неіснування жодного допустимого базисного підваріанту на множині $P^S, s = 1,2,...$, свідчить про неіснування жодного повного варіанта на множині $X^S, s = 1,2,...$, тобто про порожню множину допустимих, ациклічних розв'язків задачі.

Використання наведених в цьому параграфі тверджень може виявитися єдиним засобами "зсунути" алгоритм знаходження результуючого нестрогого ранжування об'єктів з "мертвої точки" і застосування схеми ПАВ для знаходження розв'язку задач нестрогого ранжування, які розглядаються у цьому розділі.

5.6. Послідовний алгоритм визначення нестрогої медіани Кемені-Снелла для неповних індивідуальних матриць парних порівнянь

Нехай k експертів задають ранжування n' об'єктів, $n' < n$. Ці ранжування породжують неповні індивідуальні МПП $B^l, l \in L$, з елементами виду:

$$b_{ij}^l = \begin{cases} 1, & \text{коли для } l\text{-го експерта } a_i \succ a_j, \\ -1, & \text{коли для } l\text{-го експерта } a_i \prec a_j, \\ 0, & \text{коли для } l\text{-го експерта } a_i \sim a_j \text{ або } i = j, \\ *, & \text{коли } l\text{-й експерт не визначився із співвідношенням.} \end{cases}$$

Інтерес кожного l-го експерта полягає у внесенні до колективного ранжування об'єктів R^*, тих об'єктів з множини $A^l, l \in L$, і у тому порядку $R(A^l), l \in L$, які запропоновано цим експертом.

Будемо вважати, що для будь-якого об'єкта з множини усіх об'єктів $A = \bigcup_{l \in L} A^l$ існують щонайменше два експерти з індексами $i, j \in L$, які запропонували включити ці об'єкти до розгляду, тобто:

$$\forall a_i \in A \; \exists j, l \in L : a_i \in R(A^j) \,\&\, a_i \in R(A^l), \; i \in I.$$

Номери об'єктів будемо формувати наступним чином. Перші n_1 елементів множини A складають усі об'єкти, які запропоновано першим експертом, тобто A^1. Наступні елементи множини A – це об'єкти з A^2, які не належать A^1, далі – об'єкти з A^3, які не належать A^1 та A^2, і так далі.

Серед підмножин об'єктів, заданих експертами, існують такі, що повністю співпадають, тобто $\exists j, l \in L : A^j = A^l$, а також ті, що зовсім не перетинаються, тобто $\exists j, l \in L : A^j \cap A^l = \varnothing$.

Задача полягає у тому, щоб знайти таке ранжування об'єктів R^* на множині об'єктів A, щоб сумарна відстань до нього від усіх експертних ранжувань $R(A^l), l \in L$, була мінімальною. При цьому слід враховувати те, що індивідуальні МПП, які відповідають ранжуванням експертів, є неповними.

У цьому випадку постановку задачі можна формалізувати у класі однокритеріальних моделей, та шукати розв'язок задачі як медіану Кемені–Снелла:

$$f(x) = \sum_{j \in H} f_j(x) = \sum_{j \in H} \sum_{i \in L} \left| c_{ij} - x_j \right| \to \min, \tag{5.26}$$

$$x_j \in X_j^0 = \{-1, 0, 1\}, \; c_{ij} \in \{-1, 0, 1, *\}, \; j \in H, i \in L, \tag{5.27}$$

$$x \in D^A \subset X^0, X^0 = \prod_{j \in H} X_j^0. \tag{5.28}$$

Постановка задачі визначення строгого ранжування об'єктів у вигляді медіани Кемені–Снелла за неповними індивідуальними МПП та метод її розв'язання розглядалися у роботах [2, 8, 10].

Для зняття невизначеності щодо врахування ситуацій, коли значення c_{ij} невідомі, введемо евристику.

***Евристика* Е5.1.** У випадку, коли значення $c_{ij} = '*'$, будемо вважати, що $\left| c_{ij} - x_j \right| \in \{0, 1, 2\}$ при $x_j \neq 0$; будемо також вважати $\left| c_{ij} - x_j \right| \in \{0, 1\}$ при $x_j = 0$.

Задача (5.26)–(5.27) розв'язується із застосуванням методу послідовного аналізу та відсіювання заздалегідь неперспективних варіантів. З урахуванням процедур W^S, описаних для однокритеріальних моделей в [15], процедур Φ, Λ скорочення множини допустимих розв'язків [5] та введеної евристики Е5.1 опишемо алгоритми аналізу та відсіювання недопустимих елементів для сформульованих задач.

Крок 1. Обчислення значення f^{*S} за формулою:

$$f^{*S} = \left(f^{HS} + f^{BS} \right) / 2, \tag{5.29}$$

де f^{HS}, f^{BS} – відповідно мінімальне та максимальне значення ЦФ на s – й ітерації, $s = 0, 1, 2, \ldots$:

$$f^{HS} = \sum_{j \in H} \min_{x_j \in X_j^S} \sum_{i \in L} \left| c_{ij} - x_j \right|, \quad f^{BS} = \sum_{j \in H} \max_{x_j \in X_j^S} \sum_{i \in L} \left| c_{ij} - x_j \right|. \tag{5.30}$$

Причому,

$$\begin{aligned} &\min_{x_j \in X_j^S} \sum_{i \in L} \left| c_{ij} - x_j \right| = \{0, \text{ при } c_{ij} = 0; \; 1 \text{ при } c_{ij} \neq 0\}, \\ &\max_{x_j \in X_j^S} \sum_{i \in L} \left| c_{ij} - x_j \right| = \{1, \text{ при } c_{ij} = 0; \; 2 \text{ при } c_{ij} \neq 0\}. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Крок 2. Застосування процедури W^S, яка полягає у відсіюванні тих елементів множини $X_j^S, \forall j \in H$, які не можуть брати участі в побудові розв'язку $x \in X^S$ задачі (5.26)–(5.28). Умова відсіювання має вигляд:

$$\sum_{i \in L} \left| c_{ij} - x_j \right| > f^{*S} - \sum_{\substack{t \in H \\ t \neq j}} \sum_{i \in L} \left| c_{ij} - \arg\min_{x_t \in X_t^S} \left| c_{it} - x_t \right| \right|. \qquad (5.32)$$

При цьому слід враховувати евристику Е5.1. Причому, коли аргумент мінімуму виразу (5.31) є відомим, то саме він береться до уваги. Якщо відсіювання є недопустимим, то перехід до кроку 7. Інакше – до наступного кроку.

Крок 3. Застосування процедури Φ з урахуванням особливостей структури неповної МПП. Якщо відсіювання є недопустимим, то перехід до кроку 7. Інакше – до наступного кроку.

Крок 4. Обчислення меж зміни ЦФ f^{HS}, f^{BS}. Коли межі змінилися, тобто $f^{HS} > f^{HS-1}$ або $f^{BS} > f^{BS-1}$, перехід до кроку 1, інакше – до кроку 5.

Крок 5. Висновок про те, що здійснено допустиме відсіювання, тобто $X_j^S \neq \varnothing$ для $\forall j \in H$. Якщо на множині X^S існують допустимі повні варіанти і загальна кількість можливих варіантів, утворених множиною X^S, яка визначається формулою $y^S = \prod_{j \in H} \left| X_j^S \right|$, є великою для прямого перебору, то перехід до наступного кроку. Інакше – до кроку 8.

Крок 6. Зменшення значення f^{*S} – вибір, наприклад, методом дихотомії, нового значення $f^{*S+1} = \left(f^{*S} + f^{HS} \right)/2)$. Перехід до кроку 2.

Крок 7. Збільшення значення f^{*S} – вибір нового значення f^{*S+1} з інтервалу $f^{*S+1} \in \left(f^{*S}, f^{HS} \right)$. Перехід до кроку 2.

Крок 8. Застосування процедури Λ з урахуванням особливостей, породжених евристикою Е5.1. Якщо Λ здійснює відсіювання циклічних елементів, перехід до кроку 1. Інакше – до наступного кроку.

Крок 9. Коли кількість можливих варіантів у множині X^S не є великою, то шляхом прямого перебору знаходимо розв'язок x^*, який є допустимим варіантом і мінімізує узагальнений критерій

$$\min_{x \in X^S} \left\{ F(x) \right\} = \min_{x \in X^S} \sum_{i \in L} \rho_i \sum_{j \in H} \left| c_{ij} - x_j \right|. \qquad (5.33)$$

Якщо такий розв'язок єдиний і задовольняє нерівності

$$\sum_{j \in H} \sum_{i \in L} \left| c_{ij} - x_j \right| \leq f^{*S} = \left(f^{HS} + f^{BS} \right)/2, \qquad (5.34)$$

то він є шуканим розв'язком і відповідає результуючому ранжуванню – медіані Кемені-Снелла.

Крок 10. Коли допустимий варіант, що мінімізує критерій (5.33), не є єдиним, тобто побудовано множину X^{*S} еквівалентних за критерієм (5.33) розв'язків, то розв'язком x^* задачі (5.26)–(5.28) може бути вибраний той, на якому мінімізується критерій

$$\min_{x \in X^{*S}} \left\{ F(x) \right\} = \min_{x \in X^{*S}} \max_{i \in L} \rho_i \sum_{j \in H} \left| c_{ij} - x_j \right|, \qquad (5.35)$$

і виконується співвідношення (5.34).

Крок 11. Якщо умова (5.34) для $\forall x^* \in X^S$ не виконується, то знову здійснюється застосування процедур W, Φ, Λ, модифікованих для використання неповних векторів вигляду (3.29), породжених неповними МПП. Ці процедури полягають у відсіюванні тих елементів множини $x \in X^{*S}$, які не дозволяють побудувати допустимі варіанти і одночасно задовольняють нерівності $f(x) \leq f\left(x^*\right), x \in X^{*S}$. При цьому відсіювання відбувається при перевірці нерівності (5.34), в яке замість f^* підставляється значення $f\left(x^*\right)$. Після застосування процедур W, Φ, Λ будується множина $\tilde{X}\left(x^*\right)$.

Крок 12. Знаходження розв'язку $x^* \in \tilde{X}\left(x^*\right)$, який мінімізує критерії (5.33) та (5.35).

5.7. Послідовний алгоритм визначення нестрогого компромісного ранжування об'єктів для неповних індивідуальних матриць парних порівнянь

При егалітарному підході задача полягає у знаходженні групового ранжування на множині об'єктів, яке було б максимально близьким до неповних індивідуальних ранжувань кожного експерта. Задача визначення строгої ВГ-медіани за неповними індивідуальними МПП досліджувалася у роботах [2, 8, 10, 21].

У випадку неповних МПП для нестрогих ранжувань задача формалізується в класі багатокритеріальних комбінаторних моделей:

$$f_i(x) = \sum_{j\in H} f_i(x_j) = \sum_{j\in H} |c_{ij} - x_j| \to \min,\ i\in L, \tag{5.36}$$

$$x_j \in X_j^0 = \{-1, 0, 1\},\ c_{ij} \in \{-1, 0, 1, *\},\ j\in H, i\in L, \tag{5.37}$$

$$x \in D^A \subset X^0, X^0 = \prod_{j\in H} X_j^0. \tag{5.38}$$

Алгоритм розв'язання задачі (5.36)-(5.38) складається з таких кроків.

Крок 1. Оптимальні значення критеріїв (5.36) задачі (5.36)-(5.38) покладаються рівними нулю: $f_i^0 = 0, i\in L$. Провадиться обчислення найгірших значень критеріїв за формулою (5.30). Зауважимо при цьому, що $\max_{l=1,2,3} f_i(x_j^l) = \{2$ при $c_{ij} \neq 0$; 1 при $c_{ij} = 0\}$, де $x_j^l \in X_j^l$, $l = 1,2,3, j\in H$.

Крок 2. Обчислення початкового значення параметра k_0.

Крок 3. Обчислення величин $f_i^*(k_0^S), i\in L$, за формулами (5.29), (5.30).

Крок 4. Застосування процедури $W(k_0^S)$, модифікованої до випадку неповних МПП. Якщо відсіювання є не допустимим, то перехід до кроку 9. Інакше – до наступного кроку.

Крок 5. Застосування процедури Ф з урахуванням особливостей неповних МПП. Якщо відсіювання є не допустимим, то перехід до кроку 9. Інакше – перехід до наступного кроку.

Крок 6. Обчислення границь зміни критеріїв f_i^H, f_i^0, $\forall i\in L$, з урахуванням закономірностей (5.31). Коли границі змінилися, то перехід до кроку 3. Інакше – перехід до наступного кроку.

Крок 7. Здійснено допустиме відсіювання, тобто $X_j^S \neq \varnothing$ для $\forall j\in H$. Якщо на множині X^S існують допустимі повні варіанти і загальна кількість можливих варіантів, яка складає $y^S = \prod_{j\in H} |X_j^S|$, є великою для прямого перебору, то перехід до наступного кроку. Інакше – до кроку 10.

Крок 8. Зменшення параметра k_0^S – вибір значення k_0^{S+1}, методом дихотомії з інтервалу $(0, k_0^S)$. Перехід до кроку 3.

Крок 9. Збільшення параметра k_0^S – вибір значення k_0^{S+1} з інтервалу $(k_0^S, k_0^{\max})$. Перехід до кроку 3.

Крок 10. Застосування процедури Λ, модифікованої для використання неповних індивідуальних МПП. Якщо процедура Λ здійснює відсіювання циклічних елементів, перехід до кроку 3. Інакше – до наступного кроку.

Крок 11. Коли кількість можливих варіантів у множині X^S не є великою, то шляхом прямого перебору знаходимо розв`язок x^*, який є допустимим варіантом і мінімізує узагальнений критерій

$$\min_{x\in X^S} \{F(x)\} = \min_{x\in X^S} \max_{i\in L} \rho_i \sum_{j\in H} |c_{ij} - x_j|. \tag{5.39}$$

Якщо такий розв`язок є єдиним і задовольняє нерівності (5.34) з урахуванням закономірностей (5.31), то він є шуканим компромісним розв`язком.

Крок 12. Якщо допустимий варіант задачі (5.36)-(5.38), що мінімізує критерій (5.39), не є єдиним, тобто побудовано множину X^{*S} еквівалентних за критерієм (5.39) розв`язків, то розв`язком x^* задачі може бути вибраний той, на якому мінімізується критерій

$$\min_{x\in X^{*S}} \{F(x)\} = \min_{x\in X^{*S}} \sum_{i\in L} \rho_i \sum_{j\in H} |c_{ij} - x_j|, \tag{5.40}$$

і виконується співвідношення (5.34) з урахуванням умов (5.31).

Крок 13. Коли умови (5.34) для $\forall x^*\left(k_0^S\right) \in X^S$ не виконуються, то знову застосовуються процедури W, Φ, Λ, які полягають у відсіюванні тих елементів множини $x^{*S} \in X^{*S}$, які не дозволяють побудувати допустимі варіанти, які задовольняли б нерівностям $f_i(x) \le f_i\left(x^*\left(k_0^S\right)\right), \forall i \in L, x \in X^{*S}$. При цьому відсіювання відбувається при перевірці відповідної системи нерівностей (5.32), в які замість значень $f_i^*\left(k_0^S\right), \forall i \in L$, підставляються значення $f_i\left(x^*\left(k_0^S\right)\right), \forall i \in L$, з урахуванням закономірностей (5.31). Після застосування модифікованих процедур W, Φ, Λ будується множина $\tilde{X}\left(x^*\left(k_0^S\right)\right)$.

Крок 14. Знаходиться розв`язок $x^* \in \tilde{X}\left(x^*\left(k_0^S\right)\right)$, який мінімізує критерії (5.38) та (5.40).

У випадку наявності кількох еквівалентних між собою розв'язків задачі (5.36)–(5.38) використовується допоміжний критерій, наприклад, вигляду (5.26).

5.8. Дослідження ефективності алгоритмів послідовного аналізу та відсіювання варіантів для задач визначення результуючого ранжування

Описані постановки та підходи до послідовного розв`язання задач ранжування можуть слугувати основою для розробки алгоритмів розв`язання більш загальних задач в розглянутій області, а також в інших областях досліджень.

Матрицю векторів вигляду (3.28) можна інтерпретувати не лише як матрицю векторів, які відповідають ранжуванням n об`єктів, одержаних від $k$ експертів, а, наприклад, як матрицю, яка відповідає ранжуванням $n$ об`єктів за k якісними ознаками, якими кожний з об`єктів характеризується і які неможливо аналізувати методами, орієнтованими на кількісні дані. В цьому випадку задачі (5.3)–(5.5), (5.10)–(5.12), (5.20)–(5.22) можуть інтерпретуватися, наприклад, як задачі ранжування варіантів складу складної системи на відомій множині технічних реалізацій підсистем за сукупністю сепарабельних критеріїв [15], значення яких задаються в якісному вигляді (в

порядковій шкалі). Описані постановки задач та алгоритми їх розв`язання можуть також знайти застосування, наприклад, при знаходженні розв`язку задачі комівояжера тощо.

Алгоритми послідовного аналізу та відсіву недопустимих варіантів задачі ранжування можуть бути природно узагальнені на випадок задання експертами неповних матриць бінарних відношень, як це продемонстровано у параграфах 5.6 та 5.7. При цьому слід мати на увазі умову допустимості векторів вигляду (3.28), тобто умову зв`язності графа, який їй відповідає.

У випадку, коли розв`язок описаної задачі необхідно знайти в класі строгих ранжувань, ці задачі зводяться до задач булевого програмування перетвореннями $x^H = \left(x^C + 1\right)/2$, де $x^H, x^C$ – вектори, які відповідають ранжуванням об`єктів відповідно в старому та новому просторі (строгих та нестрогих ранжувань). Інколи постає задача знаходження не ранжування, а довільного відношення, яке найкращим чином узгоджується з заданими експертами відношеннями $B^i, i \in I$.

Крім того, запропоновані алгоритми можна використовувати в описаних задачах для попереднього звуження початкової множини можливих варіантів з метою подальшого застосування якогось іншого методу, – наприклад, гілок та границь. У будь-якому випадку застосування послідовного аналізу у вказаному класі задач є без сумніву перспективним.

Для порівняння багатокритеріальної постановки задачі знаходження результуючого ранжування об`єктів з результатами відомих в теорії голосувань правил вибору [20] розглядаються два профілі переваг, які наведено в табл. 5.1.

Таблиця 5.1. **Задані профілі переваг експертів**

Профіль 1		Профіль 2	
Кількість експертів	Задане експертами ранжування об'єктів	Кількість експертів	Задане експертами ранжування об'єктів
3	$a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ a_4$	3	$a_1 \succ a_4 \succ a_3 \succ a_2$
5	$a_1 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_4$	3	
7	$a_2 \succ a_4 \succ a_3 \succ a_1$	5	
6	$a_3 \succ a_2 \succ a_4 \succ a_1$	4	

Ця таблиця читається так: для першого профілю переваг три виборці задали такий порядок важливості об`єктів: $a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ a_4$; п`ять виборців вважають найбільш прийнятним порядок: $a_1 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_4$; і т.д. Таким же чином читаються і переваги другого профілю. Необхідно знайти результуюче строге ранжування об`єктів множини $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

Результати розрахунків, які проводилися для даних табл. 5.1, зведено в табл. 5.2.

Таблиця 5.2. **Колективні ранжування об'єктів, знайдені різними методами**

Назва метода знаходження результуючого ранжування	Профіль переваг 1			Профіль переваг 2		
	Розв'язок	Значення критеріїв		Розв'язок	Значення критеріїв	
Медіана Кемені-Снелла	$a_2 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_1$	36	4	$a_1 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_3$ $a_4 \succ a_2 \succ a_3 \succ a_1$	34	4
Компромісне ранжування	$a_3 \succ a_2 \succ a_4 \succ a_1$	46	3	$a_2 \succ a_1 \succ a_4 \succ a_3$	38	3
Правило Кондорсе	$a_2 \succ a_3 \succ a_1 \succ a_4$	41	4	$a_4 \succ a_2 \succ a_1 \succ a_3$	36	4
Правило Борда	$a_3 \succ a_2 \succ a_1 \succ a_4$	47	3	$a_4 \succ a_2 \succ a_3 \succ a_1$	34	4
Правило Сімпсона	$a_3 \succ a_2 \succ a_4 \succ a_1$	46	3	$a_1 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_3$	34	4
Правило Копленда	$a_3 \succ a_2 \succ a_1 \succ a_4$	41	4	Розв'язок не існує		
Правило Нансона	$a_2 \succ a_1 \succ a_3 \succ a_4$	46	3	$a_4 \succ a_2 \succ a_1 \succ a_3$	36	4
Правило альтернативних голосів	$a_1 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_4$	52	3	Розв'язок не існує		
Правило відносної більшості	$a_1 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_4$	56	3	$a_1 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_3$	34	4

На основі аналізу табл. 5.2 можна зробити такі узагальнення [8].

1. Розв`язки, одержані деякими, так званими евристичними методами, які наводяться в роботі [13] та в другому розділі цієї монографії, інколи співпадають з компромісним ранжуванням і рідше – з медіаною Кемені-Снелла. Але навіть для такого невеликого експерименту можна зробити висновок, що це співпадання є нестійким і не можна вказати "класичне" правило (з монографії [20]), яке було б "стійко компромісним".

2. Розв`язку задачі знаходження результуючого ранжування з допомогою евристичних правил часто не існує.

3. Розв`язок, одержаний за мінімаксним критерієм та лінійною згорткою, може бути не єдиним. У такому випадку для еквівалентних за цими критеріями розв`язків можна скористатися методами (правилами) з арсеналу евристичних методів ("класичних" правил голосування), які наводяться в [20] та у параграфі 2.3 цієї монографії.

4. "Класичні" правила вибору завжди дають хоч і не стійкі, але більш близькі до компромісного ранжування ніж до медіани Кемені-Снелла розв`язки. Оскільки зазначені методи знайшли широке практичне застосування, це свідчить на користь запропонованого у нашій монографії багатокритеріального підходу до знаходження точного розв`язку в задачах обчислення результуючого ранжування.

5. Метод ПАВ розв`язання задачі знаходження компромісного ранжування об`єктів дає можливість швидко знаходити точні розв`язки і це свідчить про його актуальність та широкі можливості застосування цього методу.

Література до розділу 5

1. Березовский Б.А., Борзенко В.И., Полящук М.В. Моделирование структуры предпочтений лица, принимающего решение. Обзор моделей и методов. – М.: Научный совет по проблеме "Кибернетика" АН СССР. – 1987. – № 6. – С. 17–34.
2. Волошин О.Ф., Гнатієнко Г.М., Єпик Н.Б. Алгоритм розв'язання задачі прийняття порядку денного // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – Київ. – 1997. – № 4. – С. 124–131.
3. Волошин А.Ф., Гнатиенко Г.Н. Построение компромиссной ранжировки в задаче группового выбора // Проблемы теоретической кибернетики: Тез. 8-й Всесоюз. конф., ч. 2. – Волгоград. – 1991. – С. 44–46.
4. Волошин А.Ф. Метод локализации области оптимума в задачах математического программирования / "Наука", Докл. АН СССР. – Т. 293. – № 3. – 1987. – С. 549–553.
5. Гнатієнко Г.М. Алгоритми обробки експертної інформації в задачах ранжування та їх застосування: Дис… канд. техн. – Київ. – 1994. – 133 с.
6. Гнатієнко Г.М. Алгоритми обробки експертної інформації в задачах ранжування та їх застосування: Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.13.16 /. – К., 1994. – 16 с.
7. Гнатієнко Г.М. Аналіз множини допустимих розв'язків в задачах ранжування об'єктів // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – Київ – 2000. – № 2. – С. 220–226.
8. Гнатієнко Г.М. Деякі математичні аспекти соціальної експертизи // Соціальна експертиза в Україні: методологія, методика,

досвід впровадження / За ред. Ю.І.Саєнка. – К.: Ін-т соціології НАНУ, 2000. – 194 с.

9. Гнатієнко Г.М. Класифікація задач однієї моделі аналізу даних // Київ. ун-т. – Київ, 1992. – 89 с. – Укр. ? Деп. в УкрНДІНТІ 18.06.92,№ 911-Ук92.

10. Гнатієнко Г.М. Методи оцінки компетентності спеціалістів. Математичні та інформаційні проблеми прогнозування наслідків техногенних та природних катастроф // Соціально-економічні наслідки техногенних та природних катастроф: експертне оцінювання / Відп. ред.: В.В. Дурдинець, Ю.І. Саєнко. – К.: "Стилос", 2000. – 260 с.

11. Гнатиенко Г.Н. Система поддержки принятия решений в задачах анализа данных на базе СМ ЭВМ // Киев. ун-т. – Киев, 1992. – 22 с. – Рус. – Деп. в УкрНИИНТИ 18.02.92, № 211–92.

12. Кемени Дж.Г., Снелл Дж.Л. Кибернетическое моделирование. – М.: Советское радио, 1972. – 192 с.

13. Литвак Б.Г. Меры близости и результирующие ранжирования // Кибернетика. – 1983. – № 1. – С. 57–63.

14. Макаров И.М., Виноградская Т.М., Рубчинский А.А. и др. Теория выбора и принятия решений: Учебное пособие. – М.: Наука, 1982. – 328 с.

15. Методы и алгоритмы автоматизированного проектирования сложных систем управления/ Волкович В.Л., Волошин А.Ф. и др. – К.: Наук. думка, 1984. – 216 с.

16. Миркин Б.Г. Анализ качественных признаков: Математические модели и методы. – М.: Статистика, 1976. – 166 с.

17. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. – М.: Наука, 1974. – 256 с.

18. Михалевич В.С., Волкович В.Л. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. – М.: Наука, 1982. – 286 с.

19. Михалевич В.С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение. – I, II. / Кибернетика. – 1965. – № 1. – С. 45–55. – № 2. – С. 85–88.

20. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991. – 464 с.

21. Voloshin O.F., Gnatienko G.M. Sequencial algorythm for finding rigorous VG-median in the task of objects ranking // Problems of stochastic and discrete optimization: Abstracts of International Ukrainian-Polish Workshop (may 10-15, 2005). – Ukraine, Kaniv. – 2005. – Pp. 45–47.

Розділ 6 Визначення вагових коефіцієнтів об'єктів

6.1. Проблематика визначення вагових коефіцієнтів

Дослідженню та аналізу методів вирішення проблеми визначення структури переваг на множині об'єктів присвячено значну кількість робіт у вітчизняній та зарубіжній літературі. В деяких роботах [29, 33] відзначається складність отримання безпосередньої несуперечливої інформації від експерта про числові значення вагових коефіцієнтів об'єктів. На основі проведених досліджень [29] доводиться, що експерт може адекватно визначити вагові коефіцієнти у випадках, якщо кількість параметрів, що характеризують об'єкти, не перевищує трьох. У випадках, коли об'єкти характеризуються більшою кількістю параметрів, можливе застосування непрямих методів, в яких структура переваг відновлюється на основі попередньо прийнятих експертних рішень.

Постановки задач визначення ваги об'єктів, важливості параметрів та компетентності експертів у більшості випадків схожі і відрізняються лише інтерпретацією. Тому будемо розглядати визначення вагових коефіцієнтів взагалі, маючи на увазі те, що ця задача може інтерпретуватися в будь-якому з трьох зазначених аспектів. При цьому використовуватимо позначення для вагових коефіцієнтів $\rho_i, i \in I$, і вживати термін "об'єкти", пам'ятаючи, що інколи, залежно від інтерпретації, об'єктами визначення вагових коефіцієнтів можуть бути і параметри, і компетентність експертів. Якщо розв'язується задача визначення вагових коефіцієнтів власне параметрів, то будемо використовувати позначення $\beta_j, j \in J$. Коли визначаються саме коефіцієнти відносної компетентності експертів, будемо використовувати позначення $\gamma_l, l \in L$.

Серед поширених способів представлення значень вагових коефіцієнтів слід відзначити такі:

– довільні дійсні чи натуральні числа $-\infty < \rho_i < \infty,\ i \in I$;

– дійсні числа з врахуванням обмежень (односторонніх чи двосторонніх), наприклад, $\rho_i > 0,\ i \in I$; $-5 \le \rho_i \le 5,\ i \in I$; $0 < \rho_i < 1,\ i \in I$;

– дійсні чи натуральні числа з урахуванням умови центрованості:

$$\sum_{i \in I} \rho_i = 0,\ -\infty < \rho_i < \infty,\ i \in I;$$

– дійсні числа з урахуванням умови нормованості:

$$\sum_{i \in I} \rho_i = 1, \qquad (6.1)$$

$$\rho_i > 0,\ i \in I. \qquad (6.2)$$

Поширеною формою представлення нормованих вагових коефіцієнтів є інтервальна форма – гіперпаралелепіпед вагових коефіцієнтів (ГВК)

$$\rho \in \Gamma = \left[\rho_i^H, \rho_i^B\right], i \in I, \qquad (6.3)$$

$$0 < \rho_i^H \le \rho_i^B < 1,\ i \in I. \qquad (6.4)$$

Основне припущення моделей реальних проблем в традиційних формулюваннях полягає в тому, що "вага" об'єктів не залежить від значень параметрів, тобто залишається сталою для будь-якої підмножини значень. Тому визначення важливості об'єктів, як правило, зводиться до одноразового оцінювання їх "ваги". Але таке припущення ігнорує можливу взаємодію між вагою та значеннями параметрів об'єктів. У [47] припускається, що вага параметрів є ступінчатою функцією значень параметрів. У таких моделях діапазони всіх можливих значень параметрів розбиваються на неперервні інтервали, такі, що вагу на них можна вважати стабільною. На можливість такої ситуації вказується також у [39]. В [41] наводяться приклади зміни переваг в реальних ситуаціях: у транспортних проблемах це залежність різних значень швидкості від фактора "безпека", в медицині аналогічним чином пов'язані фактори "біль" та "ймовірність смерті". Ситуації, в яких зміна переваги може виявитися розумною, виникають також і при прийнятті політичних рішень, що стосуються інтересів великих груп людей.

В [36] відзначається, що алгоритм визначення вагових коефіцієнтів складається з двох етапів, хоча на практиці може використовуватися лише якийсь один із цих етапів:

– попереднього визначення вагових коефіцієнтів на основі відомої інформації про переваги експертів;

– цілеспрямованої зміни цих коефіцієнтів таким чином, щоб їх застосування дозволяло стабільно знаходити кращий об'єкт або максимально задовольнити експертному ранжуванню об'єктів.

Слід також зазначити, що випадок, коли в експертизі приймає участь один експерт, є частковим випадком групової експертизи. Причому, процедури експертного опитування із використанням переваг одного експерта та експертної групи можуть суттєво відрізнятися.

Щодо видів експертизи задання вагових коефіцієнтів відомо [44], що метод приписування балів дає вагові коефіцієнти з найбільшим середнім відхиленням і найменшою амплітудою – небажаними характеристиками. В той же час бальна шкала є зручнішою для експертів, ефективною за трудомісткістю та за витратами на проведення експертизи [43]. Ніяких інших загальних тенденцій при використанні різних форм експертного визначення вагових коефіцієнтів дослідниками не виявлено [44] і підстав для надання переваги якій-небудь із шкал вимірювання не існує [43].

На сьогодні відомо десятки методів безпосереднього чи опосередкованого оцінювання, обчислення та аналізу вагових коефіцієнтів об'єктів. В деяких роботах робляться спроби класифікації цих методів, пропонуються різні підходи до класифікації. Автори називають від двох [45] до десятків [39] способів задання та обчислення вагових коефіцієнтів.

Для класифікації методів виявлення значень вагових коефіцієнтів виберемо, по-перше, вигляд представлення вагових коефіцієнтів (точкові значення чи інтервали можливих значень, тобто ГВК), а по-друге, скористаємося підходом до класифікації способів задання вхідної інформації, запропонованим в [40], де вказується, що можна виділити такі групи процедур:

- експерт зазначає свої уявлення про важливість об'єктів безпосередньо або через якісь процедури;
- експерт повідомляє деякі цільові чи бажані рівні значень параметрів $a^{*(i)}, i\in J$; нижні значення параметрів $a^{H(i)}, i\in J$; допустимі відхилення від цільових значень $\Delta a^{*(i)}, i\in J$, тощо;
- експерт порівнює сукупності об'єктів, які йому пред'являються, і визначає (генерує) МПП у порядковій шкалі виду (1.4) або метризовану МПП вигляду (3.1);

- інформація від експертів включає різні комбінації перших трьох груп процедур.

Досить повний перелік процедур виявлення переваг на множині об'єктів наводиться у [6, 8, 17, 21, 25, 39, 44, 46]. Сюди слід віднести задання "ваги" у деякій, найчастіше – у стопроцентній шкалі, приписування балів, ранжування параметрів тощо. На останньому етапі одержана від експертів інформація приводиться до бажаного виду – експертні оцінки відповідним чином обробляються, центруються, нормуються тощо з метою їх агрегування та надання інформативного вигляду.

6.2. Особливості інтервальної форми вагових коефіцієнтів в задачах експертного оцінювання

У багатьох випадках [13, 28] експертові зручніше задавати переваги в нечіткій, розмитій формі у вигляді інтервалів зміни коефіцієнтів відносної важливості об'єктів, тобто ГВК у просторі вагових коефіцієнтів виду (6.1)-(6.4). Особливості інтервальної форми задання вагових коефіцієнтів розглядалися та досліджувалися у роботах [8, 10, 11, 16, 27].

6.2.1. *Процедури локалізації вектора вагових коефіцієнтів в задачах експертного оцінювання*

ГВК виду (6.1)-(6.4) є *допустимим*, якщо у цьому ГВК існує хоча б одна спільна точка з гіперплощиною (6.1), тобто виконуються умови

$$\sum_{i\in I}\rho_i^{H}\le 1,\ \sum_{i\in I}\rho_i^{B}\ge 1. \qquad (6.5)$$

***Твердження* 6.1.** Якщо $\sum_{i\in I}\rho_i^{H}>1$ або $\sum_{i\in I}\rho_i^{B}<1$, то задані відношення переваги є недопустимими в нормованій формі, тобто не існує вектора, який би задовольняв умові (6.1) і належав заданому ГВК.

Надлишковими значеннями ГВК називаються такі значення його компонент $\rho_i, i\in I$, для яких не існує таких значень $\rho_j, j\in I,\ j\neq i$, в гіперпаралелепіпеді (6.1)-(6.4), щоб виконувалися співвідношення нормованості (6.1), (6.2).

ГВК називається *несуперечливим*, якщо він не містить надлишкових значень.

В [39] наводяться процедури, орієнтовані на виявлення інтервалів зміни вагових коефіцієнтів. При безпосередньому заданні експертом інтервалів зміни нормованих коефіцієнтів, а також при застосуванні деяких методів визначення ГВК можуть порушуватися умови (6.5). Тобто ГВК може не містити жодного вектора, який задовольняв би умові нормування, через те, що він не перетинається з гіперплощиною (6.1), тобто є недопустимим.

У випадку, коли "площа" перетину гіперплощини (6.1) з ГВК (6.1)-(6.4) надто мала, або перетину не існує, то при приведенні його до несуперечливого вигляду може сильно змінюватися початкова експертна інформація. Тобто у цьому випадку порушується структура переваг, задана експертом. Щоб запобігти цьому, експерта просять переглянути свої переваги, або погодитися на їх зміну відповідно до деякого алгоритму.

При заданні ГВК виду (6.1)-(6.4) можливі такі випадки:

- заданий ГВК задовольняє умовам (6.5) і не містить надлишкових значень коефіцієнтів;

- ГВК не перетинається з гіперплощиною (6.1), тобто в ньому не існує таких нормованих значень вагових коефіцієнтів, які задовольняють умовам (6.1)-(6.2);

- в заданому ГВК є значення коефіцієнтів, що задовольняють умовам (6.1)-(6.2), але містяться надлишкові значення.

Останні два випадки потребують зміни структури переваг експерта. Виникнення двох останніх ситуацій може бути наслідком:

- некомпетентності експерта в досліджуваній області;

- слабкої формалізованості проблеми;

- недосвідченості експерта в процедурі визначення переваг;

- відображення реальної ситуації в модельованому процесі тощо.

Графічна ілюстрація третього випадку у двовимірному просторі для різних конфігурацій значень вагових коефіцієнтів наводиться на рисунках 6.1-6.4.

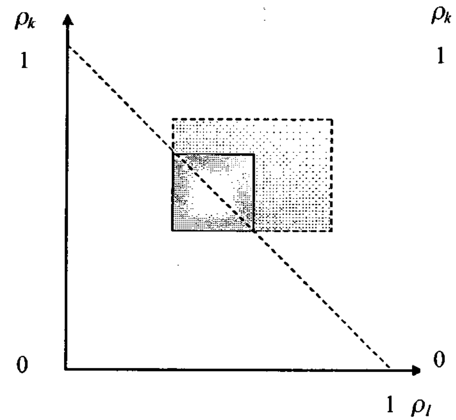


Рис. 6.1.

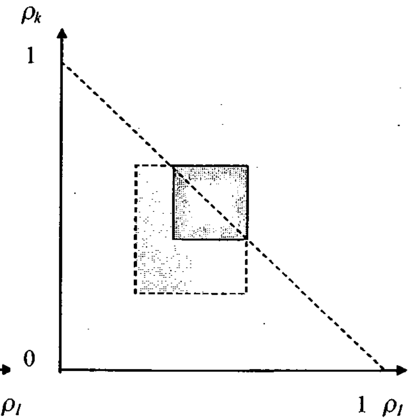


Рис. 6.2.

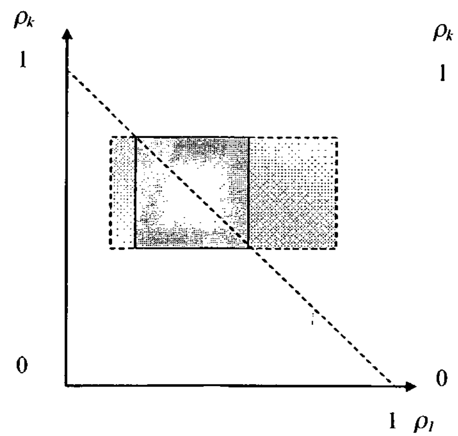


Рис. 6.3.

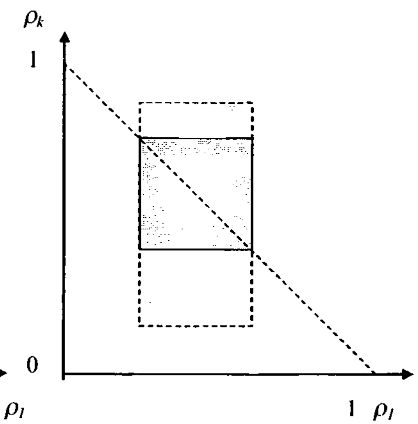


Рис. 6.4.

6.2.2. Процедура K^1 відсіву надлишкових значень гіперпаралелепіпеда вагових коефіцієнтів

Розглянемо процедуру K^1 відсіву надлишкових значень ГВК. На першому кроці процедури здійснюються перетворення

$$\rho_i'^H = 2\rho_i^H / \sum_{j\in I}\left(\rho_j^H + \rho_j^B\right),$$

$$\rho_i'^B = 2\rho_i^B / \sum_{j\in I}\left(\rho_j^H + \rho_j^B\right),\ i\in I,$$

які переміщують центр паралелепіпеда (6.3) на гіперплощину (6.1) і максимізують "площу" перетину нового гіперпаралелепіпеда $\Gamma^{(1)} = \prod_{i\in I}\left[\rho_i'^H, \rho_i'^B\right]$ з цією гіперплощиною.

Далі застосовується процедура відсіву надлишкових значень ГВК, яка є модифікацією методу ПАВ для задач лінійного програмування (ЗЛП) великої розмірності [34]. Сутність цього методу полягає у звуженні інтервалів зміни коефіцієнтів $\rho_i'^H, \rho_i'^B, i\in I$, з допомогою аналізу виродженого багатогранника (6.5).

Для визначення надлишкових значень в околі нижньої границі по i-му обмеженню природно вимагати виконання співвідношення

$$\rho_i'^H + \sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j'^B \geq 1,\ i\in I. \qquad (6.6)$$

Якщо ця умова порушується, тобто якщо $\rho_i'^H + \sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j'^B < 1$, $i\in I$, то необхідно нижню границю збільшити на деяку величину $\rho_i''^H = \rho_i'^H + \delta_i$, для $\delta_i > 0$, щоб у співвідношенні (6.6) виконувалася хоча б рівність $\rho_i'^H + \sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j'^B = 1,\ i\in I$. Звідси:

$$\delta_i = 1 - \rho_i'^H - \sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j'^B,\ i\in I. \qquad (6.7)$$

У разі, коли не виконується нерівність

$$\rho_i'^B + \sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j'^H \leq 1,\ i\in I, \qquad (6.8)$$

то аналогічними міркуваннями приходимо до необхідності додаткових поправок на верхні границі інтервалів $\rho_i''^B = \rho_i'^B - \Delta_i$, для $\Delta_i > 0,\ i\in I$, де

$$\Delta_i = \rho_i'^B + \sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j'^H - 1,\ i\in I. \qquad (6.9)$$

Одержані в результаті застосування процедури K^1 нові значення $\rho_i''^H, \rho_i''^B, i\in I$, границь результуючого несуперечливого гіперпаралелепіпеда $\Gamma^{(2)} = \prod_{i\in I}\left[\rho_i''^H, \rho_i''^B\right]$ будуть задавати результуючий ГВК, який не містить надлишкових значень.

***Твердження* 6.2.** Умовою відсіву обох границь гіперпаралелепіпеда $\Gamma^{(2)}$ (6.1)–(6.4) є наявність такого індекса $i\in I$, для якого виконується умова:

$$\exists i:\ \rho_i''^B - \rho_i''^H > \sum_{\substack{j\in I\\ i\neq j}}\left(\rho_j''^B - \rho_j''^H\right),\ i\in I, \qquad (6.10)$$

Перепишемо вираз (6.9) для поправки на верхню границю $\Delta_i, i\in I$, у вигляді

$$\Delta_i = \sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j'^H + \rho_i'^B - 1 = \sum_{j\in I}\rho_j'^H - \rho_i'^H + \rho_i'^B - 1 =$$

$$= \sum_{j\in I}\rho_j'^H + \rho_i'^B - \rho_i'^H - 1,\ i\in I.$$

Умову (6.10) можна записати у вигляді

$$\Delta_i > \sum_{\substack{j\in I\\ i\neq j}}\rho_j'^H + \rho_i'^H + \sum_{\substack{j\in I\\ i\neq j}}\rho_j'^B - \sum_{\substack{j\in I\\ i\neq j}}\rho_j'^H - 1,$$

тобто $\Delta_i > \rho_i'^H + \sum_{\substack{j\in I\\ i\neq j}}\rho_j'^B - 1,\ i\in I.$ Оскільки гіперпаралелепіпед $\Gamma^{(2)}$ є допустимим, то $\rho_i''^H + \sum_{\substack{j\in I\\ i\neq j}}\rho_j''^B \geq 1,\ i\in I$, а отже, $\Delta_i > 0,\ i\in I$.

З іншого боку, з виразу (6.7), одержимо

$$\delta_i = 1 - \rho_i'^H - \sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j'^B =$$

$$= 1 - \sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j'^H - \sum_{j\in I}\rho_j'^H - \sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j'^B = 1 - \sum_{j\in I}\rho_j'^H - \sum_{\substack{j\in I\\ i\neq j}}\left(\rho_j'^B - \rho_j'^H\right).$$

Але, враховуючи нерівності (6.10), можна записати

$\delta_i > 1 - \sum_{j\in I}\rho_j'^H - \left(\rho_i'^B - \rho_i'^H\right)$, або $\delta_i > 1 - \sum_{j\in I}\rho_j'^H - \rho_i'^B + \rho_i'^H$, тобто $\delta_i > 1 - \sum_{\substack{j\in I \\ j\neq i}} \rho_j'^H - \rho_i'^B$.

Враховуючи допустимість гіперпаралелепіпеда $\Gamma^{(2)}$, очевидно, що $\delta_i > 0,\ i\in I$, що й доводить справедливість твердження 6.2.

Твердження **6.3.** Умовою відсіву тільки однієї з границь гіперпаралелепіпеда $\Gamma^{(1)}$ є виконання нерівності $\left(1-\sum_{j\in I}\rho_j'^H\right) < \left(\sum_{j\in I}\rho_j'^B - 1\right)$ (коли відсіюються лише верхні границі), або $\left(1-\sum_{j\in I}\rho_j'^H\right) > \left(\sum_{j\in I}\rho_j'^B - 1\right)$ (коли відсіюються лише нижні границі).

У випадку, коли має місце рівність виду $\left(1-\sum_{j\in I}\rho_j'^H\right) = \left(\sum_{j\in I}\rho_j'^B - 1\right)$, відсів не відбувається.

Нехай $\left(1-\sum_{j\in I}\rho_j'^H\right) < \left(\sum_{j\in I}\rho_j'^B - 1\right)$. Доведемо, що в цьому випадку відсіюються лише верхні границі, тобто $\Delta_i \ge 0, \delta_i < 0$, $i\in I$. Перепишемо значення Δ_i у вигляді

$$\Delta_i > \sum_{\substack{j\in I \\ j\neq i}}\rho_j'^H + \rho_i'^B - 1 = \rho_i'^B - \left(1-\sum_{j\in I}\rho_j'^H + \rho_i'^H\right) =$$

$$= \left(\rho_i'^B - \rho_i'^H\right) - \left(1-\sum_{j\in I}\rho_j'^H\right).$$

Очевидно, що $\Delta_i \ge 0$, коли $1-\sum_{j\in I}\rho_j'^H \le \rho_i'^B - \rho_i'^H$. Припустимо, що $1-\sum_{j\in I}\rho_j'^H \le \rho_i'^B - \rho_i'^H$.

Доведемо справедливість цього припущення, представивши його таким чином:

$$1-\sum_{j\in I}\rho_j'^H \le \left(\sum_{j\in I}\rho_j'^B - 1\right) + 1 - \sum_{\substack{j\in I \\ j\neq i}}\rho_j'^B - \rho_i'^H.$$

Враховуючи умову допустимості гіперпаралелепіпеда $\Gamma^{(2)}$, очевидно припустити існування індексів, для яких є справедливою нерівність $1-\sum_{j\in I}\rho_j'^H \le \rho_i'^B - \rho_i'^H$, а, отже, існують $\Delta_i \ge 0,\ i\in I$.

Аналогічно доведемо, що $\delta_i < 0,\ i\in I$. Відповідно до виразу (6.7),

$$\delta_i = 1-\rho_i'^H - \sum_{\substack{j\in I \\ j\neq i}}\rho_j'^B =$$

$$= 1-\left(\sum_{j\in I}\rho_j'^B - \rho_i'^B\right) - \rho_i'^H = \left(\rho_i'^B - \rho_i'^H\right) - \left(\sum_{j\in I}\rho_j'^B - 1\right).$$

Очевидно, що $\delta_i < 0,\ i\in I$, коли $\sum_{j\in I}\rho_j'^B - 1 > \rho_i'^B - \rho_i'^H$.

Припустимо, що є справедливою нерівність $\sum_{j\in I}\rho_j'^B - 1 > \rho_i'^B - \rho_i'^H$. Доведемо справедливість цього припущення, виписавши його таким чином:

$$\sum_{j\in I}\rho_j'^B > \rho_i'^B + \left(1-\sum_{j\in I}\rho_j'^H\right) + \sum_{\substack{j\in I \\ j\neq i}}\rho_j'^H - 1.$$

Враховуючи умову допустимості гіперпаралелепіпеда $\Gamma^{(2)}$, тобто $\rho_i''^B + \sum_{\substack{j\in I \\ j\neq i}}\rho_j''^H \le 1$, очевидно, що для всіх індексів $\forall i\in I$ є справедливою нерівність $\sum_{j\in I}\rho_j''^B - 1 > \rho_i''^B - \rho_i''^H$, а отже і $\delta_i < 0,\ \forall i\in I$.

Для випадку $\left(1-\sum_{j\in I}\rho_j'^H\right) > \left(\sum_{j\in I}\rho_j'^B - 1\right)$ доведення проводиться аналогічно.

Твердження **6.4.** Якщо виконується нерівність

$$\min_{j\in I}\left(\rho_j^{\prime B}-\rho_j^{\prime H}\right)>1-\sum_{j\in I}\rho_j^{\prime H},$$

то уточнення нижніх границь ГВК не відбувається.

Доведемо, що для цього випадку виконується умова: $\delta_i<0$, $\forall i\in I$, тобто поправки нижніх границь ГВК є від'ємними і таким чином зміни границь не відбувається.

Початкову нерівність твердження 6.4 можна переписати так:

$$\min_{j\in I}\left(\rho_j^{\prime B}-\rho_j^{\prime H}\right)>1-\rho_i^{\prime H}-\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j^{\prime H}-\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j^{\prime B}+\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j^{\prime B}.$$

Зробивши перестановки в правій частині нерівності та врахувавши, що $\delta_i>1-\rho_i^{\prime H}-\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j^{\prime B}$, одержуємо нерівність

$$\min_{j\in I}\left(\rho_j^{\prime B}-\rho_j^{\prime H}\right)>1-\rho_i^{\prime H}-\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j^{\prime B}+\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j^{\prime H}-\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j^{\prime B}.$$

Звідси випливає справедливість нерівності $\min_{j\in I}\left(\rho_j^{\prime B}-\rho_j^{\prime H}\right)_i^H+$ $+\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j^{\prime H}-\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j^{\prime B}>\delta_i$, або остаточно маємо

$$\min_{j\in I}\left(\rho_j^{\prime B}-\rho_j^{\prime H}\right)-\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\left(\rho_j^{\prime B}-\rho_j^{\prime H}\right)>\delta_i.$$

Очевидно, що має місце нерівність $\min_{j\in I}\left(\rho_j^{\prime B}-\rho_j^{\prime H}\right)<$ $<\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\left(\rho_j^{\prime B}-\rho_j^{\prime H}\right)$. Отже, є справедливою нерівність

$$\min_{j\in I}\left(\rho_j^{\prime B}-\rho_j^{\prime H}\right)-\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\left(\rho_j^{\prime B}-\rho_j^{\prime H}\right)<0.$$

Це означає, що $\delta_i<0$, $\forall i\in I$, що й доводить справедливість твердження 6.4.

***Твердження* 6.5.** Якщо виконується нерівність

$$\min_{j\in I}\left(\rho_j^{\prime B}-\rho_j^{\prime H}\right)>\sum_{j\in I}\rho_j^{\prime B}-1,$$

то уточнення верхніх границь гіперпаралелепіпеда не відбувається.

Доведемо, що для цього випадку виконується $\Delta_i<0$, $\forall i\in I$, тобто поправки верхніх границь $\Gamma^{(1)}$ є від'ємними і таким чином зміни границь не відбувається.

Початкову нерівність твердження 6.5 можна переписати таким чином: $\min_{j\in I}\left(\rho_j^{\prime B}-\rho_j^{\prime H}\right)>\rho_i^{\prime B}+\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j^{\prime B}-1+\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j^{\prime H}-\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j^{\prime H}$. Оскільки значення Δ_i визначається формулою $\Delta_i=\rho_i^{\prime B}+$ $+\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j^{\prime H}-1$, $i\in I$, то з урахуванням відповідних тотожних перетворень можна переписати попередню нерівність у вигляді $\min_{j\in I}\left(\rho_j^{\prime B}-\rho_j^{\prime H}\right)>\rho_i^{\prime B}+\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j^{\prime H}-1+\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j^{\prime B}-\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\rho_j^{\prime H}$ або у вигляді $\min_{j\in I}\left(\rho_j^{\prime B}-\rho_j^{\prime H}\right)-\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\left(\rho_j^{\prime B}-\rho_j^{\prime H}\right)>\Delta_i$. Очевидно, що є справедливою нерівність $\min_{j\in I}\left(\rho_j^{\prime B}-\rho_j^{\prime H}\right)<\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\left(\rho_j^{\prime B}-\rho_j^{\prime H}\right)$, або $\min_{j\in I}\left(\rho_j^{\prime B}-\rho_j^{\prime H}\right)-$ $-\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\left(\rho_j^{\prime B}-\rho_j^{\prime H}\right)<0$. Це означає, що $\Delta_i<0$, $\forall i\in I$. Тим самим доводиться справедливість твердження 6.5.

6.2.3. *Процедура K^2 відсіву надлишкових значень гіперпаралелепіпеда вагових коефіцієнтів*

Для відсіву надлишкових значень ГВК можна використати також процедуру K^2. Вона описується такою послідовністю кроків.

Крок 1. Перевірка наявності надлишкових значень у ГВК (6.1)-(6.4) за формулами (6.7), (6.9). У випадку наявності надлишкових значень здійснюється перехід до кроку 2, інакше – до кроку 4.

Крок 2. Якщо не виконується нерівність (6.6) то збільшуємо всі складові цієї нерівності на деяку величину $\varepsilon>0$, де ε – достатньо мале число. Значення ε вибирається так, щоб воно забезпечувало швидку збіжність процедури і дозволяло б обчислити ГВК, який не містить надлишкових значень, з достатньою точністю.

Крок 3. Якщо не виконується нерівність (6.8), то зменшуємо всі складові цієї нерівності на деяку досить малу величину ε, тобто $\rho_i^H - \varepsilon$, $i \in I$, $\rho_j^B - \varepsilon$, $i, j \in I$, $i \neq j$. Перехід до кроку 1.

Крок 4. Закінчення процедури K^2.

Порівняння процедур K^1 та K^2 наводиться у параграфі 6.12 цієї монографії.

6.2.4. *Процедура нормалізації гіперпаралелепіпеда вагових коефіцієнтів*

Нормалізованим ГВК назвемо такий ГВК, у якого

$$\max_{i\in I}\left(\rho_i^B + \sum_{\substack{j\in I\\ i\neq j}} \rho_j^H\right) = \min_{i\in I}\left(\rho_i^H + \sum_{\substack{j\in I\\ i\neq j}} \rho_j^B\right) = 1.$$

Справедливим є наступне твердження.

***Твердження* 6.6.** Нормалізований ГВК не містить надлишкових значень вагових коефіцієнтів.

Сформулюємо евристику, яка дозволяє нормалізувати ГВК.

***Евристика* Е6.1.** Для нормалізації довільного нормованого ГВК виду (6.1)-(6.4) слід змінити границі інтервалів цього ГВК відповідними поправочними значеннями:

$$\rho_i'^H = \rho_i^H + \varepsilon_H,\ \rho_i'^B = \rho_i^B + \varepsilon_B,\ i \in I,$$

де $\rho_i'^H = \rho_i^H + \varepsilon_H$, $\rho_i'^B = \rho_i^B + \varepsilon_B$, $i \in I$, $\varepsilon_H > 0$, $\varepsilon_B > 0$ – деякі малі числа.

За означенням нормалізований ГВК має задовольняти умовам

$$\begin{cases} \min\limits_{i\in I}\left(\left(\rho_i^H + \varepsilon_H\right) + \sum\limits_{\substack{j\in I\\ i\neq j}}\left(\rho_j^B + \varepsilon_B\right)\right) = 1, \\ \max\limits_{i\in I}\left(\left(\rho_i^B + \varepsilon_B\right) + \sum\limits_{\substack{j\in I\\ i\neq j}}\left(\rho_j^H + \varepsilon_H\right)\right) = 1. \end{cases}$$

Звідси випливає справедливість рівностей

$$\begin{cases} \varepsilon_H + (n-1)\varepsilon_B = 1 - \min\limits_{i\in I}\left(\rho_i^H + \sum\limits_{\substack{j\in I\\ i\neq j}} \rho_j^B\right), \\ \varepsilon_B + (n-1)\varepsilon_H = 1 - \max\limits_{i\in I}\left(\rho_i^B + \sum\limits_{\substack{j\in I\\ i\neq j}} \rho_j^H\right). \end{cases}$$

Таким чином, одержуємо формули для визначення значень $\varepsilon_H, \varepsilon_B$:

$$\varepsilon_H = \left((n-1)\left(1 - \max_{i\in I}\left(\rho_i^B + \sum_{\substack{j\in I\\ i\neq j}} \rho_j^H\right)\right) - \left(1 - \min_{i\in I}\left(\rho_i^H + \sum_{\substack{j\in I\\ i\neq j}} \rho_j^B\right)\right) \Big/ \left(n(n-2)\right) \right),$$

$$\varepsilon_B = \left((n-1)\left(1 - \min_{i\in I}\left(\rho_i^H + \sum_{\substack{j\in I\\ i\neq j}} \rho_j^B\right)\right) - \left(1 - \max_{i\in I}\left(\rho_i^B + \sum_{\substack{j\in I\\ i\neq j}} \rho_j^H\right)\right) \Big/ \left(n(n-2)\right) \right).$$

Отже, введенням евристики Е6.1 досягаємо виконання вимоги нормалізованості ГВК. Очевидно, що вимога нормалізованості ГВК є сильнішою від вимоги відсутності надлишкових значень ГВК.

Критеріями відповідності нормалізованого ГВК початковому ГВК можуть слугувати такі:

$$Q^{(1)} = \sum_{i\in I}(\rho_i^B - \rho_i^H) - \sum_{i\in I}(\rho_i'^B - \rho_i'^H);$$

$$Q^{(2)} = \sum_{i\in I}(\rho_i^B - \rho_i'^B) - \sum_{i\in I}(\rho_i^H - \rho_i'^H);$$

$$Q^{(3)} = \max\left(\sum_{i\in I}(\rho_i^B - \rho_i'^B), \sum_{i\in I}(\rho_i^H - \rho_i'^H)\right);$$

$$Q^{(4)} = \max_{i\in I}\left(\rho_i^H - \rho_i'^H, \rho_i^B - \rho_i'^B\right);$$

$$Q^{(5)} = \max_{i\in I}\left(\left|\rho_i^H / \rho_i^B\right|, \left|\rho_i'^H / \rho_i'^B\right|\right);$$

$$Q^{(6)} = \sum_{i\in I}\left(\rho_i^H / \rho_i^B - \rho_i'^H / \rho_i'^B\right),\ i\in I.$$

6.3. Метод непрямого визначення гіперпаралелепіпеда вагових коефіцієнтів за неповною матрицею парних порівнянь

Один з методів розв'язання задачі визначення ваги об'єктів за неповною метризованою мультиплікативною МПП вперше описано в роботі [39]. Властивості цього методу, обчислювальні експерименти, пов'язані з ним, та його практичне застосування розглядалися в роботах [8, 9, 13, 14, 19]. На першому етапі цього методу за матрицею (3.1) будується прямокутна матриця розміру $(n\times N)$, $N = n(n-1)/2$, з елементами

$$P = \left(\pi_{ij}\right),\ i\in H = \{1,\dots,N\},\ j\in I, \tag{6.11}$$

$$\text{де } \pi_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i = (2-n) + \sum\limits_{l=1}^{s}(n-l),\ s = 1,\dots,n-1, \\ \mu_{ij}, \text{ якщо } j = s+i \text{ для } i = 1,\dots,n-1, \\ j = s+i-\sum\limits_{l=1}^{s}(n-l) \text{ для } i\ge l \text{ або } s\ge 2, \\ 0, \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

З матриці (6.11) по черзі вибираються всі можливі комбінації з $(n-1)$-го рядка і доповнюються рядком довжини n, який складається з одиничних елементів. Одержана матриця позначається через $A^{(l)}, l\in\Lambda$, і утворюється система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} &A^{(l)}\rho = e, \\ &\rho_i > 0,\ i\in I, \end{aligned} \tag{6.12}$$

де Λ – множина індексів систем виду (6.12), для яких матриця $A^{(l)}, l\in\Lambda$, є невиродженою, e – вектор довжини n з елементами $(0,\dots,0,1)^T$, T – знак транспонування.

На останньому етапі методу визначаються мінімальне та максимальне значення елементів вектора розв'язків систем вигляду (6.12)

$$\rho_i^H = \min_{l\in\Lambda}\rho_i^l,\ \ \rho_i^B = \max_{l\in\Lambda}\rho_i^l,\ \ i\in I, \tag{6.13}$$

де $\rho^l = \left(\rho_i^l\right), i\in I,$ – розв'язок l-ї сумісної системи (6.12).

Описаний метод поширюється на випадок неповних МПП, тобто коли значення деяких елементів матриці $M = \left(\mu_{ij}\right)$, $i,j\in I$, є невідомими. У випадку, якщо елементи $\mu_{ij}, i,j\in I$, не задані, вони не породжують рядки матриці (6.11) і не приймають участі у побудові систем (6.12). Для визначення невідомих елементів матриці (3.1) $\mu_{ij}^?, i,j\in I$, можна визначити нормований "середній" вектор ГВК

$$\rho_i^C = \left(\rho_i^H + \rho_i^B\right) / \sum_{j\in I}\left(\rho_j^H + \rho_j^B\right),\ i\in I,$$

і покласти

$$\mu_{ij}^? = \rho_i^C / \rho_j^C, i,j\in I.$$

Для перевірки відповідності знайденого ГВК заданій експертом метризованій МПП (3.1) можна розглядати такі значення

$$\begin{aligned} Q^{(7)} &= \max_{i,j\in I}\left(\left|\mu_{ij} - \rho_i^C / \rho_j^C\right|\right), \\ Q^{(8)} &= \sum_{i,j\in I}\left(\left|\mu_{ij} - \rho_i^C / \rho_j^C\right|\right). \end{aligned} \tag{6.14}$$

Є справедливими такі твердження.

***Твердження* 6.7.** [19] Розв'язки систем (6.12) не порушують відношення переваги, задані експертами на множині об'єктів. Тобто у випадку, коли, на думку експерта, i-й об'єкт переважає j-й, і значення відповідного елемента МПП задовольняє умові $\mu_{ij} > 1$, то відповідні компоненти вектора вагових коефіцієнтів знаходяться у співвідношенні $\rho_i > \rho_j, i\ne j,\ i,j\in I$, і навпаки.

Доведення твердження випливає з виду матриці $A^{(l)}, l\in\Lambda$. В будь-якому s-му рядку цієї матриці, $s\in I$, індекс i-го елемента, рівного 1, є меншим від індекса j-го елемента, рівного π_{sj}, $s\in I, j\in H$, який задається експертом. Тому для доведення твердження 6.7 досить розглянути тотожність

$$\rho_i^{(l)}-\pi_{sj}\rho_j^{(l)}\equiv 0,\ s,i,j\in I,\ l\in\Lambda,$$

де $\rho_i^{(l)},\rho_j^{(l)}\ i,j\in I,\ l\in\Lambda,$ – елементи розв'язку поточної системи (6.12). Звідси можна записати

$$\rho_i^{(l)}\equiv\pi_{sj}\rho_j^{(l)},\ 1\le i<j\le n,\ s,i,j\in I,\ l\in\Lambda.$$

Очевидно, що для виконання цієї тотожності при $\pi_{sj}<1$ (що відповідає відношенню переваги між об'єктами $a_i>a_j, i,j\in I$), має виконуватися умова $\rho_i^{(l)}>\rho_j^{(l)}, i,j\in I,\ l\in\Lambda$. Коли врахувати обмеження на нормованість розв'язку, що накладається останнім рівнянням кожної з систем вигляду (6.12), то до вказаних співвідношень слід додати ще й умови $\rho_i^{(l)}<1,\ \rho_j^{(l)}<1,\ i,j\in I,\ l\in\Lambda$.

Всі описані міркування можна провести й для ситуації, коли $\pi_{sj}\ge 1$ (що відповідає відношенню переваги $a_i\le a_j$, $i,j\in I$). Таким чином, розв'язок будь-якої системи (6.12) задовольняє умовам нормованості і не порушує відношень переваги, заданих експертом.

***Твердження* 6.8** (Наслідок твердження 6.7). ГВК, одержаний застосуванням методу непрямого визначення ГВК за неповною метризованою МПП, відповідає відношенням переваги, заданим матрицею (3.1) на множині об'єктів.

В силу справедливості твердження 6.7 і способу знаходження границь ГВК, визначеного за умовами (6.11)–(6.13), такий ГВК містить ті і тільки ті значення вагових коефіцієнтів, які не порушують відношення переваги, задані експертом. Отже, одержаний ГВК буде містити всі розв'язки систем вигляду (6.12), кожен з яких не порушує відношення переваги, задані експертом. Тобто в ГВК, границі якого задаються у вигляді (6.13), завжди існують вектори, які відповідають експертним відношенням $\mu_{ij}, i,j\in I$. Наявність серед розв'язків систем вигляду (6.12) таких, що порушують співвідношення $\rho_i/\rho_j=\mu_{ij}$, є наслідком відсутності надтранзитивності матриці (3.1).

***Твердження* 6.9.** ГВК, визначений методом непрямого визначення ГВК, точно апроксимує МПП (3.1) в просторі коефіцієнтів відносної важливості об'єктів.

Доведення цього твердження випливає з правомірності використання систем вигляду (6.12) для знаходження перетинів гіперплощин, які задаються значеннями $\mu_{ij}, i,j\in I$, з гіперплощиною (6.1) та способу знаходження границь ГВК (6.13). Тобто граничні значення вагових коефіцієнтів знаходяться саме на границі ГВК, оскільки саме вони породжують ці границі за побудовою.

***Твердження* 6.10.** Гіперпаралелепіпед, одержаний методом непрямого визначення ГВК за неповною МПП, не містить надлишкових значень.

***Твердження* 6.11.** У випадку визначення ГВК описаним методом непрямого визначення ГВК за неповною метризованою МПП (3.1) єдиною умовою існування несуперечливого ГВК, побудованого за матрицею (3.1), є зв'язність графа, який відповідає матриці (3.1).

***Твердження* 6.12.** Система (6.12) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли матриця $A^{(l)}, l\in\Lambda$, є невиродженою і не містить жодного одиничного стовпчика $e=(0,...,0,1)^T$.

Стосовно невиродженості матриці $A^{(l)}, l\in\Lambda$, справедливість твердження очевидна.

Для доведення другої частини твердження скористаємося формулою Крамера [4]. Позначимо через δ визначник матриці $A^{(l)}, l\in\Lambda$, а через $\delta_j, j\in I,$ – визначник матриці, яка відрізняється від матриці $A^{(l)}, l\in\Lambda$, тільки тим, що у ній j-й стовпчик замінено стовпчиком правих частин. Очевидно, що у випадку, коли s-й стовпчик матриці $A^{(l)}, l\in\Lambda$, $1\le s\le n$, в системі (6.12) має вигляд e, то s-та компонента розв'язку системи (6.12) дорівнює $\rho_s^l=1$, $s\in I$, $l\in\Lambda$. Тому, з урахуванням останнього рівняння системи (6.12) $\sum_{i\in I}\rho_i=1$, можна стверджувати, що додаткові умови $\rho_i^l=1$, $i\in I$, $l\in\Lambda$, не будуть виконані і отже одержаний розв'язок не є допустимим розв'язком системи (6.12).

Доведемо, що у випадку відсутності стовпчиків типу e, матриця $A^{(l)}, l \in \Lambda$, завжди є невиродженою. Структура матриці $A^{(l)}, l \in \Lambda$, така, що кожний її рядок, крім останнього, складається рівно з двох ненульових елементів. Причому, враховуючи структуру матриці P, на перестановках $(n-1)$ рядків якої будуються матриці вигляду $A^{(l)}, l \in \Lambda$, можна стверджувати, що немає жодної пари рядків, в якій ненульові елементи мали б одночасно однакові індекси. Це означає, що жодна пара рядків не є лінійно залежною. Відомо [4], що система лінійних рівнянь є лінійно незалежною тоді і тільки тоді, коли лінійно незалежною є кожна її підсистема. Таким чином матриця $A^{(l)}, l \in \Lambda$, є невиродженою, якщо вона не містить стовпчиків e.

Запропонований метод, незважаючи на його обчислювальну складність, має безумовні переваги:

- метод орієнтований на знаходження ГВК, який точно апроксимує матрицю (3.1), що сприяє збереженню інформації про переваги (хоча при переході від дискретних значень в просторі вагових коефіцієнтів до неперервних інтервалів відносної важливості коефіцієнтів додаються нові значення переваг) і наочніше представляє експертну інформацію;
- обчислений ГВК можна розглядати як оцінку компетентності експерта, який задав МПП (3.1);
- у методі використовується метризована МПП, яка, згідно [30], є узагальненням переваг, заданих у порядковій шкалі;
- використовується у загальному випадку неповна МПП, що значно розширює сфери застосування методу і зменшує його трудомісткість;
- вирішується проблема визначення невідомих елементів неповної МПП, тобто задача відновлення, яка є самостійною задачею.

6.4. Методи метризації ранжувань об'єктів

Задача визначення повного порядку на множині об'єктів є поширеною ЗЕО і має багато практичних застосувань. Але часто інформація про переваги у порядковій шкалі на множині об'єктів (1.1) є неповною та недостатньою, тому не може влаштовувати дослідника у всіх випадках. До того ж, до такої форми задання переваг не завжди вдається адекватно застосувати весь арсенал математичних методів, які використовують експертні дані про відношення переваги.

На сьогодні розроблено значну кількість складних процедур метризації ознак, заданих у порядковій шкалі (наприклад, в [1]). Але процедури метризації мають низку недоліків:

- вони, як правило, є надто трудомісткими для експерта;
- іноді змушують експерта змінювати переваги у процесі уточнення його суджень, оскільки вимога надати числову оцінку ще недостатньо формалізованому явищу, яке вивчається, може виявитися надто жорсткою;
- при метризації може бути втрачено частину інформації про структуру переваг експерта через апроксимацію цілого спектра можливих відношень векторами числових значень.

В цьому параграфі пропонується група методів, які дозволяють провести несуперечливу метризацію переваг, заданих експертом у порядковій шкалі, здійснивши ці перетворення автоматично, без участі експерта. Кількісні дані про переваги представляються, як правило, в інтервальному вигляді. Обчислюються також фіксовані значення вагових коефіцієнтів об'єктів, які можуть у подальшому використовуватися в методах, які не допускають використання інтервальних оцінок. Ці методи описано в роботах [20, 39].

6.4.1. *Знаходження центра ваги*

Не зменшуючи загальності, припустимо, що експерт встановив відношення переваги на множині об'єктів A у вигляді строгого ранжування таким чином: $a_1 \succ a_2 \succ \ldots \succ a_n$. Тоді симплекс, який відповідає цьому відношенню, задається як перетин такої системи напівпросторів з урахуванням умови (6.2):

$$\begin{aligned} &1 > \rho_1, \\ &\rho_1 > \rho_2, \\ &\ldots\ldots \\ &\rho_{n-1} > \rho_n, \end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\sum_{i\in I}\rho_i \le 1. \quad (6.16)$$

У випадку, якщо в системі (6.15) s разів зустрічається знак рівності, то кількість нерівностей виду (6.15) зменшується і розмірність симплекса відповідно знижується. Тобто область можливих значень вагових коефіцієнтів об'єктів в цьому випадку є $(n-s-1)$ – вимірним симплексом.

Для визначеності введемо евристику.

Евристика **Е6.2.** Центр ваги симплекса (6.15), (6.16), який обчислюється за формулою

$$\rho_i = \left(\sum_{j\in I} x_j^i\right)/n, \; i\in I,$$

будемо вважати точкою, яка апроксимує область зміни вагових коефіцієнтів.

Координати вершин цього симплекса, які позначено через $x_j = \left(x_j^1,...,x_j^n\right)$, $j=1,...,n+1$, обчислюються таким чином:

$$x_j = \left(1/j,\; 1/j,...,0,...,0\right),\; j=1,...,n+1.$$

Кількість ненульових елементів вектора x_j дорівнює $j<n$, а кількість нульових складових – $(n+1-j)$. При цьому $(n+1)$-а вершина симплекса знаходиться в початку координат: $x_{n+1}=(0,...,0)$. Очевидно, що точка $\rho=(\rho_1,...,\rho_n)$ лежить на гіперплощині, яка описується рівнянням (6.1) і, таким чином, задовольняє умові нормованості вагових коефіцієнтів.

6.4.2. *Нормування середин інтервалів зміни вагових коефіцієнтів*

Нехай усі нерівності системи (6.15) є строгими. Тоді, вважаючи компоненти вектора вагових коефіцієнтів об'єктів незалежними і враховуючи нерівності (6.15) та обмеження на нормованість вагових коефіцієнтів (6.1), (6.2), легко переконатися, що інтервали зміни компонент вектора ρ є такими:

$$\rho_1 \in (1/n,1),...,\rho_i \in (0,1/i),\; i=2,...,n.$$

Якщо перші s відношень між об'єктами є рівностями, тобто

$$1>\rho_1=...=\rho_{S+1}>...>\rho_n>0,$$

тоді відповідні вагові коефіцієнти належать інтервалам $\rho_1\in\left(1/n,1/(s+1)\right),...,\rho_{S+1}\in\left(1/n,1/(s+1)\right)$.

Таким чином, інтервали зміни вагових коефіцієнтів об'єктів, тобто ГВК, в цьому випадку є такими

$$\rho_1\in(1/n,1),\text{ якщо } a_1>a_2,$$

$$\rho_i\in\left(1/n,1/(s+1)\right),\; i=1,...,s,\text{ якщо } a_1\sim a_2\sim...\sim a_S>a_{S+1},$$

$$\rho_i\in(0,1/i),\; i=2,...,n,\text{ якщо } a_1>a_2>...>a_n.$$

Евристика **Е6.3.** Для апроксимації одержаного паралелепіпеда значень коефіцієнтів нормованим вектором вибирається його центр.

Тобто середнє значення ГВК обчислюється застосуванням запропонованої процедури

$$\rho_i^C=\left(\rho_i^H+\rho_i^B\right)/2,\; i\in I, \quad (6.17)$$

де ρ_i^H,ρ_i^B $i\in I$, – відповідно нижні та верхні границі зміни відносної важливості i – го об'єкта.

На останньому етапі процедури середні значення ГВК слід нормувати

$$\rho_i=\rho_i^C/\sum_{j\in I}\rho_i^C,\; i\in I. \quad (6.18)$$

6.4.3. *Обчислення вагових коефіцієнтів на основі середнього значення найбільшого коефіцієнта*

Нехай виконуються умови (6.2), (6.15), (6.16). Введемо таку евристику.

Евристика **Е6.4.** Значення вагового коефіцієнта "найкращого" об'єкта вибираються з інтервалу $(1/n,1)$.

Значення найбільшого вагового коефіцієнта будемо вибирати як середню точку інтервалу, введеного евристикою Е6.4:

$$\rho_1^C=(1/n+1)/2=(n+1)/2n.$$

Вибране значення визначає інтервал для вибору наступного значення вагового коефіцієнта, тобто $\rho_2^C\in\left(0,\min\left(1/2,\rho_1^C\right)\right)$ і т.д. Якщо вибрано $(i-1)$ коефіцієнтів, то обчислюється чергове середнє значення інтервалу за формулою (6.17), в якій $\rho_i^H = 0$, $\rho_i^B \in \left(1/i, \rho_{i-1}^C\right)$, тобто в силу системи обмежень (6.15) маємо нерівність $\rho_i > \rho_{i-1}$.

У випадку, якщо деякі обмеження системи (6.15) є рівняннями $\rho_i = \rho_{i-1}$, $1 < i < n-1$, то границі інтервалів обчислюються за формулами $\rho_i^H = 0$, $\rho_i^B \in \left(1/(i+s+1), \rho_{i-1}^C\right)$, $j = i,...,i+s+1$, де $s-$ кількість рівнянь. Таким чином, паралелепіпед можливих значень вагових коефіцієнтів об'єктів є таким:

$$\rho_1^H = 1/n, \quad \rho_1^B = 1,$$

$$\rho_i^H = 0, \quad \rho_i^B \in \left(1/i, \rho_{i-1}^C\right), \text{ якщо } a_1 > a_2 > ... > a_n,$$

$$\rho_i^H = 0, \quad \rho_i^B \in \left(1/(i+s+1), \rho_{i-1}^C\right), \quad j = i,...,i+s+1,$$

$$\text{якщо } a_j \sim a_{j+1} \sim ... \sim a_{j+s}, \quad 1 \le i \le n-s,$$

де значення $\rho_i^C, i \in I$, обчислюються за формулою (6.17).

6.4.4. *Обчислення вагових коефіцієнтів на основі середнього значення найменшого коефіцієнта*

Цей метод відрізняється від попереднього тим, що він грунтується на введенні іншої евристики.

***Евристика* Е6.5.** Значення вагового коефіцієнта "найгіршого" об'єкта вибирається з інтервалу $\rho_n \in (0, 1/n)$.

Значення найменшого вагового коефіцієнта покладемо рівним величині $\rho_n^C = 1/2n$. Значення нижніх границь i-го інтервалу визначаються формулами $\rho_i^H = \min\left(1/n, \rho_{i+1}^C\right)$ в силу нерівності $\rho_i > \rho_{i-1}$ системи (6.15), а значення верхніх границь покладаються рівними $\rho_i^B = 1/i$, $i = 2,...,n$. Середини інтервалів $\rho_i^C, i \in I$, обчислюються за формулами (6.17). Після цього значення $\rho_i^C, i \in I$, нормуються за формулами (6.18).

6.4.5. *Метод рівних інтервалів*

Для обчислення границь інтервалів зміни вагових коефіцієнтів скористаємося спочатку їхніми бальними оцінками. Покладемо $\alpha_n^H = \alpha$, де $\alpha > 0 -$ будь-яке додатне число. Введемо наступну евристику.

***Евристика* Е6.6.** Справедливі такі припущення:

- якщо об'єкти рівноцінні $a_i \sim a_{i+1}$, то $\alpha_i^H = \alpha_{i+1}^H$, $\alpha_i^B = \alpha_{i+1}^B$;
- якщо $a_i \ge a_{i+1}$, то $\alpha_i^H = \alpha_{i+1}^H$, $\alpha_{i+1}^B = \alpha_i^B + \alpha/2$; $\alpha_i^B = \alpha_i^H + \alpha$;
- якщо $a_i > a_{i+1}$, то $\alpha_i^B = \alpha_i^H + \alpha$, $\alpha_i^H = \alpha_{i+1}^H$.

Для обчислення границь зміни вагових коефіцієнтів об'єктів пронормуємо одержані з використанням евристики Е6.6 оцінки за формулами

$$\rho_i^H = \alpha_i^H / \left(\sum_{j \in I} \alpha_j^H - \alpha \right), \quad i \in I,$$

$$\rho_i^B = \alpha_i^B / \left(\sum_{j \in I} \alpha_j^B - \alpha \right), \quad i \in I.$$

Таким чином, у цьому параграфі запропоновано групу методів автоматизованої метризації заданих порядкових відношень на множині об'єктів, орієнтованих на оцифровку (арифметизацію, метризацію) строгих та нестрогих ранжувань об'єктів.

Наведені методи метризації переваг, заданих у порядковій шкалі, мають низку позитивних властивостей:

- від експерта вимагається задання лише фактів переваги між об'єктами, адже метризація переваг проводиться автоматично і не вимагає застосування складних процедур визначення інтенсивності переваг;
- одержані числові значення адекватно відображують переваги експерта, не вносять зміни в структуру переваг на множині об'єктів;
- обчислені в результаті застосування методів ГВК краще відображують психологічні особливості людини, для якої характерні розмиті, неточні експертні оцінки.

Вказані методи можуть також використовуватися як перше наближення для застосування складніших процедур метризації переваг. При цьому у випадку обчислення ГВК не втрачається інформація про переваги експерта, виражена в порядковій шкалі.

6.5. Узагальнення метода стабілізації переваг

Поширеною ЗЕО є побудова за "якісними" МПП (1.4) ранжування об'єктів та визначення обгрунтованих числових оцінок відносної важливості об'єктів, тобто „згладжування" нетранзитивності відношень, які відповідають матриці (1.4).

Одним з методів розв'язання такої задачі є метод стабілізації переваг, який наводиться в роботі [33] для матриці якісних оцінок переваг між об'єктами $B=(b_{ij})$, $i,j\in I$, з елементами

$$b_{ij}^{l}=\begin{cases}2, \text{ якщо } a_i>a_j,\\ 1, \text{ якщо } a_i\sim a_j \text{ або } i=j,\\ 0, \text{ якщо } a_i<a_j,\end{cases} \quad (6.19)$$

$$b_{ij}^{l}+b_{ji}^{l}=2,\ \forall i,j\in I,\ i\neq j,\ l\in L,$$

де "$>$", "$\sim$" – символи відношень відповідно переваги та рівноцінності об`єктів.

Цей метод вперше описується в роботі [2] для розв'язання „задачі про лідера" при визначенні відносної сили гравця в турнірі. В [33] наводиться обгрунтування інтуїтивної виправданості такого підходу. Нехай матриця (турнірна таблиця) B є заключною таблицею спортивної першості ліги, яка складається з n команд. Ця матриця відрізняється від звичайної таблиці лише тим, що по діагоналі в ній стоять одиниці, відповідно до тлумачення її елементів як попарних оцінок відносної сили команд.

Розподіл очок серед команд характеризується вектором $q^{(1)}=\left(q_1^{(1)},\dots,q_n^{(1)}\right)$, де $q_i^{(1)}=\sum\limits_{j\in I}b_{ij}$, $i\in I$. У випадку нетранзитивності матриці B завжди можлива ситуація, коли команда з індексом i, $i\in I$, яка одержала меншу кількість очок, виграла в ході турніру у команди з індексом j, $j\in I$, яка одержала в результаті турніру більшу кількість очок $q_i^{(1)}>q_j^{(1)}, i\neq j$, $i,j\in I$, тобто $b_{ij}=2$, $i,j\in I$, або зіграла з нею внічию. Для того, щоб під час призначення „очок" врахувати результати й інших команд, до очок кожної команди додаються очки тих команд, з якими ця команда зіграла внічию, та подвоєна кількість очок команд, переможених нею. Одержуємо вектор

$$q^{(2)}=\left(q_1^{(2)},\dots,q_n^{(2)}\right),$$

де $q_i^{(2)}=q_i^{(1)}+\sum\limits_{j\in I_1^i}q_j^{(1)}+2\sum\limits_{j\in I_2^i}q_j^{(1)}$, $I_1^i=\{j:\ b_{ij}=1\}$, $I_2^i=\{j:\ b_{ij}=2\}$.

Цю процедуру продовжують до тих пір, поки розподіл місць серед команд не стабілізується, тобто поки $i_j^{s}=i_j^{s+1}$ для $\forall j\in I$, де i_j^{s} – індекс команди, яка зайняла j-те місце в турнірі за результатами s-го застосування описаної процедури стабілізації, або до тих пір, поки $\left|q_i^{\prime(s)}-q_i^{\prime(s+1)}\right|<\varepsilon$ для $\forall i\in I$, де $q_i^{\prime(s)}$ – нормоване значення "сили" i-ї команди на s-й ітерації, $q_i^{\prime(s)}=q_i^{(s)}/\sum\limits_{j\in I}q_j^{(s)}$; $\varepsilon>0$ – задане досить мале число.

Тепер зауважимо [33], що $q^{(s)}=Bq^{(s-1)}$, $s=1,2,\dots$ Тобто здійснюється послідовне застосування перетворення, яке задається матрицею B, до початкового вектора $q^{(0)}=(1,\dots,1)$. Такі процеси, пов'язані з невід'ємними матрицями, добре вивчені в лінійній алгебрі. Сформулюємо необхідні поняття та результати.

Матриця B називається *розкладною*, якщо множину індексів об'єктів I можна розбити одночасною перестановкою рядків та стовпчиків на дві підмножини I_1, I_2, $I_1\cup I_2=I$, такі, що $b_{ij}=0$, $\forall i\in I_1$, $\forall j\in I_2$.

Розкладність матриці B означає, що всі команди з індексами I_2 в турнірі стали переможцями усіх команд з індексами I_1. Той факт, що матриця B не є розкладною, очевидно, рівносильний тому, що граф ненульових зв'язків утворює єдину бікомпоненту.

Будь-який вектор q, що не змінює "напряму" в результаті застосування матриці B, тобто такий, що задовольняє рівнянню $Bq=\lambda q$, називається *власним вектором* матриці B, а коефіцієнт "розтягу" λ – *власним числом*, якому відповідає вектор q.

Розглянемо процедуру, яка описується співвідношенням

$$q^{(s)}=\frac{1}{\lambda_s}Bq^{(s-1)},\ s=1,2,\dots, \quad (6.20)$$

де $q^{(0)}>0$, $\lambda_s=\sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in I}b_{ij}q_j^{(s-1)}$, $s=1,2,\dots,$ – сума елементів вектора

$Bq^{(s-1)}$, тому $q^{(s)}$ – нормований вектор відносних оцінок. Якщо матриця B є нерозкладною, то процедура (6.20) приводить до власного числа $\lambda = \lim\limits_{s\to\infty} \lambda_s$ матриці B з відповідним власним вектором $q = \lim\limits_{s\to\infty} q^{(s)}$. Відомо, що невід'ємна нерозкладна матриця обов'язково має дійсне додатне власне число λ, яке є більшим від усіх її власних чисел за абсолютним значенням.

Ці властивості невід'ємних матриць, пов'язані з теоремою Персона–Фробеніуса [4], свідчать про те, що описаний процес обчислення величин $q^{(s)}$, $s = 1,2,...$, обов'язково збігається до власного вектора матриці B, якщо B є нерозкладною. На відміну від простого підрахунку "очків", процес, описаний співвідношенням (6.20), дозволяє врахувати непрямі переваги між об'єктами. Якщо ж B є розкладною, так що граф ненульових зв'язків містить не менше двох бікомпонент, то це свідчить або про помилки при підборі множини об'єктів, або про несумісність, непорівнянність їх підмножин. В разі необхідності ранжування об'єктів у випадку нерозкладності матриці B можна скористатися процедурою поділу для впорядкування бікомпонент [33], а потім - процесом (6.20) для впорядкування об'єктів у бікомпонентах.

6.5.1. *Узагальнення метода стабілізації переваг на випадок метризованих матриць*

Розглянемо узагальнення описаного метода на випадок неповних метризованих МПП, кардинально неузгоджених з елементами, заданими в адитивній формі у деякому додатному інтервалі [15]. Вагу об'єктів будемо визначати у вигляді нормованих коефіцієнтів.

Існує значна кількість методів, які так чи інакше обгрунтовуються авторами і з різними ступенями точності апроксимують початкові кардинально неузгоджені дані. При цьому інколи припускається [45], що відома істинна вага об'єктів і обчислені за матрицею (3.1) коефіцієнти порівнюються з істинними. Точність апроксимації в цьому випадку, з точки зору авторів цих робіт, свідчить про якість запропонованого

методу. Такий підхід не є правомірним. Близкість апріорно відомих коефіцієнтів та коефіцієнтів, обчислених за матрицею (3.1) може свідчити про компетентність експерта при складанні матриці (3.1) і, в крайньому випадку, про те, що метод, який застосовується, не змінює експертну інформацію.

Для послідовного вивчення відношень переваги у випадку кардинальної неузгодженості матриці (3.1) слід визначати паралелепіпед можливих вагових коефіцієнтів об'єктів. Критерієм відповідності визначеного ГВК перевагам, що виражені матрицею (3.1), може бути використана, наприклад, умова мінімального ГВК, який містить всі вагові коефіцієнти, що задовольняють співвідношенням

$$\rho_i / \rho_j = \mu_{ij}, \quad \forall i, j \in I,$$

тобто ГВК, який точно апроксимує задану МПП.

Достатньо обгрунтованим у цьому плані є описаний вище метод стабілізації переваг. Але цей метод використовується для порядкових шкал, тобто МПП (6.19) з елементами $b_{ij} \in \{0,1,2\}$, $i, j \in I$, і може слугувати лише як метод ранжування об'єктів, оскільки значення b_{ij}, $i, j \in I$, для порядкових шкал є лише індикаторами. Крім того, проміжні значення вагових коефіцієнтів не запам'ятовуються, а використовуються лише стабілізовані вагові коефіцієнти, що може призвести до втрати інформації про переваги.

В цьому параграфі пропонується узагальнення методу стабілізації переваг на випадок метризованих адитивних МПП. Узагальнення метода стабілізації переваг розглядалося в роботах [8, 9, 15]. На першому кроці (індекс ітерації $s = 0$) методом рядкових сум визначаються величини

$$q_i^{(s)} = \sum_{j\in I} \mu_{ij}, i \in I. \qquad (6.21)$$

Після цього визначаються початкові значення вагових коефіцієнтів об'єктів для $s = 0$

$$\rho_i^{(s)} = q_i^{(s)} / \sum_{j\in I} q_j^{(s)}. \qquad (6.22)$$

Для побудови процедури стабілізації метризованих відношень переваги введемо додаткову евристику.

Евристика **Е6.7.** Важливість результатів обчислення відношень переваги між об'єктами $a_i \geq a_j, i, j \in I$, та її вплив на загальний результат позначимо через $\alpha^{(1)}$. Вплив результатів переваги $a_i \prec a_j, i, j \in I$, позначимо символом $\alpha^{(2)}$. Параметр, який впливає на інтенсивність переваг, заданих МПП, позначимо через $\alpha^{(3)}$.

На наступному кроці для уточнення оцінок $q_i^{(S)}$, $i \in I$, скористаємося формулою

$$q_i^{(S+1)} = q_i^{(S)} + \alpha^{(1)} \sum_{j \in J_>^i} q_j^{(S)} \left(\mu_{ij}\right)^{\alpha^{(3)}} + \alpha^{(2)} \sum_{j \in J_<^i} q_j^{(S)} \left(\mu_{ij}\right)^{\alpha^{(3)}}, i \in I,$$

де $J_>^i = \{j : \mu_{ij} \geq 1\}$, $J_<^i = \{j : \mu_{ij} < 1\}$, $i \in I,$– множини індексів відповідних елементів МПП вигляду (3.1), $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}$ – параметри, введені евристикою Е6.5, варіації яких використовуються при оптимізації ГВК, що визначається. Після цього вагові коефіцієнти визначаються формулою (6.22) для $s = s+1$ і т.д. Критеріями зупинки описаного методу, тобто умовою стабілізації переваг, можна вибрати такі.

Критерій $Q^{(9)}$: усі значення $\rho_i^{(S)}, i \in I$, $s = 1,2,...$, потрапляють в обчислений на попередньому кроці процедури ГВК: $\rho_i^{(S)} \in \left[\rho_i^{H(S-1)}, \rho_i^{B(S-1)}\right], i \in I$, $s = 1,2,...$, де

$$\rho_i^{H(S)} = \min_{S=1,2,...} \rho_i^{(S)}, \quad \rho_i^{B(S)} = \max_{S=1,2,...} \rho_i^{(S)};$$

Критерій $Q^{(10)}$: поправки границь ГВК на черговому кроці зменшуються для усіх індексів

$$\rho_i^{H(S-1)} - \rho_i^{(S)} > \rho_i^{H(S)} - \rho_i^{(S+1)}, \text{ для } \forall i \in I, \rho_i^{H(S-1)} > \rho_i^{(S)},$$

$$\rho_i^{(S)} - \rho_i^{B(S-1)} > \rho_i^{(S+1)} - \rho_i^{B(S)}, \text{ для } \forall i \in I, \rho_i^{(S)} > \rho_i^{B(S-1)}.$$

6.5.2. *Узагальнення методу стабілізації переваг на випадок неповних метризованих матриць*

Для неповних МПП $M^?$ метод обчислення вагових коефіцієнтів може бути модифікований таким чином. Спочатку обчислюються всі оцінки з відомими значеннями елементів матриці $M^?$:

$$q_i^{(0)?} = \sum_{j \in I^i} \mu_{ij}, \ i \in I,$$

де $I^i \subseteq I$, $i \in I,$– індекси відомих елементів i-го рядка. Потім визначаються значення інтенсивності переваг для невідомих елементів, тобто розв'язується задача відновлення за формулою:

$$\mu_{ij} = \left(q_i^{(0)?} / q_j^{(0)?}\right)^{1/2}, j \in I \setminus I^i, i \in I. \qquad (6.23)$$

Далі здійснюється доповнення початкової матриці $M^?$ обчисленими елементами вигляду (6.23) до повної та перерахунок початкових оцінок за формулою (6.21).

Таке доповнення матриці $M^?$ до повної не збільшує неузгодженості переваг, оскільки невідомі елементи $\mu_{ij}^?, j \in I^i, i \in I$, обчислені зазначеним способом, не вносять додаткових нев'язок у переваги. Для визначення ГВК за відновленою таким чином матрицею застосовується описаний вище метод стабілізації метризованих переваг. Знайдений в результаті застосування описаного метода ГВК не містить надлишкових значень за побудовою, оскільки його межі уточнюються після кожної ітерації метода в бік розширення з використанням нормованих векторів.

6.5.3. *Перевірка адекватності обчислених вагових коефіцієнтів*

Для перевірки адекватності знайденого ГВК початковій МПП слід розглядати значення критеріїв $Q^{(7)}, Q^{(8)}$ (6.14), які введено в параграфі 6.3, а також значення критеріїв

$$Q^{(11)} = \max_{i,j \in I} \delta_{ij}, \quad Q^{(12)} = \sum_{i,j \in I} \delta_{ij},$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}^H - \mu_{ij}, & \text{якщо } \delta_{ij}^H > \mu_{ij}, \\ \mu_{ij} - \delta_{ij}^B, & \text{якщо } \delta_{ij}^B > \mu_{ij}, \\ 0, & \text{якщо } \delta_{ij}^H \leq \mu_{ij} \leq \delta_{ij}^B, \end{cases}$$

де
$$\delta_{ij}^H = \min\left(\rho_i^H / \rho_j^B, \rho_i^B / \rho_j^H\right),$$
$$\delta_{ij}^B = \max\left(\rho_i^H / \rho_j^B, \rho_i^B / \rho_j^H\right), \ i, j \in I.$$

Очевидно, що для методів, орієнтованих на визначення точкових значень вагових коефіцієнтів, справедливі рівності $Q^{(11)} = Q^{(7)}$, $Q^{(12)} = Q^{(8)}$.

Таким чином, запропонований метод та підходи до аналізу заданої неповної метризованої МПП та ГВК, що обчислюється, мають ряд позитивних характеристик:

- метод орієнтований на одержання ГВК, який апроксимує задану адитивну матрицю (3.1), що сприяє збереженню інформації про переваги і тільки інакше представляє її, а для випадків, коли необхідно знати точкові значення коефіцієнтів, ГВК апроксимується своїм "середнім" вектором;
- обчислений в результаті застосування методу стабілізації переваг ГВК, може розглядатися як непряма оцінка компетентності експерта, який задав матризовану МПП вигляду (3.1);
- метод використовує метризовану МПП, яка, згідно [30], є узагальненням переваг, заданих у порядковій шкалі;
- використовується в загальному випадку неповна МПП, що суттєво розширює можливості методу і сфери його застосування;
- вирішується проблема відновлення невідомих елементів матриці переваг, яка є самостійною задачею;
- обчислювальна складність описаного методу відповідає обчислювальній складності методу рядкових сум, який є еталоном простоти [42], а для великих множин об'єктів це є суттєвим моментом.

6.6. Визначення границь зміни інтервалів вагових коефіцієнтів об'єктів шляхом розв'язання задач лінійного програмування

Для визначення границь зміни вагових коефіцієнтів на основі матриці (3.1) будемо розв'язувати n ЗЛП

$$\begin{gathered}\rho_i \to \max,\\ \rho_i \in D,\ i \in I,\end{gathered} \tag{6.24}$$

та n задач

$$\begin{gathered}\rho_i \to \min,\\ \rho_i \in D,\ i \in I,\end{gathered} \tag{6.25}$$

де D – область допустимих значень вагових коефіцієнтів.

Область D будується на основі аналізу співвідношень між елементами матриці (3.1) та значень відповідних елементів вектора вагових коефіцієнтів, які необхідно обчислити. Якби матриця (3.1) була надтранзитивною, то для об'єктів з індексами $i, j, l \in I$, виконувалися б співвідношення $\rho_i / \rho_j = \mu_{ij}$, $\rho_i / \rho_l = \mu_{il}$, $\rho_l / \rho_j = \mu_{lj}$, або $\rho_i = \rho_j \mu_{ij}, \rho_i = \rho_l \mu_{il}, \rho_l = \rho_j \mu_{lj}$. Отже, можна записати рівності $\rho_i - \mu_{ij}\rho_j = 0, \rho_i - \mu_{il}\rho_l = 0, \rho_l - \mu_{lj}\rho_j$ або $\rho_i = \mu_{il}\mu_{lj}\rho_j$, $\rho_i = \mu_{ij}\mu_{jl}\rho_l$, $\rho_l = \mu_{li}\mu_{ij}\rho_j$.

Алгоритм побудови області допустимих значень вагових коефіцієнтів D складається з $(n+1)$ кроків, на кожному з яких формуються відповідні обмеження.

Крок 1. Введення обмеження $\rho_1 - \mu_{12}\rho_2 = 0$.

Крок 2. Обчислення та порівняння значень величин, утворених елементами матриці (3.1): $\min(\mu_{13}, \mu_{12}\mu_{23})$, $\max(\mu_{13}, \mu_{12}\mu_{23})$. При рівності $\min(\mu_{13}, \mu_{12}\mu_{23}) = \max(\mu_{13}, \mu_{12}\mu_{23})$ до області D вводиться обмеження $\rho_1 - \rho_3 \min(\mu_{13}, \mu_{12}\mu_{23}) = 0$. Якщо $\min(\mu_{13}, \mu_{12}\mu_{23}) \neq \max(\mu_{13}, \mu_{12}\mu_{23})$, то до області D вводяться обмеження $\rho_1 - \rho_3 \min(\mu_{13}, \mu_{12}\mu_{23}) \le 0$, $\rho_1 - \rho_3 \max(\mu_{13}, \mu_{12}\mu_{23}) \ge 0$.

Крок S. Обчислення та порівняння мінімальних та максимальних значень усіх можливих добутків вигляду $\mu_{1i_1}\mu_{i_1i_2}...\mu_{i_Sn}$, де індекси $i_1, i_2, ..., i_S \in I$, задовольняють умовам $1 < i_1 < i_2 < ... < i_S < n$, $1 < s < n$. У випадку, коли $\min\limits_S(\mu_{1i_1}\mu_{i_1i_2}...\mu_{i_Sn}) = \max\limits_S(\mu_{1i_1}\mu_{i_1i_2}...\mu_{i_Sn})$, $\min(\mu_{13}, \mu_{12}\mu_{23})$, $\max(\mu_{13}, \mu_{12}\mu_{23})$. до області D вводиться обмеження $\rho_1 - \rho_S \min\limits_S(\mu_{1i_1}\mu_{i_1i_2}...\mu_{i_Sn}) = 0$. Якщо має місце нерівність $\min\limits_S(\mu_{1i_1}\mu_{i_1i_2}...\mu_{i_Sn}) \neq \max\limits_S(\mu_{1i_1}\mu_{i_1i_2}...\mu_{i_Sn})$, то до обла-сті D вводяться відповідні обмеження

$$\rho_1 - \rho_S \min_S(\mu_{1i_1}\mu_{i_1i_2}...\mu_{i_Sn}) \le 0,\ \ \rho_1 - \rho_S \max_S(\mu_{1i_1}\mu_{i_1i_2}...\mu_{i_Sn}) \ge 0.$$

Крок $n+1$. Введення обмежень на нормованість вектора вагових коефіцієнтів (6.1), (6.2).

Після побудови області D допустимих значень вагових коефіцієнтів розв'язуються задачі (6.24), (6.25). Алгоритм обчислення границь інтервалів зміни вагових коефіцієнтів об'єктів складається з такої послідовності кроків.

Крок 0. Введення векторів ρ^H, ρ^B розмірності n, початкові значення елементів яких покладаються рівними $\rho_i^{H(0)} = 1$, $\rho_i^{B(0)} = 0$, $i \in I$.

Крок S. Розв'язання, наприклад, симплекс-методом $2n$ ЗЛП типу (6.24) та (6.25).

Здійснення корекції значень векторів ρ^H, ρ^B, введених на кроці 0:

$$\rho_i^{H(S)} = \min\left(\rho_i^{H(S-1)}, \rho_i^{(S)}\right), \quad \rho_i^{B(S)} = \max\left(\rho_i^{B(S-1)}, \rho_i^{(S)}\right), \quad i \in I,$$

де $\rho_i^S, i \in I,$ – розв'язки систем (6.24), (6.25) на s-му кроці алгоритму.

Крок $n+1$. Формування кінцевих границь інтервалів зміни вагових коефіцієнтів об'єктів $\rho_i^H = \rho_i^{H(n)}$, $\rho_i^B = \rho_i^{B(n)}$, $i \in I$.

Очевидно, що знайдені шляхом застосування описаного алгоритму інтервали вагових коефіцієнтів утворюють ГВК, який точно апроксимує задану експертом МПП за побудовою.

6.7. Процедури перетворення між інтервальними бальними оцінками та нормованими ваговими коефіцієнтами

Метод приписування балів при проведенні експертного оцінювання об'єктів є найзручнішим та найменш трудомістким [38]. При цьому інтервальні бальні оцінки адекватніше відображують суб'єктивну нечіткість, притаманну природі експертного оцінювання [37]. Розмита форма експертної інформації у вигляді інтервалів бальних оцінок часто застосовується на практиці. Але для розв'язання багатьох практичних задач виникає необхідність використання нормованих коефіцієнтів відносної важливості об'єктів. Тому актуальною є проблема розробки процедур переходу від інтервальних бальних оцінок до інтервалів нормованих вагових коефіцієнтів. Такі процедури розглядалися у роботі [12].

Нехай експерт задає свої переваги в N – бальній шкалі у вигляді інтервалів зміни бальних оцінок кожного об'єкта

$$\left[a^{H(i)}, a^{B(i)}\right], \quad 0 < a^{H(i)} \le a^{B(i)} \le N, \quad i \in I. \tag{6.26}$$

Необхідно знайти ГВК вигляду (6.1)–(6.4), який би максимально зберігав задану у вигляді (6.26) структуру переваг експерта. Знайдений ГВК має бути також несуперечливим, тобто не містити надлишкових значень вагових коефіцієнтів. Наведемо деякі процедури перетворення від інтервальних бальних оцінок до інтервалів вагових коефіцієнтів.

***Процедура* П6.1.** Найпростішим способом перетворення інтервальних бальних оцінок до інтервалів нормованих коефіцієнтів є застосування формул

$$\rho_i^H = 2a^{H(i)} / \sum_{j \in I}\left(a^{H(j)} + a^{B(j)}\right),$$

$$\rho_i^B = 2a^{B(i)} / \sum_{j \in I}\left(a^{H(j)} + a^{B(j)}\right), \quad i \in I.$$

У цьому випадку обчислені границі ГВК задовольняють умові (6.5), тобто знайдений ГВК є допустимим.

***Процедура* П6.2.** Для перетворення інтервальних бальних оцінок у вагові коефіцієнти можна також застосовувати формули

$$\rho_i^H = a^{H(i)} / \left(a^* \pm \varepsilon\right), \quad \rho_i^B = a^{B(i)} / \left(a^* \pm \varepsilon\right), \quad i \in I,$$

де $\varepsilon > 0$ – деяке мале число, а величина a^* вибирається з інтервалу:

$$\max_{i \in I}\left(a^{B(i)} + \sum_{\substack{j \in I \\ j \ne i}} a^{H(j)}\right) \le a^* \le \min_{i \in I}\left(a^{H(i)} + \sum_{\substack{j \in I \\ j \ne i}} a^{B(j)}\right),$$

або обчислюється за формулою $a^* = \sum_{i \in I}\left(a^{H(i)} + a^{B(i)}\right)/2n$. У випадку, коли $\max_{i \in I}\left(a^{B(i)} + \sum_{\substack{j \in I \\ j \ne i}} a^{H(j)}\right) > \min_{i \in I}\left(a^{H(i)} + \sum_{\substack{j \in I \\ j \ne i}} a^{B(j)}\right)$, то значення a^* можна вибрати, наприклад, як

$$a^* = \left(\max_{i\in I} \left(a^{B(i)} + \sum_{\substack{j\in I \\ j\neq i}} a^{H(j)} \right) > \min_{i\in I} \left(a^{H(i)} + \sum_{\substack{j\in I \\ j\neq i}} a^{B(j)} \right) \right) / 2.$$

При $\varepsilon = 0$ зберігається профіль переваг, але можуть з'явитися надлишкові значення ГВК. Тому з допомогою варіації значення величини ε можна регулювати величину інтервалів зміни вагових коефіцієнтів.

***Процедура* П6.3.** Одним з підходів переходу від інтервальних бальних оцінок до ГВК є застосування монотонного перетворення:

$$\omega_i^{*H} = \left(N - a^{B(i)}\right)/N,\ \omega_i^{*B} = \left(N - a^{H(i)}\right)/N,\ i\in I. \qquad (6.27)$$

Границі зміни ГВК, який породжується гіперпаралелепіпедом $\prod_{i\in I}\left[\omega_i^{*H}, \omega_i^{*B}\right]$, $i\in I$, з границями (6.27), обчислюються за формулами [26]:

$$\rho_i^H = \prod_{\substack{j\in I \\ j\neq i}} \omega_j^{*H} / \left(\sum_{\substack{l\in I \\ i\neq l}} \omega_l^{*B} \prod_{\substack{j\in I \\ j\neq i}} \omega_j^{*H} + \prod_{\substack{j\in I \\ j\neq l}} \omega_j^{*B} \right),$$

$$\rho_i^B = \prod_{\substack{j\in I \\ j\neq i}} \omega_j^{*B} / \left(\sum_{\substack{l\in I \\ i\neq l}} \omega_l^{*H} \prod_{\substack{j\in I \\ j\neq i}} \omega_j^{*B} + \prod_{\substack{j\in I \\ j\neq l}} \omega_j^{*B} \right). \qquad (6.28)$$

***Процедура* П6.4.** Перед обчисленням ГВК за формулами (6.28) до заданих бальних оцінок замість перетворень (6.27) застосовуються такі перетворення:

$$\omega_i^{*H} = a^{H(i)} / \left(\sum_{j\in I} a^{H(j)} - \min_{j\in I}\left(a^{B(j)} - a^{H(j)}\right) \right),$$

$$\omega_i^{*B} = a^{B(i)} / \left(\sum_{j\in I} a^{H(j)} - \min_{j\in I}\left(a^{B(j)} - a^{H(j)}\right) \right), i\in I.$$

***Процедура* П6.5.** На попередньому етапі цієї процедури замість значення N для формули (6.27) використовуються значення

$$a^H = \min_{i\in I} a^{H(i)},\ a^B = \min_{i\in I} a^{B(i)},\ i\in I.$$

Тоді для переходу до безрозмірних значень використовуються формули

$$\omega_i^{*H} = a^{H(i)} / \left(a^B - a^H\right),\ \omega_i^{*B} = a^{B(i)} / \left(a^B - a^H\right),\ i\in I.$$

І на останньому етапі обчислюються значення границь ГВК застосуванням формул (6.28).

***Процедура* П6.6.** В деяких спеціальних задачах експертиза приписування балів модифікується шляхом використання евристики.

***Евристика* Е6.8.** Ступінь впевненості експерта у своїй оцінці він визначає числом $0 < \alpha_i < 1$, $i\in I$, а також додатковою евристикою α, яка відображує пріоритетність заданої важливості об'єктів у порівнянні із впевненістю експерта у його оцінці.

Таким чином, з урахуванням евристики Е6.8, значення $\omega_i^{*H}, \omega_i^{*B}, i\in I$, обчислюються за формулами

$$\omega_i^{*H} = \left\{ \left(a^{H(i)}\right)^{\alpha} / \alpha_i,\ \alpha \le 1;\ \left(a^{B(i)}\right)^{\alpha} / \alpha_i,\ \alpha > 1 \right\},$$

$$\omega_i^{*B} = \left\{ \left(a^{H(i)}\right)^{\alpha} / \alpha_i,\ \alpha \ge 1;\ \left(a^{B(i)}\right)^{\alpha} / \alpha_i,\ \alpha < 1 \right\},\ i\in I.$$

***Процедура* П6.7.** Критерієм адекватності знайденого ГВК початковій структурі переваг може слугувати розв'язання оберненої задачі: переведення нормалізованого ГВК в N-бальну інтервальну шкалу. Для переходу від ГВК до інтервальних бальних оцінок позначимо максимальне значення верхніх границь вагових коефіцієнтів через

$$\rho^B = \max_{i\in I} \rho_i^B.$$

Найпростішим способом перетворення нормованих вагових коефіцієнтів у бальні інтервальні оцінки є застосування формул

$$a_i^H = \rho_i^H N / \rho^B,\ a_i^B = \rho_i^B N / \rho^B,\ i\in I.$$

Інколи вводиться додаткова евристика.

***Евристика* Е6.9.** Максимальний присвоєний бал є меншим від верхньої межі бальної шкали N на $\alpha^{(1)}$ балів або на $\alpha^{(2)}$ відсотків, які встановлюються експертним шляхом.

Тоді, з урахуванням евристики Е6.9, інтервали бальних оцінок визначаються за формулами:

$$a_i^H = \rho_i^H\left(N-\alpha^{(1)}\right)/\rho^B,\ a_i^B = \rho_i^B\left(N-\alpha^{(1)}\right)/\rho^B,\ i\in I,$$

$$a_i^H = \rho_i^H N\left(100-\alpha^{(2)}\right)/\rho^B,\ a_i^B = \rho_i^B N\left(100-\alpha^{(2)}\right)/\rho^B,\ i\in I.$$

6.7.1. *Визначення адекватності перетворень від бальних інтервальних оцінок до інтервалів вагових коефіцієнтів*

Важливим аспектом дослідження перетворень між інтервалами бальних оцінок та ГВК є визначення змін у структурі переваг. Мірою зміни структури переваг експерта можна вибрати

$$Q^{(13)} = 2\sum_{i,j\in I}\left|\begin{matrix}\left(a^{B(i)}-a^{H(i)}\right)/\left(a^{B(j)}-a^{H(j)}\right)- \\ -\left(\rho_i^B-\rho_i^H\right)/\left(\rho_j^B-\rho_j^H\right)\end{matrix}\right| / n/(n-1),$$

$$Q^{(14)} = 2\sum_{i,j\in I}\left|\begin{matrix}\left(a^{B(i)}+a^{H(i)}\right)/\left(a^{B(j)}+a^{H(j)}\right)- \\ -\left(\rho_i^B+\rho_i^H\right)/\left(\rho_j^B+\rho_j^H\right)\end{matrix}\right| / n/(n-1),$$

$$i,j\in I.$$

Для перевірки адекватності знайденого ГВК початковим інтервалам відношень переваги, заданим у бальній формі, можна розглядати таке значення критерію

$$Q^{(15)} = \max_{i,j\in I}\delta_{ij},$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases}\delta_{ij}^H-\alpha_{ij}^H, \text{ якщо } \delta_{ij}^H>\alpha_{ij}^H \text{ і } \delta_{ij}^B>\alpha_{ij}^B, \\ \alpha_{ij}^B-\delta_{ij}^B, \text{ якщо } \delta_{ij}^H<\alpha_{ij}^H \text{ і } \delta_{ij}^B<\alpha_{ij}^B, \\ \max\left(\delta_{ij}^H-\alpha_{ij}^H, \alpha_{ij}^B-\delta_{ij}^B\right), \text{ якщо } \delta_{ij}^H>\alpha_{ij}^H \text{ і } \delta_{ij}^B<\alpha_{ij}^B, \\ 0, \text{ якщо } \delta_{ij}^H\le\alpha_{ij}^H<\alpha_{ij}^B\le\delta_{ij}^B,\end{cases}$$

$$\delta_{ij}^H = \min\left(\rho_i^H/\rho_j^B, \rho_i^B/\rho_j^H\right),\ \delta_{ij}^B = \max\left(\rho_i^H/\rho_j^B, \rho_i^B/\rho_j^H\right),$$

$$\alpha_{ij}^H = \min\left(a^{H(i)}/a^{B(j)}, a^{B(i)}/a^{H(j)}\right),$$

$$\alpha_{ij}^B = \max\left(a^{H(i)}/a^{B(j)}, a^{B(i)}/a^{H(j)}\right),\ i,j\in I.$$

Запропоновані процедури перетворення бальної форми задання відношень переваги до нормованих вагових коефіцієнтів є обгрунтованими і можуть знайти широке застосування

у процесі формалізації експертних оцінок, оскільки мають кілька очевидних позитивних властивостей:

- процедури використовують інтервальну бальну шкалу, яка, згідно [38], є найпоширенішою в практиці експертного оцінювання;
- процедури орієнтовані на одержання ГВК, який апроксимує задану структуру переваг (6.26), що сприяє збереженню інформації про переваги і надає можливість застосування цієї інформації у математичних моделях;
- критерії аналізу одержаного ГВК на адекватність початковим інтервалам, заданим у бальній формі, можна використовувати для аналізу ненадлишковості одержаного ГВК, що є самостійною задачею.

6.8. Адаптивна процедура визначення інтервалів вагових коефіцієнтів параметрів за відношеннями між об'єктами з використанням евристики рівності максимальних значень параметрів

Наукові дослідження в області ЗЕО та практика побудови систем підтримки ПР [7, 29, 40] показують, що далеко не завжди експерти та ОПР, мають чітке уявлення про структуру переваг на множині об'єктів, яка досліджується. Побудова структури переваг у формалізованому вигляді є складною задачею для людини. При розв'язанні складної ЗЕО експерти порівнюють об'єкти, які в них асоціюються з деякими цілісними образами, уточнюють свої уявлення про переваги на множині об'єктів, співставляють реальні можливості з бажаними, враховуючи особливості ситуації, що моделюється.

В цьому параграфі описується алгоритм адаптивного задання ГВК, який може бути застосований для знаходження ГВК в задачах векторної оптимізації та багатоатрибутного вибору довільного класу. Експертиза організується таким чином, що дозволяє на основі послідовного уточнення відношень переваги на множині ефективних об'єктів побудувати ГВК параметрів, який постійно звужується, "адаптуючись" до переваг експерта і таким чином локалізує окіл компромісного об'єкта. Ідея цього метода та основні результати його застосування наводяться у роботах [18, 22, 23, 39].

Нехай $\omega_i^j = 0$, $i \in I, j \in J$, у тому випадку, коли значення j-го параметра у i-му наборі параметрів має максимальний вплив на якість об'єкта. Значення ω_i^j, $i \in I, j \in J$, є близьким до 1 у випадку, коли j-й параметр у i-му наборі параметрів має мінімальний вплив на якість об'єкта. Нехай на множині безрозмірних значень параметрів об'єктів експертом задано відношення переваги для двох довільних наборів параметрів

$$\omega^1 = \left(\omega_1^1, ..., \omega_m^1\right) \succeq \left(\omega_1^2, ..., \omega_m^2\right) = \omega^2, \ \omega^1, \omega^2 \in \prod_{i \in J} [0,1]. \qquad (6.29)$$

Введемо таку евристику.

***Евристика* E6.10.** Будемо вважати, що з суб'єктивного судження експерта про перевагу об'єкта a_1 над об'єктом a_2, тобто з відношення $a_1 > a_2$, $a_1, a_2 \in A$, випливає справедливість співвідношення

$$\max_{j \in J} \omega_j^{(1)} \beta_j < \max_{j \in J} \omega_j^{(2)} \beta_j. \qquad (6.30)$$

Задачу, що виникає при застосуванні евристики E6.10, та алгоритм знаходження інтервалів вагових коефіцієнтів описано в роботі [18].

Зважено ефективними назвемо такі об'єкти $\omega_j = \omega(a_j), j \in J$, для яких $\rho_i \omega_j^i < \rho_i \omega_l^i, \forall l \in J, j \neq l, \rho_i \in [\rho_i^H, \rho_i^B], i \in I$, і хоча б одна з нерівностей є строгою. Зважено неефективними будемо називати об'єкти, для яких не виконуються наведені вище умови.

Послідовний алгоритм адаптивної локалізації ГВК, заснований на застосуванні евристики E6.10, описується такою послідовністю кроків.

Крок 1. Визначення множини ефективних об'єктів серед усіх запропонованих і присвоєння їм індексів $i \in I$.

Крок 2. Вибір експертом двох довільних об'єктів $a_1, a_2 \in A$, та задання для них відношення переваги $a_1 \succ a_2, a_1, a_2 \in A$.

Крок 3. Визначення підмножин індексів I_1, I_2: $I_1 = \left\{i : \omega_i^{(1)} \le \omega_i^{(2)}\right\}$, які не заважають досягати співвідношення (6.30), та $I_2 = \left\{i : \omega_i^{(1)} > \omega_i^{(2)}\right\}$, які впливають на визначення максимальних значень нев'язок.

Крок 4. Обчислення величин $\omega^m = \min_{i \in I_1}\left(\omega_i^{(1)}, \omega_i^{(2)}\right)$, та індексу $i^m = \arg\min_{i \in I_1}\left(\omega_i^{(1)}, \omega_i^{(2)}\right)$.

Крок 5. Визначення значення $\omega^M = \max\left(\max_{i \in I_1} \omega_i^{(1)}, \max_{i \in I_2}\left(\omega_i^{(1)}, \omega_i^{(2)}\right)\right)$, а також індексу $i^M = \arg\max\left(\max_{i \in I_1} \omega_i^{(1)}, \max_{i \in I_2}\left(\omega_i^{(1)}, \omega_i^{(2)}\right)\right)$.

Крок 6. Складення рівняння вигляду $\beta_{i_m}^H \omega^m = \omega^M$, оскільки $\beta_{i_M}^B = 1$. Звідки значення нижньої границі визначається, як $\beta_{i_m}^H = \omega^M / \omega^m$.

Крок 7. Складення рівняння $\beta_{i_m}^H \omega_{i_m} = \max_{i \neq i_m}\left(\omega_i^{(1)}, \omega_i^{(2)}\right)\beta_i^B$, звідки визначається значення верхньої границі $\beta_i^B = \max_{i \neq i_m}\left(\omega_i^{(1)}, \omega_i^{(2)}\right) / \beta_{i_m}^H \omega_{i_m}$.

Крок 8. Складення рівняння $\beta_{i_M}^B \omega_{i_M} = \min_{i \neq i_M}\left(\omega_i^{(1)}, \omega_i^{(2)}\right)\beta_i^H$, звідки визначаємо $\beta_i^H = \min_{i \neq i_M}\left(\omega_i^{(1)}, \omega_i^{(2)}\right) / \beta_{i_M}^B \omega_{i_M}$.

Крок 9. Відсів зважено неефективних об'єктів. Множина індексів зважено ефективних об'єктів стає початковою множиною індексів.

Крок 10. Якщо ще існують зважено ефективні об'єкти, то перехід до кроку 2.

Крок 11. Якщо залишився єдиний зважено ефективний об'єкт після чергового відсіву, то кінець алгоритму.

Остаточний ГВК, границі якого рівні $\beta_j^H, \beta_j^B, j \in J$, містить єдиний зважено ефективний набір параметрів $a_0 \in A$. В разі, коли необхідно визначити вектор вагових коефіцієнтів на основі знайденого об'єкта, його визначають за формулою

$$\beta = \beta(a_0),$$

$$\beta_i = \prod_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} \omega_j(a_0) / \left(\sum_{\substack{l \in J \\ l \neq i}} \omega_l(a_0) \prod_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} \omega_j(a_0) + \prod_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} \omega_j(a_0)\right), \ i \in J. \qquad (6.31)$$

6.9. Адаптивна процедура визначення інтервалів вагових коефіцієнтів параметрів за відношеннями між об'єктами з використанням евристики евклідової відстані

Постановка задачі адаптивного визначення вагових коефіцієнтів параметрів, описана у попередньому параграфі, може бути застосована для процедур, які будуються на інших евристиках. Така постановка задачі та відповідний метод розглядалися у роботах [22–24].

***Евристика* E6.11.** Якщо експертним шляхом визначено відношення між об'єктами $a_i \succ a_l$, $i,l \in I$, то це означає, що є справедливою нерівність

$$\sqrt{\sum_{j\in J}\left(\omega_j^{(i)}\beta_j\right)^2} < \sqrt{\sum_{j\in J}\left(\omega_j^{(l)}\beta_j\right)^2}, \tag{6.32}$$

де $\beta_j, j\in J$ – нормовані вагові коефіцієнти параметрів.

При застосуванні евристики E6.11 виникає задача визначення таких нормованих значень вагових коефіцієнтів, для яких виконувалася б нерівність вигляду (6.32). Розглянемо задачу, яка виникає при застосуванні евристики E6.11. Нерівність (6.32) перепишемо у вигляді $\sqrt{\sum_{j\in J}\left(\omega_j^{(i)}\beta_j\right)^2} - \sqrt{\sum_{j\in J}\left(\omega_j^{(l)}\beta_j\right)^2} < 0.$ Після тотожних перетворень одержуємо нерівність $\sum_{j\in J}\left(\omega_j^{(i)2} - \omega_j^{(l)2}\right)\beta_j^2 < 0.$

Введемо нові позначення $\alpha_j, j\in J$, для спрощення виразів і покладемо $\alpha_j = \omega_j^{(i)2} - \omega_j^{(l)2}, j\in J$. Враховуючи умову нормованості, запишемо $\beta_1 = 1 - \sum_{\substack{j\in J\\ j\neq 1}}\beta_j$. Тоді евристика E6.11 зводиться до необхідності виконання такої нерівності

$$\alpha_1\left(1 - \sum_{\substack{j\in J\\ j\neq 1}}\beta_j\right)^2 + \sum_{\substack{j\in J\\ j\neq 1}}\alpha_j\beta_j^2 < 0.$$

Початкові інтервали допустимих значень вагових коефіцієнтів параметрів утворюють одиничний гіперкуб: $0 < \beta_j < 1$, $j\in J$. Для звуження інтервалів вагових коефіцієнтів наведемо формальну постановку задачі.

Після визначення інтервалів допустимих значень вагових коефіцієнтів $\beta_j \in [\beta_j^H, \beta_j^B]$, $j\in J$, розглядаються лише ті об'єкти $a_i, i\in I$, для яких виконується нерівність (6.32) з врахуванням умови нормованості вагових коефіцієнтів $\beta_j, j\in J$.

Для визначення границь інтервалів допустимих значень вагових коефіцієнтів параметрів на кожній ітерації $s=1,2,...$, метода послідовно розв'язуються дві БКЗ дискретного сепарабельного програмування з сукупністю критеріальних функцій:

$$f_j(\beta) = \beta_j \to \max,\ \ j\in J, \tag{6.33}$$

та

$$f_j(\beta) = \beta_j \to \min,\ \ j\in J. \tag{6.34}$$

При цьому для обох задач мають задовольнятися адитивні обмеження:

$$\sum_{j\in J}\alpha_j\beta_j^2 < 0, \tag{6.35}$$

$$\beta_j \geq \beta_j^{H(s)}, j\in J, \tag{6.36}$$

$$\beta_j \leq \beta_j^{B(s)}, j\in J, \tag{6.37}$$

де $\beta_j^{H(s)}, \beta_j^{B(s)}, j\in J,$– значення відповідно нижніх та верхніх границь інтервалів допустимих значень вагових коефіцієнтів параметрів на s-ій ітерації метода, $s=1,2,...$ На початковому етапі методу покладемо $\beta_j^{H(0)}=0$, $\beta_j^{B(0)}=1$, $\forall j\in J$.

Алгоритм розв'язання задач дискретного сепарабельного програмування у багатокритеріальній постановці виду (6.33), (6.35)-(6.37) та (6.34)-(6.37) описано в монографії [35].

Дискретизуємо інтервали вагових коефіцієнтів параметрів, розбивши їх на N інтервалів і будемо розглядати дискретну множину значень

$$\beta_j \in U_j = \left\{u_{j(1)}, \ldots, u_{j(y_j)}\right\},$$
$$j \in J,\ \left|U_j\right| = y_j,$$

де y_j – кількість допустимих значень для j-го коефіцієнта. На першій ітерації методу має місце рівність $y_j = N$ для $\forall j \in J$.

Відповідно до [35], компромісний розв'язок задачі (6.33), (6.35)-(6.37) може бути одержаний шляхом розв'язання однокритеріальної задачі

$$k_0 \to \min_{k_0 \in (0,1)}, \tag{6.38}$$
$$\beta_j \le f_j^*(k_0),\ \forall j \in J, \tag{6.39}$$
$$\sum_{j \in J} \alpha_j \beta_j^2 < 0, \tag{6.40}$$

де значення $f_j^*(k_0)$ залежить від значення параметра k_0:

$$f_j^*(k_0) = \beta_j^{H(S)} + k_0^{(S)}(\beta_j^{B(S)} - \beta_j^{H(S)}),\ j \in J,\ s = 1, 2, \ldots$$

Параметр k_0 змінюється, наприклад, методом дихотомії, до тих пір, поки система обмежень (6.39), (6.40) залишається сумісною при мінімально можливому значенні k_0. Критерієм зупинки процедури може бути, наприклад, $\left|k_0^{(S)} - k_0^{(S-1)}\right| < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – деяке задане достатньо мале число, s – крок процедури локалізації розв'язків.

Якщо система обмежень (6.39), (6.40) при мінімальному значенні k_0 має єдиний розв'язок, то це і є, відповідно до [35], компромісний розв'язок задачі (6.33), (6.35)-(6.37). Коли ж розв'язок не є єдиним, то з множини еквівалентних розв'язків вибирається той, який забезпечує мінімізацію, наприклад, лінійного критерію

$$\sum_{j \in J} \left(\beta_j - \beta_j^{H(S)}\right) / \left(\beta_j^{B(S)} - \beta_j^{H(S)}\right) \to \min.$$

Розв'язок задачі (6.38)-(6.40) $\beta_j, j \in J$, визначає значення нижніх границь інтервалів зміни вагових коефіцієнтів на наступній ітерації методу, тобто $\beta_j^{H(S+1)} = \beta_j,\ j \in J$.

Для задачі (6.34)-(6.37) компромісний розв'язок може бути одержаний розв'язанням задачі з критерієм (6.38) і обмеженнями (6.40) та

$$\beta_j \ge f_j^*(k_0),\ \forall j \in J. \tag{6.41}$$

Розв'язок задачі (6.38), (6.40)-(6.41) $\beta_j, j \in J$, визначає верхні границі інтервалів зміни вагових коефіцієнтів, тобто обчислюються значення $\beta_j^{B(S+1)} = \beta_j,\ j \in J,\ s = 1, 2, \ldots$

Наступною ітерацією методу обчислення вагових коефіцієнтів є вибір експертом чергової пари об'єктів та визначення відношення переваги на цій парі об'єктів експертним шляхом. Визначення зазначених відношень переваги породжує чергову ітерацію методу. Тобто на звуженій дискретній множині інтервалів $\beta_j \in \left[\beta_j^{H(S+1)}, \beta_j^{B(S+1)}\right],\ j \in J$, розв'язується задача (6.38), (6.40)-(6.41).

Після визначення інтервалів допустимих значень вагових коефіцієнтів $\beta_j \in \left[\beta_j^{H(S+1)}, \beta_j^{B(S+1)}\right],\ j \in J$, розглядаються лише ті об'єкти з множини A, для яких виконується нерівність (6.32) з врахуванням умови нормованості вагових коефіцієнттів $\beta_j, j \in J$.

Якщо на множині A залишився єдиний зважено ефективний об'єкт, який позначимо через $a_0 \in A$, то уточнення ГВК припиняється. У разі необхідності визначення вектора вагових коефіцієнтів, він обчислюється за формулою (6.31) для зважено ефективного об'єкта $a_0 \in A$.

6.10. Адаптивна процедура визначення інтервалів вагових коефіцієнтів параметрів за відношеннями між об'єктами з використанням евристики сумарної рівності значень параметрів

Для розв'язання задачі у постановці, розглянутій у попередніх двох параграфах, можна застосувати ще одну евристику. Використання такої евристики для визначення ГВК та результати її застосування наведено у роботах [22, 23].

Евристика **Е6.12.** З того, що експерт вважає вірним відношення $a_i \succ a_l$, $i,l \in I$, випливає справедливість нерівності

$$\sum_{j\in J}\omega_j^{(i)}\beta_j < \sum_{j\in J}\omega_j^{(l)}\beta_j,\ i,l\in I. \qquad (6.42)$$

Задача, утворена застосуванням евристики Е6.12, формалізується у класі ЗЛП і може бути розв'язана застосуванням алгоритму ПАВ варіантів для ЗЛП великої розмірності, описаного в роботі [34].

Для приведення формулювання задачі (6.42) до традиційного вигляду здійснимо такі перетворення:

$$\alpha_j = \omega_j^{(i)} - \omega_j^{(l)}, j\in J,\ i,l\in I,$$

та введемо позначення:

$$J_1 = \{ j \mid \alpha_j > 0, j\in J\},\ \ J_2 = \{ j \mid \alpha_j > 0, j\in J\},$$

$$J_3 = \{ j \mid \beta_j^{H(S)} = \beta_j^{B(S)} = \beta_j^{\Phi(S)},\ j\in J,\ s=1,2,\ldots\},$$

де J_3 – множина індексів точкових значень вагових коефіцієнтів $\beta_j^{\Phi(S)}$, $j\in J$, на s-му кроці метода, $s=0,1,2,\ldots$, $J_1\cup J_2\cup J_3 = J$.

Тоді для визначення вагових коефіцієнтів параметрів з використанням евристики Е6.12 утворюється така система обмежень

$$\begin{cases} \sum\limits_{j\in J}\alpha_j\beta_j < 0, \\ \sum\limits_{j\in J}\beta_j = 1, \\ 0<\beta_j<1,\ \ j\in J. \end{cases}$$

Замінивши умову нормування вагових коефіцієнтів на дві відповідні нерівності, одержимо систему

$$\begin{cases} \sum\limits_{j\in J}\alpha_j\beta_j < 0, \\ \sum\limits_{j\in J}\beta_j \le 1, \\ -\sum\limits_{j\in J}\beta_j \le -1, \\ 0<\beta_j<1,\ \ j\in J, \end{cases}$$

до якої застосовується метод ПАВ, описаний в роботі [34].

На початковому етапі методу покладається $\beta_j^{H(0)} = 0$, $\beta_j^{B(0)} = 1$, $\forall j\in J$. Тобто множина допустимих значень вагових коефіцієнтів параметрів об'єктів утворює одиничний гіперкуб.

На кожному наступному етапі методу, в процесі пред'явлення експертові нових пар об'єктів та визначення ним відношень переваги здійснюється уточнення нижньої та верхньої границь зміни вагових коефіцієнтів за формулами:

$$\beta_j^{H(S+1)} = \max\left(\beta_j^{H(S)}, \left(-\sum_{\substack{l\in J_1\\ l\ne j}}\alpha_l\beta_l^{H(S)} - \sum_{\substack{l\in J_2\\ l\ne j}}\alpha_l\beta_l^{B(S)} - \sum_{\substack{l\in J_3\\ l\ne j}}\alpha_l\beta_l^{\Phi(S)} \right)/\alpha_j, \left(1+\sum_{\substack{l\in J_2\\ l\ne j}}\beta_l^{B(S)} + \sum_{\substack{l\in J_3\\ l\ne j}}\beta_l^{\Phi(S)} \right)\right),$$

$$\beta_j^{B(S+1)} = \min\left(\beta_j^{B(S)}, \left(-\sum_{\substack{l\in J_1\\ l\ne j}}\alpha_l\beta_l^{H(S)} - \sum_{\substack{l\in J_2\\ l\ne j}}\alpha_l\beta_l^{B(S)} - \sum_{\substack{l\in J_3\\ l\ne j}}\alpha_l\beta_l^{\Phi(S)} \right)/\alpha_j, \left(1-\sum_{\substack{l\in J_1\\ l\ne j}}\beta_l^{B(S)} - \sum_{\substack{l\in J_3\\ l\ne j}}\beta_l^{\Phi(S)} \right)\right).$$

Критерієм зупинки наведеного алгоритму можна вибрати, наприклад, наявність на множині A єдиного зважено ефективного об'єкта. Якщо експерт повідомляє про рівноцінність двох об'єктів $a_{i_1} \sim a_{i_2}$, $i_1,i_2\in I$, то замість ГВК може бути визначений відповідний вектор вагових коефіцієнтів. Такий вектор визначається також за точкою $a_0\in A$, яка відповідає єдиному зважено ефективному набору параметрів, який залишається на множині A в результаті застосування наведеної процедури.

6.11. Узагальнення процедури непрямого визначення інтервалів вагових коефіцієнтів параметрів на випадок метризованого задання відношень між об'єктами

За одним з найпоширеніших підходів [29, 35] та відповідно до введеної у попередньому параграфі евристики Е6.12, об'єкт $a_1=\left(a_1^1,\ldots,a_1^m\right)$ вважається кращим (більш прийнятним для експерта), ніж об'єкт $a_2=\left(a_2^1,\ldots,a_2^m\right)$, якщо виконується нерівність (6.42).

Задача полягає у тому, щоб на підставі метризованих мультиплікативних відношень на множині ефективних об'єктів, заданих експертом, визначити кількісні характеристики відносної важливості параметрів об'єктів, які відповідають заданим відношенням. При цьому будемо вважати, що відносна вага параметрів об'єктів на всій множині їх допустимих значень є незмінною. Така постановка задачі та алгоритм її розв'язання наводяться у роботі [5].

Нехай експерт вважає, що об'єкт $a_1\in A$ переважає об'єкт $a_2\in A$ в μ разів. Позначимо цей факт через $a_1\underset{\mu}{\succ}a_2$. Введемо таку евристику.

Евристика **Е6.13.** Будемо вважати, що з суб'єктивного судження експерта про перевагу об'єкта $a_1\in A$ над об'єктом $a_2\in A$ у μ разів, $\mu>1$, тобто, з відношення $a_1\underset{\mu}{\succ}a_2$ випливає справедливість нерівності

$$\sum_{j\in J}\beta_j\omega_j^{(1)}\le\sum_{j\in J}\beta_j\omega_j^{(2)}/\mu. \tag{6.43}$$

На основі відношень переваги на множині ефективних об'єктів, які послідовно уточнюються експертом, необхідно визначити інтервали допустимих значень відносної важливості параметрів об'єктів (ГВК) вигляду (6.1)–(6.4).

6.11.1. *Базові евристики та геометрична інтерпретація*

Позначимо через J_1 та J_2 множини індексів параметрів об'єктів, які відповідно максимізуються та мінімізуються.

Для переведення всіх значень параметрів об'єктів $a_i=\left(a_i^j\right)$, $i\in I, j\in J$, до безрозмірного вигляду в інтервалі $[0,1]$ будемо застосовувати, відповідно до [35], формулу (1.6).

З урахуванням умов (6.42) та (1.6), сумарне відхилення i-го об'єкта від оптимальних значень запишеться як

$$d\left(a_i,a_0\right)=\sum_{j\in J}\beta_j\omega_j\left(a_i^j\right)=\sum_{j\in J}\beta_j\left(a^{0(j)}-a_j^i\right)/\left(a^{0(j)}-a^{H(j)}\right). \tag{6.44}$$

Формула (6.44) визначає міру близькості вектора значень параметрів об'єкта $a_i\in A$, $i\in I$, до деякого ідеального (оптимального) вектора значень $a_0=\left(a_0^1,\ldots,a_0^m\right)$, у зваженому просторі параметрів. Припускається, що компоненти векторів a_0 та a_H можуть бути задані безпосередньо ОПР або знайдені як максимальні (мінімальні) значення параметрів, що досягаються на множині допустимих рішень. З урахуванням цього формула (6.43) для метризованих відношень між об'єктами перепишеться як

$$d\left(a_1,a_0\right)/d\left(a_2,a_0\right)=\sum_{j\in J}\beta_j\omega_j\left(a_1^j\right)/\sum_{j\in J}\beta_j\omega_j\left(a_2^j\right)\le 1/\mu.$$

Останню нерівність можна інтерпретувати таким чином. Твердження "об'єкт $a_1\in A$ є в μ разів кращим для експерта від об'єкта $a_2\in A$" означає, що в просторі параметрів об'єктів точка, яка відповідає об'єкту $a_1\in A$, знаходиться від ідеальної точки (ідеального об'єкта a_0) на відстані, в μ разів меншій від точки, що відповідає об'єкту $a_2\in A$.

Для подальшого обґрунтування методу розв'язання поставленої задачі наведемо систему евристик та геометричну інтерпретацію метода.

Евристика **Е6.14.** Об'єкти $a_1\in A$ та $a_2\in A$ можна вважати *рівноцінними*, якщо в просторі параметрів відповідні їм точки знаходяться на однаковій відстані від вектора переваг $\beta_j, j\in J$, який проходить через початок координат та ідеальну точку $a_0=\left(a_0^1,\ldots,a_0^m\right)$.

Зрозуміло, що пряма, яка проходить через точки *рівноцінності об'єктів* $a_1,a_2\in A$, має бути перпендикулярною відносно цього вектора.

Твердження **6.13.** Вектор, проведений з початку координат перпендикулярно до прямої рівноцінності об'єктів $a_1, a_2 \in A$, є вектором переваг експертів на множині об'єктів.

Згідно евристики Е6.14, в просторі параметрів об'єктів точки, які відповідають об'єктам $a_1, a_2 \in A$, знаходяться на однаковій відстані від вектора, проведеного з початку координат. Це можливо лише у випадку перпендикулярності цього вектора до прямої рівноцінності об'єктів $a_1, a_2 \in A$, в просторі параметрів. Отже, вектор, проведений з початку координат перпендикулярно до прямої рівноцінності об'єктів $a_1, a_2 \in A$, дійсно є вектором переваг експертів на множині об'єктів.

Евристика **Е6.15.** Об'єкт $a_2 \in A$ можна вважати μ*-рівноцінним* об'єкту $a_1 \in A$, якщо в просторі параметрів замість точки, що відповідає об'єкту $a_2 \in A$ розглядається точка, яка відповідає об'єкту $a_{2\mu} \in A$, $a_{2\mu} = \left(a_2^1 / \mu, ..., a_2^m / \mu\right)$, параметри якого змінено відповідно до коефіцієнта μ, відповідні точки $\omega(a_1)$ та $\omega\left(a_{2\mu}\right)$ є рівноцінними, згідно з вимогами евристики Е6.14.

Сформулюємо дві евристики для визначення ГВК за заданими експертами метризованими відношеннями переваг між об'єктами $a_1, a_2 \in A$.

Евристика **Е6.16.** Пряма μ-рівноцінності об'єктів $a_1 \in A$, та $a_{2\mu} \in A$, проходить через точки $\omega(a_1)$ та $\omega\left(a_{2\mu}\right)$, які відповідають цим об'єктам у просторі відносних значень параметрів.

Евристика **Е6.17.** Вектор, проведений з початку координат перпендикулярно прямій μ-рівноцінності об'єктів, є рівновіддаленим від точок $a_1 \in A$, та $a_{2\mu} \in A$, не тільки геометрично, але й у термінах предметної області.

Твердження **6.14.** Вектор переваг, проведений з початку координат перпендикулярно прямій μ-рівноцінності об'єктів, відокремлює півпростір переваг, який відповідає заданому експертом метризованому відношенню переваг між об'єктами.

Очевидно, що на початковому етапі розв'язання задачі ГВК співпадає з одиничним гіперкубом, розташованим у додатному ортанті, одна з вершин якого міститься в початку координат. Множина ефективних об'єктів у цьому ГВК співпадає з множиною ефективних об'єктів початкової задачі і звужується шляхом послідовного уточнення експертом метризованого відношення між об'єктами та відповідним звуженням ГВК.

На рисунку 6.5 через $a_1, a_2 \in A$, позначено порівнювані об'єкти, β – вектор переваг, проведений через початок координат до лінії рівноцінності об'єктів $a_1, a_2 \in A$. Об'єкти $a_1 \in A$ та $a_{2\mu} \in A$, є μ-рівноцінними об'єктами, β^μ – вектор переваг, проведений через початок координат та лінію рівноцінності об'єктів $a_1 \in A$ та $a_{2\mu} \in A$.

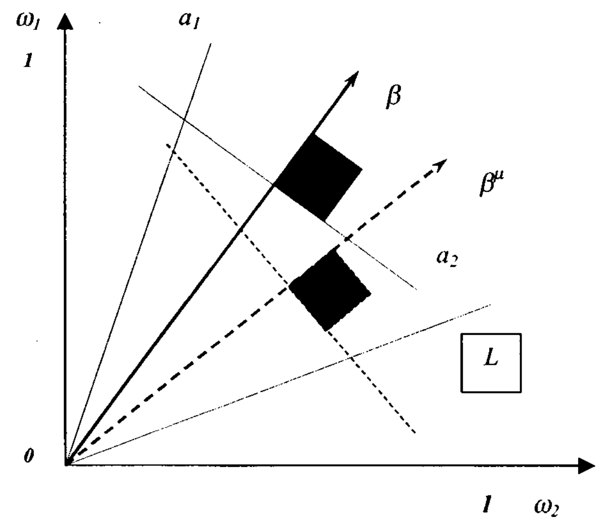


Рис. 6.5.

6.11.2. *Метод розв'язання задачі*

Нехай на множині ефективних об'єктів експертом задано відношення переваги об'єкта $a_1 \in A$ над $a_2 \in A$ в μ разів. Об'єкти $a_1, a_2 \in A$, вважаються μ-рівноцінними з коефіцієнтом рівноцінності μ. Згідно евристики Е6.15, у безрозмірному параметричному просторі точка з координатами $\omega(a_1)=$ $=(\omega_1^1,...,\omega_m^1)$ $a_i=(a_i^j)$, $i\in I, j\in J$, є рівноцінною точкою $\omega(a_{2\mu})=$ $=(\omega_1^2/\mu,...,\omega_m^2/\mu)$. Тоді, відповідно до евристики Е6.16, через точки $\omega(a_1)$ та $\omega(a_{2\mu})$ можна провести пряму рівноцінності L. Пряма рівноцінності L в безрозмірному просторі параметрів описується n рівняннями:

$$(\omega_1-\omega_1(a_1))/(\omega_1(a_{2\mu})-\omega_1(a_1))=... \\ ...=(\omega_m-\omega_m(a_1))/(\omega_m(a_{2\mu})-\omega_m(a_1)), \tag{6.45}$$

або у вигляді системи $(n-1)$ рівнянь:

$$\omega_l=\alpha^{(1)}\omega_i+\alpha^{(2)},\ l,i\in J,\ l\neq i, \tag{6.46}$$

де $\alpha^{(1)},\alpha^{(2)}$ – константи, що визначаються із системи рівнянь (6.45) за формулами:

$$\alpha^{(1)}=(\omega_l(a_2)-\omega_l(a_1))/(\omega_i(a_2)-\omega_i(a_1)),$$

$$\alpha^{(2)}=\omega_i(\omega_l(a_2)-\omega_l(a_1))/(\omega_i(a_2)-\omega_i(a_1)).$$

Відповідно до евристики Е6.17, компоненти вектора, який виходить з початку координат перпендикулярно прямій L визначаються системою $(n-1)$ рівнянь:

$$\beta_l=-\beta_i/\alpha^{(1)},\ l,i\in J,\ l\neq i. \tag{6.47}$$

Згідно наведеного твердження 6.13, вектор, перпендикулярний прямій рівноцінності, є вектором переваг експерта відносно вибраних об'єктів. Але за означенням вектора вагових коефіцієнтів, повинні також виконуватися умови нормованості (6.1).

Перша з них слугує n-м рівнянням в системі рівнянь (6.47). Для забезпечення виконання умови (6.2) (невід'ємності компонент вектора β) необхідно поставити умову від'ємності коефіцієнта $\alpha^{(1)}$ у $(n-1)$ рівняннях (6.46). Для цього система рівнянь (6.45) повинна мати хоча б один від'ємний знаменник, коли всі інші знаменники додатні або навпаки. Це забезпечується правильним вибором рівня переваги μ.

Введемо позначення для відповідних множин індексів $J_1=\{j:\omega_j^{(1)}>\omega_j^{(2)}\}$, $J_2=\{j:\omega_j^{(1)}\le\omega_j^{(2)}\}$, $j\in J$.

***Твердження* 6.15.** Рівень переваги μ повинен лежати в інтервалі:

$$\mu\in\left[\min_{j\in J_1}(\omega_j(a_2)/\omega_j(a_1)),\ \max_{j\in J_2}(\omega_j(a_2)/\omega_j(a_1))\right]. \tag{6.48}$$

Дійсно, якщо експерт вибере рівень переваги об'єктів $a_1\in A$ та $a_{2\mu}\in A$, $0<\mu<\min_{j\in J_1}(\omega_j(a_2)/\omega_j(a_1))<1$, то компоненти μ-рівноцінного об'єкта, які позначимо через $\omega(a_{2\mu})=(\omega_1^2/\mu,...,\omega_m^2/\mu)$, будуть більшими за компоненти $\omega(a_1)=(\omega_1^1,...,\omega_m^1)$ для всіх $j\in J$, $=(\omega_1^2/\mu,...,\omega_m^2/\mu)$, а отже в системі рівнянь (6.47) всі знаменники будуть лише додатними і не буде виконуватися важлива умова $\beta_i>0, i\in J$.

Аналогічна ситуація виникає і у випадку, коли експерт вибирає рівень переваги $\mu>\max_{j\in J_2}(\omega_j(a_2)/\omega_j(a_1))>1$. У такому разі усі знаменники в (6.45) будуть лише від'ємні.

Нерівність (6.43) можна переписати з урахуванням уточнення множин індексів наступним чином:

$$\sum_{\substack{i\in J_1\\ \beta_i^S\in\Gamma^{(s)}}}\beta_i^S\omega_i(a_1)+\sum_{\substack{i\in J_2\\ \beta_i^S\in\Gamma^{(s)}}}\beta_i^S\omega_i(a_1)\le\frac{1}{\mu}\sum_{\substack{i\in J_1\\ \beta_i^S\in\Gamma^{(s)}}}\beta_i^S\omega_i(a_2)+\frac{1}{\mu}\sum_{\substack{i\in J_2\\ \beta_i^S\in\Gamma^{(s)}}}\beta_i^S\omega_i(a_2).$$

Тоді умова μ-рівноцінності об'єктів $a_1,a_2\in A$, запишеться як

$$\sum_{\substack{i\in J_1\\ \beta_i^S\in\Gamma^{(s)}}}\beta_i^S\omega_i(a_1)+\sum_{\substack{i\in J_2\\ \beta_i^S\in\Gamma^{(s)}}}\beta_i^S\omega_i(a_1)= \\ =\frac{1}{\mu}\sum_{\substack{i\in J_1\\ \beta_i^S\in\Gamma^{(s)}}}\beta_i^S\omega_i(a_2)+\frac{1}{\mu}\sum_{\substack{i\in J_2\\ \beta_i^S\in\Gamma^{(s)}}}\beta_i^S\omega_i(a_2). \tag{6.49}$$

Розглянемо випадок, коли $\mu>0$. Тоді очевидно, що

$$\sum_{\substack{i\in J_1\\ \beta_i^S\in\Gamma^{(s)}}}\beta_i^S\omega_i(a_1)+\sum_{\substack{i\in J_2\\ \beta_i^S\in\Gamma^{(s)}}}\beta_i^S\omega_i(a_1)<$$

$$<\frac{1}{\mu}\sum_{\substack{i\in J_1\\ \beta_i^S\in\Gamma^{(s)}}}\beta_i^S\omega_i(a_2)+\frac{1}{\mu}\sum_{\substack{i\in J_2\\ \beta_i^S\in\Gamma^{(s)}}}\beta_i^S\omega_i(a_2).$$

Перейти від нерівності (6.49) до рівності можна, збільшивши вагові коефіцієнти параметрів, індекси яких належать множині індексів J_1, та відповідно зменшивши вагові коефіцієнти параметрів, індекси яких належать множині індексів J_2. Таким чином, вагові коефіцієнти параметрів, які належать множині індексів J_1, досягнуть своїх верхніх границь, а вагові коефіцієнти параметрів, індекси яких належать множині індексів J_2, відповідно досягнуть своїх нижніх границь.

Оскільки значення $\omega(a_1)$, $\omega(a_2)$ є фіксованими величинами, а $\beta^{(S)}\in\Gamma^{(S)}$, то одержану рівність (6.49) можна записати як

$$\sum_{\substack{i\in J_1\\ \beta_i^S\in\Gamma^{(s)}}}\beta_i^{B(S)}\omega_i(a_1)+\sum_{\substack{i\in J_2\\ \beta_i^S\in\Gamma^{(s)}}}\beta_i^{H(S)}\omega_i(a_1)=$$
$$=\sum_{\substack{i\in J_1\\ \beta_i^S\in\Gamma^{(s)}}}\beta_i^{B(S)}\omega_i(a_2)+\sum_{\substack{i\in J_2\\ \beta_i^S\in\Gamma^{(s)}}}\beta_i^{H(S)}\omega_i(a_2). \quad (6.50)$$

Поширюючи (6.50) на випадок μ-рівноцінності об'єктів $a_1,a_2\in A$, остаточно одержимо

$$\sum_{\substack{i\in J_1\\ \beta_i^S\in\Gamma^{(s)}}}\beta_i^{B(S)}\omega_i(a_1)+\sum_{\substack{i\in J_2\\ \beta_i^S\in\Gamma^{(s)}}}\beta_i^{H(S)}\omega_i(a_1)=$$
$$=\frac{1}{\mu}\sum_{\substack{i\in J_1\\ \beta_i^S\in\Gamma^{(s)}}}\beta_i^{B(S)}\omega_i(a_2)+\frac{1}{\mu}\sum_{\substack{i\in J_2\\ \beta_i^S\in\Gamma^{(s)}}}\beta_i^{H(S)}\omega_i(a_2). \quad (6.51)$$

Рівність (6.51) еквівалентна рівності (6.49), де $\beta_i^{H(S)},\beta_i^{B(S)}$, $i\in J,-$ є відповідно верхньою та нижньою границями i-го інтервалу вагових коефіцієнтів на s-му кроці алгоритму. Для випадку $0<\mu<1$ рівність (6.51) перепишеться як

$$\sum_{\substack{i\in J_1\\ \beta_i^S\in\Gamma^{(s)}}}\beta_i^{H(S)}\omega_i(a_1)+\sum_{\substack{i\in J_2\\ \beta_i^S\in\Gamma^{(s)}}}\beta_i^{B(S)}\omega_i(a_1)=$$
$$=\frac{1}{\mu}\sum_{\substack{i\in J_1\\ \beta_i^S\in\Gamma^{(s)}}}\beta_i^{H(S)}\omega_i(a_2)+\frac{1}{\mu}\sum_{\substack{i\in J_2\\ \beta_i^S\in\Gamma^{(s)}}}\beta_i^{BH(S)}\omega_i(a_2). \quad (6.52)$$

Таким чином ГВК на $(s+1)$-му кроці стане рівним

$$\Gamma^{(S)}=\begin{cases}\prod\limits_{i\in J_1}\left[\beta_i^{H(S)},\beta_i^{B(S+1)}\right]\times\prod\limits_{i\in J_2}\left[\beta_i^{H(S+1)},\beta_i^{B(S)}\right], & \\ \text{якщо } \mu>1, & \\ \prod\limits_{i\in J_1}\left[\beta_i^{H(S+1)},\beta_i^{B(S)}\right]\times\prod\limits_{i\in J_2}\left[\beta_i^{H(S)},\beta_i^{B(S+1)}\right], & \\ \text{якщо } 0<\mu\le 1. & \end{cases} \quad (6.53)$$

Рівняння (6.52) та (6.53) доводять справедливість твердження 6.15, тобто знайдений застосуванням описаного алгоритму вектор переваг, проведений із початку координат перпендикулярно прямій рівноцінності об'єктів, відношення між якими задаються експертом в метризованій формі, визначає саме граничні інтервали зміни вагових коефіцієнтів.

Справедливими є також наступні твердження.

***Твердження* 6.16.** Умовою відсіювання об'єктів $\omega^l, l\in I$, з початкової множини A^0 є неналежність ГВК вектора, який проходить через початок координат і точку $\omega^l=\omega(a^l)$, $l\in I$, $a^l\in A^S$, до ГВК на відповідному кроці процедури $\beta(\omega(a^l))\notin\Gamma^{(S+1)}, l\in I,\ s=1,2,\ldots$

***Твердження* 6.17.** У випадку, коли експерт вважає два ефективних об'єкта $a_1,a_2\in A$, еквівалентними, $a_1\sim a_2$, ГВК вироджується у вектор, який проходить через початок координат і визначається з умови: $\sum\limits_{j\in J}\beta_j\omega_j^{(1)}=\sum\limits_{j\in J}\beta_j\omega_j^{(2)}$.

З урахуванням розглянутих особливостей задачі та сформульованих тверджень можна побудувати алгоритм адаптивного визначення ГВК за метризованою матрицею.

6.11.3. *Адаптивний алгоритм визначення гіперпаралелепіпеда вагових коефіцієнтів*

Крок 0. Виділення множини ефективних об'єктів A^0 з заданої множини об'єктів A одним із методів, які наводяться у роботі [35]. Початковий ГВК покладається рівним одиничному гіперкубу.

Крок 1. Вибір експертом двох об'єктів a^1 та a^2 з множини ефективних об'єктів A^S в гіперпаралелепіпеді $\Gamma^{(S)}$ $s=1,2,...$

Крок 2. Визначення підмножин індексів параметрів об'єктів $a_1,a_2 \in A$, що відповідають підмножинам J_1 та J_2. Визначення за формулами (6.48) інтервалу зміни рівня переваги $\mu \in \left[\mu^H,\mu^B\right]$, який забезпечує отримання несуперечливого ГВК.

Крок 3. Вибір експертом рівня переваги μ об'єкта $a_1 \in A$ над об'єктом $a_2 \in A$ з інтервалу $\mu \in \left[\mu^H,\mu^B\right]$.

Крок 4. Побудова системи рівнянь (6.46). Розв'язання системи рівнянь (6.47).

Крок 5. Уточнення границь ГВК за формулою (6.53). Якщо гіперпаралелепіпед $\Gamma^{(S+1)}$ $s=1,2,...$ задовольняє експерта, то закінчення алгоритму. Інакше перехід до наступного кроку.

Крок 6. Виділення множини ефективних об'єктів $A^{(S+1)}$ $\left(A^{(S+1)} \subseteq A^{(S)}\right)$ з урахуванням гіперпаралелепіпеда $\Gamma^{(S+1)}$ $s=1,2,...$

Якщо множина ефективних об'єктів містить більше, ніж два об'єкти, то пред'явлення їх експертові для вибору чергової пари об'єктів для порівняння і виявлення для них метризованого відношення переваги. Збільшення номера ітерації: $s=s+1$. Перехід до кроку 1.

Якщо множина ефективних об'єктів з урахуванням гіперпаралелепіпеда $\Gamma^{(S+1)}$ $s=1,2,...$ складається з єдиного об'єкта, то закінчення алгоритму.

Описаний алгоритм дозволяє вирішити проблему послідовного чисельного визначення відношень переваги між об'єктами та дозволяє визначити відповідність між метризованими відношеннями цих наборів параметрів та ГВК. Експертиза організована таким чином, що дозволяє на основі послідовного уточнення відношень переваги на множині пар ефективних об'єктів побудувати ГВК, який постійно звужується, "адаптуючись" до переваг, заданих експертом. Метод може бути застосовано до об'єктів, які характеризуються досить великим числом параметрів, оскільки дозволяє експертам на основі безпосереднього порівняння об'єктів, які у них асоціюються з цілісними образами, за певну кількість кроків відтворити допустимі інтервали зміни вагових коефіцієнтів параметрів об'єктів, тобто ГВК.

6.12. Приклади розв'язання задач визначення вагових коефіцієнтів

6.12.1. *Відсіювання надлишкових значень гіперпаралелепіпеда вагових коефіцієнтів за параграфом* 6.2

У роботі [16] наведено приклад застосування процедур відсіювання надлишкових значень ГВК, які описано в параграфі 6.2. Нехай для множини з чотирьох об'єктів задано нормований ГВК:

$$\rho \in \Gamma = 0.2,0.3] \times [0.16,0.25] \times [0.21,0.3] \times [0.1,0.5].$$

Скориставшись формулами, які переміщують центр паралелепіпеда (6.3) на гіперплощину (6.1) і максимізують "площу" перетину нового гіперпаралелепіпеда, одержуємо

$$\rho \in \Gamma = [0.1987,0.298] \times [0.158,0.2475] \times [0.208,0.298] \times [0.0997,0.496].$$

В результаті застосування формул (6.7), (6.9) маємо $\rho \in \Gamma'(\Gamma)=$ $= [0.1987,\ 0.298] \times [0.158,0.2475] \times [0.208,0.298] \times [0.0423,0.435]$, оскільки $\delta_4 = 0.0574$, $\Delta_4 = 0.0603$, тобто границі ГВК змінюються тільки для четвертого коефіцієнта. Якщо перетворення, які переміщують центр паралелепіпеда (6.3) на гіперплощину (6.1), не використовувати, в результаті застосування формул (6.7), (6.9) до початкового ГВК одержимо

$$\rho \in \Gamma'(\Gamma) = [0.2,0.3] \times [0.16,0.25] \times [0.21,0.3] \times [0.15,0.43],$$

тобто змінюються також тільки межі зміни коефіцієнта ρ_4, оскільки $\delta_4 = 0.05$, $\Delta_4 = 0.07$.

Дещо інша ситуація виникає у випадку, коли ГВК задається таким чином [16]: $\rho \in \Gamma = [0.2,0.35] \times [0.5,0.58] \times [0.1,0.3] \times [0.1,0.21]$. В цьому випадку перетворень, які переміщують центр паралелепіпеда

(6.3) на гіперплощину (6.1), виявляється достатньо для того, щоб позбавитися від надлишкових значень ГВК:

$$\rho \in \Gamma = [0.168, 0.294] \times [0.42, 0.521] \times [0.084, 0.252] \times [0.084, 0.1765].$$

Тобто $\Gamma'(\Gamma) = \Gamma'$. Коли ж формули (6.7), (6.9) застосовувати безпосередньо до початкового ГВК, одержимо $\rho \in \Gamma'(\Gamma) = [0.2, 0.3] \times [0.5, 0.58] \times [0.1, 0.2] \times [0.1, 0.2]$, оскільки $\Delta_1 = 0.05$, $\Delta_3 = 0.1$, $\Delta_4 = 0.01$.

6.12.2. *Приклад застосування метода непрямого визначення гіперпаралелепіпеда вагових коефіцієнтів за неповною матрицею парних порівнянь за параграфом* 6.3

В роботі [45] наводиться порівняння деяких методів визначення ваги об'єктів (експертних оцінок відстаней між конкретними містами) за матрицею А, значення елементів якої наводяться в табл. 6.1. В цій роботі елементи матриці А інтерпретуються як експертні оцінки відстаней від Філадельфії до інших заданих міст. Легко бачити, що матриця А є транзитивною і відповідає такому ранжуванню об'єктів (2,1,5,4,3,6).

У результаті застосування описаного метода маємо такий ГВК, який не змінюється для повної і неповної (без елементів μ_{14}, μ_{41}) МПП:

$$\rho_i^H = (0.0422, 0.0536, 0.0039, 0.0204, 0.0357, 0.0021),$$

$$\rho_i^B = (0.6429, 0.671, 0.1295, 0.4281, 0.5714, 0.0806).$$

Таблиця 6.1. **Мультиплікативна матриця парних порівнянь, побудована на основі експертних даних**

	об'єкт a_1	об'єкт a_2	об'єкт a_3	об'єкт a_4	об'єкт a_5	об'єкт a_6
об'єкт a_1	1	0.333	8	3	3	7
об'єкт a_2	3	1	9	3	3	9
об'єкт a_3	0.125	0.111	1	0.167	0.2	2
об'єкт a_4	0.333	0.333	6	1	0.333	6
об'єкт a_5	0.333	0.333	5	3	1	6
об'єкт a_6	0.143	0.111	0.5	0.167	0.167	1

Обчислимо об'єм знайденого паралелепіпеда: $V = 0.3045$. Звідси визначаємо коефіцієнт компетентності експерта, який задав матрицю переваг: $\alpha = 1 - V = 0.6955$.

Під час обчислення ГВК визначався також "центр ваги" об'єктів

$\rho_i^{\text{ЦП}} = (0.261, 0.387, 0.036, 0.121, 0.167, 0.028)$ – для повної МПП;

$\rho_i^{\text{ЦН}} = (0.247, 0.388, 0.036, 0.133, 0.169, 0.028)$ – для неповної матриці.

Ці значення обчислювалися за формулою

$$\rho_i^{\text{ЦП(ЦН)}} = \sum_{l \in L} \rho_i^l / |L|,$$

де $|L|$ – кількість сумісних систем вигляду (6.12).

Нормований середній вектор визначеного ГВК дорівнює

$$\rho_i^C = (0.255, 0.2698, 0.0514, 0.167, 0.226, 0.0308).$$

6.12.3. *Застосування узагальненого методу стабілізації переваг за параграфом* 6.5

Вхідною інформацією для метода стабілізації переваг є матриця, представлена в табл. 6.1. Оскільки ця матриця відповідає транзитивному відношенню між об'єктами (ранжуванню (2,1,5,4,3,6)), то класичний метод стабілізації переваг буде працювати у цьому випадку рівно одну ітерацію і вироджується у метод рядкових сум. Для застосування описаного методу перетворимо мультиплікативну матрицю, наведену в табл. 6.1, в адитивну, виконавши такі перетворення: $\mu_{ij}^1 = \ln b_{ij}$, $i, j \in I$.

Далі $\mu_{ij}^2 = \mu_{ij}^1 + \max_{i,j \in I} \mu_{ij}^1$ для $i \neq j$, $i, j \in I$.

Виконаємо нормування шляхом застосування формули $\mu_{ij} = \mu_{ij}^2 / \max_{i,j \in I} \mu_{ij}^1$, $i, j \in I$.

Одержуємо адитивну МПП, яка відповідає мультиплікативній, представленій в табл. 6.1. Запишемо елементи цієї матриці в табл. 6.2:

Таблиця 6.2. **Адитивна матриця, одержана на основі експертної мультиплікативної матриці**

	об'єкт a_1	об'єкт a_2	об'єкт a_3	об'єкт a_4	об'єкт a_5	об'єкт a_6
об'єкт a_1	0	0.5	1.95	1.5	1.5	1.89
об'єкт a_2	1.5	0	2	1.5	1.5	2
об'єкт a_3	0.05	0	0	0.18	0.27	1.32
об'єкт a_4	0.5	0.5	1.82	0	0.5	1.82
об'єкт a_5	0.5	0.5	1.73	1.5	0	1.82
об'єкт a_6	0.11	0	0.68	0.18	0.18	0

Обчислимо нев'язки для елементів матриці M. Таким чином визначаємо значення критеріїв:

$$v^{(1)} = 0.59;\ v^{(2)} = 4.35;\ v^{(3)} = 23.64.$$

Результати застосування методу стабілізації переваг для наведеної матриці та значення критеріїв $Q^{(7)}, Q^{(8)}$, $Q^{(11)}, Q^{(12)}$ наведемо для значень параметрів $\alpha^{(1)} = 1$, $\alpha^{(2)} = 1$, $\alpha^{(3)} = 1/2$:

$$Q^{(7)} = 17.12,\ Q^{(8)} = 2.58,\ Q^{(11)} = 10.07,\ Q^{(12)} = 1.186.$$

З врахуванням того, що в цьому випадку значення $\left(\rho_i^B - \rho_i^H\right)$ рівні (0.024, 0.036, 0.021, 0.007, 0.005, 0.039), об'єм ГВК складає:

$$V = \left(24.77 * 10^{-12}\right)^{1/6} = 0.0171,$$

а його площа дорівнює $S = 0.06$, що становить відповідно 1,71 % та 4,0 % від максимально можливих (від одиничного гіперкуба в шестивимірному просторі). Це свідчить про високу компетентність експерта, який задав початкову матрицю, та про добру апроксимацію її паралелепіпедом, який обчислюється методом стабілізації переваг.

Розглянемо результати роботи процедури стабілізації для випадку, коли не відомі оцінки експертом переваг між першим та четвертим об'єктами, тобто не задані елементи μ_{14} та μ_{41}. Відновимо значення невідомих елементів: p_{14} = 1.59, p_{41} =0.41. В цьому випадку маємо такі значення критеріїв адекватності:

$$Q^{(7)} = 12.48,\ Q^{(8)} = 1.21,\ Q^{(11)} = 11.84,\ Q^{(12)} = 1.11.$$

Результати порівняння використання методів непрямого задання ГВК (параграф 6.3) та стабілізації переваг (параграф 6.5) з результатами застосування інших методів, наведених в роботі [45], для однієї матриці представлено в табл. 6.3.

"Істинні" нормовані коефіцієнти визначаються як відносні відстані між містами, обчислені на основі дійсних географічних даних, і можуть бути основою лише для обчислення компетентності експерта, який задав свої оцінки у вигляді матриці А, в знанні географії та відчутті відстаней – тобто інтерпретуватися як міра компетентності експерта, визначена тестовим методом). Всі інші коефіцієнти та значення критеріїв $Q^{(7)}, Q^{(8)}$, визначаються відомими методами. Оскільки критерії $Q^{(7)}$ та $Q^{(8)}$ мінімізуються, очевидно, що знайдені значення критеріїв для заданої матриці переваг є значно кращими, ніж значення цих критеріїв для відомих методів. Очевидно також, що "справжні" (або "істинні") коефіцієнти, обчислені на основі вимірюванні дійсних географічних відстаней між містами, ніякою мірою не можуть слугувати еталоном

для коефіцієнтів, визначених іншими (експертними) методами, хоча б через те, що їх неадекватність початковим даним є більшою, ніж у інших методів.

Таблиця 6.3. Результати порівняння критерії адекватності для різних методів знаходження ГВК

№ пп	Метод обчислення "ваги"	$Q^{(8)}$	$Q^{(9)}$	$Q^{(11)}$	$Q^{(12)}$
1	"Істинні" нормовані вагові коефіцієнти	17	69.08	17	69.08
2	Коефіцієнти за методом Сааті	12.7	53.64	12.7	53.64
3	Коефіцієнти за методом найменших квадратів	10.75	44.72	10.75	44.72
4	Коефіцієнти за методом роботи [45]	10.82	48.95	10.82	48.95
5	Коефіцієнти за методом роботи [45] для неповних МПП	10.96	49.33	10.96	49.33
6	Коефіцієнти за методом стабілізації переваг	2.58	17.14	1.19	10.1
7	Коефіцієнти за методом стабілізації переваг для неповних МПП	1.21	12.48	1.11	11.84
8	"Центр ваги" повної матриці	4.734	23.96	0	0
9	"Центр ваги" неповної матриці	4.75	22.65	0	0
10	Нормований середній вектор ГВК	3.75	27.788	0	0

6.12.4. *Застосування процедур перетворення інтервальних бальних оцінок в нормовані вагові коефіцієнти за параграфом 6.7*

Нехай задано такі інтервали бальних оцінок:

$$B_1^H = 5;\ B_2^H = 3;\ B_3^H = 5;\ B_1^B = 9{,}5;\ B_2^B = 4;\ B_3^B = 5{,}5.$$

В табл. 6.4 наведено результати визначення інтервалів вагових коефіцієнтів процедурами П6.1–П6.5, та уточнених процедурами перевірки обчислених інтервалів на надлишковість. Для процедур наведено критерії адекватності, або міри зміни структури переваг $Q^{(13)} - Q^{(15)}$.

Було здійснено тестування процедур на 1000 випадкових значеннях інтервалів бальних оцінок у тривимірному критеріальному просторі. Для перевірки критеріїв на чутливість обчислювалися середні значення абсолютних відхилень від середнього значення по кожному критерію. Результати тестування представлені в табл. 6.5. Найбільшу стійкість по усіх процедурах показав критерій $Q^{(14)}$, а найменшу – критерій $Q^{(15)}$. Показники адекватності процедур перетворення за введеними критеріями обраховувались за критерієм лінійної згортки та мінімаксу. За обома критеріями кращі показники по критеріях $Q^{(13)} - Q^{(14)}$ показала процедура П6.1, найгірші – процедура П6.4.

кращі показники по критеріях $Q^{(13)} - Q^{(14)}$ показала процедура П6.1, найгірші – процедура П6.4.

Таблиця 6.4. **Ілюстрація перетворень інтервальної бальної шкали до ГВК та значення міри зміни структури переваг**

	B_1^H	B_2^H	B_3^H	B_1^B	B_2^B	B_3^B			
	5	3	5	9,5	4	5,5			
	ρ_1^H	ρ_2^H	ρ_3^H	ρ_1^B	ρ_2^B	ρ_3^B	$Q^{(13)}$	$Q^{(14)}$	$Q^{(15)}$
Процедура П6.1	0,31	0,19	0,31	0,59	0,25	0,34			
Поправка на ненадлишковість	0,41	0,19	0,31	0,50	0,25	0,34	3,22	0,00	0,50
Процедура П6.2	0,28	0,17	0,28	0,53	0,22	0,31			
Поправка на ненадлишковість	0,47	0,17	0,28	0,53	0,22	0,31	3,89	2,14	0,32
Процедура П6.3	0,25	0,08	0,09	0,55	0,63	0,71			
Поправка на ненадлишковість	0,25	0,08	0,09	0,55	0,63	0,67	5,79	0,87	0,00
Процедура П6.4	0,21	0,30	0,27	0,49	0,60	0,60			
Поправка на ненадлишковість	0,21	0,30	0,27	0,43	0,51	0,48	4,89	1,35	1,75
Процедура П6.5	0,19	0,28	0,25	0,41	0,53	0,49			
Поправка на ненадлишковість	0,19	0,28	0,25	0,41	0,53	0,49	4,99	1,42	1,68

Таблиця 6.5. **Результати тестування процедур перетворення бальних оцінок до нормованих коефіцієнтів**

	Q_1	Q_2	Q_3
Процедура П6.1	0,42	0,00	0,77
Процедура П6.2	0,52	0,61	1,27
Процедура П6.3	0,86	0,44	1,73
Процедура П6.4	0,85	0,49	1,79
Процедура П6.5	0,86	0,49	1,78

Література до розділу 6

1. *Бевз С.Н.* Непротиворечивая метризация качественных признакою // Автоматика. – 1989. – № 3. – С. 17–23.
2. *Берж К.* Теория графов и ее применение. – М.: ИЛ, 1962. – 320 с.
3. *Берман В.П., Наумов Г.Е.* Отношение предпочтения с унтервальным оцениванием замещений в критериальном пространстве // Автоматика и телемеханика. – 1989. – № 3. – С. 139–153.
4. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
5. *Волошин О.Ф., Гнатієнко Г.М., Дробот О.В.* Метод косвенного определения интервалов весовых коэффициентов параметров для метризованных отношений между объектами // Проблемы управления и информатики. – 2003. – № 2. – С. 34–41.
6. *Волошин О.Ф., Гнатієнко Г.М.* Програмний комплекс підтримки узгодження рішень у дворівневій ієрархічній моделі вибору режиму функціонування системи засобів зв'язку // Вісн. Київ. ун-ту. – 1992. – Вип. 4. – С. 19–24.
7. *Гафт М.Г.* Принятие решений при многих критериях. – М.: Знание, 1979. – 64 с.
8. *Гнатієнко Г.М.* Алгоритми обробки експертної інформації в задачах ранжування та їх застосування: Дис… канд. техн. наук. – Київ. – 1994. – 133 с.
9. *Гнатієнко Г.М.* Алгоритми обробки експертної інформації в задачах ранжування та їх застосування: Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.13.16 /. – К., 1994. – 16 с.
10. *Гнатієнко Г.М., Дробот О.В.* Використання вагових коефіцієнтів у моделюванні процесів спільного інвестування // Наукові праці Кіровоградського державного університету. Економічні науки. – Вип. 8. – Кіровоград: КДТУ, 2000. – С. 125–132.
11. *Гнатієнко Г.М., Дробот О.В.* Процедури обробки експертної інформації при моделюванні складних сільськогосподарських комплексів // Збірник наукових праць Кіровоградського державного технічного університету. Випуск 10. – Кіровоград, 2001. – С. 101–106.
12. *Гнатієнко Г.М., Дробот О.В.* Процедури та критерії адекватності перетворення інтервальних бальних оцінок в нормовані вагові коефіцієнти // Збірник наукових праць Кіровоградського національного технічного університету. Техніка в сільськогосподарському виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація. – Вип. 17. – Кіровоград: КНТУ, 2006. – С. 304–308.

13. *Гнатиенко Г.Н.* Задание предпочтений на множестве критериальных функций в задачах многокритериальной оптимизации // Вестн. Киев. ун-та. Моделирование и оптимизация сложн. систем. – 1990. – Вып. 9. – С. 87–92.

14. *Гнатієнко Г.М., Косматий Д.Ю.* Апроксимація метризова-ної матриці парних порівнянь конусом переваг // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – Київ. – 1993. – № 3. – С. 122–128.

15. *Гнатиенко Г.Н., Косматый Д.Ю.* Обобщение метода стабилизации предпочтений на случай неполных метризованных матриц парных сравнений // Киев. ун-т. – Киев, 1992. – 22 с. – Рус. – Деп. в УкрНИИНТИ 8.06.92, №847-Ук92.

16. *Гнатиенко Г.Н., Косматый Д.Ю.* Программная реализация группы методов задания конуса предпочтений на множестве критериальных функций в задачах многокритериальной оптимизации // Киев. ун-т. – Киев, 1991. – 11 с. – Рус. – Деп. в УкрНИИНТИ 11.06. 1991, №901-Ук91.

17. *Гнатієнко Г.М.* Класифікація задач однієї моделі аналізу даних // Київ. ун-т. – Київ, 1992. – 89 с. – Укр. – Деп. в УкрНДІНТІ 18.06.92, № 911-Ук92.

18. *Гнатієнко Г.М.* Метод адаптивного визначення інтервалів відносної важливості параметрів багатовимірних об'єктів // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – Київ. – 2000. – Вип. 1. – С. 215–221.

19. *Гнатиенко Г.Н.* Метод косвенного задания интервалов относительной важности критериальных функций в задачах многокритериальной оптимизации // Киев. ун-т. – Киев, 1992. – 11 с. – Рус. –Деп. в УкрНИИНТИ 8.06.1992, № 848-Ук92.

20. *Гнатиенко Г.Н., Микулич А.Ю.* Методы метризации качественных ранжировок объектов // Киев. ун-т. – Киев, 1993. – 10 с. – Рус. – Деп. в УкрНИИНТИ 10.03.93, № 432-Ук93.

21. *Гнатиенко Г.Н., Микулич А.Ю.* Программный комплекс поддержки принятия решений в задачах системной оптимизации линейных многокритериальных моделей на базе СМ ЭВМ // Киев. ун-т. – Киев, 1993. – 10 с. – Рус. – Деп. в УкрНИИНТИ 10.03.93, № 433-Ук93.

22. *Гнатієнко Г.М., Миронова К.М.* Визначення впливу складових на якість поживного середовища// Теорія прийняття рішень: Праці ІІ-ї міжнародної школи-семінару. – Ужгород: УжНу, 2004. – С. 25.

23. *Гнатієнко Г.М., Миронова К.М.* Використання схем послідовного аналізу варіантів при визначенні економічної доцільності виробництва діагностичного поживного середовища // Наукові праці Кіровоградського національного технологічного університету: Економічні науки, вип. 8. – Кіровоград: КНТУ, 2005. – С. 120–124.

24. Гнатієнко Г.М., Миронова К.М. Схеми послідовного визначення впливу складових на якість поживного середовища при розробці нових технологій // Вісн. ЧДТУ. – № 2. – 2005. – С. 141–144.

25. Гнатиенко Г.Н. Система поддержки принятия решений в задачах анализа данных на базе СМ ЭВМ // Киев. ун-т. – Киев, 1992. – 22 с. – Рус. – Деп. в УкрНИИНТИ 18.02.92, № 211-92.

26. *Доленко Г.А.* Задание вектора предпочтений критериев на интервалах в задачах векторной оптимизации. Сб. "Кибернетика и вычислительная техника". – Вып. 51. – К. – 1981. – С. 101–108.

27. *Дробот О.В., Гнатієнко Г.М.* Процедура локалізації вектора вагових коефіцієнтів в задачах прийняття рішень // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2002. – Том. 7. – № 4. – С. 102–110.

28. *Дробот О.В.* Розробка алгоритмів послідовного аналізу варіантів для задач експертного оцінювання та їх застосування: Дис... канд. техн. наук: 01.05.04 / Київський ун-т ім. Тараса Шевченка. – К., 2003. – 159 с.

29. *Ларичев О.И.* Наука и искусство принятия решений. – М.: Наука, 1979. – 200 с.

30. *Литвак Б.Г.* Меры близости и результирующие ранжирования // Кибернетика. – 1983. – № 1. – С. 57–63.

31. *Ляшко И.И., Тюптя В.И., Кигель В.Р.* Диалоговые процедуры многокритериальной оптимизации. Учеб. пособие. – Киев: КГУ, 1985. – 76 с.

32. Методы и алгоритмы автоматизированного проектирования сложных систем управления/ Волкович В.Л., Волошин А.Ф. и др. – К.: Наук. думка, 1984. – 216 с.

33. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. – М.: Наука, 1974. – 256 с.

34. *Михалевич В.С., Волкович В.Л., Волошин А.Ф.* Метод последовательного анализа в задачах линейного программирования боль-шого раз мера // Кибернетика. – 1981. – № 4. – С. 114–120.

35. *Михалевич В.С., Волкович В.Л.* Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. – М.: Наука, 1982. – 286 с.

36. *Михалевич М.В.* Стохастические алгоритмы решения оптимизационных задач на отношениях предпочтений: Дисс... докт. физ.-мат. наук. – К, 1990. – 257 с.

37. *Нариньяни А.С.* Неточность как НЕ-фактор. Попытка доформального анализа: Препр./РосНИИ ИИ. – Москва-Новосибирск, 1994. – 34 с.

38. *Панкова Л.А., Петровский А.М., Шнейдерман М.В.* Организация экспертизы и анализ экспертной информации. – М.: Наука, 1984. – 120 с.

39. Разработка математического и программного обеспечения для задач принятия решений на основе экспертной информации в условиях локальной сети ЕС-СМ-ПЭВМ со стороны СМ ЭВМ. /А.Ф. Волошин, Г.Н. Гнатиенко, А.Ю. Микулич и др. – Киев. – 1989. – 86 с.

40. *Растригин Л.А., Эйдук Ю.А.* Адаптивные методы многокритериальной оптимизации // Автоматика и телемеханика. – 1985. – № 1. – С. 5–26.

41. *Фишберн П., Кини Р.* Обобщенная независимость по полезности и некоторые смежные вопросы / В кн.: Статистические модели и многокритериальные задачи принятия решений. – М.: Статистика, 1979. – С. 57–58.

42. *Чеботарев П.Ю.* Обобщение метода строчных сумм для неполных парных сравнений // Автоматика и телемеханика. – 1989. – № 8. – С. 125–137.

43. *Шнейдерман М.В.* Процедуры коллективного экспертного опроса и их экспериментальное исследование // Автоматика и телемеханика. – 1988. – № 5. – С. 3–16.

44. *Экенроде Р.Т.* Взвешенные многомерные критерии. В кн.: Статистическое измерение качественных характеристик / Под ред. Е.М. Четыркина. – М.: Статистика. – 1972. – С. 139–154.

45. *Юшманов С.В.* Метод нахождения весов, не требующий полной матрицы парных сравнений // Автоматика и телемеханика. – 1990. – № 2. – С. 187–189.

46. Larichev O., Boichenko V., Moshkovich H., Sheptalova L. Modelling multiattribute information processing strategies in a binary decision task / Organiz. Behav. and human perform. – V. 26. – 1980 – Pp. 278–291.

47. Muhittin Oral and Ossama Kettani. Modelling the process of multiattribute choice // J.Opl.Res. – 1989. – Vol. 40. – № 3. – Pp. 281–291.

Розділ 7. Моделі і методи прийняття рішень в умовах невизначеності

7.1. Огляд та аспекти прийняття групових рішень в нечітких умовах

Для оцінювання об'єктів у слабко структурованих задачах успішно застосовується апарат теорії нечітких множин [6]. Основи методів формалізації нечіткої експертної інформації закладено в роботах Лотфі Заде [14, 15]. На сьогодні ЗЕО в нечітких умовах присвячено багато робіт [2, 13, 16, 23, 26, 34].

Невизначеність властива практично будь-якій ситуації експертного оцінювання. Невизначеність може бути об'єктивною, яка властива всім реальним величинам [29], і суб'єктивною, яка властива людській природі в цілому, і особливо можливостям людини оцінювати інформацію. Причинами виникнення суб'єктивної невизначеності, зокрема, є [29, 34]:

- неповнота знань експерта про властивості об'єктів;
- його недостатній ступінь впевненості в правильності своїх оцінок;
- суперечливість експертних знань;
- нечіткість представлення інформації;
- семантична невизначеність, пов'язана з неоднозначністю природної мови, недовизначеністю понять і термінів;
- особливості агрегування індивідуальних експертних оцінок тощо.

Практично всі реальні величини, оцінка яких здійснюється експертним шляхом, є наближеними. Крім неточності для вимірюваних величин виділяється ціла низка характерних НЕ-факторів. Наріньяні О.С. [29] ділить НЕ-фактори на дві групи. До першої відносяться ті, що проявляються в судженнях експертів у явному вигляді: невизначеність, нечіткість, неточність, недовизначеність. До другої групи НЕ-факторів відносяться ті, для виявлення яких слід застосовувати спеціальні механізми: неповнота, немонотонність, протирічливість, некоректність, ненормованість, недетермінованість. Усі зазначені характеристики будемо об'єднувати терміном "розмитість".

Нехай X – універсальна множина n – мірних об'єктів, що описує сукупність усіх можливих варіантів вибору експерта. Розмите поняття, що характеризує відповідний критерій вибору, представляється нечіткою множиною. Відповідні основні поняття наведено у параграфі 2.5.

Міра належності μ інтерпретується в різних роботах порізному, наприклад, в [33] пропонується імовірнісна інтерпретація міри належності, в [21] – ступінь впевненості експерта в тому, що елемент x, $x \in X$, належить множині A, в роботі [26] – "можливість" інтерпретації x поняттям, що формалізується нечіткою множиною A.

Нечітка множина є множиною типу $n, n = 1, 2, 3, \ldots$, [15] якщо значеннями її ФН є нечіткі множини типу $n-1$. ФН нечіткої множини типу 1 набуває значень з інтервалу [0,1].

ФН нечіткої множини типу 2 і вище будемо називати *розмитими ФН*. Розмита ФН інтерпретується як область нечутливості (неточності, невизначеності) експерта при визначенні ФН об'єктів x, $x \in X$, до множини A. Величина інтервалу, тобто «ступінь впевненості» експерта у своїй оцінці, є характеристикою кількісної міри цієї неточності. Формально ця невизначеність може бути визначена з допомогою *"зернистості"* [29], яка відображує міру неточності параметра, що вимірюється, по відношенню до величини «зерна». "Зерно" є неподільною (звичайно ж неточною) одиницею вимірювання цього параметра. У нашому випадку таким параметром є сама ФН, яка визначається на інтервалі [0,1], найменша одиниця якого визначає граничну зернистість шкали. Величину зерна визначають з міркувань "межі розрізнення" зерен для експерта. Залежно від умов ЗЕО, способів визначення величин та інших аспектів, можна виділити кілька способів задання розмитої інформації.

С1. «Рівномірно розподілена розмитість», коли за умовами задачі уся множина допустимих значень розмитої величини є рівноцінною (усі значення в інтервалі можуть набуватися «рівноймовірно») або коли відомий лише інтервал значень розмитої величини і відсутня можливість одержання детальнішої інформації про цей інтервал. Розмита ФН у випадку «рівномірно розподіленої розмитості» може бути задана:

- у вигляді інтервалу, $\mu_A(x) \in [\mu_A^H(x), \mu_A^B(x)]$;
- із зазначенням абсолютної неточності, $\mu_A(x) = \mu_A^0(x) \pm \pm\Delta\mu_A(x)$, де $\mu_A^0(x)$ – "найімовірніше" значення ФН величини x до множини A, $\Delta\mu_A(x)$ – "точність вимірювання";
- із зазначенням відносної неточності, $\mu_A(x) = \mu_A^0(x) \pm \pm\varepsilon\mu_A^0(x)$, $\varepsilon \in (0,1]$.

З допомогою поняття *зернистості* можна визначити «міру точності» експертної оцінки [8, 56, 57]. Позначимо цю міру через $\alpha^{(1)}$, а величину зерна – через $\alpha^{(2)}$. Тоді, залежно від способу представлення розмитої ФН, величина $\alpha^{(1)}$ визначається за однією з формул:

$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} / \mu_A^B(x) - \mu_A^B(x),$$
$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} / \Delta\mu_A(x),$$
$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} / \alpha^{(3)}(\mu_A(x)),$$

де $\alpha^{(3)}$, $\alpha^{(3)} \in [0,1]$,– міра впевненості експерта у своїй оцінці.

С2. «Багатозначна (дискретнозначна, точкова) розмитість», коли результати окремих вимірювань розмитої величини одержано у вигляді точкових оцінок і вони не співпадають між собою.

С3. «Трьохточкова розмитість», коли відомо границі зміни розмитої величини, а також її найімовірніше чи найбажаніше для експерта значення. Такий спосіб задання розмитої величини можна описати, наприклад, трикутною ФН.

С4. «Нерівномірно розподілена розмитість», коли розмите значення ФН описується деякою функцією, яка не обов'язково є трикутною або трапецієподібною.

Евристика **Е7.1.** Для скаляризації розмитої ФН можна застосовувати евристику у вигляді суб'єктивного коефіцієнта схильності експерта до ризику $\alpha^{(4)}$, $0 \le \alpha^{(4)} \le 1$.

Врахування суб'єктивного фактора при побудові ФН є принциповим, оскільки значення ФН є суб'єктивною ймовірністю. Тому слід обов'язково враховувати психологічні особливості експерта – його "реалістичність", "незалежність", "правдивість", "схильність до ризику" тощо. Наприклад, у випадку одного експерта маємо

$$\mu_A(x) = \alpha^{(4)}\mu_A^H(x) + (1-\alpha^{(4)})\mu_A^B(x), \tag{7.1}$$

де $\alpha^{(4)}$ – коефіцієнт "ризиковості" експерта, введений евристикою Е7.1.

При колективному експертному оцінюванні застосовується двоетапна процедура скаляризації по кожному експерту і по експертній групі в цілому. У загальному випадку враховуються коефіцієнти компетентності експертів, тобто $\gamma_i \in [0;1]$, $i \in L$, $\sum_{i \in L} \gamma_i = 1$. Методам визначення компетентності експертів присвячено наступний розділ монографії.

Позначимо індивідуальну ФН, скаляризовану формулою (7.1), через $\mu_A(x_j^i)$, $i \in L, j \in I$. Один з найрозповсюдженіших способів вибору кращого об'єкта [26] полягає у виборі об'єкта, що має максимальний ступінь належності нечіткій множині A, тобто

$$\mu_A(x) = \max_{j \in J} \min_{i \in L}(\gamma_i \mu_A(x_j^i)). \tag{7.2}$$

У [33] указується на ефективність лінійної згортки для ЗЕО:

$$\mu_A(x) = \max_{j \in I} \sum_{i \in L}(\gamma_i \mu_A(x_j^i)). \tag{7.3}$$

Якщо коефіцієнти компетентності експертів вважати за розподілення ймовірностей, то можна використовувати критерії Байеса-Лапласа чи Гурвіца [28], тобто:

$$\mu_A(x_i) = \max_{i \in I} \sum_{j \in L} \gamma_i \mu_A(x_i^j) / k, \tag{7.4}$$

$$\mu_A(x_i) = \max_{j \in I}(\alpha \min_{i \in L} \gamma_i \mu_A(x_i^j) + (1-\alpha) \max_{i \in L} \gamma_i \mu_A(x_i^j)), \tag{7.5}$$

де k – кількість експертів.

Можна використовувати різні способи формалізації індивідуальних розмитих ФН, заданих експертами у вигляді інтервалів, до колективної ФН. Такі процедури реалізуються також у два етапи: на першому етапі проводиться інтегрування індивідуальних інтервальних оцінок у колективну розмиту оцінку у вигляді інтервалу, а на другому етапі визначаються критерії вибору оптимальної оцінки. Найпростішою є інтегрована оцінка вигляду:

$$\begin{aligned} \mu_A^{*H}(x_j) &= \min_{i \in L} \gamma_i \mu_A^{*H}(x_i^j), \\ \mu_A^{*B}(x_j) &= \max_{i \in L} \gamma_i \mu_A^{*B}(x_i^j), \ j \in I. \end{aligned} \tag{7.6}$$

При такому визначенні результуючого інтервалу $[\mu_A^{*H}(x_i), \mu_A^{*B}(x_i)], i \in I$, усередині області відсутні переваги, тобто всі значення є рівноцінними і рівноймовірними. Очевидно, що чим більшими є розміри області, визначеної за формулою (7.6), тим менш точно визначається результуюча ФН.

Інший підхід до визначення результуючого інтервалу на множині індивідуальних інтервалів полягає у визначенні його границь як центрів ваги множин $\mu_A^{*H}(x_i^j)$ та $\mu_A^{*B}(x_i^j), i \in L$, $j \in I$, за формулами:

$$\mu_A^{*H}(x_j) = \sum_{i \in L} \gamma_i \mu_A^H(x_i^j)/k,$$

$$\mu_A^{*B}(x_j) = \sum_{i \in L} \gamma_i \mu_A^B(x_i^j)/k, \; j \in I.$$

Якщо розподіл значень усередині індивідуальних інтервалів не є рівномірним при визначенні результуючих інтервалів, то це також враховується відповідним чином. Остаточно результуючі інтервали ФН визначаються шляхом застосування до них визначених критеріїв "ступеня неточності" оцінки, які грунтуються на співмірності визначеного інтервалу із "зернистістю" масштабу вимірів. Результуючі ФН визначаються у вигляді точки або інтервалу, за принципом:

$$\mu_A^*(x_i) = \begin{cases} 1/2\left(\mu_A^{*H}(x_i) + \mu_A^{*B}(x_i)\right), & \text{якщо } \mu_A^{*B}(x_i) - \mu_A^{*H}(x_i) \sim \alpha^{(2)}, \\ \left[\mu_A^{*H}(x_i), \mu_A^{*B}(x_i)\right], & \text{якщо } \mu_A^{*B}(x_i) - \mu_A^{*H}(x_i) >> \alpha^{(2)}, \; i \in I. \end{cases}$$

На останньому етапі до результуючих інтервалів можливих значень ФН по кожному об'єкту застосовуються критерії (7.2)-(7.5).

7.2. Експертний аналіз визначення міри узгодженості вимоги певного значення параметра із можливістю його отримання

У задачах прогнозування, діагностики та класифікації досить часто виникають ситуації, коли необхідно прийняти рішення, базуючись на суб'єктивних судженнях експертів про варіанти розвитку майбутніх процесів. Розглянемо одну із таких задач [22]. Нехай відомі границі зміни деякого параметра q – $[s_1, s_2]$, визначені технічним завданням.

Евристика **Е7.2.** Якщо експерт має найбільшу впевненість у тому, що параметр має одне певне значення, то ФН є трикутною або гаусівською, якщо ж такі значення утворюють інтервал, то ФН вибирають трапецієподібною.

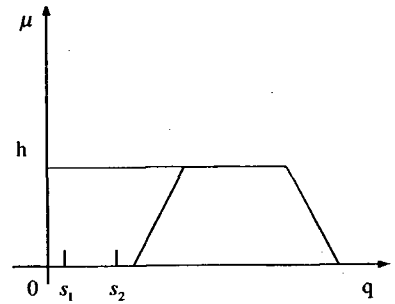


Рис. 7.1.

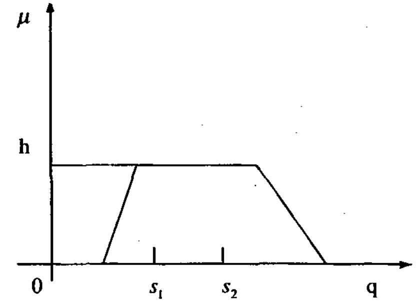


Рис. 7.2.

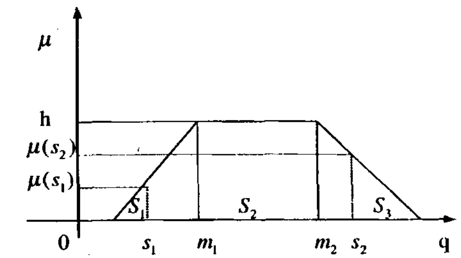


Рис. 7.3.

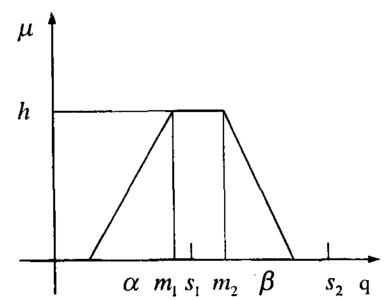


Рис. 7.4.

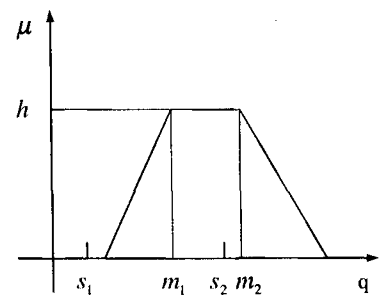


Рис. 7.5.

Припустимо, що в результаті експертного опитування, аналізу і усереднювання ФН було отримано одну з трапецієподібних функцій μ (рис. 7.1–7.5). Необхідно визначити, наскільки узгоджується вимога певного значення q з можливістю його отримання. Міру узгодженості позначатимемо ζ .

Випадки, зображені на рис. 7.1 і рис. 7.2, мають вироджений характер. Так, для рис. 7.1 необхідне значення q і значення, запропоновані експертами, не співпадають в жодній точці ні з яким рівнем довіри. Очевидно, що $\zeta = 0$. Для рис. 7.2, навпаки, збіг повний і, якщо $h = 1$, то $\zeta = 1$, інакше $\zeta = h$.

Нехай $s_2 > s_1$ і без обмеження загальності – $[m_1, m_2] \subset [s_1, s_2]$ (див. рис. 7.3), де m_1 – ліве модальне значення ФН, m_2 – праве. Необхідно обчислити міру впевненості ζ у тому, що значення q належатиме інтервалу $[s_1, s_2]$. Якщо не враховувати впливу площ S_2 і S_3 (вважати їх значення достатньо малими у порівнянні з S_1), то

$$\zeta = \frac{3h(m_1 - m_2) + h(s_2 - s_1) + \mu(s_1)(m_1 - s_1) + \mu(s_2)(s_2 - m_2)}{2(m_2 - m_1 + s_2 - s_1)}. \qquad (7.7)$$

Враховуючи величини площ

$$S_1 = \frac{1}{2}(h(m_2 - m_1) + h(s_2 - s_1) - \mu(s_1)(m_1 - s_1) + \mu(s_2)(s_2 - m_2),$$
$$S_2 = \frac{1}{2}\mu^2(s_1)\frac{m_1 - s_1}{h - \mu(s_1)},\ S_2 = \frac{1}{2}\mu^2(s_2)\frac{s_2 - m_2}{h - \mu(s_2)}, \qquad (7.8)$$

отримаємо результуюче значення

$$\zeta = \frac{\zeta S_1}{S_1 + S_2 + S_3}. \qquad (7.9)$$

Для випадку лівобічної асиметрії (рис. 7.4) отримаємо

$$\zeta = (1 - \zeta_2)\zeta_1, \qquad (7.10)$$

де

$$\zeta_1 = (h(s_1 - m_1) + \frac{1}{4}h\alpha)/(s_1 - m_1 + \frac{\alpha}{2}), \qquad (7.11)$$

$$\zeta_2 = (h(m_2 - s_1) + \frac{1}{4}h\beta)/(m_2 - s_1 + \frac{\beta}{2}),\ s_1 \in (m_1, m_2)\ . \qquad (7.12)$$

Формули для випадку правосторонньої асиметрії визначаються аналогічно (7.10)-(7.12).

Значення, розраховані за (7.7)-(7.12), не є остаточним аргументом при ПР, але виступають важливим інформативним чинником, що відображує судження експертів і вказує на їх міру впевненості в досягненні параметром q тих чи інших

q тих чи інших значень. При обчисленнях (7.7)-(7.12) вважалися відомими процедури для порівняння, додавання і зваженого усереднювання нечітких чисел [13]. Підхід, запропонований для обчислення міри впевненості у тому, що параметр набуватиме вказаних значень, може бути застосований в різних процедурах ПР, що базуються на суб'єктивних оцінках [4, 12, 41].

7.3. Технологія вибору оптимальної альтернативи в умовах композиційної невизначеності

Сучасні умови перехідного етапу економічного розвитку вимагають посилення фактора об'єктивності в оцінці перспектив розвитку виробничої сфери і, разом із тим, зменшення кількості обмежень суб'єктивного характеру на свободу вибору при ПР, що впливає на їх обґрунтованість. Керуючись доцільністю та ефективністю, як основними аспектами вибору оптимального варіанту вирішення проблеми, ОПР найчастіше:

- не враховує фактори, які, в загальному випадку, є привнесеними ззовні предметної області, але можуть мати негативні наслідки на подальших етапах життєвого циклу системи;
- не може співставити негативні і позитивні значення різних факторів, що призводить до перекосів і появи небажаних аспектів у створенні системи;
- недооцінює роль суб'єктивних факторів (суспільної думки, політичної стабільності тощо);
- не може порівняти альтернативні варіанти, кожен з яких має як кількісні, так і якісні характеристики.

Зміст задачі, що виникає перед ОПР, полягає у визначенні можливості композиції кількісних і якісних, об'єктивних та суб'єктивних факторів і розробці відповідного методу та оцінки такої композиції. Базуватись при її розв'язку необхідно на визначенні міри, оскільки міра є сутнісною єдністю кількісного та якісного і кожний об'єкт та процес має свою міру, тобто якісно-кількісну визначеність [9].

Нехай S – деяка технічна система, в створенні якої є потреба. У результаті попереднього аналізу систем такого типу, процесів їх функціонування та адаптації встановлено, що характеристики S оцінюють за множиною критеріїв об'єктивної та суб'єктивної природи $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Необхідно встановити узагальнений критерій, за значенням якого буде прийнято рішення про вибір оптимального варіанту і запропонувати процедуру його інтерпретації.

Відомо, що при оцінці варіанту проектного рішення враховують технічні, технологічні, організаційні та економічні фактори [40]. Оскільки далі розглядаються також суб'єктивні аспекти, то є доцільним враховувати ще й суспільний фактор.

7.3.1. *Класифікація критеріїв вибору оптимальних об'єктів*

Розглянемо класифікацію часткових критеріїв. Нехай $A_1, A_2, ..., A_m$ – можливі проектні варіанти майбутнього об'єкту. Кожний з них не співпадає з іншим за множиною внутрішніх параметрів. Вони можуть мати різну структуру, елементно-модульну базу, відрізнятися організацією процесу виробництва і мати різну вартість. Варіанти мають множину $Z = \{z_1, z_2, ..., z_k\}$ системних характеристик, яка включає в себе характеристики S як технічної системи (керованість, ідентифікованість тощо), так і її споживчі властивості, до яких належать, наприклад, вид продукції, що випускається, її кількість та інші. Склад множини Z є однаковим для кожного варіанту. Оцінюють характеристики за критеріями, які будемо класифікувати так:

1. Якісні критерії, що вказують на наявність або відсутність деякої характеристики варіанту:

$$y_l = \chi_{A_q}(z_p) = \begin{cases} 1, & A_q \text{ має властивість } z_p, \\ 0, & \text{в іншому випадку}, \end{cases} \qquad (7.13)$$

$l = 1, ..., n, \quad q = 1, ..., m, \quad p = 1, ..., k.$

Прикладом такої характеристики є конкурентоспроможність продукції і можливість її експорту до економічно розвинутих країн.

2. Якісні критерії, що вказують на:
- наявність характеристики;
- вибір одного із способів її реалізації;
- ефективність кожного способу:

$$y_l = \rho_i \cdot \chi_{z_p}(z_p^i), \qquad (7.14)$$

де ρ_i – ваговий коефіцієнт способу реалізації варіанту, $\rho_i \in (0,1)$, $\sum_{i=1}^{d} \rho_i = 1$, d – кількість способів.

Як приклад, системною характеристикою є вид енергоносія для технічної системи. Можливі варіанти: електроенергія, газ, мазут, вугілля, інші. Оскільки вагові коефіцієнти залежать, у загальному випадку, нелінійно від внутрішніх параметрів системи, то їх можна визначити із системи (7.15) рівнянь та нерівностей:

$$\begin{aligned} &f_1(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_v; \rho_1, \rho_2, ..., \rho_d) = (<)0, \\ &f_2(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_v; \rho_1, \rho_2, ..., \rho_d) = (<)0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &f_{v+d+1}(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_v; \rho_1, \rho_2, ..., \rho_d) = (<)0, \end{aligned} \qquad (7.15)$$

де α_i, $i = 1, ..., v$, – невідомі коефіцієнти при композиціях змінних, що є внутрішніми параметрами і значення яких визначаються в результаті експерименту або моделювання.

3. Якісні критерії, що вказують, на відміну від критеріїв типу 2, на вибір декількох із багатьох способів реалізації варіанту:

$$y_l = \sum_{i \in I} \rho_i \cdot \chi_{z_p}(z_p^i), \qquad (7.16)$$

де I – множина індексів, $I = \{1, 2, ..., d\}$.

Прикладом можуть бути джерела постачання енергоносіїв. Проблема визначення ρ_i поєднує в собі необхідність розв'язання задачі математичного програмування і комбінаторний аналіз при рівноефективних комбінаціях способів реалізації характеристики.

4. Критерії кількісного характеру, значеннями яких є числова міра системних характеристик, наприклад, прогнозована рентабельність технічної системи. Оскільки значення критерію є величиною абсолютною і має мінімальну інформа-

тивність та характеризується значною ентропією, то використовують відому процедуру нормалізації з ціллю приведення його до єдиної шкали (відрізку [0,1]). Для цього необхідне знання числових екстремальних значень характеристики. Маємо:

$$y_l : X \to [0,1], \tag{7.17}$$

де $X = \{x_1, x_2, ..., x_r\}$ – множина внутрішніх параметрів системи.

5. Якісні критерії, що базуються на судженнях експертів, їх досвіді та інтуїції. Найчастіше вони мають прогнозний характер, виходячи із знання процесу функціонування аналогів або досвіду експерта:

$$y_l : [a,b] \to [0,1], \tag{7.18}$$

де a – мінімальне числове значення системної характеристики, b – максимальне, критерій $y_l(x)$ вказує, наскільки оптимальним є її значення x.

Таким чином, запропоновано систему з п'яти типів критеріїв, що мають універсальну множину значень - відрізок [0,1]. В роботі [36] стверджується, що така система критеріїв є повною і всі інші критерії з іншою семантичною структурою можна звести до наведених вище.

7.3.2. *Процедури агрегування часткових критеріїв*

Процедура агрегування часткових критеріїв в інтегральний відбувається за умови визначеності їх вагових значень, що в свою чергу є можливим лише у разі ортогональності системних характеристик. Метод ортогоналізації наведено, наприклад, в [25]. Позначимо вагові коефіцієнти критеріїв $\beta_i, i = 1,...,n$. Тоді можна запропонувати декілька підходів до формування інтегрального критерію і обчислити його значення:

1. Нехай $y_{i_1} \wedge y_{i_2} = \min\{\beta_{i_1} \cdot y_{i_1}, \beta_{i_2} \cdot y_{i_2}\}$, тоді інтегральний критерій є таким:

$$\Psi = \bigwedge_{i=1}^{n} y_i. \tag{7.19}$$

Ψ дорівнює найменшому добутку значення часткового критерію на його вагу. Потрібно зауважити, що можливі два

випадки: перший, якщо критерій має незначну вагу у системі критеріїв і другий, коли значення критерію є порівняно малим або нулем, але вага критерію велика (рис. 7.6). У першому випадку частинний критерій можна вилучити при $(\beta_l, y_l) \in \Omega_2$. Якщо ж $y_l > y_{l_{max}}$, то необхідно дослідити структуру критеріальної функції. У випадку опису частковим критерієм вторинних характеристик [16] його необхідно вилучити, якщо ж основних – то залишити і вибрати той варіант, для якого $\Psi = \Psi_{max}$. У другому випадку критерій вилучають при $(\beta_l, y_l) \in \Omega_3$, якщо ж вагове значення критерію є більшим від порогового β_l, тобто $(\beta_l, y_l) \in \Omega_4$, то його необхідно покращити, використовуючи відомі мінімаксні процедури [27, 34]. Область Ω_5 для критерію Ψ є "мертвою зоною", Ω_6 – допустимою.

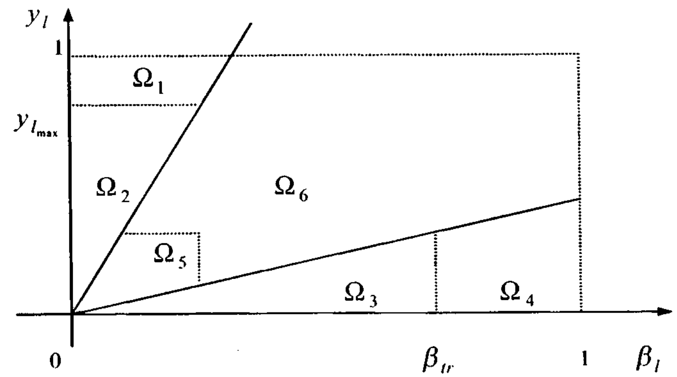


Рис. 7.6. Критеріально-вагові співвідношення

2. Інтегральні критерії адитивного, або мультиплікативного вигляду:

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i, \quad \Psi = \prod_{i=1}^{n} y_i^{\beta_i}. \tag{7.20}$$

Мультиплікативні критерії зручно використовувати, якщо існують часткові критерії, які визначені на множинах внутрішніх параметрів, що перетинаються. Оскільки такі критерії зводять до адитивних логарифмуванням з використанням процедур тестування на мультиколінеарність [11] та вилучення залежних критеріїв, то доцільно розглядати лише адитивні критерії.

Якщо для кожного варіанту відомі значення часткових критеріїв, то процедура визначення оптимальної варіанту при заданих вагових коефіцієнтах є тривіальною. Двомірний випадок зображено на рис. 7.7.

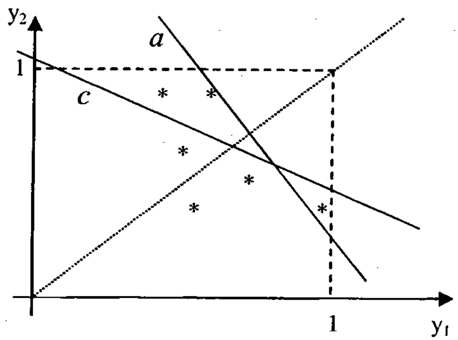


Рис. 7.7. Двокритеріальний вибір

Зірочками позначено пари значень критеріїв для шести варіантів. Нехай інтегральний критерій $\Psi = \beta_1^i y_1 + \beta_2^i y_2$. Проводимо опорні прямі a та c. Їх рівняння $y_2 = -\frac{\beta_1^1}{\beta_2^1} y_1$ та $y_2 = -\frac{\beta_1^2}{\beta_2^2} y_1$. Паралельно переносимо ці прямі у просторі частинних критеріїв. Зірочка, через яку прямі пройдуть останніми, характеризує оптимальний варіант.

7.3.3. *Визначення вагових коефіцієнтів часткових критеріїв*

Така процедура значно ускладнюється, якщо значення вагових коефіцієнтів невідомі і визначаються суб'єктивно. Нехай h експертів оцінили для кожного варіанту значення всіх часткових критеріїв. Одержана матриця $(y_i^j)_{i=1,\ j=1}^{n,\ h}$. Аналізуючи її, ОПР може визначити вагові коефіцієнти, наприклад, за такою формулою:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{h} y_i^j \Big/ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{h} y_i^j \qquad (7.21)$$

Припустимо, що на значення часткових критеріїв впливають випадкові обставини і кожен з експертів визначає можливі значення критеріїв разом з їх ймовірностями. Додатково зазначимо, що ряд значень дискретний і є скінченним. Для кожного експерта та кожного часткового критерію маємо ряд розподілу (табл. 7.1),

Таблиця 7.1. **Вихідний ряд розподілу**

y_1^{jl}	y_2^{jl}	...	$y_{q_{lj}}^{jl}$
p_1^{jl}	p_2^{jl}	...	$p_{q_{lj}}^{jl}$

де l – номер експерта, $l = 1,...,h$, j – номер часткового критерію, $j = 1,...,n$, q_{l_j} – кількість можливих значень, запропонованих l-м експертом для j-го критерію, $\sum_{i=1}^{q_{l_j}} p_i^{lj} = 1$. У даному випадку відомо декілька підходів до визначення вагових коефіцієнтів. Перший підхід полягає у мінімізації ризику визначення невірного коефіцієнта. Його стратегія передбачає знаходження

$$\delta_{jl} = \sum_{i=1}^{q_{l_j}} y_i^{l_j} \cdot p_i^{l_j}, \qquad (7.22)$$

$l = 1,...,h,\quad j = 1,...,n$. Тоді

$$\beta_j = \frac{1}{h}\sum_{l=1}^{h} \delta_{jl}. \qquad (7.23)$$

Якщо вважати, що всі експерти рівнокомпетентні, то (7.23) не викликає сумніву. Інший підхід використовують у випадку, якщо експерти, не маючи належного досвіду, з метою зменшення категоричності суджень, вказують на майже однакові ймовірності, чим викликають значну ентропію вибору, що унеможливлює використання (7.22). Максимальною є ентропія при $p_i^{lj} = 1/q_{l_j}$ і дорівнює $H_{lj} = \log q_{l_j}$, $i = 1,...,q_{l_j}$. Тоді доцільно покласти

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{q_{lj}} y_i^{lj} \cdot p_i^{lj}, \qquad (7.24)$$

де l – номер того експерта, що запропонував дані з найменшою ентропією. Але такий підхід є раціональним лише у випадку $H_{lj} << H_{sj}$, $s,l = 1,...,h$, $s \neq l$. Можливо також знаходити вагові коефіцієнти за формулою

$$\beta_j = \frac{1}{h}\sum_{l=1}^{h} M_0^{lj}, \qquad (7.25)$$

де $M_0^{(lj)}$ – мода розподілу, l_j – значення j-го критерію, встановленого l-м експертом.

7.3.4. *Визначення вагових коефіцієнтів часткових критеріїв на основі експертних суджень*

Інший метод можна запропонувати у випадку, якщо експертам невідомі статистичні дані, а є лише досвід створення систем-аналогів, інтуїція і знання теорії проектування. В такому разі експерт передбачає мінімальне та максимальне значення часткового критерію та виражає свою впевненість у тому чи іншому його значенні за допомогою ФН [13], яка, в загальному випадку, має трапецієподібний вид (B на рис. 7.8).

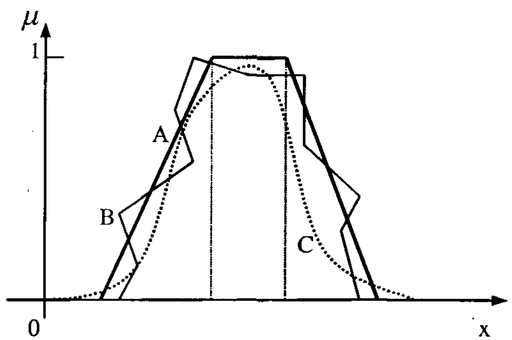


Рис. 7.8. Функція належності

Вважаючи, що експерт може висловити прогноз для досить великої кількості значень критерію, ломану лінію можна згладити дзвоноподібною функцією (C на рис. 7.8), яку легко

ідентифікувати, але в практичних обчисленнях краще використовувати трапецію (A на рис. 7.8), оскільки її параметри вже формалізовані [13, 16] і можуть бути вказані експертами безпосередньо. Кожний експерт для кожного критерію будує свою функцію належності $\mu_l^j(x)$. Якщо $\exists l \in \{1,2,...,h\}$, що

$$\mathrm{supp}(\mu_l^j(x)) \bigcap (\bigcup_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{h} \mathrm{supp}(\mu_i^j(x))) = \varnothing, \qquad (7.26)$$

де $\mathrm{supp}\, f(x)$ – носій функції $f(x)$, то l-й експерт, або всі інші є некомпетентними і експерта потрібно вилучити, або j-й критерій не враховувати при формуванні інтегрального критерію. У випадку, якщо

$$\bigcap_{l=1}^{h} \mathrm{supp}\, \mu_l^j(x) \neq \varnothing \qquad (7.27)$$

метод мінімізації ризику визначення невірного вагового коефіцієнта для j-го критерію полягає у визначенні області Ω із розв'язку задачі

$$\max_{\Omega} \bigcap_{l=1}^{h} (\mathrm{supp}\, \mu_l^j \bigcap \Omega) \neq \varnothing. \qquad (7.28)$$

Тоді в цій області знайдемо функцію

$$\mu_j(x) = \frac{1}{h}\sum_{l=1}^{h} \mu_l^j(x | x \in \Omega). \qquad (7.29)$$

За побудовою $\mu_j(x)$ є неперервною в Ω і має максимальне значення $\mu_{j_{\max}}(x)$. Точка, в якій це значення досягається, є значенням β_j. Якщо така точка не єдина, то необхідно або провести додаткові дослідження, або покласти

$$\beta_j = \min_x \mu_{j_{\max}}(x). \qquad (7.30)$$

Евристика **Е7.3.** Порогове значення між непереконливою та переконливою впевненостями вважаємо рівним 0,66.

У випадку непереконливої впевненості у значенні β_j, розрахованому за (7.30) ($M = \mu_{j_{\max}}(x) < 0{,}66$), рекомендується ваговим коефіцієнтом вважати $M\beta_j$.

7.3.5. *Схема формування інтегрального критерію для оцінки об'єктів*

Використовуючи композицію детермінованого і ймовірнісного підходів, а також методів теорії невизначеності, можна одержати інтегральний критерій, в якому будуть враховані статистичні дані (минуле), параметри та характеристики реального стану предметної області (теперішнє) та результати прогнозування (майбутнє) з урахуванням суб'єктивного відношення ОПР (рис. 7.9).

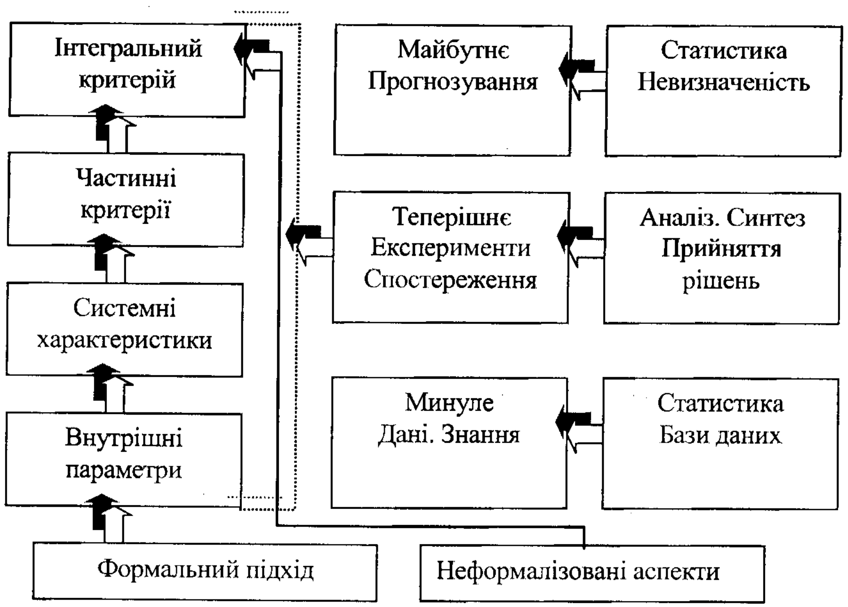


Рис. 7.9. Формування інтегрального критерію

Процес формування інтегрального критерію здійснюється на перетині предметних областей штучного інтелекту, статистики і теорії баз даних, який позначають як KDD (knowledge discovery in databases – виявлення знань в базах даних). Технологія data mining (добування знань із даних), на сьогоднішній день робить в Україні перші кроки, що викликано значною залежністю економічного росту від політичної волі та окремих особистостей, зміни законодавства та інших обставин. Це зменшує сегменти, де могла б бути використана така технологія, оскільки правила та алгоритми, за якими вона функціонує, виявляються нездатними до швидкої адаптації.

Сформований інтегральний критерій, який утворюється із простої комбінації частинних є зручним засобом для оцінки проектних варіантів. Але виявити складні залежності, використовуючи формалізовані процедури, дуже часто виявляється неможливо. Крім того існує багато умовностей, за яких працює той чи інший метод. Так, при формуванні інтегрального критерію необхідно відповідати на такі питання:

1. Якщо вагові коефіцієнти визначаються з використанням статистичних даних, то як позбутися проблеми, що викликана композицією мультиколінеарності, автокореляції та гетероскедастичності?
2. Як вибрати найкращий варіант, якщо інтегральний критерій є нелінійною, а найчастіше поліекстремальною функцією?
3. Якщо в інтегральний критерій включено надлишкову кількість членів, то чи не викличе це помилкового визначення оптимуму критерію, де домінуючим є надлишковий критерій?
4. Як співставити виміряні значення експериментальних характеристик з суб'єктивними судженнями експертів та ОПР?

Таким чином, при формуванні інтегрального критерію системному аналітику необхідно враховувати існування взаємопов'язаних але різнопланових систем, цілі яких не завжди співпадають, а також наявність завад, помилок вимірювань та інших випадкових факторів. Коригування суб'єктивних суджень потрібно здійснювати, використовуючи неформалізовані процедури ПР.

7.4. Моделі процесу прийняття адаптивних рішень композиційної структури з детермінованими і ймовірнісними характеристиками

На початкових етапах створення складних технічних систем невизначеність вибору з варіантів проектних рішень обумовлюються об'єктивними і суб'єктивними чинниками. До об'єктивних факторів належать неповнота множини початкових даних, відсутність кваліфікованих фахівців і обмежень, які встановлюються зовнішнім середовищем. Суб'єктивні фактори визначаються досвідом і інтуїцією експертів, їх відношенням і особистою зацікавленістю у варіантах вибору. Аналітичними методами визначити вплив таких причин на кінцевий вибір проектного рішення неможливо. Разом із тим, використовуючи апарат теорії нейромереж і методи теорії нечітких множин, таку невизначеність можна зменшити, що дасть можливість ОПР коригувати і уточнювати експертні висновки.

Складна система, яка проектується, реалізує перетворення

$$F: X \to Y, \tag{7.31}$$

де X - вхідні параметри, Y - вихідні характеристики. Доцільність створення системи переважно визначається існуючою необхідністю і її майбутньою ефективністю. Відомо, що критерій ефективності є функцією задач, які розв'язуються системою, стратегій управління розподілом ресурсів і сукупністю процедур, які реалізовані в системі [25]. Кожна з цих компонент безпосередньо впливає на результуючі показники. В умовах апріорної невизначеності експерти висувають припущення про їх значення. Одержують матрицю $A=(a_{ij})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{m}$, де елементи a_{ij} - є припущеннями j-го експерта про значення i-ї характеристики, $y_i \in Y$. Враховуючи схильність експертів до заниження або завищення значень окремих характеристик, необхідно отримати вектор A^{*}, елементи якого є уточненими значеннями характеристик Y. Розв'язання задачі уточнення експертних оцінок запропоновано в [38].

7.4.1. *Процедура адаптивного коригування експертних оцінок*

Глобальна ціль Z створення системи декомпозується по рівнях на підцілі, на виході останнього рівня знаходяться результуючі характеристики системи (рис. 7.10). Значення вихідних характеристик на момент вибору проектних варіантів є такими (рис. 7. 11):

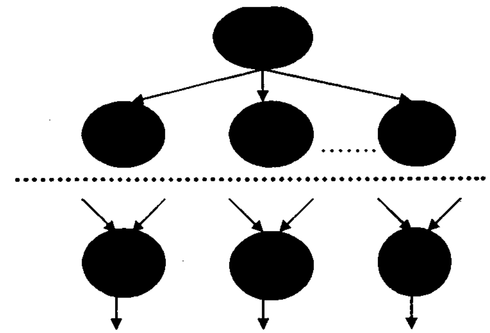


Рис. 7.10. Структура системи цілей

1. Детермінованими, які приймають лише одне значення.

2. Невідомими, але з відомим розподілом ймовірностей у вигляді ряду розподілу для дискретного набору значень і функцією щільності розподілу для неперервних.

3. Невідомими, не ймовірнісного характеру, але з урахуванням можливості побудови ФН [13].

Розглянемо перший випадок. Нехай ОПР має точні значення деяких вихідних характеристик, які називатимемо навчальною послідовністю, і не знає точних значень характеристик контрольної послідовності. Зробимо також припущення, що вектор вихідних характеристик можна розділити на два вектори однакової розмірності: Y_p і Y_f, де Y_p - вектор характеристик, які сприяють досягненню системою цілі Z, Y_f - вектор характеристик, зростання значень яких протидіє досягненню Z. Очевидно, що експерт, який зацікавлений у виборі кращого варіанту проектування, прагнутиме збільшення значення характеристик Y_p і зменшення значення Y_f. І навпаки діятиме незацікавлений експерт.

Вважатимемо, що в навчальній послідовності є інформація про n характеристик від m експертів. ОПР надає кожному припущенню експерта про значення характеристики деякий коефіцієнт γ_{ij}, $i=1,...,n$, $j=1,...,m$, який обчислюється за формулою

$$\gamma_{ij} = a_{ij} / T_i, \tag{7.32}$$

де T_i – відоме значення, $y_i \in Y$. Розглянувши стовпчики коефіцієнтів γ_{ij}, які відповідають кожному експерту, реалізуємо такий алгоритм:

Крок 1. Знаходимо $\min\limits_i \gamma_{ij}$ і $\max\limits_i \gamma_{ij}$, $j=1,...,m$.

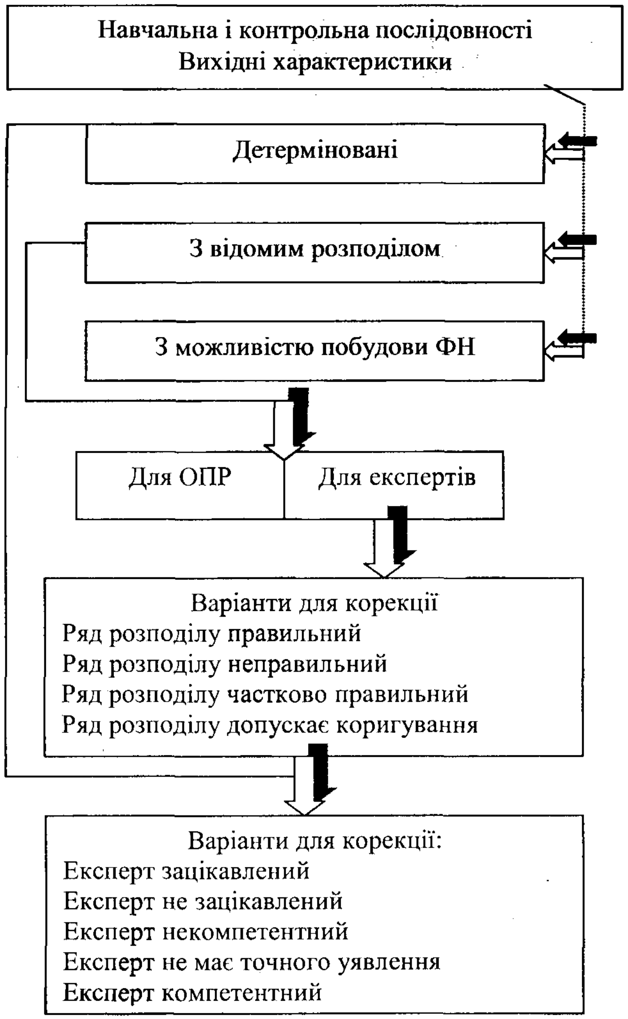


Рис. 7.11. Дані для адаптації

Крок 2. Аналізуючи значення $d_i = \max\limits_i \gamma_{ij} - \min\limits_i \gamma_{ij}$, $j=1,...,m$, розділимо на h_i проміжків інтервал $[\min\limits_i \gamma_{ij}; \max\limits_i \gamma_{ij}]$ і побудуємо багатокутник розподілу (деякі можливі варіанти наведені на рис 7.12–7.15). Якщо він має піки близько до $\max\limits_i \gamma_{ij}$ і $\min\limits_i \gamma_{ij}$, а в інтервал $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, де ε – достатньо мале число, потрапляє незначна кількість точок (рис. 7.12), то це свідчить про значну зацікавленість або незацікавленість експерта у виборі вказаного варіанту. У разі значної зацікавленості експерта всі значення характеристик $y_i \in Y_p$ необхідно множити на $\delta_{ij} = \frac{2}{n}\sum\limits_{\gamma_{ij}<1} \gamma_{ij}$, а всі значення характеристик $y_i \in Y_f$ – на $\delta_{ij} = \frac{2}{n}\sum\limits_{\gamma_{ij}\geq 1} \gamma_{ij}$, що дасть можливість нівелювати суб'єктивні впливи при ПР.

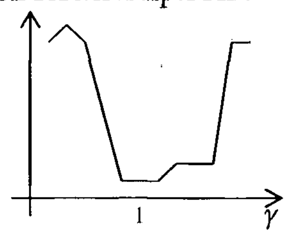


Рис. 7.12

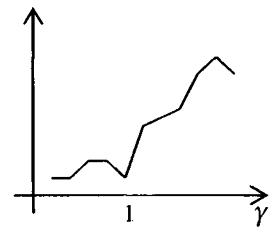


Рис. 7.13

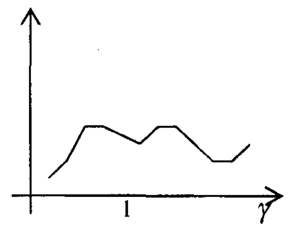


Рис. 7.14

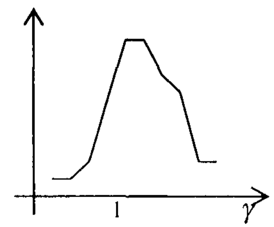


Рис. 7.15

Якщо багатокутник розподілу має лівосторонній або правосторонній пік (рис. 7.13), то це свідчить про байдужість і некомпетентність експерта і раціонально його виключити з команди експертів взагалі.

Якщо багатокутник піків не має (рис. 7.14), і нагадує трапецію з майже однаковими по довжині основами і центром нижньої основи в точці $\gamma = 1$, то експерт не має точного уявлення про значення характеристик і розв'язком цієї задачі з мінімальним ризиком є добуток значень характеристик на $\delta_{ij} = \frac{1}{n}\sum_i \gamma_{ij}$ для i-го експерта.

Якщо багатокутник розподілу має виражений пік над $\gamma = 1$ (рис. 7.15), то це свідчить про компетентного експерта, для якого необхідно покласти $\delta_{ij} = \gamma_{ij}$.

Усі інші випадки зводяться до попередніх.

7.4.2. *Нейромережний підхід до визначення експертних оцінок*

Для того, щоб уникнути численних перерахунків при необхідності аналізу, прогнозування та уточнення нових характеристик, достатньо навчити нейромережу, використовуючи ретроспективну інформацію, і використовувати її надалі. Вважаючи, що некомпетентних експертів немає, навчальну послідовність для нейромережі представляють дані табл. 7.2.

Таблиця 7.2. **Початкові дані для навчання нейромереж**

b_{11}	b_{12}	...	b_{1m}	δ_{11}	δ_{12}	...	δ_{1m}
b_{21}	b_{22}	...	b_{2m}	δ_{21}	δ_{22}	...	δ_{2m}
...	...	...	...	...	...	...	...
b_{n1}	b_{n2}	...	b_{nm}	δ_{n1}	δ_{n2}	...	δ_{nm}

Значення b_{ij} обчислюємо за такою формулою:

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} - \min_i a_{ij}}{\max_i a_{ij} - \min_i a_{ij}}, \quad i = 1,\dots,n, \; j = 1,\dots,m. \tag{7.33}$$

Після процесу навчання задаємо значення $b_{n+1\,j}$ і одержуємо $\delta_{n+1\,j}$, $j = 1,\dots,m$, далі ОПР розраховує реальні значення $(n+1)$-ї характеристики, знаючи початкові дані експертів і їх коефіцієнти.

Процедуру прийняття рішень ОПР не розглядаємо.

За даними табл. 7.2 навчаємо нейромережу за допомогою АЗПП (back propagation) [52, 58]. Мережа має структуру, представлену на рис. 7.16, вхідний і вихідний шари мають по m нейронів. Для обчислення кількості нейронів прихованого шару використовуємо таку оцінку [52]:

$$\frac{N_y N_p}{1 + \log_2(N_p)} \le N_w \le N_y\left(\frac{N_p}{N_x} + 1\right)(N_x + N_y + 1) + N_y, \tag{7.34}$$

де N_w – кількість синаптичних вагових коефіцієнтів, N_x – розмірність вхідного сигналу, N_p – кількість елементів навчальної послідовності, N_y – розмірність вихідного сигналу. Тоді кількість нейронів прихованого шару розраховуємо за наступною формулою:

$$N = \frac{N_w}{N_x + N_y}. \tag{7.35}$$

У нашому випадку $N_y = N_x = m$. Якщо припустити, що кількість експертів 10, а кількість елементів навчальної послідовності 40, то кількість таких нейронів належатиме інтервалу $N \in (3;53)$. Такий великий діапазон значень викликаний тим, що (7.34) є лише оцінкою, а не виразом для точних обчислень.

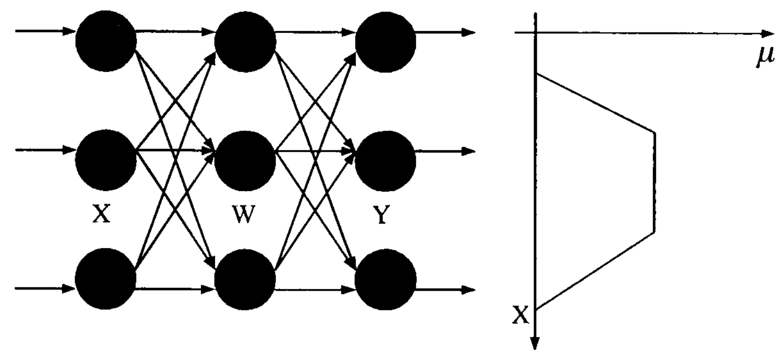


Рис. 7.16. Структура нейронної мережі

7.4.3. Коригування експертних оцінок за умови відомої ретроспективи

Якщо вважати, що системи-аналоги в світі існують і є доступ до інформації про їх функціонування, або є інші системи з аналогічними характеристиками, то можна стверджувати, що ряди розподілу значень кожної дискретної характеристики (за умов достатньої кількості ретроспективних даних, використання закону великих чисел та критеріїв перевірки статистичних гіпотез) є відомими. Можливими будуть дві ситуації: а) ряди розподілів відомі лише для ОПР, але експертам відома множина можливих значень характеристик; б) ряди розподілу для експертів відомі.

Нехай задано матрицю D, де d_{ij}^z – j-е значення i-ї характеристики, $d_{ij}^p = P\{y_i = d_{ij}^z\}$, k – кількість значень характеристики, яка має найбільшу кількість значень, $\sum_j d_{ij}^p = 1,\ \forall i \in \{1,...,n\}$,

$$D = \begin{pmatrix} d_{11}^z & d_{12}^z & \dots & d_{1k}^z \\ d_{11}^p & d_{12}^p & \dots & d_{1k}^p \\ d_{21}^z & d_{22}^z & \dots & d_{2k}^z \\ d_{21}^p & d_{22}^p & \dots & d_{2k}^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}^z & d_{n2}^z & \dots & d_{nk}^z \\ d_{n1}^p & d_{n2}^p & \dots & d_{nk}^p \end{pmatrix}.$$

Якщо характеристика має кількість значень менше ніж k, то в матриці на місцях, які відповідають неіснуючим значенням і ймовірностям, будуть нулі. Для кожної характерристики знайдемо математичне сподівання її значень $My_i,\ i = 1,...,n$, по матриці D:

$$My_i = \sum_{j=1}^{k} d_{ij}^z d_{ij}^p. \qquad (7.36)$$

Сформуємо матрицю

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} - My_1 & a_{12} - My_1 & \dots & a_{1m} - My_1 \\ a_{21} - My_2 & a_{22} - My_2 & \dots & a_{2m} - My_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - My_n & a_{n2} - My_n & \dots & a_{nm} - My_n \end{pmatrix}$$

і відповідний вектор $P = (p_1, p_2, ..., p_m)$, де

$$p_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (a_{ij} - My_i),\ j = 1,...,m. \qquad (7.37)$$

Контрольний набір значень $a_{n+1,1}, a_{n+1,2}, ..., a_{n+1,m}$ коригуємо на величину p_j і знаходимо середнє арифметичне. Це і буде оптимальне прогнозоване значення $(n+1)$-ї характеристики за критерієм мінімізації ризику помилки.

Якщо ряди розподілу відомі експертам, то вони можуть вибрати одну із таких ліній поведінки: а) повністю погодитися з ними і вибрати значення характеристик, які мають найбільшу ймовірність; б) вважати, що кожний ряд розподілу з тих або інших причин є неправильним і вибрати такі значення характеристик, які мають найменшу ймовірність; в) частково погоджуватися, частково ні, вибираючи характеристики з найбільшою і найменшою ймовірностями; г) допускати коригування в рядах розподілу, яке не матиме змістовного впливу на загальну картину, тобто вибирати значення характеристик з не екстремальною ймовірністю.

Будемо вважати, що відомі ряди розподілу достатньо повно і точно відображають світовий досвід в створенні аналогічних систем. Початкові дані представлені значеннями матриць A_n і D. Використовуючи ряди розподілу значень кожної характеристики, підрахуємо її ентропію

$$H_i^h = -\sum_{j=1}^{k} d_{ij}^p \log d_{ij}^p. \qquad (7.38)$$

Припускаємо, що експерти в своїх судженнях незалежні один від іншого і що рівноймовірних значень як і однозначних характеристик немає, оскільки такі випадки заслуговують на додаткове вивчення. Тобто

$$H_i^h \in (\varepsilon_1, \log k - \varepsilon_2),\ i = 1,...,n,$$

де ε_1 і ε_2 – деякі достатньо малі додатні числа, $\log k$ – максимальне значення ентропії, що відповідає характеристиці з рівноймовірними значеннями.

У першому випадку для кожної характеристики знайдемо значення

$$p_{i\max} = \max\{d_{ij}^p,\ j=1,\dots,k\},\ i=1,\dots,n. \tag{7.39}$$

Тоді мінімальна ентропія вибору значень характеристик відповідатиме умові

$$\sum_{i=1}^{n} \max\{d_{ij}^p,\ j=1,\dots,k\} = \sum_{i=1}^{n} p_{i\max}. \tag{7.40}$$

Якщо експерти вибрали максимально ймовірні значення характеристик, причому сума $\sum_{i=1}^{n} \max\{d_{ij}^p,\ j=1,\dots,k\}$ є значно більшою від будь-якої іншої суми, в яку входять по одному елементу з ймовірностей значень кожної характеристики, то це свідчить про існування домінуючого набору значень і експерти з таким варіантом повністю згодні. У разі існування незначної розбіжності між максимальною сумою і іншими (хоча б однією), можна зробити висновок про переважний вплив статистичної інформації над знаннями і досвідом експерта. Для контрольної послідовності достатньо узяти середнє значення варіантів, запропонованих експертами.

Відомо [40], що характеристики системи залежно від положення їх оптимуму, можна розділити на три класи:

– характеристики, які повинні мати точно задане значення (A);

– характеристики, значення яких мають потрапити у вказану область (B);

– характеристики, значення яких мають бути більшими або меншими від деякого наперед заданого значення (C) (рис. 7.17).

Функція μ вказує на міру належності точки з множини Ω області оптимуму. Заштрихована частина під графіком вказує на область не оптимальних, але допустимих значень.

Розглянемо третій випадок, причому зробимо припущення, що значення характеристик системи з вектора Y_p мають

збільшуватися, а з вектора Y_f – зменшуватися для вибору оптимального варіанту. Тоді j-й експерт, для якого значення

$$d_{ij}^p \chi\{y_i \in Y_p\} + \frac{1}{d_{ij}^p \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_{ij}^p}} \chi\{y_i \in Y_f\},\ j=1,\dots,m, \tag{7.41}$$

є мінімальним, має бути вилучений із команди, оскільки його відповіді прямо суперечать вибору кращих варіантів.

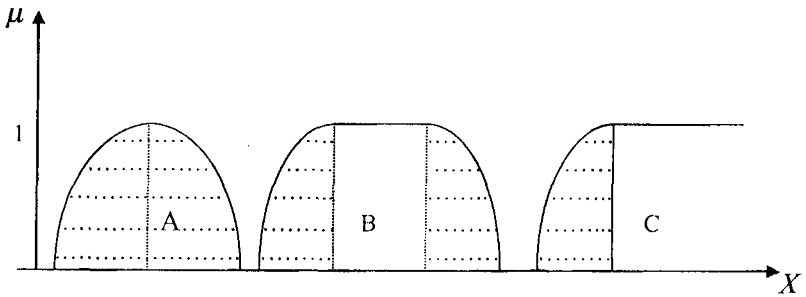


Рис. 7.17. Критерії оптимуму

Якщо експерт частково погоджується з даними ряду розподілу, частково – ні (для деяких характеристик вибирає найімовірніші значення, для деяких – інші), то для коригування значень контрольних характеристик знову необхідно використовувати нейромережі. При цьому вважатимемо, що експерт вказує на значення характеристик тенденційно і жодним чином не випадково. Тоді на вході нейромережі буде матриця B з елементами, отриманими за формулою (7.32), а також вектор, компоненти якого рівні одиниці, якщо характеристика належить Y_p, і нулю, якщо – Y_f. На виході маємо матрицю Z, елементи якої визначаємо так:

$$z_{ij} = d_{ij}^* - b_{ij}, \tag{7.42}$$

де $d_{ij}^* = \{d_{ij}^z \mid d_{ij}^p = \max_j d_{ij}^p\}$, $i=1,\dots,n$. Тоді структура матриці даних для навчання нейромережі буде такою (табл. 7.3).

Таблиця 7.3. **Початкові дані для навчання нейромережі**

Вхід					Вихід			
b_{11}	b_{12}	...	b_{1m}	1	z_{11}	z_{12}	...	z_{1m}
b_{21}	b_{22}	...	b_{2m}	0	z_{21}	z_{22}	...	z_{2m}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
b_{n1}	b_{n2}	...	b_{nm}	1	z_{n1}	z_{n2}	...	z_{nm}

Виконавши нормування даних значень контрольної характеристики $a_{n+1\,j}$, $j=1,...,m$, подаємо їх на вхід нейромережі, вказавши, якою є ця характеристика (позитивною або негативною). На виході отримаємо значення $z_{n+1\,j}$, $j=1,...,m$. Відкоригуємо кожний елемент $a_{n+1\,j}$ на величину $z_{n+1\,j}$ і знайдемо їх середнє значення, яке і вважатимемо значенням $(n+1)$-ї характеристики, тобто

$$y_{n+1}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(a_{n+1\,j}+z_{n+1\,j}). \qquad (7.43)$$

Випадок, коли експерт вказує на значення характеристик, що мають не екстремальну ймовірність, заслуговує на окреме вивчення, оскільки тоді експерт, напевно, враховує не лише значення окремих характеристик, але і взаємозв'язки між ними, що вимагає дослідження розподілу умовних ймовірностей та інших показників (наприклад, коефіцієнта кореляції).

Сучасний нестійкий економічний стан здійснює значний вплив на поведінку суб'єктів господарської діяльності різних форм власності, що часто призводить до появи необгрунтованих рішень, які начебто базуються на точних розрахунках і експертних висновках. При цьому не враховується фактор зміщеності, який базується на суб'єктивізмі суджень експертів. Для того, щоб уникнути неправильних рішень, ОПР має коригувати і адаптувати свої висновки до персонального складу експертних комісій і стану зовнішнього середовища. Запропоновані моделі, які базуються на комбінації традиційних методів і методів теорії нейромереж, вказують на один із шляхів до подолання цієї проблеми. Метод нівелювання суб'єктивних переваг, що визначаються різними чинниками, дозволяє знаходити близькі до оптимальних рішення.

7.5. Еволюційна кластеризація складних об'єктів, процесів та систем

Процес поступального руху до створення інформаційного суспільства супроводжують проблеми, пов'язані із зберіганням і обробкою великих масивів даних. Їх вирішення пов'язано з інтелектуальним аналізом даних, технології якого формуються на перетині штучного інтелекту, статистики, теорії баз даних. До них належать KDD (knowledge discovery in databases) – виявлення знань в базах даних, data mining ("розкопка даних"), OLAP (Online analytical processing) – „добування" інформації з багатовимірних баз даних та інші. Елементи вказаних технологій стають невід'ємною частиною електронних сховищ даних (Warehouses). Значну частину інформації складають дані, що є соціально-економічними показниками функціонування складних систем.

Великим масивам інформації властива присутність шумових ефектів, їх обробка призводить до накопичення сукупної помилки. Для подолання вказаної проблеми необхідно встановлювати значущі фактори і здійснювати їх аналіз. Зменшення інформаційної ентропії може бути також досягнуто шляхом групування об'єктів і добування знань в менших і функціонально зв'язаних сукупностях. Такі процедури направлені на послідовне подолання невизначеності. Першим його кроком є розв'язання задачі кластеризації.

Задача кластеризації полягає у визначенні груп об'єктів (процесів), які є найближчими один до одного за деяким критерієм. При цьому ніяких припущень про їх структуру, як правило, не робиться [24, 47]. Більшість методів кластеризації базується на аналізі матриці коефіцієнтів схожості, якими є відстань, спряженість, кореляція та інші. Якщо критерієм або метрикою виступає відстань, то кластером називають групу точок Ω, таку, що середній квадрат внутрішньогрупової відстані до центру групи є меншим від середньої відстані до загального центру в початковому наборі об'єктів (можливим є і використання інших метрик, декілька з яких наведено в розділі 1), тобто $\overline{d}_\Omega^2<\sigma^2$, де $\overline{d}_\Omega^2=\frac{1}{N}\sum_{X_i\in\Omega}(X_i-\overline{X}_\Omega)^2$, $\overline{X}_\Omega=\frac{1}{N}\sum_{X_i\in\Omega}X_i$.

Розв'язання задачі мінімізації відстані між об'єктами рівносильне розв'язанню задачі мінімізації відстані до об'єкту, що має усереднені характеристики, оскільки, наприклад, для відстані Хемінга

$$\sum_{\substack{j=1\\k<l}}^{m}\left|X_{kj}-X_{lj}\right|=\sum_{\substack{j=1\\k<l}}^{m}\left|X_{kj}-\overline{X}+\overline{X}+X_{lj}\right|\le\sum_{\substack{j=1\\k<l}}^{m}\left|X_{kj}-\overline{X}\right|+$$
$$+\sum_{\substack{j=1\\k<l}}^{m}\left|X_{lj}-\overline{X}\right|\le\sum_{j=1}^{m}\left|X_{kj}-\overline{X}\right|+\sum_{j=1}^{m}\left|X_{lj}-\overline{X}\right|=2\sum_{j=1}^{m}\left|X_{kj}-\overline{X}\right|.$$

Задачу кластеризації супроводжують дві проблеми: визначення оптимальної кількості кластерів і розрахунок їх центрів. Початковими даними для задачі кластеризації є значення параметрів об'єктів дослідження. Будемо вважати, що визначення оптимальної кількості кластерів є прерогативою дослідника. Припустимо, що число кластерів K задано і $K << m$, де m - кількість об'єктів. Отримаємо задачу

$$\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{m_i}\left\|X_{ij}-\overline{X}_i\right\|\to\min, \tag{7.44}$$

де $\overline{X}_i, i=1,...,K$ - середнє значення в кластері, $\left\|X_{ij}-\overline{X}_i\right\|$ - відстань між об'єктами. Розв'язком задачі (7.44) є центри кластерів $\overline{X}_i$, які можуть міститися серед даних об'єктів, що є достатньо строгою умовою, і можуть бути представлені будь-якими точками області дослідження.

До традиційних методів кластерного аналізу відносять [35]
- деревовидну кластеризацію;
- двохвходове об'єднання;
- метод K -середніх;
- метод дендритів;
- метод кореляційних плеяд;
- метод куль.

Перевагами зазначених методів є простота, інваріантність їх техніки до характеру початкових даних і метрик, що використовуються. До недоліків відносять слабку формалізованість, що утруднює застосування обчислювальної техніки, а також низьку точність, наслідком чого є попередні оцінки структури простору факторів і їх інформативності. Ще одним методом

розв'язання задачі кластеризації є застосування самоорганізуючої карти Кохонена [51]. Проблемою використання такої нейромережі є вибір початкових вагових коефіцієнтів, неперервний характер функціонування і ефективність, оцінка якої залишається проблематичною.

Як альтернативний метод, пропонується використовувати ГА - некласичний метод розв'язання задачі оптимізації. Перші варіанти ГА і розгляд аспектів його застосування з'явилися в роботах [44–46, 49, 50]. Подальші дослідження показали його ефективність у вирішенні інженерних, економічних, екологічних та інших проблем. Головною ідеєю, що лежить в основі побудови ГА, є використання ідей природного відбору, селекції і мутацій. Його канонічний варіант наведено у параграфі 2.7.

Розглянемо алгоритм формування фітнес-функції задачі кластеризації [54]. Початковими даними задачі кластеризації є значення факторів (табл. 7.4). Заздалегідь, виконаємо їх нормування, наприклад, за формулою $x'_{ij}=\dfrac{x_{ij}-x_{j\min}}{x_{j\max}-x_{j\min}}$.

Таблиця 7.4. **Значення факторів дослідження**

№ п/п	X_1	X_2	...	X_n
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}
...	...	...	...	...
m	x_{m1}	x_{m2}		x_{mn}

Внаслідок такого перетворення значення всіх факторів лежатимуть в одиничному гіперкубі $[0,1]^n$. Фітнес-функція реалізується за наступним алгоритмом (EvoClast):

Крок 1. Значення фітнес-функції покладається рівним нулю ($F=0$.)

Крок 2. Задається кількість кластерів K і вказується значення m.

Крок 3. Виконується ініціалізація матриці належності елементів до кластерів T_k.

Крок 4. Для всіх об'єктів виконуються наступні кроки. Нехай $n=1$.

Крок 5. Обчислюється відстань від n-го об'єкта до центрів усіх K кластерів, які є індивідами з вибіркової популяції.

Крок 6. Серед усіх відстаней d_j, $j=\overline{1,K}$, вибирається мінімальна d_q і відноситься n-й об'єкт до q-го кластера. Вноситься відповідний запис в матрицю T_k.

Крок 7. $F=F+d_q$, $n=n+1$.

Крок 8. Якщо кроки 5–7 виконані для всіх об'єктів, то отримано значення фітнес-функції F, в іншому випадку здійснюється перехід на крок 5.

Очевидно, що алгоритм отримання фітнес-функції можна оптимізувати і можливість оптимізації є його внутрішньою властивістю. Різноманіття варіантів операцій ГА представляє множину зовнішніх властивостей процесу отримання фітнес-функції. Можливість розв'язання задачі її оптимізації також допускає бінарне і десяткове представлення початкових даних. І якщо в першому випадку в процедурах ГА домінуючим є рівномірний розподіл, то в другому – при пошуку оптимального розв'язку перевага надається значенням, що мають нормальний розподіл з математичним сподіванням, яке співпадає з центром кластера. Визначення оптимальної дисперсії – ще одна задача, яка залишається нерозв'язаною.

Запропонований метод еволюційного моделювання, що базується на використанні ГА, ефективно функціонує при обробці масивів великої розмірності [53], оскільки в ньому оптимально поєднуються цілеспрямований пошук і елементи випадковості, направлені на вибивання цільової функції (ЦФ) з локальних мінімумів. Ніяких попередніх умов для його використовування не вимагається. Головною умовою оптимізації обчислень є правильна алгоритмізація розрахунку значень ЦФ. Багатовекторність процесу оптимізації швидкості алгоритму (для ГА особливо актуально) і його точності (пошуку глобального мінімуму фітнес-функції), а також його затребуваність свідчать про необхідність розв'язання задачі оптимізації запропонованого методу.

7.6. Еволюційний метод відновлення пропусків в даних

Проблема обробки і відновлення пропущених значень в даних властива багатьом практичним задачам. Найчастіше вона виникає при ідентифікації залежності, апріорна інформація про значення параметрів якої є неповною. Об'єктивними причинами цього є несправності устаткування при вимірюванні значень технічних характеристик процесів, втрата ретроспективної інформації, екстремальний характер функціонування, обмежений доступ та інші. Суб'єктивні причини вказують на неможливість отримання повної і точної інформації внаслідок впливу психологічних аспектів і особливостей людської пам'яті.

Адекватна аналітична обробка інформації з пропусками ускладнюється через неможливість побудови адекватних математичних моделей і їх використання для прогнозування і розв'язання супутніх задач.

Найпоширеніші методи обробки неповної інформації в таблицях даних наведено в параграфі 2.4 цієї монографії.

Узагальнюючи результати аналізу розглянутих методів, робимо висновок про їх низьку точність, жорсткі вимоги до початкової інформації, кількості пропусків, розмірності матриці даних, апріорних припущень про існуючу залежність, складність реалізації. Такі фактори вказують на необхідність розробки технологій, що базуються на нових парадигмах. Розглянемо метод, який поєднує переваги нейромережі для розв'язання задачі ідентифікації і ГА – для задач оптимізації.

7.6.1. *Постановка задачі відновлення даних*

У загальній постановці задача відновлення пропусків таблицях даних є такою. Нехай $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ – вектор вхідних факторів, $Y=(Y_1,Y_2,...,Y_m)$ – вектор результуючих характеристик, p – кількість експериментів або періодів ретроспективи, $A=(a_{ij})_{i=1}^{p}{}_{j=1}^{n+m}$ – матриця початкової інформації. Матриця A має пропуски, позначені зірочками (табл. 7.6).

Задача відновлення пропусків в даних полягає в знаходженні

$$\arg\min_{D}\left\|Y-F(X)\right\|, \qquad (7.45)$$

де $\|\cdot\|$ – норма, D – вектор пропусків, $F=(F_1,F_2,...,F_m)$ і $Y=(Y_1,Y_2,\ldots,Y_m)$ – вектори значень, отримані за ідентифікованою залежністю

$$\hat{Y}_i = F_i(X_1, X_2,..., X_n),\ i=1,...,m, \qquad (7.46)$$

і наведені в табл. 7.6 відповідно. Задачу (7.46) перепишемо у вигляді

$$\arg\min_{D}\frac{1}{pm}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{m}(Y_{ij}-F_j(X_1^i,X_2^i,...,X_n^i))^2 \qquad (7.47)$$

або

$$\arg\min_{D}\frac{1}{pm}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{m}(\hat{a}_{i,j+n}-a_{i,j+n}))^2. \qquad (7.48)$$

Якщо припустити, що залежність (7.46) є лінійною, тобто

$$\hat{Y}_i=b_{i0}+b_{i1}X_1+b_{i2}X_2+...+b_{in}X_n, \qquad (7.49)$$

то задача відновлення пропусків полягає в знаходженні

$$\arg\min_{D}\|Y-BX\|, \qquad (7.50)$$

де $Y=(a_{ij})_{i=1\,j=n+1}^{p\ \ n+m}$, $B=(b_{ij})_{i=1\,j=0}^{m\ \ n}$, $X=(a_{ij})_{i=1\,j=1}^{p\ \ n}$.

Таблиця 7.6. **Структура початкової інформації**

	X_1	X_2	X_3	...	X_{n-1}	X_n	Y_1	Y_2	...	Y_m
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	*	a_{1n}	a_{1n+1}	a_{1n+2}	...	a_{1n+m}
2	a_{21}	a_{22}	*	...	a_{2n-1}	a_{2n}	a_{2n+1}	*	...	a_{2n+m}
3	a_{31}	*	a_{33}	...	a_{3n-1}	a_{3n}	a_{3n+1}	a_{3n+2}	...	*
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$p-1$	a_{p-11}	a_{p-12}	a_{p-13}	...	a_{p-1n-1}	*	a_{p-1n+1}	a_{p-1n+2}	...	a_{p-1n+m}
p	a_{p1}	a_{p2}	a_{p3}	...	a_{11}	a_{pn}	a_{pn+1}	a_{pn+2}	...	a_{pn+m}

Перший етап розв'язання задач (7.45)-(7.46), у загальному випадку, полягає в ідентифікації залежностей. Зауважимо, що в задачі відновлення пропусків в таблицях даних процедури ідентифікації і оптимізації ітеративно повторюються.

Припустимо, що пропуски є лише серед значень вхідних факторів $X=(X_1,X_2,...,X_n)$, результуюча характеристика одна і існує залежність

$$Y=F(X)=F(X_1,X_2,...,X_n). \qquad (7.51)$$

А.М. Колмогоров і В.І. Арнольд [3, 17, 18] довели теорему про те, що кожна неперервна функція яка задана на одиничному кубі n-вимірного простору, може бути представлена у вигляді

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{q=1}^{2n+1}h_q\left[\sum_{p=1}^{n}\varphi_q^p(x_p)\right],$$

де функції $h_q(u)$ неперервні, а функції $\varphi_q^p(x_p)$, крім того, ще і стандартні, тобто не залежать від вибору функції f. В термінах теорії нейромереж теорема вказує на те, що будь-яка неперервна функція ідентифікується мережею з принаймні - одним прихованим шаром нейронів з нелінійними функціями активації. При розв'язанні задачі ідентифікації (7.51) моделлю є нейромереж з пороговим АЗПП. Структура мережі і її елементний базис в експериментах залишатимуться постійними.

Оскільки вхідні образи для навчання нейромережі мають пропуски значень, то необхідно розв'язувати задачу параметричної оптимізації (7.48). Методом оптимізації є ГА.

Доцільність використання ГА базується на таких аспектах:

1. Немає інформації про властивості цільової функції, що унеможливлює використання класичних методів оптимізації.

2. Кількість параметрів, оптимальні значення яких потрібно знайти, є великою.

3. Операція мутації, яка присутня в ГА, а також використання інших допоміжних процедур, дозволяє мінімізувати ризик знаходження локального, а не глобального оптимуму, та спрямована на знаходження, щонайменше, прийнятного розв'язку.

Збіжність ГА визначається умовами теореми 2.9. Зауважимо, що використання бінарного представлення розв'язків та елітного відбору для формування нової популяції розв'язків за теоремою 2.9 вказує на збіжність генетичного алгоритму за ймовірністю. Використання інших механізмів представлення потенційних розв'язків, вибору батьків та формування нових популяцій не гарантує потрібної точності розв'язку і потребує додаткових досліджень.

Якщо використовувати бінарне представлення розв'язків та не елітний відбір для формування нової популяції розв'язків, то умови теореми 2.9 не обов'язково визначають збіжність генетичного алгоритму за ймовірністю.

7.6.2. *Алгоритм відновлення пропусків (EvoGap) серед значень вхідних факторів*

Для роботи ГА необхідно сформувати генеральну і вибіркову сукупність хромосом-розв'язків. Хромосома складається з фрагментів, які відповідають пропускам в таблиці даних:

$$Xr =< пропуск 1, пропуск 2, ..., пропуск K >.$$

Дані табл. 7.6 без врахування пропущених значень нормуємо. Якщо в якості активаційної функції буде використано гіперболічний тангенс, то нормування бажано здійснювати у відрізок [–1, 1]. Кількість хромосом в генеральній сукупності визначається заданою точністю результату, у вибірковій – дослідником.

На наступному кроці формуємо навчальну і контрольну послідовність для навчання нейромережі. Пропонується всі образи з пропусками вважати елементами навчальної послідовності. Для контрольної послідовності їх врахування є проблематичним, оскільки неможливе використовувати для верифікації недостовірні значення. Співвідношення потужності множин образів навчальної і контрольної послідовності може бути різним, на що впливає співвідношення образів з пропусками і без пропусків в початковій таблиці даних.

Алгоритм відновлення пропусків (EvoGap) буде таким:

Крок 1. Ініціалізація K хромосом-розв'язків вибіркової послідовності.

Крок 2. $K = 1$.

Крок 3. Навчання нейромережі на точках навчальної послідовності, де значення пропусків заповнені значеннями K -ї хромосоми.

При цьому розв'язується задача пошуку

$$M_K = \min_W \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{P_o}(\hat{a}_{in+1} - a_{in+1})^2,$$

де W – матриця вагових коефіцієнтів нейромережі, P_o – кількість образів в навчальній послідовності.

Крок 4. Обчислення ЦФ ГА (fitness-function):

$$G_K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{P_c}(\hat{a}_{in+1} - a_{in+1})^2,$$

де P_c – кількість образів контрольної послідовності. Якщо $G_K < G_{\min}$, то перехід до кроку 7.

Крок 5. $K = K + 1$. Якщо $K > K_{\max}$, де $K_{\max}$ – кількість елементів у вибірковій послідовності, то перехід на крок 6, в іншому випадку – перехід на крок 3.

Крок 6. Виконання процедур кроссоверу, мутації, визначення і відбір хромосом наступної епохи. Перехід до кроку 2.

Крок 7. Виведення результатів. Закінчення алгоритму.

Розроблений еволюційний метод відновлення пропусків в даних має кілька переваг. Зокрема, його використання майже не вимагає виконання обмежень на початкову інформацію. Таблиця початкових даних може мати довільну розмірність і структуру пропусків.

Перспективним напрямком є дослідження ефективності використання нейромереж з нeітеративними алгоритмами навчання. Необхідно з'ясувати вплив розподілу значень факторів на точність відновлення пропусків.

Як вже було зазначено вище, тенденція до збільшення точності ідентифікації із зростанням кількості пропусків також вимагає свого пояснення. З якою точністю можливо відновлення пропусків, якщо їх кількість складає 50 % усіх значень в таблиці даних? Яким умовам повинні задовольняти значення факторів, щоб точність результатів була максимальною? Відповіді на ці питання дозволять сформувати методику відновлення пропусків з використанням еволюційного підходу.

7.6.3. *Технології відновлення пропусків серед значень результуючої характеристики*

Припустимо, що має місце лінійна залежність
$$Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n$$
і серед $y_i, i = \overline{1, p}$, є пропущені значення. Зауважимо, що використовувати описаний вище еволюційний метод (EvoGap) для відновлення пропусків серед значень результуючої характеристики неможливо, оскільки в ЦФ використовуються відсутні значення.

Відомими методами відновлення пропусків серед значень результуючої характеристики є метод Бартлетта, методи resampling-1 і resampling-2 [39]. Використаємо їх для порівняльного аналізу отриманих результатів.

Очевидно, що при використанні ГА хромосома-розв'язок представляється як сукупність пропущених значень. При формуванні ЦФ було висунуто декілька гіпотез. Вони і результати їх перевірки наведені нижче.

Еволюційне моделювання та кореляція. У першому випадку зроблено припущення, що коефіцієнти кореляції вхідних факторів з результуючою характеристикою для значень без пропусків, повинні бути близькими до тих же коефіцієнтів, отриманих для відновлених значень. Нехай рядки з пропущеними значеннями знаходяться у верхній частині таблиці даних. Тоді A^k – матриця, яка складається з комплектних рядків, A^r – матриця з відновленими значеннями. ЦФ буде такою:

$$E(X_1, X_2, ..., X_n, Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{corr}(X_i^k, Y^k) - \mathrm{corr}(X_i^r, Y^r))^2, \qquad (7.52)$$

де $corr(X_i^k, Y^k)$ – коефіцієнти кореляції X_i і Y, $i = \overline{1, n}$. Очевидно, що розраховувати на прийнятний результат можна у тому випадку, коли передбачається наявність лінійної залежності між вхідними факторами та результуючою характеристикою.

Нейромережна апроксимація. Апроксимація невідомої залежності за допомогою нейромережі є відомим методом. Його застосування є достатньо ефективним, точність результатів визначається кількістю елементів у вибірці, архітектурою мережі і законом її функціонування. У більшості випадків ЦФ інтегрує в собі дві складові, які необхідно мінімізувати:

$$F_L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p_k}(y_i - \hat{y}_i)^2, \; F_C = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p_c}(y_i - \hat{y}_i)^2, \qquad (7.53)$$

де p_k – кількість комплектних рядків, p_c – кількість некомплектних рядків, які є одночасно елементами контрольної послідовності, $\hat{y}_i$ – значення, розраховані нейромережею.

Еволюційне моделювання та нейромережна апроксимація. Розроблений алгоритм (EvoGepNN) [38] базується на комбінації методів, що представляють дві парадигми Soft Computing: ГА та НМ з АЗПП. На макрорівні він відстежує еволюцію функціонування нейромережі, яка полягає в підборі вагових коефіцієнтів з метою мінімізації помилки апроксимації. Розглянемо алгоритм EvoGepNN.

Крок 1. $t = 0$. Ініціалізація початкової популяції рішень P_t.

Крок 2. $i = 0$.

Крок 3. Виконати навчання нейромережі для розв'язку $p_{it} \in P_t$.

Крок 4. На контрольній послідовності обчислити значення fitness-function, що є середньоквадратичною помилкою

$$Er_i^t = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{h}(y_j - \hat{y}_j)^2, \qquad (7.54)$$

де h – кількість образів у контрольній послідовності.

Крок 5. $i = i + 1$. Якщо $i < m$, де m – кількість образів у популяції, то перейти на крок 3.

Крок 6. Серед m отриманих розв'язків і m розв'язків з популяції P_t вибрати m розв'язків з мінімальним значенням fitness-function і помістити їх у популяцію P_{t+1}.

Крок 7. $t = t + 1$.

Крок 8. Якщо не виконано умову зупинки, то перейти на крок 2.

Крок 9. Закінчення алгоритму.

В алгоритмі використовують такі умови зупинки:

- досягнення заданого значення t;

– мінімальне значення середньоквадратичної помилки в популяції є меншим заданого значення.

Еволюційне моделювання, нейромережна апроксимація та кореляція. Розглянутий вище алгоритм забезпечує більш високу точність, але швидкість його збіжності як і раніше залишається низькою. Причиною цього є досить широка область пошуку розв'язку. Очевидно, що прискорити роботу алгоритму можна за рахунок оптимізації області пошуку. Для цього використовуватимемо знання коефіцієнтів кореляції. При цьому необхідно зауважити, що кореляція не повинна бути домінуючим чинником при обчисленні fitness-function, оскільки у такому разі отриманий розв'язок, як зазначено вище, буде значно зміщеним.

Алгоритм композиційної реалізації ГА, НМ і обчислення кореляції відрізняється від попереднього тим, що fitness-function на кроці 4 буде такою:

$$Er_i^t = \alpha \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (corr(X_i^k, Y^k) - corr(X_i^r, Y^r))^2 + \beta \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_j - \hat{y}_j)^2, \quad (7.55)$$

де α і β – коефіцієнти, що визначають важливість складових fitness-function.

7.7. Алгоритм побудови розмитої функції належності на неспівпадаючих терм-множинах

Відомо [32], що лінгвістична змінна визначається кортежем $\left\langle \lambda; T; D; D^{(S)}; D^{(C)} \right\rangle$, де λ – найменування лінгвістичної змінної, яка відображує деякий об'єкт, T – множина значень або термів цієї змінної, які є найменуваннями нечітких змінних, D – множина, яка є областю визначення термів, $D^{(S)}$ – синтаксична процедура, яка описує процес створення з елементів множини T нових значень лінгвістичної змінної, $D^{(C)}$ – семантична процедура, яка дозволяє приписати кожному новому значенню лінгвістичної змінної деяку семантику шляхом формування відповідної нечіткої множини.

Розглянемо випадок, коли необхідно здійснити агрегування кількох ФН типу 1 до розмитої ФН. Випадок, коли терм-

множини усіх індивідуальних функцій співпадають, є тривіальним і дозволяє легко одержати розмиту ФН. Значно складнішим є випадок, коли терм-множини заданих індивідуальних ФН не співпадають. Алгоритм побудови розмитої ФН на неспівпадаючих терм-множинах наводиться в роботі [55].

Нехай група експертів будує ФН $\mu_A^i(x)$, $i \in L$, елементів x до деякої нечіткої множини A на терм-множинах T^i, $i \in L$, лінгвістичної змінної; $L = \{1, \dots, k\}$ – множина індексів експертів і, відповідно, терм-множин, на яких будується ФН. Причому будемо вважати, що $\exists i_1, i_2 : \ i_1, i_2 \in L, \ T^{i_1} = T^{i_2}, \ i_1 \neq i_2$; $\exists i_1, i_2 : \ i_1, i_2 \in L, \ T^{i_1} \neq T^{i_2}, \ i_1 \neq i_2$. Тобто, серед терм-множин, які використовуються експертами для побудови індивідуальних ФН, існують щонайменше дві з індексами $i_1, i_2 \in L$, які не співпадають між собою. Допускається також існування таких експертних терм-множин, які повністю співпадають.

Нехай $T = \{T^i\}$, $i \in L$, – узагальнена терм-множина лінгвістичної змінної побудована з урахуванням умов, які буде розглянуто нижче; $\left\langle T^i, X, \overline{C_i} \right\rangle$ – нечітка змінна, яка відповідає терму $T^i \in T$; $\tilde{C}_i = \left\{ \left[\mu_{C_i}^H(x), \mu_{C_i}^B(x) \right], x \right\}$, $x \in X$, $0 \le \mu_{C_i}^H(x) \le$ $\le \mu_{C_i}^B(x) \le 1$; C_i – носій нечіткої множини $\tilde{C}_i$. Будемо вважати, що X належить множині дійсних чисел.

Упорядкуємо множину T з врахуванням такої вимоги:

$$\left(\forall T^i \in T\right)\left(\forall T^j \in T\right)\left((i > j) \Leftrightarrow (\exists x \in C_i)\left(\forall y \in C_j\right)(x > y)\right),$$

яка означає, що терм, який має носій, розташований лівіше, отримує менший номер. Тоді терм-множина будь-якої лінгвістичної змінної має задовольняти таким умовам:

$$(\forall \lambda)\left(\forall T^i \in T \setminus \{T_1\}\right)\left(0 < \sup_{x \in X} \mu_{C_i \cap C_{i+1}}^B(x) < 1\right). \quad (7.56)$$

Умова (7.56) забороняє існування в базовій множині T пар термів типу T_1 та T_2, T_{k-1} та T_k, оскільки в першому випадку відсутнє природне розмежування понять, які апроксимуються термами, а в другому випадку ділянці області визначення не відповідає жодне поняття.

Введемо також умови:

$$(\forall\lambda)(\forall T^i \in T)(\exists x \in X)(\mu^B_{C_i}(x)=1). \qquad (7.57)$$

Умова (7.57) вводиться тому, що кожне поняття має хоча б один об`єкт, який позначається цим поняттям.

Введемо, крім того, умови:

$$(\forall\lambda)(\forall T^i \in T)(\exists x \in X)(\mu^H_{C_i}(x)=0). \qquad (7.58)$$

Умова (7.58) означає, що для кожного терма існують об`єкти, нижня оцінка кожної ФН яких рівна 0.

Введемо, нарешті

$$(\forall\lambda)(\exists x_1, x_2)((x \in X)(x_1 < x < x_2)). \qquad (7.59)$$

Умова (7.59) обмежує область визначення X скінченою множиною точок. Ця умова констатує наявні в будь-якій ЗПР фізичні обмеження на числові значення параметрів.

Для визначення узагальненої (результуючої, групової, колективної, агрегованої) ФН $\mu^*_A(x)$ необхідно спочатку побудувати узагальнену терм-множину T цієї функції, тобто об`єднання елементів терм-множин $T^i, i \in L$. Для цього введемо кілька означень.

Масштабуванням терм-множини T називається зміна її структури шляхом зміни її лінгвістичних змінних або перестановки порядку їх слідування.

Базовою шкалою узагальненої терм-множини T називається об'єднання індивідуальних терм-множин експертів.

Інтерполяцією значень ФН $\mu^i_A(x)$, $i \in L$, називається відтворення цих значень на базовій шкалі терм-множини T у випадку, коли експерт не міг задати цих значень, оскільки відповідних лінгвістичних змінних не існувало в його терм-множині $T^i, i \in L$.

Крива, що проходить через точки $\mu^H_{C_i}(x)$, $i \in L$, значень узагальненої розмитої ФН, називається *інфінетрисою*, а крива, що проходить через точки $\mu^B_{C_i}(x)$, $i \in L$, – *супреметрисою*.

Алгоритм побудови розмитої ФН на неспівпадаючих терм-множинах, опублікований у [55], описується такою послідовністю кроків.

Крок 1. Здійснення процедури масштабування терм-множин $T^i, i \in L$, у процесі побудови узагальненої терм-множини T, якщо у цьому є необхідність.

Крок 2. Приведення усіх початкових даних до базової шкали.

Крок 3. Постановка у відповідність базовій шкалі заданих ФН $\mu^i_A(x)$, $i \in L$.

Крок 4. Інтерполяція значень ФН, яка проводиться за такими правилами: для визначення не заданої експертом інтенсивності належності елемента x_j нечіткій множині А вибирається величина $\mu(x_j) = (\mu(x_{j-1}) + \mu(x_{j+1}))/2$, якщо значення $\mu(x_{j-1})$ та $\mu(x_{j+1})$ задані або вже обчислені. Для деяких лінгвістичних змінних значення $\mu(x_j)$ може залишатися і невизначеним.

Крок 5. У випадку неспівпадання кількості терм-множин та їх значень виникає необхідність аналізу структури (кількості та назв нових елементів) об'єднаної терм-множини.

Крок 6. Побудова у випадку неспівпадання назв лінгвістичних змінних узагальненої терм-множину шляхом упорядкування індивідуальних терм-множин за лінгвістичним змістом з подальшим об'єднанням терм-множин на підставі лінгвістичного аналізу або шляхом введення додаткових змінних.

Крок 7. Побудова інфінетриси та супреметриси узагальненої розмитої ФН на основі підготовлених на попередніх кроках алгоритму даних.

7.8. Процедура визначення функції належності шляхом аналізу частотності значень

Нехай необхідно проаналізувати результати H числових оцінок чи результатів вимірювання деякої величини та визначити ФН для виміряних значень. Як правило, групування даних здійснюється за 10–20 інтервалами. При цьому кількість значень, які потрапляють до кожного інтервалу, не перевищує 15–20 % від їх загальної кількості. Цього виявляється достатньо для повного виявлення усіх властивостей величини та надійного обчислення за груповою частотністю основних характеристик нечіткої множини. У випадках, коли інтервали є малими, а кількість інтервалів перевищує 20, ФН може виявитися багатовершинною, а відображена нею інформація не буде наочним представленням нечіткої множини. Групування даних за надто великими інтервалами може призвести до втрати чіткого уявлення експерта про поведінку ФН та до грубих помилок при її застосуванні. Тому при розв'язанні зазначеної задачі слід вводити евристику.

***Евристика* Е7.4.** Для аналізу результатів вимірювання нечіткої величини при побудові ФН шляхом аналізу частотності значень слід експертним шляхом вибирати число значень ФН: $H >> N$, тобто кількість інтервалів розбиття результатів вимірювання чи оцінювання розмитої величини.

Підходи до визначення ФН та алгоритми побудови ФН на основі аналізу частотності значень наведено у роботі [10].

При *першому підході* використовується алгоритм $A1$ визначення ФН типу 1.

Крок 1. Упорядкування результатів вимірювання за зростанням значень: $x_i < x_{i+1}$ для $\forall i = 1,...,n-1$.

Крок 2. Визначення інтервалу можливих значень величини: $\Delta = x_n - x_1$.

Крок 3. Експертне визначення кількості інтервалів Q^j, $j=1,...,N$, розбиття множини можливих значень, де $3 \le N \le n/3$. Тобто введення експертом евристики Е7.4: $H << N$.

Крок 4. Розбиття інтервалу [0,1] на N рівних інтервалів довжиною $1/N$: $Q^1 = [0;1/N)$, $Q^2 = [1/N;2/N)$, $Q^N = [((N-1)/N;1]$. Установка лічильника попадання значень оцінок виміряної величини до інтервалів з індексами j, $j=1,...,N$: $u_j = 0$, $j=1,...,N$.

Крок 5. Визначення кількості значень, які потрапляють у відповідні інтервали: $u_j = u_j + 1$, якщо $y_i \in Q^j$, де $y_i = x_i / \Delta$, $i = 1,...,n$, $j = 1,...,N$.

Крок 6. Визначення максимальної кількості значень величини, які потрапляють до інтервалів $u^0 = \max_{j=1,...,Q} u_j$.

Крок 7. Застосування перетворення значень формули $u_j = u_j / u^0$, $j = 1,...,N$, яке приводить ФН до нормалізованого виду. Закінчення алгоритму побудовою ФН $\mu_j(x), j = 1,...,N$.

Описаний алгоритм побудови ФН позначимо через $A1(u^0)$.

Другий підхід дозволяє визначити інтервали зміни ФН. Для його описання слід ввести ще одну евристику.

***Евристика* Е7.5.** Експертним шляхом встановлюється значення нижньої границі кількості інтервалів L, $L < N$, для яких слід визначати частотність значень.

Наведемо алгоритм визначення зазначених інтервалів, позначивши його через $A2(N)$.

Крок 1. Введення нижньої границі кількості інтервалів L, $L < N$, шляхом застосування евристики Е7.5.

Крок 2. Обчислення значень $x_i^t = f^t(y_i^t)$, $i = 1,...,n$, $t = 1,...,$ $j = 1,...,N$, де y_i^t – значення вимірюваної величини, одержані шляхом інтерполяції початкових значень x_i, $i = 1,...,n$.

Крок 3. Застосування $(N - L)$ разів алгоритму $A1$: $A1(u_t^0)$, $t = 1,...,N - L$. В результаті цього будується $(N - L)$ ФН: $\mu_j^{(t)}(x)$, $j = 1,...,N$, $t = 1,...,N - L$.

Крок 4. Обчислення границь зміни розмитої ФН μ_j^H, μ_j^B, за формулами: $\mu_j^H = \min_{t=1,...,N-L} \mu_j^{(t)}$, $j = 1,...,N$.

У випадку, коли ОПР бажає одержати не розмиту ФН, а ФН типу 1, можна застосувати алгоритм $A1((R+Q)/2)$ або алгоритм $A1(Q^0)$, де $Q^0 = \sum_{j^0}^{N} u_{j^0} / n^0$, n^0 – кількість значень, що потрапили до інтервалу u_{j^0} для випадку, коли експерт задає два значення $R < Q$.

У першому випадку для побудови ФН типу 1 в алгоритмі $A1((R+Q)/2)$ беруть за основу середини знайдених інтервалів.

У другому випадку обчислюються середні арифметичні для кожного інтервалу.

Для третього випадку будується ФН типу 2, що символьно будемо позначати $A1(Q^s)$, де $Q^s = \left(u_{j^0} + u_{j^0}^{\min}\right)/2$, $u_{j^0} = \arg\max_{j=1,\dots,N} u^j$, $u_{j^0}^{\min} = \min_{i \in I_{j^0}} u_{j^0}$, I_{j^0} – множина індексів значень, що потрапили до інтервалу з індексом j_0.

При *третьому підході* здійснюється побудова інтервалів на основі додаткової евристики.

***Евристика* Е7.6.** Для довизначення даних про структуру ФН, яка будується, експерт вводить величину інтервалу Θ, $1 \le \Theta \le N/2$.

Алгоритм $A3$ майже співпадає з попереднім алгоритмом. Його можна представити такою послідовністю кроків.

Крок 1. Задання експертом евристики Е7.5: Θ, $1 \le \Theta \le N/2$.

Крок 2. Введення експертом евристики Е7.4 для застосування алгоритму $A1(u^0)$, тобто кількості $H >> N$, інтервалів розбиття розмитої величини.

Крок 3. Визначення експертом форми інформації, яку слід одержати, з метою визначення, який з трьох випадків алгоритму $A2$ слід застосовувати.

Крок 4. Застосування алгоритму $A2(N-\Theta, N+\Theta)$.

Четвертий підхід грунтується на аналізі інтервалів та побудові ФН типу 2. Цей підхід потребує застосування алгоритму побудови ФН за невеликою кількістю вимірювань, коли частотність не може відігравати значної ролі, наприклад, коли $N < 20$. При цьому експерт також вибирає, у якому вигляді слід будувати ФН та до якого типу вона має належати.

П'ятий підхід описується таким чином. Кількість значень $u_j^{(t)}$, $j = 1,\dots,N$, які потрапляють до кожного інтервалу, визначається як об'єднання усіх значень: $t = N - L$, або $t = 2\Theta$. На

другому етапі здійснюється нормування значень ФН шляхом ділення на максимальну кількість об'єднаних частот. Після цього визначається конфігурація застосування описаних вище алгоритмів.

Шостим підходом, який використовується при визначенні ФН шляхом аналізу частотності значень, є кластеризація даних без розбиття на рівні інтервали. Тобто здійснюється визначення значимих інтервалів розподілення виміряних значень і ФН визначається на підставі кількості значень, які потрапили до відповідних кластерів. При цьому можуть бути застосовані як відомі з кластерного аналізу, так і розроблені авторами методи кластеризації даних.

До кластеризації даних застосовуються модифіковані відповідним чином алгоритми, які використовувалися у попередніх підходах. Модифікація алгоритмів пов'язана з тим, що при визначенні кластерів інтервали, на які розбивається множина значень, не будуть рівними між собою.

7.9. Процедури визначення функції належності на основі матриці парних порівнянь

Питання побудови ФН є одним з важливих питань теорії нечітких множин [1, 2, 5, 20]. Нечіткість вимірювання інтенсивності деякої властивості об'єкта може полягати:

– у складності вимірювання;

– у неточному вимірюванні цієї інтенсивності;

– у різному сприйнятті експертами властивості об'єктів [31] тощо.

В [2], наприклад, пропонується інтерпретація ФН з точки зору відносної переваги одного режиму роботи системи над іншим. Як правило, ФН має відповідати таким основним вимогам:

– неперервність [15], що є формалізацією інтуїтивного уявлення про те, що коли два об'єкти множини A не сильно відрізняються один від одного, то значення ФН для цих об'єктів також мають бути близькими;

– узгодженість з відношенням переваги, тобто відношення $\mu_A(a_1) \ge \mu_A(a_2)$ має місце тоді і тільки тоді, коли $a_1 \succ a_2$, $a_1, a_2 \in A$.

В [30, 31] показано, що можна побудувати числове представлення належності на шкалі інтервалів та на шкалі відношень. В роботі [42] для оцінки ФН використовується поняття множини рівня. Цей метод дозволяє визначити ступінь належності елементів до нечіткої множини A з урахуванням відомих ймовірностей вибірки елементів множини A для фіксованих рівнів.

Нехай для двох об'єктів a_1 та a_2 відомо, що $a_1 \succ a_2$, тобто об'єкт a_1 переважає об'єкт a_2. Перевага одного об'єкта над іншим може обумовлюватися технологічними, економічними, екологічними причинами, аспектом надійності, різноманітними суб'єктивними та неформалізованими причинами. ФН $\mu_A(a) \in [0,1]$ ставить у відповідність кожному об'єкту $a \in A$ число з інтервалу [0,1], яке характеризує ступінь належності рішення до підмножини A допустимих та ефективних рішень.

Для кожної пари елементів універсальної множини експерт оцінює перевагу одного елемента над другим відносно властивостей нечіткої множини. Таким чином породжується мультиплікативна МПП виду (3.1). Елементи такої МПП у цьому випадку є індикаторами рівня переваги між парами об'єктів у деякій заданій експертом шкалі. Для порядкових шкал вважається, що ранг елемента характеризує важливість цього елемента у формуванні властивості, яка описується нечітким термом, для якого будується ФН. При цьому допускається, що чим вищим є ранг елемента, тим більшою є ступінь належності нечіткій множині.

Відповідно до [19, 23], застосування методів на основі кількісного попарного порівняння ступенів належності є одним із поширених способів побудови ФН. Результатом опитування експерта є матриця (3.1), елементами якої є величини $\mu_{ij}, i, j \in L$, які показують, у скільки разів, на думку експерта, ступінь належності $\mu_A(x_i), i \in L$, переважає ступінь належності $\mu_A(x_j), j \in L$.

7.9.1. *Побудова ФН непрямим методом за неповною матрицею парних порівнянь*

На основі непрямого методу побудови ГВК за неповною МПП, описаного в параграфі 6.3, можна описати алгоритм побудови розмитої ФН, який складається з такої послідовності кроків.

Крок 0. Генерація експертом МПП (3.1).

Крок 1. Побудова на основі МПП (3.1) матриці (6.11).

Крок 2. Формування системи алгебраїчних рівнянь (6.12).

Крок 3. Розв'язання систем (6.12), для яких матриця $A^{(l)}, l \in \Lambda$, є невиродженою.

Крок 4. Заповнення матриці $\mathrm{P} = (p_{ij}), i \in L, j \in \Lambda$, розв'язками сумісних систем (6.12).

Крок 5. Якщо не всі системи (6.12) розв'язано, то перехід до кроку 2. Інакше – до наступного кроку.

Крок 6. Застосування однієї з процедур визначення ФН на основі аналізу частотності значень, описаних в параграфі 7.8, до рядків матриці $\mathrm{P} = (p_{ij}), i \in L, j \in \Lambda$, яка містить усі розв'язки систем (6.12).

Таким чином, на основі застосування описаної процедури буде одержано набір значень для кожного вагового коефіцієнта. Після застосування до цього набору процедури визначення ФН на основі аналізу частотності значень одержимо ФН типу 1 для кожного вагового коефіцієнта. Таким чином буде визначено ФН типу 2 для множини об'єктів. Якщо необхідно перевести одержану ФН до типу 1, така ФН може бути побудована шляхом використання максимальних значень ФН для вагового коефіцієнта кожного об'єкта.

7.9.2. *Процедура визначення функції належності узагальненим методом стабілізації переваг*

ФН можна побудувати, використовуючи аналіз даних, одержаних в результаті застосування узагальненого методу стабілізації переваг, описаного у параграфі 6.5. Алгоритм аналізу зазначених даних складається з такої послідовності кроків.

Крок 1. Введення параметрів $\alpha^{(1)},\alpha^{(2)},\alpha^{(3)}$, зміст яких описано в параграфі 6.5, шляхом застосування евристики Е6.5.

Крок 2. Введення матриці $P=(p_{ij}), i\in L, j\in\{1,2,...\}$, і присвоєння її елементам нульових значень.

Крок 3. Обчислення значення вагових коефіцієнтів на черговій ітерації процедури $s=1,2,...$, присвоєння цих значень елементам чергового стовпчика матриці $P=(p_{ij}), i\in L$, $j\in\{1,2,...\}$, з індексом $s=1,2,...$

Крок 4. Якщо стабілізація переваг не відбулася, то збільшення лічильника ітерацій процедури на одиницю $s=s+1$, і перехід до кроку 1.

Крок 5. Якщо стабілізація переваг відбулася за критеріями виду $Q^{(9)},Q^{(10)}$, які наведено у параграфі 6.5, то перехід до наступного кроку.

Крок 6. Застосування до рядків матриці $P=(p_{ij}), i\in L$, $j\in\{1,2,...\}$, однієї з процедур визначення ФН на основі аналізу частотності значень, описаних в параграфі 7.8.

Слід зазначити, що описана процедура, як і попередня, також не залежить від повноти МПП, тобто її можна застосовувати в тому числі і для неповних МПП. Таким чином збільшується інформативність відношення переваги на множині об'єктів.

7.10. Приклади застосування методів та алгоритмів обробки нечіткої інформації

7.10.1. *Приклад застосування методу еволюційної кластеризації*

Для перевірки ефективності методу EvoClast було розв'язано задачу кластеризації областей України, виходячи із значень соціально-економічних показників. В результаті попереднього аналізу вибрані такі значущі показники:

X_1 – валова додана вартість з розрахунку на одну людину (у фактичних цінах, грн.);

X_2 – територія (тис. кв. км);

X_3 – інвестиції в основний капітал на одну людину (у порівняних цінах, грн.);

X_4 – прямі іноземні інвестиції на одну людину (дол. США);

X_5 – зайнятість населення на 10 тис. чол.;

X_6 – грошові доходи населення на одну людину (грн.);

X_7 – кредити, надані суб'єктам господарювання на одну людину;

X_8 – кількість отриманих патентів на винаходи на 10 тис. чол.

Для порівняння було вибрано класичні методи: деревовидну класифікацію та метод K-середніх. Апріорно задано два кластери. По методу K-середніх отримані такі результати (табл. 7.5). До першого кластера віднесені Дніпропетровська, Донецька, Запорізька, Миколаївська, Одеська, Полтавська і Харківська області. Згідно деревовидної кластеризації (рис. 7.18) до першого кластера віднесені ті ж області, окрім Донецької області, хоча вона і близька до складових першого кластера.

Кластеризація була проведена також з використанням еволюційного моделювання. Критерієм закінчення обчислювального процесу вибрана максимальна кількість ітерацій рівна 1000. Для тих же двох кластерів і восьми факторів кількість змінних (хромосома), для яких проводилася оптимізація фітнес-функції, склала 16. До вибіркової популяції увійшло двадцять елементів. Враховуючи, що фітнес-функція є поліекстремальною, ймовірність мутації склала 0,4. Таке значення збільшило час обчислень, але значно збільшило точність розрахунків за рахунок вибивання фітнес-функції з локальних мінімумів.

Таблиця 7.5. **Результати кластеризації**

область	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
кластер	2	2	2	1	1	2	2	1	2	2	2	2
область	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
кластер	2	1	1	1	2	2	2	1	2	2	2	2

Для контролю за процесом обчислень в режимі реального часу виводилася інформація про значення фітнес-функції на кожній ітерації (рис. 7.19); про середню відстань між центрами кластерів (рис. 7.20); значення центрів кластерів (рис. 7.21). Значення фітнес-функції зменшилося з $6\cdot10^9$ до 11351587, причому на початкових етапах зменшення відбувалося за гіперболічною залежністю, а на останніх – лінійно. Середня відстань між центрами кластерів зменшувалася лінійно, з дисперсією, що також постійно зменшується.

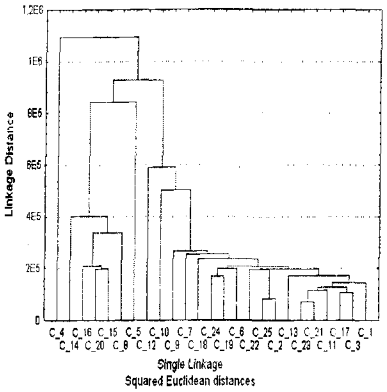


Рис. 7.18. Результати деревовидної кластеризації

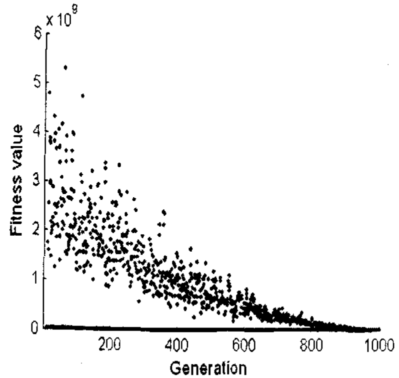


Рис. 7.19. Значення фітнес-функції

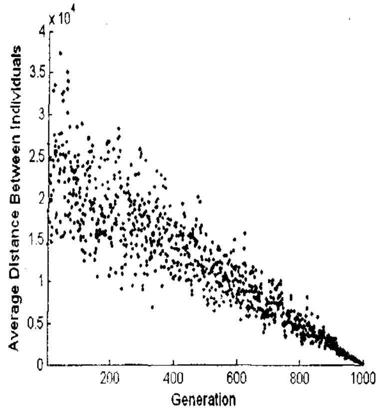


Рис. 7.20. Відстань між центрами кластерів

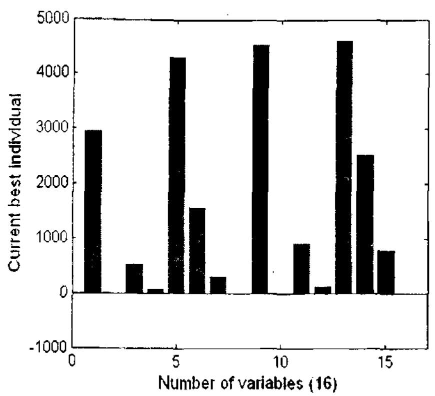


Рис. 7.21. Координати центрів кластерів

В результаті обчислень отримано два центри кластерів. Координати центру першого кластера

$$X_1 = 4553,\ X_2 = 0,01, X_3 = 915, X_4 = 99, X_5 = = 4623, X_6 = 2554, X_7 = 791,\ X_8 = 1,34.$$

Координати центру другого кластеру

$$X_1 = 2952,\ X_2 = 0,02, X_3 = 530, X_4 = 58, X_5 = 4288, X_6 = 1555,$$
$$X_7 = 297,\ X_8 = 0,59.$$

До першого кластеру відносяться Дніпропетровська, Донецька, Миколаївська, Одеська, Полтавська і Харківська області.

Результати трьох розглянутих методів є близькими, що свідчить про точність еволюційного моделювання. Його перевагою є також визначення центрів кластерів і формалізація обчислювального процесу. Як було вказане вище, запропонована технологія може бути вдосконаленою.

7.10.2. *Приклад застосування еволюційного методу відновлення пропусків серед значень вхідних факторів*

Для верифікації еволюційного методу відновлення пропусків EvoGap проведено експериментальне моделювання з використанням програмного комплексу Matlab 7.0. Початкові дані для моделювання склали дві вибірки. Дані першої вибірки згенерувані штучно, значення вхідних факторів мають рівномірний розподіл, а результуюча характеристика отримана за формулою $Y = 3X_1^2 - -2X_2 + 4X_1X_2 - 7\sin X_3$. Друга вибірка є даними офіційної статистики національного інформаційного центру енергетики США і містить дані з 1949 до 2004 року [43], включаючи виробництво твердого палива, ядерної та іншої енергії, імпорт нафти і інших енергоносіїв, експорт вугілля, газу, коксу і електроенергії, споживання твердого палива, ядерної та іншої енергії, а також загальне споживання. Такий підбір вибірок для моделювання базувався на необхідності забезпечення повноти експерименту. Саме тому перша з них представляла жорстко задану залежність і здійснювалась перевірка на точність відновлення відомих контрольних значень. Зауважимо, що залежність могла б бути і будь-якою іншою. У другому випадку розглядались реальні статистичні дані, розподіл яких є нерівномірним, завдяки чому була перевірена і стійкість алгоритму. Крім того, значущі фактори вибирались на основі попереднього емпіричного аналізу, що є додатковою перепоною ефективної роботи алгоритму.

Перша вибірка налічувала 25 образів, з яких 20 віднесено в навчальну послідовність і 5 – в контрольну. Моделювання проводилося для різної кількості пропусків за інших незмінних умов. Так, кількість ітерацій навчання нейромережі обмежена 50, а значення ЦФ склало 10. При моделюванні встановлено, що така точність досягнута не була, і процес навчання припинявся через обмеження на кількість ітерацій. Результати наведені в табл. 7.7, де N – кількість пропусків, NP – процентне співвідношення кількості пропусків, F – значення ЦФ, Er – відносна похибка (у відсотках). Залежність значення відносної похибки від кількості пропусків зображена на рис. 7.22.

Статистична інформація, що характеризує стан енергетики США, складалася з 11 вхідних факторів, однієї результуючої характеристики і нараховувала 40 образів. З них 35 віднесено до навчальної послідовності і 5 – до контрольної. Кількість ітерацій встановлена 150, значення ЦФ – 1. На другій вибірці ітерації припинялися через досягнення вказаного значення помилки. Максимальної кількості ітерацій, на відміну від першого випадку, досягнуто не було. Результати моделювання наведені в табл. 7.8 і на рис. 7.23.

При моделюванні для роботи ГА використовувалася вибіркова популяція з 20 елементів, кількість епох 100. Час моделювання на комп'ютері Intel Pentium M 2,0 Ггц склав 30 хвилин і від кількості пропусків не залежав. Отримані результати свідчать про достатньо високу точність результатів та адекватність методу, яку можна підвищити, якщо збільшити кількість ітерацій навчання нейронмережі. Динаміка відносної похибки, наведена на рис. 7.22 і рис. 7.23 вказує на те, що пластичність методу, або здатність нейромережі до узагальнення зростає при збільшенні кількості пропусків (до деякої межі). Така тенденція є незвичайною, її пояснення вимагає додаткових досліджень.

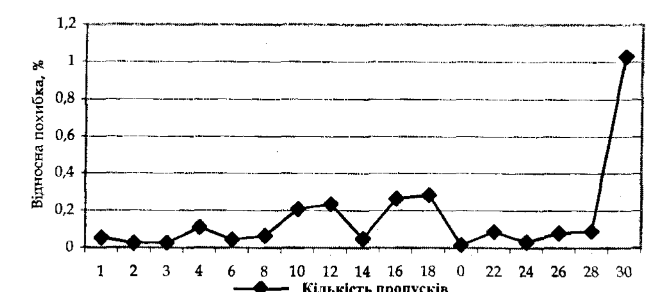


Рис. 7.22. Динаміка відносної похибки

Рис. 7.23. Динаміка відносної похибки

Таблиця 7.7

Результати експериментів

N	NP	F	Er
1	1,67	248	0,053
2	3,33	121	0,026
3	5,00	138	0,027
4	6,67	554	0,109
6	10,00	205	0,044
8	13,33	335	0,065
10	16,67	1056	0,209
12	20,00	1157	0,236
14	23,33	257	0,049
16	26,67	1317	0,266
18	30,00	1410	0,284
0	33,33	776	0,015
22	36,67	443	0,088
24	40,00	164	0,033
26	43,33	417	0,081
28	46,67	463	0.09
30	50,00	1474	1,028

Таблиця 7.8

Результати експериментів

N	NP	F	Er
5	1,14	0,93	0,0096
10	2,27	0,88	0,0091
15	3,41	0,39	0,004
20	4,55	0,35	0,0036
25	5,68	0,174	0,0018
30	6,82	0,665	0,007
35	7,95	0,265	0,0027
40	9,09	0,508	0,0053
45	10,23	0,806	0,0083
50	11,36	0,611	0,0063
55	12,50	0,523	0,0054
60	13,64	0,965	0,01
65	14,77	0,611	0,0063
70	15,91	0,829	0,0086
75	17,05	0,902	0,0093
80	18,18	0,791	0,0195

7.10.3. *Приклад застосування еволюційного методу відновлення пропусків серед значень результуючої характеристики*

Для аналізу ефективності пропонованого методу використаємо дві вибірки. Значення вхідних факторів у першій мають рівномірний розподіл, результуюча характеристика визначається залежністю $Y = X_1 + X_2 - 2X_3$ кількість точок експерименту 100, контрольну послідовність склали 4 елементи. Другу вибірку складають дані про фінансово-економічний стан підприємства, вхідних факторів 9, результуюча характеристика – чистий прибуток, кількість спостережень – 30, контрольних точок – 4 (див. параграф 7.6.3).

У результаті моделювання з використанням першого способу (Еволюційне моделювання + кореляція) встановлено, що мінімальне значення ЦФ досягається в різних точках у залежності від області пошуку. Прийнятного розв'язку задачі пошуку мінімуму (7.52) серед цих точок немає, оскільки коефіцієнти кореляції для комплектної і відновленої матриці істотно відрізняються. У той же час, як показано на рис. 7.24 і рис. 7.25 і ЦФ (7.52), і середня відстань між потенційними розв'язками прямують до нульового значення. Очевидно, що використання ЦФ (7.52) є раціональним на етапі попереднього аналізу.

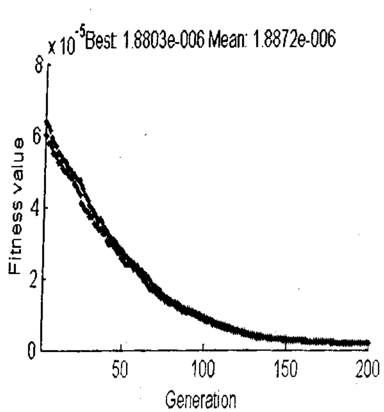


Рис. 7.24. Динаміка значення ЦФ

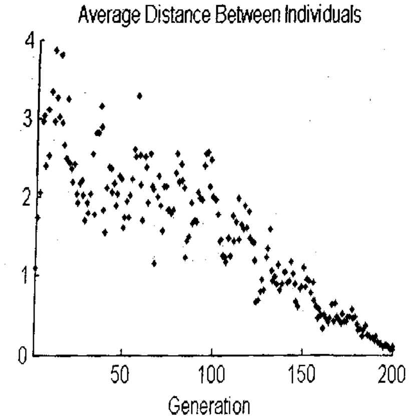


Рис. 7.25. Динаміка значення відстані між індивідами

Використовуючи нейромережну апроксимацію, переконуємось у тому, що ЦФ збігається досить швидко (рис. 7.26).

Ефективність композиційного використання еволюційного моделювання і нейромережної апроксимації ілюструється динамікою мінімального і середнього значень fitness-function (рис. 7.27), яка свідчить про повільну збіжність алгоритму, що пояснюється комбінуванням ітераційного методу навчання НМ та ітерацій ГА.

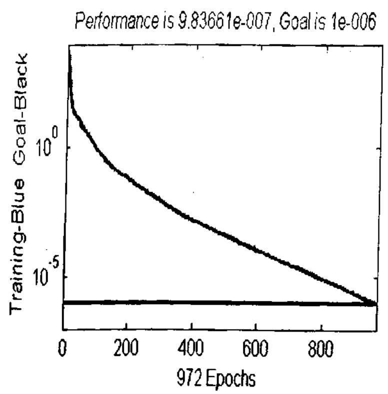


Рис. 7.26. Динаміка значень ЦФ

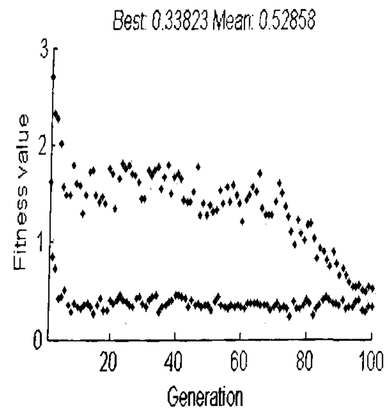


Рис. 7.27. Динаміка значень ЦФ

Динаміка ЦФ при композиції еволюційного моделювання, нейромережної апроксимації з використанням значення кореляції представлена на рис. 7.28. Очевидно, що алгоритм з такою fitness-function збігається швидше і досягається вища точність результату.

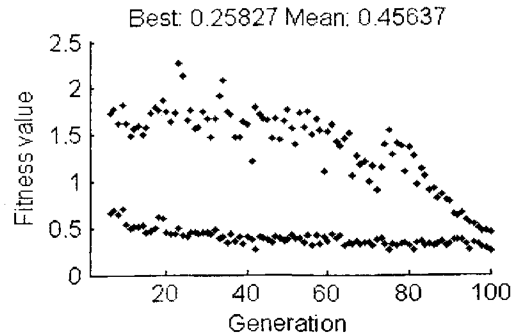


Рис. 7.28. Динаміка значень цільової функції

Як зазначено вище, для тестування запропонованих алгоритмів використано дві вибірки: у першій вибірці кількість пропусків склала 5 %, у другій – 15 %. Наведемо усереднені результати 10 експериментів для кожного методу і кожної вибірки. Відносна помилка на контрольних точках першої вибірки склала 0,5–3 %, причому найвищу точність мав результат методу Бартлетта. Така точність пояснюється існуванням точної лінійної залежності, а також тим, що метод Бартлетта є неітераційним методом. При додаванні до значень результуючої характеристики нормально розподілених випадкових чисел з математичним сподіванням рівним нулю і одиничним середньоквадратичним відхиленням (шум) відносна помилка змістилася до 2–4 %, причому і для неітераційного методу Бартлетта, і для запропонованих методів вона була майже однаковою. Дещо більше (5 %), в середньому, склала помилка для методу, що є композицією еволюційного моделювання і використання як зовнішнього критерію коефіцієнта кореляції.

Для другої вибірки, в якій відносна кількість пропущених значень була більшою, результати значно відрізнялися. Цей факт можна пояснити і тим, що лінійна залежність була не очевидною і в множині вхідних факторів була присутня мультиколінеарність. Метод Бартлетта виявився найменш точним із усіх методів, що розглядалися, відносна помилка на контрольних точках перевищувала 100 %, що свідчить про його непридатність для розв'язання подібного типу задач.

При використанні ГА з fitness-function (7.52) швидкість збіжності була найбільшою. Але виявилося, що такий алгоритм чутливий до вибору області пошуку квазіоптимального розв'язку, причому мінімум ЦФ (7.52) досягається в багатьох точках, що вказує на прийнятне застосування такого алгоритму лише у випадку існування значної кореляції між факторами і результуючою характеристикою, а також великої кількості елементів комплектної матриці. Отримані результати відповідали значенню ЦФ близькому до нуля, не зважаючи на те, що середня відносна помилка складала до 52 %.

Результати нейромережної апроксимації є значно точнішими. Так, середня відносна помилка склала 22 %, проте вона залежить від архітектури НМ та алгоритму її функціонування. НМ навчалася на комплектних образах, а пропущені значення відновлювалися в результаті апроксимації.

Майже в два рази були покращені результати композиційного використання ГА і НМ у порівнянні з нейромережною апроксимацією. Особливістю такого методу було навчання НМ як на образах комплектної матриці, так і на некомплектних образах, де пропущені значення відновлювалися ГА. За допомогою аналізу ЦФ відновлювались значення, які відповідали загальній тенденції в даних. Середня відносна помилка склала близько 13 %.

Близькі до оптимальних результати отримані при композиційному використанні разом із ГА і НМ коефіцієнта кореляції в ролі зовнішнього критерію, що дозволило звузити область пошуку розв'язку. Середня відносна помилка складала 4–8 %, причому менший простір пошуку відповідав вищій точності розв'язку.

7.10.4. *Приклад побудови узагальненої терм-множини за алгоритмом, описаним у параграфі* 7.6

Для ілюстрації побудови узагальненої терм-множини за алгоритмом, наведеним у параграфі 7.6, розглянемо приклад. Нехай задано дві терм-множини значень деякої лінгвістичної змінної (рис. 7.29): $T^1 =$ {дуже мале, мале, помірне, середнє, велике, дуже велике}, $T^2 =$ {мале, середнє, велике}. Причому максимуми ФН на терм-множинах не співпадають.

Для аналізу терм-множин T^1 та T^2 у наведеному вище прикладі необхідно покласти: $T_1^1 = T_1^2$ та $T_6^1 = T_3^2$ ($T_1^1 =$ "дуже мале", $T_1^2 =$ "мале", $T_6^1 =$ "дуже велике", $T_3^2 =$ "велике").

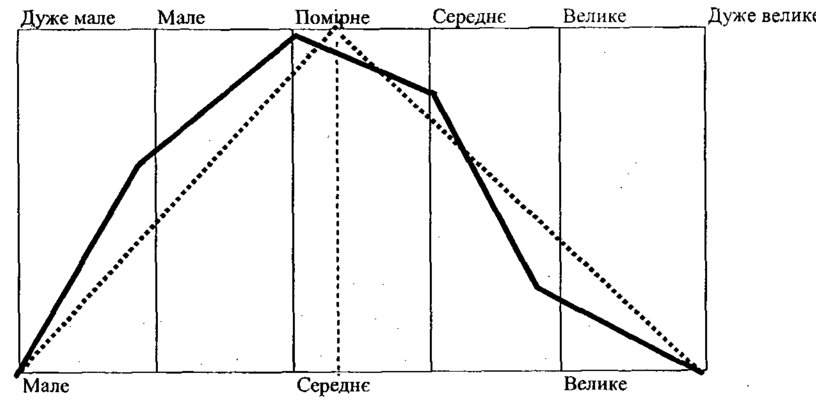


Рис. 7.29. Ілюстрація неспівпадання двох терм-множин

Розмита ФН після побудови узагальненої терм-множини, застосування процедур масштабування, інтерполяції, визначення інфінетриси та супреметриси матиме вигляд, представлений на рисунку 7.30:

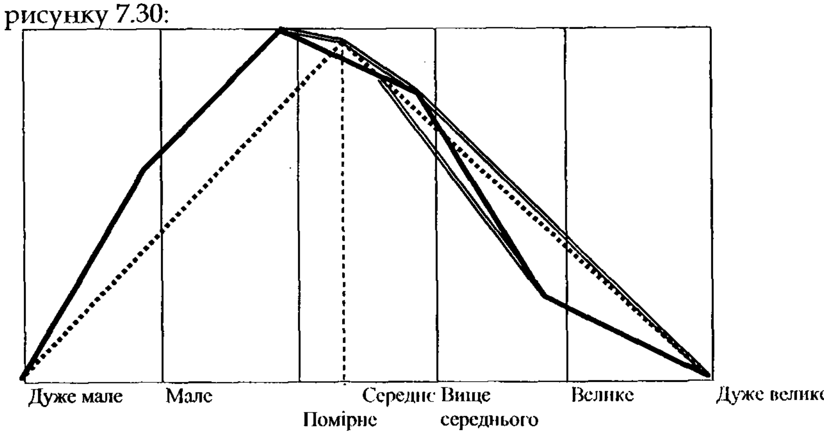


Рис. 7.30. Ілюстрація побудови узагальненої терм -множини

Розвиток математичного апарату для аналізу розмитих ФН є актуальним, оскільки такі підходи дозволяють розв'язувати ЗЕО на основі інформації, яка є характерною для багатьох практичних задач, яким притаманна невизначеність.

Зазначимо, що значення $T_4^1 = T_2^2 =$ "середнє", хоча після масштабування, відповідно до рис. 7.29, ці значення не співпадають. З цієї ситуації існує два виходи:

- вважати, що поняття "середнє" значення досліджуваного об'єкта у обох експертів співпадають і здійснити додаткове масштабування значення T_2^2 = "середнє" до його співпадання з відповідним значенням T_4^1; в цьому випадку узагальнена терм-множина T матиме шість значень і співпадатиме з терм-множиною T: $T = T^1$;

- ввести замість значення лінгвістичної змінної T_4^1 = "середнє", наприклад, нове значення T_4^1 = "вище середнього" і покласти $T_5 = T_4^1$; тоді узагальнена терм-множина T матиме сім значень: T = {дуже мале, мале, помірне, середнє, вище середнього, велике, дуже велике}.

Література до розділу 7

1. *Алтунин А.Е., Востров Н.Н.* Оптимизация многоуровневых иерархических систем на основе теории размытых множеств и методов самоорганизации // В сб. "Проблемы нефти и газа Тюмени". - Вып. 42. - Тюмень, 1979. - С. 68-72.

2. *Алтунин А.Е., Семухин М.В.* Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях: Монография. - Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2000. - 352 с.

3. *Арнольд В.И.* О функциях трех переменных // Докл. АН СССР. - 1957. - Т. 114. - № 4. - С. 679-681.

4. *Бабич Г.Х.* Принятие решений на основе анализа дерева решений в условиях неполноты информации // Кибернетика. - 1986. - № 5. - С.113-121.

5. *Борщевич В.И., Ботнарь В.И.* Нечеткое моделирование и проблемы его интерпретации / КПИ. - Кишинев, 1984. - 13 с. - Рус. - Деп. в МолдНИИНТИ 14.09.1984, № 462М-84.

6. *Браверман Э.М., Мучник И.Б.* Структурные методы обработки эмпирических данных. - М.: Наука, 1983. - 464 с.

7. *Витковски Т.* Многоэтапные процессы принятия решений в управлении предприятием // Проблемы управления и информатики. - 1998. - № 3. - С.124-138.

8. *Волошин О.Ф., Гнатієнко Г.М.* Прийняття рішень в нечітких умовах з розмитою функцією належності // Теорія прийняття рішень: Праці міжнародної школи-семінару. - Ужгород: УжНУ, 2002. - С. 20-21.

9. *Гегель Г.В.Ф.* Наука логики. - М.: Мысль, 1999. - 1072 с.

10. *Гнатієнко Г.М.* Алгоритми визначення функції належності шляхом аналізу частотності значень // Теорія прийняття рішень: Праці ІІІ-ї міжнародної школи-семінару.- Ужгород, УжНУ, 2006. - С. 32-34.

10. *Грубер Й.* Введение в эконометрию. Том 1. - К.: Астарта, 1996. - 397 с.

11. *Дворянкин А.М., Половинкин А.И., Соболев А.Н.* Методы синтеза технических решений. - М.: Наука, 1977. - 104 с.

12. *Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей. - М.: Радио и связь, 1990. - 286 с.

13. *Заде Л.А.* Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений // Математика сегодня. - М.: Мир, 1975. - С. 5-49.

14. *Заде Л.А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений - М.: Мир, 1976. - 168 с.

15. *Згуровский М.З.* Интегрированные системы оптимального управления и проектирования - К.: Вища школа, 1990. - 351 с.

16. *Колмогоров А.Н.* О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных // Докл. АН СССР. - 1956. - Т. 108. - № 2. - С. 179-182.

17. *Колмогоров А.Н.* О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного // Докл. АН СССР. - 1957. - Т. 114. - № 5. - С. 953-956.

18. *Кофман Л.* Введение в теорию нечетких множеств. - М.: Радио и связь, 1982. - 432 с.

19. *Кучин Б.Л., Алтунин А.Е.* Управление системой газоснабжения в осложненных условиях эксплуатации. - М: Недра, 1987. - 209 с.

20. *Литвак Б.Г.* Экспертная информация: Методы получения и анализа. - М.: Радио и связь, 1982. - 184 с.

21. *Люгер Ф. Дж.* Искусственный интеллект. Стратегии и методы решения сложных проблем. - М.: "Вильямс", 2003. - 864 с.

22. *Малышев Н.Г., Берштейн Л.С., Боженюк А.В.* Нечеткие модели для экспертных систем в САПР. - М.: Энергоатомиздат, 1991. - 136 с.

23. *Мандель И.Д.* Кластерный анализ. - М.: Финансы и статистика, 1988. - 176 с.

24. *Матвеевский С.Ф.* Основы системного проектирования комплексов летательных аппаратов. - М.: Машиностроение, 1987. - 239 с.

25. *Мелихов А.Н., Берштейн Л.С., Коровин С.Я.* Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой. - М.: Наука, 1990. - 272 с.

26. *Молчанов А.А.* Моделирование и проектирование сложных систем. - К.: Вища школа, 1988. - 359 с.

27. *Мушик Э., Мюллер П.* Методы принятия технических решений. - М.: Мир, 1990. - 208 с.

28. *Нариньяни А.С.* Неточность как НЕ-фактор. Попытка доформального анализа: Препр. / РосНИИ ИИ. - Москва-Новосибирск, 1994. - 34 с.

29. *Норвич А.М., Турксен И.Б.* Построение функций принадлежности // Нечеткие множества и теория возможностей. - М: Радио и связь, 1986. - С. 64-71.

30. *Норвич А.М., Турксен И.Б.* Фундаментальное измерение нечеткости // Нечеткие множества и теория возможностей. - М: Радио и связь, 1986. - С. 54-64.

31. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений / А.Н. Борисов, А.В. Алексеев, Г.В. Меркурьев и др. - М.: Радио и связь, 1989. - 394 с.

32. *Орловский С.Г.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – М.: Наука, 1981. – 208 с.

33. *Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П.* Введение в системный анализ. – М.: Высшая школа, 1989. – 367 с.

34. *Плюта В.* Сравнительный многомерный анализ в економетрическом моделировании. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 175 с.

35. *Снитюк В.Є.* Задача вибору оптимальної альтернативи в умовах композиційної невизначеності // Черкаси: Вісник ЧІТІ. – 2000. – № 2. – С. 140–145.

36. *Снитюк В.Є.* Один з підходів до дослідження існування розв'язку задачі системного проектування в умовах невизначеності // Експрес-новини: наука, техніка, виробництво. – К.: УкрІНТЕІ. – 1997. – № 3-4. – С. 11–13.

37. *Снитюк В.Е., Рифат Мохаммед Али.* Модели процесса принятия адаптивных решений композиционной структуры с детерминированными и вероятностными характеристиками // Харьков: Радиоэлектроника и информатика. – 2002. – № 4. – С. 123–127.

38. *Снитюк В.Е.* Эволюционный метод восстановления пропусков в данных // "Интеллектуальный анализ информации". Сб. трудов VI-й межд. конф. – Киев. – 2006. – С. 262–271.

39. *Тимченко А.А., Родионов А.А.* Основы информатики системного проектирования объектов новой техники. – К.: Наук. думка, 1991. – 152 с.

40. *Шегал Б.Р., Гринберг А.С.* Компенсация риска оценки нечетких переменных в экспертных системах // УСиМ. – 1994. – № 1/2. – С. 70–75.

41. *Ягер Р.Р.* Множества уровня для оценки принадлежности нечетких подмножеств // Нечеткие множества и теория возможностей. – М: Радио и связь, 1986. – С. 71–78.

42. Annual Energy Report 2004 / Energy Information Administration USA: Washington, 2004. – 435 p. http://www.eia.doe.gov/aer.

43. *Bremermann H.J., Rogson M., Salaff S.* Search by Evolution. In Biophysics and Cybernetic Systems. M. Maxfield, A. Callahan, and L. J. Fogel, Eds. Washington DC: Spartan Books. – 1965. – Pp. 157–167.

44. *Fraser A.S.* Simulation of genetic systems. J. of Theor. Biol. – 1962. – Vol. 2. – Pp. 329–346.

45. *Fraser A.S.* The evolution of purposive behavior. In Purposive Systems, H. von Foerster, J.D. White, L.J. Peterson, and J.K. Russel, Eds. Washington, DC: Spartan Books. – 1968. – Pp. 15–23.

46. *Gorban A.N., Zinovyev A.Yu.* Method Elastic Maps and its Applications in Data Visualization and Data Modeling // Int. Journal Computing Anticipatory Systems, CHAOS. – 2002. – Vol. 12. – Pp. 353–369.

47. *Harti R.E.* A global convergence proof for class of genetic algorithms. - Wien: Technische Universitaet, 1990. - 136 p.

48. *Holland J.H.* Adaptation in Natural and Artificial Systems. Ann Arbor: Univ. of Michigan Press, 1975. - 178 p.

49. *Holland J.H.* Adaptive plans optimal for payoff-only environments. Proc. of the 2nd Hawaii Int. Conf. on System Sciences. - 1969. - Pp. 917-920.

50. *Kohonen T.* Self-organization and associative memory. - New-York, 2d. ed., Springer Verlag, 1988. - 196 p.

51. *Muller B., Reinhart J.* Neural Networks: an introduction. - Berlin Heidelberg, Springer Verlag, 1990. - 332 p.

52. *Skurikhin A.N., A.J. Surkan.* Identification of parallelism in neural networks by simulation with language J. Proc. of the Intern. Cohf. on KPL, APL Quote Quad. - Toronto, Canada. - 1993. - Vol. 24. - № 3. - Pp. 2301237.

53. *Snytyuk V.* Evolutionary clustering of complex systems and processes // Information Theories and Applications. - 2006. - Vol. 13. - № 4. - Pp. 344-349.

54. *Voloshin O.F., Gnatienko G.M.* Algorithm of construction of membership function on incoincident terms-sets of a linguistic variable // Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2005): Abstracts of International Conference (September 12-17, 2005). - Berdyansk, 2005. - Pp. 70-71.

55. *Voloshin O.F, Gnatienko G.M., Drobot O.V.* Fuzzy membership functions in a fuzzy decision making problem // International Journal "Information Theories & Applications". - Vol. 10. - № 3. - 2003. - Pp. 243-247.

56. *Voloshin O.F, Gnatienko G.M., Drobot O.V.* The decision making problem in fuzzy conditions with fuzzy membership functions // Knowledge-Dialogue-Solution: Proceedings of the X-th International Conference (June 16-26, 2003). - Varna (Bulgaria): Sofia, FOI-COMMERCE. - 2003. - Pp. 112-116.

57.*Wasserman P.D.* Combined backpropagation // Cauchy machine: Proceedings International Neural Network Society. - New York: Pergamon Press, 1988. - Pp. 254-261.

Розділ 8 Задачі і методи визначення компетентності експертів

8.1. Визначення компетентності експертів на основі аксіоми незміщеності

При проектуванні та розробці різнопланових систем виникають проблеми, викликані неповнотою та недостовірністю ретроспективних та прогнозних даних. Такі факти можна було б відкидати, але тоді довелось би відмовитись від цінної інформації. Виникає необхідність розробки процедур для здійснення логічних побудов за відсутності повної та достовірної інформації. Найчастіше вдаються до допомоги експертів, які, використовуючи свої знання, досвід, інтуїцію, а також колективний підхід до вироблення рекомендацій на початкових етапах розв'язання задач, визначають і (або) прогнозують вихідні дані, що є відправною точкою дослідження і надалі, можливо, ітераційно уточнюватимуться і перевірятимуться. Експерти відповідають на численні питання, які мають різну значущість. Виконаємо їх класифікацію за типами можливих відповідей:

Z_1 - "Так-Ні";

Z_2 - один з декількох;

Z_3 - декілька з багатьох;

Z_4 – число;

Z_5 – інтервал;

Z_6 – нечіткий інтервал;

Z_7 – слово;

Z_8 – речення.

У сучасних наукових джерелах наведено достатньо багато підходів до дослідження компетентності експертів, що базуються, значною мірою, на суб'єктивних судженнях і використовують понятійний апарат психології і, в кращому разі, методи елементарної алгебри. Їх недоліками є відсутність системного підходу до формалізації проблеми і класифікації задач дослідження, а також єдиного представлення даних і результатів в автоматизованих системах підтримки ПР. Проведемо визначення компетентності експертів на основі аксіоми незміщеності [17], згідно якої судження більшості є компетентним і, як наслідок, найкомпетентнішим будемо вважати того експерта, розбіжність суджень якого із судженнями інших експертів є мінімальною.

Задача визначення рівня компетентності експертів має декілька варіантів постановки за наступних початкових умов:

– рівні компетентності експертів апріорно не відомі і ОПР не задані;

– початкові рівні компетентності задаються ОПР;

– початкові рівні компетентності є середніми арифметичними оцінки ОПР і самооцінки експертів;

– початкові рівні компетентності є середніми арифметичними оцінок інших експертів;

– при визначенні компетентності оцінки ОПР рівнозначні оцінці групи експертів;

– при визначенні компетентності враховується оцінка ОПР як експерта із заданим рівнем компетентності.

***Евристика* Е8.1.** Якщо оцінка компетентності експерта іншим експертом відсутня, то вважаємо її рівною 0,5.

Нехай n – кількість експертів, m – кількість питань, причому $m=\sum_{i=1}^{8} m_i$, де m_i – кількість питань i-го типу, $i=1,\ldots,8$, відповідно до вищевикладеної класифікації. Необхідно визначити рівні компетентності експертів γ_j, $j=1,\ldots,n$.

Сутність методу [23] полягає у визначенні матриць, що містять значення розбіжностей суджень експертів, їх аналізі і перетвореннях, в результаті яких будуть визначені рівні компетентності експертів. Відзначимо, що метод легко алгоритмізувати, і без обмеження загальності базовим варіантом вважатимемо випадок відсутності інформації про рівні компетентності експертів. Залежно від типу питань визначимо процедури оцінки компетентності.

П8.1. *Визначення компетентності експертів для питань типу* Z_1. Методом експертного опитування визначається матриця

$$L=(l_{ij})_{i=1,\ j=1}^{n\ \ \ m_1},$$

де $l_{ij}=\begin{cases}1, \text{якщо } i\text{-й експерт дав стверджувальну відповідь} \\ \text{на } j\text{-е питання,} \\ 0, \text{в іншому випадку.}\end{cases}$

Формується послідовність трикутних матриць $\left\{T_1^k\right\}_{k=\overline{1,m_1}}$,

де $T_1^k=\left(t_{ij}^k\right)_{i,j=1}^{n}$, $k=\overline{1,m_1}$ і

$$t_{ij}^k=\chi\left(l_{ik}=l_{jk}\right) \ \text{при } i>j, \ \text{при } i\le j \ \ t_{ij}^k=0, \qquad (8.1)$$

де $\chi(B)=\begin{cases}1, \text{якщо } B \text{ вірно,} \\ 0, \text{в іншому випадку.}\end{cases}$

Обчислюються елементи матриці $T_1^{'}=\left(t_{ij}^{'}\right)_{i,j=1}^{n}$,

$$t_{ij}^{'}=\sum_{k=1}^{m_1}\chi\left(l_{ik}=l_{jk}\right),\ i>j,\ \text{при } i\le j \ \ t_{ij}^k=0.$$

Нормуванням елементів матриці $T_1^{'}$, одержується матриця $T_1=\left(t_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$, $t_{ij}=\dfrac{t_{ij}^{'}}{\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i>j}}^{n} t_{ij}^{'}}$.

Якщо питання обмежуються лише першим типом або на цьому етапі є необхідність у попередньому висновку про компетентність експертів, то її значення обчислюються за формулою

$$\gamma_p = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j \\ (j=p)\vee(i=p)}}^{n} t_{ij} \Bigg/ \sum_{p=1}^{n} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j \\ (j=p)\vee(i=p)}}^{n} t_{ij}, \quad p=\overline{1,n}. \tag{8.2}$$

П8.2. *Визначення компетентності експертів для питань типу* Z_2. ОПР для кожного q-го питання, $q=\overline{1,m_2}$, визначає кількість відповідей k_q і надає кожній відповіді певний бал a_{ql}, де l – номер відповіді в q-му питанні, $a_{ql}\in[0;1]$, $\sum_{l=1}^{k_q} a_{ql}=1$. (Передбачається, що відповіді на питання другого типу впорядковані за збільшенням балів, тобто має місце кількісна або змістовна градація). Методом експертного опитування визначається матриця відповідей експертів $A=\left(a_{ij}\right)_{i=1,\,j=1}^{n\quad m_2}$, де a_{ij} – бал i-го експерта за відповідь на j-е питання.

Формується послідовність трикутних матриць $\left\{T_2^k\right\}_{k=\overline{1,m_2}}$, де $T_2^k=\left(t_{ij}^k\right)_{i,j=1}^{n}$ і

$$t_{ij}^k=\left|a_{ik}-a_{jk}\right|,\ i>j,\ \text{при } i\le j \quad t_{ij}^k=0. \tag{8.3}$$

Обчислюються елементи матриці $T_2^{k'}=\left(t_{ij}^{k'}\right)_{i,j=1}^{n}$, $t_{ij}^{k'}=1/t_{ij}^k$ при $i>j$ і $t_{ij}^k\neq 0$, якщо при $i>j$ $t_{ij}^k=0$, то раціонально покласти $t_{ij}^{k'}=\dfrac{2}{\min\limits_{t_{ij}\neq 0} t_{ij}^k}$, інші нульові елементи залишаються без змін. Зауважимо, що це не єдиний спосіб визначення елементів матриць $T_2^{k'}$. Обчислюється матриця $T_2'=\left(t_{ij}'\right)_{i,j=1}^{n}$, де $t_{ij}'=\sum_{k=1}^{m_2} t_{ij}^{k'}$, *при* $i>j$, при $i\le j$ $t_{ij}'=0$.

Нормуванням елементів матриці T_2', отримається матриця $T_2=\left(t_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$, $t_{ij}=\dfrac{t_{ij}'}{\sum\limits_{i>j} t_{ij}'}$ при $i>j$.

Якщо за відповідями на питання типу Z_2 є необхідність у попередньому висновку про компетентність експерттів, то здійснюється її обчислення за формулою (8.2).

П8.3. *Визначення компетентності експертів для питань типу* Z_3. ОПР для кожного p-го питання, $p=\overline{1,m_3}$, визначає кількість відповідей k_p і надає кожній відповіді певний бал a_{pl}, де l – номер відповіді в p-му питанні $a_{pl}\in[0;1]$, $\sum_{l=1}^{k_p} a_{pl}=1$. Справедливим є припущення процедури П8.2. Методом експертного опитування визначаємо елементи матриці $L=\left(l_{ijq}\right)_{i,j=1\ q=1}^{n\ m_3\ mm}$, де $mm=\max\limits_p k_p$ і

$$l_{ijq}=\begin{cases}1, & \textit{якщо } i-\textit{й експерт на } j-\textit{е питання дав } q-\textit{у відповідь},\\ 0, & \textit{в іншому випадку.}\end{cases}$$

Формуємо послідовність трикутних матриць $\left\{T_3^k\right\}_{k=\overline{1,m_3}}$, де $T_3^k=\left(t_{ir}^k\right)_{i,r=1}^{n}$ і

$$t_{ir}^k=\sum_{q=1}^{k_p}\chi\left(l_{ikq}=l_{rkq}\right)a_{kq},\ i>r, \tag{8.4}$$

Наступні кроки аналогічні з незначними уточненнями крокам процедури П8.2.

П8.4. *Визначення компетентності експертів для питань типу* Z_4. Методом експертного опитування формуємо числову матрицю $L=\left(l_{ij}\right)_{i=1,\ j=1}^{n\quad m_4}$, де l_{ij} – відповідь i-го експерта на j-е питання. Можливі випадки, коли ОПР вказує інтервали для відповідей і коли він цього не робить. Нехай у першому випадку можливі інтервали для відповідей $\left[a_j;b_j\right]$, $j=\overline{1,m_4}$. Позначимо $N_z=\{1,2,\ldots,z\}$. Якщо $\exists i\in N_n$ і $\exists j\in N_{m_4}: l_{ij}\notin\left[a_j;b_j\right]$, то $t_{ip}^j=0$ при $i>p$. Якщо $l_{ij}\in\left[a_j;b_j\right]$ і $l_{qj}\in\left[a_j;b_j\right]$, то

$$t_{iq}^j=\frac{\left|l_{ij}-l_{qj}\right|}{b_j-a_j},\ i>q. \tag{8.5}$$

Формула (8.5) має місце і в іншому випадку, але в ній для $\forall j \in N_{m_4}$ $a_j = \min_i l_{ij}$, $b_j = \max_i l_{ij}$. Подальші міркування і розрахунки аналогічні процедурі П8.2.

П8.5. *Визначення компетентності експертів для питань типу* Z_5. Методом експертного опитування формуємо матрицю $A = \left(a_{ij}\right)_{i=1,\, j=1}^{n \quad 2m_5}$, де

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{число} - \text{лівий кінець інтервалу відповіді } i\text{-го експерта} \\ \text{на } j\text{-те питання, де } j = 2k-1,\ k = \overline{1,m_5}, \\ \text{число} - \text{правий кінець інтервалу відповіді } i\text{-го експерта} \\ \text{на } j\text{-те питання, де } j = 2k,\ k = \overline{1,m_5}. \end{cases}$$

Формуємо послідовність трикутних матриць $\left\{T_5^k\right\}_{k=\overline{1,m_5}}$,

де $T_5^k = \left(t_{ij}^k\right)_{i,j=1}^k$ і $t_{ij}^k = \dfrac{1}{2}\chi(\min\{a_{il},a_{jl}\} \ge \max\{a_{iq},a_{jq}\})(\min\{a_{il},a_{jl}\} -$

$$-\max\{a_{iq},a_{jq}\}) \times \left(\frac{1}{a_{il}-a_{iq}} + \frac{1}{a_{jl}-a_{jq}}\right),$$

де $l = 2k$, $q = 2k-1$, $k = \overline{1,m_5}$, $i > j$ і $t_{ij}^k = 0$ при $j \ge i$. Наступні кроки аналогічні крокам процедури П8.2.

П8.6. *Визначення компетентності експертів для питань типу* Z_6. Методом експертного опитування визначаємо нечіткі числа [14] у вигляді п'ятірки елементів $(\alpha_i^k, \beta_i^k, \underline{m}_i^k, \overline{m}_i^k, h_i^k),\ i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,m_6}$. Для кожного експерта і кожного питання обчислюємо значення параметра

$$w_i^k = \frac{h_i^k}{2}\left(\underline{m}_i^k + \overline{m}_i^k\right) + \frac{h_i^k}{4}\left(\beta_i^k - \alpha_i^k\right), \tag{8.6}$$

впевненість в отриманні якого у експерта максимальна. Зауважимо, що у кожного експерта для всіх питань існує хоча б одне значення, впевненість в отриманні якого є максимальною (дорівнює одиниці), інший випадок не розглядається.

Обчислюємо елементи матриці $T_6^k = \left(t_{ij}^k\right)_{i,j=1}^n$, де $t_{ij}^k = \dfrac{\left|w_i^k - w_j^k\right|}{\max_i w_i^k - \min_i w_i^k}$, $i,j = \overline{1,n}$, $i > j$, $k = \overline{1,m_6}$. Далі необхідно матриці T_6^k додати і проводити обчислення аналогічно процедурі П8.2.

П8.7. *Визначення компетентності експертів для питань типу* Z_7. Методом експертного опитування визначимо слова W_i^k, які є відповіддю i-го експерта на k-е питання $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,m_7}$. Для кожного питання визначимо узагальнений індикатор

$$\chi^*(W_i^k \in S_{W^k}) = \begin{cases} 0,\ W_i^k \notin S_{W^k}, \\ \alpha_1,\ W_i^k = W_1^k \in S_{W^k}, \\ \text{- - - - - - - - - - -} \\ \alpha_{p_k},\ W_i^k = W_{p_k}^k \in S_{W^k}, \end{cases} \tag{8.7}$$

де S_{W^k} – множина синонімів, p_k – кількість синонімів для слова-відповіді на k-е питання, $\sum_{j=1}^{p_k} \alpha_j = 1,\ \forall k \in N_{m_7}$. Далі процес визначення матриці T_7 аналогічний розрахунку матриці T_2.

П8.8. Для *восьмого типу питань* запропонувати адекватну алгоритмічну процедуру оцінки близькості відповідей експертів на сучасному рівні інтелектуалізації технічних засобів неможливо, тому матриця T_8 визначається ОПР.

Отже, додаючи вісім матриць для визначення компетентності, отримаємо результуючу матрицю T, де нижче головної діагоналі розміщені взаємооцінки компетентності експертів. За формулою (8.2) визначаємо коефіцієнти компетентності експертів. Якщо початкові рівні компетентності задаються ОПР, то вони знаходяться на головній діагоналі матриці T і є рівноправними з іншими оцінками експертів. Рівні компетентності у такому разі обчислюються за формулою

$$\gamma_p = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \ge j \\ (j=p)\vee(i=p)}}^{n} t_{ij} \Bigg/ \sum_{p=1}^{n} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \ge j \\ (j=p)\vee(i=p)}}^{n} t_{ij},\quad p = \overline{1,n}. \tag{8.8}$$

Якщо початкові рівні компетентності вважати середніми арифметичними суджень інших експертів враховувати евристику Е8.1, то необхідно формувати матрицю T_0, $T_0=(t_{ij}^0)_{i,j=1}^n$, де на головній діагоналі знаходяться нулі, t_{ij}^0 – оцінка i-м експертом j-го експерта. Далі знаходимо суму елементів рядків і ділимо на $n-1$. Отримані числа розташовуємо на головній діагоналі T і виконуємо обчислення за формулою (8.8). У разі рівнозначності оцінки ОПР оцінці групи експертів, після визначення рівня компетентностей по матриці T з нульовими діагональними елементами, складаються і усереднюються одержані оцінки і оцінки, дані ОПР. Процедура визначення компетентності, при якій враховується оцінка ОПР як експерта із заданим рівнем компетентності по відношенню до групи експертів, відрізняється від попередньої тим, що при усереднюванні оцінка ОПР множиться на ваговий коефіцієнт.

Численні публікації вказують на методи уточнення і підвищення достовірності оцінок компетентності експертів: рекурентне опитування, визначення корисності, внесення суперечливих суджень та ін. Показано, що, якщо експерти не розбиваються на два ворогуючі угрупування, які вважають один одного абсолютно некомпетентними, то ітераційний процес уточнення рівнів компетентності збігається.

Реалізація процедури визначення компетентності експертів є ефективною лише при використанні автоматизованої системи, що пов'язано з обробкою значної кількості матриць великого розміру. Запропонований метод не претендує на абсолютність як і всі інші методи оцінки суб'єктивних характеристик [19, 25], а запропонована класифікація варіантів постановки задачі є далеко не повною.

8.2. Особливості взаємооцінки експертів

Відомо кілька підходів до задачі визначення компетентності експертів [2–4, 16], яка є важливою складовою частиною експертизи у багатьох ЗЕО. Огляд підходів до визначення коефіцієнтів відносної компетентності експертів наводиться в роботах [6, 8, 11, 13].

При взаємооцінці кожен з k експертів задає у деякій шкалі власні оцінки попарних порівнянь компетентності своїх колег і, зокрема, своєї. Таким чином формуються МПП компетентності експертів вигляду (3.1). Елементи μ_{ij}^l $i,j,l\in L$, матриць (3.1) відображають результат порівняння l–м експертом компетентності своїх колег з індексами $i,j\in L$, при розв'язанні конкретної задачі. Головна вимога до таких матриць – їх зв'язність. Матриці взаємооцінки експертів та дослідження відносної компетентності експертів на їх основі розглядалися у роботах [5, 6, 11]. Особливості матриць (3.1) та деякі методи їх одержання розглянуто у розділі 3 цієї монографії. Елементи μ_{ij}^l $i,j,l\in L$, матриць (3.1) можуть задаватися експертами в ординальній або метризованій шкалах. Формули переходу між різними способами задання МПП у метричних шкалах наводяться у табл. 3.1, наведеної у параграфі 3.1 цієї монографії.

При заданні експертами оцінок компетентності колег у метризованому вигляді результуючі значення експертизи шукаються у вигляді вектора вагових коефіцієнтів або ГВК відносної компетентності експертів. Огляд та деякі нові методи визначення вагових коефіцієнтів наводяться у розділі 6 цієї монографії. Можуть також застосовуватися ФН для характеристики рівня компетентності експертів. При цьому виникають проблеми евристичного введення інтервалів компетентності, побудови відповідних лінгвістичних змінних та вибору алгоритма визначення ФН. Деякі нові методи обчислення ФН наводяться у розділі 7 цієї монографії.

Поряд з наведеними підходами мірою компетентності експерта може слугувати, наприклад, кількість парних порівнянь, щодо яких експерт не може встановити числові значення. Цей критерій може, крім того, доповнювати часто згадуваний у літературі, наприклад [16, 18], критерій кількості циклів у заданій експертом якісній матриці переваг. Але цей підхід є правомірним лише у випадку, коли метою експертизи є пряме чи опосередковане визначення порядку на множині об'єктів.

У випадку представлення експертами їхніх уявлень про компетентність колег у ординальній шкалі остаточний результат визначається як ранжування експертів за компетентністю. Для відношень між рівнями компетентності експертів у вигляді ранжувань об'єктів та МПП у ординальних шкалах побудовано методи та алгоритми, описані у розділах 4 та 5. Класифікація задач визначення відносного рівня компетентності експертів у вигляді їх ранжування є подібною до класифікації, наведеної у табл. 4.1 параграфа 4.2 цієї монографії. Під час вибору переваг у вигляді ранжування об'єктів мірою компетентності експерта можуть бути також наступні показники:

- кількість інверсій у заданому експертом ранжуванні по відношенню до результуючого ранжування;
- кількість несуперечливо проранжованих експертом об'єктів;
- сума модулів різниць між рангами об'єктів у результуючому та заданих експертами ранжуваннях тощо.

У роботах [5, 6, 8, 11, 13, 20] пропонується розглядати коефіцієнти компетентності як відносну відстань від експертних ранжувань до результуючого ранжування експертної групи, обчисленого методами, наведеними у розділах 4 та 5. Такий підхід має кілька аспектів залежно від вибраної метрики, способу вимірювання відстаней, використаних при обчисленні результуючого ранжування, критеріїв оптимальності тощо.

8.3. Визначення компетентності експертів на основі аналізу паралелепіпеда вагових коефіцієнтів

Клас методів оцінки компетентності за результатами експертизи є найпоширенішим як щодо сфер практичного застосування, так і щодо спектру задач, що розв'язуються з використанням цього методу. Розповсюдженим видом експертизи є визначення вагових коефіцієнтів, зокрема, методами, описаними у розділі 6, у формі нормованого ГВК. Мірою компетентності експерта, за перевагами якого обчислено ГВК,

може бути "об'єм" цього гіперпаралелепіпеда або його "площа". Для обчислення "об'єму" використовується формула:

$$V = \left(\prod_{i \in I} \left(\rho_i^B - \rho_i^H \right) \right)^{1/n}. \tag{8.9}$$

Для обчислення "площі" гіперпаралелепіпеда застосовують формулу:

$$S = \left(\sum_{i \in I} \left(\rho_i^B - \rho_i^H \right) \right)^{1/n}. \tag{8.10}$$

Зрозуміло, що залежно від інтерпретації, нормований ГВК може бути побудованим для вираження відносної важливості об'єктів $\rho_i, i \in I$, впливовості параметрів на результати експертного оцінювання $\beta_i, i \in J$, чи як показники компетентності експертів $\gamma_i, i \in L$. Як і багато інших експертних методів, такий підхід вимагає введення евристики.

***Евристика* E8.2.** У випадку, коли $\left(\rho_i^B - \rho_i^H \right) \le \varepsilon$, $i \in I$, покладемо $\left(\rho_i^B - \rho_i^H \right) = \varepsilon$, де ε, $\varepsilon > 0$ – деяке досить мале дійсне число.

Зрозуміло, що при визначенні ГВК за експертною МПП, чим віддаленішою від кардинально узгодженої є МПП виду (3.1), тим більшими будуть "об'єм" (8.9) та "площа" (8.10) гіперпаралелепіпеда, який апроксимує цю матрицю. При цьому, відповідно, зменшується показник компетентності експерта. Процедури визначення компетентності експертів на основі аналізу величин ГВК, одержаних в результаті опитування експертів, наводяться в роботах [5, 6, 9–11].

Можливий також аналіз компетентності за експертними МПП без обчислення на їх основі ГВК. Для метризованих МПП, заданих експертами при взаємооцінці, міри компетентності для адитивних відношень можуть бути розраховані на основі відхилень, які виникають через кардинальну неузгодженість відношень переваги:

$$\delta_{ij}^{(A)l} = \left| \mu_{ij} \left(\mu_{jl} + \mu_{il} \right) \right|, \quad 1 \le i < j < l \le k. \tag{8.11}$$

Для мультиплікативних відношень міру компетентності можна задавати формулою:

$$\delta_{ij}^{(M)l} = \begin{cases} \delta^{(M)} = \mu_{ij} \cdot \mu_{jl} / \mu_{il}, \text{ якщо } \delta^{(M)} \geq 1, \\ \delta^{(M)-1}, \text{ якщо } \delta^{(M)} < 1, \; 1 \leq l < i < j \leq k. \end{cases} \quad (8.12)$$

Використовуючи значення відхилень (8.11), (8.12), можна ввести критерії неузгодженості метризованої МПП, тобто "міру якості" експертизи:

- жодне відхилення (8.11), (8.12) не повинно перевищувати значення деякого порогу $\delta^{(1)}: \delta^{(1)} \geq \delta_{ij}^{(A)l}, \delta^{(1)} \geq \delta_{ij}^{(M)l}, \quad \forall i,j,l \in L$;

- сума відхилень по кожному об'єкту не повинна перевищувати деяке задане число $\delta^{(2)}: \; \delta^{(2)} \geq \sum_{i,j \in L} \delta_{ij}^{(A)l}, \delta^{(2)} \geq \sum_{i,j \in L} \delta_{ij}^{(M)l}$, $\forall l \in L$;

- сума усіх можливих відхилень, одержаних у результаті експертизи, не повинна перевищувати деяку апріорно задану величину $\delta^{(3)}: \; \delta^{(3)} \geq \sum_{i,j,l \in L} \delta_{ij}^{(A)l}, \; \delta^{(3)} \geq \sum_{i,j,l \in L} \delta_{ij}^{(M)l}$.

Можна також визначати кількісні характеристики компетентності експертів $\gamma_i^l, \; l \in L$. У випадку групового оцінювання це може бути, наприклад,

$$\gamma_l = \left(1/\delta^l\right) / \sum_{j \in L} \left(1/\delta^j\right), \; l \in L,$$

де $\delta^l = \sum_{i \in L} \sum_{j \in L} \sum_{l \in L} \delta_{ij}^l, l \in L -$ сума усіх відхилень, одержаних за рахунок неузгодженості оцінок l – го експерта. У загальному випадку це може бути наслідком не лише помилок експерта, але й відображувати погану формалізованість задачі, особливості області оцінювання тощо. Підходи до визначення компетентності експертів на основі аналізу відхилень (8.11), (8.12) та їх комбінацій описано у роботах [7-10, 12, 20]. У роботі [9] наведено також результати обчислювального експерименту з визначення коефіцієнтів компетентності за заданою метризованою МПП.

Якщо експерти вибирають з множини об'єктів A деякі об'єкти $a_i \in A, \; i \in I$, що характеризуються єдиним інтегральним показником, і здійснюють їх ранжування, то мірою їх компетентності може слугувати ступінь ранжованості вибраних ними упорядкувань об'єктів. Підходи до обчислення ступеня ранжованості ряду розглянуто у параграфі 4.1 цієї монографії.

Нехай експерти задають відношення між об'єктами у вигляді ординальних МПП $P^i, i \in L$, або у вигляді ранжувань $R^i, \; i \in L$. Результуюче відношення R^* на множині об'єктів є об'єктивно відомим або обчислюється методами, описаними в розділах 4, 5, 6 цієї монографії. Тоді мірою компетентності експертів можуть слугувати відстані d від заданих відношень $P^i, \; i \in L$, чи $R^i, \; i \in L$, до результуючого відношення R^*: $\gamma_i = d\left(P^i, P^*\right), \; i \in L$, або $\gamma_i = d\left(P^i, R^*\right), \; i \in L$. При цьому, для обчислення відстаней можуть застосовуватися різні міри близькості, описані в розділі 1 цієї монографії.

8.4. Компетентність експертів у задачі "узагальненого оцінювання"

У роботах [5, 6, 11] пропонується постановка задачі та метод обчислення відносної компетентності експертів у задачі "узагальненого оцінювання". Ця задача формулюється таким чином.

Група з k експертів з деякими початковими коефіцієнтами компетентності $\gamma_i \in \left[\gamma_i^H, \gamma_i^B\right], \; i \in L$, де γ_i^H, γ_i^B – відповідно нижня та верхня границі шкали вагових коефіцієнтів, оцінює важливість множини об`єктів оцінки з множиною індексів $I = \{1, ..., n\}$. В результаті експертного оцінювання породжується матриця оцінок

$$C^{(0)} = \left(c_{ij}^{(0)}\right), \; i \in L, \; j \in I, \quad (8.13)$$

де $c_{ij}^{(0)} \in \left[c^H, c^B\right], \; i \in L, \; j \in I, -$ оцінка i-м експертом j-го об`єкта, $c^H, c^B$ – відповідно нижня та верхня границі шкали оцінок. Необхідно, враховуючи вагові коефіцієнти компетентності експертів, за їхніми оцінками (8.13) визначити зважені результуючі (інтегровані, агреговані) оцінки кожного об`єкта, обчислити ступені узгодженості суджень експертів щодо значимості кожного об`єкта, оцінити результуючу компетентність експертів за їхніми попередніми оцінками за ознакою узгодженості з більшістю експертів. Матриця оцінок (8.13) може бути неповною. У цьому випадку єдиною вимогою до такої початкової матриці оцінок $C^{(0)}$ є наявність по кожному об'єкту оцінки хоча б одного експерта.

Евристика **Е8.3.** Функція зміни компетентності кожного експерта при оцінюванні ним будь-якого об'єкта задається таблично у вигляді матриці або аналітично у вигляді функції $\varphi_j(\gamma_i)=\gamma_{ij}^{(0)},\ i\in L,\ j\in I.$

Таким чином, коефіцієнт компетентності кожного експерта є змінним і залежить від об'єктів, які він оцінює. Тобто припускається, що деякі об'єкти експерт може оцінювати краще від інших експертів і, відповідно, при оцінці деяких об'єктів він має більші показники компетентності, ніж при оцінці інших об'єктів. Будемо також вважати, що рядки елементів матриці (8.13) є нормованими, тобто $\sum_{i\in L} c_{ij}^{(0)}=1,\ \forall j\in I.$

Враховуючи початкові коефіцієнти компетентності експертів для всієї множини об`єктів $\gamma_{ij}^{(0)},\ i\in L,\ j\in I,$ обчислимо середні оцінки об`єктів

$$c_j^{(1)}=\sum_{i\in L}\gamma_{ij}^{(0)}c_{ij}^{(0)},\ j\in I. \tag{8.14}$$

Обчислимо коефіцієнти компетентності експертів при оцінюванні об'єктів з урахуванням одержаного вектора $\left(c_1^{(1)},...,c_n^{(1)}\right)$ і виконаємо їх нормування

$$\gamma_i^{(1)}=\sum_{j\in I}c_{ij}^{(0)}c_j^{(1)}/\sum_{l\in L}\sum_{q\in L}c_{lq}^{(0)}c_q^{(1)},\ i\in L. \tag{8.15}$$

Величини (8.15) складають новий вектор відносних показників компетентності експертів. При такій процедурі здійснюється також уточнення значень функції зміни компетентності експертів залежно від підмножини оцінюваних об`єктів

$$\varphi_j\left(\gamma_i^{(1)}\right)=\gamma_{ij}^{(1)},\ i\in L,\ j\in I. \tag{8.16}$$

Враховуючи одержані оцінки компетентності експертів, здійснимо повторне обчислення інтегрованих оцінок об`єктів $c_j^{(2)}=\sum_{i\in L}\gamma_{ij}^{(1)}c_{ij}^{(1)},\ j\in I.$

Тепер, враховуючи аналогічним способом оцінки об`єктів $\left(c_1^{(2)},...,c_n^{(2)}\right)$, повторно обчислимо відносні коефіцієнти компетентності експертів, обчислюючи значення $\gamma_i^{(2)}, i\in L,$ за формулами (8.15) і т.д. Ця процедура застосовується до тих пір, поки ГВК, складений із значень $\gamma_i^{(s)}, i\in L,\ s=1,2,...,$ перестане змінюватися.

Зрозуміло, що початкові нормовані вагові коефіцієнти компетентності експертів можуть бути як рівними, так і призначеними до застосування процедури (8.14)–(8.15). В останньому випадку стабілізація переваг стає "направленою" в бік суджень більш "вагомих" експертів. Компетентність експертів у цьому випадку також буде зміщеною.

Якщо задано явні функціональні залежності (8.16) "ваги" експертів від об`єктів, що оцінюються, то вони використовуються на наступних ітераціях: $\gamma_{ij}^{(s)}=\varphi_j\left(\gamma_i^{(s)}\right),\ i\in L,\ j\in I,$ де $\gamma_{ij}^{(s)}$ – величини, обчислені за формулою (8.16). Якщо ж функції зміни компетентності експертів, залежно від оцінюваних об`єктів, задано в табличному вигляді, ця залежність оцінюється для наступних ітерацій на основі співвідношень чи закономірностей, які можна виявити в заданій таблиці (8.16).

Результатом розв`язання задачі буде два масиви даних:

- інтервали оцінок об`єктів $\left[c_j^H,c_j^B\right],\ j\in I,$

де $c_j^H=\min_{s=0,1,...}c_j^{(s)},\ c_j^B=\max_{s=0,1,...}c_j^{(s)}, j\in I,$– відповідно найменше та найбільше значення оцінок для усіх кроків процедури;

- інтервали відносної компетентності експертів $\left[\gamma_i^H,\gamma_i^B\right],$

$i\in L,$де $\gamma_i^H=\min_{s=0,1,...}\gamma_i^{(s)},\ \gamma_i^B=\max_{s=0,1,...}\gamma_i^{(s)}, i\in L.$

У випадку, коли матриця (8.13) не є повною, тобто якщо допускаються ситуації, коли i – й експерт не спроможний оцінити j – й об`єкт, можна запропонувати узагальнення описаної процедури визначення оцінок об'єктів та коефіцієнтів компетентності експертів. Позначимо множину індексів експертів, що оцінюють *i*-й об`єкт через $L_i,\ i\in I,$ $L_i\subseteq L,\ i\in I;$ а через $L_i^?,\ i\in I,\ L_i^?\subseteq L,\ i\in I,$ – множину індексів експертів, що не оцінили *j*-й об`єкт, $L_i \cup L_i^? = L,\ i \in I$.

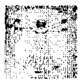
Результуючі (середні, інтегровані, агреговані) оцінки кожного об`єкта з врахуванням умови нормованості на кожному кроці $s = 0,1,2...$, визначаються таким чином:

$$c_j^{(s)} = \sum_{i \in L_i} \gamma_{ij}^{(s-1)} c_{ij}^{(s-1)} / \sum_{l \in L_i} \gamma_{lj}^{(s-1)},\ \ j \in I.$$

Коефіцієнти компетентності експертів на черговому кроці процедури визначаються формулою

$$\gamma_i^{(s)} = \sum_{\substack{j \in I \\ i \in L_j}} \gamma_{ij}^{(s-1)} c_j^{s-(1)} / \sum_{\substack{l \in I \\ i \in L_l}} \sum_{q \in I} \gamma_{lq}^{(s-1)} c_q^{s-(1)},\ \ i \in L.$$

Далі процедура узагальненого оцінювання об'єктів та визначення коефіцієнтів компетентності експертів, які розв'язують цю задачу, для неповних матриць (8.13) описується подібно до процедури, представленої формулами (8.13)-(8.16) для повних матриць.



8.5. Концептуальні принципи і методи проектування експертних систем

На межі XX–XXI століть відбулися стрімкі зміни концепції суспільства, побудованого на знаннях та інформації: комунікаційне суспільство, інформаційне суспільство, суспільство, побудоване на знаннях [15]. Визначальними рисами комунікаційного суспільства є перетворення інформації у цифрову форму, створення сховищ даних та розвиток Інтернету, а також виникнення якісно нових взаємовідносин між людьми, що одержали назву "електронної спільноти". У другій половині 90-х років минулого століття інформація почала грати роль товару, що і стало визначальною рисою інформаційного суспільства. Інтеграція вказаних аспектів з людським творчим компонентом є характерною ознакою суспільства, побудованого на знаннях.

Одним із аспектів, що супроводжують такий процес розвитку є розробка, розвиток та впровадження експертних систем у галузі матеріального виробництва і сферу послуг. На передньому плані такого процесу знаходяться розробка і реалізація концепцій обслуговування територіально віддалених систем. Прикладами сучасних інформаційних технологій є впровадження дистанційного навчання, інтернет-технологій, створення віртуальних підприємств. В Україні їх розповсюдження гальмується слабким розвитком комунікаційної інфраструктури і, не в останню чергу, відсутністю єдиної методології здійснення експертних оцінок, зокрема діагностики і прогнозування. Ця проблема є складною, слабко структурованою і, значною мірою суб'єктивізованою. Ідеї і принципи експертної оцінки територіально віддалених систем та процесів можуть бути успішно реалізованими лише при мінімізації апріорної невизначеності оцінювання і впровадженні експертних систем.

Автоматизовані системи, які використовуються для дистанційного оцінювання, належать до широкого класу інтелектуальних систем і ми, напевно, не помилимося, якщо припустимо, що в кожній українській організації, яка використовує в своїй роботі тестування, оцінювання, експертизу, є не один програмний модуль, за допомогою якого здійснюються експертні оцінки. Більшість з них має досить просту структуру та елементну базу, яка складається з тестів. Кожний тест складається з певної кількості питань. За вірну відповідь на одне питання експерт, наприклад, одержує "1", за невірну – "0". Бали за відповіді на питання підсумовуються. Числовий відрізок можливих результатів розбивається на інтервали, кожному інтервалу відповідає певна оцінка. В кращому випадку питання мають вагові коефіцієнти. Такий підхід до створення і використання експертних систем має ряд важливих передумов:

- створюють програмні реалізації інформаційно-аналітичних систем (ІАС) експертного оцінювання найчастіше фахівці з комп'ютерних наук, які мають досить слабкі знання предметної області та ключових моментів експертизи, а "вузькі" спеціалісти не мають можливості ні оцінки тестів через їх спеціалізованість, ні самостійного створення таких систем через незнання програмування;

- структурна перебудова виробничих та інформаційних процесів, економічна динаміка, змінність законодавчої бази призводить до відсутності репрезентативної статистики і, як наслідок, неможливості створення логічних схем проведення експертного аналізу та створення ІАС;

– повна відсутність єдиної теорії побудови ІАС, моделей і методів, на яких вони мають базуватись: відомо лише окремі підходи, які базуються на елементарній алгебрі і, в кращому разі, елементах статистики;

– задачі, які розв'язуються за допомогою ІАС, є неформалізованими, відсутнє поняття оптимального тесту, не розроблено методи самоорганізації інформаційної бази в процесі функціонування систем, а також, залежно від виду контролю, умови його переривання.

Розглянемо складові елементи ІАС, які використовуються для завершального контролю. До них входять: задачі, правила відповідей на них, власне відповіді і, в більшості випадків, оцінки виконання задач і рекомендації з інтерпретації результатів [1]. ЦФ, яка визначає ефективність експертного контролю, є такою

$$E = F(H_1, H_2, H_3, T, K)$$

де T – час контролю, K – кількість задач, H_1 – ентропія, яка визначається рівнем знань та підготовки експерта і його інтуїцією, H_2 – ентропія, яка властива ОПР при оцінці знань експерта і базується на результатах функціонування експертної системи, досвіді та інтуїції, H_3 – композиційна ентропія зовнішнього середовища, ОПР і експерта. Очевидно, що створення ефективної експертної системи рівносильне розв'язанню задачі, або сукупності задач

$$H_i \to \min,\ i = \overline{1,3},\ T \to \min,\ K \to \min . \qquad (8.24)$$

Процес розв'язання задачі (8.24) має базуватися на наступних принципах:

– необхідною умовою ефективного функціонування експертної системи [24] є розробка логічної схеми задач;

– достатньою умовою є єдина методологія проведення експертного контролю та оцінки його результатів для різних задач;

– ефективне використовування ІАС можливе лише за наявності синергетичних процедур, направлених на зменшення часу контролю і кількості питань.

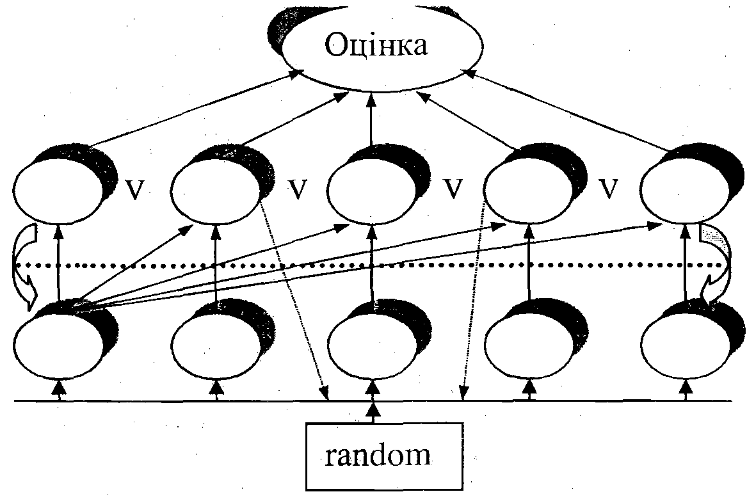


Рис. 8.1. Логічна схема задач

Логічна схема задач розробляється ОПР і може бути побудованою за принципами, наведеними в [24]. Вона має вид графа (рис. 8.1). На нижньому рівні знаходяться питання, які мають кількісну інтерпретацію, і відповіді на них враховуються при визначенні подальшої структури питань. При проведенні процедури контролю питання нижнього рівня вибираються випадковим чином. В графі є вершини, які мають якісне представлення результату, в загальному випадку, у вигляді предикатної функції і визначають перехід до групи питань іншої теми при наборі певної кількості балів. Серед вершин є також такі, які мають логічне представлення результату, що формується внаслідок виконання визначених кон'юнктивних або диз'юнктивних умов, і передбачають припинення тесту як у разі відсутності знань у експерта, так і у випадку відмінних знань. Правильне формування структури і її інформаційне насичення є основним фактором, який визначає ефективне функціонування ІАС.

Розробка єдиної методології експертних оцінок в автоматизованій системі базується на класифікації питань залежно від варіантів відповідей. Прикладом є використання варіантів питань з можливими відповідями, запропонованими в [22] і представленими в параграфі 8.1 типу: "Так-Ні", "один з декількох", „декілька із багатьох", „число", „інтервал", „нечіткий інтервал" [14], „слово", „одне або декілька речень". Слід зазначити [21], що така класифікація є повною і навіть дещо надмірною. Питання першого типу можна вважати частинним випадком питань другого типу, питання четвертого і п'ятого типу з певним наближенням можуть входити до шостого типу. Але для зручності розрахунків і збереження структурованості схеми експертного контролю доцільно ці питання розглядати окремо. Головною проблемою на цьому етапі є приведення оцінок на контрольні питання до єдиної шкали. Очевидно, що відповіді на питання типу „Так-Ні" оцінюються по {0, 1}-шкалі. Оцінка відповідей на питання інших типів має належати відрізку [0; 1], причому абсолютно правильна відповідь має оцінку „1", а неправильна - „0". Для питань другого типу „один з декількох" за єдино правильну відповідь оцінка „1", за неправильні - „0".

Розглянемо питання 3-го типу "декілька з багатьох". Для вірного оцінювання кожній правильній відповіді надаємо бал так, щоб сума всіх балів дорівнювала одиниці. Кожний бал визначається, виходячи з правильності і важливості відповіді. Усі можливі ситуації і оцінки наведено в табл. 8.1.

Таблиця 8.1. **Оцінювання відповідей на питання 3 типу**

№ п/п	Ситуація	Бал
1	Однакова кількість правильних і неправильних відповідей незалежно від їх бальності	0
2	Всі вибрані відповіді мають бал "0" (за змовчанням серед відповідей є хоча б одна неправильна)	0
3	Кількість неправильних відповідей перевищує кількість правильних	0
4	Вибрано всі відповіді	0
5	Кількість k_t правильних відповідей (сума балів $S_t = b_1 + b_2 + \ldots + b_{k_t}$) перевищує кількість k_n неправильних відповідей	L
$L = S_t - \max(b_{i_1} + \ldots + b_{ik_n})$		

Для того, щоб адекватно оцінити відповіді у вигляді числа, ОПР має задати найімовірніше значення результату m і середнє квадратичне відхилення σ у разі симетричного розподілу можливого результату та m, σ_1, σ_2, якщо розподіл асиметричний. Тоді бал за відповідь розраховується за наступними формулами:

$$p = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{m-x_0}^{m+x_0} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx\right) / 0,9973,$$

якщо $p \in (-3\sigma, 3\sigma)$ і $p = 0$ в іншому випадку.

Для асиметричного розподілу $p = p_1 / p_2$, причому при

$$x_0 \in (m - 3\sigma_1, m) \quad p_1 = \int_{x_0}^{m} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_1^2}} dx, \quad p_2 = \int_{m-3\sigma}^{m} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_1^2}} dx.$$

Якщо $x_0 \in (m, m + 3\sigma_2)$, то

$$p_1 = \int_{m}^{x_0} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_2^2}} dx, \quad p_2 = \int_{m}^{m+3\sigma_2} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_2^2}} dx,$$

для $x_0 \in (m - 3\sigma_1, m)$ $p_1 = \int_{x_0}^{m} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_1^2}} dx$, $p_2 = \int_{m-3\sigma}^{m} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_1^2}} dx$.

Для $x_0 \in (m, m + 3\sigma_2)$ $p_1 = \int_{m}^{x_0} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_2^2}} dx$, $p_2 = \int_{m}^{m+3\sigma_2} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_2^2}} dx$ і $p = 0$ в інших випадках. При визначенні міри правильності відповідей слід скористатися правилом 3σ, відомим із теорії ймовірностей.

Якщо питанням передбачена відповідь у вигляді інтервалу і відповіддю експерта є інтервал (α, β), а ОПР вважає, що правильною відповіддю слід вибрати (a, b), то бал за відповідь визначається таким чином:

- $p = 0$, якщо $(\beta \le a) \vee (\alpha \ge b)$;
- $p = 1$, якщо $(a \le \alpha) \wedge (\beta \le b)$;
- $p = \dfrac{b - \alpha}{b - a}$, якщо $(a < \alpha) \wedge (\beta > b) \wedge (\alpha < b)$;

– $p = \dfrac{\beta - a}{b - a}$, якщо $\alpha < a < \beta < b$.

Найскладнішою і дискусійною щодо оцінювання є відповідь у вигляді нечіткого інтервалу [14, 21]. Нехай експерт вказує на інтервал $(\underline{m},\overline{m},\alpha,\beta,h)$ як правильний, а ОПР вважає, що вірним є інтервал $(\underline{M},\overline{M},A,B,H)$. Зробимо раціональне спрощення $h = H = 1$, яке свідчить про те, що впевненість у деяких значеннях і у експерта, і у ОПР є максимальною.

Вважатимемо, що $p = 0$, якщо

$$(\overline{m}+\beta < \underline{M} - A) \vee (\overline{M} + B < \overline{m}+\beta) \text{ і } p = p_1 + p_2, \text{ де}$$

$$p_1 = \frac{\mathrm{len}([\underline{m},\overline{m}]\cap[\underline{M},\overline{M}])}{\mathrm{len}([\underline{M},\overline{M}])},\ p_2 = \frac{k_1\mathrm{len}(\mathrm{пр}([\underline{m}-\alpha,\underline{m}]\cap[\underline{M}-A,\overline{M}+B]))}{\mathrm{len}([\underline{M}-A,\underline{M}]\cup[\overline{M},\overline{M}+B])} +$$

$$+\frac{k_2\mathrm{len}(\mathrm{пр}([\overline{m},\overline{m}+\beta]\cap[\underline{M}-A,\overline{M}+B]))}{\mathrm{len}([\underline{M}-A,\underline{M}]\cup[\overline{M},\overline{M}+B])},$$

в іншому випадку, k_1, k_2 – коефіцієнти, які відображають міри перетину і скошеності графіків ФН, $\mathrm{len}(*)$ – функція довжини. Остання формула є дискусійною, але в першому наближенні вона дає несуперечливі результати і є відкритою для внесення змін і доповнень.

Питання з відповідями типу „слово" оцінюється за синонімічною ознакою. Приклад такого питання: „Якщо об'єкт має вказані властивості, то як він називається?" Кожному слову-синоніму призначається бал – оцінка семантичної відповідності правильній відповіді. Єдина абсолютно правильна відповідь оцінюється „1", абсолютно неправильна – „0". Відповідь має вищий бал з інтервалу $(0;1)$, якщо вона є більш „синонімічною" абсолютно правильній відповіді.

Якщо питання передбачає розширену відповідь у вигляді одного або декількох речень, то оцінити її автоматизованою системою на сучасному рівні розвитку технічних засобів неможливо і вона оцінюється ОПР емпірично.

Сумарний бал підраховується з використанням вже відомих адитивних або мультиплікативних процедур, оскільки всі оцінки є приведеними до $[0;1]$-шкали, і надалі визначається оцінка експерта. Таким чином об'єднання двох формалізованих схем: побудови логічної схеми задач і приведення до єдиної шкали всієї різноманітності варіантів відповідей дає можливість ефективного проектування і створення автоматизованих ІАС.

Будь-яка ІАС є ефективною лише тоді, коли вона здатна адекватно реагувати на відповіді конкретного експерта. Ця реакція повинна передбачати самоорганізацію як структури логічної схеми задач, так і наповнення інформаційної бази. Синергетичні ефекти, які будуть досягнуті в результаті цих процедур, забезпечать оптимальну роботу як експерта, так і ОПР над оцінюванням результатів експертизи.

Разом із тим, необхідно зауважити, що побудова ефективних ІАС є композицією знань експертів у трьох предметних областях: галузі дослідження, комп'ютерних науках і ЗЕО. На жаль, фахівці високого рівня одночасно в усіх цих областях є досить рідкісними. І саме тому створення "канонічних" ІАС в найближчому майбутньому в Україні не очікується. Але це не означає припинення робіт із створення нових і використання існуючих ІАС. Країна рухається, на жаль досить повільно, у напрямку створення інформаційного суспільства на першому етапі, до "суспільства без кордонів" – на другому і до "суспільства, що базується на знаннях" – на третьому етапі, що прискорюватиме розвиток інформаційно-аналітичних технологій і використання ІАС у різних галузях господарства, сфері послуг, науці та освіті.

8.6. Приклади застосування методів та алгоритмів визначення компетентності експертів

Необхідно визначити рівні компетентності п'яти експертів. Задано три питання, відповідями на які є нечіткі інтервали:

1. В яких межах фінансування наукових досліджень на промисловому підприємстві (ПП) є оптимальним?

2. Які терміни є оптимальними, на думку експерта, для введення ПП в експлуатацію?

3. Який прибуток очікується в перший рік функціонування ПП?

Відповіді експертів зведено в табл. 8.2

Таблиця 8.2. **Варіанти відповідей експертів**

№	Номер питання																	
	1						2						3					
	$\underline{m}$	$\overline{m}$	α	β	h	w_i^1	$\underline{m}$	$\overline{m}$	α	β	h	w_i^1	$\underline{m}$	$\overline{m}$	α	β	h	w_i^1
1	100	120	20	20	1	110	200	220	70	20	1	197,5	70	75	10	15	1	73,75
2	90	100	10	20	1	97,5	190	220	20	40	1	210	60	70	25	25	1	65
3	140	180	40	50	1	162,5	230	260	40	30	1	242,5	50	80	20	30	1	67,5
4	130	140	10	10	1	135	180	240	30	40	1	212	55	65	10	15	1	61,2
5	135	155	20	30	1	147,5	235	245	20	30	1	242,5	75	80	5	15	1	80

Значення w_i^k, $k=\overline{1,3}$, отримано за формулою (8.6). Далі обчислюються елементи і формуються матриці T_6^k

$$T_6^1 = \begin{pmatrix} 0,19 & & & \\ 0,80 & 1 & & \\ 0,38 & 0,58 & 0,42 & \\ 0,58 & 0,8 & 0,23 & 0,19 \end{pmatrix},\quad T_6^2 = \begin{pmatrix} 0,28 & & & \\ 1 & 0,72 & & \\ 0,33 & 0,06 & 0,67 & \\ 1 & 0,72 & 1 & 0,67 \end{pmatrix},$$

$$T_6^3 = \begin{pmatrix} 0,47 & & & \\ 0,30 & 0,13 & & \\ 0,67 & 0,20 & 0,33 & \\ 0,36 & 0,8 & 0,67 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розраховуються матриці, елементи яких є оберненими до елементів T_6^k, і знаходяться їх суми

$$\begin{pmatrix} 5,3 & & & \\ 1,25 & 1 & & \\ 2,6 & 1,7 & 2,4 & \\ 1,7 & 1,2 & 4,3 & 5,3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3,6 & & & \\ 1 & 1,4 & & \\ 3 & 16,7 & 1,5 & \\ 1 & 1,4 & 1 & 1,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2,1 & & & \\ 3,3 & 7,7 & & \\ 1,5 & 5 & 3 & \\ 2,8 & 1,2 & 1,5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & & & \\ 5,5 & 10,1 & & \\ 7,1 & 23,4 & 6, & \\ 5,5 & 3,9 & 6,8 & 7,8 \end{pmatrix}.$$

Далі знаходяться абсолютні значення рівнів компетентності $\gamma_1 = 29,15$, $\gamma_2 = 48,4$, $\gamma_3 = 29,35$, $\gamma_4 = 45,2$, $\gamma_5 = 24$. Нормуючи їх, визначаються відносні рівні компетентності $\overline{\gamma}_1 = 0,16$, $\overline{\gamma}_2 = 0,27$, $\overline{\gamma}_3 = 0,17$, $\overline{\gamma}_4 = 0,26$, $\overline{\gamma}_5 = 0,14$. Нехай, наприклад, ОПР вважає, що рівень його компетентності відноситься до рівня компетентності групи

експертів як 2:3, і при цьому він a priori призначив експертам рівні компетентності $\gamma_1^l = 0,05$, $\gamma_2^l = 0,05$, $\gamma_3^l = 0,1$, $\gamma_4^l = 0,2$, $\gamma_5^l = 0,6$. Тоді остаточні рівні компетентності знаходимо за формулою

$$\gamma_i = (3\overline{\gamma}_i + 2\gamma_i^l) / \sum_{i=1}^{5} (3\overline{\gamma}_i + 2\gamma_i^l)$$

і вони рівні $\gamma_1 = 0,11$, $\gamma_2 = 0,19$, $\gamma_3 = 0,14$, $\gamma_4 = 0,24$, $\gamma_5 = 0,32$.

Література до розділу 8

1. *Аванесов В.С.* Научные основы тестового контроля знаний. – М.: Иссл. центр, 1994. – 135 с.

2. *Адамов А.П., Гаджиев Ю.А., Пирбудагов Г.М., Соцкая А.Н.* Об определении компетентности экспертов методом взаимооценки // Автоматика и телемеханіка. –1989. – № 3. – С. 185–189.

3. *Бешелев С.Д., Гурвич Ф.Г.* Математико-статистические методы экспертных оценок. – М.: Статистика, 1980. – 263с.

4. *Бешелев С.Д., Гурвич Ф.Г.* Экспертные оценки. – М.: Наука, 1974. – 256 с.

5. *Волошин О.Ф., Гнатієнко Г.М.* Процедури визначення компетентності експертів// Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 1993. – № 3. – С. 102–111.

6. *Гнатієнко Г.М.* Деякі математичні аспекти соціальної експертизи // Соціальна експертиза в Україні: методологія, методика, досвід впровадження/ За ред. Ю.І. Саєнка. – К.: Ін-т соціології НАНУ, 2000. – 194 с.

7. *Гнатиенко Г.Н.* Задание предпочтений на множестве Критериальных функций в задачах многокритериальной оптимизации // Вестн. Киев. ун-та. Моделирование и оптимизация сложн. систем. – 1990. – Вып. 9. – С. 87–92.

8. *Гнатієнко Г.М.* Класифікація задач однієї моделі аналізу даних / Київ. ун-т. – К., 1992. – 89 с. – Деп. в УкрНДІНТІ 18.06.92, № 911 – Ук92.

9. *Гнатієнко Г.М., Косматий Д.Ю.* Апроксимація метризованої матриці парних порівнянь конусом переваг // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 1993. – № 3. – С. 122–128.

10. *Гнатиенко Г.Н., Косматый Д.Ю.* Обобщение метода стабилизации предпочтений на случай неполных метризованных матриц парных сравнений / Киев. ун-т. – К., 1992. – 22 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 8.06.1992, № 847 – Ук92.

11. *Гнатієнко Г.М.* Методи оцінки компетентності спеціалістів. Математичні та інформаційні проблеми прогнозування наслідків техногенних та природних катастроф / Соціально-економічні наслідки техногенних та природних катастроф: експертне оцінювання; Відп. ред.: В.В. Дурдинець, Ю.І. Саєнко. – К.: "Стилос", 2000. – 260 с.

12. *Гнатиенко Г.Н.* Метод косвенного задания интервалов относительной важности критериальных функций в задачах многокритериальной оптимизации / Киев. ун-т. –К., 1992. – 11 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 8.06.1992, № 848 – Ук92.

13. *Гнатиенко Г.Н.* Система поддержки принятия решений в задачах анализа данных на базе СМ ЭВМ / Киев. ун-т. – К., 1992. – 22 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 18.02.92, № 211–92.

14. *Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей. – М.: Радио и связь, 1990. – 286 с.

15. *Згуровский М.З.* Путь к информационному обществу – от Женевы до Туниса // Зеркало недели. – 2005. – № 562.

16. *Макаров И.М., Виноградская Т.М., Рубчинский А.А. и др.* Теория выбора и принятия решений: Учебное пособие. – М.: Наука, 1982. – 328 с.

17. *Матвеевский С.Ф.* Основы системного проектирования комплексов летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1987. – 239 с.

18. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. – М.: Наука, 1974. – 256 с.

19. *Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П.* Введение в системный анализ. – М.: Высшая школа, 1989. – 367 с.

20. Разработка математического и программного обеспечения для задач принятия решений на основе экспертной информации в условиях локальной сети ЕС-СМ-ПЭВМ со стороны СМ ЭВМ / А.Ф. Волошин, Г.Н. Гнатиенко и др. – К., 1989. – 86 с.

21. *Снитюк В.Є.* Концептуальні принципи та методи проектування систем автоматизованого контролю знань // Харьков: АСУ и приборы автоматики. – 2003. – Вып. 123. – С. 40–43.

22. *Снитюк В.Є.* Методи зменшення невизначеності на початкових етапах проектування систем із змінною структурою. Автореф. дис. канд. техн. наук / К.: КНУБА, 1999. – 18 с.

23. *Снитюк В.Е., Рифат Мохаммед Али.* Модели и методы определения компетентности экспертов на базе аксиомы несещенности // Черкаси: Вісник ЧІТІ. – 2000. – № 4. – С. 121–126.

24. *Тимченко А.А., Родионов А.А.* Основы информатики системного проектирования объектов новой техники. – К.: Наук. думка, 1991. – 152 с.

25. Gharajedaghi J., Ackoff R.L. Toward Systemic Education of System Scientists.// Systems Research. – 1985. – Vol. 2. – № 1. – Pp. 21–27.

Післямова

Значну частину прикладних задач неможливо розв'язати без залучення експертної інформації. Але у більшості випадків недооцінюється значення процесу її коректного одержання та обробки. Крім того, аналіз практичних ситуацій прийняття рішень свідчить про недостатнє використання наукових результатів для розв'язання реальних задач.

Одним із завдань цієї монографії була спроба наблизити психологічні аспекти прийняття рішень до математичного інструментарію, який традиційно використовується у задачах підтримки прийняття рішень та суміжних галузях досліджень.

Викладені у монографії методи та алгоритми є результатом більше ніж 20-річних наукових досліджень. За результатами цих досліджень під керівництвом авторів захищено кілька кандидатських дисертацій та декілька десятків дипломних робіт.

Деякі з описаних у книзі методів стали основою спецкурсів, які викладаються у багатьох вищих навчальних закладах у різних містах України.

Безумовно, багато з описаних у книзі наукових результатів потребують подальшого дослідження та розвитку. Зокрема, актуальними та перспективними завданнями є представлення розв'язків задач за описаними методами та алгоритмами, здійснення серії обчислювальних експериментів, розширення застосування описаних підходів до інших класів задач тощо.

Розділи 1, 3, 5, 6 цієї монографії та розділ 4, за виключенням параграфа 4.8, написано Гнатієнком Г.М. Параграфи 2.6, 2.7, 2.8, 4.8, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 8.1, 8.6, 8.7 відповідних розділів написано Снитюком В.Є. Параграфи 2.5 та 7.11 написані спільно Снитюком В.Є. та Гнатієнком Г.М. Параграфи 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.9, 7.1, 7.7, 7.8, 7.9, 7.10, 8.2, 8.3, 8.4, 8.5 відповідних розділів написано Гнатієнком Г.М.

Автори будуть вдячні за зворотний зв'язок щодо проблематики монографії. Наші електронні адреси:

G.Gnatienko@veres.com.ua, **snytyuk@gmail.com**.

Наукове видання

Григорій Миколайович Гнатієнко
Віталій Євгенович Снитюк

Експертні технології прийняття рішень

Монографія

Редактор: *Василенко Людмила Геннадіївна*
Коректор: *Наслєдова Тетяна Анатоліївна*
Технічний редактор: *Чабаненко Юлія Анатоліївна*
Комп'ютерна верстка: *Садовий Анатолій Іванович*
Художнє оформлення: *Гнатієнко Олексій Григорович*

Підписано до друку 15.10. 2007 р. Формат $60 \times 84\ {}^1/_{16}$.
Папір офсетний №1. Гарнітура Book Antiqua. Друк офсетний.
Умовн. -друк. аркушів – 27,53. Обл. -вид. аркушів – 26,42.
Наклад 1000 примірників. Замовлення № 163

Видавництво „Маклаут"
Свідоцтво ДК №3014 від 11.08. 2007 р.
18001, м. Черкаси, вул. С. Волкова, 145,
тел. (0472) 45-70-32
E-mail: office@lupost.com