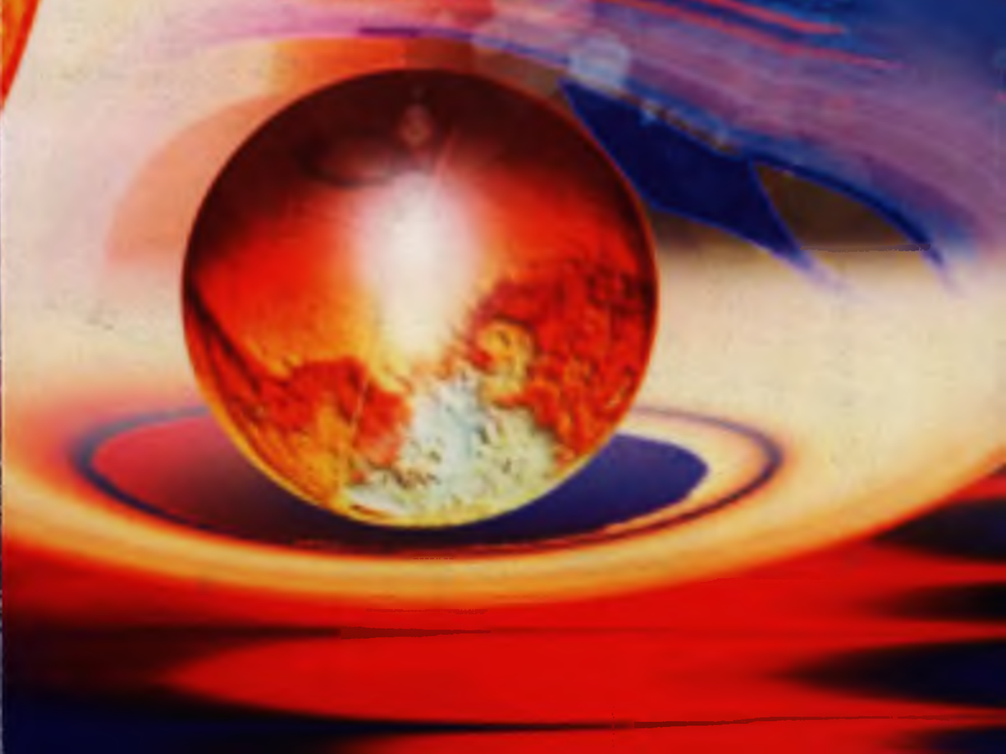
Я.С. Гнатюк

# Сучасна символічна логіка



Я.С. Гнатюк

# Сучасна символічна логіка

## Лекційний курс



Івано-Франківськ
«СИМФОНІЯ ФОРТЕ»
2010

УДК 164(075)
ББК 87.4
Г-56

Розглянуто і рекомендовано до друку Вченою радою філософського факультету Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, Протокол № 8 від 20 квітня 2010 року.

**Рецензенти:**

Атаманюк Б.В., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри і геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Даниляк Р.П., кандидат філософських наук, доцент кафедри філософії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника;

Дрогомирецький П.П., кандидат філологічних наук, доцент кафедри загального та германського мовознавства Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника;

Пятківський Р.О., кандидат філософських наук, доцент кафедри філософії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника;

Соловко Я.Т., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри радіофізики та електроніки Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

**Гнатюк Я.С.**

Г-56 Сучасна символічна логіка: Лекційний курс: Навч. посібн. – Івано-Франківськ : Симфонія форте, 2010. – 160 с.
ISBN 978-617-7009-24-6

Пропонований навчальний посібник є спробою доступного викладу вихідних понять й припущень, концепцій та теорій сучасної символічної логіки. При підготовці лекцій до друку було враховано результати, отримані шляхом розробки актуальних проблем сучасного логічного знання. Навчальний посібник знайомить читача із базовими розділами сучасної символічної логіки – класичними логіками (логікою висловлювань і логікою предикатів) та некласичними логіками (модальною, алетичною, темпоральною, епістемічною, деонтичною логіками).

Для студентів та аспірантів філософських спеціальностей, а також усіх, хто цікавиться здобутками сучасної символічної логіки.

УДК 164(075)
ББК 87.4

ISBN 978-617-7009-24-6





ЗМІСТ

Вступ ............ 3
*Лекція 1*. Сучасна символічна логіка, її специфіка та принципи ............ 5
*Лекція 2*. Логіка висловлювань як теорія ............ 16
*Лекція 3*. Табличне визначення формул логіки висловлювань ............ 29
*Лекція 4*. Головні закони логіки висловлювань ............ 45
*Лекція 5*. Нормальні форми формул логіки висловлювань ............ 54
*Лекція 6*. Натуральне числення логіки висловлювань ............ 62
*Лекція 7*. Логіка предикатів як теорія ............ 71
*Лекція 8*. Семантика логіки предикатів ............ 83
*Лекція 9*. Натуральне числення логіки предикатів ............ 96
*Лекція 10*. Модальна логіка як теорія ............ 104
*Лекція 11*. Алетична пропозиційна логіка ............ 113
*Лекція 12*. Темпоральна пропозиційна логіка ............ 128
*Лекція 13*. Епістемічна пропозиційна логіка ............ 139
*Лекція 14*. Деонтична пропозиційна логіка ............ 149

## Вступ

***Сучасна символічна логіка*** за предметом дослідження та методологічною проблематикою вважається гуманітарною дисципліною (***частиною філософії***), за методами дослідження – природничою дисципліною (***частиною математики***), а за своєю метою та завданнями – соціальною дисципліною (***частиною лінгвістики***). Звідси її ***міждисциплінарний характер***, інтенсивний розвиток на перетині предметних полів трьох різних наукових дисциплін – філософії, математики та лінгвістики.

Сучасна символічна логіка поєднує в собі точність математичної та образність й метафоричність гуманітарної думки. Цим пояснюється її синтетична специфіка, ***науковий статус синтетичної дисципліни***.

Здобутки й напрацювання сучасної символічної логіки, особливо в галузі теорії логічного випливання й логічної семантики, розширюють методологічні можливості наукових досліджень, відкривають нові горизонти для вдосконалення повсякденної розумової праці. Тому знайомство з нею вкрай необхідне студентам й аспірантам філософських спеціальностей, викладачам філософських дисциплін, усім, хто займається інтелектуальною діяльністю, працює у сфері науки або управління.

Лекційний курс «***Сучасна символічна логіка***» читається студентам філософських спеціальностей після засвоєння ними дисципліни «***Традиційна логіка***». Цим підкреслюється ***момент спадкоємності між традиційним та сучасним етапами розвитку логічного знання*** та наголошується на ***єдності логіки як науки***.

Курс «***Сучасна символічна логіка***», який включає в себе лекції, присвячені класичним та некласичним логікам, побудований таким чином:

***Класичні логіки***:

Лекція 1. Сучасна символічна логіка, її специфіка та принципи
Лекція 2. Логіка висловлювань як теорія
Лекція 3. Табличне визначення формул логіки висловлювань
Лекція 4. Головні закони логіки висловлювань



Лекція 5. Нормальні форми формул логіки висловлювань
Лекція 6. Натуральне числення логіки висловлювань
Лекція 7. Логіка предикатів як теорія
Лекція 8. Семантика логіки предикатів
Лекція 9. Натуральне числення логіки предикатів

***Некласичні логіки***:

Лекція 10. Модальна логіка як теорія
Лекція 11. Алетична пропозиційна логіка
Лекція 12. Темпоральна пропозиційна логіка
Лекція 13. Епістемічна пропозиційна логіка
Лекція 14. Деонтична пропозиційна логіка

Пропонований курс може зацікавити тих дослідників, які працюють ***в галузях***:

– ***математики, програмування та філософії математики*** (лекції 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9);
– ***лінгвістики, семіотики й лінгвістичної філософії*** (лекції 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14);
– ***етики, теорії держави і права, філософії права*** (лекції 1, 2, 3, 4, 6, 12, 13, 14);
– ***економічної теорії, філософії економіки*** (лекції 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14);
– ***історії, соціальної філософії та філософії історії*** (лекції 1, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14);
– ***метафізики й онтології*** (лекції 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12);
– ***гносеології та епістемології*** (лекції 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14).

## Лекція 1
## Сучасна символічна логіка, її специфіка та принципи

План лекції

1. **Визначення сучасної символічної логіки.**
2. **Мова сучасної символічної логіки.**
3. **Принципи побудови та структура сучасної символічної логіки.**

Виклад лекції

### 1. Визначення сучасної символічної логіки

Для позначення сучасного етапу в розвитку логіки як науки, зокрема найменування його інтенсивної стадії, часто використовують терміни «*математична логіка*», «*символічна логіка*», «*сучасна логіка*», «*сучасна символічна логіка*». Названі терміни в одних випадках їхнього застосування вважаються тотожними, в інших – не ототожнюються. Тому ***між ними інколи немає повного збігу***. Вони при розрізнюючому застосуванні, як правило, мають неоднакове змістовне навантаження.

Термін «*математична логіка*» вперше згадується в ***1791 р.*** у трактаті *Соломона Маймона* «*Досвід нової логіки*». У ньому прикметник «*математична*» підкреслює схожість логіки із математикою, яка проявляється у застосуванні ***особливої символьної мови***, подібної до мови алгебри, або, іншими словами, ***формалізованої мови***, та використанні ***аксіоматичного методу***.

***Аксіоматичним методом*** (від грецьк. *axiota* – безсумнівне, загальновідоме) ***прийнято називати спосіб побудови наукової теорії, за яким деякі її положення без доведення визначаються як головні, а решту положень виводяться з них логічним шляхом або, іншими словами, дедукцію теорем із аксіом***. Він характеризується такими ***трьома рисами***:

1) явним формулюванням вихідних положень (аксіом) тієї чи іншої наукової теорії;
2) явним формулюванням логічних засобів (правил виведення), які допускаються для послідовної побудови (розгортання) цієї наукової теорії;
3) використанням спеціальних штучно побудованих мов для викладу усіх положень (теорем) цієї наукової теорії.



***Математичною логікою*** у наш час ***називають логічну теорію, яка розвивається математичними методами*** або, інакше кажучи, ***науку, що вивчає формальну структуру міркувань засобами математики.***

Для виявлення логічної структури міркувань у логіці та математиці створюють спеціальні штучні мови, які отримали назву формалізованих мов. ***Формалізована мова – це спеціальна штучна мова, в якій вирази природної мови замінюються на спеціальні символи, за якими закріплюється певне значення***. Її інші назви – формальна модель, логічне числення.

Засобом створення та розвитку формалізованих мов є формалізація. Термін «***формалізація***» (від лат. ***formalis*** – складений за формулою) має ***кілька значень***:

1) виявлення логічної структури змістовних міркувань;
2) заміна змістовних термінів міркування відповідними послідовностями символів або формулами;
3) запис наслідків змістовного міркування за допомогою символів;
4) переклад висловлювань природної мови на спеціальну штучну мову науки;
5) побудова моделі, в якій змістовним міркуванням відповідають їхні формальні аналоги.

Однак варто взяти до уваги те, що терміни «*математича логіка*» й «*сучасна логіка*» не є рівнозначними. ***Математична логіка – це лише один із прикладних аспектів сучасної логіки, який досліджує основи математики.***

Широке використання в математичній логіці спеціальної мови символів та застосування формального апарату для логічного обґрунтування математичного знання певною мірою спричинило появу терміна «*символічна логіка*». Цей термін з'явився у ***1881 р.*** у вигляді назви твору ***Дж. Венна***.

***Символічна логіка характеризується трьома специфічними рисами***:

1) вживанням знаків, які вводяться для позначення термінів;
2) наявністю дедуктивного методу;
3) використанням змінних, які мають різні області значень.

У теперішній час ***символічна логіка вважається теорією класичних логічних числень*** або, іншими словами, ***наукою про формалізовані мови сучасних класичних логік в їхніх синтаксичних та семантичних аспектах***.

***Логічним численням називають формальний алгоритм побудови нових символічних об'єктів із заданих*** (від лат. ***algorithmus*** – сукупність правил). Розрізняють натуральні та аксіоматичні числення. ***До складу натуральних числень входять такі головні компоненти***:

1) мова числення;
2) правила виведення.

***Аксіоматичні числення містять наступні головні компоненти***:

1) мова числення;
2) аксіоми числення;
3) правила виведення.

Логічні числення розглядаються у синтаксичній частині символічної логіки.

Терміни «*символічна логіка*» й «*математична логіка*» тільки *частково збігаються*, особливо у тому випадку, коли мова йде про сучасну класичну логіку. Й тому ***до появи сучасної некласичної логіки термін «символічна логіка» означав те саме, що й термін «математична логіка»***. Але з її появою ці терміни почали розрізняти. Через це й терміни «*символічна логіка*» та «*сучасна логіка*», які сьогодні інколи розглядаються як рівнозначні, не слід ототожнювати. Вони ***лише частково сумісні***. Символічна логіка у деяких випадках виступає у ролі іншої назви сучасної класичної логіки. Звідси зрозуміло, що терміни «***математична логіка***», «***символічна логіка***» й «***сучасна класична логіка***» з певними застереженнями, насамперед це стосується терміна «***математична логіка***», ***можна вважати тотожними***.

Термін «***сучасна логіка***» попередньо був запропонований в ***1951 р***. у творі ***Я. Лукасевича «Аристотелева силогістика з точки зору сучасної формальної логіки»***, а потім остаточно закріплений у ***1969 р. О. Суботіним*** в його дослідженні «***Традиційна і сучасна формальна логіка***».



***Сучасну логіку*** зазвичай ***визначають як історичний етап розвитку логічного знання, який розпочався із середини XIX ст. й триває дотепер***. Це другий етап у розвитку логіки як єдиної науки, що прийшов на зміну першому – традиційній логіці. Відповідно, ***традиційною логікою називають історичний етап розвитку логічного знання, який тривав від IV ст. до н.е. до середини XIX ст. н.е***. Інколи ***традиційну логіку*** визначають як ***логіку природної, гібридної або напівформалізованої мови***, а ***сучасна логіку*** – як ***логіку штучної, формалізованої мови***.

***Принципова відмінність між сучасною та традиційною логікою*** полягає, ***по-перше, у протилежному підході до аналізу міркування***. Традиційна логіка вивчає абстрактне мислення та три головні форми, на яких воно базується: першу – поняття, другу – судження, третю – умовивід. Сучасна ж логіка досліджує мову як засіб пізнання, її смислові аспекти. Й тому у ній йдеться не про форми мислення, а про терміни (імена й висловлювання) та комбінації висловлювань у міркуваннях. ***По-друге, сучасна логіка відрізняється від традиційної й за повнотою застосування методу формалізації***, який базується на заміні природної мови штучною мовою логіки. У сучасній логіці формалізація як головний метод застосовується послідовніше, у більш досконалій, чистій формі, без жодних засобів природної мови.

Враховуючи те, що терміни «***сучасна логіка***» й «***символічна логіка***» інколи вважаються тотожними, хоча це й не зовсім точно, ***К. Жоль*** у ***2000 р***. в навчальному посібнику «***Логіка. Вступ до сучасної символічної логіки***» ввів у науковий обіг новий термін – «***сучасна символічна логіка***» для позначення сучасного стану наукових розробок у символічній логіці. ***Цим терміном підкреслюється***, з одного боку, єдність логіки як науки, ***її міждисциплінарний характер***, – на перетині предметних полів філософії, математики й лінгвістики, а з іншого боку – ***специфіка точних математичних методів***, якими вона послуговується.

***Сучасну символічну логіку***, таким чином, ***можна визначити як науку, яка вивчає формалізовані мови класичних та некласичних логік, досліджує їхні синтаксичні, семантичні й прагматичні аспекти***.

**2. Мова сучасної символічної логіки**

Сучасна символічна логіка має знаковий або *семіотичний характер* (від грецьк. *sema* – знак).

***Знак – це матеріальний об'єкт, який у процесі мислення та спілкування людей представляє якийсь інший об'єкт.***

Кожний знак має значення, оскільки щось позначає. ***Розрізняють два основних типи значення знака: предметне і смислове.***

***Предметне значення знака, або денотат*** (від лат. *denotatio* – позначення), ***– це предмет, що позначається цим знаком.***

***Смислове значення знака, або смисл, – це зміст знака, який засвоюється у процесі його розуміння. Іншими словами, смисл знака – це сукупність суттєвих рис, властивостей, характеристик предмета, який позначається цим знаком.***

Смислове значення є у кожного знака, предметне – лише у тих знаків, які позначають реально існуючі предмети.

Так, для імені «*Аристотель*» предметним значенням буде виступати сама людина, яку звали «*Аристотель*», а смисловим значенням у різних знакових ситуаціях можуть виступати ті чи інші властивості цієї людини: «*давньогрецький філософ*», «*засновник логіки*», «*учень Платона*», «*вчитель Олександра Македонського*».

***Виокремлюють мовні та позамовні знаки.***

***Мовний знак – це одиниця мови, зокрема, буква, слово, словосполучення, речення.***

До мовних знаків зараховують знаки-символи та знаки-індекси.

***Знаки-символи – це знаки, що фізично ніяк не пов'язані з об'єктами, які вони позначають. Їхні значення встановлюють переважно за умовною згодою. У зв'язку з цим вони набувають статусу умовного позначення та всезагального правила.*** Більшість слів будь-якої етнічної чи національної мови є знаками-символами.

***Знаки-індекси – це знаки, що не мають значної фізичної схожості зі своїми об'єктами. Їхнє значення повністю визначене тим контекстом, в якому їх застосовують. Вони безпосередньо вказують на позначувані ними об'єкти, служать для того, щоб розпізнати ці об'єкти, переконатись в їх існуванні та наявності.*** Прикладом таких знаків є займенники, деякі прислівники (*тут, зараз, завтра* тощо).



***Позамовний знак – це копія, креслення, карта, образ і тому подібне.***

До позамовних знаків зараховують іконічні знаки.

***Іконічні знаки – це знаки, що фізично дуже схожі на об'єкти, які вони позначають. Їхнє значення повністю обумовлене тими об'єктами, яким вони відповідають.*** Прикладами іконічних знаків є фотографії, картини, відбитки пальців тощо.

***Мова – це система знаків й правила їх поєднання, тлумачення та вживання.*** Вона є необхідною для:

1) вираження внутрішнього світу людини;
2) опису реальності;
3) створення норм, що координують спільну діяльність людей.

***За способом походження мови поділяють на:***

1) природні;
2) штучні.

***Природними мовами називають знакові системи, які склалися стихійно в умовах практичної взаємодії людей.*** До них належать етнічні та національні мови.

У складі природних мов розрізняють алфавіт та граматику. ***Алфавіт*** (від грецьк. *alphabetos* – назв перших літер алфавіту «альфа» й «бета» або «віта») ***– це сукупність письмових знаків або букв, з яких будуються слова, а потім зі слів – речення. Граматика*** (від грецьк. *gramma* – літера, написання) ***– правила, за допомогою яких можна раціонально будувати речення чи сукупність речень.***

***Природні мови поділяють на:***

1) специфіковані;
2) неспецифіковані.

***Специфікованою мовою називають природну мову, яка використовує відповідну наукову термінологію.*** Її інша назва – наукова мова.

***Неспецифікованою мовою називають звичайну природну мову, що не містить у собі специфікованих термінів.*** Її ще називають розмовною мовою.

***Штучними мовами називають допоміжні знакові системи, які спеціально створюються на базі природних мов для точної та економної передачі інформації.*** До них належать волапюк, есперанто, ідо тощо.

До складу штучних мов входять алфавіт, правила утворення й правила інтерпретації. ***Алфавіт – це вихідні знаки й символи, з яких будуються штучні знакові системи. Правила утворення визначають, як треба будувати формули, коди, програми із заданих знаків та символів. Правила інтерпретації*** (від лат. *interpretatio* – пояснення, тлумачення) ***встановлюють предметну галузь, в якій можна використовувати штучні знакові системи, й роз'яснюють, як їх використовувати, як визначати смисл мовних виразів.***

***Штучні мови поділяють на***:

1) алгоритмічно побудовані;
2) неалгоритмічно побудовані.

***Алгоритмічно побудована мова має створений за певними правилами синтаксис*** (від грец. *syntaxis* – порядок). Синтаксичні правила мови встановлюють способи утворення складних виразів із простих. До таких мов належать мова логіки висловлювань, мова логіки предикатів тощо.

***Неалгоритмічно побудована мова не містить синтаксичних правил утворення виразів.*** До таких мов належать мова морської сигналізації прапорцями, азбука Морзе тощо.

***Мова логіки – це алгоритмічно побудована мова, яка призначена для аналізу логічної форми різних типів міркувань людей.*** Оскільки мова логіки створена шляхом формалізації, вона називається формалізованою мовою.

***Структура формалізованої мови*** складається ***з двох компонентів***:

1) об'єктної мови;
2) метамови.

***Об'єктна мова*** (або предметна мова, мова-об'єкт) ***– це мова, яка фіксує в знаковій формі логічну структуру міркувань та є, фактично, перекладом виразів природної мови на символьну мову логіки.***



***Метамова*** (або мова мови, мова, що описує іншу мову, мова дослідника) ***– це мова, засобами якої вивчаються основні відношення та властивості об'єктної мови, а також розкривається те, носіями яких саме відношень є певні знаки об'єктної мови.***

Об'єктна мова послуговується тільки символами, а метамова – і словами природної мови. Наприклад, вираз «$\exists x\ P(x)$» належить до об'єктної мови, а вираз «*Висловлювання «Студент А добре вчиться» є хибним*» – до метамови.

***Відповідно до такої структури, в якій зафіксована ієрархія мов, розрізняють***:

1) предметну логіку;
2) металогіку.

***Предметною логікою*** (або просто логікою) ***називають логіку, теорія якої викладається; науку про загальні форми, закони й засоби міркування.***

***Металогікою*** (або логікою дослідника) ***називають логіку, за допомогою якої викладається предметна логіка; науку, що досліджує структуру і властивості формальних логічних теорій.***

***Складовими частинами металогіки є***:

1) логічний синтаксис;
2) логічна семантика;
3) логічна прагматика.

***Логічний синтаксис вивчає принципи і методи побудови логічних числень.***

***Логічна семантика*** (від грец. *symanticos* – той, що позначає) ***вивчає можливості та особливості інтерпретації логічних числень.***

***Логічна прагматика*** (від грец. *pragmaticos* – практичний) ***вивчає особливості використання логічних числень суб'єктами пізнання із прикладною метою.***

**3. Принципи побудови та структура сучасної символічної логіки**

***Сучасну символічну логіку*** за принципами побудови логічної теорії ***поділяють на два розділи***:

1) класичну логіку;
2) некласичну логіку.

***Класична логіка – це розділ сучасної логіки, який базується на принципі двозначності, за яким будь-яке висловлювання може мати тільки два значення – або «істина», або «хиба»***. До складу класичної логіки входять:

1) ***синтаксис*** – правила побудови формалізованої мови;
2) ***семантика*** – правила інтерпретації виразів побудованої мови як осмислених;
3) ***правила виведення*** – методи, які дозволяють із засновків міркування виводити необхідні наслідки.

***Класична логіка поділяється на два розділи***:

– логіку висловлювань;
– логіку предикатів.

***Некласична логіка – це розділ сучасної логіки, який базується на принципі багатозначності, за яким будь-яке висловлювання може мати значення не тільки «істина» або «хиба», але й «невизначено», «можливо», «нейтрально» тощо, дає нове тлумачення смислу логічних сполучників та переглядає своїми логічним засобами розділи традиційної логіки.***

***Некласична логіка*** як альтернатива класичної логіки ***характеризується такими особливостями***:

1) створенням нового синтаксису, що пропонує багатшу систему знаків, нові правила їхнього утворення й перетворення;
2) створенням якісно нової семантики, нових способів семантичної інтерпретації мовних виразів;
3) спробою створити досконалу систему логічного випливання.

***Основними видами некласичних логік є***:

– алетична логіка;
– епістемічна логіка;
– деонтична логіка;
– темпоральна логіка;
– аксіологічна логіка;
– інтеррогативна логіка;
– акціональна логіка;
– ймовірнісно-індуктивна логіка;
– логіка соціальних комунікацій тощо.



Цей перелік не охоплює всіх розділів некласичної логіки. Перелічити їх усі практично неможливо, оскільки їхнє кількісне зростання не завершилося й сьогодні. Особлива увага в некласичних логіках приділяється семантичним проблемам, які безпосередньо пов'язані з філософськими передумовами представлення знання.

### *Література*

Бочаров В.А., Маркин В.И. Основы логики. – М.: Космополис, 1994.
Войшвилло Е.К. Символическая логика. – М.: Изд-во МГУ, 1989.
Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. – СПб.: Лань, 2004.
Жоль К.К. Вступ до сучасної логіки. – К.: Наукова думка, 1992.
Жоль К.К. Логика. Введение в современную символическую логику. – К.: Стилос, 2000.
Ивлев Ю.В. Логика. – М.: Проспект, 2009.
Ішмуратов А.Т. Вступ до філософської логіки. – К.: Абрис, 1997.
Карамишева Н.В. Логіка. Пізнання. Евристика. – Львів: Астролябія, 2002.
Конверський А.Є. Логіка (традиційна та сучасна). – К.: ЦНЛ, 2004.
Математическая логика: Учеб. пособие / Л.А.Латонин, Ю.А.Макаренков, В.В.Николаева, А.А.Столяр; Под общ. ред. А.А.Столяра. – Мн.: Выш. шк., 1991.
Ненашев М.И. Введение в логику. – М.: Гардарики, 2004.
Непейвода Н.Н. Прикладная логика. – Новосибирск: Изд-во УдГУ, 2004.
Светлов В.А. Логика. – СПб.: Питер, 2008.
Символическая логика: Учебник / Под ред. Я.А.Слинина, Э.Ф.Караваева, А.И.Мигунова. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005.
Солодухин О.А. Логика. – Ростов-н/Д: Феникс, 2000.
Хоменко І.В. Логіка. – К.: Абрис, 2004.
Хоменко І.В. Логіка: теорія та практика. – К.: ЦНЛ, 2010.
Шуман А.Н. Современная логика: теория и практика. – Мн.: Экономпресс, 2004.

## Лекція 2
## Логіка висловлювань як теорія

План лекції

1. **Визначення логіки висловлювань.**
2. **Мова логіки висловлювань.**

Виклад лекції

### 1. Визначення логіки висловлювань

Логіка висловлювань є порівняно простою й одночасно фундаментально розробленою логічною теорією. Концепції й методи цієї логічної теорії застосовують та розвивають у багатших й складніших логічних системах. Тому логіка висловлювань виступає зразком і необхідною частиною для інших логічних теорій. На її базі побудована практично вся сучасна символічна логіка. Логіка висловлювань має й велике прикладне значення. Її досить широко використовують у математиці, програмуванні, економіці, юриспруденції, соціології, психології, філософії, а також у повсякденних міркуваннях людей.

У логіці висловлювань розрізняють терміни «***висловлювання***», «***судження***» та «***речення***».

***Речення – це словесний вираз закінченої думки.*** Слова «*Світає*», «*Відійдіть!*» та групи слів «*Йде дощ*», «*Котра година?*», «*Зачиніть вікно!*» є реченнями.

Речення бувають ***розповідними***, ***запитальними*** та ***спонукальними***.

***Розповідними називаються речення, які містять у собі опис дійсності, яке-небудь повідомлення, якусь інформацію.*** Речення «*Трава зелена*», «*Повітря чисте*», «*Вогонь горить*», «*Вода не тверда*», «*Людина не вічна*» вважаються розповідними.

***Запитальними називаються речення, які містять у собі вимогу чи прохання надати деяку інформацію про щось невідоме.*** Речення «*Що це?*», «*Де дорога?*», «*Яка сьогодні температура повітря?*» вважаються запитальними.

***Спонукальними називаються речення, які містять волевиявлення, що вимагають здійснення певних дій.*** Речення «*Сідайте!*», «*Принеси книжку!*», «*Подайте води!*», «*Вам потрібно подумати!*» вважаються спонукальними.



Речення виконує роль матеріального носія судження. Для того, щоб збагнути думку, виражену в реченні, необхідно зрозуміти судження, яке міститься в його словесній оболонці.

***Судження – це думка, яка виражена реченням та в якій щось стверджується або заперечується.*** Судження бувають ***простими*** та ***складними***.

***Судження називається простим, якщо воно не включає в себе як самостійні частини інші судження. У протилежному випадку воно називається складним.*** Прості речення містять прості судження, складні речення – складні судження. Прості речення «*День сонячний*», «*Ніч місячна*», «*Весна – пора року*», «*Ця троянда червона*» є простими судженнями, а складні речення «*Груша велика і смачна*», «*Якщо сьогодні понеділок, тоді завтра вівторок*» – складними судженнями.

Судження та речення утворюють нерозривну єдність. Однак ця єдність не дає підстав для їх ототожнення. Між судженням та реченням немає повного збігу. Насамперед судження відрізняється від речення своїм характером. Судження – категорія логіки, а речення – категорія граматики. Граматична будова речення часто не співпадає із логічною структурою судження. У різних етнічних чи національних мовах граматична будова речення є різною. Логічна ж структура судження – завжди однакова, незалежно від його виразу в тій чи іншій природній мові. Друга суттєва відмінність полягає у тому, що не всяке речення містить судження. Лише розповідне речення, в якому що-небудь стверджується або заперечується, виражає судження. Тому будь-яке розповідне речення є судженням. Саме ці відмінності між реченням та судженням пояснюють існування двох окремих наук – граматики та логіки.

Судження через речення реалізується у висловлюванні.

***Висловлювання – це речення, яке виражає судження.*** Причому судження у вигляді такого ствердження, що має однозначний, точно визначений смисл.

Якщо речення – граматична категорія, судження – логічна категорія, то висловлювання – логіко-граматична категорія. Речення вивчаються у такому розділі граматики, як синтаксис.

Тому більш точно висловлювання можна визначити як логіко-синтаксичну категорію. Водночас судження, яке міститься у реченні є смислом висловлювання. Смислову ж сторону речення вивчає семантика. Завдяки цьому висловлювання також вважається логіко-семантичною категорією. ***Висловлювання***, таким чином, – ***це логіко-синтаксична та логіко-семантична категорія***.

Висловлювання, як речення й судження, бувають простими і складними. ***Просте речення, яке виражає просте судження, називається простим висловлюванням. Складне речення, яке виражає складне судження, називається складним висловлюванням.*** Прості висловлювання інколи називають первинними, елементарними, атомарними або атомами. Складні висловлювання – складеними, композиційними, молекулярними або молекулами.

Прості речення «*Сніг білий*», «*Мед солодкий*», «*Цей напій смачний*», «*Бережіть природу!*», які місять прості судження, є простими висловлюваннями. Складні речення «*Дерева бувають листяними або хвойними*», «*Добре, що яблуко червоне і солодке*», які містять складні судження, є складними висловлюваннями.

У сучасній символічній логіці виокремлюють описові, оцінні, описово-оцінні, нормативні, часові, запитальні, невизначені, нісенітні тощо висловлювання. З усього класу висловлювань ***логіка висловлювань досліджує лише описові висловлювання***. Вони вважаються найпростішими серед інших видів висловлювань.

Вихідними поняттями в логіці висловлювань є терміни «***описове висловлювання***», «***логічний сполучник***» та «***логічна операція***».

***Описове висловлювання – це граматично правильно побудоване розповідне речення, в якому повідомляється про наявність або відсутність певних фактичних ситуацій.*** Його інша назва – «***дескриптивне висловлювання***» (від лат. ***descriptio*** – опис). Розповідні речення «*Ранок*», «*Троянда цвіте*», «*Якщо йде дощ, тоді подвір'я мокре*» є описовими висловлюваннями.

Описове висловлювання в логіці висловлювань оцінюється з точки зору його істинності або хибності. Істинність та хибність називають логічними значеннями описового висловлювання або



його значеннями істинності. Здатність описового висловлювання бути істинним або хибним – це єдина його властивість, яка береться до уваги в логіці висловлювань.

***Якщо судження, яке міститься в описовому висловлюванні, відповідає дійсності та оцінюється як істинне, тоді й описове висловлювання оцінюється як істинне. У протилежному випадку описове висловлювання оцінюється як хибне.*** Розповідне речення «*Земля більша ніж Місяць*» – істинне описове висловлювання, оскільки судження, яке виражене в ньому, відповідає дійсності та оцінюється як істинне. Розповідне ж речення «*Місяць більший ніж Земля*», навпаки, – хибне описове висловлювання, оскільки судження, яке виражене в ньому, не відповідає дійсності та оцінюється як хибне.

***Логічний сполучник – це логічний термін, основна функція якого полягає в тому, що з його допомогою із простих описових висловлювань утворюють складні.***

***Простим називається таке описове висловлювання, яке не містить логічних сполучників. Складним називається описове висловлювання, яке містить логічні сполучники й складається із кількох простих.***

Розповідні речення «*Вечоріє*», «*Дерева високі*» є простими описовими висловлюваннями, а розповідні речення «*Блиснула блискавка і загримів грім*», «*Якщо надворі мороз, тоді вода у ставку замерзає*» – складними. У наведених прикладах складних описових висловлювань наявні граматичні сполучники «*і*», «*якщо..., тоді...*», які фіксують змістовний зв'язок та смислову єдність простих розповідних речень у складному. У них також містяться й логічні сполучники – «***кон'юнкція***», зафіксована граматичним сполучником «*і*», та «***імплікація***», зафіксована граматичним сполучником «*якщо..., тоді...*».

Логічні сполучники виражають реальне відношення між фактичними ситуаціями та предметне й смислове значення простих описових висловлювань, з яких утворені складні описові висловлювання.

***Предметним значенням описового висловлювання є два логічні об'єкти: «істина» та «хиба», інакше кажучи, його***

***логічні значення***. При цьому вважають, що усі істинні описові висловлювання позначають істину, а усі хибні – хибу.

***Смисловим значенням описового висловлювання є інформація, думка, яка в ньому виражена***. Тому смисл описового висловлювання можна визначити як судження, виражене у ньому. Іншими словами, смисл описового висловлювання – це те, що засвоює людина в процесі розуміння цього висловлювання, або те спільне, що мають два описові висловлювання в різних мовах, якщо зроблено їхній правильний переклад.

Логіка висловлювань частково відвертається від смислового значення описового висловлювання. Цілком абстрагуватись від нього вона не може, оскільки обов'язково повинна враховувати, в якому ж смислі вживаються у розповідному реченні граматичні сполучники чи знаки пунктуації: єднальному, розділовому, умовному тощо. Повністю до уваги в логіці висловлювань береться лише предметне значення описового висловлювання.

***Логічна операція в логіці висловлювань – це дія, за допомогою якої із простих описових висловлювань будуються складні, із описових висловлювань певного ступеня складності – описові висловлювання вищого ступеня складності***.

Логічні операції, логічні сполучники та складні описові висловлювання позначають, як правило, одними й тими ж термінами – «***кон'юнкція***», «***диз'юнкція***», «***імплікація***» тощо, хоча логічні сполучники – це логічні засоби, логічні операції – дії із використанням логічних засобів, а складні описові висловлювання – результат логічних дій.

У логіці висловлювань за домовленістю приймаються певні припущення. Головними серед них є припущення бівалентності та функціональності.

***Відповідно до припущення бівалентності*** (від лат. ***bis*** – двічі, ***valentia*** – сила), ***кожне описове висловлювання або істинне, або хибне***. Сама ж проблема визначення логічного значення описового висловлювання не входить до компетенції логіки висловлювань. У ній лише передбачається, що кожному описовому висловлюванню можна приписати певне логічне значення.



Із припущення бівалентності виводиться принцип двозначності. ***За принципом двозначності, область значень істинності описового висловлювання утворена з двох елементів – «істини» та «хиби»***.

Розділ сучасної символічної логіки, який базується на принципі двозначності, називається класичною логікою. Логіка висловлювань входить до складу класичної логіки. Її інша назва ***– класична логіка висловлювань***.

***Відповідно до припущення функціональності*** (від лат. ***functio*** – здійснення, виконання), ***логічне значення будь-якого складного описового висловлювання (логічної операції або логічного сполучника) однозначно визначається значенням істинності простих описових висловлювань (його складників або його аргументів), з яких воно складене***. Тому значенням істинності складного описового висловлювання є певна функція істинності значень істинності простих описових висловлювань, які входять до його складу.

***Функції істинності – це правила, що зв'язують змінні, які називаються аргументами функції, з іншими змінними – її значеннями. Аргументами та значеннями функцій істинності служать логічні значення – «істина» та «хиба»***. Якщо просте описове висловлювання «*Сьогодні середа*», взяте як аргумент функції заперечення, істинне, тоді хибним буде складне описове висловлювання «*Неправильно, що сьогодні середа*», взяте як значення функції заперечення.

***Логіка висловлювань характеризується такими ознаками***:

1) вивчає лише описові висловлювання та зв'язки між ними;
2) досліджує тільки структуру складних описових висловлювань. Внутрішня структура простого описового висловлювання в рамках логіки висловлювань не розглядається;
3) є двозначною логікою;
4) частково абстрагується від смислового значення простих описових висловлювань, повністю до уваги бере лише їх предметне значення.

***Логіка висловлювань досліджує наступні проблеми***:

1) як із атомарних висловлювань утворюють молекулярні;
2) як залежить значення істинності молекули від значень істинності атомів, які її складають.

***Логіка висловлювань***, таким чином, – ***це розділ класичної логіки, в якому при аналізі міркування до уваги береться тільки структура та функції істинності складних описових висловлювань***. Її інші назви – пропозиційна логіка або логіка пропозицій (від лат. ***propositio*** – речення, судження, висловлювання).

**2. Мова логіки висловлювань**

Логіка висловлювань як теорія має власну мову.

***Мова логіки висловлювань – це штучна мова, призначена для аналізу логічної структури та функцій істинності складних описових висловлювань***. Вона характеризується синтаксисом й семантикою.

***Синтаксис логіки висловлювань – це алфавіт та правила, що визначають, які знаки входять до списку символів алфавіту логіки висловлювань, та які скінченні послідовності знаків виступають правильно побудованими виразами логіки висловлювань***.

Він задає незалежні від інтерпретації визначення об'єктів мови логіки висловлювань, досліджує структуру цих об'єктів, проблему розпізнавання об'єктів різних типів та їхніх характеристик. Синтаксично правильно побудовані об'єкти можуть в подальшому тлумачитися та перетворюватися у відповідності із правилами інтерпретації формул логіки висловлювань.

***Семантика логіки висловлювань – це правила інтерпретації значень істинності формул логіки висловлювань як осмислених виразів***.

Вони визначають функцію, яка задає значення істинності формул в інтерпретації.

***Семантика логіки висловлювань базується на таких припущеннях***:

1) значення істинності складного виразу залежить лише від значень істинності його складників, а не від їхнього смислу;



2) незнанням можна знехтувати або розглядати його як різновид знання;
3) властивості предметів незмінні, правила не мають виключень;
4) є лише два логічні значення – «істина» та «хиба».

Роз'єднання синтаксису й семантики в мові логіки висловлювань дає можливість здійснювати формальне виведення та доведення без звернення до змісту виразів, які будуються й перебудовуються.

***Синтаксис логіки висловлювань***

***Алфавіт логіки висловлювань – це список знакових засобів, які застосовуються при побудові формул логіки висловлювань***.

Знакові засоби логіки висловлювань поділяють на головні та допоміжні. У свою чергу, головні знаки поділяють на логічні знаки (або знаки логічних сполучників, або знаки логічних постійних, або знаки пропозиційних зв'язок, або знаки пропозиційних констант) та нелогічні знаки (або знаки пропозиційних змінних, або знаки пропозиційних букв, або знаки змінних описових висловлювань). Допоміжними знаками називають технічні знаки.

**Знакові засоби логіки висловлювань:**

**I. Головні знаки:**

1. **Знаки логічних сполучників:**

$\sim$ – знак заперечення (читається «*не*», «*неправильно, що…*»);

$\wedge$ – знак кон'юнкції (читається «*і*», «*та*»);

$\vee$ – знак слабкої диз'юнкції (читається «*або*», «*чи*»);

$\underline{\vee}$ – знак сильної диз'юнкції (читається «*або …, або …*», «*чи …, чи …*»);

$\rightarrow$ – знак імплікації (читається «*якщо …, тоді …*»);

$\vdash$ – знак логічного випливання, який нагадує за своїм логічним значенням імплікацію;

$\leftrightarrow$ – знак еквіваленції (читається «*тоді і тільки тоді, коли…*»);

$\equiv$ – знак рівносильності, який нагадує за своїм логічним значенням еквіваленцію.

Ці знаки призначені для позначення граматичних сполучників природної мови та деяких знаків пунктуації.

2. **Знаки пропозиційних змінних**:

**p, q, r, s, $p_1$, $q_1$, $r_1$, $s_1$**, … тощо.

Ці знаки призначені для позначення простих описових висловлювань природної мови.

**ІІ. Допоміжні знаки**:

( – ліва дужка;

) – права дужка;

, – кома.

Перелічені знаки задають алфавіт логіки висловлювань. Ніяких інших знаків у мові логіки висловлювань немає.

Будь-яку послідовність знаків алфавіту логіки висловлювань називають виразом мови логіки висловлювань. Деякі із цих виразів є правильно побудованими, а деякі – ні. В мові логіки висловлювань наявний один тип правильно побудованих виразів – формули.

***Формули логіки висловлювань є скінченними послідовностями знаків алфавіту логіки висловлювань, які будуються за встановленими правилами й утворюють закінчені правильні вирази мови логіки висловлювань.***

Визначення формули логіки висловлювань складається із кількох пунктів, що відповідають структурі формули логіки висловлювань. Визначення вказує насамперед не на те, як будувати формули, а на те, як відрізнити формулу від неформули. У визначенні формули логіки висловлювань використовують метабукви чи метазмінні (великі латинські букви **A** і **B**), які належать не до мови логіки висловлювань, а до її метамови.

***Метамовою логіки висловлювань називають мову, засобами якої аналізують мову логіки висловлювань та виражають результати цього аналізу.***

До формул логіки висловлювань належать:

1. ***Прості вирази, що відповідають пропозиційним змінним.***
2. ***Складні вирази:***

**2а) *якщо* A *є формулою, тоді* (~A) *також є формулою*;**

**2б) *якщо A є формулою, тоді* (A∧B), (A∨B), (A$\underline{\vee}$B), (A→B), (A↔B) *також є формулами.***

Складні вирази, що містять метабукви, – це не формули, а схеми формул певного виду. Так, вираз **A∧B** є схемою формул **p∧q, p∧(q∨r), (p∨q)∧(p→r)** та інших подібних.

***У логіці висловлювань замість будь-якої метазмінної у формулі можна підставляти будь-яку формулу всюди, де ця метазмінна трапляється у цій формулі.*** Зазначену можливість називають ***правилом підстановки.***

Інших засобів побудови правильних виразів у логіці висловлювань немає. ***Ці засоби називають правилами утворення формул логіки висловлювань.***

За синтаксичними ознаками формули логіки висловлювань поділяють на прості й складні.

***Формула, яка є пропозиційною змінною, називається простою, а формула, яка містить пропозиційні зв'язки – складною.***

***Формула, яка входить до складу деякої формули, називається її підформулою.***

Підформули **A** і **B** у формулі **(A∧B)** називаються її ***кон'юнктивними членами***, або ***кон'юнктами***, а у формулі **(A∨B)** – її ***диз'юнктивними членами***, або ***диз'юнктами***. У формулі **(A→B)** підформула **A** називається її ***підставою***, або ***антецедентом***, а підформула **B** – її ***наслідком***, або ***консеквентом***.

Щоб визначити, за якою схемою побудована формула логіки висловлювань (за схемою кон'юнкції, диз'юнкції чи іншою), необхідно виокремити її головний логічний сполучник (або головну логічну константу, або головний логічний знак).

***Головний логічний сполучник – це логічний сполучник, який при побудові формули логіки висловлювань застосовується останнім.***

Знайдемо головну логічну константу формули **~p∨q→p∧~q**. Відновимо дужки у цій формулі: **((~p∨q)→(p∧~q))**. Цю формулу можна звести до форми **A→B**. Її головним знаком є знак імплікації.

Кожний логічний сполучник у формулі логіки висловлювань має визначену область дії.

***Область дії логічного сполучника утворюють усі підформули даної формули логіки висловлювань, які він зв'язує.***

Так, область дії знака заперечення у формулі ~**А** складає підформула **А**, у формулі ~**(А∧В)** – підформула **(А∧В)**. У формулі **(А→(А∨В))** область дії знака слабкої диз'юнкції утворюють формули **А** та **В**, область дії знака імплікації – формули **А** та **(А∨В)**. Область дії головного логічного сполучника складають усі підформули даної формули логіки висловлювань.

За відсутності дужок, логічні операції над формулами логіки висловлювань виконують у певній послідовності. При цьому враховують ступінь сили пропозиційної зв'язки. Відповідно до нього спочатку застосовують логічну операцію, яка вказана більш сильною, а потім – менш сильною пропозиційною зв'язкою. ***За ступенем сили пропозиційної зв'язки логічні операції над формулами логіки висловлювань розподіляють у такій послідовності: заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція***. У цій послідовності найсильнішою пропозиційною зв'язкою є заперечення, найслабшою – еквіваленція.

У логіці висловлювань існують домовленості, які називаються правилами розташування та опускання дужок. ***Правила розташування дужок вказують на порядок виконання логічних операцій над формулами логіки висловлювань та дозволяють змінювати його***. Так, у формулі **А↔В∧С→В** за допомогою дужок вказується порядок виконання логічних операцій: **А↔((В∧С)→В)**. Цей запис показує, що першу логічну операцію здійснюють над кон'юнкцією **(В∧С)**, другу – над імплікацією **((В∧С)→В)**, третю – над еквіваленцією **(А↔((В∧С)→В))**.

***Правила опускання дужок дозволяють спростити запис формул й надати їм більш компактного вигляду***. За цими правилами часто не пишуть зовнішніх дужок. Однак не будь-яка формула може бути записана без вживання дужок. Так, у формулах **р→(q→r)**, **р∧(q→r)** виключення дужок неможливе.



***У логіці висловлювань за домовленістю, знак кон'юнкції інколи не виражають у явному вигляді.*** Тому вирази **А∧В**, **(А∧В)∨С** можуть бути записані як **АВ, АВ∨С**.

Головним синтаксичним завданням логіки висловлювань є формалізація описових висловлювань природної мови. ***Формалізація в логіці висловлювань – це переклад описових висловлювань природної мови на штучну мову логіки висловлювань.***

Запишемо складне описове висловлювання природної мови «*Якщо вода нагрівається, тоді вона випаровується*» у вигляді формули. Замінимо просте описове висловлювання «*Вода нагрівається*» на змінну **р**, а просте описове висловлювання «*Вода випаровується*» – змінну **q**. Обидва прості описові висловлювання зв'язані між собою імплікацією. Формула цього складного описового висловлювання така: **р→q**. Вона читається: «*Якщо* **р**, *тоді* **q**».

### *Література*


Бочаров В.А., Маркин В.И. Основы логики. – М.: Космополис, 1994.

Войшвилло Е.К. Символическая логика. – М.: Изд-во МГУ, 1989.

Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. – СПб.: Лань, 2004.

Жоль К.К. Вступ до сучасної логіки. – К.: Наукова думка, 1992.

Жоль К.К. Логика. Введение в современную символическую логику. – К.: Стилос, 2000.

Ивлев Ю.В. Логика. – М.: Проспект, 2009.

Ішмуратов А.Т. Вступ до філософської логіки. – К.: Абрис, 1997.

Карамишева Н.В. Логіка. Пізнання. Евристика. – Львів: Астролябія, 2002.

Конверський А.Є. Логіка (традиційна та сучасна). – К.: ЦНЛ, 2004.

Математическая логика: Учеб. пособие / Л.А.Латонин, Ю.А.Макаренков, В.В.Николаева, А.А.Столяр; Под общ. ред. А.А.Столяра. – Мн.: Выш. шк., 1991.

Ненашев М.И. Введение в логику. – М.: Гардарики, 2004.

Непейвода Н.Н. Прикладная логика. – Новосибирск: Изд-во УдГУ, 2004.
Светлов В.А. Логика. – СПб.: Питер, 2008.
Символическая логика: Учебник / Под ред. Я.А.Слинина, Э.Ф.Караваева, А.И.Мигунова. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005.
Солодухин О.А. Логика. – Ростов-н/Д: Феникс, 2000.
Хоменко І.В. Логіка. – К.: Абрис, 2004.
Хоменко І.В. Логіка: теорія та практика. – К.: ЦНЛ, 2010.
Шуман А.Н. Современная логика: теория и практика. – Мн.: Экономпресс, 2004.



Лекція 3

## Табличне визначення формул логіки висловлювань

План лекції

1. **Метод таблиць істинності в логіці висловлювань. Істиннісно-функціональна семантика для логіки висловлювань.**
2. **Метод аналітичних таблиць у логіці висловлювань. Аналітико-таблична семантика для логіки висловлювань.**

Виклад лекції

### 1. Метод таблиць істинності в логіці висловлювань. Істиннісно-функціональна семантика для логіки висловлювань

***Семантика логіки висловлювань***

Вихідним поняттям семантики логіки висловлювань є термін «*інтерпретація формули логіки висловлювань*».

***Інтерпретацією формул логіки висловлювань називається процедура приписування значень «істина» або «хиба» усім частинам формул, що самі є формулами та утворюють складні формули або, іншими словами, усім атомарним підформулам, які входять до складу молекулярної формули.***

***Семантична інтерпретація довільної формули логіки висловлювань здійснюється у два етапи. На першому етапі визначається значення істинності усіх її простих або атомарних формул***, які є частинами чи підформулами складної або молекулярної формули. Для цього із кожною атомарною підформулою зіставляється певне просте описове висловлювання природної мови та кожній атомарній підформулі приписується значення «*істина*» або «*хиба*» у відповідності з тим, чи істинні або хибні виражені ними прості описові висловлювання природної мови. ***На другому етапі обчислюється значення істинності усієї молекулярної формули*** як функції значень істинності усіх її атомарних підформул або аргументів за визначеними правилами інтерпретації.

***До правил інтерпретації логіки висловлювань відносяться***:

1) правила інтерпретації пропозиційних змінних;
2) правила інтерпретації пропозиційних зв'язок.

***Правила інтерпретації пропозиційних змінних полягають у тому, що кожна пропозиційна змінна може мати одне із двох значень: або «істину» («і»), або «хибу» («х»), але не те й інше одночасно***. Формально це правило записується так:

**T (p)** $\underline{\vee}$ **F (p)**,

де **p** – пропозиційа змінна, **T** (від англ. ***truth***) означає «правда», «істина», а **F** (від англ. ***false***) – «хибний», «помилковий», **T (p)** й **F (p)** позначають відповідно «*істинно, що* **p**» та «*хибно, що* **p**».

Правилами інтерпретації пропозиційних зв'язок є таблиці істинності та аналітичні таблиці.

***Таблиця істинності – це таблиця, за допомогою якої з'ясовується значення істинності складного описового висловлювання природної мови, записаного у вигляді формули, шляхом визначення значень істинності логічних сполучників або, іншими словами, на підставі правил функцій істинності для логічних сполучників***.

***Аналітична таблиця – це таблиця, за допомогою якої з'ясовується значення істинності складного описового висловлювання природної мови, записаного у вигляді формули, шляхом розбиття логічних сполучників на складники або, інакше кажучи, на підставі правил редукції для логічних сполучників*** (від лат. ***reductio*** – зведення складного до простого).

Визначення правил функцій істинності в логіці висловлювань:

***Кон'юнкція – це складне описове висловлювання, в якому повідомляється про наявність двох або більше фактичних ситуацій.***

Приклади: «*День сонячний і спекотний*», «*Лимон зелений і кислий*», «*Студенти складають заліки та іспити*».

***Кон'юнкція – це логічна операція, яка об'єднує окремі описові висловлювання певного ступеня складності у нове описове висловлювання вищого ступеня складності за допомогою граматичного сполучника «і»***.

Досить часто замість граматичного сполучника «*і*» використовують рівнозначні за змістом слова «*а*», «*та*», «*але*»,



«***проте***», «***однак***», «***хоч***», «***а також***», «***разом із***», або застосовують ***кому*** як знак пунктуації.

***Кон'юнкція – це логічний сполучник, який є істинним лише у тому випадку, коли усі його складники є істинними. В усіх інших випадках цей логічний сполучник є хибним***.

**Таблиця істинності для кон'юнкції:**

| A | B | A∧B |
|---|---|---|
| і | і | і |
| і | х | х |
| х | і | х |
| х | х | х |

***Диз'юнкція – це складне описове висловлювання, в якому повідомляється про наявність однієї із кількох фактичних ситуацій.***

Розрізняють слабку та сильну диз'юнкцію.

***Слабка диз'юнкція – це складне описове висловлювання, в якому повідомляється про наявність принаймні однієї із кількох фактичних ситуацій.***

Приклади: «*Перекладач знає англійську або німецьку мову*», «*Право може сприяти економічному зростанню або перешкоджати йому*», «*На фініш першим прийде* **A** *або* **B**».

***Слабка диз'юнкція – це логічна операція, яка об'єднує окремі описові висловлювання певного ступеня складності у нове описове висловлювання вищого ступеня складності за допомогою граматичного сполучника «або»***.

Замість граматичного сполучника «***або***» досить часто використовують рівнозначні за змістом слова «***чи***», «***оскільки***», «***також***», «***так***», або застосовують ***кому*** як знак пунктуації.

***Слабка диз'юнкція – це логічний сполучник, який буде хибним лише у тому випадку, коли усі його складники будуть хибними. В усіх інших випадках цей сполучник буде істинним.***

**Таблиця істинності для слабкої диз'юнкції:**

| A | B | A∨B |
|---|---|---|
| і | і | і |
| і | х | і |
| х | і | і |
| х | х | х |

***Сильна диз'юнкція – це складне описове висловлювання, в якому повідомляється про наявність тільки однієї із кількох фактичних ситуацій.***

Приклади: «*Дощ йде або не йде*», «*Сьогодні середа або четвер*», «*Він народився у травні або вересні*».

***Сильна диз'юнкція – це логічна операція, яка об'єднує окремі описові висловлювання певного ступеня складності у нове описове висловлювання вищого ступеня складності за допомогою граматичного сполучника «або..., або...».***

Замість граматичного сполучника «*або..., або...*» досить часто використовують рівнозначні за змістом слова «*чи..., чи...*», «*іноді...*», «*...або..., але не обидва разом*», або застосовують *кому* як знак пунктуації.

***Сильна диз'юнкція – це логічний сполучник, який буде істинним лише в тих випадках, коли логічні значення його складників не збігаються. Цей логічний сполучник буде хибним, коли логічні значення його складників збігаються.***

**Таблиця істинності для сильної диз'юнкції:**

| A | B | $A \underline{\vee} B$ |
|---|---|---|
| і | і | х |
| і | х | і |
| х | і | і |
| х | х | х |

***Імплікація – це складне описове висловлювання, в якому повідомляється про те, що наявність однієї фактичної ситуації обумовлює наявність іншої.***



Приклади: «*Якщо ріка замерзла, тоді був мороз*», «*Якщо боржник виплачує свій борг, тоді зобов'язання припиняються*», «*Якщо він уміє працювати в Інтернеті, тоді він вміє користуватися персональним комп'ютером*».

***Імплікація – це логічна операція, яка об'єднує окремі описові висловлювання певного ступеня складності у нове описове висловлювання вищого ступеня складності за допомогою граматичного сполучника «якщо..., тоді...».***

Замість граматичного сполучника «***якщо..., тоді...***» досить часто використовують рівнозначні за змістом слова «***коли..., то...***», «***...так, як...***», «***...оскільки...***», «***...тоді, коли...***».

***Імплікація – це логічний сполучник, який буде хибним лише в одному випадку, коли перше описове висловлювання – підстава, антецедент*** (від лат. *antecedens* – попередній) ***– є істинним, а друге – наслідок, консеквент*** (від лат. *consecvent* – наступний) ***– хибним. В усіх інших випадках імплікація є істинною.***

**Таблиця істинності для імплікації:**

| A | B | A→B |
|---|---|---|
| і | і | і |
| і | х | х |
| х | і | і |
| х | х | і |

Імплікація може вказувати на причинно-наслідкове відношення між явищами та умовний зв'язок між думками про фактичні ситуації. Вона може виражати й відношення логічного випливання, яке існує у міркуваннях людей.

У структурі міркування підстава чи антецедент імплікації виконує роль засновку або засновків (залежно від їх кількості), а наслідок чи консеквент імплікації – роль висновку. Якщо засновки міркування подати у вигляді формули **A**, а його висновок – у вигляді формули **B**, тоді можна стверджувати, що з формули **A** логічно випливає формула **B**, коли імплікація **A→B** є законом логіки висловлювань або законом дедукції.

***Закон дедукції*** формулюється таким чином: ***істина міркування зберігається тоді й тільки тоді, коли його розвиток виключає можливість свого спростування через появу хиби в якості одного із необхідних наслідків.***

***Відношення логічного випливання*** в логіці висловлювань визначається так: ***висновок* В *логічно випливає із засновку* А, *якщо і тільки якщо в кожній інтерпретації (в кожному рядку таблиці істинності формули* А→В*), в якій істинний засновок* А, *також істинний і висновок* В.**

Символічно логічне випливання у логіці висловлювань записують таким чином: «**А ⊢ В**». Цей вираз читається у такий спосіб: «*Із* **А** *логічно випливає* **В**».

На підставі наявності відношення логічного випливання між засновками та висновком міркування можна перевірити його правильність.

Приклад міркування: «*Якщо сьогодні понеділок, тоді завтра буде вівторок, а сьогодні дійсно понеділок, отже завтра буде вівторок*». Символічний запис наведеного міркування: **А→В∧А ⊢ В**, де **А** – «*Сьогодні понеділок*», **В** – «*Завтра буде вівторок*», **А→В∧А** – кон'юнкція засновків, **В** – висновок, знак ⊢ – оператор логічного випливання.

***Еквіваленція – це складне описове висловлювання, в якому повідомляється про взаємну обумовленість двох фактичних ситуацій.***

Приклади: «*Якщо і тільки якщо сонце зійде над горизонтом, тоді настане ранок*», «*Туман з'являється тоді і тільки тоді, коли відносна вологість повітря перевищує 100%*», «*Якщо і тільки якщо людина досягла пенсійного віку, тоді вона має право на отримання пенсії за віком*».

***Еквіваленція – це логічна операція, яка об'єднує окремі описові висловлювання певного ступеня складності у нове описове висловлювання вищого ступеня складності за допомогою граматичного сполучника «тоді і тільки тоді, коли…».***

Замість граматичного сполучника «***тоді і тільки тоді, коли…***» досить часто використовують рівнозначні за змістом



слова «***якщо і тільки якщо…, тоді…***», «***якщо…, тоді…, і навпаки***», «***для… необхідно і достатньо…***».

***Еквіваленція – це логічний сполучник, який буде істинним лише у тих випадках, коли логічні значення його складників збігаються. Цей логічний сполучник є хибним, коли логічні значення його складників не співпадають.***

**Таблиця істинності для еквіваленції:**

| А | В | А↔В |
|---|---|---|
| і | і | і |
| і | х | х |
| х | і | х |
| х | х | і |

Еквіваленція виражає відношення логічної рівносильності між формулами логіки висловлювань. ***Рівносильні висловлювання – це складні описові висловлювання, які істинні або хибні при однакових наборах логічних значень простих описових висловлювань, що їх складають.*** Відношення логічної рівносильності символічно записується у такий спосіб: **А ≡ В**. Цей запис читається так: «*Формула А є рівносильною формулі В*».

Можна дати й таке визначення рівносильним висловлюванням. ***Описові висловлювання* А *і* В *називають рівносильними, якщо їхня еквіваленція* А↔В *є законом логіки висловлювань.***

***Заперечення – це складне описове висловлювання, в якому повідомляється про відсутність деякої фактичної ситуації.***

Приклади: «*Неправильно, що йде дощ*», «*Неправильно, що після суботи настає п'ятниця*», «*Неправильно, що Дніпро впадає у Балтійське море*».

***Заперечення – це логічна операція, яка змінює значення істинності описового висловлювання на протилежне за допомогою граматичного сполучника «неправильно, що…».*** Цей граматичний сполучник ставлять перед описовим висловлюванням. Тому цю логічну операцію інколи називають ***зовнішнім запереченням.***

Досить часто замість граматичного сполучника «***неправильно, що…***» використовують рівнозначні за змістом слова «***не…***», «***невірно, що…***», «***не має місця…***».

***Заперечення – це логічний сполучник, який перетворює істинне описове висловлювання на хибне, а хибне – на істинне.***

**Таблиця істинності для заперечення:**

| A | ~ A |
|---|---|
| і | х |
| х | і |

***Результатом заперечення кон'юнкції є диз'юнкція, в якій її складники є запереченнями складників кон'юнкції.*** Внаслідок заперечення кон'юнкції «*Математики вивчають логіку і філософи вивчають логіку*» отримаємо диз'юнкцію заперечень «*Математики не вивчають логіку або філософи не вивчають логіку*». Формула заперечення кон'юнкції: $\sim(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \equiv \sim\mathbf{A} \vee \sim\mathbf{B}$.

***Результатом заперечення диз'юнкції є кон'юнкція, в якій її складники є запереченнями складників диз'юнкції.*** Внаслідок заперечення диз'юнкції «*Йде дощ або йде сніг*» отримаємо кон'юнкцію заперечень «*Не йде дощ, і не йде сніг*». Формула заперечення диз'юнкції: $\sim(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \equiv \sim\mathbf{A} \wedge \sim\mathbf{B}$.

***Результатом заперечення імплікації є кон'юнкція, в якій один із її складників є ствердженням підстави імплікації, а другий – запереченням її наслідку.*** Внаслідок заперечення імплікації «*Якщо є дим, тоді є й вогонь*» отримаємо кон'юнкцію стверджень та заперечень «*Дим є, але вогню немає*». Формула заперечення імплікації: $\sim(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \equiv \mathbf{A} \wedge \sim\mathbf{B}$.

***Результатом заперечення еквіваленції є диз'юнкція двох кон'юнкцій, в першій з яких один із її складників є ствердженням підстави, другий – запереченням наслідку імплікації, а у другій кон'юнкції – один із її складників є ствердженням наслідку, другий – запереченням підстави імплікації.*** Внаслідок заперечення еквіваленції «*Співробітники одержать премію тоді і тільки тоді, коли виконають замовлення*» отримаємо диз'юнкцію



кон'юнкцій стверджень та заперечень «*Співробітники одержать премію, не виконавши замовлення, або співробітники виконають замовлення, але не одержать премії*». Формула заперечення еквіваленції: $\sim(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{A} \wedge \sim\mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \wedge \sim\mathbf{A})$.

***Результатом заперечення зовнішнього заперечення є вихідне твердження.*** Внаслідок заперечення зовнішнього заперечення «*Неправильно, що немає чесних людей*» отримаємо твердження «*Є чесні люди*». Формула заперечення зовнішнього заперечення: $\sim\sim\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$.

За семантичними ознаками формули в логіці висловлювань поділяють на ***два класи – виконувані та невиконувані***. Виконувані формули далі поділяють на ***логічно істинні та логічно нейтральні***. Невиконувані формули не поділяють на види, оскільки клас цих формул містить лише один тип формул – ***логічно хибні***.

***Формула називається логічно істинною (або тотожно-істинною, або тавтологією, або логічним законом, або загальнозначимою), якщо вона істинна при будь-яких наборах значень істинності своїх атомарних підформул, у всіх своїх інтерпретаціях.***

***Формула називається логічно хибною (або тотожно-хибною, або логічним протиріччям, або невиконуваною, або незагальнозначимою), якщо не існує жодного набору значень істинності її атомарних підформул, жодної інтерпретації, в якій вона була б істинною.***

***Формула називається логічно нейтральною (або виконуваною, або правдоподібною, або невизначеною), якщо існує хоча б одна інтерпретація, в якій вона істинна, й хоча б одна інтерпретація, в якій вона хибна.*** Це означає, що такі формули не можуть бути абсолютно логічно істинними, або абсолютно логічно хибними. Вони лише відносно істинні та відносно хибні.

Семантичне завдання, що полягає у відшуканні процедури, котра дає змогу визначити, до якого із трьох типів формул (тотожно-істинних, тотожно-хибних або виконуваних) належить будь-яка формула логіки висловлювань, називається ***семантичною проблемою розв'язання для формул логіки вислов-***

*лювань*. А процедуру, що дає змогу скінченним числом простих дій вирішувати проблему розв'язання, називають ***розв'язуючою процедурою***.

***Побудова для деякої досліджуваної формули логіки висловлювань відповідної їй таблиці істинності або аналітичної таблиці є розв'язуюча процедура семантичної проблеми розв'язання для формул логіки висловлювань.***

***Алгоритм побудови таблиці істинності для довільної формули логіки висловлювань***:

1) скласти без повторів список пропозиційних змінних, що входять до складу формули;
2) кожна пропозиційна змінна повинна розпочинати новий стовпчик таблиці;
3) для кожної підформули у тій послідовності, в якій вони входять до складу формули, має бути побудований відповідний стовпчик таблиці;
4) кількість рядків у таблиці істинності обчислюється за формулою $\mathbf{2^n}$, де **2** означає кількість логічних значень, які приписуються пропозиційним змінним – «*істину*» або «*хибу*», а **n** – кількість пропозиційних змінних, що входять до складу формули; кожний набір значень повинен відрізнятися від інших;
5) потрібно визначити головний логічний сполучник у формулі;
6) останній стовпчик таблиці істинності повинен бути побудований для головного логічного сполучника, який відповідає значенню усієї формули.

***Якщо в результаті побудови таблиці істинності для деякого складного описового висловлювання з'ясується, що воно набуває значення «істина», незалежно від того, яких логічних значень набувають його складники, тоді таке складне описове висловлювання є логічним законом. У цьому випадку в останньому стовпчику таблиці повинні бути лише істинні значення.***

***Якщо ж з'ясується, що воно набуває значення «хиба», незалежно від того, яких логічних значень набувають його складники, тоді таке складне описове висловлювання є логічним протиріччям. У цьому випадку в останньому стовпчику таблиці повинні бути лише хибні значення.***

***Нарешті, якщо з'ясується, що воно змінює своє логічне значення, залежно від того, яких логічних значень набувають його складники, тоді таке складне описове висловлювання буде виконуваним висловлюванням. У цьому випадку в останньому стовпчику таблиці можуть бути як істинні, так й хибні значення.***

Побудуємо таблицю істинності для формули **p→(q→p)**

| p | q | q → p | p→(q→p) |
|---|---|---|---|
| i | i | i | i |
| i | x | x | x |
| x | i | i | i |
| x | x | x | i |

На підставі наведеної таблиці можна визначити, що формула **p → (q→p)** є виконуваним висловлюванням.

З'ясуємо, чи існує у формулі **((p → ~ q) ∧ p) → ~ q** відношення логічного випливання. Застосуємо метод таблиць істинності.

| p | q | ~ q | p→ ~ q | (p→ ~ q) ∧ p | ((p→ ~ q) ∧ p)→ ~ q |
|---|---|---|---|---|---|
| i | i | x | x | x | i |
| i | x | i | i | i | i |
| x | i | x | i | x | i |
| x | x | i | i | x | i |

На підставі наведеної таблиці визначаємо, що у досліджуваній формулі **((p → ~ q) ∧ p) → ~ q** наявне відношення логічного випливання.

## 2. Метод аналітичних таблиць у логіці висловлювань. Аналітико-таблична семантика для логіки висловлювань

Метод таблиць істинності є універсальним й ефективним методом для визначення типу або статусу формули логіки висловлювань за умови, якщо ця формула містить мінімальну кількість пропозиційних змінних. Однак він стає все більш громіздким при збільшенні числа пропозиційних змінних у формулі. Так, якщо формула містить **3** пропозиційні змінні, тоді рядків у таблиці істинності вже повинно бути $2^3=8$, якщо 4 пропозиційні змінні, тоді $2^4=16$ і т.д.

З метою усунення громіздкості, притаманної методу таблиць істинності, було створено більш досконалі та зручні методи. Серед них – семантичний метод аналітичних таблиць та синтаксичний метод зведення формули до нормальної форми.

***Ідея методу аналітичних таблиць як розв'язуючої процедури в логіці висловлювань така: загальнозначимість (або логічна істинність) формули обґрунтовується спростуванням припущення про її невиконуваність (або логічну хибність) і, навпаки, невиконуваність (або логічна хибність) формули обґрунтовується спростуванням припущення про її загальнозначимість (або логічну істинність).*** У цьому доведенні від протилежного аналітичні таблиці є способом організації систематичного пошуку контрприкладів для вихідного припущення або антитези. ***Аналітичні таблиці будуються на підставі правил редукції.*** Ці правила отримують із правил функцій істинності. Їхня інша назва – ***аналітичні правила.***

***Визначення правил редукції в логіці висловлювань***:

**Правило 1.** ***Заміна кон'юнкції***: якщо формула має вигляд **(A ∧ B)**, тоді дерево формули, в яке вона входить, починається або продовжується у кожній своїй галузці формулами **A** і **B**. Схема правила:

$$\frac{W,\ A \wedge B}{W,\ A,\ B}$$

де **W** – формули решти частини ряду, вони можуть бути й відсутніми.

**Правило 2.** ***Заміна диз'юнкції***: якщо формула має вигляд **(A ∨ B)**, тоді дерево формули, в яке вона входить, починається або продовжується в кожній своїй галузці формулами **A** та **B**. Схема правила:

$$\frac{W,\ A \vee B}{W,\ A \parallel W,\ B}$$



де || – подвійна вертикальна риска, яка фіксує факт розгалуження дерева формули.

**Правило 3.** ***Заміна імплікації***: якщо формула має вигляд **(A → B)**, тоді дерево формули, в яке вона входить, починається або продовжується розгалуженням кожної галузки на формулу **~A** та формулу **B**. Схема правила:

$$\frac{W,\ A \rightarrow B}{W,\ \sim A \parallel W,\ B}$$

**Правило 4.** ***Заміна заперечення кон'юнкції***: якщо формула має вигляд **~ (A∧B)**, тоді дерево формули, в яке воно входить, починається або продовжується розгалуженням кожної галузки на формулу **~ A** та формулу **~ B**. Схема правила:

$$\frac{W,\ \sim (A \wedge B)}{W,\ \sim A \parallel W \sim B}$$

**Правило 5.** ***Заміна заперечення диз'юнкції***: якщо формула має вигляд **~ (A∨B)**, тоді дерево формули, в яке вона входить, починається або продовжується в кожній своїй галузці формулами **~ A** та **~ B**. Схема правила:

$$\frac{W,\ \sim (A \vee B)}{W,\ \sim A,\ \sim B}$$

**Правило 6.** ***Заміна заперечення імплікації***: якщо формула має вигляд **~ (A→B)**, тоді дерево формули, в яке вона входить, починається або продовжується розгалуженням кожної галузки на формулу **A** та формулу **~ B**. Схема правила:

$$\frac{W,\ \sim (A \rightarrow B)}{W,\ A,\ \sim B}$$

**Правило 7.** ***Заміна заперечення заперечення***: якщо формула має вигляд **~ ~ A**, тоді дерево формули, в яке вона входить, починається або продовжується в кожній своїй галузці формулою **A**. Схема правила:

$$\frac{W,\ \sim\ \sim A}{W,\ A}$$

***Алгоритм побудови аналітичної таблиці для довільної формули логіки висловлювань***:

1) побудову аналітичної таблиці починаємо із припущення, що формула, значення істинності якої необхідно встановити, є

хибною. Для цього визначаємо перший рядок аналітичної таблиці, застосовуючи заперечення для головного логічного сполучника досліджуваної формули;

2) визначаємо другий рядок аналітичної таблиці, замінюючи заперечення головного логічного сполучника вихідної формули. При цьому вказуємо справа знак правила редукції та підкреслюємо формулу, до якої воно застосовується;
3) визначаємо наступні рядки аналітичної таблиці, послідовно замінюючи головні логічні сполучники атомарних підформул вихідної формули;
4) побудову аналітичної таблиці продовжуємо до тих пір, поки не прийдемо до протиріччя, іншими словами, до того часу, коли вихідна формула не буде розкладена на свої складники – атомарні формули або їх заперечення. У цьому випадку список формул вважається замкненим;
5) якщо, застосовуючи послідовно правила заміни логічних сполучників та їх заперечень, ми прийдемо до кінцевих таблиць, які містять тільки атомарні формули та їх заперечення, тоді такі таблиці будуть замкненими, а вихідна формула – логічним законом або загальнозначимою формулою. У протилежному випадку вихідна формула буде незагальнозначимою формулою;
6) замкнені списки позначаються символами $N$, $N_1$, $N_2$ і т.д. Якщо кожний список формул в останньому рядку аналітичної таблиці замкнений, тоді аналітична таблиця також вважається замкненою.

Розглянемо на прикладах, як будується аналітична таблиця. Перевіримо на загальнозначимість формулу $A \to A$. Визначаємо перший рядок: $\sim(A \to A)$. Будуємо таблицю.

$$\underline{\sim(A \to A)}\ [\sim\to]$$

$$A', \sim A'$$

$$N$$

де символи $A'$ та $\sim A'$ позначають відповідно атомарну формулу та її заперечення.



Останній рядок містить замкнений список формул, отже, аналітична таблиця замкнена. На підставі цього факту визначаємо, що досліджувана формула є загальнозначимою.

Перевіримо на загальнозначимість формулу

$$(A \to B) \to (\sim A \lor B).$$

Визначаємо перший рядок: $\sim((A \to B) \to (\sim A \lor B))$.

Будуємо таблицю:

$$\underline{\sim((A\to B)}\to(\sim A\lor B))\ [\sim\to]$$

$$\underline{\sim((A\to B)}\to(\underline{\sim A\lor B))}\ [\sim\to]$$

$$\underline{A\to B,}\ \sim(\sim A\lor B))\ [\to]$$

$$\sim A, \underline{\sim(\sim A\lor B)} \parallel B, \sim(\underline{\sim A\lor B)}\ [\sim\lor]$$

$$\sim A, \underline{\sim\sim A}, B \parallel B', \sim\sim A, \sim B'\ [\sim\sim]$$

$$\sim A', A', \sim B \parallel N$$

$$N_1 \parallel N$$

Аналітична таблиця замкнена. Цим фактом встановлена загальнозначимість формули $(A \to B) \to (\sim A \lor B)$.

### *Література*


Бочаров В.А., Маркин В.И. Основы логики. – М.: Космополис, 1994.

Войшвилло Е.К. Символическая логика. – М.: Изд-во МГУ, 1989.

Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. – СПб.: Лань, 2004.

Жоль К.К. Вступ до сучасної логіки. – К.: Наукова думка, 1992.

Жоль К.К. Логика. Введение в современную символическую логику. – К.: Стилос, 2000.

Ивлев Ю.В. Логика. – М.: Проспект, 2009.

Ішмуратов А.Т. Вступ до філософської логіки. – К.: Абрис, 1997.

Карамишева Н.В. Логіка. Пізнання. Евристика. – Львів: Астролябія, 2002.
Конверський А.Є. Логіка (традиційна та сучасна). – К.: ЦНЛ, 2004.
Математическая логика: Учеб. пособие / Л.А.Латонин, Ю.А.Макаренков, В.В.Николаева, А.А.Столяр; Под общ. ред. А.А.Столяра. – Мн.: Выш. шк., 1991.
Ненашев М.И. Введение в логику. – М.: Гардарики, 2004.
Непейвода Н.Н. Прикладная логика. – Новосибирск: Изд-во УдГУ, 2004.
Светлов В.А. Логика. – СПб.: Питер, 2008.
Символическая логика: Учебник / Под ред. Я.А.Слинина, Э.Ф.Караваева, А.И.Мигунова. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005.
Солодухин О.А. Логика. – Ростов-н/Д: Феникс, 2000.
Хоменко І.В. Логіка. – К.: Абрис, 2004.
Хоменко І.В. Логіка: теорія та практика. – К.: ЦНЛ, 2010.
Шуман А.Н. Современная логика: теория и практика. – Мн.: Экономпресс, 2004.



Лекція 4

## Головні закони логіки висловлювань

План лекції

1. **Загальна характеристика законів логіки висловлювань.**
2. **Закони логіки висловлювань з однією пропозиційною змінною.**
3. **Закони логіки висловлювань із багатьма пропозиційними змінними.**

Виклад лекції

### 1. Загальна характеристика законів логіки висловлювань

***Закон – це необхідний та постійний зв'язок між явищами***. Розрізняють ***три типи законів***: природні закони, нормативні закони й логічні закони. Одними рисами вони схожі між собою, іншими суттєво відрізняються один від одного.

***Природні закони*** (або ***закони природи***) характеризуються жорсткою незмінною регулярністю, яка або насправді має місце в природі (у цьому випадку закон вважається істинним), або не існує (у цьому випадку закон вважається хибним). Такі закони є незмінними й не допускають винятків. Вони не підпорядковуються соціальному контролю, іншими словами, закони природи не можуть бути створені людьми або порушені ними. Прикладами таких законів є закони гравітації, термодинаміки тощо.

***Нормативні закони*** (або ***норми***) суттєво відрізняються від законів природи. Вони покликані описувати не факти дійсності, а ціннісні орієнтації у поведінці людей. Норми часто називають хорошими чи поганими, правильними чи неправильними, прийнятими чи неприйнятими. Істинними чи хибними їх назвати навряд чи можна. Так, християнська заповідь «*Не убий!*» оцінюється скоріше за все як правильна, але не як істинна, бо вона не є описом стану речей в дійсності, а є певним керівництвом до дії. Норми моралі чи права можуть змінюватися з плином часу й мати винятки. Вони повністю залежать від людини. Вона їх створює й може порушувати. Існування нормативних законів завжди зумовлене соціальним контролем – людськими рішеннями та діями. Цей контроль звичайно здійснюється шляхом застосування санкцій – покаранням або попередженням того, хто порушує закон. Як бачимо, природні закони й нормативні закони навряд чи мають щось спільне між собою, крім назви – ті та інші закони.

*Логічні закони* (або *закони логіки*) схожі як з першими, так і з другими типами законів. ***Закони логіки – це методи побудови правильних міркувань***. Специфіка цих методів-норм полягає в тому, що людина їх не встановлює. Вони ***мають об'єктивний характер*** й не залежать від конкретної особи чи соціальної групи. У цьому логічні закони схожі із законами природи. Однак, на відміну від останніх, які повністю незалежні від людини: вона їх не встановлює й не може порушити, закони логіки можуть порушуватися людьми. У цьому логічні закони схожі із нормативними законами. Але за порушення логічних законів людина не несе ніякого покарання. Їй може бути тільки вказано на ті помилки, які вона допустила у своєму міркуванні.

Логічних законів дуже багато. У цьому специфіка логіки як науки, її відмінність від більшості інших наук. ***Однотипні закони логіки об'єднуються в логічні системи, які зазвичай називаються логіками***. Серед логічних законів виокремлюють кілька таких, які кваліфікують як головні закони логіки. *До головних законів логіки висловлювань зараховують*:

1) закони логіки висловлювань з однією пропозиційною змінною та
2) закони логіки висловлювань із багатьма пропозиційними змінними.

### 2. Закони логіки висловлювань з однією пропозиційною змінною

Найпростішими законами логіки висловлювань є логічні закони з однією пропозиційною змінною. До них належать:

- ***закон виключеного третього;***
- ***закон несуперечності;***
- ***закон тотожності;***
- ***закони ідемпотентності;***
- ***закони зняття й введення подвійного заперечення;***
- ***закон Клавія.***



***Закон виключеного третього*** визначається так: ***з двох описових висловлювань, в одному з яких стверджується те, що заперечується у другому, – одне є неодмінно істинним, друге – хибним, третього значення істинності для них немає*** (лат. ***tertium non datur*** – третього не дано).

Його схема: **$A \veebar \sim A$.**

**Приклади**: «*Дунай впадає або не впадає у Чорне море*», «*Сніг йде або не йде*», «*Протагор судовий процес або виграє, або програє*».

***Закон несуперечності*** формулюється так: ***жодне описове висловлювання не може бути істинним одночасно зі своїм запереченням.***

Його схема: **$\sim (A \wedge \sim A)$.**

**Приклади**: «*Неправильно, що ця ріка глибока і мілка*», «*Неправильно, що Сократ високий і низький*», «*Неправильно, що Платон був в Індії і не перетинав кордонів Індії*».

***Закон тотожності визначається так: будь-яке описове висловлювання є тотожним саме собі.***

Його схема: **$A \leftrightarrow A$,**
або **$A \rightarrow A$.**

**Приклади**: «*Якщо і тільки якщо це закон, тоді це закон*», «*Якщо лампа світить, тоді вона світить*», «*Якщо логіка наука, тоді вона наука*».

***Закон ідемпотентності*** (від лат. ***idempotens*** – зберігаючий той самий ступінь) формулюється так: ***повторення через кон'юнкцію або через диз'юнкцію одного й того ж самого описового висловлювання дає саме це описове висловлювання. Цей закон дає змогу виключити таке повторення.***

Його схеми:

- для кон'юнкції: **$(A \wedge A) \leftrightarrow A$;**
- для диз'юнкції: **$(A \vee A) \leftrightarrow A$.**

**Приклади**: «*Якщо і тільки якщо стверджується, що Еверест – гора і Еверест – гора, тоді можна стверджувати, що Еверест – гора*», «*Тоді і тільки тоді, коли стверджується, що Рейн – ріка чи Рейн – ріка, тоді можна стверджувати, що Рейн – ріка*».

***Закон зняття подвійного заперечення*** формулюється так: ***подвійне заперечення дає вихідне твердження, іншими словами повторене двічі заперечення дає вихідне твердження.***

Його схема: **~ ~ A → A.**

**Приклади**: «*Якщо неправильно, що сьогодні не понеділок, тоді сьогодні понеділок*», «*Якщо неправильно, що він не володіє англійською мовою, тоді він володіє англійською мовою*».

***Закон введення подвійного заперечення*** визначається так: ***вихідне твердження тягне за собою подвійне заперечення. Цей закон іноді називають зворотним законом подвійного заперечення.***

Його схема: **A → ~ ~ A.**

**Приклади**: «*Якщо квадрати мають прямі кути, тоді неправильно, що квадрати не мають прямих кутів*», «*Якщо Шекспір писав сонети, тоді неправильно, що він не писав сонети*».

***Закон Клавія*** сформульований вченим-єзуїтом, що жив у XVI ст. Цей закон визначається так: ***описове висловлювання, яке випливає зі власного заперечення, істинне.***

Його схема: **(~ A → A) → A.**

**Приклади**: «*Якщо неправильно, що трапеція має чотири сторони, тоді трапеція має чотири сторони, отже, трапеція має чотири сторони*», «*Якщо неправильно, що автобус приїде вчасно, тоді автобус приїде вчасно, отже, автобус приїде вчасно*».

### 3. Закони логіки висловлювань із багатьма пропозиційними змінними

Складнішою є структура законів логіки висловлювань із більш ніж однією пропозиційною змінною. До них належать:

– ***закони комутативності;***
– ***закон Дунса Скота;***
– ***закони контрапозиції;***
– ***закони асоціативності;***
– ***закони дистрибутивності;***
– ***закони де Моргана.***



***Закон комутативності*** (від лат. ***commutatio*** – зміна) визначається так: ***дозволяється міняти місцями описові висловлювання, зв'язані кон'юнкцією й диз'юнкцією.***

Його схеми:

– для кон'юнкції: **(A ∧ B) ↔ (B ∧ A);**
– для диз'юнкції: **(A ∨ B) ↔ (B ∨ A).**

**Приклади**: «*Якщо і тільки якщо знаки бувають мовними і позамовними, тоді знаки бувають позамовними і мовними*», «*Якщо і тільки якщо міркування є правильним або неправильним, тоді міркування є неправильним або правильним*».

***Закон Дунса Скота***, запропонований цим вченим-схоластом у XIV ст., визначається так: ***із хибного описового висловлювання випливає будь-яке описове висловлювання (логічне протиріччя викликає все, що завгодно).***

Його схема: **~ A → (A → B).**

**Приклади**: «*Якщо двічі по два не чотири, тоді якщо двічі по два чотири, вся математика нічого не варта*», «*Якщо Земля не кругла, тоді якщо Земля кругла, Місяць квадратний*».

***Закон контрапозиції*** (від лат. ***contra*** – проти й ***positio*** – розміщую, ставлю) формулюється так: ***дозволяється за допомогою заперечення міняти місцями антецедент і консеквент імплікації.***

Розрізняють закони простої й складної контрапозиції.

***Перший закон простої контрапозиції*** визначається так: ***якщо з першого описового висловлювання випливає друге, тоді із заперечення другого описового висловлювання випливає заперечення першого.***

Його схема: **(A → B) → (~ B → ~ A).**

**Приклади**: «*Якщо він буде мати час, тоді він поїде до Києва, отже, якщо він не поїхав до Києва, у нього не було часу*», «*Якщо особа може бути суб'єктом цивільно-правових відносин, тоді вона може укладати цивільно-правові угоди, отже, якщо особа не може укладати цивільно-правові угоди, вона не може бути суб'єктом цивільно-правових відносин*».

***Другий закон простої контрапозиції*** формулюється так: ***якщо із заперечення першого описового висловлювання***

***випливає заперечення другого, тоді з другого описового висловлювання випливає перше.***

Його схема: $(\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow (B \rightarrow A)$.

**Приклади**: «*Якщо немає диму, коли немає вогню, тоді, якщо є вогонь, є й дим*», «*Якщо стосовно особи не висунуто обвинувальний вирок, вона не може бути визнана винною, отже, якщо особу визнано винною, їй висунуто обвинувальний вирок*».

***Третій закон простої контрапозиції*** визначається так: ***якщо із першого описового висловлювання випливає заперечення другого, тоді з другого описового висловлювання випливає заперечення першого.***

Його схема: $(A \rightarrow \sim B) \rightarrow (B \rightarrow \sim A)$.

**Приклади**: «*Якщо геометрична фігура квадрат, тоді вона не трикутник, отже, якщо вона трикутник, тоді вона не квадрат*», «*Якщо він є студентом, тоді він не є професором, отже, якщо він є професором, тоді він не є студентом*».

***Четвертий закон простої контрапозиції*** формулюється так: ***якщо із заперечення першого описового висловлювання випливає друге, тоді із заперечення другого описового висловлювання випливає перше.***

Його схема: $(\sim A \rightarrow B) \rightarrow (\sim B \rightarrow A)$.

**Приклади**: «*Якщо відомо, що коли число не ділиться на два, тоді воно просте, отже, якщо число не є простим, тоді воно ділиться на два*», «*Якщо те, що не є доведеним, підлягає сумнівам, тоді, те, що не підлягає сумнівам, є доведеним*».

***Перший закон складної контрапозиції*** визначається так: ***із першого й другого описових висловлювань випливає третє тоді і тільки тоді, коли з першого описового висловлювання й заперечення третього випливає заперечення другого.***

Його схема: $((A \wedge B) \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \wedge \sim B) \rightarrow \sim C)$.

**Приклад**: «*Якщо і тільки якщо дана стаття ґрунтовна за змістом і відповідає тематиці збірника, тоді її слід опублікувати, отже, якщо дана стаття ґрунтовна за змістом, але вона не відповідає тематиці збірника, тоді її не слід публікувати*».



***Другий закон складної контрапозиції*** формулюється так: ***із першого описового висловлювання випливає друге або третє тоді і тільки тоді, коли із заперечення другого описового висловлювання випливає заперечення першого або третє описове висловлювання.***

Його схема: $(A \rightarrow (B \vee C)) \leftrightarrow (\sim B \rightarrow (\sim A \vee C))$.

**Приклад**: «*Якщо і тільки якщо він вчиться у цій групі, тоді він вивчає англійську або німецьку мову, отже, якщо він не вивчає англійську мову, він не вчиться у цій групі або вивчає німецьку мову*».

***Закон асоціативності*** (від лат. ***associatio*** – з'єднання) визначається так: ***дозволяється по-різному групувати за допомогою дужок описові висловлювання, з'єднані за допомогою кон'юнкції та диз'юнкції.***

Його схеми:

– для кон'юнкції: $((A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$.
– для диз'юнкції: $((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$.

***Закон дистрибутивності*** (від англ. ***distribution*** – розподіл, розміщення) визначається так: ***дозволяється розподіляти один логічний сполучник стосовно іншого.***

Його схеми:

– для розподілу кон'юнкції відносно диз'юнкції:
  $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
– для розподілу диз'юнкції відносно кон'юнкції:
  $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

**Приклади**:

«*Якщо і тільки якщо сьогодні буде презентація і завтра буде продаж або завтра виставку закриють, тоді сьогодні буде презентація і завтра буде продаж або сьогодні буде презентація і завтра виставку закриють*»,

«*Якщо і тільки якщо завтра буде прохолодно чи післязавтра буде тепло і можна буде піти в гори, тоді завтра буде прохолодно або післязавтра буде тепло і завтра буде прохолодно чи післязавтра можна буде піти в гори*».

***Закони де Моргана*** були сформульовані шотландським логіком ***Огастесом де Морганом***. Іноді їх називають ***законами***

***Вільяма Оккама***, вважаючи, що саме йому належить першість у відкритті цих законів. Налічують два закони де Моргана.

***Перший закон де Моргана*** визначається так: ***заперечення кон'юнкції еквівалентне диз'юнкції заперечень.***

Його схема: **$\sim (A \wedge B) \leftrightarrow (\sim A \vee \sim B)$.**

**Приклади**: «*Неправильно, що завтра буде холодно і завтра буде дощ, якщо і тільки якщо завтра не буде холодно або завтра не буде дощу*», «*Неправильно, що Сократ філософ і скульптор, тоді і тільки тоді, коли він – не філософ або не скульптор*».

***Другий закон де Моргана*** визначається так: ***заперечення диз'юнкції еквівалентне кон'юнкції заперечень.***

Його схема: **$\sim (A \vee B) \leftrightarrow (\sim A \wedge \sim B)$.**

**Приклади**: «*Неправильно, що учень знає арифметику або знає геометрію, якщо і тільки якщо він не знає ні арифметики, ні геометрії*», «*Неправильно, що студент знає логіку або філософію, тоді і тільки тоді, коли він не знає ні логіки, ні філософії*».

### *Література*


Бочаров В.А., Маркин В.И. Основы логики. – М.: Космополис, 1994.

Войшвилло Е.К. Символическая логика. – М.: Изд-во МГУ, 1989.

Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. – СПб.: Лань, 2004.

Жоль К.К. Вступ до сучасної логіки. – К.: Наукова думка, 1992.

Жоль К.К. Логика. Введение в современную символическую логику. – К.: Стилос, 2000.

Ивлев Ю.В. Логика. – М.: Проспект, 2009.

Ішмуратов А.Т. Вступ до філософської логіки. – К.: Абрис, 1997.

Карамишева Н.В. Логіка. Пізнання. Евристика. – Львів: Астролябія, 2002.

Конверський А.Є. Логіка (традиційна та сучасна). – К.: ЦНЛ, 2004.

Математическая логика: Учеб. пособие / Л.А.Латонин, Ю.А.Макаренков, В.В.Николаева, А.А.Столяр; Под общ. ред. А.А.Столяра. – Мн.: Выш. шк., 1991.





Ненашев М.И. Введение в логику. – М.: Гардарики, 2004.

Непейвода Н.Н. Прикладная логика. – Новосибирск: Изд-во УдГУ, 2004.

Светлов В.А. Логика. – СПб.: Питер, 2008.

Символическая логика: Учебник / Под ред. Я.А.Слинина, Э.Ф.Караваева, А.И.Мигунова. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005.

Солодухин О.А. Логика. – Ростов-н/Д: Феникс, 2000.

Хоменко І.В. Логіка. – К.: Абрис, 2004.

Хоменко І.В. Логіка: теорія та практика. – К.: ЦНЛ, 2010.

Шуман А.Н. Современная логика: теория и практика. – Мн.: Экономпресс, 2004.

Лекція 5

## Нормальні форми формул логіки висловлювань

План лекції

1. **Кон'юнктивні нормальні форми.**
2. **Диз'юнктивні нормальні форми.**

Виклад лекції

### 1. Кон'юнктивні нормальні форми

***Нормальною називається така форма деякої формули логіки висловлювань, якщо вона, по-перше, не містить у собі знаків*** $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\underline{\vee}$, ***а по-друге, знаки заперечення стоять у ній лише при змінних.***

Будь-яку формулу логіки висловлювань, що не має нормальної форми, можна скінченним числом застосувань правил заміни перетворити на формулу, яка має нормальну форму. Цю процедуру називають ***процесом зведення формул до нормальної форми.***

Щоб звести формулу логіки висловлювань до нормальної форми, необхідно зробити в ній такі рівносильні заміни:

1) $\mathbf{A \rightarrow B \equiv \sim A \vee B}$;
2) $\mathbf{A \leftrightarrow B \equiv (\sim A \vee B) \wedge (\sim B \vee A)}$;
3) $\mathbf{A \underline{\vee} B \equiv (A \vee B) \wedge (\sim A \wedge \sim B)}$;
4) $\mathbf{\sim (A \wedge B) \equiv (\sim A \vee \sim B)}$;
5) $\mathbf{\sim (A \vee B) \equiv (\sim A \wedge \sim B)}$;
6) $\mathbf{\sim\sim A \equiv A}$.

Якщо жодного з цих кроків не можна здійснити, тоді ця формула знаходиться в нормальній формі.

***До нормальних форм формул логіки висловлювань належать*** насамперед ***кон'юнктивна нормальна форма*** (КНФ) ***та диз'юнктивна нормальна форма*** (ДНФ). Причому кожна з них має свій специфічний спосіб утворення (або зведення) й дає змогу розв'язувати відповідні синтаксичні завдання логіки висловлювань.

Способом визначення тотожно-істинної формули є КНФ. Розрізняють три види КНФ – просту, досконалу та скорочену.



***Простою кон'юнктивною формою (ПКНФ) є кон'юнкція елементарних диз'юнкцій.*** Елементарною називається така диз'юнкція, до складу якої входять або змінні, або їх заперечення. Елементарну диз'юнкцію називають кон'юнктом.

ПКНФ записується так:

1) $\mathbf{(A \vee B) \wedge (\sim A \vee C)}$;
2) $\mathbf{(A \vee B) \wedge C}$ тощо.

У другій формулі кон'юнкт **С** розглядається як вироджена диз'юнкція з одним диз'юнктом.

***Для того, щоб звести формулу до ПКНФ, необхідно виконати такі дії:***

1) за допомогою відповідних правил заміни звільнитися від $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\underline{\vee}$, якщо вони наявні у вихідній формулі. Для цього потрібно:

   а) перетворити еквіваленцію на кон'юнкцію слабких диз'юнкцій:

   $\mathbf{A \leftrightarrow B \equiv (\sim A \vee B) \wedge (\sim B \vee A)}$;

   б) перетворити сильну диз'юнкцію на кон'юнкцію слабких диз'юнкцій:

   $\mathbf{A \underline{\vee} B \equiv (A \vee B) \wedge (\sim A \wedge \sim B)}$;

   в) перетворити імплікацію на слабку диз'юнкцію:

   $\mathbf{A \rightarrow B \equiv \sim A \vee B}$

2) усунути спільне заперечення, що поєднує більше однієї змінної за правилами рівносильної заміни:

   $\mathbf{\sim (A \wedge B) \leftrightarrow (\sim A \vee \sim B)}$;

   $\mathbf{\sim (A \vee B) \leftrightarrow (\sim A \wedge \sim B)}$,

   а також усунути подвійне заперечення за рівносильністю:

   $\mathbf{\sim\sim A \equiv A}$.

3) якщо при цьому одержують замість кон'юнкції елементарних диз'юнкцій навпаки – диз'юнкцію кон'юнктивно поєднаних змінних, тоді до отриманої формули застосовують наступне правило рівносильної заміни:

   $\mathbf{A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)}$.

Якщо в результаті дій 1–3 всі елементарні диз'юнкції отриманої формули матимуть регулярне входження будь-якої змінної (коли будь-яка змінна входить до елементарної диз'юнкції і з запереченням, і без нього), тоді ця формула буде тотожно-істинною. Наприклад, маємо формулу: $(\sim B \wedge (A \rightarrow B))$. Зведемо її до ПКНФ:

1. $\sim(\sim B \wedge (A \rightarrow B)) \vee \sim A$.
2. $(\sim B \vee \sim(\sim A \vee B)) \vee \sim A$.
3. $(B \vee (\sim\sim A \wedge \sim B) \vee \sim A$.
4. $(B \vee (A \wedge \sim B)) \vee \sim A$.
5. $((B \vee A) \wedge (B \vee \sim B) \vee \sim A$.
6. $(B \vee A \vee \sim A) \wedge (B \vee \sim B \vee \sim A)$.

Оскільки обидва кон'юнкти містять змінну та її заперечення, то це тавтологія або тотожно-істинна формула.

Будь-яку нетотожно-істинну формулу можна звести до досконалої кон'юнктивної нормальної форми (ДКНФ). Кожна нетотожно-істинна формула має одну ДКНФ. За допомогою ДКНФ розв'язують синтаксичне завдання знаходження усіх логічних наслідків із вихідних формул. Наслідком із деякої формули A є така формула B, приєднання якої до формули A знаком імплікації утворює тотожно-істинну формулу $A \rightarrow B$.

***Досконалою називається кон'юнктивна нормальна форма деякої формули, яка відповідає таким умовам*:**

1) ***у ній немає двох однакових кон'юнктів*;**
2) ***жоден кон'юнкт не має двох однакових змінних або диз'юнктів*** $(A \vee B \vee A)$;
3) ***жоден кон'юнкт не має змінної та її заперечення*** $(A \vee B \vee \sim A)$;
4) ***у кожному кон'юнкті наявні всі змінні, що входять до складу вихідної формули.***

Цим умовам відповідає, наприклад, формула

$$(A \vee B \vee C) \wedge (\sim A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \sim B \vee C).$$

***Щоб привести формулу до ДКНФ, необхідно виконати такі дії*:**

1) звести вихідну формулу до ПКНФ;
2) співставити отриману ПКНФ із перерахованими ознаками ДКНФ;
3) якщо в якомусь із кон'юнктів відсутня змінна, що наявна у вихідній формулі, то необхідно диз'юнктивно приєднати до цього кон'юнкта протиріччя $(X \wedge \sim X)$, а потім застосувати закон дистрибутивності диз'юнкції стосовно кон'юнкції:

$$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$



Візьмемо такі формули: $B \vee C$, $B \rightarrow \sim A$, $B \rightarrow C$ та знайдемо усі їхні наслідки:

1. $(B \vee C) \wedge (B \rightarrow \sim A) \wedge (B \rightarrow C)$;
2. $(B \vee C) \wedge (\sim B \vee \sim A) \wedge (\sim B \vee C)$;
3. $[(B \vee C) \vee (A \wedge \sim A)] \wedge [(\sim B \vee \sim A) \vee (C \wedge \sim C)] \wedge [(\sim B \vee C) \vee (\sim A \wedge A)]$;
4. $(B \vee C \vee A) \wedge (B \vee C \vee \sim A) \wedge (\sim B \vee \sim A \vee C) \wedge (\sim B \vee \sim A \vee \sim C) \wedge (\sim B \vee C \vee A) \wedge (B \vee C \vee \sim A)$.

Ця ДКНФ представляє усі можливі наслідки із наведених формул.

ДКНФ, таким чином, дає можливість огляду тих наслідків із формули, які самі мають ДКНФ. Для виявлення простих наслідків із формули її необхідно звести до скороченої кон'юнктивної нормальної форми (СКНФ). Простим наслідком називається такий наслідок, який не поглиається ніяким, більш сильним наслідком.

***Скороченою кон'юнктивною нормальною формою деякої формули є її КНФ, яка відповідає таким умовам*:**

1) ***жоден кон'юнкт не утримує двох однакових змінних*** $(A \vee B \vee A)$;
2) ***у СКНФ відсутні два однакових кон'юнкти*;**
3) ***у СКНФ відсутні кон'юнкти, до складу яких входять змінна та її заперечення.***

***Щоб привести формулу до СКНФ, необхідно виконати такі дії*:**

1) отримати із вихідної формули ПКНФ;
2) співставити отриману ПКНФ із ознаками СКНФ;
3) до отриманого виразу послідовно застосовувати закони виявлення:

$(A \vee C) \wedge (B \vee \sim C) \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee \sim C) \wedge (A \vee B)$

$(A \wedge C) \vee (B \wedge \sim C) \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge \sim C) \vee (A \wedge B)$

та закони поглинання:

$A \wedge (A \vee B) \equiv A$

A ∨ (A ∧ B) ≡ A.

Знайдемо усі прості наслідки із засновків:

(A → B), (A → C), (~ B ∨ ~ C):

1. (A → B) ∧ (A → C) ∧ (~ B ∨ ~ C);
2. (~ A ∨ B) ∧ (~ A ∨ C) ∧ (~ B ∨ ~ C);
3. (~ A ∨ B) ∧ (~ A ∨ C) ∧ (~ B ∨ ~ C) ∧ (~ A ∨ ~ C) ∧ ∧ (~ A ∨ ~ B);
4. ~ A ∧ (~ B ∨ ~ C).

**2. Диз'юнктивні нормальні форми**

Відповідь на те, чи є деяка формула тотожно-хибною чи ні, дає диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ). Є три види ДНФ – проста, досконала та скорочена.

***Простою диз'юнктивною нормальною формою (ПДНФ) деякої формули є диз'юнкція елементарних кон'юнкцій. Елементарною називається така кон'юнкція, членами якої є або змінні, або їхні заперечення***. ПДНФ записується так:

(A ∧ B) ∨ ( ~ B ∧ C) ∨ A тощо.

***Щоб привести формулу до ПДНФ, необхідно виконати такі дії***:

1) за допомогою відповідних логічних законів послідовно звільнитися від ⊻, →, ↔, якщо вони є у вихідній формулі;
2) віднести зовнішнє заперечення до елементарних висловлювань;
3) застосувати до отриманої формули закон дистрибутивності кон'юнкції стосовно диз'юнкції:

A ∧ (B ∨ C) ↔ (A ∧ B) ∨ (A ∧ C).

Наприклад, знайдемо ПДНФ формули:

1. A ∧ (( ~ A ∧ B) ∨ (B ∧ ~ B));
2. (A ∧ ( ~ A ∧ B)) ∨ (A ∧ (B ∧ ~ B));
3. (A ∧ ~ A ∧ B) ∨ (A ∧ B ∧ ~ B).

Обидві кон'юнкції містять вирази A ∧ ~ A та B ∧ ~ B, які при будь-якому значенні змінних хибні.

Будь-яка нетотожно-хибна формула може бути приведена до досконалої диз'юнктивної нормальної форми (ДДНФ). Кожна нетотожно-хибна формула має одну ДДНФ. За допомогою



ДДНФ розв'язують синтаксичне завдання огляду усіх гіпотез певної формули. Гіпотезою формули **B** є така формула **A**, приєднання якої до формули **B** знаком імплікації утворює тотожно-істинну формулу **A → B**.

***Досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ) деякої формули є така її ДНФ, яка відповідає таким умовам***:

1) ***у ДДНФ не має двох однакових диз'юнктів***;
2) ***жоден диз'юнкт не містить змінної та її заперечення***;
3) ***жоден диз'юнкт не має двох однакових змінних***;
4) ***кожен диз'юнкт містить усі змінні, що наявні у вихідній формулі.***

***Щоб привести формулу до ДДНФ, необхідно виконати такі дії***:

1) звести формулу до ПДНФ;
2) співставити отриману ПДНФ з ознаками ДДНФ;
3) якщо в якомусь диз'юнкті не вистачає змінної, яка є у вихідній формулі, то до нього потрібно кон'юнктивно приписати диз'юнкцію цієї змінної та її заперечення (X ∨ ~ X).

Наприклад приведемо до ДДНФ формулу:

(A → B) ∧ ( ~ B → A):

1. ( ~ A ∨ B) ∧ ( ~ ~ B ∨ A);
2. ( ~ A ∨ B) ∧ (B ∨ A);
3. ( ~ A ∧ B) ∨ ( ~ A ∧ A) ∨ (B ∧ B) ∨ (A ∧ B);

Формула в рядку 3 є ПДНФ вихідної формули. Співставимо її з ознаками ДДНФ:

4. ( ~ A ∧ B) ∨ B ∨ (A ∧ B);
5. ( ~ A ∧ B) ∨ [B ∧ (A ∨ ~ A)] ∨ (A ∧ B);
6. ( ~ A ∧ B) ∨ (B ∧ A) ∨ (B ∧ ~ A) ∨ (A ∧ B);
7. ( ~ A ∧ B) ∨ (B ∧ A).

Із отриманої ДДНФ очевидно, що вихідна формула має три гіпотези:

1. ( ~ A ∧ B);
2. (B ∧ A);
3. ( ~ A ∧ B) ∨ (B ∧ ~ A).

Для виявлення простих гіпотез деякої формули її приводять до скороченої диз'юнктивної нормальної форми (СДНФ).

Гіпотеза **A** формули **B** називається простою, якщо вона не є тотожно-хибною кон'юнкцією, не містить повторів та не поглинається ніякою іншою гіпотезою формули **B**.

***Скороченою диз'юнктивною нормальною формою деякої формули є така її ДНФ, яка відповідає таким умовам***:

1) ***у жодному диз'юнкті немає двох однакових кон'юнктів***;
2) ***якщо є два однакових диз'юнкти, то один з них скорочується***;
3) ***жоден диз'юнкт не містить змінної та її заперечення***.

***Для того, щоб привести формулу до СДНФ, необхідно виконати такі дії***:

1) привести вихідну формулу до ПДНФ;
2) співставити отриману ПДНФ із ознаками СДНФ;
3) послідовно застосовувати до отриманого виразу закони виявлення та закони поглинання.

Наприклад, візьмемо формулу $((A \wedge B) \vee C) \rightarrow C$ та приведемо її до СДНФ:

1. $\sim((A \wedge B) \vee C) \vee C$;
2. $\sim((A \wedge B) \wedge \sim C) \vee C$;
3. $((\sim A \vee \sim B) \wedge \sim C) \vee \sim C$;
4. $(\sim A \wedge \sim C) \vee (\sim B \wedge \sim C) \vee C$;

Формула у 4 рядку є ПДНФ вихідної формули. Приведемо її до СДНФ. Для цього послідовно застосовуємо закони виявлення та закони поглинання:

5. $(\sim A \wedge \sim C) \vee (\sim B \wedge \sim C) \vee C \wedge \sim A \vee \sim B$;
6. $C \vee \sim A \vee \sim B$.

Ми отримали чотири прості гіпотези:

1. $C$;
2. $\sim A$;
3. $\sim B$;
4. $C \vee \sim A \vee \sim B$.

### *Література*


Бочаров В.А., Маркин В.И. Основы логики. – М.: Космополис, 1994.

Войшвилло Е.К. Символическая логика. – М.: Изд-во МГУ, 1989.





Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. – СПб.: Лань, 2004.

Жоль К.К. Вступ до сучасної логіки. – К.: Наукова думка, 1992.

Жоль К.К. Логика. Введение в современную символическую логику. – К.: Стилос, 2000.

Ивлев Ю.В. Логика. – М.: Проспект, 2009.

Ішмуратов А.Т. Вступ до філософської логіки. – К.: Абрис, 1997.

Карамишева Н.В. Логіка. Пізнання. Евристика. – Львів: Астролябія, 2002.

Конверський А.Є. Логіка (традиційна та сучасна). – К.: ЦНЛ, 2004.

Математическая логика: Учеб. пособие / Л.А.Латонин, Ю.А.Макаренков, В.В.Николаева, А.А.Столяр; Под общ. ред. А.А.Столяра. – Мн.: Выш. шк., 1991.

Ненашев М.И. Введение в логику. – М.: Гардарики, 2004.

Непейвода Н.Н. Прикладная логика. – Новосибирск: Изд-во УдГУ, 2004.

Светлов В.А. Логика. – СПб.: Питер, 2008.

Символическая логика: Учебник / Под ред. Я.А.Слинина, Э.Ф.Караваева, А.И.Мигунова. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005.

Солодухин О.А. Логика. – Ростов-н/Д: Феникс, 2000.

Хоменко І.В. Логіка. – К.: Абрис, 2004.

Хоменко І.В. Логіка: теорія та практика. – К.: ЦНЛ, 2010.

Шуман А.Н. Современная логика: теория и практика. – Мн.: Экономпресс, 2004.

Лекція 6

## Натуральне числення логіки висловлювань

План лекції

1. **Логіка висловлювань як числення. Натуральне числення висловлювань.**
2. **Натуральне числення висловлювань. Прямі правила для логічних сполучників.**
3. **Натуральне числення висловлювань. Непрямі правила для логічних сполучників.**

Виклад лекції

### 1. Логіка висловлювань як числення. Натуральне числення висловлювань

***Міркування в логіці вислолювань – це процедура обґрунтування деякого описового висловлювання шляхом його поступового виведення з інших описових висловлювань.***

До складу міркування входять засновки, висновок та правила виведення.

***Засновками називають відомі знання, які містяться у вихідних описових висловлюваннях.***

***Висновком – нове знання, що міститься у останньому описовому висловлюванні, яке виражає результати, отримані шляхом зіставлення та перебудови засновків.***

***Правила виведення обґрунтовують наявність логічного зв'язку між засновками та можливість на його підставі робити висновок або, іншими словами, існування відношення обґрунтування між засновками та висновком.***

За ступенем повноти формалізації міркування бувають виводами або численнями.

***Вивід – це напівфомалізоване міркування, в якому зі змісту відомого знання у вигляді речень природної мови за визначеними формальними правилами отримують нове знання.*** Вивід – сучасна назва. Традиційно цей вид міркування називають умовиводом, інколи змістовним міркуванням.

***Числення – це формалізоване міркування, в якому із відомого знання у вигляді формул штучної мови логіки за***



***допомогою формального виведення та змістовної інтерпретації отримують нове знання.*** Інші назви числення – формальний вивід, формальне міркування.

За наявністю відношення обґрунтування розрізняють правильні та неправильні міркування.

***Правильним називається міркування, в якому між засновками та висновком наявне відношення обґрунтування у вигляді логічного випливання або імовірнісного підтвердження, а неправильним – в якому воно відсутнє взагалі.***

За типом відношення обґрунтування виокремлюють дедуктивні та індуктивні міркування.

***Дедуктивним називається міркування, в якому між засновками та висновком існує відношення логічного випливання, виражене у формі логічного закону, що дозволяє з істинних засновків, які, як правило, містять загальне знання, отримати істинний висновок, який містить часткове знання.***

***Індуктивним називається міркування, в якому між засновками та висновком відсутнє відношення логічного випливання, але наявне відношення імовірнісного підтвердження, виражене не у формі логічного закону, а у вигляді фактичних або психологічних підстав, які не мають формального характеру, що не гарантує істинності узагальнюючого висновку при істинних часткових засновках.***

За характером відношення обґрунтування дедуктивні міркування поділяють на дедуктивні міркування першого типу та дедуктивні міркування другого типу.

***Дедуктивні міркування першого типу – це дедуктивні міркування, в яких враховують лише логічну структуру складних описових висловлювань, що входять до складу їхніх засновків та висновку.***

***Дедуктивні міркування другого типу – це дедуктивні міркування, в яких враховують не тільки логічну структуру складних описових висловлювань, але й логічні структурні компоненти простих описових висловлювань, що входять до складу їхніх засновків та висновку.***

Логіка висловлювань є теорією дедуктивних міркувань першого типу. У традиційній логіці дедуктивні міркування логіки висловлювань називають дедуктивними виводами на підставі логічного зв'язку між судженнями. Сучасна ж символічна логіка називає дедуктивні міркування логіки висловлювань логічними численнями.

Логіка висловлювань містить логічні числення різного типу. Головними серед них є натуральні та аксіоматичні.

***Натуральним численням логіки висловлювань називається такий вид числення, в якому висновок будується із засновків-гіпотез (припущень, здогадів) у відповідності з певними правилами виведення***. Інша назва цього виду числень – система $S^3$.

***Аксіоматичним численням логіки висловлювань називається такий вид числення, в якому висновок будується із засновків-аксіом (загальновідомого, безсумнівного) у відповідності з певними правилами виведення***. Інша назва цього виду числень – система $S^2$.

Перевагою системи $S^3$ над $S^2$ вважається те, що у системі $S^3$ процес виведення наслідку коротший. Якщо у системі $S^2$ одна й та ж сама формула у структурі обґрунтування може зустрічатися декілька разів, то це дуже рідко трапляється в $S^3$.

Натуральні числення висловлювань будуються способами, близькими до тих, якими звичайно користуються у неформальних доведеннях. Тому процес виведення висновку у натуральному численні логіки висловлювань більш наближений, ніж в аксіоматичному, до повсякденних міркувань людей, більш точно передає їхню логічну структуру. Через це натуральні числення висловлювань зручно використовувати у гуманітарних та соціальних науках. Враховуючи ефективність побудови натуральних числень висловлювань у гуманітарній та соціальній сферах, розглянемо правила натурального числення.

**2. Натуральне числення висловлювань. Прямі правила для логічних сполучників**

***Правила дедуктивних міркувань у логіці висловлювань поділяють на прямі та непрямі.***



***Пряме правило дедуктивного міркування – це правило, за яким висновок безпосередньо випливає із засновків.***

***Непряме правило дедуктивного міркування – це правило, за яким висновок випливає із засновків опосередковано за допомогою додаткових міркувань.***

Розглянемо ***прямі правила дедуктивних міркуваннь***. Вони поділяються на правила введення та правила усунення логічних сполучників. Група правил введення логічних сполучників є фактично їхнім визначенням, а група правил усунення логічних сполучників є наслідком цих визначень.

До правил введення та усунення логічних сполучників належать:

**Правило введення кон'юнкції (ВК) або правило з'єднання (ПЗ):** *якщо описові висловлювання А та В істинні, тоді й їх кон'юнкція істинна.*

Схема правила:

$$\frac{\begin{matrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\end{matrix}}{\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}}$$

**Приклад:**

$$\frac{\begin{matrix}\textit{Віє вітер.}\\ \textit{Йде дощ.}\end{matrix}}{\textit{Віє вітер і йде дощ.}}$$

**Правило усунення кон'юнкції (УК) або правило роз'єднання (ПР):** ***якщо А та В істинне, тоді кожний член кон'юнкції – істинний.***

Схеми правила:

**$УК_1$:** $$\frac{\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}}{\mathbf{A}}$$

**$УК_2$:** $$\frac{\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}}{\mathbf{B}}$$

**Приклади:**

**Для $УК_1$:**

*Яблуко червоне і солодке.*

*Яблуко червоне.*

**Для УК$_2$:**

*Яблуко червоне і солодке.*

*Яблуко солодке.*

**Правило введення диз'юнкції (ВД) або правило ослаблення (ПО):** ***якщо А – істинне, тоді А або В – істинне; якщо В – істинне, тоді А або В – істинне.***

Схеми правила:

**ВД$_1$:** $\dfrac{A}{A \vee B}$

**ВД$_2$:** $\dfrac{B}{A \vee B}$

**Приклади:**

**Для ВД$_1$:**

*Він читає книгу.*

*Він читає книгу або слухає музику.*

**Для ВД$_2$:**

*Він слухає музику.*

*Він читає книгу або слухає музику.*

**Правило усунення диз'юнкції (УД) або правило розгляду випадків (РВ):** ***якщо у засновках є диз'юнкція та заперечення його членів, окрім одного, у висновку буде даний член диз'юнкції.***

Схеми правила:

**УД$_1$:** $\dfrac{A \vee B \quad \sim A}{B}$

**УД$_2$:** $\dfrac{A \vee B \quad \sim B}{A}$



**Приклади:**

**Для УД$_1$:**

*Помилився захисник або воротар.*

*Захисник не помилився.*

*Помилився воротар.*

**Для УД$_2$:**

*Помилився захисник або воротар.*

*Воротар не помилився.*

*Помилився захисник.*

**Правило усунення імплікації (УІ) або правило вилучення наслідків (ВН):** ***якщо у засновках є імплікативне висловлювання та окремо його антецедент, у висновку буде консеквент.*** Правило УІ ще називають відділенням висновку (лат. ***modus ponens***).

**Схеми правила УІ:** $\dfrac{A \rightarrow B \quad A}{B}$

**Приклад:**

*Якщо туманна погода, аеропорт закривається.*

*Сьогодні туманна погода.*

*Сьогодні аеропорт закривається.*

**Правило введення еквівалентності (ВЕ) або правило запровадження рівносильності (ЗР):** ***якщо у засновках є імплікація А → В та зворотна їй В → А, висновком буде еквівалентність А ↔ В.***

Схеми правила: $\dfrac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow A}{A \leftrightarrow B}$

**Приклад:**

*Якщо монета випаде гербом, вона не випаде цифрою.*

*Якщо монета не випаде цифрою, вона випаде гербом.*

*Монета випаде гербом тоді і тільки тоді, коли вона не випаде цифрою.*

**Правило усунення еквівалентності (УЕ) або правило вилучення рівносильності (ВР):** ***якщо засновок є еквівалентністю висловлювань А і В, висновком буде імплікація.***

Схеми правила:

**УЕ$_1$:** $\dfrac{A \leftrightarrow B}{A \rightarrow B}$

**УЕ$_2$:** $\dfrac{A \leftrightarrow B}{B \rightarrow A}$

**Приклади:**

**Для УЕ$_1$:**

*На планеті є життя, тоді і тільки тоді, коли там є атмосфера.*

---

*Якщо на планеті є життя, тоді там є атмосфера.*

**Для УЕ$_2$:**

*У нормальних умовах вода замерзає тоді і тільки тоді, коли температура опускається нижче 0 °С*

---

*Якщо температура опускається нижче 0 °С, тоді в нормальних умовах вона замерзає*

**Правило введення подвійного заперечення (ВЗ$_2$):** ***із А можна вивести його подвійне заперечення, що означає: якщо А – істинне, тоді неправильно, що не-А – істинне.***

Схеми правила:

$\dfrac{A}{\sim\sim A}$

**Приклад:**

*Сьогодні середа.*

---

*Неправильно, що сьогодні не середа.*

**Правило усунення подвійного заперечення (УЗ$_2$):** ***із неправильно, що не-А можне вивести А, де знято подвійне заперечення, що означає: якщо неправильно, що не-А істинне, тоді А – істинне.***

Схеми правила:



$\dfrac{\sim\sim A}{A}$

**Приклад:**

*Неправильно, що ця книга – не підручник.*

---

*Ця книга є підручником.*

**3. Натуральне числення висловлювань. Непрямі правила для логічних сполучників**

Виокремлюють два головні непрямі правила: правило введення заперечення та правило усунення заперечення.

**Правило введення заперечення (ВЗ)** – ***це непряме правило, в якому хибність деякого описового висловлювання обґрунтовують на підставі того, що з цього описового висловлювання за допомогою інших правил виводять протиріччя.***

Схема правила:

$\dfrac{A \vdash B \wedge \sim B}{\sim A}$

**Приклад:**

*Якщо необхідно обґрунтувати, що сьогодні не вівторок, тимчасово припускаємо, що насправді сьогодні вівторок.*

*Із цього припущення та множини аргументів, з яких випливає, що учора була неділя, виводимо протиріччя – сьогодні понеділок та сьогодні вівторок.*

---

*Отже, прийняте припущення неправильне, а вірне його заперечення – сьогодні не вівторок.*

**Правило усунення заперечення (УЗ)** – ***це непряме правило, в якому істинність деякого описового висловлювання обґрунтовують на підставі того, що із заперечення цього описового висловлювання за допомогою інших правил виводять протиріччя.***

Схема правила:

$\dfrac{\sim A \vdash B \wedge \sim B}{A}$

**Приклад:**

*Щоб обґрунтувати, що якщо сьогодні понеділок, тоді завтра вівторок, можна міркувати так. Припустимо, завтра не вівторок.*

*Але це припущення несумісне з істинним висловлюванням, що сьогодні понеділок.*

---

*Отже, завтра дійсно вівторок.*

*Література*

Бочаров В.А., Маркин В.И. Основы логики. – М.: Космополис, 1994.
Войшвилло Е.К. Символическая логика. – М.: Изд-во МГУ, 1989.
Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. – СПб.: Лань, 2004.
Жоль К.К. Вступ до сучасної логіки. – К.: Наукова думка, 1992.
Жоль К.К. Логика. Введение в современную символическую логику. – К.: Стилос, 2000.
Ивлев Ю.В. Логика. – М.: Проспект, 2009.
Ішмуратов А.Т. Вступ до філософської логіки. – К.: Абрис, 1997.
Карамишева Н.В. Логіка. Пізнання. Евристика. – Львів: Астролябія, 2002.
Конверський А.Є. Логіка (традиційна та сучасна). – К.: ЦНЛ, 2004.
Математическая логика: Учеб. пособие / Л.А.Латонин, Ю.А.Макаренков, В.В.Николаева, А.А.Столяр; Под общ. ред. А.А.Столяра. – Мн.: Выш. шк., 1991.
Ненашев М.И. Введение в логику. – М.: Гардарики, 2004.
Непейвода Н.Н. Прикладная логика. – Новосибирск: Изд-во УдГУ, 2004.
Светлов В.А. Логика. – СПб.: Питер, 2008.
Символическая логика: Учебник / Под ред. Я.А.Слинина, Э.Ф.Караваева, А.И.Мигунова. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005.
Солодухин О.А. Логика. – Ростов-н/Д: Феникс, 2000.
Хоменко І.В. Логіка. – К.: Абрис, 2004.
Хоменко І.В. Логіка: теорія та практика. – К.: ЦНЛ, 2010.
Шуман А.Н. Современная логика: теория и практика. – Мн.: Экономпресс, 2004.



Лекція 7

## Логіка предикатів як теорія

План лекції

1. **Терміни логіки предикатів.**
2. **Мова логіки предикатів.**
3. **Формалізація в логіці предикатів.**

Виклад лекції

### 1. Терміни логіки предикатів

Логіка висловлювань як числення та теорія дедуктивних міркувань першого типу має неуніверсальний характер. Вона не бере до уваги та не розглядає внутрішню структуру простих описових висловлювань. Зазначене припущення суттєво обмежує можливості логіки висловлювань. По-перше, тому що за допомогою логіки висловлювань не вдається адекватно проаналізувати широкий клас дедуктивних міркувань другого типу, де враховується логічна структура простих описових висловлювань. По-друге, тому що формалізація в рамках логіки висловлювань не здатна повністю виразити результати цього аналізу, оскільки існують такі види логічних формул, які не можна записати у вигляді формул числення висловлювань. Тому розширення можливостей формалізації насамперед пов'язане із відмовою від цього припущення. А це, у свою чергу, веде до побудови важливого узагальнення логіки висловлювань, яке називається логікою предикатів.

***Логіка предикатів – це розширений варіант логіки висловлювань, створений для аналізу дедуктивних мікувань, в яких істинність висновку залежить не тільки від істинності засновків, але і від їхньої внутрішньої логічної структури.*** Вона широко застосовується у математичних, технічних галузях, інформаційних технологіях, у різних сферах гуманітарного пізнання, де використовується методи й засоби логічного моделювання, наприклад, у економіці, лінгвістиці, психології, соціології, філософії тощо.

Логіка предикатів побудована на основі логіки висловлювань. Усі закони логіки висловлювань є законами логіки предикатів, але не навпаки. Усі міркування, які досліджуються в рамках логіки висловлювань, можуть бути також проаналізовані в рамках логіки предикатів, але не навпаки.

У рамках логіки предикатів, на відміну від логіки висловлювань, досліджується внутрішня логічна структура простих описових висловлювань. Для цього в мову логіки предикатів до мовних засобів логіки висловлювань додатково вводяться ще такі терміни та припущення: універс, ім'я, ім'я власне, ім'я загальне, терм, предметна змінна, предметна постійна, функція, функція пропозиційна, функція інтерпретаційна, предикат, предикат одномісний, предикат багатомісний, квантор, квантор спільності, квантор існування, припущення непорожнечі універсуму та припущення екстенсіональності.

Наведемо змістовні пояснення термінів та припущень мови логіки предикатів.

***Універс у логіці предикатів – це множина предметів або клас об'єктів із заданими властивостями та відношеннями.*** Він позначається символом **U**. Інші його назви – універсум міркування, універсум індивідів, основна множина, сфера розгляду, предметна область, область інтерпретації. Якщо універсів декілька, вони називаються сортами або типами. Прикладами універсів є числа в арифметиці, тварини в зоології, спільноти в соціології.

***Ім'я в логіці предикатів – це термін, який позначає будь-який предмет.*** Приклади імен: «*Аристотель*», «*Дніпро*», «*столиця Франції*», «*автор «Енеїди»*», «*Варшава*».

***Ім'я власне у логіці предикатів – це термін який позначає індивідуальний предмет.*** Приклади власних імен: «*Іван*», «*Марія*» «*Київ*», «*Королі і капуста*», «*Як називається ця книга?*».

***Ім'я загальне в логіці предикатів – це термін, який позначає один, окремий предмет із множини предметів.*** Приклади загальних імен: «*місто*», «*книга*», «*держава*», «*природний супутник*».

***Терм у логіці предикатів – це термін, який позначає індивідуальні, окремі предмети або індивіди.***

***Якщо терм нічого не позначає й не представляє, його називають змінним.*** У природній мові предметні змінні виражаються загальними іменами.



***Якщо терм іменує конкретний елемент із певної множини предметів, його називають постійним.*** У природній мові предметні постійні виражаються власними іменами.

***Функція в дискретній математиці – це термін, що виражає залежність одних змінних величин від інших. Ця залежність виступає такою відповідністю між змінними x та y, за якою кожному значенню x зіставляється одне-єдине значення y.*** Вона записується у вигляді формули: **y=f(x)**. Прикладом функціонального відношення може бути вираз «у *батько* **x**», оскільки у кожної людини (**x**) є лише один-єдиний батько (**y**).

***Функція в логіці предикатів – це правило, яке дозволяє для кожного елемента області визначення однозначно отримувати елемент області значення.***

***Пропозиційна функція в логіці предикатів – це функція, областю значення якої є просте описове висловлювання, в якому йдеться про певну властивість предмета чи відношення між предметами за невизначеності самого предмета чи предметів.*** Її інша назва – предметна функція.

При перетворенні пропозиційної функції на змістовно визначене просте описове висловлювання предметні змінні замінюють предметними постійними, вираженими власними іменами природної мови, й відповідний вираз набуває вигляду розповідного речення. Якщо взяти просте описове висловлювання «*Тарас Шевченко – український поет*», то вираз «**x** – *український поет*» постає у ролі пропозиційної функції. Кожному значенню змінної **x** вона ставить у відповідність, замінюючи змінну x певними постійними, якесь просте описове висловлювання, істинне чи хибне. Так, просте описове висловлювання «*Уолт Уїтмен – український поет*» є хибним.

***Інтерпретаційна функція у логіці предикатів – це функція, роль якої полягає у співставленні кожній предметній постійній деякого предмета, який заданий на області інтерпретації* U**. Причому предметним постійним різного виду повинні співставлятися предмети різних типів. Так, за допомогою інтерпретаційної функції предметній постійній «*україн-*

*ський поет*» у виразі «**x** – *український поет*» співставляються предмети думки «*Тарас Шевченко*» й «*Уолт Уїтмен*». Інтерпретаційна функція позначається символом **I**.

***Предикат у логіці предикатів – це логічна функція, яка відображає власні імена предметів (предметні постійні) на множину логічних значень {істина, хиба}***. Множину тих значень аргументів (предметних змінних), на яких предикат перетворюється в істинне висловлювання, називають областю істинності предиката. Так, предикат «*Білий* (**x**)» можна перетворити у просте описове висловлювання, замінивши його предметну змінну конкретними значеннями. Якщо взяти **x** = «*сніг*», чи **x** = «*цукор*», чи **x** = «*папір*» (де знак «=» – метамовний символ, який позначає слова «*є*», «*належить*»), то прийдемо до істинних висловлювань: «*Сніг білий*», «*Цукор білий*», «*Папір білий*».

У логіці предикатів предикати інколи називають предикаторами, предикатними символами або предикатними константами. ***Предикатна константа – це ім'я властивості чи відношення, іншими словами, ім'я предиката***. Самі ж властивості та відношення в логіці предикатів розуміються як логічні функції або предикати.

***Одномісний предикат – це термін, який позначає властивість елемента (аргумента) деякої множини***. Його також називають одноаргументним або унарним предикатом. Приклади унарних предикатів: «*лекція*», «*число*», «*високий*», «*бути корисним*».

***Багатомісний предикат – це термін, який позначає відношення між елементами (аргументами) деякої множини***. Його інколи називають багатоаргументним або поліарним предикатом. Приклади поліарних предикатів: «*захоплюється*», «*учитель*», «*бути сином*» – бінарні предикати; «*повідомляє*», «*знаходиться між*» – тернарні предикати тощо.

***Квантор у логіці предикатів – це термін, який вказує на належність предметів до універсу***. Квантор завжди вживається одночасно зі змінною та заставляє її пробігати весь універс. Він застосовується до формули зі змінною та утворює в результаті описове висловлювання, яке не залежить від цієї змінної.



***Квантор спільності вказує, що предикат, позначений певним символом, належить усім предметам даного класу або універсу***. Він позначається символом $\forall$**x**, що означає «*для кожного* **x**».

***Квантор існування вказує, що предикат, позначений певним символом, належить тільки деякій частині предметів із цього універсу***. Він позначається символом $\exists$**x**, що означає «*деякі* **x**», «*існує* **x**».

Квантор спільності поєднується з імплікацією, а квантор існування – із кон'юнкцією.

***Припущення непорожнечі універсуму в логіці предикатів – це положення, за яким кожному імені власному повинен відповідати деякий об'єкт універсуму***. У цьому припущенні наголошується на неможливості існування порожніх імен, тобто таких термінів, яким у досліджуваному універсумі нічого не відповідає, які не позначають жодного предмета універсуму.

***Припущення екстенсіональності в логіці предикатів – це положення, за яким якщо двоє різних імен позначають один й той же предмет, вони вважаються взаємозамінюваними та мають одне й те ж значення істинності***. Так, «*автор «Енеїди»*» та «*Вергілій*» – екстенсіонально взаємозамінювані імена, оскільки позначають одну й ту ж людину.

## 2. Мова логіки предикатів

***Мова логіки предикатів – це штучна мова, призначена для аналізу логічної структури простих описових висловлювань та їхніх функцій істинності***. Вона характеризується синтаксисом та семантикою.

Синтаксис логіки предикатів створюється шляхом розширення синтаксису логіки висловлювань та включає в себе перелік знаків алфавіту логіки предикатів й правил побудови із них термінів та формул логіки предикатів.

***Усі знаки алфавіту логіки предикатів поділяються на технічні й нетехнічні. До нетехнічних знаків належать нелогічні й логічні знаки: предметні (індивідні) константи,***

***предметні (індивідні) змінні, функціональні символи, предикатні символи, кванторні символи й символи для позначення логічних сполучників.***

**Алфавіт логіки предикатів:**

**I. Нетехнічі знаки:**

1. **Предметні (індивідні) константи**:
   **$a, b, c, a_1, b_1, c_1, \ldots$**
   Ці знаки призначені для позначення власних імен природної мови.
2. **Предметні (індивідні) змінні**:
   **$x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$**
   Предметні змінні призначені для позначення загальних імен природної мови.
3. **Функціональні символи**:
   **$f^n, g^n, h^n, f^n_1, g^n_1, h^n_1, \ldots$**
   Ці знаки призначені для позначення операцій над **n**-ками індивідів із певної предметної області. Верхній індекс вказує на місність предметної константи, а нижній – на порядковий номер.
4. **Предикатні символи:**
   **$P^n, Q^n, R^n, S^n, P^n_1, Q^n_1, R^n_1, S^n_1, \ldots$**
   Ці знаки призначені для позначення предикаторів природної мови. Верхній індекс, знову ж таки, вказує на їх місність, а нижній – на порядковий номер.
5. **Кванторні символи**:
   $\forall$ – символ квантора спільності,
   $\exists$ – сивол квантора існування.
   Інколи квантор спільності позначають символом (x), а квантор існування символом – (Ex).
6. **Символи для позначення логічних сполучників.** Ці символи відомі з мови логіки висловлювань:
   $\sim, \wedge, \vee, \underline{\vee}, \rightarrow, \leftrightarrow.$

**II. Технічні знаки:**

( – ліва дужка,
) – права дужка,
, – кома.



Вони слугують у мові логіки предикатів своєрідними знаками пунктуації.

Виражальні можливості мови логіки предикатів виступають засобами її впорядкування, підставами поділу логіки предикатів на види. Відповідно до них виокремлюють логіку предикатів першого порядку, другого, третього чи будь-якого іншого ступеня порядку. ***У логіці предикатів першого порядку квантори діють лише на множинні предметних (індивідних) змінних. Логіки предикатів вищих порядків дозволяють кванторам діяти на множинах та підмножинах пропозиційних, предикатних або функціональних змінних.*** У цьому ряду логіка предикатів першого порядку відіграє особливу роль, оскільки в ній виражається вся аксіоматика теорії множин. Тому при подальшому викладі буде вживатися термін *«**логіка предикатів**»* замість терміна *«**логіка предикатів першого порядку**»*.

***Визначення правильно побудованих виразів.***

У мові логіки предикатів є два види правильно побудованих виразів (п.п.в.) – це терми та формули.

***Визначення терма***:

1. Будь-яка предметна константа є терм.
2. Будь-яка предметна змінна є терм.
3. Ніщо, окрім вказаного в пунктах 1 й 2, не є термом у мові логіки предикатів.

***Визначення формули***:

1. Якщо $P^n$ – n-містка предикаторна константа, а $t_1, \ldots, t_n$ – терми, то вираз $P^n (t_1, \ldots, t_n)$ – формула.
2. Якщо **A** – формула, то **~A** є формулою.
3. Якщо **A** і **B** – формули, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ – формули.
4. Якщо **A** – формула, а **x** – предметна змінна, то $\forall xA$ і $\exists xA$ є формулами.
5. Ніщо, окрім зазначеного в пунктах 1 – 4, не є формулами.

Формули, які відповідають пункту 1 дефініції, називаються простими, елементарними або атомами, а у пунктах 2 – 4 – складними або молекулярними.

Для визначення того, які послідовності знаків будуть формулами логіки предикатів, введемо визначення підформули, яке значною мірою повторює визначення, наведене для формул логіки висловлювань.

***Підформула логіки предикатів – це формула логіки предикатів, яка входить до складу іншої формули логіки предикатів.***

Формули A і B, що зустрічаються у визначенні формули, називають підформулами відповідних формул.

Назвемо логічним оператором формули логіки предикатів логічний сполучник або квантор, який до неї входить. Звідси наступне визначення:

***Головний логічний оператор неатомарної формули логіки предикатів – це сполучник або квантор, який при її побудові вводиться останнім.***

Розглянемо спосіб побудови формули $\exists y \sim A(x, y)$:

$$\underline{A(x, y)}$$
$$\underline{\sim A(x, y)}$$
$$\exists y \sim A(x, y)$$

Зазначимо при цьому, що формула підкреслюється у тому випадку, якщо вона виступає підформулою наступної формули.

Головним логічним оператором формули $\exists y \sim A(x, y)$ є квантор існування $\exists y$, оскільки при її створенні він вводиться останнім. Якби цього квантора не було, головним логічним оператором був би знак заперечення $\sim$.

Введемо точні визначення області дії логічного сполучника, яке повторює визначення для формул логіки висловлювань та квантора.

***Область дії логічного сполучника утворюють усі підформули, які він зв'язує.***

***Область дії квантора складає підформула, яка починається одразу після квантора.***

Область дії квантора обмежують дужками. Початок області дії позначається лівою дужкою, а відповідно їй права дужка означає закінчення області дії цього квантора. Так, у формулі $\forall x(P(x) \to Q(x))$ областю дії квантора $\forall$ по змінній **x** є формула $P(x) \to Q(x)$. У формулі $\exists x(\exists y P(y) \to P(x))$ областю дії квантора



$\exists$ по змінній **x** є формула $\exists y P(y) \to P(x)$, а областю дії квантора $\exists$ по змінній **y** є формула $P(y)$.

***Приписування до предметної змінної квантора називається операцією зв'язування квантором, або квантифікацією.***

***Змінна, яка розташована безпосередньо після квантора та входить у сферу його дії, називається зв'язаною змінною, а змінна, яка не входить до сфери дії квантора, – вільною.*** Одна й та ж сама змінна в конкретній формулі може мати зв'язане й вільне входження. Справжніми змінними є тільки вільні змінні. Зв'язані змінні називаються фіктивними змінними.

У формулі $\forall x(P(x) \to R(y)) \wedge \exists y(Q(\underline{x}, y) \vee R(\underline{x}, \underline{z}))$ вільні змінні підкреслено.

***Формули, або терми, у яких усі індивідні змінні зв'язані, називаються замкненими, а формули, або терми, до складу яких входять вільні індивідні змінні, називаються відкритими.***

Якщо деяка формула містить входження вільних змінних, то на їх місце можуть підставлятись терми.

***Умови правильності підстановки***:

1. Якщо терм **t** – індивідна константа, то підстановка проводиться без обмежень та є правильною.
2. Якщо терм **t** – індивідна змінна, то підстановка правильна тоді і тільки тоді, коли входження цієї предметної змінної не виявляється зв'язаним у результаті підстановки **t** на місце **x** у формулі $A(x)$.

**Приклад** правильної підстановки:

$\forall z\, R(x, y) \to \exists x P(x) \equiv \forall z\, R(y, z) \to \exists x\, P(x)$

**Приклад** неправильної підстановки:

$\forall z\, R(x, z) \to \exists x P(x) \equiv \forall z\, R(z, z) \to \exists x\, P(x)$

**3. Формалізація в логіці предикатів**

Щоб формалізувати описове висловлювання природної мови в логіці висловлювань, необхідно мати знаки для атомарних формул й таку множину логічних сполучників, яка б дозволила виразити усі види сумісності та несумісності між описовими висловлюваннями.

***Формалізація описових висловлювань природної мови в логіці предикатів складніша. Для її проведення необхідні*:**

1) предикатні символи для позначення властивостей предметів або їхніх відношень один до одного;
2) предметні постійні для позначення власних імен предметів;
3) предметні змінні для позначення області дії квантора спільності чи існування;
4) функціональні знаки для позначення операцій над постійними.

***Щоб перекласти на мову логіки предикатів просте описове висловлювання природної мови, потрібно*:**

1) усі кванторні слова замінити символами квантора спільності чи квантора існування ($\forall$, $\exists$);
2) усі слова, які є власними іменами, замінити символами предметних (індивідних) постійних (**a, b, c**);
3) усі слова, які є загальними іменами, замінити символами предметних (індивідних) змінних (**x, y, z**);
4) усі слова, як позначають властивості предметів, замінити символами одномісних предикаторів, а слова, що позначають відношення, – символами багатомісних предикаторів.

Після цього можна записати формулу загалом.

***Прикладами перекладу висловлювань природної мови на мову логіки предикатів можуть бути такі вирази:***

1) «*Усі квадрати – ромби*» $\equiv \forall x\ P(x) \equiv \forall x\ (S(x) \rightarrow P(x))$. Цей вираз читається: «*Для будь-якого* **x** *правильно, що коли* **x** *є квадратом, тоді він є ромбом*»;
2) «*Деякі ромби – квадрати*» $\equiv \exists x\ P(x) \equiv \exists x\ (S(x) \wedge P(x))$. Цей вираз читається: «*Існують такі* **x**, *для яких правильно, що* **x** *є ромбом і квадратом*»;
3) «*Деякі ромби – не квадрати*» $\equiv \exists x \sim P(x) \equiv \exists x\ (S(x) \wedge \sim P(x))$. Цей вираз читається: «*Існують такі* **x**, *для яких правильно, що* **x** *є ромбом і* **x** *не є квадратом*».
4) «*Жоден квадрат не є трикутником*» $\equiv$
$\equiv \forall x \sim P(x) \equiv \forall x\ (S(x) \rightarrow \sim P(x))$. Цей вираз читається: «*Для будь-якого* **x** *правильно, що коли* **x** *є квадратом, тоді він не є трикутником*».



***На мову логіки предикатів можна перекласти прості описові висловлювання природної мови, в яких*:**

1) стверджується або заперечується наявність властивості у окремого предмета певного класу.

   **Приклади**:

   «*Деякі моря – озера*» $\equiv \exists x(P(x) \wedge R(x))$.

   «*Усі реформи – зміни*» $\equiv \forall x(R(x) \rightarrow P(x))$.

   «*Деякі алмази не є прикрасами*» $\equiv \exists x(P(x) \rightarrow \sim R(x))$.

   «*Жодна зірка не є кометою*» $\equiv \forall x(R(x) \rightarrow \sim H(x))$;
2) йдеться про існування якогось предмета, що задовольняє деяку умову.

   **Приклади**:

   «*Хтось є рибалкою*» $\equiv \exists x\ P(x)$.

   «*Хтось не вивчає логіку*» $\equiv \exists x \sim S(x, c)$;
3) стверджується або заперечується, що деякій умові відповідає будь-який предмет даної предметної області.

   **Приклади**:

   «*Хтось знає все*» $\equiv \exists x\ \forall y\ F(x, y)$.

   «*Хтось не любить нікого*» $\equiv \exists x \forall y \sim A\ (x, y)$.

***Якщо описове висловлювання природної мови складне, його переклад на мову логіки предикатів найкраще розпочати із середини, починаючи з найголовнішої частини цього описового висловлювання. При перекладі складного описового висловлювання природної мови на мову логіки предикатів потрібно, наскільки це можливо, зменшувати область дії кванторів, щоб кожний з них (в ідеалі) включав у свою область лише твердження, що повідомляють про зв'язувану ним змінну.***

При читанні складної формули логіки предикатів потрібно починати із середини. Якщо важко одразу збагнути її смисл, спочатку слід прочитати її «на чорно», а потім – «на чисто», виключаючи явне згадування кванторів та зв'язаних змінних. Вільні змінні при цьому повинні входити у кінцеве словесне формулювання твердження.

**Наприклад**, складне описове висловлювання природної мови «*Усі вовки і зайці сірі*» на мову логіки предикатів найкраще перекласти так:

$\forall x\ (B(x) \rightarrow C(x)) \wedge \forall x\ (З(x) \rightarrow C(x))$,

де кожний квантор відноситься лише до тих стверджень, які він зв'язує.

*Література*


Бочаров В.А., Маркин В.И. Основы логики. – М.: Космополис, 1994.

Войшвилло Е.К. Символическая логика. – М.: Изд-во МГУ, 1989.

Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. – СПб.: Лань, 2004.

Жоль К.К. Вступ до сучасної логіки. – К.: Наукова думка, 1992.

Жоль К.К. Логика. Введение в современную символическую логику. – К.: Стилос, 2000.

Ивлев Ю.В. Логика. – М.: Проспект, 2009.

Ішмуратов А.Т. Вступ до філософської логіки. – К.: Абрис, 1997.

Карамишева Н.В. Логіка. Пізнання. Евристика. – Львів: Астролябія, 2002.

Конверський А.Є. Логіка (традиційна та сучасна). – К.: ЦНЛ, 2004.

Математическая логика: Учеб. пособие / Л.А.Латонин, Ю.А.Макаренков, В.В.Николаева, А.А.Столяр; Под общ. ред. А.А.Столяра. – Мн.: Выш. шк., 1991.

Ненашев М.И. Введение в логику. – М.: Гардарики, 2004.

Непейвода Н.Н. Прикладная логика. – Новосибирск: Изд-во УдГУ, 2004.

Светлов В.А. Логика. – СПб.: Питер, 2008.

Символическая логика: Учебник / Под ред. Я.А.Слинина, Э.Ф.Караваева, А.И.Мигунова. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005.

Солодухин О.А. Логика. – Ростов-н/Д: Феникс, 2000.

Хоменко І.В. Логіка. – К.: Абрис, 2004.

Хоменко І.В. Логіка: теорія та практика. – К.: ЦНЛ, 2010.

Шуман А.Н. Современная логика: теория и практика. – Мн.: Экономпресс, 2004.




## Лекція 8
## Семантика логіки предикатів

План лекції

1. **Головні терміни теоретико-модельної семантики логіки предикатів.**
2. **Типологія формул та закони логіки предикатів.**
3. **Проблема розв'язання для логіки предикатів. Метод аналітичних таблиць як розв'язуюча процедура в логіці предикатів.**

Виклад лекції

### 1. Головні терміни теоретико-модельної семантики логіки предикатів

Семантика логіки предикатів, як і її синтаксис, узагальнює семантику логіки висловлювань. Як і в семантиці логіки висловлювань, у семантиці логіки предикатів передбачається, що кожному виразу логіки предикатів за певних умов може бути приписане одне із двох можливих значень істинності, а саме: і – «*істина*» або х – «*хиба*». Як і для семантики логіки висловлювань, для сематики логіки предикатів головним завданням є побудова теорії інтерпретації значень істинності її виразів. Вирази логіки предикатів мають сенс тільки тоді, коли існує яка-небудь інтерпретація символів, що входять до складу цих виразів.

***Семантика логіки предикатів – це домовленості та правила, які дозволяють інтерпретувати формули логіки предикатів як осмислені, інакше кажучи, як істинні або хибні описові висловлювання.***

Семантика логіки предикатів будується із використанням інструментарію теорії моделей. Звідси основні терміни теоретико-модельної семантики логіки предикатів – «***інтерпретація***», «***модель***» та «***істинність***».

***Інтерпретацією формули логіки предикатів називається:***

1) визначення значень усіх її нелогічних термінів;
2) з'ясування значень її істинності у заданій області інтерпретації.

***Інтерпретація в сучасній символічній логіці ототожнюється з моделлю.*** У логіці висловлювань як модель розглядають довільну підмножину простих та побудованих із них складних описових висловлювань, де кожне із описових висловлювань може бути тільки істинним або хибним.

***У логіці предикатів моделлю називають будь-яке приписування значення нелогічним термінам, яке робить формулу істинною. Модель множини формул у логіці предикатів тлумачить як те, що робить істинними усі формули цієї множини. З технічної точки зору модель у логіці предикатів – це те, що задає інтерпретацію нелогічних термінів, тобто приписування їм істиннісних значень.***

До структури моделі логіки предикатів входить непорожня множина предметів, яку називають областю інтерпретації, та функція інтерпретації, яка приписує значення нелогічним константам (предметним постійним) мови логіки предикатів.

У логіці предикатів кожній парі, яка складається із описових висловлювань мови логіки предикатів та моделі, ставиться у відповідність одне із істиннісних значень – «*істина*» або «*хиба*». Значення істинності у цьому випадку відіграє роль сполучної ланки, що зв'язує мову логіки предикатів з її інтерпретацією в реальній дійсності за допомогою моделей. Якщо описовому висловлюванню **A** й моделі **M** співставляється істиннісне значення «*істина*», тоді стверджується, що описове висловлювання **A** істинне в моделі **M**, а також, що **M** є моделлю описового висловлювання **A**. У протилежному випадку стверджується, що описове висловлювання **A** хибне в моделі, й що **M** не є моделлю для описового висловлювання **A**.

**M** є і моделлю для множини описових висловлювань. Якщо **M** є моделлю для кожного із цих описових висловлювань, тоді кожне таке описове висловлювання істинне в моделі **M**.

***Множина описових висловлювань мови логіки предикатів, що істинні в моделі М, називається описом ситуації або станом справ, що склалися в реальності.***

Із терміном «*опис ситуації*» пов'язана інтерпретація виразу «***бути істинним описовим висловлюванням***». ***У семантиці логіки предикатів бути істинним описовим висловлюванням – це бути адекватним описом відповідної ситуації, що склалася в реальності й відображена в її моделі.***



Сам же термін «*істина*» в семантиці логіки предикатів виражає відповідність структури виразу логіки предикатів структурі мови логіки предикатів.

***Формула логіки предикатів отримує інтерпретацію, якщо***:

1) заданий універсум інтерпретації **U**;
2) визначено розширення кожного її нелогічного символу в **U**, або множину елементів, які позначає кожний її нелогічний термін в заданому універсумі інтерпретації **U**;
3) формулі $\forall x A(x)$, головний знак якої – квантор спільності, приписано значення «*істина*», якщо формула $\forall x A(x)$ істинна при підстановці на місце змінної **x** будь-якого предмета з універсуму **U**; і приписано значення «*хиба*» – у протилежному випадку;
4) формулі $\exists x A(x)$, головний знак якої – квантор існування, приписано значення «*істина*», якщо формула $\exists x A(x)$ істинна при підстановці на місце змінної **x** по крайній мірі одного предмета із універсуму **U**; і приписано значення «*хиба*» – у протилежному випадку;
5) формулі, головний знак якої – логічний сполучник, приписано значення істинності у відповідності з правилом для цього логічного сполучника.

***Приклади змістовної інтерпретації формул логіки предикатів.***

**Приклад 1.** Розглянемо формулу $\forall x\ (S(x) \rightarrow \sim P(x))$. Якщо модель **M** – «*множина комах*», вираз $S(x)$ – предикат «**x** – *павук*», вираз $P(x)$ – предикат «**x** – *комаха*», тоді формула буде виражати описове висловлювання «*Для будь-якого* **x** *правильно, що коли* **x** *– павук, тоді він – не комаха*».

**Приклад 2.** Розглянемо формулу $\exists x\ (S(x) \wedge P(x))$. Якщо модель **M** – «*множина людей*», вираз $S(x)$ – предикат «**x** – *студент*», вираз $P(x)$ – предикат «**x** – *спортсмен*», тоді формула буде виражати описове висловлювання «*Існують такі люди* **x**, *для яких правильно, що вони є студентами і спортсменами*».

## 2. Типологія формул та закони логіки предикатів

Формула логіки предикатів може бути істинною принаймні в одній інтерпретації, істинною у всіх інтерпретаціях або хибною у всіх інтерпретаціях.

За аналогією з логікою висловлювань отримуємо наступне визначення.

***Формула логіки предикатів***

– ***виконувана***, якщо і тільки якщо вона істинна хоча б в одній інтерпретації;
– ***логічно істинна***, якщо і тільки якщо вона істинна у всіх інтерпретаціях;
– ***логічно хибна або невиконувана***, якщо і тільки якщо вона хибна у всіх інтерпретаціях.

Формула логіки предикатів може бути істинною у багатьох інтерпретаціях, але, оскільки кількість універсумів інтерпретації потенційно нескінчена, ніхто не може гарантувати, що не знайдеться хоча б один універсум, в якому дана формула виявиться хибною.

Враховуючи цю обставину, ***в логіці предикатів відношення логічного випливання прийнято визначати наступним чином: якщо* A *і* B *не містять вільних входжень предметних змінних, тоді висновок* B *логічно випливає із засновків* A, *якщо і тільки якщо неможлива (суперечлива) інтерпретація, в якій* A *істинне, а* B *– хибне.***

**A** і **B** тут позначають відповідно множини формул, які утворюють засновки та висновок міркування (доведення) в логіці предикатів.

Відношення логічного випливання в логіці предикатів зберігає усі властивості відношення логічного випливання в логіці висловлювань – рефлексивність (якою б не була формула **A**, **A** $\vdash$ **A**), асиметричність (не завжди **B** $\vdash$ **A**, коли **A** $\vdash$ **B**) та транзитивність (якщо **A** $\vdash$ **B** і **B** $\vdash$ **C**, тоді **A** $\vdash$ **C**).

***Законом логіки предикатів є вираз логіки предикатів, який при будь-якому значенні індивідних та предикатних змінних приймає значення «істина».*** Розглянемо найважливіші закони логіки предикатів.



***Закон усунення квантора спільності.*** Цей закон стверджує, що якщо кожен індивід **x** володіє властивістю **P**, то й конкретно визначений індивід **t** має цю властивість. Його схема: $\forall$ **xP(x)** $\rightarrow$ **P(t)**, де **P(t)** – результат заміни всіх вільних входжень змінної **x** на замкнений терм **t**.

**Приклад**: якщо істинне висловлювання «*Усі речі універсуму круглі*», тоді повинно бути істинним висловлювання «*Річ на ім'я a, яка належить універсуму, кругла*».

***Закон введення квантора існування.*** Цей закон фіксує той факт, що якщо деякий конкретний індивід **t** має властивість **P**, то існує принаймі один індивід **x** із такою властивістю. Його схема: **P(t)** $\rightarrow$ $\exists$**xP(x)**.

**Приклад**: із істинності висловлювання «*Річ a, яка належить універсуму, кругла*» випливає істинність висловлювання «*Існує такий x, що істинно «x – круглий»*».

***Закон підпорядкування кванторів.*** За цим законом, з істинності універсально квантифікованого висловлювання випливає істинність екзистенційно квантифікованого висловлювання, а із хибності екзистенційно квантифікованого висловлювання – хибність універсально квантифікованого висловлювання. Його схема: $\forall$ **xP(x)** $\rightarrow$ $\exists$**xP(x)**.

Цей закон є висновком із двох попередніх законів. Він побудований за правилом транзитивності імплікації:

$$\frac{\begin{array}{l}\forall xP(x) \rightarrow P(t)\\ P(t) \rightarrow \exists xP(x)\end{array}}{\forall xP(x) \rightarrow \exists xP(x)}$$

***Закон непорожнечі універсуму логічного квадрата.*** Цей закон стверджує, що в універсумі логічного квадрата, який моделює відношення між кванторами, повинен існувати хоча б один предмет, що відповідає формулі $\exists$**xA** або його заперечення ~$\exists$**xA** (або й те, й інше). Його схема: ~ **[**$\exists$**xA** $\vee$ ~$\exists$**xA]**.

***Закон несуперечності.*** Цей закон стверджує, що не можуть бути ні одночасно істинними, ні одночасно хибними прості описові висловлювання, які суперечать один одному. Його схема: ~ **[**$\forall$ **xA** $\wedge$ ~$\exists$**xA]**.

***Закони взаємовираженості або взаємовизначуваності кванторів***. Ці закони стверджують, що кожний квантор може бути визначений в термінах протилежного йому квантора.

***Визначення квантора спільності через квантор існування***. Його схема: $\forall x P(x) \leftrightarrow \sim \exists x \sim P(x)$. **Приклад**: «*Якщо і тільки якщо усі речі із універсуму круглі, тоді неправильно, що в універсумі існує хоча б одна не кругла річ*».

***Визначення квантора існування через квантор спільності***. Його схема: $\exists x P(x) \leftrightarrow \sim \forall x \sim P(x)$. **Приклад**: «*Якщо і тільки якщо в універсумі існує принаймні одна кругла річ, тоді неправильно, що усі речі із універсуму некруглі*».

***Закони дистрибутивності кванторів стосовно знака кон'юнкції. Закон введення квантора спільності для кон'юнкції або закон дистрибутивності квантора спільності стосовно знака кон'юнкції***. За цим законом, кожен індивід володіє певною властивістю **P(x)** і **Q(x)** тоді і тільки тоді, коли кожен індивід має властивість **P(x)** і кожен індивід має властивість **Q(x)**. Його схема: $\forall x\, [P(x) \wedge Q(x)] \leftrightarrow [\forall x P(x) \wedge \forall x\, Q(x)]$.

**Приклад**: «*Якщо і тільки якщо усі речі в універсумі круглі і білі, тоді усі речі в універсумі круглі, й усі речі в універсумі білі*».

***Закон введення квантора існування для кон'юнкції або закон дистрибутивності квантора існування стосовно знака кон'юнкції***. Цей закон стверджує, що якщо існують предмети, які мають властивість **P(x)** та **Q(x)**, то існують предмети, які мають властивість **P(x)**, та існують предмети, які мають властивість **Q(x)**. Його схема: $\exists x\, [P(x) \wedge Q(x)] \leftrightarrow [\exists x P(x) \wedge \exists x\, Q(x)]$.

**Приклад**: «*Якщо і тільки якщо в універсумі існує кругла і біла річ, тоді в універсумі існує кругла річ, і в універсумі існує біла річ*».

Квантор спільності дистрибутивний стосовно знака кон'юнкції без обмежень. Квантор існування дистрибутивний стосовно знака кон'юнкції з обмеженнями. З того, що якась річ кругла, а інша біла, не випливає з необхідністю, що якась (можливо третя) річ кругла і біла одночасно.

***Закони дистрибутивності кванторів стосовно знака диз'юнкції. Закон введення квантора спільності для диз'юнкції або закон дистрибутивності квантора спільності стосовно знака диз'юнкції***. За цим законом, якщо усі індивіди мають властивість **P(x)**, або усі індивіди мають властивість **Q(x)**, то усі індивіди мають властивість **P(x)** або **Q(x)**. Його схема:

$$[\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)] \leftrightarrow \forall x\, [P(x) \vee Q(x)].$$

**Приклад**: «*Якщо і тільки якщо усі речі в універсумі круглі або усі речі в універсумі білі, тоді усі речі в універсумі круглі або білі*».

***Закон введення квантора існування для диз'юнкції або закон дистрибутивності стосовно знака диз'юнкції***. За цим законом, індивіди із властивістю **P(x)** або **Q(x)** існують тоді і тільки тоді, коли існують індивіди з властивістю **P(x)** або індивіди з властивістю **Q(x)**. Оскільки диз'юнкція істинна, коли один із її членів істинний, то для істинності $\exists x\, [P(x) \vee Q(x)]$ не має значення, чи буде істинне $\exists x\, P(x)$, чи $\exists x\, Q(x)$, або обидва будуть істинні. Його схема:

$$[\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)] \leftrightarrow \exists x\, [P(x) \vee Q(x)].$$

**Приклад**: «*Якщо і тільки якщо в універсумі існує кругла або біла річ, тоді в універсумі існує кругла річ, або біла річ*».

Квантор спільності дистрибутивний стосовно знака диз'юнкції з обмеженням. З того, наприклад, що усі цілі числа парні або непарні, не випливає з логічною необхідністю, що усі цілі числа парні, або усі цілі числа непарні. Квантор існування дистрибутивний стосовно знака диз'юнкції без обмежень.

***Закони дистрибутивності кванторів стосовно знака імплікації. Закон введення квантора спільності для імплікації або закон дистрибутивності квантора спільності стосовно знака імплікації***. Цей закон стверджує, що якщо усі **x** мають властивість **P(x)**, то вони мають властивість **Q(x)**, тоді вірно якщо кожен **x** має властивість **P(x)**, тоді кожен **x** має властивість **Q(x)**. Його схема: $\forall x\, [P(x) \rightarrow Q(x)] \rightarrow [\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x)]$.

**Приклад**: «*Якщо стверджується, що для кожного числа, якщо воно парне, тоді воно ціле, отже, стверджується, що якщо число парне, тоді кожне число ціле*».

***Закон введення квантора існування для імплікації або закон дистрибутивності квантора існування для знака***

*імплікації*. Цей закон стверджує, що якщо деякий **x** має властивість **P(x)**, то він має властивість **Q(x)**, тоді вірно якщо деякий **x** має властивість **P(x)**, то деякий **P(x)** має властивість **Q(x)**. Його схема: $\exists x\ [P(x) \to Q(x)] \to [\exists x\ P(x) \to \exists x\ Q(x)]$.

**Приклад**: «*Якщо стверджується, що існує таке число, що якщо воно парне, то воно ціле, отже, якщо існує парне число, тоді існує таке число, яке є ціле*».

Квантори спільності та існування дистрибутивні стосовно знака імплікації лише з обмеженнями. Зворотне виплинання для них загалом неправильне.

***Закони перестановки кванторів***. За цими законами квантори спільності та квантори існування можуть переставлятися у будь-якому порядку, якщо вони передують формулі однорідно, тобто або тільки квантори спільності, або тільки квантори існування. У протилежному випадку накладається обмеження: незалежний квантор існування може вільно вводитися в область дії квантора спільності, але не може із неї вільно виводитися.

Схеми законів перестановки кванторів:

$\forall x\ \forall y\ R(x, y) \leftrightarrow \forall y\ \forall x\ R(x, y)$,

$\exists x\ \exists y\ R(x, y) \leftrightarrow \exists y\ \exists x\ R(x, y)$,

$\exists x\ \forall y\ R(x, y) \leftrightarrow \forall y\ \exists x\ R(x, y)$.

***Закони заперечення кванторів***. За цими законами, заперечення будь-якого квантора рівносильне заміні його на протилежний при одночасному запереченні усієї області його дії.

Схеми законів заперечення кванторів:

$\sim\forall\ P(x) \leftrightarrow \exists x \sim P(x)$,

$\sim\exists P(x) \leftrightarrow \forall x \sim P(x)$.

**3. Проблема розв'язання для логіки предикатів. Метод аналітичних таблиць як розв'язуюча процедура в логіці предикатів**

У логіці висловлювань для інтерпретації формули достатньо знайти прості описові висловлювання, які відповідають її атомарним формулам, та створити таблицю істинності. У логіці предикатів подібне неможливе. По-перше, тому що її формули, окрім знаків, які позначають логічні сполучники, містять знаки,



що символізують нелогічні терміни – предикатні символи, предметні змінні та константи, квантор спільності та існування, інтерпретація яких підпорядковується особливим правилам. По-друге, тому що логічно істинні формули логіки предикатів повинні бути загальнозначимими у будь-якому універсумі, включаючи універсум із незліченою множиною предметів.

У логіці предикатів як розв'язуюча процедура застосовується не метод таблиць істинності, а метод аналітичних таблиць. Розглянемо особливості використання методу аналітичних таблиць у логіці предикатів.

Кожна формула логіки предикатів може бути представлена у вигляді дерева формули, яке виражає її логічну структуру. З цією метою в логіці предикатів використовуються правила редукції логіки висловлювань, до яких додаються правила виключення або заміни кванторів та їхніх заперечень. Ці правила застосовуються до формули логіки предикатів ще до виведення її дерева.

***Визначення правил редукції в логіці висловлювань***:

***Правило 1. Заміна кон'юнкції***. Схема правила:

$$\frac{W, A \wedge B}{W, A, B}$$

***Правило 2. Заміна диз'юнкції***. Схема правила:

$$\frac{W, A \vee B}{W, A \parallel W, B}$$

***Правило 3. Заміна імплікації***. Схема правила:

$$\frac{W, A \to B}{W, \sim A \parallel W, B}$$

***Правило 4. Заміна заперечення кон'юнкції***. Схема правила:

$$\frac{W, \sim (A \wedge B)}{W, \sim A \parallel W \sim B}$$

***Правило 5. Заміна заперечення диз'юнкції***. Схема правила:

$$\frac{W, \sim (A \vee B)}{W, \sim A, \sim B}$$

***Правило 6. Заміна заперечення імплікації***. Схема правила:

$$\frac{W, \sim(A \to B)}{W, A, \sim B}$$

*Правило 7. Заміна заперечення заперечення*. Схема правила:

$$\frac{W, \sim\sim A}{W, A}$$

***Визначення правил редукції в логіці предикатів***

***Правило 1. Заміна квантора спільності***: якщо формула $\forall x\mathbf{A}$ містить квантор спільності, то він виключається з умовою, що кожна зв'язана предметна змінна **x** й надалі залишається зв'язаною, тобто може бути при необхідності в подальшому замінена на будь-яку предметну константу **b** чи на будь-яку предметну функцію **A(b)**, яка виступає елементом розширення предикатів формули $\forall x A(x)$.

Тому у верхньому рядку пишуться вихідні формули **W**, $\forall x A$; ці ж формули переносяться у нижній рядок з додаванням формули **A(b)**.

$$\frac{W, \forall xA}{W, \forall xA(x), A(b)}$$

**Приклад:**

$$\frac{\forall xF(x), \forall yG(y), \forall xH(x)}{\forall xF(x), \forall yG(y), \forall xH(x), H(b)} \; [\forall]$$

Знак [$\forall$] вказує, що здійснена заміна квантора спільності.

***Правило 2. Заміна заперечення квантора спільності***: якщо формула $\sim\forall xA$ містить вільні входження **x** у формулу **A**, то останні замінюються послідовно на нові предметні константи **b**, які раніше не входили у формулу **A**.

Тому список **W**, $\sim\forall xA$ може бути замінений списком **W**, **~A(b)**.

$$\frac{W, \sim\forall xA}{W, \sim A(b)}$$

Зазначимо, що константа **b** повинна відрізнятися від уже використаних констант у списку формул **W**, $\sim\forall xA$, щоб виключити можливість суперечливих висловлювань стосовно



властивостей предмета, який відповідає константі **b**, тобто появи пари формул **A(b)** та **~A(b)**.

**Приклад:**

$$\frac{\forall xF(x, a), \forall yG(y, c), \sim\forall xH(x)}{\forall xF(x, a), \forall yG(y, c), \sim H(b)} \; [\sim\forall]$$

Знак [$\sim\forall$] вказує, що здійснена заміна заперечення квантора спільності.

***Правило 3. Заміна квантора існування***: кожний квантор існування $\exists xA$, який не знаходиться в області дії квантора спільності $\forall xA$, замінюється новою предметною константою **b**, яка раніше не входила у формулу **A**.

$$\frac{W, \exists xA}{W, A(b)}$$

Зазначимо, що константа **b** повинна відрізнятися від уже використаних констант у списку формул **W**, $\exists xA$, щоб виключити можливість суперечних висловлювань стосовно властивостей предмета, що відповідає константі **b**, тобто появі формул **A(b)** та **~A(b)**.

**Приклад:**

$$\frac{\forall xF(x, a), \forall yG(y, c), \exists xH(x)}{\forall xF(x, a), \forall yG(y, c), H(b)} \; [\exists]$$

Знак [$\exists$] вказує, що здійснена заміна квантора існування.

***Правило 4. Заміна заперечення квантора існування***: кожний заперечений квантор існування $\sim\exists xA$, який знаходиться в області дії запереченого квантора спільності $\sim\forall xA$, замінюється новою предметною функцією **~A(b)**, яка раніше не входила у формулу **A**.

У верхньому рядку пишуться вихідні формули **W**, $\sim\exists xA$; ці ж формули переносяться у нижній рядок з додаванням формули **~A(b)**.

$$\frac{W, \sim\exists xA}{W, \sim\exists xA(x), \sim A(b)}$$

**Приклад:**

$\sim\forall$ **xF(x),** $\forall$ **yG(y),** $\sim\exists$**xH(x)** [$\sim\exists$]

$\forall$ **xF(x),** $\forall$ **yG(y),** $\sim\exists$**xH(x), ~H(b)**

Знак [$\sim\exists$] вказує на заміну заперечення квантора існування.

Розглянемо на прикладах як будується аналітична таблиця в логіці предикатів. Припустимо, нам необхідно перевірити, чи логічно випливає формула $\exists$**xF(x)** із формули $\forall$ **xF(x)**, тобто чи є формула $\forall$ **xF(x)** $\to$ $\exists$**xF(x)** загальнозначимою?

Визначаємо перший рядок: $\forall$ **xF(x),** $\sim\exists$**xF(x)**. Будуємо таблицю, при цьому вказуємо справа знак правила редукції та підкреслюємо формулу, до якої воно застосовується.

$\forall$ **xF(x)**, ~$\exists$xF(x) [$\forall$]

$\forall$ xF(x), F(a), **~$\exists$xF(x)** [$\sim\exists$]

$\forall$ xF(x), **F(a)', ~$\exists$xF(x), ~F(a)'**

**N**

Останній рядок замкнений, отже уся таблиця замкнена. Логічне випливання формули $\exists$**xF(x)** із формули $\forall$ **xF(x)** доведено.

Перевіримо тепер зворотний варіант, тобто $\exists$**xF(x)** $\to$ $\forall$ **xF(x)**. Визначаємо перший рядок $\exists$**xF(x), ~$\forall$ xF(x)**. Будуємо таблицю.

$\exists$xF(x), ~$\forall$ **xF(x)** [$\sim\forall$]

$\exists$**xF(x)**, ~F(a), ~$\exists$xF(x) [$\exists$]

F(b), ~F(a)

Останній рядок незамкнений, у той же час до цих формул не можна застосувати правила редукції. Тому таблиця не може бути замкнена. Логічне випливання формули $\forall$ **xF(x)** із формули $\exists$**xF(x)** не доведено.



## *Література*


Бочаров В.А., Маркин В.И. Основы логики. – М.: Космополис, 1994.

Войшвилло Е.К. Символическая логика. – М.: Изд-во МГУ, 1989.

Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. – СПб.: Лань, 2004.

Жоль К.К. Вступ до сучасної логіки. – К.: Наукова думка, 1992.

Жоль К.К. Логика. Введение в современную символическую логику. – К.: Стилос, 2000.

Ивлев Ю.В. Логика. – М.: Проспект, 2009.

Ішмуратов А.Т. Вступ до філософської логіки. – К.: Абрис, 1997.

Карамишева Н.В. Логіка. Пізнання. Евристика. – Львів: Астролябія, 2002.

Конверський А.Є. Логіка (традиційна та сучасна). – К.: ЦНЛ, 2004.

Математическая логика: Учеб. пособие / Л.А.Латонин, Ю.А.Макаренков, В.В.Николаева, А.А.Столяр; Под общ. ред. А.А.Столяра. – Мн.: Выш. шк., 1991.

Ненашев М.И. Введение в логику. – М.: Гардарики, 2004.

Непейвода Н.Н. Прикладная логика. – Новосибирск: Изд-во УдГУ, 2004.

Светлов В.А. Логика. – СПб.: Питер, 2008.

Символическая логика: Учебник / Под ред. Я.А.Слинина, Э.Ф.Караваева, А.И.Мигунова. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005.

Солодухин О.А. Логика. – Ростов-н/Д: Феникс, 2000.

Хоменко І.В. Логіка. – К.: Абрис, 2004.

Хоменко І.В. Логіка: теорія та практика. – К.: ЦНЛ, 2010.

Шуман А.Н. Современная логика: теория и практика. – Мн.: Экономпресс, 2004.

Лекція 9

**Натуральне числення логіки предикатів**

План лекції

1. **Логіка предикатів як числення. Натуральне числення одномісних предикатів.**
2. **Предикатний аналіз відношень. Натуральне числення багатомісних предикатів.**

Виклад лекції

**1. Логіка предикатів як числення. Натуральне числення одномісних предикатів**

Як і логіка висловлювань, логіка предикатів може бути представлена у вигляді числення. Так само, як і в логіці висловлювань, у логіці предикатів розрізняють натуральне та аксіоматичне числення.

***Натуральне числення предикатів – це логічна теорія, яка є розширенням натурального числення логіки висловлювань***. Вона включає в себе правила виведення для логічних сполучників та кванторні правила. Інша назва цього виду числень – система $S^6$.

***Аксіоматичне числення предикатів – це така логічна теорія, яка є розширенням аксіоматичного числення висловлювань***. Вона містить в собі, окрім деякого необхідного мінімуму правил виведення для логічних сполучників й кванторних правил, ще й аксіоми числення. Інша назва цього виду числень – система $S^5$.

Розглянемо натуральне числення предикатів. Розпочнемо із натурального числення одномісних предикатів. Оскільки правила виведення для логічних сполучників були проаналізовані в рамках логіки висловлювань, розкриємо лише зміст кванторних правил.

**Правило усунення квантора спільності (У∀):**

$\forall x\, A(x) \rightarrow A(a)$

Буквально це правило означає, що ***якщо усі предмети якоїсь предметної області або універсуму міркування мають певну ознаку, тоді будь-який довільний або визначений предмет даної предметної області має цю ознаку***.



**Приклади:**

*Для будь-якого* **x** (***предметна область – множина морів***) *правильно, що* **x** *має солону воду.*

*Для будь-якого довільно взятого* **a** (***із області морів***) *правильно, що* **a** *має солону воду.*

*Для будь-якого* **x** (***предметна область – множина морів***) *правильно, що* **x** *має солону воду.*

*Чорне море має солону воду.*

**Правило введення квантора спільності (В∀):**

$A(a) \rightarrow \forall x\, A(x)$

Це правило встановлює, що ***властивість, притаманна будь-якому предмету деякої предметної області, належить також усім предметам цієї предметної області, але лише за умови, що знання про цю властивість отримується на підставі аналізу тих предметів, попередньо ототожнених й узагальнених між собою за певними параметрами***. Інакше кажучи, якщо в процесі виведення отримуємо твердження про те, що довільний предмет із якоїсь предметної області має певну ознаку, тоді можна стверджувати, що усі предмети цієї предметної області мають цю ознаку.

**Приклад:**

*Для будь-якого довільно взятого* **a** (***предметна область – множина металів***) *правильно, що* **a** *електропровідний.*

*Для будь-якого довільно взятого* **x** (***із області металів***) *правильно, що* **x** *електропровідний.*

**Правило введення квантора існування (В∃):**

$A(a) \rightarrow \exists x\, A(x)$

З цього правила випливає, що ***якщо будь-який довільно взятий або визначений предмет має якусь ознаку, тоді це означає, що існує принаймні один предмет, який має цю ознаку***.

**Приклади:**

*Будь-який довільно взятий предмет* **a** (***предметна область – множина кислот***) *зафарбовує лакмусовий папірець у червоний колір.*

*Існує* **x** (***із області кислот***), *який зафарбовує лакмусовий папірець у червоний колір.*

*Чорне море має солону воду.*

*Існує* **x** (***предметна область – множина морів***), *який має солону воду.*

**Правило усунення квантора існування (У∃):**

$\exists x\ A(x) \rightarrow A(a)$

З цього правила випливає, що ***з істинності часткового висловлювання типу*** $\exists x\ A(x)$ ***можна зробити висновок про істинність одиничного висловлювання типу*** **A(a),** ***яке є результатом підстановки постійної*** **a** ***замість змінної*** **x.**

**Приклади:**

*Існує* **x** *такий, що* **x** *студент філософського факультету.*

*Петренко – студент філософського факультету.*

Однак справа ускладнюється, якщо у засновках або припущеннях є декілька висловлювань з кванторами існування. Наприклад, якщо поряд із описовим висловлюванням «*Існує* **x**, *що* **x** *студент економічного факультету*» має місце таке описове висловлювання: «*Існує* **x**, *що* **x** *студент юридичного факультету*» – тоді неможливо замість змінної **x** правильно підставити постійну. Зазначена обставина вимагає певного обмеження до правила У∃. Це обмеження формулюється наступним чином: ***якщо у процесі виведення доводиться застосовувати правило У∃ n разів, тоді необхідно n разів вводити нову постійну (ім'я), яка відрізняється від усіх раніше введених постійних (імен)***.

**2. Предикатний аналіз відношень. Натуральне числення багатомісних предикатів**

У сучасній символічній логіці ***відношенням вважається будь-який упорядкований зв'язок або залежність між предметами думки***. За кількістю предметів, на які поширюються відношення, розрізняють односторонні (або ***унарні***), двосторонні (або ***бінарні***), тристоронні (або ***тернарні***), чотиристоронні (або ***кватернарні***) й взагалі багатосторонні (або ***n-арні***) відношення.

Логічні властивості відношень виражаються за допомогою багатомісних предикатів. Тому вони аналізуються в рамках логіки предикатів.



У логіці предикатів виокремлюють ***чотири головні типи загальних логічних властивостей відношень***: ***унарні, бінарні, тернарні, n-арні.***

***Логічними властивостями унарних відношень є рефлексивність, арефлексивність та антирефлексивність.***

***Відношення вважається рефлексивним, якщо кожний предмет знаходиться у цьому відношенні до самого себе***. Його схема: $\forall x R(x,x)$. Наприклад, рефлексивними є відношення «*рівності*», «*одночасності*», «*схожості*», «*тотожності*».

***Коли предмети думки можуть знаходитися, а можуть й не знаходитися в якомусь відношенні між собою, тоді таке відношення буде арефлексивним***. Його схема: $\exists x(R(x,x) \vee \sim R(x,x))$.

Наприклад, арефлексивними є відношення «*любити*», «*ворогувати*», «$a \geq b$».

***Антирефлексивні відношення не можуть існувати для предмета стосовно його самого***. Його схема: $\forall x \sim R(x,x)$. Наприклад, антирефлексивними будуть відношення «*старший*», «*молодший*», «*більше*», «*менше*». Його інша назва – ***іррефлексивне відношення***.

***Логічними властивостями бінарних відношень є симетричність, асиметричність та антисиметричність.***

***Симетричні відношення, існуючи між предметами*** **x** ***та*** **y**, ***одночасно існують й між*** **y** ***та*** **x**. Схема симетричності: $\forall x \forall y\ (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$. Прикладами симетричності можуть бути відношення сусідства («*Якщо Іван сусід Петра, тоді й Петро сусід Івана*»), відношення подібності геометричних фігур («*Якщо трикутник* **ABC** *подібний до трикутника* $A_1B_1C_1$, *тоді трикутник* $A_1B_1C_1$ *подібний до трикутника* **ABC**»).

***Асиметричні відношення можуть бути як в обидві сторони, так і лише в одну сторону***. Схема асиметричності: $\forall x \forall y\ (R\ (x, y) \rightarrow \sim R\ (y, x))$. Наприклад, асиметричними є відношення «*більше*» у множині чисел, відношення «*батьківства*» у множині людей, відношення «*причинності*» у класі явищ.

***Антисиметричні відношення виконуються тільки в одну сторону***. Схема антисиметичності:

$$\forall x \forall y\ ((x \neq y)\ \wedge\ R\ (x, y) \rightarrow R\ (y, x)).$$

Наприклад, атисиметричними є відношення «*старший*» у класі людей, відношення «*більше*» у класі чисел.

***Логічними властивостями тернарних відношень є транзитивність, транстранзитивність та антитранзитивність.***

***Транзитивні відношення між предметами існують тоді, коли вони проявляються одночасно між предметами* x *та* y, y *та* z, *а також між* x *та* z.** Схема транзитивності: $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$. Наприклад, транзитивними є відношення «*більше*», «*менше*», «*дорівнювати*», «*вище*», «*бути однолітком*».

***Транстранзитивні відношення можуть бути перехідними, а можуть і не бути ними*.** Схема транстранзитивності:

$\exists x \exists y \exists z((R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z) \vee \sim R(x,z))$.

Наприклад, транстранзитивними є відношення «*любити*», «*ненавидіти*», «*залежати*», «*володіти*». Його інша назва – ***нетранзитивні відношення***.

***Антитранзитивні відношення існують тоді, коли ніяк не можуть переходити з двох предметів на третій, четвертий і т.д.*** Схема антитранзитивності:

$\exists x \exists y \exists z (R(x, y, z) \wedge \sim R(x, y) \wedge \sim R(x, z) \wedge \sim R(z, y))$.

Наприклад, антитранзитивними є відношення «*бути батьком*», «*бути вчителем*».

***Відношення, яке має одночасно властивості рефлективності, симетричності та транзитивності, називається відношенням еквівалентності*.** Схема еквівалентності:

$\forall x \forall y (x<y \vee x=y \vee y>x)$.

Прикладами еквівалентності є відношення рівності, схожості, обмінюваності товарів на ринку, а також «*бути ровесниками*», «*вчитися в одній групі*», «*бути сусідами по будинку*».

***Логічними властивостями n-арних відношень є функціональність, дисфункціональність та антифункціональність.***

***Функціональні відношення існують між кількома предметами, які співвідносяться з деяким виокремленим предметом*.** Схема функціональності: $\exists x \forall y R(x,y)$. Прикладом функціонального відношення можуть бути відношення «*батько*», «*начальник*», «*родич*», «*знайомий*».



***Якщо деякий виокремлений предмет співвідноситься з кількома різними предметами, тоді відношення стає дисфункціональним*.** Схема дисфункціональності: $\exists x \exists y \exists z(R(x,y) \wedge R(x,z))$. Прикладом дисфункціонального відношення може бути «*підлеглий*». Інша його назва – ***нефункціональне відношення***.

***Якщо деякий виокремлений предмет співвідноситься з кількома обов'язково різними предметами, тоді відношення стає антифункціональним*.** Схема антифункціональності: $\exists x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(x,z))$. Прикладом антифункціонального відношення може бути «*займатися різною діяльністю*».

На базі логічних властивостей відношень будуються натуральні числення багатомісних предикатів. Розглянемо ***правила натурального числення багатомісних предикатів***.

**Правило рефлексивності**: якщо відношення рефлексивне, тоді із засновку $\forall x R(x, x)$ логічно випливає висновок $\forall x R(x, x)$.

Його схема: $\forall x R(x, x) \rightarrow \forall x R(x, x)$.

Приклад:

*Лінія* x *паралельна лінії* x.

---

*Лінія* x *паралельна сама собі.*

**Правило антирефлексивності**: якщо відношення антирефлексивне, тоді із засновку $\forall x \forall y R(x, y)$ логічно випливає висновок $\exists x \sim R(x, x)$.

Його схема: $\forall x \forall y R(x, y) \rightarrow \exists x \sim R(x, x)$.

Наприклад:

x *старший, ніж* y

---

x *не може бути старший сам за себе*

**Правило симетричності**: якщо відношення симетричне, тоді із засновку $\forall x \forall y R(x, y)$ логічно випливає $\forall y \forall x R(y, x)$.

Його схема: $\forall x \forall y R(x, y) \rightarrow \forall y \forall x R(y, x)$.

Наприклад:

x *брат чи сестра* y

---

y *брат чи сестра* x

**Правило антисиметричності**: якщо відношення антисиметричне, тоді із засновку $\forall x \forall y$ **R (x, y)** випливає такий висновок $\sim \forall y \forall x$ **R (y, x)**.

Його схема: $\forall x \forall y$ **R (x, y)** $\rightarrow \sim \forall y \forall x$ **R (y, x)**.

Наприклад:

*x розумніший, ніж y*

---

*Неправильно, що y розумніший, ніж x*

**Правило транзитивності**: якщо відношення транзитивне, тоді із засновків $\forall x \forall y \forall z$ **R (x, y)** та **R (y, z)** випливає висновок $\forall x \forall z$ **R (x, z)**.

Його схема: $\forall x \forall y \forall z$ ((**R (x, y)** ^ **R (y, z)** $\rightarrow \forall x \forall z$ **R (x, z)**)).

Наприклад:

*x більший за y*

*y більший за z*

---

*x більший за z*

**Правило антитранзитивності**: якщо відношення антитранзитивне, тоді із засновків $\exists x \exists y \exists z$ **R (x, y)** та **R (y, z)** випливає висновок $\exists x \exists z \sim$ **R (x, z)**.

Його схема: $\exists x \exists y \exists z$ ((**R(x, y)**^**R(y,z)** $\rightarrow \exists x \exists z \sim$ **R(x, z)**)).

Наприклад:

*x – батько y*

*y – батько z*

---

*x не може бути батьком z*

### *Література*


Бочаров В.А., Маркин В.И. Основы логики. – М.: Космополис, 1994.

Войшвилло Е.К. Символическая логика. – М.: Изд-во МГУ, 1989.

Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. – СПб.: Лань, 2004.

Жоль К.К. Вступ до сучасної логіки. – К.: Наукова думка, 1992.

Жоль К.К. Логика. Введение в современную символическую логику. – К.: Стилос, 2000.

Ивлев Ю.В. Логика. – М.: Проспект, 2009.





Ішмуратов А.Т. Вступ до філософської логіки. – К.: Абрис, 1997.

Карамишева Н.В. Логіка. Пізнання. Евристика. – Львів: Астролябія, 2002.

Конверський А.Є. Логіка (традиційна та сучасна). – К.: ЦНЛ, 2004.

Математическая логика: Учеб. пособие / Л.А.Латонин, Ю.А.Макаренков, В.В.Николаева, А.А.Столяр; Под общ. ред. А.А.Столяра. – Мн.: Выш. шк., 1991.

Ненашев М.И. Введение в логику. – М.: Гардарики, 2004.

Непейвода Н.Н. Прикладная логика. – Новосибирск: Изд-во УдГУ, 2004.

Светлов В.А. Логика. – СПб.: Питер, 2008.

Символическая логика: Учебник / Под ред. Я.А.Слинина, Э.Ф.Караваева, А.И.Мигунова. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005.

Солодухин О.А. Логика. – Ростов-н/Д: Феникс, 2000.

Хоменко І.В. Логіка. – К.: Абрис, 2004.

Шуман А.Н. Современная логика: теория и практика. – Мн.: Экономпресс, 2004.

Лекція 10

## Модальна логіка як теорія

План лекції

1. **Визначення модальної логіки.**
2. **Система модальної логіки.**
3. **Семантика модальної логіки.**
4. **Філософська оцінка модальної логіки.**

Виклад лекції

### 1. Визначення модальної логіки

***Модальна логіка*** (від лат. ***modus*** – міра, спосіб, вид) – ***це розділ некласичної логіки, де досліджуються описові висловлювання одночасно із їхніми оцінками та відношення між ними у структурі міркувань.***

Оцінки описовим висловлюванням даються з тієї чи іншої точки зору. Кількість таких оцінок необмежена. Оцінки можуть бути суб'єктивними та об'єктивними. Вони зазвичай містять інформацію, яка виражає в одних випадках ставлення суб'єкта до змісту сформульованої ним думки, або її інтенсіонального наповнення, в інших – характеристику логічного зв'язку між думками.

***Описове висловлювання можна визначити як висловлювання із неповною інформацією***. Ввівши до складу висловлювання із неповною інформацією ще один елемент, який вказує на додаткові обставини, що можуть вплинути на істиннісне значення описового висловлювання, його перетворюють у висловлювання із повною інформацією або, іншими словами, модальне висловлювання.

Модальне висловлювання містить подвійну інформацію – основну та додаткову. ***Основна інформація виражена в описовому висловлюванні. Додаткова інформація наявна в характеристиці чи оцінці, яка приписується до описового висловлювання***. Явно чи неявно передана в описовому висловлюванні додаткова інформація називається модальністю. ***Модальні оцінки*** виражають за допомогою багатьох різнопланових термінів: «***необхідно***», «***можливо***», «***випадково***», «***добре***», «***погано***», «***байдуже***», «***обов'язково***», «***заборонено***», «***доведено***», «***раніше***», «***пізніше***» тощо. ***Вираз, який фіксує модальність описового висловлювання, називається модальним поняттям (або модальним оператором, модальним функтором)***.

За характером модального оператора в описовому висловлюванні розрізняють два типи модальностей – ***модальності мовлення*** (лат. ***modales de dicto***) та ***модальності дійсності*** (лат. ***modales de re***). ***Модальності мовлення – це такі модальності, які відносяться до всього описового висловлювання, характеризують його в цілому***. Так, в описових висловлюваннях «*Необхідно, що вода кипить при 100 °С*», «*Можливо, що завтра буде дощ*», «*Добре, що яблуко червоне і солодке*», «*Доведено, що люди бувають екстравертами або інтравертами*» модальності «*необхідно*», «*можливо*», «*добре*» та «*доведено*» є модальностями мовлення.

***Модальності дійсності – це такі модальності, які характеризують тип логічного зв'язку між структурними компонентами простого описового висловлювання***. Наприклад, у простих описових висловлюваннях «*Вода необхідно кипить при 100 °С*», «*Завтра можливо буде дощ*», «*Він випадково вчинив цей злочин*» модальності «*необхідно*», «*можливо*» та «*випадково*» є модальностями дійсності.

Серед модальностей мовлення виокремлюють ***абсолютні й порівнювані модальності***. Абсолютні модальності застосовують до описових висловлювань про окремі об'єкти, порівнювані – до описових висловлювань про пари об'єктів. ***Абсолютна модальність постає як оцінка властивості певного об'єкта, а порівнювана – як оцінка відношення між об'єктами***. Абсолютними, наприклад, вважаються такі модальності: «*Безсумнівно, що Еверест висока гора*», «*Погано, що дана обіцянка не виконана*», а порівняними – наступні модальності: «*Ймовірно, що Еверест вищий за Монблан*», «*Краще не давати обіцянки, ніж не виконувати її*».

***Описові висловлювання, до складу яких входять модальності, називаються модальними висловлюваннями***. Розрізняють прості й складні модальні висловлювання. ***Модальне***

***висловлювання вважається простим, якщо воно, окрім модального поняття й описового висловлювання, не включає в себе як самостійні частини інші описові висловлювання. У протилежному випадку воно вважається складним.*** Модальні висловлювання «*Дійсно, що йде дощ*», «*Доведено, що цезій – метал*», «*Добре, що Конституція гарантує право на освіту*» є простими, а модальні висловлювання «*Дійсно, що Земля має форму кулі й обертається навколо Сонця*», «*Можливо, якщо я не придбаю комп'ютер, тоді не виконаю роботу у відведений термін*» – складними.

***Головними принципами модальної логіки є принцип модальної повноти та принцип модальної несуперечності.*** Принцип модальної повноти являє собою аналог закону виключеного третього, а принцип модальної несуперечності – аналог закону несуперечності логіки висловлювань. ***Принцип модальної повноти визначається так: модальне висловлювання може бути або істинним, або хибним, або невизначеним. Принцип модальної несуперечності формулюється так: модальне висловлювання не може бути одночасно й істинним, і хибним, і невизначеним.***

**2. Система модальної логіки**

Системи модальної логіки поділяються на пропозиційні та квантифіковані. Перші будуються як розширення класичної логіки висловлювань, другі – як розширення класичної логіки предикатів. Далі будуть розглядатися тільки пропозиційні модальні системи.

***Модальну логіку висловлювань можна визначити як логічну теорію, що аналізує характер зв'язку між описовими висловлюваннями, який конкретизується відповідними оцінками, даними із певної перспективи, та відношення між описовими висловлюваннями у структурі міркувань.*** Вона широко застосовується у математиці, прикладній математиці, лінгвістиці, соціології, психології, філософії тощо для формалізації контекстів природної мови, логіко-концептуального моделювання філософських проблем, логіко-семантичного аналізу наукового знання.



У модальній логіці висловлювань досліджуються лише модальності мовлення (***de dicto***). Основну увагу модальна логіка висловлювань звертає на абсолютні модальності. Із порівнюваних модальностей вона розглядає лише ***оцінні*** (***«краще»***, ***«гірше»*** та ***«рівноцінно»***) й ***часові*** (***«раніше»***, ***«пізніше»*** та ***«одночасно»***). Модальна логіка висловлювань досліджує тільки складні модальні висловлювання, а прості модальні висловлювання розглядає як безструктурні й співставляє зі складними.

Залежно від того, які саме модальності й модальні висловлювання досліджуються, виокремлюють певні різновиди модальних логік. ***До канонічних модальних логік зараховують алетичну, темпоральну, епістемічну й деонтичну логіки.***

***Алетична логіка вивчає висловлювання з модальностями «необхідно», «дійсно», «можливо» та їхніми модифікаціями.*** Ці висловлювання називаються алетичними висловлюваннями.

***Темпоральна логіка вивчає висловлювання з модальностями «було», «є», «буде», «раніше», «пізніше», «одночасно» та їхніми модифікаціями.*** Такі висловлювання називаються темпоральними висловлюваннями.

***Епістемічна логіка досліджує висловлювання з модальностями «знаю», «вірю», «вважаю», «відомо», «невідомо», «доведено», «спростовано», «переконаний», «сумнівається», «припускає» та їхніми аналогами у особистісній та безособистісній формі.*** Висловлювання, до складу яких входять епістемічні модальності, називаються епістемічними висловлюваннями.

***Деонтична логіка досліджує висловлювання з модальностями «обов'язково», «заборонено», «дозволено», «байдуже» та їхніми модифікаціями.*** Висловлювання, до складу яких входять деонтичні модальності, називаються деонтичними висловлюваннями.

Модальну логіку висловлювань, як правило, зараховують до некласичної логіки. Однак деякі розділи модальної логіки, які раніше відносили до некласичної логіки, стали вже класичними у прямому розумінні цього слова. Це стосується, зокрема, канонічних модальних логік.

Розглянуті модальні логіки не вичерпують весь клас подібних логічних теорій. За останнє десятиріччя модальна логіка почала бурхливо розростатися, включаючи до своєї орбіти все нові й нові модальні поняття. З'явилися такі нові напрями логічних досліджень як логіка змінювання, логіка переваг, логіка причинності, логіка цілі, логіка бажань, логіка оцінок тощо.

**3. Семантика модальної логіки**

Для визначення логічного значення описових висловлювань достатньо звернутися до дійсності. Якщо інформація, яка в них міститься, відповідає реальному стану речей, тоді вони оцінюються як істинні, якщо ж ні, тоді це були хибні висловлювання. Наприклад, «*Христофор Колумб відкрив Америку*» – це описове висловлювання відповідає дійсності, отже, воно є істинним, а висловлювання «*Авраам Лінкольн відкрив Америку*» не відповідає дійсності, отже, є хибним.

Для визначення логічного значення модальних висловлювань уже недостатньо лише звернення до дійсності. Виявляється, що модальні висловлювання не є безумовно істинними, ні безумовно хибними, а є істинними або хибними в деяких або усіх випадках. Для того, щоб встановити їх істинність або хибність, необхідно розглянути не лише дійсний стан справ, а й множину інших можливостей, відповідно до яких могли б розвиватися події у світі. Такі стани справ у сучасній символічній логіці отримали назву «***можливих світів***».

Термін «***можливий світ***» має декілька значень:

1) ***теоретично (уявно, ідеально) побудований світ***, на відміну від реального світу, іншими словами, альтернатива реальному світу; таких світів може бути побудовано безліч, а реальний світ лише один;
2) ***уявлення про майбутні події, про належну поведінку людини, про ідеал у пізнанні***;
3) ***множина альтернативних підходів, припустимих варіантів пояснення ситуації, розв'язання проблем, прогнозування подій, оцінок результатів діяльності***;



4) ***різні варіанти можливого перебігу подій в одному й тому самому дійсному світі***;
5) ***множина речень, які описують усі факти онтологічно можливого світу***;
6) ***несуперечлива й повна множина речень даної мови***.

У модальній логіці «***можливий світ***» інколи розглядається «***як можливий стан справ***», «***як подія***», «***як можливий хід подій***», «***як певна уявна ситуація***», «***як сценарій***».

Модальне висловлювання вважається сукупністю можливих світів. Для визначення значення істинності модального висловлювання потрібне покликання на світи, досяжні з певного світу.

***Фундатор теорії «можливих світів» – Г. Ляйбниць***. За його думкою, є ***нескінченна множина можливих світів***, кожний з яких має право на існування. ***Дійсний світ***, в якому знаходимося ми самі, є тільки одним із таких можливих світів. Але він – найкращий з них, і саме тому Бог, доброта якого безмежна, зробив його існуючим.

Усе, що тільки може статися в дійсності, трапляється в одному із можливих світів. Наприклад, Наполеон отримав перемогу при Аустерліці, але зазнав поразки при Ватерлоо. Можна уявити собі такий можливий світ, де події розвивалися інакше: Наполеон переміг при Ватерлоо, але зазнав поразки при Аустерліці. Є можливим й такий світ, де Наполеон зовсім не народився. Перелік таких світів можна продовжувати до безкінечності.

У модальній логіці розглядають ***різні типи можливих світів***. Так, ***деонтичні*** світи мало схожі з ***алетичними***, від них відрізняються ***епістемічні*** та ***темпоральні*** світи. Така різноманітність типів можливих світів змістовно моделює багатоманітність модальних логік й забезпечує широке застосування результатів модальної логіки до аналізу проблематики гуманітарних дисциплін. Оскільки можливі світи моделюють різні обставини, альтернативні стани справ, різноманітні гносеологічні стандарти, припустимі й неприпустимі норми, оцінки відносно якогось випадку чи умови, то кожен можливий світ розглядається як елемент деякої множини можливих світів.

***Між можливими світами існує відношення досяжності***, яке також має теоретико-множинний смисл. Це не відношення співставлення, яке має місце між описовими висловлюваннями та реальним або дійсим світом, а відношення обстеження, перегляду множини можливих світів, які якимось чином зв'язані, стосуються реального світу. ***Відношенню досяжності або альтернативності притаманні такі властивості як рефлективність, симетричність та транзитивність***.

Якщо позначити можливі світи символами $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}, \ldots \mathbf{w_n}$, а відношення досяжності – **R**, то названі властивості можна записати так:

1) $\mathbf{w\ R\ w}$ – *рефлективність*;
2) $\mathbf{w\ R\ w_1 \rightarrow w_1\ R\ w}$ – *симетричність*;
3) $\mathbf{(w\ R\ w_1\ ^\wedge\ w_1\ R\ w_2) \rightarrow w\ R\ w_2}$ – ***транзитивність***.

Семантика, яка базується на таких засадах, у сучасній логіці отримала назву реляційної. У 70-ті роки XX ст. ***реляційна семантика*** була узагальнена. Замість відношення між світами почали розглядати відношення між світом та множиною світів. Семантики такого типу отримали назву ***навхресних семантик***.

### 4. Філософська оцінка модальної логіки

Модальна логіка здатна розв'язувати деякі проблеми, які порушує філософія. Однак загалом модальна логіка є лише більш чи менш зручним інструментом визначення, дослідження та розв'язання таких проблем. У будь-якій філософській проблемі можна розрізнити ***онтологічний, гносеологічний та методологічний аспекти***. Розглянемо в цих трьох аспектах проблему семантики можливих світів.

Якщо розглядати ***семантику можливих світів в онтологічному аспекті***, тоді найсуттєвішим є визначення онтологічного статусу можливого світу, а також розв'язання проблеми відношення між можливими світами. ***Г.Ляйбниць*** тлумачив можливі світи як ідеальні плани Божественного розуму, які припускають порівняльну оцінку «***бути кращим***». Бог, на його думку, реалізує кращий план. ***К. Льюїс*** зараховував як належне до можливого світу «***те, що могло б існувати інакше***». Тому



він вважав можливий світ у певному розумінні існуючим. ***Р. Монтегю*** й ***Д. Скотт*** взагалі визнають за доцільне висловлюватися не про світи, а про «***індекси***», «***точки зіставлення***», застосовуючи апарат семантики можливих світів до розв'язання проблем прагматики природної мови. Так, для встановлення істинності виразу «***Я був тут***» належить знати три «***точки співвіднесення***»: ***суб'єкт висловлювання, момент висловлювання та місце висловлювання***.

Хоча є підстави розглядати можливий світ як певний критерій істинності й у такий спосіб уникати відповіді на запитання про його онтологічний статус. Можна запропонувати також й психологічне тлумачення («***духовний світ***»), зручне з огляду на аналіз та розв'язання проблем епістемічної логіки. Стосовно цього варто згадати дослідження з логіки сприйняття, рефлексії тощо.

Найприроднішим онотологічим тлумаченням можливого світу є часове, в межах якого він розглядається як «***часовий зріз***», стан справ чи сукупність подій у певний момент часу. Відношення між світами-моментами є часовим відношенням.

Якщо ж розглядати ***семантику можливих світів у гносеологічному аспекті***, тоді можна відзначити, що між гносеологією та епістемічною логікою як розділом модальної логіки існує деякий внутрішній зв'язок. При цьому до уваги варто взяти те, що побудова семантики класичної логіки базується на максимально спрощеному розумінні істинності описового висловлювання як його відповідності дійсності. За цією схемою «***Висловлювання «А» є істинним, якщо і тільки якщо в дійсності має місце*** А». Однак спроби розглянути міркування, не обмежуючись лише висловлюваннями про реальність, зумовили перегляд цього визначення істинності на підставі ускладнення його за рахунок введення ***конкретизуючих параметрів***. Так, у темпоральній логіці «***Висловлювання «А» є істинним у момент*** **t**, ***якщо тільки в момент*** **t** ***має місце*** А». Хоча за структурою таке ускладнення є незначним, однак воно дало змогу побудувати теорію істинності для більшої сукупності виразів, які в класичній логіці не розглядалися взагалі або розгладалися як позбавлені істиннісного значення.

*У методологічному плані семантику можливих світів* можна розглядати як систему перекладу виразів природної мови на мову теорії множин, іншими словами, переведення інтенсійного в екстенсійне, на екстенсійну мову теорії множин, що розглядається як базисна мова математики. Можна стверджувати, що математизацію гуманітарних наук, які користуються інтенсійними мовами, має випереджати логізація. Семантика можливих світів у цьому розумінні слугує ключем до математизації гуманітаристики.

### *Література*


Жоль К.К. Логика. Введение в современную символическую логику. – К.: Стилос, 2000.

Ивлев Ю.В. Логика. – М.: Проспект, 2009.

Ішмуратов А.Т. Вступ до філософської логіки. – К.: Абрис, 1997.

Карамишева Н.В. Логіка. Пізнання. Евристика. – Львів: Астролябія, 2002.

Конверський А.Є. Логіка (традиційна та сучасна). – К.: ЦНЛ, 2004.

Ненашев М.И. Введение в логику. – М.: Гардарики, 2004.

Непейвода Н.Н. Прикладная логика. – Новосибирск: Изд-во УдГУ, 2004.

Символическая логика: Учебник / Под ред. Я.А.Слинина, Э.Ф.Караваева, А.И.Мигунова. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005.

Солодухин О.А. Логика. – Ростов-н/Д: Феникс, 2000.

Хоменко І.В. Логіка. – К.: Абрис, 2004.




## Лекція 11
## Алетична пропозиційна логіка

### План лекції

1. **Визначення алетичної пропозиційної логіки.**
2. **Мова алетичної пропозиційної логіки.**
3. **Функціонально-числова семантика для алетичної пропозиційної логіки.**
4. **Семантика можливих світів для алетичної пропозиційної логіки.**
5. **Аналітико-таблична семантика для алетичної пропозиційної логіки.**
6. **Синтаксис алетичної пропозиційної логіки.**
7. **Головні закони алетичної пропозиційної логіки.**

### Виклад лекції

**1. Визначення алетичної пропозиційної логіки**

Термін «***алетична логіка***» походить від грецького слова – «***aletheia***», що означає «***істина***». Звідси її інша назва – «***логіка істини***».

***Алетичною пропозиційною логікою називають розділ модальної логіки, де досліджуються властивості алетичних висловлювань та їхні відношення у структурі міркувань.***

***Алетичні висловлювання – це модальні висловлювання, до складу яких входять алетичні модальності.***

***Алетичною модальністю називається виражена в описовому висловлюванні за допомогою модальних понять «необхідно», «можливо», «випадково» інформація про фактичну або логічну детермінованість описового висловлювання.***

У методологічному плані алетичні модальності поділяються на онтологічні й логічні.

***Онтологічні модальності*** (їх ще називають фактичними або фізичними) ***пов'язані з об'єктивною детермінованістю описових висловлювань, коли їхня істинність або хибність визначається станом справ у дійсності; міру зв'язків та відношень тут характеризує сам предмет.***

***Логічна модальність пов'язана з аналітичною детермінованістю описових висловлювань, коли істинність або хибність визначається через логічні закони.***

***За онтологічною модальністю*** модальні висловлювання поділяються на:

1) висловлювання можливості;
2) висловлювання дійсності;
3) висловлювання необхідності.

***Висловлюванням можливості*** (або ***проблематичним висловлюванням*** (від грец. **problema** – перепона, утруднення)) ***називається таке алетичне висловлювання, в якому виражена реально існуюча, але не реалізована можливість***. Наприклад, «*Можливо, сьогодні піде дощ*», «*Тут, можливо, допущена помилка*», «*Можливо, позаземні цивілізації існують*», «*Можливо, я неправильно все зрозумів*».

***Висловлюванням дійсності*** (або ***асерторичним висловлюванням*** (від лат. *asserto* – стверджую)) ***називається вид алетичного висловлювання, в якому дещо фіксується як уже існуюче в дійсності***. Наприклад, «*Дійсно, йде дощ*», «*Друга світова війна закінчилась у 1945 році*», «*Дніпро впадає у Чорне море*».

***Висловлюванням необхідності*** (або ***аподиктичним висловлюванням*** (від грец. **apodeiktikos** – доказовий, переконливий)) ***називається таке алетичне висловлювання, яке виражає неминучість існування якогось предмета, явища або зв'язку між ними***. Наприклад, «*Людина старіє*», «*Рослина гине без води*», «*Після зими неодмінно приходить весна*».

***За логічною модальністю*** модальні висловлювання поділяються на:

1) імовірні та
2) достовірні.

***Імовірним називається такий вид алетичного висловлювання, в якому яка-небудь ознака стверджується чи заперечується відносно предмета думки лише передбачувано***. Наприклад, «*На Марсі, імовірно, існує життя*», «*Імовірно, він відправив цей лист у минулу суботу*», «*Тут, імовірно, була симуляція крадіжки*».



***Потрібно розрізняти імовірні висловлювання та висловлювання можливості***. Наприклад, порівняємо два модальні висловлювання: «*Можлива побудова мосту через річку*» та «*Імовірно в цьому місці побудувати міст через Дністер*». Перше модальне висловлювання є висловлюванням можливості, оскільки у ньому виражене знання про те, що в дійсності можливо розв'язати таке завдання, як побудова мосту через річку. Друге модальне висловлювання – імовірне, оскільки у ньому зафіксоване знання про те, що дана дія може конкретно реалізуватися. Висловлювання можливості виголошується у результаті глибшого вивчення предмета. Виражене у ньому знання є завершеним. А імовірне висловлювання виражає знання передбачливе, незавершене. Передбачуване твердження про належність певної ознаки деякому предмету означає, що цей предмет може й не мати цієї ознаки.

***Достовірним називається висловлювання, в якому фіксується знання, що містить цілковиту визначеність про належність ознаки предмету***. Наприклад, «*Достовірно, що діагоналі квадрата при перетині утворюють прямі кути*», «*Достовірно, що молекули складних речовин завжди побудовані з різних атомів*», «*Достовірно, що українська мова належить до індоєвропейських мов*».

**2. Мова алетичної пропозиційної логіки**

Мова алетичної пропозиційної логіки відрізняється від мови класичної логіки висловлювання тільки кількістю логічних знаків. Для того, щоб утворити мову алетичної пропозиційної логіки, необхідно до мови класичної пропозиційної логіки додати знаки алетичних модальностей.

***Алфавіт алетичної пропозиційної логіки***:

1. **p, q, r**, … – пропозиційні змінні;
2. $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, ~ – пропозиційні зв'язки;
3. □ (**N**) – «***необхідно***»;
4. ◊ (**M**) – «***можливо***»;
5. ∇ (**S**) – «***випадково***»;
6. {, [, (, ), ], } ; , . – допоміжні символи.

***Визначення формули алетичної пропозиційної логіки*:**

1. Будь-яка пропозиційна змінна – **p, q, r, ...** – формули;
2. Якщо **A** і **B** формули, тоді **~ A, A∧B, A∨B, A→B, A↔B, □A, ◊A, ∇A**, – формули;
3. Ніщо, крім визначеного у пунктах 1, 2, не є формулою.

Модальні оператори □ та ◊ читаються по-різному, й існує кілька варіантів їхнього прочитання. Формулу □**A** можна прочитати так: «*Необхідно, щоб* **A**», «*Завжди буде мати місце* **A**», «*Вимагається, щоб* **A**», «*Припускається, що* **A**», «*Всяке виконання програми дає результат* **A**». Формулу ◊**A** можна прочитати у такий спосіб: «*Можливо, що* **A**», «*Деколи буде мати місце* **A**», «*Дозволяється, щоб* **A**», «*Протилежне до* **A** *не припускається*», «*Протилежне до* **A** *невідомо*», «*Існує таке виконання програми, яке дає результат* **A**».

***Характеристика головних алетичних модальностей*:**

1. ***Модальність «необхідності»*** (□).

Виокремлюють ***два види необхідності***:

а) логічну;

б) фізичну.

***Логічною називається необхідність, яка випливає із законів логіки, а тому її заперечення є несумісним з ними.*** Істинність логічно необхідного висловлювання обгрунтовується лише логічними підставами.

***Фізична необхідність обумовлюється законами природи та не суперечить їм.***

***Відношення між логічною та фізичною необхідністю*** можна сформулювати у вигляді такої залежності: «***Все, що логічно необхідно, є і фізично необхідно, але не все, що фізично необхідно, є логічно необхідно***». Схематично це записується у вигляді такої формули:

**[∀x □ л A → ∀x □ ф A] ∧ [~∀x □ ф A → ~ ∀x □ л A]**,

де □ **л** – це знак логічної необхідності, а □ **ф** – знак фізичної необхідності.

Наприклад, відповідно до закону тотожності істинним є модальне висловлювання: «*Якщо метал – електропровідник, тоді він завжди проводитиме електричний струм*». Цей логічний



наслідок є також істиною фізики. Але те, що у металу є певна кількість вільних електронів на зовнішній орбіті, регламентується законом фізики, а не логіки.

2. ***Модальність «можливості»*** (◊).

Існує ***два види можливості***:

а) логічна;

б) фізична.

***Логічна можливість пов'язана із внутрішньою несуперечливістю модального висловлювання. Логічно можливим є те, що не суперечить законам логіки, є сумісним із ними та заперечення якого не випливає з них.***

***Фізично можливим є те, що узгоджується із законами природи, не суперечить їм та заперечення якого не випливає із них.***

***Зв'язок між логічною можливістю*** (◊ **л**) ***та фізичною можливістю*** (◊ **ф**) можна зафіксувати у вигляді такої залежності: «***Все, що можливо фізично, те можливо і логічно, але не все, що можливо логічно, є можливим фізично***». Схематично це записується у вигляді такої формули:

**[∀x ◊ ф A → ∀x ◊ л A] ∧ [~∀x ◊ л A → ~ ∀x ◊ ф A].**

Наприклад:

а) «*Якщо фізично можливо побудувати міст через певну річку, тоді й теоретично можливо здійснити проектування цієї дії*»;

б) «*Якщо теоретично можливо спроектувати вічний двигун, тоді фізично це неможливо*».

3. ***Модальність «випадковості»*** (∇).

Випадковість визначають через можливість. ***Якщо можливість – це те, що може бути, то випадковість – це те, що може бути, а може й не бути.*** Вона не рівнозначна можливості, хоча й щільно пов'язана з нею. Її ще іноді називають «двосторонньою можливістю», інакше кажучи, однаковою можливістю і висловлювання, і його заперечення. ***Випадковість*** теж поділяють на:

а) логічну та

б) фізичну.

***Логічно випадковим є висловлювання, якщо ні воно саме, ні його заперечення не містить внутрішньої суперечності.***

***Фізично випадковим є те, наявність чого чи його відсутність не регламентована природними законами.***

Модальності «необхідності», «можливості» й «випадковості» можна визначити одну через іншу:

1) «***Необхідним є те, заперечення чого є неможливим***». Формально це визначення записується так: $\Box A \equiv \sim \Diamond \sim A$.
2) «***Можливим є те, заперечення чого не є необхідним***». Формально це визначення записується так: $\Diamond A \equiv \sim \Box \sim A$.
3) «***Висловлювання є випадковим, коли і воно саме, і його заперечення є можливим***». Формально це визначення записується так: $\nabla A \equiv \Diamond A \wedge \Diamond \sim A$.

***Головними принципами алетичної пропозиційної логіки*** є принцип алетичної повноти та принцип алетичної несуперечності. ***Принцип алетичної повноти*** визначається так: ***кожне алетичне висловлювання є або необхідним, або випадковим, або неможливим***. ***Принцип алетичної несуперечності*** формулюється так: ***алетичне висловлювання не може бути і необхідним, і неможливим***.

**3. Функціонально-числова семантика для алетичної пропозиційної логіки**

Семантика алетичної пропозиційної логіки може бути побудована як ***функціонально-числова семантика***, ***семантика можливих світів*** або ***аналітико-таблична семантика***. Розглянемо названі семантики почергово.

***Функціонально-числова семантика базується на принципі тризначності***. Цей принцип формулюється так: ***для будь-якого алетичного висловлювання правильно, що воно або «істинне», або «хибне», або «нейтральне» – четвертого не дано***. При побудові функціонально-числової семантики значення істинності позначають таким чином:

«***істинно***» – **1**,

«***хибно***» – **0**,

«***нейтрально***» – **½**.



Третє значення «***нейтрально***» може тлумачитися у вигляді положення «***може бути істинним, а може бути хибним***». Враховуючи значення ½ й табличне визначення логічних сполучників у логіці висловлювань, задамо нове табличне визначення пропозиційних зв'язок та введемо табличні визначення алетичних модальностей.

***Табличні визначення логічних сполучників для алетичної пропозиційної логіки***:

***Табличне визначення заперечення***:

| A | ~ A |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 1/2 | 1/2 |
| 0 | 1 |

***Табличне визначення кон'юнкції***:

| | | | B | |
|---|---|---|---|---|
| | ∧ | 1 | 1/2 | 0 |
| | 1 | 1 | 1/2 | 0 |
| A | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 |

***Табличне визначення диз'юнкції***:

| | | | B | |
|---|---|---|---|---|
| | ∨ | 1 | 1/2 | 0 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 |
| A | 1/2 | 1 | 1/2 | 1/2 |
| | 0 | 1 | 1/2 | 0 |

***Табличне визначення імплікації***:

| | | | B | |
|---|---|---|---|---|
| | → | 1 | 1/2 | 0 |
| | 1 | 1 | 1/2 | 0 |
| A | 1/2 | 1 | 1 | 1/2 |
| | 0 | 1 | 1 | 1 |

***Табличне визначення еквіваленції*:**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | B | |
| | ↔ | 1 | 1/2 | 0 |
| | 1 | 1 | 1/2 | 1 |
| A | 1/2 | 1/2 | 1 | 1/2 |
| | 0 | 0 | 1/2 | 0 |

***Табличні визначення алетичних модальностей*:**
***Табличне визначення модальності «можливо»*** (◊):

| A | ◊ A |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 1/2 | 1 |
| 0 | 0 |

***Табличне визначення модальності «необхідно»*** (□):

| A | □ A |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 1/2 | 0 |
| 0 | 0 |

***Табличне визначення модальності «випадково»*** (▽):

| A | ▽A |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 1/2 | 1 |
| 0 | 0 |

***Табличне визначення модальності «неможливо»*** (~ ◊):

| A | ~ ◊ A |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 1/2 | 0 |
| 0 | 1 |

Модальне висловлювання □**A** вважається істинним, якщо і тільки якщо **A** має значення **«1»**, модальне висловлювання ▽**A** вважається істинним, якщо і тільки якщо **A** має значення **«1/2»**; модальне висловлювання ~◊**A** вважається істинним, якщо і тільки якщо **A** має значення **«0»**.



***У функціонально-числовій семантиці вивідними (доказовими) є тільки ті формули, які при будь-якій комбінації значень приймають значення*** «1». Візьмемо дві формули:

**p → ◊p** і **◊p → p** та перевіримо їх на доказовість.

| p | ◊ p | p→◊ p | ◊ p→p |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1/2 | 1 | 1 | 1/2 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |

З наведеної таблиці випливає, що формула **p → ◊p** є доказовою, а формула ◊**p → p** не є доказовою.

## 4. Семантика можливих світів для алетичної пропозиційної логіки

***Семантика алетичної пропозиційної логіки*** може бути сформульована ***в термінах теорії можливих світів***. У семантиці можливих світів для алетичної пропозиційної логіки поняття «***можливий світ***» конкретизується через термін «***опис стану***». ***Опис стану – це один із можливих розподілів значень істинності для описових висловлювань***. Так, для описового висловлювання **p∧q** можливими є чотири комбінації розподілу значень істинності:

1) **p – і, q – і;**
2) **p – і, q – х;**
3) **p – х, q – і;**
4) **p – х, q – х.**

Кожна з цих комбінацій є описом стану. ***Можливий світ – це саме той світ, який є заданий певним описом стану***. У наведеному прикладі маємо чотири можливих світи. І лише перший опис стану відповідає реальному світові. Поняття «опис стану» використовується для визначення логічної та фактичної істинності алетичного висловлювання. ***Логічно істинним є описове висловлювання, яке істинне в усіх описах світів, а фактично істинним – яке лише в деяких описах станів істинне. Алетичні висловлювання є істинними або хибними в деяких або в усіх випадках.***

***Якщо описове висловлювання хибне, тоді утворене від нього необхідне висловлювання буде хибним***:

**p → □p**
**↓ ↓**
**x x**

Наприклад: «*Усі планети мають атмосферу*» (**p**) та «*Необхідно, що усі планети мають атмосферу*» (**□p**).

***Якщо описове висловлювання істинне, тоді утворене від нього необхідне висловлювання може бути будь-яким (як істинним, так і хибним)***:

**p → □p**
**↓ ↓**
**x (i, x)**

Наприклад: «*Будь-яка планета є космічним об'єктом*» (**p**) та «*Необхідно, що будь-яка планета є космічним тілом*» (**□p**). З істинного описового висловлювання отримуємо істинне алетичне висловлювання.

Або: «*Усі мої приятелі мають вищу освіту*» (**p**) та «*Необхідно, що усі мої приятелі мають вищу освіту*» (**□p**). З істинного описового висловлювання випливає сумнів, що алетичне висловлювання фіксує безумовність та неминучість даного факту.

***Якщо описове висловлювання істинне, тоді утворене від нього можливе висловлювання також буде істинним***:

**p → ◊p**
**↓ ↓**
**i i**

Наприклад: «*Усі учасники наукової конференції підготували змістовні доповіді*» (**p**) та «*Можливо, що усі учасники наукової конференції підготували змістовні доповіді*» (**◊p**).

***Якщо описове висловлювання хибне, тоді утворене від нього можливе висловлювання може бути будь-яким (як хибним, так й істинним)***:

**p → □p**
**↓ ↓**
**x (≈ x, i)**



Наприклад: «*Природні супутники мають атмосферу*» (**p**) та «*Можливо, що природні супутники мають атмосферу*» (**◊p**). Із хибності описового висловлювання отримуємо хибність алетичного висловлювання.

Або: «*Метали – рідини*» (**p**) та «*Можливо, що метали – рідини*» (**◊p**). Із хибності описового висловлювання маємо істинне алетичне висловлювання.

Для встановлення логічного значення алетичних висловлювань недостатньо лише співставити його із ральною дійсністю, а треба враховувати усю множину варіантів фактичної ситуації, з якими є смисл співставляти дане алетичне висловлювання. Відповідно до теорії можливих світів, існує множина алетичних світів, які являють собою стани справ, що описують різні умови існування деяких об'єктів. Ці можливі світи певним чином структуровані: кожний із них є зв'язаний з іншими деяким відношенням досяжності.

## 5. Аналітико-таблична семантика для алетичної пропозиційної логіки

Семантика алетичної пропозиційної логіки може бути подана й у вигляді аналітико-табличної семантики. Розглянемо ***визначення головних алетичних модальностей та аналітичних правил*** для них ***у рамках аналітико-табличної семантики***.

1. ***Висловлювання* A *буде необхідним у деякому можливому світі* w, *якщо воно буде істинним у всіх можливих світах, досяжних із* w.** Це можна записати у вигляді аналітичного правила:

**□T** $\dfrac{\mathbf{T\ w\ \Box\ A}}{\mathbf{T\ w'\ A}}$ за умови **R w w'**,

де **w'** – будь-який можливий світ, який є досяжним із **w**.

2. ***Висловлювання* A *не буде необхідним у деякому можливому світі* w, *якщо воно буде хибним хоча б в одному можливому світі* w', *який є досяжним із* w.** Це можна записати у вигляді аналітичного правила:

**□F** $\dfrac{\mathbf{F\ w\ \Box\ A}}{\mathbf{F\ w'\ A}}$ за умови **R w w'**, де **w'** – деякий можливий світ, якого ще не було у попередніх рядках тієї галузки таблиці, де застосовується це правило та який є досяжним із **w**.

3. ***Висловлювання* A *буде можливим у деякому можливому світі* w, *якщо воно буде істинним хоча б в одному можливому світі* w', *який є досяжним із* w**. Це можна записати у вигляді аналітичного правила:

$$\Diamond T \quad \frac{T\ w \Diamond A}{T\ w'\ A} \quad \text{за умови } R\ w\ w',$$

де **w'** – деякий можливий світ, якого ще не було у попередніх рядках тієї галузки таблиці, де застосовується це правило та який є досяжним із **w**.

4. ***Висловлювання* A *не буде можливим у деякому можливому світі* w, *якщо воно буде хибним хоча б в одному можливому світі* w', *який є досяжним із* w**. Це можна записати у вигляді аналітичного правила:

$$\Diamond F \quad \frac{F\ w \Diamond A}{F\ w'\ A} \quad \text{за умови } R\ w\ w',$$

де **w'** – будь-який можливий світ, який є досяжним із **w**.

Застосування аналітичних правил ефективне для вирішення проблеми розв'язання в атлетичній пропозиційній логіці. Використовуючи аналітичні правила, можна побудувати аналітичні таблиці для формул алетичної пропозиційної логіки й таким чином з'ясувати, чи є вони логічними законами, логічними протиріччями або виконуваними формулами.

При побудові аналітичних таблиць для формул алетичної пропозиційної логіки потрібно враховувати, що таблиця вважається замкненою лише тоді, коли одна й та сама пропозиційна змінна буде з індексом **T** й **F** у тому самому можливому світі. Якщо ця умова не виконується, тоді кінцеві таблиці замкненими не будуть.

Визначимо, наприклад, чи є формула $\Box p \rightarrow \Diamond p$ логічним законом алетичної пропозиційної логіки. Для цього будуємо аналітичну таблицю. Припускаємо, що ця формула завжди є хибною:

1. $F\ w\ \Box p \rightarrow \Diamond p$.



2. $T\ w\ \Box p$ $\quad F\ w\ \Diamond p$ $\quad$ за правилом $\rightarrow$ **F з 1.**
3. $T\ w'\ p$ $\quad$ за правилом $\Box$**T з 2.**
4. $F\ w'\ p$ $\quad$ за правилом $\Diamond$**F з 2.**

Підсумкова аналітична таблиця має вигляд **{T w' p, F w' p}**. Вона є замкненою. Отже, досліджувана формула є законом для алетичної пропозиційної логіки.

## 6. Синтаксис алетичної пропозиційної логіки

Алетична пропозиційна логіка існує у вигляді числень. Формули алетичної пропозиційної логіки будуються із пропорційних змінних, що позначають прості описові висловлювання, інакше кажучи, описові висловлювання без логічних сполучників – ***пропозиційних зв'язок*** ~ («***не***»), $\wedge$ («***і***»), $\vee$ («***або***»), $\rightarrow$ («***якщо…, тоді…***») та модальних операторів $\Box$ («***необхідно***») і $\Diamond$ («***можливо***»).

***Аксіоми головних алетичних пропозиційних числень*** представляються наступним списком:

$A_1$. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$;

$A_2$. $A \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$;

$A_3$. $(\sim B \rightarrow \sim A) \rightarrow (A \rightarrow B)$;

$A_4$. $\Box (A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$;

$A_5$. $\Box A \rightarrow A$;

$A_6$. $\Box A \rightarrow \Box\Box A$;

$A_7$. $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$.

Правила доведення:

$R_1$. ***Правило відокремлення консеквентна імплікації***:

$$\frac{A \rightarrow B,\ A}{B}$$

$R_2$. ***Правило введення оператора необхідності***:

$$\frac{A}{\Box A}$$

***Класичне пропозиційне числення*** складається з аксіом $A_1$, $A_2$, $A_3$ і $R_1$. ***Алетичні модальні числення*** подані різноманітними варіантами: ***система* К** містить в собі $A_1 - A_4$, $R_1$, $R_2$; ***система* Т** містить в собі $A_1 - A_5$, $R_1$, $R_2$; ***система*** $S_4$ містить в собі $A_1 - A_6$, $R_1$, $R_2$; ***система*** $S_5$ містить в собі $A_1 - A_7$, $R_1$, $R_2$.

## 7. Головні закони алетичної пропозиційної логіки

Можна виокремити велику кількість формул, які є законами в різних системах алетичної пропозиційної логіки. ***До головних законів алетичної пропозиційної логіки відносяться*** деякі з них.

1. «***Усе необхідне є реальним***». Схема цього закону може бути записана так: $\square A \rightarrow A$.

   Цей закон фіксує найбільш фундаментальне відношення між необхідністю та дійсністю. Він стверджує той факт, що якщо формула $\square A$ є істинною, тоді A буде завжди істинним в усіх можливих світах, у тому числі й у дійсному світі. Ця залежність іноді може провокувати неправильне обмежене твердження: «***Все дійсне є необхідним***» ($A \rightarrow \square A$). Але обернене трактування цієї імплікації є помилковим. Не завжди із дійсності випливає необхідність чогось. Для цього дійсність повинна мати атрибут необхідності. Наприклад, з того що «*Усі мешканці нашого будинку знають англійську мову*» не випливає необхідність цього факту.
2. «***Усе реальне є можливим***». Схема цього закону може бути записана так: $A \rightarrow \Diamond A$.

   Даний закон регламентує той аспект відношення між реальним та можливим, коли визнання висловлювання можливим означає його істинність хоча б в одному із можливих світів, але не виключено, що ним може бути дійсний світ. Обернена імплікація у цьому випадку не буде правильною. Схема $\Diamond A \rightarrow A$ не виражає логічного закону. Із можливості чого-небудь зовсім не випливає його дійсність. Наприклад, із того що «*Київське «Динамо» може виграти у черговому турі*» не випливає його перемога.
3. «***Усе необхідне є можливим***». Схема цього закону може бути записана так: $\square A \rightarrow \Diamond A$. Цей закон є наслідком із двох попередніх законів:

$$\frac{\square A \rightarrow A \qquad A \rightarrow \Diamond A}{\square A \rightarrow \Diamond A}$$



У цьому законі зафіксована залежність: «***Якщо $\square$A істинне, тоді A буде істинним в усіх можливих світах, у тому числі й у дійсному світі, а, отже, і $\Diamond$A буде істинним***».

### *Література*


Жоль К.К. Логика. Введение в современную символическую логику. – К.: Стилос, 2000.

Ивлев Ю.В. Логика. – М.: Проспект, 2009.

Ішмуратов А.Т. Вступ до філософської логіки. – К.: Абрис, 1997.

Карамишева Н.В. Логіка. Пізнання. Евристика. – Львів: Астролябія, 2002.

Конверський А.Є. Логіка (традиційна та сучасна). – К.: ЦНЛ, 2004.

Ненашев М.И. Введение в логику. – М.: Гардарики, 2004.

Непейвода Н.Н. Прикладная логика. – Новосибирск: Изд-во УдГУ, 2004.

Символическая логика: Учебник / Под ред. Я.А.Слинина, Э.Ф.Караваева, А.И.Мигунова. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005.

Солодухин О.А. Логика. – Ростов-н/Д: Феникс, 2000.

Хоменко І.В. Логіка. – К.: Абрис, 2004.

## Лекція 12
## Темпоральна пропозиційна логіка

План лекції

1. **Визначення темпоральної пропозиційної логіки.**
2. **Мова темпоральної пропозиційної логіки.**
3. **Головні закони темпоральної пропозиційної логіки.**
4. **Семантика можливих світів для темпоральної пропозиційної логіки.**
5. **Аналітико-таблична семантика для формул темпоральної пропозиційної логіки.**
6. **Синтаксис темпоральної пропозиційної логіки. Мінімальне пропозиційне числення для темпоральної пропозиційної логіки.**

Виклад лекції

### 1. Визначення темпоральної пропозиційної логіки

Термін «***темпоральна логіка***» походить від латинського слова «***temporis***», що в перекладі означає «***час***». Звідси інші назви темпоральної логіки – «***логіка часу***» або «***логіка часових відношень***».

***Темпоральна пропозиційна логіка – це розділ модальної логіки, де досліджуються властивості темпоральних висловлювань та відношення між ними у структурі міркувань.***

***Темпоральним висловлюванням називається описове висловлювання, в якому часовий параметр включається до його логічної структури.*** Через це воно інколи називається часовим висловлюванням. ***Значення істинності темпоральних висловлювань залежать від часових обставин.***

Прикладами темпоральних висловлювань є розповідні речення: «*Ранок був прохолодний*», «*Зараз день*», «*Сьогодні – неділя*», «*Завтра буде падати сніг*», «*Дерева через два місяці будуть зеленими*».

***Темпоральні модальності***, які входять до складу темпоральних висловлювань, ***поділяються на абсолютні та порівнювані***. До ***абсолютних темпоральних модальностей*** відносяться поняття «***було***», «***завжди було***», «***є***», «***буде***», «***завжди буде***». ***Порівнюваними темпоральними модальностями*** є поняття «***раніше***», «***одночасно***», «***пізніше***».



Вихідними поняттями темпоральної пропозиційної логіки є терміни «***вісь орієнтації***» та «***часовий ряд***».

***Вісь орієнтації – це поняття, яке слугує точкою відліку для визначення часових характеристик усіх інших подій.*** Розрізняють об'єктну та суб'єктну осі орієнтації. ***Об'єктною віссю орієнтації можуть слугувати природні події***, такі як схід чи захід Сонця, пори року, затемнення Сонця тощо, ***а також історичні події, значимі в рамках певної культури***, наприклад, подія народження Христа, дата виходу пророка Мухаммеда із Мекки в Медіну, дата заснування Риму і таке інше. ***Суб'єктною віссю орієнтації слугує час повідомлення певного висловлювання конкретною людиною.*** Тому суб'єктна вісь визначається такими виразами як «***сьогодні***», «***зараз***», «***наша епоха***» й тому подібне. Висловлюватись про минуле, теперішнє чи майбутнє можна тільки відносно суб'єктної осі. Так, висловлювання «*Я розмовляю*» слід розуміти як «*Я зараз розмовляю*» й воно відноситься до теперішнього часу суб'єктної осі орієнтації.

***Часовий ряд – це поняття, яке позначає часовий простір із певною віссю орієнтації.*** Таких рядів існує два. Один із них позначається латинською буквою **А**, другий – буквою **В**. ***Ряд А*** охоплює ***часовий простір з оцінками «минуле», «теперішнє», «майбутнє»***. ***Ряд В*** відображає ***часовий простір з оцінками «раніше», «одночасно», «пізніше»***. Ці часові ряди незалежні один від одного. Вони не зводяться один до одного, вони не повторюють один одного, нарешті, вони не перетинаються один з одним. Той розділ темпоральної пропозиційної логіки, який описує ряд **А**, називають **А**-***логіка***, а той розділ темпоральної пропозиційної логіки, який описує ряд **В**, – часовою **В**-***логікою***. **А**-логіка та **А**-ряд застосовується переважно в гуманітарних науках, **В**-логіка та **В**-ряд – в природничих.

***Головними принципами темпоральної пропозиційної логіки*** вважаються принцип темпоральної повноти та принцип темпоральної несуперечності. ***Принцип темпоральної повноти*** визначається так: ***кожний об'єкт або був, або є, або буде***. ***Принцип темпоральної несуперечності*** має таке формулювання: ***об'єкт не може одночасно бути і не бути.***

**2. Мова темпоральної пропозиційної логіки**

Мова темпоральної пропозиційної логіки складається із засобів мови класичної логіки висловлювань та доданих до них знаків темпоральних модальностей.

***Алфавіт темпоральної пропозиційної логіки***:

1. Пропозиційні змінні для позначення описових висловлювань: **p, q, r** та інші;
2. Пропозиційні зв'язки: $\sim, \wedge, \vee, \underline{\vee}, \rightarrow, \leftrightarrow$ ;
3. Знаки темпоральних модальностей:
   **P** – «*було так, що…*»;
   **F** – «*буде так, що…*»;
   **H** – «*завжди було так, що…*»;
   **G** – «*завжди буде так, що…*».
4. Технічні знаки, якими є ліва та права дужки, кома, кома з крапкою, двокрапка, тире: **( ) , ; : –** .

***Визначення формули в темпоральній пропозиційній логіці***:

1. Будь-яка пропозиційна змінна є формулою;
2. Якщо **A** і **B** формули, тоді $\sim A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \underline{\vee} B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$, **PA**, **FA**, **HA**, **GA** – формули;
3. Ніщо, крім вказаного в пунктах **1** і **2** даної дефініції не є формулами.

Відповідно до цієї дефініції вирази $Pp \rightarrow p$, $p \rightarrow Gp$, $G(p \rightarrow q) \rightarrow (Gp \rightarrow Gq)$ є формулами темпоральної пропозиційної логіки, тоді як вирази $p \rightarrow pH$, $\rightarrow p \wedge Hp$, $pH \wedge qG$ формулами цієї логіки не будуть.

Використовуючи мову темпоральної пропозиційної логіки, стає можливим формалізувати висловлювання природної мови, до складу яких входять темпоральні модальності. Так, наприклад, висловлювання «*Теперішнє завжди було майбутнім*» можна формалізувати так: $p \rightarrow HFp$. Висловлювання «*Теперішнє завжди буде минулим*» формалізується таким чином: $p \rightarrow GPp$.

**3. Головні закони темпоральної пропозиційної логіки**

Засобами мови темпоральної пропозиційної логіки можна записати ***головні закони темпоральної логіки висловлювань***:



1. $Gp \rightarrow Fp$. Наприклад, «*Якщо після зими завжди наступатиме весна, тоді так воно і буде*»;
2. $Hp \rightarrow Pp$. Наприклад, «*Якщо завжди гіпотеза, яка підтверджувалася практично, перетворювалася в теорію, то так воно і було*»;
3. $\sim (Fp \wedge F \sim p)$. Наприклад, «*Неправильно, що буде ясна погода і хмарна*»;
4. $\sim (Pp \wedge P \sim p)$. Наприклад, «*Неправильно, що вирок був обґрунтованим і необґрунтованим*»;
5. $FFp \rightarrow Fp$. Наприклад, «*Якщо буде, що буде позитивний результат, тоді він буде*»;
6. $\sim H \sim Gp \rightarrow p$. Наприклад, «*Якщо неправильно, що завжди була й завжди буде сонячна погода, тоді буде сонячна погода*»;
7. $FPp \leftrightarrow p \vee Fp \vee Pp$. Наприклад, «*Буде так, що був успіх «Київського Динамо», тільки якщо він є, або буде, або уже був*»;
8. $HGp \leftrightarrow p \wedge Hp \wedge Gp$. Наприклад, «*Завжди було, що завжди в цю пору року, в цій місцевості настане гарна погода, тоді і тільки тоді, якщо вона є, завжди була і завжди буде*».

Застосовуючи засоби темпоральної пропозиційної логіки, ***можна визначити темпоральні модальності одну через іншу***.

а) $Gp \equiv \sim F \sim p$ (читається: «*Завжди буде* «**p**», *тоді і тільки тоді, коли не буде* «**не-p**»»). Наприклад, «*Завжди в цю пору року, в цій місцевості буде ясна погода, тоді і тільки тоді, коли в цю пору року в цій місцевості не буде хмарної погоди*».

б) $Fp \equiv \sim G \sim p$ (читається: «*Буде* «**p**», *тоді і тільки тоді, коли не завжди буде* «**не-p**»»). Наприклад, «*Буде ясна погода, тоді і тільки тоді, коли не завжди буде хмарна погода*».

в) $Hp \equiv \sim P \sim p$ (читається: «*Завжди було* «**p**», *тоді і тільки тоді, коли не було* «**не-p**»»). Наприклад, «*Завжди був позитивний результат чемпіонату, тоді і тільки тоді, коли не було жодного випадку негативного результату*».

г) $Pp \equiv \sim H \sim p$ (читається: «*Було* «**p**», *тоді і тільки тоді, коли не завжди було* «**не-p**»»). Наприклад, «*Був позитивний результат експерименту, тоді і тільки тоді, коли не завжди був негативний*».

***За допомогою темпоральних модальностей можна визначити алетичні модальності***:

а) $\Box p \equiv p \wedge Gp$ (читається: «*Необхідним є те, що є і завжди буде*»). Наприклад, «*Необхідною ознакою металу є електропровідність, тоді і тільки тоді, коли вона є і завжди буде*».

а') $\Box p \equiv Hp \wedge p \wedge Gp$ (читається: «*Необхідним є те, що завжди було, є і завжди буде*»). Наприклад, «*Необхідно, що студенти повинні складати іспити, тоді і тільки тоді, коли завжди було так, є і завжди так буде*».

б) $\Diamond p \equiv p \vee Fp$ (читається: «*Можливим є те, що є або буде*»). Наприклад, «*Перемога нашої команди в чемпіонаті можлива, тоді і тільки тоді, коли вона є або буде*».

б') $\Diamond p \equiv Pp \vee p \vee Fp$ (читається: «*Можливим є те, що було, є або буде*»). Наприклад, «*Можливо є поїздка до Варшави, тоді і тільки тоді, коли це було, або є, або буде*».

### 4. Семантика можливих світів для темпоральної пропозиційної логіки

Семантика темпоральної пропозиційної логіки може бути подана у вигляді семантики можливих світів. Вихідним поняттям цієї семантики є термін «***істинність темпорального висловлювання відносно моменту часу або інтервалу тієї чи іншої часової структури***».

***Часові структури є комбінаціями часових потоків або курсів подій. Часовий потік – це множина моментів часу, які фіксують події, що можна порівнювати за часом***. Найпростіший часовий потік складається з одного моменту часу.

***Момент часу – це множина подій, які одночасно відбуваються***. Він є одиницею виміру подій у часі.

***Подія – це одноразовий перехід від одного стану справ до іншого***. Якщо подія трапляється, то процес триває. ***Процес – це багаторазовий перехід від станів до станів***. Подія та процес є різновидами змін.

Фактично момент часу фіксує конкретну подію, що пов'язана з ним, або множину подій, які знаходяться у відношенні часової координації. ***Часова координація – це співставлення частин подій на підставі відношень «раніше», «пізніше» чи «одночасно»***. Наприклад, темпоральне висловлювання «*Битва біля Бородіно відбулася раніше від битви біля Ватерлоо*» означає, що будь-яка частина першої події відбувалася раніше, ніж будь-яка частина другої. У тому випадку, коли події не можуть координуватися, вважають, що вони належать до різних часових потоків.

***Момент часу*** в темпоральній пропозиційній логіці ***є аналогом поняття «можливий світ»***. Саме момент часу детермінує істиннісні оцінки темпоральних висловлювань. У зв'язку із цим відношення досяжності між можливими світами R розглядається тут як часове відношення між моментами часу. Звідси й характерні відношення досяжності у темпоральній пропозиційній логіці. ***Відношення* R *може бути***:

1) ***транзитивним***. Його схеми: $FFA \rightarrow FA$ (читається: «*Якщо буде так, що буде так, що* A, *тоді буде так, що* A») або $GA \rightarrow GGA$ (читається: «*Якщо завжди буде так, що* A, *тоді завжди буде так, що завжди буде так, що* A») – ***для майбутньої галузки часу***; $PPA \rightarrow PA$ (читається: «*Якщо було так, що було так, що* A, *тоді було так, що* A») або $HA \rightarrow HHA$ (читається: «*Якщо завжди було так, що* A, *тоді завжди було, що завжди було, що* A») – ***для минулої галузки часу***;
2) ***лінійним***. Його схеми: $PFA \rightarrow (A \vee PA \vee FA)$ (читається: «*Якщо було так, що буде так, що* A, *тоді або* A, *або було так, що* A, *або буде так, що* A») або $(A \wedge HA \wedge GA) \rightarrow HGA$ (читається: «*Якщо* A *і завжди було так, що* A, *і завжди буде так, що* A, *тоді завжди буде так, що* A») – ***для виразу лінійності майбутньої галузки часу***; $FPA \rightarrow (A \vee PA \vee FA)$ (читається: «*Якщо буде так, що було так, що* A, *тоді або* A, *або було так, що* A, *або буде так, що* A») або $(A \wedge HA \wedge GA) \rightarrow GHA$ (читається: «*Якщо* A *і завжди було так, що* A, *і завжди буде так, що* A, *тоді завжди буде так, що завжди було так, що* A») – ***для виразу лінійності минулої галузки часу***;
3) ***дискретним***. Його схема: $G(GA \rightarrow A) \rightarrow (FGA \rightarrow GA)$ (чита-

ється: «*Якщо завжди буде так, що: якщо завжди буде так, що* **A**, *тоді (зараз) є так, що* **A**, *– тоді якщо буде так, що завжди буде так, що* **A**, *тоді (уже зараз) є істинним, що завжди буде так, що* **A**»);

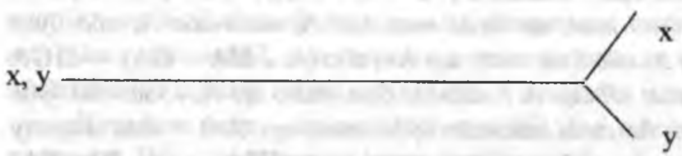
4) ***безкінечним***. Його схеми: **GA → FA** (читається: «*Якщо завжди буде так, що* **A**, *тоді коли-небудь буде так, що* **A**») або **~ FA → F ~ A** (читається: «*Якщо не буде так, що* **A**, *тоді буде так, що* **не-A**»);
5) ***скінченним***. Його схеми: **(GA ∨ FGA)** (читається: «*Або завжди буде так, що* **A**, *або буде так, що завжди буде так, що* **A**») або **(HA ∨ PHA)** (читається: «*Або завжди було так, що* **A**, *або було так, що завжди буде так, що* **A**»);
6) ***циклічним***. Його схеми: **(GA → A)** (читається: «*Якщо завжди буде так, що* **A**, *тоді (уже зараз) є так, що* **A**») або **(A → FA)** (читається: «*Якщо зараз є так, що* **A**, *тоді й коли-небудь буде так, що* **A**»).

***Найбільш характерними часовими структурами є такі***:

1. *Лінійний час*.


Ця схема відповідає найпростішій часовій структурі, що є реальним курсом подій.

2. *Лінійний час із рогалуженням у майбутньому*.



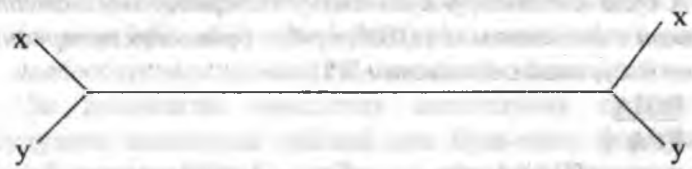

Ця схема представляє таке відношення між часовими потоками, коли усі події потоків **x** та y до певного моменту часу співпадають, а потім ні. З цього моменту часу відбувається розгалуження часових потоків, виникають можливі напрями, за якими піде курс подій. Таке відношення між часовими потоками називається розгалуженням.

3. *Лінійний час із розгалуженням у минулому*.




Ця схема фіксує відношення між часовими потоками, коли події потоків **x** та у до певного моменту часу не мають нічого спільного, а потім із цього моменту часу співпадають. Інакше кажучи, ця схема представляє можливості, які були в минулому.

4. ***Лінійний час із розгалуженням у минулому і майбутньому***.




Ця схема показує, що час, який розгалужувався в минулому, із певного моменту розгалужується в майбутньому.

### 5. Аналітико-таблична семантика для формул темпоральної пропозиційної логіки

***Семантика темпоральної пропозиційної логіки може бути сформульована в термінах аналітико-табличної семантики***. Для цього в семантику темпоральної пропозиційної логіки вводяться аналітичні правила для темпоральних модальностей. Всього цих правил вісім, відповідно до кількості модальних операторів (**P**, **F**, **H**, **G**).

***Аналітичні правила для темпоральних модальностей*** визначаються за аналогією із алетичними модальностями. При цьому враховуються відношення між моментами часу.

1. **GT** $\dfrac{\mathbf{TtGA}}{\mathbf{Tt'A}}$

– читається: «*Подія* **A** *завжди буде в деякий момент часу* **t'**, *якщо* **A** *буде істинним у будь-який наступний момент часу,* *який є досяжним із* **t** (**tRt'**, *де* **t'** *– будь-який наступний момент часу, досяжний із* **t**)».

2. **GF** **<u>FtGA</u>**
   **Ft'A**

   – читається: «*Подія* **A** *ніколи не буде в деякий момент часу* **t**, *якщо* **A** *буде хибним хоча б в один наступний момент часу* **t'**, *який є досяжним із* **t** (**tRt'**, *де* **t'** *– деякий наступний момент часу, який ще не зустрічався у попередніх рядках тієї галузки таблиці, де застосовується правило* **GF**, *і який є досяжним із* **t**)».

3. **HT** **<u>TtHA</u>**
   **Tt'A**

   – читається: «*Подія* **A** *завжди була в деякий момент часу* **t**, *якщо* **A** *було істинним у будь-якому попередньому моменті часу, який є досяжним із* **t** (**tRt'**, *де* **t'** *– будь-який попередній момент часу, який є досяжним із* **t**)».

4. **HF** **<u>FtHA</u>**
   **Ft'A**

   – читається: «*Події* **A** *ніколи не було в деякий момент часу* **t**, *якщо* **A** *було хибним хоча б в одному попередньому моменті часу* **t'**, *який є досяжним із* **t** (**tRt'**, *де* **t'** *– деякий попередній момент часу, який ще не зустрічався у попередніх рядках тієї галузки таблиці, де застосовується правило* **HF**, *і який є досяжним із* **t**)».

5. **FT** **<u>TtFA</u>**
   **Tt'A**

   – читається: «*Подія* **A** *буде в деякий момент часу* **t**, *якщо* **A** *буде істинним хоча б в один наступний момент часу, який є досяжним із* **t'** (**tRt'**, *де* **t'** *– деякий наступний момент часу, якого ще не було в рядках тієї галузки таблиці, де застосовується правило* **FT**, *і який є досяжним із* **t**)».

6. **FF** **<u>FtFA</u>**
   **Ft'A**

   – читається: «*Події* **A** *не було в деякий момент часу* **t**, *якщо* **A** *буде хибним у будь-який наступний момент часу* **t□**, *який є досяжним із* **t** (**tRt□**, *де* **t□** *– будь-який момент часу, який є досяжним із* **t**)».



7. **PT** **<u>TtPA</u>**
   **Tt'A**

   – читається: «*Подія* **A** *була в деякий момент часу* **t**, *якщо* **A** *було істинним хоча б в один попередній момент часу* **t'**, *який є досяжним із* **t** (**tRt'**, *де* **t'** *– деякий попередній момент часу, якого ще не було у попередніх рядках тієї галузки таблиці, де застосовується правило* **PT**, *і який є досяжним із* **t**)».

8. **PF** **<u>FtPA</u>**
   **Ft'A**

   – читається: «*Події* **A** *не було в деякий момент часу* **t**, *якщо* **A** *було хибним у будь-який попередній момент часу* **t'**, *який є досяжним із* **t** (**tRt'**, *де* **t'** *– деякий попередній момент часу, який ще не зустрічався у попередніх рядках тієї галузки таблиці, де застосовується правило* **PF**, *і який є досяжним із* **t**)».

За допомогою наведених аналітичних правил можна побудувати аналітичні таблиці для будь-яких формул темпоральної пропозиційної логіки з метою з'ясування їхнього семантичного статусу. Наприклад, шляхом побудови аналітичної таблиці з'ясуємо, чи є формула **Hp →Pp** логічним законом.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | **Ft Hp → Pp** | | |
| 2. | **Tt Hp** | **Ft Pp** | **за правилом → F з 1.** |
| 3. | **Tt'p** | | **за правилом HT з 2.** |
| 4. | **Ft'p** | | **за правилом PF з 2.** |

Отримуємо підсумкову таблицю **{Tt'p, Ft'p}**. Таблиця замкнена. Отжа, ця формула є логічним законом для темпоральної пропозиційної логіки.

### 6. Синтаксис темпоральної пропозиційної логіки. Мінімальне пропозиційне числення для темпоральної пропозиційної логіки

Множина формул **F** певного числення темпоральної пропозиційної логіки будується із пропозиційних змінннх, що позначають прості модальні висловлювання, пропозиційних зв'язок та часових операторів. ***Клас аксіом мінімального числення тем-***

*поральної пропозиційної логіки* $K_t$ місить у собі *аксіоми класичного пропозиційного числення*

$A_1$. $A \to (B \to A)$;

$A_2$. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

$A_3$. $(\sim B \to \sim A) \to (A \to B)$;

та *часові аксіоми*

$A_4$. $G(A \to B) \to (GA \to GB)$;

$A_5$. $H(A \to B) \to (HA \to HB)$;

$A_6$. $A \to GPA$;

$A_7$. $A \to HFA$.

*Правила виведення темпоральної пропозиційної логіки* $K_t$:

*Правило відокремлення*:

$$\frac{A \to B,\ A}{B}$$

а також *правила введення операторів* G та H:

$$\frac{A}{GA} \qquad \frac{A}{HA}$$

за умови, що A є аксіомою або теоремою.

*Література*


Гольдблатт Р. Логика времени и вычислимости. – М.: ОИЛКРЛ, 1992.

Жоль К.К. Логика. Введение в современную символическую логику. – К.: Стилос, 2000.

Ивлев Ю.В. Логика. – М.: Проспект, 2009.

Ішмуратов А.Т. Вступ до філософської логіки. – К.: Абрис, 1997.

Карамишева Н.В. Логіка. Пізнання. Евристика. – Львів: Астролябія, 2002.

Конверський А.Є. Логіка (традиційна та сучасна). – К.: ЦНЛ, 2004.

Ненашев М.И. Введение в логику. – М.: Гардарики, 2004.

Непейвода Н.Н. Прикладная логика. – Новосибирск: Изд-во УдГУ, 2004.

Символическая логика: Учебник / Под ред. Я.А.Слинина, Э.Ф.Караваева, А.И.Мигунова. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005.

Солодухин О.А. Логика. – Ростов-н/Д: Феникс, 2000.

Хоменко І.В. Логіка. – К.: Абрис, 2004.




Лекція 13

## Епістемічна пропозиційна логіка

План лекції

1. **Визначення епістемічної пропозиційної логіки.**
2. **Види епістемічих логік. Логіка знання та логіка переконання.**
3. **Мова епістемічної пропозиційної логіки.**
4. **Семантика можливих світів для епістемічної пропозиційної логіки.**
5. **Аналітико-таблична семантика для епістемічної пропозиційної логіки.**
6. **Синтаксис епістемічної пропозиційної логіки. Пропозиційне числення мінімальної логіки знання. Мінімальне пропозиційне числення логіки переконання.**

Виклад лекції

### 1. Визначення епістемічної пропозиційної логіки

Термін «*епістемічна логіка*» походить від грецького слова «*episteme*», що означає «*знання*». Інші назви епістемічної логіки – «*логіка знання та переконання*» або «*логіка знання та віри*».

***Епістемічною пропозиційною логікою називається розділ модальної логіки, де досліджуються властивості епістемічних висловлювань та їхні відношення у структурі міркувань.***

***Епістемічне висловлювання – це вид модального висловлювання, що містить модальні оцінки «знаю», «думаю», «вважаю», «передбачаю», «припускаю», «доведено», «вірю», «переконаний» та їхні модифікації у особистісній та безособистісній формі.***

Прикладами епістемічних висловлювань можуть бути такі речення: «*Я знаю, що йде дощ*», «*Дощ йде, але я у це не вірю*», «*Безсумінвним є тільки мій сумнів*».

***Визначення головних епістемічниз модальностей.***

***Переконанням*** (або ***суб'єктивною достатністю***) ***є свідоме визнання істинним якогось положення стосовно особи, яка його висловлює, або до якої вона відноситься, або якій***

***вона адресується, інакше кажучи, переконання є свідоме визнання чогось істинним для самого себе.*** Наприклад, «*Я вважаю, що є життя після смерті*».

***Достовірністю*** (або ***об'єктивною достатністю***) ***є свідоме визнання чогось істинним для будь-кого.*** Наприклад, «*Найкоротша відстань між двома точками – пряма лінія*».

***Непевною думкою*** (або ***гадкою***) ***є визнання чогось істинним при відсутності суб'єктивної та об'єктивної достатності.*** Наприклад, «*На мою думку, в цьому лісі є білі гриби*».

***Вірою є свідоме визнання істинним якогось положення з точки зору суб'єктивної достатності при чіткому усвідомленні відсутності об'єктивної достатності.*** Наприклад, «*Я вірю, що Бог існує*».

***Невірою є відсутність суб'єктивної достатності.*** Наприклад, «*Я не вірю, що є життя після смерті*».

***Знання виступає єдністю суб'єктивної та об'єктивної достатності.*** Наприклад, «*Я знаю, що Земля є круглою*». Знання є протилежністю віри. Віру інколи називають ***суб'єктивним знанням***, а власне знання – ***об'єктивним знанням***.

***Незнання є відсутністю об'єктивної достатності.*** Наприклад, «*Я не знаю, що таке простий силогізм*».

***Сумнівом називається оцінка інформації, коли суб'єкт не переконаний ні в її істинності, ні в її хибності.*** Наприклад, «*Сумнівно, що він був на місці злочину в ту ніч*».

В епістемічній пропозиційній логіці для характеристики висловлювань, які дещо стверджують про пізнавальну діяльність інтелектуальних суб'єктів та які в семантичному аспекті мають об'єктивні й суб'єктивні компоненти, був введений термін «пропозиційне настановлення». ***Пропозиційне настановлення – це відношення між суб'єктом, який пізнає світ й себе самого, та змістом висловлювання, яке виражає знання, переконання, віру, уявлення, власні думки, погляди тощо.*** Воно має вигляд «**x** *знає, що...*», «**y** *вірить, що...*», «**z** *вважає, що...*», де **x**, **y** та **z** – інтелектуальні суб'єкти, за якими йде певний стверджувальний вислів. Наприклад, «*Петро знає, що Земля має форму кулі*», «*Павло переконаний, що телепатія існує*».



***Головними принципами епістемічної пропозиційної логіки*** є принцип епістемічної повноти та принцип епістемічної несуперечності. ***Принцип епістемічної повноти*** визначається так: ***будь-яке висловлювання або доведене, або спростоване, або нерозв'язуване. Принцип епістемічної несуперечності*** формулюється так: ***висловлювання не може бути і доведеним, і спростованим.***

***Епістемічна пропозиційна логіка базується на таких стандартних положеннях епістемології***:

1) знання пов'язане з ральністю;
2) вірування пов'язані з внутрішнім світом опіній, а опінія – це уявлення суб'єкта про свою мислиму реальність;
3) хибна опінія – це спотворене уявлення про реальність (на думку «експертів»);
4) сумнів – це деяка невпевненість у своєму знанні;
5) незнання – особливий стан (Сократ: «*Я знаю тільки те, що я нічого не знаю*»).

В епістемічній пропозиційній логіці ці уявлення уточнюються на підставі універсальних понять та із застосуванням аналітико-дедуктивних засобів.

**2. Види епістемічих логік. Логіка знання та логіка переконання**

За об'єктивним й суб'єктивним знанням розрізняють ***два головні напрями епістемічної пропозиційної логіки***: ***логіку знання*** та ***логіку переконання***. В залежності від того, яка оцінка береться за вихідну – «доведено» чи «істинно», може бути ***два варіати логіки знання.***

***Система логіки, де вихідним є термін «доведено», має такі закони***:

1. «***Якщо висловлювання доведено, тоді воно істинне***» (оскільки довести можна лише істину). Наприклад, якщо висовлювання «*Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180°*» доведено, тоді воно істинне.
2. «***Логічний наслідок доведеного є також доведеним***». Наприклад, якщо положення «*Будь-яка планета є космічним*

*об'єктом»* доведено, тоді і його наслідок «*Земля є космічним об'єктом*» також є доведеним.

3. «***Якщо дещо доведено, тоді доведено, що воно доведено***». Наприклад, якщо доведено, що висловлювання «*Земля має форму кулі*», тоді доведено, що це положення доведено.
4. «***Логічне протиріччя не доводиться***» (тобто доведення хибного висловлювання не існує). Наприклад, не можна побудувати доведення для висловлювань «*Камінь проводить електричний струм*», «*Місяць має атмосферу*».

Коли за вихідний термін беруть поняття «*істинно*», тоді отримують *логіку істини*, де *законами* є такі положення:

1. «***Якщо висловлювання істинне, тоді неправильно, що його заперечення також істинне***». Наприклад, якщо істинно, що «*Київ розташований на березі Дніпра*», тоді неправильно, що істинно нібито «*Київ не розташований на березі Дніпра*».
2. «***Кон'юнкція істинна, якщо і тільки якщо обидва кон'юнкти істинні***». Наприклад, істинно, що «*Земля має атмосферу і природний супутник*», тільки якщо істинно, що «*Земля має атмосферу*» й істинно, що «*Земля має природний супутник*».

***У логіці переконання вихідним є термін «переконаний»*** («***вірить***»). До ***законів логіки переконання*** відносять такі положення:

1. «S ***вірить, що перше і друге, якщо і тільки якщо він вірить, що перше, і вірить, що друге***». Наприклад, «*Він вірить, що людська душа безсмертна і є життя після смерті*», якщо і тільки якщо «*Він вірить, що людська душа безсмертна*» та «*Він вірить, що є життя після смерті*».
2. «***Не можна одночасно вірити і сумніватися, бути переконаним і заперечувати; сумніватися і заперечувати***». Наприклад, «*Не можна одночасно вірити в те, що є життя після смерті та сумніватися в цьому*».
3. «S ***або переконаний у чомусь, або сумнівається в цьому, або відкидає це***». Наприклад, «*Він або переконаний в тому, що на Марсі є життя, або відкидає це*».



4. «***Неможливо бути переконаним одночасно в чомусь і в протилежному йому***». Наприклад, «*Не можна одночасно вірити в те, що єгипетські піраміди створили люди і прибульці з космосу*».

У логіці знання логічний наслідок відомого є відомий, істинного – істинний, доказуваного – доведений. У логіці переконання ця залежність має свою специфіку. Якщо людина в чомусь переконана, то вона не завжди буде переконана в наслідках цього.

Модифікацією епістемічної пропозиційної логіки є ***немонотонна логіка***. Це – ***розділ некласичної логіки, що вивчає специфічне відношення логічного випливання***. У немонотонній логіці враховується можливість зміни сукупності правил виведення за умови додання засновку, інакше кажучи, коли деякі правила стають неправильними внаслідок появи деяких фактів.

***Класичне відношення логічного випливання виконує три умови***:

1) $\mathbf{A_1, \dots A_n, B \vdash B}$
(рефлективність);

2) $$\frac{\mathbf{A_1, \dots A_n \vdash B}}{\mathbf{A_1, \dots A_n, X \vdash B}}$$
(монотонність);

3) $$\frac{\mathbf{A_1, \dots A_n, \vdash X, A_1, \dots A_n \vdash B}}{\mathbf{A_1, \dots A_n \vdash B}}$$ (вирізання),

де $\mathbf{A_1, \dots A_n, X, B}$ – формули, а горизонтальна риска позначає перехід від засновків до висновку.

***Немонотонне відношення логічного випливання не має властивості монотонності.*** У немонотонній логіці, зокрема такому її різновиді як автоепістемічна логіка, формалізується процес суб'єктивного самоаналізу у вигляді інтроспективних міркувань. В автоепістемічній логіці, наприклад, формалізується вирази типу «*Якщо я не припускаю, що підтвердиться* **p**, ***тоді підтвердиться*** **q**».

## 3. Мова епістемічної пропозиційної логіки

Мова пропозиційної версії епістемічної логіки відрізняється від мови класичної логіки висловлювань тільки кількістю логічних знаків.

***Алфавіт мови епістемічної пропозиційної логіки*** включає:

1. Список пропозиційних змінних: **p, q, r** та інші;
2. Список пропозиційних зв'язок: **~**, $\wedge$, $\vee$, **→**, **≡** ;
3. Список епістемічних операторів:

   **Ka** – «a *знає, що...*»;

   **Ba** – «a *вірить, що...*»;

   **Ca** – «a *сумнівається, що...*»;

   **Oa** – «a *спростовує, що...*».

***Визначення формули в епістемічній пропозиційній логіці*** задається стандартно:

1. Будь-яка пропозиційна змінна є формулою;
2. Якщо **p** і **q** формули, тоді **~p**, **p**$\wedge$**q**, **p**$\vee$**q**, **p→q**, **Kap**, **Bap**, **Cap**, **Oap** – формули;
3. Ніщо, крім вказаного в пунктах 1 і 2 даної дефініції не є формулами.

Відповідно до цього визначення вирази **Kap**, **KaKap→p**, **Kap→Bap** є формулами епістемічної пропозиційної логіки. Тоді як вирази **Ka**, **aKp**, **→Kap** формулами цієї логіки не будуть.

Використовуючи мову епістемічної пропозиційної логіки, стає можливим формалізувати висловлювання природної мови, до складу яких входять епістемічні модальності. Так, наприклад, висловлювання «*Я знаю, що я не знаю логіку*» можна формалізувати так: **Ka ~ Kap**. Формула висловлювання «*Не можна знати і не знати те саме*» така: **~ (Kap $\wedge$ ~ Kap)**.

Властивості епістемічних модальностей знання **Kap** і віри **Bap** задаються формулами, які є аксіомами епістемічної пропозиційної логіки та які доповнюють аксіоми класичної пропозиційної логіки.

***Головні аксіоми епістемічної пропозиційної логіки***:

$A_1$. **KaKap ≡ Kap** – (читається: «**a** *знає, що він знає, що* **p**», яке еквівалентне висловлюванню «**a** *знає, що* **p**»);



$A_2$. **BaBap ≡ Bap** – (читається: «**a** *вважає, що він вважає, що* **p**», яке еквівалентне висловлюванню «**a** *вважає, що* **p**»);

$A_3$. **KaBap ≡ Bap** – (читається: «**a** *знає, що він вважає, що* **p**», яке еквівалентне висловлюванню «**a** *вважає, що* **p**»);

$A_4$. **BaKap ≡ Bap** – (читається: «**a** *вважає, що він знає, що* **p**», яке еквівалентне висловлюванню «**a** *вважає, що* **p**»);

$A_5$. **Kap → Bap** – (читається: «*якщо* **a** *знає, що* **p**», тоді «*він вважає, що* **p**»);

$A_6$. **Kap → p** – (читається: «*якщо* **a** *знає, що* **p**, *тоді* **p**», це означає, що «*якщо суб'єкт* **a** *знає, що* **p** *– істинне, тоді* **p** *дійсно істинне*»);

$A_7$. **KaKbp ≡ Kbp** – (читається: «*якщо* **a** *знає, що* **b** *знає, що* **p**», тоді «**b** *знає, що* **p**»);

$A_8$. **KaBbp ≡ Bbp** – (читається: «*якщо* **a** *знає, що* **b** *вважає, що* **p**», тоді «**b** *вважає, що* **p**»).

***Аксіоми 1-2*** виражають рефлексію інтелектуального суб'єкта про своє знання про певний об'єкт.

***Аксіоми 3-5*** встановлюють відношення між об'єктивним та суб'єктивним знанням. Якщо змішувати об'єктивне та суб'єктивне знання, інакше кажучи, знання та віру, тоді виникає, як відзначають логіки, когнітивний дисонанс – суперечність між об'єктивним та суб'єктивним знанням. Наприклад, інтелектуальний суб'єкт а вважає себе тим, ким він в дійсності не є.

***Аксіоми 1-6*** мають силу для тих контекстів, в яких йдеться про один інтелектуальний суб'єкт.

***Аксіоми 7-8*** мають силу для контекстів, в яких фігурують різні інтелектуальні об'єкти або декілька суб'єктів.

## 4. Семантика можливих світів для епістемічної пропозиційної логіки

Семантика епістмічної пропозиційної логіки розробляється для різних інтелектуальних суб'єктів – «***ідеально розумних суб'єктів***», «***реальних суб'єктів пізнання***» тощо з метою інтерпретації формалізованої системи знання. Інтерпретація епістемічної пропозиційної логіки задається через абстракцію – «***епістемічно можливий світ***». Якщо співставити алетично можливі світи з епістемічно можливими, то ***епістемічно можливий світ*** *є лише фрагментом логічно можливого світу*. Це пояснюється тим, що епістемічно можливі світи співставляються та є сумісими з тим, що знає носій, виразник епістемічного висловлювання. Це співставлення й визначає відношення досяжності **R**.

Епістемічно можливий світ специфікується чи співвідноситься з носієм епістемічного висловлювання. Тому ***у кожного суб'єкта своя множина епістемічно можливих світів***. Не існує такої множини можливих світів, які є спільними для різних суб'єктів. Іншими словами, множини епістемічно можливих світів різних суб'єктів повністю не співпадають.

***В епістемічній логіці термін «можливий світ» має такі значення***:

1) ***стан знання інтелектуального суб'єкта***;
2) ***епістемічно уявні світи***, іншими словами, моделі, які сумісні зі всім тим, що дійсно відомо інтелектуальному суб'єкту;
3) ***епістемічні альтернативи***, інакше кажучи, такі моделі, які будуються на підставі знання інтелектуального суб'єкта та які можуть суперечити дійсному стану знання.

Засобами семантики можливих світів оператор **«Ка»** (*«знаю, що...»*) визначається у такий спосіб: «**Кар** *є істинним у світі* **w**, *якщо тільки в альтернативному епістемічному світі* **w'p** *є істинним*».

### 5. Аналітико-таблична семантика для епістемічної пропозиційної логіки

Семантика епістемічної пропозиційної логіки може бути сформульована в термінах аналітико-табличної семантики. З цією метою вводяться аналітичні правила для епістемічних оперeторів:

**KT** $\dfrac{\mathbf{TwKap}}{\mathbf{Tw'p}}$

**KF** $\dfrac{\mathbf{FwKap}}{\mathbf{Fw'p}}$

**BT** $\dfrac{\mathbf{TwBap}}{\mathbf{Tw'p}}$



**BF** $\dfrac{\mathbf{FwBap}}{\mathbf{Fw'p}}$

де **w'** – будь-який епістемічний світ, який є досяжним із **w**, за умови **R(ww')**.

З'ясуємо, наприклад, чи є логічним законом епістемічної пропозиційної логіки така формула **Bap → p**. Будуємо аналітичну таблицю. Припускаємо, що досліджувана формула є завжди хибною:

| | | |
|---|---|---|
| **1. Fw Bap → p.** | | |
| **2. Tw Bap** | **Fw'p** | за правилом **→ F із 1.** |
| **3. Tw'p** | | за правилом **BT із 2.** |

При побудові підсумкової аналітичної таблиці враховано відношення між епістемічно можливими світами **w** та **w'**. Останній можливий світ є новим у побудованій таблиці, але умовою першого є «для кожного епістемічно можливого світу» й тому замість **w** можна використати будь-який світ, у тому числі й **w'**. Підсумкова таблиця має вигляд **{Fw'p, Tw'p}**. Отже, досліджувана формула є логічним законом для епістемічної пропозиційної логіки.

### 6. Синтаксис епістемічної пропозиційної логіки. Пропозиційне числення мінімальної логіки знання. Мінімальне пропозиційне числення логіки переконання

Пропозиційне числення мінімальної логіки знання містить аксіоми та правила виведення, у яких виражаються необхідні умови того, що оператор **КаА** дійсно педставляє знання.

***Аксіоми мінімальної логіки знання***:

**$К_1$. Ка (А → В) → (КаА → КаВ).** Ця аксіома показує, що суб'єкт усвідомлено використовує правило виведення I;

**$К_2$. КаА → А**: «*те, що відомо, є істинним*»;

**$К_3$. КаА → КаКаА**: «*якщо суб'єкту відомо, що* **А**, *тоді він знає, що йому відомо, що* **А**»;

**$К_4$. ~ КаА → Ка ~ КаА**: «*якщо суб'єкту невідомо, що* **А** *підтверджується, тоді він знає, що він не знає, що* **А** *підтверджується*».

***Правила виведення мінімальної логіки знання***:

I. $\dfrac{\mathbf{A \to B, A}}{\mathbf{B}}$

II. $\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{KaA}}$

***Мінімальна логіка переконання містить аксіоми***:

**$B_1$. ВаА ∧ Ва (А → В) → ВаВ;**

**$B_2$. ~ ВаА** (неправда): «*суб'єкт* а *не вірить у заперечення законів*»;

**$B_3$. ВаА → ВаВаА;**

**$B_4$. ~ ВаА → Ва ~ ВаА.**

***Правила виведення мінімальної логіки переконання***:

I. $\dfrac{\mathbf{A \to B, A}}{\mathbf{B}}$

II. $\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{BaA}}$

### *Література*


Жоль К.К. Логика. Введение в современную символическую логику. – К.: Стилос, 2000.

Ивлев Ю.В. Логика. – М.: Проспект, 2009.

Ішмуратов А.Т. Вступ до філософської логіки. – К.: Абрис, 1997.

Карамишева Н.В. Логіка. Пізнання. Евристика. – Львів: Астролябія, 2002.

Конверський А.Є. Логіка (традиційна та сучасна). – К.: ЦНЛ, 2004.

Ненашев М.И. Введение в логику. – М.: Гардарики, 2004.

Непейвода Н.Н. Прикладная логика. – Новосибирск: Изд-во УдГУ, 2004.

Символическая логика: Учебник / Под ред. Я.А.Слинина, Э.Ф.Караваева, А.И.Мигунова. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005.

Солодухин О.А. Логика. – Ростов-н/Д: Феникс, 2000.

Хоменко І.В. Логіка. – К.: Абрис, 2004.




Лекція 14

## Деонтична пропозиційна логіка

План лекції

1. **Визначення деонтичної пропозиційної логіки.**
2. **Логічна характеристика деонтичних висловлювань.**
3. **Мова деонтичної пропозиційної логіки.**
4. **Застосування логічних сполучників для деонтичних висловлювань.**
5. **Семантика можливих світів для деонтичної пропозиційної логіки.**
6. **Аналітико-таблична семантика для деонтичної пропозиційної логіки.**
7. **Логічний аналіз деонтичних парадоксів.**
8. **Логіка санкцій.**

Виклад лекції

### 1. Визначення деонтичної пропозиційної логіки

Термін «***деонтична логіка***» походить від грецького слова «*deon*», що в перекладі означає «***обов'язок***», «***правильність***». Звідси інша назва деонтичної логіки – «***логіка норм***».

***Деонтичну пропозиційну логіку можна визначити як розділ модальної логіки, де досліджуються властивості деонтичних висловлювань та їхні відношення у структурі міркувань.***

***Деонтичним висловлюванням називається модальне висловлювання, яке встановлює норму поведінки.*** Звідси ще одна його назва – «***нормативне висловлювання***».

Зазвичай деонтичні висловлювання виражаються за допомогою ***розповідних речень***, які містять ***нормативні слова*** «***обов'язково***», «***дозволено***», «***заборонено***», «***має***», «***може***», «***не повинен***», «***рекомендується***» тощо. Ці терміни виступають у ролі відмітної ознаки деонтичних висловлювань. Наприклад, «*Дозволено користуватися кредитною карткою*», «*Заборонено їхати на червоне світло*». Іншим способом подання деонтичних висловлювань є ***спонукальні речення***. Наприклад, «*Будьте уважні!*», «*Не чіпайте!*».

***Обов'язковість, дозволеність й забороненість*** можна назвати ***деонтичними значеннями нормативних висловлю-***

***вань*** (за аналогією із значеннями істинності описових висловлювань).

Вихідним поняттям деонтичної пропозиційної логіки є термін «***норма***» (від лат. ***norma*** – правило, взірець). ***Норми – це засновані на цінностях правила та очікування, які регулюють поведінку людей у суспільстві.***

Усі ***норми мають одну й ту ж саму структуру***, що містить у собі такі елементи:

1) характер;
2) зміст;
3) умови застосування;
4) суб'єкт.

***Характером норми є вказівка на дозвіл, заборону чи зобов'язання певної дії.***

***Змістом норми називається намір, прагнення, вчинок чи дія, яка повинна бути, може або не повинна бути виконана.***

***Умовою застосування норми є вказана у нормі ситуація, із настанням якої реалізується або може бути реалізована дія, що не передбачається даною нормою.***

***Суб'єктом норми є особа чи група осіб, яким адресована норма.***

***За характером примусу норми поділяються на правила, команди й власне норми.***

***Правила – це умови, яких необхідно дотримуватися, виконуючи якусь дію.*** Вони можуть виражати ***дозвіл***, якщо умова вказує на можливість дії, та ***вимогу***, коли умова вказує на необхідність діяти саме так, а не інакше. Прикладами правил є правила граматики, правила спортивних змагань, правила дорожнього руху.

***Команда – це наказ, строга вимога, дозвіл виконувати певну дію чи, навпаки, заборона виконання певної дії.*** Наприклад, «*Не сідати!*», «*Зачиніть двері!*». Команди інколи називають ***імперативними висловлюваннями*** чи ***імперативами*** (від лат. ***imperativus*** – наказовий).

***Власне норма виражає вимогу певної соціальної поведінки, соціальних дій на підставі належного***, інакше кажучи,



***того, що має, повинно бути. Власне норма поділяється на моральну та правову.***

***Моральні норми – це позаінституційно встановлені суспільством обов'язкові правила поведінки для тих чи інших соціальних груп.*** Вони формулюються у вигляді заповітів, заповідей, моральних кодексів. Прикладами моральних норм є вирази «*Не кради!*», «*Поважай старших*», «*Турбуйся про ближніх*».

***Правові норми – це встановлені державою як соціальним інститутом обов'язкові правила поведінки для суспільства загалом.*** Їхня інша назва – «***юридичні норми***». Прикладами правових норм є вирази «*Все, що законно, дозволено*», «*Кожний, хто звертається до суду, може мати адвоката*», «*Не можна вдруге порушувати одну й ту ж кримінальну справу*».

Хоча деонтичні висловлювання й встановлюють норми, ***потрібно розрізняти норми й деонтичні висловлювання***. Вважається, що ***норми – це висловлювання, в яких міститься деякий наказ***, а ***деонтичні висловлювання є висловлюваннями, що передають інформацію про норми, виражають акти приписування норм***. Норма є окремим випадком оцінки, а деонтичне висловлювання, відповідно, окремим випадком оцінного висловлювання, оскільки оцінки стосуються не тільки поведінки людини, а й об'єктів, котрі прямо не стосуються людської діяльності. На відміну від приписів, спрямованих на подальшу можливу поведінку людини, оцінки можуть стосуватися подій із будь-якої області часу, а також того, що не має часової характеристики.

***Залишається невирішеною проблема застосування до деонтичних висловлювань термінів «істинно» та «хибно».*** Одна точка зору полягає в тому, що деонтичні висловлювання не є ані істинними, ані хибними, але є виконуваними або невиконуваними. Істинність тут розглядається як окремий випадок виконуваності, а хиба – як окремий випадок невиконуваності. За іншою точкою зору, деонтичні висловлювання можуть мати істиннісний статус, наприклад, у тому разі, коли постає проблема правильності вираження у них відповідних норм.

Прибічники першої точки зору спираються на ***принцип Юма***, відповідно до якого, ***з описового висловлювання не виво-***

*диться деонтичне висловлюваня, оскільки неможливий логічний перехід від тверджень про факти зі словом «є» до тверджень про норми зі словами «має бути»*. Цей принцип базується на розрізненні описового та деонтичного висловлювання. Основою відміності між ними вважається неописовий характер норми, яка не описує, а приписує певний тип поведінки.

***Головними принципами деотичної пропозиційної логіки*** є принцип деонтичної повноти та принцип деонтичої несуперечності. ***Принцип деонтичної повноти*** визначається так: ***будь-яка дія або обов'язкова, або нормативно байдужа, або заборонена***. ***Принцип деонтичої несуперечності*** має таке формулювання: ***дія не може бути і обов'язковою (повинною), і забороненою***.

**2. Логічна характеристика деонтичних висловлювань**

Із будь-яким нормативним або деонтичним висловлюванням можна співставити паралельне йому описове або дескриптивне висловлювання, яке виражає зміст бажання чи команди. У зв'язку із цим ***за кожним нормативним (або деонтичним) висловлюванням треба вбачати два фактори***:

1) ***наказовий*** (або ***імперативний***) та
2) ***описовий*** (або ***дескриптивний***).

***Імперативний фактор демонструє, що деяка подія чи річ бажається або наказується, а дескриптивний характеризує бажану або наказувану дію чи річ. Саме дескриптивний фактор може бути виокремлений з імператива та представлений асерторичним висловлюванням***. Це дає змогу оцінити його як істинне, коли команда виконується, і хибним, коли цього немає. Іншими словами, необхідно враховувати різницю між нормою та її описом. Якщо норма нічого не описує, оскільки вона містить лише регулятиви людської поведінки й тому не може бути носієм оцінок «***істина***», «***хиба***», тоді опис норми оцінюється саме як істинний або хибний. Наприклад, візьмемо деонтичне висловлювання, яке випливає із «*Правил гри в шахи*»: «*Ферзь повинен ходити таким-то чином*». У цьому висловлюванні нічого не стверджується про дійсність, а лише вказується,



як себе повинна поводити конкретна шахова фігура на шаховому полі. Але, якщо підійти до цього висловлювання з іншого боку й побачити в цьому твердження, що певна шахова фігура повинна діяти належним чином відповідно до існуючих правил, тоді ця ситуація може бути оцінена в термінах «***істина***» або «***хиба***». І тут йдеться не про норму, а про її опис. Фактично це висловлювання треба читати так: «*Істинно, що за правилами гри в шахи, ферзь повиний ходити таким-то чином*».

***В залежності від характеру норм деонтичні висловлювання мають наступні різновиди***:

1) ***висловлювання про наявність або відсутність якогонебудь права***. Вони формулюються за допомогою нормативних слів «***дозволено***», «***заборонено***», «***правомірно***» тощо. Наприклад, «*Дозволено купувати квартири*», «*Заборонено читати чужі листи*»;
2) ***висловлювання про наявність або відсутність якогонебудь обов'язку***. Вони формулюються за допомогою нормативних слів «***обов'язково***», «***необхідно***», «***повинен***» та інших. Наприклад, «*Обов'язково дотримуватися законодавства*», «*Необхідно бути чесним*».

**3. Мова деонтичної пропозиційної логіки**

***Формалізація висловлювань з деонтичними модальностями*** здійснюється таким чином:

1) деонтичний оператор «***обов'язково***» позначається символом **O**;
2) деонтичний оператор «***дозволено***» – символом **P**;
3) деонтичний оператор «***заборонено***» – символом **F**;
4) деонтичний оператор «***байдуже***» – символом **I**;
5) висловлювання – символами **A, B, C, …** ;
6) пропозиційні зв'язки: $\sim, \wedge, \vee, \underline{\vee}, \rightarrow, \leftrightarrow$ ;
7) технічні знаки, якими є ліва та права дужки, кома: **( )** , .

Далі будуються ***формули***:

**OA** – означає «**A** *обов'язково*»;
**~ OA** – «**A** *не обов'язково*»;
**PA** – «**A** *дозволено*»;

~ **PA** – «**A** *не дозволено*»;
**FA** – «**A** *заборонено*»;
~ **FA** – «**A** *не заборонено*».

***Головними законами деонтичної пропозиційної логіки є***:

1) *Якщо* **A** *обов'язково, тоді* **A** *дозволено* (**OA → PA**);
2) *Якщо* **A** *заборонено, тоді* **A** *необов'язково* (**FA → ~ OA**);
3) **A** *не може бути обов'язковим та забороненим одночасно* (**~ (OA ∧ FA)**);
4) *Або* **A** *обов'язково, або* **A** *необов'язково* (**OA ⊻ ~ OA**);
5) *Якщо* **A** *заборонено, тоді* **A** *не дозволено* (**FA → PA**);
6) *Якщо* **A** *дозволено, тоді* **A** *не заборонено* (**PA → ~ FA**).

***Приклади теорем у деонтичній пропозиційній логіці***:

1) **O (A ∧ B) ↔ (OA ∧ OB)**;
2) **OA ↔ ~ F ~ A**;
3) **OA ↔ F ~ A**;
4) **F (A ∨ B) ↔ FA ∧ FB**;
5) **FA ∨ FB → F (A ∧ B)**.

## 4. Застосування логічних сполучників для деонтичних висловлювань

***Використання заперечення***. Логічний сполучник «*не*» застосовується до деонтичних висловлювань (норм-формулювань) ***двома способами***. Один служить для того, щоб виразити заперечення того факту, що існує норма, яка зафіксована у певному словесному виразі. Інший спосіб призначений для того, щоб перейти від фрази «*не є обов'язковим, що...*» до виразу «*дозволяється, щоб...*» й від фрази «*не дозволяється то, щоб...*» до виразу «*є обов'язковим, що не...*». Іншими словами, цей перехід є зсувом логічного сполучника з його місця перед нормою-формулюванням загалом на місце перед символами, які виражають зміст норми. Тільки при другому способі заперечення, що виражає деяку норму, отримують інше речення, яке також виражає норму. Запереченням зобов'язуючої норми із певним змістом є дозволяюча норма зі змістом, який суперечить змісту цієї норми (**P ~ p** є нормою-запереченням стосовно норми **Op**). Нормою-запереченням стосовно дозволяючої норми **Pp** є зобов'язуюча норма із суперечливим змістом – **O ~ p**.



***Використання кон'юнкції***. Логічний сполучник «***кон'юнкція***» в конструкції (**Pp ∧ Pq**) може функціонувати лише якщо конструкція використовується в дескриптивному модусі, іншими словами, для інформування або суб'єкта норм, або кого-небудь ще про існування двох дозволів. Але він не придатний для того випадку, коли ця ж конструкція використовується у прескриптивному модусі, інакше кажучи, втілює в собі нову норму, отриману із двох інших.

Подібна ситуація наявна й у випадку формули (**Op ∧ Pq**). Її можна витлумачити наступним чином: деяка річ є обов'язковою, а інша – дозволеною. Вона не утворює ***норми-«гібрида»*** із зобов'язуючої та дозволяючої норми. Таким чином, об'єднання формулювань норм за допомогою логічного сполучника кон'юнкції дає речення, яке констатує факт, який полягає у тому, що були введені (або вже наявні) норми, виражені цими формулюваннями.

***Використання диз'юнкції***. Розглянемо фразу «*повинно бути так, що* **p**, *або повинно бути так, що* **q**». Природний спосіб її розуміння вважати, що вона проголошує обов'язковим, щоб один із двох досліджуваних станів справи безумовно мав місце; але при цьому не повідомляється, до якого із них вона відноситься. Таким чином, не зрозуміло, яка ж саме норма була введена в дію. Це положення можна зрозуміти як норму, що повідомляє про те, як потрібно діяти так, щоб виконувався стан справ, описаний у висловлюванні за допомогою диз'юнкції (**p ∨ q**).

Розглянемо фразу «*може бути так, що* **p**, *або може бути так, що* **q**». Найприродніше розуміти її так, як повідомлено про те, що був даний дозвіл на щось одне із двох. Але її можна було би, й також неприродно використати як повідомлення дозволяючої норми зі змістом, що виражений шляхом диз'юнкції (**p ∨ q**).

***Використання імплікації***. За допомогою логічного сполучника імплікації виражається логіко-нормативне випливання норм. Відношення логіко-нормативного випливання між нормами пов'язане з відношенням логічного випливання між змістом відповідних норм.

***Логіко-нормативне випливання відрізняється від звичайного логічного випливання.*** Норми не є ні істинними, ні хибними. Відповідно логіко-нормативне випливання не може означати (як це має місце у випадку звичайного логічного випливання), що якщо одна норма є істинною, тоді й друга з необхідністю істинна. ***Логіко-нормативне випливання означає лише, що норма або деяка множина норм є несумісною із запереченням деякої норми.***

У всіх випадках, коли логічні сполучники використовуються для того, щоб побудувати складні конструкції із норм-формулювань (або складні нормативні висловлювання), й у тих випадках, коли зсув логічного сполучника з точки зору інтуїції допускається (не спотворює значення), й у тих випадках, коли він не вважається прийнятним, складні конструкції піддаються природній інтерпретації – в смислі виразу ними істинних чи хибних суджень про факти, які полягають у тому, що наявні (існують, були введені в дію, входять в певний «кодекс» тощо) такі-то й такі-то **О-*норми*** і / або **Р-*норми***. Таким чином, основним способом використання логічних сполучників в області деонтичної пропозиційної логіки є побудова складних норм-формулювань (які виражають певні факти про діючі норми), а не формулювання нових норм.

**5. Семантика можливих світів для деонтичної пропозиційної логіки**

***Загальна концепція семантики можливих світів у деонтичному варіанті*** конкретизується ***у двох аспектах***:

1) можливий світ – це деонтичний світ;
2) відношення досяжності – це відношення між світом, в якому «створюється» деонтичний світ, й цим деонтичним світом.

В решті аспектів, як за синтаксисом, так і за семантикою, деонтична пропозиційна логіка становить варіант алетичної пропозиційної логіки.

Поняття деонтичного світу веде своє походження від ***І. Канта***. Він вважається автором класичного тлумачення можливого світу як деонтичного.



Як зазначав І. Кант, моральний світ – це, в певному розумінні, ідеальний світ, філософська утопія, потрактована з моральної точки зору. Цей моральний світ є одним із варіантів можливого світу, де все ідеально діє та взаємодіє. З точки зору філософії дії, деонтичний світ – це світ, який нам хотілось би мати.

***Деонтичний світ – поняття більш абстрактне, ніж світ норм, цінностей та бажань. Деонтичний світ – це конкретизація можливого світу в напрямі нормативного «бачення» реальності.***

***З погляду гуманітарної науки, деонтичний світ*** можна розуміти ***як зведення законів***, кодекс чи конституцію тощо. Це розуміння пов'язане із соціальною концепцією норми як засобу опису бажаної реальності, опису деякої конструкції, феноменологічної реальності.

***Під деонтичним світом можна розуміти не тільки дещо філософське абстрактне, але й достатньо конкретне*** (культурні зразки народного досвіду, звичаї, звід законів, створений парламентом, тощо). Наприклад, конституція – це опис ідеальної держави, якою їй належить бути, опис належних дій та вчинків президента, міністрів й т.ін.

***І. Кант*** постулював існування тільки ***одного «модального світу»***. Однак ***у деонтичній пропозиційній логіці припускається, що їх може бути багато*** (безконечна множина моральних кодексів – описів моральних світів). Декілька деонтичних світів – ***деонтичні альтернативи*** – можна трактувати, наприклад, як різні проекти конституцій, що пропонуються на розгляд у парламенті.

**6. Аналітико-таблична семантика для деонтичної пропозиційної логіки**

Аналітичні правила для деонтичних операторів формулюються, виходячи із загального модального смислу:

$$\frac{\mathbf{T\,w\,O\,A}}{\mathbf{T\,w'\,A}} \qquad \frac{\mathbf{F\,w\,O\,A}}{\mathbf{F\,w'\,A}}$$

$$\frac{\mathbf{T\,w\,P\,A}}{\mathbf{T\,w'\,A}} \qquad \frac{\mathbf{F\,w\,P\,A}}{\mathbf{F\,w'\,A}}$$

У правилах **FO** й **TP**, як і раніше в правилах для алетичних модальностей змінна **w'** – будь-який світ належного, який є досяжним із **w**, інакше кажучи, нове, яке не зустрічається вище формули у тій галузці, до якої воно належить.

Приклад побудови аналітичної таблиці в деонтичній пропозиційній логіці. Проаналізуємо формулу **OA → PA**:

1. **Fw OA → PA;**
2. **Tw OA;**
3. **Fw ~ O ~ A;**
4. **Tw O ~ A;**
5. **Tw' ~ A         R w w';**
6. **Fw' A;**
7. **Tw' A із 2.**

Таблиця замкнена, отже, формула **OA → PA** є загальнозначимою в деонтичній пропозиційній логіці.

### 7. Логічний аналіз деонтичних парадоксів

У деонтичній пропозиційній логіці виводяться деякі ***твердження, які неприйнятні з інтуїтивної прагматичної точки зору – деонтичні парадокси.***

***Парадокс «проти обов'язку»***:

1) «*Джон грабує Сміта*» (**A**);
2) «*Джон повинен не грабувати Сміта*» (**O ~ A**);
3) «*Якщо Джон грабує Сміта, тоді Джон повинен бути покараний за здирництво Сміта*» (**A → OB**);
4) «*Повинно бути так, що якщо Джон не грабує Сміта, тоді він не карається за здирництво Сміта*» (**O (~ A → ~ B)**).

Але **1** і **3** дають **OB**, а з **2** і **4** випливає **O ~ B**. Одержуємо суперечність.

***Парадокс «доброго Самаритянина»***:

1) «*Повинно бути так, що Самаритянин допомагає людині, яка пограбована*» (**OA**);
2) Із висловлювання «*Самаритянин допомагає людині, яка була пограбована*» формально випливає «*Хтось був пограбований*» (**A → B**);



Внаслідок цього маємо:

3) «*Повинно бути так, що хтось був пограбований*» (**OB**). А це висловлювання становить абсурд.

Наведений парадокс спрямований проти принципу: «*Якщо з* **A** *випливає* **B**, *тоді з* **OA** *випливає* **OB**».

Деякі формули, які є теоремами, стають змістовно парадоксальними. Їх називають ***парадоксами деонтичного випливання***. Наприклад, формулу **~ A → (A →OB)** можна інтерпретувати так: «*Те, що не існує, зобов'язує робити все, що завгодно*». Ще один приклад парадоксів деонтичного випливання. Формула **PA → P (A∨B)** при смисловій інтерпретації може означати, що «*Якщо дозволено палити, тоді дозволено палити або убивати*». Щоб не виникало таких парадоксів, логіки пропонують послабити деонтичні правила виведення й системи відповідних аксіом, які не дозволяли би обґрунтовувати парадоксальні, з точки зору змістовності, теореми.

### 8. Логіка санкцій

***Головна функція норми – це регулювання поведінки людей***. Звідси ***проблема для деонтичної пропозиційної логіки, що полягає у побудові такої деонтичної системи, яка б відповідала реальності***. Варіант розв'язання цієї проблеми запропонував ***А. Р. Андерсон***, виходячи із притаманної алетичній модальності властивості бути відповідною реальності. Він виразив деонтичний оператор **O** за допомогою алетичного (□) й константи **S**, що означає «***санкцію***» або «***штраф***».

*Дія* **A** *є обов'язковою, якщо невиконання* **A** *обов'язково тягне* **S**.

*Дія* **A** *є забороненою, якщо виконання* **A** *обов'язково спричинює* **S**.

*Дія* **A** *дозволена, якщо* **A** *може бути виконано без накладання штрафу (за умови* **~ S**):

**OA ≡ □ ( ~ A → S);**

**FA ≡ □ (A → S);**

**PA ≡ (A ∧ ~S).**

210,00

Числення Sd одержуємо, доповнюючи алфавіт модального S-числення константою S, здійснюючи відповідне перевизначення класу формул й додаючи аксіому ~ □ S, яка стверджує, що «покарання можна уникнути».

*Література*

Жоль К.К. Логика. Введение в современную символическую логику. – К.: Стилос, 2000.
Ивлев Ю.В. Логика. – М.: Проспект, 2009.
Ішмуратов А.Т. Вступ до філософської логіки. – К.: Абрис, 1997.
Карамишева Н.В. Логіка. Пізнання. Евристика. – Львів: Астролябія, 2002.
Конверський А.Є. Логіка (традиційна та сучасна). – К.: ЦНЛ, 2004.
Ненашев М.И. Введение в логику. – М.: Гардарики, 2004.
Непейвода Н.Н. Прикладная логика. – Новосибирск: Изд-во УдГУ, 2004.
Символическая логика: Учебник / Под ред. Я.А.Слинина, Э.Ф.Караваева, А.И.Мигунова. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005.
Солодухин О.А. Логика. – Ростов-н/Д: Феникс, 2000.
Хоменко І.В. Логіка. – К.: Абрис, 2004.



Навчальне видання

***Гнатюк Ярослав Степанович***

# Сучасна символічна логіка

Лекційний курс

Підп. до друку 23.04.2010. Формат 60x84/16.
Папір офс. Друк різографічний. Гарн. Times New Roman.
Умовн. др. арк. 9,3. Наклад 100.

Видавець та виготівник «Симфонія форте»
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Крайківського, 2
тел. (0342) 77-98-92